



HAL
open science

Quelques notions d'irrégularité uniforme et ponctuelle : le point de vue ondelettes

Marianne Lesourd Clausel

► To cite this version:

Marianne Lesourd Clausel. Quelques notions d'irrégularité uniforme et ponctuelle : le point de vue ondelettes. Mathématiques générales [math.GM]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0062 . tel-00462162

HAL Id: tel-00462162

<https://theses.hal.science/tel-00462162v1>

Submitted on 8 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Marianne CLAUSEL

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS XII

Spécialité : Mathématiques

Sujet :

**Quelques notions d'irrégularité uniforme et
ponctuelle : le point de vue ondelettes**

Soutenue le 27 novembre 2008 devant le jury composé de

M.Patrice Abry	Examineur
Mme Anne Estrade	Examinatrice
M. Yanick Heurteaux	Rapporteur
M.Jacques Istas	Rapporteur
M.Stéphane Jaffard	Directeur de thèse
M.Yves Meyer	Examineur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Stéphane Jaffard pour son aide sur le plan scientifique mais aussi pour sa gentillesse et sa disponibilité. Je lui suis très redevable du temps qu'il a consacré à me faire profiter de son expérience. Ce travail doit beaucoup à ses conseils avisés mais bien plus encore à ses encouragements et à son soutien sans faille qui ne se sont jamais démentis durant ces quatre années.

Je souhaite aussi adresser un grand merci à mes deux rapporteurs que sont Yanick Heurteaux et Jacques Istas. Leur lecture attentive et leurs remarques judicieuses m'ont été très utiles et m'ont suggéré plusieurs prolongements à mes travaux.

Je suis extrêmement honorée, qu'avec autant de bienveillance, Yves Meyer ait accepté d'être mon président de jury de thèse. Les ondelettes sont au coeur de ce travail et je suis très flattée qu'Yves Meyer ait bien voulu s'y intéresser.

Je suis aussi très heureuse de pouvoir compter Anne Estrade parmi les membres de mon jury. La deuxième partie de cette thèse, sur les champs aléatoires gaussiens, lui doit énormément. Qu'il me soit donc permis de la remercier, ainsi bien sûr que Laure Coutin, pour le temps qu'elles m'ont consacré toutes deux sans compter. Je suis donc très contente qu'Anne Estrade puisse assister à ma soutenance de thèse et voir ainsi l'aboutissement de mon travail.

Enfin je remercie beaucoup Patrice Abry, d'avoir répondu si volontiers à mon invitation. J'avais déjà eu l'occasion de le rencontrer au SCAM et je suis très heureuse qu'il fasse partie de mon jury.

Ce travail de thèse a été aussi pour moi l'occasion de rencontres et de collaborations fructueuses. C'est ainsi pour moi un très grand plaisir d'adresser de chaleureux remerciements à Béatrice Vedel. J'ai adoré nos disputes joyeuses sur msn pour boucler nos intros et encore plus apprécié les soirées crêpes et la découverte des rivages vannais sous le vague prétexte d'un article à peaufiner. J'espère que cela n'est que le début de nombreux articles et surtout de nombreuses soirées découlant naturellement du besoin de les rédiger. Je remercie aussi Samuel Nicolay avec qui j'ai découvert les joies de l'analyse multifractale faible et des fonctions de Weierstrass. Grace à lui j'ai appris qu'on pouvait encore envisager de recruter dans une équipe de foot Fabien Barthez (ce qui est exceptionnel).

Le SCAM—dont j'ai vu la naissance au début de ma thèse—a été aussi l'occasion pour moi d'assister à de nombreux exposés passionnants et aussi de nombreux échanges. Je tiens à en remercier les organisateurs : Jean-Marie Aubry et Stéphane Seuret—que je remercie aussi pour ses conseils mathématiques (et autres) ainsi que son aide qu'il ne m'a jamais ménagée. Je remercie aussi les gens dont j'ai eu l'occasion de faire la connaissance au SCAM : bien sûr Antoine Ayache—qui a témoigné beaucoup d'intérêt pour mes travaux et m'a donné de nombreuses idées toutes judicieuses, Pierre Bertrand dont les travaux communs avec Jean Marc Bardet ont été pour moi source d'inspiration avec j'ai pu avoir des échanges extrêmement intéressants, Alexandre Brouste, Yann Demichel (compagnon de piscine à bulles, adepte par ailleurs de la dimension de boîte), Chlotilde Melot ('grande soeur' que je remercie tout par-

ticulièrement) et bien sûr Pierre Chainais qui a été une mine d'idées et m'a apporté mains éclairages sur mon travail, il a par ailleurs participé à ma thèse en réalisant pour moi des simulations numériques de films aléatoires. Je remercie aussi la communauté du Brownien Fractionnaire : Jean-Marc Bardet, Serge Cohen et Céline Lacaux notamment.

Je veux en outre remercier le personnel scientifique et administratif du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées de l'Université Paris 12, notamment Frank Paccard et Colette Guillopé, qui ont toujours fait en sorte que je dispose d'excellentes conditions de travail. Je remercie aussi entre autres Benoit Daniel, Chlotilde Fermanian, Cyril Odasso, Frédéric Charve, Julien Brémont, Laurent Mazet, Rejeb Hadiji, Jacques Printems—qui a participé à l'élaboration de cette thèse en simulant mes champs aléatoires exotiques— et bien sûr Marguerite Zani future maman à qui je souhaite tout le bonheur possible. Enfin je remercie très vivement tous ceux avec qui j'ai partagé le bureau des thésards et pu avoir moult discussions chaleureuses et passionnées : Arnaud et Aurélia membres de la 'famille multifractaliste' qui ont tous deux investi maintenant le sud de Paris et qui je l'espère n'oublieront pas leurs attaches cristoliennes, Anna, Fehti (tunisien adorable ayant migré pour trouver des italiennes avant le retour au bercail), Abdelattif (grand organisateur de pot qui nous manque bien sûr!!), Boris (avec qui j'ai eu de franches rigolades et dont une phrase mythique restera toujours dans la mémoire d'Olivier), Habib, Vidian, Saida (avec qui j'ai toujours été très heureuse de discuter), Pieralberto (italien chaleureux comme il se doit) et Zaynab.

Je souhaiterais aussi profiter de cette petite occasion qui m'est donnée pour remercier très chaleureusement mes collègues du département Mesures Physiques de l'IUT de Créteil avec en tout premier lieu Christian Cuesta, qui en tant que directeur de l'IUT m'a permis de faire cette thèse dans les meilleures conditions possibles et notamment de bénéficier d'aménagement de services. Je tiens aussi à cet égard à remercier Bénédicte Faure chef du département MP qui m'a aidé au mieux à combiner enseignement et recherche.

Mais aussi et bien évidemment, je ne saurais oublier tous mes autres collègues grâce à qui j'ai un vrai et réel plaisir à enseigner en Mesures Physiques : Benjamin (petit carcassonnais à qui je souhaite longue vie chez nous), Cécile-Marie (co-bureau absolument adorable ayant pour seul défaut de parler anglais : fréquent chez les anglicistes), Charles (à qui je passe le bonjour ainsi qu'à son fils Noah), Christine, Claude, Doïna (pilier du département sans qui rien ne serait..), Françoise (avec qui j'ai vécu la grande aventure inoubliable de l'alternance), Frédéric (collègue et bien sûr avant tout ami que je retrouve toujours avec énormément de plaisir dans la salle café même en cas de panne de café à la pause), Gilles (à qui je fais deux vraies bises sur les deux joues), Gérard (qui a toujours suivi mon travail avec intérêt et qui en tant que co-TD m'a toujours filé un coup de main en cas de pépin), Lassaad, Laurent (dont j'apprécie et l'accent du sud et le foie gras qu'il ramène à Noël), Laurent (Allibert), Jean-Noël, Jean-Pierre (autre accent du sud d'une région particulièrement bien choisie..), Michèle (qui m'avait vu débiter ma thèse et qui était vraiment une très bonne copine), Nicolas, Régis (autre co-bureau causant lui analyse de Fourier et signal), Vincent (petit nouveau à qui je souhaite la bienvenue) et Yann (dit le Chimiste—autres surnoms disponibles : se renseigner—qui lui aussi je l'espère va rester un bon moment dans le département).

Un grand merci aussi à ma famille et à mes amis qui ont tous suivi ma thèse du début à la fin et m'ont tous témoigné à leur manière leur intérêt pour mon travail de recherche : mes parents, mes beaux-parents, Bruno, Marie, Elsa, ma grand mère mais aussi Rabbia, sihing émérite et Nadia qui m'a beaucoup touchée en venant à ma thèse.

Enfin et avant toute chose, ces dernières lignes sont pour mon mari Olivier, qui a toujours été présent à mes côtés que ce soit dans les petits ou dans les grands moments de la vie.

Ce travail n'aurait aucun sens sans son affection et sa confiance indéfectible. Cette thèse lui est dédiée ainsi qu'à notre fils, le petit Romain.

Table des matières

1	Introduction	12
2	Une notion d'irrégularité uniforme	20
2.1	Introduction	20
2.2	Notion de régularité Höldérienne uniforme forte	23
2.2.1	Définitions	23
2.2.2	Régularité Höldérienne forte et ondelettes	26
2.3	Fonctions uniformément irrégulières	28
2.3.1	Une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^p	28
2.3.2	Une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^∞	30
2.3.3	Résultats d'inclusions entre les ensembles $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$	32
2.4	Critères ondelettes d'irrégularité uniforme	34
2.4.1	Deux critères ondelettes plus généraux	36
2.4.2	Optimalité des hypothèses et de la correction logarithmique dans les critères ondelettes	37
2.4.3	Preuve des critères ondelettes	41
2.5	Quelques exemples classiques de fonctions uniformément irrégulières	52
2.5.1	Fonctions de type Weierstrass	54
2.5.2	Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes	57
2.5.3	Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélés	60
2.5.4	Faible corrélation des coefficients d'ondelettes et processus fortement localement non déterministes	61
2.6	Des séries d'ondelettes dont l'exposant d'irrégularité uniforme diffère de l'exposant de régularité uniforme	66
2.6.1	Un premier exemple de séries d'ondelettes dont l'exposant d'irrégularité uniforme ne coïncide pas avec l'exposant de régularité uniforme	67
2.6.2	Une famille de séries d'ondelettes lacunaires	68
2.7	Algèbres d'opérateurs et irrégularité uniforme	71
2.7.1	Un résultat de stabilité	72
2.7.2	Dérivation, intégration fractionnaire et régularité Höldérienne uniforme faible	80
2.7.3	Hypoellipticité des opérateurs elliptiques pour la régularité uniforme faible	82

3	Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire	85
3.1	Introduction	85
3.2	Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques	87
3.2.1	Définition du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques	87
3.2.2	Régularité des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles	89
3.2.3	Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique	92
3.3	Un exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire non dyadique .	93
3.3.1	Espaces tangents et champs tangents	94
3.3.2	Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire particulier admettant en tout point plusieurs champs tangents	95
3.4	Démonstration de la proposition 3.2.6	96
3.4.1	Estimation de la corrélation des coefficients d'ondelettes du MBFIED	97
3.4.2	Démonstration de la proposition 3.2.6	98
3.5	Démonstration de la proposition 3.2.7	100
3.6	Démonstration de la proposition 3.3.4	101
4	Les différentes notions de régularité ponctuelle	104
4.1	Introduction	104
4.2	Régularité ponctuelle forte	106
4.2.1	Espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$	106
4.2.2	Equivalence définition polynomiale et différences finies	107
4.2.3	Régularité ponctuelle forte et ondelettes	111
4.3	Notion de fonction anti-Höldérienne. Régularité ponctuelle Höldérienne faible	111
4.3.1	Ensembles $I^\alpha(x_0)$ et $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$	111
4.3.2	Résultats d'inclusions entre les ensembles $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$	113
4.4	Ondelettes et régularité ponctuelle faible	114
4.4.1	Fonctions anti-Höldériennes et ondelettes	114
4.4.2	Appartenance aux ensembles $I_\theta^M(x_0)$ et ondelettes	115
4.4.3	Un contre exemple à la réciproque de la proposition 4.4.3	116
4.4.4	Un cas particulier important	120
4.4.5	Preuve des critères ondelettes d'irrégularité ponctuelle	122
4.5	Résultats prévalents d'irrégularité	127
4.5.1	Rappels sur la notion de prévalence	128
4.5.2	Résultats prévalents d'irrégularité	129
4.6	Régularité ponctuelle faible et séries trigonométriques	130
4.6.1	Régularité ponctuelle faible et ondelettes de Gabor	131
4.6.2	Un critère d'irrégularité pour les séries trigonométriques	134
4.6.3	Le cas particulier de certaines séries trigonométriques de type Weierstrass	136
4.7	Irrégularité ponctuelle de quelques fonctions classiques	136
4.7.1	Perturbation d'une série d'ondelette	137
4.7.2	D'autres fonctions de type Weierstrass	137
4.7.3	Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes	139
4.7.4	Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélés	140

5	Au delà des fonctions fortement mono-Höldériennes	141
5.1	Introduction	141
5.2	Caractérisation de l'ensemble des exposants de Hölder supérieur des fonctions continues	142
5.2.1	Une fonction de type Weierstrass à exposant de Hölder prescrit	142
5.2.2	Le cas des fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder inférieur et supérieur coïncident en tout point	144
5.2.3	Le cas des fonctions dont l'exposant de Hölder inférieur et supérieur ne coïncident pas forcément en tout point	147
5.3	Rappels sur le formalisme multifractal faible	150
5.3.1	Une notion de dimension	150
5.3.2	Le formalisme multifractal fort et la méthode des coefficients dominants. Le formalisme multifractal faible	151
5.4	Une fonction pour laquelle le spectre multifractal fort et faible diffère	153
5.5	Construction d'une classe de séries d'ondelettes vérifiant le formalisme multifractal	157
5.5.1	Quelques résultats sur l'analyse multifractale des mesures	158
5.5.2	Séries et mesures multifractales	159
5.5.3	Une classe de séries d'ondelettes vérifiant à la fois le formalisme multifractal fort et faible	161
6	Un Mouvement Brownien Multifractionnaire lacunaire	166
6.1	Définition du Mouvement Brownien Multifractionnaire à infinité d'échelles	167
6.2	Quelques critères de régularité Höldérienne supérieure	168
6.2.1	Quelques critères de régularité Höldérienne inférieure	168
6.2.2	Deux critères de Régularité Höldérienne supérieure	169
6.2.3	Démonstration de la proposition 6.2.3	170
6.2.4	Démonstration de la proposition 6.2.4	172
6.3	Deux exemples de Mouvements Browniens Multifractionnaires à infinité d'échelles	173
6.3.1	Le cas non lacunaire d'un Mouvement Brownien Multifractionnaire généralisé	173
6.3.2	Le cas d'un Mouvement Brownien Multifractionnaire lacunaire	180
7	Etude de la régularité de champs gaussiens anisotropes	184
7.1	Introduction	184
7.2	Construction explicite de champs gaussiens vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle	186
7.2.1	Notion d'autosimilarité matricielle. Résultats d'existence	186
7.2.2	La notion de pseudo-norme	188
7.2.3	Construction explicite de densités spectrales admissibles	189
7.2.4	Densités spectrales équivalentes et régularité des trajectoires	194
7.3	Espaces de Besov anisotropes	198
7.4	Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie	200
7.4.1	Partie diagonalisable réelle d'une matrice	201
7.4.2	Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'exposant du champ	202
7.4.3	Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie des espaces d'analyse	202
7.5	Résultats d'optimalité, régularité locale des trajectoires du champ	203

7.5.1	Un résultat de continuité	203
7.5.2	Deux résultats d'optimalité	204
7.5.3	Régularité locale du champ X_{E_0, H_0} dans les espaces de Besov anisotropes associés à E_0	205
7.5.4	Des résultats de régularité des trajectoires du champ X_{E_0, H_0} dans des espaces de Besov anisotropes généraux	205
7.6	Compléments et preuves	207
7.6.1	Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie	207
7.6.2	Régularité locale dans les espaces de Besov anisotropes du champ étudié	213
7.6.3	Preuve des résultats de régularité dans les espaces de Besov anisotropes avec une anisotropie différente de celle du champ étudié	216
7.6.4	Démonstration des deux résultats d'optimalité	217
7.6.5	Démonstration du résultat de continuité	218
8	Champs Gaussiens autosimilaires par rapport à un groupe	222
8.1	Introduction	222
8.2	Quelques exemples de champs gaussiens connus autosimilaires	227
8.2.1	Un champ vérifiant une relation d'autosimilarité classique : le Mouvement Brownien Fractionnaire	227
8.2.2	Un champ vérifiant simultanément plusieurs relations d'autosimilarité toutes découplées : le Drap Brownien Fractionnaire (DBF)	228
8.2.3	Les champs vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle	229
8.3	Présentation de la démarche	231
8.3.1	Un exemple de champ vérifiant des relations d'autosimilarité matricielles simultanées	231
8.3.2	Présentation de la démarche	233
8.4	Présentation des résultats obtenus	236
8.4.1	Rappels sur la décomposition de Jordan additive complète	236
8.4.2	Les hypothèses faites sur les matrices E_1, \dots, E_m	237
8.5	Réécriture du problème considéré	238
8.5.1	Notion d'autosimilarité par rapport à un groupe	238
8.5.2	Réécriture du problème à l'aide de la notion d'autosimilarité par rapport à un groupe	239
8.6	La construction du champ recherché	241
8.6.1	La définition d'une densité spectrale	241
8.6.2	Construction de directions de renormalisation	244
8.6.3	Construction d'un champ gaussien à accroissements rectangulaires stationnaires \mathcal{A} autosimilaire de coefficient χ	247
8.7	Démonstrations	249
8.7.1	Démonstration de la proposition 8.6.10	249
8.7.2	Démonstration de la proposition 8.6.13	250
8.7.3	Démonstration de la proposition 8.6.18	251
8.7.4	Démonstration de la proposition 8.6.19	252

A	Décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$	254
A.1	Définition de la décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$. . .	254
A.2	Démonstration de la proposition A.1.1	255
A.3	Un résultat de réduction simultané	257
B	Rappels sur la mesure de Haar	259
B.1	Quelques définitions	259
B.2	Un lemme de changement de variable	260
B.3	Mesure de Haar d'un groupe commutatif à m paramètres	260
B.3.1	Isomorphisme entre groupe commutatif à m paramètres et $(\mathbb{R}_+^*)^m$. .	260
B.3.2	Intégration sur un groupe à m paramètres \mathcal{A}	262
C	Estimations de normes matricielles	263
C.1	Un lemme d'estimation dans le cas des groupes à un paramètre	263
C.2	Le cas des groupes à m paramètres	264

Chapitre 1

Introduction

L'analyse de la régularité de fonctions est un outil très utilisé dans bien des domaines des mathématiques et de la physique. Dès le début du vingtième siècle, les mathématiciens se sont intéressés à des fonctions ayant une faible régularité en chaque point. La problématique était initialement de définir des fonctions continues nulle part dérivables. On peut citer les exemples les plus connus que sont la fonction de Weierstrass introduite par Weierstrass au milieu du dix-neuvième siècle, dont la régularité a été étudiée par Hardy au début du vingtième siècle et la fonction de Takagi introduite au début du vingtième siècle. Au départ, objets d'étude pour les mathématiciens, les fonctions continues nulle part dérivables se sont révélés avec notamment la définition du Mouvement Brownien dans les années 1900 – 1930 un sujet d'intérêt crucial pour les physiciens.

Une des notions de régularité qui a été la plus étudiée est celle de régularité Höldérienne. On dit qu'une fonction f bornée définie sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{C} est uniformément Höldérienne d'exposant $\alpha \in (0, 1)$ sur \mathbb{R}^d si pour une certaine constante positive C_0

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2, |f(x) - f(y)| \leq C_0 |x - y|^\alpha.$$

Cette notion a permis d'étudier de manière fine les propriétés de régularité de certaines fonctions canoniques : séries trigonométriques par exemple ou trajectoires de champs aléatoires classiques comme le Mouvement Brownien, ou plus généralement le Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF). On sait ainsi que presque sûrement les trajectoires du MBF $\{B_H(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'indice de Hurst $H \in (0, 1)$ vérifient :

$$(1.0.1) \quad \exists C_1 > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |B_H(x) - B_H(y)| \leq C_1 |x - y|^H \sqrt{\log(|\log(|x - y)|)|}.$$

Les trajectoires de MBF d'indice de Hurst H sont donc ainsi uniformément Höldérienne sur $[0, 1]$ d'exposant $H - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On peut néanmoins souligner que la notion d'irrégularité associée à la régularité Höldérienne est une notion très faible. En effet, une fonction ne sera uniformément Höldérienne que si ses accroissements $|f(x) - f(y)|$ sont contrôlés à toutes les échelles. A contrario donc, la non régularité Höldérienne d'une fonction bornée est simplement impliquée par l'existence d'une suite d'échelle particulière (r_n) pour laquelle il existe des accroissements grands. Or dans bien des cas classiques, les propriétés d'irrégularité d'une fonction peuvent être bien plus fortes. On peut juste revenir sur l'exemple du MBF et

rappeler que celui ci vérifie la propriété d'irrégularité beaucoup plus forte suivante :

$$(1.0.2) \quad \exists C_2 > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, \sup_{(u,v) \in [x,y]^2} |B_H(u) - B_H(v)| \geq C_2 \frac{|x - y|^H}{\sqrt{\log(|\log(|x - y|)|)}}.$$

Les trajectoires du MBF sont ainsi uniformément anti-Höldériennes d'exposant $H + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. On rappelle qu'un grand nombre de modèles vérifient des propriétés très semblables : il s'agit notamment des fonctions de type Weierstrass, des processus localement non déterministes introduits dans les années 70 par S.Bermann et des champs fortement localement non déterministes introduits dans les années 80 – 90 par J.Cuzick. De nombreux auteurs se sont attachés à construire puis à décrire des fonctions vérifiant simultanément des propriétés de régularité et d'irrégularité uniforme du type 1.0.1 et 1.0.2, notamment à cause des propriétés de type 'fractal' de ces objets. Par ailleurs, la notion de régularité Höldérienne ne parvient à rendre compte que de manière imparfaite des propriétés de régularité de fonctions ou de champs aléatoires anisotropes possédant des directions privilégiées par exemple.

Ainsi la problématique de cette thèse est double. Il s'agit tout d'abord, d'"inverser" la notion de régularité usuelle pour introduire une notion d'irrégularité (uniforme ou ponctuelle) permettant de traduire le fait qu'une fonction peut avoir des 'grands accroissements' à toutes les échelles. Enfin, il s'agit d'étudier des exemples de champs aléatoires où des propriétés de régularité directionnelle apparaissent.

On envisagera tout au long de cette thèse deux points de vue : celui de la régularité (ou de l'irrégularité) uniforme et celui de la régularité (ou de l'irrégularité) ponctuelle. La nécessité d'introduire des outils pour décrire des fonctions dont la régularité ou l'irrégularité varie –parfois très fortement– d'un point à un autre est apparue au milieu des années 1980 et a donné lieu au développement de l'analyse multifractale. La motivation initiale vient de l'étude des phénomènes de turbulence. Le perfectionnement des techniques d'expérimentation au milieu des années 1980 a en effet permis d'obtenir en soufflerie des enregistrements très précis de la vitesse d'un écoulement turbulent. Les signaux ainsi mesurés paraissent non seulement très irréguliers mais leur irrégularité semble aussi varier brutalement d'un point à l'autre. Ces observations sont en contradiction avec la théorie de la turbulence homogène et isotrope introduite par Kolmogorov en 1941, selon laquelle la vitesse de l'écoulement devrait avoir partout la même irrégularité. C'est dans ce contexte qu'est apparue la nécessité d'étudier des signaux non uniformément réguliers dans un nouveau cadre celui de l'analyse multifractale. Formalisée par G. Parisi et U. Frisch, l'analyse multifractale devait à l'origine permettre d'étudier la complexité des signaux de turbulence nouvellement mesurés et d'introduire une méthode pour les classifier. Avec le développement d'outils numériques, l'analyse multifractale a par la suite trouvé de nombreuses applications dans des domaines aussi variés que l'astrophysique, la géophysique, la biologie, le traitement d'image ou les télécommunications.

D'un point de vue plus théorique, la régularité d'une fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ en un point x de \mathbb{R}^d se mesure à l'aide de son exposant de Hölder $h_f(x)$. Il s'agit du supremum de l'ensemble des réels $\alpha > 0$ tels que f est $\mathcal{C}^\alpha(x)$, c'est-à-dire tels qu'il existe deux réels strictement positifs C et R et un polynôme de degré au plus $[\alpha]$ tel que

$$\forall r \leq R, \forall x, |x - x_0| \leq r, |f(x) - P_{x_0}(x)| \leq Cr^\alpha.$$

Au vu de ce qui se passe en turbulence, on s'attend généralement à ce que les ensembles iso-Höldériens $E_\alpha = \{x, h_f(x) = \alpha\}$ soient des ensembles fractals. Une façon naturelle de rendre compte de leur taille consiste alors à déterminer leur dimension de Hausdorff, notée \dim . La fonction $d_f : \alpha \mapsto \dim(E_\alpha)$ appelée spectre de singularité de la fonction f , joue donc un rôle central en analyse multifractale. En outre, on appelle fonction multifractale toute fonction dont les ensembles iso-Höldériens E_h sont non vides pour α parcourant au moins un intervalle d'intérieur non vide. L'objet principal de l'analyse multifractale a donc consisté à étudier, puis à générer des modèles de fonctions multifractales. On peut citer comme exemples de fonctions multifractales la fonction de Riemann

$$\mathcal{R}(x) = \sum_n \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

introduite par Riemann pour répondre à la question de l'existence de fonctions continues nulle part dérivables. Cette fonction qui est en fait dérivable en certains rationnels a été étudiée par S.Jaffard dans [Jaf96] qui a montré que cette fonction est multifractale et a calculé son spectre de singularité. D'autres exemples de fonctions multifractales sont fournis par les trajectoires de certains processus aléatoires comme les processus de Lévy étudiés par S.Jaffard dans [Jaf99]. On peut aussi utiliser les ondelettes pour construire des fonctions multifractales possédant des propriétés remarquables : on peut citer l'exemple des séries d'ondelettes aléatoires définies par S.Jaffard dans [Jaf00a] puis J.M.Aubry et S.Jaffard dans [AJ02] qui vont vérifier la propriété de contenir des singularités d'un type particulier (les singularités oscillantes) ou les séries d'ondelettes multifractales définies par J.Barral et S.Seuret dans [BarSeur05] qui permettent de relier spectre multifractal d'une mesure et d'une série d'ondelettes.

Dans cette thèse, l'optique envisagée est au départ quelque peu différente. L'objectif était tout d'abord l'introduction de nouvelles notions d'irrégularité permettant de décrire le fait qu'une fonction puisse avoir de grands accroissements à toutes les échelles, ce qui a été fait dans le chapitre 2. La notion de régularité associée à cette nouvelle notion d'irrégularité uniforme est ce qu'on a appelé la régularité uniforme faible. Une fonction bornée f sera dite uniformément faiblement régulière d'exposant $\alpha \in (0, 1)$, si pour toute constante positive C il existe une suite décroissante d'échelles privilégiées $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{(x,y) \in (\mathbb{R}^d)^2, |x-y| \leq r_n} |f(y) - f(x)| \leq C r_n^\alpha.$$

La notion de régularité uniforme faible traduit donc le fait qu'il existe une suite d'échelles privilégiée pour laquelle les accroissements de la fonction considérée sont contrôlés de manière uniforme. On va ainsi pouvoir décrire le cas où une fonction se comporte de manière uniforme en espace mais différemment suivant la suite d'échelle considérée. Très naturellement apparaît alors un lien avec la théorie des ondelettes. En effet les ondelettes ont été introduites dans la fin des années 1980 afin de rendre compte du comportement espace-échelles d'une fonction. Il était donc logique d'essayer de transcrire en terme d'ondelettes cette notion de régularité uniforme en espace/non régularité en échelles qu'est la régularité uniforme faible. Un critère ondelettes de régularité faible est alors établi au chapitre 2. On pourra alors très simplement générer à l'aide de séries d'ondelettes des modèles de fonctions dont la régularité diffère suivant la gamme d'échelles considérée.

Au chapitre 3 on considère un champ gaussien qui est l'analogie aléatoire des séries d'ondelettes non uniformes en échelles du chapitre 2. Construit à l'aide d'une représentation harmonisable, ce champ est à accroissements stationnaires et donc 'uniforme à tout point de vue en tout point'. Pour autant, le comportement des trajectoires diffère suivant la gamme d'échelles considérée. Ceci va avoir plusieurs conséquences : sur la régularité et l'irrégularité locale presque sûre des trajectoires et sur les propriétés d'autosimilarité locale du champ qui vont être fonction de la suite d'échelles considérée. Ceci va notamment avoir comme implication surprenante la non-unicité du champ tangent en tout point. La notion de champ tangent a été introduite dans [BJR97] pour étudier les propriétés du Mouvement Brownien Multifractionnaire qui se comporte localement en tout point t comme un MBF d'indice $H(t)$, la fonction H étant une fonction continue du temps t . Un champ Y_t est donc un champ tangent au champ aléatoire X en t si pour un certain $\alpha \in (0, 1)$ on a au sens de la convergence en distribution

$$\left\{ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t + uh) - X(t)}{h^\alpha} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d} = \{Y_t(u)\}_{u \in \mathbb{R}^d}$$

K.Falconer généralise cette notion en autorisant la variable continue h à être une suite de réels positifs (r_n) décroissants vers 0 et considère des accroissements plus généraux de la forme

$$\frac{X(t + ur_n) - X(t)}{c_n}.$$

Cette notion plus générale pose alors de manière très naturelle le problème de l'unicité puisqu'on peut envisager qu'il existe deux suites décroissantes de réels positifs distinctes $(r_{n,1})$ et $(r_{n,2})$ pour lesquelles les quotients

$$\frac{X(t + ur_{n,1}) - X(t)}{c_{n,1}} \text{ et } \frac{X(t + ur_{n,2}) - X(t)}{c_{n,2}},$$

ont deux limites différentes lorsque n tend vers l'infini. Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire introduit au chapitre 3 permet justement de générer un exemple d'un tel comportement et vérifie donc une propriété de non unicité du champ tangent en tout point. On sort alors du cadre étudié par K.Falconer dans [Falc02, Falc03] et le champ (gaussien) étudié admet en tout point des champs tangents qui ne sont pas à direction fixée des MBF.

Les chapitres 4 et 5 sont eux consacré à l'étude d'une notion d'irrégularité ponctuelle qui est la notion de fonction anti-Höldérienne—traduisant un comportement du type (1.0.2)—introduite au départ pour étudier les propriétés d'irrégularité de fonctions de type Weierstrass ou de champ localement non déterministe. La propriété d'irrégularité 1.0.2 des trajectoires du MBF implique ainsi que les trajectoires du MBF sont presque sûrement anti-Höldériennes d'exposant $H - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Une vaste littérature existe sur les fonctions uniformément Höldériennes et anti-Höldériennes de même exposant H (i.e. vérifiant simultanément des propriétés du type (1.0.1) et (1.0.2)). Plus précisément deux classes de modèles ont été largement étudiées : les fonctions de type Weierstrass (voir les travaux de [KMY84], [MW86], [PrzyUrb89] mais aussi les résultats plus récents de [Tric97], [BouschHeurt99], [BouschHeurt00] et de [Heurt03],[Heurt05],[DemTric06]) et les champs gaussiens généralisant le MBF que sont les champs gaussiens localement non déterministes (voir par exemple [Ber73],[Pitt78]) et fortement localement non déterministes (voir [Xiao97],[Xiao05],[Xiao07]).

Ici l'objectif n'était pas d'affiner ces résultats mais plutôt de s'intéresser à l'aspect réellement 'ponctuel' de la notion d'anti-Hölderianité et de la notion de régularité ponctuelle associée qui est ici la notion de régularité ponctuelle faible. Il s'agissait donc de se doter d'outils d'analyse et de synthèse permettant de générer des fonctions non uniformes en espace et en échelles. L'outil fondamental s'est révélé une fois de plus être le lien entre le caractère anti-Hölderien/faiblement régulier d'une fonction et la taille de ses coefficients d'ondelettes. Ici une difficulté supplémentaire était à surmonter puisque contrairement à ce qui se passe pour la notion de régularité ponctuelle classique il n'existe pas de critère 'à une correction logarithmique près' portant sur les coefficients d'ondelettes de la propriété ' f est anti-Hölderienne d'exposant α '. On énonce donc dans le chapitre 4 une condition nécessaire puis une condition suffisante d'anti-Hölderianité. On retrouve alors sur des modèles simples de fonctions de type Weierstrass ou de champs gaussiens les propriétés d'anti-Hölderianité décrites ci-dessus à l'aide de ces critères ondelettes.

Dans le chapitre 5, on exploite les critères ondelettes dans deux directions. Tout d'abord on se pose la question de l'exposant d'irrégularité prescrit dans le cas où celui ci coïncide avec l'exposant de régularité ponctuel usuel puis dans le cas général. On rappelle que, dans le cas de l'exposant de Hölder usuel, cette question a été résolue par K.Daoudi, J.Lévy-Véhel et Y.Meyer dans [DLM98] par plusieurs méthodes dont une est très proche de l'utilisation de bases d'ondelettes puisqu'on se donne des fonctions définies à partir de leur décomposition dans la base de Schauder. Une démarche tout à fait similaire à celle de [DLM98] amène donc à utiliser les critères ondelettes pour générer à partir de séries d'ondelettes des fonctions dont l'exposant d'irrégularité coïncide avec une fonction donnée.

Enfin, les fonctions multifractales sont des exemples canoniques de fonctions dont la régularité ponctuelle usuelle varie d'un point à l'autre. Le problème d'un formalisme multifractal faible (i.e. lié à la notion d'irrégularité ponctuelle) se pose ainsi naturellement. P.Abry, S.Jaffard, B.Védel et H.Wendt dans [AJVW08] ont donné un résultat de majoration du spectre multifractal faible d'une fonction obtenant ainsi des résultats assez similaires au cas des mesures. On a cherché ici à générer des exemples de fonctions multifractales pour la notion d'anti-Hölderianité. Il était assez logique d'aller chercher de telles fonctions dans les fonctions multifractales usuelles et de se dire que les deux notions de multifractalité pouvaient être liées. Ce n'est en fait absolument pas le cas puisqu'un exemple assez simple de série de Davenport permet d'illustrer le fait qu'une fonction peut être multifractale au sens usuel mais pas au sens de l'anti-Hölderianité. Il restait alors à construire des modèles de fonctions multifractales pour l'irrégularité ponctuelle. Pour cela, on s'est tourné vers les travaux de J.Barral et S.Seuret (voir [BarSeur05]), qui ont fait le lien entre analyse multifractale des mesures et analyse multifractale des fonctions à l'aide de séries d'ondelettes dont les coefficients étaient générés à partir d'une mesure multifractale. La même démarche et le critère ondelettes ont ainsi permis de résoudre le problème de l'existence de fonctions multifractales au sens faible.

La deuxième partie de ce travail de thèse a consisté à s'intéresser à des modèles-dits anisotropes- dont les propriétés de régularité dépendent de la direction considérée. On rappelle que bien des phénomènes naturels- que ce soit en hydrologie, en géostatistiques ou en géophysique- sont intrinsèquement anisotropes et ont donc des caractéristiques différentes suivant la direction considérée. Lorsqu'on va s'intéresser à la modélisation de tels phénomènes, on va donc devoir en tenir compte. Ainsi de nombreux auteurs ont proposé des modèles de champs

gaussiens anisotropes pour rendre compte de ce type de propriétés. On pourra se référer par exemple aux travaux de S.Davies et P.Hall ([DH99]), A.Bonami et A.Estrade ([BE03]), ou de D. Benson, M.M. Meerschaert, B. Bäumer et H.P. Scheffler ([Ben06]). Différentes classes de champs gaussiens anisotropes ont alors été introduites. Les exemples les plus connus sont ceux du Drap Brownien Fractionnaire introduit par A. Kamont ([Kam96]) qui a par ailleurs étudié la régularité trajectorielle de ce champ et ceux de différents modèles de champs anisotropes à accroissements stationnaires définis dans [BJR97, BE03] étudiés soit du point de vue de la régularité classique ([BJR97]) ou soit du point de vue de la régularité directionnelle ([BE03]) ce qui permet de tenir compte du caractère anisotrope du champ considéré.

Par ailleurs, une autre notion centrale est celle de processus ou de champ autosimilaire servant à modéliser des phénomènes d'invariances d'échelles. La relation d'autosimilarité classique

$$\forall a > 0 \{X(at)\}_{t \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$$

n'étant pas adapté au cadre anisotrope, de nombreux auteurs comme Hudson et Mason ([HM82]), Schertzer et Lovejoy ([SL85],[SL87]), D. Benson, M.M. Meerschaert, B. Bäumer et H.P. Scheffler ([Ben06]) puis H.Biermé, M.Meerschaert et H.P.Scheffler ([BMS07]) se sont alors posé le problème de la définition d'une notion pertinente d'invariance d'échelle dans le cadre anisotrope et ont à chaque fois proposé de nouveaux modèles de champs aléatoires gaussiens ou stables à la fois autosimilaires et anisotropes. Il est alors important d'être capable d'étudier les propriétés (en particulier celles de régularité) de ces nouvelles classes de modèles. Pour cela, il est donc nécessaire d'adapter les notions de régularité usuelles à un cadre anisotrope. C'est ce qui a été fait par exemple pour le modèle du DBF puisque A.Kamont a étudié les propriétés de régularité de ce champs dans des espaces de Hölder anisotropes ou plus récemment pour les champs stables vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle par H.Biermé, M.Meerschaert et H.P.Scheffler puis H.Biermé et C.Lacaux dans [BMS07, BL07] et dans un cadre général de champs gaussiens anisotropes fortement localement non déterministes par Y.Xiao dans[Xiao07].

Ici, on s'est alors centré sur l'étude de notions de régularité adaptées à un cadre anisotrope. Pour cela on a considéré dans le chapitre 7 un modèle de champ aléatoire anisotrope particulier : celui des champs vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle de la forme

$$\forall a > 0 \{X(a^E t)\}_{t \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$$

(où E est une matrice à spectre de partie réelle positive et H un réel positif) que l'on a considéré dans le cas gaussien.

On a ainsi commencé par une étude précise de ce modèle et proposé une construction explicite de cette classe de champs à partir de quatre cas génériques. On s'est ensuite intéressé au problème de la régularité des trajectoires dans un cadre adapté et on a considéré pour cela des espaces fonctionnels anisotropes très généraux : les espaces de Besov anisotropes introduits dans la fin des années 70 par l'école russe (voir [Nik77] ou [BIN75]) qui interviennent dans la résolution de problèmes semi-linéaire elliptiques (voir [Dac03]). La question sous jacente à cette étude était alors la suivante : quelle est 'la meilleure manière' de mesurer la régularité d'un champ anisotrope dans un cadre général. La réponse va être donnée par les résultats

d'optimalité du chapitre 7. La 'meilleure notion de régularité' possible servant à mesurer la régularité des trajectoires d'un champ qui vérifie une relation d'autosimilarité anisotrope est en quelque sorte celle qui est liée à la 'géométrie intrinsèque' du champ et ce quelque soit le mode de mesure : lié à une régularité L^p ou L^∞ . De plus, toutes les propriétés de régularité obtenues sont liées non pas à la matrice E mais uniquement à ce qu'on appelle à sa partie diagonalisable réelle et ce quelque soit l'espace fonctionnel 'raisonnable' choisi pour la mesure de régularité des trajectoires.

Le chapitre 8 est consacré à la définition d'un modèle de champ gaussien autosimilaire plus général que la classe de champs défini par [BMS07]. On construit des champs gaussiens à accroissements rectangulaires stationnaires qui à l'instar du DBF vérifient simultanément plusieurs relations d'autosimilarité matricielle cette fois ci de la forme

$$(1.0.3) \quad \forall (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \left\{ \begin{array}{l} \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ \vdots \\ \{X(a_m^{E_m} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

où (E_1, \dots, E_m) est une famille libre de m matrices de $M_d(\mathbb{R})$ commutant deux à deux et (H_1, \dots, H_m) m réels positifs. Cette nouvelle classe de champs semble pouvoir modéliser l'évolution dans le temps de champs anisotropes vérifiant à chaque instant une relation d'autosimilarité matricielle. La démarche de construction est différente de celle envisagée dans [BMS07]. On reformule le problème posé ci dessus, en faisant intervenir la notion d'autosimilarité par rapport à un groupe introduite par S. Kolodynski et J. Rosinski dans [KR03]. Le groupe sous jacent est ici un groupe matriciel \mathcal{A} à m paramètres et toute la construction présentée s'appuie fortement sur les caractéristiques de ce groupe : expression de la mesure de Haar et réduction. On souligne qu'ici les champs construits ne sont pas à accroissements stationnaires mais à accroissements rectangulaires stationnaires par rapport à des directions qu'il faut déterminer. La résolution de ce problème n'est pas immédiate et découle de la réduction du groupe matriciel \mathcal{A} .

Plusieurs prolongements de ce travail de thèse peuvent être envisagés. L'étude des notions de régularité uniforme/ponctuelle faible peut ainsi être approfondie. On peut se demander comment générer d'autres modèles de fonctions multifractales au sens faible que les séries d'ondelettes présentées au chapitre 5 et essayer de revenir sur les différents modèles classiques de fonctions multifractales que sont les séries de Davenport et les trajectoires des processus de Lévy. En première approche, le modèle des séries de Lévy permet de suggérer que dans des cas simples les processus de Lévy sont monofractals au sens faible. Il s'agirait de vérifier cette conjecture et de l'étendre à des cas plus élaborés de processus de Lévy. Par ailleurs la question de l'exposant d'irrégularité prescrit pourrait mener à la définition d'un MBMG comme cela a été fait par A. Ayache, S. Jaffard et M. Taqqu dans [AJT07] ayant presque sûrement un exposant de Hölder inférieur et supérieur prescrit.

La définition de champs gaussiens possédant plusieurs gammes d'échelles pour lesquels la régularité des trajectoires est différente à partir d'un modèle paramétrique pose bien sûr le problème de l'estimation des paramètres du modèle. Les résultats généraux d'estimation de la densité spectrale de champs à accroissements stationnaires obtenus par J.M. Bardet et

P.Bertrand dans [BarBer08] par des méthodes d'ondelettes pourraient bien sûr être appliqués mais on peut se poser la question de méthodes plus simples—type variation quadratiques—fonctionnant dans ce cas spécifique.

Enfin, en ce qui concerne la partie champs gaussiens anisotropes, une étude de régularité des trajectoires des champs à m paramètres introduits dans le chapitre 8 peut être envisagée et devrait se faire dans des espaces anisotropes adaptés dans le même esprit que le travail d'A.Kamont dans [Kam96].

Chapitre 2

Une notion d'irrégularité uniforme

2.1 Introduction

En traitement du signal ou en traitement d'images, on a souvent à considérer des données qui sont représentées par des fonctions irrégulières. Une question assez naturelle est de savoir quel sens mathématique on va donner au terme d'irrégularité d'une fonction. Une première approche consiste à utiliser le concept de régularité Höldérienne d'une fonction. On rappelle que si f est une fonction définie sur \mathbb{R}^d à valeurs complexes, elle est Höldérienne d'exposant $\alpha \in (0, 1)$ (ce que l'on notera $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$) si

$$\forall r \leq r_0, \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)| \leq C_0 r^\alpha,$$

pour une certaine constante positive C_0 et un certain réel positif r_0 . L'exposant de Hölder uniforme \mathcal{H}_f de la fonction f

$$\mathcal{H}_f = \sup\{\alpha, f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)\},$$

donne alors bien une information sur le degré de régularité uniforme (et donc d'irrégularité uniforme) de la fonction f .

Néanmoins un même exposant de Hölder uniforme peut refléter, pour deux fonctions données, des situations bien différentes. Pour illustrer cette idée, on va considérer deux modèles : celui de la fonction de Weierstrass usuelle W_H et celui d'une fonction de Weierstrass modifiée $W_{H,\beta,\tau}$ respectivement définies par

$$W_H(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-jH} \cos(2^j \pi x),$$

et

$$W_{H,\beta,\tau}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=[\beta^n]}^{[\tau\beta^n]-1} 2^{-[\beta^n]\tau H} \cos(2^j \pi x) + \sum_{j=[\tau\beta^n]}^{[\beta^{n+1}]-1} 2^{[\beta^{n+1}](1-\tau H)} 2^{-j} \cos(2^j \pi x).$$

Dans les deux figures ci dessous, on a représenté les graphes de ces deux fonctions avec $H = 0.5$, $\beta = 1.5$ et $\tau = 1.2$.

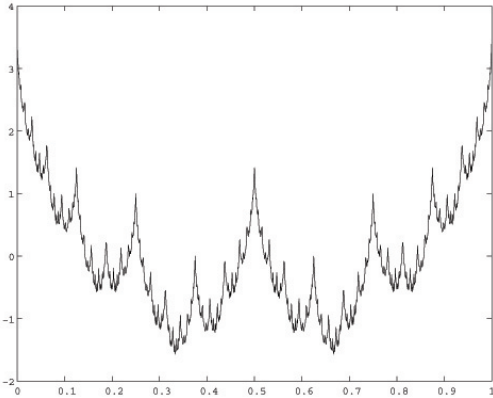


FIGURE 2.1 – Fonction de Weierstrass classique

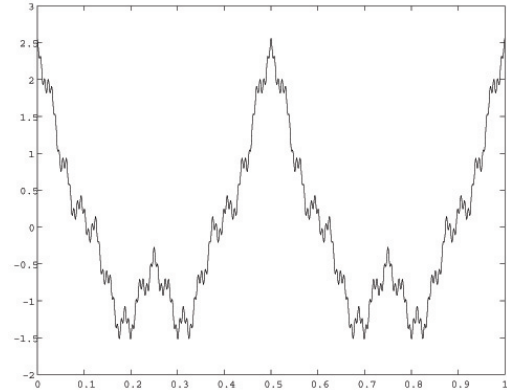


FIGURE 2.2 – Fonction de Weierstrass modifiée

Ces deux fonctions ont même exposant de Hölder uniforme H . Pour autant, du point de vue de la régularité, ces deux fonctions ont un comportement radicalement différent. En effet la fonction de Weierstrass classique a un comportement 'fractal'. Le degré de régularité ou d'irrégularité de la fonction est ainsi le même à toutes les échelles. Plus précisément, il existe $C_1, C_2 > 0$ tel que

$$\forall r > 0, C_1 r^H \leq \sup_{x,y,|x-y|\leq r} |W_H(x) - W_H(y)| \leq C_2 r^H.$$

Ce comportement est aussi celui de champs gaussiens tels le Mouvement Brownien Fractionnaire ou plus généralement les champs fortement localement non déterministes comme on le verra plus loin.

Ce n'est par contre pas le cas de la fonction de Weierstrass modifiée définie plus haut. Dans ce cas le degré de régularité de la fonction dépend de la famille d'échelles considérée. Il existe ainsi deux suites d'échelles caractéristiques $(r_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(r_{n,2})_{n \in \mathbb{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n,1}^H \leq \sup_{x,y,|x-y|\leq r_{n,1}} |W_{H,\beta}(x) - W_{H,\beta,\tau}(y)| \leq r_{n,1}^H,$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, r_{n,2}^{\overline{H}} \sup_{x,y,|x-y|\leq r_{n,2}} |W_{H,\beta,\tau}(x) - W_{H,\beta}(y)| \leq r_{n,2}^{\overline{H}},$$

avec $\overline{H} > H$. Par ailleurs pour une certaine constante positive $C_0 > 0$ on a

$$\forall r > 0, \sup_{x,y,|x-y|\leq r} |W_{H,\beta}(x) - W_{H,\beta}(y)| \geq C_0 r^{\overline{H}}.$$

Ainsi pour des suites d'échelles particulières, le degré de régularité de la fonction de Weierstrass peut soit coïncider avec H soit être plus grand que H .

Pour décrire la différence de comportement entre ces deux fonctions, on peut alors utiliser deux concepts inverses l'un de l'autre qui sont introduits dans ce chapitre : celui d'irrégularité uniforme et celui de régularité uniforme faible.

Définition 2.1.1 *La fonction f est uniformément irrégulière d'exposant $\alpha \in (0, 1)$, ce que l'on notera $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, s'il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 telle que*

$$\forall r \leq r_0, \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)| \geq C_0 r^\alpha.$$

La fonction f sera dite faiblement uniformément régulière d'exposant $\alpha \in (0, 1)$ si elle n'est pas uniformément irrégulière d'exposant $\alpha \in (0, 1)$. Cela se traduit par l'existence pour toute constante positive C d'une suite d'échelles privilégiées $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{|x-y| \leq r_n} |f(x) - f(y)| \leq C r_n^\alpha.$$

Ces deux notions vont ainsi permettre d'établir une distinction entre des fonctions qui ont le même degré de régularité à chaque échelle et des fonctions pour lesquelles il existe plusieurs gammes d'échelles caractéristiques pour lesquelles le degré de régularité est différents. On dispose ainsi de nouvelles notions permettant d'affiner la description des propriétés de régularité d'une fonction. On a alors de nouveaux outils de classification qui peuvent être utiles en traitement du signal et en traitement d'image.

L'objet de ce chapitre est donc la définition et l'étude des concepts d'irrégularité uniforme et de régularité uniforme faible. On étudiera en particulier un aspect tout à fait remarquable de ces deux notions : leur lien avec la théorie des ondelettes. Les ondelettes sont en effet par nature un outil permettant de décrire le comportement (et donc en particulier la régularité) d'une fonction à chaque échelle et sont donc bien adaptées à l'étude de l'irrégularité uniforme (ou de la régularité uniforme faible) d'une fonction. On donnera ici une condition nécessaire et suffisante (à un terme correctif en log près), portant sur les coefficients d'ondelettes, pour qu'une fonction soit uniformément irrégulière.

Afin de mener à bien cette étude, plusieurs étapes seront nécessaires.

On commencera (section 2.2) par faire des rappels sur la notion de régularité Höldérienne uniforme classique (que l'on appellera aussi ici régularité forte).

On insistera notamment sur les liens entre la régularité uniforme d'une fonction et la décroissance de ses coefficients d'ondelettes. On se placera dans un cadre plus général que celui de la régularité Höldérienne classique. Cela sera utile lorsque l'on cherchera à expliciter un critère portant sur les coefficients d'ondelettes pour qu'une fonction soit uniformément irrégulière.

On définira ensuite dans la section 2.3 les notions de fonction uniformément irrégulière et faiblement uniformément régulière d'exposant supérieur à 1, puis à l'aide du cadre général donné dans la section 2.2 on pourra donner une caractérisation ondelettes, en section 2.4, de ces deux propriétés.

On reviendra ensuite dans la section 2.5 sur des exemples classiques de fonctions uniformément irrégulières, comme les fonctions de Weierstrass ou le Mouvement Brownien Fractionnaire, qui ont même exposant de régularité et d'irrégularité uniforme.

La section 2.6 et le chapitre suivant permettront de considérer des exemples plus élaborées, du point de vue de l'irrégularité, de séries d'ondelettes et de processus gaussiens ayant un exposant de régularité et un exposant d'irrégularité uniforme distincts. On s'intéressera enfin (section 2.7) à la stabilité par certains opérateurs de Caldéron-Zygmund des propriétés de régularité uniforme faible d'une fonction. On fera alors le lien avec les équations aux dérivées partielles elliptiques.

2.2 Notion de régularité Höldérienne uniforme forte

Le fait qu'une fonction soit uniformément régulière, c'est-à-dire que son graphe soit globalement lisse, est caractérisé par son appartenance aux espaces de Hölder classiques $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$. L'objectif dans cette section est d'en rappeler la définition et de donner les résultats déjà existants reliant la régularité Höldérienne classique (que l'on appellera aussi ici régularité Höldérienne forte) d'une fonction et la décroissance de ses coefficients d'ondelettes. Tout ce qui est rappelé ici est tiré de [Jaf04].

2.2.1 Définitions

La définition des espaces de Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ pour $\alpha > 0$ est basée sur la notion de module de régularité uniforme. On commence donc par rappeler les deux définitions suivantes :

Définition 2.2.1 Soit $h \in \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ et $M \in \mathbb{N}^*$. On définit $\Delta_h^M f(x)$ par récurrence :

$$\text{Pour } M = 1 : (\Delta_h^1 f)(x) = f(x+h) - f(x).$$

$$\text{Pour } M \geq 2 : (\Delta_h^M f)(x) = \Delta_h^{M-1}(\Delta_h^1 f)(x).$$

Définition 2.2.2 Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Le module de régularité uniforme d'ordre M de la fonction f est la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par :

$$\omega_f^M(r) = \sup_{|h| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\Delta_h^M f(x)|.$$

On peut alors définir l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$:

Définition 2.2.3 Soit α un réel positif, M l'entier défini par $M = [\alpha] + 1$ et f une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. La fonction f est dite Höldérienne d'exposant α et on note $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si pour une certaine constante positive C_0 et un certain réel positif r_0

$$\forall r \leq r_0, \omega_f^M(r) \leq C_0 r^\alpha.$$

La fonction f sera alors dite uniformément Höldérienne si pour un certain réel positif α , la fonction f est dans l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

La caractérisation ondelettes de l'irrégularité uniforme et de la régularité uniforme faible va nécessiter l'introduction d'un cadre plus général que celui de la régularité Höldérienne usuelle. Une notion clé dont on aura besoin est notamment celle de module de continuité :

Définition 2.2.4 On dit que la fonction θ , définie sur $(0, r_0)$ est un module de continuité si c'est une fonction croissante non identiquement nulle telle que :

$$(2.2.1) \quad \theta(0) = 0.$$

$$(2.2.2) \quad \text{Il existe une constante positive } C \text{ telle que } \theta(2x) \leq C\theta(x).$$

Pour tout module de continuité θ donné, on notera C_θ l'inf des constantes vérifiant la propriété (2.2.2).

Remarque 2.2.5 Soit α un réel positif. La fonction θ définie par $\theta(r) = r^\alpha$ (plus généralement $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ pour tout réel β) est un module de continuité.

Cette notion de module de continuité permet alors de définir les espaces de Hölder dans un cadre plus général :

Définition 2.2.6 Soit $M \in \mathbb{N}^*$. La fonction f de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ appartient à l'espace de Hölder $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$ si il existe une certaine constante positive C_0 et un réel positif r_0 tels que

$$\forall r \leq r_0, \omega_f^M(r) \leq C_0 \theta(r).$$

On dit alors que le module de continuité θ est un module de continuité uniforme d'ordre M de la fonction f .

Exemple 2.2.7 A.Khintchine a obtenu dans [Khin24] la loi du log itéré et a montré que p.s. il existait une constante $C_0 > \sqrt{2}$ telle que

$$\theta(h) = C_0 h^{\frac{1}{2}} |\log(|\log(h)|)|^{\frac{1}{2}},$$

est un module de continuité uniforme d'ordre 1 du Mouvement Brownien, qui est donc ainsi p.s. à trajectoires dans $\mathcal{C}_{h^{\frac{1}{2}} |\log(|\log(h)|)|^{\frac{1}{2}},s}^1(\mathbb{R})$.

Remarque 2.2.8 Cette définition générale des espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$ peut être reliée aux espaces de Hölder usuels. Soit α un réel positif.

- Pour $\theta(r) = r^\alpha$, $M = [\alpha] + 1$, $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Hölder usuel $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.
- Pour $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$, $M = [\alpha] + 1$, $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$ est l'espace de Hölder $\mathcal{C}_{|\log|^\beta}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Dans [JafMey96], S.Jaffard et Y.Meyer ont donné une caractérisation Littlewood-Paley d'une notion qui est en fait la notion de régularité Höldérienne forte définie plus haut. Pour cela, ils ont été amenés à faire des hypothèses résumées dans la définition suivante :

Définition 2.2.9 Le module de continuité θ est dit fort d'ordre M si pour une certaine constante positive C_0 les deux conditions suivantes sont réalisées :

$$(2.2.3) \quad \forall J \geq 0, \sum_{j=0}^J 2^{jM} \theta(2^{-j}) \leq C_0 2^{JM} \theta(2^{-J}).$$

$$(2.2.4) \quad \forall J \geq 0, \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{j(M-1)} \theta(2^{-j}) \leq C_0 2^{J(M-1)} \theta(2^{-J}).$$

Remarque 2.2.10 Dans [JafMey96], S.Jaffard et Y.Meyer ont montré que les conditions (2.2.3) et (2.2.4) sont des conditions suffisantes sur le module de continuité θ pour avoir des caractérisations Littlewood-Paley de la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$.

Exemple 2.2.11 On peut donner deux exemples de modules de continuité forts.

- Si α n'est pas entier et $M = [\alpha] + 1$, le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha$ est fort d'ordre M .
- Si α n'est pas entier et β est un réel quelconque, le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ est fort d'ordre $M = [\alpha] + 1$.

Exemple 2.2.12 On va maintenant donner deux exemples de modules de continuité qui ne sont pas des modules de continuité forts.

Si α est entier, le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha$ n'est pas un module de continuité fort d'ordre $M = [\alpha] + 1$. En effet, comme alors $M = \alpha + 1$

$$\sum_{j=0}^J 2^{jM} \theta(2^{-j}) = \sum_{j=0}^J 2^j \leq C_0 2^J = C_0 2^{JM} \theta(2^{-J}).$$

Par contre

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{j(M-1)} \theta(2^{-j}) = \sum_{j=J}^{+\infty} 1 = +\infty.$$

C'est donc la condition (2.2.4) qui n'est pas réalisée. Plus généralement, il n'existe pas d'entier M tel que le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha$ soit un module de continuité fort d'ordre M (voir [JafMey96] pour plus de précision). On rappelle que pour α entier, les espaces $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ n'admettent pas de caractérisation ondelettes.

Les résultats sont identiques si pour α entier et β réel on considère le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ (voir [JafMey96]).

On peut faire quelques commentaires sur ces définitions. On peut remarquer que la condition (2.2.3) implique en particulier que,

$$(2.2.5) \quad \forall J \geq 0, \theta(2^{-J}) \geq C_0 2^{-JM}.$$

La condition (2.2.4) implique elle que

$$\sum_{j=0}^{+\infty} 2^{j(M-1)} \theta(2^{-j}) < +\infty,$$

et donc que

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} (2^{j(M-1)} \theta(2^{-j})) = 0.$$

Un module de continuité fort d'ordre M vérifie donc à partir d'un certain rang la condition $2^{-jM} \leq \theta(2^{-j}) \leq 2^{-j(M-1)}$. Ceci va entraîner en particulier que si θ est un module de continuité fort d'ordre M

$$\mathcal{C}^M(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d) \hookrightarrow \mathcal{C}^{M-1}(\mathbb{R}^d).$$

Les espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$ sont donc des espaces 'intermédiaires' par rapport aux espaces de Hölder usuels $\mathcal{C}^M(\mathbb{R}^d)$.

2.2.2 Régularité Höldérienne forte et ondelettes

On rappelle maintenant les résultats liant la régularité Höldérienne d'une fonction et les propriétés de décroissance de ses coefficients d'ondelettes. On fait tout d'abord quelques rappels sur les bases d'ondelettes et la décomposition de fonctions sur de telles bases. Ces bases trouvent leur motivation pour grande part en traitement du signal et en traitement d'image où elles sont utilisées pour la compression et la transmission de données. Par ailleurs les bases d'ondelettes permettent de proposer des modèles et de synthétiser des signaux possédant des propriétés particulières. On peut citer l'exemple des séries aléatoires d'ondelettes multifractales par exemple ou des séries d'ondelettes à exposant de Hölder prescrit. C'est dans cette perspective que tout au long de ce travail seront utilisées les ondelettes. Des critères ondelettes des chapitres 2 et 4 découleront la définition de séries d'ondelettes permettant de générer de nouveaux comportements de régularité que cela soit de manière uniforme (voir chapitre 2, chapitre 3) ou de manière différente en chaque point (voir chapitre 5).

Ces bases sont construites de la manière suivante : on part d'une fonction φ et de $2^d - 1$ fonctions $\{\psi^i\}_{i=1, \dots, 2^d-1}$ qui lui sont associées (voir [Mey90] pour plus de précision) suffisamment régulières. On définit alors les fonctions

$$\forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \varphi_k(x) = \varphi(x - k), \psi_{j,k}^i(x) = \psi^i(2^j x - k),$$

de telle sorte que sous certaines hypothèses, l'ensemble $\{\varphi_k\}_k \cup \{2^{\frac{j d}{2}} \psi_{j,k}^i\}_{i,j,k}$ forme une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Si les fonctions φ et $\{\psi^i\}_i$ sont de classe \mathcal{C}^r , on dira que l'analyse multirésolution est de régularité r . On définit alors les coefficients d'ondelettes d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}^d)$ par

$$(2.2.6) \quad \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ C_k = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi_k(x) dx, \quad c_{j,k}^i = 2^{j d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi_{j,k}^i(x) dx.$$

On a alors pour toute fonction f de $L^2(\mathbb{R}^d)$ la décomposition suivante

$$(2.2.7) \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C_k \varphi_k + \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k}^i \psi_{j,k}^i.$$

On choisit ici d'utiliser une normalisation L^∞ et non une normalisation L^2 des coefficients d'ondelettes, ceci par simple commodité. En effet prendre pour définition pour les coefficients d'ondelettes

$$c_{j,k}^i = 2^{\frac{j d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \psi_{j,k}^i(x) dx.$$

imposerait un inutile facteur $2^{\frac{j d}{2}}$ dans tous les résultats qui vont être énoncés.

Les formules (2.2.6) et (2.2.7) sont en fait valables (pour des ondelettes suffisamment régulières) dans un cadre plus général que celui d'une fonction f de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Les formules (2.2.6) doivent être alors comprises comme des produits de dualité.

On peut remarquer à ce stade qu'il est parfois plus pertinent d'utiliser ce que l'on appelle des bases bi-orthogonales. On va donc brièvement faire quelques rappels à ce sujet.

Une base de Riesz d'un espace de Hilbert H est une suite de vecteurs $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les combinaisons linéaires finies de la forme $\sum_{n=0}^N a_n e_n$ sont denses dans H et

$$\exists C_1, C_2 > 0 : \forall N, \forall a_n, C_1 \sum_{n=0}^N |a_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=0}^N a_n e_n \right\|_H^2 \leq C_2 \sum_{n=0}^N |a_n|^2.$$

Deux suites de fonctions $(e_n)_n$ et $(f_m)_m$ sont des bases bi-orthogonales si chacune de ces suites de fonctions est une base de Riesz et si $\langle e_n, f_m \rangle = \delta_{n,m}$. Quand ceci est le cas, toute fonction f de H peut s'écrire

$$f = \sum_n \langle f, f_n \rangle e_n.$$

Les bases bi-orthogonales d'ondelettes sont des couples de bases de la forme $(2^{d\frac{j}{2}} \tilde{\psi}^i(2^j x - k))_{i,j,k}$ et $(2^{d\frac{j}{2}} \tilde{\psi}^i(2^j x - k))_{i,j,k}$ qui sont bi-orthogonales pour la norme L^2 .

Les bases bi-orthogonales sont dans certains cas mieux adaptées à l'étude des processus aléatoires que les bases orthonormées d'ondelettes. On en verra un exemple en section 2.5 lorsqu'on s'intéressera au Mouvement Brownien Fractionnaire. Dans ce cas précis l'utilisation de bases bi-orthogonales permet de décorréler les coefficients d'ondelettes de ce processus qui deviennent ainsi des variables aléatoires indépendante. Cela simplifie de manière notable l'étude de la régularité du Mouvement Brownien Fractionnaire.

On utilisera en section 2.7 puis dans les chapitres suivants les notations données dans [Jaf04] que l'on rappelle maintenant.

Définition 2.2.13 *Un cube dyadique d'échelle j est un cube de la forme*

$$\lambda = \left[\frac{k_1}{2^j}, \frac{k_1 + 1}{2^j} \right) \times \cdots \times \left[\frac{k_d}{2^j}, \frac{k_d + 1}{2^j} \right),$$

où $(k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$.

L'entier i prend $2^d - 1$ valeurs, il peut donc être identifié à un d -uplet à valeurs dans $\{0, 1\}^d \setminus (0, \dots, 0)$.

Notation 2.2.14 *On notera $\lambda(i, j, k)$ le cube dyadique défini par*

$$\lambda = \lambda(i, j, k) = \frac{k}{2^j} + \frac{i}{2^{j+1}} + \left[0, \frac{1}{2^{j+1}}\right)^d.$$

On utilisera aussi les notations suivantes

$$c_\lambda = c_{j,k}^i, \psi_\lambda = \psi_{j,k}^i, \mu_\lambda = \frac{k}{2^j}.$$

On est maintenant en mesure d'énoncer un résultat reliant la régularité forte d'une fonction et la décroissance de ses coefficients d'ondelettes. Dans [JafMey96], (proposition 1.1), S.Jaffard et Y.Meyer ont montré une caractérisation Littlewood-Paley de la régularité Höldérienne forte, que l'on peut réexprimer en termes de coefficients d'ondelettes de la manière suivante :

Proposition 2.2.15 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M . On suppose que l'analyse multi-résolution est de régularité $r > M$. On a équivalence entre les deux assertions suivantes*

1. $f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$.

2. Il existe une certaine constante positive C_0 telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |C_k| \leq C_0, \\ \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \quad \forall j \geq 0, \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}^i| \leq C_0 \theta (2^{-j}). \end{array} \right.$$

Ces rappels étant faits, on va définir la notion constituant l'objet central de ce chapitre : l'irrégularité uniforme d'une fonction.

2.3 Fonctions uniformément irrégulières

La première partie sera consacrée à des rappels sur les travaux de C.Tricot qui s'est déjà intéressé à la définition d'une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^p pour des exposants compris entre 0 et 1. Lorsque $p = \infty$ on retrouve la notion d'irrégularité uniforme exposée dans l'introduction.

On précisera ensuite pour des exposants supérieurs à 1, dans la deuxième partie de cette section, la notion d'irrégularité uniforme que l'on va notamment étendre aux modules de continuité généraux considérés dans la section précédente.

Dans la troisième partie, on montrera la propriété suivante :

Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, toute fonction f uniformément irrégulière d'exposant α_1 est uniformément irrégulière d'exposant α_2 .

L'outil sera pour cela une caractérisation de la notion d'irrégularité uniforme en terme d'approximation polynomiale.

2.3.1 Une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^p

2.3.1.1 Les exposants $\Delta^{p,q}$ de C.Tricot

Pour un exposant α compris entre 0 et 1, C.Tricot s'est déjà intéressé dans [Tric97] à la définition d'une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^p avec $1 \leq p \leq \infty$. L'objectif était d'étudier les propriétés d'irrégularité uniforme de fonctions de type Weierstrass

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-nH} g(2^n x),$$

où g est une fonction uniformément Höldérienne.

On commence par rappeler quelques notations. Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et τ réel positif $B_\tau(x)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon τ , $B_\tau(x) = \{y \in \mathbb{R}^d, |x - y| \leq \tau\}$. Soit D un compact de \mathbb{R}^d , τ un réel positif fixé, C.Tricot définit, pour une fonction continue sur $D(\tau) = \bigcup_{x \in D} B_\tau(x)$ et $0 < u \leq +\infty$, $0 < v \leq +\infty$ les opérateurs

$$S_\tau^{u,v}(f) = \left(\frac{1}{(2\tau)^{\frac{dv}{u}} \text{Vol}_d(D)} \int_D \left(\int_{B_\tau(x)} |f(x) - f(y)|^u dy \right)^{\frac{v}{u}} dx \right)^{\frac{1}{v}},$$

avec les modifications usuelles pour $u = \infty$ ou $v = \infty$.

Pour $u = v = +\infty$ par exemple on obtient pour τ réel positif fixé

$$S_\tau^{\infty, \infty}(f) = \sup_{x \in D} \sup_{y, |x-y| \leq \tau} |f(x) - f(y)|$$

et on retrouve donc le module de régularité uniforme d'ordre 1 $\omega_f^1(\tau)$ de la fonction f sur D à l'échelle $r = \tau$.

C. Tricot définit ensuite les exposants

$$\Delta^{p,q}(f) = \limsup_{\tau \rightarrow 0} (d + 1 - \frac{\log(S_\tau^{p,q}(f))}{\log(\tau)}),$$

et les calcule pour des fonctions f de type Weierstrass. Il montre notamment que dans ce cas ces exposants ne dépendent pas de p et q et sont liés à H .

On peut remarquer que :

- Pour $u = v = \infty$, $\Delta^{\infty, \infty}(f)$ est à un décalage près l'exposant de Hölder uniforme de la fonction f sur D ,

$$\Delta^{\infty, \infty}(f) = d + 1 - \mathcal{H}_f.$$

- Pour $u = \infty$, $v = 1$ $\Delta^{\infty, 1}(f)$ est la dimension de boîte supérieure du graphe de la fonction f sur D .

Les exposants $\Delta^{p,q}(f)$ qui sont des nombres forcément compris entre 0 et 1 (voir [Tric97] pour plus de détails sur ces exposants) donnent une indication sur le taux de décroissance des fonctions $r \mapsto S_r^{p,q}(f)$ vers 0 et permettent donc de quantifier le degré de régularité uniforme L^p d'une fonction et ainsi son appartenance à certains espaces fonctionnels, plus précisément les espaces de Besov et les espaces d'oscillations.

2.3.1.2 Exposants $\Delta^{p,q}(f)$ et exposants critiques dans les espaces de Besov et les espaces d'oscillations

Les caractérisations différences finies usuelles des espaces de Besov (voir [Trie83]) permettent de relier les normes $S_r^{p,q}(f)$ aux espaces de Besov et donc les exposants $\Delta^{p,q}(f)$ à l'exposant critique d'une fonction dans ces mêmes espaces fonctionnels :

Proposition 2.3.1 Soit $1 \leq r \leq \infty$, $0 < u \leq r$

- Si la fonction f est dans l'espace de Besov $B_{p,q}^s(D(\tau))$ (resp $O_p^s(D(\tau))$) pour $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+ < s < 1$, $0 < p \leq \infty$, $0 < q \leq \infty$ alors

$$(2.3.1) \quad \int_0^1 \tau^{-sq-1} |S_\tau^{u,p}(f)|^q d\tau < +\infty.$$

- Réciproquement, si la fonction f de $L^{\bar{p}}(D)$ où $\bar{p} = \max(p, r)$ vérifie

$$(2.3.2) \quad \int_0^1 \tau^{-sq-1} |S_\tau^{u,p}(f)|^q d\tau < +\infty,$$

alors la fonction f est dans l'espace de Besov $B_{p,q}^s(D)$ pour $d(\frac{1}{p} - \frac{1}{r})_+ < s < 1$.

Cette proposition s'étend aussi au cadre des espaces d'oscillations O_p^s définis par S.Jaffard dans [Jaf98a] :

Définition 2.3.2 *pour $p \in [1, +\infty]$, $f \in O_p^s(D)$ si*

$$\sup_{j \geq 0} 2^{j(sp-d)} \sum_{\lambda \subset D, |\lambda|=2^{-j}} \left(\sup_{\lambda' \subset \lambda} |c_{\lambda'}| \right)^p < +\infty.$$

De manière plus précise, les exposants $\Delta^{\infty,p}(f)$ peuvent directement être reliés aux exposants critiques de la fonction f dans les espaces d'oscillations . En effet, une simple adaptation de [Jaf98] mène à :

Proposition 2.3.3

$$\Delta^{\infty,p}(f) = \sup(d, d+1-\alpha) \text{ où } \alpha = \sup\{s, f \in O_p^s(D)\}.$$

Les propriétés d'irrégularité uniforme L^p d'une fonction peuvent elles être décrites à l'aide d'autres exposants : les exposants $\delta^{p,q}(f)$.

2.3.1.3 Les exposants $\delta^{p,q}(f)$ et l'exposant d'irrégularité uniforme

Dans [Tric97], C.Tricot a aussi défini d'autres exposants : les exposants

$$\delta^{p,q}(f) = \liminf_{\tau \rightarrow 0} \left(d+1 - \frac{\log(S_\tau^{u,v})(f)}{\log(\tau)} \right),$$

qui sont eux aussi forcément compris entre 0 et 1 et qui vont être liés à la notion d'irrégularité uniforme étudiée dans ce chapitre.

En effet, pour $p = q = \infty$, l'exposant $\delta^{\infty,\infty}(f)$ est bien à un décalage près l'exposant d'irrégularité uniforme de la fonction f sur D , que l'on va étudier en détail tout au long de ce chapitre

$$\delta^{\infty,\infty}(f) = d+1 - \mathcal{I}_f.$$

On va maintenant préciser la notion de fonction uniformément irrégulière sur \mathbb{R}^d d'exposant α , le réel α étant cette fois-ci positif et non nécessairement compris entre 0 et 1.

2.3.2 Une notion d'irrégularité uniforme dans le cadre L^∞

Définition 2.3.4 *On suppose que la fonction f est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit α un réel positif et M l'entier défini par $M = [\alpha] + 1$. La fonction f est uniformément irrégulière sur \mathbb{R}^d d'exposant α s'il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tels que*

$$\forall r \leq r_0, \omega_f^M(r) \geq C_0 r^\alpha.$$

On notera $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$. On peut alors définir l'exposant d'irrégularité uniforme de la fonction f par

$$\mathcal{I}_f = \inf\{\alpha > 0, f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)\}.$$

Remarque 2.3.5 On peut avoir $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^d) \cap I^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si il existe deux constantes positives C_0, C_1 et un réel positif r_0 tel que :

$$\begin{cases} \forall r \leq r_0 & C_1 r^\alpha \leq \omega_f^M(r) \leq C_0 r^\alpha, \\ \forall r \geq r_0 & \omega_f^M(r) \leq C_0 \theta(r). \end{cases}$$

Des exemples de fonctions vérifiant ce type de propriétés seront données dans la suite (H est un réel compris entre 0 et 1) comme la fonction de Weierstrass ($b > 1$)

$$W_H(x) = \sum_{n \geq 0} b^{-nH} \cos(b^n x),$$

ou la fonction de Tagaki

$$K_H(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{-nH} q(2^n x),$$

avec

$$q(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ainsi que les généralisations du Mouvement Brownien Fractionnaire.

Remarque 2.3.6 L'ensemble $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un espace vectoriel : en effet la fonction nulle n'est jamais uniformément irrégulière. Il est alors assez naturel de considérer le complémentaire de $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ce qui va être fait dans la suite. Cet ensemble de fonctions, qui vérifient une certaine forme de régularité que l'on qualifiera de faible, semble alors être un bon candidat pour être un espace vectoriel. On verra (voir remarque 2.3.8) qu'il n'en est rien.

On va donc s'intéresser à cette notion de régularité plus faible que la régularité Höldérienne classique et donc à la propriété $f \notin I^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.3.7 Soit $\alpha > 0$, $M = [\alpha] + 1$. La fonction bornée f appartient à $C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si $f \notin I^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Plus précisément, $f \in C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si pour toute constante positive C il existe une suite d'échelles privilégiée telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_f^M(r_n) \leq C r_n^\alpha.$$

Remarque 2.3.8 L'ensemble $C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, pour deux fonctions bornées f_1 et f_2 , le fait que pour toute constante positive C il existe deux suites décroissantes positives $(r_{n,1})$ et $(r_{n,2})$ telles que pour tout entier n

$$\omega_{f_1}^M(r_{n,1}) \leq C r_{n,1}^\alpha, \quad \omega_{f_2}^M(r_{n,2}) \leq C r_{n,2}^\alpha,$$

n'impliquent aucunement qu'il existe une suite décroissante **commune** aux deux fonctions f_1 et f_2 , d'échelles (r_n) telle que pour tout entier n

$$\omega_{f_1+f_2}^M(r) \leq C r_n^\alpha$$

On pourra se reporter à la section 2.6 pour un contre exemple explicite construit à l'aide de séries d'ondelettes de deux fonctions f_1 et f_2 appartenant toutes deux à l'ensemble $C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ dont la somme n'appartient pas à l'ensemble $C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

La caractérisation ondelettes des deux notions d'irrégularité uniforme et de régularité uniforme faible va nécessiter de se placer dans le cadre plus général de la section précédente :

Définition 2.3.9 *On suppose que la fonction f est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Soit θ un module de continuité et $M \in \mathbb{N}$. On dit que f est θ uniformément irrégulière d'ordre M si il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tel que :*

$$\forall r \leq r_0, \omega_f^M(r) \geq C_0 \theta(r).$$

On notera alors $f \in I_\theta^M(\mathbb{R}^d)$.

On peut aussi définir une notion de fonction faiblement θ -uniformément irrégulière :

Définition 2.3.10 *On suppose que la fonction f est dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. La fonction f appartient à $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ si $f \notin I_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$*

Notation 2.3.11 *Soit α est un réel positif, $M = [\alpha] + 1$. Considérons deux cas particuliers.*

– *Si $\theta(r) = r^\alpha$, l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ tandis que l'ensemble $I_\theta^M(\mathbb{R}^d)$ est l'ensemble $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$.*

– *Si $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$, on notera $\mathcal{C}_{|\log|\beta,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ (resp $I_{|\log|\beta}^\alpha(\mathbb{R}^d)$) l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ (resp $I_\theta^M(\mathbb{R}^d)$).*

On va maintenant s'intéresser aux relations d'inclusions entre les ensembles $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$. Pour cela, on va montrer que ces ensembles se caractérisent en terme d'approximation polynomiale.

2.3.3 Résultats d'inclusions entre les ensembles $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$

L'objectif de cette section est de montrer le résultat suivant :

Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, toute fonction f uniformément irrégulière d'exposant α_1 est uniformément irrégulière d'exposant α_2 .

Ceci est équivalent à montrer que :

Proposition 2.3.12 *Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$ alors toute fonction f de $\mathcal{C}_w^{\alpha_2}(\mathbb{R}^d)$ est dans $\mathcal{C}_w^{\alpha_1}(\mathbb{R}^d)$.*

Avant de détailler la démonstration de ce résultat, on va faire quelques commentaires. Dans le cas où $[\alpha_1] = [\alpha_2]$, ces deux propositions sont évidentes. Par contre, si $[\alpha_1] < [\alpha_2]$, du fait que la définition des ensembles $\mathcal{C}_w^{\alpha_1}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{C}_w^{\alpha_2}(\mathbb{R}^d)$ fait intervenir deux modules de régularité différents, $\omega_f^{[\alpha_1]+1}$ et $\omega_f^{[\alpha_2]+1}$, ceci n'est pas immédiat. Pour démontrer cette proposition on va donc passer par une caractérisation de la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ en terme d'approximation polynomiale et on démontrera le résultat plus général suivant :

Proposition 2.3.13 *Si $M_1 \leq M_2$, $\theta_2 \leq \theta_1$, $r^{M_1} = o(\theta_1(r))$ alors :*

Toute fonction f de $\mathcal{C}_{\theta_2,w}^{M_2}(\mathbb{R}^d)$ est dans $\mathcal{C}_{\theta_1,w}^{M_1}(\mathbb{R}^d)$.

On commence par se donner la notation suivante :

Notation 2.3.14 Si $\ell \in \mathbb{N}$, et Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d , on note

$$E_\ell(f, \Omega) = \inf_{\deg(P) \leq \ell} \|f - P\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

On rappelle le résultat classique suivant (Théorème de Whitney) :

Théorème 2.3.15 Soit f une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$, et $M \in \mathbb{N}$, il existe une constante positive C_0 ne dépendant que de M et de d telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et pour tout réel r positif

$$E_{M-1}(f, B(x_0, r)) \leq C_0 \omega_f^M(r).$$

Ce théorème implique alors une caractérisation des ensembles $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ en terme d'approximation polynomiale :

Proposition 2.3.16 Soit $M = [\alpha] + 1$ et θ un module de continuité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$.
2. Pour toute constante positive C , il existe une suite décroissante de réels positifs $(r_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(2.3.3) \quad \sup_{x \in \mathbb{R}^d} E_{M-1}(f, B(x, r_n)) \leq C\theta(r_n).$$

Remarque 2.3.17 On peut reformuler la propriété (2.3.3) de la manière suivante :
Pour toute constante positive C , il existe une suite décroissante de réels positifs $(r_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un polynôme $P_{x, n}$ de degré au plus $M - 1$ vérifiant

$$(2.3.4) \quad \sup_{y \in B(x, r_n)} |f(y) - P_{x, n}(y)| \leq C\theta(r_n).$$

Preuve.

1. Supposons que $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$. Soit C une constante positive, et $(r_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_f^M(r_n) \leq C\theta(r_n).$$

D'après le théorème de Whitney, on a alors pour tout entier n

$$E_{M-1}(f, B(x, r_n)) \leq C_0 \omega_f^M(r_n).$$

Cela implique bien que l'on ait la propriété (2.3.3) qui soit vérifiée.

2. Il reste à montrer que si la relation (2.3.3) est vérifiée alors f est une fonction de $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$.

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h| \leq \frac{r_n}{M}$, et P un polynôme de degré inférieur ou égal à $M - 1$

$$|\Delta_h^M f(x)| \leq \sum_{i=0}^M |f(x + ih) - P(x + ih)| \leq M \|f - P\|_{L^\infty(B(x, r_n))}$$

Par passage à l'inf, sur tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $M - 1$, on a

$$|\Delta_h^M f(x)| \leq M E_{M-1}(f, B(x, r_n))$$

Donc

$$\sup_{|h| \leq r_n} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\Delta_h^M f(x)| \leq M \sup_{x \in \mathbb{R}^d} E_{M-1}(f, B(x, r_n))$$

Ce qui implique bien le résultat voulu.

□

On en déduit le résultat d'inclusion sur les ensembles $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ souhaité.

Preuve de la Proposition 2.3.13

On utilise la caractérisation de l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ donnée par la relation (2.3.4). On se donne donc f une fonction de $\mathcal{C}_{\theta_2,w}^{M_2}(\mathbb{R}^d)$, C est une constante positive fixée, et $(r_n)_n$ une suite décroissante de réels positifs telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^d$, il existe un polynôme $P_{x,n}$ de degré au plus $M_2 - 1$ vérifiant

$$\sup_{y \in B(x, r_n)} |f(y) - P_{x,n}(y)| \leq C \theta_2(r_n).$$

Pour tout x et n on note alors $\tilde{P}_{x,n}$ la partie du polynôme $P_{x,n}$ de degré inférieure ou égale à $M_1 - 1$. On a alors

$$\sup_{y \in B(x, r_n)} |f(y) - \tilde{P}_{x,n}(y)| \leq C \theta_2(r_n) + \sup_{y \in B(x, r_n)} |\tilde{P}_{x,n}(y) - P_{x,n}(y)| \leq C \theta_2(r_n) + r_n^{M_1}.$$

Ceci permet alors de conclure. La proposition 2.3.13 implique alors de manière directe la proposition 2.3.12.

On va maintenant s'intéresser au résultat central de ce chapitre et expliciter le lien entre le degré d'irrégularité uniforme d'une fonction et ses coefficients d'ondelettes.

2.4 Critères ondelettes d'irrégularité uniforme

Le résultat central démontré dans cette section est une caractérisation ondelettes (à un terme correctif d'ordre logarithmique près) de la propriété d'irrégularité uniforme :

Théorème 2.4.1 *Soit α un réel positif, $M = [\alpha] + 1$ et f une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

1. Si pour une certaine constante positive C_0 on a pour tout entier $j \geq 0$:

$$(2.4.1) \quad \max\left(\sup_{|\lambda| \leq 2^{-j}} (|c_\lambda|), 2^{-jM} \sup_{|\lambda| \geq 2^{-j}} (|\lambda|^{-M} |c_\lambda|)\right) \geq C_0 2^{-j\alpha},$$

alors $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

2. Si pour tout $\beta > 1$, f est une fonction uniformément Höldérienne de $I_{|\log|\beta}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier $j \geq 0$:

$$(2.4.2) \quad \max\left(\sup_{|\lambda| \leq 2^{-j}} (|c_\lambda|), 2^{-jM} \sup_{|\lambda| \geq 2^{-j}} (|\lambda|^{-M} |c_\lambda|)\right) \geq C_0 2^{-j\alpha}.$$

Remarque 2.4.2 On montrera en section 2.4.2 que l'hypothèse f est uniformément Höldérienne est bien nécessaire pour déduire des propriétés d'irrégularité uniforme de la fonction f une minoration des coefficients d'ondelettes. Par ailleurs, on ne peut pas s'affranchir d'une correction logarithmique dans le critère ondelettes d'irrégularité uniforme. On renvoie aussi à la section 2.4.2 pour un contre exemple explicite.

Remarque 2.4.3 On peut remarquer que contrairement à ce qui se passe pour la régularité Höldérienne forte, le cas α entier n'est pas à distinguer des autres.

Remarque 2.4.4 On peut noter si les coefficients d'ondelettes sont 'gros' à toutes les échelles alors la fonction f est uniformément irrégulière. En effet s'il existe une certaine constante positive C_0 telle que

$$(2.4.3) \quad \forall j \geq 0, \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \geq C_0 2^{-j\alpha},$$

alors la propriété (2.4.2) est bien vérifiée et la fonction f est ainsi bien uniformément irrégulière d'ordre α . On peut néanmoins remarquer qu'il ne s'agit en aucun cas d'une condition nécessaire. On étudiera notamment en section 2.6 l'exemple de séries d'ondelettes lacunaires, pour lesquelles la propriété 2.4.3 n'est pas vérifiée, dont on estimera l'exposant d'irrégularité uniforme.

On a un cas particulier important de ce théorème : celui où l'exposant de Hölder uniforme et celui d'irrégularité uniforme coïncident,

Proposition 2.4.5 Soit α un réel positif, $M = [\alpha] + 1$. Soit f une fonction uniformément Höldérienne. Alors

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{-\log_2\left(\sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|)\right)}{j} = \alpha \Leftrightarrow \mathcal{H}_f = \mathcal{I}_f = \alpha.$$

Remarque 2.4.6 Dans la section 2.5, on donnera des exemples très simples de fonctions vérifiant de telles propriétés comme la fonction de Weierstrass ou le Mouvement Brownien Fractionnaire.

Le théorème 2.4.1 est par contraposition, la conséquence directe d'une caractérisation ondelettes (à un terme correctif en log près) de la notion de régularité uniforme faible :

Proposition 2.4.7 Soit α un réel positif, $M = [\alpha] + 1$.

1. Si $f \in C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(2.4.4) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \leq C_0 C \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1} - jM}), \end{cases}$$

pour une certaine constante positive C_0 ne dépendant que de l'analyse multirésolution choisie (et donc pas de C).

2. Si la fonction f est uniformément Höldérienne et si pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(2.4.5) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \leq C \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1}} 2^{-jM}), \end{cases}$$

alors $f \in C_{|\log|\beta, w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel $\beta > 1$.

Remarque 2.4.8 On souligne qu'une fois encore le cas α entier n'est pas à distinguer des autres.

Pour démontrer ces résultats, on passera par l'intermédiaire de deux résultats plus généraux détaillés dans la section qui suit.

2.4.1 Deux critères ondelettes plus généraux

Les deux résultats généraux que l'on démontrera sont les suivants :

Proposition 2.4.9 Soit θ un module de continuité fort d'ordre M telle que la fonction

$$(2.4.6) \quad r \mapsto r^{-M} \theta(r),$$

soit décroissante sur un certain intervalle $(0, r_0)$.

1. Si $f \in C_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ alors pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(2.4.7) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \leq C_0 C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})), \end{cases}$$

pour une certaine constante positive C_0 ne dépendant pas de C .

2. Si la fonction f est uniformément Höldérienne et si pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(2.4.8) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})), \end{cases}$$

alors $f \in C_{|\log|\beta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel $\beta > 1$.

Remarque 2.4.10 Pour α entier, le module de continuité $\theta(r) = r^\alpha$ n'est pas un module de continuité fort d'ordre $M = \alpha + 1$. Néanmoins, comme on le verra en section 2.4.3.3, la démonstration de la proposition 2.4.9 se prolonge à ce cas là.

En contraposant la proposition suivante, on obtient :

Théorème 2.4.11 *Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et θ un module de continuité fort d'ordre M vérifiant la propriété (2.4.6).*

1. *Si pour une certaine constante positive C_0 on a pour tout entier $j \geq 0$:*

$$(2.4.9) \quad \max\left(\sup_{|\lambda| \leq 2^{-j}} (|c_\lambda|), 2^{-jM} \sup_{|\lambda| \geq 2^{-j}} (|\lambda|^{-M} |c_\lambda|)\right) \geq C_0 \theta(2^{-j}),$$

alors $f \in I_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$.

En particulier, s'il existe une certaine constante positive C_0 telle que

$$(2.4.10) \quad \forall j \geq j_0, \sup_{|\lambda|=2^{-j}} (|c_\lambda|) \geq C_0 \theta(2^{-j}),$$

la fonction f est dans $I_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$.

2. *Si f est une fonction uniformément Höldérienne de $I_{|\log|\beta\theta}^M(\mathbb{R}^d)$ alors il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier $j \geq 0$ on ait :*

$$(2.4.11) \quad \max\left(\sup_{|\lambda| \leq 2^{-j}} (|c_\lambda|), 2^{-jM} \sup_{|\lambda| \geq 2^{-j}} (|\lambda|^{-M} |c_\lambda|)\right) \geq C_0 \theta(2^{-j}).$$

Il s'agit maintenant de montrer qu'il est bien nécessaire de faire une hypothèse de régularité Höldérienne pour pouvoir déduire de la majoration (2.4.8) des coefficients d'ondelettes d'une certaine fonction f des propriétés de régularité uniforme faible. C'est l'objet de la section suivante. On montrera de plus qu'on a nécessairement une perte log dans le critère ondelette de régularité uniforme faible.

2.4.2 Optimalité des hypothèses et de la correction logarithmique dans les critères ondelettes

Pour construire les deux contre-exemples voulus, on va s'inspirer de ce qui a été fait dans [?]. On commence par montrer la nécessité de l'hypothèse de régularité Höldérienne uniforme dans le critère ondelettes de régularité Höldérienne uniforme faible.

2.4.2.1 Un exemple de fonction uniformément irrégulière, vérifiant le critère (2.4.8) mais non uniformément Höldérienne

Soit $\alpha \in (0, 1)$. On considère les deux suites $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$\begin{cases} j_0 = \ell_0, \\ \forall n \geq 0, j_{n+1} = \lceil \frac{1}{1-\alpha} 2^{j_n \alpha} - j_n \alpha \rceil, \\ \forall n \geq 0, j_{n,\alpha} = \lceil 2^{j_n \alpha} \rceil, \end{cases}$$

qui sont deux suites convergent toutes deux beaucoup plus vite vers l'infini qu'une suite géométrique.

Proposition 2.4.12 *Soit ψ une ondelette à support compact telle que $\text{supp}(\psi) \subset [-2^{\ell_0}, 2^{\ell_0}]$ où ℓ_0 est un entier fixé. On suppose de plus que $\psi(0) \neq 0$. Soit f la fonction définie par*

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-jn\alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\alpha}} \sum_{\ell=j+2}^{j_{n,\alpha}} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)})) + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} \sum_{j=j_{n,\alpha}+1}^{j_{n+1}-1} \sum_{\ell=j+2}^{j_{n+1}} 2^{-\ell} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)})) \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_{n+1}\alpha} \sum_{j=j_{n,\alpha}+1}^{j_{n+1}-1} \sum_{\ell=j_{n+1}}^{j_{n+1},\alpha} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)})) \end{aligned}$$

où ε est un réel strictement compris entre 0 et 1 fixé. Alors les coefficients d'ondelettes de la fonction f vérifient bien le critère (2.4.8). De plus $f \in I^\beta(\mathbb{R}^d)$ avec

$$\beta = \max\left(\alpha\varepsilon, \frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha) + \alpha\varepsilon}\right) < \alpha.$$

Ainsi f est un contre-exemple de fonction non uniformément Höldérienne uniformément irrégulière dont les coefficients d'ondelettes vérifient (2.4.4).

Preuve. On pose alors pour tout entier n

$$\text{Pour } j \in \{j_n, \dots, j_{n,\alpha}\}, f_j(x) = \sum_{\ell=j+2}^{j_{n,\alpha}} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)})),$$

$$\text{Pour } j \in \{j_{n,\alpha}, \dots, j_{n+1}-1\}, f_j(x) = \sum_{\ell=j+2}^{j_{n+1}} 2^{-\ell} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)})) + \sum_{\ell=j_{n+1}}^{j_{n+1},\alpha} \ell^{-\varepsilon} \psi(2^\ell(x - 2^{-(j-\ell_0)}))$$

On remarque alors que les supports des f_j sont disjoints car $\text{supp}(f_j) \subset [3 \cdot 2^{-(j+2-\ell_0)}, 5 \cdot 2^{-(j+2-\ell_0)}]$.

De plus $f(0) = 0$. On calcule alors $f(2^{-(j-\ell_0)}) = f_j(2^{-(j-\ell_0)})$ en distinguant les deux cas

$j \in \{j_n, \dots, j_{n,\alpha}\}$, $j \in \{j_{n,\alpha}, \dots, j_{n+1}-1\}$ pour un certain entier n .

Si $j \in \{j_n, \dots, j_{n,\alpha}\}$

$$f(2^{-(j-\ell_0)}) = 2^{-jn\alpha} \left(\sum_{\ell=j+2}^{j_{n,\alpha}} \ell^{-\varepsilon} \right) \psi(0) \geq 2^{-jn\alpha} ((j_{n,\alpha} + 1)^{1-\varepsilon} - (j+2)^{1-\varepsilon})$$

Or pour $j_n \leq j \leq \frac{j_{n,\alpha}}{2}$

$$2^{-jn\alpha} ((j_{n,\alpha} + 1)^{1-\varepsilon} - (j+2)^{1-\varepsilon}) \geq 2^{-jn\alpha} (j_{n,\alpha} + 1)^{1-\varepsilon} (1 - 2^{-(1-\varepsilon)}) \geq C_0 2^{-j\alpha\varepsilon},$$

alors que pour $\frac{j_{n,\alpha}}{2} \leq j \leq j_{n,\alpha}$

$$2^{-jn\alpha} \left(\sum_{\ell=j+2}^{j_{n,\alpha}} \ell^{-\varepsilon} \right) \psi(0) \geq 2^{-jn\alpha} j_{n,\alpha}^{-\varepsilon} \geq j^{-1-\varepsilon}.$$

Dans tous les cas on a donc pour $j \in \{j_n, \dots, j_{n,\alpha}\}$, $f(2^{-(j-\ell_0)}) \geq C_0 2^{-j\alpha\varepsilon}$.

Si $j \in \{j_{n,\alpha} + 1, \dots, j_{n+1} - 1\}$

$$f(2^{-(j-\ell_0)}) = \left(2^{j_{n+1}(1-\alpha)} \sum_{\ell=j+2}^{j_{n+1}} 2^{-\ell} \ell^{-\varepsilon} + 2^{-j_{n+1}\alpha} \sum_{\ell=j_{n+1}}^{j_{n+1},\alpha} \ell^{-\varepsilon} \right) \psi(0)$$

On minore alors $f(2^{-(j-\ell_0)})$ de la manière suivante

$$f(2^{-(j-\ell_0)}) \geq C_0(2^{j_{n+1}(1-\alpha)}2^{-j}j^{-\varepsilon} + 2^{-j_{n+1}\alpha}j_{n+1}^{1-\varepsilon}) = C_0(2^{j_{n+1}(1-\alpha)}2^{-j}j^{-\varepsilon} + 2^{-j_{n+1}\alpha\varepsilon})$$

On en déduit alors que pour $j_{n,\alpha} + 1 \leq j \leq ((1-\alpha) + \alpha\varepsilon)j_{n+1}$

$$f(2^{-(j-\ell_0)}) \geq C_02^{j\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)+\alpha\varepsilon}}2^{-j}j^{-\varepsilon} = C_02^{-j\frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha)+\alpha\varepsilon}}j^{-\varepsilon}$$

et que pour $((1-\alpha) + \alpha\varepsilon)j_{n+1} \leq j \leq j_{n+1} - 1$

$$f(2^{-(j-\ell_0)}) \geq C_02^{-j_{n+1}\alpha\varepsilon} \geq C_02^{-j\frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha)+\alpha\varepsilon}}$$

On a donc bien $f \in I^\beta(\mathbb{R}^d)$ avec $\beta = \max(\alpha\varepsilon, \frac{\alpha\varepsilon}{(1-\alpha) + \alpha\varepsilon}) < \alpha$ alors que le critère ondelettes (2.4.8) est lui vérifié. \square

2.4.2.2 Nécessité de la correction logarithmique dans les critères ondelettes

On se donne $\varepsilon \in (0, 1)$, β un réel supérieur à 1, et $(j_n)_n$ la suite définie par

$$\forall n \geq 0, j_n = [\beta^n].$$

On considère alors la famille de séries trigonométriques $(f_{\alpha,\beta,\varepsilon})$ suivante :

$$(2.4.12) \quad f_{\alpha,\beta,\varepsilon}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=j_{n+1}}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)}2^{-j})}{j^\varepsilon} \sin(2^j \pi x),$$

où α est un réel compris entre 0 et 1. C'est cette famille de fonction qui va constituer le contre-exemple recherché. On va tout d'abord calculer les coefficients d'ondelettes des fonctions $f_{\alpha,\beta,\varepsilon}$:

Proposition 2.4.13 *On prend pour ondelette l'ondelette de Meyer. Les coefficients d'ondelettes de la fonction $f_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ vérifient pour tout entier n supérieur à 1, tout $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$: pour toute constante positive C , à partir d'un certain rang*

$$(2.4.13) \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}} |c_{j,k}| \leq C \inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)}2^{-j}).$$

Preuve. On rappelle que l'ondelette de Meyer est dans la classe de Schwartz, est de transformée de Fourier paire à support compact telle que

$$(2.4.14) \quad \text{supp}(\widehat{\psi}) \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right].$$

On en déduit alors que pour tout entier n et tout $\ell \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$ et tout k

$$\begin{aligned}
 c_{\ell,k} &= 2^\ell \int f_{\alpha,\beta,\varepsilon}(x) \psi(2^\ell x - k) dx \\
 &= 2^\ell \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \int \sin(2^j \pi x) \psi(2^\ell x - k) dx \\
 &= 2^\ell \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \frac{1}{2i} \left(\int e^{i2^j \pi x} \psi(2^\ell x - k) dx - \int e^{-i2^j \pi x} \psi(2^\ell x - k) dx \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \frac{1}{2i} \left(e^{i2^{j-\ell} k \pi} \widehat{\psi}(2^{j-\ell} k) - e^{-i2^{j-\ell} k \pi} \widehat{\psi}(-2^{j-\ell} k) \right) \\
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \sin(2^{j-\ell} k \pi) \widehat{\psi}(2^{j-\ell} k)
 \end{aligned}$$

On remarque alors qu'en utilisant la propriété (2.4.14) des ondelettes de Meyer, la somme ci dessus contient au plus les cinq termes $\{\ell - \log_2(k), \ell - \log_2(k) + 1, \ell - \log_2(k) + 2, \ell - \log_2(k) + 3, \ell - \log_2(k) + 4\}$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$ on a bien l'estimation voulue. \square

Par ailleurs on a des résultats d'irrégularité uniforme concernant les fonctions $f_{\alpha,\beta,\varepsilon}$.

Proposition 2.4.14 *Pour tout $\beta > 1$, $(\alpha, \varepsilon) \in (0, 1)^2$ la fonction $f_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ appartient à l'ensemble $I_{|\log|^{1-\varepsilon}}^\alpha(\mathbb{R})$. Ainsi les séries trigonométriques $f_{\alpha,\beta,\varepsilon}$ constituent une famille de contre-exemples de fonctions à la fois uniformément Höldériennes, vérifiant la propriété (2.4.4), appartenant pourtant à l'ensemble $I_{|\log|^{1-\varepsilon}}^\alpha(\mathbb{R})$.*

Preuve. On remarque qu'il suffit pour cela de minorer pour tout ℓ , $f(2^{-\ell})$ par $2^{-\alpha\ell} \ell^{1-\varepsilon}$. Soit n_0 un entier et $\ell \in \{j_{n_0+1}, \dots, j_{n_0+1}\}$. On va minorer $f(2^{-\ell})$:

$$f_{\alpha,\beta,\varepsilon}(2^{-j_{n_0}}) = \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \sin(2^j 2^{-\ell} \pi) + \sum_{j=j_{n_0+1}}^{\ell-1} \frac{\inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} \sin(2^j \pi 2^{-\ell})$$

On utilise alors l'inégalité classique :

$$\text{Sur } [0, \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi} x.$$

On en déduit que, si $j_{n_0} + 1 \leq \ell \leq j_{n_0+1}$:

$$\begin{aligned}
 f_{\alpha,\beta,\varepsilon}(2^{-\ell}) &\geq \sum_{j=j_{n_0+1}}^{\ell-1} \frac{\inf(2^{-j_n\alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j})}{j^\varepsilon} 2^{j-\ell} \\
 &\geq 2 \cdot 2^{-\ell} \cdot \inf(2^{-j_{n_0}\alpha} 2^\ell \ell^{1-\varepsilon}, \ell^{1-\varepsilon} 2^{j_{n_0+1}(1-\alpha)}) \\
 &\geq 2 \inf(\ell^{1-\varepsilon} 2^{-j_{n_0}\alpha}, \ell^{1-\varepsilon} 2^{-\ell} 2^{j_{n_0+1}(1-\alpha)})
 \end{aligned}$$

Soit alors $t \in (1, \beta)$ tel que $\ell = t j_{n_0}$. On a alors $j_{n_0} = \frac{\ell}{t}$. On en déduit que

$$f_{\alpha,\beta,\varepsilon}(2^{-\ell}) \geq 2 \cdot \inf(\ell^{1-\varepsilon} 2^{-\ell \frac{\alpha}{t}}, \ell^{1-\varepsilon} 2^{-\ell(1-\frac{\beta\ell}{t} + \frac{\alpha\beta\ell}{t})})$$

Comme $\sup_{t \in [1, \beta]} \max(\frac{\alpha}{t}, 1 - \frac{\beta t}{t} + \frac{\alpha \beta t}{t}) \leq \alpha$, on obtient bien le résultat voulu. \square

On va maintenant détailler dans les sections suivantes la démonstration proprement dite des critères ondelettes de régularité uniforme faible.

2.4.3 Preuve des critères ondelettes

Dans cette section, l'objectif est de caractériser la propriété $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$ ou de manière plus générale $f \in I_{\theta, s}^M(\mathbb{R}^d)$ par des conditions portant sur les coefficients d'ondelettes de la fonction f . Pour cela, on va contraposer le problème et chercher à caractériser par ondelettes la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$. Ceci ne permettra pas directement d'aboutir. Il va falloir utiliser les propriétés remarquables d'un module de régularité uniforme d'ordre M d'une fonction pour obtenir une caractérisation beaucoup plus maniable de la notion de régularité faible (section 2.4.3.1). Ceci va alors amener à s'intéresser à des modules de continuité, dits faibles, vérifiant des propriétés particulières (section 2.4.3.2). Le résultat souhaité en découlera alors (sections 2.4.3.3 et 2.4.3.4).

2.4.3.1 Une autre caractérisation de la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$

On va commencer par expliquer les difficultés rencontrées, lorsqu'on cherche à caractériser la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$, puis à expliquer la stratégie que l'on va adopter pour les contourner. Comme la fonction ω_f^M est croissante, dire que f appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ est équivalent à dire que pour toute constante positive C , il existe une suite de réels strictement décroissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]r_{n+1}, r_n] \quad \omega_f^M(r) \leq C\theta(r_n).$$

Cela signifie donc que le module de régularité d'ordre M de la fonction f est majoré sur un certain intervalle $]0, r_0]$ par une fonction en escaliers Θ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in]r_{n+1}, r_n], \quad \Theta(r) = C\theta(r_n).$$

A priori cette fonction Θ ne vérifie pas de bonnes propriétés : ce n'est notamment pas nécessairement un module de continuité. En effet, si n_0 est un entier fixé, $\Theta(r_{n_0}) = C\theta(r_{n_0})$ alors que $\Theta(2r_{n_0}) \geq C\theta(r_{n_0-1})$. Dans le cas où $\limsup_n (r_{n-1}/r_n) = +\infty$, la fonction Θ n'est alors pas un module de continuité. Cela rend difficile le maniement de la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$, du moins si on part directement de la définition donnée plus haut. En fait, et c'est l'objet de la proposition qui suit, on se rend compte que la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ se caractérise par une majoration beaucoup plus fine de $\omega_f^M(r)$ que prévue. Ceci va découler du fait que les accroissements à différentes échelles sont nécessairement liés.

Proposition 2.4.15 *La fonction f est dans $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :*

$$(2.4.15) \quad \begin{cases} \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \omega_f^M(2^{-j}) \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)}\theta(2^{-j_{n+1}})). \end{cases}$$

Preuve. On rappelle que (voir plus haut) par croissance de $\omega_f^M(r)$ $f \in \mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(2.4.16) \quad \forall n \geq 0, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \omega_f^M(2^{-j}) \leq C\theta(2^{-j_n}).$$

On va maintenant supposer que la propriété (2.4.16) est vérifiée et montrer qu'on a alors (2.4.15) qui est vérifiée. On utilise pour cela le lemme classique suivant, voir par exemple [PP87], dont on rappelle la démonstration :

Lemme 2.4.16 *Pour tout entier ℓ et tout réel positif r on a :*

$$(2.4.17) \quad \omega_f^\ell(2r) \leq 2^\ell \omega_f^\ell(r).$$

Preuve du lemme 2.4.16.

En effet, par définition

$$\omega_f^\ell(2r) = \sup_{|h'| \leq 2r} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (|\Delta_{h'}^\ell f(x)|) = \sup_{|h| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (|\Delta_{2h}^\ell f(x)|).$$

On utilise alors la formule suivante, qui se démontre par récurrence sur ℓ :

$$(2.4.18) \quad \Delta_{2h}^\ell f(x) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{\ell}{i} \Delta_h^\ell f(x + ih).$$

La formule est triviale pour $\ell = 1$. De plus, si la formule (2.4.18) est vraie pour un certain entier ℓ :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{i} \Delta_h^{\ell+1} f(x + ih) &= \sum_{i=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{i} (\Delta_h^\ell f(x + (i+1)h) - \Delta_h^\ell f(x + ih)) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell+1} \left(\binom{\ell+1}{i-1} - \binom{\ell+1}{i} \right) \Delta_h^\ell f(x + ih) + \Delta_h^\ell f(x + (\ell+2)h) - \Delta_h^\ell f(x) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell+1} \left(\binom{\ell+1}{i-2} - \binom{\ell+1}{i-1} \right) \Delta_h^\ell f(x + ih) + \Delta_h^\ell f(x + (\ell+2)h) - \Delta_h^\ell f(x) \\ &= \Delta_{2h}^\ell f(x + h) - \Delta_{2h}^\ell f(x) \end{aligned}$$

(la dernière égalité découle de l'hypothèse de récurrence). La formule (2.4.18) implique alors immédiatement l'inégalité (2.4.17).

Fin de la preuve de la proposition 2.4.15.

On utilise maintenant l'équation (2.4.17) avec $\ell = M$ et l'équation (2.4.16).

Pour tout entier n et tout entier j de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$:

$$\omega_f^M(2^{-j}) = \omega_f^M(2^{j_{n+1}-j} 2^{-j_{n+1}}) \leq 2^{M(j_{n+1}-j)} \omega_f^M(2^{-j_{n+1}}) \leq 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}}).$$

Donc la propriété (2.4.15) est vraie. La réciproque est elle évidente. \square

On a ainsi réexprimé la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$ en majorant ω_f^M par une fonction $\tilde{\theta}$ inférieure à Θ , qui est cette fois ci bien un module de continuité :

Lemme 2.4.17 *Soit θ un module de continuité tel que, pour r_0 suffisamment petit, la fonction $r \mapsto r^{-M}\theta(r)$ soit décroissante sur $(0, r_0)$. Soit $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante donnée.*

La fonction $\tilde{\theta}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :

$$(2.4.19) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}] \\ \tilde{\theta}(r) = \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{Mj_{n+1}}\theta(2^{-j_{n+1}})r^M), \end{cases}$$

est bien un module de continuité.

Remarque 2.4.18 *Ce module de continuité vérifie des hypothèses plus faibles que (2.2.3) et (2.2.4). Cela va conduire à introduire la notion de module de continuité faible d'ordre M .*

Preuve. En prolongeant par continuité la fonction $\tilde{\theta}$ en 0, on peut bien poser $\tilde{\theta}(0) = 0$. On vérifie de plus que $\tilde{\theta}(2x) \leq 2^M \tilde{\theta}(x)$.

En effet si pour un certain n positif, $2^{-(j_{n+1}-1)} \leq r \leq 2^{-(j_{n+1})}$, comme $2^{-(j_{n+1}-2)} \leq 2r \leq 2^{-j_n}$ on a :

$$\tilde{\theta}(2r) = \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{j_{n+1}M}\theta(2^{-j_{n+1}})(2r)^M) \leq 2^M \tilde{\theta}(r).$$

Si maintenant pour un certain entier n positif $2^{-(j_n+1)} \leq r \leq 2^{-j_n}$, comme $2^{-(j_n)} \leq 2r \leq 2^{-(j_n-1)}$ on a :

$$\tilde{\theta}(2r) = \inf(\theta(2^{-j_{n-1}}), 2^{j_n M}\theta(2^{-j_n})(2r)^M) \leq 2^M (2^{j_n} r)^M \theta(2^{-j_n})$$

Or la fonction $r \mapsto r^{-M}\theta(r)$ est décroissante sur $(0, r_0)$. Donc $2^{j_n M}\theta(2^{-j_n}) \leq 2^{j_{n+1} M}\theta(2^{-j_{n+1}})$ ce qui implique bien que

$$\tilde{\theta}(2r) \leq 2^M \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{j_{n+1} M}\theta(2^{-j_{n+1}})r^M).$$

□

Remarque 2.4.19 *On se rend compte donc que la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ est une forme de régularité plus faible que la régularité uniforme usuelle, mais analogue, faisant intervenir un module de continuité (qu'on qualifiera de faible) $\tilde{\theta}$ dont on va préciser les propriétés dans la section suivante. C'est cela qui fait que cette notion est beaucoup plus maniable que celle de fonction θ -uniformément irrégulière introduite initialement.*

Muni du résultat de la proposition 2.4.15, on va être capable de donner une quasi-caractérisation (à un terme correctif en log près) de la propriété $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ par des conditions portant sur les coefficients d'ondelettes de f . Pour cela on va introduire la notion de module de continuité faible d'ordre M .

2.4.3.2 Notion de module de continuité faible d'ordre M

Définition 2.4.20 *Le module de continuité θ est un module de continuité faible d'ordre M s'il existe une certaine constante positive C_0 , telle que pour tout entier J positif et tout réel β supérieur à 1 on ait simultanément :*

$$(2.4.20) \quad \sum_{j=0}^J 2^{Mj}\theta(2^{-j}) \leq C_0 J 2^{MJ}\theta(2^{-J}).$$

$$(2.4.21) \quad \sum_{j \geq J} \frac{\theta(2^{-j}) |\log(\theta(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} \leq C_0 J^\beta \theta(2^{-J}).$$

$$(2.4.22) \quad 2^{-Mj} \underset{j=+\infty}{=} O(\theta(2^{-j})).$$

On donne maintenant deux exemples de modules de continuité faibles :

Exemple 2.4.21 *Si α est un réel positif, $\theta(r) = r^\alpha$ est un module de continuité faible d'ordre $M = [\alpha] + 1$ même dans le cas où α est entier. En effet, si α n'est pas entier pour J suffisamment grand*

$$\sum_{j=0}^J 2^{Mj} 2^{-\alpha j} \leq C_0 2^{(M-\alpha)J},$$

alors que pour α entier

$$\sum_{j=0}^J 2^{(\alpha+1)j} 2^{-\alpha j} \leq C_0 J 2^J.$$

Dans tous les cas, la propriété (2.4.20) est donc vérifiée.

Par ailleurs

$$\sum_{j \geq J} \frac{2^{-\alpha j} |\log(2^{-\alpha j})|^\beta}{j^\beta} \leq C_0 2^{-J\alpha} \leq C_0 J^\beta \theta(2^{-J}).$$

La propriété (2.4.22) est elle dans tous les cas vérifiée

Exemple 2.4.22 *De même si $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$, $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ est un module de continuité faible même dans le cas où α est entier.*

Comme on peut le voir à travers les deux exemples précédents, la notion de module de continuité fort est plus forte que celle de module de continuité faible :

Lemme 2.4.23 *Si θ est un module de continuité fort d'ordre M alors θ est bien un module de continuité faible d'ordre M .*

On va faire quelques commentaires sur ces deux notions de modules de continuité fort et faible. De manière plus précise, la condition (2.4.20) qui a remplacé la condition (2.2.3) dont elle est très proche, implique qu'à partir d'un certain rang J_0

$$(2.4.23) \quad \forall J \geq J_0, \theta(2^{-J}) \geq C_0 \frac{2^{-MJ}}{J},$$

et donc que

$$\liminf \frac{\log(\theta(2^{-J}))}{\log(2^{-J})} \geq M.$$

On aura donc si θ est un module de continuité faible d'ordre M

$$\mathcal{C}^{M+\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d).$$

pour tout réel positif ε . On peut remarquer à ce stade là, que la condition (2.4.20) n'implique pas la propriété (2.4.22) qui n'est donc pas superflue.

La condition (2.4.21), est elle par contre beaucoup plus faible que la condition (2.2.4). Elle implique que pour tout réel $\beta > 1$, à partir d'un certain rang J_0

$$\forall J \geq J_0, \theta(2^{-J}) \leq C_0 \frac{1}{J^\beta},$$

La condition (2.2.4), qui impliquait en particulier que

$$\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}^{M-1}(\mathbb{R}^d).$$

est donc remplacée par une condition beaucoup plus faible. On peut maintenant donner une classe d'exemples de modules de continuité faibles d'ordre M qui sera utile lors de la caractérisation ondelettes de la régularité Höldérienne faible.

Lemme 2.4.24 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M telle que pour un certain réel positif r_0 , la fonction $r \mapsto r^{-M}\theta(r)$ soit décroissante sur $(0, r_0)$. Soit $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante donnée.*

La fonction $\tilde{\theta}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}(r) = \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{j_{n+1}M}\theta(2^{-j_{n+1}})r^M),$$

est bien un module de continuité faible d'ordre M .

Preuve. Par le lemme 2.4.17, on sait déjà que la fonction $\tilde{\theta}$ est un module de continuité. Il reste donc à montrer que la fonction $\tilde{\theta}$ vérifie les conditions (2.4.20), (2.4.21) et (2.4.22).

Soit n_0 tel que $j_{n_0} \leq J \leq j_{n_0+1} - 1$.

On commence par montrer que la condition (2.4.20) est vérifiée.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) &= \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{Mj} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)}\theta(2^{-j_{n+1}})) \\ &\quad + \sum_{j=j_{n_0}}^{J-1} 2^{Mj} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)}\theta(2^{-j_{n_0+1}})) \\ &\leq \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) + \sum_{n=0}^{n_0-1} j_{n+1} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) \\ &\quad + \sum_{j=j_{n_0}}^{J-1} 2^{Mj} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)}\theta(2^{-j_{n_0+1}})) \end{aligned}$$

On applique alors la propriété (2.2.3) d'un module de continuité fort d'ordre M à la somme

$$\sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) \text{ et on obtient :}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) &\leq C_0(1 + j_{n_0} 2^{j_{n_0}M} \theta(2^{-j_{n_0}}) + J \inf(2^{JM} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{Mj_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}}))) \\ &\leq 3C_0 J 2^{JM} \tilde{\theta}(2^{-J}) \end{aligned}$$

On s'intéresse maintenant à la condition (2.4.21).

$$\sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j})|\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} \leq \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j})|\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{\theta(2^{-j_n})|\log(\theta(2^{-j_n}))|^\beta}{j^\beta}$$

Or l'équation (2.4.23) qui découle de la propriété (2.4.20) implique en particulier qu'à partir d'un certain rang

$$|\log(\theta(2^{-j}))| \leq C(M)j \log(2).$$

Donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j})|\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} &\leq C_0 \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\inf(j_{n_0}^\beta \theta(2^{-j_{n_0}}), j^\beta 2^{M(j_{n_0+1}-j)} \theta(2^{-j_{n_0+1}}))}{j^\beta} \\ &\quad + C_0 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n^\beta \theta(2^{-j_n}) \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{1}{j^\beta} \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n^\beta \theta(2^{-j_n}) \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{1}{j^\beta} \leq \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n \theta(2^{-j_n}) = \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (j_n 2^{-j_n(M-1)}) (2^{j_n(M-1)} \theta(2^{-j_n})).$$

Or par la propriété (2.2.4) d'un module de continuité fort :

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} (j_n 2^{-j_n(M-1)}) (2^{j_n(M-1)} \theta(2^{-j_n})) \leq j_{n_0+1} 2^{-j_{n_0+1}(M-1)} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{j_n(M-1)} \theta(2^{-j_n}) \leq j_{n_0+1} \theta(2^{-j_{n_0+1}}).$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j})|\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} &\leq C_0 \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\inf(j_{n_0}^\beta \theta(2^{-j_{n_0}}), j^\beta 2^{M(j_{n_0+1}-j)} \theta(2^{-j_{n_0+1}}))}{j^\beta} + j_{n_0+1} \theta(2^{-j_{n_0+1}}) \\ &\leq C_0 \inf(j_{n_0} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) + j_{n_0+1} \theta(2^{-j_{n_0+1}}) \\ &\leq C_0 J^\beta \tilde{\theta}(2^{-J}) \end{aligned}$$

La propriété (2.4.22) est vérifiée elle de manière évidente par l'application de la propriété (2.2.5) d'un module de continuité fort d'ordre M . \square

Dans le cas, où α est un réel positif $\theta(r) = r^\alpha$, on en déduit le lemme suivant :

Lemme 2.4.25 *Soit α un réel positif et $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante donnée.*

La fonction $\tilde{\theta}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :

$$(2.4.24) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}(r) = \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{j_{n+1}(M-\alpha)} r^M),$$

est bien un module de continuité faible d'ordre $M = [\alpha] + 1$.

Preuve. Seul le cas α entier ne découle pas du lemme précédent. Ici la condition (2.4.21) est beaucoup plus faible que la condition (2.2.4) et va donc être vérifiée. On va détailler maintenant la preuve. Soit donc $j_{n_0} \leq J \leq j_{n_0+1} - 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) &= \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{Mj} \inf(2^{-jn\alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1}-jM}) \\ &\quad + \sum_{j=j_{n_0}}^{J-1} 2^{Mj} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n_0+1}-jM}) \end{aligned}$$

On obtient alors en tenant compte du fait que $M = \alpha + 1$:

$$\sum_{j=0}^J 2^{Mj} \tilde{\theta}(2^{-j}) \leq C_0(1 + j_{n_0} 2^{j_{n_0}} + J \inf(2^{JM} 2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}}))$$

On s'intéresse maintenant à la condition (2.4.21).

$$\sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j}) |\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} \leq \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j}) |\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{\theta(2^{-j_n}) |\log(\theta(2^{-j_n}))|^\beta}{j^\beta}$$

Par un raisonnement similaire à celui du lemme précédent :

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j}) |\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} &\leq C_0 \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\inf(j_{n_0}^\beta 2^{-j_{n_0}\alpha}, j^\beta 2^{M(j_{n_0+1}-j)} 2^{-j_{n_0+1}\alpha})}{j^\beta} \\ &\quad + C_0 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n^\beta 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{1}{j^\beta} \end{aligned}$$

On remarque alors que la somme $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n^\beta 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{1}{j^\beta}$ est inférieure à $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n 2^{-j_n\alpha}$.

On en déduit alors par la transformation d'Abel que :

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} j_n 2^{-j_n\alpha} &\leq \sum_{j=j_{n_0+1}}^{+\infty} j 2^{-j\alpha} \\ &= \sum_{j=j_{n_0+1}}^{+\infty} \left(j \sum_{\ell \geq j} 2^{-\ell\alpha} - j \sum_{\ell \geq j+1} 2^{-\ell\alpha} \right) \\ &= j_{n_0+1} \sum_{\ell \geq j_{n_0+1}} 2^{-\ell\alpha} + \sum_{j=j_{n_0+1}}^{+\infty} j \sum_{\ell \geq j} 2^{-\ell\alpha} \\ &= C_0 j_{n_0+1} 2^{-j_{n_0+1}\alpha} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j}) |\log(\tilde{\theta}(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta} &\leq C_0 \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} \frac{\inf(j_{n_0}^\beta 2^{-j_{n_0}\alpha}, j^\beta 2^{M(j_{n_0+1}-j)} 2^{-j_{n_0+1}\alpha})}{j^\beta} + C_0 j_{n_0+1} 2^{-j_{n_0+1}\alpha} \\ &\leq C_0 \inf(j_{n_0} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) + C_0 j_{n_0+1} 2^{-j_{n_0+1}\alpha} \\ &\leq C_0 J^\beta \tilde{\theta}(2^{-J}) \end{aligned}$$

La propriété (2.4.22) est vérifiée elle de manière évidente. \square

On va maintenant démontrer les critères énoncés en début de section et montrer ainsi que les résultats de la proposition 1.1 de [JafMey96] s'étendent au cadre plus général de la régularité faible.

2.4.3.3 Preuve de la proposition 2.4.9

Les résultats de la proposition 2.4.9 découlent alors de deux propositions : les propositions 2.4.26 et 2.4.28 que l'on énonce et démontre dans cette section.

Proposition 2.4.26 *Soit $\tilde{\theta}$ un module de continuité et f une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Si pour une certaine constante positive C et un certain entier j_θ*

$$\forall j \geq j_\theta, \omega_f^M(2^{-j}) \leq C\tilde{\theta}(2^{-j}),$$

alors :

$$\forall j \geq j_\theta, \sup_{i,k} (|c_{j,k}^i|) \leq C_0 C \tilde{\theta}(2^{-j}),$$

la constante positive C_0 ne dépendant que de l'analyse multi-résolution M -régulière choisie.

Preuve. On utilise la propriété suivante des ondelettes unidimensionnelles démontrée dans (Lemme 2 de [Jaf04]) :

Lemme 2.4.27 *On suppose que l'analyse multirésolution est M -régulière alors il existe une fonction Ψ_M à décroissance rapide telle que :*

$$\psi = \Delta_{\frac{1}{2}}^M \Psi_M.$$

On se place maintenant en dimension d et on utilise une base d'ondelette construite par produit tensoriel. Alors

$$\psi^i(x) = \Psi^1(x_1) \cdots \Psi^d(x_d),$$

où pour tout i , Ψ^i vaut ψ ou ϕ mais où au moins une de ces fonctions vaut ψ . Supposons par exemple que $\Psi^1 = \psi$. On a alors pour tout $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, $j \geq j_\theta$ et $k \in \mathbb{Z}^d$:

$$\begin{aligned} c_{j,k}^i &= 2^{jd} \int f(x) \Psi^1(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d) dx \\ &= 2^{jd} \int f(x) (\Delta_{\frac{1}{2}}^M \Psi_M^1)(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d) dx && \text{par le lemme 2.4.27} \\ &= 2^{jd} \int (\Delta_{\frac{1}{2^{j+1}} e_1}^M f)(x) \Psi_M^1(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d) dx \end{aligned}$$

avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$.

Par hypothèse

$$\forall j \geq j_\theta, \omega_f^M(2^{-j}) \leq C \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}$, $j \geq j_\theta$ et $k \in \mathbb{Z}^d$:

$$|c_{j,k}^i| \leq 2^{jd} \int |(\Delta_{\frac{1}{2^{j+1}} e_1}^M f)(x)| |\Psi_M^1(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d)| dx$$

On a donc bien :

$$\forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \geq j_\theta \forall k \in \mathbb{Z}^d, |c_{j,k}^i| \leq C 2^{jd} \theta(2^{-(j+1)}) \int |\Psi_M(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d)| dx.$$

On peut remarquer que :

$$2^{jd} \int |\Psi_M(2^j x_1 - k_1) \cdots \Psi^d(2^j x_d - k_d)| dx = \|\Psi_M^1 \otimes \cdots \otimes \Psi^d\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

En utilisant la croissance de θ on obtient donc :

$$\forall i \in \{1, \dots, 2^{d-1}\}, \forall j \geq j_\theta \forall k \in \mathbb{Z}^d, |c_{j,k}^i| \leq C \theta(2^{-j}) \|\Psi_M\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce qui est bien le résultat voulu. \square

Réciproquement :

Proposition 2.4.28 *Soit $M \in \mathbb{N}$ et $\beta > 1$. Si f est une fonction uniformément Höldérienne et si la fonction θ est un module de continuité faible d'ordre M tel que pour tout $j \geq j_\theta$ on ait :*

$$\sup_{i,k} |c_{j,k}^i| \leq C \tilde{\theta}(2^{-j}),$$

alors pour une certaine constante positive C_0 ne dépendant que de l'analyse multirésolution choisie et de la fonction f , on a

$$(2.4.25) \quad \omega_f^M(2^{-j}) \leq C C_0 j^\beta \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Preuve. On adopte les notations :

$$f_{-1}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C_k \varphi(x - k), \quad f_j(x) = \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k}^i \psi(2^j x - k) \text{ si } j \geq 0.$$

Comme la fonction f est uniformément Höldérienne, chacune des sommes précédentes converge uniformément sur tout compact vers une limite qui a même régularité que les ondelettes. De plus $\sum_{j \geq -1} f_j(x)$ converge aussi uniformément sur tout compact.

On se fixe un vecteur h de \mathbb{R}^d vérifiant $|h| \leq 2^{-j_\theta}$. Soit J l'entier défini par $J = \sup\{j \geq 0, |h| \leq 2^{-j}\}$. On coupe alors la somme $\sum_{j \geq -1} f_j(x)$ en trois (j_θ peut être non nul) :

$$\Delta_h^M f(x) = \sum_{j=-1}^{j_\theta-1} \Delta_h^M f_j(x) + \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x) + \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x).$$

Comme pour tout $j \geq -1$ f_j a même régularité que l'analyse multirésolution, il en va de même pour $g_1 = \sum_{j=-1}^{j_\theta-1} f_j(x)$ ce qui montre donc bien que g_1 est $\mathcal{C}^M(\mathbb{R}^n)$. Donc par l'hypothèse (2.4.22), la propriété (2.4.25) est bien vérifiée pour $f = g_1$.

On majore maintenant les deux séries d'ondelettes $\sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x), \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x)$. Pour cela on utilise le lemme classique :

Lemme 2.4.29 Soit m un entier, $F \in C^m(\mathbb{R}^d)$. Il existe alors une constante positive $C_0(m)$ étant une constante ne dépendant que de m et F telle que :

$$\forall (h, x) \in (\mathbb{R}^d)^2, |\Delta_h^m F(x)| \leq C_0(m) |h|^m \sum_{|\alpha|=m} \sup_{y \in [x, x+mh]} |\partial^\alpha F(y)|.$$

.

De cela on déduit une majoration de $|\partial^\alpha f_j(x)|$

Lemme 2.4.30 Soit $m \in \{0, \dots, M\}$ et $\beta > 1$. Il existe une constante positive $C_0(m) > 0$ ne dépendant que de m et de l'analyse multi-résolution telle que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$ vérifiant $|\alpha| = m$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall j \geq j_\theta, |\partial^\alpha f_j(x)| \leq C_0(m) C 2^{jm} \inf(\theta(2^{-j}), \frac{\theta(2^{-j}) |\log(\theta(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta}).$$

Preuve. Par hypothèse sur la fonction f

$$|c_{j,k}^i| \leq \inf(C\theta(2^{-j}), C_0 2^{-j\varepsilon_0}).$$

Comme $|c_{j,k}^i| = \frac{|c_{j,k}^i| |\log(|c_{j,k}^i|)|^\beta}{|\log(|c_{j,k}^i|)|^\beta}$ cela implique

$$|\partial^\alpha f_j(x)| = \left| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,k}^i 2^{jm} (\partial^\alpha \psi^i)(2^j x - k) \right| \leq C_0 C 2^{jm} \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\inf(|c_{j,k}^i|, \frac{|c_{j,k}^i| |\log(|c_{j,k}^i|)|^\beta}{j^\beta})}{(1 + |2^j x - k|)^p}$$

pour tout entier $p > d$. La propriété

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{1}{(1 + |2^j x - k|)^p} \right) < +\infty,$$

permet alors de conclure. □

On majore maintenant les séries $\sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x)$, $\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x)$.

Majoration de la série $\sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x)$.

Par le lemme 2.4.30 appliqué à $m = M$, on a pour tout $|\alpha| = M$ et tout $j \geq j_\theta$ $|\partial^\alpha f_j(x)| \leq C_0(M) C 2^{jM} \theta(2^{-j})$. Par le lemme 2.4.29, on a alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x) \right| &\leq K(M) \sum_{j=j_\theta}^{J-1} (|h|^M 2^{jM} \sum_{|\alpha|=M} \sup_{y \in [x, x+Mh]} |\partial^\alpha f_j(x)|) \\ &\leq C K(M) |h|^M \sum_{j=j_\theta}^{J-1} 2^{jM} \theta(2^{-j}) \end{aligned}$$

Comme θ est un module de continuité faible d'ordre M on a par la propriété (2.4.20)

$$(2.4.26) \quad \left| \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \Delta_h^M f_j(x) \right| \leq C_0 |h|^M J 2^{JM} \theta(2^{-J}) \leq C_0 J \theta(2^{-J}) \leq C_0 J^\beta \theta(2^{-J}).$$

Majoration de la série $\sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x)$.

On applique cette fois ci le lemme 2.4.30 à $m = 0$. Donc :

$$\left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x) \right| \leq C C(M) \sum_{j=J}^{+\infty} \frac{\theta(2^{-j}) |\log(\theta(2^{-j}))|^\beta}{j^\beta}.$$

Par la propriété 2.4.21, comme θ est un module de continuité faible d'ordre M on a

$$\left| \sum_{j=J}^{+\infty} \Delta_h^M f_j(x) \right| \leq C C_0 J^\beta \theta(2^{-J}).$$

□

En utilisant les propositions 2.4.26 et 2.4.28, on en déduit donc les résultats de la proposition 2.4.9. Tout découle en effet des deux propositions précédentes et du fait que si θ est un module de continuité fort d'ordre M vérifiant la propriété (2.4.6) alors la fonction $\tilde{\theta}$ définie pour $r \leq 2^{-j_0}$ par,

$$\tilde{\theta}(r) = \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})),$$

est un module de continuité faible d'ordre M . Le corollaire 2.4.7 est lui immédiat à partir des résultats de la proposition 2.4.9.

2.4.3.4 Preuves des théorèmes 2.4.11 et 2.4.1

Pour passer de la proposition 2.4.9 qui donne des conditions sur les coefficients d'ondelettes pour qu'une fonction ne soit pas θ -uniformément irrégulière sur \mathbb{R}^d , au théorème 2.4.11 qui donne des condition sur les coefficients d'ondelettes pour qu'une fonction soit θ -uniformément irrégulière sur \mathbb{R}^d il faut être capable de contraposer la propriété (2.4.8). Le théorème 2.4.1 permettant de caractériser (à une correction logarithmique près) par ondelettes la propriété $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$ s'en déduira automatiquement. On démontre donc :

Proposition 2.4.31 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M . Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Les coefficients d'ondelettes de la fonction f ne vérifient pas la propriété (2.4.8).*
2. *Il existe une constante positive C_0 et un entier j_0 tels que pour tout entier $j \geq j_0$ on ait :*

$$(2.4.27) \quad \max(\sup_{\ell \geq j} (\sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)), 2^{-jM} \sup_{\ell \leq j} 2^{\ell M} (\sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|))) \geq C_0 \theta(2^{-j}).$$

Preuve. Les coefficients d'ondelettes de la fonction f vérifient la propriété (2.4.8) si et seulement si :

Pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n et tout entier j de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$:

$$\sup_{i,k} (|c_{j,k}^i|) \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{(j_{n+1}-j)M} \theta(2^{-j_{n+1}})).$$

Ceci est alors équivalent à la propriété suivante :

Pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n :

$$\begin{cases} \sup_{\ell \geq j_n} (\sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C \theta(2^{-j_n}), \\ \sup_{j_0 \leq \ell \leq j_{n+1}} (2^{\ell M} \sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C 2^{j_{n+1} M} \theta(2^{-j_{n+1}}). \end{cases}$$

Soit alors n_0 l'entier défini par,

$$n_0 = \inf \{ n, \sup_{0 \leq \ell \leq j_0} 2^{\ell M} \sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|) \leq C 2^{j_{n+1} M} \theta(2^{-j_{n+1}}) \}$$

Quitte à faire partir la suite $(j_n)_n$ de j_{n_0+1} au lieu de j_0 , on a bien équivalence de la propriété (2.4.8) avec la propriété suivante :

Pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier n :

$$\begin{cases} \sup_{\ell \geq j_n} (\sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C \theta(2^{-j_n}), \\ \sup_{\ell \leq j_n} (2^{\ell M} \sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C 2^{j_n M} \theta(2^{-j_n}). \end{cases}$$

Ce qui est enfin équivalent à dire que :

Pour toute constante positive C , pour tout entier j_0 , il existe un entier $j_1 > j_0$ tel que :

$$\begin{cases} \sup_{\ell \geq j_1} (\sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C \theta(2^{-j_1}), \\ \sup_{\ell \leq j_1} (2^{\ell M} \sup_{i,k} (|c_{\ell,k}^i|)) \leq C 2^{j_1 M} \theta(2^{-j_1}). \end{cases}$$

Par contraposition on obtient alors bien le résultat voulu. \square

Les résultats de la proposition permettent alors par contraposition d'en déduire les résultats des théorèmes 2.4.11 et 2.4.1.

On va enfin conclure ce chapitre par l'étude de quelques exemples de fonctions uniformément irrégulières.

2.5 Quelques exemples classiques de fonctions uniformément irrégulières

L'irrégularité uniforme n'est pas un concept nouveau. Comme on l'a déjà dit, cette notion a déjà été utilisée sous diverses formes pour étudier de manière plus précise les propriétés de régularité de diverses classes de fonctions, notamment les fonctions de type Weierstrass et les champs gaussiens —localement non déterministes qui généralisent le Mouvement Brownien

Fractionnaire. Dans chacun de ces cas on a en fait une propriété plus forte qui est vérifiée : chacune de ces fonctions est à la fois uniformément Höldérienne et anti-Höldérienne de même exposant α (voir le chapitre 4 où une définition est donnée et une étude précise de cette notion est faite). L'objectif dans cette section est de présenter ces modèles classiques de fonctions qui sont donc en particulier uniformément irrégulières et d'illustrer le critère ondelettes de coincidence de l'exposant de Hölder et d'irrégularité uniforme sur ces exemples. On va ainsi retrouver via les ondelettes des résultats classiques sur les fonctions de type Weierstrass et le Mouvement Brownien Fractionnaire. Les propriétés fines d'anti-Höldérianité uniforme vérifiées par chacune de ces fonctions seront elles détaillées au chapitre 4.

On commence par une remarque très simple. Pour tout réel positif α , la fonction f définie par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} 2^{-j\alpha} \psi_{j,k}^i(x),$$

est dans $C^\alpha(\mathbb{R}^d) \cap I^\alpha(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que si l'on perturbe cette série cette propriété reste conservée. On montrera ensuite que des exemples très simples : fonctions de Weierstrass ou Mouvement Brownien Fractionnaire rentrent dans ce cadre. Dans toute cette section on se place en dimension $d = 1$.

Pour perturber la série d'ondelette f on va suivre la même démarche que celle de J.Barral et S.Seuret dans [BarSeur05]. On rappelle que dans cet article ces deux auteurs étudient des séries d'ondelettes construites à partir d'une mesure multifractale μ . Ils montrent que sous certaines hypothèses le spectre multifractal de la série d'ondelette considérée coïncide avec celui de la mesure sous-jacente. Pour étudier la stabilité de ce type de propriété, ils introduisent des séries d'ondelettes perturbés et montrent que suivant la nature de la perturbation considérée on a bien stabilité du spectre. On va suivre ici la même démarche. Soit donc $(\pi(j, k))_{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}}$ une suite de réels. On définit la fonction f_{pert}

$$f_{pert}(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-j\alpha} \pi(j, k) \psi_{j,k}(x).$$

On suppose que la condition (\mathcal{P}_{unif}) est vérifiée

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left(\max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\log_2(|\pi(j, k)|)}{j} \right) = 0.$$

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.5.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, la série d'ondelettes f_{pert} est dans $C^{\alpha-\varepsilon}(\mathbb{R}^d) \cap I^{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. En effet, pour tout réel positif ε , à partir d'un certain rang j_0 et tout $j \geq j_0$

$$-\varepsilon \leq \frac{\max_{k \in \mathbb{Z}} \log_2(|\pi(j, k)|)}{j} \leq \varepsilon$$

soit pour tout $j \geq j_0$

$$2^{-j\varepsilon} \leq \max_{k \in \mathbb{Z}} |\pi(j, k)| \leq 2^{j\varepsilon}.$$

Donc

$$f_{pert} \in I^{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap C^{\alpha-\varepsilon}(\mathbb{R}).$$

□

On va donner dans la suite des exemples très simples de perturbations où la condition (\mathcal{P}_{unif}) est vérifiée et retrouver ainsi des modèles déjà connus.

2.5.1 Fonctions de type Weierstrass

On s'intéresse ici à l'irrégularité uniforme des fonctions du type

$$(2.5.1) \quad f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} 2^{-\ell H} q(2^\ell x).$$

où q est une fonction 1-périodique. Ce type de fonction constitue un exemple canonique de fonctions à la fois uniformément Höldérienne et anti Höldérienne (donc uniformément irrégulière) pour le même exposant et ont été largement étudiées par de nombreux auteurs. On peut citer par exemple [KMY84], [MW86],[Tric97] [PrzyUrb89], [BouschHeurt99, BouschHeurt00, Heurt03, Heurt05, DemTric06].

On rappelle que les fonctions de Weierstrass classiques

$$W_H(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} 2^{-\ell H} \cos(2^\ell \pi x),$$

et les fonctions de Tagaki

$$K_H(x) = \sum_{n \geq 0} 2^{-nH} q(2^n x),$$

avec

$$q(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \text{si } \frac{1}{2} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

rentrent bien dans le cadre des fonctions définies par l'équation (4.7.1).

L'objectif de cette section est d'utiliser le critère ondelettes d'irrégularité uniforme pour retrouver des résultats d'irrégularité uniforme déjà connus sur les fonctions de type Weierstrass. Le réel H est supposé compris entre 0 et 1, et q est une fonction uniformément Höldérienne d'exposant ε_0 sur \mathbb{R}^d . Ici on montrera que, quitte à remplacer la fonction f par une fonction auxiliaire g on peut écrire les coefficients d'ondelettes $c_{j,k}$ de la fonction f sous la forme

$$\forall (j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}, c_{j,k} = 2^{-jH} \pi(j, k),$$

avec pour tout entier positif j

$$\max_{k \in \mathbb{Z}} (|\pi(j, k)|) = 1.$$

Ceci est donc l'exemple le plus simple de perturbation au sens de la définition précédente que l'on peut proposer. De manière plus précise, on distinguera les deux cas suivants :

1. La fonction q est uniformément Höldérienne d'exposant ε_0 avec $\varepsilon_0 > H$.
2. La fonction q est uniformément Höldérienne et $0 < \varepsilon_0 = \mathcal{H}_q \leq H$.

2.5.1.1 Cas où la fonction q est uniformément Höldérienne d'exposant supérieur à H

Proposition 2.5.2 *Soit f la fonction définie par 4.7.1. Si la fonction $g(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-nH} q(2^n x)$ n'est pas identiquement nulle alors*

$$f \in \mathcal{C}^H(\mathbb{R}) \cap I^H(\mathbb{R}).$$

Remarque 2.5.3 *On reviendra sur les fonctions de type Weierstrass lorsqu'on abordera la notion d'irrégularité ponctuelle. En effet ces fonctions sont uniformément anti-Höldérienne d'exposant H et vérifient donc une propriété plus forte que celle d'uniforme irrégularité. On détaillera les résultats connus à ce sujet dans le chapitre 4.*

Preuve. On remarque tout d'abord que par périodicité de la fonction q , l'irrégularité uniforme de la fonction f sur $[0, 1]$ est équivalente à l'irrégularité uniforme de la fonction f sur \mathbb{R} . Dans [KMY84], le lemme suivant est démontré (lemme 2.1) :

Lemme 2.5.4 *La fonction h définie par*

$$h(x) = \sum_{n < 0} 2^{-nH} q(2^n x),$$

est $\mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R})$.

Comme $f = g - h$, ce lemme implique que

Lemme 2.5.5 *Si la fonction g est identiquement nulle alors la fonction f est $\mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R})$.*

Dans le cas où g n'est pas identiquement nulle, comme $g(2x) = 2^H g(x)$ on a la relation suivante entre les coefficients d'ondelettes associés à deux échelles successives

$$c_{\ell, k} = 2^H c_{\ell+1, k}.$$

Comme pour tout ℓ , $\sup_k |c_{\ell, k}| \neq 0$ on en déduit alors bien que

$$g \in \mathcal{C}^H(\mathbb{R}) \cap I^H(\mathbb{R}).$$

La régularité de f étant alors celle de g , on en déduit le résultat voulu. \square

2.5.1.2 Etude du cas où $\mathcal{H}_q \leq H$

On fait ici l'hypothèse

$$0 < \varepsilon_0 = \mathcal{H}_q \leq H.$$

Ici, on ne sera pas dans le cadre d'une série d'ondelette perturbée comme cela a été défini plus haut. L'irrégularité uniforme de la fonction f sera directement liée à celle de la fonction q . On montre en effet que :

Proposition 2.5.6 *Si la fonction f est dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R})$ alors la fonction q est dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R})$. La réciproque est par contre fausse.*

Preuve. Supposons que la fonction f soit dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R})$.

On utilise le fait que q est l'unique solution bornée de l'équation fonctionnelle

$$q(x) = f(x) - 2^{-H}f(2x),$$

et donc que

$$c_{j,k}(q) = c_{j,k}(f) - 2^{-H}c_{j-1,k}(f).$$

Ceci implique bien que la fonction q soit dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R})$. **La réciproque est par contre fausse.**

Pour montrer ce résultat soit $\alpha < H$. Par l'équation (4.7.1)

$$c_{j,k}(f) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} 2^{-\ell H} c_{j-\ell,k}(q)$$

On construit alors la fonction q suivante. Soit $\beta = \left[\frac{\alpha}{\varepsilon_0} \times \frac{1 - \varepsilon_0}{1 - \alpha} \right] + 1$. On définit les deux suites $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_{n,\alpha})_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, j_n = \lceil \beta^n \rceil, j_{n,\alpha} = \left\lceil \frac{\alpha}{\varepsilon_0} j_n \right\rceil.$$

On considère alors la série d'ondelettes q

$$q(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{\inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)-j})}{j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_{j,k}$$

qui est bien par construction dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R})$ (voir section 2.6). On va montrer que pour cette fonction q la fonction f est uniformément irrégulière d'exposant α en utilisant le critère ondelettes. On distingue pour cela trois cas

1. Si pour un certain entier n_0 , $j_{n_0} + \log_2(j_{n_0}) + \log_2(\alpha/\varepsilon_0) \leq j \leq j_{n_0,\alpha}$ alors

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} (|c_{j,k}|) \geq C_0 \frac{2^{-j_{n_0} \alpha}}{j} \geq C_0 2^{-j \alpha}.$$

2. Si pour un certain entier n_0 , $j_{n_0,\alpha} \leq j \leq j_{n_0+1} - 1$ alors

$$\sup_{\ell \leq j} (2^\ell \sup_k |c_{\ell,k}|) \geq C_0 \frac{2^{j_{n_0+1}(1-\alpha)} 2^{(j-j_{n_0,\alpha})(1-H)}}{j} \geq 2^{j(1-\alpha)}$$

est toujours vrai car $\lim_n (j_{n+1}(1-\alpha) - j_{n,\alpha}(1-H)) = +\infty$.

3. Si pour un certain entier n_0 , $j_{n_0} \leq j \leq j_{n_0} + \log_2(j_{n_0}) + \log_2(\alpha/\varepsilon_0)$ alors

$$\sup_{\ell \leq j} (2^\ell \sup_k |c_{\ell,k}|) \geq \frac{2^{j_{n_0}(1-\alpha) + j_{n_0}(1-H) - j_{n_0-1,\alpha}(1-H)}}{j_{n_0}} \geq 2^{-j_{n_0}(1-\alpha)}$$

est vrai car $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^{(j_n - j_{n-1,\alpha})(1-H)} / j_n) = +\infty$.

Donc dans tous les cas pour une certaine constante $C_0 > 0$ on a

$$\max_{\ell \geq j} (\sup_k |c_{\ell,k}|), 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} (2^\ell \sup_k |c_{\ell,k}|) \geq C_0 2^{-j \alpha}.$$

La fonction f est alors bien uniformément irrégulière d'exposant α . \square

On s'intéresse maintenant au cas de séries d'ondelettes aléatoires et plus précisément au cas où la suite de perturbation est une suite de variables aléatoires gaussiennes.

2.5.2 Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes

On suppose que la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes centrées de variance $\sigma_{j,k}^2$. On fait de plus l'hypothèse que

$$(2.5.2) \quad \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\log_2(\sigma_{j,k})|}{j} = 0.$$

On a alors le résultat suivant :

Lemme 2.5.7 *Si l'hypothèse (2.5.2) est vérifiée alors p.s.*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\log_2(\pi(j, k))|}{j} = 0.$$

L'hypothèse \mathcal{P}_{unif} est donc vérifiée. On a donc pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{pert} \in \mathcal{C}^{\alpha-\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap I^{\alpha+\varepsilon}(\mathbb{R})$.

Preuve. Pour tout entier positif j et tout entier k de $\{0, \dots, 2^j - 1\}$ on a

$$\pi(j, k) = \sigma_{j,k} \xi_{j,k}(\omega),$$

où les variables aléatoires $\xi_{j,k}(\omega)$ sont des variables indépendantes suivant toutes une loi normale centrée réduite. Par l'hypothèse (2.5.2) on a pour tout réel positif ε

$$2^{-j\varepsilon} \leq \min_{0 \leq k \leq 2^j - 1} \sigma_{j,k} \leq \max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} \sigma_{j,k} \leq 2^{j\varepsilon}.$$

On en déduit de manière classique (voir par exemple le lemme 3 de [MST99]) que p.s.

$$\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\pi(j, k)| \leq C(\omega) 2^{j\varepsilon} \sqrt{j \log(2+j)}$$

où $C(\omega)$ désigne une constante aléatoire dont tous les moments sont finis.

On s'intéresse maintenant à l'autre inégalité. Soit C_0 un réel positif inférieur à 1. On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{j \geq 0} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\pi(j, k)| \leq C_0 2^{-j\varepsilon} \right) &= \sum_{j \geq 0} \mathbb{P} \left(\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\sigma_{j,k} \xi_{j,k}| \leq C_0 2^{-j\varepsilon} \right) \\ &= \sum_{j \geq 0} \prod_{0 \leq k \leq 2^j - 1} \mathbb{P} \left(|\xi_{j,k}| \leq \frac{C_0 2^{-j\varepsilon}}{\sigma_{j,k}} \right) \\ &\leq \sum_{j \geq 0} \prod_{0 \leq k \leq 2^j - 1} \left(\frac{C_0 2^{-j\varepsilon}}{\sigma_{j,k}} \right) \\ &\leq \sum_{j \geq 0} (C_0)^{2^j} < +\infty \end{aligned}$$

le passage de la deuxième à la troisième ligne utilisant l'indépendance des coefficients. Le théorème de Borel-Cantelli implique alors immédiatement le résultat voulu. \square

Ceci recouvre à peu de choses près le cas du Mouvement Brownien Fractionnaire. En effet, on rappelle la décomposition ondelettes du Mouvement Brownien Fractionnaire (voir

théorème 2 de [MST99]). On a alors sur \mathbb{R} avec convergence uniforme sur tout compact l'écriture du Mouvement Brownien Fractionnaire suivante

$$\text{p.s. , } B_H(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k^{(H)}(\omega) \Phi_k^H(x) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) \Psi_{j,k}^H(x) - b_0(\omega).$$

Les variables aléatoires $\xi_{j,k}(\omega)$ sont des variables i.i.d. suivant toutes une loi normale centrée réduite. La suite de variables aléatoires $\{S_k^{(H)}(\omega)\}_k$ est elle la marche aléatoire ARIMA fractionnaire définie par

$$\begin{cases} S_k^{(H)}(\omega) = \sum_{j=1}^k \xi_j^{1/2-H}(\omega), & \text{si } k \geq 1, \\ S_0^{(H)}(\omega) = 0, S_k^{(H)}(\omega) = -\sum_{j=0}^k \xi_j^{1/2-H}(\omega), & \text{si } k \leq -1. \end{cases}$$

où $(\xi_k^{1/2-H})_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite ARIMA fractionnaire. La suite ARIMA fractionnaire $(\xi_k^{1/2-H})_{k \in \mathbb{N}}$ est la suite gaussienne, stationnaire de densité spectrale

$$g(\theta) = \left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^{1-2H}, \quad \theta \in [-\pi, \pi].$$

Par ailleurs

$$b_0(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} S_k^{(H)}(\omega) \Phi_k^H(-k) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) \Psi_{j,k}^H(-k)$$

Enfin, la famille $\{\Phi_k^H\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\Psi_{j,k}^H\}_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$ est une base bi-orthogonale de $L^2(\mathbb{R}^d)$ construite comme l'image d'une base d'ondelette par un opérateur d'intégration fractionnaire. Il existe une base duale

$$\{\tilde{\Phi}_k^H\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\tilde{\Psi}_{j,k}^H\}_{j \geq 0, k \in \mathbb{Z}}$$

telle que pour tous j, k

$$2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) = 2^j \int B_H(x) \tilde{\Psi}_{j,k}^H(x) dx.$$

On remarque que par stabilité des exposants de Hölder et d'irrégularité uniforme d'une fonction par les opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ (voir section 2.7) on en déduit que les critères ondelettes restent valables pour des familles bi-orthogonales d'ondelettes (ce qui est le cas ici). On peut remarquer alors que

Lemme 2.5.8 *On définit B_H^2 par*

$$B_H^2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\omega) \Phi_k^H(x) + \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| > j2^j} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) \Psi_{j,k}^H(x)$$

Alors p.s. les trajectoires de B_H^2 sont $\mathcal{C}_{loc}^{H'}(\mathbb{R})$ pour

$$0 < H < H' < 1,$$

La régularité et l'irrégularité uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire sur tout compact est donc celle de la série B_H^1 définie par

$$B_H^1(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| \leq j2^j} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) \Psi_{j,k}^H(x)$$

Remarque 2.5.9 *Le cas du Mouvement Brownien Fractionnaire peut donc se ramener à étudier le cas d'une perturbation par des coefficients gaussiens indépendants tels que*

$$\pi(j, k) = 0$$

pour $|k| > j2^j$. Ceci est donc très similaire à la condition (??) donnée plus haut.

Preuve. On se place sur un compact de \mathbb{R} fixé, que pour plus de simplicité on supposera égal à $[0, 1]$. Pour cela on cherche à estimer pour $x \in [0, 1]$ et h un réel positif

$$\begin{aligned} |B_H^2(x+h) - B_H^2(x)| &= \left| \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{|k| > j2^j} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) (\Psi_{j,k}^H(x+h) - \Psi_{j,k}^H(x)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_k(\omega) (\Phi_k^H(x+h) - \Phi_k^H(x)) \right| \end{aligned}$$

On a donc par le théorème des accroissements finis et la décroissance rapide des fonctions Φ^H et Ψ^H pour un certain entier M suffisamment grand

$$\begin{aligned} |B_H^2(x+h) - B_H^2(x)| &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \sup_{y \in [2^j x, 2^j x + 2^j h]} \sum_{|\gamma|=1} \sum_{|k| > j2^j} \frac{2^{-jH} \sqrt{j \log(2+|k|)} |2^j h|}{(1+|y-k|)^M} \\ &\quad + |h| \sup_{y \in [x, x+h]} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sqrt{\log(2+|k|)}}{(1+|y-k|)^M} \right) \end{aligned}$$

car la famille $\{\Phi_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\Psi_{j,k}\}_{j,k}$ est une famille de molécules de synthèse au sens de [FraJaw85]. Or

$$\sum_{|\gamma|=1} \sum_{|k| > j2^j} \frac{\sqrt{\log(2+|k|)}}{(1+|y-k|)^M} \leq \frac{C}{(1+j2^j)^M}.$$

Donc

$$|B_H^2(x+h) - B_H^2(x)| \leq |h| \left(\sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{C 2^{j(1-H)} \sqrt{j \log(2+j)}}{(1+j2^j)^M} \right) + C \right)$$

□

Ceci permet donc de retrouver le résultat d'irrégularité uniforme des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire. Pour tout réel positif ε

$$\text{p.s. } B_H(\cdot) \in \mathcal{C}_{loc}^{H-\varepsilon}(\mathbb{R}) \cap I_{loc}^{H+\varepsilon}(\mathbb{R}).$$

On peut retrouver directement très facilement le résultat d'irrégularité uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire qui est énoncé dans [CKR93](théorème IV.5).

Proposition 2.5.10 *On a le résultat d'irrégularité uniforme presque sûr suivant concernant le Mouvement Brownien Fractionnaire B_H sur $[0, 1]$:*

$$\text{p.s. } , \forall r \leq 1, \sup_{(x,y) \in [0,1]^2, |x-y| \leq r} |B_H(x) - B_H(y)| \geq C_0 r^H |\log(r)|^{\frac{1}{2}}.$$

la constante C_0 étant une constante aléatoire presque sûrement positive.

Preuve. La démonstration faite dans [CKR93] est basée sur la décomposition dans la base de Schauder du Mouvement Brownien Fractionnaire. On peut aussi adapter la démonstration du lemme 2.5.7 à la série aléatoire,

$$B_H^1(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| \leq j2^j} 2^{-jH} \xi_{j,k}(\omega) \Psi_{j,k}^H(x).$$

Ici on est dans le cas où pour tout j, k on a $\sigma_{j,k} = 1$. On obtient donc le résultat voulu. \square

On considère maintenant le cas plus général où les coefficients d'ondelettes du processus étudié sont faiblement corrélés.

2.5.3 Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélés

On suppose que la suite des coefficients d'ondelettes $c_{j,k}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélées au sens suivant,

$$(2.5.3) \quad \forall j \geq 0, \forall (k, k') \in \mathbb{Z}^2, |\mathbb{E}(c_{j,k} c_{j,k'})| \leq C_0 \frac{2^{-2j\alpha}}{(1 + |k - k'|)^\gamma}$$

la constante C_0 étant indépendante des entiers j, k, k' et γ étant un réel positif.

On suppose de plus que,

$$(2.5.4) \quad \forall j \geq 0, \forall k \in \mathbb{Z}, C_1 2^{-2j\alpha} \leq \mathbb{E}(c_{j,k}^2) \leq C_2 2^{-2j\alpha}.$$

les constantes C_1 et C_2 étant indépendantes des entiers j, k .

C'est ce critère qui a servi à Z.Ciesielski, G.Kerkyacharian et B.Roynette dans [CKR93], pour étudier la régularité et l'irrégularité uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire dans les espaces de Besov, via sa décomposition dans la base de Schauder.

Dans [CKR93](théorème IV.5) on démontre en fait que,

Lemme 2.5.11 *Si les hypothèses (2.5.3) et (2.5.4) sont vérifiées pour les coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder pour tout entier j positifs et tous entiers relatifs k et k' alors p.s.*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\max_{0 \leq k \leq 2^j - 1} |\log_2(\pi(j, k))|}{j} = 0.$$

l'hypothèse (\mathcal{P}_{unif}) est donc en particulier vérifiée.

Remarque 2.5.12 *Ce résultat se généralise sans problème au cas d dimensionnel et aux coefficients d'ondelettes dans une base orthonormée d'ondelettes suffisamment régulière.*

On montre dans la proposition suivante une propriété intéressante d'un critère un peu plus général : la stabilité par les opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ pour $\gamma > \alpha$ et donc par changement de base d'ondelettes :

Proposition 2.5.13 *La propriété (2.5.5)*

$$(2.5.5) \quad \forall \lambda, \lambda' |\mathbb{E}(c_\lambda c_{\lambda'})| \leq C_0 \frac{2^{-2j\alpha} 2^{-|j-j'|(\gamma + \frac{d}{2})}}{(1 + (j - j')^2)(1 + 2^{\inf(j, j')} |\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^\gamma}$$

est invariante par les opérateurs l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ pour $\gamma \geq \alpha$.

Remarque 2.5.14 La propriété (2.5.5) implique trivialement la propriété (2.5.3). De plus les coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder du MBF vérifient la propriété (2.5.5).

Remarque 2.5.15 On n'a par contre pas stabilité de l'indépendance des coefficients d'ondelettes par tout opérateur de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$. On peut citer pour exemple le cas du Mouvement Brownien Fractionnaire dont les coefficients dans la base de Schauder ne sont pas indépendants alors qu'ils le sont dans la base bi-orthogonale définie dans [MST99].

Preuve. Les notations sont celles de la section 2.7. En effet, soit A la matrice dans une base d'ondelettes suffisamment régulière d'un opérateur de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$. Par définition

$$|A(\mu, \lambda)| \leq C(\gamma)\omega(\lambda, \lambda')$$

Or par hypothèse,

$$|\mathbb{E}(c_\lambda c_{\lambda'})| \leq \omega(\lambda, \lambda')$$

Donc si on pose

$$\tilde{c}_\mu = (A(c_\lambda)_\lambda)_\mu$$

on a

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}(\tilde{c}_\mu \tilde{c}_{\mu'})| &= \left| \sum_{\lambda, \lambda'} A(\mu, \lambda) A(\mu', \lambda') \mathbb{E}(c_\lambda c_{\lambda'}) \right| \\ &\leq \sum_{\lambda, \lambda'} \omega(\mu, \lambda) \omega(\mu', \lambda') \omega(\lambda, \lambda') \end{aligned}$$

Or comme,

$$\sum_{\lambda'} \left(\sum_{\lambda} \omega(\mu, \lambda) \omega(\lambda, \lambda') \right) \omega(\mu', \lambda') \leq \sum_{\lambda, \lambda'} \omega(\mu, \lambda') \omega(\mu', \lambda') \leq \omega(\mu, \mu')$$

on obtient le résultat désiré. \square

2.5.4 Faible corrélation des coefficients d'ondelettes et processus fortement localement non déterministes

Le but de cette section est de donner une classe d'exemples de processus gaussiens dont les coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder sont faiblement corrélés : la classe des processus gaussiens à accroissement stationnaires fortement localement non déterministes. Cette classe de processus modélisent des processus gaussiens dont les accroissements sont faiblement corrélés, cette faible corrélation étant fonction de 'l'éloignement' des accroissements considérés. L'objectif est de comprendre ici comment cette propriété se reflète sur les coefficients d'ondelettes par une propriété de faible corrélation. Ceci va permettre simplement de retrouver des résultats déjà connus d'irrégularité uniforme de ces processus. Par ailleurs tous les critères ondelettes donnés dans ce chapitre et le chapitre 4 expriment une certaine dualité entre ce qui se passe en espace et ce qui se passe dans le domaine ondelettes. Il est donc naturel de se demander quelle est la 'traduction ondelettes' de cette propriété de faible corrélation des accroissements éloignés et si cette dualité se conserve. On montrera ainsi que dans le cas unidimensionnel des processus fortement localement non déterministes cette propriété se 'transmet' bien aux coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder qui vérifie

ce qu'on pourrait appeler une propriété de non déterministe local fort discret ce qui permet d'apporter ainsi quelques éléments de réponse à la question ci dessus. On commencera donc par quelques rappels sur les processus fortement localement non déterministes et la base de Schauder, puis on montrera le résultat voulu.

2.5.4.1 Notion de processus fortement localement non déterministe

On va d'abord rappeler la notion de champ fortement localement non déterministe. On a la définition suivante, donnée par Cuzick and DuPreez ([CuzDuP82]) :

Définition 2.5.16 Soit $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ un champ gaussien à valeurs réelles avec

$$0 < \mathbb{E}(X(x)^2) < 1,$$

pour tout x de T , où T est un compact de \mathbb{R} .

Soit ϕ une fonction telle que

$$\phi(0) = 0, \phi(r) > 0 \text{ pour } r > 0.$$

Alors $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est dit fortement localement ϕ non déterministe sur T s'il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tel que pour tout t dans T et tout $0 < r \leq \min(|t|, r_0)$

$$(2.5.6) \quad \text{Var}(X(t)|X(s) : s \in T, r < |s - t| \leq r_0) \geq C_0\phi(r).$$

Remarque 2.5.17 La propriété 2.5.6 signifie en gros que pour tout t les valeurs du champ hors d'un voisinage de t sont faiblement corrélés à $X(t)$. L'équation 2.5.6 permet en quelque sorte de quantifier une 'presque indépendance' des accroissements qui sont 'éloignés entre eux' du champ.

Exemple 2.5.18 Le MBF est un exemple de processus fortement localement ϕ non déterministe (lemme 7.1 de [Pitt78]), avec $\phi(r) = r^{2\alpha}$.

Dans [Xiao05], Y.Xiao donne des exemples de champs gaussiens à accroissements stationnaires fortement localement ϕ non déterministes.

On rappelle que (voir [Yag57]) si un champ gaussien centré X est à accroissements stationnaires et que sa fonction de covariance est continue, X a la représentation sous forme d'intégrale stochastique suivante

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{it \cdot \xi} - 1) dZ(\xi) + Y.t.$$

Le vecteur Y est un vecteur gaussien centré et Z est une mesure aléatoire centrée indépendante de Y vérifiant pour tous boréliens A, B de \mathbb{R}^d

$$\mathbb{E}(Z(A)\overline{Z(B)}) = \mu(A \cap B),$$

pour une certaine mesure symétrique positive μ appelée mesure spectrale de X qui satisfait à

$$\int \min(1, |\xi|^2) d\mu(\xi) < +\infty.$$

Dans [Xiao05], Y.Xiao suppose que le vecteur Y est nul et donne, généralisant en cela des résultats de S.Berman ([Ber88],[Ber91]), des conditions suffisantes sur la mesure spectrale du champ X pour qu'il soit fortement localement non déterministe.

Proposition 2.5.19 *Soit $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ un champ gaussien à accroissements stationnaires s'annulant à l'origine. On suppose que sa mesure spectrale μ est absolument continue de densité f . Si on définit $\phi(r)$ pour tout réel positif par*

$$\phi(r) = \mu\{\zeta, |\zeta| > \frac{1}{r}\},$$

et que l'on fait l'hypothèse

$$0 < \frac{1}{2} \liminf_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\beta_d |\xi|^d f(\xi)}{\phi(\frac{1}{|\xi|})} \leq \frac{1}{2} \limsup_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{\beta_d |\xi|^d f(\xi)}{\phi(\frac{1}{|\xi|})} < 1.$$

(le réel β_d désigne la mesure d dimensionnelle de S^{d-1}).

Alors pour tout $a > 0$, $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est fortement localement non déterministe sur $[-a, a]^d$.

De manière générale, le fait qu'un champ gaussien soit fortement localement non déterministe a des implications sur l'irrégularité de ses trajectoires.

Dans [Xiao97] (proposition 3.1), pour ϕ module de continuité fixé, Y.Xiao se donne un champ gaussien fortement localement ϕ -non déterministe tel que

$$(2.5.7) \quad C_1 \phi(|h|) \leq \mathbb{E}(|X(x+h) - X(x)|^2) \leq C_2 \phi(|h|).$$

Il montre alors, en utilisant la notion de temps local, la loi du log itéré de Chung liée à la notion d'irrégularité ponctuelle, sur laquelle on reviendra dans le chapitre suivant. Ceci implique en particulier un résultat d'irrégularité uniforme des trajectoires du champ :

Proposition 2.5.20 *Soit $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ un champ gaussien fortement localement ϕ -non déterministe sur $T = [-a, a]^d$ tel que la condition (2.5.7) soit vérifiée alors p.s.,*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\phi^{\frac{1}{2}}\left(\frac{r}{|\log(r)|^{1/d}}\right)} \inf_{x \in T} \sup_{y, |x-y| \leq r} |X(x) - X(y)| \right) > 0.$$

ce que l'on traduira en disant qu'un champ fortement localement ϕ -non déterministe est uniformément ϕ -anti-Höldérien (voir chapitre suivant).

En particulier on a p.s.

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{r^\alpha} \sup_{(x,y) \in T^2, |x-y| \leq r} |X(x) - X(y)| \right) > 0.$$

Remarque 2.5.21 *On retrouve ainsi les résultats déjà énoncés pour le MBF dans les deux sections précédentes.*

On peut retrouver un résultat d'irrégularité uniforme des trajectoires, dans le cas d'un processus à accroissements stationnaires, en utilisant les coefficients d'ondelettes du processus $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ dans la base de Schauder. On va donc faire quelques rappels à ce sujet.

2.5.4.2 Rappels sur la base de Schauder

On rappelle que la base de Haar est définie sur $[0, 1]$ par

$$\chi_1 \equiv 1 \text{ sur } [0, 1],$$

et pour $j \geq 0$, $k = 1, \dots, 2^j$, la fonction $\chi_{j,k}$ est la fonction définie par

$$\begin{cases} \chi_{j,k}(t) = -1, & t \in \left[\frac{2k-2}{2^{j+1}}, \frac{2k-1}{2^{j+1}} \right[, \\ \chi_{j,k}(t) = 1, & t \in \left[\frac{2k-1}{2^{j+1}}, \frac{2k}{2^{j+1}} \right[, \\ \chi_{j,k}(t) = 0, & t \notin \left[\frac{k-1}{2^j}, \frac{k}{2^j} \right[. \end{cases}$$

On définit alors la base de Schauder pour $j \geq 0$, $k = 1, \dots, 2^j$ par

$$\begin{cases} \varphi_0(t) \equiv 1, \\ \varphi_1(t) = t, \\ \varphi_{j,k}(t) = \int_0^t \chi_{j,k}(s) ds \end{cases}$$

pour tout t dans $[0, 1]$.

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.5.22 *Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors*

$$f(t) = C_0\varphi_0(t) + C_1\varphi_1(t) + \sum_{j \geq 1} \sum_{k=1}^{2^j} c_{j,k} \varphi_{j,k}(t),$$

la convergence étant uniforme sur $[0, 1]$, où pour $j \geq 0$, $k = 1, \dots, 2^j$ les coefficients $c_{j,k}$ sont définis par,

$$C_0 = f(0), C_1 = f(1) - f(0), c_{j,k} = 2^j \left(f\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right) - 2f\left(\frac{2k-1}{2^{j+1}}\right) + f\left(\frac{2k-2}{2^{j+1}}\right) \right).$$

De plus les critères ondelettes énoncés plus haut restent valables dans la base de Schauder si $\alpha \in (0, 1)$.

2.5.4.3 Processus fortement localement non déterministes et coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder

On va maintenant relier le fait qu'un processus gaussien à accroissements stationnaires $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}}$ soit fortement localement non déterministe et la faible corrélation de ses coefficients d'ondelettes dans la base de Schauder. On rappelle que :

Définition 2.5.23 *Le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est dit à accroissements stationnaires si pour tout réel t ,*

$$\{X(t+h) - X(t)\}_{h \in \mathbb{R}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{X(h) - X(0)\}_{h \in \mathbb{R}}$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne la relation d'égalité des lois finies dimensionnelles.

On va alors montrer le résultat suivant

Proposition 2.5.24 *Si $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires fortement localement non déterministe alors la propriété 2.5.3 est vérifiée par les coefficients du champ dans la base de Schauder.*

La preuve découlera des trois lemmes suivants :

Lemme 2.5.25 *Si $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires, alors pour tous réels t, t', h ,*

$$\mathbb{E}((X(t+h) - X(t))(X(t'+h) - X(t'))) = \mathbb{E}((X(h) - X(0))(X(t' - t + h) - X(t' - t))).$$

Preuve. On utilise la stationnarité et on pose $k = t' - t$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}((X(t+h) - X(t))(X(t'+h) - X(t'))) &= \mathbb{E}((X(t+h) - X(t))(X(t+k+h) - X(t+k))) \\ &= \mathbb{E}((X(t+h) - X(t))(X(t+k+h) - X(t))) \\ &\quad - \mathbb{E}((X(t+h) - X(t))(X(t+k) - X(t))) \\ &= \mathbb{E}((X(h) - X(0))(X(k+h) - X(0))) \\ &\quad - \mathbb{E}((X(h) - X(0))(X(k) - X(0))) \\ &= \mathbb{E}((X(h) - X(0))(X(t' - t + h) - X(t' - t))). \end{aligned}$$

□

On montre ensuite les deux lemmes suivants :

Lemme 2.5.26 *On suppose que $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien à accroissements stationnaires, fortement localement non déterministe tel que*

$$p.s. X(0) = 0.$$

Alors pour tout entier j , pour un certain entier ℓ_0 pour tout k, k' tels que $|k - k'| \geq \ell_0$,

$$(2.5.8) \quad \text{Var}(c_{j,k}|c_{j,k'}) \geq C_0 2^{-2j\alpha} |k - k'|^{2\alpha}.$$

Remarque 2.5.27 *La propriété (2.5.8) est une version discrète pour les coefficients d'ondelettes du processus dans la base du Schauder de la propriété de processus fortement localement non déterministe.*

Preuve. Posons pour tout j, ℓ

$$\tilde{c}_{j+1,\ell} = X\left(\frac{\ell}{2^{j+1}}\right) - X\left(\frac{\ell-1}{2^{j+1}}\right).$$

On cherche à estimer

$$\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(|c_{j,k} - \lambda c_{j,k'}|^2) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} - \tilde{c}_{j+1,2k-1} - \lambda(\tilde{c}_{j+1,2k'} - \tilde{c}_{j+1,2k'-1})|^2)$$

On remarque que par l'identité du parallélogramme appliquée à la norme $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ pour tout réel λ

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} - \tilde{c}_{j+1,2k-1} - \lambda(\tilde{c}_{j+1,2k'} - \tilde{c}_{j+1,2k'-1})|^2) &= 2\mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} - \frac{\lambda}{2}(\tilde{c}_{j+1,2k'} - \tilde{c}_{j+1,2k'-1})|^2) \\ &\quad + 2\mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k-1} + \frac{\lambda}{2}(\tilde{c}_{j+1,2k'} - \tilde{c}_{j+1,2k'-1})|^2) \\ &\quad - \mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} + \tilde{c}_{j+1,2k-1}|^2) \end{aligned}$$

On va minorer la somme de ces trois termes. Par le lemme 2.5.25

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} - \frac{\lambda}{2}(\tilde{c}_{j+1,2k'} - \tilde{c}_{j+1,2k'-1})|^2) &\geq \mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,1} - \frac{\lambda}{2}(\tilde{c}_{j+1,2k'-2k+1} - \tilde{c}_{j+1,2k'-2k})|^2) \\ &\geq \text{Var}(X(\frac{1}{2^{j+1}})|X(u), |u - \frac{1}{2^{j+1}}| \geq \frac{k' - k - 1}{2^j}) \\ &\geq C_0 \frac{|k' - k - 1|^{2\alpha}}{2^{2j\alpha}} \end{aligned}$$

De plus

$$\mathbb{E}(|\tilde{c}_{j+1,2k} + \tilde{c}_{j+1,2k-1}|^2) \leq C_1 2^{-2j\alpha}$$

Donc si $|k - k'| \geq C_2$, C_2 constante indépendante de j , on a le résultat voulu. \square

On en déduit :

Lemme 2.5.28 *Si pour tout entier j , pour tous k, k' tels que pour $|k - k'| \geq \ell_0$*

$$\text{Var}(c_{j,k}|c_{j,k'}) \geq C_0 2^{-2j\alpha} |k - k'|^{2\alpha},$$

alors pour tout entier j , pour tout $k \neq k'$

$$|\mathbb{E}(c_{j,k}c_{j,k'})| \leq \frac{C_2 2^{-2j\alpha}}{(1 + |k - k'|^{2\alpha})^{\frac{1}{2}}}.$$

Preuve. En effet on a alors pour tout réel positif λ

$$\mathbb{E}(|c_{j,k} - \lambda c_{j,k'}|^2) \geq C_0 2^{-2j\alpha} |k - k'|^{2\alpha}.$$

Soit pour tout réel positif λ

$$|\mathbb{E}(c_{j,k}c_{j,k'})| \leq \frac{\mathbb{E}(c_{j,k}^2) + \lambda^2 \mathbb{E}(c_{j,k'}^2) - C_0 2^{-2j\alpha} |k - k'|^{2\alpha}}{2\lambda} \leq \frac{C_1 2^{-2j\alpha} (1 + \lambda^2 - \frac{C_0}{C_1} |k - k'|^{2\alpha})}{2\lambda}.$$

On choisit alors $\lambda = \left(1 + \frac{C_0}{C_1} |k - k'|^{2\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}$, ce qui permet de conclure. \square

2.6 Des séries d'ondelettes dont l'exposant d'irrégularité uniforme diffère de l'exposant de régularité uniforme

Chacun des modèles classiques présentés dans la section précédente vérifient du point de vue de la régularité un comportement uniforme en espace et en échelle. Les critères ondelettes vont justement avoir pour but de montrer qu'on peut sortir de ce cadre et générer

des comportements non uniforme en échelle tout en restant ou non uniforme en espace. Dans cette section on propose deux exemples de séries d'ondelettes d'exposant de Hölder uniforme et d'exposant d'irrégularité différents donc non uniforme en échelle mais par contre uniforme en espace. Le deuxième exemple de séries d'ondelettes lacunaires permettra de plus d'illustrer le fait que l'ensemble $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un espace vectoriel. Par ailleurs, il donnera lieu à l'introduction dans le chapitre suivant d'un champ gaussien possédant des propriétés remarquables : le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.

2.6.1 Un premier exemple de séries d'ondelettes dont l'exposant d'irrégularité uniforme ne coïncide pas avec l'exposant de régularité uniforme

Soient deux réels $\underline{\alpha}, \bar{\alpha}$ tels que

$$0 < \underline{\alpha} < \bar{\alpha}.$$

On notera $M = \lceil \bar{\alpha} \rceil + 1$. On va partir d'une remarque très simple.

Lemme 2.6.1 *Soit f une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. On suppose qu'il existe $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers strictement croissante telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$ et tout $(i, k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{Z}^d$*

$$(2.6.1) \quad C_1 2^{-j\bar{\alpha}} \leq |c_{j,k}^i(f)| \leq C_2 \inf(2^{-j_n\bar{\alpha}}, 2^{j_{n+1}(M-\bar{\alpha})} 2^{-Mj}).$$

Alors f a pour exposant d'irrégularité uniforme $\bar{\alpha}$.

Preuve. En effet pour tout ε positif et toute constante positive C , quitte à ne considérer la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qu'à partir d'un certain rang, on a bien :

Pour tout entier n et tout entier j de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$, tout i dans $\{1, \dots, 2^d - 1\}$, tout k dans \mathbb{Z}^d ,

$$C_1 2^{-j\bar{\alpha}} \leq |c_{j,k}^i| \leq C \inf(2^{-j_n(\bar{\alpha}-\varepsilon)}, 2^{j_{n+1}(M-(\bar{\alpha}-\varepsilon))} 2^{-Mj})$$

ce qui montre bien le résultat désiré. \square

Si on veut de plus que l'exposant de régularité uniforme de la fonction f soit $\underline{\alpha}$, il faut et il suffit que

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log_2(\sup_{i,k} |c_{j,k}^i|)}{j} \right) = \underline{\alpha}.$$

On remarque alors que sur $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$, le quotient

$$\frac{-\log_2(\inf(2^{-j_n\bar{\alpha}}, 2^{j_{n+1}(M-\bar{\alpha})} 2^{-Mj}))}{j},$$

est maximal en $j_{n,1}$ défini par $j_{n,1} = \lceil (1 - \bar{\alpha}/M)j_{n+1} + \bar{\alpha}/Mj_n \rceil$. Il suffit donc d'imposer pour tout n

$$\sup_{i,k} |c_{j_{n,1},k}^i| = \inf(2^{-j_n(\bar{\alpha}-\varepsilon)}, 2^{j_{n+1}(M-(\bar{\alpha}-\varepsilon))} 2^{-Mj_{n,1}}) = 2^{-\underline{\alpha}j_{n,1}},$$

Comme par ailleurs $\inf(2^{-j_n(\bar{\alpha}-\varepsilon)}, 2^{j_{n+1}(M-(\bar{\alpha}-\varepsilon))} 2^{-Mj_{n,1}}) = 2^{-j_n\bar{\alpha}} = 2^{(M-\bar{\alpha})j_{n+1} - Mj_{n,1}}$, on va donc se donner une suite (j_n) telle que pour tout n on ait

$$(2.6.2) \quad j_{n,1} = \frac{\bar{\alpha}}{\underline{\alpha}} j_n = \frac{M - \bar{\alpha}}{M - \underline{\alpha}} j_{n+1}.$$

et ainsi définir une série d'ondelettes ayant les propriétés recherchées :

Proposition 2.6.2 Soit $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'entier définie par $j_0 = 1$ et pour tout n

$$(2.6.3) \quad j_{n+1} = \left[\frac{M - \underline{\alpha}}{M - \bar{\alpha}} \frac{\bar{\alpha}}{\underline{\alpha}} j_n \right], \quad j_{n,1} = \left[\frac{\bar{\alpha}}{\underline{\alpha}} j_n \right].$$

Alors la série d'ondelettes F définie par

$$(2.6.4) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad F(x) = \sum_{i,k} \sum_n \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \inf(2^{-j_n \bar{\alpha}}, 2^{j_{n+1}(M-\bar{\alpha})} 2^{-Mj}) \psi_{j,k}^i(x),$$

a bien pour exposants de régularité uniforme et d'irrégularité uniforme les réels $\underline{\alpha}$ et $\bar{\alpha}$ respectivement.

Preuve. Ceci découle directement de la construction de la fonction F . □

On va maintenant donner un deuxième exemple de séries d'ondelettes, cette fois ci lacunaires.

2.6.2 Une famille de séries d'ondelettes lacunaires

Soit $\underline{\alpha}$ un réel compris entre 0 et 1 et $\ell = (\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers. On va s'intéresser dans cette section aux propriétés de régularité et d'irrégularité uniforme des séries d'ondelettes lacunaires

$$(2.6.5) \quad f_\ell(x) = \sum_{i,n,k} 2^{-\ell_n \underline{\alpha}} \psi_{\ell_n,k}^i(x).$$

On posera pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \frac{\ell_n}{\ell_{n-1}}$. Le réel positif β sera défini par $\beta = \limsup_n \beta_n$.

L'indice β est supérieur ou égal à 1. Il s'agit d'un indice qui mesure ⁿ le **degré de lacunarité** de la série d'ondelette f_ℓ . On peut remarquer que toutes les fonctions f_ℓ ont le même exposant de Hölder uniforme

$$\mathcal{H}_{f_\ell} = \underline{\alpha}.$$

Cet exemple est plus intéressant car cette fois ci, on n'a pas de minoration des coefficients d'ondelettes à chaque échelle du type

$$\forall j \geq 0, \quad \sup_{|\lambda|=2^{-j}} |c_\lambda| \geq C_0 2^{-j \bar{\alpha}},$$

qui permettrait d'estimer directement l'exposant d'irrégularité uniforme comme cela a été fait dans la section précédente.

On va donc devoir utiliser le critère d'irrégularité plus fin démontré dans la section 2.4. Le degré d'irrégularité uniforme des fonctions f_ℓ va dépendre du degré de lacunarité de la série d'ondelette considérée.

En effet, par le critère ondelettes démontré dans la section 2.4, on sait que les coefficients d'ondelettes situés aux échelles $(2^{-\ell_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ont, du point de vue de l'irrégularité uniforme, une influence à la fois sur **les échelles inférieures et supérieures** à $2^{-\ell_n}$. Cette influence décroît de plus progressivement au fur et à mesure que l'on s'éloigne de l'échelle $2^{-\ell_n}$.

Ceci va impliquer que lorsque la plage des échelles intermédiaires entre les échelles $2^{-\ell_n}$ est grande, il va exister une suite d'échelles intermédiaires $(2^{-j_n})_n$ pour laquelle l'influence

des coefficients d'ondelettes est faible. La série lacunaire définie par l'équation (2.6.5) aura ainsi un exposant d'irrégularité uniforme élevé si l'indice de lacunarité β est grand.

Il y aura donc deux difficultés à surmonter. Tout d'abord par rapport à l'exemple précédent, il va falloir **construire la suite d'échelles intermédiaires** $(2^{-j_n})_n$. Cette suite sera construite de telle manière que pour tout n , l'échelle 2^{-j_n} soit un point d'équilibre entre l'influence exercée par les coefficients d'ondelettes situés à l'échelle qui lui est juste supérieure $2^{-\ell_n}$, et celle qui lui est juste inférieure $2^{-\ell_{n-1}}$. De plus, il va falloir estimer l'indice **d'irrégularité uniforme** $\bar{\alpha}$.

On considère tout d'abord le cas où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\beta_n = \beta$. On suppose le réel $\bar{\alpha}$ connu et inférieur à 1. On va s'inspirer de la construction faite dans la section précédente dans le cas $M = 1$. La suite $(\ell_n)_n$ qui a permis d'estimer l'exposant de Hölder uniforme de la série d'ondelettes f_ℓ est identifié à la suite $(j_{n,1})_n$ de la section précédente. On définit alors la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$j_n = \left[\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} \ell_n \right] + 1.$$

On aura alors

$$c_{\ell_n, k}^i = 2^{-\ell_n \alpha} = 2^{-j_n \bar{\alpha}} = 2^{j_{n+1}(1-\bar{\alpha}) - \ell_n},$$

ceci traduisant le fait que l'influence des coefficients d'ondelettes situés à l'échelle $2^{-\ell_n}$ sera alors la même à l'échelle intermédiaire juste inférieure 2^{-j_n} et juste supérieure $2^{-j_{n+1}}$.

On peut maintenant exprimer $\bar{\alpha}$ en fonction de β . Par définition de $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_n \frac{\ell_n}{j_n} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \lim_n \frac{\ell_n}{j_{n+1}} = \frac{1 - \bar{\alpha}}{1 - \alpha}.$$

et donc

$$\lim_n \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \times \frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}}.$$

Comme par ailleurs

$$\lim_n \frac{\ell_{n+1}}{\ell_n} = \beta,$$

on en déduit que nécessairement

$$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \times \frac{1 - \alpha}{1 - \bar{\alpha}},$$

soit

$$\bar{\alpha} = \bar{\alpha} = \frac{\beta \alpha}{1 - \alpha + \beta \alpha}.$$

Si maintenant la suite $(\beta_n)_n$ n'est pas constante on adapte la construction précédente en posant pour tout n

$$(2.6.6) \quad \alpha_n = \frac{\beta_n \alpha}{1 - \alpha + \beta_n \alpha},$$

et

$$(2.6.7) \quad j_n = \left[\frac{\alpha}{\alpha_n} \ell_n \right] + 1.$$

On montre dans la proposition suivante que l'on a bien le résultat voulu :

Proposition 2.6.3 *La fonction f_ℓ a pour exposant de Hölder uniforme $\underline{\alpha}$ et pour exposant d'irrégularité uniforme le réel \mathcal{I}_{f_ℓ} défini par,*

$$(2.6.8) \quad \mathcal{I}_{f_\ell} = \bar{\alpha} = \frac{\beta \underline{\alpha}}{1 - \underline{\alpha} + \beta \underline{\alpha}}.$$

Preuve. L'estimation de l'exposant de Hölder uniforme est triviale. On va maintenant s'intéresser à celle de l'exposant d'irrégularité uniforme.

Par définition de β il existe une fonction strictement croissante φ telle que,

$$\lim_n(\beta_{\varphi(n)}) = \beta.$$

On remarque alors que $\bar{\alpha} = \limsup(\alpha_n)$ et qu'on a alors aussi

$$\lim_n(\alpha_{\varphi(n)}) = \bar{\alpha}.$$

Soit alors ε un réel positif fixé et C une constante positive. Si n est un entier fixé suffisamment grand et $j \in \{j_{\varphi(n)}, \dots, j_{\varphi(n+1)} - 1\}$,

$$|c_{j,k}^i| \leq 2^{-\ell_{\varphi(n)} \underline{\alpha}} \leq 2^{-(j_{\varphi(n)}-1)\alpha_{\varphi(n)}} \leq 2^{-j_{\varphi(n)}(\bar{\alpha}-\varepsilon)}$$

car pour tout n , $\ell_{\varphi(n)} \underline{\alpha} \geq (j_{\varphi(n)} - 1)\alpha_{\varphi(n)}$. De plus, comme par (2.6.7) et (2.6.6),

$$j_n = \left[\frac{1 - \underline{\alpha}}{1 - \alpha_n} \ell_{n-1} \right] + 1,$$

on en déduit que

$$2^j |c_{j,k}^i| \leq 2^{\ell_{\varphi(n+1)} - 1(1 - \underline{\alpha})} \leq 2^{j_{\varphi(n+1)}(1 - \alpha_{\varphi(n+1)})} \leq 2^{j_{\varphi(n+1)}(1 - \bar{\alpha} - \varepsilon)}$$

Ceci implique donc la minoration,

$$\mathcal{I}_{f_\ell} \geq \bar{\alpha}.$$

On montre maintenant l'inégalité inverse. Soit n un entier fixé. On distingue deux cas :

Si $j \in \{j_n, \dots, \ell_n\}$

$$\max(\sup_{\ell \geq j} |c_{\ell,k}^i|, 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} 2^\ell |c_{\ell,k}^i|) = 2^{-\ell_n \underline{\alpha}}$$

Si $j \in \{\ell_n + 1, \dots, j_{n+1} - 1\}$

$$\max(\sup_{\ell \geq j} |c_{\ell,k}^i|, 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} 2^\ell |c_{\ell,k}^i|) = 2^{-j} 2^{\ell_n(1 - \underline{\alpha})}$$

On a alors pour tout n et tout j dans $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$,

$$\max(\sup_{\ell \geq j} |c_{\ell,k}^i|, 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} 2^\ell |c_{\ell,k}^i|) \geq 2^{-j \alpha_n} \geq 2^{-j(\bar{\alpha} + \varepsilon)}$$

à partir d'un certain rang. On a donc bien la majoration,

$$\mathcal{I}_{f_\ell} \leq \bar{\alpha}.$$

□

Cet exemple va permettre d'expliquer très simplement sur un exemple concret pourquoi l'ensemble $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ n'est pas un espace vectoriel. En effet, soit $\beta > 1$ fixé et $\gamma = \sqrt{\beta}$. On considère les deux séries d'ondelettes

$$f(x) = f_\ell(x), g(x) = \sum_{i,n,k} 2^{-\tilde{\ell}_n \alpha} \psi_{\tilde{\ell}_n, k}(x),$$

où pour tout entier n

$$\ell_n = [\beta^n], \tilde{\ell}_n = \gamma \ell_n.$$

On remarque que ces deux séries ont le même degré de lacunarité β et que c'est cet indice de lacunarité (voir proposition précédente) qui détermine uniquement l'exposant d'irrégularité de la fonction f_ℓ (et aucunement de la valeur de j_0).

On en déduit donc que

$$\mathcal{I}_f = \mathcal{I}_g = \frac{\beta \alpha}{1 - \alpha + \beta \alpha}.$$

Par contre la série d'ondelette, $f + g$ a un indice de lacunarité γ inférieur à β . Son exposant d'irrégularité, égal à $\frac{\gamma \alpha}{1 - \alpha + \gamma \alpha}$ est donc inférieur à $\frac{\beta \alpha}{1 - \alpha + \beta \alpha}$. Ceci contredit bien l'hypothèse que $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel.

2.7 Algèbres d'opérateurs et irrégularité uniforme

Dans cette section l'objectif est de vérifier que les critères ondelettes d'irrégularité uniforme et de régularité uniforme sont indépendants de la base d'ondelette choisie. Pour vérifier cette indépendance il faudrait avoir une description de toutes les bases d'ondelettes possibles ce qui n'est pas réaliste. De manière classique on montre une propriété plus forte mais plus simple à vérifier. On montre la stabilité des critères ondelettes sous l'action de certaines algèbres d'opérateurs particulières qui contiennent les opérateurs permettant de passer d'une base d'ondelette à une autre : les algèbres $Op(\mathcal{M}^\gamma)$. Les résultats de stabilité obtenus auront d'autres implications intéressantes :

- L'exposant d'irrégularité uniforme \mathcal{I}_f d'une fonction f est ainsi stable par l'action de certains opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 comme la transformée de Hilbert en dimension 1 ou les transformées de Riesz en dimension supérieure.
- Cela permet ensuite d'étudier l'impact des opérateurs d'intégration et de dérivation fractionnaire sur le degré d'irrégularité uniforme d'une fonction.
- De manière assez classique, on en déduira des résultats sur la régularité uniforme faible des solutions de certaines équations aux dérivées partielles elliptiques. On obtiendra par exemple des résultats d'hypoellipticité du laplacien pour la régularité uniforme faible. Plus précisément, si $-\Delta f$ est une fonction uniformément Höldérienne de $\mathcal{C}_{loc,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors pour tout $\beta > 1$ f appartient à $\mathcal{C}_{loc,w}^{\alpha+2}(\mathbb{R}^d)$.

Pour étudier l'influence des opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ sur la régularité uniforme faible d'une fonction, on va avoir besoin de certains prérequis sur cette algèbre et de résultats de stabilité.

2.7.1 Un résultat de stabilité

On rappelle tout d'abord en section 2.7.1.1 la définition des algèbres d'opérateurs $Op(\mathcal{M}^\gamma)$. On étudie ensuite l'action des opérateurs appartenant à ces algèbres sur l'exposant d'irrégularité uniforme.

Les preuves des résultats énoncés sont donnés en section 2.7.1.3 et s'appuient sur la notion de module de continuité stable introduite en section 2.7.1.2.

2.7.1.1 Exposant d'irrégularité uniforme et algèbres d'opérateurs $Op(\mathcal{M}^\gamma)$

Tout ce qui suit est extrait de [Mey90]. Dans ce qui suit le réel γ est un réel positif fixé. On rappelle la définition suivante de l'algèbre \mathcal{M}^γ :

Définition 2.7.1 Une matrice infinie A indexée par les cubes dyadiques appartient à \mathcal{M}^γ si

$$\forall \lambda, \lambda', |A(\lambda, \lambda')| \leq \omega_\gamma(\lambda, \lambda'),$$

pour une certaine constante positive $C(\gamma) > 0$, où

$$\omega_\gamma(\lambda, \lambda') = \frac{C(\gamma)2^{-(\frac{d}{2}+\gamma)|j-j'|}}{(1 + (j - j')^2)(1 + 2^{\inf(j,j')|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|})^{d+\gamma}}.$$

Exemple 2.7.2 Les matrices d'opérateurs qui transforment une base orthonormale d'ondelettes de régularité r en une autre base orthonormale d'ondelettes de régularité r sont dans toutes les algèbres \mathcal{M}^γ avec $r > \gamma$. Plus généralement, les matrices sur une base orthonormée d'ondelettes de classe C^∞ de certains opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0 comme la transformée de Hilbert ou la transformée de Riesz appartiennent aux algèbres \mathcal{M}^γ pour tout $\gamma > 0$.

On note $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ l'espace des opérateurs dont la matrice dans une base orthonormée d'ondelettes (suffisamment) régulière appartient à l'algèbre \mathcal{M}^γ .

On rappelle que les opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ sont bornés sur un grand nombre d'espaces fonctionnels. Par exemple (voir [PGL85], [Mey90]) :

Proposition 2.7.3 Si $\gamma > |\alpha|$, les opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ sont continus sur les espaces de Besov $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

On montrera en section 2.7.1.3 le résultat de stabilité suivant :

Théorème 2.7.4 Soit f une fonction bornée sur \mathbb{R}^d d'exposant d'irrégularité uniforme $\mathcal{I}_f < \gamma$. Si T est un opérateur de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ alors

$$\mathcal{I}_{Tf} \geq \mathcal{I}_f.$$

Remarque 2.7.5 On peut remarquer que le cas $\mathcal{I}_f \in \mathbb{N}$ ne nécessite pas d'être traité à part.

Le théorème 2.7.4 découle du critère ondelettes d'irrégularité uniforme et de la proposition suivante :

Proposition 2.7.6 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M et f une fonction bornée. Si pour toute constante positive $C > 0$, il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$(2.7.1) \quad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,k}^j(f)| \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)}\theta(2^{-j_{n+1}})), \end{cases}$$

alors pour tout $\gamma > M$ et tout opérateur T de l'algèbre d'opérateur $Op(\mathcal{M}^\gamma)$, les coefficients d'ondelettes de la fonction Tf vérifient la propriété (2.7.1). En particulier pour tout $r > M$, la propriété (2.7.1) reste vraie indépendamment de la base d'ondelettes de régularité r choisie. Par ailleurs la propriété $f \in C_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ est (à une correction logarithmique près) stable par l'action des opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$.

Remarque 2.7.7 *Même si pour α entier, $\theta(r) = r^\alpha$, n'est pas un module de continuité fort, on montrera que la proposition 2.7.6 reste vraie dans ce cas.*

Pour montrer la proposition 2.7.6, on a besoin d'introduire la notion de module de continuité stable.

2.7.1.2 Notion de module de continuité stable

Dans cette section, on définit tout d'abord la notion de module de continuité stable. On donnera ensuite quelques exemples explicites de modules de continuité stable.

Définition 2.7.8 *Soit γ un réel positif. Le module de continuité θ est un module de continuité stable d'ordre γ s'il existe une certaine constante positive C_0 , telle que pour tout entier J positif on ait :*

$$(2.7.2) \quad \sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \theta(2^{-j}) \leq C_0 2^{\gamma J} \theta(2^{-J}).$$

et

$$(2.7.3) \quad \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \theta(2^{-j}) \leq C_0 2^{-\gamma J} \theta(2^{-J}).$$

On remarque que :

Lemme 2.7.9 *Soient γ_1, γ_2 deux réels tels que $\gamma_1 < \gamma_2$. Si θ est un module de continuité stable d'ordre γ_2 , alors θ est un module de continuité stable d'ordre γ_1 .*

Lemme 2.7.10 *Tout module de continuité fort d'ordre M est stable d'ordre M .*

Preuve. En effet, soit J un entier :

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-Mj} \theta(2^{-j}) &\leq 2^{-J(2M-1)} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{(M-1)j} \theta(2^{-j}) \\ &\leq 2^{-JM} \theta(2^{-J}) \end{aligned}$$

par la propriété (2.2.4). La propriété (2.7.2) est elle automatiquement vérifiée. \square

On va donner maintenant deux classes d'exemples de modules de continuité stables. Dans tout ce qui suit θ désignera un module de continuité fort d'ordre M . On se donne aussi $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers. On fait par ailleurs l'hypothèse que la fonction $r \mapsto r^{-M}\theta(r)$ est décroissante sur un certain intervalle $(0, r_0)$.

Lemme 2.7.11 *La fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :*

$$(2.7.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}_{I_s}(r) = r^s \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{Mj_{n+1}}\theta(2^{-j_{n+1}})r^M)$$

est un module de continuité stable d'ordre γ pour tout $s \in [0, \gamma - M]$.

Remarque 2.7.12 *La condition $s \geq 0$ est nécessaire pour que $\tilde{\theta}_{I_s}$ soit un module de continuité. En toute généralité si $s < 0$, la fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ peut ne pas être un module de continuité. Supposons en effet par exemple que $\theta(r) = r^\alpha$ et que la suite $(j_n)_n$ vérifie $\lim(j_n/j_{n+1}) = 0$. Alors, si pour un entier n donné $j_{n,\alpha}$ désigne l'entier défini par $j_{n,\alpha} = \alpha/M j_n + (1 - \alpha/M)j_{n+1}$ on remarque que comme $\lim(j_n/j_{n+1}) = 0$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j_{n,\alpha}})) = +\infty$. La fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ n'est alors pas un module de continuité et ce pour tout $s < 0$.*

Remarque 2.7.13 *On s'intéressera à ce type de module de continuité lorsqu'on s'intéressera à l'influence de l'intégration fractionnaire sur la régularité Höldérienne faible.*

Preuve. Par le lemme 2.4.17, on sait déjà que, comme $s > 0$, la fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ est un module de continuité. Il reste donc à montrer que la fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ vérifie les conditions (2.7.2) et (2.7.3). Soit J un entier et n_0 l'entier tel que $j_{n_0} \leq J \leq j_{n_0+1} - 1$. Ecrivons que,

$$\sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) = \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) + \sum_{j=j_{n_0}}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j})$$

Utilisons la définition de $\tilde{\theta}_{I_s}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq C_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{(\gamma-M-s)j} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) \\ &\quad + \sum_{j=j_{n_0}}^J \inf(2^{(\gamma-s)j} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{(\gamma-s-M)j} 2^{Mj_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) \\ &\leq C_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{(\gamma-s-M)j_{n+1}} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) \\ &\quad + \inf(2^{(\gamma-s)J} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{(\gamma-s-M)J} 2^{Mj_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du fait que $s < \gamma - M$.

On utilise alors le fait que θ est un module de continuité fort d'ordre M :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq C_0 + 2^{(\gamma-M-s)j_{n_0}} (2^{Mj_{n_0}} \theta(2^{-j_{n_0}})) + 2^{(\gamma-s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{j_{n_0+1}})) \\ &\leq C_0 + 2 \cdot 2^{(\gamma-s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{j_{n_0+1}})) \\ &\leq 3C_0 2^{\gamma J} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-J}) \end{aligned}$$

La condition (2.7.2) est donc bien vérifiée.

Intéressons nous à la condition (2.7.3) :

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) = \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j})$$

Utilisons l'expression de $\tilde{\theta}_{I_s}$:

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-(\gamma+s)j} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)}\theta(2^{j_{n_0+1}})) \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-(\gamma+s)j} \theta(2^{-j_n}) \end{aligned}$$

Or pour tout n ,

$$\sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-(\gamma+s)j} \theta(2^{-j_n}) \leq 2^{-(\gamma+s)j_n} \theta(2^{-j_n}),$$

et

$$\sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-(\gamma+s)j} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)}\theta(2^{j_{n_0+1}})) \leq 2^{-(\gamma+s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)}\theta(2^{j_{n_0+1}})).$$

Donc, en utilisant le fait qu'un module de continuité fort d'ordre M est en particulier stable d'ordre $\gamma + s$ car $\gamma + s > M$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq C_0(2^{-\gamma J} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-J}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{-(\gamma+s)j_n} \theta(2^{-j_n})) \\ &\leq C_0(2^{-\gamma J} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-J}) + 2^{-(\gamma+s)j_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) \\ &\leq C_0 2^{-(\gamma+s)J} \theta(2^{-J}) \end{aligned}$$

La condition (2.7.3) est donc bien vérifiée. □

Dans le cas particulier où $\theta(r) = r^\alpha$ on a le résultat suivant :

Lemme 2.7.14 *Soit α un réel positif et M l'entier défini par $M = [\alpha] + 1$. La fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :*

$$(2.7.5) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}_{I_s}(r) = r^s \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1}} r^M)$$

est un module de continuité stable d'ordre γ pour tout $s \in [0, \gamma - M)$.

Preuve. Seul le cas α entier ne découle pas de la proposition précédente. On se place donc dans ce cas là. Soit donc γ un réel positif tel que $0 \leq s < \gamma - M$. On sait que $M = \alpha + 1$. On

a alors pour $j_{n_0} \leq J \leq j_{n_0+1} - 1$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{(\gamma-s)j} 2^{j_{n+1}} 2^{-j(\alpha+1)} + \sum_{j=j_{n_0}}^J 2^{(\gamma-s)j} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-j(\alpha+1)}) \\
 &\leq C_0 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{j_{n+1}} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{(\gamma-s-M)j} + C_0 2^{(\gamma-s)J} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-J(\alpha+1)}) \\
 &\leq C_0 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{j_{n+1}} 2^{(\gamma-s-M)j_{n+1}} + C_0 2^{(\gamma-s)J} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-J(\alpha+1)})
 \end{aligned}$$

la dernière inégalité résultant du fait que $\gamma - s - M > 0$.

On en déduit alors que,

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) &\leq C_0 2^{(\gamma-s-M+1)j_{n_0}} + C_0 2^{(\gamma-s)J} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-J(\alpha+1)}) \\
 &\leq C_0 2^{(\gamma-s)J} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-J(\alpha+1)})
 \end{aligned}$$

ce qui est bien la propriété (2.7.2).

De même,

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{I_s}(2^{-j}) \leq \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}} 2^{-(\gamma+s)j} \inf(2^{-j_{n_0}\alpha}, 2^{j_{n_0+1}} 2^{-j(\alpha+1)}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-(\gamma+s)j} 2^{j_{n+1}} 2^{-jM}$$

Par une démarche similaire à ce qui précède on obtient alors la propriété (2.7.3). \square

On considère une deuxième classe d'exemples :

Lemme 2.7.15 Soit $\varepsilon_0 \in (0, M]$. La fonction $\tilde{\theta}_{D_s}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :

$$(2.7.6) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}_{D_s}(r) = r^{-s} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) r^M, r^{\varepsilon_0})$$

est un module de continuité stable d'ordre $\gamma > M$ pour tout $s \in (0, \inf(\varepsilon_0, \gamma - M))$.

Remarque 2.7.16 Cet exemple sera utile lorsqu'on s'intéressera à l'influence de l'opérateur de dérivation fractionnaire sur la régularité Höldérienne faible d'une fonction f de $\mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Par définition de $\tilde{\theta}_{D_s}$, comme $s < \varepsilon_0$, on a bien,

$$\lim_{r \rightarrow 0} (\tilde{\theta}_{D_s}(r)) \leq \lim_{r \rightarrow 0} (r^{\varepsilon_0-s}) = 0$$

De plus, par le lemme 2.4.17, on sait que, pour tout réel positif r

$$\tilde{\theta}_{D_s}(2r) \leq \max(2^{M-s}, 2^{\varepsilon_0-s}) \tilde{\theta}_{D_s}(r).$$

Donc la fonction $\tilde{\theta}_{D_s}$ est bien un module de continuité. Il reste donc à montrer que la fonction $\tilde{\theta}_{D_s}$ vérifie les conditions (2.7.2) et (2.7.3).

Soit J un entier et n_0 l'entier tel que $j_{n_0} \leq J \leq j_{n_0+1} - 1$.

Ecrivons que

$$\sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) = \sum_{j=0}^{j_0-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) + \sum_{j=j_{n_0}}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j})$$

Utilisons la définition de $\tilde{\theta}_{D_s}$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^J 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) &\leq C_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \inf(2^{(\gamma+s-M)j} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}), 2^{(\gamma+s-\varepsilon_0)j}) \\ &\quad + \sum_{j=j_{n_0}}^J \inf(2^{(\gamma+s)j} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{(\gamma+s-M)j} 2^{Mj_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}}), 2^{(\gamma+s-\varepsilon_0)j}) \\ &\leq C_0 + \sum_{n=0}^{n_0-1} \inf(2^{(\gamma+s-M)j_{n+1}} 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}), 2^{(\gamma+s-\varepsilon_0)j_{n+1}}) \\ &\quad + \inf(2^{(\gamma+s)J} \theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{(\gamma+s-M)J} 2^{Mj_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}}), 2^{(\gamma+s-\varepsilon_0)J}) \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant du fait que $\gamma > M \geq \varepsilon_0$.

On utilise alors le fait que θ est un module de continuité fort d'ordre M :

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{J-1} 2^{\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) &\leq C_0 + \inf(2^{(\gamma+s-M)j_{n_0}} (2^{Mj_{n_0}} \theta(2^{-j_{n_0}})), 2^{(\gamma+s-\varepsilon_0)j_{n_0}}) \\ &\quad + 2^{(\gamma+s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{j_{n_0+1}}), 2^{-J\varepsilon_0}) \\ &\leq C_0 + 2 \cdot 2^{(\gamma+s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)} \theta(2^{j_{n_0+1}}), 2^{-\varepsilon_0 J}) \\ &\leq 3C_0 2^{\gamma J} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-J}) \end{aligned}$$

La condition (2.7.2) est donc bien vérifiée.

On va s'intéresser à la condition (2.7.3) :

$$\sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) = \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{D_{s,\varepsilon_0}}(2^{-j}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j})$$

En utilisant l'expression de $\tilde{\theta}_{D_s}$ on en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) &\leq \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-(\gamma-s)j} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)} \theta(2^{j_{n_0+1}}), 2^{-j\varepsilon_0}) \\ &\quad + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \inf(2^{-(\gamma-s)j} \theta(2^{-j_n}), 2^{-j(\gamma-s+\varepsilon_0)}) \end{aligned}$$

Or pour tout n , comme $s < \gamma - M < \gamma$,

$$\sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} 2^{-(\gamma-s)j} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{-j\varepsilon_0}) \leq 2^{-(\gamma-s)j_n} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{-j_n\varepsilon_0})$$

et

$$\begin{aligned} & \sum_{j=J}^{j_{n_0+1}-1} 2^{-(\gamma-s)j} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-j)}\theta(2^{j_{n_0+1}}), 2^{-\varepsilon_0}) \\ & \leq 2^{-(\gamma-s)J} \inf(\theta(2^{-j_{n_0}}), 2^{M(j_{n_0+1}-J)}\theta(2^{j_{n_0+1}}), 2^{-J\varepsilon_0}). \end{aligned}$$

Donc, en utilisant le fait qu'un module de continuité fort d'ordre M est en particulier stable d'ordre $\gamma - s$ car $\gamma - s > M$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-\gamma j} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-j}) & \leq C_0(2^{-\gamma J} \tilde{\theta}_{D_s}(2^{-J}) + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{-(\gamma+s)j_n} \theta(2^{-j_n})) \\ & \leq C_0(2^{-\gamma J} \tilde{\theta}_s(2^{-J}) + 2^{-(\gamma-s)j_{n_0+1}} \theta(2^{-j_{n_0+1}})) \\ & \leq C_0 2^{-(\gamma-s)J} \theta(2^{-J}) \end{aligned}$$

La condition (2.7.3) est donc bien vérifiée. □

Dans le cas particulier où $\theta(r) = r^\alpha$ on a le résultat suivant :

Lemme 2.7.17 *Soit α un réel positif et M l'entier défini par $M = [\alpha] + 1$. La fonction $\tilde{\theta}_{I_s}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :*

$$(2.7.7) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall r \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}_{D_{s,\varepsilon_0}}(r) = r^{-s} \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1}} r^M, r^{\varepsilon_0})$$

est un module de continuité stable d'ordre γ pour tout $s \in (0, \inf(\varepsilon_0, \gamma - M))$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du lemme 2.7.14. □

On va s'intéresser maintenant à la stabilité proprement dite de la propriété

$$f \in \mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d),$$

par les opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$.

2.7.1.3 Démonstration du résultat de stabilité

La démonstration de la proposition 2.7.6 est basée sur le résultat de stabilité suivant :

Proposition 2.7.18 *Soit γ un réel positif, s un réel et $\tilde{\theta}$ un module de continuité stable d'ordre γ . Si f est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ dont les coefficients d'ondelettes $(c_{j,k}^i(f))_{i,j,k}$ vérifient la propriété suivante :*

$$(2.7.8) \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} (|c_{j,k}^i(f)|) \leq C \tilde{\theta}(2^{-j}),$$

alors pour tout opérateur T de $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ il existe une constante positive C_0 ne dépendant que de l'opérateur T telle que

$$(2.7.9) \quad \sup_{k \in \mathbb{Z}^d} (|\tilde{c}_{j,k}^i(Tf)|) \leq C_0 C \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Preuve. On note A la matrice de l'opérateur T dans une base orthonormée d'ondelette suffisamment régulière. Par définition

$$(2^{-j\frac{d}{2}}\tilde{c}_{j,k}^i)_{i,j,k} = A(2^{-j\frac{d}{2}}c_{j,k}^i)_{i,j,k}$$

Donc pour tout i, j, k

$$2^{-j\frac{d}{2}}\tilde{c}_{j,k}^i = \sum_{j',k'} A(\lambda, \lambda') 2^{-j'\frac{d}{2}} c_{j',k'}^{i'}$$

On réécrit cette équation et on coupe la somme précédente en deux

$$\tilde{c}_{j,k}^i = \sum_{i',j',k'} A(\lambda, \lambda') 2^{(j-j')\frac{d}{2}} c_{j',k'}^{i'} = \sum_{i'} \sum_{j' < j} \sum_{k'} A(\lambda, \lambda') 2^{(j-j')\frac{d}{2}} |c_{j',k'}^{i'}| + \sum_{i'} \sum_{j' \geq j} \sum_{k'} A(\lambda, \lambda') 2^{(j-j')\frac{d}{2}} |c_{j',k'}^{i'}|.$$

L'appartenance de T à l'algèbre d'opérateurs $Op(\mathcal{M}^\gamma)$ implique alors que :

$$|\tilde{c}_{j,k}^i| \leq C \sum_{i'} \sum_{j' < j} \sum_{k'} \frac{C(\gamma) 2^{-\gamma(j-j')}}{(1+(j-j')^2)(1+2^{j'}|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^{d+\gamma}} \tilde{\theta}(2^{-j'}) + C \sum_{i'} \sum_{j' \geq j} \sum_{k'} \frac{C(\gamma) 2^{-(\gamma+d)(j-j')}}{(1+(j-j')^2)(1+2^j|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^{d+\gamma}}$$

Comme $\sup_{j' \geq 0} (\sum_{k'} \frac{1}{(1+|k2^{j'-j} - k'|)^{d+\gamma}}) < +\infty$, par la propriété (2.7.2) d'un module de continuité stable d'ordre γ on a

$$(2.7.10) \quad \sum_{j' < j} \sum_{k'} \frac{2^{\gamma(j'-j)} \tilde{\theta}(2^{-j'})}{(1+(j-j')^2)(1+2^{j'}|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^{d+\gamma}} \leq 2^{-\gamma j} \sum_{j' < j} 2^{\gamma j'} \tilde{\theta}(2^{-j'}) \leq \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

On utilise maintenant l'inégalité classique $\sum_{k'} \frac{1}{(1+2^j|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^{n+\gamma}} \leq C_0 2^{d(j'-j)}$. La propriété (2.7.3) d'un module de continuité stable d'ordre γ implique que

$$(2.7.11) \quad \sum_{j' \geq j} \sum_{k'} \frac{2^{-(\gamma+d)(j'-j)} \tilde{\theta}(2^{-j'})}{(1+(j-j')^2)(1+2^j|\frac{k}{2^j} - \frac{k'}{2^{j'}}|)^{d+\gamma}} \leq \sum_{j' \geq j} \frac{2^{-\gamma(j'-j)} \tilde{\theta}(2^{-j'})}{1+(j-j')^2} \leq C_0 \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

La proposition 2.7.18 découle alors des deux (2.7.10) et (2.7.11). □

On déduit maintenant de cette proposition le résultat de la proposition 2.7.6. Pour cela on applique la proposition 2.7.18 au module de continuité stable d'ordre γ , $\tilde{\theta}$ défini pour $r \leq 2^{-j_0}$ par,

$$\tilde{\theta}(r) = \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{Mj_{n+1}} \theta(2^{-j_{n+1}}) r^M).$$

La proposition 2.7.6 en découle directement.

On peut remarquer que, comme pour α entier, $\tilde{\theta}$ défini pour $r \leq 2^{-j_0}$ par,

$$\tilde{\theta}(r) = \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{(M-\alpha)j_{n+1}} r^M),$$

est bien un module de continuité stable d'ordre γ pour $\gamma > \alpha$, le résultat de la proposition 2.7.18 s'étend bien au cas $\theta(r) = r^\alpha$ avec α entier.

La proposition 2.7.18 va aussi avoir des conséquences sur l'influence des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaire sur la régularité faible. C'est ce que l'on va détailler dans la section suivante.

2.7.2 Dérivation, intégration fractionnaire et régularité Höldérienne uniforme faible

On commence par rappeler la définition des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaire (voir [Cald58]).

Définition 2.7.19 *On définit pour s réel l'opérateur Δ^s de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la manière suivante :*

$$\widehat{\Delta^s f} = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(\xi).$$

Pour $s \leq 0$, Δ^s sera noté I_{-s} . La distribution tempérée $I_s f$ sera appelée l'intégrale fractionnaire d'ordre $(-s)$ de la distribution tempérée f .

Pour $s > 0$, Δ^s sera noté D_s . La distribution tempérée $D_s f$ sera appelée la dérivée fractionnaire d'ordre s de la distribution tempérée f .

Les résultats obtenus seront basés sur ce qui précède et sur la proposition suivante, similaire à la proposition 13.14 de [Jaf94] :

Proposition 2.7.20 *Soit s un réel quelconque et A la matrice de l'opérateur Δ^s dans la base d'ondelette orthonormée $(2^{j\frac{d}{2}}\psi_\lambda)$. Alors pour tout $\gamma > 0$*

$$M_s = D_s^{-1} A_s D_s^{-1} \in \mathcal{M}^\gamma,$$

avec $D_s(\lambda, \lambda') = 2^{j\frac{s}{2}} \delta_{\lambda, \lambda'}$.

Remarque 2.7.21 *On montre en fait dans cette proposition l'appartenance des opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaire à des algèbres d'opérateurs plus générales que celle des opérateurs de l'algèbre $Op(\mathcal{M}^\gamma)$: les algèbres $Op(\mathcal{M}^{\gamma, s})$ définies dans [BJR97].*

Preuve. Soit γ un réel positif fixé. La propriété que l'on souhaite démontrer est indépendante de la base d'ondelette suffisamment régulière choisie. On choisit donc comme ondelette mère, l'ondelette de Meyer qui est une ondelette dans la classe de Schwartz telle que

$$\text{supp}(\widehat{\psi}) \subset \{\xi \in \mathbb{R}^d, \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3}\}.$$

Par définition

$$(D_s^{-1} A_s D_s^{-1})(\lambda, \lambda') = 2^{-js} A(\lambda, \lambda').$$

On écrit alors que

$$\begin{aligned} A_s(\lambda, \lambda') &= \langle \Delta^s(2^{j\frac{d}{2}}\psi_\lambda), 2^{j'\frac{d}{2}}\psi_{\lambda'} \rangle \\ &= 2^{(j+j')\frac{d}{2}} \langle \widehat{\Delta^s \psi_\lambda}, \widehat{\psi_{\lambda'}} \rangle \\ &= 2^{(j+j')\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\widehat{\psi_\lambda}(\xi) \widehat{\psi_{\lambda'}}(\xi)}{(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}} d\xi \end{aligned}$$

On remarque que si $|j - j'| > 1$, $A(\lambda, \lambda') = 0$ car les supports de $\widehat{\psi_\lambda}$ et $\widehat{\psi_{\lambda'}}$ sont disjoints. On considère alors le cas $j = j'$. Comme par le changement de variable $\zeta = 2^{-j}\xi$

$$\begin{aligned} |A_s(\lambda, \lambda')| &= \left| \int_{|\zeta| \geq \frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{(1 + 2^j |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}} d\zeta \right| \\ &\leq \max\left(\left| \int_{|\zeta| \geq \frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{(2^j |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}} d\zeta \right|, \left| \int_{|\zeta| \geq \frac{2\pi}{3}} \frac{e^{i(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{(2 \cdot 2^j |\zeta|^2)^{\frac{s}{2}}} d\zeta \right| \right) \end{aligned}$$

suisant que le réel s est positif ou négatif.

On a alors bien

$$|A_s(\lambda, \lambda')| \leq \frac{C(s, \gamma, \psi)2^{-js}}{(1 + |k - k'|)^\gamma},$$

ce qui est bien le résultat souhaité.

Les cas $j = j' + 1$ et $j = j' - 1$ se traitent de manière analogue. \square

Les résultats de cette proposition et le critère ondelettes de régularité uniforme faible permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition 2.7.22 *Soit $\beta > 1$.*

1. *Soit $s > 0$. Si f est une fonction uniformément Höldérienne de $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors $I_s f \in \mathcal{C}_{|\log^\beta(\cdot)|, w}^{\alpha+s}(\mathbb{R}^d)$.*
2. *Soit $0 < s < \varepsilon_0$ et f une fonction de $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R}^d)$ alors $D_s f \in \mathcal{C}_{|\log^\beta(\cdot)|, w}^{\alpha-s}(\mathbb{R}^d)$.*

Cette proposition découle du résultat plus général suivant :

Proposition 2.7.23 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre $M \in \mathbb{N}$ et β un réel supérieur à 1.*

1. *Soit s un réel positif et f une fonction de $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$ uniformément Höldérienne alors $I_s f \in \mathcal{C}_{\theta_{I_s}, |\log^\beta(\cdot)|, w}^M(\mathbb{R}^d)$ où θ_{I_s} est défini par $\theta_{I_s}(r) = r^s \theta(r)$.*
2. *Soit $0 < s < \varepsilon_0$ et f une fonction de $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R}^d)$ alors $D_s f \in \mathcal{C}_{\theta_{D_s}, |\log^\beta(\cdot)|, w}^M(\mathbb{R}^d)$, où θ_{D_s} est défini par $\theta_{D_s}(r) = r^{-s} \theta(r)$.*

Preuve. Les notations sont celles de la proposition 2.7.20. On remarque tout d'abord que pour $s < \varepsilon_0$ (voir [Trie83]), la fonction $\Delta^s f$ est dans $\mathcal{C}^{\varepsilon_0-s}(\mathbb{R}^d)$ et est donc en particulier une fonction uniformément Höldérienne. Les critères ondelettes de régularité uniforme faible vont donc pouvoir s'appliquer à la fonction $\Delta^s f$.

On suppose maintenant que $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(\mathbb{R}^d)$. Alors par le critère ondelette de la section 2.3, pour tout $C > 0$ il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$(2.7.12) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ |c_{j,k}^i(f)| \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})).$$

On pose

$$d(f) = (d_{j,k}^i(f))_{i,j,k} = (2^{-j \frac{d}{2}} c_{j,k}^i(f))_{i,j,k},$$

qui sont les coefficients de f normalisés en norme L^2 . Alors

$$(2.7.13) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ |d_{j,k}^i(f)| \leq C 2^{-j \frac{d}{2}} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})).$$

Par la proposition 2.7.20

$$\forall(i, j, k), (d(\Delta^s f))_{i,j,k} = (A_s d(f))_{i,j,k} = (D_s M_s D_s d(f))_{i,j,k},$$

où $M_s \in \mathcal{M}^\gamma$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ |(D_s d(f))_{i,j,k}| = |2^{j\frac{s}{2}} d_{j,k}^i(f)| \leq C 2^{-j\frac{d}{2}} 2^{j(\frac{s}{2})} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})) = C 2^{-j\frac{d}{2}} \tilde{\theta}_s(2^{-j}).$$

Par le lemme 2.7.11 ou le lemme 2.7.15 (suivant le signe de s), le module de continuité $\theta_{\frac{s}{2}}$ est stable d'ordre $\gamma > s$. Puisque la matrice $M_s \in \mathcal{M}^\gamma$ pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, la proposition 2.7.18 implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ |(M_s D_s(f))_{i,j,k}| \leq C 2^{-j\frac{d}{2}} \tilde{\theta}_s(2^{-j}).$$

Comme $(d_{j,k}^i(\Delta^s f))_{i,j,k} = (D_s M_s D_s d(f))_{i,j,k}$, on en déduit que

$$(2.7.14) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, \\ |d_{j,k}^i(\Delta^s f)| \leq C 2^{-j\frac{d}{2}} 2^{js} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})).$$

On réécrit alors l'équation 2.7.14 à l'aide des coefficients d'ondelettes normalisés en norme L^∞ $(c_{j,k}^i(\Delta^s f))_{i,j,k}$. L'utilisation du critère ondelette de régularité uniforme faible implique alors la proposition 2.7.22. □

Preuve de la proposition 2.7.23.

Pour $\alpha \notin \mathbb{N}$, la proposition 2.7.22 implique directement la proposition 2.7.23. Dans le cas $\alpha \in \mathbb{N}$, comme pour tout $s < \inf(\gamma, \varepsilon_0)$

$$\tilde{\theta}_s(2^{-j}) = 2^{js} \inf(\theta(2^{-j_n}), 2^{M(j_{n+1}-j)} \theta(2^{-j_{n+1}})),$$

est un module de continuité stable d'ordre γ , la proposition 2.7.23 est vraie.

2.7.3 Hypoellipticité des opérateurs elliptiques pour la régularité uniforme faible

On va maintenant donner une application des résultats montrés dans les deux sections précédentes. Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^d à valeurs réelles et \mathcal{L} un opérateur pseudo-différentiel d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathcal{L}f = \sum_{|\ell| \leq m} a_\ell(x) D^\ell f.$$

Les coefficients a_β seront supposés infiniment différentiables sur \mathbb{R}^d et l'opérateur \mathcal{L} sera supposé elliptique en tout point x_0 de \mathbb{R}^d ce qui signifie que pour tout point x_0 de \mathbb{R}^d ,

$$\sup_{|\xi|=1} \left| \sum_{|\ell| \leq m} a_\ell(x) \xi^\ell \right| \geq \mu_{x_0} > 0$$

pour une certaine constante positive μ_{x_0} . Pour énoncer nos résultats, on va tout d'abord définir les ensembles $\mathcal{C}_{loc,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Définition 2.7.24 *On dira que la fonction localement bornée f appartient à l'ensemble $\mathcal{C}_{loc,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ si pour toute fonction φ de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ la fonction φf est dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$.*

On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.7.25 *Soit f une distribution. Si la distribution $g = \mathcal{L}f$ est une fonction de $\mathcal{C}_{loc,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ pour un certain réel positif α et localement uniformément Höldérienne alors pour tout réel β supérieur à 1, la fonction f est dans $\mathcal{C}_{loc,|\log^\beta(\cdot)|,w}^{\alpha+m}(\mathbb{R}^d)$.*

Preuve. On adapte la preuve du théorème 3.2 du chapitre 2 de [LionsMag68]. On démontre le résultat voulu en deux étapes.

Première étape : on montre que si la fonction f est localement dans $\mathcal{C}_w^{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^d)$ et si la fonction g est localement dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ alors la fonction f est localement dans $\mathcal{C}_w^{\alpha+m}(\mathbb{R}^d)$

En effet, soit φ une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ définit alors la fonction \tilde{f} par,

$$\tilde{f} = \varphi f.$$

On remarque qu'on a alors,

$$\mathcal{L}\tilde{f} = \varphi g + \mathcal{L}_1\tilde{f} = \tilde{g}$$

avec \mathcal{L}_1 qui est un opérateur d'ordre $m - 1$. Les hypothèses faites sur f et g impliquent alors que la fonction \tilde{g} est à support compact et que,

$$\tilde{g} \in \mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$$

On a donc ramené le problème au cas où f et g sont toutes deux à support compact et respectivement dans $\mathcal{C}_w^{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$. On remarque que dans ce cas que comme g est une fonction de $L^\infty(\mathbb{R}^d) \subset B_{\infty,\infty}^0$ cela implique que f est dans la classe de Zygmund $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$. On fait donc cette hypothèse dans ce qui suit. On va maintenant utiliser les résultats obtenus dans [CaldZyg61]. On pose (reprendre la définition de h)

$$\begin{cases} \text{Si } m \text{ est pair,} & h = \Delta^m f, \\ \text{Si } m \text{ est impair,} & h = \tilde{\Delta}_m f, \end{cases}$$

avec $\widehat{\tilde{\Delta}_m f}(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{m-1}{2}}(i + |\xi|^2)\widehat{f}(\xi)$. Par le lemme 6.2 de [CaldZyg61] et l'hypothèse d'ellipticité faite sur l'opérateur \mathcal{L} , on sait qu'en tout point x_0 de \mathbb{R}^d

$$h = \mathcal{H}_{x_0}g + \mathcal{H}_{x_0}(\mathcal{L}_{x_0} - \mathcal{L})f + \mathcal{M}_{x_0}f,$$

où \mathcal{H}_{x_0} est dans l'algèbre d'opérateur $Op(\mathcal{M}^\gamma)$, \mathcal{M}_{x_0} est un opérateur différentiel à coefficients constants d'ordre inférieur à $m - 1$, et \mathcal{L}_{x_0} est la partie principale de \mathcal{L} en x_0 définie par,

$$\mathcal{L}_{x_0} = \sum_{|\ell|=m} a_\ell(x_0)D^\ell.$$

La fonction g étant dans $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$ et étant de plus uniformément Höldérienne, la fonction $\mathcal{H}_{x_0}g$ sera donc bien dans $\mathcal{C}_{|\log(\cdot)|^\beta,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$. La fonction f étant dans $\mathcal{C}_w^{\alpha+m-1}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ et l'opérateur \mathcal{M}_{x_0} étant d'ordre $m - 1$, la fonction $\mathcal{M}_{x_0}f$ est bien dans $\mathcal{C}_{|\log(\cdot)|^\beta,w}^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

De plus l'opérateur $\mathcal{L}_{x_0} - \mathcal{L}$ est de la forme,

$$\mathcal{L}_{x_0} - \mathcal{L} = \sum_{|\ell|=m} b_\ell(x)D^\ell + \sum_{|\ell|<m} a_\ell(x)D^\ell$$

avec pour tout $|\ell| = m$, $b_\ell(x_0) = 0$.

Dans le cas où $\alpha - 1 \geq 0$, on utilise le fait que comme f est uniformément Höldérienne, pour $|\ell| = m$ $D^\ell f \in \mathcal{C}_w^{\alpha-1}$, pour r suffisamment petit

$$\sup_{|h| \leq r} (|\Delta_h^M (b_\ell D^\ell f)(x)|) \leq \sup_{|h| \leq r} |b_\ell(x)| \omega_{D^\ell f}^{M-1}(r) \leq r \times r^{\alpha-1}.$$

On peut donc conclure dans ce cas.

Si $\alpha - 1 < 0$, soit p tel que $\alpha - 1 + 2p > 0$ on pose,

$$f_1 = \Delta^{-p} f.$$

Alors f_1 est dans $\mathcal{C}^{\alpha-1+2p}(\mathbb{R}^d)$ (mais n'est pas forcément à support compact) et

$$g = \mathcal{L}\Delta^p f_1.$$

L'opérateur $\mathcal{L}\Delta^p$ est bien elliptique d'ordre $m + 2p$. Le résultat s'applique alors à g et f_1 qui est localement dans $\mathcal{C}^{\alpha+2\beta}(\mathbb{R}^d) \cap \mathcal{C}^{m+2p}(\mathbb{R}^d)$. On en déduit alors le résultat voulu pour f .

Deuxième étape : cas général

On utilise le fait que f (une fois qu'on s'est ramené à un support compact) est uniformément Höldérienne d'exposant ε_0 et donc en particulier $\mathcal{C}_w^{\varepsilon_0}(\mathbb{R}^d)$. Si $\varepsilon_0 \geq \alpha$ le résultat est évident. Si $\alpha - 1 \leq \varepsilon_0 \leq \alpha$ on utilise l'étape précédente. Si enfin $\varepsilon_0 < \alpha - 1$, comme $g \in \mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{C}_w^{\varepsilon_0+1}(\mathbb{R}^d)$, par l'étape précédente, $f \in \mathcal{C}_w^{\varepsilon_0+1}(\mathbb{R}^d)$. On réitère ensuite un nombre fini de fois le procédé ce qui permet de conclure. \square

Chapitre 3

Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, on a vu qu'une manière simple de construire des fonctions d'exposants de régularité uniforme et d'irrégularité uniforme différents était d'utiliser les critères ondelettes et de définir des séries d'ondelettes. On avait donc défini deux séries d'ondelettes. Le deuxième exemple basée sur la définition de séries lacunaires permettait d'illustrer le critère ondelettes d'irrégularité uniforme et notamment son caractère spécifique par rapport aux critères usuels puisqu'on illustre ainsi que les 'gros' coefficients d'ondelettes influent sur le comportement de la série d'ondelettes pour les échelles à la fois inférieures et supérieures.

On va maintenant considérer le pendant aléatoire de ces séries d'ondelettes et définir ainsi des champs gaussiens à accroissements stationnaires que l'on va qualifier de 'lacunaires', non pas à partir de séries d'ondelettes mais d'une représentation harmonisable. On rappelle qu'à partir de la représentation harmonisable, on peut montrer simplement qu'un champ est à accroissements stationnaires ce qui n'est pas immédiat pour une série d'ondelettes aléatoires. On va alors obtenir des champs uniformes en espace 'à tout point de vue' (et non seulement du point de vue de la régularité des trajectoires comme cela aurait été le cas pour des séries d'ondelettes aléatoires) dont le comportement diffère suivant la gamme d'échelles considérée. A travers l'exemple de champs gaussiens lacunaires, on va ainsi montrer qu'on peut générer des champs aléatoires 'uniformes en espace' 'non uniformes en échelles'.

En fait, on va construire des champs gaussiens qui vont suivant la famille d'échelles considérée se comporter comme des MBF d'indices de Hurst différents. En particulier, la régularité locale des trajectoires est liée pour deux familles d'échelles distinctes à deux indices de Hurst différents. De plus, ces champs vont vérifier des propriétés d'autosimilarité locale différentes suivant les échelles ce qui impliquera la non unicité du champ tangent en tout point.

On rappelle que, dans [Falc02], [Falc03], K.Falconer a généralisé la notion de champ tangent initialement définie dans [BJR97] par A.Benassi, S.Jaffard et D.Roux pour étudier la régularité locale du Mouvement Brownien Multifractionnaire. Un champ Y est un champ tangent au sens faible du champ aléatoire X en x_0 , s'il existe deux suites décroissantes de

réels positifs $(\rho_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\rho_{n,2})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que,

$$\left\{ \frac{X(x_0 + \rho_{n,1}t) - X(x_0)}{\rho_{n,2}} \right\} \rightarrow \{Y(t)\}$$

où la notion de convergence considérée est la convergence en distribution.

Dans de nombreux cas particuliers, comme celui du Mouvement Brownien Fractionnaire ou du Mouvement Brownien Multifractionnaire, le champ tangent est essentiellement unique. Plus précisément, il existe un champ Y tel que l'ensemble de tous les champs tangents à X en x_0 , appelé l'espace tangent du champ X en x_0 , est égal à $\langle Y \rangle = \{\lambda Y, \lambda > 0\}$. Dans ce cas particulier, Y est appelé le champ tangent à X en x_0 et on parle par abus de langage d'unicité du champ tangent à X en x_0 .

Par ailleurs, lorsqu'on a unicité du champ tangent en tout point, K.Falconer a montré que les champs tangents sont nécessairement autosimilaires en 0 et sont à accroissements stationnaires presque partout. Si on se place dans le cadre spécifique des champs gaussiens pour lequel le champ tangent est unique en tout point, ceci implique que presque partout le champ tangent est soit "régulier" soit est pour chaque direction fixée un Mouvement Brownien Fractionnaire.

Ceci amène à se poser un certain nombre de questions. Tout d'abord, est-il possible de définir un champ gaussien pour lequel en aucun point il y n'a unicité? Quel est alors la structure de l'espace tangent en tout point d'un tel champ?

Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire va permettre d'apporter quelques éléments de réponse à ces questions. On construira en effet un exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire admettant en tout point plusieurs champs tangents. De plus, en considérant ce même exemple on va pouvoir donner deux exemples explicites de champs tangents différents qui ne sont pas à direction fixée des MBF.

Cette dernière propriété va être liée à des propriétés d'autosimilarité locale particulières sur lesquelles on va revenir tout au long de ce chapitre. Par ailleurs, on montrera aussi en utilisant les ondelettes que presque sûrement l'exposant de Hölder uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire considéré est distinct de son exposant d'irrégularité uniforme.

On va tout d'abord, en section 3.2.1, considérer une catégorie de champs plus générale qu'on appellera le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques. On va tout d'abord se centrer sur les propriétés des trajectoires de ce MBFIED. Cela va permettre de dégager deux types extrêmes de comportements : la régularité des trajectoires peut être la même à chaque échelle ou au contraire dépendre de l'échelle considérée.

Ce qui va nous intéresser alors est un cas particulier de MBFIED. On introduit ainsi un premier exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique en section 3.2.3 qui a donc des propriétés de régularité uniforme suivant les échelles.

En section 3.3, un deuxième exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire non dyadique celui là va permettre de définir un champ gaussien qui admet en tout point plusieurs champs tangents. Dans ce cas, le résultat principal qui est démontré décrit en tout point la structure locale de l'espace tangent et les propriétés d'autosimilarité locale suivant les différentes échelles.

3.2 Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques

Dans cette section, on construit, puis on étudie les principales caractéristiques du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques.

3.2.1 Définition du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques est une généralisation du Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles initialement construit par A.Benassi et S.Deguy dans [BenDeg99], puis défini dans un cadre plus général et étudié dans [BarBer06] par J.M.Bardet et P.Bertrand.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles est une des nombreuses variantes du Mouvement Brownien Fractionnaire qui a de nombreuses applications en modélisation : (voir [?]), par exemple en hydrologie ou en finance. Les principales propriétés du Mouvement Brownien Fractionnaire sont toutes reliées à son indice de Hurst H , qu'il s'agisse de la régularité des trajectoires (liée au comportement hautes fréquences du MBF) ou des propriétés de longue mémoire des accroissements (liée au comportement basses fréquences du MBF).

Dans certaines applications, ceci peut parfois se révéler être un réel inconvénient. On va citer un exemple en finance qui a été donné par J.M.Bardet et P.Bertrand. Si on s'intéresse au processus des prix, des études statistiques montre que ce processus, qui est à accroissements stationnaires, est un processus à longue mémoire (voir [WTT99]). Si on modélisait ce processus par un MBF d'indice de Hurst H , les propriétés de longue mémoire du processus qui sont liées au comportement de la densité spectrale aux basses fréquences (en $1/|\xi|^{H+1/2}$) impliquerait que cet indice de Hurst soit supérieur à $1/2$. Par ailleurs, il n'est pas possible de faire du profit sans prendre de risque. Ceci implique que le processus des prix est une semi-martingale. Ceci étant lié au comportement asymptotique de la densité spectrale aux hautes fréquences (en $1/|\xi|^{H+1/2}$ aussi) ceci impliquerait $H = 1/2$. Ces deux propriétés sont donc bien sur incompatibles à partir du moment où la densité spectrale a le même comportement asymptotique aux hautes et basses fréquences. Dans ce cas on est donc naturellement amené à définir la densité spectrale par morceaux suivant qu'on est aux hautes ou basses fréquences. D'autres exemples extraits de la théorie de la turbulence ou du domaine de la biomécanique peuvent être trouvés dans [Fri95] ou [Col93].

Pour cette raison là, de nouveaux modèles de champs gaussiens à accroissements stationnaires dont la densité spectrale f^2 est une fonction définie par morceaux - de la forme $f(\xi) = 1/|\xi|^{H(\xi)+1/2}$, la fonction H étant une fonction constante par morceaux dépendant de la fréquence - ont été introduits de manière implicite par Collins and al. ([Col93]) ou de manière explicite par A.Benassi et S.Deguy (see [BenDeg99]). Dans les deux cas, est construit un champ gaussien possédant deux comportements différents : un lié aux hautes fréquences, un autre lié aux basses fréquences.

Pour étudier de manière précise les caractéristiques probabilistes de ce type de modèle, J.M.Bardet and P.Bertrand dans [BarBer06] introduisent un modèle général : celui du Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles où l'indice de Hurst est une fonction constante

par morceaux des fréquences. Ces deux auteurs se donnent un entier K , $K + 1$ réels positifs $\sigma_0, \dots, \sigma_K$, $K + 1$ réels compris entre 0 et 1 H_0, \dots, H_K . Ils définissent alors le Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles $\{B_{\omega, \mathbf{H}, \sigma}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ de la manière suivante,

$$B_{\omega, \mathbf{H}, \sigma}(x) = \sum_{\ell=0}^K \sigma_\ell \int_{\omega_\ell < |\xi| < \omega_{\ell+1}} \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi).$$

Ils étudient alors les principales propriétés du Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles : régularité des trajectoires et propriétés de longue mémoire.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Échelles est un modèle un tout petit peu différent du Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles. L'objectif est ici de définir un champ qui a un comportement différent suivant la **famille** d'échelles considérée. C'est la raison pour laquelle, on ne considère pas un nombre fini de plages de fréquences mais une infinité. Ceci amène naturellement à l'introduction d'un autre modèle celui du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Échelles Dyadiques :

Définition 3.2.1 Soit $\mathbf{H} = (H_j)_j$ une suite de réels vérifiant,

$$(3.2.1) \quad 0 < \liminf_{j \rightarrow +\infty} H_j \leq \limsup_{j \rightarrow +\infty} H_j < 1,$$

et $\sigma = (\sigma_j)_j$ une suite bornée.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Échelles Dyadiques $\{B_{\mathbf{H}, \sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ d'indices de Hurst $\mathbf{H} = (H_j)_j$ et d'amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ est le champ gaussien à accroissements stationnaires, isotrope de représentation harmonisable

$$(3.2.2) \quad B_{\mathbf{H}, \sigma}(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sigma_\ell \int_{D_\ell} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

où $D_0 = B_d(0, 1) = \{\xi, |\xi| < 1\}$ et où pour tout $\ell \geq 1$,

$$D_\ell = \{\xi, 2^{\ell-1} < |\xi| < 2^\ell\}.$$

Remarque 3.2.2 On remarque que sur chaque couronne D_ℓ où la densité spectrale f^2 du MBFIED n'est pas identiquement nulle, $\log(f)$ est une fonction affine par morceaux de $\log(|\xi|)$, la pente étant liée à H_ℓ , l'ordonnée à l'origine étant liée à σ_ℓ . On a donc unicité de la suite σ et (aux couronnes où la densité spectrale est nulle près) unicité de la suite des indices de Hurst \mathbf{H} .

Exemple 3.2.3 Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Échelles Dyadiques $\{B_{\mathbf{H}, \sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ dans le cas particulier où tout les indices de Hurst sont égaux : $\mathbf{H} \equiv \underline{H}$ et toutes les amplitudes sont égales $\sigma \equiv \sigma_0$ est (à un scalaire près) le Mouvement Brownien Fractionnaire.

Exemple 3.2.4 Si à partir d'un certain rang J , pour tout $j \geq J$, $\sigma_j = \sigma_J$ et $H_j = H_J$ alors le MBFIED $\{B_{\mathbf{H}, \sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ d'indices de Hurst $\mathbf{H} = (H_j)_j$ et d'amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ est un Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles au sens du modèle introduit dans [BarBer06].

Remarque 3.2.5 Si pour tout j , $\sigma_j = 1$, on retombe alors sur un cas particulier du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé (sans caractère multifractionnaire) défini par A. Ayache et J. Lévy-Véhel dans [ALV99]. On rappelle que, si $\lambda > 1$ est un réel fixé et $\mathbf{h} = (h_\ell(\cdot))_\ell$ une suite de fonctions uniformément Hölderiennes à valeurs dans $[a, b] \subset (0, 1)$, le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé de paramètres λ et \mathbf{H} est le processus gaussien continu $Y_{\mathbf{H}, \lambda}$ défini par,

$$Y_{\mathbf{H}, \lambda}(t) = \int_{0 \leq |\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{h_\ell(t) + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi) + \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{\lambda^\ell \leq |\xi| < \lambda^{\ell+1}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{h_\ell(t) + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi).$$

Si on pose $\lambda = 2$ et pour tout ℓ , $h_\ell(\cdot) \equiv H_\ell$, on retombe bien sur un MBFIED $\{B_{\mathbf{H}, \sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ d'indices de Hurst $\mathbf{H} = (H_j)_j$ et d'amplitudes $\sigma \equiv 1$.

Dans ce qui suit, le cas $\sigma \equiv 1$ n'est pas celui auquel on va s'intéresser. Tout au contraire, on va s'intéresser à un autre cas extrême, celui du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire. Dans ce cas, certains termes de la suite des amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ peuvent s'annuler. C'est ce qui va permettre d'avoir des propriétés assez particulières comme la non unicité du champ tangent en tout point, liée au fait que le comportement du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire dépend de la famille d'échelles considérée.

Mais avant de construire ce champ, on va commencer par en dire un peu plus sur les propriétés de régularité des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles.

3.2.2 Régularité des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles

Maintenant on va dire quelques mots des propriétés de régularité locale des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques. Comme cela été remarqué plus haut, quand $\sigma \equiv 1$, le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadique est un cas particulier du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé. On peut donc s'attendre à ce que, comme dans le cas du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé, les propriétés de régularité locale des trajectoires soient liées au comportement hautes-fréquences du champ considéré. Dans la proposition suivante on va voir que c'est effectivement le cas.

Proposition 3.2.6 On pose, pour tout entier j , $\tau_j = -\frac{\log_2(\sigma_j)}{j}$ avec la convention $\tau_j = +\infty$ si $\sigma_j = 0$. On définit alors le réel \underline{H} par

$$\underline{H} = \liminf_{j \rightarrow +\infty} (H_j + \tau_j).$$

L'exposant de Hölder uniforme $\underline{\mathcal{H}}_{loc}$ du Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles $\{B_{\mathbf{H}, \sigma}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'indices de Hurst $\mathbf{H} = (H_j)_j$ et d'amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ est égal presque sûrement à

$$(3.2.3) \quad \underline{\mathcal{H}}_{loc} = \sup\{\alpha, B_{\mathbf{H}, \sigma}(\cdot) \in \mathcal{C}_{loc}^\alpha(\mathbb{R}^d)\} = \underline{H}.$$

Preuve. On montrera cette proposition en section 3.4 en utilisant les ondelettes. \square

En fait on va voir que ce résultat de régularité peut recouvrir bien des situations différentes au niveau de l'irrégularité des trajectoires.

Pour illustrer cette idée, on va décrire deux cas extrêmes : celui du Mouvement Brownien Fractionnaire Classique et un premier exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.

Ici ce qu'on va appeler le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique d'indice de Hurst $\underline{H} \in (0, 1)$ d'indice de lacunarité $\tau > 1$ est le champ gaussien à accroissements stationnaires suivant

$$(3.2.4) \quad B_{\underline{H},\tau}(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{2^{[\tau n]} < |\xi| < 2^{[\tau n]+1}} \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H} + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi)$$

Dans le graphique suivant, on a représenté les densités spectrales respectives d'un MBF d'indice de Hurst $\underline{H} = 0.6$ et d'un MBFLD d'indice de Hurst $\underline{H} = 0.6$ et d'indice de lacunarité $\tau = 1.5$.

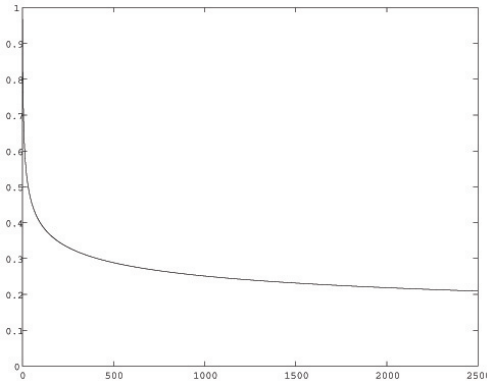


FIGURE 3.1 – Mouvement Brownien Fractionnaire classique

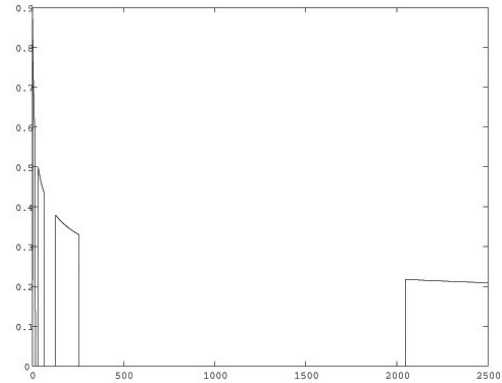


FIGURE 3.2 – Cas lacunaire

Le graphique suivant montre quelques réalisations de taille 10^7 de MBFLD défini par la relation (3.2.4) pour le même indice de Hurst $\underline{H} = 0.6$ mais pour différents indices de lacunarité. Ces simulations ont été réalisées par Samuel Nicolay (Université de Liège) qui a utilisé une méthode de synthèse par Fourier inverse. La courbe rouge est celle du MBF, la verte celle d'un MBFLD d'indice de lacunarité $\tau = 1.1$, la bleue celle d'un MBFLD d'indice de lacunarité $\tau = 1.4$ et la violette la verte celle d'un MBFLD d'indice de lacunarité $\tau = 2.1$.

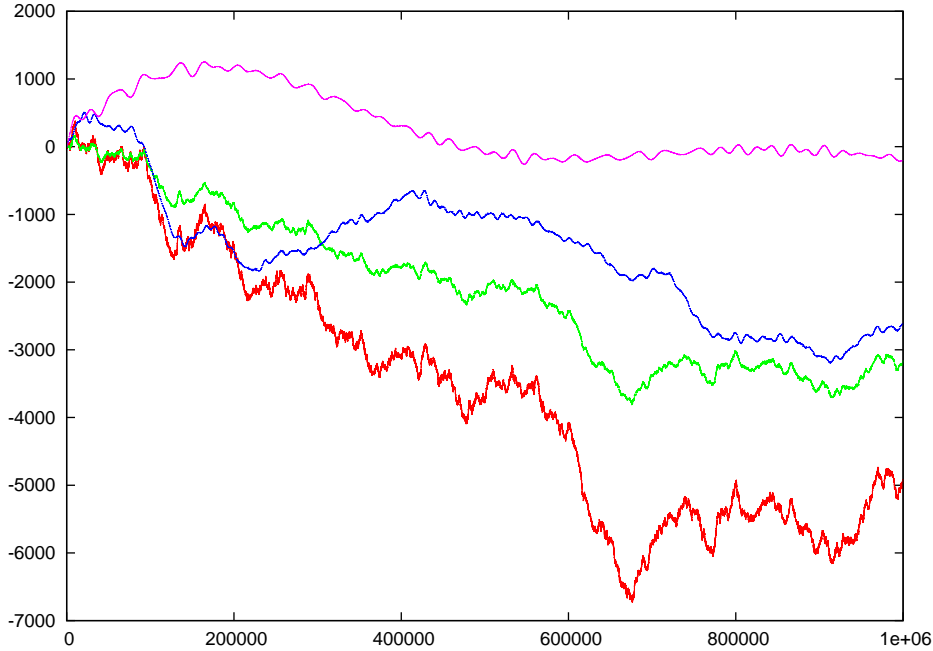


FIGURE 3.3 – Quelques réalisations de Mouvements Browniens Fractionnaires Lacunaires Dyadiques d’indices de lacunarité différents

On peut remarquer que pour tous ces processus, les trajectoires ont toutes la même régularité Hölderienne uniforme (voir la proposition 3.2.6 ci dessus). Néanmoins, plus l’indice de la cunarité est grand, plus les trajectoires ont l’air régulières. Pour interpréter ce phénomène, on va comme cela a été fait dans le chapitre 2 pour les séries d’ondelettes lacunaire, faire intervenir la notion d’irrégularité uniforme. On détaille dans les lignes qui suivent un peu plus ce point de vue.

Dans le premier cas du MBF classique, comme ce processus est auto-similaire toutes les échelles jouent le même rôle. Cela se traduit au niveau de l’irrégularité des trajectoires par la loi du log itéré. On sait donc qu’en particulier pour tout compact K de \mathbb{R}^d et tout réel positif $\varepsilon > 0$ il existe deux variables aléatoires C_1 et C_2 presque sûrement positives telle que pour toute échelle r dans $(0, r_0)$,

$$(3.2.5) \quad \frac{C_1 r^{\underline{H}}}{|\log(r)|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}} \leq \sup_{\{(x,y) \in K^2, |x-y| \leq r\}} |B_{\underline{H}}(x) - B_{\underline{H}}(y)| \leq C_2 r^{\underline{H}} |\log(r)|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

On peut résumer la propriété ci dessus, en disant que le degré d’irrégularité des trajectoires, donné par l’indice de \underline{H} , est exactement le même à toutes les échelles.

Dans le deuxième cas par contre qui est celui du MBFLD, le degré d’irrégularité des trajectoires dépend de la famille d’échelle choisie. Il va exister en fait deux familles d’échelles

remarquables pour lesquelles le degré d'irrégularité des trajectoires est différent.

Une première famille remarquable d'échelles, est la famille $(r_{n,1})_{n \in \mathbb{N}} = (2^{-\lceil \tau^n \rceil})_{n \in \mathbb{N}}$. Le degré de régularité des trajectoires est minimal et exactement \underline{H} suivant cette famille d'échelle : pour tout compact K de \mathbb{R}^d , tout $\gamma > 1$ et tout réel positif $\varepsilon > 0$ il existe deux variables aléatoires C_1 et C_2 presque sûrement positives telles pour tout entier n ,

$$(3.2.6) \quad \frac{C_1 r_{n,1}^{\underline{H}}}{|\log(r_{n,1})|^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \leq \sup_{\{(x,y) \in K^2, |x-y| \leq r_{n,1}\}} |B_{\underline{H},\tau}(x) - B_{\underline{H},\tau}(y)| \leq C_2 r_{n,1}^{\underline{H}} |\log(r_{n,1})|^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

Grace au critère ondelettes d'irrégularité uniforme, on va pouvoir identifier une autre famille d'échelles remarquables $(r_{n,2})_{n \in \mathbb{N}} = (2^{-j_n})_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle le degré de régularité des trajectoires est maximal et supérieur à \underline{H} : pour tout compact K de \mathbb{R}^d , tout $\gamma > 1$ et tout réel positif $\varepsilon > 0$ il existe deux variables aléatoires C_1 et C_2 presque sûrement positives telles pour tout entier n ,

$$(3.2.7) \quad \frac{C_1 r_{n,2}^{\overline{H}}}{|\log(r_{n,2})|^{\frac{1}{2} + \varepsilon}} \leq \sup_{\{(x,y) \in K^2, |x-y| \leq r_{n,2}\}} |B_{\overline{H},\tau}(x) - B_{\overline{H},\tau}(y)| \leq C_2 r_{n,2}^{\overline{H}} |\log(r_{n,2})|^{\gamma + \frac{1}{2}},$$

pour un certain réel \overline{H} , défini plus loin dans la proposition 3.2.7, supérieur à \underline{H} .

Pour décrire ces deux situations radicalement différentes, la notion d'irrégularité uniforme se révèle être un concept tout à fait adapté à la description de la régularité des trajectoires.

En effet, la propriété (3.2.5) peut se traduire de la manière suivante (voir proposition 3.2.7 pour plus de précisions)

$$\mathcal{H}_{B_{\underline{H},\tau},loc} = \underline{H} = \mathcal{I}_{B_{\underline{H},\tau},loc}.$$

On peut aussi interpréter les deux propriétés (3.2.6) et (3.2.7) du MBFLD en terme d'irrégularité uniforme en disant que

$$\mathcal{H}_{B_{\overline{H},\tau},loc} = \underline{H} < \mathcal{I}_{B_{\overline{H},\tau},loc} = \overline{H}.$$

Pour démontrer tous ces résultats, on va avoir besoin d'utiliser le critère ondelettes d'irrégularité uniforme. Maintenant on va appliquer ces deux critères ondelettes à l'étude du MBFLD qui a été défini ci-dessus.

3.2.3 Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique

3.2.3.1 Un résultat de régularité sur les trajectoires du MBFLD

On considère le MBFLD défini ci-dessus par l'équation (3.2.4). Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, ℓ_n désignera l'entier $\lceil \tau^n \rceil$. L'étude des propriétés de régularité uniforme faible sera basée sur l'idée qu'en gros, les gros coefficients d'ondelettes du MBFLD sont situés aux échelles $2^{-\ell_n}$ et qu'à ces échelles, on a l'estimation des coefficients d'ondelettes du champ suivantes

$$\sup_{|\lambda|=2^{-\ell_n}} |c_\lambda| \approx 2^{-\ell_n \underline{H}}.$$

On retrouve ainsi bien le pendant aléatoire de la série d'ondelettes lacunaires définie dans le chapitre 2 en section 2.6. Ainsi en section 3.5 on montrera que

$$\mathcal{I}_{B_{\overline{H},\tau},loc} = \overline{H},$$

en remarquant qu'on est presque dans le cas de la série d'ondelettes lacunaire,

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \sum_{|\lambda|=2^{-\ell_n}} 2^{-\ell_n \underline{H}} \psi_\lambda,$$

considérée au chapitre précédent.

On pourra ainsi démontrer la proposition suivante démontrée en section 3.5 :

Proposition 3.2.7 *On a les résultats suivants concernant la régularité des trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini par l'équation (3.2.4).*

1. *Presque sûrement,*

$$\mathcal{H}_{B_{\underline{H}, \tau}} = \underline{H}.$$

De plus, si on note par $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $([\tau^n])_{n \in \mathbb{N}}$ la propriété (3.2.6) est vérifiée.

2. *Soit \overline{H} le réel,*

$$(3.2.8) \quad \overline{H} = \frac{\tau \underline{H}}{1 - \underline{H} + \tau \underline{H}}.$$

Presque sûrement, l'exposant d'irrégularité uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini par l'équation (3.2.4) est \overline{H} .

De plus si on note $(j_n)_n$ la suite définie par

$$j_n = \left[\frac{\underline{H}}{\overline{H}} \ell_n \right] + 1,$$

alors la propriété (3.2.7) est vérifiée.

Remarque 3.2.8 *Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini par l'équation 3.2.4 étant l'analogue aléatoire de la série d'ondelettes lacunaires définie dans le chapitre 2 en section 2.6., on retrouve bien sur des comportements de régularité et d'irrégularité similaires. On souligne ainsi l'analogie entre la formule (2.6.8) servant à définir l'indice d'irrégularité uniforme de la série d'ondelettes du chapitre 2 et la formule (3.2.8) définissant l'indice d'irrégularité uniforme locale du MBFL.*

Dans la section suivante, on va s'intéresser à la construction d'un champ gaussien vérifiant des propriétés d'autosimilarité locale. On va devoir modifier légèrement la définition ci dessus du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique.

3.3 Un exemple de Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire non dyadique

Le but de cette section est de modifier légèrement la définition du MBFLD pour retrouver d'autres propriétés intéressantes comme la non unicité en tout point du champ tangent et des propriétés d'autosimilarité asymptotiques locales. Mais avant d'introduire ce champ, on va avoir besoin de notions préliminaires, tout spécialement celles concernant la notion d'espace tangent et de champ tangent. On va commencer par en dire un peu plus sur les notions de champs tangents et d'espaces tangents.

3.3.1 Espaces tangents et champs tangents

La notion de champ tangent a été initialement introduite dans [BJR97] par A.Benassi, S.Jaffard, D.Roux liée à celle d'autosimilarité asymptotique locale. Dans [Falc02], [Falc03], K.Falconer donne la définition plus générale suivante :

Définition 3.3.1 Soit $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ un champ aléatoire à trajectoires continues. Le champ aléatoire $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ s'annulant presque sûrement en $t = 0$ est un champ tangent en x_0 au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ s'il existe deux suites décroissantes d'échelles convergeant vers 0, $(\rho_{1,n})_n, (\rho_{2,n})_n$ telles que,

$$(3.3.1) \quad \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{X(x_0 + \rho_{1,n}t) - X(x_0)}{\rho_{2,n}} \right\}_{t \in \mathbb{R}^d} = \{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}.$$

où la convergence considérée est la convergence en distribution sur l'espace des fonctions continues munies de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Dans le cas particulier où $\rho_{2,n} = \rho_{1,n}^H$ pour $H \in (0, 1)$, on retrouve une forme faible de la notion d'autosimilarité asymptotique locale :

Définition 3.3.2 Soit $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement décroissante de réels positifs. Un champ aléatoire $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est dit localement asymptotiquement autosimilaire d'exposant H en x_0 suivant la famille d'échelles $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si le champ aléatoire $\left\{ \frac{X(x_0 + \rho_n u) - X(x_0)}{\rho_n^H} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d}$ a une limite non triviale quand n tend vers l'infini.

Pour définir rigoureusement la notion d'unicité du champ tangent, K.Falconer utilise la notion d'espace tangent. On appelle espace tangent d'un champ aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ et on note $Tan(X, x_0)$, l'ensemble de tous les champs tangents $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ en x_0 .

K.Falconer remarque que si λ est une constante positives et si $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ est un champ tangent au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ alors $\{\lambda Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ est aussi un champ tangent au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$.

On parle d'unicité du champ tangent à X en x_0 si

$$Tan(X, x_0) = \{\lambda Y', Y' \stackrel{(\mathcal{L})}{=} Y\},$$

pour un certain champ aléatoire Y .

On dit aussi que $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ est l'unique champ tangent au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$. Dans la cas contraire, on dira que le champ aléatoire X admet plusieurs champs tangents en x_0 .

Dans le cas particulier des champs gaussiens, K.Falconer a montré le résultat suivant (corollaire 3.10 de [Falc03]) qui permet de décrire la structure locale de l'espace tangent en presque tout point :

Théorème 3.3.3 Soit X un champ gaussien à trajectoires continues. Pour presque tout x_0 dans \mathbb{R}^d pour lequel X admet Y_{x_0} alors :

1. Soit il existe un vecteur aléatoire d -dimensionnel Z_{x_0} tel que presque sûrement,

$$Y_{x_0}(t) = t.Z_{x_0}$$

pour tout t dans \mathbb{R}^d .

2. Soit il existe $H \in (0, 1)$ tel que pour tout $t \neq 0$, $\{Y_{x_0}(rt)\}_{r \in \mathbb{R}}$ est un multiple scalaire du Mouvement Brownien Fractionnaire d'indice H . Cela signifie que dans chaque direction, le champ Y_{x_0} est un multiple scalaire du MBF dont l'indice de Hurst H est indépendant de la direction choisie.

En gros, dans le cas de champs gaussiens admettant en chaque point un unique champ tangent, ce champ tangent est soit 'régulier' soit 'fractal' comme un Mouvement Brownien Fractionnaire.

On peut se demander à quel type de comportement on doit s'attendre si ces hypothèses ne sont pas vérifiées. En partant d'un champ légèrement différent du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini plus haut, on montrera dans la section suivante que l'on peut définir un champ gaussien admettant plusieurs champs tangents en chaque point et dans ce cas les champs tangents du champ considérés peuvent différer du Mouvement Brownien Fractionnaire.

3.3.2 Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire particulier admettant en tout point plusieurs champs tangents

Soit $\tau > 1$ et $\underline{H} \in (0, 1)$. On rappelle que le réel \overline{H} est défini par la relation (3.2.8). On définit alors les deux suites $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : $j_0 = 1$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ell_n = \frac{\overline{H}}{\underline{H}} j_n + \gamma \log(j_n), \quad j_{n+1} = \frac{1 - \underline{H}}{1 - \overline{H}} \ell_n + \gamma \log(\ell_n)$$

où γ est un réel positif.

On définit alors le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire (non dyadique cette fois ci) suivant :

$$(3.3.2) \quad \tilde{B}_{\underline{H}, \tau}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{D_{j_n}} \frac{e^{ix\xi} - 1}{|\xi|^{\overline{H} + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}_\xi + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{D_{\ell_n}} \frac{e^{ix\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H} + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}_\xi$$

Les démonstrations des propositions 3.2.6 et 3.2.7, faites en sections 3.4 et 3.5 s'adaptent sans difficulté au cadre du MBFL défini par l'équation (3.3.2). En effet, la variance et de la covariance des coefficients d'ondelettes du MBFL défini par l'équation (3.3.2) vérifient des estimations très similaires à celles démontrées dans le cadre du MBFLD défini par l'équation (3.2.4). Les exposants de régularité et d'irrégularité uniforme locale des trajectoires sont alors presque sûrement exactement les mêmes que dans le cas du MBFLD défini par l'équation (3.2.4). De plus à une correction logarithmique près, les propriétés 3.2.6 et 3.2.7 restent vraies presque sûrement. Ce qui est plus intéressant sont les propriétés d'autosimilarité asymptotiques locales résumées dans la proposition suivante.

Proposition 3.3.4 1. Le champ gaussien $\{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ défini par l'équation (3.3.2) est asymptotiquement localement auto-similaire d'exposant \underline{H} en chaque point x_0 selon la famille d'échelles $(r_{n,1})_{n \in \mathbb{N}} = (2^{-\ell_n})_n$. De plus, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x_0 + r_{n,1}t) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x_0)}{r_{n,1}^{\underline{H}}} \right\}_{t \in \mathbb{R}^d} = \{\tilde{B}_{\underline{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$$

où la limite est prise au sens de la convergence en distribution sur l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et

$$(3.3.3) \quad \tilde{B}_{\underline{H}}(t) = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H} + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi).$$

2. Le champ gaussien $\{\tilde{B}_{\overline{H},\tau}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ défini par l'équation (3.3.2) est asymptotiquement localement auto-similaire d'exposant \overline{H} en chaque point x_0 selon la famille d'échelles $(r_{n,2})_{n \in \mathbb{N}} = (2^{-j_n})_n$. De plus, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{\tilde{B}_{\overline{H},\tau}(x_0 + r_{n,2}t) - \tilde{B}_{\overline{H},\tau}(x_0)}{r_{n,2}^{\overline{H}}} \right\}_{t \in \mathbb{R}^d} = \{\tilde{B}_{\overline{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$$

où la limite est prise au sens de la convergence en distribution sur l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact et

$$(3.3.4) \quad \tilde{B}_{\overline{H}}(t) = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\overline{H} + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

On a ainsi démontré le résultat principal de ce chapitre concernant la structure locale de l'espace tangent en tout point du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini par l'équation (3.3.2) :

Théorème 3.3.5 Les deux champs gaussiens $\{\tilde{B}_{\underline{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ et $\{\tilde{B}_{\overline{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ définis par les relations (3.3.3) et (3.3.4) sont deux champs tangents au Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire $\{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ défini par l'équation (3.3.2). Ceci implique que $\{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ **admet en tout point plusieurs champs tangents** qui ne sont pas lorsqu'on se fixe une direction des multiples scalaires d'un MBF.

3.4 Démonstration de la proposition 3.2.6

La démonstration de la proposition 3.2.6 utilise différentes techniques introduites dans [CKR93]. Pour montrer la relation (3.2.3), on décompose le champ $B_{\mathbf{H},\sigma}$ dans la base d'on-delettes de Lemarié-Meyer (voir [Mey90]).

La démonstration de la proposition 3.2.6 repose alors sur un lemme clé que l'on énonce et qu'on démontre dans la section suivante.

3.4.1 Estimation de la corrélation des coefficients d'ondelettes du MBFIED

Lemme 3.4.1 *Le champ $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est le MBFIED défini par l'équation (3.2.2)*

1. *La covariance des coefficients d'ondelettes du champ $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ peut être majorée de la manière suivante pour $j \geq 1$, $(k, k') \in (\mathbb{Z}^d)^2$:*

$$|\mathbb{E}(c_{j,k}c_{j,k'})| \leq C_0 \frac{\max(\sigma_{j-1}^2 2^{-jH_{j-1}}, \sigma_j^2 2^{-jH_j}, \sigma_{j+1}^2 2^{-jH_{j+1}})}{1 + |k - k'|},$$

où $C_0 > 0$.

2. *Si $k = k'$ alors*

$$C_1 \max_{\ell \in \{j-1, j, j+1\}} (\sigma_\ell^2 2^{-2jH_\ell}) \leq \mathbb{E}(c_{j,k}^2) \leq C_2 \max_{\ell \in \{j-1, j, j+1\}} (\sigma_\ell^2 2^{-2jH_\ell}),$$

où $C_1, C_2 > 0$.

Preuve.

1. On va utiliser l'hypothèse $0 \notin \text{supp}(\widehat{\psi})$. Soit $j \geq 1$, $(k, k') \in (\mathbb{Z}^d)^2$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(c_{j,k}c_{j,k'}) &= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sigma_\ell^2 \int_{D_\ell} \frac{e^{i(k-k')\xi} |\widehat{\psi}(2^{-j}\xi)|^2}{|\xi|^{2H_\ell+1}} d\xi \\ &= \sigma_{j-1}^2 2^{-2jH_{j-1}} \int_{1/2 < |\zeta| < 1} \frac{e^{i2^j(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_{j-1}+1}} d\zeta \\ &\quad + \sigma_j^2 2^{-2jH_j} \int_{1 < |\zeta| < 2} \frac{e^{i2^j(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_j+1}} d\zeta \\ &\quad + \sigma_{j+1}^2 2^{-2jH_{j+1}} \int_{2 < |\zeta| < 4} \frac{e^{i2^j(k-k')\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_{j+1}+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Soit j un entier fixé et $p \in \{0, 1, 2\}$, on définit alors la fonction F_j^p par

$$F_j^p(x) = \int_{2^{p-1} < |\zeta| < 2^p} \frac{e^{i2^{-j}x\zeta} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_j+1}} d\zeta,$$

On souhaite majorer

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} ((1 + |x|) |F_j^p(x)|).$$

Il est suffisant pour cela de savoir majorer $\|\widehat{F}_j^p\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \int \sum_{\ell=1}^d \left\| \frac{\partial^\ell \widehat{F}_j}{\partial \zeta_\ell} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

$$\text{Or } \|\widehat{F}_j^p\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \int_{2^{p-1} < |\zeta| < 2^p} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_j+1}} d\zeta \leq \int_{1 < |\zeta| < 8} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H+1}} d\zeta = C(\underline{H}).$$

De plus, pour tout ℓ et p :

$$\frac{\partial^\ell \widehat{F}_j^p}{\partial \zeta_\ell} = \mathbf{1}_{2^{p-1} < |\zeta| < 2^p}(\zeta) \left(\frac{\partial^\ell (|\widehat{\psi}(\zeta)|^2)}{\partial \zeta_\ell} \frac{1}{|\zeta|^{2H_j+1}} - (2H_j + 1) \zeta_\ell |\widehat{\psi}|^2 \frac{1}{|\zeta|^{2H_j+3}} \right),$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\overrightarrow{\text{grad}}(\widehat{F}_j^p)(\zeta)\|_{\ell^1} d\zeta \leq \int_{2^{p-1} < |\zeta| < 2^p} \frac{\partial^\ell (|\widehat{\zeta}|^2)}{\partial \zeta_\ell} \frac{1}{|\zeta|^{2\overline{H}+1}} d\zeta + (2\overline{H}+1) \int_{1 < |\zeta| < 2} |\widehat{\psi}(\zeta)|^2 \frac{1}{|\zeta|^{2\overline{H}+1}} \leq C(\underline{H}, \overline{H}).$$

Si on pose $x = k - k'$, on obtient bien le résultat souhaité.

2. Si $k = k'$ alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(c_{j,k}^2) &= \sigma_{j-1}^2 2^{-2jH_j} \int_{1/2 < |\zeta| < 1} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_{j-1}+1}} d\zeta + \sigma_j^2 2^{-2jH_j} \int_{1 < |\zeta| < 2} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_j+1}} d\zeta \\ &\quad + \sigma_{j+1}^2 2^{-2jH_{j+1}} \int_{2 < |\zeta| < 4} \frac{|\widehat{\psi}(\zeta)|^2}{|\zeta|^{2H_{j+1}+1}} d\zeta \end{aligned}$$

Le résultat est alors immédiat. □

On va maintenant montrer la proposition 3.2.6.

3.4.2 Démonstration de la proposition 3.2.6

On pose

$$B_{\mathbf{H},\sigma}^1(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| < j 2^{jd}} c_{j,k}^i(\omega) \psi_{j,k}^i(x), \quad B_{\mathbf{H},\sigma}^2(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C_k(\omega) \phi_k(x) + \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| > j 2^{jd}} c_{j,k}^i(\omega) \psi_{j,k}^i(x).$$

On détermine l'exposant de Hölder uniforme du champ $\{B_{\mathbf{H},\sigma}^1(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$.

On prouve tout d'abord que

$$(3.4.1) \quad \underline{H} \geq \mathcal{H}_{B_{\mathbf{H},\sigma}^1, \text{loc}}.$$

Pour tout entier j , on pose $\tau_j = -\frac{\log_2(\sigma_j)}{j}$ avec $\tau_j = +\infty$ if $\sigma_j = 0$.

Par hypothèse, pour tout réel positif ε , il existe un entier j_0 tel que

$$\forall j \geq j_0, H_j + \tau_j \geq \underline{H} - \varepsilon.$$

On utilise alors un résultat classique (voir le lemme 3 de [MST99]) et le lemme 3.4.1. On en déduit qu'il existe une variable aléatoire presque sûrement positive $C_0(\omega)$ et un entier $j_0(\omega)$ tel que pour tout entier $j \geq j_0(\omega)$ et tout $k \in \mathbb{Z}^d$

$$(3.4.2) \quad \begin{aligned} |c_{j,k}^i| &\leq C_0 \sqrt{\log(k)} \sqrt{\log(j)} \max(2^{-j(H_j+\tau_j)}, 2^{-j(H_{j+1}+\tau_{j+1})}, 2^{-j(H_{j+2}+\tau_{j+2})}) |c_{j,k}^i| \\ &\leq C_0 j \sqrt{\log(j)} \max(2^{-j(H_j+\tau_j)}, 2^{-j(H_{j+1}+\tau_{j+1})}, 2^{-j(H_{j+2}+\tau_{j+2})}) \leq C_0 j \sqrt{\log(j)} 2^{-j(\underline{H}-\varepsilon)}. \end{aligned}$$

D'où si $|k| \leq j2^{jd}$ on a

$$\begin{aligned} |c_{j,k}^i| &\leq C_0 j d \sqrt{\log(j)} \max(2^{-j(H_j + \tau_j)}, 2^{-j(H_{j+1} + \tau_{j+1})}, 2^{-j(H_{j+2} + \tau_{j+2})}) \\ &\leq C_0 j \sqrt{\log(j)} 2^{-j(H - \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Ainsi par le critère ondelettes de régularité Höldérienne uniforme on en déduit la majoration voulue de l'exposant de Hölder uniforme du champ $B_{\mathbf{H},\sigma}^1$.

Le théorème II.7 de [CKR93] appliqué à la suite $(g_{n,k,i}) = \frac{c_{\ell_n,k}^i}{\mathbb{E}(|c_{\ell_n,k}^i|^2)^{\frac{1}{2}}}$ permet d'obtenir l'inégalité inverse

$$(3.4.3) \quad \underline{H} \leq \mathcal{H}_{B_{\mathbf{H},\sigma}^1, \text{loc}},$$

en utilisant le premier point démontré dans le lemme 3.4.1. On a alors directement la conclusion souhaitée en utilisant le lemme suivant

Lemme 3.4.2 *Presque sûrement, les trajectoires du champ $\{B_{\mathbf{H},\sigma}^2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ sont $\mathcal{C}_{\text{loc}}^{H'}(\mathbb{R}^d)$ pour tout*

$$0 < \bar{H} < H' < 1,$$

Ainsi les exposants de Hölder et d'irrégularité uniforme des trajectoires du MBFIE sont ceux du champ $\{B_{\mathbf{H},\sigma}^1(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$.

Preuve. Soient $0 < \bar{H} < H' < 1$, $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On peut supposer que $\text{supp}(\varphi) \subset B_d(0,1) = \{x, |x| \leq 1\}$ et que $0 \leq \varphi \leq 1$. On note Y le champ aléatoire $\varphi B_{\mathbf{H},\sigma}^2$. On veut majorer $|Y(x+h) - Y(x)|$ pour tous x, h dans $B_d(0,1)$ fixés.

Ici $\Psi_{j,k}^i, \Phi_k$ désignent respectivement $\varphi \psi_{j,k}^i$ et $\varphi \phi_k$. On remarque que si on pose,

$$f_{j,k} = \Psi_{j,k}(2^{-j} \cdot)$$

on a pour tout y (par décroissance rapide des fonctions ψ)

$$(3.4.4) \quad |f_{j,k}(y)| \leq \psi(\cdot - k) \leq \frac{C(M)}{(1 + |y - k|)^M},$$

et

$$\Psi_{j,k}(x+h) - \Psi_{j,k}(x) = f_{j,k}(2^j x + 2^j h) - f_{j,k}(2^j x).$$

Par l'équation (3.4.2) on a

$$\begin{aligned} |Y(x+h) - Y(x)| &= \left| \sum_{j=1}^{+\infty} \sum_{|k| > j2^{jd}} c_{j,k}^i (f_{j,k}(2^j x + 2^j h) - f_{j,k}(2^j x)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} C_k (\Phi_k(x+h) - \Phi_k(x)) \right| \end{aligned}$$

On applique alors le théorème des accroissements finis et on obtient

$$\begin{aligned}
 |Y(x+h) - Y(x)| &\leq \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{y \in [2^j x, 2^j x + 2^j h]} \sum_{|\gamma|=1} \left| \sum_{|k| > j 2^{jd}} \partial^\gamma f_{j,k}(y) \right| \\
 &\leq C(M) \sum_{j=1}^{+\infty} \sup_{y \in [2^j x, 2^j x + 2^j h]} \sum_{|\gamma|=1} \sum_{|k| > j 2^{jd}} \frac{2^{-j(\underline{H}-\varepsilon)} \log(2+|k|) \log(2+j) |2^j h|}{(1+|y-k|)^M} \\
 &\quad + C(M) |h| \sup_{y \in [x, x+h]} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \left(\frac{\sqrt{\log(2+|k|)}}{(1+|y-k|)^M} \right)
 \end{aligned}$$

ceci résultant de l'équation (3.4.4) et donc de la décroissance rapide des fonctions ϕ et ψ .
Alors

$$|Y(x+h) - Y(x)| \leq C(M) |h| \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{C 2^{j(1-\underline{H}-\varepsilon)} j \log(2+j)}{(1+j 2^j)^M} \right) \right) + C$$

On en déduit le lemme si on choisit M suffisamment grand. \square

3.5 Démonstration de la proposition 3.2.7

On va utiliser le critère ondelettes d'irrégularité uniforme. Par hypothèse et par le lemme 3.4.1 : pour tout entier n , et tout $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$

$$\max_{j \in \{\ell_n - 2, \dots, \ell_n + 2\}} (\mathbb{E}(|c_{j,k}^i|^2)) \leq C_0 2^{-2\ell_n \underline{H}},$$

et si $j \notin \{\ell_n - 2, \dots, \ell_n + 2\}$, $\mathbb{E}(|c_{j,k}^i|^2) = 0$.

Alors pour tout entier n , et tout $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$

$$\mathbb{E}(|c_{j,k}^i|^2) \leq C_0^2 \inf(2^{-j_n \bar{H}}, 2^{j_{n+1}(1-\bar{H})}, 2^{-j})^2,$$

et par une démarche similaire à la démonstration ci dessus on en déduit que presque sûrement pour tout $\gamma > 1$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} |B_{\underline{H}, \tau}(x+h) - B_{\underline{H}, \tau}(x)| \leq C_0 \inf(2^{-j_n \bar{H}}, 2^{j_{n+1}(1-\bar{H})}, 2^{-j}) j^{\gamma + \frac{1}{2}}.$$

On en déduit alors presque sûrement les deux majorations dans les équations (3.2.6), (3.2.7) et

$$\bar{H} \geq \mathcal{I}_{B_{\underline{H}, \tau}, loc}^1 = \mathcal{I}_{B_{\underline{H}, \tau}, loc}.$$

On veut maintenant majorer l'exposant local d'irrégularité uniforme du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.

Par la même démonstration que dans la section précédente, on sait que presque sûrement il existe une constante presque sûrement positive $C_0(\omega)$ et un entier $n_0(\omega)$ tel que

$$(3.5.1) \quad \forall n \geq n_0(\omega), \max_{|k| \leq \ell_n 2^{\ell_n d}} |c_{\ell_n, k}^i| \geq C_0(\omega) 2^{-\ell_n \underline{H}}.$$

D'où : pour tout entier n et tout $j \in \{j_n, \dots, \ell_n\}$

$$\max(\sup_{\ell \geq j} |c_{\ell,k}^i|, 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} 2^\ell |c_{\ell,k}^i|) \geq C_0(\omega) 2^{-\ell_n \underline{H}} \geq C_0(\omega) 2^{-j \bar{H}}.$$

Ainsi, pour tout entier n et tout $j \in \{j_n, \dots, \ell_n\}$

$$\max(\sup_{\ell \geq j} |c_{\ell,k}^i|, 2^{-j} \sup_{\ell \leq j} 2^\ell |c_{\ell,k}^i|) \geq C_0(\omega) 2^{-j} 2^{\ell_n(1-\underline{H})} \geq C_0(\omega) 2^{-j \bar{H}}.$$

On conclut alors par le critère ondelettes.

De plus, si on utilise ce pour tout entier j

$$|c_{j,k}^i| \leq C_{\psi,\omega} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|h| \leq 2^{-j}} |B_{\underline{H},\tau}(x+h) - B_{\underline{H},\tau}(x)|$$

et l'équation (3.5.1) on déduit la minoration dans l'équation (3.2.7).

Comme pour tout entier n $\underline{H} \ell_n = \bar{H} j_n$ et

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|h| \leq 2^{-\ell_n}} |B_{\underline{H},\tau}(x+h) - B_{\underline{H},\tau}(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \sup_{|h| \leq 2^{-j_n}} |B_{\underline{H},\tau}(x+h) - B_{\underline{H},\tau}(x)|$$

on en déduit la minoration de l'équation (3.2.6).

3.6 Démonstration de la proposition 3.3.4

La démonstration de la proposition 3.3.4 découle du lemme suivant :

Lemme 3.6.1 *Pour tous x, h dans \mathbb{R}^d ,*

$$(3.6.1) \quad \lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(|\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_{n_0}} h) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)|^2)}{2^{-2j_{n_0} \bar{H}}} = \int_{\frac{1}{2} < |\zeta| < 1} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta = \mathbb{E}(|\tilde{B}_{\bar{H}}(h)|^2),$$

et

$$(3.6.2) \quad \lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}(|\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_{n_0,1}} h) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)|^2)}{2^{-2j_{n_0} \bar{H}}} = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{|e^{ih\xi} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta = \mathbb{E}(|\tilde{B}_{\bar{H}}(h)|^2).$$

Preuve. Comme le champ $\{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est à accroissements stationnaires

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}(|\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_{n_0}} h) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)|^2) - 2^{-2j_{n_0} \bar{H}} \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{|e^{ih\xi} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta \\ = & \mathbb{E}(|\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(2^{-j_{n_0}} h)|^2) - 2^{-2j_{n_0} \bar{H}} \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{|e^{ih\xi} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta \end{aligned}$$

De plus si on effectue le changement de variables $\zeta = 2^{-j_{n_0}}\xi$ dans l'équation (3.3.2) on obtient

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}(|\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_{n_0}}h) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)|^2) - 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta \\
 = & \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} d\zeta + \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{j_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta - \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta \\
 = & \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} d\zeta + \sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} d\zeta \\
 & + \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{j_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{j_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta
 \end{aligned}$$

On va maintenant majorer chacune de ces sommes. On majore la première somme de la manière suivante

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} d\zeta & \leq \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} |h|^2 |\zeta|^{1-2\underline{H}} d\zeta \\
 & \leq |h|^2 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{2(\ell_n - j_{n_0})(1-\underline{H})} \\
 & \leq |h|^2 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} 2^{2(j_{n_0-1,1} - j_{n_0})(1-\underline{H})} \\
 & \leq |h|^2 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} 2^{2j_{n_0}(1-\bar{H}) - \alpha_1 \log(j_{n_0})} \\
 & \leq |h|^2 \frac{2^{-2j_{n_0}(1-\bar{H})} 2^{-2\bar{H}j_{n_0}}}{j_{n_0}^{\alpha_1}}
 \end{aligned}$$

pour un certain $\alpha_1 > 0$ dépendant de γ et \bar{H} .

On majore maintenant la deuxième somme

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} d\zeta & \leq 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} \\
 & \leq 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{\ell_n}} \frac{d\zeta}{|\zeta|^{2\underline{H}+1}} \\
 & \leq 2^{-2j_{n_0}\underline{H}} \sum_{n=n_0}^{+\infty} 2^{-2(\ell_n - j_{n_0})\underline{H}} \\
 & \leq 2^{-2\ell_{n_0}\underline{H}} = \frac{2^{-2j_{n_0}\bar{H}\lambda}}{j_{n_0}^{\bar{H}\gamma}}
 \end{aligned}$$

ceci découlant de la définition de ℓ_{n_0} .

La troisième somme peut être majorée de la manière que la première

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{2^{-j_{n_0}}D_{j_n}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta & \leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{2(j_n - j_{n_0})(1-\bar{H})} \\
 & \leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} 2^{2(j_{n_0-1} - j_{n_0})(1-\bar{H})} \\
 & \leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} j_{n_0}^{2(1-\bar{H})} 2^{-2j_{n_0}(1-\frac{1}{\beta})(1-\bar{H})}
 \end{aligned}$$

en utilisant l'équation (??).

La quatrième somme peut être majorée de la même manière que la deuxième

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \int_{2^{-j_{n_0}D_{j_n}}} \frac{|e^{ih\zeta} - 1|^2}{|\zeta|^{2\bar{H}+1}} d\zeta &\leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} 2^{-2(j_n-j_{n_0})\bar{H}} \\
 &\leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} 2^{-2(j_{n_0+1}-j_{n_0})\bar{H}} \\
 &\leq 2^{-2j_{n_0}\bar{H}} j_{n_0}^\gamma 2^{-2j_{n_0}(\beta-1)\bar{H}}
 \end{aligned}$$

Ainsi on a prouvé la relation (6.3.8). La démonstration de la relation (6.3.9) est similaire. \square

Le lemme ci dessus permet donc de démontrer la convergence au sens des distributions finies dimensionnelles du champ $\left\{ \frac{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_n}u) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)}{2^{-j_n\bar{H}}} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d}$ (resp $\left\{ \frac{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-\ell_n}u) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)}{2^{-\ell_n\bar{H}}} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d}$) vers $\{\tilde{B}_{\bar{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$ (resp $\{\tilde{B}_{\underline{H}}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$).

Pour passer à la convergence en distribution pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, on va avoir besoin du résultat suivant (critère de Kolmogorov énoncé par exemple dans [?]) :

Proposition 3.6.2 *Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de champs aléatoires à trajectoires continues on \mathbb{R}^d s'annulant à l'origine. On fait l'hypothèse que pour tout $T > 0$*

$$\forall (s, t) \in [-T, T]^d, \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}(|Z_n(t) - Z_n(s)|^\alpha) \leq C_0(T) |t - s|^{1+\beta},$$

pour une certaine constante positive $C_0(T)$ dépendant éventuellement de T et α, β deux constantes positives. Si par ailleurs pour tout compact K la suite $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent au sens des distributions finies dimensionnelles sur K alors la convergence est en distribution sur K .

On utilise la proposition 3.6.2 ci dessus et une méthode similaire à celle du lemme 3.6.1, on applique le critère de Kolmogorov à la famille

$$\{Z_n^1(u)\}_{u \in \mathbb{R}^d} = \left\{ \frac{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-j_n}u) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)}{2^{-j_n\bar{H}}} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d}$$

et à la famille

$$\{Z_n^2(u)\}_{u \in \mathbb{R}^d} = \left\{ \frac{\tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x + 2^{-\ell_n}u) - \tilde{B}_{\underline{H},\tau}(x)}{2^{-\ell_n\bar{H}}} \right\}_{u \in \mathbb{R}^d}$$

Ainsi on peut conclure.

Chapitre 4

Les différentes notions de régularité ponctuelle

4.1 Introduction

La notion d'irrégularité uniforme définie au chapitre précédent a un analogue ponctuel : la notion d'**irrégularité ponctuelle**, introduite pour étudier des fonctions nulles part différentiables. Un exemple célèbre est celui de la fonction de Weierstrass

$$W(x) = \sum_{n \geq 0} a^{-nH} \cos(2\pi a^n x),$$

(où H est un réel compris entre 0 et 1) étudiée de manière exhaustive par G.H.Hardy en 1916 dans [Har16]. En effet G.Hardy, dans [Har16], montre que cette fonction vérifie les deux conditions suivantes :

$$(4.1.1) \quad \exists C_1 > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |W_H(y) - W_H(x)| \leq C_1 |x - y|^H,$$

et

$$(4.1.2) \quad \exists C_2 > 0, \forall x \in [0, 1], \sup_{y, |x-y| \leq r} |W_H(y) - W_H(x)| \geq C_2 r^H.$$

La condition (4.1.2) implique en particulier que la fonction de Weierstrass n'est jamais différentiable. Un autre exemple de fonction qui vérifie des propriétés similaires est donné par les trajectoires du MBF. En effet p.s.

$$(4.1.3) \quad \exists C_1 > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |B_H(y) - B_H(x)| \leq C_1 |x - y|^H \sqrt{\log(|\log(|x - y)|)|}.$$

De plus p.s. les trajectoires du MBF vérifient ce qu'on appelle la loi du log itéré de Chung

$$(4.1.4) \quad \exists C_2 > 0, \forall x \in [0, 1], \sup_{|x-y| \geq r} |B_H(y) - B_H(x)| \geq C_2 \frac{r^H}{\sqrt{\log(|\log(r)|)}}.$$

Les propriétés de régularité ponctuelle du MBF sont les mêmes en tout point et suivant toute les échelles considérées. Le MBF est donc 'uniformément régulier' en espace et en échelles ce qui est cohérent avec les propriétés de stationarité et d'autosimilarité de ce champ. De

manière plus générale les champs non localement déterministes et fortement non localement déterministes vérifient le même type de propriétés.

Pour résumer les propriétés de régularité des deux exemples présentés ci dessus (pour utiliser la terminologie de C.Tricot) on dira que la fonction de Weierstrass et les trajectoires du MBF sont (p.s.) à la fois uniformément Höldérienne (propriété 4.1.1 ou 4.1.3) et uniformément anti-Höldérienne d'exposant H (propriété 4.1.2 ou 4.1.4) . On définit en effet (voir par exemple [Tric92]) la notion de fonction Höldérienne inverse d'exposant $\alpha \in (0, 1)$.

Définition 4.1.1 *La fonction f est dite Höldérienne inverse ou anti Höldérienne d'exposant α en x_0 s'il existe une constante positive C_{x_0} (dépendant à priori du point x_0 de \mathbb{R}^d) et un réel positif r_0 tels que*

$$\forall r \leq r_0, \quad \sup_{(x,y) \in B(x_0,r)^2} |f(x) - f(y)| \geq C_{x_0} r^\alpha.$$

Si la fonction f est anti-Höldérienne en tout point x_0 de \mathbb{R}^d et que la constante C_{x_0} ne dépend pas du point x_0 choisi, elle sera alors dite uniformément anti Höldérienne.

On peut d'ores et déjà souligner que la notion de fonction uniformément anti-Höldérienne est beaucoup plus forte que celle de fonction uniformément irrégulière étudiée dans le chapitre précédent. En effet, pour par exemple un réel α compris entre 0 et 1, dire qu'une fonction est uniformément irrégulière d'exposant α signifie qu'à chaque échelle r , pour un certain point x dépendant éventuellement de r , on peut minorer un accroissement du type $|f(x+h) - f(x)|$ avec $|h| \leq r$ par r^α . Par contre, dire qu'une certaine fonction f est uniformément anti Höldérienne, signifie qu'à **chaque échelle** et en en tout point x_0 on est capable de minorer un accroissement du type $|f(x+h) - f(x)|$ avec $|h| \leq r$ par r^α . Ce qui est bien sûr beaucoup plus fort.

On peut donner de nombreux exemples où la fonction f est à la fois uniformément Höldérienne et uniformément anti Höldérienne d'exposant α . Les fonctions de ce type ont été largement étudiées car elles vérifient une propriété tout à fait remarquable : les dimensions de boîte inférieure et supérieure de leur graphe coïncident et sont égales à $2 - \alpha$ (voir [Falc90]). On ne peut par contre rien dire sur la dimension de Hausdorff du graphe, même si dans certains cas, on est quand même capable de la minorer (voir [KMY84], [MW86] ou encore [PrzyUrb89]). Si on considère par exemple, la fonction de Weierstrass qui est bien Höldérienne et uniformément Höldérienne d'exposant α (voir [Har16]), la dimension de Hausdorff de son graphe n'est pas connue. Une conjecture célèbre dit qu'elle est égale à $2 - \alpha$. De nombreux travaux ([MW86],[Led92],[HuLau90],[HuLau93], [KMY84],[PrzyUrb89],[ShioSeki90]) semblent confirmer cette conjecture.

Deux classes d'exemples de fonctions, à la fois Höldérienne d'exposant α et uniformément Höldérienne inverse d'exposant α , ont été étudiés. Une première classe d'exemple largement étudiée est celle des fonctions de type Weierstrass (voir par exemple [KMY84], [MW86], [PrzyUrb89], [Tric97], [BouschHeurt99], [BouschHeurt00], [Heurt03],[Heurt05],[DemTric06]). Une autre classe d'exemple est celle des champs gaussiens qui généralisent le Mouvement Brownien Fractionnaire. Les résultats d'irrégularité ponctuelle (loi du log itéré de Chung) découlent alors de l'étude de la régularité du temps local du champ considéré (voir [Ber72], [GH80], [Adl81]). Ceci recouvre notamment la classe déjà citée des champs gaussiens localement non déterministes (voir par exemple [Ber73],[Pitt78]) et fortement localement non déterministes (voir [Xiao97],[Xiao05],[Xiao07]).

On va étendre ces notions de fonction anti-Höldérienne en un point x_0 et de fonction uniformément anti-Höldérienne aux exposants α supérieurs à 1. L'objectif est ici de s'interroger sur les liens pouvant exister entre ces notions d'irrégularité ponctuelle et la théorie des ondelettes. L'approche via les ondelettes va permettre de générer des exemples beaucoup plus complexes du point de vue de l'irrégularité ponctuelle, que ceux existants déjà où exposants de régularité local, ponctuel, d'irrégularité locale et ponctuelle coïncident tous en tout point.

On sera en effet capable de construire des fonctions à exposant d'irrégularité ponctuelle varie prescrit (ou exposant de Hölder supérieur), et diffère ou non de l'exposant de Hölder classique en tout point (voir le chapitre 5). On montrera aussi qu'il existe des fonctions multifractales au sens classique dont l'exposant d'irrégularité est constant (voir aussi le chapitre 5). Enfin on sera capable de générer des fonctions multifractales pour la notion d'irrégularité ponctuelle (voir le chapitre 5) satisfaisant un formalisme multifractal. Le point de vue ondelettes permet donc de construire des modèles de fonctions dont l'irrégularité ponctuelle est non homogène en échelles et/ou en espace. Ce qui n'est pas le cas de ceux existants déjà.

Dans un premier temps, section 4.2, on commencera par rappeler les différentes notions de régularité ponctuelle usuelle (dite forte) et les liens existants entre le degré de régularité ponctuelle d'une fonction et ses coefficients d'ondelettes. On définira ensuite, section 4.3, la notion d'irrégularité ponctuelle d'une fonction. On étudiera alors le lien entre ondelettes et irrégularité ponctuelle (section 4.4). On s'intéressera ensuite, section 4.5, aux propriétés d'irrégularité ponctuelle de presque toute fonction de $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$ (au sens de la prévalence). On conclura ensuite sur des exemples (sections 4.6, 4.7 et chapitre 5) : séries trigonométriques, fonctions de type Weierstrass et séries d'ondelettes.

4.2 Régularité ponctuelle forte

4.2.1 Espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$

On commence par rappeler la notion de régularité Höldérienne ponctuelle usuelle

Définition 4.2.1 Soit α un réel positif, $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On dit que la fonction f est dans l'espace $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$ si :

Il existe une constante C_0 , un réel positif r_0 et P_{x_0} vérifiant $\deg(P_{x_0}) < \alpha$ tels que :

$$\forall r \leq r_0, \|f(x) - P_{x_0}(x)\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq C_0 r^\alpha.$$

On définit alors l'exposant de Hölder ponctuel inférieur en x_0 noté $\underline{h}_f(x_0)$ qui est en fait l'exposant de Hölder usuel :

$$\underline{h}_f(x_0) = \sup\{\alpha > 0, f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)\}.$$

De manière analogue à ce qui a été fait dans le cadre uniforme, on définit ici l'espace $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$:

Définition 4.2.2 Soit θ un module de continuité fort d'ordre $M \in \mathbb{N}$, f une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On dit que la fonction f est dans l'espace $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$ si :

Il existe une constante C_0 , un réel positif r_0 et P_{x_0} polynôme de degré au plus $M - 1$ tels que :

$$\forall r \leq r_0, \|f(x) - P_{x_0}(x)\|_{L^\infty(B(x_0,r))} \leq C_0 \theta(r).$$

Exemple 4.2.3 Soit $\alpha > 0$ et $M = [\alpha] + 1$.

– Pour $\theta(r) = r^\alpha$, on retrouve pour $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$ l'espace $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$ usuel.

– Pour $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ (β étant un réel quelconque), $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$ sera noté $\mathcal{C}_{|\log|^\beta}^\alpha(x_0)$.

De la définition des espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$, il découle directement la proposition suivante :

Proposition 4.2.4 Soient $M_1 \leq M_2$ et θ_1, θ_2 deux modules de continuité d'ordre M_1 et M_2 respectivement vérifiant $\theta_2 \leq \theta_1$ et $r^{M_1} = O(\theta_1(r))$ alors

$$\mathcal{C}_{\theta_2,s}^{M_2}(x_0) \subset \mathcal{C}_{\theta_1,s}^{M_1}(x_0).$$

Dans ce qui suit, on aura aussi besoin de la notion de module de régularité ponctuel :

Définition 4.2.5 Soit $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On définit le module de régularité ponctuel L^∞ d'ordre M de la fonction f en x_0 par

$$\forall r \geq 0, \omega_{f,x_0}^M(r) = \sup_{|h| \leq r} \|\Delta^M f(x)\|_{L^\infty(B_h(x_0,r))},$$

où

$$B_h(x_0, r) = \{x, [x, x + Mh] \subset B(x_0, r)\}.$$

La question naturelle qui se pose est alors la suivante : a-t-on équivalence entre les deux propriétés :

1. La fonction f vérifie

$$(4.2.1) \quad f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$$

2. Il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tel que,

$$(4.2.2) \quad \forall r \leq r_0, \omega_{f,x_0}^M(r) \leq C_0 \theta(r).$$

La réponse sera oui. Ce résultat est déjà connu pour $\theta(r) = r^\alpha$ et $M = [\alpha] + 1$, dans le cas où la fonction f est uniformément Höldérienne, à un terme correctif en log près et est basé sur la caractérisation ondelettes de la régularité Höldérienne ponctuelle qui sera rappelée plus loin (voir [Jaf04] proposition 6). L'objectif de ce qui suit est d'étendre le résultat de [Jaf04] aux espaces $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$ en montrant que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse f uniformément Höldérienne et qu'il n'y a en fait pas de correction logarithmique à apporter. La démonstration est cette fois ci directe et ne nécessite pas l'utilisation des ondelettes.

4.2.2 Equivalence définition polynomiale et différences finies

Le résultat que l'on va montrer dans cette section est le suivant :

Proposition 4.2.6 Soit f une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et θ un module de continuité fort d'ordre M . On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :

$$(4.2.3) \quad f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0).$$

Il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tel que

$$(4.2.4) \quad \forall r \leq r_0, \omega_{f,x_0}^M(r) \leq C_0 \theta(r).$$

On utilisera les notations du chapitre précédent, section 2.3.3. On commence par montrer la proposition suivante. Il s'agit d'une adaptation au cadre de la régularité ponctuelle du théorème 3.5 montré par R.A.DeVore et R.C.Sharpley dans [DevSharp84].

Proposition 4.2.7 *Soit $M \in \mathbb{N}$, θ un module de continuité, $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe C_0 une constante positive, et r_0 un réel positif tel que*

$$(4.2.5) \quad \forall r \leq r_0, \omega_{f,x_0}^M(r) \leq C_0 \theta(r).$$

2. *Il existe une constante positive $C_0(f, M, d)$ dépendant de M, d et de la fonction f , et un réel positif r_0 tel que pour tout $r \leq r_0$*

$$(4.2.6) \quad E_{M-1}(f, B(x_0, r)) \leq C_0(f, M, d) \theta(r).$$

Remarque 4.2.8 *On peut reformuler la propriété (4.2.6) de la manière suivante : il existe une constante positive $C_0(f, M, d)$, et un entier positif j_0 tel que, pour tout $j \geq j_0$, il existe un polynôme $P_{x_0,j}$ de degré au plus $M - 1$ vérifiant*

$$(4.2.7) \quad \|f(x) - P_{x_0,j}(x)\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j}))} \leq C_0 \theta(2^{-j}).$$

Preuve.

1. Supposons qu'il existe C_0 une constante positive, et j_0 un entier tel que

$$\forall j \geq j_0, \omega_{f,x_0}^M(2^{-j}) \leq C_0 \theta(2^{-j}).$$

D'après le théorème de Whitney, on a alors pour tout entier $j \geq j_0$

$$E_{M-1}(f, B(x, 2^{-j})) \leq \widetilde{C}_0 \omega_{f,x_0}^M(2^{-j}).$$

Cela implique bien que l'on ait la propriété (4.2.6) qui soit vérifiée.

2. Il reste à montrer que si la relation (4.2.6) est vérifiée alors f vérifie la propriété (4.2.5). En effet, soit $h \in \mathbb{R}^d$ tel que $|h| \leq 2^{-j}$, $x \in \mathbb{R}^d$ tel que le segment $[x, x + Mh]$ soit inclus dans la boule $B(x_0, r)$ et P un polynôme de degré inférieur ou égal à $M - 1$

$$|\Delta_h^M f(x)| = |\Delta_h^M (f(x) - P(x))| \leq \sum_{i=0}^M |f(x + ih) - P(x + ih)|,$$

et donc

$$\omega_{f,x_0}^{M,p}(2^{-j}) \leq M \|f - P\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j}))}.$$

Par passage à l'inf, sur tous les polynômes de degré inférieur ou égal à $M - 1$, on a

$$\omega_{f,x_0}^M(2^{-j}) \leq M E_{M-1}(f, B(x_0, 2^{-j})).$$

Ce qui implique bien le résultat voulu.

□

Il s'agit maintenant de démontrer l'équivalence recherchée entre les propriétés (4.2.3) et (4.2.4). Avant d'énoncer le résultat souhaité on démontre le lemme suivant qui va permettre d'étendre la notion de dérivée de Peano d'une fonction donnée dans [DevSharp84] :

Lemme 4.2.9 *Soit θ est un module de continuité fort d'ordre M , et β un multi-indice vérifiant $|\beta| \leq M - 1$. Si pour une certaine constante positive $C_0(f, M, d)$, et un certain entier positif j_0 tel que, pour tout $j \geq j_0$, il existe un polynôme P_{j,x_0} de degré au plus $M - 1$ vérifiant (4.2.7) alors pour tous entiers j, ℓ tels que $j \leq \ell$*

$$(4.2.8) \quad |D^\beta P_{\ell,x_0}(x_0) - D^\beta P_{j,x_0}(x_0)| \leq \widetilde{C}_0 2^{j|\beta|} \theta(2^{-j}),$$

pour une certaine constante positive \widetilde{C}_0 .

Ce lemme implique en particulier que la suite $(D^\beta P_{j,x_0}(x_0))_{j \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, elle converge donc. Par ailleurs une simple adaptation de la démarche de [DevSharp84]) montre que la valeur de $\lim_{j \rightarrow +\infty} (D^\beta P_{j,x_0}(x_0))_{j \in \mathbb{N}}$ ne dépend pas de la suite P_{j,x_0} de polynôme de meilleure approximation L^∞ choisie. La définition suivante a donc un sens.

Définition 4.2.10 *Les hypothèses et les notations sont celles du lemme 4.2.9. La limite de la suite $(D^\beta P_{j,x_0}(x_0))_{j \in \mathbb{N}}$ est notée $D^\beta f(x_0)$ et appelé dérivée de Peano d'ordre β de la fonction f en x_0 .*

Remarque 4.2.11 *Dans [DevSharp84], on montre le lemme 4.2.9 pour $\theta(2^{-j}) = 2^{-jM}$ et on définit exactement comme cela est fait dans ci-dessus la notion de dérivée de Peano d'une fonction en x_0 pour $|\beta| < M$.*

Remarque 4.2.12 *Par le lemme 4.2.9 et la définition de la notion de dérivée de Péano on a l'estimation suivante (en faisant tendre ℓ vers l'infini dans 4.2.8)*

$$|D^\beta f(x_0) - D^\beta P_{j,x_0}(x_0)| \leq 2 \cdot 2^{j|\beta|} \theta(2^{-j}).$$

Preuve du lemme 4.2.9.

On remarque qu'il existe une constante C_1 ne dépendant que de M telle que pour tout polynôme P de degré inférieur ou égal à $M - 1$

$$\|D^\beta P\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j}))} \leq C_1 2^{j|\beta|} \|P\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j}))}.$$

Le résultat est vrai pour $x_0 = 0, j = 0$ car $\sum_{|\alpha| \leq |\beta|} \|D^\alpha P\|_{L^\infty(B(0,1))}$ et $\|P\|_{L^\infty(B(0,1))}$ sont deux normes équivalentes sur l'espace de dimension finie des polynômes de degré inférieur ou égal à $M - 1$. Le cas x_0 quelconque et j entier s'en déduit par changement de variable. Ceci implique que

$$\begin{aligned} & \|D^\beta (P_{j,x_0} - P_{j+1,x_0})\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j-1}))} \\ & \leq C_1 2^{j|\beta|} \|P_{j,x_0} - P_{j+1,x_0}\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j-1}))} \\ & \leq C_1 2^{j|\beta|} \|P_{j,x_0} - f\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j-1}))} + C_1 2^{j|\beta|} \|P_{j+1,x_0} - f\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j-1}))} \\ & \leq 2C_1 C_0 2^{j|\beta|} \theta(2^{-j}) \end{aligned}$$

On en déduit alors, que pour tout $\ell \geq j$

$$\|D^\beta(P_{j,x_0} - P_{\ell,x_0})\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-\ell}))} \leq 2C_1C_0 \sum_{k=j}^{\ell-1} 2^{k|\beta|}\theta(2^{-k}) \leq \widetilde{C}_0 2^{j|\beta|}\theta(2^{-j}),$$

car θ est un module de continuité fort d'ordre M . On obtient alors le résultat.

On est maintenant en mesure de montrer l'équivalence entre définition différences finies et définition polynomiale :

Proposition 4.2.13 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M . On a équivalence entre les deux propriétés suivantes :*

1. $f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$.

2. Il existe une constante positive C_0 et un réel positif r_0 tel que, pour tout $r \leq r_0$

$$(4.2.9) \quad \omega_{f,x_0}^M(r) \leq C_0\theta(r).$$

Preuve.

1. Supposons que la fonction f soit dans $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$. On a alors pour x tel que $[x, x + Mh] \subset B(x_0, \mathbb{R}^d)$

$$|\Delta_h^M f(x)| \leq |\Delta_h^M (f - P_{x_0})(x)|,$$

et donc pour tout réel positif r inférieur à un certain réel positif r_0

$$\omega_{f,x_0}^M(r) \leq M \|f - P_{x_0}\|_{L^\infty(B(x_0,r))}.$$

Ceci permet de conclure.

2. On montre maintenant l'implication inverse. On suppose donc que f vérifie la propriété (4.2.9) et on montre que $f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$. Pour cela on définit le polynôme P_{x_0} par

$$P_{x_0}(x) = \sum_{|\beta| \leq M-1} D^\beta f(x_0) \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!}.$$

On remarque que lorsque qu'on aura montré que $f \in \mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$, P_{x_0} sera nécessairement le polynôme de Taylor de f en x_0 . On a

$$\begin{aligned} \|P_{x_0} - P_{j,x_0}\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-j}))} &\leq \sum_{|\beta| < M} \|D^\beta f(x_0) - D^\beta P_{j,x_0}(x_0)\| \left\| \frac{(x - x_0)^\beta}{\beta!} \right\|_{L^\infty(B(x_0,2^{-j}))} \\ &\leq \sum_{|\beta| < M} (2^{j|\beta|}\theta(2^{-j})) 2^{-j|\beta|} \\ &\leq C(M)\theta(2^{-j}). \end{aligned}$$

Comme

$$\|f - P_{x_0}\|_{L^\infty(B(x,2^{-j}))} \leq \|f - P_{j,x_0}\|_{L^\infty(B(x,2^{-j}))} + \|P_{j,x_0} - P_{x_0}\|_{L^\infty(B(x,2^{-j}))},$$

on peut bien conclure. □

On va s'intéresser maintenant à un autre aspect de la notion de régularité Höldérienne ponctuelle : le lien avec les ondelettes. On va détailler ce point dans la section suivante.

4.2.3 Régularité ponctuelle forte et ondelettes

Dans [Jaf04], S.Jaffard a donné une caractérisation ondelette de la régularité Höldérienne ponctuelle. Cette caractérisation est basée sur la notion de coefficients dominants que l'on commence par rappeler.

Définition 4.2.14 *Les coefficients dominants sont définis par*

$$d_\lambda = \sup_{\lambda' \subset \lambda} (|c_{\lambda'}|).$$

On peut alors définir les $d_j(x_0)$ qui sont les coefficients dominants en un point x_0 de \mathbb{R}^d .

Définition 4.2.15 *Deux cubes dyadiques λ et λ' sont adjacents si ils sont à la même échelle : $|\lambda| = |\lambda'|$ et si la distance entre λ et λ' est nulle. Si $\lambda_j(x_0)$ désigne le cube dyadique d'échelle j contenant x_0 , on note $3\lambda_j(x_0)$ l'ensemble des cubes adjacents à $\lambda_j(x_0)$. On définit alors*

$$d_j(x_0) = \sup_{\lambda' \in 3\lambda_j(x_0)} (d_{\lambda'}).$$

Le théorème 1 de [Jaf04] donne alors une caractérisation ondelettes de la régularité ponctuelle par des conditions de décroissance portant sur les $d_j(x_0)$:

Théorème 4.2.16 *Soit α un réel positif.*

1. *Si la fonction f est $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$ il existe une constante positive C_0 telle que*

$$(4.2.10) \quad \forall j \geq 0, d_j(x_0) \leq C_0 2^{-j\alpha}.$$

2. *Réciproquement si la condition (4.2.10) est vérifiée, alors $f \in \mathcal{C}_{|\log|}^\alpha(x_0)$.*

De manière plus générale, en combinant la proposition 1.2 de [JafMey96] et l'approche par les coefficients dominants, on a une caractérisation ondelettes de la régularité ponctuelle forte :

Théorème 4.2.17 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M .*

1. *Si la fonction f est $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$ il existe une constante positive C_0 telle que*

$$(4.2.11) \quad \forall j \geq 0, d_j(x_0) \leq C_0 \theta(2^{-j}).$$

2. *Réciproquement si la condition (4.2.11) est vérifiée, alors $f \in \mathcal{C}_{|\log|\theta,s}^M(x_0)$.*

On va maintenant définir de manière analogue à ce qui a été fait pour la régularité Höldérienne uniforme, la notion de régularité ponctuelle faible et de fonction anti-Höldérienne en un point x_0 .

4.3 Notion de fonction anti-Höldérienne. Régularité ponctuelle Höldérienne faible

4.3.1 Ensembles $I^\alpha(x_0)$ et $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$

On commence par définir la notion de fonction anti-Höldérienne en un point x_0 de \mathbb{R}^d , qui étend celle donnée par C.Tricot dans [Tric92] pour les exposants α compris entre 0 et 1.

Définition 4.3.1 Soit α un réel positif, f une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$, x_0 un point de \mathbb{R}^d . On dit que f est anti-Höldérienne ou Höldérienne inverse d'exposant α en x_0 et on note $f \in I^\alpha(x_0)$ s'il existe une constante C_{x_0} et un réel positif r_{x_0} (dépendant donc a priori du point x_0) tels que

$$\forall r \leq r_{x_0}, \sup_{|h| \leq r} \|\Delta_h^M f\|_{L^\infty(B_h(x_0, r))} \geq C_0 r^\alpha.$$

Si la constante C_{x_0} et le réel r_{x_0} ne dépendent pas du point x_0 de \mathbb{R}^d choisi la fonction est dite uniformément anti-Höldérienne d'exposant α sur \mathbb{R}^d

Remarque 4.3.2 On a choisi de donner une définition différences-finies plutôt qu'une définition polynomiale de la notion d'irrégularité ponctuelle afin qu'il y ait un lien entre la notion d'irrégularité ponctuelle et celle d'irrégularité uniforme.

On peut remarquer que :

Proposition 4.3.3 Si f est une fonction uniformément anti-Höldérienne d'exposant α sur \mathbb{R}^d , elle est alors aussi uniformément irrégulière d'exposant α sur \mathbb{R}^d (au sens du chapitre précédent).

On peut aussi définir une notion de régularité Höldérienne ponctuelle faible, plus simple à manier que la notion d'irrégularité ponctuelle :

Définition 4.3.4 Soit $\alpha > 0$, $M = [\alpha] + 1$, $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On dit que f est dans $C_w^\alpha(x_0)$ si $f \notin I^\alpha(x_0)$. Cela signifie que pour toute constante positive C il existe une suite décroissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que :

$$\forall n \geq 0, \sup_{|h| \leq r} \|\Delta_h^M f\|_{L^\infty(B_h(x_0, r_n))} \leq C r_n^\alpha.$$

La fonction f est donc faiblement régulière en x_0 d'exposant $\alpha > 0$ si pour toute constante positive C il existe une certaine gamme d'échelles $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour laquelle on peut majorer le module de régularité ponctuelle de f en x_0 pour $r = r_n$ par $C r_n^\alpha$.

Remarque 4.3.5 De même que dans le cas uniforme, l'ensemble $I^\alpha(x_0)$ et son complémentaire l'ensemble $C_w^\alpha(x_0)$ ne sont ni l'un ni l'autre des espaces vectoriels.

Remarque 4.3.6 On ne sait pas ici montrer de proposition analogue à la proposition 2.4.15 qui est le point clé permettant de passer à une caractérisation ondelettes de la notion de régularité Höldérienne uniforme faible.

On peut alors définir la notion d'exposant de Hölder supérieur d'une fonction f de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Notation 4.3.7 On appelle exposant de Hölder supérieur de la fonction f en x_0 et on note $\bar{h}_f(x_0)$ le réel positif défini par

$$\bar{h}_f(x_0) = \sup\{\alpha \geq 0, f \in C_w^\alpha(x_0)\}.$$

De manière plus générale on peut donner les deux définitions suivantes utiles lorsqu'on s'intéressera au lien entre irrégularité ponctuelle et ondelettes :

Définition 4.3.8 Soit θ un module de continuité, $f \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On dit que f est θ anti-Höldérienne ou θ Höldérienne inverse d'ordre M en x_0 et on note $f \in I_\theta^M(x_0)$ si il existe une constante C_{x_0} et un réel positif r_{x_0} , dépendant à priori du point x_0 choisi, tels que

$$\forall r \leq r_0, \sup_{|h| \leq r} \|\Delta_h^M f\|_{L^\infty(B_h(x_0, r))} \geq C_0 \theta(r).$$

Si la constante C_{x_0} et le réel r_{x_0} ne dépendent pas du point x_0 de \mathbb{R}^d choisi la fonction est dite uniformément θ anti-Höldérienne d'ordre M sur \mathbb{R}^d .

Par ailleurs f est dans $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(x_0)$ si $f \notin I_\theta^M(x_0)$. Cela signifie que pour toute constante positive C il existe une suite décroissante $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels positifs telle que :

$$\forall n \geq 0, \sup_{|h| \leq r_n} \|\Delta_h^M f\|_{L^\infty(B_h(x_0, r_n))} \leq C \theta(r_n).$$

Notation 4.3.9 Soit $\alpha > 0$ et $M = [\alpha] + 1$. On peut distinguer deux cas particuliers :

- Pour $\theta(r) = r^\alpha$, les ensembles $I_\theta^M(x_0)$ et $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(x_0)$ sont respectivement l'ensemble $I^\alpha(x_0)$ et l'ensemble $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$ définis plus haut.
- Pour $\theta(r) = r^\alpha |\log(r)|^\beta$ ($\beta \in \mathbb{R}$) on note $I_{|\log|^\beta}^\alpha(x_0)$ (resp $\mathcal{C}_{|\log|^\beta, w}^\alpha(x_0)$) l'ensemble $I_{\theta, s}^M(x_0)$ (resp l'ensemble $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(x_0)$).

4.3.2 Résultats d'inclusions entre les ensembles $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$

De manière analogue à ce qui existe pour la régularité Höldérienne uniforme faible on a les résultats suivants d'inclusions :

Proposition 4.3.10 Soit $0 < \alpha_1 < \alpha_2$. Alors

$$\mathcal{C}_w^{\alpha_2}(x_0) \subset \mathcal{C}_w^{\alpha_1}(x_0).$$

Cette proposition découle du résultat plus général suivant.

Proposition 4.3.11 Soient $M_1 \leq M_2$ et θ_1, θ_2 deux modules de continuité d'ordre M_1 et M_2 respectivement vérifiant $\theta_2 \leq \theta_1$ et

$$r^{M_1} = O(\theta_1(r)),$$

alors

$$\mathcal{C}_{\theta_2, w}^M(x_0) \subset \mathcal{C}_{\theta_1, w}^M(x_0)$$

Pour démontrer la proposition 4.3.11 on utilise la caractérisation polynomiale suivante des ensembles $\mathcal{C}_{\theta, w}^M(x_0)$ (les notations sont celles de la section 2.3.3) analogue à ce qui a été démontré dans le cas de la régularité ponctuelle forte :

Proposition 4.3.12 Soit θ un module de continuité. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in \mathcal{C}_{\theta, w}^M(x_0)$.

2. Pour toute constante positive C il existe une suite strictement décroissante de réels positifs $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n ,

$$(4.3.1) \quad E_{M-1}(f, B(x_0, r_n)) \leq C_0(f, M, d) C\theta(r_n).$$

Remarque 4.3.13 On peut reformuler la propriété (4.3.1) de la manière suivante : pour toute constante positive C il existe une suite strictement croissante d'entiers positifs $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, pour tout n , il existe un polynôme $P_{x_0, n}$ de degré au plus $M - 1$ vérifiant,

$$(4.3.2) \quad \|f - P_{x_0, n}\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j_n}))} \leq C\theta(2^{-j_n}).$$

On va maintenant s'intéresser au lien entre irrégularité ponctuelle et ondelettes.

4.4 Ondelettes et régularité ponctuelle faible

L'objectif est de même que dans le cas uniforme de se donner de critères ondelettes d'irrégularité ponctuelle d'une fonction. La difficulté est qu'ici on n'aura pas de condition nécessaire et suffisante de régularité Höldérienne faible. Ceci est dû au fait que la fonction

$$\omega_{f, x_0}^M(r) = \sup_{|h| \leq r} \|\Delta_h^M f(x)\|_{L^\infty(B_h(x_0, r))},$$

n'est à priori pas un module de continuité. On pourra donc énoncer, section 4.4.1, des conditions nécessaires de régularité ponctuelle faible, des conditions suffisantes mais on n'aura pas de caractérisation ondelettes de la notion d'irrégularité ponctuelle.

On souligne que les résultats obtenus sont radicalement différents de ce que l'on obtient lorsqu'on étudie les liens entre la notion de régularité ponctuelle usuelle et la théorie des ondelettes. En effet, en ce qui concerne la régularité ponctuelle usuelle, même si on n'a pas stricto sensu une caractérisation ondelette de la propriété $f \in \mathcal{C}^\alpha(x_0)$, les conditions nécessaires et suffisantes de régularité ponctuelle sont très proches ce qui permet de caractériser de manière exacte la propriété $\underline{h}_f(x_0) = \alpha$. On montrera par contre (section 4.4.3), à travers un contre exemple que la condition nécessaire d'irrégularité ponctuelle, donnée en section 4.4.1, n'est pas une condition suffisante.

On considèrera en section 4.4.4 un cas particulier important, celui des fonctions qui sont à la fois uniformément Höldériennes et anti-Höldériennes. Dans ce cas là, on obtiendra une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'ondelettes. On s'intéressera ensuite, toujours dans la section 4.4.4, à la notion plus forte de fonction uniformément anti-Höldérienne et on s'interrogera sur la traduction en termes de coefficients d'ondelettes de cette notion. La section 4.4.5 sera enfin consacrées aux preuves des résultats énoncés en section 4.4.1.

4.4.1 Fonctions anti-Höldériennes et ondelettes

On va démontrer dans cette section, le théorème suivant qui donne une condition nécessaire puis une condition suffisante pour qu'une fonction soit anti-Höldérienne d'exposant α en un point donné x_0 de \mathbb{R}^d .

Théorème 4.4.1 Soit ψ une ondelette à support compact. On a les deux résultats :

1. Si f une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et s'il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier j

$$d_j(x_0) \geq C_0 2^{-j\alpha},$$

alors f est anti-Höldérienne d'exposant α en x_0 .

2. Si f est uniformément Höldérienne et f est anti-Höldérienne d'exposant α en x_0 alors pour tout réel β supérieur à 1, il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier j on ait :

$$(4.4.1) \quad \sup_{\ell \leq j} (2^{\ell M} d_\ell(x_0)) \geq C_0 \frac{2^{j(M-\alpha)}}{j^\beta}.$$

Ce théorème découle de résultats plus généraux que l'on énonce dans la section suivante.

4.4.2 Appartenance aux ensembles $I_\theta^M(x_0)$ et ondelettes

Théorème 4.4.2 *On suppose que ψ est une ondelette à support compact. On a les deux résultats :*

1. Si f est une fonction de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$ et s'il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier j

$$d_j(x_0) \geq C_0 \theta(2^{-j}),$$

alors $f \in I_\theta^M(x_0)$.

2. Si f est uniformément Höldérienne et $f \in I_\theta^M(x_0)$ alors il existe une constante positive C_0 telle que pour tout entier j on ait :

$$(4.4.2) \quad \sup_{\ell \leq j} 2^{\ell M} d_\ell(x_0) \geq C_0 \frac{2^{jM} \theta(2^{-j})}{j^\beta}.$$

Ce théorème découle par contraposition, des deux propositions suivantes, qui donnent une condition nécessaire de régularité Höldérienne ponctuelle faible (proposition 4.4.3) et une condition suffisante de régularité Höldérienne ponctuelle faible (proposition 4.4.6) :

Proposition 4.4.3 *On distingue deux cas :*

1. On suppose que l'analyse multirésolution est à support compact. Si f est dans $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(x_0)$ alors pour toute constante positive C il existe une suite d'entiers strictement croissante (j_n) telle que

$$(4.4.3) \quad \forall n \geq 0, \forall j \geq j_n, d_j(x_0) \leq C \theta(2^{-j_n}).$$

2. Dans le cas où l'analyse multirésolution est quelconque, mais suffisamment régulière, si f est dans $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(x_0)$ alors pour tout réel positif ε et toute constante positive C il existe une suite d'entiers strictement croissante (j_n) telle que

$$(4.4.4) \quad \forall n \geq 0, \forall j \geq j_n, d_j(x_0) \leq C \theta(2^{-j_n(1-\varepsilon)}).$$

Remarque 4.4.4 *On ne sait pas montrer que la propriété (4.4.3) ou la propriété (4.4.4) est stable par changement de base d'ondelette. La précision ψ ondelette à support compact est donc ici importante. On remarque que dans le cas où l'ondelette n'est pas à support compact le résultat est un peu plus faible.*

Remarque 4.4.5 *On montrera dans la section 4.4.3, par un contre exemple que cette condition n'est pas une condition suffisante de régularité Höldérienne ponctuelle faible.*

Proposition 4.4.6 *Soit θ un module de continuité fort d'ordre M et f une fonction uniformément Höldérienne. Si pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante $(j_n)_n$ d'entiers tels que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, d_j(x_0) \leq C \inf(\theta(2^{-j_n}), \theta(2^{-j_{n+1}})2^{j_{n+1}M}h^M),$$

alors, pour tout $\beta > 1$

$$f \in C_{|\log|\beta\theta, w}^M(x_0).$$

Ces deux propositions seront démontrées en section 4.4.5.1 et 4.4.5.2. Avant de détailler leur preuve, on va tout d'abord montrer que les conditions (4.4.3) ou (4.4.4) ne sont ni l'une ni l'autre des conditions suffisantes de régularité ponctuelle faible.

4.4.3 Un contre exemple à la réciproque de la proposition 4.4.3

Pour illustrer toute la difficulté qu'on a à obtenir un critère d'irrégularité portant sur les coefficients dominants on va considérer une famille de séries trigonométriques et étudier leur régularité ponctuelle en tout réel x_0 . On se donne β un réel supérieur à 1, et $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \geq 0, j_n = [\beta^n].$$

On considère alors λ un nombre compris entre 1 et β , α est un réel compris entre 0 et 1 et la famille de séries trigonométriques $(f_{\alpha, \beta, \lambda})$ suivantes :

$$(4.4.5) \quad f_{\alpha, \beta, \lambda}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \sin(2^j \pi x),$$

où pour tout n , $j_{n+1} = [\lambda j_n]$. L'objectif est de montrer la proposition suivante :

Proposition 4.4.7 *On suppose que $\alpha \geq \frac{\beta - \lambda}{\beta - 1}$, et $\beta > 1$. Alors l'exposant de Hölder uniforme et l'exposant de Hölder inférieur en tout point de la fonction $f_{\alpha, \beta, \lambda}$ sont tous deux égaux à $\underline{H} = \alpha/\lambda$. Par ailleurs $\bar{h} = \beta\alpha/(\lambda + \alpha(\beta - 1))$ est à la fois l'exposant d'irrégularité uniforme ainsi que l'exposant de Hölder supérieur de de la fonction $f_{\alpha, \beta, \lambda}$ en tout point. En particulier pour tout réel x_0*

$$\bar{h} = \bar{h}_{f_{\alpha, \beta, \lambda}}(x_0) = \frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta - 1)} < \bar{H} = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{-\log(d_j(x_0))}{j \log(2)} = \frac{\alpha\lambda}{\beta}.$$

La famille de séries trigonométriques $(f_{\alpha, \beta, \lambda})$ constitue alors bien un contre exemple à la réciproque de la proposition 4.4.3.

Pour démontrer cette proposition, on va tout d'abord estimer les coefficients dominants en tout point x_0 des fonctions $f_{\alpha,\beta,\lambda}$.

Proposition 4.4.8 *Pour tout réel x_0 , les coefficients dominants en x_0 de la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ vérifient pour tout $n \geq 1$*

$$\begin{cases} \text{Si } j \in \{j_n, \dots, j_{n,\lambda}\}, d_j(x_0) = 2^{-j_n\alpha} = 2^{-\ell_n \frac{\alpha}{\lambda}} = 2^{-\ell_{n-1} \frac{\alpha\beta}{\lambda}}, \\ \text{Si } j \in \{j_{n,\lambda} + 1, \dots, j_{n+1} - 1\}, d_j(x_0) = 2^{-j_{n+1}\alpha} = 2^{-\ell_{n+1} \frac{\alpha}{\lambda}} = 2^{-\ell_n \frac{\alpha\beta}{\lambda}}. \end{cases}$$

Ceci implique en particulier que pour tout réel x_0

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{-\log(d_j(x_0))}{j \log(2)} = \underline{H} = \frac{\alpha}{\lambda},$$

et

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{-\log(d_j(x_0))}{j \log(2)} = \overline{H} = \frac{\alpha\beta}{\lambda}.$$

Preuve. On prend pour ondelette l'ondelette de Meyer qui on le rappelle est dans la classe de Schwartz, est de transformée de Fourier paire à support compact telle que

$$\text{supp}(\widehat{\psi}) \subset \left[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right].$$

On en déduit alors que pour tout $j_{n_0} \leq \ell \leq j_{n_0,\lambda} - 1$ et tout k

$$\begin{aligned} c_{\ell,k} &= 2^\ell \int f_{\alpha,\beta,\lambda}(x) \psi(2^\ell x - k) dx \\ &= 2^\ell \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} \int \sin(2^j \pi x) \psi(2^\ell x - k) dx \\ &= 2^\ell \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} \frac{1}{2i} \left(\int e^{i2^j \pi x} \psi(2^\ell x - k) dx - \int e^{-i2^j \pi x} \psi(2^\ell x - k) dx \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} \frac{1}{2i} \left(e^{i2^{j-\ell} k \pi} \widehat{\psi}(2^{j-\ell} \pi) - e^{-i2^{j-\ell} k \pi} \widehat{\psi}(-2^{j-\ell} \pi) \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} \sin(2^{j-\ell} k \pi) \widehat{\psi}(2^{j-\ell} \pi) \\ &= 2^{-j_{n_0}\alpha} \sin\left(k \frac{\pi}{2}\right) \widehat{\psi}\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Donc pour tout $j_{n_0} \leq \ell \leq j_{n_0,\lambda} - 1$ et tout p

$$c_{\ell,2p} = 0, \quad c_{\ell,2p+1} = 2(-1)^p 2^{-\ell_n \overline{H}} \widehat{\psi}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Pour $j_{n_0,\lambda} \leq \ell \leq j_{n_0+1} - 1$ et k quelconque

$$c_{\ell,k} = 0.$$

Par définition des coefficients dominants

$$d_\ell(x_0) = \sup_{\ell' \geq \ell-1} \sup_{2^{\ell'-\ell}(k_\ell(x_0)-1) \leq k' \leq 2^{\ell'-\ell}(k_\ell(x_0)+2)} |c_{\ell',k'}|$$

où $k_\ell(x_0) = [2^\ell x_0]$. On a alors bien le résultat annoncé. \square

Par les critères ondelettes de régularité Höldérienne uniforme et ponctuelle classique ceci implique que :

Proposition 4.4.9 *L'exposant de Hölder uniforme et l'exposant de Hölder inférieur en tout point x_0 de la fonction $f_{\lambda,\beta}$ sont tous deux égaux à*

$$\underline{H} = \frac{\alpha}{\lambda}.$$

On va maintenant estimer l'exposant de Hölder supérieur des fonctions $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ et le comparer au réel $\overline{H} = \alpha\beta/\lambda$. Le résultat de la proposition 4.4.7 en découlera directement.

Proposition 4.4.10 *On distingue les différents cas :*

1. *Si $\alpha \leq (\beta - \lambda)/(\beta - 1)$ la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ est uniformément anti-Höldérienne d'exposant $\overline{h} = 1 - (\lambda - \alpha)/\beta$. En particulier pour tout réel x_0 on peut encadrer l'exposant de Hölder supérieur \overline{h} de la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ en x_0 de la manière suivante*

$$\alpha \leq \overline{h} \leq 1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta}.$$

ce qui implique par l'estimation de $\limsup_{j \rightarrow +\infty} (\log(d_j(x_0)))/(-j \log(2))$ faite dans la proposition précédente l'encadrement

$$\alpha \leq \overline{h} \leq \min\left(1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta}, \frac{\beta\alpha}{\lambda}\right).$$

2. *Si $\alpha \geq (\beta - \lambda)/(\beta - 1)$ la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ est uniformément anti-Höldérienne d'exposant $\overline{h} = 1 - (\lambda - \alpha)/\beta$. En particulier pour tout réel x_0 l'exposant de Hölder supérieur \overline{h} de la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ est égal à*

$$\overline{h} = \frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta - 1)} = \frac{\overline{H}}{1 + \overline{H} - \underline{H}}.$$

3. *Dans le cas particulier où $\alpha = (\beta - \lambda)/(\beta - 1)$ alors l'exposant de Hölder supérieur \overline{h} de la fonction $f_{\alpha,\beta,\lambda}$ en x_0 est égal à*

$$\overline{h} = \alpha.$$

Preuve. Dans un premier temps, on majore l'exposant de Hölder supérieur. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{N}$ et n_0 tel que $j_{n_0} + 2 \leq \ell \leq j_{n_0+1} + 1$. On va minorer $|f(y) - f(x)| = |f(2^{-\ell})|$ pour $x = [2^{\ell-1}x_0]/2^{\ell-1}$ et $y = [2^{\ell-1}x_0]/2^{\ell-1} + 2^{-\ell}$ qui sont donc tous deux dans $B(x_0, 2^{-\ell})$.

$$f(2^{-\ell}) = \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-j_n\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} \sin(2^j 2^{-\ell} \pi) + 2^{-j_{n_0}\alpha} \sum_{j=j_{n_0}+1}^{\min(\ell-1, j_{n_0,\lambda})} \sin(2^j \pi 2^{-\ell})$$

On utilise alors l'inégalité classique :

$$\text{Sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x.$$

On en déduit que, si $j_{n_0} + 2 \leq \ell \leq j_{n_0, \lambda} + 1$:

$$\begin{aligned}
 f(2^{-\ell}) &\geq 2 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-jn\alpha} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n,\lambda}} 2^{j-\ell} + 2.2^{-j_{n_0}\alpha} \sum_{j=j_{n_0}+1}^{\ell-1} 2^{j-\ell} \\
 &\geq 2.2^{-\ell} \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-jn\alpha} 2^{j_{n,\lambda}} + 2.2^{-\ell} . 2^{-j_{n_0}\alpha} 2^{\ell} \\
 &\geq 2.2^{-\ell} \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{jn(\lambda-\alpha)} + 2.2^{-j_{n_0}\alpha} \\
 &\geq 2.2^{-\ell} . 2^{j_{n_0-1}(\lambda-\alpha)} + 2.2^{-j_{n_0}\alpha}
 \end{aligned}$$

Par contre, si $j_{n_0, \lambda} + 2 \leq \ell \leq j_{n_0+1} + 1$

$$f(2^{-\ell}) \geq 2.2^{-\ell} 2^{-j_{n_0}\alpha} 2^{j_{n_0, \lambda}\alpha} = 2^{-\ell} 2^{j_{n_0}(\lambda-\alpha)}.$$

Soit alors $t \in (1, \beta)$ tel que

$$\ell = tj_{n_0}.$$

On a alors

$$j_{n_0} = \frac{\ell}{t}.$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \text{Si } 1 \leq t \leq \lambda, & f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\ell \min(1 - \frac{\lambda-\alpha}{\beta t}, \frac{\alpha}{t})}, \\ \text{Si } \lambda \leq t \leq \beta, & f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\ell(1 - \frac{\lambda-\alpha}{t})}. \end{cases}$$

On distingue alors les deux cas $\alpha \leq \frac{\beta - \lambda}{\beta - 1}$ et $\alpha \geq \frac{\beta - \lambda}{\beta - 1}$.

Si $\alpha \leq \frac{\beta - \lambda}{\beta - 1}$:

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
 \max\left(\max_{t \in (1, \lambda)} \left(\min\left(1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta t}, \frac{\alpha}{t}\right)\right), \max_{t \in (\lambda, \beta)} \left(1 - \frac{\lambda - \alpha}{t}\right)\right) &= \max\left(\alpha, 1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta}\right) \\
 &= 1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta}.
 \end{aligned}$$

et donc que

$$f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\ell(1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta})}$$

Ceci permet d'en déduire que

$$f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\bar{h}\ell}.$$

en posant ici

$$\bar{h} = 1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta}.$$

Si $\alpha \geq \frac{\beta - \lambda}{\beta - 1}$:

On remarque alors que

$$\begin{aligned}
 \max\left(\max_{t \in (1, \lambda)} \left(\min\left(1 - \frac{\lambda - \alpha}{\beta t}, \frac{\alpha}{t}\right)\right), \max_{t \in (\lambda, \beta)} \left(1 - \frac{\lambda - \alpha}{t}\right)\right) &= \max\left(\frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta - 1)}, \frac{\alpha}{\beta} + 1 - \frac{\lambda}{\beta}\right) \\
 &= \frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta - 1)}.
 \end{aligned}$$

et donc que

$$f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\ell \frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta-1)}}$$

Ceci permet d'en déduire que

$$f(2^{-\ell}) \geq 2^{-\bar{h}\ell}.$$

en posant dans ce cas

$$\bar{h} = \frac{\beta\alpha}{\lambda + \alpha(\beta-1)}.$$

On a alors dans les deux cas considérés :

$$\sup_{[x, x+h] \subset B(0, 2^{-\ell})} |f(x+h) - f(x)| \geq 2^{-\bar{h}\ell}.$$

Ceci implique bien la majoration de l'exposant de Hölder supérieur voulue.

Pour minorer l'exposant d'irrégularité uniforme on remarque que :

$$\text{Si } |h| \leq 2^{-\ell}, |\sin(2^j \pi 2^{-\ell}(x+h)) - \sin(2^j \pi 2^{-\ell}x)| \leq \min(2, 2^{j-\ell}\pi).$$

On a alors

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq 2 \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\lambda}-1} 2^{j-\ell} + 2 \sum_{n_0}^{+\infty} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\lambda}-1} 2 \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\lambda}-1} 2^{j-\ell} + 4 \sum_{n_0}^{+\infty} 2^{-j_n \alpha} (j_{n,\lambda} - j_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\lambda}-1} 2^{j-\ell} + 4 \sum_{n_0}^{+\infty} 2^{-j_n \alpha} (\beta\lambda - 1) j_n \\ &\leq \sum_{n=0}^{n_0-1} 2^{-j_n \alpha} \sum_{j=j_n}^{j_{n,\lambda}-1} 2^{j-\ell} + 2 \cdot 2^{-j_{n_0} \alpha} (\beta\lambda - 1) j_{n_0} \end{aligned}$$

La suite de la démonstration est alors analogue à ce qui vient d'être fait. \square

4.4.4 Un cas particulier important

Lorsque la fonction f est $C^\alpha(x_0)$, on a une condition nécessaire et suffisante portant sur les coefficients d'ondelettes pour que f soit anti-Höldérienne d'exposant α en x_0 :

Proposition 4.4.11 *On suppose que l'analyse multi-résolution est à support compact. Soit f une fonction $C^\alpha(x_0)$.*

1. *S'il existe deux constantes positives $C_1(x_0)$ et $C_2(x_0)$ ne dépendant que de x_0 telles que pour tout entier j*

$$C_1(x_0)2^{-j\alpha} \leq d_j(x_0) \leq C_2(x_0)2^{-j\alpha},$$

alors $f \in I^\alpha(x_0)$.

2. Si f est de plus uniformément Höldérienne et anti-Höldérienne d'exposant α en x_0 alors, pour tout réel $\beta > 1$, il existe deux constantes positives $C_1(x_0)$, $C_2(x_0)$ ne dépendant que de x_0 telles que pour tout entier j on ait :

$$(4.4.6) \quad C_1 \frac{2^{-j\alpha}}{j^{\beta(\alpha+1)}} \leq d_j(x_0) \leq C_2 2^{-j\alpha}.$$

Preuve. Seul le deuxième point est à démontrer. Remarquons que, comme f est une fonction de $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, pour une certaine constante positive C_2 ,

$$d_j(x_0) \leq C_2 2^{-j\alpha}.$$

Soit ℓ_0 un entier tel que $C_2 < 2^{\ell_0(M-\alpha)} C_1$, la condition (4.4.2) est alors équivalente à

$$\sup_{j-\ell_0-\beta \log_2(j) \leq \ell \leq j} 2^{\ell M} d_\ell(x_0) \geq C_1 \frac{2^{j(M-\alpha)}}{j^\beta},$$

car

$$\sup_{\ell \leq j-\ell_0-\beta \log_2(j)} 2^{\ell M} d_\ell(x_0) \leq C_2 \sup_{\ell \leq j-\ell_0-\beta \log_2(j)} (2^{\ell(M-\alpha)}) < C_1 2^{\ell_0(M-\alpha)} 2^{(j-\ell_0-\beta \log_2(j))(M-\alpha)}.$$

On a alors par décroissance de la suite $(d_j(x_0))_j$,

$$C_1 \frac{2^{j(M-\alpha)}}{j^\beta} \leq \sup_{j-\ell_0-\beta \log_2(j) \leq \ell \leq j} 2^{\ell M} d_\ell(x_0) \leq 2^{jM} d_{j-\ell_0-\beta \log_2(j)}(x_0).$$

Soit alors $j' = j - \ell_0 - \beta \log_2(j)$,

$$d_{j'}(x_0) \geq C_1 \frac{2^{-j'\alpha} 2^{-\ell_0\alpha}}{j^{\beta(\alpha+1)}} \geq C_1 2^{-\ell_0\alpha - \beta(\alpha+1)} \frac{2^{-j'\alpha}}{j'^{\beta(\alpha+1)}}$$

à partir d'un certain rang.

Quitte à changer C_1 en $C_1 2^{-\ell_0\alpha - \beta(\alpha+1)}$ on obtient donc le résultat voulu. \square

Une preuve similaire permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 4.4.12 *On suppose que l'analyse multirésolution est à support compact. Soit f une fonction uniformément Höldérienne. Alors,*

$$\underline{h}_f(x_0) = \overline{h}_f(x_0) = \alpha \Leftrightarrow \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\log(d_j(x_0))}{j \log(2)} \right) = \alpha.$$

Remarque 4.4.13 *Lorsque exposant de Hölder inférieur et supérieur coïncident, on a donc un vrai critère qui porte sur les coefficients dominants.*

On peut partiellement étendre le résultat de la proposition 4.4.11 au cas des fonctions uniformément anti-Höldériennes.

Proposition 4.4.14 *On suppose que l'analyse multi-résolution est à support compact. Soit f une fonction $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$. S'il existe deux constantes positives C_1 et C_2 telles que pour tout point x_0 de \mathbb{R}^d et tous les triplets (i, j, k) de $\{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$*

$$C_1 2^{-j\alpha} \leq d_{j,k}^i \leq C_2 2^{-j\alpha},$$

alors f est uniformément anti-Höldérienne d'exposant α .

Preuve. On suppose que f n'est pas uniformément anti-Höldérienne. Alors pour toute constante positive C il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \omega_{f, x_n}(2^{-j_n}) \leq C 2^{-j_n \alpha}.$$

Alors par le lien entre approximation polynomiale et différences finies on obtient pour tout n l'existence d'un polynôme P_n de degré inférieur à α tel que

$$\|f(x) - P_n(x)\|_{L^\infty(B(x_n, 2^{-j_n}))} \leq C 2^{-j_n \alpha}.$$

On fait alors un raisonnement similaire à celui qui sera détaillé en section . On montre ainsi que pour toute constante positive C il existe une suite d'entiers strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$d_{j_n}(x_n) \leq C_0(\psi) C 2^{-j_n \alpha}$$

où la constante C_0 ne dépend que de l'analyse multi-résolution choisie. On a donc exactement le résultat voulu si on raisonne par contraposition. \square

4.4.5 Preuve des critères ondelettes d'irrégularité ponctuelle

4.4.5.1 Démonstration de la proposition 4.4.3

- Supposons que $f \in C_{\theta, w}^M(x_0)$. On a alors par la caractérisation polynomiale de la régularité uniforme faible, pour toute constante positive C , l'existence d'une suite d'entiers strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et d'un polynôme P_{n, x_0} de degré inférieur à M tels que :

$$\forall n \geq 0, \forall j \geq j_n, \|f - P_{n, x_0}\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j}))} \leq C \theta(2^{-j_n}).$$

On suppose que le support de ψ est inclus dans $B(0, 2^{\ell_0})$. Soit λ' un cube dyadique inclus dans $3.\lambda_{j_n + \ell_0}(x_0)$, en utilisant le fait que l'ondelette ψ a suffisamment de moments nuls

$$\begin{aligned} c_{\lambda'} &= 2^{\ell' d} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \psi(2^{\ell'} x - k') dx \\ &= 2^{\ell' d} \int_{B(\frac{k}{2^{\ell'}}, 2^{-(\ell' - \ell_0)})} (f(x) - P_{n, x_0}(x)) \psi(2^{\ell'} x - k') dx \end{aligned}$$

Et donc, pour $\lambda' \subset 3.\lambda_j(x_0)$

$$|c_{\lambda'}| \leq 2^{\ell_0} \|f - P_{n, x_0}\|_{L^\infty(B(x_0, 2^{-j_n}))} \|\psi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce qui implique bien le résultat voulu.

2. On reprend la démonstration ci dessus. Par la même démarche qu'au chapitre ???. On peut montrer que le critère : pour tout $\varepsilon > 0$

$$\forall n \in \mathbb{N}, d_{j_n}(x_0) \leq C\theta(2^{-j_n(1-\varepsilon)})$$

est stable par changement de base d'ondelettes suffisamment régulière. On peut donc considérer le cas particulier d'une analyse multi-résolution construite par produit tensoriel. La démonstration sera toujours basée sur le lemme (2.4.27) utilisé pour la caractérisation de la notion de régularité Höldérienne supérieure uniforme par ondelettes. On définit la suite $(\ell_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\ell_n = \left[\frac{j_n}{1-\varepsilon} \right] + 1.$$

On a alors pour λ' cube dyadique inclus dans $3.\lambda_{\ell_n}(x_0)$:

$$\begin{aligned} c_{\lambda'} &= 2^{\ell'd} \int_{\mathbb{R}^d} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx \\ &\leq 2^{\ell'd} \int_{B(x_0, 2^{-\ell'(1-\varepsilon)})} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx \\ &\quad + 2^{\ell'd} \int_{2^{-\ell'(1-\varepsilon)} \leq |x-x_0|} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) \varphi_0(x) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx \\ &\quad + 2^{\ell'd} \int_{2^{-\ell'(1-\varepsilon)} \leq |x-x_0|} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) (1 - \varphi_0(x)) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx \end{aligned}$$

où φ_0 désigne une fonction indéfiniment dérivable à support compact telle que

$$\begin{aligned} \text{Sur } B(x_0, 2^{-j_0}), \varphi_0 &\equiv 1, \\ \text{Sur } B(x_0, 2.2^{-j_0})^c, \varphi_0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

On majore chaque intégrale, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned} &|2^{\ell'd} \int_{B(x_0, 2^{-\ell'(1-\varepsilon)})} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx| \\ &\leq 2^{\ell'd} (C\theta(2^{-j_n})) 2^{-\ell'd} \|\Psi_M\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \|\Psi_M\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \theta(2^{-j_n}) = CC_0 \theta(2^{-\ell_n(1-\varepsilon)}) \end{aligned}$$

La deuxième intégrale se majore de la manière suivante

$$\begin{aligned} &|2^{\ell'd} \int_{2^{-\ell'(1-\varepsilon)} \leq |x-x_0|} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) \varphi_0(x) \Psi_M(2^{\ell'}x - k') dx| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(B(x_0, 2r_0))} 2^{-\ell'd} \left(\int_{2^{\varepsilon\ell'} < |y|} \|\Psi_M(y)\|^{p'} dy \right) \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(B(x_0, 2r_0))} 2^{-\ell's\varepsilon} \end{aligned}$$

la dernière inégalité utilisant la décroissance rapide des fonctions Ψ_M .

Enfin la troisième intégrale se majore en utilisant le fait que toute distribution f de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la dérivée d'ordre t d'une fonction à croissance lente,

$$f = D^t((1 + |x|^2)^{s'} g)$$

où $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Et donc,

$$\begin{aligned} & 2^{\ell' d} \int_{2^{-\ell'(1-\varepsilon)} \leq |x-x_0|} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M f)(x) (1 - \varphi_0(x)) \Psi_M(2^{\ell'} x - k') dx \\ &= \int_{2^{-j_0} < |x-x_0|} (\Delta_{2^{-(\ell'+1)e_i}}^M g)(x) D^t((1 - \varphi_0(x)) \Psi_M(2^{\ell'} x - k')) dx \end{aligned}$$

L'appartenance de la fonction g à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et la décroissance rapide de la fonction Ψ_M permet alors de conclure si l'analyse multirésolution est suffisamment régulière.

4.4.5.2 Démonstration de la proposition 4.4.6

La démonstration de la proposition 4.4.6 est basée sur le résultat intermédiaire suivant :

Proposition 4.4.15 *Soit $M \in \mathbb{N}$. On suppose que $\tilde{\theta}$ est un module de continuité faible d'ordre M tel que pour tout $j \geq j_{\tilde{\theta}}$ on ait :*

$$(4.4.7) \quad d_j(x_0) \leq C\tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Alors si f est une fonction uniformément Höldérienne on a pour tout réel β supérieur à 1,

$$\forall r \leq r_0, \omega_{f,x_0}^M(r) \leq CC_0 |\log(r)|^\beta \tilde{\theta}(r).$$

la constante positive C_0 ne dépendant que de l'analyse multi-résolution choisie.

Preuve. Les notations utilisées sont celles de la démonstration de la proposition ??
Par hypothèse, la fonction f étant uniformément Höldérienne, il existe un réel positif ε_0 tel que

$$\max(\sup_k |C_k|, \sup_j (2^{j\varepsilon_0} \sup_{i,k} |c_{j,k}^i|)) < +\infty.$$

On montre alors le lemme suivant :

Lemme 4.4.16 *La propriété (4.4.7) est équivalente au critère 2-microlocal suivant :*

$$(4.4.8) \quad \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \forall j \geq j_{\tilde{\theta}}, \forall k \in \mathbb{Z}^d, |c_{j,k}^i| \leq C(\tilde{\theta}(2^{-j}) + \tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x_0|)).$$

Preuve.

1. Si le critère (4.4.8) est vérifié, alors pour $\lambda' \subset 3\lambda_j(x_0)$

$$\tilde{\theta}(2^{-j'}) \leq \tilde{\theta}(2^{-j+1}) \leq C_{\tilde{\theta}} \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

De plus,

$$|\frac{k'}{2^{j'}} - x_0| \leq 4d2^{-j} = 2^{\ell_0} 2^{-j}.$$

Donc

$$\tilde{\theta}(|\frac{k'}{2^{j'}} - x_0|) \leq C_{\tilde{\theta}}^{\ell_0} \tilde{\theta}(2^{-j})$$

D'où

$$d_j(x_0) \leq 2CC_{\tilde{\theta}}^{\ell_0} \tilde{\theta}(2^{-j})$$

2. Réciproquement, soit λ' fixé on note $j = \sup\{m, \lambda' \in 3\lambda_m(x_0)\}$. Par la propriété (4.4.7),

$$|c_{\lambda'}| \leq \tilde{\theta}(2^{-j})$$

Or

$$2^{-j-1} \leq \left| \frac{k'}{2^{j'}} - x_0 \right|$$

Donc,

$$\tilde{\theta}(2^{-j}) \leq C_{\tilde{\theta}} \tilde{\theta}(2^{-j-1}) \leq \tilde{\theta} \left(\left| \frac{k'}{2^{j'}} - x_0 \right| \right)$$

□

Soit J un entier fixé. On se donne alors un réel positif h et x un vecteur de \mathbb{R}^d tels que $[x, x + Mh] \subset B(x_0, 2^{-J})$. On désignera par J_1 l'entier défini par $J_1 = \left[\frac{M}{\varepsilon_0} \right] + 1$.

La démonstration est ensuite analogue à celle de la proposition 2 dans [Jaf04]

On a alors

$$\begin{aligned} \Delta_h^M f(x) &= \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=-1}^{j_{\theta}-1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \text{ Somme (I)} \\ &+ \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=j_{\theta}}^{J-1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \text{ Somme (II)} \\ &+ \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=J}^{J_1-1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \text{ Somme (III)} \\ &+ \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=J_1}^{+\infty} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \text{ Somme (IV)} \end{aligned}$$

On va alors majorer successivement les sommes (I),(II),(III) et (IV).

Majoration de la somme (I)

Or la fonction $g_1 = \sum_{j=-1}^{j_{\theta}-1} f_j(x)$ a même régularité que l'analyse multirésolution donc, il existe une certaine constante positive C_0 telle que

$$\forall J \geq 0, \omega_{g_1}^M(2^{-J}) \leq C_0 2^{-JM},$$

ce qui par (2.4.22) implique bien que, pour J suffisamment grand :

$$(4.4.9) \quad \sum_{j=-1}^{j_{\theta}-1} \Delta_h^M f_j(x) \leq C_0 C \tilde{\theta}(2^{-J}).$$

Majoration des sommes (II) et (III)

La majoration des sommes (II) et (III) est basée sur le lemme suivant

Lemme 4.4.17 *Soit θ un module de continuité. Pour tout réel γ suffisamment grand et tout entier j , on a*

$$\sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \frac{\tilde{\theta} \left(\left| \frac{k}{2^j} - x \right| \right)}{(1 + |2^j x - k|)^{n+\gamma+1}} \leq \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Pour démontrer ce résultat remarquons que,

Lemme 4.4.18 *Il existe une certaine constante C_0 telle que pour $|v| \geq 1$*

$$(4.4.10) \quad \tilde{\theta}(2^{-j}|v|) \leq C_0|v|^{\ell_0}\tilde{\theta}(2^{-j}),$$

où

$$\ell_0 = \left\lceil \frac{\log(C_\theta)}{\log(2)} \right\rceil + 1.$$

Preuve. Soit m l'entier tel que

$$2^m \leq |v| \leq 2^{m+1}.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(2^{-j}|v|) &\leq \tilde{\theta}(2^{-j}2^{m+1}) \\ &\leq C_\theta^{m+1}\tilde{\theta}(2^{-j}) \\ &\leq C_\theta^m C_\theta \tilde{\theta}(2^{-j}) \\ &\leq C_\theta^m |v|^{\ell_0} \tilde{\theta}(2^{-j}) \end{aligned}$$

□

On distingue alors deux cas.

Si $|\frac{k}{2^j} - x| \geq 2^{-j}$ on a, par l'équation (4.4.10)

$$\sum_{k, |\frac{k}{2^j} - x| \geq 2^{-j}} \frac{\tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x|)}{(1 + |2^j x - k|)^{n+M+1}} \leq C_0 \sum_{k, |\frac{k}{2^j} - x| \geq 2^{-j}} \frac{\tilde{\theta}(2^{-j})|k - 2^j x|^{\ell_0}}{(1 + |2^j x - k|)^{n+M+1}} \leq C_0 \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

Si $|\frac{k}{2^j} - x| \leq 2^{-j}$ on a, par croissance de la fonction $\tilde{\theta}$,

$$\sum_{k, |\frac{k}{2^j} - x| \geq 2^{-j}} \frac{\tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x|)}{(1 + |2^j x - k|)^{n+M+1}} \leq C_0 \tilde{\theta}(2^{-j}) \sum_{k, |\frac{k}{2^j} - x| \geq 2^{-j}} \frac{1}{(1 + |2^j x - k|)^{n+M+1}} \leq C_0 \tilde{\theta}(2^{-j}).$$

On peut maintenant majorer les sommes (II) et (III).

Commençons par majorer la somme (II) à l'aide du théorème des accroissements finis et du critère 2 microlocal (4.4.8) :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2^{d-1}} \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \right| &\leq C \sup_{y \in [x, x+Mh]} \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \sum_k \frac{(\tilde{\theta}(2^{-j}) + \tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x_0|))}{(1 + |\frac{k}{2^j} - y|)^{M+n+1}} 2^{jM} |h|^M \\ &\leq C \sup_{y \in [x, x+Mh]} \sum_{j=j_\theta}^{J-1} \sum_k \frac{(\tilde{\theta}(2^{-j}) + \tilde{\theta}(|x_0 - y|) + \theta(|\frac{k}{2^j} - y|))}{(1 + |\frac{k}{2^j} - y|)} \end{aligned}$$

Or, par la propriété 2.4.20,

$$|h|^M \sum_{j=j_\theta}^{J-1} 2^{jM} \tilde{\theta}(2^{-j}) \sup_{y \in [x, x+Mh]} \left(\sum_k \frac{1}{(1 + |\frac{k}{2^j} - y|)^{M+n+1}} \right) \leq C_0 |h|^M J 2^{JM} \theta(2^{-J}) \leq C_0 J \tilde{\theta}(2^{-J}).$$

De même, comme $y \in [x, x + Mh] \subset B(x_0, 2^{-J})$, par la propriété (2.4.20),

$$|h|^M \sup_{y \in [x, x + Mh]} \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{jM} \sum_k \frac{\tilde{\theta}(|y - x_0|)}{(1 + |\frac{k}{2^j} - y|)} \leq C_0 |h|^M \theta(2^{-J}) \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{jM} \leq C_0 \tilde{\theta}(2^{-J}).$$

Enfin, par le lemme 4.4.17,

$$|h|^M \sup_{y \in [x, x + Mh]} \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k \frac{\tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - y|)}{(1 + |\frac{k}{2^j} - y|)} \leq \sum_{j=j_0}^{J-1} 2^{jM} \tilde{\theta}(2^{-j}) \leq C_0 J \tilde{\theta}(2^{-J}).$$

On en déduit donc bien que

$$(4.4.11) \quad \left| \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \right| \leq C C_0 J \tilde{\theta}(2^{-J}).$$

Majorons maintenant la somme (III) :

$$(4.4.12) \quad \begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=J}^{J_1} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \right| &\leq C \sum_{j=J}^{J_1} \sum_k \frac{(\tilde{\theta}(2^{-j}) + \tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x_0|))}{(1 + |\frac{k}{2^j} - x|)} \\ &\leq C \sum_{j=J}^{J_1} \tilde{\theta}(2^{-j}) + C \sum_{j=J}^{J_1} \sum_k \frac{(\tilde{\theta}(|x_0 - y|) + \tilde{\theta}(|\frac{k}{2^j} - x|))}{(1 + |\frac{k}{2^j} - x|)} \\ &\leq C J_1 \theta(2^{-J}) = C \frac{M}{\varepsilon_0} J \tilde{\theta}(2^{-J}) \end{aligned}$$

Majoration de la somme (IV) :

Enfin,

$$(4.4.13) \quad \left| \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j=J_1}^{+\infty} \sum_k c_{j,k} \Delta_h^M \psi_{j,k}(x) \right| \leq C_0 \sum_{j=J_1}^{+\infty} 2^{-j\varepsilon_0} \leq C_0 2^{-J_1\varepsilon_0} = C_0 2^{-JM}$$

On obtient par la propriété (2.4.22) le résultat voulu si J suffisamment grand.

Les équations (4.4.9), (4.4.11), (4.4.12) et (4.4.13) permettent alors de conclure. \square

En appliquant ce résultat à la fonction $\tilde{\theta}$ définie sur $(0, 2^{-j_0}]$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h \in (2^{-j_{n+1}}, 2^{-j_n}], \tilde{\theta}(h) = \inf(\theta(2^{-j_n}), \theta(2^{-j_{n+1}}) 2^{j_{n+1}M} h^M),$$

la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant une suite d'entiers strictement croissante donnée, on en déduit bien la proposition 4.4.6.

4.5 Résultats prévalents d'irrégularité

Dans cette section, l'objectif est de montrer que, de manière prévalente, les fonctions de $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ sont uniformément anti-Höldériennes d'exposant α . On utilisera pour cela les critères ondelettes démontrés dans la section précédente. On commence par quelques rappels sur la notion de prévalence.

4.5.1 Rappels sur la notion de prévalence

La notion de prévalence est un cas particulier de notion de généralité. A ce titre, comme toute notion de généralité, elle vérifie un certain nombre de propriétés fondamentales :

1. Invariance par dilatation et translation
2. Stabilité par intersection dénombrable.
3. Stabilité par rapport à l'inclusion.
4. Un ensemble prévalent est dense.

On donne maintenant une définition précise de cette notion. La notion de prévalence a été initialement introduite pour généraliser la notion de Lebesgue presque partout aux espaces de dimension infinie. Or on a le résultat suivant :

Proposition 4.5.1 *Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. Il n'existe pas de mesure σ -finie invariante par translation dans E .*

On ne peut donc pas généraliser simplement la notion d'ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Il existe néanmoins une caractérisation des ensembles de mesure de Lebesgues nulle de \mathbb{R}^d qui conduit à la notion de prévalence :

Lemme 4.5.2 *Dans \mathbb{R}^d , un ensemble borélien S est de mesure de Lebesgue nulle si et seulement si il existe une mesure de probabilité à support compact telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mu(x + S) = 0.$$

Dans [Chris72], J.Christenssen a alors introduit la notion suivante :

Définition 4.5.3 *Soit E un espace métrique complet. Un borélien $A \subset E$ est Haar-nul si il existe une mesure de probabilité à support compact tel que*

$$\forall x \in E, \mu(x + A) = 0.$$

Un sous ensemble A de E est Haar-nul si il est inclus dans un borélien Haar-nul. Le complémentaire d'un ensemble Haar-nul est dit prévalent.

Remarque 4.5.4 *Si l'espace E est séparable on peut montrer que l'on peut s'affranchir de l'hypothèse μ à support compact.*

On dira alors que presque tout élément de E satisfait la propriété \mathcal{P} si l'ensemble des éléments de E vérifiant la propriété \mathcal{P} est un ensemble **prévalent**. On dira aussi que la propriété \mathcal{P} est vraie presque partout dans E .

On rappelle maintenant une technique utile pour montrer qu'un ensemble est prévalent : la 'technique du processus stochastique'.

Un élément aléatoire prenant ses valeurs dans E est par définition une fonction mesurable définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ prenant ses valeurs dans E . Un tel élément aléatoire définit une probabilité sur E par la formule valable pour tout borélien A de E :

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X \in A).$$

En utilisant cette mesure de probabilité dans la définition d'ensemble Haar-nul, on en déduit que pour pouvoir qu'un ensemble $A \subset E$ est prévalent il est équivalent de montrer que :

$$\forall f \in E, \mathbb{P}(A + f) = 0,$$

soit

$$\forall f \in E, \mathbb{P}(X \in A + f) = 0.$$

On suppose maintenant que \mathcal{P} est une propriété vérifiée par des éléments de E qui est un espace de fonctions définies sur \mathbb{R}^d . Pour montrer que l'ensemble de fonctions vérifiant \mathcal{P} est Haar-nul, il est suffisant de trouver un processus stochastique tel que :

Pour toute fonction f de E :

$$p.s. f + X \text{ ne vérifie pas la propriété } \mathcal{P}.$$

C'est la 'technique du processus stochastique'. On peut maintenant démontrer les résultats recherchés.

4.5.2 Résultats prévalents d'irrégularité

Proposition 4.5.5 *Soit $\alpha \notin \mathbb{N}$, presque toute fonction de $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, vérifie*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \underline{h}_f(x) = \bar{h}_f(x) = \alpha.$$

De manière plus précise, presque toute fonction de $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$ vérifie

$$\exists C_0 > 0, \exists j_0, \forall i \in \{1, \dots, 2^d - 1\}, \forall j \geq j_0, \forall k \in \mathbb{Z}^d, |d_{j,k}^i| \geq C_0 2^{-j\alpha}.$$

et est donc une fonction uniformément anti-Höldérienne d'exposant α .

Remarque 4.5.6 *Ce résultat est aussi vrai si la notion de généricité considérée est la généricité au sens de Baire : cela a été démontré dans [Jaf04] proposition 5.*

Remarque 4.5.7 *De manière prévalente et quasi-sûre, on est donc dans un cas très proche du cadre de la proposition 4.4.11.*

Preuve. On se donne $(\psi_{j,k}^i)_{i,j,k}$ une base d'ondelettes à support compact. Soit $(\xi_{j,k}^i)_{i,j,k}$ des gaussiennes i.i.d. , considérons le processus gaussien défini par :

$$X(x) = \sum_{i=1}^{2^d-1} \sum_{j \geq 0} \sum_{|k| \leq 2^{jd}} \frac{\xi_{j,k}^i}{j^2 \sqrt{\log(j)}} 2^{-\alpha j} \psi_{j,k}^i(x)$$

Montrons tout d'abord que $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est à trajectoires dans $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$:

On sait que par le lemme classique (voir par exemple le lemme 3 démontré dans [MST99])

$$\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, |\xi_{j,k}^i| \leq C(\omega) j \sqrt{\log(2 + j)},$$

donc

$$\forall (i, j, k) \in \{1, \dots, 2^d - 1\} \times \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d, |c_{j,k}^i(X)| \leq C(\omega) \frac{2^{-j\alpha}}{j}.$$

Ceci donne bien le résultat désiré.

Montrons que pour toute fonction f de $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, p.s. $\forall x \in \mathbb{R}^d$ $f + X(\cdot) \in I^{\alpha+\varepsilon}(x)$:

On va pour cela utiliser le lemme de Borel-Cantelli.

Il s'agit de montrer que

$$\sum_{i,j,k} \mathbb{P}(d_{j,k}(f + X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) < +\infty.$$

On suit la même démarche que dans [AJL04]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_{j,k}^i(f + X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}^i} \mathbb{P}(|c_{\lambda'}(f + X)| \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) \\ &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}^i} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} \leq c_{\lambda'}(f + X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) \\ &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}^i} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f) \leq c_{\lambda'}(X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f)) \\ &\leq \prod_{\lambda_{j',k'}^{i'} \subset \lambda_{j,k}^i} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f) \leq c_{\lambda'}(X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f)) \end{aligned}$$

avec $j' = j + \lceil \frac{2 \log(j)}{\log(2)} \rceil + 1$. On remarque alors qu'il y a $2^{j'-j} = j^2$ cubes dyadiques de taille $2^{j'}$ inclus dans $\lambda_{j,k}^i$. On en déduit que (pour j suffisamment grand)

$$\mathbb{P}(d_{j,k}^i(f + X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) \leq (2^{-j\alpha} j^{-4\alpha})^{j^2} = e^{-j^2 \log(2^{j\alpha} j^{4\alpha})} \leq e^{-j^2}.$$

On a donc bien

$$\sum_{i,j,k} \mathbb{P}(d_{j,k}^i(f + X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) < +\infty.$$

Ceci implique par le lemme de Borel-Cantelli que

$$p.s. \forall (i, j, k), d_{j,k}^i(f + X) \geq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}.$$

Donc

$$p.s., \forall x \in \mathbb{R}^d, \bar{h}_{f+X}(x) \geq \alpha + \varepsilon.$$

□

On va maintenant s'intéresser à l'étude de quelques exemples : séries trigonométriques et séries d'ondelettes. On commence par donner quelques résultats d'irrégularité sur les séries trigonométriques.

4.6 Régularité ponctuelle faible et séries trigonométriques

On va suivre une démarche similaire à [AJVW08] et utiliser la transformée en ondelettes de Gabor. On va maintenant expliciter le lien entre régularité ponctuelle faible d'une fonction f en x_0 et sa transformée en ondelettes de Gabor.

4.6.1 Régularité ponctuelle faible et ondelettes de Gabor

On commence par quelques rappels sur la transformée en ondelettes de Gabor. On aura besoin de quelques notations :

Notation 4.6.1 Si λ, x sont deux vecteurs de \mathbb{R}^d , $\lambda \cdot x$ désigne le produit scalaire usuel de λ et x . Si Ω est une rotation dans \mathbb{R}^d et ϕ une fonction définie sur \mathbb{R}^d , la fonction ϕ_Ω est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \phi_\Omega(x) = \phi(\Omega(x)).$$

On définit alors la transformée en ondelettes de Gabor d'une fonction f par :

Définition 4.6.2 Soit ϕ une fonction de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, 1).$$

La transformée en ondelette de Gabor d'une distribution tempérée f définie sur \mathbb{R}^d est définie par

$$d(a, b, \lambda, \Omega) = \frac{1}{a^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\lambda \cdot x} \phi_\Omega\left(\frac{x-b}{a}\right) dx.$$

On va montrer que le critère ondelettes d'irrégularité ponctuelle montré plus haut peut s'écrire en terme d'ondelettes de Gabor. On commence par montrer le lemme suivant qui est l'équivalent du lemme 2.4.27 pour les ondelettes de Gabor.

Lemme 4.6.3 Soit $M \in \mathbb{N}^*$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, telle que

$$\text{supp}(\widehat{\psi}) \subset [-\pi, \pi]^d \setminus \{0\},$$

il existe alors $\theta_M \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^M$ vérifiant,

$$\psi = \sum_{\ell=1}^d \Delta_{e_\ell}^M(\theta_M^\ell),$$

où (e_1, \dots, e_d) désigne la base canonique de \mathbb{R}^d .

Preuve. On remarque tout d'abord que la relation

$$\psi = \sum_{\ell=1}^d \Delta_{e_\ell}^M(\theta_M^\ell),$$

est équivalente à

$$(4.6.1) \quad \widehat{\psi}(\xi) = \sum_{\ell=1}^d (e^{i\xi_\ell} - 1)^M \widehat{\theta}_M^\ell(\xi)$$

Soit alors, pour tout ℓ de $\{1, \dots, d\}$, θ_M^ℓ la fonction définie sur \mathbb{R}^d par

$$\widehat{\theta}_M^\ell(\xi) = \frac{\widehat{\psi}(\xi)(e^{-i\xi_\ell} - 1)^M}{\sum_{\ell=1}^d (|e^{i\xi_\ell} - 1|^{2M})}.$$

Comme $\text{supp}(\widehat{\psi}) \subset [-\pi, \pi]^d \setminus \{0\}$, $\widehat{\theta}_M^\ell$ est bien, pour tout ℓ de $\{1, \dots, d\}$ dans la classe de Schwartz et vérifie la relation (4.6.1) voulue. \square

On en déduit alors la proposition suivante, analogue de la proposition 4.4.3 démontrée plus haut dans le cadre des ondelettes classiques :

Proposition 4.6.4 *Soit f une distribution tempérée de $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^d)$, b un point de \mathbb{R}^d et α un réel positif. Si $f \in C_w^\alpha(b)$ alors pour tout réel positif ε et pour toute constante positive C il existe une suite décroissante de réels positifs $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < a \leq \rho_n, \forall \Omega \in SO(d), \forall \lambda \text{ tel que } |\lambda| \geq \frac{1}{a}, |d(a, b, \lambda, \Omega)| \leq C\rho_n^{(1-\varepsilon)\alpha}.$$

Preuve. Soit

$$\omega_{a,\lambda,\Omega}(x) = a^{-d} e^{-i\lambda \cdot x} \phi_\Omega\left(\frac{x}{a}\right)$$

on a alors

$$\omega_{a,\lambda,\Omega}(x) = a^{-d} \omega_{1,\tilde{\lambda},\Omega}\left(\frac{x}{a}\right).$$

avec $\tilde{\lambda} = a\lambda$.

Dès que $|\tilde{\lambda}| > 1$, comme

$$\widehat{\omega}_{1,\tilde{\lambda},\Omega}(\xi) = \widehat{\phi}(\Omega(\xi + \tilde{\lambda})),$$

et $\text{supp}(\widehat{\phi}) \subset B(0, 1)$ la fonction $\widehat{\omega}_{1,\tilde{\lambda},\Omega}$ s'annule en 0 ainsi que toutes ses dérivées. Remarquons de plus, $\omega_{1,\tilde{\lambda},\Omega}$ ne dépend que de ϕ .

On utilise alors le lemme précédent : il existe $\theta_{M,\tilde{\lambda}} \in (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^M$ vérifiant

$$\omega_{1,\tilde{\lambda},\Omega}(x) = \sum_{\ell=1}^d \Delta_{e_\ell}^M(\theta_{M,\tilde{\lambda}}^\ell)(x),$$

De plus pour tout $\ell \in \{1, \dots, d\}$

$$(4.6.2) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \theta_{M,\tilde{\lambda}}^\ell(x) = e^{-i\tilde{\lambda} \cdot x} \theta_{M,0}^\ell(x).$$

Donc

$$\omega_{a,\lambda,\Omega}(x) = a^{-d} \sum_{\ell=1}^d \Delta_{e_\ell}^M(\theta_{M,\tilde{\lambda}}^\ell)\left(\frac{x}{a}\right),$$

Ceci implique

$$\begin{aligned} d(a, b, \lambda, \Omega) &= a^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{i\lambda \cdot x} \phi_\Omega\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= a^{-d} \sum_{\ell=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \Delta_{e_\ell}^M(\theta_{M,\tilde{\lambda}}^\ell)\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \\ &= a^{-d} \sum_{\ell=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \theta_{M,\tilde{\lambda}}^\ell\left(\frac{x-b}{a}\right) dx \end{aligned}$$

Soit φ_0 une fonction infiniment dérivable à support compact telle que

$$\begin{aligned} \varphi &\equiv 1 \text{ sur } B(b, r_0), \\ \varphi &\equiv 0 \text{ sur } B(b, 2r_0)^c. \end{aligned}$$

Pour tout ℓ de $\{1, \dots, d\}$ on écrit alors que

$$\begin{aligned} a^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx &= a^{-d} \int_{B(b, a^{1-\varepsilon})} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \\ &+ a^{-d} \int_{a^{1-\varepsilon} < |x-b|} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \varphi_0(x) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \\ &+ a^{-d} \int_{a^{1-\varepsilon} < |x-b|} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) (1 - \varphi_0(x)) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \end{aligned}$$

Par hypothèse, $f \in C_w^\alpha(b)$. Donc si C est une constante positive fixée, il existe une suite de réels positifs $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \leq r_n \quad \sup_{|h| \leq r} \|\Delta_h^M f(x)\|_{L^\infty(B_h(b, a))} \leq C r_n^\alpha.$$

On posera $\rho_n = r_n^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$. On fixe donc une constante positive C , un entier n et a un réel positif inférieur ou égal à r_n .

On majore ensuite chaque intégrale, en utilisant l'inégalité de Cauchy Schwartz :

$$\begin{aligned} &|a^{-d} \int_{B(b, a^{1-\varepsilon})} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx| \\ &\leq a^{-d} (C r_n^\alpha) a^d \|\theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq C \|\theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} r_n^\alpha = C C_0 \rho_n^{\alpha(1-\varepsilon)} \end{aligned}$$

La deuxième intégrale se majore de la manière suivante

$$\begin{aligned} &|a^{-d} \int_{a^{1-\varepsilon} < |x-b|} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) \varphi_0(x) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx| \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(B(b, 2r_0))} \int_{a^{-\varepsilon} < |y|} |\theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell(y)| dy \\ &\leq \|f\|_{L^\infty(B(b, 2r_0))} a^{p's\varepsilon} \end{aligned}$$

la dernière inégalité utilisant la décroissance rapide des fonctions $\theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell$.

Enfin la troisième intégrale se majore en utilisant le fait que toute distribution f de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ est la dérivée d'ordre t d'une fonction à croissance lente

$$f = D^t((1 + |x|^2)^{s'} g)$$

où $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Et donc

$$\begin{aligned} &a^{-d} \int_{a^{1-\varepsilon} < |x-b|} \Delta_{ae_\ell}^M f(x) (1 - \varphi_0(x)) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right) dx \\ &= \int_{r_0 < |x-x_0|} (\Delta_{ae_\ell}^M g)(x) D^t((1 - \varphi_0(x)) \theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell \left(\frac{x-b}{a} \right)) dx \end{aligned}$$

L'appartenance de la fonction g à $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ et la décroissance rapide des fonctions $\theta_{M, \tilde{\lambda}}^\ell$ permet alors de conclure si l'analyse multirésolution est suffisamment régulière. \square

Cette proposition implique des résultats d'irrégularité pour les séries trigonométriques.

4.6.2 Un critère d'irrégularité pour les séries trigonométriques

On se donne la fonction f définie par

$$(4.6.3) \quad f(x) = \sum_n a_n e^{i\lambda_n x}.$$

On suppose que (condition suffisante de convergence dans \mathcal{S}') :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|a_n|}{(1 + |\lambda_n|)^N} < \infty.$$

Définition 4.6.5 Soit (λ_n) suite dans \mathbb{R}^d . Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mu_n = \inf_{m \neq n} |\lambda_n - \lambda_m|.$$

La suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite séparée si

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} (\mu_n) > 0.$$

On fera dans la suite l'hypothèse que la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est séparée. De plus, on supposera que l'on peut réordonner les termes de la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de telle sorte que cette suite tende vers $+\infty$ et on fera l'hypothèse

$$(4.6.4) \quad \limsup_n \left(\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} \right) = C_\mu < +\infty.$$

On peut remarquer que cette hypothèse est vérifiée par exemple dans le cas suivant :

Lemme 4.6.6 Supposons que la suite $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de réel positifs vérifiant la condition suivante :

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| \rightarrow +\infty,$$

ainsi que le critère de non-lacunarité suivant

$$1 < \liminf_n \left(\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} \right) \leq \limsup_n \left(\frac{|\lambda_{n+1}|}{|\lambda_n|} \right) < +\infty.$$

Alors la suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et vérifie la propriété (4.6.4).

De plus pour tout $\varepsilon > 0$ et tout réel positif r à partir d'un certain rang

$$(4.6.5) \quad \text{Card}\{m, r \leq |\lambda_m| \leq qr\} \leq r^\varepsilon,$$

pour un certain réel $q > 1$.

Preuve. En effet, on a alors par l'inégalité triangulaire pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$(4.6.6) \quad \min(|\lambda_n| - |\lambda_{n-1}|, |\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|) \leq \mu_n \leq |\lambda_{n+1}| + |\lambda_n|.$$

Il s'ensuit donc immédiatement que

$$\mu_n \rightarrow +\infty.$$

De plus, soit C_1 une constante positive inférieure à $\limsup_n (|\lambda_{n+1}|/|\lambda_n|)$ et C_2 une constante positive supérieure à $\limsup_n (|\lambda_{n+1}|/|\lambda_n|)$. Par l'équation (4.6.6) on a

$$\begin{aligned} \frac{\mu_{n+1}}{\mu_n} &\leq \max\left(\frac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n|}, \frac{|\lambda_{n+1}| + |\lambda_n|}{|\lambda_n| - |\lambda_{n-1}|}\right) \\ &\leq \max\left(\frac{|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}| + 1}{|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}| - 1}, \frac{|\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n}| + 1}{1 - |\frac{\lambda_{n-1}}{\lambda_n}|}\right) \\ &\leq \max\left(\frac{C_2 + 1}{C_1 - 1}, \frac{C_2 - 1}{1 - \frac{1}{C_2}}\right) < +\infty \end{aligned}$$

Par ailleurs comme pour tout n à partir d'un certain rang

$$C_1^n \leq |\lambda_n| \leq C_2^n,$$

si r est un réel positif fixé et que l'on pose $n_0 = \lceil \log(r)/\log(C_2) \rceil$ on a bien

$$\text{Card}\{m, r \leq |\lambda_m| \leq qr\} \leq \frac{\log(r)}{\log(C_1)} - \frac{\log(r)}{\log(C_2)} \leq r^\varepsilon,$$

avec $q = C_2 > 1$. □

On a alors le critère d'irrégularité suivant :

Proposition 4.6.7 *Supposons que l'hypothèse (4.6.4) soit vérifiée. Soit f la série trigonométrique définie par l'équation (4.6.3) et α un réel positif. Si $f \in C_w^\alpha(x_0)$ alors pour toute constante positive C il existe une sous suite $(\mu_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ si } |\lambda_{\varphi(n)}| \geq \mu_{\varphi(n)}, \text{ alors } |a_{\varphi(n)}| \leq C_0 C \left(\frac{1}{\mu_{\varphi(n)}} \right)^\alpha.$$

Preuve. On applique le résultat de la proposition 4.6.4. Pour tout réel positif ε et toute constante positive C , il existe donc une suite strictement décroissante de réels positifs $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall 0 < a \leq \rho_n, \forall \Omega \in SO(d), \forall \lambda \text{ tel que } |\lambda| \geq \frac{1}{r_n}, |d(a, x_0, \lambda, \Omega)| \leq C \rho_n^{(1-\varepsilon)\alpha}.$$

Comme l'hypothèse (4.6.4) est vérifiée, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un certain entier $\varphi(n)$:

$$\frac{1}{\mu_{\varphi(n)}} \leq \rho_n \leq \frac{1}{\mu_{\varphi(n)-1}} \leq \frac{C_\mu}{\mu_{\varphi(n)}}.$$

On a alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\lambda_{\varphi(n)}| \geq \frac{1}{\mu_{\varphi(n)}}, |d\left(\frac{1}{\mu_{\varphi(n)}}, x_0, \lambda_{\varphi(n)}, Id\right)| \leq C \left(\frac{C_\mu^{1-\varepsilon}}{\mu_{\varphi(n)}^{1-\varepsilon}} \right)^\alpha \leq C C_\mu^{(1-\varepsilon)\alpha} \left(\frac{1}{\mu_{\varphi(n)}} \right).$$

On conclut en remarquant que

$$d\left(\frac{1}{\mu_{\varphi(n)}}, x_0, \lambda_{\varphi(n)}, Id\right) = a_{\varphi(n)}.$$

□

Cette proposition implique en fait un résultat d'irrégularité ponctuelle en tout point x_0 de \mathbb{R}^d :

Corollaire 4.6.8 *Soit α un réel positif. Supposons que pour un certain réel positif ε_0 et une certaine constante positive C_0 et tout $n \in \mathbb{N}$, on ait*

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \geq C_0 \frac{1}{\mu_n^{(1-\varepsilon_0)\alpha}}.$$

alors la fonction f est uniformément anti-Höldérienne d'exposant α sur \mathbb{R}^d .

4.6.3 Le cas particulier de certaines séries trigonométriques de type Weierstrass

On peut appliquer ce résultat à des séries trigonométriques de type Weierstrass. On obtient la proposition suivante :

Proposition 4.6.9 *On suppose que la suite $(|\lambda_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de réel positifs vérifiant la condition suivante :*

$$|\lambda_{n+1}| - |\lambda_n| \rightarrow +\infty,$$

ainsi que

$$1 < \liminf_n \left(\left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \right) \leq \limsup_n \left(\left| \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \right| \right) < +\infty.$$

Si pour un certain réel positif $\alpha \in (0, 1)$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{C_1}{\mu_n^\alpha} \leq |a_n| \leq \frac{C_2}{\mu_n^\alpha}$$

alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$:

$$\underline{h}_f(x_0) = \bar{h}_f(x_0) = \alpha.$$

Preuve. Par le corollaire 4.6.8, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \geq \frac{C_1}{\mu_n^\alpha}.$$

on a pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et tout $p \geq 1$:

$$\underline{h}_f(x_0) \leq \bar{h}_f(x_0) \leq \alpha.$$

De plus par le théorème A de [Pes77] pour le cas multidimensionnel comme la propriété 4.6.5 est vérifiée, on en déduit que $f \in C^{\alpha-\varepsilon}(\mathbb{R}^d)$ pour tout réel positif ε . Et donc :

$$\bar{h}_f(x_0) \geq \underline{h}_f(x_0) \geq \alpha.$$

□

4.7 Irrégularité ponctuelle de quelques fonctions classiques

On va revenir sur le modèle de séries d'ondelettes perturbées proposé dans le chapitre précédent en prenant cette fois ci des hypothèses un peu plus fortes qui vont permettre d'assurer le fait que la fonction considérée est tout à la fois uniformément Höldérienne et anti-Höldérienne d'exposant α . On remarquera, comme dans le chapitre précédent, que des fonctions classiques rentrent dans ce cadre.

4.7.1 Perturbation d'une série d'ondelette

Les notations sont celles de la section 2.5. On notera $(\tilde{\pi}(j, k))$ la suite définie pour tout j, k par

$$\tilde{\pi}(j, k) = \sup_{\lambda' \subset \lambda} (|\pi(j', k')|).$$

On fera alors l'hypothèse $(\mathcal{P}_{\text{ponct}})$ suivante

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\min_{k \in \mathbb{Z}} (\log_2 \tilde{\pi}(j, k))}{j} = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\max_{k \in \mathbb{Z}} (\log_2 \tilde{\pi}(j, k))}{j} = 0.$$

On a alors le résultat suivant : s

Proposition 4.7.1 *Supposons que l'hypothèse $(\mathcal{P}_{\text{ponct}})$ soit vérifiée. Pour tout réel positif ε , la série d'ondelettes f_{pert} est à la fois uniformément Höldérienne d'exposant $\alpha - \varepsilon$ et uniformément anti-Höldérienne d'exposant $\alpha + \varepsilon$.*

Preuve. En effet, pour tout réel positif ε , à partir d'un certain rang j_0 et tout $j \geq j_0$

$$\frac{\max_{k \in \mathbb{Z}} \log_2 (|\pi(j, k)|)}{j} \leq \frac{\max_{k \in \mathbb{Z}} \log_2 (\tilde{\pi}(j, k))}{j} \leq \varepsilon.$$

Soit pour tout $j \geq j_0$

$$\max_{k \in \mathbb{Z}^d} |\pi(i, j, k)| \leq 2^{j\varepsilon}.$$

Donc

$$f_{\text{pert}} \in \mathcal{C}^{\alpha - \varepsilon}(\mathbb{R}^d).$$

De plus pour tout réel positif ε , à partir d'un certain rang j_0 et tout $j \geq j_0$

$$\frac{\min_{k \in \mathbb{Z}} \log_2 (\tilde{\pi}(j, k))}{j} \geq -\varepsilon.$$

Soit pour tout $j \geq j_0$

$$\min_{k \in \mathbb{Z}} |\tilde{\pi}(j, k)| \geq 2^{-j\varepsilon}.$$

Donc par les critères ondelettes démontrés en section 4.7, la fonction f est bien uniformément anti-Höldérienne d'exposant $\alpha + \varepsilon$. \square

On va reprendre les exemples traités dans le chapitre 1, section 2.5.

4.7.2 D'autres fonctions de type Weierstrass

On s'intéresse ici au caractère uniformément anti-Höldérien de la fonction

$$(4.7.1) \quad f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} 2^{-\ell H} q(2^\ell x),$$

où q est une fonction 1-périodique, déjà étudiée en section 2.5.1.

On considère le cas où q est une fonction de $\mathcal{C}^{\varepsilon_0}(\mathbb{R})$ avec $\varepsilon_0 > H$. De nombreux auteurs ont déjà étudié cette fonction dans le cas où q est pseudo-périodique et ont montré le caractère

uniformément anti-Höldérien de la fonction f dans les 'bons cas'. Plus précisément, soit f la fonction f par,

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} b^{-\ell H} q(b^\ell x),$$

où $b > 1$ où q est une fonction pseudo périodique, de classe \mathcal{C}^1 vérifiant la condition suivante

$$\sum_a |a|^\alpha \tilde{q}(a) < \infty$$

portant sur les coefficients de Fourier de la fonction q . J.L.Kaplan, J.Mallet-Paret, J.A.Yorke montrent alors dans [KMY84] que la fonction f est soit \mathcal{C}^1 soit Höldérienne et uniformément anti-Höldérienne d'exposant H .

Dans [BouschHeurt99] et [BouschHeurt00], T.Bousch et Y.Heurteaux s'affranchissent de toute condition sur les coefficients de Fourier de la fonction q tout en arrivant à la même conclusion pour q de classe \mathcal{C}^β ($\beta \leq 1$, le cas $\beta = 1$ correspondant à une fonction q lipchitzienne). Ils montrent de plus que pour b suffisamment grand, on est dans le cas où la fonction f est Höldérienne et uniformément anti-Höldérienne d'exposant H . Dans [Heurt03] et [Heurt05], Y.Heurteaux étend ce type de résultats au cas d'une fonction de type Weierstrass avec des phases aléatoires qui sont des variables uniformément distribuées sur $[0, 1]$ ([Heurt03]), et au cas où q est de classe $\mathcal{C}^{1+\varepsilon}$ ([Heurt05] le cas $\varepsilon = 0$ correspondant à une fonction q dans la classe de Zygmund.

Ici l'objectif est juste de proposer une approche alternative, via les ondelettes, pour retrouver certains de ces résultats dans le cas où q est périodique. On fait l'hypothèse supplémentaire, faite par C.Tricot dans [Tric97] :

$$(4.7.2) \quad \forall x \in \mathbb{R}, q(x) + q(x + \frac{1}{2}) = C_0,$$

pour une certaine constante C_0 . On remarque que par périodicité de q , la fonction q s'écrit sous la forme

$$q(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Psi(x - k)$$

avec $\Psi = q|_{[0,1]}$. On remarque que la famille $(\Psi(2^j \cdot -k))_{j,k}$ est une famille de molécules d'analyse et de synthèse au sens de [FraJaw85] et que donc les critères ondelettes restent valables si on considère cette famille. De plus, la famille $(q(2^j \cdot))_j$ est la famille de molécules d'analyse périodiques correspondantes. Par les résultats du chapitre 1, on sait déjà que

$$f \in \mathcal{C}^H(\mathbb{R}).$$

Il reste donc à montrer que :

Proposition 4.7.2 *La fonction f est uniformément anti-Höldérienne sur \mathbb{R} d'exposant H .*

Preuve. La démonstration est basée sur le fait que $(q(2^j \cdot))_j$ est une famille de molécules d'analyse et sur le résultat suivant démontré par C.Tricot (proposition 6.2) dans [Tric97].

Si l'hypothèse (4.7.2) est vérifiée, alors pour tous entiers j, n

$$\int_0^1 q(2^j x) q(2^n x) dx = \delta_{n,j} \|q\|_{L^2(0,1)}.$$

De cela on déduit que

$$\int_0^1 f(x)q(2^j x)dx = \|q\|_{L^2(0,1)}2^{-jH}.$$

Les critères ondelettes permettent alors de conclure. \square

4.7.3 Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes

On fait dans les deux sections suivantes l'hypothèse

$$\forall j \geq 0, \forall k \notin \{0, \dots, 2^j - 1\}, \pi(j, k) = 0.$$

On considère maintenant le cas d'une perturbation gaussienne. On va distinguer, comme dans le chapitre précédent, deux cas : celui où les coefficients d'ondelettes sont indépendants et un cas un petit peu plus général où ils sont faiblement corrélés. On commence par traiter le cas où la suite $(\pi(j, k))_{j,k}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes indépendantes. Le lemme suivant démontré dans [AJL04] (démonstration du théorème 5.1) permet de montrer que :

Lemme 4.7.3 *Soit X un processus gaussien dont les coefficients d'ondelettes sont indépendants et vérifient de plus*

$$\forall j, k, C_1 2^{-2jH} \leq \mathbb{E}(|c_{j,k}|^2) \leq C_2 2^{-2jH},$$

les constantes C_1, C_2 étant deux constantes positives et H un réel compris entre 0 et 1. Alors p.s à partir d'un certain rang

$$d_{j,k} \geq \frac{2^{-jH}}{j^{4H}}.$$

Comme cela a été dit dans le chapitre précédent, le cas du Mouvement Brownien Fractionnaire peut se ramener à ces hypothèses. Ceci permet de retrouver le résultat déjà connu suivant la loi du log itéré de Chung pour le Mouvement Brownien Fractionnaire démontrée par Monrad and Rootzén ([MR95]) :

Proposition 4.7.4 *Il existe une constante aléatoire C presque sûrement positive telle que presque sûrement*

$$\forall x \in (0, 1), \sup_{y \in B(x,r)} |B_H(x) - B_H(y)| \geq C \frac{r^H}{\sqrt{\log(|\log(r)|)}}.$$

En particulier pour tout $\varepsilon > 0$ les trajectoires du Mouvement Brownien Fractionnaire d'exposant de Hurst H sont ainsi p.s. uniformément anti-Höldériennes d'exposant $H - \varepsilon$ sur tout compact.

On considère maintenant le cas plus général où les coefficients d'ondelettes du processus étudié sont faiblement corrélés.

4.7.4 Le cas où la suite $\pi(j, k)$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélés

On suppose que la suite des coefficients d'ondelettes $c_{j,k}$ est une suite de variables aléatoires gaussiennes faiblement corrélées. Plus précisément on suppose que la propriété (2.5.3) est vérifiée. On va alors en déduire la loi du log itéré de Chung pour la série aléatoire f_{pert} .

Lemme 4.7.5 *Presque sûrement à partir d'un certain rang*

$$d_{j,k} \geq \frac{2^{-j\alpha}}{j}$$

et donc la série aléatoire f_{pert} est uniformément anti-Höldérienne d'exposant α .

Preuve. On va utiliser le lemme II.9 de [CKR93], que l'on peut reformuler de la manière suivante à l'aide du lemme de Slépian (voir par exemple [Kah85], section 15.2).

Lemme 4.7.6 *Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires gaussiennes centrées telles que*

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= 1, \\ E(X_i X_j) &\leq \rho^2 \text{ pour } i \neq j. \end{aligned}$$

Alors, pour tout M

$$\mathbb{P}\left(\sup_{i=1, \dots, n} |X_i| \leq M\right) \leq \mathbb{P}(|X_1| \leq M)^{\frac{n}{1+(n-1)\rho^2}}.$$

On suit ensuite la même démarche que celle de P.Abry, S.Jaffard et B.Lashermes dans [AJL04]

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(d_{j,k} \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}} \mathbb{P}(|c_{\lambda'}| \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) \\ &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} \leq c_{\lambda'} \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha}) \\ &= \prod_{\lambda' \subset \lambda_{j,k}} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f) \leq c_{\lambda'}(X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f)) \\ &\leq \prod_{\lambda_{j',k'} \subset \lambda_{j,k}} \mathbb{P}(-2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f) \leq c_{\lambda'}(X) \leq 2^{-j\alpha} j^{-4\alpha} - c_{\lambda'}(f)) \end{aligned}$$

avec $j' = j + \lceil \frac{2 \log(j)}{\log(2)} \rceil + 1$.

□

On retrouve ainsi, dans le cas où les coefficients d'ondelettes sont faiblement corrélés, la loi du log itéré de Chung. D'après les résultats du chapitre précédent cela s'appliquera aussi aux processus fortement localement non déterministes à accroissements stationnaires. On rappelle que dans le cadre plus général des champs fortement localement non déterministes Y.Xiao a démontré dans [Xiao97], le résultat suivant déjà cité dans le chapitre précédent

Proposition 4.7.7 *Soit $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ un champ gaussien fortement localement ϕ -non déterministe sur $T = [-a, a]^d$ tel que la condition (2.5.7) soit vérifiée alors p.s.,*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\phi^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{|\log(r)|^{1/d}} \right)} \inf_{x \in T} \sup_{y, |x-y| \leq r} |X(x) - X(y)| \right) > 0.$$

Après avoir étudié les différentes notions de régularité ponctuelle faible et leur lien avec les ondelettes, on va s'intéresser au lien entre analyse multifractale et régularité faible. C'est l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 5

Au delà des fonctions fortement mono-Höldériennes

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec S.Nicolay (Université de Liège).

5.1 Introduction

L'objet principal de ce chapitre est de répondre à la question somme toute assez naturelle suivante : peut-on dépasser le cadre usuel des fonctions à la fois uniformément Höldérienne et uniformément anti-Höldérienne ? Plus précisément, peut-on donner des exemples explicites de fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder supérieur varie suivant le point considéré ? Quelles propriétés vérifient alors l'exposant de Hölder supérieur d'une fonction ?

Dans la section 5.2, on s'intéressera donc à la question de l'exposant de Hölder supérieur prescrit : quelles conditions faut-il imposer à une fonction H donnée pour qu'elle soit l'exposant de Hölder supérieur d'une fonction ? On commencera par montrer sur un exemple de fonction de type Weierstrass qu'il est assez simple de définir une fonction continue à exposant de Hölder prescrit si celui-ci vérifie de bonnes propriétés. On s'attachera ensuite à la description de l'ensemble des fonctions qui sont l'exposant de Hölder à la fois inférieur et supérieur d'une fonction donnée. Enfin, on s'intéressera au cas plus général où exposant de Hölder inférieur et supérieur ne coïncident pas forcément et dans ce cas on donnera une condition nécessaire et une condition suffisante proches l'une de l'autre pour qu'un couple de fonctions donné soit respectivement l'exposant de Hölder inférieur et supérieur d'une fonction continue.

Par ailleurs, on rappelle que dans le cas de la régularité ponctuelle usuelle, les fonctions multifractales fournissent des modèles de fonctions pour lesquelles l'exposant de Hölder varie, parfois très brutalement, en fonction du point considéré. Ainsi, de manière assez logique, on est naturellement porté à vouloir définir des fonctions multifractales pour la notion de régularité ponctuelle faible. On aura aussi besoin d'outils convenables pour décrire le comportement multifractal de telles fonctions. Ceci amène directement à se poser le problème de ce qu'on appelle le formalisme multifractal lié à la régularité faible. En effet on rappelle, qu'en pratique, il n'est pas possible d'estimer numériquement l'exposant de régularité ponctuelle d'une fonction en un point donné. L'information pertinente est alors la "taille" des ensembles iso-Höldériens. Cette notion de "taille" va être définie rigoureusement à l'aide de la dimension de Hausdorff. La fonction qui associe la dimension de l'ensemble des points qui ont le même exposant de Hölder est appelée le spectre de singularités. Le but de tout formalisme

multifractal est de donner une méthode permettant d'estimer ce spectre de singularités à partir de quantités estimables numériquement à partir du signal. Le même problème se pose lorsqu'on s'intéresse à la notion de régularité ponctuelle faible. En section 5.3, on rappelle les résultats connus sur le formalisme multifractal pour la régularité faible qui ont été établis dans [AJVW08].

On se pose ensuite, en section 5.4, la question de la comparaison des deux notions de fonctions multifractales : celle liée à la régularité forte et celle liée à la régularité faible. On va montrer que ces deux notions sont clairement déconnectées. En effet, on va donner un exemple explicite de série de Davenport multifractale pour la régularité ponctuelle usuelle, monofractal pour la régularité faible.

La section 5.5 est enfin consacré à l'étude de la validité du formalisme multifractal : en utilisant des mesures, on va définir une série d'ondelettes satisfaisant au formalisme multifractal.

5.2 Caractérisation de l'ensemble des exposants de Hölder supérieur des fonctions continues

Cette section est donc consacrée à la question de l'exposant de Hölder prescrit. On commence par donner, en section 5.2.1, un simple exemple de fonction de type Weierstrass dont l'exposant de Hölder inférieur et supérieur est égal à une fonction H donnée. On s'intéresse ensuite à la caractérisation de l'exposant de Hölder supérieur tout d'abord, en section 5.2.2, dans le cas particulier où il coïncide en tout point avec l'exposant de Hölder inférieur, puis dans le cas général en section 5.2.3.

5.2.1 Une fonction de type Weierstrass à exposant de Hölder prescrit

Comme dans [DLM98] on considère la fonction de type Weierstrass suivante :

$$(5.2.1) \quad W(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-jH(t)} \sin(2\pi\lambda^j t),$$

et on étudie sa régularité ponctuelle :

Proposition 5.2.1 *Soit H une fonction β -Höldérienne de $[0, 1]$ dans $[a, b] \subset (0, 1]$ vérifiant $\sup_{t \in [0, 1]} |H(t)| < \beta$. On considère W la fonction de type Weierstrass définie par (5.2.1) où λ est un entier plus grand que 1. Alors*

$$\forall t \in [0, 1], W \in \mathcal{C}^{H(t)}(t) \cap I^{H(t)}(t).$$

La démonstration de cette proposition est basée sur les deux lemmes suivants analogues au lemme 14 et à la proposition 15 de [JafNico08] démontrée par S.Jaffard et S.Nicolay :

Lemme 5.2.2 *Soit $\lambda > 1$, $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées et Lipschitziennes sur \mathbb{R} vérifiant*

$$\exists C > 0 \|f_j\|_\infty + \|f'_j\|_\infty \leq C.$$

Soit $f(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-jH(t)} f_j(\lambda^j t)$. Alors

$$\forall t \in [0, 1], f \in \mathcal{C}^{H(t)}(t).$$

Preuve. Soit $t \in [0, 1]$. Les hypothèses faites sur les fonctions f_j impliquent que pour tout j $|f_j(t) - f_j(s)|$ est borné par $C|s - t|$ ou C . On pose $j_0(t) = \lceil -\log(|s - t|)/(H(t) \log(\lambda)) \rceil$. Alors

$$\begin{aligned} |f(t) - f(s)| &\leq C \sum_{j=0}^{j_0-1} |\lambda^j t - \lambda^j s| \lambda^{-jH(t)} + C \sum_{j \geq j_0} \lambda^{-jH(t)} + C \sum_{j=0}^{+\infty} |\lambda^{-jH(t)} - \lambda^{-jH(s)}| \\ &\leq C|t - s| C \lambda^{j_0(1-H(t))} + C \lambda^{-j_0 H(t)} + C |\log(\lambda)| |t - s|^\beta \sum_{j=0}^{+\infty} j \lambda^{-ja} \\ &\leq C|t - s|^{H(t)} \end{aligned}$$

ceci découlant du théorème de la moyenne, du caractère β -Hölderien de H et de l'hypothèse $H([0, 1]) \subset (0, 1]$. \square

Lemme 5.2.3 Soit λ un entier supérieur à 2. Soit $(f_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions C -Lipschitziennes et 1-periodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $\ell \in \{-\lambda - 1, \dots, \lambda - 1\}$ et un entier J tel que

$$D = \inf_{j \geq J} |f_j(\frac{\ell}{\lambda}) - f_j(0)| > 0$$

On considère la fonction de type Weierstrass $f(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-jH(t)} f_j(\lambda^j t)$. Si $C\ell/(\lambda(\lambda - 1)) \leq D$ alors

$$\forall t \in [0, 1], f \in I^{H(t)}(t).$$

Preuve. Comme

$$f(t) - f(s) = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-jH(t)} (f_j(\lambda^j t) - f_j(\lambda^j s)) + \sum_{j=0}^{+\infty} (\lambda^{-jH(t)} - \lambda^{-jH(s)}) f_j(s),$$

il découle de la proposition 15 de [JafNico08] que pour une certaine constante positive C_0

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda^{-jH(t)} (f_j(\lambda^j t) - f_j(\lambda^j s)) \right| \geq C_0 |t - s|^{H(t)}$$

Par ailleurs

$$\left| \sum_{j=0}^{+\infty} (\lambda^{-jH(t)} - \lambda^{-jH(s)}) f_j(s) \right| \leq |t - s|^\beta$$

avec $\beta > H(t)$. On en déduit alors le résultat voulu. \square

On applique maintenant le lemme 5.2.2 et le lemme 5.2.3 à $f_j = \sin(2\pi \cdot)$, $C = 1$, $\ell = [\lambda/4]$, $D = |\sin(\ell/\lambda)|$. La proposition 5.2.1 en découle alors directement.

5.2.2 Le cas des fonctions pour lesquelles exposant de Hölder inférieur et supérieur coïncident en tout point

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant analogue au théorème 1 de [DLM98] :

Théorème 5.2.4 *Soit f une fonction continue nulle part dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} avec en tout point un exposant de Hölder inférieur et supérieur identique en tout point. Il existe alors une suite de fonctions continues $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que*

$$\forall t \in [0, 1], \underline{h}(t) = \bar{h}(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} (H_j(t)).$$

Réciproquement, soit H une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $H(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} H_j(t)$, où les H_j sont des fonctions continues. Il existe alors une fonction continue f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} telle que

$$\forall t \in [0, 1], \underline{h}(t) = \bar{h}(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} (H_j(t)).$$

Remarque 5.2.5 *On rappelle que dans [DLM98], K.Daoudi, J.Lévy-Véhel et Y.Meyer donnent une caractérisation des fonctions qui sont les exposants \underline{H} de Hölder d'une fonction continue f . Pour cela une des méthodes proposées par K.Daoudi, J.Lévy-Véhel et Y.Meyer consiste à écrire la fonction f dans la base de Schauder et à utiliser le lien entre régularité ponctuelle d'une fonction et coefficients dans la base de Schauder. Ici, la démarche est similaire puisqu'on se basera sur les critères ondelettes d'irrégularité ponctuelle. On a néanmoins pris le parti de détailler les démonstrations lorsque les arguments utilisés dans les preuves sont différents de ceux de [DLM98].*

La première partie du théorème 5.2.4 est directe. En effet si on pose pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$H_j(t) = \frac{\log(\omega_{f,t}(2^{-j}) + 2^{-j^2})}{-j \log(2)}$$

avec $\omega_{f,t}(2^{-j}) = \sup_{|h| \leq 2^{-j}} (|f(x+h) - f(x)|)$.

Comme tout $t \in [0, 1]$

$$\underline{h}(t) = \bar{h}(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left(\frac{\log(\omega_{f,t}(2^{-j}))}{-j \log(2)} \right)$$

la suite $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions voulues. On montre maintenant la réciproque. On a alors besoin de la version suivante du critère ondelette de régularité ponctuelle (voir [DLM98, Jaf04]) :

Proposition 5.2.6 *Soit $\alpha > 0$. On suppose qu'il existe une constante positive C telle que pour tout $j \in \mathbb{N}$*

$$(5.2.2) \quad \sup_k |c_{j,k}| \leq C 2^{-\frac{j}{\log(j)}}.$$

et

$$d_j(t) \leq C 2^{-j\alpha}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $f \in \mathcal{C}^{\alpha-\varepsilon}(t)$.

Remarque 5.2.7 Cette proposition est la reformulation de la proposition 4 de [DLM98] en termes d'ondelettes et de coefficients dominants. On souligne néanmoins que dans [DLM98], la fonction f est décomposée dans la base de Schauder $(\Lambda_{j,k})$. Comme cette base est une base de fonctions affines par morceaux, cela permet d'en déduire (lemme 1 de [DLM98]) que pour tout j_1 la somme partielle

$$\sum_{j \leq j_1} \sum_k c_{j,k} \Lambda_{j,k}$$

est l'approximation affine de la fonction f en les réels dyadiques. On en déduit ainsi une majoration de toute somme du type

$$\sum_{j \geq j_1} \sum_k c_{j,k} \Lambda_{j,k}.$$

Dans le cas général d'une base d'ondelettes, on ne peut pas utiliser cet argument. On a été conduit à faire l'hypothèse (5.2.2) sur les coefficients d'ondelettes, ce qui permet d'obtenir le même type de résultats par des arguments différents. On a donc choisi de détailler la démonstration de la proposition [DLM98].

Preuve. Comme $\sup_k |c_{j,k}| \leq C 2^{-\frac{j}{\log(j)}}$ la série d'ondelettes converge uniformément sur tout compact. On note

$$f_{-1}(x) = \sum_k C_k \varphi(x - k), \quad f_j(x) = \sum_k c_{j,k} \psi_{j,k}(x) \quad \forall j \geq 0$$

On remarque comme dans [Jaf04], si $|\beta| \leq [\alpha] \sum_j \partial^\beta f_j$ converge absolument. On pose alors pour tout $j \geq -1$

$$P_{j,t}(x) = \sum_{\beta \leq [\alpha]} \frac{(x-t)^\beta}{\beta!} \partial^\beta f_j(t).$$

Soit j_0 défini par

$$2^{-j_0-1} \leq |x-t| \leq 2^{-j_0},$$

et j_1 tel que $2^{-\frac{j_1}{\log(j_1)}} \leq 2^{-\alpha j_0}$. Dans [Jaf04], il est montré que

$$\sum_{j \leq j_0} |f_j(x) - P_{j,t}(x)| \leq C j_0 |x-t|^\alpha$$

et que

$$\sum_{j \geq j_0} |P_{j,t}(x)| \leq C |x-t|^\alpha$$

Par ailleurs

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} |f_j(x)| \leq C j_1 |x-t|^\alpha$$

Comme pour tout ε et j_0 suffisamment grand, on a

$$j_1 \leq C(\varepsilon) 2^{\varepsilon j_0}$$

on obtient

$$\sum_{j=j_0}^{j_1} |f_j(x)| \leq C(\varepsilon) |x - t|^{\alpha - \varepsilon}$$

De plus

$$\sum_{j \geq j_1} |f_j(x)| \leq C \sum_{j \geq j_1} 2^{-\frac{j}{\log(j)}} \leq C \log^2(j_1) 2^{-\frac{j_1}{\log(j_1)}} \leq |x - t|^{\alpha - \varepsilon}$$

le résultat voulu s'ensuit. \square

On utilise ici une version légèrement modifiée du lemme 2 de [DLM98] :

Proposition 5.2.8 *Soit H une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $H(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} H_j(t)$, où les H_j sont des fonctions continues. Il existe alors une suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de polynômes telle que*

$$(5.2.3) \quad \begin{cases} \forall t \in [0, 1], H(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} P_j(t), \\ \forall j \in \mathbb{N}, \|P_j'\|_\infty \leq j. \end{cases}$$

On définit maintenant la série d'ondelettes voulue :

Proposition 5.2.9 *Soit H une fonction de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ telle que $H(t) = \lim_{j \rightarrow +\infty} H_j(t)$, où les H_j sont des fonctions continues. Soit $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les propriétés (5.2.3). Pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \{0, \dots, 2^j - 1\}$, on pose*

$$H_{j,k} = \max\left(\frac{1}{\log(j)}, P_j\left(\frac{k}{2^j}\right)\right).$$

On définit alors la série d'ondelettes F de la manière suivante

$$(5.2.4) \quad F(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j H_{j,k}} \psi_{j,k}(x).$$

Ainsi pour tout $t \in [0, 1]$, $\underline{h}(t) = \overline{h}(t) = H(t)$.

Remarque 5.2.10 *En particulier si H est une fonction continue la série d'ondelettes définie par*

$$\sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-j H_{j,k}} \psi_{j,k}(x)$$

où $H_{j,k} = \max(1/\log(j), H(k/2^j))$, a la fonction H comme exposant de Hölder supérieur et inférieur.

Preuve. Si $\lambda' \subset 3\lambda_j(t)$, alors

$$\left| \frac{k'}{2^{j'}} - t \right| \leq C_1 2^{-j}.$$

Comme la suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie les propriétés (5.2.3), pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier j_0 tel que pour tout $j \geq j_0$ et $\lambda' \subset 3.\lambda_j(t)$

$$|H_{j',k'} - H(t)| \leq |P_{j'}'(t) - P_{j'}'\left(\frac{k'}{2^{j'}}\right)| + |H(t) - P_{j'}'(t)| \leq j 2^{-j} + |H(t) - P_{j'}'(t)| \leq \varepsilon$$

Ainsi pour tout $j \geq j_0$

$$\max(2^{-\frac{j'}{\log(j')}} , 2^{-j'\varepsilon} 2^{-j'H(t)}) \leq |c'_\lambda| \leq \max(2^{-\frac{j'}{\log(j')}} , 2^{j'\varepsilon} 2^{-j'H(t)}).$$

On en déduit que

$$\forall t \in [0, 1] \lim_j \left(\frac{\log(d_j(t))}{\log(2)} \right) = H(t).$$

Alors

$$\forall t \in [0, 1], \underline{h}(t) = \bar{h}(t) = H(t).$$

□

On considère maintenant le cas plus général où exposant de Hölder inférieur et supérieur peuvent différer.

5.2.3 Le cas des fonctions dont l'exposant de Hölder inférieur et supérieur ne coïncident pas forcément en tout point

Le but de cette section est de montrer maintenant le résultat suivant :

Théorème 5.2.11 *Soit f une fonction continue nulle part dérivable de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} . Il existe alors une suite de fonctions continues $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ telle que*

$$\forall t \in [0, 1], \underline{h}(t) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} (H_j(t)), \quad \bar{h}(t) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} (H_j(t)).$$

Réciproquement soit (\underline{H}, \bar{H}) un couple de fonctions de $[0, 1]$ dans $[a, b] \subset (0, 1)$ telle que

$$\underline{H}(t) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} H_j(t), \quad \bar{H}(t) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} H_j(t),$$

où les H_j sont des fonctions continues. Il existe alors une fonction uniformément Hölderienne f de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} tel que

$$\forall t \in [0, 1], \underline{h}(t) = \underline{H}(t) \leq \bar{H}(t) = \bar{h}(t).$$

Remarque 5.2.12 *La seconde assertion du théorème 5.2.11 est plus faible que celui du théorème 5.2.4. Dans le cas où l'exposant de Hölder inférieur et supérieur ne coïncident pas en tout point, on a besoin d'hypothèses plus fortes sur les fonctions \underline{H} et \bar{H} , à savoir que ces deux fonctions soient à valeurs dans $[a, b] \subset (0, 1)$ (et non plus simplement à valeurs dans $(0, 1)$, pour qu'il existe une fonction f d'exposants inférieur et supérieur respectifs \underline{H} et \bar{H} en tout point.*

Remarque 5.2.13 *Si \underline{H} et \bar{H} sont deux fonctions toutes deux continues de $[0, 1]$ dans $[a, b] \subset (0, 1)$, on peut définir une suite de fonctions $(H_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante*

$$\forall j \in \mathbb{N}, H_{2j} = \underline{H}, \quad H_{2j+1} = \bar{H}.$$

Le théorème 5.2.11 permet alors de montrer l'existence d'une fonction f d'exposant de Hölder inférieurs et supérieurs respectifs \underline{H} et \bar{H} en tout point.

La preuve de l'implication directe du théorème 5.2.11 est exactement similaire à celle du théorème 5.2.4. Pour montrer la réciproque on va avoir besoin d'un lemme :

Lemme 5.2.14 *Soit $(\underline{H}, \overline{H})$ un couple de fonctions de $[0, 1]$ dans \mathbb{R} tel que*

$$\underline{H}(t) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} H_j(t), \overline{H}(t) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} H_j(t)$$

où les H_j sont des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$. Il existe alors une suite de polynômes $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de $[0, 1]$ dans $[a', b'] \subset (0, 1)$ telle que les propriétés suivantes soient simultanément vérifiées :

$$(5.2.5) \quad \forall t \in [0, 1], \underline{H}(t) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} P_j(t), \overline{H}(t) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} P_j(t),$$

$$(5.2.6) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \|P_j'\|_\infty \leq j,$$

$$(5.2.7) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, jP_j(t) \geq \sup(j_n(\overline{H}(t) - \varepsilon), j + j_{n+1}(\overline{H}(t) - \varepsilon - 1)).$$

Preuve. On peut remarquer que pour tout j on peut remplacer H_j par $\min(\max(a, H_j), \min(H_j, b))$ sans changer les limites inférieures et supérieures de la suite. On peut alors supposer que toutes les H_j sont des fonctions de $[0, 1]$ dans $[a, b]$. Le lemme 2 de [DLM98] implique alors qu'il existe une suite de polynômes $(Q_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ telle que les conditions (5.2.5) et (5.2.6) soient simultanément vérifiées. Par ailleurs, on remarque que dans la construction qui est faite dans [DLM98] on peut supposer que

$$\|Q_\ell - H_\ell\|_\infty \leq \frac{1}{j}.$$

Ainsi pour ℓ suffisamment grand Q_ℓ est à valeurs dans $[a', b'] \subset (0, 1)$. On pose $\beta_1 = [b'/a'] + 1$, $\beta_2 = [(1 - a')/(1 - b')] + 1$ et $\beta = \beta_1\beta_2$. On définit la suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \forall \ell \in \mathbb{N}, \forall \beta^\ell + 1 \leq j \leq \beta^{\ell+1}, \\ P_j = Q_\ell. \end{aligned}$$

On montre maintenant que la suite $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie les propriétés recherchées. En effet soit $\varepsilon > 0$, $t \in [0, 1]$ et $(\ell_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que

$$Q_{\ell_n(t)} \geq \overline{H}(t) - \varepsilon.$$

Soit $j_n(t) = \beta^{\ell_n(t)}\beta_2$. Alors pour tout entier j on distingue trois cas.

– S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $j_n \leq \ell \leq \beta_1 j_n$ alors $P_j = Q_{\ell_n} \geq \overline{H} - \varepsilon$. Cela implique que

$$jP_j \geq j(\overline{H} - \varepsilon) \geq j_n(\overline{H} - \varepsilon),$$

et

$$j(1 - P_j) \leq j(1 - \overline{H} + \varepsilon) \leq j\beta_1(1 - \overline{H} + \varepsilon)j_{n+1}(1 - \overline{H} + \varepsilon).$$

– S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\beta_1 j_n \leq j \leq j_{n+1}/\beta_2$, alors $P_j = Q_\ell$ avec $\ell_n + 1 \leq \ell \leq \ell_{n+1} - 1$. Ainsi

$$jP_j \geq ja' \geq \frac{j}{\beta_1} \overline{H} \geq j_n \overline{H},$$

et

$$j(1 - P_j) \leq j(1 - a') \leq j\beta_2(1 - \overline{H}) \leq j_{n+1}(1 - \overline{H}).$$

– S’il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $j_{n+1}/\beta_2 \leq j \leq j_{n+1}$, alors $P_j = Q_{j_{n+1}} \geq \bar{H} - \varepsilon$. D’où

$$jP_j \geq j(\bar{H} - \varepsilon) \geq j_n(\bar{H} - \varepsilon),$$

et

$$j(1 - P_j) \leq j(1 - \bar{H} + \varepsilon) \leq j_{n+1}(1 - \bar{H} + \varepsilon).$$

Ainsi dans tous les cas on montre la propriété désirée. \square

On montre maintenant la proposition suivante

Proposition 5.2.15 *Soit (\underline{H}, \bar{H}) un couple de fonctions de $[0, 1]$ dans $[a, b] \subset (0, 1)$ tel que*

$$\underline{H}(t) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} H_j(t), \quad \bar{H}(t) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} H_j(t).$$

où les H_j sont des fonctions continues. Soit $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les propriétés (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7). On considère alors F la série d’ondelettes définie par

$$F(x) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^{-jP_j(\frac{k}{2^j})} \psi_{j,k}(x).$$

Alors pour tout $t \in [0, 1]$

$$\underline{h}(t) = \underline{H}(t) < \bar{h}(t) = \bar{H}(t).$$

Preuve. On remarque que l’hypothèse $P_j([0, 1]) \subset [a', b'] \subset (0, 1)$ implique que F est uniformément Höldérienne. Comme pour tout j , P_j vérifie les propriétés (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) on remarque que pour tout $\lambda \in 3\lambda_j(t)$

$$2^{-jP_j(t)} 2^{-j^2 2^{-j}} \leq |c_\lambda| \leq 2^{-jP_j(t)} 2^{j^2 2^{-j}}$$

Cela implique directement que pour tout $\varepsilon > 0$ et j_0 suffisamment grand tel que

$$\forall j \geq j_0, \quad 2^{-jP_j(t)} 2^{-\varepsilon j} \leq d_j(t) \leq 2^{-jP_j(t)} 2^{\varepsilon j}.$$

Par définition de \underline{H}

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log(d_j(t))}{-\log(2)} = \liminf_{j \rightarrow +\infty} (P_j(t)) = \underline{H}(t).$$

D’où

$$\underline{h}(t) = \underline{H}(t).$$

Un raisonnement similaire permet de montrer que

$$\bar{h}(t) \leq \bar{H}(t).$$

On utilise les propriétés (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7). Il existe une suite strictement croissante d’entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les propriétés (5.2.5), (5.2.6), (5.2.7) soient simultanément vérifiées. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1}\}, \quad d_j(t) \leq 2^{-jP_j(t)} 2^{\varepsilon j} \leq \inf(2^{-j_n(\bar{H}(t)-\varepsilon)}, 2^{-j_{n+1}(\bar{H}(t)-\varepsilon-1)-j}).$$

Le critère ondelettes permet d’en déduire que

$$\bar{h}(t) \geq \bar{H}(t).$$

\square

On va s’intéresser à un autre aspect du problème et se poser la question de la description non plus de l’exposant de Hölder supérieur mais des ensembles iso-Höldériens eux mêmes. Le bon cadre est alors celui de l’analyse multifractale.

5.3 Rappels sur le formalisme multifractal faible

Le but de l'analyse multifractale est d'étudier des fonctions "irrégulièrement irrégulières" c'est à dire des fonction pour lesquelles l'exposant de Hölder exponent peut varier brutalement d'un point à un autre. D'un point de vue pratique, le calcul numérique de l'exposant de Hölder ponctuel d'un signal est complètement instable et ainsi n'a pas réellement de sens en particulier pour les signaux dont l'exposant de Hölder ponctuel peut prendre des valeurs réellement différentes. Si on laisse donc tomber cette approche utopique, on va plutot chercher à se donner des informations globales concernant la régularité ponctuelle : quelles sont les valeurs prises par l'exposant de Hölder ? Quelle est la "taille" des points E_H où l'exposant de Hölder prend une valeur donnée H ? En tout premier lieu il s'agit donc de définir précisément cette notion de taille. Comme les ensembles considérés peuvent être soit dense soit de mesure nulle, on ne peut pas entendre par taille la mesure de Lebesgue. La notion de dimension fractale se révèle être beaucoup mieux adaptée au problème considéré. Une fois qu'on s'est donné une notion de dimension, reste alors à déterminer le spectre de singularités de la fonction f , i.e. la dimension des ensembles E_H . C'est l'objectif du formalisme multifractal. Bien évidemment tout ceci va s'appliquer à l'exposant de Hölder supérieur.

5.3.1 Une notion de dimension

En analyse multifractale la notion de dimension qui est principalement utilisée est celle de dimension de Hausdorff. On commence par un petit rappel à ce sujet.

La dimension de Hausdorff est définie à partir de la mesure de Hausdorff (voir [Falc90] pour plus de détails). Le recouvrement optimal d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ par des ensembles de diamètre inférieurs à ε peut être estimé de la manière suivante

$$\mathcal{H}_\varepsilon^\delta(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |E_i|^\delta, E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, |E_i| \leq \varepsilon \right\}.$$

La mesure $\mathcal{H}_\varepsilon^\delta$ est de manière évidente une mesure extérieure. La mesure de Hausdorff va être définie à partir de la limite \mathcal{H}^δ lorsque ε tend vers 0.

Définition 5.3.1 *La mesure extérieure \mathcal{H}^δ définie de la manière suivante*

$$\mathcal{H}^\delta(E) = \sup_{\varepsilon > 0} \mathcal{H}_\varepsilon^\delta(E)$$

est une mesure extérieure métrique. Sa restriction à la σ -algèbre des \mathcal{H}^δ ensembles mesurables définit la mesure de Hausdorff de dimension δ .

Comme la mesure extérieure \mathcal{H}^δ est métrique, cette algèbre contient en particulier les ensembles Boréliens. La mesure de Hausdorff est décroissante lorsque δ croit vers l'infini. De plus, $\mathcal{H}^\delta(E) > 0$ implique que $\mathcal{H}^{\delta'}(E) = \infty$ si $\delta' < \delta$. La définition suivante a ainsi un sens.

Définition 5.3.2 *La dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est définie de la manière suivante*

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \sup \{ \delta, \mathcal{H}^\delta(E) = \infty \}.$$

Avec cette définition, $\dim_{\mathcal{H}}(\emptyset) = -\infty$.

5.3.2 Le formalisme multifractal fort et la méthode des coefficients dominants. Le formalisme multifractal faible

On fait ici quelques rappels sur le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants défini par S.Jaffard dans [Jaf04], qui est une des deux méthodes permettant de retrouver, dans des cas particuliers, l'intégralité du spectre de singularités (la deuxième étant la méthode MMTO introduite par A.Arnéodo, E. Bacry et J.-F. Muzy dans [ABM95]). Les autres formalismes multifractals connus pour les fonctions permettent de retrouver au mieux la partie croissante du spectre ou ne sont pas utilisables pour la pratique. On commence donc par rappeler la définition de cette notion de spectre de singularités fort.

Définition 5.3.3 *Soit f une fonction localement bornée. On définit ses ensembles iso-Höldériens inférieurs de la manière suivante :*

$$\underline{E}_H = \{x, \underline{h}(x) = H\}.$$

Le spectre de singularités fort de f est la fonction

$$\underline{d} : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\} \quad H \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\underline{E}_H).$$

Cela n'est pas toujours possible de calculer explicitement le spectre de singularités d'une fonction. Un formalisme multifractal est une méthode qui est supposée permettre de calculer la fonction \underline{d} à partir d'une transformée de Legendre. Tous ces formalismes sont à divers degrés des variantes du célèbre formalisme multifractal proposé par U.Frisch et G.Parisi dans [FP85]. La méthode des coefficients dominants (WLM) utilise les coefficients d'ondelettes au lieu des normes L^p , qui n'ont pas de sens lorsqu'on s'intéresse aux valeurs négatives de p . La fonction de structure est définie de la manière suivante,

$$S(j, p) = 2^{-j} \sum_{\lambda: |\lambda|=2^{-dj}} d_{\lambda}^p.$$

Si on pose,

$$(5.3.1) \quad \omega(p) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\log S(j, p)}{\log 2^{-j}},$$

on s'attend à ce que le spectre de singularités $\underline{d}(h)$ soit égal à

$$(5.3.2) \quad \inf_p \{hp - \omega(p) + d\}.$$

L'argument heuristique qui mène à la méthode précédente est en effet le suivant. La contribution des cubes dyadiques de taille 2^{-j} contenant un point dont l'exposant de Hölder vaut h à la somme $\sum d_{\lambda}^p$ peut être estimée de la manière suivante. Par le critère ondelettes portant sur la régularité ponctuelle forte, l'exposant de Hölder inférieur $\underline{h}_f(x)$ d'une fonction f en x est

$$\underline{h}(x) = \liminf_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \lambda' \subset 3\lambda_j(x)}} \frac{\log d_{\lambda'}}{\log 2^{-j}},$$

ce qui permet de dire que $d_{\lambda} \sim 2^{-hj}$. De plus, le nombre de ces cube dyadiques doit être d'environ $2^{d(h)j}$, chacun étant de volume 2^{-dj} . Donc la contribution recherchée est $2^{(d(h)-d-hp)j}$.

La contribution dominante est celle qui correspond à la valeur h qui est associée au plus grand des exposants. En écrivant l'égalité (5.3.1) comme $\sum d_\lambda^p \sim 2^{-\omega(p)j}$, on peut s'attendre à l'égalité suivante, $-\omega(p) = \sup_h \{d(h) - d - hp\}$. Comme $-\omega$ est une fonction convexe, si d est concave, alors $-\omega$ et $-d$ sont des fonctions convexes conjuguées et $d(h) = \inf_p \{hp - \omega(p) + d\}$. On peut souligner que le raisonnement que l'on vient de faire est loin d'être une démonstration rigoureuse. On peut se reporter à [AJL04] et [JafNico08] pour trouver de plus amples informations sur le formalisme multifractal basé sur les coefficients dominants et une comparaison avec les autres formalismes multifractals.

Bien qu'on puisse montrer que la formule (5.3.2) permet de retrouver l'intégralité du spectre de singularité moyennant certaines hypothèses supplémentaires (voir par exemple [AB02, Jaf96, Jaf97]), cette formule n'est pas vraie en toute généralité. En effet dans le cas général, seule la majoration suivante du spectre de singularités est vérifiée (voir [Jaf97, Jaf04])

$$(5.3.3) \quad \underline{d}(h) \leq \inf_{p \in \mathbb{R}^*} \{hp - \omega(p) + d\}.$$

Une fois que le spectre multifractal fort a été défini, le spectre de singularité faible peut être défini de manière totalement analogue. Une relation similaire à l'inégalité (5.3.3) est vérifiée. Le formalisme multifractal faible est défini comme suit :

Définition 5.3.4 *Soit f une fonction localement bornée. Ses ensembles iso-Höldériens supérieurs sont les ensembles*

$$\bar{E}_H = \{x : \bar{h}(x) = H\}.$$

Le spectre de singularité faible de f est la fonction

$$\bar{d} : \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{-\infty\} \quad H \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\bar{E}_H).$$

Le théorème suivant démontré par P.Abry, S.Jaffard, B.Vedel et H.Wendt dans [AJVW08] donne une majoration du spectre multifractal faible.

Théorème 5.3.5 *Soit f une fonction uniformément Höldérienne. L'inégalité suivante est vérifiée*

$$(5.3.4) \quad \bar{d}(h) \leq \inf_{p \in \mathbb{R}^*} \{hp - \omega(p) + d\}.$$

Définition 5.3.6 *Soit f une fonction uniformément Höldérienne et $h > 0$. Si l'inégalité (5.3.4) est une égalité, i.e. si*

$$\forall h > 0, \quad \bar{d}(h) = \inf_{p \in \mathbb{R}^*} \{hp - \omega(p) + d\}$$

alors on dit que la fonction f vérifie le formalisme multifractal faible.

On donnera en section 5.5 des exemples de séries d'ondelettes construits à partir d'une mesure multifractale pour lesquelles le formalisme multifractal est valide. Mais avant, on va montrer que les deux notions de fonctions multifractales pour la régularité forte et la régularité faible sont totalement déconnectées et pour cela on va donner un exemple de série de Davenport multifractale pour la régularité forte et monofractale pour la régularité faible.

5.4 Une fonction pour laquelle le spectre multifractal fort et faible diffère

Les fonctions f_β présentées ici sont une généralisation de la célèbre 'fonction de Lévy' (qui correspond au cas particulier $\beta = 1$). Les propriétés du spectre de singularités fort de cette fonction ont déjà été étudiées dans [Jaf97]. Les propositions 5.4.1 et 5.4.3 peuvent ainsi être toutes les deux vues comme une généralisation de la proposition 4 of [Jaf97]. La proposition 12 of [Jaf04] implique que \underline{d} est linéaire sur $[0, \beta]$. D'un autre coté, en ce qui concerne la régularité Hölderienne de la fonction f_β , on a uniquement deux types de singularités : la fonction f_β est discontinue en tout point rationnel dyadique et a un exposant de Hölder supérieur égal à β en les non dyadiques. Soit $\beta > 1$. La fonction f_β est définie explicitement par

$$f_\beta(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{\{2^\ell x\}}{2^{\ell\beta}}.$$

où pour tout réel x , $\{x\} = x - [x]$; Pour déterminer explicitement les ensembles iso-Höldériens inférieurs de f_β , on va utiliser les notations suivantes. Pour une suite $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, on va écrire

$$(5.4.1) \quad (0; x_1, \dots, x_l, \dots)_2$$

pour noter un développement en base 2 du nombre réel

$$x = \sum_{\ell \in \mathbb{N}} \frac{x_\ell}{2^\ell}.$$

S'il n'existe aucun entier k tel que $x_\ell = 1$ pour tout $\ell \geq k$, (5.4.1) est le développement propre de x en base 2. Si $(0; x_1, \dots)_2$ est le développement propre de x , on définit

$$\theta_2(x) = \inf\{l : x_l \neq 0\} - 1.$$

Soit

$$\delta(k) = \sup\{l : \forall l' \leq l, x_{k+l'} = x_k\} - 1.$$

et soit $(m_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence de la manière suivante, $m_1 = 1$, $m_k = \inf\{l > m_{k-1} + \delta(m_{k-1})\}$ ($k > 1$). On définit aussi la suite $(\delta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ par $\delta_k = \delta(m_k)$. Enfin, on pose $\rho_2(x) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \delta_k / m_k$. Si x est un rationnel dyadique, on pose $\rho_2(x) = \infty$. Le nombre $\rho_2(x)$ reflète, d'une certaine manière, la qualité de l'approximation du réel x par des rationnels dyadiques. L'exposant de Hölder inférieur de f_β dépend seulement de ρ_2 . On rappelle que les fonctions f_β sont un cas particulier des séries de Davenport dont le spectre de singularité fort été étudié dans le cas général par S.Jaffard dans [Jaf04a]. On retrouve par une autre méthode plus directe, le spectre fort des fonctions f_β .

Proposition 5.4.1 *En tout point non dyadique x , l'exposant de Hölder inférieur de la fonction f_β en x est donné par*

$$\underline{h}(x) = \frac{\beta}{1 + \rho_2(x)}.$$

Preuve. Le théorème 21 de [JafNico08], implique les deux inégalités suivantes : si x n'est pas un rationnel dyadique

$$(5.4.2) \quad \underline{h}(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{-\beta j}{\log_2 \text{dist}(x, 2^{-j}\mathbb{Z})};$$

sinon, $\underline{h}(x) = 0$. On peut supposer que $x \in (0, 1)$ n'est pas un rationnel dyadique. Pour un entier $j \in \mathbb{N}$ fixé, soit $\varepsilon_j = \text{dist}(x, 2^{-j}\mathbb{Z})$. On a $\theta_2(\varepsilon_j) = j + 1 + \delta(j + 1)$ et ainsi $\varepsilon_j \sim 2^{-(j+\delta(j+1)+1)}$. La relation (5.4.2) peut être ré-écrite de la manière suivante

$$\underline{h}(x) = \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{\beta j}{j + 1 + \delta(j + 1)} = \frac{\beta}{1 + \rho_2(x)}.$$

□

On a ainsi caractérisé les ensembles iso-Höldériens inférieurs.

Corollaire 5.4.2 *Les ensembles iso-Höldériens inférieurs de la fonction f_β sont les ensembles*

$$\underline{E}_H = \{x, \rho_2(x) = \frac{\beta}{H} - 1\} \quad (0 < H \leq \beta).$$

L'ensemble \underline{E}_0 est l'ensemble des rationnels dyadiques.

Pour conclure cette étude sur la régularité Höldérienne forte, on a le résultat suivant :

Proposition 5.4.3 *Le spectre de singularité fort de la fonction f_β est*

$$\underline{d}(h) = \begin{cases} \frac{h}{\beta} & \text{if } h \in [0, \beta] \\ -\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

Preuve. L'idée de base est la même que dans la proposition 4 de [Jaf97]. Si $\alpha \geq 1/\beta$, soit

$$F_\alpha = \limsup_{j \rightarrow \infty} \bigcup_k [k2^{-j} - 2^{-j\alpha\beta}, k2^{-j} + 2^{-j\alpha\beta}].$$

On utilise (5.4.2), comme $\underline{h}(x) = H$

$$(5.4.3) \quad x \in \bigcap_{\gamma > H} F_{1/\gamma} - \bigcup_{\gamma < H} F_{1/\gamma}.$$

De manière évidente, $\dim_{\mathcal{H}}(F_\alpha) \leq 1/\alpha\beta$. On montre maintenant l'inégalité réciproque.

Soit $(j_l)_{l \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant $j_l = 2^{j_{l-1}}$, soit

$$I_k(l) = [k2^{-j_l} - 2^{-j_l\alpha\beta}, k2^{-j_l} + 2^{-j_l\alpha\beta}]$$

et

$$G_\alpha = \bigcap_l \bigcup_k I_k(l).$$

On peut définir une mesure de probabilité μ supportée par G_α de la manière suivante. Si $l = 1$, on met sur chaque intervalle $I_k(1)$ la même masse 2^{-j_1} . Si chacun de ces intervalles contient n intervalles du type $I(k, 2)$, sur chacun de ces intervalles, on met la mesure $2^{-j_1}/n$.

Cette construction peut être itérée de manière à obtenir à la limite une mesure de probabilité μ supportée par G_α . On vérifie alors aisément que

$$\mu([x - h, x + h]) \leq Ch^{1/\alpha\beta} \quad \forall x \in G_\alpha.$$

De plus, la proposition 4.9 of [Falc90] implique que

$$\mathcal{H}^{1/\alpha\beta}(G_\mu) > 0$$

et donc puisque $G_\alpha \subset F_\alpha$,

$$\dim_{\mathcal{H}}(F_\alpha) = 1/\alpha\beta,$$

ce qui grâce à (5.4.3), est suffisant pour conclure. \square

On va maintenant étudier l'exposant de Hölder supérieur. Soit

$$\Omega_\alpha = \liminf_{j \rightarrow \infty} \{x \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ such that } |x - \frac{k}{2^j}| \leq 2^{-\alpha j}\}.$$

On a la relation suivante entre les ensembles Ω_α et $\bar{h}(x_0)$.

Proposition 5.4.4 *Si $\alpha > 1$, alors*

$$x_0 \notin \Omega_\alpha \Rightarrow \bar{h}(x_0) \geq \frac{\beta}{\alpha}.$$

Preuve. Soit ε un réel positif fixé. On veut montrer que pour toute constante positive C , il existe une suite strictement décroissante $(r_n)_n$ de réels positifs, telle que

$$\sup_{h>0} \|\Delta_h^{[\beta/\alpha]+1} f_\beta(x)\|_{L^\infty(B_h(x_0, r_n))} \leq Cr_n^{\beta/\alpha}.$$

On a

$$(5.4.4) \quad \Delta_h^{[\beta/\alpha]+1} f_\beta(x) = \sum_{l \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{l\beta}} \sum_{m=0}^M (-1)^m C_M^m f_p 2^l(x + mh).$$

Si $x_0 \notin \Omega_\alpha$, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_n$ telle que

$$|x_0 - \frac{k}{2^{j_n}}| \geq 2^{-\alpha j_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Soit $r_n = 2^{-\alpha j_n}$. L'intervalle $[x, x + ([\beta/\alpha] + 1)h] \subset B(x_0, r_n)$ ne contient aucun rationnel dyadique de la forme $k2^{-l}$, avec $l \leq j_n - 1$. Ceci implique que

$$\sum_{l=0}^{j_n-1} \frac{1}{2^{l\beta}} \sum_{m=0}^{[\beta/\alpha]+1} (-1)^m C_{[\beta/\alpha]+1}^m f_p 2^l(x + mh) = 0.$$

La relation (5.4.4) implique alors l'inégalité suivante

$$\begin{aligned} |\Delta_h^{[\beta/\alpha]+1} f_\beta(x)| &= \left| \sum_{l=j_n}^{\infty} \frac{1}{2^{l\beta}} \sum_{m=0}^M (-1)^m C_M^m f_p 2^l(x + mh) \right| \\ &\leq C' \sum_{l=j_n}^{\infty} \frac{1}{2^{l\beta}} \leq C' r_n^{\beta/\alpha}. \end{aligned}$$

Soit maintenant n_0 un entier tel que $C'r_n^{\beta/\alpha} \leq Cr_n^{\beta/\alpha-\varepsilon}$ pour tout $n \geq n_0$. On a $\bar{h}(x_0) \geq \beta/\alpha - \varepsilon$, ce qui est suffisant pour conclure. \square

Les ensembles Ω_α sont connus explicitement pour tout $\alpha \geq 1$.

Proposition 5.4.5 *Si $\alpha > 1$, alors*

$$\Omega_\alpha = \left\{ \frac{k}{2^j} : (k, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \right\}.$$

De plus, $\Omega_1 = \mathbb{R}$.

Preuve. Le cas $\alpha = 1$ est trivial. Soit $\alpha > 1$ et soit $x \in (0, 1)$ qui n'est pas un rationnel dyadique. Si $x = (0; x_1, \dots)_2$, on a, pour j suffisamment grand,

$$\min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^j} \right| \geq 2^{-n(j)+1},$$

où $n(j)$ est le premier indice plus grand ou égal à j tel que $x_{n(j)} = 1$. On a alors, pour $j = n(j) - 1$ suffisamment grand,

$$\min_{k \in \mathbb{Z}} \left| x - \frac{k}{2^j} \right| \geq 2^{-j} > 2^{-\alpha j}.$$

Donc, $x \notin \Omega_\alpha$. \square

On a ainsi une minoration de l'exposant de Hölder supérieur.

Corollaire 5.4.6 *Si x_0 n'est pas un rationnel dyadique alors*

$$\bar{h}(x_0) \geq \beta.$$

On va maintenant montrer l'inégalité réciproque. La proposition suivante est similaire au lemme 1 de [Jaf97].

Proposition 5.4.7 *Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} continue sauf au plus sur un ensemble dénombrable de points et admettant en tout point une limite à droite et à gauche. Soit par ailleurs $x_0 \in \mathbb{R}$ un point où la fonction f est continue et $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de discontinuités de f qui converge vers x_0 . Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note s_n le saut de f en r_n . S'il existe une fonction strictement croissante ψ vérifiant $\psi(0) = 0$ telle que :*

$$\exists r_0, \left(\forall r \leq r_0, \exists r_n : (|r_n - x_0| \leq r, |s_n| \geq \psi(r)) \right),$$

alors

$$\bar{h}(x_0) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \psi(r)}{\log r}.$$

Preuve. Soit $\alpha > 1$; if $f \in \text{mathcal{C}}_w^\alpha(x_0)$, pour tout $C > 0$ il existe une suite $(t_n)_n$ telle que

$$\sup_{h>0} \|\Delta_h^{[\alpha]+1} f(x)\|_{L^\infty(B_h(x_0, t_n))} \leq Ct_n^\alpha.$$

Soit $(r_n)_n$ une suite telle que, pour tout entier n suffisamment grand

$$|r_n - x_0| < t, \quad |s_n| \geq \psi(t_n).$$

Soit F_n la fonction définie sur \mathbb{R} par

$$F_n(h) = (f(r_n + h), \dots, f(r_n + ([\alpha] + 1)h)).$$

Puisque F_n a seulement un nombre dénombrable de discontinuités, on peut trouver h arbitrairement proche de zéro tel que $[r_n, r_n + ([\alpha] + 1)h] \subset B(x_0, t_n)$ et tel que F_n est continue en h . Donc,

$$\begin{aligned} \psi(t_n) &\leq s_n = |f(r_n^+) - f(r_n^-)| \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^{[\alpha]+1} (-1)^k C_{[\alpha]+1}^k f(r_n + kh) + f(r_n^-) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{k=1}^{[\alpha]+1} (-1)^k C_{[\alpha]+1}^k f(r_n + kh) + f(r_n^+) \right| \\ &\leq 2(|\Delta_h^{[\alpha]+1} f(r_n^-)| + |\Delta_h^{[\alpha]+1} f(r_n^+)|) \leq 4Ct_n^\alpha. \end{aligned}$$

Cette inégalité implique

$$\frac{\log \psi(t_n)}{\log t_n} \geq \alpha + \frac{\log 4C}{\log t_n}.$$

Quand t_n tend vers zéro,

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \psi(r)}{\log r} \geq \alpha.$$

Le résultat s'ensuit alors. □

Puisque f_β est continue sauf en les rationnels dyadiques et puisque $\Omega_1 = \mathbb{R}$, la proposition 5.4.7 et le corollaire 5.4.6 implique le résultat suivant.

Théorème 5.4.8 *Si x_0 n'est pas un rationnel dyadique,*

$$\bar{h}(x_0) = \beta,$$

si x_0 est un rationnel dyadique, $\bar{h}(x_0) = 0$.

On va s'intéresser maintenant à la validité du formalisme multifractal et on va donner tout à la fois une classe d'exemples de séries d'ondelettes multifractales pour la régularité faible, dont le spectre fort et faible coïncident, vérifiant de plus le formalisme multifractal.

5.5 Construction d'une classe de séries d'ondelettes vérifiant le formalisme multifractal

Le but de cette section est tout d'abord de répondre à une question très naive : existe-t-il des fonctions multifractales pour la régularité faible ? La démarche qui semblerait la plus instinctive pour répondre à cette question consisterait à considérer des fonctions multifractales classiques en espérant qu'elles vont être multifractales pour la régularité faible. L'exemple des séries de Lévy que l'on vient juste de présenter montre que pour évidente que semble cette approche, elle ne mène pas automatiquement au but escompté puisqu'il existe des exemples classiques de fonctions multifractales au sens classiques non multifractales pour la régularité

faible.

On souligne par ailleurs que si l'on souhaite générer des fonctions multifractales à partir de séries d'ondelettes, il convient impérativement de tenir compte du fait qu'hormis dans le cas où exposant de Hölder inférieur et supérieur coïncident on n'a pas de critère ondelettes d'irrégularité ponctuelle. On a donc opté, dans le même esprit que ce qui a été fait par J.Barral et S.Seuret dans [BarSeur05], pour la construction de séries d'ondelettes construites à partir d'une mesure multifractale μ définie sur $[0, 1]^d$ de la manière suivante

$$(5.5.1) \quad \forall x \in [0, 1]^d, F_\mu(x) = \sum_{j \geq 0} \sum_{|\lambda|=2^{-j}, \lambda \subset [0, 1]^d} 2^{-j(s_0 - \frac{d}{p_0})} \mu(\lambda)^{\frac{1}{p_0}} \psi_\lambda(x),$$

où les ondelettes ψ^i appartiennent à la classe de Schwartz \mathbb{R}^d et dont tous les moments s'annulent. Cette construction va présenter l'avantage de montrer que spectre multifractal fort et faible peuvent coïncider et de poser le problème de la validité du formalisme multifractal faible. Sous des hypothèses détaillées en section 5.5.3, on va ainsi construire une classe de fonctions qui vérifient à la fois le formalisme multifractal fort et faible. La démarche est donc, comme on va le voir, très similaire à celle de [BarSeur05]. Seuls les ensembles iso-Höldériens considérés et le critère ondelettes utilisé diffère de ce qui a été fait dans [BarSeur05].

On commence par faire quelques rappels concernant l'analyse multifractale des mesures.

5.5.1 Quelques résultats sur l'analyse multifractale des mesures

Suivant en cela J.Barral et S.Seuret, on adapte ici le formalisme multifractal usuel tel qu'il a été défini par G.Brown, G.Michon et J.Peyrière dans [BMP92]. La différence principale va résider dans la définition des ensembles iso-Höldériens puisqu'ici on a juste besoin d'un formalisme multifractal associé à une grille dyadique.

On donne tout d'abord des versions légèrement modifiées de l'exposant de Hölder inférieur et supérieur d'une mesure Borélienne μ en un point x_0 . Pour tout $\sigma \in \{-1, 0, 1\}^d$ et tout cube dyadique $\lambda = \prod_\ell [\frac{k_\ell}{2^j}, \frac{k_\ell + 1}{2^j}[$, on pose

$$\lambda^\sigma = \prod_\ell [\frac{k_\ell + \sigma_\ell}{2^j}, \frac{k_\ell + 1 + \sigma_\ell}{2^j}[\quad \text{and} \quad \mu^\sigma(\lambda) = \mu(\lambda^\sigma).$$

On définit aussi les quantités suivantes

$$\underline{\alpha}_\mu^\sigma(x_0) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^\sigma(\lambda_j(x_0))}{\log |\lambda|}, \quad \bar{\alpha}_\mu^\sigma(x_0) = \limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^\sigma(\lambda_j(x_0))}{\log |\lambda|},$$

et en cas d'existence

$$\alpha_\mu^\sigma(x_0) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu^\sigma(\lambda_j(x_0))}{\log |\lambda|}.$$

On va vouloir déterminer la dimension de Hausdorff des ensembles iso-Höldériens suivants

$$\tilde{E}_\alpha(\mu) = \{x \in [0, 1]^d, \alpha_\mu(x) = \min_{\sigma \in \{-1, 0, 1\}^d} \{\alpha_\mu^\sigma(x)\} = \alpha\}.$$

L'application

$$d_\mu : \alpha \geq 0 \mapsto \dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_\alpha(\mu)),$$

est appelée le spectre multifractal de la mesure borélienne μ . On rappelle que dans [BMP92], les ensembles iso-Höldériens sont les ensembles suivants

$$E_\alpha(\mu) = \{x \in [0, 1]^d, \lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(\lambda_j(x))}{\log |\lambda|} = \alpha\}.$$

Malheureusement, ces ensembles iso-Höldériens ne sont pas adaptés à l'étude de la régularité ponctuelle des séries d'ondelettes F_μ . En effet, même si on connaît $\lim_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log \mu(\lambda_j(x))}{\log |\lambda|}$, on ne peut pour autant en déduire la valeur de l'exposant de Hölder supérieur de la fonction F_μ en x à partir des critères ondelettes.

On rappelle maintenant quelques résultats déjà connus sur la majoration du spectre multifractal supérieur démontrés dans [BMP92]. Pour tout q dans \mathbb{R} , on définit classiquement

$$\tau(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log |\lambda|} \log \sum_{|\lambda|=2^{-j}}^* \mu(\lambda)^q,$$

où la notation \sum^* signifie que la somme est prise sur les cubes dyadiques λ tels que $\mu(\lambda) > 0$. On rappelle que τ^* désigne la transformée de Legendre de la fonction τ , c'est à dire

$$\forall \alpha \geq 0, \quad \tau^*(\alpha) = \inf_{q \in \mathbb{R}} \{\alpha q - \tau(q)\}.$$

On remarque que, comme $\alpha > 0$,

$$\tilde{E}_\alpha(\mu) \subset E_\alpha(\mu).$$

Cette inclusion et les résultats démontrés dans [BMP92] permettent de déduire la majoration suivante du spectre multifractal faible de de toute mesure Borélienne :

Proposition 5.5.1 *Soit $\alpha \geq 0$ et μ une mesure Borélienne. On a*

$$\dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_\alpha(\mu)) \leq \tau^*(\alpha).$$

Par ailleurs, si $\tau^*(\alpha) < 0$ alors $\tilde{E}_\alpha(\mu) = \emptyset$.

Définition 5.5.2 *Soit $\alpha_0 \geq 0$. On dit que la mesure Borélienne μ vérifie le formalisme multifractal en $\alpha = \alpha_0$ pour les ensembles $\tilde{E}_\alpha(\mu)$ si $\dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_{\alpha_0}(\mu)) = \tau^*(\alpha_0)$.*

5.5.2 Séries et mesures multifractales

On veut maintenant définir une série d'ondelettes de la forme (5.5.1) qui vérifie le formalisme multifractal faible pour les fonctions. Tout d'abord, on donne une relation explicite entre le spectre multifractal de la série d'ondelettes F_μ et celui de la mesure μ .

5.5.2.1 Un théorème de transfert

Théorème 5.5.3 *Soit μ une mesure multifractale et s_0, p_0 deux nombres positifs. Soit F_μ la série d'ondelettes définie par l'équation (5.5.1). Si la mesure μ vérifie le formalisme multifractal en $\alpha_0 \geq 0$ pour les ensembles $\tilde{E}_\alpha(\mu)$, alors F_μ vérifie à la fois le formalisme multifractal fort et faible en*

$$H = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{\alpha_0 d}{p_0},$$

et

$$\underline{d}_{F_\mu}(H) = \bar{d}_{F_\mu}(H) = d_\mu(\alpha_0).$$

Remarque 5.5.4 On peut remarquer comme cela est fait dans [BarSeur05], que si $x_0 \notin \text{supp}(\mu)$, il existe un entier j_0 tel que

$$\forall j \geq j_0, \quad d_j(x_0) = 0.$$

Ainsi dans ce cas particulier $\bar{h}_{F_\mu}(x_0) = +\infty$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du théorème 1 de [BarSeur05]. Elle est basée sur le théorème suivant :

Lemme 5.5.5 Pour tout $\alpha \geq 0$, on a l'inclusion suivante :

$$\tilde{E}_\alpha(\mu) \subset \underline{E}_H(F_\mu) \cap \overline{E}_H(F_\mu),$$

où $H = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{\alpha d}{p_0}$.

Preuve. On remarque que pour tout λ

$$d_\lambda = 2^{-j(s_0 - \frac{d}{p_0})} \mu(\lambda)^{\frac{1}{p_0}}.$$

Pour tout point x_0

$$d_j(x_0) = 2^{-j(s_0 - \frac{d}{p_0})} \max_{\sigma \in \{-1, 0, 1\}^d} \{\mu^\sigma(\lambda_j(x_0))\}^{\frac{1}{p_0}}.$$

On suppose que $x_0 \in \tilde{E}_\alpha(\mu)$. Comme pour tout $\sigma \in \{-1, 0, 1\}^d$, $\alpha^\sigma(x_0) \geq \alpha$, et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $j_0(\varepsilon, \sigma)$ tel que

$$\forall j \geq j_0(\varepsilon, \sigma), \quad \mu^\sigma(\lambda_j(x_0)) \leq 2^{-j \frac{d}{p_0} (\alpha - \varepsilon)}.$$

Donc

$$\forall j \geq \max_\sigma \{j_0(\varepsilon, \sigma)\}, \quad d_j(x_0) \leq 2^{-j(s_0 - \frac{d}{p_0})} 2^{-j \frac{d}{p_0} (\alpha - \varepsilon)} \leq 2^{-j(H - \varepsilon)}$$

et

$$\liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log d_j(x_0)}{\log 2^{-j}} \geq H.$$

De plus puisque pour un certain $\sigma_0 \in \{-1, 0, 1\}^d$ on a $\alpha^{\sigma_0}(x_0) \leq \alpha$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier $j_0(\varepsilon)$ tel que

$$\forall j \geq j_0(\varepsilon), \quad \mu^{\sigma_0}(\lambda_j(x_0)) \geq 2^{-jd(\alpha + \varepsilon)}.$$

Ainsi

$$\forall j \geq j_0(\varepsilon), \quad d_j(x_0) \geq 2^{-j(H + \varepsilon)}.$$

et

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} \frac{\log d_j(x_0)}{\log 2^{-j}} \leq H.$$

D'où par le corollaire ??,

$$\tilde{E}_\alpha(\mu) \subset \{x \in [0, 1]^d, \underline{h}_{F_\mu}(x) = \bar{h}_{F_\mu}(x) = H\} = \underline{E}_H(F_\mu) \cap \overline{E}_H(F_\mu).$$

□

Comme μ vérifie le formalisme multifractal en $\alpha = \alpha_0$ pour les ensembles $\tilde{E}_\alpha(\mu)$ on en déduit que

$$\dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_{\alpha_0}(\mu)) = \tau^*(\alpha_0) \leq \dim_{\mathcal{H}}(\bar{E}_H(F_\mu)),$$

avec $H = s_0 - \frac{d}{p_0} + \frac{\alpha_0 d}{p_0}$.

On peut alors remarquer que pour tout $p \in \mathbb{R}$,

$$\omega_f^*(p) = p(s_0 - \frac{d}{p_0}) - \tau(\frac{p}{p_0}).$$

Comme pour tout $0 < H < \infty$ et toute fonction localement bornée on a

$$\dim_{\mathcal{H}}(\bar{E}_H(F_\mu)) \leq \inf_{p \in \mathbb{R}} \{pH - \omega_f^*(p) + d\} = \tau^*(\alpha_0) = \dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_{\alpha_0}(\mu)),$$

on peut en déduire que la série d'ondelettes F_μ vérifie le formalisme multifractal. Une démarche similaire montre que F_μ vérifie aussi le formalisme multifractale fort. \square

5.5.3 Une classe de séries d'ondelettes vérifiant à la fois le formalisme multifractal fort et faible

Le but de cette section est de définir une classe de mesures multifractales qui vérifient le formalisme multifractal en tout $\alpha \geq 0$ pour les ensembles $\tilde{E}_\alpha(\mu)$, fournissant ainsi un exemple de séries d'ondelettes qui vérifient à la fois le formalisme multifractal fort et faible.

5.5.3.1 Des conditions suffisantes de validité du formalisme multifractal des mesures pour les ensembles $\tilde{E}_\alpha(\mu)$

Ici, on suit une fois de plus principalement [BarSeur05]. On rappelle quelques notations classiques. On suppose tout d'abord que $d = 1$ et on considère b un entier supérieur à 2. Soit $\mathcal{A} = \{0, \dots, b-1\}$. Pour tout $w \in \mathcal{A}^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{A}^n$, soit I_w le sous intervalle semi-fermé b -adique de $[0, 1]^d$ indexé par w . Si $w \in \mathcal{A}^n$, pour un entier n fixé, on peut associer à chaque w , un entier i_w tel que $I_w = [i_w b^{-n}, (i_w + 1)b^{-n}[$. Si $(v, w) \in (\mathcal{A}^n)^2$, on note $\delta(v, w) = |i(v) - i(w)|$. En dimension $d > 1$, on remplace \mathcal{A} par \mathcal{A}^d . Si $w = (w_1, \dots, w_d) \in (\mathcal{A}^d)^* = \cup_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{A}^d)^n$, I_w est le cube b -adique

$$I_w = I_{w_1} \times \dots \times I_{w_d}.$$

On pose aussi $\delta = \delta(v, w) = \max(\delta(v_1, w_1), \dots, \delta(v_d, w_d))$. Soit μ une mesure Borélienne sur $[0, 1]^d$. Pour tout $q, t \in \mathbb{R}$ et $n > 0$, on définit une fonction analogue à τ pour les grilles b -adiques :

$$\tau_b(q) = \liminf_{j \rightarrow +\infty} \frac{1}{-j \log b} \log \sum_{w \in (\mathcal{A}^d)^j} \mu(I_w)^q,$$

où la notation \sum^* va signifier que la somme est prise sur les cubes dyadiques λ tels que $\mu(\lambda) > 0$. Lorsque $b = 2$, on retrouve $\tau_2 = \tau$. Dans [BarSeur05], J.Barral et S.Seuret font l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.5.6 *Il existe une suite strictement croissante d'entiers $(k_j)_j$ telle que $\lim_j k_j/j = 0$ vérifiant la condition suivante : pour tout cube dyadique λ de taille 2^{-j} tel que $\mu(\lambda) \neq 0$, il existe un cube b -adique $\lambda_b \subset \lambda$ de taille au moins 2^{-j-k_j} tel que $\mu(J_b) \neq 0$.*

Soit $n_j = \lceil \frac{\log(2)}{\log(b)} j \rceil$, $k'_j = \lceil \frac{\log(2)}{\log(b)} k_j \rceil$. On modifie quelque peu les hypothèses faites dans [BarSeur05]. Soit $q \in \mathbb{R}$. On suppose ici qu'il existe une mesure de Gibbs μ_q associée à μ et une fonction C_q telle que

$$(5.5.2) \quad \mu_q(I_w) \leq C_q(w) \mu(I_w)^q b^{|w|\tau_b(q)}$$

pour tout $w \in (\mathcal{A}^d)^*$ tel que $\mu(I_w) > 0$.
Si $\tau'_b(q)$ existe on définit pour $\varepsilon, \eta > 0$,

$$S_1^\mu(q, \eta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} b^{n(\tau_b(q) + (\tau'_b(q) - \varepsilon)\eta)} \sum_{v, w \in (\mathcal{A}^d)^n, \delta(v, w) \leq b'} \mu(I_v)^\eta C_q(w) \mu(I_w)^q$$

avec $b' = 1$ si $b = 2$, $b' = 2$ sinon et

$$S_2^\mu(q, \eta, \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} b^{n(\tau_b(q) - (\tau'_b(q) + \varepsilon)\eta)} \sum_{v, w \in (\mathcal{A}^d)^{n_j + k'_j + 2}, \delta(v, w) \leq b'_j} \mu(I_v)^{-\eta} C_q(w) \mu(I_w)^q$$

avec $b'_j = 1$ if $b = 2$, $b'_j = 2(b^{k'_j + 2} + 1)$ sinon.

Le théorème suivant est analogue au théorème 2 de [BarSeur05].

Théorème 5.5.7 *Soit μ une mesure Borélienne positive sur $[0, 1]^d$ vérifiant l'hypothèse 5.5.6. Soit $q \in \mathbb{R}$, on suppose que*

1. *Il existe une mesure de Gibbs μ_q et une fonction C_q telle que l'inégalité (5.5.2) soit vérifiée.*
2. *$\tau'_b(q)$ existe.*
3. *$\dim(\mu_q) = \inf\{\dim_{\mathcal{H}}(B) : \mu_q(B) > 0\} \geq \tau_b^*(\tau'_b(q))$.*
4. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que*

$$(5.5.3) \quad S_1^\mu(q, \eta, \varepsilon) + S_2^\mu(q, \eta, \varepsilon) < \infty.$$

Alors μ vérifie le formalisme multifractal en $\alpha = \tau'_b(q)$ pour les ensembles \tilde{E}_α , i.e.

$$\dim(\tilde{E}_{\tau'_b(q)}) = \tau^*(\tau'_b(q)).$$

Remarque 5.5.8 *On rappelle que l'hypothèse d'existence d'une mesure de Gibbs μ_q est classique lorsqu'on cherche à montrer la validité du formalisme multifractal. De manière similaire à ce qui est fait dans [BarSeur05], on fait une hypothèse sur la dimension de Hausdorff inférieure $\dim(\mu_q)$ de la mesure de Gibbs afin que le formalisme multifractal des mesures soit "quasi" vérifié sur une grille b -adique.*

Preuve. On suit la même démarche que dans la démonstration du théorème 2 de [BarSeur05]. L'hypothèse 5.5.6 implique, par la proposition 8 de [BarSeur05], que pour tout réel q , $\tau(q) \geq \tau_b(q)$. Par ailleurs les hypothèses (5.5.3) faites sur S_1^μ et S_2^μ impliquent, comme dans les lemmes 4 et 5 de [BarSeur05], à partir du lemme de Borel-Cantelli que

1. $\min_{\sigma}(\underline{\alpha}^{\sigma}(x)) \geq \tau'_b(q)$ μ_q -presque partout,

2. $\max_{\sigma}(\overline{\alpha}^{\sigma}(x)) \leq \tau'_b(q)$ μ_q -presque partout.

Ainsi, μ_q -presque partout

$$\forall \sigma \in \{-1, 0, 1\}^d, \quad \underline{\alpha}^{\sigma}(x) = \overline{\alpha}^{\sigma}(x) = \tau'_b(q),$$

et la mesure μ_q est portée par l'ensemble $\tilde{E}_{\tau'_b(q)}$. L'hypothèse faite sur $\dim(\mu_q)$ permet alors d'en déduire que $\dim_{\mathcal{H}}(\tilde{E}_{\tau'_b(q)}) \geq \tau_b^*(\tau'_b(q))$. La majoration du spectre multifractal de la mesure μ et le fait que $\tau \geq \tau_b$, permet de conclure que le formalisme multifractal est vérifié pour les ensembles \tilde{E}_{α} en $\alpha = \tau'_b(q)$. \square

5.5.3.2 Quelques exemples de mesures multifractales qui satisfont au formalisme multifractal pour les ensembles $\tilde{E}_{\alpha}(\mu)$

ON donne maintenant deux exemples canoniques de mesures qui vérifient les conditions ci dessus.

Mesures quasi-Bernoulli Soit b un entier supérieur à 2. On rappelle qu'une mesure Borélienne positive sur $[0, 1]^d$ μ est quasi-Bernoulli si pour une certaine constante positive C et pour tout $v, w \in (\mathcal{A}^d)^*$

$$\frac{1}{C} \mu(I_v) \mu(I_w) \leq \mu(I_{vw}) \leq C \mu(I_v) \mu(I_w).$$

Un exemple classique de mesure quasi-Bernoulli est l'exemple des mesures multinomiales :

Exemple 5.5.9 Soit b un entier supérieur à 2 et $(m_0, \dots, m_{b-1}) \in (0, 1)^b$ tel que

$$\sum_{i=0}^{b-1} m_i = 1,$$

on peut construire une suite de mesures de probabilité $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on $[0, 1]^d$ de la manière suivante. Pour tout entier n , on définit une mesure de probabilité μ_n sur $[0, 1]^d$ tel que pour tout $w \in \mathcal{A}^{nd}$,

$$\mu_n(I_w) = \prod_{\ell=1}^{nd} m_{w_{\ell}}.$$

Cette suite a alors une limite au sens faible μ appelée mesure multinomiale en base b avec pour poids (m_0, \dots, m_{b-1}) .

Par construction toute mesure multinomiale est quasi-Bernoulli.

Dans ce qui suit on considère uniquement des mesures quasi-Bernoulli continues i.e. sans atome.

Proposition 5.5.10 Toute mesure quasi-Bernoulli continue vérifie les hypothèses du théorème 5.5.7 et ainsi vérifie le formalisme multifractal en $\alpha > 0$ pour les ensembles \tilde{E}_{α} .

Preuve. Dans [BMP92, Mich89, Mich93], G.Michon et al. ont montré que pour tout $q \in \mathbb{R}$, il existe une mesure de Gibbs μ_q et une constante C_q telle que pour tout $v \in (\mathcal{A}^d)^*$

$$\frac{1}{C_q} \mu(I_v)^q b^{-\tau(q)|v|} \leq \mu_q(I_v) \leq C_q \mu(I_v)^q b^{-\tau(q)|v|}.$$

En particulier la propriété (5.5.2) est vérifiée. Par ailleurs Y.Heurteaux a montré dans [?] que pour tout $q \in \mathbb{R}$, τ est différentiable en q . La condition

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad S_1(\varepsilon, \eta, q) + S_2(\varepsilon, \eta, q) < \infty$$

est montrée dans [BarSeur05]. On a donc ainsi montré la proposition 5.5.10. \square

On a donc le théorème suivant :

Théorème 5.5.11 *Si μ est une mesure quasi-Bernoulli continue alors la série d'ondelette F_μ définie par l'équation (5.5.1) vérifie le formalisme multifractal fort et faible en tout point $H > s_0 - d/p_0$.*

Le cas des cascades multiplicatives aléatoires b -adiques Soit b un entier supérieur à 2 et $d = 1$. Les cascades multiplicatives canoniques aléatoires ont été introduites par B.Mandelbrot dans [Man74] et leurs propriétés multifractales ont été largement étudiées (voir par exemple [Kah91, HW92, CK92, Mol96, Bar99, Bar00]). On rappelle tout d'abord comment sont construites ces mesures. Soit W une variable aléatoire positive presque sûrement constante vérifiant $\mathbb{E}(W) = 1/b$. On considère alors une suite $(W_w)_{w \in \mathcal{A}^*}$ de copies indépendantes de la variable W et μ_n une mesure aléatoire dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur chaque intervalle dyadique est constante et vaut

$$b^n W_{w_1} \cdots W_{w_1 \cdots w_n}.$$

Presque sûrement cette suite de mesures converge faiblement vers une mesure μ lorsque n tend vers l'infini. On définit alors

$$\forall q \in \mathbb{R}, \quad \tilde{\tau}(q) = -1 - \log_b \mathbb{E}(1_{W>0} W^q),$$

et

$$J = \{q \in \mathbb{R}, \tilde{\tau}^*(\tilde{\tau}'(q)) > 0\}.$$

On suppose de plus que presque sûrement W est positive et que $\tilde{\tau}'(1) > 0$. On a donc $\mu \neq 0$ presque sûrement et l'hypothèse 5.5.6 est vérifiée avec $k_j = 2$.

Proposition 5.5.12 *Si μ est une cascade multiplicative aléatoire b -adique alors presque sûrement sur J , μ vérifie les hypothèses du théorème 5.5.7 et ainsi vérifie le formalisme multifractal pour tout $q \in J$ en $\alpha = \tilde{\tau}'(q)$ pour les ensembles \tilde{E}_α .*

Preuve. Le théorème 8 de [Bar00] implique que $\tau_b = \tilde{\tau}$ sur J . Par ailleurs, dans [BBP03] est montré l'existence d'une mesure aléatoire μ_q et d'une fonction aléatoire C_q vérifiant presque sûrement

$$\forall q \in J, \forall v \in \mathcal{A}^*, \mu_q(I_v) = C_q(I_v) \mu(I_v)^q b^{|v|\tilde{\tau}'(q)}$$

pour tout $q \in \mathbb{R}$. Ainsi la propriété (5.5.2) est vérifiée. Par ailleurs dans [BarSeur05] est montré que la condition

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 : \quad S_1(\varepsilon, \eta, q) + S_2(\varepsilon, \eta, q) < \infty$$

est presque sûrement vérifiée. Les hypothèses du théorème 5.5.7 sont ainsi vérifiées. Le résultat recherché s'ensuit alors. \square

On obtient alors de manière similaire à ce qui a été fait pour les mesures quasi-Bernoulli le résultat suivant :

Théorème 5.5.13 *Soit W une variable aléatoire presque sûrement positive. Soit μ une cascade multiplicative aléatoire b -adique telle que $\tilde{\tau}'(1) = -1 - \log_b(\mathbb{E}(W)) > 0$. Alors la série d'ondelettes F_μ définie par l'équation (5.5.1) vérifie presque sûrement le formalisme multifractal fort et faible en tout point $H > 0$.*

Chapitre 6

Un Mouvement Brownien Multifractionnaire lacunaire

L'objectif du chapitre est ici d'introduire des processus gaussiens qui sortent du cadre standard où exposant de Hölder inférieur et supérieur coïncident en tout point. Pour cela on va introduire des processus multifractionnaires à infinité d'échelles.

De manière générale, le Mouvement Brownien Multifractionnaire a été introduit indépendamment par J.Lévy-Véhel et R.Peltier dans [LVPel95] (qui en donnent une représentation moyenne mobile) et par A.Benassi, S.Jaffard et D.Roux dans [BJR97] qui en donnent la représentation harmonisable suivante,

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t)+\frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

où H est une fonction uniformément Höldérienne définie sur \mathbb{R}^+ à valeurs dans $[a, b] \subset (0, 1)$.

Les propriétés de régularité ponctuelle et d'autosimilarité locale du Mouvement Brownien Multifractionnaire ont été étudiées dans [BJR97] et [LVPel95]. Par ailleurs, B. Boufoussi, M. Dozzi et R. Guerbaz ont montré, en utilisant la régularité du temps local du Mouvement Brownien Multifractionnaire, que ce processus satisfait à la loi du log itéré de Chung (voir théorème 4.1 de [BDG06]) et est donc en tout point t_0 presque sûrement anti-Höldérien d'exposant $H(t_0)$ (au sens faible donc).

De nombreuses généralisations de ce processus ont été faites. Le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé a tout d'abord été défini par A.Ayache et J.Lévy-Véhel dans [ALV99] et [ALV00]. Soit λ un réel supérieur à 1 fixé, et $\mathbf{H} = (H_\ell)_\ell$ une suite de fonctions uniformément Höldériennes à valeurs dans $[a, b]$. Le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé de paramètres \mathbf{H} et λ est le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ défini par,

$$X(t) = \int_{|\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_0(t)+\frac{1}{2}}} + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \int_{\lambda^{\ell-1} < |\xi| < \lambda^\ell} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(t)+\frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi).$$

Des résultats de régularité ponctuelle de ce processus ont alors été obtenus, au sens faible (en tout point presque sûrement), dans [ALV99] et [ALV00], tandis que par une approche via les ondelettes A.Ayache, S.Jaffard et M.Taqqu dans [AJT07] ont réussi à définir un Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé dont ils estiment l'exposant de Hölder inférieur au sens fort (c'est à dire presque sûrement en tout point). Dans un cas particulier,

A.Ayache et J.Lévy-Véhel ont aussi obtenus dans [ALV99] des résultats d'autosimilarité locale du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé.

Une généralisation du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé a ensuite été faite par A.Ayache, A.Benassi, S.Cohen, J.Lévy-Véhel dans [ABCLV05] qui définissent ainsi le Processus Gaussien Multifractionnaire Généralisé de fonction de Hurst H par la représentation harmonisable suivante,

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H(t,\xi)+\frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

où H est une fonction définie sur $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ à valeurs dans $[a, b] \subset (0, 1)$.

Ici on va combiner l'approche multifractionnaire et l'approche multi-échelle. On va tout d'abord définir le Mouvement Brownien Multifractionnaire à l'infini d'échelles, puis donner des résultats de régularité et d'irrégularité cette fois ci ponctuels dans deux cas particuliers.

On conclura enfin dans un cas lacunaire sur des résultats d'autosimilarité asymptotique locale en tout point et sur la structure en tout point de l'espace tangent au processus dans un cas particulier.

6.1 Définition du Mouvement Brownien Multifractionnaire à l'infini d'échelles

On se donne maintenant une suite $\sigma = (\sigma_i)_i$ de réels bornée et $\mathbf{H} = (H_i)_i$ une famille de fonctions uniformément Höldériennes. On définit alors le processus $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ suivant,

$$(6.1.1) \quad B_{\mathbf{H},\sigma}(t) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sigma_{\ell} \int_{D_{\ell}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_{\ell}(t)+\frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

où $D_0 = \{\xi, |\xi| \leq 1\}$ et où pour tout ℓ ,

$$D_{\ell} = \{\xi, 2^{\ell-1}|\xi| \leq 2^{\ell}\}.$$

Remarque 6.1.1 Soit $H(t)$ une fonction β Höldérienne. Si on définit la suite d'échelles $\mathbf{H} = (H_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ et la suite d'amplitudes $\sigma = (\sigma_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall \ell \in \mathbb{N}, H_{\ell} = H(t), \sigma_{\ell} = 1,$$

le processus $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le Mouvement Brownien Multifractionnaire de paramètre H .

Ce qui suit permettra ainsi de retrouver en particulier les résultats d'irrégularité ponctuelle du Mouvement Brownien Multifractionnaire déjà établis dans [BDG06].

De même si l'on se donne une suite de fonctions $\mathbf{H} = (H_{\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ vérifiant des propriétés particulières détaillées en section 6.3.1 et que l'on pose pour tout ℓ , $\sigma_{\ell} = 1$, le processus $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est cette fois le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé de paramètres \mathbf{H} et $\lambda = 2$.

Dans la section suivante, on va se donner des critères de type Kolmogorov afin d'étudier la régularité et l'irrégularité ponctuelle de ce processus.

6.2 Quelques critères de régularité Höldérienne supérieure

La définition du processus multifractionnaire $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ par sa représentation harmonisable rend délicate l'utilisation des ondelettes car la famille \mathbf{H} d'indices de Hurst du processus dépend du paramètre t . On va donc utiliser des critères de type Kolmogorov qui vont donner des résultats d'irrégularité ponctuelle en tout point presque sûrement.

6.2.1 Quelques critères de régularité Höldérienne inférieure

On rappelle deux critères de détermination de l'exposant de Hölder inférieur d'un processus Gaussien.

Voici tout d'abord le critère de Kolmogorov classique (voir [KarShr98]) qui est utile dans [ALV99] pour minorer l'exposant de Hölder inférieur local d'un processus Gaussien :

Proposition 6.2.1 *Soit I un intervalle borné et $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien centré.*

On suppose qu'il existe un réel α strictement compris entre 0 et 1 et une constante positive C_0 telle que :

$$(6.2.1) \quad \forall (t, t') \in I^2, \mathbb{E}(|X(t) - X(t')|^2) \leq C_0 |t - t'|^{2\alpha},$$

alors il existe $\{\tilde{X}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ modification continue de $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ telle que pour tout ε positif.

$$(6.2.2) \quad \mathbb{P}\left(\sup_{0 < |t-t'| < h(\omega)} \left(\frac{|\tilde{X}(t) - \tilde{X}(t')|}{|t - t'|^{\alpha-\varepsilon}}\right)\right) = 1,$$

$h(\omega)$ étant une fonction p.s. positive.

Ceci entraîne en particulier que :

$$(6.2.3) \quad p.s. \forall s \in I \underline{h}_X(s) \geq \alpha.$$

Pour majorer l'exposant de Hölder inférieur ponctuel d'un processus Gaussien, dans [ALV99] on se sert du résultat suivant :

Proposition 6.2.2 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} et $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien centré. On se donne s un point de I .*

On suppose qu'il existe un réel α strictement compris entre 0 et 1 et que pour tout réel positif ε il existe une suite décroissante de réels positifs $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$(6.2.4) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{E}(|X(s + h_n) - X(s)|^2) \geq C_0 |h_n|^{2\alpha+\varepsilon},$$

alors on a p.s.

$$(6.2.5) \quad \underline{h}_X(s) \leq \alpha.$$

On va donner maintenant deux critères analogues servant successivement à minorer puis à majorer l'exposant de Hölder supérieur d'un processus Gaussien.

6.2.2 Deux critères de Régularité Höldérienne supérieure

On va énoncer maintenant une proposition qui permettra de minorer l'exposant de Hölder supérieur d'un processus Gaussien.

Proposition 6.2.3 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On se donne $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien centré et s un point de I .*

On fait alors les deux hypothèses suivantes :

1. *Il existe C_0 constante positive telle que :*

$$(6.2.6) \quad \forall (t, t') \in I^2, \mathbb{E}(|X(t) - X(t')|^2) \leq C_0^2 |t - t'|^{2a},$$

pour un certain réel positif a .

2. *Pour toute constante positive C , il existe une suite strictement croissante d'entiers $(j_n)_n$ telle que :*

$$(6.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \leq C \inf(2^{-j_n \alpha}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)} 2^{-j}), \end{array} \right.$$

pour un certain réel α compris strictement entre 0 et 1,

alors pour la suite donnée par la propriété (6.2.13) :

$$(6.2.8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \forall j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}, \\ \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \leq C \inf(2^{-j_n \alpha(1-\varepsilon)}, 2^{j_{n+1}(1-\alpha)(1-\varepsilon)} 2^{-j(1-\varepsilon)}). \end{array} \right.$$

En particulier p.s.,

$$\bar{h}_X(s) \geq \alpha.$$

On a aussi un résultat permettant de majorer l'exposant de Hölder ponctuel supérieur en un point donné :

Proposition 6.2.4 *Soit I un intervalle de \mathbb{R} , $\{X(t)\}_{t \in I}$ et s un point de I . On suppose qu'il existe un réel α strictement compris entre 0 et 1 tel que :*

Pour tout réel positif ε , il existe un réel positif r_0 et une constante positive C_0 tels que pour tout réel positif r inférieur ou égal à r_0 :

$$(6.2.9) \quad \sup_{|h| \leq r} \mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \geq C_0 r^{2\alpha+\varepsilon},$$

alors p.s.

$$\bar{h}_X(s) \leq \alpha.$$

Remarque 6.2.5 *La propriété 6.2.9 est équivalente à la propriété suivante :*

Pour tout réel positif ε , il existe un entier j_0 et une constante positive C_0 tels que pour tout entier j supérieur ou égal à j_0 :

$$(6.2.10) \quad \sup_{|h| \leq 2^{-j}} \mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \geq C_0 2^{-j(2\alpha+\varepsilon)}.$$

L'hypothèse plus forte :

Pour tout réel positif ε , il existe un entier j_0 et une constante positive C_0 tels que pour tout entier j supérieur ou égal à j_0 :

$$(6.2.11) \quad \mathbb{E}(|X(s + 2^{-j}) - X(s)|^2) \geq C_0 2^{-j(2\alpha+\varepsilon)},$$

implique donc la propriété 6.2.9.

Les démonstrations de ces deux critères sont maintenant faites dans les deux sections suivantes.

6.2.3 Démonstration de la proposition 6.2.3

On va passer par l'intermédiaire du résultat plus général suivant :

Proposition 6.2.6 Soit I un intervalle de \mathbb{R} . On se donne $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ un processus gaussien centré et s un point de I .

On fait alors les deux hypothèses suivantes :

1. Il existe C_0 constante positive telle que :

$$(6.2.12) \quad \forall (t, t') \in I^2, \mathbb{E}(|X_t - X_{t'}|^2) \leq C_0^2 |t - t'|^{2a},$$

pour un certain réel positif a .

2. Il existe $\tilde{\theta}$ un module de continuité faible d'ordre 1 et $r_{\tilde{\theta}}$ un réel positif tels que :

$$(6.2.13) \quad \forall r \leq r_{\tilde{\theta}} \sup_{|h| \leq r} \mathbb{E}(|X_{s+h} - X_s|^2) \leq \tilde{\theta}^2(r),$$

alors :

Pour le module de continuité faible $\tilde{\theta}$ d'ordre 1 et le réel $r_{\tilde{\theta}}$ donnés par la propriété (6.2.13) :

$$(6.2.14) \quad \forall \text{leq } r_{\tilde{\theta}} \sup_{|h| \leq r} \mathbb{E}(|X_{s+h} - X_s|^2) \leq C_0 \tilde{\theta}^{1-\varepsilon}(r) |\log(\tilde{\theta}(r))|^\beta,$$

le réel β étant un réel supérieur à 1 quelconque, la constante C_0 étant une variable aléatoire presque sûrement positive à moments de tout ordre fini ne dépendant pas du module de continuité $\tilde{\theta}$.

Preuve. Dans ce qui suit on suppose (quitte à s'y ramener par changement de variable) que $I = [0, 1]$. Par (6.2.3) on sait que p.s. les trajectoires du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ sont continues (et même uniformément Höldériennes).

Soit Ω_1 , de probabilité 1 tel que pour tout $\omega \in \Omega_1$, la fonction $X(\cdot)$ est continue sur I . On peut alors, sur $[0, 1]$, décomposer la fonction continue $X(\cdot)$ dans la base de Schauder et donc écrire que (les notations sont celles du chapitre précédent) :

Pour tout $\omega \in \Omega_1$ et tout t dans $[0, 1]$ on a :

$$X(t) = X(0)\varphi_0(t) + (X(1) - X(0))\varphi_1(t) + \sum_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{2^j-1} 2^j (X(\frac{2k}{2^{j+1}}) - 2X(\frac{2k+1}{2^{j+1}}) + X(\frac{2k+1}{2^{j+1}}))\varphi_{j,k}(t),$$

la convergence étant uniforme sur $[0,1]$.

Comme dans le chapitre 1, pour tout $j \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$, les notations suivantes :

$$c_{j,k}(\omega) = X\left(\frac{2k+2}{2^{j+1}}\right) - 2X\left(\frac{2k+1}{2^{j+1}}\right) + X\left(\frac{2k}{2^{j+1}}\right),$$

et

$$\sigma_{j,k}^2 = \mathbb{E}(c_{j,k}^2).$$

Comme par hypothèse $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est un processus gaussien centré, les variables aléatoires $\xi_{j,k} = \frac{c_{j,k}}{\sigma_{j,k}}$ suivent une loi normale centrée réduite. On va utiliser le résultat rappelé dans [MST99] suivant :

Lemme 6.2.7 *Si $(\xi_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires, suivant toutes la loi normale centrée réduite, mais pas forcément indépendantes il existe alors Ω_2 de probabilité 1 et une variable aléatoire $C_0(\omega)$ aux moments de tous ordres finis tels que :*

$$\forall \omega \in \Omega_2, |\xi_{j,k}| \leq C_0(\omega) \sqrt{\log(2 + |j|)} \sqrt{\log(2 + |k|)}$$

Dans le cas présent, $j \geq 0$ et $k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}$, on sait donc que :

$$\forall \omega \in \Omega_2, \forall j \geq 0, \forall k \in \{0, \dots, 2^j - 1\}, |\xi_{j,k}| \leq C_0(\omega) \sqrt{\log(2 + j)} \sqrt{j + 1}$$

Par le lemme 6.2.7 on va déduire une majoration des coefficients dominants :

$$d_j(s) = \sup\{|c_{\ell,m}|, \text{ avec } \ell \text{ et } m \text{ tels que } : \frac{k_j(s) - 1}{2^j} \leq \frac{m}{2^\ell} < \frac{k_j(s) + 2}{2^j}\},$$

$k_j(s) = [2^j s]$. C'est le lemme qui suit.

Lemme 6.2.8 *Pour tout ε positif, $j \geq j_c$ et $\omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ on a la majoration suivante :*

$$d_j(s) \leq C_0(\omega) \theta (2^{-j})^{1-\varepsilon}$$

Preuve. En effet si $\frac{k_j(s)-1}{2^j} \leq \frac{m}{2^\ell} < \frac{k_j(s)+2}{2^j}$ on a :

$$\left|s - \frac{m}{2^\ell}\right| \leq \frac{1}{2^{j-1}} \text{ et } \left|s - \frac{m+1}{2^\ell}\right| \leq \frac{1}{2^{j-1}}$$

donc par 6.2.9 :

$$\begin{aligned} \sigma_{\ell,m} &= \mathbb{E}(|c_{\ell,m}|^2) \leq \theta^2 (2^{-j+1}) \\ &\leq \widetilde{C}_0 \theta^2 (2^{-j}) \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que θ est un module de continuité.

De même par 6.2.12 :

$$\sigma_{\ell,m} \leq C_0(\omega)^2 \left(\frac{1}{2^{\ell+1}}\right)^{2a}$$

donc au final :

$$\sigma_{\ell,m} \leq C_0(\omega)^2 \inf\left(\left(\frac{1}{2^{\ell+1}}\right)^{2a}, \theta^2 (2^{-j+1})\right)$$

Ceci moyennant le lemme 6.2.7 et la définition des $\xi_{\ell,m}$ permet, si

$$\frac{k_j(s) - 1}{2^j} \leq \frac{m}{2^l} < \frac{k_j(s) + 2}{2^j},$$

d'aboutir à :

$$\begin{aligned} |c_{\ell,m}| &\leq C_0(\omega) \sqrt{\log(2+\ell)} \sqrt{\ell+1} \sigma_{\ell,m}^\varepsilon \sigma_{\ell,m}^{1-\varepsilon} && \text{pour } \varepsilon \text{ positif,} \\ &\leq \widetilde{C}_0(\omega) \sqrt{\log(2+\ell)} \sqrt{\ell+1} 2^{-2\ell\varepsilon} \theta(2^{-j})^{1-\varepsilon} \end{aligned}$$

Soit alors

$$K_0(\omega) = C_0(\omega) \sup_{\ell \geq 0} (\log(2+\ell) \sqrt{\ell+1} 2^{-2\ell\varepsilon} \theta(2^{-j})^{1-\varepsilon})$$

on a bien le résultat voulu. \square

On est donc en mesure d'appliquer les résultats du chapitre précédent sur l'irrégularité ponctuelle. Ce qui permet de démontrer le critère annoncé. \square

6.2.4 Démonstration de la proposition 6.2.4

On peut utiliser les critères ondelettes dans la base de Schauder comme cela a été fait dans la section précédente. On donne une autre preuve purement probabiliste.

On utilise la remarque 6.2.5 et on souhaite montrer que, C_0 étant la constante intervenant dans la propriété 6.2.9, on a :

$$p.s. \exists j_0 \forall j \geq j_0 \ Y_j = \sup_{|h| \leq 2^{-j}} (|X(s+h) - X(s)|) \geq C_0 2^{-j(\alpha+\varepsilon)}$$

soit :

$$P(\liminf \{Y_j \geq C_0 2^{-j(\alpha+\varepsilon)}\}) = 1,$$

ce qui est équivalent à

$$P(\limsup \{Y_j \leq C_0 2^{-j(\alpha+\varepsilon)}\}) = 0.$$

Soit $|h_j|$ tel que :

$$\sigma_{h_j} = \mathbb{E}(|X(s+h_j) - X(s)|^2) \geq C_0 2^{-j(2\alpha + \frac{3\varepsilon}{2})}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_j \leq C_0 2^{-j}) &\leq \mathbb{P}(|X(s+h_j) - X(s)| \leq C_0 2^{-j(\alpha+\varepsilon)}) \\ &\leq P\left(\frac{|X(s+h_j) - X(s)|}{\sigma_{h_j}} \leq C_0 2^{-j(\frac{\varepsilon}{4})}\right) \\ &\leq C_0 2^{-j(\frac{\varepsilon}{4})} \end{aligned}$$

La dernière inégalité découle du fait que :

$$\frac{|X(s+h_j) - X(s)|}{\sigma_{h_j}}$$

est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite. Comme

$$\sum_{j \geq 0} \mathbb{P}(Y_j \leq C_0 2^{-j}) < +\infty,$$

le lemme de Borel-Cantelli implique le résultat.

On souhaite maintenant appliquer ce qui précède à l'étude de la régularité Höldérienne supérieure du Mouvement Brownien Multifractionnaire à infinité d'échelles.

6.3 Deux exemples de Mouvements Browniens Multifractionnaires à infinité d'échelles

On va donner ici deux exemples différents de Mouvement Brownien Multifractionnaire à infinité d'échelles pour lequel, en tout point presque sûrement exposant de Hölder inférieur et supérieur différent.

6.3.1 Le cas non lacunaire d'un Mouvement Brownien Multifractionnaire généralisé

On supposera ici que la suite $\sigma = (\sigma_j)_{j \in \mathbb{N}}$ vérifie,

$$\forall j \geq 0, \sigma_j = 1.$$

Le processus considéré sera donc non lacunaire et on retrouvera un Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé. On fera des hypothèses particulières sur la suite d'échelles \mathbf{H} . On rappelle la définition suivante,

Définition 6.3.1 *La fonction f définie sur \mathbb{R} est (β, c) Höldérienne si :*

$$\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R} \text{ tel que } |t_2 - t_1| < 1 \text{ on a : } |f(t_2) - f(t_1)| \leq c|t_2 - t_1|^\beta$$

On va maintenant définir la notion de famille d'échelles admissibles :

Définition 6.3.2 *Soit $\mathbf{H} = (H_\ell)_\ell$ une famille de fonctions (β, c_ℓ) Höldériennes à valeurs dans $[a, b] \subset (0, 1)$. On notera \underline{H} et \overline{H} les fonctions définies par*

$$\begin{aligned} \underline{H}(t) &= \liminf_{n \rightarrow +\infty} (H_n) \\ \overline{H}(t) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} (H_n) \end{aligned}$$

On dit que la suite d'échelles $\mathbf{H} = (H_\ell)_\ell$ est admissible si les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et s réel, il existe $j_0 = j_0(s, \varepsilon)$ et $\eta = \eta(s, \varepsilon)$ tel que pour tout $j \geq j_0$ et $|h| \leq \eta$ on ait,*

$$(6.3.1) \quad H_j(s+h) \geq \underline{H}(s) - \varepsilon.$$

2. *Pour tout t ,*

$$(6.3.2) \quad \sup_t (\underline{H}(t)) \leq \sup_t (\overline{H}(t)) < \beta, \sup_{j \geq J} (c_j) = O(J).$$

3. *Pour tout ε positif et s réel, il existe une suite d'entiers strictement croissante $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (dépendant à priori du réel s) telle que pour tout entier n :*

$$(6.3.3) \quad H_{j_n}(s) \geq \overline{H}(s) - \varepsilon,$$

et pour tout entier n et tout entier j de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$,

$$(6.3.4) \quad jH_j(s) \geq \sup(j_n H_{j_n}(s) + \varepsilon(j - j_n), j_{n+1}(H_{j_{n+1}}(s) - 1) + j).$$

Remarque 6.3.3 *On peut se poser la question de l'existence d'une suite d'échelles admissibles. On sait déjà que si l'on se donne une fonction H β Höldérienne et que l'on définit la suite $\mathbf{H} = (H_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ par $H_\ell = H(t)$, la suite \mathbf{H} est bien une suite d'échelle admissible.*

Dans la suite, on montrera qu'en fait il est possible de trouver une suite de fonctions non seulement vérifiant toutes ces conditions, mais avec en plus en tout point une limite inférieure et une limite supérieure différente.

Le Mouvement Brownien Multifractionnaire à infinité d'échelles $\{B_{\mathbf{H},\sigma}\}$ est alors un Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé de paramètre \mathbf{H} et $\lambda = 2$. On notera dans cette section,

$$X(\cdot) = B_{\mathbf{H},\sigma}(\cdot).$$

et on va étudier les propriétés d'irrégularité ponctuelle de ce processus.

Remarque 6.3.4 *On va faire quelques commentaires sur les hypothèses ci-dessus. Les propriétés (6.3.1) et (6.3.2) sont requises dans [ALV99] lors de la construction du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé afin de pouvoir estimer l'exposant de Hölder inférieur du processus en tout point (au sens faible).*

Ce sont les propriétés (6.3.1) et (6.3.2) qui vont permettre d'estimer l'exposant de Hölder supérieur.

6.3.1.1 Enoncé des résultats obtenus

On rappelle maintenant les résultats déjà démontrés dans [ALV99] concernant la régularité Höldérienne inférieure du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé, découlant des Propositions 6.2.1 et 6.2.2.

Proposition 6.3.5 *Pour tout réel s on a p.s. $\underline{h}_X(s) = \underline{h}_X(s) = \underline{H}(s)$.*

On souhaite, à l'aide des propositions 6.2.6 et ?? minorer puis majorer l'exposant de Hölder supérieur ponctuel du processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

On a la minoration suivante

Proposition 6.3.6 *Supposons que la suite \mathbf{H} est une suite admissible, pour tout réel s on a p.s.*

$$\bar{h}_X(s) \geq \bar{H}(s).$$

On a de même une majoration de l'exposant de Hölder ponctuel supérieur du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$:

Proposition 6.3.7 *Supposons que la suite \mathbf{H} est une suite admissible, pour tout réel s on a p.s.*

$$\bar{h}_X(s) \geq \bar{H}(s).$$

En résumé on a montré que :

Proposition 6.3.8 *Pour tout réel s on a p.s.*

$$\bar{h}_X(s) = \bar{H}(s).$$

On voit qu'on a ainsi retrouvé le résultat déjà démontré dans [BDG06] (théorème 4.1) sur le Mouvement Brownien Multifractionnaire :

Corollaire 6.3.9 *Soit H une fonction β Höldérienne. Alors le Mouvement Brownien Multifractionnaire de paramètre H vérifie :*

Pour tout réel s on a p.s.

$$\underline{h}_X(s) = \underline{h}_X(s) = \bar{h}_X(s) = H(s).$$

On va démontrer ces deux propositions dans les deux sections suivantes.

6.3.1.2 Démonstration de la Proposition 6.3.6

Soit $\varepsilon > 0$ un réel positif fixé, la suite $\mathbf{H} = (H_j)_j$ étant admissible, on sait qu'il existe une suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que les propriétés (6.3.3) et (6.3.4) soient vérifiées. Soit alors N un entier fixé et J un entier de $\{j_N, \dots, j_{N+1} - 1\}$.

On considère un réel h tel que $|h| \leq 2^{-J}$. L'objectif est de majorer $\mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2)$. Tout d'abord, par définition du Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$:

$$\mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{D_\ell} \left| \frac{e^{i(s+h)\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s+h)+\frac{1}{2}}} - \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s)+\frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi$$

On suit la même démarche que dans [ALV99]. On commence par démontrer le lemme :

Lemme 6.3.10 *On a :*

$$\mathbb{E}(|X(s+h) - X(s)|^2) \leq C_0(R + S + T + U),$$

où

$$\begin{aligned} R &= 2 \int_{D_0} |e^{i(s+h)\xi} - 1|^2 (|\xi|^{-H_0(s+h)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-H_0(s)-\frac{1}{2}})^2 d\xi, \\ S &= 8 \sum_{\ell=1}^{+\infty} \int_{D_\ell} (|\xi|^{-H_\ell(s+h)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-H_\ell(s)-\frac{1}{2}})^2 d\xi, \\ T &= 2 \int_{D_0} |\xi|^{-2H_0(s+h)-1} |e^{ih\xi} - 1|^2 + 2 \sum_{\ell=1}^{J-1} \int_{D_\ell} |\xi|^{-2H_\ell(s+h)-1} |e^{ih\xi} - 1|^2 d\xi, \\ U &= 2 \sum_{\ell=J}^{+\infty} \int_{D_\ell} |\xi|^{-2H_\ell(s+h)-1} |e^{ih\xi} - 1|^2 d\xi. \end{aligned}$$

On utilise ensuite la majoration des réels R, S, T qui est donnée dans [ALV99] et que l'on rappelle :

Lemme 6.3.11 *On a :*

$$\begin{aligned} R &\leq 2((|s| + H_0)^2 \left(\int_{D_0} \frac{(\log(\xi))^2}{|\xi|^{2b-1}} d\xi + \int_{D_1} \frac{(\log(\xi))^2}{|\xi|^{2a-1}} d\xi \right)) |h|^{2\beta} \\ S &\leq 24(\log(2))^2 \sum_{j=1} j^2 2^{-(j-1)2a} c_j^2 |h|^{2\beta} \\ T &\leq 2 \left(\int_{D_0} |\xi|^{-2b+1} d\xi + \int_{D_1} |\xi|^{-2a+1} d\xi \right) |h|^2 + 2 \left(\int_{1 < |\xi| < 2^J} |\xi|^{-2a+1} d\xi \right) |h|^2 \end{aligned}$$

Remarque 6.3.12 Par hypothèse $\sup_t \bar{H}(t) < \beta$ donc chacun des termes précédents peut, à partir d'un certain rang, pour tout C et ε positifs être rendu inférieur à $C|h|^{2\bar{H}(s)-2\varepsilon}$.

Le point délicat est la majoration de U à laquelle on va s'intéresser maintenant :

Lemme 6.3.13 Pour tout ε positif, si J suffisamment grand, on a la majoration suivante, :

$$U \leq 2 K(a, b) \left(\sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-j(H_j(s)-\varepsilon)} + 2 \sum_{j=j_{N+1}}^{+\infty} 2^{-j(H_j(s)-\varepsilon)} \right),$$

la constante $K(a, b)$ ne dépendant que des réels a et b .

Preuve.

$$U = 2 \sum_{j=J}^{+\infty} \int_{2^{j-1} < |\xi| < 2^j} |\xi|^{-2H_j(s+h)-1} |e^{ih\xi} - 1|^2 d\xi$$

Par le changement de variable $\xi = 2^j u$ on obtient :

$$U \leq 2 \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-jH_j(s+h)} \left(\int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} |u|^{-2H_j(s+h)-1} |e^{ih\frac{u}{\lambda^j}} - 1|^2 du \right)$$

Comme pour tout entier j , la fonction H_j est à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$, cela implique :

$$\begin{aligned} U &\leq 8 \sum_{j=J}^{+\infty} 2^{-jH_j(s+h)} \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} |u|^{-2b-1} du \\ &\leq 2 K(a, b) \left(\sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-jH_j(s+h)} + 2 \sum_{j=j_{N+1}}^{+\infty} 2^{-jH_j(s+h)} \right) \end{aligned}$$

en posant $K(a, b) = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} |u|^{-2b-1} du$.

On utilise alors la régularité Höldérienne des fonctions H_j et l'hypothèse $|h| \leq 2^{-J}$.

En effet pour tout entier j supérieur à J ,

$$jH_j(s+h) \geq jH_j(s) - c_j jh$$

Or $\sup_{j \geq J} (c_j) = O(J)$, donc $c_j h \leq J^2 2^{-J} \leq \varepsilon$ pour J assez grand. \square

On va ainsi pouvoir conclure à l'aide du lemme suivant :

Lemme 6.3.14 Pour tout réel positif ε , toute constante positive C , et tout entier J suffisamment grand, on peut majorer U de la manière suivante :

$$U \leq C \inf(2^{-j_N(\bar{H}(s)-2\varepsilon)}, 2^{-j_{N+1}(\bar{H}(s)-2\varepsilon-1)-J}).$$

Preuve. A ce stade là on va utiliser la propriété (6.3.4).

Pour tout $n \geq N$ et $j \in \{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$ et t réel on a :

$$\begin{aligned} jH_j(s) &\geq j_n H_{j_n}(s) + \varepsilon(j - j_n), \\ jH_j(s) &\geq j_{n+1}(H_{j_{n+1}}(s) - 1) + j, \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-jH_j(s)} &\leq 2^{-j_N H_{j_N}(s)} \sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-\varepsilon(j-j_N)} \\ \sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-jH_j(s)} &\leq 2^{-j_{N+1}(H_{j_{N+1}}(s)-1)} \sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-j} = 2^{-j_{N+1}(H_{j_{N+1}}-1)-J} \\ \sum_{j=j_{N+1}}^{+\infty} 2^{-jH_j(s)} &\leq 2^{-j_{N+1}H_{j_{N+1}}(s)} \sum_{j=j_{N+1}}^{+\infty} 2^{-\varepsilon(j-j_{N+1})} \end{aligned}$$

Comme le réel ε est positif, les séries $\sum_{j=J}^{j_{N+1}-1} 2^{-\varepsilon(j-j_N)}$ et $\sum_{j=j_{N+1}}^{+\infty} 2^{-\varepsilon(j-j_{N+1})}$ convergent.

Par croissance de la suite d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a au final :

Pour tout entier N positif, pour tout entier J de $\{j_N, \dots, j_{N+1} - 1\}$ et tout réel h tel que $|h| \leq 2^{-J}$

$$U \leq 2^\varepsilon \inf(2^{-j_N H_{j_N}(s)}, 2^{-j_{N+1}(H_{j_{N+1}}(s)-1)-J}).$$

On utilise maintenant la propriété (6.3.3) :

Pour tout N :

$$H_{j_N}(s) \geq \overline{H}(s) - \varepsilon.$$

Donc :

$$\begin{aligned} U &\leq 2^\varepsilon \inf(2^{-j_N(\overline{H}(s)-\varepsilon)}, 2^{-j_{N+1}(\overline{H}(s)-\varepsilon-1)-J}) \\ &\leq C 2^\varepsilon \inf(2^{-j_N(\overline{H}(s)-2\varepsilon)}, 2^{-j_{N+1}(\overline{H}(s)-2\varepsilon-1)-J}) \end{aligned}$$

si N est assez grand. Ce qui est le résultat attendu. \square

On conclut enfin en tenant compte de $|h| \leq 2^{-J}$ et en appliquant la Proposition 6.2.6.

6.3.1.3 Démonstration de la Proposition 6.3.7

Il suffit de montrer que pour tout réel positif ε , il existe un entier j_0 et une constante positive C_0 tels que si $j \geq j_0$:

$$(6.3.5) \quad \mathbb{E}(|X(s+2^{-j}) - X(s)|^2) \geq C_0 2^{-j(2\overline{H}(s)+\varepsilon)}$$

Soit j un entier positif, par définition,

$$\mathbb{E}(|X(s+2^{-j}) - X(s)|^2) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{e^{i(s+2^{-j})\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s+2^{-j})+\frac{1}{2}}} - \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s)+\frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi$$

On remarque que :

$$\mathbb{E}(|X(s + 2^{-j}) - X(s)|^2) \geq \int_{D_j} \left| \frac{e^{i(s+2^{-j})\xi} - 1}{|\xi|^{H_j(s+2^{-j})+\frac{1}{2}}} - \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H_j(s)+\frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi$$

On fait alors la minoration :

$$\begin{aligned} \|X(s + 2^{-j}) - X(s)\|_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}(|X(s + 2^{-j}) - X(s)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_{D_j} |\xi|^{-2H_{j+1}(s)-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j}\xi} - 1|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - 2 \left(\int_{D_j} (|\xi|^{-H_{j+1}(s)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-H_j(s+h)-\frac{1}{2}})^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Soit maintenant un réel ε positif fixé, et soit j_0 un entier tel que pour tout $j \geq j_0$ on ait

$$H_j(s) \leq \bar{H}(s) + \varepsilon.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{D_j} |\xi|^{-2H_{j+1}(s)-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j}\xi} - 1|^2 d\xi &\geq \int_{D_j} |\xi|^{-2\bar{H}(s)-\varepsilon-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j}\xi} - 1|^2 d\xi \\ &\geq 2^{-2j(\bar{H}(s)+\varepsilon)} \int_{D_1} u^{-2\bar{H}(s)-2\varepsilon-1} |e^{iu} - 1|^2 du \end{aligned}$$

par le changement de variable $u = 2^{-j}\xi$.

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} &\int_{D_j} (|\xi|^{-H_{j+1}(s)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-H_j(s+2^{-j})-\frac{1}{2}})^2 d\xi \\ &\leq 3((j+1)^2 \log(2))^2 2^{-2(a+\beta-\bar{H}(s)-\varepsilon)j} c_{j+1}^2 h_j^{2(\bar{H}(s)+\varepsilon)} \end{aligned}$$

Soit pour j assez grand, comme $c_j = O(j)$:

$$\|X(s + 2^{-j}) - X(s)\|_{L^2(\Omega)} \geq \frac{\sqrt{(2)}}{2} \left(\int_{D_1} u^{-2\bar{H}(s)-2\varepsilon-1} |e^{iu} - 1|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} 2^{-2j(\bar{H}(s)+\varepsilon)}$$

Ce qui donne bien le résultat souhaité.

Les deux propositions 6.2.4 et 6.2.3 ayant été démontrées, il reste maintenant à montrer l'existence de suite d'échelles admissibles $\mathbf{H} = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

6.3.1.4 Un exemple de suite d'échelles admissibles

Soit \underline{H} et \bar{H} deux fonctions β Höldériennes à valeurs dans un intervalle $[a, b]$ inclus dans $(0, \min(1, \beta))$.

Dans ce qui suit, on va montrer qu'on peut construire une suite (H_j) de fonctions ne prenant que les deux valeurs \underline{H} et \bar{H} et vérifiant toutes les conditions d'admissibilité posées plus haut.

On se donne un réel positif ε_0 tel que $\varepsilon_0 < \inf(a, 1 - b)$.

On définit alors par récurrence deux suites strictement croissantes d'entiers $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(j_{n,1})_{n \in \mathbb{N}}$. L'entier j_0 est pris quelconque, supérieur à 1. L'entier $j_{0,1}$ est lui pris tel que,

$$j_{0,1} \geq \frac{b - \varepsilon_0}{a - \varepsilon_0} j_0.$$

Supposons alors avoir défini par récurrence les entiers

$$j_0, \dots, j_n, j_{0,1}, \dots, j_{n,1}.$$

On prend alors pour j_{n+1} et $j_{n+1,1}$ deux entiers quelconques tels que,

$$j_{n+1} \geq \frac{1-a}{1-b} j_{n,1}, \quad j_{n+1,1} \geq \frac{b - \varepsilon_0}{a - \varepsilon_0} j_{n+1}.$$

A partir de ces deux suites on construit ainsi la suite de fonctions $\mathbf{H} = (H_j)_j$ suivante :
Pour tout entier n et tout entier j de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$,

$$\begin{aligned} \text{Si } j = j_{n,1}, \quad H_j &= \underline{H}, \\ \text{Si } j \neq j_{n,1}, \quad H_j &= \overline{H}. \end{aligned}$$

Proposition 6.3.15 *La suite de fonctions $\mathbf{H} = (H_j)_j$ définie plus haut est une suite d'échelles admissibles. La suite intervenant dans les propriétés 6.3.3 6.3.4 est alors la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie plus haut.*

Le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ défini à partir de cette suite est donc un processus gaussien vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \text{ p.s. }, \underline{h}(t) = \underline{H}(t) < \overline{h}(t) = \overline{H}(t).$$

Preuve. Les propriétés (6.3.1) et (6.3.2) sont, du fait que \underline{H} et \overline{H} sont β Höldériennes, automatiquement vérifiées.

Le point essentiel va être de montrer les propriétés 6.3.3 et 6.3.4. Soit donc $\varepsilon < \varepsilon_0$ positif, on prend dans les équations (6.3.3) et (6.3.4) pour suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite $(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie plus haut. La propriété (6.3.3) est alors automatiquement vérifiée.

Soit n un entier. Si j est un entier positif de $\{j_n, \dots, j_{n+1} - 1\}$ différent de $j_{n,1}$ on a bien :

$$jH_j(s) \geq \sup(j_n H_{j_n(s)} + \varepsilon(j - j_n), j_{n+1}(H_{j_{n+1}} - 1) + j)$$

car $H_j = H_{j_n} = H_{j_{n+1}} = \overline{H}$ et ε est inférieur à 1.

Il reste donc à traiter le cas $j = j_{n,1}$. Or pour tout réel s ,

$$j_{n,1}H_{j_{n,1}}(s) = j_{n,1}\underline{H}(s) \geq j_{n,1}a.$$

De plus,

$$\begin{aligned} j_n H_{j_n(s)} + \varepsilon(j - j_n) &= j_n \overline{H}(s) + \varepsilon(j - j_n) \\ &\leq j_n b + \varepsilon(j - j_n) \\ &\leq j_n b + \varepsilon_0(j - j_n) \end{aligned}$$

Par hypothèse,

$$j_{n,1} \geq \frac{b - \varepsilon_0}{a - \varepsilon_0} j_n$$

ce qui est exactement équivalent à,

$$j_n b + \varepsilon_0 (j_{n,1} - j_n) \leq j_{n,1} a.$$

Donc pour tout réel positif ε inférieur à ε_0 :

$$j_{n,1} H_{j_{n,1}}(s) \geq j_n H_{j_n}(s) + \varepsilon (j_{n,1} - j_n)$$

De même :

$$j_{n,1} H_{j_{n,1}}(s) \geq j_{n+1} (H_{j_{n+1}} - 1) + j_{n,1}.$$

On a donc bien la minoration voulue pour $j = j_{n,1}$. □

6.3.2 Le cas d'un Mouvement Brownien Multifractionnaire lacunaire

Les notations sont celles de la section précédente. On se donne deux fonctions β -Höldériennes \underline{H} et \overline{H} . On définit alors le Mouvement Brownien Multifractionnaire $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ lacunaire suivant,

$$(6.3.6) \quad Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{D_{j_n}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\overline{H}(t) + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi) + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{D_{j_{n,1}}} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H}(t) + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi)$$

On va s'intéresser à ce processus de deux points de vue. On va tout d'abord estimer son exposant de Hölder inférieur et supérieur puis s'intéresser aux propriétés d'autosimilarité locales vérifiées par ce processus.

6.3.2.1 Propriétés de régularité et d'irrégularité ponctuelle du Mouvement Brownien Multifractionnaire lacunaire

On va utiliser cette fois ci les critères de régularité de la section 6.2.1 pour démontrer les deux résultats suivants :

Proposition 6.3.16 *Pour tout réel s ,*

$$p.s. \underline{h}_X(s) = \underline{H}(s).$$

Preuve. La preuve est faite en section 6.3.2.3. □

Proposition 6.3.17 *Pour tout réel s ,*

$$p.s. \overline{h}_X(s) \geq \overline{H}(s).$$

Preuve. La preuve est faite en section 6.3.2.3. □

6.3.2.2 Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale dans le cas lacunaire

De même que dans le cas du Mouvement Brownien Fractionnaire à infiniité d'échelles du chapitre 1, on a des propriétés d'autosimilarité asymptotique locale en tout point suivant des échelles particulières :

Proposition 6.3.18 *Soit t_0 un réel fixé. Le Mouvement Brownien Fractionnaire lacunaire $\{\tilde{B}_{\underline{H}(t_0)}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'indice de Hurst $\underline{H}(t_0)$ défini par,*

$$\tilde{B}_{\underline{H}(t_0)}(t) = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H}(t_0) + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

et le Mouvement Brownien Fractionnaire lacunaire $\{\tilde{B}_{\overline{H}(t_0)}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ d'indice de Hurst $\overline{H}(t_0)$ défini par,

$$\tilde{B}_{\overline{H}(t_0)}(t) = \int_{\frac{1}{2} < |\xi| < 1} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{\overline{H}(t_0) + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

sont deux processus tangents au Mouvement Brownien Multifractionnaire à infiniité d'échelles $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ défini par l'équation (6.3.6).

Le Mouvement Brownien Multifractionnaire à infiniité d'échelles $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ possède ainsi en tout point plusieurs processus tangents.

Preuve. La démonstration est faite en section 6.3.2.4. □

6.3.2.3 Démonstration des la proposition 6.3.16

On remarque que le processus $\{Y(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ s'écrit,

$$Y(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sigma_j \int_{D_j} \frac{e^{it\xi} - 1}{|\xi|^{H_j(t) + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}(\xi),$$

avec pour tout j , $\sigma_j \in \{0, 1\}$ et donc pour tout réel h on a,

$$\mathbb{E}(|Y(t+h) - Y(t)|^2) \leq \mathbb{E}(|X(t+h) - X(t)|^2)$$

où le processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ est le Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé défini en section 6.3.1.4. On en déduit alors les deux minoration suivantes à s fixé,

$$\underline{h}_Y(s) \geq \underline{h}_X(s) \geq \underline{H}(s), \quad \overline{h}_Y(s) \geq \overline{h}_X(s) \geq \overline{H}(s).$$

Il reste donc à majorer l'exposant de Hölder inférieur, $\underline{h}_Y(s)$. Il suffit de montrer que pour tout réel positif ε il existe une constante positive C_0 tels que pour tout entier n :

$$(6.3.7) \quad \mathbb{E}(|Y(s + 2^{-j_{n,1}}) - Y(s)|^2) \geq C_0 2^{-j_{n,1}(2\underline{H}(s) + \varepsilon)}$$

Soit n un entier positif, par définition,

$$\mathbb{E}(|Y(s + 2^{-j_{n,1}}) - Y(s)|^2) = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \int_{D_\ell} \left| \frac{e^{i(s+2^{-j})\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s+2^{-j_{n,1}}) + \frac{1}{2}}} - \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{H_\ell(s) + \frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi$$

On remarque que :

$$\mathbb{E}(|Y(s + 2^{-j_{n,1}}) - Y(s)|^2) \geq \int_{D_{j_{n,1}}} \left| \frac{e^{i(s+2^{-j_{n,1}})\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H}(s+2^{-j_{n,1}})+\frac{1}{2}}} - \frac{e^{is\xi} - 1}{|\xi|^{\underline{H}(s)+\frac{1}{2}}} \right|^2 d\xi$$

On fait alors la minoration :

$$\begin{aligned} \|Y(s + 2^{-j_{n,1}}) - Y(s)\|_{L^2(\Omega)} &= \mathbb{E}(|Y(s + 2^{-j_{n,1}}) - Y(s)|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\geq \left(\int_{D_{j_{n,1}}} |\xi|^{-2\underline{H}(s)-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j_{n,1}}\xi} - 1|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad - 2 \left(\int_{D_{j_{n,1}}} (|\xi|^{-\underline{H}(s)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-\underline{H}(s+2^{-j_{n,1}})-\frac{1}{2}})^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_{D_{j_{n,1}}} |\xi|^{-2\underline{H}(s)-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j_{n,1}}\xi} - 1|^2 d\xi &\geq \int_{D_{j_{n,1}}} |\xi|^{-2\underline{H}(s)-\frac{1}{2}} |e^{i2^{-j_{n,1}}\xi} - 1|^2 d\xi \\ &\geq 2^{-2j_{n,1}\underline{H}(s)} \int_{D_1} u^{-2\underline{H}(s)-2\varepsilon-1} |e^{iu} - 1|^2 du \end{aligned}$$

par le changement de variable $u = 2^{-j}\xi$.

Ainsi on a comme \underline{H} est β Höldérienne :

$$\int_{D_{j_{n,1}}} (|\xi|^{-\underline{H}(s)-\frac{1}{2}} - |\xi|^{-\underline{H}(s+h)-\frac{1}{2}})^2 d\xi \leq 3((j_{n,1} + 1)^2 \log(2)^2 2^{-2(a+\beta-\underline{H}(s))j_{n,1}}) \beta^2 2^{-2j_{n,1}(\underline{H}(s))}.$$

Ce qui donne bien le résultat de majoration souhaité :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \text{ p.s.}, \underline{h}_Y(s).$$

6.3.2.4 Démonstration de la proposition 6.3.18

Le résultat de la proposition 6.3.18 découle du lemme suivant :

Lemme 6.3.19 *Pour tout réels t_0, u, v ,*

$$\begin{aligned} (6.3.8) \quad \lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}((Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}}u) - Y(t_0))(Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}}v) - Y(t_0)))}{2^{-2j_{n_0}\overline{H}(t_0)}} &= \int_{\frac{1}{2} < |\zeta| < 1} \frac{(e^{iu\zeta} - 1)(e^{-iv\zeta} - 1)}{|\zeta|^{2\overline{H}(t_0)+1}} d\zeta \\ &= \mathbb{E}(\widetilde{B}_{\overline{H}(t_0)}(u) \widetilde{B}_{\overline{H}(t_0)}(v)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (6.3.9) \quad \lim_{n_0 \rightarrow +\infty} \frac{\mathbb{E}((Y(t_0 + 2^{-j_{n_0,1}}u) - Y(t_0))(Y(t_0 + 2^{-j_{n_0,1}}v) - Y(t_0)))}{2^{-2j_{n_0,1}\underline{H}(t_0)}} &= \int_{\frac{1}{2} < |\zeta| < 1} \frac{(e^{iu\zeta} - 1)(e^{-iv\zeta} - 1)}{|\zeta|^{2\underline{H}(t_0)+1}} d\zeta \\ &= \mathbb{E}(\widetilde{B}_{\underline{H}(t_0)}(u) \widetilde{B}_{\underline{H}(t_0)}(v)), \end{aligned}$$

Preuve. On pose $\zeta = 2^{-j_{n_0}} \xi$,

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}((Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}} u) - Y(t_0))(Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}} v) - Y(t_0))) - 2^{-2j_{n_0}} \overline{H}(t_0) \int_{\frac{1}{2} < |\zeta| < 1} \frac{(e^{iu\zeta} - 1)(e^{-iv\zeta} - 1)}{|\zeta|^{2\overline{H}(t_0)+1}} d\zeta \\
 = & \mathbb{E}((Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}} u) - Y(t_0))(Y(t_0 + 2^{-j_{n_0}} v) - Y(t_0))) - \int_{D_{j_{n_0}}} \frac{(e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0}} v\xi} - 1)}{|\xi|^{2\overline{H}(t_0)+1}} d\xi \\
 = & \sum_{n=0}^{n_0-1} \int_{D_{j_n}} \frac{(e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0}} v\xi} - 1)}{|\xi|^{\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} u)+\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} v)+1}} d\xi + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int_{D_{j_n}} \frac{(e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0}} v\xi} - 1)}{|\xi|^{\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} u)+\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} v)+1}} d\xi \\
 & + \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{D_{j_{n,1}}} \frac{(e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0,1}} v\xi} - 1)}{|\xi|^{\underline{H}(t_0+2^{-j_{n_0,1}} u)+\underline{H}(t_0+2^{-j_{n_0,1}} v)+1}} d\xi \\
 & + \int_{D_{j_{n_0}}} (e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0}} v\xi} - 1)(|\xi|^{-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} u)-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} v)-1} - |\xi|^{-2\overline{H}(t_0)-1}) d\xi
 \end{aligned}$$

On majore successivement chacun des cinq termes. Les quatres premiers termes se majorent de manière similaire à ce qui a été fait dans le chapitre 1 en utilisant le fait que les deux fonctions \underline{H} et \overline{H} sont β Höldériennes avec $\beta > b$.

Le cinquième terme se majore en utilisant le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction,

$$\xi \mapsto e^{-(h+1)\log(|\xi|)}$$

sur l'intervalle $[\overline{H}(t_0 + 2^{-j_{n_0}} u) + \overline{H}(t_0 + 2^{-j_{n_0}} v), 2\overline{H}(t_0)]$.

On écrit que, en utilisant le caractère β Höldérien de la fonction \overline{H} ,

$$\begin{aligned}
 & \int_{D_{j_{n_0}}} (e^{i2^{-j_{n_0}} u\xi} - 1)(e^{-i2^{-j_{n_0}} v\xi} - 1)(|\xi|^{-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} u)-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} v)-1} - |\xi|^{-2\overline{H}(t_0)-1}) d\xi \\
 \leq & \int_{D_{j_{n_0}}} (|\xi|^{-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} u)-\overline{H}(t_0+2^{-j_{n_0}} v)-1} - |\xi|^{-2\overline{H}(t_0)-1}) d\xi \\
 \leq & |\overline{H}(t_0 + 2^{-j_{n_0}} u) + \overline{H}(t_0 + 2^{-j_{n_0}} v) - 2\overline{H}(t_0)| \int_{D_{j_{n_0}}} |\log(|\xi|)| |\xi|^{-2\overline{H}(t_0)-1+2^{-j_{n_0}}\beta c_0(u,v)} d\xi \\
 \leq & \beta 2^{-j_{n_0}\beta} \int_{D_{j_{n_0}}} |\log(|\xi|)| |\xi|^{-2\overline{H}(t_0)-1+\varepsilon} d\xi \\
 \leq & \beta 2^{-j_{n_0}\beta} j_{n_0} 2^{-2j_{n_0}(\overline{H}(t_0)+1-\varepsilon)} d\xi
 \end{aligned}$$

pour n_0 suffisamment grand. Ce qui combiné à la majoration des quatre autres termes permet d'avoir le résultat annoncé.

L'autre égalité se montre de manière exactement analogue. \square

On déduit de ce lemme la convergence, au sens des distributions finies dimensionnelles, annoncée.

On passe alors de la convergence au sens des distributions finies dimensionnelles à la convergence en distribution en remarquant que pour tous réels u, v ,

$$\mathbb{E}(|Y(x) - Y(y)|^2) \leq \max(|u - v|^{2a}, |u - v|^{2b})$$

On utilise alors les résultats de la proposition ?? rappelée au chapitre 1 pour conclure.

Chapitre 7

Etude de la régularité de champs gaussiens anisotropes

Ce chapitre a été écrit en collaboration avec B.Védel (Université de Vannes).

7.1 Introduction

Ce chapitre est, comme les précédents, centré sur le problème de la définition et de l'étude de notions pertinentes de régularité. Le point de vue adopté ici est néanmoins différent. Il ne s'agit plus d'étudier des fonctions ayant un comportement différent suivant des gammes d'échelles remarquables, mais d'étudier à l'aide d'outils adaptés la régularité (ou l'irrégularité) de signaux **anisotropes**, possédant donc des caractéristiques différentes suivant la direction considérée.

On rappelle qu'on est très naturellement confronté au problème d'avoir à traiter des données anisotropes. Cela est le cas par exemple en traitement d'images, en géophysique, en hydrologie....On pourra par exemple se reporter aux travaux par exemple de Davies et Hall ([DH99]), A.Bonami et A.Estrade ([BE03]), D.Benson et al.([Ben06]) pour plus d'information. Pour cette raison, de nombreux auteurs ont été amenés à proposer des modèles, très souvent aléatoires, permettant de rendre compte des comportements observés. On peut citer pour exemple le modèle du Drap Brownien Fractionnaire introduit par A.Kamont ([Kam96]) ou celui des Champs Browniens Fractionnaires Anisotropes définis par A.Estrade et A.Bonami dans [BE03]. On reviendra dans le chapitre suivant sur ces différents modèles.

Le travail qui va être fait ici va consister à étudier, du point de vue de la régularité, un de ces modèles, celui des champs stables par autosimilarité matricielle introduit récemment par H.Biermé, M.Meerschaert et H.P.Scheffler dans [BMS07]. Comme leur nom l'indique, la caractéristique principale de ces champs est qu'ils vérifient une propriété d'autosimilarité plus générale que la notion d'autosimilarité classique, la notion d'autosimilarité matricielle.

La notion d'autosimilarité ou d'invariance d'échelle est une notion qui apparait naturellement dans certains phénomènes physiques comme les nuages, le trafic internet, et qui est plus généralement une propriété fondamentale des objets fractals. Dans le cas des champs anisotropes, la notion d'autosimilarité classique, définie pour un champ $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ défini sur \mathbb{R}^d par

$$\{X(ax)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

pour un certain $H > 0$, étant par construction isotrope n'est plus adaptée. On est donc tout naturellement amené à introduire d'autres modèles de champs gaussiens anisotropes qui vérifient une relation d'autosimilarité compatible en quelque sorte avec l'anisotropie. On pourra par exemple se référer à [ADR00] où l'on considère une notion d'invariance d'échelle anisotrope pour décrire des phénomènes de turbulence. C'est ce qui a amené à l'introduction d'un nouveau modèle, celui des champs stables par autosimilarité matricielle dans [BMS07]. Ces champs vérifient la propriété suivante

$$(7.1.1) \quad \{X(a^{E_0}x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \{a^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d},$$

pour une certaine matrice E_0 à valeurs propres à partie réelle positive. On peut remarquer qu'un grand nombre de champs connus rentrent dans ce cadre. Par exemple le Champ Brownien Fractionnaire et le Drap Brownien Fractionnaire vérifient une relation d'autosimilarité matricielle du type (7.1.1).

Le problème de l'existence de tels champs, pour toute matrice à spectre de partie réelle positive E_0 , a été résolu dans [BMS07] où une classe particulière de champs aléatoires stables vérifiant la propriété (7.1.1) est définie. Ces champs vérifient par ailleurs d'autres propriétés remarquables et sont notamment à accroissements stationnaires. Ici on va s'intéresser à cette catégorie spécifique de champs, que l'on va considérer uniquement dans le cas **gaussien**. On va tout d'abord proposer, en section 7.2, une classification de ces champs à partir de quatre cas génériques. Cela permet ensuite de donner une construction explicite de ces champs. Cela signifie qu'on décrit toutes les densités spectrales de ces champs de manière explicite et non par une formule intégrale comme cela est fait dans [BMS07]).

On s'intéresse ensuite aux propriétés de régularité des trajectoires de ces champs, que l'on établit dans un cadre anisotrope. Cette approche est assez naturelle : dans [Kam96], A.Kamont a étudié la régularité des trajectoires du DBF dans les espaces de Hölder anisotropes. Par ailleurs des résultats de régularité dans des espaces de Hölder anisotropes liés à la matrice E_0 ont déjà été établis pour la classe des champs aléatoires stables par autosimilarité matricielle définie par [BMS07] (qui sont donc non forcément gaussiens) par H.Biermé et C.Lacaux dans [BL07]. On peut aussi citer les travaux de Y.Xiao ([Xiao07]) où la régularité de champs fortement localement non déterministes est étudiée dans un cadre anisotrope. L'objectif est ici d'étendre les résultats déjà existants sur la classe de champs définie dans [BMS07] en mesurant la régularité dans des espaces anisotropes plus généraux : les espaces de Besov anisotropes dont l'anisotropie n'est cette fois ci pas forcément liée à la matrice E_0 qui apparait dans la définition 7.1.1.

Cela permet de répondre à des questions assez naturelles : en mesurant la régularité quelles informations peut-on 'récupérer' sur la matrice E_0 ? On montrera que la connaissance de l'exposant critique dans n'importe quel espace de Besov ne permet pas d'obtenir plus d'information sur la matrice E_0 que sa partie diagonalisable réelle D_0 .

On souligne, qu'en un certain sens, cet exposant anisotrope critique est une quantité 'stable' : en effet l'exposant critique dans tout espace de Besov est une fonction continue de l'anisotropie de l'espace. Ainsi une petite erreur d'estimation sur l'anisotropie du champ entraîne une petite erreur sur l'exposant critique dans les espaces de Besov anisotropes et ainsi une petite erreur sur l'indice de Hurst H_0 .

Une autre question liée aux précédentes est la suivante : est-ce que du point de vue de la régularité la matrice E_0 possède des traits caractéristiques ? On va montrer qu'en dimension 2 la matrice E_0 vérifie une propriété d'optimalité : en fait l'exposant critique dans tout espace de Besov lié à la matrice E_0 est maximal parmi tous les exposants critiques dans les espaces de Besov anisotropes et est égal à H_0 . En dimension supérieure un résultat plus faible d'optimalité est donné.

Dans tout ce qui suit E_0 et E désignent deux matrices de $M_d(\mathbb{R})$ à spectre de partie réelle positive. On définit alors

$$\rho_{\min}(E_0) = \min_{\lambda \in Sp(E)} (Re(\lambda)), \rho_{\max}(E_0) = \max_{\lambda \in Sp(E)} (Re(\lambda)).$$

Si a est un réel positif, pour toute matrice M on note a^M la matrice définie par,

$$a^M = \exp(M \log(a)) = \sum_{n \geq 0} \frac{M^n \log^n(a)}{n!}.$$

7.2 Construction explicite de champs gaussiens vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle

7.2.1 Notion d'autosimilarité matricielle. Résultats d'existence

L'objectif de cette section est de présenter la classe de champs étudiée et définie dans [BMS07]. On commence par rappeler la définition de la notion de champ stable par autosimilarité matricielle donnée dans [BMS07].

Définition 7.2.1 *Un champ aléatoire à valeurs réelles défini sur \mathbb{R}^d est stable par autosimilarité matricielle, si pour une certaine matrice E_0 de $M_d(\mathbb{R})$ à spectre de partie réelle positive et un certain réel H_0 positif, on a*

$$(7.2.1) \quad \forall a > 0, \{X(a^{E_0}x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(fd)}{=} \{a^{H_0} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d},$$

où la relation $\stackrel{(fd)}{=}$ désigne l'égalité des lois finies dimensionnelles. La matrice E_0 et le réel H_0 sont respectivement appelés un exposant (ou une anisotropie) et un indice de Hurst du champ X .

Remarque 7.2.2 *En général, l'indice de Hurst H_0 et l'exposant E_0 d'un champ aléatoire stable par autosimilarité matricielle n'est pas unique. En effet si H_0 et E_0 sont respectivement un indice de Hurst et un exposant du champ aléatoire X stable par autosimilarité matricielle alors pour tout $\lambda > 0$, λH_0 et λE_0 aussi.*

Dans la suite pour assurer l'unicité de l'indice de Hurst H_0 , on supposera que tout exposant du champ X vérifie l'hypothèse $Tr(E_0) = d$. On remarque que cette convention de normalisation permet ainsi pour le MBF de choisir $E_0 = Id$ et donc de retrouver l'indice de Hurst usuel. On souligne que même dans ce cas il n'y a pas unicité de l'exposant. Dans le cas gaussien, on pourra se reporter à la remarque 2.10 de [BMS07] pour plus de détails sur la structure de l'ensemble des exposants d'un champ gaussien vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle.

On rappelle, que même dans le cas gaussien, qui est le cas auquel on a choisi de se restreindre ici, la classe des champs aléatoires vérifiant une relation d'autosimilarité du type 7.2.1 peut être une classe très large. En effet, on peut par exemple considérer le cas simple où $E_0 = Id$ et remarquer ainsi que la classe des champs gaussiens vérifiant la relation 7.2.1 (qui est ici la relation d'autosimilarité classique) comprend non seulement le MBF mais aussi le Drap Brownien Fractionnaire et bien d'autres exemples encore si on ne fait aucune autre hypothèses que celle là.

Tout naturellement, les auteurs de [BMS07] ont donc été amenés, pour résoudre le problème de l'existence de champs aléatoires stables par autosimilarité matricielle à se restreindre à une classe particulière de champs vérifiant ce type de propriété et donc à imposer des hypothèses supplémentaires. La classe de champs qu'ils ont construite est ainsi constituée des champs vérifiant la relation 7.2.1, à accroissements stationnaires, de densité spectrale continue. Avant de détailler le procédé de construction tel qu'il est présenté dans [BMS07], on peut faire la simple remarque suivante :

Lemme 7.2.3 *Si $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est un champ gaussien à accroissements stationnaires vérifiant la relation d'autosimilarité matricielle (7.2.1), alors si μ_X désigne la mesure spectrale du champ $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$, on a nécessairement*

$$(7.2.2) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu_X(a^{-E_0^t} B) = a^{2H_0} \mu_X(B).$$

Preuve. En effet, il suffit juste d'écrire que les deux champs gaussiens à accroissements stationnaires $\{a^{H_0} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{X(a^{E_0} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ ont même loi donc même mesure spectrale. \square

De ce simple lemme, il découle que dans le cas des champs gaussiens, on peut définir des champs vérifiant la relation d'autosimilarité matricielle 8.2.4 à partir d'une densité spectrale vérifiant de 'bonnes propriétés' d'homogénéité. Le théorème d'existence (théorème 4.1 et corollaire 4.2 de [BMS07]) de tels champs que l'on énonce dans le cas gaussien est donc le suivant :

Théorème 7.2.4 *Soit ρ une fonction continue, positive, vérifiant pour tout $x \neq 0$, $\rho(x) \neq 0$ et E_0^t -homogène i.e. telle que*

$$\forall a > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \rho(a^{E_0^t} \xi) = a \rho(\xi).$$

Alors le champ gaussien X défini par

$$(7.2.3) \quad X_\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \rho(\xi)^{-H_0 - \frac{\text{Tr}(E_0)}{2}} d\widehat{W}(\xi),$$

existe et est stochastiquement continu si $H_0 \in (0, \rho_{\min}(E_0))$. Par ailleurs le champ X_ρ les propriétés suivantes :

1. *Ce champ est à accroissements stationnaires i.e. pour tout $h \in \mathbb{R}^d$*

$$\{X_\rho(x+h) - X_\rho(h)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(fd)}{=} \{X_\rho(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

2. *Il vérifie la relation d'autosimilarité matricielle (8.2.4).*

On constate que la principale difficulté consiste à définir une densité spectrale du champ X_ρ adéquate et ainsi à définir des fonctions ρ continues, positives et E_0^t -homogènes. Ce problème est résolu dans [BMS07] (théorème 2.11) de la manière suivante

Proposition 7.2.5 *La fonction ρ définie par*

$$\rho(\xi) = \int_{S_0} \int_0^\infty (1 - \cos(\langle x, r^{E_0^t} \theta \rangle)) \frac{dr}{r^2} d\mu(\theta),$$

est bien continue, positive et E_0^t -homogène. Ici S_0 est la sphère unité de \mathbb{R}^d pour une norme bien choisie, définie à partir de E_0 , et μ une mesure finie sur S_0 .

Par ailleurs, dans le cas où la matrice E_0 est diagonalisable une expression explicite est donnée (corollaire 2.12 de [BMS07]) :

Proposition 7.2.6 *Soit E_0 une matrice diagonalisable de valeurs propres $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d$, de vecteurs propres $\theta_1, \dots, \theta_d$ et $C_1, \dots, C_d > 0$. Alors pour tout $\tau < 2\rho_{\min}(E_0)$ la fonction*

$$\rho(x) = \left(\sum_{j=1}^d C_j |\langle x, \theta_j \rangle|^{\tau/\lambda_j} \right)^{1/\tau},$$

est une (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme.

Ici, l'objectif va consister à étendre les résultats de [BMS07] et à décrire pour toute matrice E_0 (et non pas simplement dans le cas diagonalisable) de **manière explicite** toutes les densités spectrales **continues** de champs gaussiens à accroissements stationnaires vérifiant la relation d'autosimilarité matricielle 8.2.4. Pour cela le point clé va consister à remarquer que la classe des densités spectrales considérées dans [BMS07] est en fait la classe de ce qu'on appelle les pseudo-normes et à en tirer toutes les conséquences en terme de classification de la classe de champs ainsi obtenue.

7.2.2 La notion de pseudo-norme

Tout ce qui suit est extrait des travaux de P.G.Lemarié (voir [PGL94]), H.Biermé, M.Merschaert, H.P.Scheffler (voir [BMS07]). On rappelle tout d'abord la notion de (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme qui coïncide donc exactement avec la classe des densités spectrales considérée dans [BMS07] :

Définition 7.2.7 *Une fonction ρ définie sur \mathbb{R}^d est une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme si les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

1. ρ est continue sur \mathbb{R}^d ,

2. ρ est E_0 -homogène

$$\rho(a^{E_0} x) = a\rho(x), \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^d \text{ et tout réel positif } a,$$

3. ρ est positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

Remarque 7.2.8 *La notion de pseudo-norme sur (\mathbb{R}^d, A) introduite dans [PGL94] est légèrement différente de celle donnée ici. Dans [PGL94] A désigne une matrice dont toutes les valeurs propres sont de module strictement supérieur à 1. Une pseudo-norme sur (\mathbb{R}^d, A) est alors une fonction vérifiant les conditions 1, 3 et la propriété suivante :*

$$\rho(Ax) = |\det(A)|\rho(x), \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^d.$$

On remarque que si la fonction ρ est une (\mathbb{R}^d, E) pseudo-norme, alors $\rho(\cdot)^{\frac{1}{\text{Tr}(E_0)}}$ est une pseudo-norme sur (\mathbb{R}^d, A) avec $A = a^{E_0}$ pour tout réel a positif fixé. Les propriétés établies pour les (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes sont donc très similaires à celles démontrées dans [PGL94] pour les pseudo-normes sur (\mathbb{R}^d, A) .

Le terme de (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme est justifié par la proposition suivante :

Proposition 7.2.9 *Soit ρ une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme. Il existe une constante C positive telle que, pour tous x et y de \mathbb{R}^d :*

$$\rho(x + y) \leq C(\rho(x) + \rho(y)).$$

On aura aussi besoin de la notion de sphère anisotrope associé à une pseudo-norme :

Notation 7.2.10 *Soit ρ une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme. On définit la sphère anisotrope*

$$S_0^{E_0}(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^d, \rho(x) = 1\}.$$

Le point clé qui va être exploité ici et qui va être à la base de tous les résultats de classification et de régularité est le suivant :

Proposition 7.2.11 *Si ρ_1 et ρ_2 sont deux (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes, elles sont équivalentes au sens suivant : il existe une constante C positive telle que pour tout x de \mathbb{R}^d on ait :*

$$\frac{1}{C}\rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq C\rho_1(x).$$

De cette équivalence entre toutes les (\mathbb{R}^d, E_0) on va tirer toutes les conséquences en terme de classification des densités spectrales en section 7.2.3 et de résultats de régularité en section 7.2.4.

7.2.3 Construction explicite de densités spectrales admissibles

Comme cela a été souligné dans la section précédente, la principale difficulté à résoudre lorsqu'on souhaite suivre le procédé de construction décrit ci dessus est de se donner une densité spectrale adéquate. Dans cette section, on va utiliser la réduction de Jordan afin de décrire pour toute matrice E_0 toutes les densités spectrales **admissibles** (au sens de [BMS07]) de champs gaussiens à accroissements stationnaires vérifiant la relation 8.2.4, cette fois ci de manière explicite.

On va tout d'abord (théorème 7.2.19) donner une formule reliant entre elles deux (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes fixées (et donc deux densités spectrales fixées). On se donnera ensuite un procédé de construction permettant de construire pour toute matrice E_0 donnée une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme adéquate.

7.2.3.1 Lien entre deux (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes

Théorème 7.2.12 *Soit ρ_1 une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme. Alors, ρ_2 est une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme si et seulement si il existe une fonction continue et positive g définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ telle que*

$$\rho_2(\xi) = g(\rho_1(\xi)^{-E_0} \xi) \rho_1(\xi).$$

Remarque 7.2.13 *On peut remarquer que $\rho_2 = \rho_1 \Leftrightarrow g = 1$ sur la sphère unité $S_0^{E_0}(\rho_1) = \{x \in \mathbb{R}^d, \rho_1(x) = 1\}$. Réciproquement, si g n'est pas identiquement égale à 1 sur $S_0^{E_0}(\rho_1)$ et si*

$$X_1(x) = \int (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \rho_1(\xi)^{-(H_0 + \frac{\text{Tr}(E_0)}{2})} d\widehat{W}_\xi,$$

et

$$X_2(x) = \int (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \rho_2(\xi)^{-(H_0 + \frac{\text{Tr}(E_0)}{2})} d\widehat{W}_\xi,$$

alors les champs gaussiens $\{X_1(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{X_2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'ont pas la même densité spectrale et ne sont donc pas égaux en loi. Ainsi si on considère une fonction g non triviale sur $S_0^{E_0}(\rho_1)$, on peut définir deux champs gaussiens stables par autosimilarité matricielle différents de même exposant E_0 .

Preuve. Supposons que g est une fonction continue, positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, alors

$$\rho_2(\xi) = g(\phi_1(\xi)^{-E_0} \xi) \rho_1(\xi),$$

est bien une pseudo-norme.

Réciproquement, soient ρ_1 et ρ_2 deux pseudo-normes, la fonction $g = \frac{\rho_2}{\rho_1}$ est alors continue, positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et vérifie pour tout réel a positif

$$g(a^{E_0} \xi) = g(\xi).$$

Ce qui implique, en prenant à ξ fixé, $a = \rho_1(\xi)^{-1}$ que

$$\rho_2(\xi) = g(\xi) \rho_1(\xi) = g(\rho_1(\xi)^{-E_0} \xi) \rho_1(\xi).$$

□

On va maintenant détailler la construction explicite d'une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme pour une matrice E_0 de spectre à partie réelle positive donnée. Ceci combiné au résultat précédent permet donc bien d'avoir une description explicite de toutes les (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes possibles.

7.2.3.2 Construction explicite d'une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme pour E_0 donnée

On commence par rappeler ce qu'est la décomposition de Jordan, qui va permettre de ramener le problème posé à l'étude de quatre cas génériques.

Proposition 7.2.14 Soit E_0 une matrice de $M_d(\mathbb{R})$ à spectre de partie réelle positive, de réduction de Jordan dans $M_d(\mathbb{R})$:

$$E_0 = P \begin{pmatrix} E_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & E_{m_1+m_2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

(m_1, m_2 étant deux entiers non simultanément nuls) avec
 – Pour tout ℓ_1 de $\{1, \dots, m_1\}$

$$E_{\ell_1} = \lambda_{\ell_1} Id \text{ ou } E_{\ell_1} = \begin{pmatrix} \lambda_{\ell_1} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_{\ell_1} \end{pmatrix},$$

– Pour tout ℓ_2 de $\{1, \dots, m_2\}$

$$E_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{\ell_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\ell_2} \end{pmatrix} \text{ ou } E_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{\ell_2} & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & A_{\ell_2} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } A_{\ell_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{\ell_2} & -\beta_{\ell_2} \\ \beta_{\ell_2} & \alpha_{\ell_2} \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Une simple conséquence de la décomposition de Jordan est alors :

Proposition 7.2.15 Les notations sont celles de la proposition 7.2.14. On suppose que pour tout $1 \leq \ell \leq m_1 + m_2$, il existe une $(\mathbb{R}^{d_\ell}, E_\ell^t)$ pseudo-norme τ_ℓ . Alors, la fonction ρ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\rho(\xi) = \varphi(P^t \xi)$$

avec pour $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_{m_1+m_2})$, avec pour tout $p \in \{1, \dots, m_1 + m_2\}$, $\zeta_p \in \mathbb{R}^{d_p}$

$$\varphi(\zeta) = (\tau_1^2(\zeta_1) + \dots + \tau_{m_1+m_2}^2(\zeta_{m_1+m_2}))^{\frac{1}{2}},$$

est une (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme et $\phi = \rho^{-(2H_0 + \text{Tr}(E_0))}$ une densité spectrale admissible d'un champ gaussien à accroissements stationnaires autosimilaire d'exposant E_0 et d'indice de Hurst H_0 .

Preuve. Posons $F = P^{-1}E_0P$, on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi(a^{F^t} \zeta) &= \left(\tau_1^2(a^{E_1^t} \zeta_1) + \dots + \tau_{m_1+m_2}^2(a^{E_{m_1+m_2}^t} \zeta_{m_1+m_2}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(a^2 \tau_1^2(\zeta_1) + \dots + a^2 \tau_{m_1+m_2}^2(\zeta_{m_1+m_2}) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= a \varphi(\zeta) \end{aligned}$$

On en déduit alors que

$$\rho(a^{E_0^t} \xi) = \varphi(P^t a^{E_0^t} \xi) = \varphi(a^{F^t} P^t \xi) = a \varphi(P^t \xi) = a \rho(\xi)$$

ce qui permet alors de conclure. \square

On peut illustrer la proposition 7.2.15 sur un exemple :

Exemple 7.2.16 On considère la matrice

$$E_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui est bien sûr diagonalisable car elle possède deux valeurs propres distinctes. On a $E_0 = PD_0P^{-1}$ avec

$$D_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque qu'une (\mathbb{R}^d, D_0) pseudo-norme est donnée par

$$\rho_{D_0}(\xi) = |\xi_1|^{1/2} + |\xi_2|.$$

La proposition 7.2.15 permet alors d'en déduire une expression explicite d'une (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme

$$\rho_{E_0}(\xi) = \rho_{D_0}(P^t\xi) = |\xi_1|^{1/2} + |-\xi_1 + \xi_2|$$

La proposition 7.2.15 implique donc qu'il est suffisant de se donner une pseudo-norme convenable dans les quatre cas suivants :

1. $E_0 = \lambda Id.$

2. $E_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$

3. $E_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$

4. $E_0 = \begin{pmatrix} A & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & A \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$

Dans la proposition suivante, on va se donner une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme convenable dans chacun des quatre cas génériques décrits ci dessus.

Proposition 7.2.17 On considère les quatre cas génériques décrits ci dessus :

1. Si $E_0 = \lambda Id$, on peut choisir :

$$\phi(\xi) = |\xi|^{1/\lambda}.$$

2. Si $E_0 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$, on définit alors pour $1 \leq i \leq d$ et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, les fonctions ϕ_i et Φ_i par,

$$\begin{aligned}
 \text{Si } i = 1 \quad \phi_1(\xi) &= \xi_1 \\
 \Phi_1(\xi) &= |\xi_1| \\
 \text{Si } i \geq 2 \quad \phi_i(\xi) &= \begin{cases} |\xi_i| & \text{si } \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{i-1} = 0 \\ |\Phi_{i-1}(\xi)| (|\Phi_{i-1}(\xi)|^{-\frac{E^t}{\lambda}} \xi)_i & \text{sinon} \end{cases} \\
 \Phi_i(\xi) &= \Phi_{i-1}(\xi) + |\phi_i(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Alors, la fonction ϕ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(\xi) = \Phi_d(\xi)^{\frac{1}{\lambda}}$$

est une (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme.

3. Si $E_0 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, on peut choisir la fonction ϕ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^2$ par

$$\phi(\xi) = |\xi|_{\alpha}^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$4. \text{ Si } E_0 = \begin{pmatrix} A & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & I_2 \\ 0 & & & A \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \text{ on définit alors } 1 \leq i \leq d \text{ et}$$

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$, les fonctions ϕ_i et Φ_i par,

$$\begin{aligned}
 \text{Si } i = 1 \quad \phi_1(\xi) &= (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \Phi_1(\xi) &= (|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2)^{\frac{1}{2}} \\
 \text{Si } i \geq 2 \quad \phi_i(\xi) &= \begin{cases} (|\xi_{2i-1}|^2 + |\xi_{2i}|^2)^{\frac{1}{2}} & \text{si } \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{2i-2} = 0 \\ |\Phi_{i-1}(\xi)| (|\Phi_{i-1}(\xi)|^{-\frac{E^*}{\alpha}} \xi)_{2i-1}^2 + (|\Phi_{i-1}(\xi)|^{-\frac{E^*}{\alpha}} \xi)_{2i}^2)^{\frac{1}{2}} & \text{sinon} \end{cases} \\
 \Phi_i(\xi) &= \Phi_{i-1}(\xi) + |\phi_i(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Alors, la fonction ϕ définie pour $\xi \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(\xi) = \Phi_d(\xi)^{\frac{1}{\alpha}}$$

est une (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme.

Le cas 4 se traite de manière similaire.

Remarque 7.2.18 Dans le troisième cas, on a donné une pseudo-norme qui possède la propriété d'être isotrope. En fait à une constante multiplicative près c'est la seule (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-norme vérifiant cette propriété. En effet, si x_0 est un vecteur de norme 1 fixé de \mathbb{R}^2 il existe pour tout x de \mathbb{R}^2 une unique rotation R_x telle que,

$$x = |x| R_x x_0 = |x|_{\alpha}^{\frac{E_0^t}{\alpha}} \tilde{R}_x x_0$$

où

$$\tilde{R}_x = |x|^{Id - \frac{E_0^t}{\alpha}} R_x$$

est encore une matrice de rotation (dépendant de x).

On conclut alors par homogénéité et isotropie de la pseudo-norme considérée.

Remarque 7.2.19 Si on utilise le théorème, avec g non triviale (non constante sur la sphère unité) et $\rho_1 = |\cdot|^\frac{1}{\alpha}$, on peut construire des (\mathbb{R}^d, E_0^t) pseudo-normes non isotropes vérifiant une relation d'homogénéité en spirale.

Preuve. Les cas 1 et 3 sont évidents.

En ce qui concerne le deuxième cas, il est évident que $\Phi_d \geq 0$ et que $\Phi_d(\xi)$ est nul si et seulement si $\xi = 0$.

De plus, la fonction ϕ est bien définie et positive sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Pour montrer que ϕ est continue, il suffit de vérifier que pour tout $1 \leq i \leq d$, ϕ_i est continue. Pour cela, on remarque que,

$$\begin{aligned} |\Phi_{i-1}(\xi)| (|\Phi_{i-1}(\xi)|^\frac{E_0^t}{\lambda} \xi)_i &= |\Phi_{i-1}(\xi)|^{Id + \frac{E_0^t}{\lambda}} \xi_i \\ &= |\xi_i + \sum_{k=1}^{i-1} (\xi_1 + \dots + \xi_k) c(i, k) (\log \Phi_{i-1}(\xi))^k| \end{aligned}$$

et on montre par récurrence sur $1 \leq i \leq d$ que pour tout $1 \leq k \leq i$, et que pour tout $1 \leq p \leq d$,

$$\lim_{(\xi_1, \dots, \xi_i) \rightarrow (0, \dots, 0)} (\xi_1 + \dots + \xi_k) (\log \Phi_i(\xi))^p = 0.$$

Il reste à vérifier que Φ vérifie la relation d'homogénéité voulue. On peut prouver ceci par récurrence sur i , en montrant que pour tout $1 \leq i \leq d$, on a

$$\phi_i(a^{E_0^t} \xi) = a^\lambda E_0 \phi_i(\xi) \quad \text{et} \quad \Phi_i(a^{E_0^t} \xi) = a^{\lambda E_0^t} \Phi_i(\xi)$$

En effet, si le résultat est vrai pour $i - 1$, pour $a > 0$, et pour ξ tel que ξ_1, \dots, ξ_i sont non tous nuls (l'autre cas étant trivial), on a

$$\begin{aligned} \phi_i(a^{E_0^t} \xi) &= |\Phi_{i-1}(a^{E_0^t} \xi)| (|\Phi_{i-1}(a^{E_0^t} \xi)|^\frac{E_0^t}{\lambda} a^{E_0^t} \xi)_i \\ &= a^{-\lambda} |\Phi_{i-1}(\xi)| ((a^{-\lambda} |\Phi_{i-1}(\xi)|)^\frac{E_0^t}{\lambda} a^{E_0^t} \xi)_i \\ &= a^{-\lambda} \phi_i(\xi). \end{aligned}$$

Le quatrième cas se traite de manière analogue en remarquant que si on pose pour tout i ,

$$r_i = (|\xi_{2i-1}|^2 + |\xi_{2i}|^2)^\frac{1}{2},$$

on retrouve la même formule de récurrence que celle donnée pour le cas 2 (on remplace ξ_i par r_i). \square

7.2.4 Densités spectrales équivalentes et régularité des trajectoires

Dans cette section, on tire les conséquences de l'équivalence des densités spectrales en terme de régularité trajectorielle. Plus précisément on va montrer que :

Proposition 7.2.20 *Si X et Y sont deux fonctions aléatoires gaussiennes à accroissements stationnaires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(B(0, 1))$, possédant des densités spectrales ϕ_X et ϕ_Y équivalentes au sens suivant :*

$$C_1\phi_X \leq \phi_Y \leq C_2\phi_X,$$

pour deux constantes positives C_1, C_2 données.

Alors si B' est un sous espace vectoriel normé de $\mathcal{C}^0(B(0, 1))$, dual d'un espace vectoriel normé séparable,

$$P(X \in B') = 1 \Leftrightarrow P(Y \in B') = 1.$$

De cette proposition, on tirera alors le corollaire suivant :

Corollaire 7.2.21 *Soit E_0 une matrice de taille d dont le spectre est à partie réelle positive. Tous les champs à accroissements stationnaires autosimilaires d'exposant E_0 et d'indice de Hurst H_0 définis à l'aide d'une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme par le procédé ci-dessus ont la même régularité dans tout espace de Banach B' sous espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(B(0, 1))$ et dual d'un espace vectoriel normé séparable.*

Notation 7.2.22 *Le résultat précédent implique donc que si ρ_1 et ρ_2 sont deux (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes les deux champs gaussiens $\{X_{\rho_1}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{X_{\rho_2}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ définis par l'équation (7.2.3) ont même régularité dans n'importe quel 'espace fonctionnel raisonnable'. On choisit donc par abus de langage de noter $\{X_{E_0, H_0}\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ un de ces champs gaussiens (quelconque) étant donné qu'ici l'objectif est uniquement d'étudier la régularité des trajectoires.*

Remarque 7.2.23 *Ce résultat sera appliqué aux espaces de Besov anisotropes $B' = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ qui sont, y compris dans le cas limite $p = \infty$, les duaux des espaces séparables $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}$ (l'adhérence étant prise dans $B_{p',q'}^{-s}(\mathbb{R}^d, E)$) où*

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1, \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{q} = 1.$$

Ce résultat va avoir la conséquence suivante

Pour cela on va utiliser des notions de probabilité dans un espace de Banach. On commence donc par quelques rappels.

7.2.4.1 Quelques rappels sur les probabilités dans les espaces de Banach

Dans cette section, B_0 est un espace de Banach séparable et \mathcal{B}_0 désigne la tribu des boréliens de B_0 .

Remarque 7.2.24 *L'espace $(B_0, \|\cdot\|_{B_0}) = (\mathcal{C}^0(B(0, 1)), \|\cdot\|_\infty)$ est bien un espace de Banach séparable.*

Si $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, on appellera élément aléatoire à valeurs dans (B_0, \mathcal{B}_0) toute fonction mesurable X de $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega, \mathbb{P})$ dans (B_0, \mathcal{B}_0) .

On sera alors amené à utiliser la notion de probabilité conditionnelle régulière (voir [Par67] pour plus de détails) que l'on rappelle ici :

Définition 7.2.25 Soit Z un élément aléatoire à valeurs dans (B_0, \mathcal{B}_0) et \mathbb{P}_Z la distribution de Z .

Une distribution de probabilité conditionnelle régulière sachant Z est une application

$$f \in B_0 \mapsto \mathbb{P}(\cdot | Z = f),$$

telle que

1. $\forall f \in B_0, \mathbb{P}(\cdot | Z = f)$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{B}_0 .

2. Il existe un ensemble N \mathbb{P}_Z -négligeable tel que

$$\forall f \in B_0 \setminus N, \mathbb{P}(\Omega \setminus Z^{-1}(f) | Z = f) = 0.$$

3. Pour tout $A \in \mathcal{B}_\Omega$, l'application $f \mapsto \mathbb{P}(A | Z = f)$ est \mathbb{P}_Z -mesurable et

$$\mathbb{P}(A) = \int_{B_0} \mathbb{P}(A | Z = f) d\mathbb{P}_Z(f).$$

Dans le cas des espaces de Banach séparables, on a un résultat d'existence et d'unicité de la distribution de probabilité conditionnelle régulière sachant Z pour tout élément aléatoire à valeurs dans (B_0, \mathcal{B}_0) :

Proposition 7.2.26 Soit B_0 un espace de Banach séparable, pour tout élément aléatoire à valeurs dans (B_0, \mathcal{B}_0) il existe une distribution de probabilité conditionnelle régulière sachant Z

$$f \mapsto \mathbb{P}(\cdot | Z = f).$$

Si $f \mapsto \tilde{\mathbb{P}}(\cdot | Z = f)$ en est une autre alors

$$\{f, \mathbb{P}(\cdot | Z = f) \neq \tilde{\mathbb{P}}(\cdot | Z = f)\},$$

est un ensemble \mathbb{P}_Z -négligeable.

Dans la suite on s'intéressera à des éléments aléatoires gaussiens :

Définition 7.2.27 Un élément aléatoire X à valeurs dans l'espace de Banach séparable B_0 est dit gaussien si pour toute forme linéaire L de B_0^* , $L(X)$ est une variable aléatoire gaussienne réelle.

L'indépendance des éléments aléatoires gaussiens se caractérise alors à l'aide de la covariance :

Proposition 7.2.28 Les deux éléments aléatoires gaussiens à valeurs dans l'espace de Banach séparable B_0 , X_1 et X_2 sont indépendants si pour toutes formes linéaires L_1 et L_2 de B_0^* on a

$$\mathbb{E}(L_1(X_1)L_2(X_2)).$$

Preuve. Découle directement de la caractérisation de l'indépendance à l'aide des fonctions caractéristiques (voir pour plus de détails [VTC87]). \square

On est maintenant en mesure de montrer les résultats souhaités.

7.2.4.2 Démonstration de la proposition 7.2.20

La démonstration de la proposition 7.2.20, se base sur les deux lemmes suivants.

Lemme 7.2.29 *Soient X et Y deux champs gaussiens à accroissements stationnaires à trajectoires dans $\mathcal{C}^0(B(0,1))$ (qui est bien un espace de Banach séparable) possédant tous deux une densité spectrale vérifiant*

$$(7.2.4) \quad \phi_X \leq \phi_Y.$$

Alors, il existe X_1, X_2 champs gaussiens à accroissements stationnaires, indépendants en tant qu'éléments aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(B(0,1))$ tels que

$$\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{X_1(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}, \{Y\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{X_1(x) + X_2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

Preuve. On considère en effet la fonction aléatoire gaussienne à valeurs réelles \tilde{X} définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^2$ de fonction de covariance :

$$\begin{aligned} K_{\tilde{X}}((x, y); (x', y')) &= y'_1 y_1 \int (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1)(e^{-i\langle x', \xi \rangle} - 1) \phi_X(\xi) d\xi \\ &\quad + y'_2 y_2 \int (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1)(e^{-i\langle x', \xi \rangle} - 1) (\phi_Y(\xi) - \phi_X(\xi)) d\xi \end{aligned}$$

On vérifie que, par (7.2.4), $K_{\tilde{X}}$ est bien définie positive.

Posons alors

$$X_1(x) = \tilde{X}(x, 1, 0), \quad X_2(x) = \tilde{X}(x, 0, 1).$$

On a alors bien,

$$\{X\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{X_1\}_{x \in \mathbb{R}^d}, \{Y\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\tilde{X}(x, 1, 1)\}_{x \in \mathbb{R}^d} = \{X_1(x) + X_2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

De plus, pour tous x, x' de \mathbb{R}^d ,

$$\mathbb{E}(X_1(x)X_2(x')) = 0.$$

Cela va entraîner que les champs gaussiens $\{X_1(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{X_2(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ sont indépendants, car le dual de l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(B(0,1))$ est l'ensemble des mesures de Radon sur $\mathcal{C}^0(B(0,1))$. On utilise donc le résultat de la proposition 7.2.28. \square

On utilise ensuite le lemme suivant qui est une reformulation de l'inégalité d'Anderson (voir par exemple le théorème 11.9 dans [Lif95])

Lemme 7.2.30 *Soit X un élément aléatoire gaussien à valeurs dans $\mathcal{C}^0(B(0,1))$. Soit $f \in \mathcal{C}^0(B(0,1))$ et $(B', \|\cdot\|_{B'})$ un sous espace vectoriel normé de $\mathcal{C}^0(B(0,1))$, dual d'un espace vectoriel normé séparable B , alors pour tout réel r positif,*

$$\mathbb{P}(\|X + f\| \leq r) \leq \mathbb{P}(\|X\| \leq r).$$

Preuve. Comme X et Z sont indépendants, on a alors par définition de la notion de probabilité conditionnelle :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\|X + Z\| \leq r) &= \int \mathbb{P}(\|X + f\| \leq r | Z = f) d\mathbb{P}_Z(f) \\ &= \int \mathbb{P}(\|X + f\| \leq r) d\mathbb{P}_Z(f) \end{aligned}$$

par indépendance de X et Z en tant qu'éléments aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}^0(B(0,1))$. Pour pouvoir appliquer l'inégalité d'Anderson, on montre alors le lemme suivant :

Lemme 7.2.31 *L'ensemble convexe symétrique*

$$B_r = \{g, \|g\|_{B'} \leq r\}$$

est un fermé de l'espace vectoriel normé $(B', \|\cdot\|)$.

Preuve. En effet, si $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de B_r convergeant dans B' vers une fonction f , il s'agit de montrer que $f \in B_r$.

Or, par hypothèse pour tout k ,

$$\|f_k\|_{B'} \leq r$$

Comm l'espace B' est le dual d'un espace séparable, elle admet une sous suite convergente pour la topologie faible $\sigma(B', B)$ vers une certaine fonction g de B_r .

La topologie de la norme étant plus fine que la topologie $\sigma(B', B)$, on en déduit que $f = g$.

En particulier

$$f \in B_r.$$

□

En appliquant l'inégalité d'Anderson à l'ensemble convexe symétrique fermé (qui est alors un borélien) B_r on en déduit

$$\mathbb{P}(\|X + f\| \leq r) \leq \mathbb{P}(\|X\| \leq r).$$

Donc, on a bien

$$\mathbb{P}(\|X + Z\| \leq r) \leq \mathbb{P}(\|X\| \leq r)$$

□

La proposition 7.2.20 et le corollaire 7.2.21 s'en déduisent alors, car par hypothèse

$$\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ \frac{1}{C_1} Y(x) + Z_1(x) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d}, \{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \left\{ \frac{1}{C_2} X(x) + Z_2(x) \right\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

Dans les sections suivantes, on va établir des résultats de régularité locale d'un champ $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'anisotropie E_0 dans des espaces fonctionnels adaptés au champ considéré : les espaces de Besov anisotropes que l'on va tout d'abord commencer par présenter.

7.3 Espaces de Besov anisotropes

Le but de cette section est de présenter les différents concepts de régularité anisotropes qui vont être utilisés ici. Les espaces de Besov anisotropes généralisent les espaces de Besov usuels (qui sont eux isotropes) et ont été étudiés en parallèle avec ceux ci en particulier par l'école russe (cf. [Nik77] ou [BIN75]). Ces espaces apparaissent de manière naturelle dans l'étude de la régularité des solutions de certaines équations aux dérivées partielles semi-linéaire elliptiques (cf [Dac03]).

Ces espaces ont été tout d'abord introduits dans le cas particulier d'une matrice d'anisotropie E diagonale (voir Besov, Il'in, Nikolski [BIN75], Schmeisser et Triebel [ST87, Trie83, Trie04], P.Dintelmann [Din96], W.Farkas [Far00]). Le cas le plus général-qui est celui qui va nous intéresser- où E est une matrice à spectre de partie réelle positive a été étudié par M. Bownik et on renvoie à [Bow05] pour plus de détails sur les résultats présentés dans cette section.

Notation 7.3.1 Soit E une matrice à spectre de partie réelle positive. On se donne une (\mathbb{R}^d, E) -pseudo-norme notée $|\cdot|_E$. Pour $x_0 \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, $B_{|\cdot|_E}(x_0, r)$ désigne la boule de centre x_0 et de rayon r

$$B_{|\cdot|_E}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^d, |x - x_0|_E \leq r\}.$$

Définition 7.3.2 Soit $\psi_0^E \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\widehat{\psi_0^E}(\xi) = 1 \text{ si } |\xi|_E \leq 1, \widehat{\psi_0^E}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi|_E \geq 2.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$\widehat{\psi_j^E}(\xi) = \widehat{\psi_0^E}(2^{-jE}\xi) - \widehat{\psi_0^E}(2^{-(j-1)E}\xi).$$

Alors

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \widehat{\psi_j^E} \equiv 1,$$

est une partition anisotrope de l'unité $\text{supp}(\widehat{\psi_j^E}) \subset B_{|\cdot|_E}(0, 2^{j+1}) \setminus B_{|\cdot|_E}(0, 2^{j-1})$.

Les espaces de Besov anisotropes inhomogènes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ sont alors définis de la manière suivante :

Définition 7.3.3 Soit $0 < p, q \leq \infty, s \in \mathbb{R}$ et

$$\|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)} = \sum_{j=0}^{\infty} 2^{jsq} \|f * \psi_j^E\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}^q.$$

Alors

$$B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \|f\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)} < +\infty\}.$$

La matrice E est appelée l'anisotropie des espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$.

De manière plus générale si N est un entier relatif on définit

$$\|f\|_{B_{p,q,|\log|\cdot|^N}^s(\mathbb{R}^n, E)} = \sum_{j=0}^{\infty} j^N 2^{jsq} \|f * \psi_j^E\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^q.$$

et

$$B_{p,q,|\log|\cdot|^N}^s(\mathbb{R}^d, E) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), \|f\|_{B_{p,q,|\log|\cdot|^N}^s(\mathbb{R}^d, E)} < +\infty\}.$$

Remarque 7.3.4 Cette définition ne dépend pas de la partition de l'unité choisie.

Remarque 7.3.5 Soit E une matrice à spectre de partie réelle positive et $|\cdot|_E$ une (\mathbb{R}^d, E) -pseudo-norme. Pour tout $\lambda > 0$, $|\cdot|_{\frac{\lambda}{E}}$ est une $(\mathbb{R}^d, \lambda E)$ -pseudo-norme. D'où pour tout $s > 0$, $B_{p,q,|\log|\cdot|^N}^s(\mathbb{R}^d, \lambda E) = B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$. Sans perte de généralité, on supposera dans toute la suite $\text{Tr}(E) = d$. Cette hypothèse va permettre de comparer une anisotropie du champ à une anisotropie des espaces d'analyse et va ainsi permettre d'énoncer des résultats d'optimalité.

Comme cela est le cas pour les espaces isotropes, les espaces de Hölder anisotropes $C^s(\mathbb{R}^d, E)$ peuvent être considérés comme un cas particulier des espaces de Besov anisotropes :

Définition 7.3.6 Soit s dans \mathbb{R} et N un entier relatif. Les espaces de Hölder anisotropes $C^s(\mathbb{R}^d, E)$ et $C^s_{|\log|N}(\mathbb{R}^d, E)$ sont définis par

$$C^s(\mathbb{R}^d, E) = B^s_{\infty, \infty}(\mathbb{R}^d, E) \quad \text{et} \quad C^s_{|\log|N}(\mathbb{R}^d, E) = B^s_{\infty, \infty, |\log|N}(\mathbb{R}^d, E).$$

Proposition 7.3.7 Soit $0 < s < \rho_{\min}(E)$ et N un entier relatif. Alors

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} + \sup_{|h|_E \leq 1} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|_E^s |\log(|h|_E)|^N} \right).$$

et la norme $\|f\|_{B^s_{\infty, \infty, |\log|N}}$ définie plus haut sont des normes équivalentes dans $C^s_{|\log|N}(\mathbb{R}^d, E)$.

Remarque 7.3.8 Les espaces de Hölder anisotropes admettent une caractérisation différences-finies sous l'hypothèse générale $s > 0$. Ici on a juste besoin de considérer le cas $0 < s < \rho_{\min}(E)$ et d'énoncer la proposition 7.3.7 dans ce cas particulier.

Remarque 7.3.9 Soit $0 < s < \rho_{\min}(E)$ et N un entier relatif. Une fonction bornée f appartient à l'espace de Hölder $C^s_{|\log|N}(\mathbb{R}^d, E)$ si et seulement si :

Pour tout $r \in (0, 1)$, $\Theta \in S^0_E(|\cdot|_E)$ et $x \in \mathbb{R}^d$

$$|f(x + r^E \Theta) - f(x)| \leq C_0 r^s |\log(r)|^N,$$

pour une certaine constante positive C_0 . Ainsi dire que la fonction f appartient à l'espace de Hölder anisotrope $C^s_{|\log|N}(\mathbb{R}^d, E)$ signifie que sa restriction à n'importe quelle courbe paramétrique du type

$$r > 0 \mapsto r^E \Theta,$$

avec $\Theta \in S^0_E(|\cdot|_E)$, est l'espace de Hölder usuel $C^s_{|\log|N}(\mathbb{R})$. En gros, la 'régularité directionnelle anisotrope' dans toute direction 'anisotrope' doit être supérieure à s . En fait on remplace les lignes droites du cadre isotrope par les 'lignes anisotropes' $r > 0 \mapsto r^E \Theta$ du cadre anisotrope.

Le point de vue est donc ici assez différent de celui qui est détaillé dans [BE03] ou [BMS07]. On n'estime pas la régularité des trajectoires **en changeant la direction de mesure** mais en mesurant la régularité suivant des 'lignes anisotropes'.

7.4 Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie

Le but de cette section est double. On répond tout d'abord à la question suivante : quelles informations sur l'anisotropie du champ apporte la mesure de sa régularité ? Peut-on ainsi estimer une anisotropie du champ ? Ce n'est en fait pas le cas : le théorème ?? section 7.4.2 montre en fait que la connaissance de l'exposant critique dans n'importe quel espace fonctionnel 'raisonnable' ne peut pas apporter plus d'information sur l'anisotropie du champ que sa partie diagonalisable réelle.

On illustre ensuite le rôle joué par la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie de la matrice E d'analyse (i.e. l'anisotropie de l'espace). En fait toutes les familles d'espaces de Besov $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^d, E)$ dont les anisotropies ont même partie diagonalisable réelle sont équivalentes

en un sens qui est précisé en section 7.4.3. Ce résultat va avoir une conséquence importante. Comme on ne perd pas d'information en analysant la régularité du champ dans des espaces de Besov avec anisotropie diagonale (ou diagonalisable), on va se placer dans ce cadre là. On va pouvoir alors utiliser dans ce cas l'analyse par ondelettes anisotrope définie par Triebel pour les espaces de Besov à anisotropie diagonale (voir [Trie04] et les rappels faits en section 7.6).

Avant d'énoncer tout résultat précis, en section 7.4.1 on rappelle tout d'abord ce qu'est la partie diagonalisable réelle d'une matrice.

7.4.1 Partie diagonalisable réelle d'une matrice

Définition 7.4.1 *Les notations sont celles de la proposition 7.2.14. La partie diagonalisable réelle d'une matrice E est la matrice D définie par*

$$D = P \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{m_1+m_2} \end{pmatrix} P^{-1},$$

où

– Pour tout ℓ_1 dans $\{1, \dots, m_1\}$

$$D_{\ell_1} = \lambda_{\ell_1} Id,$$

– Pour tout ℓ_2 dans $\{1, \dots, m_2\}$

$$D_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{\ell_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\ell_2} \end{pmatrix}.$$

Remarque 7.4.2 *On va voir que la régularité des trajectoires d'un champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'anisotropie E_0 et d'indice de Hurst H_0 défini par une représentation harmonisable de la forme 7.2.3 est liée à la partie diagonalisable réelle D_0 de E_0 . Par ailleurs on souligne que la remarque 2.10 de [BMS07] implique que si on suppose $\text{Tr}(E_0) = d$ pour tout exposant du champ alors on a unicité de la partie diagonalisable réelle.*

Exemple 7.4.3 *On illustre la notion de partie diagonalisable réelle d'une matrice à travers quelques exemples :*

– Si $E_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, comme E_1 est diagonale à valeurs propres réelles, sa partie diagonalisable réelle est $D_1 = E_1$.

– Si $E_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$, λ est une valeur propre 'double' de E_2 et donc $D_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

– Si $E_3 = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, la matrice a deux valeurs propres complexes conjuguées $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ et $D_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

7.4.2 Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'exposant du champ

Dans tout ce qui suit on va considérer un champ gaussien autosimilaire $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ d'exposant E_0 et d'indice de Hurst H_0 défini par une représentation harmonisable de la forme (7.2.3). Le théorème suivant dit que dans n'importe quelle famille 'raisonnable' d'espaces fonctionnels l'exposant critique est uniquement fonction de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$. Ainsi mesurer la régularité, ne peut pas apporter plus d'information sur l'anisotropie que sa partie diagonalisable réelle.

On rappelle que $B_{p,q}^s(K, E)$ est l'ensemble de tous les $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tels qu'il existe $g \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ avec $g|_K \equiv f$. On définit l'exposant local critique $\alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(E, p, q)$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ par

$$(7.4.1) \quad \alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(E, p, q) = \sup\{s > 0, X_{E_0, H_0}(\cdot) \in B_{p,q,loc}^s(\mathbb{R}^d, E)\}.$$

On a ainsi le théorème suivant :

Théorème 7.4.4 ?? *L'exposant local critique $\alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(E, p, q)$ du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ vérifie :*

$$a.s. \alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(E, p, q) = \alpha_{X_{D_0, H_0}, loc}(E, p, q).$$

Cet exposant local critique dépend seulement de la partie diagonalisable réelle de la matrice d'anisotropie E_0 .

Preuve. Ce théorème sera démontré en section 7.6. □

On peut aussi remplacer les espaces $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ par toute famille d'espaces équivalente dans l'intervalle $(0, +\infty)$ au sens de [AJVW08] :

Définition 7.4.5 *Soit B_p^s et \tilde{B}_p^s deux familles d'espaces fonctionnels. Ce sont des familles équivalentes dans l'intervalle (p_1, p_2) si*

$$\forall p \in (p_1, p_2), \forall \varepsilon > 0, \tilde{B}_p^{s+\varepsilon} \subset B_p^s \subset \tilde{B}_p^{s-\varepsilon}.$$

Cette définition signifie que pour tout $p \in (p_1, p_2)$ l'espace \tilde{B}_p^s est très 'proche' (au sens de la relation d'inclusion) de l'espace B_p^s . En particulier ceci implique que pour tout $p \in (p_1, p_2)$ l'exposant local critique de toute distribution tempérée f dans l'échelle \tilde{B}_p^s est égal à l'exposant local critique de f dans l'échelle B_p^s . Ainsi le théorème ?? s'applique aux espaces de Besov anisotropes mais aussi aux espaces de Sobolev anisotropes ou toute famille d'espaces équivalents.

7.4.3 Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie des espaces d'analyse

Le but est ici de mesurer la régularité local dans différents espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$. Dans cette section, on donne quelques résultats préliminaires d'injection concernant les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ dont les matrices d'anisotropie ont même partie diagonalisable réelle. En particulier ceci va impliquer un résultat important : l'exposant local critique des trajectoires du champ dans n'importe quel espace de Besov anisotrope $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ dépend uniquement de la partie diagonalisable réelle de la matrice E .

Proposition 7.4.6 *On suppose que E_1 et E_2 ont la même partie diagonalisable réelle D . On a*

$$B_{p,q,|\log|\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_1) \hookrightarrow B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_2) \hookrightarrow B_{p,q,|\log|\frac{1}{\rho_{\min}(D)}}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_1).$$

Corollaire 7.4.7 *L'exposant local critique $\alpha_{X,loc}(E, p, q) = \sup\{s > 0, X(\cdot) \in B_{p,q(\mathbb{R}^d, E)}^s\}$ de tout champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ dépend uniquement de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie E (de l'espace).*

Remarque 7.4.8 *Le résultat reste vrai pour toute famille d'espaces équivalente à celle des espaces de Besov anisotrope au sens de [AJVW08].*

Remarque 7.4.9 *On peut remarquer aussi que ce résultat n'est pas lié au champ gaussien considéré mais découle d'une propriété des espaces fonctionnelles eux mêmes. Cela ne donne donc aucune information sur les propriétés d'anisotropie du champ.*

Ce résultat va avoir ici une conséquence importante. En effet si on souhaite estimer l'exposant local critique $\alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(p, q, E)$ des trajectoires du champ gaussien $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ il est suffisant de déterminer la régularité locale critique du champ dans les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D)$ (où D est la partie diagonalisable réelle de E) qui vont être plus simples à gérer.

7.5 Résultats d'optimalité, régularité locale des trajectoires du champ

Dans cette section, on montre que pour toute anisotropie E_0 du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est en quelque sorte spécifique : en effet 'la meilleure manière' de mesurer la régularité dans un cadre anisotrope est celle associée à la matrice E_0 . Plus précisément la matrice d'anisotropie E_0 permet de maximiser l'exposant de régularité. On détaille dans la section suivante ce résultat, tout d'abord en dimension 2, ensuite en dimension supérieure où on obtient un résultat d'optimalité faible.

Mais avant d'étudier les propriétés d'optimalité de l'anisotropie du champ, on souligne une propriété intéressante de l'exposant critique anisotrope : sa stabilité par rapport aux petites perturbations de la matrice E associée aux espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ d'analyse.

7.5.1 Un résultat de continuité

Théorème 7.5.1 *L'exposant local critique des trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d, E)$ est presque sûrement une fonction continue de E . Plus précisément l'application*

$$E \mapsto \alpha_{X_{E_0, H_0}, loc}(p, q, E)$$

est presque sûrement une fonction continue de E .

On peut remarquer que cette propriété de continuité n'est pas satisfaite par l'exposant directionnel critique qui est constant sauf dans une direction particulière où il est discontinu. Par ailleurs, le théorème 7.5.1 permet de montrer qu'une petite erreur d'estimation de la matrice d'anisotropie implique juste une petite erreur sur l'estimation de l'exposant critique et ainsi en utilisant les résultats d'optimalité ci dessous, une faible erreur sur l'estimation de l'indice de Hurst H_0 associée à l'anisotropie E_0 du champ étudié.

7.5.2 Deux résultats d'optimalité

On distingue deux cas : le cas $d = 2$ où on peut énoncer un résultat général d'optimalité, et le cas $d > 2$ où on énonce un résultat plus faible. On va faire dans toute la suite l'hypothèse suivante sur toute anisotropie E_0 du champ et toute anisotropie E des espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$

$$Tr(E_0) = Tr(E) = d.$$

Ici \mathcal{E}^+ désignera l'ensemble des matrices de $M_d(\mathbb{R})$ à spectre de partie réelle positive.

7.5.2.1 Un résultat d'optimalité dans le cas particulier $d = 2$

Ici on énonce le premier résultat concernant la matrice d'anisotropie E_0 du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans le cas $d = 2$.

Théorème 7.5.2 *Presque sûrement*

$$\alpha_{loc}(\tilde{E}_0, p, q) = H_0 = \sup\{\alpha_{loc}(E, p, q), E \in \mathcal{E}^+\}.$$

Ceci est encore valable si on remplace la matrice E_0 par \tilde{E}_0 une matrice de même partie diagonalisable réelle.

La démonstration du théorème 7.5.2 est détaillée en section 7.6.

On souligne que le cas $d = 2$ est intéressant lorsqu'on s'intéresse au cas des images anisotropes. En fait le théorème 7.5.2 contient deux résultats principaux :

- L'exposant critique du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E_0)$ est égal à l'indice de Hurst associé H_0 .
- Toute anisotropie E_0 du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ maximise cet exposant critique parmi toutes les matrices d'analyse possibles. En fait la 'meilleure manière' de mesurer la régularité du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est de mesurer la régularité suivant les 'directions anisotropes' :

$$r > 0 \mapsto r^{E_0} \Theta$$

associées à la géométrie intrinsèque du champ.

7.5.2.2 Un résultat d'optimalité faible en dimension supérieure

Théorème 7.5.3 *Dans le cas général*

$$\alpha(E_0, p, q) = H_0 = \sup\{\alpha(E, p, q), E \in \mathcal{E}^+ \text{ commutant avec } E_0\}.$$

Ce résultat est encore valable si on remplace E_0 par \tilde{E}_0 matrice de même partie diagonalisable réelle.

Remarque 7.5.4 *L'hypothèse 'E et E_0 commutent' implique en particulier que les matrices D et D_0 ont les mêmes espaces propres. On a donc prouvé ici que la matrice d'anisotropie E_0 maximise l'exposant critique parmi les matrices qui ont les mêmes sous espaces caractéristiques. Ainsi en dimension supérieure on a supposé de manière implicite que les sous espaces caractéristiques de la matrice d'anisotropie sont connus.*

Ces deux résultats découlent d'une étude approfondie de la régularité locale des trajectoires du champ dans les espaces de Besov anisotropes que l'on détaille ci dessous. En section 7.5.3, on étudie tout d'abord la régularité locale des trajectoires dans les espaces de Besov anisotropes associés à l'anisotropie E_0 du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et on montre que l'on retrouve ainsi l'indice de Hurst. L'objectif était d'établir les résultats d'optimalité en section 7.5.4, on étudie la régularité locale des trajectoires dans des espaces de Besov anisotropes généraux.

7.5.3 Régularité locale du champ X_{E_0, H_0} dans les espaces de Besov anisotropes associés à E_0

La proposition suivante donne des résultats de régularité locale dans les espaces de Besov anisotropes associée à la matrice E_0 .

Proposition 7.5.5 *Pour tout $0 < p \leq +\infty$, $0 < q \leq +\infty$, on a*

1. *Presque sûrement $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartient à $B_{p, q, \frac{1}{|\log^d|}, loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.*
2. *Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $B_{p, q, loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.*

En particulier, on peut relier l'indice de Hurst à l'exposant de régularité X_{E_0, H_0} .

Corollaire 7.5.6 *L'exposant local critique $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^d, E_0)$ est égale à l'indice de Hurst H_0 .*

Ainsi si une anisotropie E_0 du champ est connue, on peut retrouver l'indice de Hurst H_0 . La principale difficulté est ainsi de retrouver une anisotropie.

Si on considère le cas particulier $p = q = \infty$, on retrouve la proposition 5.3 démontrée par H.Biermé ou C.Lacaux dans [BL07] ou le théorème 4.2 de [Xiao07] dans le cas particulier des champs définis par le procédé 7.2.3 :

Proposition 7.5.7 *On a :*

1. *Presque sûrement les trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à $C_{\frac{1}{|\log^d|}, loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.*
2. *Presque sûrement les trajectoires $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $C_{loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.*

7.5.4 Des résultats de régularité des trajectoires du champ X_{E_0, H_0} dans des espaces de Besov anisotropes généraux

7.5.4.1 Le cas général

Dans cette section on se donne deux matrices qui commutent E_0, E à spectre de partie réelle positive. On note D_0 (resp D) la partie diagonalisable réelle de E_0 (resp E). L'objectif

est ici de mesurer la régularité locale des trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(E, \mathbb{R}^d)$. On pourra ainsi en déduire les deux résultats d'optimalité voulus.

Comme les matrices E_0 et E commutent les matrices D_0 et D aussi. De plus les matrices D_0 et D sont diagonalisables dans $M_d(\mathbb{R})$ elles sont donc simultanément diagonalisables. A un changement de base près on peut supposer que D_0 et D sont deux matrices diagonales. Plus précisément on suppose que

$$(7.5.1) \quad D_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1^0 Id_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m^0 Id_{d_m} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_m Id_{d_m} \end{pmatrix},$$

avec

$$(7.5.2) \quad \frac{\lambda_m}{\lambda_m^0} \leq \dots \leq \frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}.$$

Par ailleurs on rappelle que $Tr(E_0) = Tr(E) = d$. En particulier ceci implique $\lambda_m/\lambda_m^0 \leq 1$. Les résultats de régularité des trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ sont résumés dans la proposition suivante :

Proposition 7.5.8 *Soit $0 < p \leq +\infty$, $0 < q \leq +\infty$. Supposons que E et E_0 commutent.*

1. *Presque sûrement les trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à l'espace de Besov anisotrope $B_{p,q,|\log|\cdot|^d,loc}^{H_0 \frac{\lambda_m}{\lambda_m^0}}(\mathbb{R}^d, E)$.*
2. *Presque sûrement les trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à l'espace de Besov anisotrope $B_{p,q,|\log|\cdot|^d,loc}^{H_0 \frac{\lambda_m}{\lambda_1^0}}(\mathbb{R}^d, E)$.*

Remarque 7.5.9 *La proposition 7.5.8 dit que lorsqu'on mesure la régularité locale des trajectoires suivant des directions anisotropes différentes de celles associées à une anisotropie du champ E_0 , on perd en régularité. Par ailleurs on est capable de quantifier cette perte : plus la direction anisotrope de mesure est éloignée des directions anisotropes liées à la géométrie intrinsèque du champ, plus l'exposant critique est petit. On remarque que cet exposant local critique est toujours plus petit que H_0 et peut prendre toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $(0, H_0]$. On en déduit alors le résultat d'optimalité énoncé plus haut concernant la matrice d'anisotropie E du champ X dans le cas général. La démonstration du résultat d'optimalité dans le cas particulier $d = 2$ va nécessiter plus de travail et est faite section 7.6.*

On considère alors le cas particulier $p = q = +\infty$ qui permet d'obtenir des résultats de régularité Höldérienne anisotrope des trajectoires :

Proposition 7.5.10 *On a :*

1. *Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à $\mathcal{C}_{|\log|\cdot|^d,loc}^{H_0 \frac{\lambda_m}{\lambda_m^0}}(\mathbb{R}^d, E)$.*
2. *Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $\mathcal{C}_{\frac{1}{|\log|\cdot|^d},loc}^{H_0 \frac{\lambda_m}{\lambda_1^0}}(\mathbb{R}^d, E)$.*

D'autres conséquences de l'étude ci dessus sont les résultats de régularité locale des trajectoires dans les espaces de Besov isotropes classiques.

7.5.4.2 Une conséquence sur la régularité des trajectoires dans les espaces de Besov classiques

On va utiliser maintenant les résultats de la section précédente pour retrouver des résultats de régularité bien connus dans le cas isotrope. Comme les matrices E_0 et Id commutent on peut appliquer le résultat ci dessus au cas $E = Id$. On remarque que dans ce cas $\lambda_m^0 = \rho_{\max}(E_0)$. On obtient alors la proposition suivante :

Proposition 7.5.11 *On a :*

1. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à $B_{p, q, |\log|^d, loc}^{H_0 \frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(\mathbb{R}^d)$.
2. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $B_{p, q, \frac{1}{|\log|^d}, loc}^{H_0 \frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(\mathbb{R}^d)$.

Dans le cas particulier $p = q = \infty$:

Proposition 7.5.12 *On a :*

1. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à $C_{|\log|^d, loc}^{H_0 \frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(\mathbb{R}^d)$.
2. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $C_{\frac{1}{|\log|^d}, loc}^{H_0 \frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(\mathbb{R}^d)$.

Remarque 7.5.13 *On retrouve ainsi des résultats de régularité Höldérienne classique déjà établis dans le théorème 5.4 de [BMS07] pour les champs à accroissements stationnaires autosimilaire définis par une représentation harmonisable de la forme 7.2.3.*

7.6 Compléments et preuves

7.6.1 Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie

7.6.1.1 Rôle de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie des espaces d'analyse $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^d, E)$: résultats préliminaires d'injection entre les espaces de Besov anisotropes

Le but de cette section est de montrer la proposition 7.4.7. On aura tout d'abord besoin des deux résultats préliminaires suivants que l'on peut trouver dans [BMS07]. Le premier énonce l'existence de coordonnées polaires anisotropes :

Proposition 7.6.1 *Si E_0 est une matrice à spectre de partie réelle positive on a :*

1. Pour tout vecteur x de $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

Il existe un unique couple (r, θ) de $\mathbb{R}_+^ \times S_0^{E_0}(\rho)$ tel que :*
 $x = r^{E_0} \theta.$

2. De plus $S_0^E(\rho)$ est un compact de \mathbb{R}^d et l'application,

$$(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times S_0^E(\rho) \mapsto x = r^E \theta$$

est alors un homéomorphisme de $\mathbb{R}_+^ \times S_0^E(\rho)$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.*

Enfin, le résultat suivant établi dans [BL07] (corollaire 3.4) permet de comparer toute (\mathbb{R}^d, E) pseudo-norme à la norme usuelle de \mathbb{R}^d que l'on notera $|\cdot|$.

Proposition 7.6.2 *Soit ρ une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme.*

1. *Il existe $C_1(\rho)$, $C_2(\rho)$ deux constantes positives dépendant uniquement de la pseudo-norme ρ choisie telles que, pour tout vecteur x de \mathbb{R}^d vérifiant $|x| \leq 1$ ou $|x|_{E_0} \leq 1$:*

$$C_1(\rho)|x|^{\frac{1}{\rho_{\min}(E_0)}}(1+|\log(|x|)|)^{-\frac{d}{\rho_{\min}(E_0)}} \leq \rho(x) \leq C_2(\rho)|x|^{\frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(1+|\log(|x|)|)^{\frac{d}{\rho_{\max}(E_0)}}.$$

2. *Il existe $C_1(\rho)$, $C_2(\rho)$ deux constantes positives dépendant uniquement de la pseudo-norme ρ choisie telles que, pour tout vecteur x de \mathbb{R}^d vérifiant $|x| \geq 1$ ou $|x|_{E_0} \geq 1$:*

$$C_1(\rho)|x|^{\frac{1}{\rho_{\max}(E_0)}}(1+|\log(|x|)|)^{-\frac{d}{\rho_{\max}(E_0)}} \leq \rho(x) \leq C_2(\rho)|x|^{\frac{1}{\rho_{\min}(E_0)}}(1+|\log(|x|)|)^{\frac{d}{\rho_{\min}(E_0)}}.$$

La démonstration de la proposition 7.4.7 est alors basée sur le lemme suivant :

Lemme 7.6.3 *On suppose que E_1 et E_2 sont deux matrices à spectre de partie réelle positive et même partie diagonalisable réelle D . Alors il existe deux constantes positives c_1 et c_2 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$*

$$c_1|x|_{E_2} \frac{1}{(1+|\log(|x|_{E_2})|)^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}} \leq |x|_{E_1} \leq c_2|x|_{E_2}(1+|\log(|x|_{E_2})|)^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}.$$

Preuve. On utilise les coordonnées polaires associées à E_1 , on a pour $x \in \mathbb{R}^d$

$$x = r^{E_1}\Theta, (r, \Theta) \in \mathbb{R}_+^* \times S_0(E_1).$$

On note $F_1 = E_1 - D_1$, $F_2 = E_2 - D_2$ et on remarque que ces deux matrices ont des valeurs propres purement imaginaires. La proposition 7.6.2 rappelée plus haut, implique alors que pour un réel positif ε bien choisi

$$\begin{aligned} |x|_{E_2} &= |r^{E_2}r^{-D_2}r^{-F_2}r^{D_1}r^{F_1}\Theta|_{E_2} \\ &\leq r|r^{-F_2}r^{F_1}\Theta|_{E_2} \\ &\leq Cr \max(|r^{-F_2}r^{F_1}\Theta|_{\frac{1}{\rho_{\min}(D)-\varepsilon}}, |r^{-F_2}r^{F_1}\Theta|_{\frac{1}{\rho_{\max}(D)+\varepsilon}}) \\ &\leq Cr \max(\|r^{-F_2}r^{F_1}\|_{\frac{1}{\rho_{\min}(D)-\varepsilon}}, \|r^{-F_2}r^{F_1}\|_{\frac{1}{\rho_{\max}(D)+\varepsilon}}) \\ &\leq Cr(1+|\log(r)|)^{\frac{d-1}{\rho_{\min}(D)-\varepsilon}} \\ &\leq Cr(1+|\log(r)|)^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}} \end{aligned}$$

□

On est maintenant en mesure de montrer les injections énoncées dans la proposition 7.4.7 :

$$B_{p,q,|\log|\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_1) \hookrightarrow B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_2) \hookrightarrow B_{p,q,\frac{1}{|\log|\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}}^\alpha(\mathbb{R}^d, E_1).$$

pour tout $\alpha > 0$, $0 < p, q \leq +\infty$.

Soit $(\psi_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ une analyse anisotrope de Littlewood-Paley des espaces de Besov (partition de l'unité anisotrope). Par construction on a

$$\widehat{\text{supp}}(\psi_1^{E_2}) \subset \{\xi, 1 \leq |\xi|_{E_2} \leq 4\}$$

(avec un résultat analogue pour E_1). Alors il existe $j_0 \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\text{supp}}(\psi_j^{E_2}) &\subset \{\xi, 2^{j-1} \leq |\xi|_{E_2^*} \leq 2^{j+1}\} \\ &\subset \bigcup_{l=j-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)}^{j+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)} \{\xi, 2^{l-1} \leq |\xi|_{E_1^*} \leq 2^{l+1}\} \end{aligned}$$

Donc

$$\widehat{\psi_j^{E_2}} \widehat{f}(\xi) = \widehat{\psi_j^{E_2}} \sum_{l=j-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)}^{j+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)} \widehat{\psi_l^{E_1}} \widehat{f}(\xi),$$

ce qui implique directement

$$\begin{aligned} \|f * \psi_j^{E_2}\|_{L^p} &\leq \sum_{l=j-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)}^{j+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)} \|\psi_j^{E_2} * (\psi_l^{E_1} * f)\|_{L^p} \\ &\leq \|\psi\|_{L^1} \sum_{l=j-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)}^{j+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)} \|\psi_l^{E_1} * f\|_{L^p} \end{aligned}$$

On peut ainsi majorer $\sum_{j=1}^J \frac{2^{jsq}}{j^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}} \|f * \psi_j^{E_2}\|_{L^p}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^J \frac{2^{jsq}}{j^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}} \|f * \psi_j^{E_2}\|_{L^p} &\leq \sum_{j=1}^J \frac{2^{jsq}}{j^{\frac{d}{\rho_{\min}(D)}}} \sum_{l=j-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)}^{j+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(j)} \|(f * \psi_l^{E_1})\|_{L^p} \\ &\leq \sum_{l=1}^{J+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(J)} \|f * \psi_l^{E_1}\|_{L^p} \sum_{j=l-j_0-\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(l)}^{l+j_0+\frac{d}{\rho_{\min}(D)} \log_2(l)} \frac{2^{jsq}}{j} \\ &\leq \sum_{l=1}^{J+j_0+\log_2(J)} \|f * \psi_l^{E_1}\|_{L^p} 2^{lsq} \log_2(l) < +\infty. \end{aligned}$$

On conclut alors en faisant tendre J vers l'infini. L'inclusion réciproque est obtenu en changeant les rôles de E_1 et E_2 .

Ces résultats d'injections vont avoir ici une conséquence importante. Lorsqu'on va étudier la régularité des trajectoires du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$, cela va permettre de considérer comme espaces d'analyse uniquement les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D)$ avec une anisotropie diagonale D . En effet dans le cas particulier d'une anisotropie diagonale D on peut utiliser une analyse multi-résolution anisotrope et les bases d'ondelettes anisotropes. Le but de la section suivante est de donner plus de détails sur ces bases d'ondelettes anisotropes.

7.6.1.2 Bases d'ondelettes des espaces de Besov anisotropes avec anisotropie diagonale

Dans cette section, on suppose que l'anisotropie de l'espace de Besov $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$ est diagonale (avec des valeurs propres positives) et est notée D (au lieu de E). On suppose que

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix} \text{ et- comme cela est le cas pour les espaces de Besov anisotropes généraux}$$

$-Tr(D) = d$. On rappelle tout d'abord la définition donnée par H.Triebel dans [Trie06] d'une analyse multi-résolution anisotrope.

Soit V_j une analyse multi-résolution unidimensionnelle de $L^2(\mathbb{R})$ et on note ψ^F (resp. ψ^M) l'ondelette père (resp. ondelette mère) correspondante.

Notation 7.6.4 On note $\{F, M\}^{d*}$ l'ensemble

$$\{F, M\}^{d*} = \{F, M\}^d \setminus \{(F, \dots, F)\}.$$

Pour $j \in \mathbb{N}$, on définit l'ensemble $I^j(D)$ de $\{F, M\}^d \times \mathbb{N}^d$ de la manière suivante :

- Si $j = 0$, $I^0(D) = \{(F, \dots, F), (0, \dots, 0)\}$.
- Si $j \geq 1$, $I^j(D)$ est l'ensemble de tous les éléments (G, γ) avec $G \in \{F, M\}^{d*}$ et $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tel que pour tout $r \in \{1, \dots, d\}$:

$$\begin{aligned} \text{Si } G_r = F, \gamma_r &= [(j-1)\lambda_r], \\ \text{Si } G_r = M, [(j-1)\lambda_r] &\leq \gamma_r < [j\lambda_r]. \end{aligned}$$

Enfin pour $j \in \mathbb{N}$ et $(G, \gamma) \in I^j(D)$, on note $D_{j,G,\gamma}$ la matrice définie par

$$D_{j,G,\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \gamma_d \end{pmatrix}$$

Remarque 7.6.5 L'estimation suivante de la taille de $I^j(D)$ est utile

$$|I^j(D)| \leq 2^d([\rho_{\max}(D)] + 1).$$

Enfin on définit la famille d'ondelettes comme suit. Pour $j \in \mathbb{N}$, $(G, \gamma) \in I^j(D)$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, on pose

$$\Psi_{j,G,\gamma}^k(x) = (\psi_{G_1} \otimes \dots \otimes \psi_{G_d})(2^{D_{j,G,\gamma}}x - k).$$

On a le résultat suivant ([Trie04] et [Trie06], théorème 5.23).

Théorème 7.6.6 1. La famille $(2^{\frac{Tr(D_{j,G,\gamma})}{2}} \Psi_{j,G,\gamma}^k)_{j \in \mathbb{N}, (G,\gamma) \in I^j(D), k \in \mathbb{Z}^d}$ est une base ortho-normale de $L^2(\mathbb{R}^d)$.

2. Soit $(\Psi_k^{j,G,\gamma})_{j \in \mathbb{N}, (G,\gamma) \in I^j(D), k \in \mathbb{Z}^d}$ la famille construite à partir de ψ_F et ψ_M d'ondelettes de Daubechies avec pour un certain $u \in \mathbb{N}$

$$\psi_F \in \mathcal{C}^u(\mathbb{R}), \psi_M \in \mathcal{C}^u(\mathbb{R}).$$

Soit $0 < p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Il existe un entier $u(s, p, D)$ tel que si $u > u(s, p, D)$ pour toute distribution tempérée f les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$$(a) f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D),$$

$$(b) f = \sum c_{j,G,\gamma}^k \Psi_{j,G,\gamma}^k \text{ avec}$$

$$\sum_{j,G,\gamma} 2^{j(s-\frac{d}{p})q} \left(\sum_k |c_{j,G,\gamma}^k|^p \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty,$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Le développement ci dessus est alors unique et

$$c_{j,G,\gamma}^k = \langle f, 2^{Tr(D_{j,G,\gamma})} \Psi_{j,G,\gamma}^k \rangle .$$

Remarque 7.6.7 Un résultat analogue peut être énoncé ([Trie06], théorème 5.24) en remplaçant les ondelettes de Daubechies par les ondelettes de Meyer. Dans ce cas on peut poser $u = +\infty$.

On étudie maintenant le rôle de la partie diagonalisable réelle d'une anisotropie du champ étudié.

7.6.1.3 Rôle de la partie diagonalisable réelle d'une anisotropie du champ étudié : preuve du théorème ??

Le but de cette section est de montrer le théorème ?? . La démonstration du théorème ?? est basée sur plusieurs lemmes :

Lemme 7.6.8 Soit E_0 une matrice à spectre de partie réelle positive, $H_0 \in (0, \rho_{\min}(E_0))$, K_0 un compact de \mathbb{R}^d . Alors presque sûrement

$$R_{K_0, E_0, H_0}(x) = \int_{K_0} \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi)$$

appartient à l'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d, E)$ pour tous α, p, q et toute matrice E à spectre de partie réelle positive.

Preuve. Dans la suite D_0 (resp D) désigne la partie diagonalisable réelle de la matrice E_0 (resp E). On utilise ici une analyse multi-résolution anisotrope construite à partir d'ondelettes de Meyer et d'une matrice d'anisotropie D . On remarque que comme K_0 est un sous ensemble borné de \mathbb{R}^d , il existe alors presque sûrement $j_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $j \geq j_0$, $(G, \gamma) \in I^j(D)$, $k \in \mathbb{Z}^d$:

$$c_{j,G,\gamma}^k = 0.$$

Ainsi presque sûrement

$$R_{K_0, E_0, H_0}(x) = \sum_{j=0}^{j_0} \sum_{(G,\gamma) \in I^j(D), k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,G,\gamma}^k \Psi_{j,G,\gamma}^k$$

la convergence ayant lieu dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.
 D'où presque sûrement pour tout $j \leq j_0$:

$$\sup_{(G,\gamma) \in I^j(D), k \in \mathbb{Z}^d} |c_{j,G,\gamma}^k| < +\infty.$$

Par ailleurs les fonctions ψ_F et ψ_M sont à décroissance rapide. En utilisant ces deux propriétés on obtient que presque sûrement $\sum_{j=0}^{j_0} \sum_{(G,\gamma) \in I^j(D), k \in \mathbb{Z}^d} c_{j,G,\gamma}^k \Psi_{j,G,\gamma}^k$ converge uniformément sur tout compact et a la même régularité que les ondelettes. On a ainsi montré le lemme 7.6.8. \square

On pose $K_0 = B_{D_0}(0, 2)$, le lemme 7.6.8 implique alors directement :

Lemme 7.6.9 *Presque sûrement les trajectoires du champ gaussien X_{H_0, E_0} et $x \mapsto \int_{|\xi|_{D_0} > 2} \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi)$ ont la même régularité dans tout espace de Besov $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^d, E)$.*

Lemme 7.6.10 *Pour tout $H_0 \in (0, \rho_{\min}(E_0))$ on pose*

$$\widetilde{X}_{E_0, H_0}(x) = \int_{|\xi|_{D_0} > 2} \frac{e^{ix \cdot \xi} - 1}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi).$$

On définit de manière analogue les champs gaussiens $\{\widetilde{X}_{D_0, H_0 + \varepsilon}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{\widetilde{X}_{D_0, H_0 - \varepsilon}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$. Alors presque sûrement

$$\alpha_{\widetilde{X}_{D_0, H_0 - \varepsilon}, loc}(E, p, q) \leq \alpha_{\widetilde{X}_{E_0, H_0}, loc}(E, p, q) \leq \alpha_{\widetilde{X}_{D_0, H_0 + \varepsilon}, loc}(E, p, q).$$

Preuve. On remarque que les champs gaussiens $\{\widetilde{X}_{D_0, H_0 - \varepsilon}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$, $\{\widetilde{X}_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ et $\{\widetilde{X}_{D_0, H_0 + \varepsilon}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ sont tous deux à accroissements stationnaires. De plus si $\phi_{X_{D_0, H_0 - \varepsilon}}$, $\phi_{X_{E_0, H_0}}$ et $\phi_{X_{D_0, H_0 + \varepsilon}}$ désignent les densités spectrales respectives des champs ci dessus on a pour tout $\varepsilon > 0$ par le lemme 7.6.3 ci dessus

$$\phi_{X_{D_0, H_0 + \varepsilon}} \leq \phi_{X_{E_0, H_0}} \leq \phi_{X_{D_0, H_0 - \varepsilon}}$$

On déduit alors des résultats de régularité de champs ayant des densités spectrales équivalentes que pour tout α, p, q , toute E à spectre de partie réelle positive et tout compact K que

$$(7.6.1) \quad \mathbb{P}(X_{D_0, H_0 - \varepsilon}(\cdot) \in B_{p,q}^\alpha(K)) \leq \mathbb{P}(X_{E_0, H_0}(\cdot) \in B_{p,q}^\alpha(K)) \leq \mathbb{P}(X_{D_0, H_0 + \varepsilon}(\cdot) \in B_{p,q}^\alpha(K)).$$

Le résultat requis découle alors de (7.6.1) et du fait que pour tout $s \in (0, \rho_{\min}(E_0))$, $\alpha > 0$ $0 < p, q \leq \infty$ on a (loi du zéro-un pour les champs gaussiens voir...)

– Soit presque sûrement $\alpha_{X_{D_0, s}, loc}(E, p, q) \leq \alpha$.

– Soit presque sûrement $\alpha_{X_{D_0, s}, loc}(E, p, q) \geq \alpha$.

\square

7.6.2 Régularité locale dans les espaces de Besov anisotropes du champ étudié

7.6.2.1 Régularité locale des trajectoires du bruit blanc

Soit $Z(x)$ un bruit blanc complexe \mathbb{R}^d . Comme cela a Levy, on peut en donner un développement sur toute base orthonormée $\{f_j, j \in \mathbb{N}\}$ de $L^2(\mathbb{R}^d)$, en le sens suivant : si $\{\xi_j, j \in \mathbb{N}\}$ est une suite *i.i.d.* de variables aléatoires gaussiennes complexes centrées, la série

$$\sum_j \xi_j(\omega) f_j(x),$$

converge presque sûrement dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers Z .

En développant Z sur la base orthonormale $(2^{\frac{\text{Tr}(D_j \cdot G \cdot \gamma)}{2}} \Psi_k^{j, G, \gamma})$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$, avec ψ_F et ψ_M comme cela est fait dans la section 7.6.1.2, on obtient le résultat suivant :

Proposition 7.6.11 *Soit Z un bruit blanc complexe, et D une matrice diagonale réelle à coefficients positifs. On a*

1. *Presque sûrement $Z(\cdot)$ appartient à $B_{p, q, \frac{1}{\log}, \text{loc}}^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d, D)$,*
2. *Presque sûrement $Z(\cdot)$ n'appartient pas à $B_{p, q, \text{loc}}^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d, D)$.*

Preuve. Comme on a une caractérisation ondelettes des espaces anisotropes et une décomposition du bruit blanc en série d'ondelettes (dans la même base), un raisonnement classique mène au résultat annoncé. \square

7.6.2.2 Régularité locale du champ X dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p, q}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$

On rappelle qu'on se fixe un champ gaussien de la forme (7.2.3) $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ où E_0 est une matrice à spectre positive et $H_0 \in (0, \rho_{\min}(E_0))$.

Par ailleurs on montre dans le lemme suivant qu'il existe des $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-normes

Lemme 7.6.12 *Soit E_0 une matrice $d \times d$ à spectre de partie réelle positive. Il existe alors une (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.*

Preuve. En effet soit φ une fonction infiniment différentiable à support compact dans $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.

La fonction ρ est alors définie de la manière suivante

$$\rho(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(a^{-E_0} x) da$$

vérifie alors les propriétés voulues. \square

En utilisant le théorème ??, on peut alors supposer que la (\mathbb{R}^d, E_0) pseudo-norme $|\cdot|_{E_0}$ utilisée pour définir le champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dans toute la suite on fait cette hypothèse. On transpose alors le théorème 4.4 de [Stein93] et le théorème 3.15 de [Li06] au cadre anisotrope.

Proposition 7.6.13 Soit $a(x, \xi) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ vérifiant pour un certain $m \in \mathbb{Z}$

$$|a(x, \xi)| \leq C(1 + |\xi|_{D_0})^m.$$

Soit T l'opérateur défini de la manière suivante

$$(7.6.2) \quad Tf = \mathcal{F}^{-1}(a(x, \xi)\widehat{f}(\xi)),$$

pour toute distribution tempérée f .

Si $f \in B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$, alors Tf appartient à $B_{p,q}^{s-m}(\mathbb{R}^d, D_0)$.

Preuve. Comme a est une fonction régulière à croissance lente sur \mathbb{R}^d , Tf est une distribution tempérée.

Pour $p > 1$, on désigne par p' le conjugué de p . Alors

$$\begin{aligned} \|\psi_j * Tf\|_{L^p} &\leq C\|\widehat{\psi_j Tf}\|_{L^{p'}} \\ &= C\|\widehat{\psi_j a(x, \xi)\widehat{f}}\|_{L^{p'}} \\ &\leq C\|\widehat{\psi_j}(1 + |\xi|)^m \widehat{f}\|_{L^{p'}} \\ &\leq C \left(\int_{2^{j-1} \leq |\xi|_{\Delta} \leq 2^{j+1}} (1 + |\xi|)^{mp'} |\widehat{f}(\xi)|^{p'} |\widehat{\psi_j}|^{p'} d\xi \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq C2^{jm} \|\widehat{\psi_j Tf}\|_{L^{p'}} \end{aligned}$$

Le résultat voulu en découle alors en utilisant une caractérisation Littlewood Paley des espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$. \square

Une démonstration similaire à celle du théorème 3.15 de [Li06], on déduit la version locale suivante de la proposition 7.6.13 :

Proposition 7.6.14 Les hypothèses sont celles de la proposition 7.6.13. Si $f \in B_{p,q,loc}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$, alors Tf appartient à $B_{p,q,loc}^{s-m}(\mathbb{R}^d, D_0)$.

Remarque 7.6.15 On remarque que l'hypothèse $p > 1$ faite dans la suite n'est en fait pas restrictive. En effet si on a une information sur la régularité locale dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$ pour $p > 1$, en utilisant les injections de Sobolev on peut étendre les résultats obtenus au cas général $p > 0$.

On peut maintenant montrer les résultats de régularité de la proposition 7.5.5 à savoir :

1. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ appartiennent à $B_{p,q, \frac{1}{\log d}, loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.
2. Presque sûrement les trajectoires de $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ n'appartiennent pas à $B_{p,q,loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, E_0)$.

Preuve.

1. On considère une partition de l'unité : soit φ_1, φ_2 deux fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi_2 &= 1, \\ \varphi_1(\xi) &= 1 \text{ si } |\xi| \leq 1, \\ \varphi_1(\xi) &= 0 \text{ si } |\xi| \geq 2, \end{aligned}$$

On montre que

$$(7.6.3) \quad \text{p.s. } \widehat{X} = \varphi_1 \widehat{X} + \varphi_2 \frac{\widehat{Z}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}},$$

i.e.

$$\text{p.s. } (1 - \varphi_1) \widehat{X} = \varphi_2 \widehat{X} = \varphi_2 \frac{\widehat{Z}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}},$$

En effet soient u, v deux fonctions définies sur \mathbb{R}^d appartenant à la classe de Schwartz :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\langle \varphi_2 \widehat{X}, u \rangle \langle \varphi_2 \widehat{X}, v \rangle) &= \mathbb{E}(\langle X, \widehat{\varphi_2 u} \rangle \langle X, \widehat{\varphi_2 v} \rangle) \\ &= \int \frac{(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \widehat{\varphi_2 u}(x) (e^{-i\langle y, \xi \rangle} - 1) \widehat{\varphi_2 v}(y) dx dy d\xi}{|\xi|_{E_0}^{2H_0 + d}} \\ &= \int \frac{|\varphi_2(\xi)|^2 u(\xi) \overline{v(\xi)} d\xi}{|\xi|_{E_0}^{2H_0 + d}} \\ &= \mathbb{E}(\langle Z, \frac{\widehat{\varphi_2 u}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}} \rangle \langle Z, \frac{\widehat{\varphi_2 v}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}} \rangle) \\ &= \mathbb{E}(\langle \varphi_2 \frac{\widehat{Z}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}}, u \rangle \langle \varphi_2 \frac{\widehat{Z}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}}, v \rangle) \end{aligned}$$

On a ainsi montré la propriété (7.6.3).

On applique alors la proposition 7.6.14 et on utilise le lien existant entre les deux pseudo-normes $|\cdot|_{D_0}$ et $|\cdot|_{E_0}$. On en déduit que

$$\text{p.s. } \mathcal{F}^{-1}(\varphi_2 \frac{\widehat{Z}}{|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}}}) \in B_{p,q,loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, D_0).$$

On remarque alors que

$$\text{p.s. } \varphi_1 \widehat{X} \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$$

Ainsi

$$\text{p.s. } \varphi_1 \widehat{X} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Le résultat recherché s'ensuit alors directement.

2. Soit φ_1, φ_2 comme ci dessus et $\widetilde{\varphi}_1, \widetilde{\varphi}_2$ deux fonctions infiniment différentiables sur \mathbb{R}^d vérifiant

$$\begin{aligned} \widetilde{\varphi}_1 + \widetilde{\varphi}_2 &= 1, \\ \widetilde{\varphi}_1(\xi) &= 1 \text{ si } |\xi| \leq 2, \\ \widetilde{\varphi}_1(\xi) &= 0 \text{ si } |\xi| \geq 3. \end{aligned}$$

Alors p.s.

$$\begin{aligned} \widehat{Z} &= \widetilde{\varphi}_1 \widehat{Z} + \widetilde{\varphi}_2 \varphi_2 \widehat{Z} \\ &= \widetilde{\varphi}_1 \widehat{Z} + \widetilde{\varphi}_2 (\varphi_2 |\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}} \widehat{X}) \text{ (par 7.6.3)} \\ &= \widetilde{\varphi}_1 \widehat{Z} + \widetilde{\varphi}_2 (|\xi|_{E_0}^{H_0 + \frac{d}{2}} \widehat{X}) \end{aligned}$$

On suppose que p.s. les trajectoires de X appartiennent à $B_{p,q,loc}^{H_0}(\mathbb{R}^d, D_0)$ alors par la proposition 7.6.14, p.s. les trajectoires du bruit blanc Z appartiennent à $B_{p,q,loc}^{-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d, D_0)$. Comme ce n'est pas le cas on en déduit le résultat requis en raisonnant par l'absurde.

On transpose ensuite ce résultat de régularité montré dans les espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, D_0)$ aux espaces de Besov anisotropes $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E_0)$ en utilisant la proposition 7.4.7. \square

7.6.3 Preuve des résultats de régularité dans les espaces de Besov anisotropes avec une anisotropie différente de celle du champ étudié

7.6.3.1 Un lemme de comparaison entre deux pseudo-normes

On considère les deux (\mathbb{R}^d, D_0) et (\mathbb{R}^d, D) pseudo-normes :

$$|x|_{D_0} = \sum_{\ell=1}^m |x_\ell|^{\frac{1}{\lambda_\ell^0}}, |x|_D = \sum_{\ell=1}^m |x_\ell|^{\frac{1}{\lambda_\ell}},$$

pour tout $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}$: Pour tout ℓ , $|\cdot|_\ell$ désigne une norme \mathbb{R}^{d_ℓ} .

On donne un premier résultat permettant de comparer deux pseudo-normes d'anisotropie diagonales :

Lemme 7.6.16 *Il existe deux constantes positives $C_1, C_2 > 0$ telles que pour tout $|x|_{D_0} \leq 1$,*

$$C_1 |x|_D^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}} \leq |x|_{D'} \leq C_2 |x|_D^{\frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}}.$$

Remarque 7.6.17 *Ce lemme est analogue au lemme ???. On peut remarquer que dans le cas de deux anisotropies diagonales, on n'a pas de perte log.*

Preuve.

$$\begin{aligned} |x|_{D_0} &= \sum_{\ell=1}^m |x_\ell|^{\frac{1}{\lambda_\ell^0}} \\ &= \sum_{\ell=1}^m |x_\ell|_\ell^{\frac{1}{\lambda_\ell} \times \frac{\lambda_\ell}{\lambda_\ell^0}} \end{aligned}$$

On remarque que pour tout ℓ , $\frac{\lambda_\ell}{\lambda_\ell^0} \geq \frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}$. Alors

$$|x|_{D_0} \leq \sum_{\ell=1}^m |x_\ell|_\ell^{\frac{1}{\lambda_\ell} \times \frac{\lambda_1}{\lambda_1^0}} \leq C |x|_D.$$

\square

7.6.3.2 Démonstration de la proposition 7.5.8

1. Ce résultat est une conséquence directe des inclusions entre espaces de Besov d'anisotropies différentes.
2. On rappelle que le champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est défini par sa représentation harmonisable

$$X(x) = \int \frac{(e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1)}{\rho(\xi)^{H + \frac{d}{2}}} dW_\xi$$

La pseudo-norme ρ peut être choisie de la forme

$$\rho = \rho_1 + \cdots + \rho_m,$$

où pour tout ℓ ρ_ℓ est une $(\mathbb{R}^{d_\ell}, E_\ell)$ pseudo-norme.

On pose $\{X_m(x_m)\}_{x_m \in \mathbb{R}^{d_m}} = \{X(0, \dots, 0, x_m)\}_{x_m \in \mathbb{R}^{d_m}}$. On remarque que ce champ a les mêmes lois finies dimensionnelles que le champ Y_m défini de la manière suivante

$$Y_m(x_m) = \int \frac{(e^{i\langle x_m, \xi_m \rangle} - 1)}{\widetilde{\rho}_m(\xi_m)^{H + \frac{d}{2}}} dW_{\xi_m}$$

avec

$$\widetilde{\rho}_m^{-(H + \frac{d}{2})} = \int \frac{d\xi_1 \cdots d\xi_{m-1}}{\rho(\xi)^{H + \frac{d}{2}}}.$$

On applique alors les résultats de non régularité locale de la section 7.6.2 au champ gaussien Y_m et on utilise les inclusions entre les espaces de Besov spaces d'anisotropies différentes. On en déduit alors que p.s.

$$Y_m(\cdot) \notin B_{p,q,loc, \frac{1}{|\log|\cdot|}^d}^{H, \lambda'_m}(\mathbb{R}^d, E').$$

La conclusion découle alors du lemme de Fubini suivant qui peut être déduit de la caractérisation différences finies des espaces de Besov $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d, D)$ (voir [Trie06]) :

Lemme 7.6.18 *On se donne un m -uplet (d_1, \dots, d_m) tel que $d_1 + \cdots + d_m = d$. Soit $s > 0$, $0 < p \leq +\infty$ et $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_m}$. Si f est une fonction continue de $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^d, D)$ alors pour $\ell \in \{1, \dots, m\}$ f_ℓ définie sur \mathbb{R}^{d_ℓ} par*

$$f_\ell(x_\ell) = f(x_1^0, \dots, x_{\ell-1}^0, x_\ell, x_{\ell+1}^0, \dots, x_m^0)$$

appartient à $B_{p,p}^s(\mathbb{R}^{d_\ell}, D_\ell)$.

7.6.4 Démonstration des deux résultats d'optimalité

7.6.4.1 Le cas particulier de la dimension 2

On remarque que puisque on s'intéresse uniquement à l'exposant local critique du champ $\{X_{E_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^2}$ dans les espaces de Besov anisotropes, on peut utiliser le théorème

?? et supposer que E_0 est égal à sa partie diagonalisable $D_0 = \begin{pmatrix} \lambda_{\min}^0 & 0 \\ 0 & \lambda_{\max}^0 \end{pmatrix}$.

En utilisant $Tr(D_0) = Tr(D)$ on a en fait à considérer seulement deux cas : le cas $\rho_{\max}(D) \leq$

$\rho_{\max}(D_0)$ et le cas $\rho_{\min}(D) \leq \rho_{\min}(D_0)$.

On considère le premier cas $\rho_{\max}(D) \leq \rho_{\max}(D_0)$:

On suppose que pour $\alpha > H_0$, les trajectoires de $\{X_{D_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ sont dans l'espace de Besov $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^2, D)$. Alors par la proposition ?? les trajectoires de $\{X_{D_0, H_0}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^2}$ sont presque sûrement à l'espace de Besov $B_{p,q}^{\frac{\alpha}{\rho_{\max}(D)}}(\mathbb{R}^2)$. Par une démarche similaire à celle de la proposition ?? ci dessus, on considère $\{Y(h)\}_{h \in \mathbb{R}} = \{X_{D_0, H_0}(he_{\max}^0)\}_{h \in \mathbb{R}}$ avec e_{\max}^0 vecteur de la matrice D_0 associée à la plus grande valeur propre $\rho_{\max}(D_0)$. Alors par le lemme de Fubini 7.6.18 l'exposant critique est $H_0/\rho_{\max}(D_0)$. Ainsi $\alpha/\rho_{\max}(D) > H_0/\rho_{\max}(D_0)$ ce qui implique une contradiction.

On considère le second cas $\rho_{\min}(D) \leq \rho_{\min}(D_0)$:

On applique une démarche similaire à $\{Y(h)\}_{h \in \mathbb{R}} = \{X_{D_0, H_0}(he_{\min})\}_{h \in \mathbb{R}}$ avec e_{\min} le vecteur propre de D associé à la plus petite valeur propre de D .

On remarque que l'exposant critique de Y dans tout espece de Besov isotrope est inférieur à $\frac{H_0}{\rho_{\min}(D_0)}$. En effet

$$Y(h) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{ih e_{\min} \cdot \xi} - 1}{|\xi|_D^{H_0+1}} d\widehat{W}(\xi).$$

Donc Y a les mêmes lois finies dimensionnelles

$$\widetilde{Y}(h) = \int_{\mathbb{R}} (e^{iht} - 1)\phi(t)d\widehat{W}(t)$$

où $\phi(t) = \left(\int_{V_{\min}^\perp} \frac{1}{|\zeta|_{D_0}^{2H_0+2} + |te_{\min}|_{D_0}^{2H_0+2}} d\zeta \right)^{\frac{1}{2}}$ et $V_{\min}^\perp = \text{Vect} \langle e_{\min} \rangle^\perp$. On remarque que pour tout $|t|$ suffisamment grand $\phi(t) \geq \frac{C(e_{\min})}{|t|^{\frac{H_0}{\rho_{\min}(D_0)} + \frac{1}{2}}}$. Par la proposition ??, on en déduit le résultat requis. Par le lemme de Fubini 7.6.18, si on suppose que $\alpha > H_0$ on a la contradiction recherchée.

7.6.4.2 Le cas général

Cela découle directement de la proposition 7.5.8.

7.6.5 Démonstration du résultat de continuité

On remarque que comme l'exposant critique ne dépend que de la partie diagonalisable réelle de l'anisotropie on a juste besoin de montrer la continuité de l'application $E \mapsto \alpha(p, q, E)$ sur l'ensemble des matrices diagonalisables sur $M_d(\mathbb{R})$.

Ce résultat de continuité vient de la proposition suivante

Proposition 7.6.19 *Soit D une matrice diagonalisable et (M_n) une suite de matrice diagonalisables convergeant vers D . Alors pour tout $s, \varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$*

$$B^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M_n) \hookrightarrow B^s(\mathbb{R}^d, D) \hookrightarrow B^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M_n).$$

Pour montrer la proposition 7.6.19 on va avoir besoin de faire des hypothèses et quelques notations . On remarque qu'on peut supposer que la matrice D est diagonale. On rappelle

qu'en utilisant l'équivalence entre deux (\mathbb{R}^d, E) pseudo-normes, on peut utiliser n'importe quelle pseudo-norme donné dans les démonstrations. Donc pour toute matrice diagonale $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_d \end{pmatrix}$, on considère comme (\mathbb{R}^d, Δ) pseudo-norme

$$|x|_{\Delta} = \sum_i |x_i|^{\frac{1}{\lambda_i}},$$

et pour toute matrice inversible P

$$|x|_{P\Delta P^{-1}} = |P^{-1}x|_{\Delta},$$

comme $(\mathbb{R}^d, P\Delta P^{-1})$ pseudo-norme. La démonstration repose sur les lemmes suivants :

Lemme 7.6.20 *Soit (D_n) une suite de matrices diagonales, convergeant vers une matrice D . Pour tout entier n , on note $\lambda_1(D_n), \dots, \lambda_d(D_n)$ (resp $\lambda_1(D), \dots, \lambda_d(D)$) les valeurs propres D_n (resp D). Alors pour tout i*

$$\lambda_i(D_n) \rightarrow \lambda_i(D)$$

Preuve. On note (e_1, \dots, e_d) la base canonique \mathbb{R}^d . Comme les matrices D, D_n sont diagonales, (e_1, \dots, e_d) sont des vecteurs propres des matrices D, D_n . Par ailleurs pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$ et tout entier n ,

$$\lambda_i(D_n) = \frac{\langle D_n e_i, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique.

La conclusion est alors directe. \square

Lemme 7.6.21 *Soit $(D_n)_n$ une suite de matrices diagonales à spectre positif convergeant vers une matrice D aussi à spectre positif. Alors $|\cdot|_{D_n}$ converge uniformément vers $|\cdot|_D$ sur $B_d(0, 1)$. Plus précisément pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que*

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in B_d(0, 1), |x|_{D_n}^{1+\varepsilon} \leq |x|_D \leq |x|_{D_n}^{1-\varepsilon}$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. On utilise le lemme précédent. Il existe alors n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in \{1, \dots, d\}$:

$$\frac{\lambda_i(D)}{1+\varepsilon} \leq \lambda_i(D_n) \leq \frac{\lambda_i(D)}{1-\varepsilon}$$

(On rappelle que toutes les valeurs propres sont positives). Donc pour tout $x \in B_d(0, 1)$

$$|x|_{D_n} = \sum_i |x_i|^{\frac{1}{\lambda_i(D_n)}} \leq \sum_i \left(|x_i|^{\frac{1+\varepsilon}{\lambda_i(D)}} \right) \leq C(d) \left(\sum_i |x_i|^{\frac{1}{\lambda_i(D)}} \right)^{1+\varepsilon}$$

La dernière inégalité découle du fait que pour tout i , $|x_i| < 1$. De plus pour tout $p > 1$ et tout $a_i > 0$ on a :

$$(7.6.4) \quad \sum_i a_i^p \leq \min(1, d^{p-1}) \left(\sum_i a_i \right)^p$$

L'inégalité inverse se montre de manière analogue. \square

Lemme 7.6.22 Soit $(P_n)_n$ une suite de matrices inversibles convergeant vers la matrice identité. Soit $(D_n)_n$ une suite de matrices diagonales à valeurs propres positives, convergeant vers une matrice diagonale D dont les valeurs propres sont aussi positives. Alors $|\cdot|_{P_n D_n P_n^{-1}}$ converge uniformément vers $|\cdot|_D$ on $B_d(0, 1)$. Plus précisément pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \forall x \in B_d(0, 1), |x|_{P_n D_n P_n^{-1}}^{1+\varepsilon} \leq |x|_D \leq |x|_{P_n D_n P_n^{-1}}^{1-\varepsilon}$$

Preuve. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} |x|_{P_n D_n P_n^{-1}} &= |P_n^{-1} x|_{D_n} \\ &\leq C(|(P_n^{-1} - Id)x|_{D_n} + |x|_{D_n}) \end{aligned}$$

par l'inégalité triangulaire vraie pour les pseudo-normes. On remarque que comme on est dans le cas d'une matrice diagonale la constante C est inférieure à $2^{\frac{1}{\min(D_n)}}$ qui est une suite bornée.

On peut conclure en utilisant le lemme précédent et (7.6.4). Donc puisque la suite $(P_n)_n = ((p_{i,j}^n)_{i,j})_n$ est bornée

$$\sum_i \left| \left(\sum_j (p_{i,j}^n - 1)x_j \right) \right|^{(1-\varepsilon)/\lambda_i(D_n)} \leq \sum_j |x_j|^{(1-\varepsilon)/\lambda_i(D_n)} \sum_i |p_{i,j}^n - 1|^{(1-\varepsilon)/\lambda_i}$$

Ainsi on en déduit le résultat souhaité. \square

Lemme 7.6.23 Soit (M_n) une suite de matrices diagonalisables dans $M_d(\mathbb{R})$ avec des valeurs propres positives convergeant vers D . Alors $|\cdot|_{M_n} \rightarrow |\cdot|_D$ uniformément sur $B_d(0, 1)$.

Preuve. On remarque que l'on peut supposer que $M_n = P_n D_n P_n^{-1}$ avec pour tout n , la matrice D_n qui est diagonale à valeurs propres positives et la suite $(P_n)_n$ qui est bornée. On va avoir besoin de plusieurs étapes pour montrer le lemme 7.6.23 :

Tout d'abord on remarque que la suite (D_n) est bornée :

En effet toutes les valeurs propres sont positives et $Tr(D_n) \rightarrow Tr(D)$. Donc la suite $(\rho_{\max}(D_n))_n$ est bornée. Comme pour tout n , la matrice D_n est diagonale on en déduit que la suite $(D_n)_n$ est bornée.

Deuxième étape

Comme la suite (D_n, P_n) est bornée il existe une sous suite convergeant vers (\tilde{D}, \tilde{P}) . On note $(D_{\phi(n)}, P_{\phi(n)})$ cette sous suite. On va montrer qu'en fait on peut supposer que $(D_{\phi(n)}, P_{\phi(n)})$ converge vers (D, I) .

On remarque que le polynôme caractéristique de $D_{\phi(n)}$ tend vers celui de D . Donc \tilde{D} et D sont diagonales et ont même polynôme caractéristique. On en déduit que \tilde{D} et D sont égales à une matrice de permutation près $P_\sigma : \tilde{D} = P_\sigma D P_\sigma^{-1}$.

On peut remplacer $P_{\phi(n)}$ par $P_{\phi(n)} P_\sigma$ et ainsi supposer que \tilde{D} et D sont égales. En utilisant que $M_n \rightarrow D$, on a alors

$$P_{\phi(n)}^{-1} M_{\phi(n)} P_{\phi(n)} \rightarrow \tilde{P}^{-1} D \tilde{P}$$

Par unicité de la limite $\tilde{P}^{-1} D \tilde{P} = D$. On remplace $P_{\phi(n)}$ par $P_{\phi(n)} \tilde{P}^{-1}$ et $D_{\phi(n)}$ par $\tilde{P} D_{\phi(n)} \tilde{P}^{-1}$.

Les suites $(P_n)_n$ et $(D_n)_n$ ont ainsi une unique valeur d'adhérence qui sont respectivement la matrice identité I et la matrice D . On en déduit que $(P_n)_n$ tend vers Id et $(D_n)_n$ tend vers D . La conclusion est alors directe si on utilise le lemme précédent. \square

On peut maintenant montrer la proposition 7.6.19. On considère alors une suite de matrices diagonalisables $(M_n)_n$ à valeurs propres positives. On suppose que $M_n \rightarrow D$. Comme $|\cdot|_{M_n} \rightarrow |\cdot|_D$ uniformément sur $B_d(0, 1)$, par une démarche similaire à celle ci dessus on en déduit que pour tout $s, \varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$

$$B^{s+\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M_n) \hookrightarrow B^s(\mathbb{R}^d, D) \hookrightarrow B^{s-\varepsilon}(\mathbb{R}^d, M_n).$$

Le théorème 7.5.1 découle directement de la proposition 7.6.19.

Chapitre 8

Champs Gaussiens autosimilaires par rapport à un groupe

Dans tout ce qui suit, comme dans le chapitre précédent si a désigne un réel positif et E une matrice de $M_d(\mathbb{R})$, on notera a^E la matrice définie de $M_d(\mathbb{R})$ par $a^E = \exp(E \log(a))$.

8.1 Introduction

L'objectif est ici de généraliser, dans le cas gaussien, le modèle de champ aléatoire défini dans [BMS07] qui a déjà été présenté au chapitre précédent. On rappelle que H.Biermé, H.Scheffler et M.Meerschaert ont introduits une classe particulière de champs aléatoires à accroissements stationnaires vérifiant ce qu'on appelle une relation d'autosimilarité matricielle, i.e. une relation de la forme

$$(8.1.1) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \{X(a^E x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

pour une certaine matrice E à spectre de partie réelle positive et un certain réel positif H ($\stackrel{(\mathcal{L})}{=}$ désigne comme dans le chapitre précédent la relation d'égalité des lois finies dimensionnelles).

On va montrer dans ce chapitre, que pour $m \in \mathbb{N}^*$, si on se donne (E_1, \dots, E_m) une famille libre de m matrices de $M_d(\mathbb{R})$ commutant deux à deux et (H_1, \dots, H_m) m réels positifs, on peut sous certaines hypothèses construire des champs gaussiens réels $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ vérifiant m relations d'autosimilarité matricielle simultanées :

$$(8.1.2) \quad \forall (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \left\{ \begin{array}{l} \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ \vdots \\ \{X(a_m^{E_m} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

Les champs obtenus sont de plus à accroissements rectangulaires stationnaires suivant des directions remarquables que l'on définira (voir la définition 8.3.3 pour une définition précise de cette notion).

Pour $m = 1$ et $E = Id$, les relations (8.1.2) se ramènent à la relation d'autosimilarité classique qui décrit des phénomènes d'invariance d'échelle

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \{X(ax)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

le réel H étant usuellement appelé l'indice de Hurst du champ.

On rappelle que les champs autosimilaires sont présents dans de nombreuses applications comme les mathématiques financières ou la modélisation du trafic internet (voir [PTW98]). Des exemples pourront être trouvés dans [AGL02] ou [LV97]. L'exemple le plus connu est celui du Mouvement Brownien Fractionnaire, qui possède de plus la caractéristique d'être **isotrope**, c'est à dire invariant en loi par l'action de toute matrice du groupe orthogonal. Dans certaines applications (voir par exemple, [BE03],[Ben06],[Pon06]) le champ aléatoire considéré est **anisotrope**. La relation d'autosimilarité classique, visant à décrire des phénomènes ne possédant pas d'échelle caractéristique, n'est alors plus adaptée et nécessite ainsi d'être modifiée pour être compatible avec le nouveau contexte des champs anisotropes.

La description de phénomènes d'invariance d'échelles liés à des processus ou des champs anisotropes est en fait une question très ancienne remontant au début des années 1980. On peut citer les travaux notamment de W.N.Hudson et J.D.Mason ou de R.Laha, V.Rohatgi qui ont définis dans [HM82, LR82] la classe des processus autosimilaires par rapport à un opérateur. Il s'agit donc de processus $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle du type

$$\forall a > 0, \{X(at)\}_{t \in \mathbb{R}} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{A(a)X(t)\}_{t \in \mathbb{R}}.$$

où pour tout $a > 0$, $A(a)$ est une matrice de $M_d(\mathbb{R})$. W.N.Hudson et J.D.Mason prouvent alors sous certaines hypothèses qu'il existe nécessairement une matrice E à spectre de partie réelle positive telle que pour tout a , $A(a) = a^E$. Ces processus ont donné lieu à une large littérature : on peut signaler notamment les travaux de M.Maejima et J.D.Mason ([MM94]), M.M.Meerschaert et H.P.Scheffler ([MS98]). On pourra se reporter au chapitre 11 du livre de M.M.Meerschaert et H.P.Scheffler (voir [MS01]) pour une bibliographie exhaustive des travaux dans ce domaine.

La question d'un concept de scaling adapté au cadre, non cette fois ci des processus, mais des champs anisotropes est elle aussi très ancienne. Les travaux fondateurs en ce domaine sont ceux de D.Schertzer et S.Lovejoy (voir [SL85],[SL87] par exemple). La problématique de ces travaux a essentiellement tourné autour de la question de la définition d'une 'analyse multifractale anisotrope'. D.Schertzer et S.Lovejoy ont modifié la notion de scaling usuel isotrope pour introduire une notion de scaling anisotrope. Le scaling anisotrope est défini à partir d'une famille d'opérateurs $(T_a)_{a>0}$ formant un groupe multiplicatif à un paramètre et d'une sphère unité (la 'sphère anisotrope' dont on a déjà parlé dans le chapitre 7) qui définit les vecteurs de norme unité. Le cas linéaire où la famille $(T_a)_{a>0}$ est en fait un groupe multiplicatif de la forme $(a^E)_{a>0}$ (où E est une matrice) est par exemple particulièrement intéressant si on cherche à se donner un modèle anisotrope de l'atmosphère.

On peut alors utiliser la notion de scaling anisotrope linéaire et définir une notion d'autosimilarité associée à ce type de scaling : c'est la notion d'autosimilarité matricielle qui est introduite dans le cas diagonal par D.A.Benson, M.Meerschaert, B.Baumer et H.P.Scheffler

dans [Ben06] puis dans le cas général d'une matrice E à spectre de partie réelle positive par H.Biermé, M.Meerschaert et H.P.Scheffler dans [BMS07]. Ces auteurs formalisent ainsi des notions qui étaient déjà présentes dans des travaux antérieurs comme ceux par exemple de F.Molz, H. Liu, J. Szulga dans [MLS97] qui construisent à partir d'une représentation harmonisable un Champ Brownien Fractionnaire anisotrope pour modéliser des phénomènes de transports en milieu anisotrope. Par ailleurs dans [BE03], où une étude générale des champs gaussiens anisotropes à accroissements stationnaires est faite, des résultats de régularité directionnelle sont donnés s'appliquant en particulier à ces Champs Browniens Fractionnaires anisotropes. Ces résultats ont été généralisés ultérieurement dans le cas non diagonal dans [BMS07]. Par ailleurs H.Biermé, M.Meerschaert et H.P.Scheffler dans [BMS07] résolvent le problème de l'existence de champs autosimilaires par rapport à une matrice de spectre à partie réelle positive donnée en définissant une classe spécifique de champs stables vérifiant une propriété de ce type. Dans le cas considéré dans cet article, si on se restreint au cas gaussien, l'exposant d'autosimilarité E est **unique** (à un groupe de symétries près (voir la remarque 2.10 faite dans [BMS07] pour un énoncé précis). Les champs qui sont construits dans [BMS07] vérifient donc (à un groupe de symétries près) **une unique relation d'autosimilarité matricielle**.

On peut aussi définir des champs vérifiant plusieurs relations d'autosimilarité simultanées. Un exemple de ce type est fourni par le Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel $\{B_{H_1, H_2}(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}$. Introduit initialement par A.Kamont dans [Kam96], puis utilisé par S.Léger et M.Pontier dans [LP99] pour décrire le caractère anisotrope d'os de malades atteints d'ostéoporose, ce champ possède des directions privilégiées (qui sont les axes de coordonnées). Pour modéliser le fait qu'il est autosimilaire 'suivant chaque axe', on va imposer à ce modèle de vérifier les deux relations d'autosimilarité suivantes :

$$\begin{cases} \{X(a_1 x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \\ \{X(x_1, a_2 x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_2^{H_2} X(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \end{cases}$$

où H_1 et H_2 sont deux réels compris entre 0 et 1 qui sont en fait les 'indices de Hurst' suivant chaque direction. Tout ceci se généralise bien sûr au cadre d -dimensionnel, puisqu'on peut définir un DBF d -dimensionnel $\{B_{H_1, \dots, H_d}(x_1, \dots, x_d)\}_{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d}$ pour $d > 2$. Le Drap Brownien Fractionnaire vérifie bien une relation d'autosimilarité matricielle du type (8.2.4) avec

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{H_1} & 1 \\ 0 & \frac{1}{H_2} \end{pmatrix}, H = 1.$$

On remarque que par rapport à des exemples type DBF, la notion d'autosimilarité matricielle permet d'introduire une classe plus riche de relations d'autosimilarité et donc de nouvelles géométries.

Ici, on souhaite introduire une troisième classe d'exemples, celui de champs aléatoires anisotropes vérifiant des relations d'autosimilarité matricielle simultanées ne se réduisant pas comme, dans le cas du Drap Brownien Fractionnaire à des relations d'autosimilarité classiques. On va d'abord illustrer sur un exemple l'intérêt que l'on peut avoir à introduire de tels champs.

On se donne les deux matrices E_1 et E_2

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui commutent bien. On a alors, pour tous réels positifs a_1, a_2

$$a_1^{E_1} = \begin{pmatrix} a_1 \cos(\log(a_1)) & -a_1 \sin(\log(a_1)) & 0 \\ a_1 \sin(\log(a_1)) & a_1 \cos(\log(a_1)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a_2^{E_2} = \begin{pmatrix} \cos(\log(a_2)) & -\sin(\log(a_2)) & 0 \\ \sin(\log(a_2)) & \cos(\log(a_2)) & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}.$$

On a illustré ici, pour deux réels a_1 et a_2 , par deux figures le résultat de l'action des matrices $a_1^{E_1}$ et $a_2^{E_2}$ sur un point M de \mathbb{R}^3 de coordonnées (x_1, x_2, t) . Les deux variables x_1 et x_2 seront considérées comme deux variables d'espaces, la variable t représentera le temps.

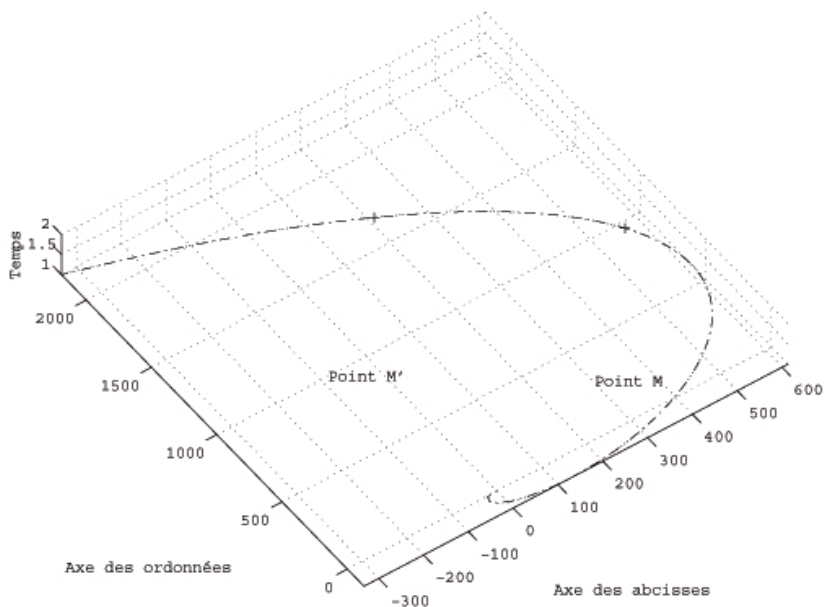


FIGURE 8.1 – Représentation pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, t) fixé de la courbe $a_1 \mapsto a_1^{E_1} M$

La matrice $a_1^{E_1}$ agit sur un point de \mathbb{R}^3 à temps constant. Lorsque le temps et le point M sont fixés, la courbe $a_1 \mapsto a_1^{E_1} M$ décrit une spirale.

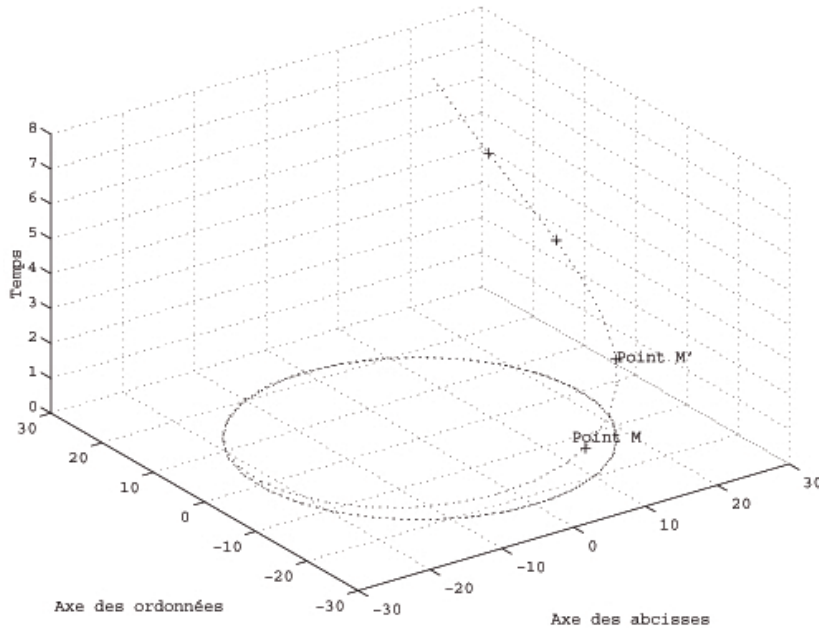


FIGURE 8.2 – Représentation pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, t) fixé de la courbe $a_2 \mapsto a_2^{E_2} M$

La matrice $a_2^{E_2}$ agit sur un point de \mathbb{R}^3 à la fois en temps et en espace. Lorsque le temps et le point M sont fixés, la courbe $a_2 \mapsto a_2^{E_2} M$ décrit une hélice. On va dans la suite montrer qu’il est alors possible pour $(H_1, H_2) \in (0, 1)^2$ de définir un champ $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} = \{X(x_1, x_2, t)\}_{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3}$ anisotrope tel que les deux relations suivantes soient **vérifiées simultanément**

$$(8.1.3) \quad \forall a_1 \in \mathbb{R}_+^*, \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3},$$

et

$$(8.1.4) \quad \forall a_2 \in \mathbb{R}_+^*, \{X(a_2^{E_2} x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_2^{H_2} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3},$$

On donne une interprétation concrète de ces deux relations. Supposons, que x_1, x_2 soient deux variables d’espaces et que la variable t représente le temps. L’équation (8.1.3) signifie que l’on a défini un champ (pouvant être anisotrope) vérifiant à **temps fixé** une relation d’autosimilarité matricielle en spirale. L’équation (8.1.4) signifie par contre que lorsqu’on fait un scaling en temps couplé à une rotation en espace liée au scaling on a une relation d’autosimilarité. Ce type de modèle semble donc modéliser **l’évolution d’un champ anisotrope tournant au cours du temps**.

On va maintenant donner le plan du chapitre. On reviendra en détail en section 8.2 sur les exemples considérés dans l’introduction. On insistera notamment sur les liens entre la construction et les propriétés vérifiées par ces champs. Il en découlera ensuite, en section 8.3, la démarche qui va permettre d’aboutir à la construction des champs recherchés. Dans la section 8.4, on donnera l’énoncé du résultat central de ce chapitre qui est donc

un résultat d'existence, moyennant des hypothèses que l'on précisera, de champs gaussiens vérifiant simultanément m relation d'autosimilarité matricielle. On détaillera ensuite le procédé de construction proprement dit, en section 8.6. Les démonstrations seront enfin données en section 8.7. On commence donc par revenir sur les exemples que l'on a présenté dans l'introduction.

8.2 Quelques exemples de champs gaussiens connus autosimilaires

On revient donc sur les trois exemples présentés dans l'introduction : le Champ Brownien Fractionnaire, le Drap Brownien Fractionnaire et les champs vérifiant des relations d'autosimilarité matricielle.

8.2.1 Un champ vérifiant une relation d'autosimilarité classique : le Mouvement Brownien Fractionnaire

Le Mouvement Brownien Fractionnaire (MBF) a été introduit initialement en 1940 par Kolmogorov (voir [Kolm40]) pour générer des 'spirales' gaussiennes dans les espaces de Hilbert. Son étude systématique dans le cas unidimensionnel a commencé avec le célèbre article de Mandelbrot-Van Ness (voir [MVN68]). On peut aussi citer l'existence d'une version d dimensionnelle définie par T.Lindström dans [Lind93].

Le MBF est l'exemple le plus connu de champ gaussien autosimilaire. Il vérifie la relation d'autosimilarité classique

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \{B_H(ax)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H B(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

et est de plus à accroissements stationnaires. On peut donc en donner la représentation harmonisable suivante

$$B_H(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \phi(\xi) dW_\xi,$$

avec pour densité spectrale la fonction $|\phi(\xi)|^2$ définie par

$$|\phi(\xi)|^2 = \frac{1}{|\xi|^{H+\frac{d}{2}}}.$$

La densité spectrale $|\phi(\xi)|^2$ du Champ Brownien Fractionnaire étant **homogène**

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, |\phi(a\xi)|^2 = a^{-2H-d} |\phi(\xi)|^2,$$

cela induit bien les propriétés d'autosimilarité voulues.

Par invariance par rotation de la densité spectrale, le Champ Brownien Fractionnaire est de plus **isotrope**. Cela signifie qu'il est donc invariant par l'action du groupe orthogonal $O_d(\mathbb{R}) = \{A \in M_d(\mathbb{R}), AA^t = A^t A = Id\}$

$$\forall O \in O_d(\mathbb{R}), \{B_H(Ox; \omega)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{B_H(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

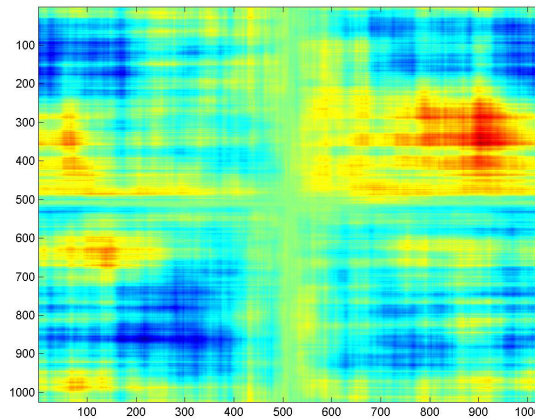
On va maintenant revenir sur un autre exemple important, anisotrope celui là, de champ aléatoire gaussien vérifiant des relations d'autosimilarité : le Drap Brownien Fractionnaire.

8.2.2 Un champ vérifiant simultanément plusieurs relations d'autosimilarité toutes découplées : le Drap Brownien Fractionnaire (DBF)

Le DBF a été comme on l'a dit introduit par A. Kamont dans [Kam96]) puis étudié par S. Léger, M. Pontier dans [LP99] pour modéliser des phénomènes à la fois autosimilaires et anisotropes. L'anisotropie du champ se traduit par le fait que le Drap Brownien Fractionnaire possède des **directions privilégiées** qui sont les axes de coordonnées et des 'indices de Hurst' différents suivant ces deux directions.

On montre ici une réalisation du Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel d'indices de Hurst $H_1 = 0.6$, $H_2 = 0.4$.

FIGURE 8.3 – Une réalisation du Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel d'indice de Hurst $H_1 = 0.6$, $H_2 = 0.4$



On visualise ici bien les deux axes privilégiés que sont ici les axes des coordonnées.

Le Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel vérifie les deux relations d'autosimilarité (au sens classique) simultanées suivantes

$$(8.2.1) \quad \forall (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \begin{cases} \{X(a_1 x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} = \{a_1^{H_1} X(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \\ \{X(x_1, a_2 x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} = \{a_2^{H_2} X(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2} \end{cases}$$

Ces deux relations sont bien **simultanées**. Elles sont **particulièrement simples car découplées**. Le premier paramètre a_1 agit uniquement sur la variable x_1 alors que le deuxième paramètre a_2 agit lui uniquement sur la variable x_2 . Les variables x_1 et x_2 sont elles **découplées**.

Il est alors naturel de construire la covariance d'un tel champ **par produit tensoriel** de covariances de Mouvements Browniens Fractionnaires unidimensionnels. Dans [?], A. Ayache et S. Léger ont donc donné la représentation harmonisable suivante du Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel

$$(8.2.2) \quad B_{H_1, H_2}(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{i\langle x_1, \xi_1 \rangle} - 1)(e^{i\langle x_2, \xi_2 \rangle} - 1)}{|\xi_1|^{H_1 + \frac{1}{2}} |\xi_2|^{H_2 + \frac{1}{2}}} d\widehat{W}_{\xi_1, \xi_2}.$$

Cette démarche se généralise bien sûr aux cas $d > 2$ et permet de définir un Drap Brownien Fractionnaire d dimensionnel. Le champ défini par (8.2.2) est ainsi à **accroissements rectangulaires stationnaires** suivant les axes de coordonnées ce qui signifie que, si l'on note

$$\begin{aligned} \Delta_{h_1, h_2} B_{H_1, H_2}(x_1, x_2) &= B_{H_1, H_2}(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - B_{H_1, H_2}(x_1 + h_1, x_2) \\ &\quad - B_{H_1, H_2}(x_1, x_2 + h_2) + B_{H_1, H_2}(x_1, x_2) \end{aligned}$$

alors (proposition 2 de [ALP02])

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \{\Delta_{h_1, h_2} B_{H_1, H_2}(x_1, x_2)\}_{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\Delta_{h_1, h_2} B_{H_1, H_2}(0, 0)\}_{(h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2}.$$

Plus généralement, tout champ gaussien $\{X(x_1, x_2)\}_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2}$ de représentation harmonisable de la forme

$$X(x_1, x_2) = \int_{\mathbb{R}^2} (e^{i\langle x_1, \xi_1 \rangle} - 1)(e^{i\langle x_2, \xi_2 \rangle} - 1) \phi(\xi_1, \xi_2) d\widehat{W}_{\xi_1 d\xi_2}$$

avec

$$\int \min(1, |\xi_1|^2) \min(1, |\xi_2|^2) |\phi(\xi_1, \xi_2)|^2 d\xi_1 d\xi_2 < +\infty,$$

est à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les axes de coordonnées (voir la proposition plus générale que l'on démontrera en section 8.3).

Si de plus la fonction $|\phi(\xi)|^2 = |\phi(\xi_1, \xi_2)|^2$ (que l'on appellera une densité spectrale du champ) vérifie la relation d'homogénéité

$$(8.2.3) \quad \forall (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, |\phi(a_1 a_2 \xi)|^2 = a_1^{-2H_1-1} a_2^{-2H_2-1} |\phi(\xi)|^2,$$

alors le champ ainsi construit vérifie bien les relations d'autosimilarité (8.2.1). C'est bien le cas du Drap Brownien Fractionnaire car ici

$$|\phi(\xi_1, \xi_2)|^2 = \frac{1}{|\xi_1|^{2H_1+1} |\xi_2|^{2H_2+1}},$$

vérifie bien la propriété (8.2.3). On va revenir maintenant sur la notion d'autosimilarité matricielle qui va permettre d'introduire des géométries plus élaborées.

8.2.3 Les champs vérifiant une relation d' autosimilarité matricielle

D.A.Benson, M.Merschaert, B.Baumer et H.P.Scheffler dans [Ben06] puis H. Biermé, M. Meerschaert et H.P. Scheffler dans [BMS07] reviennent sur la notion d'autosimilarité et en donnent une version plus générale que celle considérée dans les exemples précédents.

Ils construisent des champs gaussiens réels à accroissements stationnaires vérifiant **la relation d'autosimilarité dite matricielle** suivante

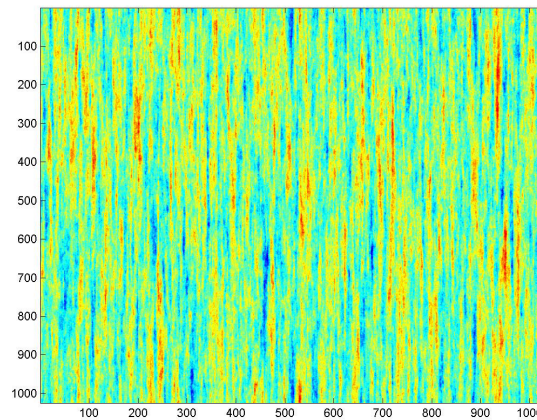
$$(8.2.4) \quad \forall a \in \mathbb{R}_+^*, \{X(a^E x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a^H X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d},$$

où E désigne une matrice carrée de taille n dont le spectre est à partie réelle positive et H un réel de $(0, \rho_{\min}(E))$. On définit $\rho_{\min}(E)$ par

$$\rho_{\min}(E) = \min_{\lambda \in sp(E)} (Re(\lambda)).$$

Comme cela a été rappelé dans l'introduction, on obtient des champs toujours anisotropes mais l'exposant d'autosimilarité est **cette fois ci unique** aux symétries du champ près (remarque 2.10 de [BMS07]), ce qui constitue une différence fondamentale avec le modèle que l'on propose. On a représenté ici une réalisation d'un champ gaussien à accroissements stationnaires autosimilaire par rapport à la matrice $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. L'indice de Hurst est pris ici égal à $H = 0.9$.

FIGURE 8.4 – Un champ gaussien à accroissements stationnaires vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle



Une direction privilégiée liée à la plus grande valeur propre apparait. Dans [BMS07], on montre que l'on peut définir des champs stables (même si ici on se restreint au cas gaussien) par autosimilarité matricielle à l'aide d'une fonction ρ définie sur $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ E^t -homogène à valeurs positives :

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \rho(a^{E^t} \xi) = a \rho(\xi).$$

En utilisant des coordonnées polaires adaptées à la relation d'autosimilarité (8.2.4) et la formule de changement de variable en coordonnées polaires correspondante, on en déduit que pour toute fonction ρ E^t -homogène, on a

$$(8.2.5) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \min(1, |\xi|^2) |\rho(\xi)|^{-2s - \text{Tr}(E)} d\xi < +\infty,$$

si et seulement si $s \in (0, \rho_{\min}(E))$ (théorème 4.1 de [BMS07]).

Dans [BMS07], on donne alors pour $H \in (0, \rho_{\min}(E))$, la représentation harmonisable suivante du champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$

$$X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} (e^{i\langle x, \xi \rangle} - 1) \rho(\xi)^{-(s + \frac{\text{Tr}(E)}{2})} dW_\xi.$$

qui vérifie alors bien la relation d'autosimilarité (8.2.4) voulue et qui est de plus à accroissements stationnaires.

La difficulté consiste à **définir une fonction E^t -homogène adéquate**. Ce problème est résolu dans [BMS07] en définissant ρ de la forme,

$$\rho(\xi) = \left(\int_{S_0} \int_0^\infty (1 - \cos(\langle x, r^{E^t} \theta \rangle)) \frac{dr}{r^2} d\mu(\theta) \right)$$

où S_0 est la sphère unité de \mathbb{R}^n pour une norme bien choisie, définie à partir de E , et μ une mesure finie sur S_0 .

Remarque 8.2.1 *On va suivre ici une approche différente et utiliser dans la construction d'une densité spectrale du champ recherché, la notion de mesure de Haar d'un groupe ce qui permettra de définir des fonctions homogènes par rapport à l'action d'un groupe à plusieurs paramètres.*

On va essayer maintenant de tirer toutes les conséquences des remarques qui ont été faites dans cette section et d'**élaborer une stratégie** permettant de résoudre le problème que l'on s'est posé.

8.3 Présentation de la démarche

On va tout d'abord remarquer que dans un cas particulier on peut, en exploitant les exemples précédents, construire assez facilement un champ vérifiant des relations d'autosimilarité matricielles simultanées.

On détaille cette remarque dans le paragraphe suivant. On en déduira la démarche qui permettra d'aboutir à la construction voulue.

8.3.1 Un exemple de champ vérifiant des relations d'autosimilarité matricielles simultanées

On va tout d'abord se placer dans le cas particulier où les relations d'autosimilarité matricielle que l'on veut imposer au champ sont **découplées**.

Soient en effet (E_1, \dots, E_m) m matrices carrées de $(M_{d_1}(\mathbb{R}), \dots, M_{d_m}(\mathbb{R}))$ de spectre à partie réelle positive avec

$$d_1 + \dots + d_m = d,$$

et (H_1, \dots, H_m) un m -uplet de $\prod_{\ell=1}^m (0, \rho_{\min}(E_\ell))$.

On peut alors définir un champ gaussien réel $\{X(x_1, \dots, x_m)\}_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}}$ vérifiant **simultanément** les m relations d'autosimilarité matricielle suivantes :

Pour tous réels positifs (a_1, \dots, a_m) ,

$$(8.3.1) \quad \begin{cases} \{X(a_1^{E_1} x_1, \dots, x_m)\}_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x_1, \dots, x_m)\}_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}} \\ \vdots \\ \{X(x_1, \dots, a_m^{E_m} x_m)\}_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_m^{H_m} X(x_1, \dots, x_m)\}_{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}} \end{cases}$$

Comme dans le cas du Drap Brownien Fractionnaire, ces m relations d'autosimilarité sont **découplées** car chaque paramètre a_i **n'agit que sur la variable x_i** de \mathbb{R}^{d_i} .

Il est alors naturel d'utiliser un procédé de construction analogue à celui qui a servi à définir le Drap Brownien Fractionnaire. On définit ainsi la covariance du champ voulu **comme un produit tensoriel de covariance de champs vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle**.

On en donne donc la représentation harmonisable suivante

$$(8.3.2) \quad X(x) = Re\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m}} \prod_{\ell=1}^m ((e^{i\langle x_\ell, \xi_\ell \rangle} - 1)(e^{-i\langle y_\ell, \xi_\ell \rangle} - 1)|\phi_\ell(\xi_\ell)|^2) d\widehat{W}_{\xi_1, \dots, \xi_m}\right)$$

On suppose que pour tout ℓ , ϕ_ℓ est une fonction définie sur $\mathbb{R}^{d_\ell} \setminus \{0\}$ E_ℓ^t -homogène d'exposant $s_\ell + \frac{Tr(E_\ell)}{2}$ à valeurs positives :

$$\phi_\ell(a_\ell^{-E_\ell^t} \xi_\ell) = a_\ell^{s_\ell + \frac{Tr(E_\ell)}{2}} \phi_\ell(\xi_\ell),$$

vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}^{n_\ell}} |\phi_\ell(\xi_\ell)|^2 \min(1, |\xi_\ell|^2) d\xi_\ell < +\infty.$$

On obtient alors un champ vérifiant simultanément les m relations d'autosimilarité (8.3.1), **non plus à accroissements stationnaires mais à accroissements rectangulaires stationnaires** suivant les axes.

Avant de détailler ce point, on va commencer par introduire cette notion. On définit tout d'abord dans un cadre général la notion d'accroissements rectangulaires

Définition 8.3.1 Soient M_1, \dots, M_m m sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^d en somme directe et f une fonction définie sur \mathbb{R}^d .

On définit alors pour tout vecteur x de \mathbb{R}^d et tout m uplet (h_1, \dots, h_m) de $M_1 \times \dots \times M_m$ l'accroissement rectangulaire $\Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x)$ par

$$\Delta_{h_1, \dots, h_m} f(x) = \sum_{\ell=0}^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq m} (-1)^{m-\ell} f(x + h_{i_1} + \dots + h_{i_\ell}).$$

avec la convention pour $\ell = 0$, $f(x + h_{i_1} + \dots + h_{i_\ell}) = f(x)$.

Exemple 8.3.2 Pour $m = 1$, $M_1 = \mathbb{R}^d$ l'accroissement $\Delta_h f(x)$ est alors l'accroissement classique

$$\Delta_h f(x) = f(x + h) - f(x).$$

Pour $m = d = 2$, si $M_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $M_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$, h et k sont deux réels on a

$$\Delta_{h,k} f(x_1, x_2) = f(x_1 + h, x_2 + k) - f(x_1 + h, x_2) - f(x_1, x_2 + k) + f(x_1, x_2).$$

On peut alors définir la notion de champ gaussien à accroissements rectangulaires stationnaires.

Définition 8.3.3 Soient M_1, \dots, M_m m sous espaces vectoriels de \mathbb{R}^d en somme directe.

Un champ gaussien ponctuel $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les directions M_1, \dots, M_m si pour tout vecteur x de \mathbb{R}^d ,

$$\{\Delta_{h_1, \dots, h_m} X(x)\}_{(h_1, \dots, h_m) \in M_1 \times \dots \times M_m} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\Delta_{h_1, \dots, h_m} X(0)\}_{(h_1, \dots, h_m) \in M_1 \times \dots \times M_m}.$$

Exemple 8.3.4 Pour $m = 1$ on retrouve la notion classique de champ gaussien à accroissements stationnaires.

Pour $m = d = 2$, $M_1 = \mathbb{R} \times \{0\}$, $M_2 = \{0\} \times \mathbb{R}$ on retrouve la propriété, vérifiée par le Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel, de champ gaussien bidimensionnel à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les axes de coordonnées.

Si on revient au champ défini par la représentation harmonisable (8.3.2), il est alors à **accroissements rectangulaires stationnaires** suivant les axes,

$$M_1 = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \{0_{\mathbb{R}^{d_m}}\}, \cdots, M_m = \{0_{\mathbb{R}^{d_1}}\} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_m}.$$

On va maintenant s'inspirer de ce cas particulier pour définir **une démarche générale** appliquée à la résolution du problème considéré.

8.3.2 Présentation de la démarche

On va construire dans ce qui suit des exemples plus généraux de champs vérifiant simultanément des relations d'autosimilarité matricielle qui ne sont notamment **pas forcément découplées**.

La démarche va consister à se ramener à **un cas proche** de celui traité dans la section 8.3.1. **De manière analogue au champ de la section 8.3.1**, le champ gaussien réel que l'on construira est alors à **accroissements rectangulaires stationnaires** suivant des directions remarquables $(M_1, \cdots, M_{m'})$ en somme directe ($m' \geq m$), qui sont à définir.

On trouvera ces directions remarquables à partir de la réduction simultanée des matrices E_1, \cdots, E_m . Les m' sous espaces vectoriels $(M_1, \cdots, M_{m'})$ **sont donc stables** par ces matrices ce qui signifie que :

Pour tout j de $\{1, \cdots, m\}$, pour tout ℓ de $\{1, \cdots, m'\}$

$$E_j M_\ell \subset M_\ell.$$

Les sous espaces vectoriels $(M_1, \cdots, M_{m'})$ seront appelées des **directions de renormalisation** du champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$.

On définira alors un champ $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ par une représentation harmonisable de la forme

$$(8.3.3) \quad X(x) = Re \left(\int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i \langle x_\ell, \xi \rangle} - 1) \phi(\xi) d\widehat{W}_\xi \right).$$

La fonction ϕ est à valeurs positives et vérifie les m relations d'homogénéité simultanées suivantes :

Pour tous réels positifs a_1, \cdots, a_m , pour presque tout ξ de \mathbb{R}^d ,

$$(8.3.4) \quad \begin{cases} \phi(a_1^{-E_1} \xi) &= a_1^{H_1 + \frac{Tr(E_1)}{2}} \phi(\xi) \\ &\vdots \\ \phi(a_m^{-E_m} \xi) &= a_m^{H_m + \frac{Tr(E_m)}{2}} \phi(\xi) \end{cases}$$

De plus, afin de donner un sens à l'expression (8.3.3), on demandera à la fonction ϕ de vérifier la condition suivante,

$$(8.3.5) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(\xi)|^2 \prod_{\ell} (\min(1, |\langle \xi, x_\ell \rangle|^2)) d\xi < +\infty.$$

La fonction $|\phi(\xi)|^2$ sera alors appelée **une densité spectrale du champ considéré**.

La démarche que l'on vient d'expliciter, une fois qu'elle aura abouti, mène bien au résultat désiré car

Proposition 8.3.5 *Soit (E_1, \dots, E_m) m matrices de taille d commutant deux à deux.*

Supposons avoir construit $(M_1, \dots, M_{m'})$ m' sous espaces vectoriels de somme directe \mathbb{R}^d , stables par les m matrices (E_1, \dots, E_m) et ϕ une fonction à valeurs positives vérifiant les m relations d'homogénéité simultanées (8.3.4) et la condition (8.3.5).

Le champ gaussien réel $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ de représentation harmonisable donnée par (8.3.3) est bien à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les directions $M_1, \dots, M_{m'}$ et vérifie simultanément les m relations d'autosimilarité (8.1.2).

Preuve. En effet, du fait que la condition 8.3.5 est vérifiée, le champ de représentation harmonisable donnée par l'équation (8.3.3) est bien défini pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2$.

On remarque ensuite que par le corollaire 6.3.2 de [ST94], considéré dans le cas particulier des variables aléatoires gaussiennes

$$X_1 = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_1(\xi) d\widehat{W}_\xi \right), \quad X_2 = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_2(\xi) d\widehat{W}_\xi \right),$$

que,

$$\mathbb{E}(X_1 X_2) = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}^d} h_1(\xi) \overline{h_2(\xi)} d\xi \right).$$

Il suffit donc de montrer que le champ gaussien $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ de représentation harmonisable,

$$Y(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle x_\ell, \xi \rangle} - 1) \phi(\xi) d\widehat{W}_\xi,$$

vérifie bien les propriétés voulues.

Les propriétés d'homogénéité de la fonction ϕ vont alors bien entraîner sur le champ $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ les propriétés d'autosimilarité voulues.

En effet, par stabilité des directions $(M_1, \dots, M_{m'})$ par les matrices E_1, \dots, E_m , Pour tout j de $\{1, \dots, m\}$, pour tous réels positifs a_1, \dots, a_m , pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^d

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y(x) \overline{Y(y)}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle (a_j^{E_j} x)_\ell, \xi \rangle} - 1) (e^{-i\langle (a_j^{E_j} y)_\ell, \xi \rangle} - 1) |\phi(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle a_j^{E_j} x_\ell, \xi \rangle} - 1) (e^{-i\langle a_j^{E_j} y_\ell, \xi \rangle} - 1) |\phi(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle x_\ell, a_j^{E_j^t} \xi \rangle} - 1) (e^{-i\langle y_\ell, a_j^{E_j^t} \xi \rangle} - 1) |\phi(\xi)|^2 d\xi \\ &= a_j^{-\operatorname{Tr}(E_j^t)} \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle x_\ell, \zeta \rangle} - 1) (e^{-i\langle y_\ell, \zeta \rangle} - 1) |\phi(a_j^{-E_j^t} \zeta)|^2 d\xi \end{aligned}$$

L'homogénéité de la fonction ϕ permet alors de conclure.

Enfin, le champ $\{Y(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est bien à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les directions $M_1, \dots, M_{m'}$ car, si x est un vecteur de \mathbb{R}^d , $(h_1, \dots, h_{m'}) \in M_1 \times \dots \times M_{m'}$,

$(k_1, \dots, k_{m'}) \in M_1 \times \dots \times M_{m'}$,

$$\mathbb{E}(\Delta_{h_1, \dots, h_{m'}} Y(x) \overline{\Delta_{k_1, \dots, k_{m'}} Y(x)}) = \int \prod_{\ell=1}^{m'} (e^{i\langle h_\ell, \xi \rangle} - 1)(e^{-i\langle k_\ell, \xi \rangle} - 1) |\phi(\xi)|^2 d\xi.$$

Cette expression étant indépendante du vecteur x choisi, on obtient bien le résultat souhaité. \square

On illustre cette proposition en explicitant la construction du champ présenté dans l'introduction. :

Exemple 8.3.6 *On rappelle que l'on veut, pour $(H_1, H_2) \in (0, 1)^2$ et*

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

définir un champ

$$\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} = \{X(x_1, x_2, t)\}_{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3},$$

anisotrope tel que :

$$(8.3.6) \quad \text{Pour tout réel positif } a_1 : \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3}$$

et

$$(8.3.7) \quad \text{Pour tout réel positif } a_2 : \{X(a_2^{E_2} x)\}_{x \in \mathbb{R}^3} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_2^{H_2} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^3}$$

Pour cela, si on utilise la proposition précédente, on peut définir $\{X(x_1, x_2, t)\}_{(x_1, x_2, t) \in \mathbb{R}^3}$ par

$$X(x_1, x_2, t) = \int_{\mathbb{R}^3} (e^{i(x_1 \xi_{esp}^1 + x_2 \xi_{esp}^2)} - 1)(e^{it \xi_{tps}} - 1) \phi(\xi_{esp}^1, \xi_{esp}^2, \xi_{tps}) dW_\xi$$

Pour avoir les propriétés d'autosimilarité voulues il faut que ϕ vérifie la propriété d'homogénéité :

$$\begin{aligned} & \text{Pour tous réels positifs } a_1, a_2 \text{ et pour tout } \xi = (\xi_{esp}^1, \xi_{esp}^2, \xi_{tps}) \\ \phi(a_1^{-E_1^t} a_2^{-E_2^t} \xi) &= a_1^{s_1 + \frac{1}{2} \text{Tr}(E_1)} a_2^{s_2 + \frac{1}{2} \text{Tr}(E_2)} \phi(\xi) \end{aligned}$$

et la condition $(|\xi_{esp}|^2 = |\xi_{esp}^1|^2 + |\xi_{esp}^2|^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \min(1, |\xi_{esp}|^2) \min(1, |\xi_{tps}|^2) |\phi(\xi)|^2 d\xi < +\infty,$$

d'existence du champ.

On choisit alors comme fonction ϕ

$$\phi(\xi_{esp}^1, \xi_{esp}^2, \xi_{tps}) = \frac{|\xi_{esp}^1 \cos(\log(|\xi_{esp}|) + \log(|\xi_{tps}|)) - \xi_{esp}^2 \cos(\log(|\xi_{esp}|) + \log(|\xi_{tps}|))|}{|\xi_{esp}|^{H_1+1} |\xi_{tps}|^{H_2+\frac{1}{2}}}$$

On vérifie que ϕ a bien les propriétés voulues.

On va maintenant préciser les résultats d'existence démontrés dans ce chapitre.

8.4 Présentation des résultats obtenus

Avant de présenter le résultat que l'on a obtenu, on aura besoin de faire des hypothèses sur les matrices (E_1, \dots, E_m) . On pourra ensuite énoncer le résultat voulu.

8.4.1 Rappels sur la décomposition de Jordan additive complète

Pour expliciter les hypothèses faites sur les matrices E_1, \dots, E_m on va utiliser un outil assez classique dans ce type de problème, (voir par exemple [HM82] ou [MS01]) : la décomposition de Jordan additive complète.

La décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$ est définie à partir de la proposition suivante qui est une simple version additive du lemme 7.1, chap 9 de [Helg78] :

Proposition 8.4.1 *Toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique,*

$$M = D + S + N,$$

où les trois matrices D, S, N commutent deux à deux et où D est une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, S une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ à spectre imaginaire pur, N une matrice nilpotente.

Notation 8.4.2 *La matrice D sera appelée la partie diagonalisable réelle de M , S sa partie semi-simple imaginaire, et N sa partie nilpotente.*

Donnons quelques exemples de calculs de la décomposition de Jordan additive complète d'une matrice réelle. Tous les coefficients ci dessous sont supposés réels

1. Si $E = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$.

Dans ce cas λ est l'unique valeur propre de E et,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}, S = 0, N = 0.$$

2. Si $E = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Dans ce cas λ est l'unique valeur propre de E et,

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, S = 0, N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Si $E = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

La matrice E est alors une matrice diagonalisable dans $M_2(\mathbb{C})$ ayant pour valeurs complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Dans ce cas,

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}, N = 0.$$

$$4. E = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

La matrice E est alors une matrice trigonalisable dans $M_d(\mathbb{C})$ ayant pour valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \lambda_2 = \alpha - i\beta$$

Dans ce cas,

$$D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & 0 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par la réduction de Jordan réelle, on peut remarquer que toute matrice M à coefficients réels est (à un changement de base près) une matrice diagonale par blocs, chaque bloc étant de l'un des quatre types ci dessus.

C'est cette remarque qui permet d'aboutir à la décomposition de Jordan additive complète d'une matrice à coefficients réels.

Pour plus de détails sur cette décomposition, qui est une conséquence de la décomposition de Dunford dans $M_d(\mathbb{R})$, on pourra se reporter à l'annexe A.

On dispose maintenant des outils nécessaires pour expliciter les hypothèses faites sur les matrices E_1, \dots, E_m

8.4.2 Les hypothèses faites sur les matrices E_1, \dots, E_m

On fait donc les hypothèses suivantes :

Hypothèse 8.4.3 *On supposera que :*

1. Les matrices E_1, \dots, E_m commutent deux à deux.
2. Si D_1, \dots, D_m désignent les parties diagonalisables réelles respectives de E_1, \dots, E_m on supposera que,

$$(8.4.1) \quad \text{La famille } (D_1, \dots, D_m) \text{ est libre .}$$

Remarque 8.4.4 *L'hypothèse (8.4.1) implique notamment que la famille (E_1, \dots, E_m) est libre ce qui signifie que les m relations d'autosimilarité (8.1.2) que l'on veut imposer sont en quelque sorte **linéairement indépendantes**.*

Moyennant ces hypothèses, on sera alors capable de construire un champ vérifiant les propriétés recherchées.

C'est ce théorème d'existence qui est le résultat central de ce chapitre :

Théorème 8.4.5 *Supposons que les hypothèses 8.4.3 soient vérifiées. Il existe une certaine constante C_0 inférieure à 1 ne dépendant que des matrices E_1, \dots, E_m telle que si pour tout ℓ de $\{1, \dots, m\}$,*

$$(8.4.2) \quad 0 < H_\ell < C_0 \rho_{\min}(E_\ell)$$

il existe alors un entier $m' \geq m$, m' sous espaces vectoriels $M_1, \dots, M_{m'}$ de \mathbb{R}^d en somme directe et un champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ à **accroissements rectangulaires stationnaires** suivant les directions $M_1, \dots, M_{m'}$ et vérifiant **simultanément les m relations d'autosimilarité matricielle** :

$$(8.4.3) \quad \forall (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \left\{ \begin{array}{l} \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ \vdots \\ \{X(a_m^{E_m} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

Remarque 8.4.6 L'entier m' peut être supérieur à m . En effet si on considère le cas $m = 1$ et que la matrice $E = E_1$ a à la fois des valeurs propres positives et négatives, la démarche va consister à considérer que (à une matrice de passage près)

$$E = \begin{pmatrix} E^+ & 0 \\ 0 & E^- \end{pmatrix}.$$

E^+ étant une matrice à spectre positif et E^- une matrice à spectre négatif. On construit alors (par produit tensoriel de covariance) un champ à accroissements rectangulaire stationnaires satisfaisant à

$$\{X(a_1 \begin{pmatrix} E^+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} a_2 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E^- \end{pmatrix} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} = \{a_1^{H_1} a_2^{H_2} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

Ainsi ce procédé de construction mène bien à considérer $m' = 2 \geq m = 1$.

Avant de démontrer ce résultat, on va remarquer que le problème considéré peut se réécrire en termes **d'autosimilarité par rapport à un groupe** ce qui va permettre d'utiliser la théorie des groupes localement compact et notamment la notion de mesure de Haar.

8.5 Réécriture du problème considéré

8.5.1 Notion d'autosimilarité par rapport à un groupe

On remarque que le problème posé peut s'exprimer en terme d'autosimilarité par rapport à un groupe. S. Kolodynski et J. Rosinski dans [KR03], ont en effet défini dans un cadre très général la notion de **champ aléatoire autosimilaire par rapport à un groupe \mathcal{A}** . On adapte cette définition au problème considéré :

Définition 8.5.1 Soit \mathcal{A} un sous groupe matriciel du groupe linéaire $Gl_d(\mathbb{R})$ et χ une application continue de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^* .

On dira que le champ aléatoire $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ est \mathcal{A} -autosimilaire de coefficient χ si,

$$(8.5.1) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \{X(Ax)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\chi(A)X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

On peut remarquer, comme cela est fait dans [KR03], que le coefficient d'autosimilarité d'un champ gaussien non trivial est nécessairement un homomorphisme :

Lemme 8.5.2 Soit \mathcal{A} un sous groupe matriciel du groupe linéaire $Gl_d(\mathbb{R})$. Si l'application continue χ de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^* est le coefficient d'autosimilarité d'un champ gaussien non trivial $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$, alors χ est nécessairement un homomorphisme de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^* .

Preuve. Soient A et A' deux matrices de \mathcal{A} . Par l'équation (8.5.1) on a :

$$\{X(AA'x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\chi(AA')X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d},$$

et

$$\{X(AA'x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\chi(A)X(A'x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\chi(A)\chi(A')X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

En passant aux variances des champ gaussiens considérés, et en utilisant le fait que le champ gaussien est non trivial on peut alors conclure. \square

Le problème que l'on souhaite résoudre peut donc se réexprimer en termes d'autosimilarité par rapport à un groupe à m paramètres.

8.5.2 Réécriture du problème à l'aide de la notion d'autosimilarité par rapport à un groupe

Soit (E_1, \dots, E_m) une famille de m matrices vérifiant les hypothèses (8.4.3). On définit \mathcal{A} le sous groupe à m paramètres du groupe linéaire $Gl_d(\mathbb{R})$ suivant,

$$(8.5.2) \quad \mathcal{A} = \{a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m\},$$

On peut alors dire que

Proposition 8.5.3 *Les deux problèmes sont équivalents :*

1. *Trouver des conditions suffisantes, sur les réels positifs H_1, \dots, H_m d'existence d'un champ gaussien réel $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ vérifiant simultanément les m relations (8.1.2).*
2. *Trouver des conditions suffisantes, sur l'homomorphisme χ , d'existence d'un champ gaussien réel $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ \mathcal{A} -autosimilaire de coefficient χ .*

L'implication est évidente car les m relations (8.1.2) sont bien équivalentes à

$$\forall A \in \mathcal{A}, \{X(Ax)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{\chi(A)X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}.$$

avec pour $A = a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}$,

$$\chi(A) = \chi(a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}) = a_1^{H_1} \cdots a_m^{H_m},$$

qui est bien un homomorphisme de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^* .

La réciproque découle de deux résultats. Le premier résultat est que si l'hypothèse 8.4.3 est vérifiée le groupe \mathcal{A} est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*)^m$. Cette proposition est démontrée en annexe B.

Proposition 8.5.4 *Si l'hypothèse (8.4.3) est vérifiée, l'application*

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m},$$

est un isomorphisme bicontinu de $(\mathbb{R}_+^)^m$ dans \mathcal{A} .*

Remarque 8.5.5 *L'application*

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m},$$

est toujours un homomorphisme continu et surjectif de $(\mathbb{R}_+^*)^m$ dans \mathcal{A} , mais cette application peut ne pas être injective.

C'est par exemple le cas si on considère le groupe à un paramètre \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \{\theta^E, \theta \in \mathbb{R}_+^*\} \text{ avec } E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est rien d'autre que le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.

Ici la matrice E a une partie diagonalisable réelle nulle et donc l'hypothèse (8.4.1) n'est pas vérifiée. Dans ce cas particulier, le groupe \mathcal{A} n'est pas isomorphe à \mathbb{R}_+^* .

On peut alors classer tous les homomorphismes continus d'un groupe \mathcal{A} vérifiant l'hypothèse (8.4.1) et donc tous les coefficients d'autosimilarité continus possibles d'un champ gaussien \mathcal{A} -autosimilaire. La proposition suivante est aussi démontrée en annexe B.

Proposition 8.5.6 *Soit \mathcal{A} un sous groupe de $Gl_d(\mathbb{R})$ à m paramètres de la forme 8.5.2. On suppose que l'hypothèse (8.4.1) est vérifiée.*

Pour tout homomorphisme continu χ de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^ , il existe un unique m -uplet (H_1, \dots, H_m) de réels tels que,*

$$\chi(a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m}) = a_1^{H_1} \dots a_m^{H_m},$$

pour tout $(a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m$.

Ceci implique bien que tout champ gaussien \mathcal{A} -autosimilaire de coefficient χ , où χ est une application continue de \mathcal{A} dans \mathbb{R}_+^* , est forcément un champ vérifiant,

$$\forall (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \{X(a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} \dots a_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

On a donc nécessairement m relations d'autosimilarité matricielle simultanées du type,

$$\forall a_i \in \mathbb{R}_+^*, \{X(a_i^{E_i} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_i^{H_i} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$$

et on en déduit bien l'équivalence énoncée en proposition 8.5.3.

Exemple 8.5.7 *Tous les exemples présentés en section 8.2 peuvent se reformuler via la notion d'autosimilarité par rapport à un groupe à m paramètres :*

1. *Dans le cas du Champ Brownien Fractionnaire, $\mathcal{A} = \{aId\}_{a \in \mathbb{R}_+^*}$, $\chi(aId) = a^H$.*

2. *Dans le cas du Drap Brownien Fractionnaire d dimensionnel, \mathcal{A} est le groupe à d paramètres des matrices diagonales à coefficients positifs, et*

$$\chi\left(\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) = \lambda_1^{H_1} \dots \lambda_n^{H_n}.$$

3. Dans le cas des champs stables par autosimilarité matricielle

$$\mathcal{A} = \{a^E, a > 0\}, \chi(a^E) = a^H.$$

Exemple 8.5.8 Dans l'exemple présenté en section 8.3.1, **de relations d'autosimilarité matricielles toutes découplées**, le champ est aussi autosimilaire par rapport à un groupe à m paramètres avec

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1^{E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m^{E_m} \end{pmatrix}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \right\},$$

alors que

$$\chi \left(\begin{pmatrix} a_1^{E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m^{E_m} \end{pmatrix} \right) = a_1^{H_1} \dots a_m^{H_m}.$$

On est maintenant en mesure de s'intéresser au problème de la construction du champ recherché.

8.6 La construction du champ recherché

On va pour cela suivre la démarche présentée en section 8.3. On s'intéressera notamment aux deux points essentiels intervenant dans la construction,

1. La définition d'une densité spectrale.
2. La construction de directions de renormalisation $M_1, \dots, M_{m'}$, basée sur la réduction simultanée des matrices E_1, \dots, E_m .

On vérifiera, ensuite que la démarche utilisée permet bien d'aboutir et que l'on a bien défini un champ vérifiant les propriétés recherchées.

8.6.1 La définition d'une densité spectrale

On commence par réexprimer avec le formalisme de la section précédente, les propriétés que l'on cherche à imposer à la densité spectrale :

Proposition 8.6.1 Soit ϕ une fonction définie sur \mathbb{R}^d à valeurs positives. Les deux propriétés sont équivalentes :

1. La fonction $|\phi(\xi)|^2$ vérifie les m relations d'homogénéité suivantes :
Pour tous réels positifs a_1, \dots, a_m , pour presque tout ξ de \mathbb{R}^d ,

$$(8.6.1) \quad \begin{cases} |\phi(a_1^{-E_1} \xi)|^2 = a_1^{2H_1 + \text{Tr}(E_1)} |\phi(\xi)|^2 \\ \vdots \\ |\phi(a_m^{-E_m} \xi)|^2 = a_m^{2H_m + \text{Tr}(E_m)} |\phi(\xi)|^2 \end{cases}$$

2. La fonction $|\phi(\xi)|^2$ est \mathcal{A} homogène de coefficient $\chi^2(\cdot)|\det(\cdot)|$ ce qui signifie :

$$(8.6.2) \quad \forall A \in \mathcal{A}, p.p. \xi \in \mathbb{R}^n, |\phi((A^{-1})^t \xi)|^2 = |\chi(A)|^2 |\det(A)| |\phi(\xi)|^2,$$

$$\text{avec } \chi(a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}) = a_1^{H_1} \cdots a_m^{H_m}.$$

Dans cette section, on va alors expliquer comment construire une densité spectrale vérifiant la relation d'homogénéité 8.6.2.

Pour cela, on va définir la fonction ϕ à partir de $\mu_{\mathcal{A}}$ mesure de Haar quelconque du groupe \mathcal{A} .

On commence par faire quelques rappels sur cette notion.

8.6.1.1 Mesure de Haar d'un groupe commutatif à m paramètres

On donne tout d'abord la définition suivante

Définition 8.6.2 Si \mathcal{H} est un groupe localement compact, on appelle mesure de Haar à gauche sur \mathcal{H} toute mesure de Radon non nulle μ , invariante par translation à gauche, c'est à dire vérifiant,

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall h \in \mathcal{H}, \mu(h * B) = \mu(B).$$

De manière générale, tout groupe localement compact possède une mesure de Haar à gauche. De plus deux mesures de Haar à gauche sur un groupe localement compact donné sont proportionnelles.

On définit de même la notion de mesure de Haar à droite de \mathcal{H} , comme étant une mesure de Radon non nulle sur \mathcal{H} , invariante par translation à droite.

On rappelle que dans le cas d'un groupe commutatif, mesure de Haar à droite et à gauche coïncident.

Pour plus de détails sur la notion de mesure de Haar d'un groupe localement compact, on pourra se reporter à l'annexe B.

On sait expliciter une mesure de Haar d'un groupe à m paramètres de la forme (8.5.2) :

Proposition 8.6.3 Soit \mathcal{A} un groupe à m paramètres de la forme 8.5.2, vérifiant l'hypothèse 8.4.1, alors il existe une constante positive C telle que pour toute fonction continue à support compact sur \mathcal{A} à valeurs positives,

$$\int_{\mathcal{A}} f(A) d\mu_{\mathcal{A}}(A) = C \int_{(\mathbb{R}_+^*)^m} f(a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}) \frac{da_1}{a_1} \times \cdots \times \frac{da_m}{a_m},$$

la mesure $\mu_{\mathcal{A}}$ désignant une mesure de Haar quelconque sur le groupe \mathcal{A} .

Preuve. La démonstration découle du changement de variable

$$A = a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m},$$

et du fait que, par l'hypothèse, le groupe \mathcal{A} est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*)^m$.

Pour plus de détails se reporter à l'annexe B. □

Remarque 8.6.4 *Ce résultat est faux si l'hypothèse 8.4.1 n'est pas vérifiée. Considérons par exemple la matrice E ,*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le groupe à un paramètre

$$\mathcal{A} = \{\theta^E, \theta \in \mathbb{R}_+^*\},$$

qui est le groupe des rotations $O_2(\mathbb{R})$.

La mesure $\frac{d\theta}{\theta}$ n'est alors pas une mesure de Haar de $O_2(\mathbb{R})$. En effet ce n'est pas une mesure finie. Or le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est compact, ce qui est contradictoire.

Ici la proposition ne s'applique pas car, le groupe \mathcal{A} n'est pas isomorphe à \mathbb{R}_+^* .

On peut maintenant définir une densité spectrale du champ recherché.

8.6.1.2 Définition d'une densité spectrale

On définit alors

$$(8.6.3) \quad |\phi(\xi)|^2 = \int_{\mathcal{A}} \chi(A)^2 |\det(A)| |\widehat{\psi}(-A^t \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A),$$

où ψ est une fonction de $H^{m+1}(\mathbb{R}^d)$ avec

$$H^{m+1}(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d), |\xi|^{m+1} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\}.$$

Ce procédé permet alors bien, de définir de manière adéquate une fonction vérifiant les bonnes propriétés d'homogénéité.

Proposition 8.6.5 *La fonction $|\phi(\xi)|^2$ définie par l'équation 8.6.3, est bien une fonction \mathcal{A}^t homogène de coefficient*

$$\chi^2(\cdot) |\det(\cdot)|.$$

Remarque 8.6.6 *On ne sait pas à ce stade si la fonction $|\phi(\xi)|^2$ définie par l'équation 8.6.3 est finie presque partout.*

Ce que l'on va montrer dans la suite, c'est que cela est bien le cas. Ce sera une conséquence de l'existence de la fonction de covariance du champ gaussien recherché.

Preuve. On utilise pour cela la propriété d'invariance par translation de toute mesure de Haar d'un groupe localement compact.

Soit en effet, A_0 une matrice de \mathcal{A} .

$$\begin{aligned} |\phi((A_0^t)^{-1} \xi)|^2 &= \int_{\mathcal{A}} \chi(A)^2 |\det(A)| |\widehat{\psi}(-A^t (A_0^t)^{-1} \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A) \\ &= \int_{\mathcal{A}} \chi(A)^2 |\det(A)| |\widehat{\psi}(-A^t (A_0^t)^{-1} \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A) \end{aligned}$$

On fait alors dans la dernière intégrale, le changement de variable

$$A' = A_0^{-1} A,$$

ce qui induit,

$$\begin{aligned} |\phi((A_0^t)^{-1}\xi)|^2 &= \int_{\mathcal{A}} \chi(A_0 A')^2 |\det(A_0 A')| |\widehat{\psi}(-(A')^t \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A'), \\ &= |\det(A_0)| \chi(A_0)^2 \int_{\mathcal{A}} \chi(A')^2 |\det(A')| |\widehat{\psi}(-(A')^t \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A'). \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant du fait que $\chi(\cdot)$ et $\det(\cdot)$ sont deux homomorphismes. \square

A ce stade, on a donc donné un procédé de construction d'une densité spectrale du champ recherché. On s'intéresse maintenant à une deuxième étape, qui va consister à construire des directions de renormalisation.

8.6.2 Construction de directions de renormalisation

On va ici suivre la démarche présentée en section 8.3. On rappelle que :

1. **On cherche à construire m' directions remarquables $M_1, \dots, M_{m'}$** en somme directe, appelées les directions de renormalisation, **stables** par les matrices E_1, \dots, E_m et donc par les matrices du groupe \mathcal{A} , telles que les hypothèses de la proposition 8.3.5 soient vérifiées.

La proposition 8.3.5 assure alors l'existence d'un champ gaussien vérifiant les propriétés recherchées.

2. **On sait définir ces directions de renormalisation lorsque**

$$(8.6.4) \quad \mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1^{E_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_m^{E_m} \end{pmatrix}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \right\},$$

les m matrices (E_1, \dots, E_m) de $M_{n_1}(\mathbb{R}) \times \dots \times M_{n_m}(\mathbb{R})$, étant toutes à spectre de partie réelle positive.

C'est le cas présenté en section 8.3.1 où les m relations d'autosimilarité matricielle sont **toutes découplées**.

On peut alors prendre comme directions de renormalisation

$$M_1 = \mathbb{R}^{d_1} \times \dots \times \{0\}, \dots, M_m = \{0\} \times \dots \times \mathbb{R}^{d_m},$$

On va essayer de se ramener à un cas proche de ce cas là. On aura besoin de la définition suivante.

Définition 8.6.7 *La partie hyperbolique du groupe matriciel \mathcal{A} , qui sera noté \mathcal{A}_D , est le groupe suivant*

$$\mathcal{A}_D = \{D, D \text{ est la partie diagonalisable réelle d'une certaine matrice } E \text{ du groupe } \mathcal{A}\}.$$

Lemme 8.6.8 *Dans le cas où le groupe \mathcal{A} est donné par l'équation (8.5.2) on a*

$$\mathcal{A}_D = \{a_1^{D_1} \dots a_m^{D_m}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m\},$$

où les matrices

$$D_1, \dots, D_m$$

sont les parties diagonalisables réelles respectives des matrices E_1, \dots, E_m .

Le point essentiel de cette section est que la construction de directions de renormalisation d'un champ gaussien \mathcal{A} autosimilaire **ne dépend pas du groupe \mathcal{A} en lui-même mais uniquement de sa partie hyperbolique.**

Cela signifie que le choix de directions de renormalisation d'un champ gaussien vérifiant simultanément les m relation d'autosimilarité matricielle (8.1.2) **ne dépend que des matrices D_1, \dots, D_m .**

Pour construire ces directions on va diagonaliser de manière simultanée les matrices D_1, \dots, D_m , ce qui est possible par la proposition suivante :

Proposition 8.6.9 *Si E_1, \dots, E_m sont m matrices de $M_d(\mathbb{R})$ commutant deux à deux et que D_1, \dots, D_m désignent leurs parties diagonalisables réelles respectives alors,*

1. *Les matrices D_1, \dots, D_m sont elles aussi m matrices commutant deux à deux. Les matrices D_1, \dots, D_m sont donc simultanément diagonalisables.*
2. *De plus les matrices E_1, \dots, E_m sont toutes dans le commutant des matrices D_1, \dots, D_m .*

Preuve. Cette proposition est démontrée en Annexe A. \square

Par la proposition 8.6.9, les matrices D_1, \dots, D_m sont donc bien simultanément diagonalisables. On va alors en déduire que les matrices du groupe \mathcal{A}_D , sont simultanément diagonalisables. Les directions recherchées seront alors liées à cette réduction simultanée des matrices du groupe \mathcal{A}_D .

Proposition 8.6.10 *Supposons que l'hypothèse 8.4.1 soit vérifiée. Il existe alors une matrice inversible P telle que*

$$\mathcal{A}_D = \left\{ P \times \begin{pmatrix} a_1^{\Delta_1^+} & & & & & 0 \\ & a_1^{\Delta_1^-} & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & a_m^{\Delta_m^+} & & \\ & & & & a_m^{\Delta_m^-} & \\ 0 & & & & & a_1^{D_1^{m+1}} \dots a_m^{D_m^{m+1}} \end{pmatrix} \times P^{-1}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \right\}$$

où

1. *Pour tout k de $\{1, \dots, m\}$, $\Delta_k = \begin{pmatrix} \Delta_k^+ & 0 \\ 0 & \Delta_k^- \end{pmatrix}$.*
2. *Pour tout k de $\{1, \dots, m\}$, les matrices Δ_k^+ (resp Δ_k^-, D_ℓ^{m+1}) sont des matrices diagonales à coefficients positifs (resp négatifs, quelconques) de $M_{d_k^+}(\mathbb{R})$ (resp $M_{d_k^-}(\mathbb{R}), M_{d_{m+1}}(\mathbb{R})$).*
3. *Les matrices Δ_k^+ existent toujours pour tout k de $\{1, \dots, m\}$.*
4. *Les matrices Δ_k^-, D_ℓ^{m+1} peuvent éventuellement ne pas exister pour certaines valeurs de k ou de ℓ .*

Preuve. Cette proposition est démontrée en section 8.7.1. □

La proposition 8.6.10 permet d'avoir pour le groupe \mathcal{A}_D **une forme proche** de celle présentée à la section 8.3.1. En effet :

Proposition 8.6.11 *Si on utilise les notations de la proposition précédente on a*

$$\mathcal{A}_D = \left\{ P \times \begin{pmatrix} a_1^{\Delta_1} & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & a_m^{\Delta_m} & \\ 0 & & & a_1^{D_1^{m+1}} \dots a_m^{D_m^{m+1}} \end{pmatrix} \times P^{-1}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \right\}$$

On illustre la proposition précédente sur un exemple.

Exemple 8.6.12 *On considère donc l'exemple suivant*

$$\mathcal{A} = \{a_1^{E_1} a_2^{E_2}, (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2\}, \text{ avec } E_1 = D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, E_2 = D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ici, on a choisi pour plus de simplicité de prendre $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D$. De plus, les matrices D_1 et D_2 sont diagonales : $P = Id$.

On a alors,

$$\text{Vect} \langle D_1, D_2 \rangle = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle, \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse 8.4.1 se traduit ici par le fait que la famille (D_1, D_2) est libre ce qui est équivalent à dire que la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est libre. On a donc

$$\text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

ce qui implique que

$$\text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\Delta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \text{Vect} \left\langle \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

On a donc une paramétrisation du groupe \mathcal{A} de la forme :

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & a_2 \end{pmatrix}, (a_1, a_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \right\}$$

Si on suit les notations de la proposition 8.6.10, on a ici

$$\Delta_1^+ = (1), \Delta_1^- = (-2), \Delta_2^+ = (2).$$

A la paramétrisation du groupe \mathcal{A}_D donnée par la proposition 8.6.10, il correspond la paramétrisation du groupe \mathcal{A} suivante :

Proposition 8.6.13 *Les notations sont celles de la proposition 8.6.10. Le groupe à m paramètres \mathcal{A} est de la forme*

$$\mathcal{A} = \{Pa_1^{F_1} \cdots a_m^{F_m} P^{-1}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m\},$$

où pour tout ℓ , la matrice F_ℓ a pour partie diagonalisable réelle la matrice :

$$\text{diag}(0, \dots, 0, \Delta_\ell, 0, \dots, D_\ell^{m+1}).$$

Preuve. Démonstration faite en section 8.7.2. □

Conséquence : définition de directions de renormalisations

On définit alors les sous espaces vectoriels suivants pour tout ℓ de $\{1, \dots, m\}$:

$$(8.6.5) \quad W_\ell^+ = \mathbb{R}^{d_1^+}, W_\ell^- = \mathbb{R}^{d_1^-}, W_{m+1} = \mathbb{R}^{d_{m+1}}.$$

Les directions de renormalisation sont alors définies pour tout ℓ de $\{1, \dots, m\}$ par

$$(8.6.6) \quad V_\ell^+ = P^{-1}W_\ell^+, V_\ell^- = P^{-1}W_\ell^-, V_{m+1} = P^{-1}W_{m+1}.$$

qui sont bien **stables** par les matrices E_1, \dots, E_m . On peut remarquer que parmi ces $2m + 1$ sous espaces, certains peuvent être réduits à $\{0\}$.

Notation 8.6.14 *On note $M_1, \dots, M_{m'}$ les m' sous espaces vectoriels non réduits à $\{0\}$ parmi les espaces $V_1^+, \dots, V_m^+, V_1^-, \dots, V_m^-, V_{m+1}$. Les sous espaces $M_1, \dots, M_{m'}$ sont donc appelés les m' **directions de renormalisation** non triviales.*

Exemple 8.6.15 *On reprend l'exemple précédent. Ici les trois directions de renormalisation sont les sous espaces vectoriels*

$$M_1^+ = \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\}, M_1^- = \{0\} \times \mathbb{R} \times \{0\}, M_2^+ = \{0\} \times \{0\} \times \mathbb{R}.$$

La difficulté consiste maintenant à **justifier** cette démarche et à montrer qu'elle est **valide**. C'est l'objet de la section suivante.

8.6.3 Construction d'un champ gaussien à accroissements rectangulaires stationnaires \mathcal{A} autosimilaire de coefficient χ

Muni de ces outils on peut maintenant revenir au problème qui nous intéresse : la construction de champs gaussiens \mathcal{A} -autosimilaires à accroissements rectangulaires stationnaires. Supposons que

1. La fonction $|\phi(\xi)|^2$ est définie par

$$|\phi(\xi)|^2 = \int \chi^2(A) |\det(A)| |\widehat{\psi}(-A^t \xi)|^2 d\mu_{\mathcal{A}}(A),$$

où ψ est une fonction de l'espace de Sobolev $H^{m+1}(\mathbb{R}^d)$.

2. Les directions de renormalisation $M_1, \dots, M_{m'}$ sont celles définies dans la section précédente.

On cherche alors des conditions suffisantes sur l'homomorphisme χ pour que (condition (8.3.5) de la proposition 8.3.5)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \int_{\mathbb{R}^d} |\phi(\xi)|^2 \prod_{\ell=1}^{m'} (\min(1, |\langle \xi, x_\ell \rangle|^2)) d\xi < +\infty.$$

On fait tout d'abord la remarque suivante (les notations sont celles des propositions 8.6.10 et 8.6.13) :

Lemme 8.6.16 *Soit \mathcal{A}_P le groupe à m paramètres défini par*

$$\mathcal{A}_P = P^{-1}AP = \{a_1^{F_1} \cdots a_m^{F_m}, (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m\},$$

et χ_P l'homomorphisme défini pour toute matrice A_P de \mathcal{A}_P par

$$\chi_P(A_P) = \chi(PA_PP^{-1}).$$

La condition 8.3.5 est vérifiée si et seulement si pour tout vecteur x de \mathbb{R}^d l'intégrale que l'on notera $I_P(x)$

$$(8.6.7) \quad \int_{\mathbb{R}^d} \prod_{\ell} (\min(1, |\langle x_{W_i^+}, \zeta \rangle|^2) \min(1, |\langle x_{W_i^-}, \zeta \rangle|^2)) |\phi_{P^t}(\zeta)|^2 d\zeta$$

est finie avec pour tout $\zeta \in \mathbb{R}^d$

$$|\phi_{P^t}(\zeta)|^2 = |\phi(P^t\zeta)|^2 = \int \chi_P^2(A_P) |\det(A_P)| |\widehat{\psi}_P(-A_P^t\zeta)|^2 d\mu_{\mathcal{A}_P}(A_P).$$

et $\psi_P(\zeta) = \psi(P\zeta)$.

Remarque 8.6.17 *Dans la démonstration de l'existence du champ, il est donc équivalent de remplacer, par changement de variable, \mathcal{A} par \mathcal{A}_P , χ par χ_P et ψ par ψ_P .*

Preuve. Le lemme découle des changements de variable

$$\xi = P^t\zeta, A_P = PAP^{-1}.$$

□

Suite au lemme 8.6.16 et à la remarque 8.6.17, on s'intéressera dans un premier temps au problème de l'existence, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ de l'intégrale $I_P(x)$.

On a donc le résultat suivant.

Proposition 8.6.18 *On reprend les notations de la proposition 8.6.13. Si pour tout i de $\{1, \dots, m\}$*

$$-\rho_{\min}(\Delta_i^-) < H_i' < \rho_{\min}(\Delta_i^+)$$

(avec la convention $\rho_{\min}(\Delta_i^-) = 0$ si la matrice Δ_i^- n'existe pas), alors la condition 8.6.7 est bien vérifiée pour l'homomorphisme χ_P défini de \mathcal{A}_P dans \mathbb{R}_+^* par

$$\chi(a_1^{F_1} \cdots a_m^{F_m}) = a_1^{H_1'} \cdots a_m^{H_m'}.$$

Preuve. Démonstration en section 8.7.3. □

On en déduit alors le résultat d'existence voulu :

Proposition 8.6.19 *Supposons que les hypothèses 8.4.3 soient vérifiées. Il existe une certaine constante C_0 inférieure à 1 ne dépendant que des matrices E_1, \dots, E_m telle que si pour tout ℓ de $\{1, \dots, m\}$*

$$(8.6.8) \quad 0 < H_\ell < C_0 \rho_{\min}(E_\ell)$$

*il existe alors un entier $m' \geq m$, m' sous espaces vectoriels $M_1, \dots, M_{m'}$ de \mathbb{R}^d en somme directe et un champ gaussien $\{X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$ à accroissements rectangulaires stationnaires suivant les directions $M_1, \dots, M_{m'}$ et vérifiant **simultanément les m relations d'autosimilarité matricielle** :*

$$(8.6.9) \quad \forall (a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m, \left\{ \begin{array}{l} \{X(a_1^{E_1} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_1^{H_1} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \\ \vdots \\ \{X(a_m^{E_m} x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \stackrel{(\mathcal{L})}{=} \{a_m^{H_m} X(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d} \end{array} \right.$$

Preuve. Démonstration en section 8.7.4. □

8.7 Démonstrations

8.7.1 Démonstration de la proposition 8.6.10

La proposition 8.6.10 découle directement du lemme suivant :

Lemme 8.7.1 *Supposons que l'hypothèse 8.4.1 soit vérifiée. Il existe alors une matrice inversible P telle que*

$$\text{Vect} \langle D_1, \dots, D_m \rangle = \left\{ P^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 \Delta_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_m \Delta_m & \\ 0 & & & \sum_l \lambda_l D_l^{m+1} \end{pmatrix} P, (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

où,

1. Pour tout k de $\{1, \dots, m\}$, $\Delta_k = \begin{pmatrix} \Delta_k^+ & 0 \\ 0 & \Delta_k^- \end{pmatrix}$.
2. Pour tout k de $\{1, \dots, m\}$, les matrices Δ_k^+ (resp Δ_k^-, D_ℓ^{m+1}) sont des matrices diagonales à coefficients positifs (resp négatifs, quelconques) de $M_{d_k^+}(\mathbb{R})$ (resp $M_{d_k^-}(\mathbb{R}), M_{d_{m+1}}(\mathbb{R})$).
3. Les matrices Δ_k^+ existent toujours pour tout k de $\{1, \dots, m\}$.
4. Les matrices Δ_k^-, D_l^{m+1} peuvent éventuellement ne pas exister pour certaines valeurs de k ou de ℓ .

Preuve. Les matrices D_1, \dots, D_m étant simultanément diagonalisables, il existe une matrice inversible P telle que

$$D_\ell = P^{-1} D'_\ell P.$$

On a alors

$$\text{Vect} \langle D_1, \dots, D_m \rangle = P^{-1} \text{Vect} \langle D'_1, \dots, D'_m \rangle P.$$

Les matrices D'_1, \dots, D'_m sont m matrices diagonales de la forme

$$D'_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_\ell^1 \text{Id}_{d_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_\ell^p \text{Id}_{d_p} \end{pmatrix}.$$

Par l'hypothèse 8.4.1, la famille (D'_1, \dots, D'_m) est libre. Ceci implique que la matrice $L = (\alpha_\ell^s)_{\ell,s}$ est de rang m .

On peut donc en extraire une matrice inversible $\Lambda = (\alpha_\ell^{i_k})_{\ell,k} = (\beta_\ell^k)_{\ell,k}$ de taille m . On définit alors,

$$\begin{aligned} I_k^+ &= \{(s, \delta) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{R}_+^*, (\alpha_1^s, \dots, \alpha_m^s) = \delta(\alpha_1^{i_k}, \dots, \alpha_m^{i_k})\} = \{(s_{k,1}^+, \delta_{k,1}^+), \dots, (s_{k,d_k}^+, \delta_{k,d_k}^+)\} \\ I_k^- &= \{(s, \delta) \in \{1, \dots, m\} \times \mathbb{R}_-^*, (\alpha_1^s, \dots, \alpha_m^s) = \delta(\alpha_1^{i_k}, \dots, \alpha_m^{i_k})\} = \{(s_{k,1}^-, \delta_{k,1}^-), \dots, (s_{k,d_k}^-, \delta_{k,d_k}^-)\} \end{aligned}$$

Remarquons que I_k^- peut être vide. Par contre I_k^+ est forcément non vide car $(i_k, 1) \in I_k^+$.

Posons (quitte à permuter certaines lignes et/ou colonnes de la matrice P et donc à supposer que la matrice $L = (\alpha_\ell^s)_{(\ell,s) \in \{1, \dots, m\}^2}$ est inversible),

$$\Delta_k^+ = \begin{pmatrix} \delta_{k,1}^+ \text{Id}_{d_{s_{k,1}^+}} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \delta_{k,d_k}^+ \text{Id}_{d_{s_{k,d_k}^+}} \end{pmatrix}, \Delta_k^- = \begin{pmatrix} \delta_{k,1}^- \text{Id}_{d_{s_{k,1}^-}} & & 0 \\ & \cdots & \\ 0 & & \delta_{k,d_k}^- \text{Id}_{d_{s_{k,d_k}^-}} \end{pmatrix}.$$

Comme par construction si $(s, \delta) \in I_k^+ \cup I_k^-$, $(\alpha_1^s, \dots, \alpha_m^s) = \delta(\alpha_1^{i_k}, \dots, \alpha_m^{i_k})$, on a ,

$$D'_\ell = \begin{pmatrix} \alpha_\ell^1 \Delta_1^+ & & & & & 0 \\ & \alpha_\ell^1 \Delta_1^- & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha_\ell^m \Delta_m^+ & & \\ & & & & \alpha_\ell^m \Delta_m^- & \\ 0 & & & & & \Delta_\ell^{m+1} \end{pmatrix}$$

ce qui implique bien le résultat voulu. \square

8.7.2 Démonstration de la proposition 8.6.13

Par la proposition A.3.1 2), les matrices $E'_\ell = P E_\ell P^{-1}$ sont diagonalisables par blocs de partie diagonalisable réelle D'_ℓ .

De plus, (on utilise les notations de la preuve de la proposition 8.6.10, si $\Lambda^{-1} = (\mu_k^\ell)$, et si pour tout k , F_k désigne la matrice,

$$F_k = \sum_{\ell} \mu_{\ell}^k E'_{\ell},$$

la partie diagonalisable réelle de F_k est bien

$$\sum_{\ell} \mu_{\ell}^k D'_{\ell},$$

ce qui, par définition de la matrice Λ , est exactement le résultat désiré.

8.7.3 Démonstration de la proposition 8.6.18

On aura besoin dans ce qui suit des notations suivantes :

Notation 8.7.2 *On notera \mathcal{B}_P , la base (F_1, \dots, F_m) définie dans la proposition 8.6.13. Pour tout i de $\{1, \dots, m\}$ on définira alors,*

$$F_{\ell}^{i,+} = F_{\ell}|_{W_i^+}, F_{\ell}^{i,-} = F_{\ell}|_{W_i^-}.$$

Remarquons alors que pour tous $(\ell, i) \in \{1, \dots, m\}^2$, la partie diagonalisable réelle de $F_{\ell}^{i,+}$ (resp $F_{\ell}^{i,-}$) est $\delta_{\ell,i} \Delta_{\ell}^+$ (resp $\delta_{\ell,i} \Delta_{\ell}^-$). Ceci implique en particulier, que

$$(8.7.1) \quad \rho_{\min}(F_{\ell}^{i,+}) = \delta_{\ell,i} \rho_{\min}(\Delta_{\ell}^+), \rho_{\min}(F_{\ell}^{i,-}) = \delta_{\ell,i} \rho_{\min}(\Delta_{\ell}^-).$$

En utilisant l'expression de ϕ_P et le changement de variable

$$\xi = a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta,$$

on voit qu'il suffit de montrer que l'intégrale,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\prod_{i=1}^m I_i(x_i, \zeta) \right) |\widehat{\psi}_P(\zeta)|^2 d\zeta,$$

est finie, avec, pour tout i

$$I_i(x_i, \zeta) = \int_{a_i=0}^{+\infty} \min(1, |\langle x_{W_i^+}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle|) \min(1, |\langle x_{W_i^-}, (K_P^{-1})^t a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle|)^2 a_i^{2H_i'-1} da_i.$$

Majorons alors successivement l'intégrale $I_i(x_i, \zeta)$ en 0 puis à l'infini.

Commençons par majorer l'intégrale $I_i(x_i, \zeta, K_P)$ en 0.

$$\begin{aligned} & \int_{a_i=0}^1 \min(1, |\langle x_{W_i^+}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle|) \min(1, |\langle x_{W_i^-}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle|)^2 a_i^{2H_i'-1} da_i \\ & \leq \int_{a_i=0}^1 |\langle x_{W_i^-}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle|^2 a_i^{2H_i'-1} da_i \\ & \leq \int_{a_i=0}^1 |\langle x_{W_i^-}, (a_1^{-F_1^{i,-}})^t \dots (a_m^{-F_m^{i,-}})^t \zeta_{W_i^-} \rangle|^2 a_i^{2H_i'-1} da_i \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant de la définition des $F_\ell^{i,-}$ et du fait que les sous espaces $W_1^+, W_1^-, \dots, W_m^+, W_m^-$ sont en somme directe orthogonale et tous stables par les matrices des groupes \mathcal{A}_P .

Or si ε est un réel positif fixé,

$$\begin{aligned} & \int_{a_i=0}^1 | \langle x_{W_i^-}, (a_1^{-F_1^{i,-}})^t \dots (a_m^{-F_m^{i,-}})^t \zeta_{W_i^-} \rangle |^2 a_i^{2H_i'-1} da_i \\ & \leq C |x_i^-|^2 |\zeta_i^-|^2 \int_{a_i=0}^1 |a_1^{-(F_1^{i,-})^t} \dots a_m^{-(F_m^{i,-})^t}|^2 a_i^{2H_i'-1} da_i \\ & \leq C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) |x|^2 |\zeta|^2 \int_{a_i=0}^1 a_i^{2H_i'} a_i^{-2m\varepsilon} a_i^{2\rho_{\min}(\Delta_i^-)} \frac{da_i}{a_i} \\ & = C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) |x|^2 |\zeta|^2 J_i(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) \end{aligned}$$

la dernière inégalité découlant des résultats d'estimation de norme matricielle de la proposition C.2.1 et de l'équation 8.7.1.

On a de même à l'infini la majoration suivante

$$\begin{aligned} & \int_{a_i=1}^{+\infty} \min(1, | \langle x_{W_i^+}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle |^2) \min(1, | \langle x_{W_i^-}, a_1^{-F_1^t} \dots a_m^{-F_m^t} \zeta \rangle |^2) a_i^{2H_i'-1} da_i \\ & \leq C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) |x|^2 |\zeta|^2 \int_{a_i=1}^{+\infty} a_i^{2H_i'} a_i^{+2m\varepsilon} a_i^{-2\rho_{\min}(\Delta_i^+)} \frac{da_i}{a_i} \\ & = C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) |x|^2 |\zeta|^2 K_i(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) \end{aligned}$$

Or, si pour tout i ,

$$-\rho_{\min}(\Delta_i^-) < H_i' < \rho_{\min}(\Delta_i^+)$$

on peut choisir un réel positif ε_0 tel que $J_i(\varepsilon_0, E_1, \dots, E_m)$ et $K_i(\varepsilon_0, E_1, \dots, E_m)$ existent simultanément (avec la convention $\rho_{\min}(\Delta_i^-) = 0$ si Δ_i^- n'existe pas).

Dans ce cas, on en déduit alors que, si $x \in \mathbb{R}^d$,

$$I_P(x) \leq C(\varepsilon_0, E_1, \dots, E_m) |x|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \prod_i (J_i + K_i) |\xi|^{2m} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Si on suppose que, de plus $\psi \in H^{m+1}(\mathbb{R}^d)$, on obtient bien le résultat souhaité.

8.7.4 Démonstration de la proposition 8.6.19

Les notations sont celles des sections 8.7.1 et 8.7.2. Il s'agit de trouver le lien entre H_1', \dots, H_m' et H_1, \dots, H_m .

On rappelle que pour tout k , élément de $\{1, \dots, m\}$

$$F_k = \sum_{\ell=1}^m \tilde{\mu}_i^k E_\ell'$$

On commence par démontrer le lemme

Lemme 8.7.3 *Si on note M la matrice à coefficients réels définie par $M = (\tilde{\mu}_\ell^k)_{(\ell,k) \in \{1, \dots, m\}^2}$, on a alors :*

$$\begin{pmatrix} H'_1 \\ \vdots \\ H'_m \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} H_1 \\ \vdots \\ H_m \end{pmatrix}$$

Preuve. En effet si $A = \alpha_1^{F_1} \cdots \alpha_m^{F_m}$, alors

$$\begin{aligned} A &= \exp(\log(\alpha_1)F_1 + \cdots + \log(\alpha_m)F_m) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^m \log(\alpha_k) \sum_{\ell=1}^m \tilde{\mu}_\ell^k E'_\ell\right) \\ &= a_1^{E'_1} \cdots a_m^{E'_m} \end{aligned}$$

avec pour tout ℓ

$$a_\ell = \prod_{k=1}^m \alpha_k^{\tilde{\mu}_\ell^k}$$

Comme,

$$\chi_P(\alpha_1^{F_1} \cdots \alpha_m^{F_m}) = \alpha_1^{H'_1} \cdots \alpha_m^{H'_m} = a_1^{H_1} \cdots a_m^{H_m},$$

on a bien par unicité le résultat souhaité. □

En effet, il découle directement de ce lemme le résultat suivant :

Lemme 8.7.4 *Supposons que pour tout ℓ , :*

$$|H_\ell| \leq \frac{\min(\rho_{\min}(E_\ell))}{\|\Lambda\|_\infty \|\Lambda^{-1}\|_\infty}$$

Alors on a bien pour tout i ,

$$-\rho_{\min}(\Delta_i^-) < H'_i < \rho_{\min}(\Delta_i^+)$$

Annexe A

Décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$

A.1 Définition de la décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$

La décomposition de Jordan additive complète dans $M_n(\mathbb{R})$ est définie à partir de la proposition suivante qui est une simple version additive du lemme 7.1 chap 9 de [Helg78] :

Proposition A.1.1 *Toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique,*

$$M = D + S + N$$

où les trois matrices D, S, N commutent deux à deux et où D est une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, S une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ à spectre imaginaire pur, N une matrice nilpotente.

Notation A.1.2 *La matrice D sera appelée la partie diagonalisable réelle de M , S sa partie semi-simple imaginaire, et N sa partie nilpotente.*

Remarque A.1.3 *On remarque que,*

$\exp(D)$ est une matrice hyperbolique c'est à dire une matrice semi-simple à spectre positif, $\exp(S)$ est une matrice elliptique c'est à dire une matrice semi-simple à spectre de module 1, $\exp(N)$ est une matrice unipotente, c'est à dire somme de la matrice identité et d'une matrice nilpotente.

On peut montrer par ailleurs (voir [Helg78]) que toute matrice inversible s'écrit de manière unique comme produit de trois matrices, commutant deux à deux, respectivement hyperbolique, elliptique et unipotente : c'est la version multiplicative de la proposition.

L'écriture

$$\exp(M) = \exp(D).\exp(S).\exp(N),$$

*est alors ce que l'on appelle la **décomposition de Jordan multiplicative complète** de la matrice inversible $\exp(M)$ ([Helg78]).*

On calque la preuve sur celle du lemme 7.1 chap 9 de [Helg78].
Ceci est détaillé dans la section suivante.

A.2 Démonstration de la proposition A.1.1

Cette proposition peut être vue comme une simple conséquence de la décomposition de Jordan dans $M_n(\mathbb{R})$. On rappelle en effet que (voir par exemple [LT85]),

Proposition A.2.1 (*Réduction de Jordan dans $M_n(\mathbb{R})$*) Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Il existe alors une matrice inversible à coefficients réels P telle que $P^{-1}MP$ est une matrice diagonale par blocs,

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} J_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{m_1+m_2} \end{pmatrix},$$

(m_1, m_2 étant deux entiers non simultanément nuls)

avec,

$$\forall \ell_1 \in \{1, \dots, m_1\}, J_{\ell_1} = \lambda_{\ell_1} Id \text{ ou } J_{\ell_1} = \begin{pmatrix} \lambda_{\ell_1} & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ 0 & & & \lambda_{\ell_1} \end{pmatrix},$$

λ_{ℓ_1} est alors une valeur propre réelle de M ,

et,

$$\forall \ell_2 \in \{1, \dots, m_2\}, J_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{\ell_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\ell_2} \end{pmatrix} \text{ ou } J_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{\ell_2} & I_2 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & I_2 \\ 0 & & & A_{\ell_2} \end{pmatrix},$$

$$\text{avec } A_{\ell_2} = \begin{pmatrix} \alpha_{\ell_2} & \beta_{\ell_2} \\ -\beta_{\ell_2} & \alpha_{\ell_2} \end{pmatrix},$$

$\alpha_{\ell_2} + i\beta_{\ell_2}$ et $\alpha_{\ell_2} - i\beta_{\ell_2}$ sont alors deux valeurs propres complexes de M .

Ceci permet d'en déduire (voir par exemple [MT86]),

Proposition A.2.2 (*Décomposition de Dunford dans $M_n(\mathbb{R})$*) Toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique,

$$M = A + N,$$

où A est une matrice diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$, N une matrice nilpotente et $AN = NA$.

Les matrices A et N sont de plus à coefficients réels.

Remarque A.2.3 Une matrice A à coefficients réels diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ est aussi appelée une matrice semi-simple.

Notation A.2.4 Si M est une matrice à coefficients réels et si les notations sont celles de la proposition A.2.2, A s'appelle la partie semi-simple de M , N sa partie nilpotente.

La décomposition de M sous la forme

$$M = A + N,$$

s'appelle la décomposition de Dunford de M .

On en déduit alors le résultat souhaité :

Proposition A.2.5 *Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$.*

1. *La matrice M peut s'écrire , de manière unique,*

$$M = D + S + N,$$

où les matrices D, S, N commutent deux à deux , D étant une matrice diagonalisable (réelle) dans $M_n(\mathbb{R})$, S une matrice semi-simple à spectre imaginaire pur et N une matrice nilpotente.

2. *De plus, commutant deux à deux, les matrices D, S, N **admettent une réduction simultanée**, ce qui signifie qu'il existe une matrice inversible à coefficients réels P telle que,*

– $P^{-1}DP$ est diagonale réelle.

– $P^{-1}SP$ est diagonale par blocs, les blocs étant tous de la forme,

$$(0) \text{ ou } \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}.$$

– $P^{-1}NP$ est triangulaire supérieure stricte.

Preuve. Soit M une matrice à coefficients réels.

Existence.

On utilise la réduction de Jordan de la matrice M et les notations de la proposition A.2.1.

Pour tout ℓ_1 de $\{1, \dots, m_1\}$, on note,

$$D_{\ell_1} = \lambda_{\ell_1} Id, \quad S_{\ell_1} = 0, \quad N_{\ell_1} = J_{\ell_1} - \lambda_{\ell_1} Id.$$

Pour tout ℓ_2 de $\{1, \dots, m_2\}$, on note,

$$D_{m_1+\ell_2} = \alpha_{\ell_2} Id, \quad S_{m_1+\ell_2} = \begin{pmatrix} A_{\ell_2} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{\ell_2} \end{pmatrix} - D_{m_1+\ell_2}, \quad N_{m_1+\ell_2} = J_{m_1+\ell_2} - D_{m_1+\ell_2} - S_{m_1+\ell_2}.$$

On définit alors,

la matrice diagonalisable réelle D par

$$D = P \times \begin{pmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_{m_1+m_2} \end{pmatrix} \times P^{-1},$$

la matrice semi-simple à spectre imaginaire pur S par :

$$S = P \times \begin{pmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_{m_1+m_2} \end{pmatrix} \times P^{-1},$$

la matrice nilpotente N par :

$$N = P \times \begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_{m_1+m_2} \end{pmatrix} \times P^{-1}.$$

On vérifie alors que D, S et N satisfont bien aux propriétés demandées.

Unicité

On suppose qu'il existe deux décompositions de M sous la forme demandée :

$$M = D + S + N = D' + S' + N'.$$

On remarque que que N et N' sont deux matrices nilpotentes. De même, $A = D + S$ et $A' = D' + S'$ sont deux matrices semi-simples, car (c'est la définition) diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$.

Par l'unicité de la décomposition de Dunford (voir la proposition A.2.2), cela signifie que,

$$A = A' \text{ et } N = N'.$$

Il suffit donc de montrer l'unicité de l'écriture

$$A = D + S,$$

pour toute matrice semi-simple A .

On note D et S les matrices issues de la décomposition de Jordan. Supposons donc qu'il existe une autre décomposition de A

$$A = D' + S',$$

avec D, D' deux matrices diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$, S, S' deux matrices semi-simples à spectre imaginaire pur et $D'S' = S'D'$.

Remarquons qu'alors D', S', A commutent. Ainsi tout sous espace du type $Ker(P(A))$, où P est un polynôme à coefficients réels, est stable par D' et S' .

Ceci implique que $P^{-1}D'P, P^{-1}S'P$ sont diagonales par blocs et commutent donc avec D (et A), donc S .

En résumé, D, S, D', S' sont des matrices à coefficients réels commutant deux à deux, diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$, donc simultanément diagonalisables dans $M_n(\mathbb{C})$. De plus

$$D' - D = S - S'.$$

Il suffit alors de diagonaliser simultanément ces quatre matrices et de remarquer que le spectre de $D' - D$ est réel et que celui de $S - S'$ est imaginaire pur pour conclure. \square

A.3 Un résultat de réduction simultané

Proposition A.3.1 *Si E_1, \dots, E_m sont m matrices de $M_n(\mathbb{R})$ commutant deux à deux et que D_1, \dots, D_m (resp $S_1, \dots, S_m, N_1, \dots, N_m$) désignent leurs parties diagonalisables réelles (resp semi-simples imaginaires, nilpotentes) respectives alors,*

1. Les matrices D_1, \dots, D_m sont elles aussi m matrices commutant deux à deux. Les matrices D_1, \dots, D_m sont donc simultanément diagonalisables.
2. De plus les matrices E_1, \dots, E_m (resp $S_1, \dots, S_m, N_1, \dots, N_m$) sont toutes dans le commutant des matrices D_1, \dots, D_m .

Pour démontrer cette proposition on va démontrer le lemme suivant,

Lemme A.3.2 *Si M et M' sont deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$ qui commutent, alors leurs parties diagonalisables réelles, semi-simples imaginaires et nilpotentes commutent toutes deux à deux.*

Preuve. La démonstration se fait en deux étapes

1. **La partie semi simple $A = D + S$ de M et M' commutent**

Montrons que A et M' commutent.

On écrit \mathbb{C}^n comme somme directe des sous espaces caractéristiques de M , qui sont par ailleurs stables par M' .

Sur chaque sous espace caractéristique, A est une homothétie donc commute avec M' .

Par somme directe A commute donc avec M' . Ceci implique aussi que N commute avec M' .

2. **Les matrices D et S commutent avec M'**

On réduit A sous forme réelle de Jordan et on utilise les notations de la proposition A.2.5; On remarque que les sous espaces propres de D, V_1, \dots, V_p , correspondent tous à des sommes directes du type :

$$V_l = \bigoplus_{k \leq s_l} \text{Ker}(M^2 - 2\alpha_l M + (\alpha_l^2 + \beta_{l,k}^2) \text{Id})^{r_{l,k}} \oplus \text{Ker}(M - \alpha_l \text{Id})^{r_l}$$

stables donc par M' .

En restreignant M' et D à chaque espace propre de D on voit bien que M' et D commutent.

Comme A et M' commutent, c'est alors aussi le cas pour S et M' .

□

Annexe B

Rappels sur la mesure de Haar

Tous les résultats rappelés ici sont assez classiques (voir par exemple [Nach68] ou [Fol95]).

B.1 Quelques définitions

Définition B.1.1 Si \mathcal{H} est un groupe localement compact, on appelle mesure de Haar à gauche sur \mathcal{H} toute mesure de Radon non nulle μ , invariante par translation à gauche, c'est à dire vérifiant,

$$\forall B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall h \in \mathcal{H}, \mu(h * B) = \mu(B).$$

De manière générale, tout groupe localement compact possède une mesure de Haar à gauche. De plus deux mesures de Haar à gauche sur un groupe localement compact donné sont proportionnelles.

On définit de même la notion de mesure de Haar à droite de \mathcal{H} , comme étant une mesure de Radon non nulle sur \mathcal{H} , invariante par translation à droite.

En pratique pour montrer qu'une mesure donnée est une mesure de Haar à gauche sur un groupe localement compact donné, on utilise la caractérisation suivante, rappelée dans [Fol95] (Proposition 2.9 (b)) :

Proposition B.1.2 La mesure $\mu_{\mathcal{H}}$ est une mesure de Haar à gauche sur le groupe localement compact \mathcal{H} ssi,

Pour toute fonction f continue à support compact sur \mathcal{H} , à valeurs positives et tout h_0 de \mathcal{H} :

$$\int_{\mathcal{H}} f(h_0 * h) d\mu_{\mathcal{H}}(h) = \int_{\mathcal{H}} f(h') d\mu_{\mathcal{H}}(h').$$

Remarque B.1.3 On a un énoncé similaire en ce qui concerne les mesures de Haar à droite sur un groupe localement compact donné.

Remarque B.1.4 En toute généralité, les notions de mesure de Haar à gauche et de mesure de Haar à droite d'un groupe localement compact ne coïncident pas.

Lorsque toute mesure de Haar à gauche est une mesure de Haar à droite (l'inverse est alors aussi vrai), le groupe est dit unimodulaire.

Exemple B.1.5 *Les groupes commutatifs sont unimodulaires.*

Par exemple, le groupe $(\mathbb{R}_+^*, *)$ est unimodulaire. On peut montrer par la proposition B.1.2 que $\frac{da}{a}$ est une mesure de Haar de ce groupe.

Tout groupe compact est lui aussi unimodulaire.

B.2 Un lemme de changement de variable

On utilisera le lemme de changement de variable que l'on rappelle :

Lemme B.2.1 *Soient \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 deux groupes localement compact. Soit ϕ un isomorphisme bicontinu du groupe \mathcal{H}_1 dans le groupe \mathcal{H}_2 .*

Si f est une fonction intégrable sur \mathcal{H}_2 , alors $f \circ \phi$ est intégrable sur \mathcal{H}_1 et il existe une certaine constante positive C indépendante de la fonction f choisie telle que,

$$\int_{\mathcal{H}_2} f(h_2) d\mu_{\mathcal{H}_2}(h_2) = C \int_{\mathcal{H}_1} (f \circ \phi)(h_1) d\mu_{\mathcal{H}_1}(h_1).$$

Remarque B.2.2 *Ce lemme va ici servir à expliciter une intégrale de Haar d'un groupe à m paramètres. Il sera aussi utile lors de la construction proprement dite du champ recherché.*

B.3 Mesure de Haar d'un groupe commutatif à m paramètres

B.3.1 Isomorphisme entre groupe commutatif à m paramètres et $(\mathbb{R}_+^*)^m$

Proposition B.3.1 *Si l'hypothèse 8.4.1 est vérifiée, l'application*

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m},$$

est un isomorphisme bicontinu de $(\mathbb{R}_+^)^m$ dans \mathcal{A} .*

Remarque B.3.2 *L'application*

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m},$$

est toujours un homomorphisme continu et surjectif de $(\mathbb{R}_+^)^m$ dans \mathcal{A} , mais cette application peut ne pas être injective.*

C'est par exemple le cas si on considère le groupe à un paramètre \mathcal{A} ,

$$\mathcal{A} = \{\theta^E, \theta \in \mathbb{R}_+^*\} \text{ avec } E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

qui n'est rien d'autre que le groupe orthogonal $O_2(\mathbb{R})$.

Ici la matrice E a une partie diagonalisable réelle nulle et donc l'hypothèse 8.4.1 n'est pas vérifiée. Dans ce cas particulier, le groupe \mathcal{A} n'est pas isomorphe à \mathbb{R}_+^ .*

Les résultats que l'on va énoncer permettant de classer tous les homomorphismes continus d'un groupe \mathcal{A} vérifiant l'hypothèse 8.4.1 et l'expression que l'on va donner de la mesure de Haar d'un tel groupe \mathcal{A} ne vont donc pas être valables dans ce cas particulier.

Preuve. Il s'agit tout d'abord de montrer l'injectivité de l'application,

$$(a_1, \dots, a_m) \in (\mathbb{R}_+^*)^m \mapsto a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m} = \exp(\log(a_1)E_1 + \dots + \log(a_m)E_m).$$

Comme la famille (E_1, \dots, E_m) est libre, cela revient à montrer l'injectivité de l'application exponentielle,

$$\exp : V \in \mathcal{V} \mapsto \exp(V) \in \mathcal{A}.$$

Soient donc V et V' deux matrices de \mathcal{V} telles que $\exp(V) = \exp(V')$. Notons D_V et $D_{V'}$ les parties diagonalisables réelles respectives de V et V' . Comme

$$\exp(V) = \exp(V'),$$

par unicité de la décomposition de Jordan multiplicative complète d'une matrice ([Helg78]), les parties hyperboliques $\exp(D_V)$ et $\exp(D_{V'})$ respectives des matrices $\exp(V)$ et $\exp(V')$ sont égales,

$$(B.3.1) \quad \exp(D_V) = \exp(D_{V'}).$$

Comme les matrices E_1, \dots, E_m commutent deux à deux, V et V' commutent, donc D_V et $D_{V'}$ aussi.

L'équation B.3.1 devient :

$$\exp(D_V - D_{V'}) = Id.$$

Or D_V et $D_{V'}$ sont co-diagonalisables dans $M_n(\mathbb{R})$. Donc

$$D_V - D_{V'} = PDP^{-1},$$

avec D diagonale, pour une certaine matrice P à coefficients réels. La relation $\exp(D) = Id$ implique donc $D = 0$, soit $D_V = D_{V'}$.

On conclut alors en utilisant l'unicité de la décomposition de D_V dans la base (D_1, \dots, D_m) . On remarque que si

$$V = \lambda_1 E_1 + \dots + \lambda_m E_m$$

on a

$$D_V = \lambda_1 D_1 + \dots + \lambda_m D_m$$

L'unicité de la décomposition de D_V dans la base (D_1, \dots, D_m) implique donc l'unicité de la décomposition de V dans la base (E_1, \dots, E_m) .

L'application

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m}$$

est donc un isomorphisme, trivialement de classe \mathcal{C}^∞ . Par un théorème d'inversion globale elle est alors bicontinue. \square

B.3.2 Intégration sur un groupe à m paramètres \mathcal{A}

Soit \mathcal{A} un groupe à m paramètres de la forme 8.5.2, vérifiant l'hypothèse 8.4.1. On sait par la proposition B.3.1 que ce groupe est isomorphe à $(\mathbb{R}_+^*)^m$ ce qui va permettre d'en expliciter une mesure de Haar.

Commençons tout d'abord en appliquant la proposition B.1.2, à expliciter une mesure de Haar du groupe $((\mathbb{R}_+^*)^m, \times)$,

$$d\mu_{(\mathbb{R}_+^*)^m}(a_1, \dots, a_m) = \frac{da_1}{a_1} \times \dots \times \frac{da_m}{a_m}.$$

On peut alors en déduire l'expression de l'intégrale d'une fonction intégrable sur le groupe \mathcal{A} en appliquant le lemme de changement de variable Cela permet d'en déduire,

Proposition B.3.3 *Soit \mathcal{A} un groupe à m paramètres de la forme 8.5.2, vérifiant l'hypothèse 8.4.1, alors il existe une constante positive C telle que pour toute fonction continue à support compact sur \mathcal{A} à valeurs positives,*

$$\int_{\mathcal{A}} f(A) d\mu_{\mathcal{A}}(A) = C \int_{(\mathbb{R}_+^*)^m} f(a_1^{E_1} \dots a_m^{E_m}) \frac{da_1}{a_1} \times \dots \times \frac{da_m}{a_m},$$

la mesure $\mu_{\mathcal{A}}$ désignant une mesure de Haar queconque sur le groupe \mathcal{A} .

Remarque B.3.4 *Ce résultat est faux si l'hypothèse 8.4.1 n'est pas vérifiée. Considérons par exemple la matrice E ,*

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

et le groupe à un paramètre

$$\mathcal{A} = \{\theta^E, \theta \in \mathbb{R}_+^*\},$$

qui est le groupe des rotations $O_2(\mathbb{R})$.

La mesure $\frac{d\theta}{\theta}$ n'est alors pas une mesure de Haar de $O_2(\mathbb{R})$. En effet ce n'est pas une mesure finie. Or le groupe $O_2(\mathbb{R})$ est compact, ce qui est contradictoire.

Ici la proposition ne s'applique pas car, le groupe \mathcal{A} n'est pas isomorphe à \mathbb{R}_+^* .

Preuve. La démonstration découle directement de la proposition B.3.1. □

Annexe C

Estimations de normes matricielles

C.1 Un lemme d'estimation dans le cas des groupes à un paramètre

On rappelle tout d'abord la notion de rayon spectral d'une matrice :

Définition C.1.1 Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, on définit le rayon spectral de la matrice M que l'on note $\rho(M)$ par,

$$\rho(M) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in Sp(M)\}.$$

On peut ensuite énoncer la proposition suivante qui est une reformulation d'un résultat assez classique (Proposition 2.1 de [MM94], voir aussi la version plus précise de [BL07]) :

Proposition C.1.2 Soit E une matrice de $M_n(\mathbb{R})$, de partie diagonalisable réelle D , et un réel positif ε .

Il existe $\|\cdot\|_{\varepsilon, E}$, norme matricielle subordonnée de \mathbb{R}^n , dépendant de ε et E , $C_1(\varepsilon)$ et $C_2(\varepsilon)$, des constantes positives ne dépendant que de ε telle que :

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, C_1(\varepsilon)\rho(a^D) \min(a^\varepsilon, a^{-\varepsilon}) \leq \|a^E\|_{\varepsilon, E} \leq C_2(\varepsilon)\rho(a^D) \max(a^\varepsilon, a^{-\varepsilon})$$

($\rho(M)$ désigne ici le rayon spectral de la matrice M)

Remarque C.1.3 Ce lemme signifie que lorsqu'on considère un groupe à un paramètre \mathcal{A} , la norme (bien choisie) de toute matrice a^E du groupe \mathcal{A} , est à peu de chose près, de l'ordre du rayon spectral de sa partie hyperbolique a^D :

$$\|a^E\| \approx \rho(a^D),$$

pour tout réel positif a .

L'évolution de la norme de a^E en fonction de a dépendra donc du signe des parties réelles des valeurs propres de E .

C.2 Le cas des groupes à m paramètres

Lorsqu'on va étudier le cas où \mathcal{A} est un groupe à m paramètres, on a une proposition similaire à la proposition C.1.2,

Proposition C.2.1 *Soit E_1, \dots, E_m m matrices à coefficients réels, de parties diagonalisables respectives D_1, \dots, D_m .*

Si $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre sur $M_n(\mathbb{R})$, alors pour tout réel positif ε il existe une constante $C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m)$ ne dépendant que des matrices E_1, \dots, E_m et du réel ε telle que pour tous réels positifs a_1, \dots, a_m :

$$\|a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}\| \leq C(\varepsilon, E_1, \dots, E_m) \prod_{\ell=1}^m \rho(a_\ell^{D_\ell}) \max(a_\ell^\varepsilon, a_\ell^{-\varepsilon})$$

Preuve. La norme $\|\cdot\|$ étant une norme d'algèbre on a :

$$(C.2.1) \quad \|a_1^{E_1} \cdots a_m^{E_m}\| \leq \prod_{\ell=1}^m \|a_\ell^{E_\ell}\|$$

Or pour tout ℓ , la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\varepsilon, E_\ell}$ issue du lemme ??, donc il existe une constante $K(\varepsilon, E_\ell)$ ne dépendant que de ε et de E_ℓ :

$$(C.2.2) \quad \|a_\ell^{E_\ell}\| \leq K(\varepsilon, E_\ell) \|a_\ell^{E_\ell}\|_{\varepsilon, E_\ell} \leq C(\varepsilon, E_\ell) \rho_{\max}(a_\ell^{E_\ell}) \max(a_\ell^\varepsilon, a_\ell^{-\varepsilon})$$

La combinaison des équations C.2.1 et C.2.2 permet d'en déduire le résultat désiré. □

Bibliographie

- [AB02] J. AOUIDI, M. BEN SLIMANE (2002) Multifractal formalism for quasi self-similar functions, *J. Statist. Phys.* 108 541–589 .
- [ABCLV05] A. AYACHE, A. BENASSI, S. COHEN, J. LÉVY-VÉHEL (2005) Regularity and identification of Generalized Multifractal Gaussian Processes, *Séminaire de probabilité*
- [ABM95] A. ARNEODO, E. BACRY, J.-F. MUZY (1995) The thermodynamics of fractals revisited with wavelets, *Physica A*, Vol. 213, 232–275.
- [Adl81] R.J. ADLER (1981) The Geometry of Random Field, *John Wiley and Sons*.
- [ADR00] A. ARNEODO, N. DECOSTER, S.G. ROUX (2000). A wavelet-based method for multifractal image analysis. I. Methodology and test applications on isotropic and anisotropic random rough surfaces. *European Physical Journal B* 15, 567–600.
- [AGL02] P. ABRY, P. GONCALVES, J. LÉVY VÉHEL (2002) Lois d'échelle, fractales et ondelettes, (1) *Hermès*
- [AJ02] J.-M. AUBRY ET S. JAFFARD (2002) Random wavelet series. *Communications in Mathematical Physics*, 227 (3) 483–514.
- [AJL04] P. ABRY, B. LASHERMES, S. JAFFARD (2006) Wavelets Leaders in Multifractal Analysis, Wavelets Analysis and Applications Tao Qian, Mang I. Vai and Xu Yuesheng Eds, Applied and Numerical Harmonic Analysis 219–264 *Birkhäuser Verlag Basel/Switzerland*
- [AJT07] A. AYACHE S. JAFFARD M.S. TAQQU (2007) Wavelet construction of Generalized Multifractal Processes *Submitted*
- [AJVW08] P. ABRY, S. JAFFARD, B. VEDEL, H. WENDT (2008) The contribution of wavelets in multifractal analysis, *Submitted*.
- [ALP02] A. AYACHE, S. LÉGER, M. PONTIER (2002) Drap Brownien Fractionnaire *Pot. Anal.* 17 31–43,
- [ALV99] A. AYACHE, J. LÉVY-VÉHEL (1999) Generalized Multifractal Brownian Motion : definition and preliminary results In M. Dekking, J. Lévy-Véhel, E. Lutton and C. Tricot (eds) Fractals Theory and applications in engineering *Springer* 17–32
- [ALV00] A. AYACHE, J. LÉVY-VÉHEL (2000) The Generalized Multifractal Brownian Motion *Statistical Inference for Stochastic Processes* 3 7–18
- [Bar99] J. BARRAL (1999) Moments, continuité et analyse multifractale des martingales de Mandelbrot *Prob. Theo. Rel. Fields* 113 535–569.
- [Bar00] J. BARRAL (2000) Continuity of the multifractal spectrum of a random statistically self-similar measures *J. Theor. Probab.* 13 1027–1060.
- [BarBer06] J.M. BARDET, P. BERTRAND (2006) Definition, properties and Wavelets analysis of Multiscale Fractional Brownian Motion *Submitted*

- [BarBer08] J.M.BARDET, P.BERTRAND (2008) Wavelet analysis of a continuous-time Gaussian Process observed at random times and its application to the estimation of the spectral density. *En préparation*.
- [BarSeur05] J.BARRAL, S.SEURET (2005) From Multifractal Measures to Multifractal Wavelets Series *J.Fourier Anal. Appl.* 11(5) 589–614.
- [BBP03] J.BARRAL, F.BEN NASR, J.PEYRIÈRE (2003) Comparing Multifractal Formalisms : The Neighboring Boxes Condition *Asian J.Math.* 7(2) 149–166.
- [BenDeg99] A.BENASSI, S.DEGUY (1999) Multi-scale Fractional Motion : definition and identification *Preprint LAIC*
- [BDG06] B. BOUFOUSSI, M. DOZZI, R. GUERBAZ (2006) Sample path properties of the local time of multifractional Brownian motion *Preprint*
- [BDM88] M. F. BARNESLEY, R. L. DEVANEY, B. B. MANDELBROT, H. O. PEITGEN, D. SAUPE, R. F. VOSS. (1988) The Science of Fractal Images. *Springer-Verlag*
- [BE03] A. BONAMI, A. ESTRADE (2003) Anisotropic analysis of some Gaussian models, *The Journal of Fourier Analysis and Applications* 9 215–236.
- [Ben06] D. BENSON, M.M. MEERSCHAERT, B. BÄUMER, H.P. SCHEFFLER (2006) Aquifer Operator- Scaling and the effect on solute mixing and dispersion *Water Resour.Res.* 42 W01415,1–18.
- [Ber72] S.M.BERMAN (1972) Gaussian sample functions : uniform dimension and Hölder conditions nowhere *Nagoya Math J.* 46 63–86 .
- [Ber73] S.M.BERMAN (1973) Local Nondeterminism and Local Times of Gaussian Processes *Indiana University Mathematics Journal* 23(1) 69–86.
- [Ber88] S.M.BERMAN (1988) Spectral conditions for non local determinism *Stoch.Processes and Applications* 27 73–84.
- [Ber91] S.M.BERMAN (1991) Self intersections and non local determinism of Gaussian processes *Ann.Prob.* 19 160–191.
- [BH05] M.BOWNIK, K.P.HO (2005) Atomic and molecular decomposition of anisotropic Triebel-Lizorkin spaces *Trans of Amer Math Soc* 358(4) 1469–1510.
- [Bill68] P.BILLINGSLEY (1968) Convergence of probability measure *John Wiley and sons*.
- [BIN75] BESOV, IL'IN, NIKOLSKIJ (1975) Integral representation of functions and embedding theory (Russian) *Nauka Moscow*
- [BJR97] A.BENASSI, S.JAFFARD, D.ROUX (1997) Elliptic Gaussian random processes *Revista Matematica Iberoamericana* 13(1) 19–90.
- [BL07] H. BIERMÉ, C. LACAUX (2007) Hölder regularity for operator scaling stable random fields *Submitted*
- [BMP92] G.BROWN, G.MICHON, J.PEYRIÈRE (1992) On the multifractal analysis of measures *J.of Stat.Phys.* Vol 66(3–4) 775–790.
- [BMS07] H. BIERMÉ, M.MEERSCHAERT, H.P. SCHEFFLER (2007) Operator Scaling Stable Random Fields *Stochastic Processes and Applications* 117 312–332.
- [BouschHeurt99] T.BOUSCH, Y. HEURTEAUX (1999) On oscillations of Weierstrass-type functions *Manuscript*.

- [BouschHeurt00] T. BOUSCH, Y. HEURTEAUX (2000) Caloric measure on domains bounded by Weierstrass type graphs *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* 25(2) 501–522.
- [Bow05] M. BOWNIK (2005) Atomic and molecular decomposition of anisotropic Besov spaces *Math Z.* 250 539–571.
- [Bru70] Y. BRUDNYI (1970) Approximation of functions of n -variables by quasi-polynomials *Math. USSR Izv.* 4 568–586.
- [Cald58] A. P. CALDERON (1958) Singular integrals *Course notes of lectures given at the M.I.T. 1958–1959.*
- [CaldZyg61] A. P. CALDERON, A. ZYGMUND (1956) Local properties of solutions of elliptic partial differential equations *Studia Math.* 20 171–225.
- [Chris72] J. CHRISTENSEN (1972) On sets of Haar measure zero in Abelian Polish groups, *Israel J. Math.* 13 255–260.
- [Ciez61] Z. CIEZELSKI (1961) Hölder conditions for realisations of Gaussian processes *Trans. of Amer. Soc.* 99 403–413.
- [CK92] P. COLLET AND F. KOUKIOU (1992) Large deviations for multiplicative chaos *Commun. Math. Phys.* 147 329–342.
- [CKR93] Z. CIESIELSKI, G. KERKYACHARIAN, B. ROYNETTE (1993) Quelques espaces fonctionnels associés à des processus gaussiens *Stud. Math.* 107(2) 171–204.
- [Col93] J. J. COLLINS, C. J. DE LUCA (1993) Open loop and closed loop control of posture : a random walk analysis of center of pressure trajectories *Exp. Brain Research* 9 308–318.
- [CuzDuP82] J. CUZICK, J. DUPREEZ (1982) Joint continuity of Gaussian local times. *Ann. Probab.* 10 810–817.
- [Dac03] S. DACHKOWSKI (2003) Anisotropic functions spaces and related semi-linear hypoelliptic equations *Math. Nachr.* 248–249 40–61.
- [DemTric06] Y. DEMICHEL, C. TRICOT (2006) Analysis of fractal sum of pulses *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 141 355–370.
- [DevPop88] R. A. DEVORE, V. A. POPOV (1988) Interpolation of Besov Spaces *Trans. Amer. Math. Soc.* 305 397–414.
- [DevSharp84] R. A. DEVORE, R. C. SHARPLEY (1984) Maximal functions measuring smoothness *Memoirs of the American Mathematical Society* 47(293).
- [DH99] S. DAVIES, P. HALL (1999). Fractal analysis of surface roughness by using spatial data (with discussion). *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B* 61 3–37.
- [Din96] P. DINTELMANN (1996) On Fourier multipliers between Besov spaces with $0 < p_0 < \min(1, p_1)$. *Anal. Math.* 22 113–123.
- [DLM98] K. DAOUDI, J. LÉVY-VÉHEL, Y. MEYER (1998) Construction of Continuous Functions with Prescribed Local Regularity *Constr. Approx.* 14 349–385.
- [Doob90] J. L. DOOB (1990) Stochastic Processes *Wiley Classics Library*
- [Falc90] K. FALCONER (1990) Fractal Geometry *Ed John Wiley and Sons*
- [Falc02] K. FALCONER (2002) Tangent Fields and the local structure of random fields *J. Theo. Prob.* 15 : 731–750.
- [Falc03] K. FALCONER (2003) The local structure of random processes *J. London Math. Soc* 67 657–672.

- [Far00] W.FARKAS (2000) Atomic and subatomic decompositions in anisotropic function spaces. *Math.Nach.* 209 83–113.
- [FJW91] M.FRAZIER, B.JAWERTH, G.WEISS (1991) Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces, CBMS Regional Conference Ser., 79, *American Math. Society*
- [FP85] U. FRISCH, G. PARISI (1985) On the singularity spectrum of fully developed turbulence, *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, Proceedings of the International Summer School in Physics Enrico Fermi*, North Holland 84–87 (1985).
- [Fri95] U.FRISCH(1995) The legacy of A.N.Kolmogorov *Cambridge University Press*
- [Fol95] G.B. FOLLAND A Course in Abstract Harmonic Analysis *CRC Press*.
- [FraJaw85] M.FRAZIER, B.JAWERTH (1985) Decomposition of Besov spaces. *Indiana U. Math. J.* 34 777–799.
- [FraJaw88] M.FRAZIER, B.JAWERTH (1988) The φ -transform and applications to distribution spaces. *Lecture Notes in Math., 1302, Springer, Berlin Heidelberg*, 223–246.
- [FraJaw89] M.FRAZIER, B.JAWERTH (1989) A Discrete Transform and Decomposition of Distribution Spaces. *J. Funct. Anal.* 93 34–170.
- [GH80] D.GEMAN, J.HOROWITZ (1980) Occupation densities *Anal.Prob.* 8 1–67.
- [GV67] I. M. GUELFAND, N. Y. VILENKIN (1967) Les Distributions : Applications de l'Analyse Harmonique (4), *Dunod*.
- [Har16] G.H.HARDY (1916) Weierstrass's non differentiable function *Trans.Amer.Math.Soc.* 17 301–325.
- [Helg78] S.HELGASON (1978) Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces *Academic Press*.
- [Her97] V.HERREN (1997) Lévy-type Processes and Besov Spaces *Pot.Anal.* 7 689–704.
- [Heurt03] Y.HEURTEAUX (2003) Weierstrass function with random phases *Trans.Amer.Math.Soc.* 355(8) 3065–3077.
- [Heurt05] Y.HEURTEAUX (2005) Weierstrass function in Zygmund's class *Proc.Amer.Math.Soc.* 133(9) 2711–2720.
- [HM82] W.N.HUDSON, J.D.MASON (1982) Operator-self-similar processes in a finite dimensional space *Trans.Amer.Math.Soc.* 34 3–35.
- [HuLau90] T.Y.HU, K.S.LAU (1990) The sum of Rademacher functions and Hausdorff dimension *Math.Proc.Camb.Phil.Soc.* 108 97–103.
- [HuLau93] T.Y.HU, K.S.LAU (1993) Fractal dimensions and singularities of the Weierstrass type functions *Trans.Amer.Math.Soc.* 335 649–665.
- [HW92] R. HOLLEY AND E.C. WAYMIRE (1992) Multifractal dimensions and scaling exponents for strongly bounded random cascades *Ann. Appl. Probab.* 2 819–845.
- [GH80] D.GEMAN, J.HOROWITZ (1980) Occupation densities *Anal.Prob.* 8 1–67.
- [Jaf92] S.JAFFARD (1992) Wavelets Methods for fast resolution of elliptic problems *SIAM J.Numer.Anal.* 29(4) 965–986.
- [Jaf94] S.JAFFARD (1994) Wavelets and non linear analysis.
- [Jaf96] S. JAFFARD(1996) The spectrum of singularities of Riemann's function *Rev. Mat. Iberoamericana* 12 441–460.

- [Jaf97] S. JAFFARD(1997) Multifractal formalism for functions *SIAM J. Math. Anal.* 28 944–998.
- [Jaf98] S.JAFFARD (1998) Sur la dimension de boîte des graphes *CRAS* 326 555–560.
- [Jaf98a] S.JAFFARD (1998) Oscillation spaces : Properties and applications to fractal and multifractal functions *J.Math.Phys* 39 4129–4141.
- [Jaf99] S. JAFFARD(1999) The multifractal nature of Lévy processes. *Probability Theory and Related Fields* 114 207–227.
- [Jaf00] S.JAFFARD (2000) Construction of functions with prescribed Hölder and chirps exponents *Revista Matemática Iberoamericana* 16(2) 331–349.
- [Jaf00a] S. JAFFARD(2000) On lacunary wavelet series. *The Annals of Applied Probability* 10(1) 313–329.
- [Jaf04] S.JAFFARD (2004) Wavelet techniques in multifractal analysis ,fractal geometry and applications ,*Proc.Symp.Pure Math. AMS Providence ,RI.*
- [Jaf04a] S.JAFFARD (2004)On Davenport expansions ,*Proc.Symp.Pure Math. AMS Providence ,RI.*
- [Jaf07] S.JAFFARD (2007) Gabor-Wavelet transform and Hölder irregularity *Submitted*
- [JafMan95] S.JAFFARD,B.MANDELBROT (1996) Local regularity of non smooth Wavelet expansions and application to the Polya function *Advances in Math.* 120 265–282.
- [JafMey96] S.JAFFARD, Y.MEYER (1996) Wavelets Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions *Memoirs of the American Mathematical Society* 123(587).
- [JafNico08] S.JAFFARD, S.NICOLAY Pointwise smoothness of space-filling functions *ACHA to appear*
- [Kah85] J.P. KAHANE (1985) Some random series of functions *Cambridge University Press.*
- [Kah86] J.P.KAHANE (1986) Geza Freud and lacunary Fourier series *Journal of approximation theory* 46(1) 51–57.
- [Kah91] J.P.KAHANE (1991) Produits de poids aléatoires et indépendants et applications *Fractal Geometry and Analysis Bélaïr J. and Dubuc S. Eds* 277–324.
- [KahPey76] J.P.KAHANE, J.PEYRIÈRE (1976) Sur certaines martingales de Benoit Mandelbrot *Adv.Math.* 22 131–145.
- [Kam96] A. KAMONT (1996) On the Fractional Anisotropic Wiener Field *Prob. and Math. Stat.* 16(1) 85–98.
- [KarShr98] I.KARATZAS, S.E.SHREVE (1988) Brownian Motion and stochastic calculus *Springer-Verlag.*
- [Khin24] A.KHINTCHINE Ein satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung *Fund.Math.* 6 9–20.
- [KK96] L. M. KAPLAN, C. C. J. KUO. (1996) An Improved Method for 2-D Self-Similar Image Synthesis. *IEEE Trans. on Image Processing* 5(5) 754–761.
- [KMY84] J.L.KAPLAN,J.MALLET-PARET,J.A.YORKE (1984) The Lyapounov dimension of a nowhere differentiable torus, *Ergodic Theory Dynamical Systems* 4 261–281
- [Kolm40] A.N.KOLMOGOROV (1940) Wiener'sche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS* (26) 115–118.

- [KR03] S. KOŁODYŃSKI, J. ROSIŃSKI (2003) Group Self-Similar Stable Processes in \mathbb{R}^d *J. Theor. Prob.* 16(4) 855–876.
- [KamWol99] A.KAMONT, B.WOLNIK (1999) Wavelets expansions and Fractal Dimensions *Constr.Approx.* 15 97–108.
- [Led92] F.LEDRAPPIER (1992) On the dimension of some graphs *Contemp.Math.* 135 285–293.
- [Li06] X.LI (2006) Etude du Processus de Mumford *Thèse, ENS de Cachan.*
- [Lif95] M.A. LIFSHITS (1995) Gaussian Random Functions *Kluwer Academic Publishers.*
- [LionsMag68] J.L.LIONS,E.MAGENES (1968) Problèmes aux limites homogènes et applications (1) *Ed Dunod.*
- [Lind93] T. LINDSTRÖM (1993) Fractional Brownian Fields as Integrals of White Noise *Bull London Math. Soc.* 25 83–88.
- [LP99] S. LÉGER, M. PONTIER (1999) Drap Brownien Fractionnaire, *C.R. Acad.Sci.Paris Sér I Math.* 329 893–898.
- [LR82] R.LAHA,V.ROHATGI (1982) Operator self-similar processes in \mathbb{R}^d *Stoch.Proc.Appl.* 12 73–84.
- [LT85] P. LANCASTER, M. TISMENETSKY (1985) The Theory of Matrices *Academic Press.*
- [LV97] J. LÉVY VÉHEL (1997) Fractals in engineering : From theory to industrial applications. *Springer, New York.*
- [LVPel95] J.LÉVY-VEHEL,R.F.PELTIER (1995) Multifractional Brownian Motion : Definition and preliminary results *Rapport de recherche de l'INRIA n°2645.*
- [MacMul84] C.MAC-MULLEN (1984) The Hausdorff dimension of general Sierpinski carpets *Nagoya.Math.J.* 96 1–9.
- [Man74] B.B. MANDELROT (1974) Intermittent turbulence in self-similar cascades : divergence of high moments and dimension of the carrier *J. Fluid Mech.* 62 331–358.
- [Mel02] C.MELOT (2002) Sur les singularités oscillantes et le formalisme multifractal *Thèse de l'Université Paris XII.*
- [Mey90] Y.MEYER (1990) Ondelettes et opérateurs *Hermann.*
- [Mich89] G.MICHON (1989) Une construction des mesures de Gibbs sur certains ensembles de Cantor, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 308 315–318 .
- [Mich93] G.MICHON (1993) Mesures de Gibbs sur les Cantor Réguliers *Ann. Inst. Henri Poincaré, Phys. Théor.* 58(3) , pp. 267–285 .
- [Mil71] P.W.MILLAR (1971) Path Behavior of Processes with Stationary Independent Increments *Z.Wahr.verw.Geb.* 17 53–73.
- [MLS97] F.MOLZ, H. LIU, J. SZULGA (1997), Fractional Brownian motion and fractional Gaussian noise in subsurface hydrology : A review, presentation of fundamental properties, and extensions. *Water Resour. Res.* 33(10) 2273–2286.
- [MM94] M.MAEJIMA,J.D.MASON (1994) Operator-self-similar stable processes. *Stochastic Processes Appl.* 54 139–163.
- [Mol96] G.M.MOLCHAN (1996) Scaling exponents and multifractals dimensions for independent random cascades *Comm.Math.Phys.* 179 681–702.

- [MR95] D.MONRAD, H. ROOTZÉN (1995) Small values of Gaussian processes and functional laws of the iterated logarithm. *Probab. Theory Relat.Fields* 101 173–192.
- [MVN68] B.M.MANDELBROT, J. VAN NESS (1968) Fractional Brownian Motion, Fractional Noises and applications *Siam Review* 10 422–437.
- [MS98] M.M.MEERSCHAERT, H.P.SCHEFFLER (1998) Spectral decomposition for operator self-similar processes and theirs generalized domains of attractions *Stochastic Processes and their Applications* 84 71–80.
- [MS01] M.M.MEERSCHAERT, H.P. SCHEFFLER (2001) Limit Distributions for Sums of Independent Random Vectors *Wiley Series in Probability ans Statistics*.
- [MST99] Y.MEYER,F.SELLAN,M.S.TAQQU (1999) Wavelets, generalized white noise and fractional integration : The synthesis of Fractional Brownian Motion *J.Fourier Anal.Appl.* 5(5) 465–494.
- [MT86] R.MNEIMNÉ, F.TESTARD (1986) Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques, *Hermann*.
- [MW86] R.D.MAULDIN, S.C.WILLIAMS (1986) On the Hausdorff dimensions of some graphs *Trans.Amer.Math.* 298(2) 793–803.
- [Nach68] L.NACHBIN, The Haar Integral (1968)
- [Nik77] NIKOLS'SKIJ, S.M.(1977) Approximation of functions of several variables and embedding theorems (Russian). *Sec. ed., Moskva, Nauka* (First ed., Moskva, Nauka, 1969 ; English translation, Berlin, Springer, 1975).
- [Ols95] L.OLSEN (1995) A multifractal formalism *Adv.Math.* 116 82–195.
- [Par67] K.R.PARTHASARATHY (1967) Probability Measures on Metric Spaces *Academic Press*.
- [Per96] D.PERRIN (1996) Cours d'algèbre *Ellipses*.
- [Pes77] J.D.PESEK(1977) One point regularity properties of multiples Fourier series with gaps *Illinois Journal of Mathematics* 21(4) 871–882.
- [PGL85] P.G.LEMARIÉ-RIEUSSET (1985) Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières *Ann.Inst.Four.Grenoble* 35(4) 175–187.
- [PGL94] P.G.LEMARIÉ-RIEUSSET (1994) Projecteurs invariants, matrices de dialatation, ondelettes et analyses multi-résolutions *Revista Matematica Iberoamericana* 10(2) 283–347.
- [Pitt78] L. D. PITT (1978) Local times for Gaussian vector fields. *Indiana Univ. Math. J.* 27 309–330.
- [PittTran79] L.D.PITT, L.T.TRAN Local Sample Path Properties of Gaussian Fields *Ann Prob.* 7 477–493
- [Pon06] L. PONSON, D. BONAMY, H. AURADOU, G. MOUROT, S. MOREL, E. BOUCHAUD, C. GUILLOT, J.P. HULIN (2006) Anisotropic self-affine properties of experimental fracture surfaces *Int.J.Frac* 140 (1–4) 27–36.
- [PP87] P.P.PETRUSHEV,V.A.POPOV (1987) Rational approximation of real functions *Encyclopedia of mathematics*.
- [PrzyUrb89] F.PRZYTYCKI, M.URBANSKI On the Hausdorff dimension of some fractal sets *Studia Math.* 93, 155–186 (1989)

- [PTW98] V. PAXSON, M. S. TAQQU, W. WILLINGER (1998) Self-similarity and Heavy Tails : Structural Modeling of Network Traffic, in *A Practical Guide to Heavy Tails : Statistical Techniques and Applications*, Adler, R., Feldman, R., and Taqqu, M.S., editors, Birkhäuser, Boston, 27–53.
- [Roy92] B.ROYNETTE (1992) Mouvement Brownien et espaces de Besov *Stochastics and Stochastic Reports* 43 221–260.
- [ShioSeki90] Y.SHIOTA,T.SEKIGUCHI (1990) Hausdorff dimension of graphs of some Rademacher series *Japan J.Appl.Math.* 7 121–129.
- [SL85] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. (1985), Generalised scale invariance in turbulent phenomena, *Phys. Chem. Hydrodyn.* J.6,623–635.
- [SL87] SCHERTZER, D., LOVEJOY, S. (1987), Physically based rain and cloud modeling by anisotropic, multiplicative turbulent cascades, *J. Geophys. Res.*, 92(D8), 9693–9714.
- [Stein93] E.STEIN (1993) Harmonic Analysis *Princeton University Press*
- [ST87] SCHMEISSER, H.-J., TRIEBEL, H. (1987) Topics in Fourier Analysis and Function Spaces. *John Wiley and Sons*.
- [ST94] G.SAMORODNITSKY, M.S.TAQQU (1994) Stable Non-Gaussian Random Processes *Chapman and Hall*
- [Tran76]
- [Tric91] C. TRICOT (1991) Two definitions of fractional dimension, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 54–74.
- [Tric92] C.TRICOT (1992) Courbes et dimension fractale *Springer Verlag*
- [Tric97] C.TRICOT (1997) Function norms and fractal dimensions *SIAM J.Math.Anal.* Vol 28,N°1,pp 189-212
- [Trie83] H.TRIEBEL (1983) Theory of functions spaces *Birkhäuser Verlag*
- [Trie92] H.TRIEBEL (1992) Theory of functions spaces II *Birkhäuser Verlag*
- [Trie04] H.TRIEBEL (2005) Wavelets basis in anisotropic function spaces Proc. Function spaces, Differential operators and non linear analysis,FSDONA-04, Milovy,Czech Republic 2004. *Math.Inst.Aca.Sci.Czech Republic Praha*, 370-385
- [Trie06] H.TRIEBEL (2006) Theory of functions spaces III *Birkhäuser Verlag*
- [Ved04] B.VEDEL (2004) Règlement de la divergence infra-rouge dans des bases d'ondelettes adaptées, *Thèse Université de Picardie*
- [VTC87] N.N.VAKHANIA,V.I.TARIELADZE,S.A.CHOBANYAN (1987) Probability Distributions on Banach Spaces *D.Reidel Publishing Company*
- [WTT99] W.WILLINGER, M.S.TAQQU,V.TEVEROVSKY (1999) Stock Market Prices and long range dependence, *Finance and stochastics* 1 1–14.
- [Xiao97] Y. XIAO (1997) Hölder conditions for the local times and the Hausdorff measure of the level sets of Gaussian random fields. *Probab. Th. Rel. Fields* 109 129–157.
- [Xiao05] Y.XIAO (2005) Properties of Local Nondeterminism of Gaussian and Stable Random Fields and Their Applications *Ann.Fac.Sci.Toulouse XV* 157–193.
- [Xiao07] Y.XIAO (2007) Sample Path Properties of Anisotropic Gaussian Random Fields *Submitted*

- [Yag57] A. M. YAGLOM (1957) Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes. *Th. Probab. Appl.* 2, 273–320 .
- [Zyg68] A.ZYGMUND (1968) Trigonometric series *Cambridge Math Lib*

Table des figures

2.1	Fonction de Weierstrass classique	21
2.2	Fonction de Weierstrass modifiée	21
3.1	Mouvement Brownien Fractionnaire classique	90
3.2	Cas lacunaire	90
3.3	Quelques réalisations de Mouvements Browniens Fractionnaires Lacunaires Dya- diques d'indices de lacunarité différents	91
8.1	Représentation pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, t) fixé de la courbe $a_1 \mapsto a_1^{E_1} M$	225
8.2	Représentation pour un point M de coordonnées (x_1, x_2, t) fixé de la courbe $a_2 \mapsto a_2^{E_2} M$	226
8.3	Une réalisation du Drap Brownien Fractionnaire bidimensionnel d'indice de Hurst $H_1 = 0.6, H_2 = 0.4$	228
8.4	Un champ gaussien à accroissements stationnaires vérifiant une relation d'au- tosimilarité matricielle	230

Notations introduites

- $B_{p,q}^s(\mathbb{R}^d, E)$, espace de Besov anisotrope d'anisotropie E , 198
 $B_{\underline{H},\tau}$, Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire Dyadique, 89
 C_k , coefficients d'ondelettes, 25
 $E_\ell(f, \Omega)$, distance entre la fonction f et l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur à ℓ au sens de la norme L^∞ , 32
 $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions uniformément irrégulières d'exposant α , 21
 $I^\alpha(x_0)$, ensemble des fonctions anti-Höldériennes en x_0 , 111
 $I_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$, ensemble des fonctions θ uniformément irrégulière d'ordre M , 31
 P_{x_0} , polynôme de Taylor de la fonction f en x_0 , 105
 $S_0^{E_0}(\rho)$, sphère anisotrope, 188
 W_H , fonction de Weierstrass, 30
 $\Delta_h^M f(x)$, différence finie d'ordre M de la fonction f en x , 22
 $\delta^{p,q}(f)$, exposants, 29
 $\dim_{\mathcal{H}}(E)$, dimension de Hausdorff d'un ensemble E , 149
 λ , cube dyadique, 26
 $\lambda(i, j, k)$, cube dyadique, 26
 $C^s(\mathbb{R}^d, E)$, espace de Hölder anisotrope d'anisotropie E , 198
 $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(x_0)$, espace de Hölder ponctuel, 105
 $C^\alpha(\mathbb{R}^d)$, Espace de Hölder, 22
 $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, espace de Hölder, 22
 $\mathcal{C}^\alpha(x_0)$, espace de Hölder ponctuel, 105
 $\mathcal{C}_w^\alpha(x_0)$, ensemble des fonctions faiblement régulières en x_0 , 111
 $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$, espace de Hölder, 23
 $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$, complémentaire de l'ensemble $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, 30
 \mathcal{H}_f , exposant de Hölder uniforme, 19
 \mathcal{I}_f , exposant d'irrégularité uniforme de la fonction f , 29
 ω_{f,x_0}^M , module de régularité ponctuel d'ordre M de la fonction f , 106
 $\omega_f^M(\cdot)$, module de régularité uniforme d'ordre M de la fonction f , 22
 $\bar{h}_f(x_0)$, exposant de Hölder supérieur de la fonction f en x_0 , 111
 ψ^i , ondelette, 25
 ψ_λ , ondelette, 26
 $\psi_{j,k}^i$, ondelette, 25
 \underline{E}_H , ensembles iso-Höldériens inférieurs, 150
 $\underline{h}_f(x_0)$, exposant de Hölder inférieur, 105
 φ , ondelette, 25
 φ_k , ondelette, 25
 $\{B_{\omega,\mathbf{H},\sigma}(x)\}_{x \in \mathbb{R}^d}$, Mouvement Brownien Fractionnaire Multi-échelles, 87
 $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t \in \mathbb{R}^d}$, Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles Dyadiques, 87
 c_λ , coefficients d'ondelettes, 26
 $c_{j,k}^i$, coefficients d'ondelettes, 25
 d_λ , coefficient dominant, 110
 $d_j(x_0)$, coefficient dominant, 110
Dérivée de Peano d'ordre β de la fonction f en x_0 , 108

Index des auteurs

- Abry, 139, 151
Arnéodo, 150
Ayache, 88, 165, 166, 227
- Bacry, 150
Bardet, 86
Barral, 52, 157, 160
Baumer, 222, 228
Benassi, 84, 86, 93, 165, 166
Benson, 183, 222, 228
Berman, 61
Bertrand, 86
Besov, 197
Biermé, 183, 184, 187, 204, 221, 223, 228
Bonami, 183
Boufoussi, 165
Bousch, 137
Bownik, 197
Brown, 157
- Christenssen, 127
Cieselski, 59
Cohen, 166
Collins, 86
Cuzick, 61
- Daoudi, 143
Davies, 183
Deguy, 86
DeVore, 107
Dintelmann, 197
Dozzi, 165
DuPreez, 61
- Estrade, 183
- Falconer, 84, 85, 93
Farkas, 197
- Gerbaz, 165
- Hall, 183
Hardy, 103
Heurteaux, 137, 163
Hudson, 222
- Ilin, 197
- Jaffard, 23, 26, 84, 93, 110, 139, 141, 150, 151, 165
- Kamont, 183, 184, 223, 227
Kaplan, 137
Kerkyacharian, 59
Khintchine, 23
Kolmogorov, 226
Kolodynski, 237
- Lacaux, 184, 204
Laha, 222
Lashermes, 139
Lemarié, 187
Lévy-Véhel, 88, 143, 165, 166
Lindström, 226
Liu, 223
Lovejoy, 222
Léger, 223, 227
Lévy-Véhel, 165, 166
- Maejima, 222
Mallet-Paret, 137
Mandelbrot, 163, 226
Mason, 222
Meerschaert, 183, 187, 221–223, 228
Meyer, 23, 26, 143
Michon, 157, 163
Molz, 223
Monrad, 138
Muzy, 150
- Nicolay, 141

Nikolski, 197

Peltier, 165

Peyrière, 157

Pontier, 223, 227

Rohatgi, 222

Rootzen, 138

Rosinski, 237

Roux, 84, 93, 165

Roynette, 59

Scheffler, 183, 187, 221–223, 228

Schertzer, 222

Schmeisser, 197

Seuret, 52, 157, 160

Sharpley, 107

Szulga, 223

Taqqu, 165

Tricot, 27–29, 104, 110, 137

Triebel, 197

Van Ness, 226

Vedel, 151

Wendt, 151

Xiao, 61, 139, 184

Yorke, 137

Index des notions

- Algèbre \mathcal{M}^γ , 71
- Algèbre d'opérateurs $Op(\mathcal{M}^\gamma)$, 57
- Algèbres d'opérateurs $Op(\mathcal{M}^\gamma)$, 70
- Anti-Höldérienne, fonction, 104, 110, 111
- Autosimilarité
 - Locale suivant une famille d'échelles, 93
 - Matricielle, 183, 221, 222
 - Cas diagonal, 222
 - Par rapport à un groupe, 237
- Bases bi-orthogonales, 26
- Bases de Riesz, 26
- Cascade multiplicative, 163
- Champ Brownien Fractionnaire, 184, 226
 - Anisotrope, 183, 223
- Champ tangent, 93
 - Non unicité, 84
 - Unicité, 85, 93
- Champs aléatoires
 - Stables par autosimilarité matricielle, 183
- Champs gaussiens
 - Fortement localement non déterministes, 104
 - Lacunaires, 84
 - Localement non déterministes, 51, 104
- Coefficients d'ondelettes, 25
- Coefficients dominants, 110
- Contre-exemple, 36, 38
- Critère ondelettes de
 - Irrégularité uniforme, 33
 - Régularité Höldérienne, 26
 - Régularité ponctuelle forte, 110
- Dérivation fractionnaire, 70, 79
- Dérivée de Peano, 108
- Dimension de
 - Boite supérieure, 28
 - Hausdorff, 149
- Direction de renormalisation, 232, 243
- Drap Brownien Fractionnaire, 183, 184, 223, 226
- Décomposition de Jordan
 - Additive complète, 235
- Élément aléatoire, 127, 194
- Ensemble
 - $\mathcal{C}_w^\alpha(\mathbb{R}^d)$, 30
 - $\mathcal{C}_{\theta,w}^M(\mathbb{R}^d)$, 30, 31
 - $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, 29, 30
 - $I^\alpha(\mathbb{R}^d)$, relations d'inclusion, 31
- Ensemble $I_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$, 31
- Espace de
 - Besov, 28, 59, 71
 - Anisotrope, 184, 194, 197, 198, 201
 - Hölder
 - Anisotrope, 184, 198
 - Hölder $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R}^d)$, 22
 - Hölder $\mathcal{C}_{\theta,s}^M(\mathbb{R}^d)$, 23
 - Oscillations, 28
 - Sobolev
 - Anisotrope, 201
- Espace tangent, 93
- Exposant de
 - Champ gaussien aléatoire autosimilaire, 185
 - Hölder
 - Inférieur, 105
 - Supérieur, 111, 140
 - Uniforme, 19, 28
 - Irrégularité uniforme, 29
- Faiblement uniformément régulière, fonction, 21
- Fonction de

- Tagaki, 30, 53
- Type Weierstrass, 28, 51, 53, 104, 137, 141
- Weierstrass, 19, 21, 30, 53, 103
- Formalisme multifractal, 149, 150
 - Des mesures, 157
- Faible, 151, 158
- Généricité (au sens de Baire), 128
- Haar-nul (Ensemble), 127
- Hölderienne inverse, fonction, 104
- Hölderienne inverse, fonction, 111
- Hypoellipticité des opérateurs elliptiques pour la régularité uniforme faible, 81
- Intégration fractionnaire, 70, 79
- Inégalité d'Anderson, 196
- Irrégularité ponctuelle, 105
- Irrégularité uniforme, 33
- Lemme de Slépián, 139
- Loi du log itéré de Chung, 62, 103, 104, 138, 139, 165
- Mesure
 - De Haar, 230, 241
 - De Hausdorff, 149
 - Multifractale, 157
 - Multinomiale, 162
 - Quasi-Bernoulli, 162
- Module de
 - Continuité, 22
 - Continuité faible, 42
 - Continuité forte, 23, 105, 106, 110
 - Continuité stable, 72
 - Continuité uniforme, 23
 - Régularité ponctuelle, 106
 - Régularité uniforme, 22
- Mouvement Brownien, 23
- Mouvement Brownien Fractionnaire, 21, 26, 30, 52, 59, 85, 104, 138, 222
 - à l'infini d'échelles, 85
 - Décomposition ondelettes, 56
 - Lacunaire, 66, 85
 - Dyadique, 85, 89
 - Non dyadique, 85
 - Multi-échelles, 86
 - Mouvement Brownien Multifractionnaire, 84, 166
 - Généralisé, 88, 165
- Multifractale
 - Fonction, 105, 140
- Ondelettes et irrégularité ponctuelle, 113
- Opérateurs de Calderon-Zygmund, 21
- Partie
 - Diagonalisable réelle, 200, 235
 - Hyperbolique, 243
 - Nilpotente, 235
 - Semi-simple imaginaire, 235
- Prévalence, 105
- Processus gaussiens
 - Fortement localement non déterministes, 60
- Prévalence, 127
- Prévalent (ensemble), 127
- Pseudo-norme, 187
- Régularité Hölderienne
 - Uniforme, 21
 - Uniforme forte, 21
- Régularité ponctuelle
 - Faible, 110, 111, 113
 - Forte, 105
- Schauder (base de), 59, 63
- Spectre de singularité
 - Faible, 151
 - Forte, 150
- Séries trigonométriques de type Weierstrass, 135
- Théorème de
 - Whitney, 32
- Transformée en ondelettes de Gabor, 129
- Uniformément anti-Hölderienne, fonction, 52, 104, 111, 126
- Uniformément Hölderienne, fonction, 22
- Uniformément irrégulière, fonction, 21, 29, 104

Quelques notions d'irrégularité uniforme et ponctuelle : le point de vue ondelettes

Résumé : Le but de cette thèse est de définir puis d'étudier différentes notions d'irrégularité uniforme ou ponctuelle permettant de traduire le fait qu'une fonction peut avoir des 'grands accroissements' à toutes les échelles. Pour cela on 'inverse' les notions de régularité Höldérienne usuelles. L'objectif principal du travail est ensuite de relier ces différentes notions à la théorie des ondelettes. Les critères ondelettes établis vont ainsi permettre de définir des fonctions ou des champs aléatoires dont le comportement est différent suivant la gamme d'échelles considérée. Par ailleurs, si on se place du point de vue ponctuel, une question naturelle est celle de la définition d'une analyse multifractale—dite faible— liée à la notion d'irrégularité ponctuelle. Les ondelettes vont alors permettre de définir des séries d'ondelettes multifractales pour l'irrégularité ponctuelle. Enfin, nous étudions des exemples de champs aléatoires où des propriétés de régularité directionnelle apparaissent. Nous nous sommes ainsi centré sur l'étude d'un modèle de champ aléatoire gaussien particulier vérifiant une relation d'autosimilarité matricielle. Nous avons ensuite généralisé ce modèle et introduit des champs gaussiens autosimilaires par rapport à un groupe.

Mots clés : irrégularité uniforme, fonctions anti-Höldériennes, ondelettes, Mouvement Brownien Fractionnaire lacunaire, analyse multifractale faible, champs aléatoires gaussiens anisotropes, autosimilarité matricielle, autosimilarité par rapport à un groupe.

Different concepts of uniform and pointwise irregularity : The wavelet point of view

Abstract : The main purpose of this thesis is the definition and the study of different concepts of uniform or pointwise irregularity which enable one to account for the fact that a function may have 'large increments' at any scales. To this end, we 'invert' the usual notions of Hölderian regularity. The main goal is then to relate these different concepts to wavelet theory. The wavelet criteria supplied enable to define functions or random fields the behavior of which differ with respect the family of scales chosen. Moreover, if we consider the pointwise point of view, a natural question is that of the definition of a weak multifractal analysis related to pointwise irregularity. Finally, we study examples of random fields with some properties of directional regularity. Thus we focus on the study of a special model of operator scaling Gaussian field. We then extend this model and introduced group self-similar Gaussian fields.

Keywords : uniform irregularity, anti-Hölderian functions, wavelets, lacunary Fractional Brownian Motion, weak multifractal analysis, anisotropic Gaussian random fields, operator scaling random fields, group self-similarity.