



**HAL**  
open science

# Automorphismes et compactifications d'immeubles : moyennabilité et action sur le bord

Jean Lecureux

► **To cite this version:**

Jean Lecureux. Automorphismes et compactifications d'immeubles : moyennabilité et action sur le bord. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : . tel-00463411v1

**HAL Id: tel-00463411**

**<https://theses.hal.science/tel-00463411v1>**

Submitted on 12 Mar 2010 (v1), last revised 23 Apr 2012 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 261-2009

Université de Lyon  
Université Claude Bernard Lyon 1  
Institut Camille Jordan  
École doctorale InfoMaths

## THÈSE

Spécialité mathématiques (CNU 25)

(arrêté du 7 août 2007)

*en vue d'obtenir le grade de docteur,  
présentée et soutenue publiquement par*

M. Jean LÉCUREUX

*le 4 décembre 2009.*

---

# Automorphismes et compactifications d'immeubles : moyennabilité et action sur le bord

---

*Thèse encadrée par* M. Bertrand RÉMY

*soutenue après avis de* M. Ken BROWN  
M. Nicolas MONOD

*devant la commission d'examen formée de*

M. Marc BOURDON	<i>membre</i>
M. Étienne GHYS	<i>membre</i>
M. Nicolas MONOD	<i>rapporteur</i>
M. Frédéric PAULIN	<i>membre</i>
M. Bertrand RÉMY	<i>directeur</i>
M. Guy ROUSSEAU	<i>membre</i>



# Remerciements

Ma gratitude va en tout premier lieu à mon directeur de thèse, Bertrand Rémy, qui m'a orienté vers les immeubles et ainsi fait découvrir un domaine passionnant. Il a fait preuve tout le long de cette thèse de beaucoup d'enthousiasme (communicatif!) et de disponibilité. Sa confiance et son énergie m'ont beaucoup stimulé et ses questions m'ont donné des pistes de réflexions fructueuses.

C'est un honneur pour moi que Ken Brown et Nicolas Monod aient accepté de rapporter ma thèse. Je tiens également à remercier les (autres) membres de mon jury : Marc Bourdon, Étienne Ghys, Frédéric Paulin et Guy Rousseau.

Une partie importante de cette thèse provient de travaux effectués en collaboration avec Pierre-Emmanuel Caprace, que je remercie pour sa confiance. Ses conseils et ses discussions m'ont fait beaucoup progresser. Plus généralement, merci à tous les chercheurs par lesquels j'ai pu apprendre des mathématiques.

Je remercie aussi Damien Gaboriau, qui m'a orienté vers Bertrand Rémy avant le début de ma thèse, et qui m'a ensuite accueilli avec bienveillance dans son groupe de travail. Merci également aux membres de l'Institut Camille Jordan pour leur accueil.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont accompagné le long de cette thèse ; notamment Alex, Antoine, Damien, Fred, Maxime, Pierre, Valérie, et généralement tous les doctorants de l'ICJ. En particulier, merci à Laurent pour l'aide apportée sur la figure 2.2. Et surtout, merci à Magali !

Finalement, je remercie ma famille et notamment mes parents pour leur soutien constant.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>iii</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Géométrie des espaces à courbure négative ou nulle</b>	<b>13</b>
1.1 Espaces CAT(0) et leur bord visuel . . . . .	13
1.1.1 Inégalité CAT(0) . . . . .	14
1.1.2 Complexes simpliciaux métriques . . . . .	17
1.1.3 Bord visuel d'un espace CAT(0) . . . . .	18
1.1.3. a) Bord visuel comme ensemble . . . . .	18
1.1.3. b) Topologie du bord visuel . . . . .	19
1.1.3. c) Horofonctions et compactification de Busemann . . . . .	20
1.2 Classification des isométries d'un espace CAT(0) . . . . .	20
1.3 Bord raffiné . . . . .	22
1.4 Groupes totalement discontinus agissant sur des espaces CAT(0) . . . . .	25
1.4.1 Groupes topologiquement localement finis . . . . .	25
1.4.2 Un groupe moyennable fixe un point . . . . .	26
1.4.3 Structure des groupes moyennables . . . . .	27
<b>2 Immeubles</b>	<b>29</b>
2.1 Groupes de Coxeter . . . . .	29
2.1.1 Définition et premiers exemples . . . . .	29
2.1.2 Un peu de combinatoire des groupes de Coxeter . . . . .	32
2.2 Immeubles . . . . .	34
2.2.1 Systèmes de chambres et réalisations métriques . . . . .	34
2.2.2 Immeubles . . . . .	38
2.2.2. a) Définition combinatoire . . . . .	38
2.2.2. b) Définition métrique . . . . .	39
2.2.3 Résidus et projections . . . . .	43
2.2.4 Réalisation de Davis-Moussong . . . . .	46
2.3 Groupes agissant sur des immeubles . . . . .	50
2.3.1 Systèmes de Tits . . . . .	50
2.3.2 Sous-groupes paraboliques . . . . .	52

2.3.3	Groupes topologiques . . . . .	52
<b>3</b>	<b>Compactifications combinatoires d'immeubles</b>	<b>55</b>
3.1	Graphe des résidus sphériques . . . . .	55
3.2	Bords combinatoires . . . . .	59
3.2.1	Définition . . . . .	59
3.2.2	Projections depuis l'infini . . . . .	63
3.2.3	Extension de la notion de quartiers à des immeubles arbitraires . . .	65
3.2.4	Quartiers et racines . . . . .	67
3.2.5	Propriétés d'incidences des quartiers . . . . .	72
3.2.6	Recouvrir la compactification par des appartements . . . . .	72
<b>4</b>	<b>Liens avec d'autres compactifications</b>	<b>75</b>
4.1	Compactification par la topologie de Chabauty . . . . .	75
4.1.1	Topologie de Chabauty . . . . .	75
4.1.2	Stabilisateurs de points à l'infini . . . . .	76
4.1.3	Description de la compactification par la topologie de Chabauty . .	78
4.2	Compactification de Busemann . . . . .	80
4.3	Comparaison avec le bord raffiné . . . . .	82
4.3.1	Construction d'immeubles dans les horosphères . . . . .	82
4.3.2	Une stratification de la compactification combinatoire . . . . .	84
4.3.3	Comparaison avec le bord raffiné . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Arbres dans les complexes de Coxeter</b>	<b>87</b>
5.1	Construction des arbres . . . . .	87
5.2	Encodage du complexe de Coxeter . . . . .	88
<b>6</b>	<b>Classification géométrique des groupes moyennables</b>	<b>91</b>
6.1	Notion de groupe moyennable . . . . .	91
6.1.1	Définitions équivalentes . . . . .	91
6.1.2	Propriétés élémentaires . . . . .	92
6.2	Groupes moyennables agissant sur des immeubles . . . . .	93
<b>7</b>	<b>Dichotomie entre immeubles affines et non affines</b>	<b>97</b>
7.1	Configurations hyperboliques de racines . . . . .	97
7.1.1	Alternative de Tits et existence de racines disjointes . . . . .	97
7.1.2	Uniformité . . . . .	98
7.2	Existence de paires de Gelfand . . . . .	100
7.2.1	Notations . . . . .	100
7.2.2	Expression géométrique du produit de convolution . . . . .	101
7.2.3	Non-commutativité dans le cas non affine . . . . .	103
<b>8</b>	<b>Moyennabilité d'actions</b>	<b>107</b>

8.1	Notion d'action moyennable . . . . .	107
8.1.1	Définitions . . . . .	107
8.1.2	Quelques applications . . . . .	110
8.1.2. a)	Algèbres d'opérateurs . . . . .	110
8.1.2. b)	Cohomologie bornée . . . . .	111
8.1.2. c)	Applications bord . . . . .	112
8.1.3	Critère de moyennabilité . . . . .	112
8.2	Moyennabilité de l'action sur un immeuble compactifié . . . . .	113
8.2.1	Moyennabilité à l'infini des groupes de Coxeter . . . . .	113
8.2.1. a)	Cas des arbres . . . . .	114
8.2.1. b)	Cas d'un produit d'arbres . . . . .	116
8.2.1. c)	Cas d'un complexe de Coxeter général . . . . .	116
8.2.2	Moyennabilité à l'infini des groupes agissant sur des immeubles . . . . .	120
	<b>Bibliographie</b>	<b>134</b>





# Introduction

## Immeubles classiques ; construction de nouveaux groupes et géométries

Évoquons pour commencer quelques aspects historiques des immeubles. On se contentera dans cette introduction d'un survol des questions qui motivent ce travail ; un historique et un exposé synthétique a récemment été écrit par G. Rousseau [Rou09]. Les immeubles sont des objets géométriques et combinatoires introduits par J. Tits dans le but de construire et d'étudier uniformément les groupes algébriques simples [Tit74],[Bou07a, IV-V-VI]. Ce sont des complexes simpliciaux, obtenus par recollement de sous-complexes appelés *appartements*. Ces appartements sont en quelque sorte des pavages généralisés ; leur géométrie reflète celle du groupe de Weyl du groupe algébrique considéré (plus précisément, un appartement correspond à un tore déployé maximal du groupe algébrique dont on est parti, comme dans le cas des espaces symétriques). Ainsi, les immeubles se présentent au départ comme un moyen géométrique d'expliquer la combinatoire des groupes algébriques, principalement déjà connue grâce aux travaux de C. Chevalley [Che05] et de A. Borel et J. Tits [BT65]. Cette combinatoire se comprend aussi à l'aide de la structure de BN-paire, ou système de Tits, introduite dans [Bou07a, Chapitre IV] : à chaque groupe possédant une BN-paire est associé un immeuble, et réciproquement chaque groupe agissant de manière suffisamment transitive sur un immeuble possède une BN-paire. Comme chaque groupe réductif isotrope possède une BN-paire [BT65], on lui associe ainsi un immeuble, muni d'une action bien comprise. Un des avantages du point de vue immobilier sur les groupes algébriques est qu'il permet de traiter uniformément les groupes «classiques» ou «exceptionnels» : par exemple, J. Tits démontre un théorème de simplicité abstraite de certains groupes agissant sur des immeubles, dont en particulier tous les points rationnels des groupes algébriques simples isotropes [Tit64].

Cependant, les seuls immeubles que l'on obtient ainsi sont très spécifiques, car ce sont des immeubles *sphériques* : ils s'obtiennent par recollement de pavages de sphères. Un des résultats les plus marquants de J. Tits est justement que tous les immeubles sphériques s'obtiennent, à quelques exceptions près de petite dimension, grâce à une BN-paire de groupe algébrique [Tit74]. La définition des immeubles permet des constructions plus générales, dont certaines se révéleront utiles quelques années plus tard. Ainsi, F. Bruhat et J. Tits démontrent que l'on peut associer des immeubles *affines* à des groupes algébriques réductifs, quand le corps de base est un corps local non archimédien [BT72]. On obtient ces immeubles par recollement d'espaces euclidiens : les appartements sphériques définis ci-dessus sont «remplis» en tenant compte de la valuation du corps pour former un pavage de l'espace euclidien (*a posteriori* le pavage sphérique est le bord à l'infini du pavage euclidien). Le premier exemple d'immeuble affine est celui des arbres sans feuilles. La théorie des immeubles acquiert alors un parfum plus géométrique : les immeubles de Bruhat-Tits possèdent une métrique intrinsèque, qui leur donne notamment des propriétés de courbure

négative ou nulle. Ceci permet notamment une classification des sous-groupes compacts maximaux [Tit79]. Ainsi, la théorie de Bruhat-Tits peut être vue comme un analogue  $p$ -adique de la théorie classique d'É. Cartan sur les groupes de Lie semi-simple réels ; les immeubles de Bruhat-Tits apparaissent ainsi comme des analogues des espaces symétriques (ou du moins comme les squelettes de ceux-ci). Comme pour les immeubles sphériques, J. Tits a démontré un théorème de classification des immeubles affines : en dimension  $> 2$ , ce sont toujours des immeubles de Bruhat-Tits, issus d'un groupe algébrique sur un corps local (voir [Tit86b] ou [Wei09]).

Il reste donc à étudier la classe des immeubles non affines. Même si les groupes associés à de tels immeubles sont moins classiques que les groupes de Lie  $p$ -adiques, il existe plusieurs constructions de tels immeubles. Une des plus intéressantes provient certainement des groupes de Kac-Moody. On peut trouver une définition, ainsi qu'un historique de ces groupes, dans [Tit89] ou dans [Rém02]. L'étude de ces groupes provient initialement de celle des *algèbres de Kac-Moody*, qui sont une généralisation de dimension infinie des algèbres de Lie semi-simples. En caractéristique 0, on peut voir ces groupes comme étant les groupes d'automorphismes des algèbres de Kac-Moody. Ceux-ci ont tout d'abord été étudiés par V. Kac et D. Peterson [KP85]. Plusieurs généralisations ont ensuite été proposées : citons O. Mathieu [Mat88], mais surtout J. Tits [Tit87], qui construit un foncteur en groupes qui coïncide sur les corps de caractéristique 0 avec la construction de Kac et Peterson. Ces groupes sont définis de manière combinatoire, par générateurs et relations. Cette présentation généralise le dévissage dû à R. Steinberg des groupes simples déployés [Ste68]. La combinatoire que l'on obtient alors permet d'associer à un groupe de Kac-Moody un immeuble (plus précisément, deux immeubles dits *jumelés*) sur lequel il agit.

On peut obtenir ainsi de nombreux types de groupes de Kac-Moody. Les groupes de Kac-Moody dits *affines* sont sans doute les plus étudiés et les mieux compris, ce sont en fait des groupes de matrices. Par exemple, le foncteur qui à un corps  $K$  associe le groupe  $SL_n(K[t, t^{-1}])$  est un groupe de Kac-Moody. Les immeubles que l'on obtient sont en fait des immeubles de Bruhat-Tits ; dans l'exemple précédent, ce sont les immeubles associés aux groupes  $SL_n(K((t)))$  et  $SL_n(K((t^{-1})))$ . On peut cependant obtenir beaucoup plus de types de groupes de Kac-Moody. Par exemple, on peut obtenir des immeubles *hyperboliques*, dont les appartements sont des pavages d'un plan hyperbolique, et bien d'autres. Dans les constructions précédentes, la démarche est semblable : les immeubles se présentent comme des outils pour l'étude de certains groupes que l'on a déjà définis. C'est cependant déjà moins évident pour les groupes de Kac-Moody : ceux-ci sont construits au moyen de leur combinatoire de BN-paire, qui permet de définir un immeuble.

On peut cependant renverser le point de vue : partant d'un immeuble, que peut-on dire de son groupe d'automorphismes ? Ainsi, on définit en même temps l'immeuble et le groupe que l'on va étudier. Plusieurs constructions récentes vont dans ce sens.

On peut déjà commencer par considérer le groupe d'automorphismes complet des immeubles que l'on a construit ci-dessus. Pour les immeubles sphériques associés à des groupes algébriques, on n'obtient pas grand-chose de plus que le groupe dont on était parti (c'est le «théorème fondamental de la géométrie projective» [Tit74]). Dans le cas des groupes de Kac-Moody, on peut choisir de considérer le groupe d'automorphismes de l'un des deux immeubles jumelés. C'est un nouveau groupe topologique ; l'adhérence du groupe de Kac-Moody dont on était parti dans ce groupe est alors intéressante, on l'appelle *groupe de Kac-Moody complet*. Les groupes de Kac-Moody complets sont utiles dans l'étude de groupes des groupes de Kac-Moody abstraits, voir par exemple [RR06].

Mais on peut également construire de nouveaux immeubles sans partir d'un groupe pré-défini. Les immeubles hyperboliques par exemple fournissent une source de tels immeubles «exotiques». Une première construction d'immeubles fuchsien (obtenus par recollement de plans hyperboliques) a été effectuée dans [Bou97]. D'autres immeubles hyperboliques (obtenus par recollement d'espaces hyperboliques) ont ensuite été construits dans [GP01]. Citons également [RR06], où l'on peut trouver des constructions d'immeubles jumelés dont l'épaisseur varie, et qui ne peuvent donc pas être des immeubles associés à des groupes de Kac-Moody. Tous ces immeubles possèdent de gros groupes d'automorphismes, qu'il est intéressant d'étudier.

Pour des immeubles affines également, il existe des constructions d'immeubles exotiques. Comme mentionnés ci-dessus, ces exemples n'existent pas en dimension  $> 2$ . Les immeubles de dimension 1 sont des arbres sans feuilles (et donc relativement bien compris). Il reste donc les immeubles de dimension 2, pour lesquels il existe des constructions. Certaines d'entre elles ont ceci d'intéressant qu'elles possèdent des groupes d'automorphismes assez gros, par exemple transitif sur les chambres [Tit86a] ou sur les sommets [CMSZ93]. On obtient ainsi de nouveaux groupes, dans le sens où ils ne sont pas reliés aux groupes algébriques. Il existe en fait beaucoup d'autres tels immeubles : l'article [BP07] démontre qu'un immeuble affine de dimension 2 (plus précisément de type  $\tilde{A}_2$ ) n'a génériquement pas d'automorphismes.

### Analogies et différences entre immeubles classiques et exotiques

Comme les groupes d'automorphismes d'immeubles possèdent une combinatoire semblable aux groupes algébriques, il n'est pas étonnant qu'ils aient quelques propriétés communes. Ainsi, le critère de simplicité des groupes d'automorphismes d'immeubles, utilisé par J. Tits pour démontrer la simplicité des groupes algébriques, se retrouve dans des situations variées. Par exemple, il est utile pour démontrer que certains groupes de Kac-Moody complets sont abstraitement simples [CER08]. De même, les groupes d'automorphismes des arbres sont simples [Tit70], et il en est plus généralement de même pour certains immeubles hyperboliques [HP98].

Pour souligner encore cette analogie entre groupes algébriques et groupes d'automorphismes d'immeubles, on peut signaler que ces derniers, avec des hypothèses qui correspondent d'une certaine manière à la propriété de «rang supérieur» (pas de coefficient  $\infty$  dans la matrice de Coxeter du groupe de Weyl), possèdent la propriété (T). Pour les immeubles de dimension 2, ceci résulte de l'application d'un critère de A. Żuk [Żuk96], obtenu de manière indépendante dans [BŚ97]. Pour les immeubles plus généraux, il est prouvé dans [DJ02]. Les résultats que l'on peut obtenir sont même plus précis, ils consistent en des annulations de groupes de cohomologie, y compris de degré  $> 1$ . Ce faisant, ils généralisent des résultats (et des techniques) de H. Garland [Gar73] sur les groupes  $p$ -adiques.

Remarquons également que la propriété (T) de ces groupes d'automorphismes d'immeubles est utilisée par U. Bader et Y. Shalom dans [BS06] pour démontrer que les réseaux dans les produits de deux groupes d'automorphismes d'immeubles ont la propriété du sous-groupe normal (tous ses sous-groupes normaux non centraux sont d'indice fini). En particulier, les groupes de Kac-Moody, qui sont des réseaux dans le produit des groupes des automorphismes d'immeubles jumelés [Rém99], possèdent cette propriété. Ce résultat généralise un théorème de G. Margulis pour les réseaux dans les groupes algébriques sur les corps locaux (archimédiens ou non). Enfin, toujours pour appuyer cette analogie, notons que les immeubles fuchsien vérifient un théorème de rigidité de Mostow [Bou97], semblable

à la rigidité de Mostow des réseaux dans les groupes algébriques sur des corps locaux.

Cependant, les immeubles non affines et leurs groupes d'automorphismes sont également, par certains aspects, très différents des immeubles de Bruhat-Tits ou des espaces symétriques. Apparaît ainsi, sur certains points tout au moins, une véritable dichotomie entre immeubles affines et non affines.

La dichotomie que l'on a citée entre immeubles affines et non affines provient avant tout de propriétés différentes au niveau des appartements, c'est-à-dire des groupes de Coxeter eux-mêmes. Par exemple, notons que les plats (*i.e.* les parties isométriques à des espaces euclidiens) dans des immeubles non affines ne sont que des parties strictes des appartements.

En particulier, la distinction entre «rang un» et «rang supérieur» n'est plus toujours aussi nette que pour les groupes algébriques. Par exemple, il existe des immeubles hyperboliques qui n'ont pas de coefficient  $\infty$  dans la matrice de Coxeter de leur groupe de Weyl, et dont les groupes d'automorphismes ont donc la propriété (T); on obtient ainsi un des exemples de groupes hyperboliques avec la propriété (T), qui s'ajoute aux réseaux cocompacts de  $\mathrm{Sp}(n, 1)$  et à certains groupes aléatoires.

Une étude plus précise des plats dans les appartements permet en fait de démontrer qu'un groupe de Coxeter admet une isométrie «de rang un» si et seulement s'il n'est pas virtuellement abélien (c'est-à-dire un produit de groupes de Coxeter sphériques et affines) [CF08, Proposition 4.5]. Ce fait permet à son tour de démontrer qu'un groupe agissant suffisamment transitivement sur un immeuble irréductible de type non affine et non sphérique possède une famille libre infinie de quasi-morphismes, contrairement aux groupes algébriques sur des corps locaux et à leurs réseaux [BM99].

Enfin, les groupes de Coxeter infinis non affines possèdent des configurations de racines particulières, qui sont liées au fait qu'il existe plus de paires de murs parallèles que dans le cas affine. Par exemple, pour un groupe de Coxeter fuchsien, on peut toujours trouver dans le plan hyperbolique trois «racines» (c'est-à-dire trois demi-espaces, chacun bordé par un mur du pavage), qui sont deux à deux disjointes. Cette configuration de racines est appelée *configuration hyperbolique*; il est clair qu'une telle configuration ne peut exister dans un groupe de Coxeter affine. P.-E. Caprace et B. Rémy démontrent dans [CR09] que tous les groupes de Coxeter irréductibles non affines admettent des configurations hyperboliques de racines; on redémontre géométriquement ce résultat dans la section 7.1. Ces configurations sont à leur tour utiles pour démontrer que les groupes de Kac-Moody eux-mêmes sont des groupes simples. Ceci est un contraste avec la situation des groupes arithmétiques. En effet, une des idées d'étude des groupes de Kac-Moody consiste à les comparer à des réseaux dans des groupes algébriques sur des corps locaux. Ainsi, au moins dans le cas Kac-Moody, on obtient une dichotomie forte entre réseaux simples de type fini (cas non affine) et groupes linéaires résiduellement finis (cas affine, c'est-à-dire arithmétique).

## Une illustration de la dichotomie affine/non affine en analyse harmonique

On a vu ci-dessus quelques théorèmes qui montrent une différence de comportement entre les immeubles affines et les immeubles non affines. Un des premiers résultats de cette thèse consiste à étendre cette dichotomie.

Pour cela, on commence par étudier les groupes de Coxeter non affines. Comme mentionné ci-dessus, un résultat important [CR09, Theorem 14], qui fonde cette dichotomie est l'existence de configurations hyperboliques de racines. La preuve de *loc. cit.* est fondée sur un raisonnement combinatoire sur les complexes de Coxeter. On commence par en donner

une deuxième preuve, plus géométrique. Pour ce faire, on se fonde sur l'«alternative de Tits forte», due à G. Margulis et E. Vinberg [MV00], et généralisée par G. Noskov et E. Vinberg [NV02] :

**Théorème.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter irréductible et  $\Gamma$  un sous-groupe de  $W$ . Alors ou bien  $\Gamma$  est virtuellement abélien, ou bien  $\Gamma$  se surjecte virtuellement sur un groupe libre non abélien.*

En particulier, un groupe de Coxeter infini non affine se surjecte virtuellement sur un groupe libre non abélien.

Ce théorème, ainsi que la preuve qui en est faite dans [NV02], sont des outils pour démontrer directement l'existence de configurations hyperboliques de racines. Ceci n'est peut-être pas très surprenant, dans la mesure où une telle configuration de racines donne lieu à un groupe de Coxeter libre. Ainsi, on obtient :

**Théorème** (voir le théorème 7.1.5). *Soit  $W$  un groupe de Coxeter irréductible infini et non affine. Soit  $\alpha$  une racine de  $W$ . Alors il existe deux racines  $\beta$  et  $\gamma$  qui sont disjointes et également disjointes de  $\alpha$ .*

On a déjà mentionné la première application de ce théorème, qui se trouve dans [CR09] : il s'agit de démontrer la simplicité et la non linéarité de groupes de Kac-Moody non affines. On en donne ici une autre application : on étudie des algèbres de convolution. Si  $G$  est un groupe localement compact et  $U$  un sous-groupe compact, notons  $\mathcal{L}(G, U)$  l'espace des fonctions bi- $U$ -invariantes à support compact à valeurs complexes. On munit cet espace du produit de convolution, qui en fait une algèbre : c'est l'*algèbre de Hecke* de  $G$  par rapport à  $U$ . Lorsque  $G$  est un groupe d'automorphismes d'immeuble et  $B$  le fixateur d'une chambre, l'algèbre  $\mathcal{L}(G, B)$  est alors une déformation bien connue de l'algèbre  $\mathbb{C}[W]$  [Bou07a, IV.2, Exercices 22 à 24]. Les représentations de cette algèbre permettent de comprendre certaines représentations de  $G$  [Bor76]. Lorsque maintenant  $K$  est un sous-groupe compact maximal, il se peut que  $\mathcal{L}(G, K)$  soit commutative. C'est notamment le cas lorsque  $G$  est un groupe de Lie semi-simple réel ou  $p$ -adique, si l'on choisit bien  $K$  dans le second cas (voir [BT72, 4.4.9] ou [Mac71]). On dit alors que le couple  $(G, K)$  est une *paire de Gelfand*. L'existence d'une paire de Gelfand est très utile dans l'étude des représentations *sphériques* de  $G$  et pour l'existence d'une formule de Plancherel. Notons que, sous des hypothèses de régularité assez faibles, ces calculs s'étendent aux immeubles affines exotiques [Par06a]. Par contraste, nous prouvons :

**Théorème** (voir le théorème 7.2.4). *Soit  $X$  un immeuble non affine et irréductible. Soit  $G$  un groupe d'automorphismes de  $X$  qui préserve le type et agit fortement transitivement sur  $X$ . Alors, pour tout sous-groupe compact maximal  $K$  de  $G$ , l'algèbre de convolution  $\mathcal{L}(G, K)$  n'est pas commutative.*

Dans le cas particulier d'immeubles fuchsien à angles droits, ce théorème est démontré, de manière indirecte, dans [BS06] (en réfutant une conséquence classique de l'existence d'une paire de Gelfand sur les représentations unitaires). Notre preuve est constructive : on exhibe deux fonctions qui ne commutent pas pour le produit de convolution.

L'argument de la preuve de ce théorème repose sur l'existence d'une configuration hyperbolique de racines, c'est-à-dire finalement sur l'alternative de Tits forte. Celle-ci fournit une bonne intuition du théorème ci-dessus. Plus précisément, avec les notations du théorème,

le groupe  $K$  fixe un sommet de  $X$  ; notons de plus  $\mathcal{B}$  le fixateur d'une chambre contenant ce sommet. Alors  $\mathcal{L}(G, K)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}(G, \mathcal{B})$  ; une base canonique en est donnée par les fonctions caractéristiques de  $K \backslash G / K$ , et chacune de ces fonctions est une somme finie de fonctions caractéristiques dans la base canonique de  $\mathcal{L}(G, \mathcal{B})$ . Lorsque  $X$  est affine, le groupe de Weyl  $W$  est virtuellement abélien. La partie non commutative de  $W$  est alors la partie linéaire (c'est un groupe de Weyl sphérique), qui indexe les doubles classes de  $\mathcal{B} \backslash G / \mathcal{B}$  dont l'union fournit le sous-groupe compact maximal  $K$ . Au niveau des fonctions caractéristiques, ceci correspond à faire des sommes de doubles classes modulo  $\mathcal{B}$ , et la restriction du produit de convolution est alors commutative en gros parce que la partie non commutative de  $W$  a été absorbée dans ces unions finies.

Réciproquement, dans le cas non affine, l'alternative de Tits implique que  $W$  est très loin d'être virtuellement abélien. Intuitivement, il est alors impossible d'obtenir une sous-algèbre commutative de  $\mathcal{L}(G, \mathcal{B})$  en formant des sommes finies de fonctions caractéristiques comme ci-dessus. Il n'est donc pas surprenant qu'il n'y ait pas de paire de Gelfand dans  $G$ .

### Compactifications d'immeubles et paramétrisation des groupes moyennables

Les autres résultats présentés dans cette thèse soulignent au contraire l'analogie qui existe entre tous les groupes d'automorphismes d'immeubles.

Les résultats présentés dans cette section et la suivante résultent d'un travail en commun avec P.-E. Caprace [CL09a].

Le point de départ est la définition d'un bord pour n'importe quel type d'immeuble. Cette construction diffère de celle qui consiste à passer aux classes de rayons géodésiques. Cependant, dans le cas des immeubles affines, le bord que nous obtenons contient de façon naturelle une unique copie de l'ensemble des chambres de l'immeuble sphérique à l'infini. Dans le cas hyperbolique, on a également une inclusion naturelle du bord visuel dans le bord que nous adjoignons à l'immeuble. À notre connaissance, il n'y a pas d'usage significatif du bord visuel d'un immeuble général (*i.e.* ni affine ni hyperbolique a priori).

On obtient ainsi des compactifications non comparables en général à celles consistant à ajouter le bord visuel. Dans le cas des immeubles de Bruhat-Tits, on généralise le bord dit «polyédral» qui avait été défini auparavant dans [Lan96], une généralisation dans une autre direction ayant par ailleurs été effectuée récemment par C. Charignon [Cha09]. Notre construction doit être pensée comme un équivalent de la compactification de Satake-Furstenberg maximale des espaces symétriques (le fait que les compactifications polyédrales des immeubles de Bruhat-Tits puissent être réellement obtenues par un procédé de plongement de Satake a récemment été justifié au moyen de la géométrie de Berkovich [RTW]).

Pour notre construction, le bord obtenu est dit *combinatoire*. Il est construit de façon intrinsèque pour tous les immeubles par des techniques élémentaires, par exemple au moyen de projections sur toutes les cloisons de l'immeuble simultanément. Plus précisément, on plonge l'ensemble des chambres de l'immeuble vers l'ensemble des fonctions qui à une cloison associent une chambre, par l'application qui à  $C$  associe la fonction  $\sigma \mapsto \text{proj}_\sigma(C)$ . L'adhérence du plongement ainsi obtenu est la compactification combinatoire minimale, notée  $\mathcal{C}_1(X)$ . On définit de la même manière la compactification combinatoire maximale, notée  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , en raisonnant avec l'ensemble des résidus sphériques au lieu de l'ensemble des chambres (voir la section 3.1) ; cette dernière compactification contient  $\mathcal{C}_1(X)$ . Le premier bord est techniquement plus facile à définir et utiliser ; il suffit à la plupart des applications dans le cas où l'immeuble est localement fini.

Dans le cas des immeubles de Bruhat-Tits, notre compactification coïncide avec les compactifications «de Satake-Furstenberg» maximales mentionnées précédemment. Un autre argument appuyant le fait que nos compactifications doivent être vues comme des compactifications de Satake se trouve dans le théorème de comparaison suivant, déjà connu dans le cas euclidien [GR06] :

**Théorème** (voir 4.1.8). *Soit  $X$  un immeuble localement fini admettant un groupe d'automorphismes fortement transitif. Alors la compactification combinatoire de l'ensemble des chambres de  $X$  s'identifie à sa compactification par la topologie de Chabauty.*

Rappelons que la compactification par la topologie de Chabauty est une idée due à Y. Guivarc'h [GJT98] (voir aussi [Hae09] pour une preuve simplifiée), qui consiste à attacher à chaque point de l'espace symétrique ou de l'immeuble son stabilisateur dans le groupe d'isométries ; on obtient ainsi un plongement de l'espace symétrique ou de l'immeuble dans l'espace compact des sous-groupes fermés du groupe d'isométrie.

On rattache également cette compactification à une troisième construction, qui s'applique à tous les espaces  $CAT(0)$ , celle du «bord raffiné». Cette construction généralise la compactification de Karpelevič des espaces symétriques. Elle a déjà été considérée par B. Leeb dans [Lee00] en général, et réutilisée par P.-E. Caprace [Cap09]. Le bord raffiné est obtenu en éclatant éventuellement chaque point du bord visuel en un espace  $CAT(0)$  transverse (une itération de ce processus est en général nécessaire, mais un nombre fini d'étapes entre en jeu dans les cas qui nous intéressent, voir la section 1.3). On obtient alors un lien entre le bord raffiné et le bord combinatoire :

**Théorème** (voir le théorème 4.3.9). *Soit  $X$  un immeuble. Il existe une application  $\text{Aut}(X)$ -équivariante du bord raffiné de  $X$  vers le bord combinatoire de  $X$ .*

L'utilité du bord raffiné est qu'il paramètre les groupes moyennables agissant sur  $X$  [Cap09] : ceci, avec le théorème ci-dessus, permet de démontrer qu'un sous-groupe moyennable de  $\text{Aut}(X)$  fixe un point de la compactification  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  (la dernière section de cette introduction évoquera la notion de moyennabilité). On démontre même mieux :

**Théorème** (voir la proposition 6.2.1 et le théorème 6.2.3). *Soit  $G$  un groupe agissant proprement (les stabilisateurs de résidus sphériques sont compacts) par automorphismes sur un immeuble  $X$ . Si  $H$  est un sous-groupe fermé moyennable de  $G$ , alors  $H$  a un sous-groupe d'indice fini qui fixe un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Réciproquement, les fixateurs dans  $G$  de points de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont moyennables.*

Ce résultat fait suite à plusieurs théorèmes semblables dans d'autres contextes. Pour les espaces symétriques, le théorème analogue est dû à C. C. Moore [Moo79, Theorem 3.4]. Pour les arbres, qui sont des immeubles de rang 1, ce théorème est dû à C. Nebbia [Neb88, Theorem 1], et est généralisé par M. Burger et S. Mozes au cas des espaces  $CAT(-1)$  [BM96]. Dans le cas d'immeubles de Bruhat-Tits, ce résultat a été démontré récemment [GR06, théorème 33].

## Quartiers généralisés et arbres dans les complexes de Coxeter

Un des outils principaux pour étudier la compactification combinatoire est la notion de *quartier*. Dans le cas des immeubles affines, un quartier est défini comme un translaté, dans un appartement, d'une chambre du groupe de Weyl sphérique. Ces quartiers sont



notamment très utiles pour démontrer qu'il existe bien une structure d'immeuble à l'infini dans le cas euclidien (voir [BT72] ou [AB08, Chapter 11]). On peut voir les chambres de l'immeuble sphérique à l'infini comme des classes d'équivalence de quartiers, deux quartiers étant équivalents lorsqu'ils contiennent tous deux un sous-quartier. L'utilité des quartiers provient de leurs propriétés d'incidence : on démontre d'une part qu'étant donnée une chambre  $C$  et un quartier  $Q$ , il existe un appartement contenant  $C$  et un sous-quartier de  $Q$ . D'autre part, si  $Q'$  est un autre quartier, alors il existe un appartement contenant un sous-quartier de  $Q$  et un sous-quartier de  $Q'$  [AB08, 11.63]. Ainsi, on démontre que deux chambres de l'immeuble sphérique à l'infini sont contenues dans un appartement.

Ces propriétés d'incidence sont notamment utiles pour définir des *rétractions depuis l'infini*, utilisées par exemple dans [Par06b] pour démontrer une formule de Plancherel pour les immeubles affines. La notion de rétraction à l'infini est également utile en théorie des représentations [GL05].

Toujours dans le cas euclidien, on peut donner une interprétation des quartiers qui fasse plus appel à la combinatoire qu'à la géométrie affine : si  $\xi$  est une chambre de l'immeuble sphérique à l'infini et  $x$  une chambre de l'immeuble affine, le quartier de  $x$  à  $\xi$  peut être considéré comme une enveloppe convexe entre  $x$  et  $\xi$ . Ceci ouvre la voie à une généralisation des quartiers à n'importe quel immeuble : si  $(C_n)$  est une suite de chambres d'un immeuble  $X$  convergeant vers  $\xi \in \mathcal{C}_1(X)$  et si  $x$  est une chambre de  $X$ , alors on définit  $Q(x, \xi)$  comme étant la limite ponctuelle de la suite des enveloppes convexes  $\text{Conv}(x, C_n)$  (voir la section 3.2.3).

On retrouve alors la notion de quartier du cas affine. Comme la compactification combinatoire contient plus de points que l'ensemble des chambres de l'immeuble sphérique, cette notion de quartier contient, outre les quartiers de Bruhat-Tits, les parties d'immeubles appelées *cheminées* dans le travail de G. Rousseau [Rou77]. Dans le cas hyperbolique, les quartiers peuvent être vus comme des rayons géodésiques épaissis.

On démontre alors des propriétés d'incidence semblables à celles des quartiers classiques dans les immeubles euclidiens :

**Proposition.** *Soient  $x$  et  $y$  deux chambres de  $X$  et  $\xi \in \mathcal{C}_1(X)$ . Alors l'intersection des quartiers  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)$  contient un sous-quartier pointant vers  $\xi$ .*

Notons que l'analogie avec les quartiers de Bruhat-Tits n'est pas encore complète. En effet, on ne sait toujours pas démontrer l'analogie de la seconde propriété d'incidence : si  $\xi, \xi' \in \mathcal{C}_1(X)$ , existe-il un appartement contenant un sous-quartier de  $Q(x, \xi)$  et de  $Q(y, \xi')$  ?

Cette proposition permet de ramener, sur certains aspects tout au moins, l'étude de la compactification combinatoire d'un immeuble à celle d'un appartement. C'est notamment le premier pas de la preuve de la moyennabilité des stabilisateurs de points à l'infini : on se ramène ainsi à étudier les fixateurs de points du bord d'un appartement dans le groupe de Weyl  $W$ .

Un autre outil utile à ce stade est fourni par les arbres duaux dans les complexes de Coxeter. On a vu ci-dessus que, dans un groupe de Coxeter non affine irréductible, il existe toujours une configuration hyperbolique de racines (trois racines deux à deux disjointes). Le groupe de Coxeter engendré par les trois réflexions correspondantes est un produit libre de trois groupes  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . Les réflexions dans ce groupe fournissent un pavage plus grossier du complexe de Coxeter qui donne lieu à un arbre dual, homogène et de valence 3. Dans le cas affine, la seule construction analogue d'arbre possible est celle d'un arbre homogène de valence 2, correspondant à une famille de racines de bords parallèles.

On peut démontrer qu’il y a suffisamment d’arbres duaux comme ci-dessus pour pouvoir paramétrer les chambres du pavage (ou *complexe* de Coxeter initial. On obtient ainsi un plongement équivariant du groupe de Coxeter dans un produit fini d’arbres. Ce plongement s’étend au bord combinatoire :

**Proposition** (voir le lemme 5.2.3). *Soit  $(W, S)$  un système de Coxeter et  $\mathbf{W}$  le complexe de Coxeter associé. Alors il existe un nombre fini d’arbres homogènes  $T_1, \dots, T_l$  tels que, en notant  $\overline{T}_i$  le compactifié de  $T_i$ , on ait un plongement continu et  $W$ -équivariant de  $\mathbf{W}$  dans  $\overline{T}_1 \times \dots \times \overline{T}_l$ .*

En particulier, un quartier de  $\mathbf{W}$  se plonge dans un quartier du produit d’arbres compactifié, c’est-à-dire dans un produit de demi-droites et de segments, qui est plus facile à comprendre. Notons que les arbres en question ne sont pas forcément de valence finie.

### Action au bord

On utilise enfin les outils présentés ci-dessus (quartiers généralisés et plongement dans les produits d’arbres) pour démontrer un résultat valable pour tous les types d’immeubles, qui renforce le résultat de moyennabilité des stabilisateurs de points à l’infini (théorème 6.2.3), et qui généralise des résultats de V. Kaimanovich [Kai04, Kai05].

Notre résultat met en jeu la notion d’*action moyennable*, définie au chapitre 8. Rappelons qu’un groupe est dit moyennable s’il admet une moyenne invariante (voir la définition 6.1.2). L’intérêt de la notion de moyennabilité est qu’une condition équivalente est par exemple l’existence d’un point fixe pour les actions affines du groupe considéré sur des convexes compacts dans des espaces de Banach convenables. La notion d’action moyennable a été définie la première fois par R. Zimmer [Zim78] comme une généralisation de la notion de moyennabilité pour les groupes. On peut formuler cette généralisation aussi bien du point de vue des moyennes invariantes que des points fixes (une définition possible d’action moyennable sur un espace  $S$  est une propriété de point fixe pour un fibré en compacts convexes sur  $S$ ).

Si  $G$  est un groupe algébrique connexe semi-simple sur un corps local, alors l’action de  $G$  sur (l’ensemble des chambres de) l’immeuble sphérique à l’infini est moyennable : ceci découle du fait que l’ensemble des chambres de cet immeuble s’identifie à  $G/P$ , où  $P$  est un sous-groupe moyennable de  $G$  (exemple 8.1.8). Dans le cas des immeubles affines plus généraux, l’action du groupe d’automorphisme sur le bord à l’infini est également moyennable [Kai05].

Les groupes d’isométries d’espaces hyperboliques agissent également moyennablement sur le bord visuel. Plus précisément, si  $X$  est un espace hyperbolique au sens de Gromov, et  $\text{Isom}(X)$  est cocompact, alors l’action de  $\text{Isom}(X)$  sur  $\partial_\infty X$  est topologiquement moyennable ; il en est de même sans restriction sur l’action de  $\text{Isom}(X)$  si  $X$  est CAT(-1) [Kai04]. En particulier, un groupe d’automorphismes d’un immeuble hyperbolique admet une action moyennable sur le bord de l’immeuble.

Dans la lignée de la philosophie mentionnée ci-dessus –le bord combinatoire généralise à la fois l’immeuble sphérique à l’infini et le bord visuel des immeubles hyperboliques–, on démontre le résultat suivant :

**Théorème.** *Soit  $X$  un immeuble localement fini. L’action du groupe  $\text{Aut}(X)$  des automorphismes de  $X$  sur  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est topologiquement moyennable.*

La stratégie générale de démonstration est la suivante. Il s'agit de définir une suite d'applications asymptotiquement équivariantes de source  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et de but l'espace des probabilités sur  $\text{Aut}(X)$  (voir la définition 8.1.5). Grâce aux propriétés d'incidence des quartiers, on commence par se ramener au cas d'un appartement (vu comme un immeuble). Les arbres duaux dans les appartements interviennent à nouveau ici et permettent, via les plongements associés, de se ramener à construire des mesures sur des produits d'arbres. On utilise ensuite un plongement convenable des appartements dans des produits d'arbres pour construire concrètement des mesures comme limite de mesures de comptage.

Ce théorème a un certain nombre d'applications. Un des intérêts de la notion de moyennabilité pour les actions d'un groupe  $G$  sur un espace  $S$  est d'expliquer et de généraliser l'existence d'applications équivariantes de  $S$  vers l'ensemble des mesures de probabilités sur un  $G$ -espace compact métrique. Ces applications ont été utilisées par H. Furstenberg puis G. Margulis pour démontrer des théorèmes de rigidité [Mar91].

La moyennabilité des actions de groupes a été également étudiée dans des contextes différents et variés, par exemple celui de la cohomologie bornée [Mon01] ou des algèbres d'opérateurs [Oza06b]. On pourra consulter la section 8.1.2 pour plus de détails sur les applications de la moyennabilité. Par exemple, la  $C^*$ -algèbre réduite de  $\text{Aut}(X)$  est exacte, et ce dernier groupe satisfait à la conjecture de Novikov. Des prolongements possibles de ce travail pourraient être d'exploiter des résolutions assez explicites en cohomologie bornée et d'utiliser des applications bord assez concrètes en théorie de la rigidité.

## Plan

Cette thèse se comporte de huit chapitres. Le premier chapitre rappelle la définition et quelques propriétés de base des espaces  $\text{CAT}(0)$  (propriété de courbure  $\leq 0$ ). Il donne ensuite des résultats un peu moins classiques et principalement démontrés par P.-E. Caprace sur le «bord raffiné» de tels espaces. En particulier, on définit ce bord raffiné, et on explique un théorème de classification des groupes moyennables qui agissent dessus.

Le deuxième chapitre consiste en un rappel des définitions et des propriétés élémentaires sur les immeubles. Plus précisément, on donne deux définitions équivalentes, l'une étant plus combinatoire et l'autre plus géométrique. On démontre ensuite l'équivalence des deux définitions, cette preuve étant l'occasion de donner des outils généraux utiles dans l'étude des immeubles. On explique ensuite la réalisation de Davis-Moussong des immeubles, qui permet de voir tout immeuble comme un espace  $\text{CAT}(0)$ .

Les troisièmes et quatrièmes chapitres proviennent d'une traduction de l'article [CL09a]. Le troisième chapitre concerne la définition du bord combinatoire et la définition des quartiers mentionnés ci-dessus. Le quatrième chapitre fait le lien entre le bord combinatoire et d'autres constructions : la construction de l'article [GR06] tout d'abord, par la topologie de Chabauty. Ensuite, on démontre que le bord combinatoire s'identifie à la compactification de Busemann du graphe des chambres. Enfin, on relie ce bord au bord raffiné, défini au chapitre 1.

Le cinquième chapitre présente l'encodage de l'ensemble des chambres, ou des résidus sphériques, d'un appartement dans un produit fini d'arbres, comme décrit ci-dessus : on y démontre qu'un groupe de Coxeter se plonge, de manière équivariante, dans un produit fini d'arbres homogènes, plongement qui s'étend à la compactification combinatoire. Il s'agit de raisonnement uniquement sur les groupes de Coxeter, et non sur les immeubles plus généraux. Ce faisant, on pose également les bases de la démonstration de l'existence d'une

configuration hyperbolique de racines (théorème 7.1.5)

Le sixième chapitre a pour but, après quelques rappels sur les groupes moyennables, de démontrer le théorème 6.2.3 : les groupes moyennables sont paramétrés par les points du bord combinatoire. On en donne deux preuves, toutes les deux reposant sur les propriétés d'incidence des quartiers, l'une d'entre elle utilisant de plus les arbres définis au chapitre cinq.

Le septième chapitre est composé de deux parties : on commence par donner la preuve de l'existence d'une configuration hyperbolique de racines (théorème 7.1.5), puis on l'applique pour démontrer la non-existence d'une paire de Gelfand pour les groupes d'automorphismes d'immeubles non-affines.

Enfin, le huitième et dernier chapitre donne la définition et quelques applications de la notion de moyennabilité d'actions. On y démontre ensuite la moyennabilité de l'action d'un groupe d'automorphismes d'immeuble sur le bord combinatoire de celui-ci.



# Chapitre 1

## Géométrie des espaces à courbure négative ou nulle

Il n'y a pas de notion de courbure pour les espaces métriques généraux. Cependant, dans le cas des espaces métriques géodésiques, on peut définir la notion de «courbure majorée», par comparaison avec des espaces modèles de courbure constante. Les variétés riemanniennes à courbure négative ou nulle sont en particulier des espaces métriques à courbure négative ou nulle. La définition de cette notion remonte à Alexandrov [Ale51]. Dans [BT72], Bruhat et Tits observent que les immeubles affines vérifient une inégalité qui s'apparente à une notion de courbure négative ou nulle (proposition 1.1.10) et l'utilisent pour démontrer un théorème de point fixe. La condition qu'ils donnent est en fait équivalente à la condition d'Alexandrov. C'est enfin Gromov [Gro81, Gro87] qui soulignera l'importance de cette condition pour l'étude des groupes d'un point de vue géométrique, c'est également lui qui utilise le premier la notation  $CAT(0)$ , en référence à É. Cartan, A. Alexandrov et V. Toponogov.

Ce chapitre se divise en quatre sections. La première a pour objectif de définir les espaces  $CAT(0)$ , puis de définir leur bord visuel. Nous donnons deux définitions possibles de ce bord. La deuxième section a pour objet de classer les isométries d'un espace  $CAT(0)$ , puis de donner leurs propriétés élémentaires. Ces deux sections s'inspirent largement du livre [BH99]. La troisième section a pour objet de définir le *bord raffiné* : c'est une construction, due à B. Leeb [Lee00], qui attache à chaque point du bord visuel un espace  $CAT(0)$ , et qui continue de la même manière dans les espaces ainsi obtenus. Nous démontrons alors que le processus s'arrête en un temps fini. Enfin, la quatrième section reprend une partie d'un article de P.-E. Caprace [Cap09], qui explique le lien entre les groupes moyennables agissant sur des espaces  $CAT(0)$  et le bord raffiné décrit ci-dessus.

### 1.1 Espaces $CAT(0)$ et leur bord visuel

On définit ici les espaces  $CAT(0)$ , puis leur bord visuel. Une référence standard est [BH99].

### 1.1.1 Inégalité CAT(0)

La condition CAT(0) est une condition sur les géodésiques d'un espace métrique. Rappelons donc quelques définitions.

**Définition 1.1.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Un *chemin géodésique*, ou plus simplement une *géodésique*, joignant  $x \in X$  à  $y \in X$  est une isométrie  $c$  d'un intervalle  $[0, l] \subset \mathbb{R}$  dans  $X$ , telle que  $c(0) = x$  et  $c(l) = y$ . Le réel  $l$  est appelé *longueur* de la géodésique  $c$ . Un *rayon géodésique* est une isométrie de l'intervalle  $[0, +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 1.1.2.** Un espace métrique  $(X, d)$  est dit *géodésique* si deux points quelconques de  $X$  peuvent être reliés par une géodésique.

Si, pour toute paire de points  $x, y \in X$ , il existe un *milieu* entre  $x$  et  $y$ , c'est-à-dire un point  $m \in X$  tel que  $d(x, m) = d(y, m) = d(x, y)/2$ , et si de plus  $X$  est complet, alors il est facile de voir que  $X$  est géodésique : la valeur d'un segment géodésique  $c$  entre  $x$  et  $y$  au point  $\frac{1}{2}$  sera  $m$ , la valeur au point  $\frac{1}{4}$  sera un milieu de  $x$  et  $m$ . On définit ainsi  $c$  sur une partie dense de  $[0, l]$ ; et la complétude de  $X$  permet de l'étendre à une fonction définie sur tout  $[0, l]$ . Réciproquement, il est clair que dans tout espace géodésique, toute paire de point possède (au moins) un milieu.

On va maintenant définir les espaces CAT( $\kappa$ ). Pour cela, on commence par définir un *espace modèle*, noté  $M_\kappa$ . Si  $\kappa = 0$ , on définit  $M_\kappa$  comme étant le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ . Si  $\kappa > 0$ , on définit  $M_\kappa$  comme étant la sphère  $S^2$ , où les distances ont été multipliées par  $1/\sqrt{\kappa}$ . Si  $\kappa < 0$ , on définit  $M_\kappa$  comme étant le plan hyperbolique, où les distances ont été multipliées par  $1/\sqrt{-\kappa}$ . On note  $D_\kappa$  le diamètre de  $M_\kappa$ , il est égal à  $\pi/\sqrt{\kappa}$  si  $\kappa > 0$  et  $+\infty$  sinon.

Un *triangle géodésique*  $\Delta$  dans  $X$  consiste en la réunion de trois points  $x, y$  et  $z$  dans  $X$  et de segments géodésiques, notés  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[x, z]$  les joignant deux à deux. Un *triangle de comparaison*  $\bar{\Delta}$  dans  $M_\kappa$  est un triangle dont les sommets sont trois points  $\bar{x}, \bar{y}$  et  $\bar{z}$  tels que  $d(x, y) = d(\bar{x}, \bar{y})$ ,  $d(x, z) = d(\bar{x}, \bar{z})$  et  $d(y, z) = d(\bar{y}, \bar{z})$ . Un tel triangle existe toujours si le diamètre de  $\Delta$  est  $< D_\kappa$ . Un *point de comparaison* pour le point  $p \in [x, y]$  est un point  $\bar{p} \in [\bar{x}, \bar{y}]$  tel que  $d(\bar{p}, \bar{x}) = d(p, x)$ . On définit de même des points de comparaison pour des points dans les côtés  $[y, z]$  et  $[x, z]$ .

**Définition 1.1.3.** Un espace métrique  $X$  est dit CAT( $\kappa$ ) si toute paire de points à distance  $< D_\kappa$  peut être reliée par une géodésique et si, pour tout triangle géodésique  $\Delta$  de diamètre  $< D_\kappa$ , la condition suivante est vérifiée : si  $\bar{\Delta}$  est un triangle de comparaison de  $\Delta$  dans  $M_\kappa$  et si  $p, q \in \Delta$  ont pour points de comparaison  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$ , alors  $d(p, q) \leq d(\bar{p}, \bar{q})$ .

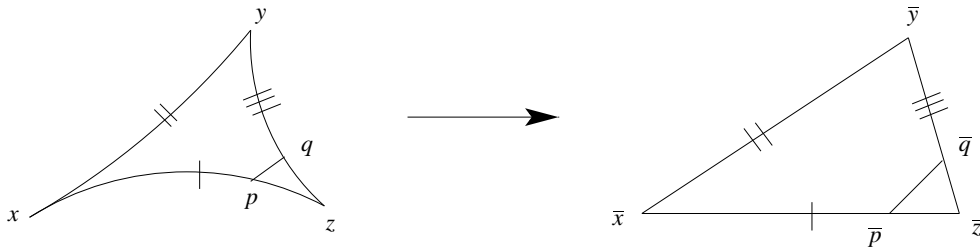


FIG. 1.1 – Triangle de comparaison

*Remarque 1.1.4.* Il résulte de calculs trigonométriques dans les espaces  $M_\kappa$  que si  $X$  est CAT( $\kappa$ ), alors  $X$  est également CAT( $\kappa'$ ) pour tout  $\kappa' \geq \kappa$  [BH99, Theorem I.1.12].

On peut également définir une condition CAT( $\kappa$ ) locale : un espace métrique géodésique est dit *localement* CAT( $\kappa$ ) si tout point a un voisinage qui est CAT( $\kappa$ ).

Dans le cas où  $\kappa \leq 0$ , il y a un lien fort entre être localement CAT( $\kappa$ ) et CAT( $\kappa$ ), fourni par le théorème suivant.

**Théorème 1.1.5.** *Soit  $X$  un espace complet géodésique simplement connexe et soit  $\kappa \leq 0$ . Si  $X$  est localement CAT( $\kappa$ ), alors  $X$  est CAT( $\kappa$ ).*

*Référence.* Voir [Pau91, Corollary 2.21]. □

Remarquons que la condition de simple connexité est également nécessaire :

**Théorème 1.1.6.** *Un espace CAT(0) est contractile.*

*Preuve.* Cela découle du fait qu'un tel espace  $X$  est uniquement géodésique [BH99, Proposition II.1.4]. □

*Exemple 1.1.7.* Une variété riemannienne est localement CAT(0) si et seulement si sa courbure sectionnelle est partout  $\leq 0$  [BH99, Theorem II.1A.6]. En particulier, une variété riemannienne est CAT(0) si et seulement si elle est de courbure sectionnelle  $\leq 0$  et si elle est simplement connexe.

*Exemple 1.1.8.* Un cas particulier important de variétés riemanniennes CAT(0) est donné par les *espaces symétriques*. Un espace symétrique peut être défini comme une variété riemannienne connexe  $M$  pour laquelle, pour tout  $p \in M$ , il existe une isométrie de  $M$  qui fixe  $p$  et dont la différentielle est la multiplication par  $-1$ . Plus précisément, on considère les espaces symétriques *de type non-compact*, c'est-à-dire dont le revêtement universel n'admet pas de facteur isométrique à  $\mathbb{R}^n$  et qui sont de plus localement CAT(0). De tels espaces s'identifient (difféomorphiquement) à des quotients d'un groupe de Lie semi-simple  $G$  par un sous-groupe compact maximal  $K$  (voir par exemple [Mau08]). On démontre de plus que ces espaces sont simplement connexes, et donc CAT(0).

*Exemple 1.1.9.* Soit  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  l'espace des matrices symétriques définies positives de taille  $n$  à coefficients réels. Le groupe  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$  agit sur  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  par  $g.A = gA^t g$ , l'espace  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  est alors un espace homogène. Le stabilisateur de  $\text{Id}$  est le groupe orthogonal  $\text{O}(n, \mathbb{R})$ , de sorte que  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  s'identifie à  $\text{GL}(n, \mathbb{R})/\text{O}(n, \mathbb{R})$ .

On va munir  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  d'une structure de variété riemannienne. L'espace tangent à  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  en l'identité s'identifie naturellement à l'espace des matrices symétriques ; on munit cet espace tangent du produit scalaire  $(X|Y) = \text{Tr}(XY)$ . On transporte ensuite ce produit scalaire en chaque point de telle sorte que l'action de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  sur  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  se fasse par isométries riemanniennes.

On obtient alors un espace symétrique : la symétrie en un point  $p \in \text{SDP}(n, \mathbb{R})$  est donnée par  $q \mapsto pq^{-1}p$ . On démontre de plus que  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  est un espace CAT(0) [BH99, Theorem II.10.39].

Par contre,  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  n'est pas de type non-compact : en effet, il s'identifie à  $\mathbb{R} \times \text{SDP}^1(n, \mathbb{R})$ , où  $\text{SDP}^1(n, \mathbb{R})$  est le sous-espace formé des matrices de déterminant 1.

L'espace  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  s'appelle l'espace symétrique associé à  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ , tandis que l'espace  $\text{SDP}^1(n, \mathbb{R})$  est l'espace symétrique associé à  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$ .



Lorsqu'un espace  $\text{CAT}(0)$  est complet, on parle parfois d'*espace de Hadamard*.

Les triangles de comparaison permettent également de définir des angles dans un espace  $\text{CAT}(\kappa)$  [BH99, Proposition II.3.1]. Pour cela, soit  $p$  un point base. Si  $x, y \in X$  sont suffisamment proches de  $p$ , on peut définir un triangle de comparaison  $\bar{\Delta}$  au triangle dont les sommets sont  $p, x, y$ . Ce triangle a alors un angle en  $p$ , que l'on note  $\tilde{\angle}_p(x, y)$ . Soit  $c$  un segment géodésique de  $p$  à  $x$  et  $c'$  un segment géodésique de  $p$  à  $y$ . En vertu de l'inégalité  $\text{CAT}(\kappa)$ , l'angle  $\tilde{\angle}_p(c(t), c'(t'))$  est une fonction décroissante en  $t$  et en  $t'$ . On définit alors l'angle  $\angle_p(x, y)$  comme étant la limite, lorsque  $t, t' \rightarrow 0$ , de l'angle de comparaison  $\tilde{\angle}_p(c(t), c'(t'))$ .

Comme mentionné ci-dessus, la condition  $\text{CAT}(0)$  est équivalente à une condition de courbure négative, définie dans [BT72, §3.2.1].

**Proposition 1.1.10.** *Soit  $X$  un espace métrique géodésique. L'espace  $X$  est  $\text{CAT}(0)$  si et seulement si pour tous points  $p, q, r \in X$ , on a l'inégalité*

$$d(p, q)^2 + d(p, r)^2 \geq 2d(m, p)^2 + \frac{d(q, r)^2}{2}, \quad (\text{CN})$$

pour tout milieu  $m$  de  $q$  et  $r$ .

**Référence.** C'est l'exercice 1.9.(c) de [BH99, Chapter II.1]. □

Les espaces de Hadamard partagent avec les espaces euclidiens ou hilbertiens des propriétés importantes. L'une d'entre elles est l'existence d'une projection sur un convexe fermé. Rappelons qu'un sous-espace  $C$  d'un espace métrique géodésique  $X$  est dit *convexe* si les géodésiques reliant deux points de  $C$  restent dans  $C$ .

**Proposition 1.1.11.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  complet et  $C$  un convexe fermé de  $X$ . Alors, pour tout  $x \in X$ , il existe un unique point  $\pi(x) \in C$  tel que  $d(x, \pi(x)) = d(x, C)$ . De plus, l'application  $\pi : X \rightarrow C$  est 1-lipschitzienne.*

**Référence.** Voir [BH99, Chapter II.2, Proposition 2.4]. □

Il découle de l'inégalité  $\text{CAT}(0)$  que, dans un espace  $\text{CAT}(0)$   $X$ , la distance est une fonction convexe [BH99, Proposition II.2.2]. Autrement dit, si  $c : [0, 1] \rightarrow X$  et  $c' : [0, 1] \rightarrow X$  sont deux segments géodésiques, on a  $d(c(t), c'(t)) \leq (1-t)d(c(0), c'(0)) + td(c(1), c'(1))$ . Il en découle que les boules fermées de  $X$  sont convexes.

Enfin, mentionnons le lemme de point fixe, qui est la motivation initiale pour F. Bruhat et J. Tits [BT72, Lemme 3.2.3] pour introduire cette condition de courbure négative. La proposition suivante n'apparaît pas dans la preuve initiale de Bruhat et Tits; d'après K. Brown [Bro89], c'est une idée due à J.-P. Serre.

**Proposition 1.1.12.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  complet,  $Y$  un sous-espace borné de  $X$ . Soit  $r_Y$  l'infimum de tous les rayons  $r \in \mathbb{R}^+$  tels qu'il existe  $x \in X$  tel que  $Y$  soit inclus dans la boule fermée  $B(x, r)$ . Alors il existe un unique point  $c_Y \in X$ , appelé centre de  $Y$ , tel que  $Y \subset B(c_Y, r_Y)$ .*

**Référence.** Voir [BH99, II.2, Proposition 2.7]. □

Cette proposition permet de classer les groupes compacts maximaux agissant sur  $X$  : ce sont les stabilisateurs de points.

**Corollaire 1.1.13.** *Soit  $X$  un espace CAT(0) complet et  $K$  un groupe compact agissant continûment par isométries sur  $X$ . Alors  $K$  a un point fixe dans  $X$ .*

**Preuve.** Comme  $K$  agit continûment, ses orbites sont bornées. Par unicité dans la proposition 1.1.12, le centre de cette orbite est fixé par  $K$ .  $\square$

*Exemple 1.1.14.* Reprenons l'exemple de l'espace symétrique  $\text{SDP}(n, R)$  associé à  $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ . Si  $K$  est un sous-groupe compact de  $G$ , alors  $K$  fixe un point de  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  d'après le corollaire ci-dessus. Comme  $\text{SDP}(n, \mathbb{R})$  est un espace homogène sous  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ , on en déduit que  $K$  est contenu dans un conjugué du stabilisateur de  $\text{Id} \in \text{SDP}(n, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire dans  $\text{O}(n, \mathbb{R})$ . De même, un sous-groupe compact est conjugué à un sous-groupe de  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ .

### 1.1.2 Complexes simpliciaux métriques

On décrit ici une construction qui fournit des exemples d'espaces métriques CAT(0) qui ne sont pas des variétés. On construit ceux-ci en recollant des simplexes de  $\mathbb{R}^n$  le long de leurs faces. Cette construction sera celle utilisée pour la réalisation métrique des immeubles. La référence principale pour cette section est [Bri91], on peut également consulter [Pau91] ou [BH99, Chapter I.7].

**Définition 1.1.15.** Soit  $n \leq m$  des entiers positifs. Un  $n$ -simplexe métrique  $S$  dans  $\mathbb{R}^m$  est l'enveloppe convexe de  $(n+1)$  points en position générale. Ces points sont les *sommets* de  $S$ . Une *face* de  $S$  est l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble des sommets de  $S$ .

**Définition 1.1.16.** Un *complexe simplicial métrique* est la réunion de simplexes métriques recollés isométriquement suivant leurs faces.

**Référence.** [BH99, I.7.2]  $\square$

Remarquons qu'un polyèdre peut s'obtenir, par subdivision, comme un complexe simplicial métrique ; ainsi des recollements de polyèdres peuvent également être vus comme des complexes simpliciaux.

La topologie d'un complexe simplicial métrique  $X$  est la topologie quotient du recollement. Pour munir  $X$  d'une métrique, on procède comme suit.

**Définition 1.1.17.** Une *chaîne*  $\gamma$  dans un complexe simplicial métrique  $X$  est une suite finie de points  $x_0, \dots, x_m$  de  $X$  tels que, pour tout  $i$ , il existe un simplexe  $S_i$  tels que  $x_{i-1}$  et  $x_i$  soient dans  $S_i$ . La *longueur* de  $\gamma$  est le réel positif

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^m d_{S_i}(x_{i-1}, x_i).$$

La *distance*  $d(x, y)$  entre deux points  $x, y \in X$  est l'infimum des longueurs des chaînes joignant  $x$  et  $y$ .

Il n'est pas automatique que la distance ainsi définie sépare les points : on peut par exemple construire un graphe à deux sommets, reliés par des arêtes indexées par  $\mathbb{N}^*$ , l'arête  $n$  étant de longueur  $1/n$  ; les deux sommets sont alors à distance 0.

Par contre, le théorème suivant, dû à M. Bridson, démontre que c'est le cas lorsque l'on prend seulement un nombre fini de classes d'isométries de simplexes :

**Théorème 1.1.18.** *Un espace métrique simplicial avec un nombre fini de classes d'isométries de simplexes est un espace métrique géodésique complet.*

**Référence.** Voir [Bri91, Theorem 1.1]. □

### 1.1.3 Bord visuel d'un espace CAT(0)

Tout espace CAT(0) possède un bord visuel. Ce bord peut être défini de deux manières différentes : en terme de géodésiques, ou en plongeant  $X$  dans un espace de fonctions. La première définition est sans doute la plus intuitive ; de plus, elle sera utile lorsque nous définirons le bord raffiné. La deuxième définition possède l'avantage d'être très générale : elle donne un bord à tout espace métrique. Elle fournit ainsi une définition possible du bord combinatoire, comme bord du graphe des chambres d'un immeuble (voir la section 4.2)

#### 1.1.3. a) Bord visuel comme ensemble

On définit ici le bord visuel d'un espace CAT(0) comme une classe d'équivalence de rayons géodésiques asymptotes.

**Définition 1.1.19.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On dit que deux rayons géodésiques  $c, c' : [0, +\infty[ \rightarrow X$  sont *asymptotes* s'il existe une constante  $K$  telle que  $d(c(t), c'(t)) \leq K$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

On vérifie facilement que la relation «être asymptote» est une relation d'équivalence, ce qui permet de définir le bord visuel de la manière suivante.

**Définition 1.1.20.** Soit  $X$  un espace métrique. Le *bord visuel*  $\partial_\infty X$  de  $X$  est défini comme l'ensemble des classes de rayons géodésiques pour la relation «être asymptote». On note  $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ . Si  $c$  est un rayon géodésique dans la classe de  $\xi$ , on dit que  $c$  *pointe* vers  $\xi$ .

La notion de bord visuel est surtout utile pour les espaces CAT(0) complets. Pour pouvoir l'utiliser, il faut en effet pouvoir mettre une topologie sur le bord, ce que permet la proposition suivante.

**Proposition 1.1.21.** *Soit  $X$  un espace CAT(0) complet et  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  un rayon géodésique. Alors, pour tout  $x \in X$ , il existe un unique rayon géodésique  $c'$  issu de  $x$  qui est asymptote à  $c$ .*

**Référence.** Voir [BH99, II.8, Proposition 8.2]. □

Cette proposition explique l'appellation «bord visuel» : le bord s'identifie à ce que voit un observateur placé en  $x_0$ , lorsque son regard suit les géodésiques qui partent de ce point.

### 1.1.3. b) Topologie du bord visuel

Lorsque  $(X, d)$  est un espace CAT(0) complet, il est possible de mettre une topologie sur l'espace  $\overline{X}$ , dont la restriction à  $X$  soit la topologie induite par  $d$ . On procède pour cela comme dans [BH99, II.8.5].

Fixons un point  $x_0 \in X$ . À un point  $\xi \in \partial_\infty X$  on associe l'unique rayon géodésique de  $x_0$  à  $\xi$ , et à un point  $x \in X$  on associe l'application  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  qui coïncide avec une géodésique de  $x_0$  à  $x$  jusqu'à  $r = d(x, x_0)$  et qui est constante égale à  $x$  ensuite. On obtient ainsi une bijection entre  $\overline{X}$  et un sous-espace  $\mathcal{F}_{x_0}$  de l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $X$ .

On munit l'espace  $\mathcal{F}_{x_0}$  de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. Alors  $\mathcal{F}_{x_0}$  est un espace fermé. En effet, les éléments de  $\mathcal{F}_{x_0}$  peuvent être caractérisés de la manière suivante. Notons  $B_r(x_0)$  la boule fermée de rayon  $r$  centrée en 0 et  $p_r$  la projection sur  $B_r$  fournie par la proposition 1.1.11. Alors  $c : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  appartient à  $\mathcal{F}_{x_0}$  si et seulement si  $c(0) = x_0$  et  $p_r(c(t)) = c(t)$  si  $t \geq r$ , ce qui sont des conditions fermées.

De plus l'image de  $X$  est dense dans  $\mathcal{F}_{x_0}$ , puisque pour tout rayon géodésique, il existe une suite de chemins géodésiques qui converge (uniformément sur tout compact) vers ce chemin (on peut par exemple prendre des géodésiques  $[x_0, x_n]$  où  $(x_n)$  est une suite de points du rayon géodésique qui tend vers l'infini).

Remarquons que si  $c \in \mathcal{F}_{x_0}$ , alors pour tout  $r \geq 0$ , on a  $c(r) \in B(x_0, r)$ . Il en découle que si  $X$  est *propre*, c'est-à-dire si les boules fermées sont compactes, alors de plus  $\mathcal{F}_{x_0}$  est compact. En effet, c'est alors une famille de fonctions équi continues et ponctuellement relativement compacte. Le théorème d'Ascoli conclut alors à la relative compacité de  $\mathcal{F}_{x_0}$ , donc à sa compacité puisque c'est un espace fermé.

On définit ainsi une topologie  $\mathcal{T}(x_0)$  sur  $\overline{X}$ , en identifiant  $\overline{X}$  à  $\mathcal{F}_{x_0}$ .

**Proposition 1.1.22.** *Pour tout  $x_0, x'_0 \in X$ , les topologies  $\mathcal{T}(x_0)$  et  $\mathcal{T}(x'_0)$  coïncident.*

*Référence.* Voir [BH99, II.8, Proposition 8.8]. □

La topologie de l'espace  $\overline{X}$  est ainsi la topologie  $\mathcal{T}(x_0)$ , pour tout  $x_0$ . Cette topologie s'appelle la *topologie conique*, c'est la seule qu'on utilisera.

**Corollaire 1.1.23.** *Soit  $\gamma$  une isométrie de  $X$ . L'action de  $\gamma$  s'étend en un homéomorphisme de  $\overline{X}$ .*

*Preuve.* L'action de  $\gamma$  sur  $X$  induit naturellement une action de  $\gamma$  sur l'espace des fonctions continues de  $\mathbb{R}^+$  dans  $X$ . Comme  $\gamma$  est une isométrie, on voit que  $\gamma$  envoie  $\mathcal{F}_{x_0}$  sur  $\mathcal{F}_{\gamma x_0}$ . Par l'identification ci-dessus, ces deux espaces sont homéomorphes à  $\overline{X}$ . □

*Exemple 1.1.24.* Soit  $X$  une variété riemannienne CAT(0) de dimension  $n$ . Soit  $x \in X$ . À un vecteur unitaire  $u$  dans le plan tangent à  $X$  en  $x$ , on peut associer l'unique rayon géodésique partant de  $x$  à la vitesse  $v$ . Ainsi, on obtient une application bijective de l'espace  $T_x^1$  des vecteurs unitaires de l'espace tangent en  $x$  vers  $\partial_\infty X$ . Cette application est en fait un homéomorphisme, de sorte que le bord  $\partial_\infty X$  s'identifie à la sphère de dimension  $n - 1$ .

### 1.1.3. c) Horofonctions et compactification de Busemann

On décrit ici un second point de vue sur le bord visuel d'un espace CAT(0) et on définit en fait un bord pour n'importe quel espace métrique propre. Cette construction se trouve par exemple dans la deuxième partie de [BH99, Chapter II.8].

Soit donc  $(X, d)$  un espace métrique propre. Notons  $\mathcal{C}(X)$  l'espace des fonctions continues de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ , muni de la convergence uniforme sur tout compact et  $\mathcal{C}_0(X)$  le quotient de  $\mathcal{C}(X)$  par le sous-espace formé des fonctions constantes. Si l'on fixe un point-base  $x_0 \in X$ , on peut identifier  $\mathcal{C}_0(X)$  au sous-espace de  $\mathcal{C}(X)$  formé par les fonctions continues qui s'annulent en  $x_0$ .

On peut définir une injection  $\iota : X \rightarrow \mathcal{C}_0(X)$  par la formule  $\iota(x)(y) = d(x, y)$ , ou, si l'on choisit un point base et que l'on utilise l'identification ci-dessus,  $\iota(x)(y) = d(x, y) - d(x, x_0)$ .

**Définition 1.1.25.** La *compactification de Busemann*  $\widehat{X}$  de  $X$  est l'adhérence de  $\iota(X)$  dans  $\mathcal{C}_0(X)$ .

Comme les fonctions  $\iota(x)$  sont 1-lipschitziennes et que  $X$  est propre, l'espace  $\widehat{X}$  est compact.

**Théorème 1.1.26.** Soit  $X$  un espace CAT(0) complet. Alors l'inclusion  $\iota : X \rightarrow \mathcal{C}_0(X)$  s'étend en un unique homéomorphisme  $\overline{X} \rightarrow \widehat{X}$ .

**Référence.** Voir [BH99, II.8, Theorem 8.13] □

Ainsi, à chaque point du bord visuel est attaché une fonction de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . Les fonctions que l'on obtient de cette façon sont appelées *horofonctions*, ou *fonctions de Busemann*. Plus précisément, comme on raisonne modulo les fonctions constantes, il est nécessaire de fixer un point base : une fonction de Busemann  $b_{x,\xi}$  dépend de deux arguments, un point du bord visuel  $\xi$  et un point  $x$  de  $X$ , tel que  $b_{x,\xi}(x) = 0$ . Les lignes de niveaux  $b_{x,\xi}^{-1}(r)$  sont appelés *horosphères*. De la même manière, les *horoboules* (fermées) sont définies comme étant les ensembles de la forme  $b_{x,\xi}^{-1}([-\infty, r])$ , pour  $r \in \mathbb{R}$ .

Remarquons que les fonctions de Busemann sont convexes, en tant que limite de fonctions convexes ; par conséquent, les horoboules sont des convexes de  $X$ . Les horofonctions satisfont de plus l'«identité de cocycle» suivante :

$$b_{x,\xi}(y) - b_{x,\xi}(z) = b_{z,\xi}(y).$$

En effet, cette identité est vérifiée de manière évidente lorsque  $\xi$  est un point de  $X$  et s'obtient ensuite par passage à la limite.

## 1.2 Classification des isométries d'un espace CAT(0)

Les isométries d'un espace CAT(0) se divisent en trois grandes classes : les isométries elliptiques, paraboliques et hyperboliques. On explique ici leur définition et les quelques propriétés que l'on utilisera. Un exemple à garder en tête est celui de  $SL(2, \mathbb{R})$  agissant sur le plan hyperbolique  $\mathbb{H}^2$  ; cet exemple explique la terminologie utilisée.

**Définition 1.2.1.** Soit  $X$  un espace métrique et  $\gamma$  une isométrie de  $X$ . Le *déplacement* de  $\gamma$  est la fonction  $d_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}_+$  définie par  $d_\gamma(x) = d(\gamma.x, x)$ . La *longueur de translation*

de  $\gamma$  est le nombre  $|\gamma| = \inf\{d_\gamma(x) \mid x \in X\}$ . On note  $\text{Min}(\gamma)$  l'ensemble des points où cet infimum est atteint. L'isométrie  $\gamma$  est dite *semi-simple* si  $\text{Min}(\gamma)$  est non vide.

**Définition 1.2.2.** Une isométrie  $\gamma$  d'un espace métrique  $X$  est dite *elliptique* si elle fixe un point, *hyperbolique* si  $|\gamma| > 0$  et si  $d_\gamma$  atteint son infimum et *parabolique* si  $\text{Min}(\gamma)$  est vide.

Il est clair qu'une isométrie rentre dans exactement une de ces trois catégories.

*Exemple 1.2.3.* Regardons l'action de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  sur le plan hyperbolique, vu comme le demi-plan supérieur dans  $\mathbb{C}$ ; l'action d'une matrice  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  étant donnée par l'homographie  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ .

Alors, à conjugaison près par une matrice dans  $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ , une isométrie parabolique est de la forme  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  : ce sont exactement les matrices de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui ne sont pas diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ . Ainsi, les isométries semi-simples correspondent aux matrices de  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$  qui sont semi-simples, c'est-à-dire diagonalisables sur  $\mathbb{C}$ . Les matrices qui agissent comme des isométries hyperboliques sur  $\mathbb{H}^2$  sont les matrices diagonalisables ayant des valeurs propres complexes de modules différents de 1 et les isométries elliptiques s'obtiennent comme des matrices diagonalisables ayant des valeurs propres complexes de module égal à 1.

*Exemple 1.2.4.* Considérons  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  agissant sur son espace symétrique  $\text{SDP}^1(n, \mathbb{R})$  (si  $n = 2$ , on retrouve l'exemple précédent). Les éléments de  $\text{SL}_n(\mathbb{R})$  qui agissent par isométries semi-simples sont également les matrices semi-simples, c'est-à-dire diagonalisables sur  $\mathbb{C}$  [BH99, Proposition II.10.61]. Parmi celles-ci, les isométries elliptiques sont celles qui sont conjuguées à un élément de  $\text{SO}(n, \mathbb{R})$ , c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont de module égal à 1.

Cette classification des isométries est particulièrement intéressante pour les espaces CAT(0); la dynamique des isométries a alors une structure plus précise. On peut déjà remarquer que le lemme de point fixe de Bruhat-Tits (proposition 1.1.12) a pour conséquence qu'une isométrie  $\gamma$  est elliptique si et seulement si elle a une orbite bornée. Par conséquent, si  $\gamma^n$  est elliptique, alors  $\gamma$  l'est également.

Un avantage qu'il y a à travailler avec des immeubles est qu'il n'y a pas à considérer les isométries paraboliques. Plus généralement :

**Proposition 1.2.5.** *Soit  $X$  un complexe métrique simplicial avec un nombre fini de classes d'isométries de simplexes. Alors toutes les isométries de  $X$  sont semi-simples. De plus, l'ensemble des longueurs de translation de  $\text{Isom}(X)$  est un sous-ensemble discret de  $\mathbb{R}^+$ .*

*Référence.* Voir [Bri99, Theorem A]. □

La preuve utilise notamment le lemme suivant, que l'on aura l'occasion d'utiliser plus bas :

**Lemme 1.2.6.** *On garde les hypothèses de la proposition précédente. Soient  $S$  et  $S'$  deux types d'isométries de faces, soient  $a \in S$  et  $b \in S'$ . Notons  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des  $a' \in X$  (resp.  $b' \in X$ ) tels qu'il existe une isométrie  $f$  (resp.  $g$ ) de  $S$  (resp.  $S'$ ) vers une face dans  $X$  avec  $f(a) = a'$  (resp.  $g(b) = b'$ ).*

Alors  $\{d(a', b') \mid a' \in A, b' \in B\}$  est un ensemble discret.

**Référence.** Voir [Bri99, Lemma 2]. □

Les isométries hyperboliques ont ceci d'intéressant que l'on peut comprendre  $\text{Min}(\gamma)$  :

**Proposition 1.2.7.** *Soit  $X$  un espace métrique  $\text{CAT}(0)$  et  $\gamma$  une isométrie de  $X$ . Alors  $\gamma$  est hyperbolique si et seulement si il existe une géodésique  $c : \mathbb{R} \rightarrow X$  telle que  $\gamma.c(t) = c(t + a)$ . Une telle géodésique est appelée axe de  $\gamma$ ; on a toujours pour un tel axe  $a = |\gamma|$ .*

*De plus, tous les axes de  $\gamma$  sont asymptotes et leur réunion est égale à  $\text{Min}(\gamma)$ .*

**Référence.** Voir [BH99, Chapter II.6, Theorem 6.8]. □

Ainsi, à une isométrie hyperbolique  $\gamma$  d'un espace  $\text{CAT}(0)$   $X$  sont naturellement associés des axes, qui pointent tous vers le même point de  $\partial_\infty X$  appelé *point attractif* et noté  $\gamma^+$ ; de même, on peut associer à  $\gamma$  un *point répulsif*, noté  $\gamma^-$ . Le point attractif de  $\gamma^{-1}$  est  $\gamma^-$ .

**Proposition 1.2.8.** *Soit  $\gamma$  une isométrie hyperbolique d'un espace  $\text{CAT}(0)$  et soit  $\gamma^+$  son point attractif. Alors, pour tout  $x \in X$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n.x = \gamma^+$ .*

**Preuve.** Soit  $c$  un axe de  $\gamma$  et soit  $x = c(0)$ . Par définition, on a  $\gamma^n.x = c(n|\gamma|)$ ; par conséquent, on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \gamma^n.x = \gamma^+$ . Si maintenant  $y \in X$ , on a  $d(\gamma^n.y, \gamma^n.x) = d(y, x)$ . Cela implique que le rayon géodésique  $[x, \gamma^n.y]$  converge uniformément sur tout compact vers le rayon géodésique  $c|_{\mathbb{R}^+}$  et donc que  $\gamma^n.y$  converge vers  $\xi$ . □

### 1.3 Bord raffiné

On introduit ici une construction d'un bord plus «précis» que le bord visuel : on va identifier des géodésiques qui sont asymptotes en un sens plus fort que celui utilisé ci-dessus.

Cette construction remonte à F. Karpelevič [Kar67] dans le cas des espaces symétriques. Elle a été ensuite généralisée au cas des espaces  $\text{CAT}(0)$  par B. Leeb [Lee00]. Enfin, il a été utilisé par P.-E. Caprace [Cap09] dans l'étude des groupes moyennables totalement discontinus agissant sur des espaces  $\text{CAT}(0)$ .

Dans tout ce paragraphe,  $(X, d)$  désigne un espace  $\text{CAT}(0)$  complet.

Soit  $\xi \in \partial_\infty X$ . Notons  $X_\xi^*$  l'ensemble des rayons géodésiques pointant vers  $\xi$ . Si  $c, c' \in X_\xi^*$ , on note

$$d_\xi(c, c') = \inf_{t, t'} d(c(t), c'(t')).$$

Soit  $b_\xi$  une fonction de Busemann associée à  $\xi$ . Notons  $B(\xi, r)$  l'horoboule  $b_\xi^{-1}([-\infty, r])$ . Alors  $B(\xi, r)$  est un convexe fermé, ce qui permet d'utiliser la projection associée  $p_r$  donnée par la proposition 1.1.11. Comme  $c$  pointe vers  $\xi$ , il arrive au bout d'un certain temps dans  $B(\xi, r)$ . Comme  $c$  est un rayon géodésique, on voit que pour tout  $r < b_\xi(c(t))$ , il existe  $t_r > t$  tel que  $p_r(c(t)) = c(t_r)$ ; on a de plus  $t_r - t = b_\xi(c(t)) - r$ . Il en est de même pour  $c'$  et comme  $p_r$  est 1-lipschitzienne, on a  $d(c(t), c'(t')) \geq d(c(t_r), c'(t'_r))$  pour tout  $r$  assez petit. En particulier, la distance  $d_\xi$  ne change pas si l'on tronque le début des rayons géodésiques  $c$  et  $c'$ .

De plus, on a  $t_r - t = b_\xi(c(t)) - r$  et  $t'_r - t' = b_\xi(c'(t')) - r$ . En particulier, si l'on tronque  $c$  et  $c'$  de sorte que  $b_\xi(c(0)) = b_\xi(c'(0))$ , alors on a  $t_r = t'_r$  pour tout  $r$ . Par conséquent, on a  $d(c(t), c'(t)) \geq d(c(t''), c'(t''))$  pour tout  $t'' > t$ . Dans ce cas, on a donc en fait

$$d_\xi(c, c') = \lim_{t \rightarrow +\infty} d(c(t), c'(t)).$$

On en déduit, par passage à la limite, que  $d_\xi$  vérifie l'inégalité triangulaire. Si l'on identifie les rayons géodésiques *fortement asymptotes*, c'est-à-dire les rayons  $c, c'$  tels que  $d_\xi(c, c') = 0$ , alors on obtient un espace métrique. Il n'y a pas de raison *a priori* que cet espace soit complet, c'est pourquoi on considère son complété  $X_\xi$ .

À tout point  $x$  de  $X$ , on peut associer le rayon géodésique de  $x$  à  $\xi$ . On définit ainsi une projection  $\pi_\xi : X \rightarrow X_\xi$ .

**Proposition 1.3.1.** *L'espace  $X_\xi$  est un espace de Hadamard.*

*Référence.* Voir [Lee00, Proposition 2.8]. □

Comme  $X_\xi$  est lui-même un espace CAT(0) complet, il est possible de considérer le bord visuel de  $X_\xi$ , et également l'espace des classes de rayon géodésiques *fortement asymptotes* pointant vers  $\xi'$  dans  $X_\xi$ . On obtient ainsi un espace  $X_{\xi, \xi'}$ .

On veut ensuite itérer cette construction, jusqu'à ce qu'on arrive à un espace borné, ou plus généralement un espace dont le bord visuel est vide. Pour que ce soit toujours possible, il faut faire des hypothèses sur  $X$ . On peut par exemple supposer que  $X$  satisfait à la condition suivante :

**Définition 1.3.2.** Un espace métrique  $X$  est à *géométrie bornée* si, pour tout  $r > 0$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe un réel  $K_{r, \varepsilon}$  tel que, pour tout  $x \in X$ , le nombre de points  $N(x, r, \varepsilon)$  contenus dans la boule  $B(x, r)$  et qui soient deux à deux à distance  $> \varepsilon$  est borné par  $K_{r, \varepsilon}$ .

*Exemple 1.3.3.* Un espace métrique localement compact avec un groupe d'isométrie cocompact est à géométrie bornée [Cap09, Lemme 4.1.(ii)].

Le corollaire 4.4 de [Cap09] implique alors qu'il existe un  $N$ , dépendant uniquement de  $X$ , tel que  $X_{\xi_1, \dots, \xi_N}$  est borné (et par conséquent de bord visuel vide).

Cependant, nous allons travailler sur des immeubles qui ne sont pas forcément localement finis, et donc pas à géométrie bornée. On va donc utiliser une autre hypothèse : on travaillera sur des espaces dont la *dimension géométrique* est finie. Pour définir cette notion de dimension géométrique, on doit d'abord définir l'espace des directions (voir [KL97, Section 2.3]).

Pour cela, soit  $X$  un espace métrique CAT( $\kappa$ ) pour un certain  $\kappa$ . Soit  $p \in X$ . On note  $\Sigma_p^*(X)$  l'ensemble des géodésiques issues de  $p$ , où deux géodésiques sont identifiées si elles forment un angle nul.

Il est facile de vérifier que l'angle entre deux directions donne une métrique sur  $\Sigma_p^*(X)$  [BH99, Proposition 1.14]. On peut ensuite démontrer que cet espace possède des propriétés de courbure intéressantes :

**Proposition 1.3.4.** *Le complété de l'espace  $\Sigma_p^*(X)$  pour la métrique  $\angle_p$  est un espace CAT(1).*

*Références.* [Nik95], voir aussi [BH99, Theorem 3.19]. □



**Définition 1.3.5.** Le complété de  $\Sigma_p^*(X)$  est noté  $\Sigma_p(X)$ ; on l'appelle *l'espace des directions* en  $p$ .

On définit alors, en suivant B. Kleiner, la dimension géométrique comme suit.

**Définition 1.3.6.** La *dimension géométrique*  $\text{GeomDim}$  est la plus petite fonction à valeur dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , de source la classe des espaces  $\text{CAT}(1)$ , telle que, pour tout espace  $X$  qui soit  $\text{CAT}(1)$ , on ait  $\text{GeomDim}(X) = 0$  si  $X$  est discret et  $\text{GeomDim}(X) \geq 1 + \text{GeomDim}(\Sigma_p(X))$  pour tout  $p \in X$ .

**Référence.** Voir [Kle99, p.2]. □

Le théorème de B. Kleiner est alors le suivant.

**Théorème 1.3.7.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(\kappa)$ . Alors  $\text{GeomDim}(X)$  est égal au supremum des dimensions topologiques des compacts inclus dans  $X$ .*

**Référence.** [Kle99, Theorem A] □

Ainsi, si  $X$  est un complexe cellulaire (par exemple, un immeuble), la dimension géométrique de  $X$  est égale au supremum des dimensions topologiques des cellules.

On peut alors démontrer la proposition suivante.

**Proposition 1.3.8.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  complet et soit  $\xi \in \partial_\infty X$ . Alors on a  $\text{GeomDim}(X_\xi) \leq \text{GeomDim}(X) - 1$ .*

(Par convention,  $\infty - 1 = \infty$ ).

**Référence.** Voir la remarque qui suit le corollaire 4.4 de [Cap09]. □

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 1.3.9.** *Si  $X$  est un espace  $\text{CAT}(0)$  tel que  $\text{GeomDim}(X) = n < \infty$ , alors pour toute suite  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  avec  $\xi_1 \in \partial_\infty X$  et  $\xi_{i+1} \in \partial_\infty X_{\xi_1, \dots, \xi_i}$  pour tout  $i = 1, \dots, n-1$ , l'espace  $\partial_\infty X_{\xi_1, \dots, \xi_n}$  est vide.*

Dans le cas des immeubles, on peut également utiliser un autre argument. En effet, on peut définir une autre notion de dimension (le rang maximal d'un résidu sphérique, voir la section 2.2.3 pour les définitions). On démontre alors que cette dimension a toujours un sens dans  $X_\xi$  et qu'elle est strictement inférieure à la dimension de  $X$  (voir la remarque 4.3.3 et la preuve du lemme 3.2.29). Notons que la dimension de l'immeuble  $X$  ainsi définie est en fait la dimension de la réalisation de Davis-Moussong de  $X$ , définie dans la section 2.2.4.

Il est ainsi possible de définir le bord raffiné d'un espace de Hadamard :

**Définition 1.3.10.** Soit  $X$  un espace de Hadamard de dimension géométrique finie. Le *bord raffiné*  $\partial_\infty^{\text{fine}} X$  est défini comme l'ensemble des suites  $(\xi_1, \dots, \xi_k, x)$  telles que  $\xi_1 \in \partial_\infty X$ ,  $\xi_{i+1} \in \partial_\infty X_{\xi_1, \dots, \xi_i}$  pour tout  $i$  entre 1 et  $k-1$  et  $x \in X_{\xi_1, \dots, \xi_k}$ . L'entier  $k$  est appelé *niveau* du point  $(\xi_1, \dots, \xi_k, x) \in \partial_\infty^{\text{fine}} X$ .

Dans le cas des immeubles, on verra (théorème 4.3.9) que chaque espace  $X_\xi$  peut être identifié à un immeuble, dont le groupe de Weyl est engendré par les réflexions par rapport aux murs contenant une géodésique pointant vers  $\xi$ . Ainsi, le bord raffiné est dans ce cas un recollement d'immeubles.

## 1.4 Groupes totalement discontinus agissant sur des espaces CAT(0)

Le but de cette section est d'analyser les groupes moyennables totalement discontinus agissant par isométries sur des espaces CAT(0) convenables. Pour des rappels sur la notion de groupe moyennable, on peut se reporter à la section 6.1.

### 1.4.1 Groupes topologiquement localement finis

La notion de groupe topologiquement fini a été introduite pour la première fois par Platonov [Pla65]. Sa pertinence dans l'étude des groupes moyennables agissant sur des espaces CAT(0) a ensuite été mise en valeur dans [Cap09].

**Définition 1.4.1.** Soit  $G$  un groupe topologique. Un sous-groupe  $H$  de  $G$  est dit *topologiquement localement fini* si l'adhérence de tout sous-groupe de type fini de  $H$  est compact. Le groupe  $G$  lui-même est dit topologiquement localement fini s'il est topologiquement localement fini comme sous-groupe de  $G$ .

Si  $H$  est un sous-groupe fermé de  $G$  qui est topologiquement localement fini, on peut s'attendre à ce que  $H$  soit lui-même un groupe topologiquement localement fini. Cela découle du lemme suivant :

**Lemme 1.4.2.** *Soit  $G$  un groupe localement compact et  $H$  un sous-groupe topologiquement localement fini. Alors l'adhérence  $\overline{H}$  est topologiquement localement fini.*

*Référence.* Voir [Cap09, Lemme 2.1]. □

Il est alors possible de définir le radical topologiquement localement fini, ou *LF-radical*, noté  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G)$ , comme étant le sous-groupe normal topologiquement localement fini maximal de  $G$ . Le lemme ci-dessus entraîne que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G)$  est fermé.

*Exemple 1.4.3.* Soit  $K$  un corps local non-archimédien. Notons  $|\cdot|$  la valeur absolue de  $K$  et  $\mathcal{O}_K$  l'anneau des entiers. Alors —contrairement au cas archimédien— le groupe  $(K, +)$  est topologiquement localement fini. En effet, si  $x_1, \dots, x_n$  sont des éléments de  $K$ , alors le sous-groupe qu'ils engendrent et contenu dans la boule centrée en 0 et de rayon le maximum des  $|x_i|$ , pour  $i$  entre 1 et  $n$ .

Par contre, le groupe multiplicatif  $K^\times$  n'est pas topologiquement localement fini : si  $|x| \neq 1$ , alors  $x^n$  sort de tout compact quand  $n$  tend vers  $\pm\infty$ . Ainsi, on voit que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(K^\times) \subset \mathcal{O}_K^\times$ , qui est lui-même un groupe compact. Par conséquent, on a égalité :  $\text{Rad}_{\text{LF}}(K^\times) = \mathcal{O}_K^\times$ .

*Exemple 1.4.4.* Avec les mêmes notations que ci-dessus, notons  $P$  le groupe formé des matrices triangulaires supérieures de  $\text{SL}_3(K)$ . Le même argument que ci-dessus montre que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(P)$  est inclus dans le groupe  $D$  des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a \in \mathcal{O}_K^\times & x \in K & z \in K \\ 0 & b \in \mathcal{O}_K^\times & y \in K \\ 0 & 0 & (ab)^{-1} \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que  $D$  est topologiquement localement fini. En effet, si  $A_1, \dots, A_n$  sont des matrices dans  $D$ , alors un simple calcul permet de vérifier que les éléments de

la surdiagonale des matrices dans le groupe engendré par  $A_1, \dots, A_n$  sont bornés. Il s'ensuit que l'élément du coin en haut à droite est également borné. On en déduit donc que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(P) = D$ .

Le groupe  $D$  apparaît comme un exemple de «groupe limite» dans [GR06, §6.2]. Des calculs similaires prouvent que les autres groupes limites qui apparaissent dans [GR06, §6.2], comme par exemple le groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & * \in K \\ c & d & * \in K \\ 0 & 0 & (ad - bc)^{-1} \end{pmatrix},$$

avec  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathcal{O}_K)$ , sont topologiquement localement finis.

On verra dans la section 4.1 une interprétation géométrique et une généralisation de ce fait.

### 1.4.2 Un groupe moyennable fixe un point

Le but de cette section est d'expliquer le théorème suivant :

**Théorème 1.4.5.** *Soit  $X$  un complexe simplicial métrique  $\text{CAT}(0)$  et avec un nombre fini de types d'isométries de simplexes. Soit  $G$  un groupe moyennable qui agit simplicialement et proprement sur  $X$  par isométries. Alors  $G$  fixe un point dans l'union de  $X$  et du bord raffiné  $\partial_\infty^{\text{fine}} X$ .*

Ce théorème est dû à P.-E. Caprace dans le cas où  $X$  est propre [Cap09]. Il utilise notamment le théorème suivant, dû à S. Adams et W. Ballmann (qui généralise un théorème de M. Burger et V. Schroeder [BS87]).

**Théorème 1.4.6.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  propre et  $G$  un groupe moyennable localement compact agissant continûment par isométries sur  $X$ . Alors ou bien  $G$  stabilise un plat de  $X$ , ou bien  $G$  fixe un point dans  $\overline{X} = X \cup \partial_\infty X$ .*

**Référence.** Voir [AB98]. □

Rappelons qu'un *plat* est un sous-espace isométrique à un espace euclidien.

Après la parution de l'article [Cap09], le théorème d'Adams et Ballmann a été généralisé par P.-E. Caprace et A. Lytchak à un espace  $X$  qui n'est plus supposé propre mais simplement de dimension géométrique finie :

**Théorème 1.4.7.** *Soit  $X$  un espace  $\text{CAT}(0)$  de dimension géométrique finie et  $G$  un groupe moyennable localement compact agissant continûment par isométries sur  $X$ . Alors ou bien  $G$  stabilise un plat de  $X$ , ou bien  $G$  fixe un point dans  $\overline{X}$ .*

**Référence.** Cela découle de [CL09b, Theorem 1.6] et du fait qu'un espace  $\text{CAT}(0)$  de dimension géométrique finie est de «dimension télescopique finie» [CL09b, Section 2.1]. □

La preuve de l'article [Cap09] s'adapte sans changement en remplaçant le théorème 1.4.6 par le théorème 1.4.7 et permet de remplacer l'hypothèse « $X$  est propre» par l'hypothèse « $X$  est de dimension géométrique finie» (ce qui est automatique avec les hypothèses du théorème 1.4.5).

L'avantage du théorème 1.4.5 est qu'il fournit un point fixe, au lieu d'une dichotomie. Par contre, il nécessite une hypothèse supplémentaire : ici, que  $X$  est un complexe simplicial. Dans [Cap09], ce théorème est prouvé avec l'hypothèse que l'espace  $X$  est quelconque, mais avec un groupe d'isométrie cocompact. Il est également suggéré que la preuve s'adapte facilement au cas où  $X$  est un complexe simplicial avec un nombre fini de classes d'isométries de simplexes ; on donne dans la suite de la section les grandes lignes de la preuve dans ce cas.

Notons qu'il existe un morphisme de groupe  $\phi_\xi$  du stabilisateur  $\text{Isom}(X)_\xi$  de  $\xi \in \partial_\infty X$  dans  $\text{Isom}(X_\xi)$ , défini par  $\phi_\xi(g).\pi_\xi(x) = \pi_\xi(gx)$ . Ce morphisme est continu d'après [Cap09, Proposition 4.3.(ii)]. Ce morphisme permet de faire une récurrence : on commence par démontrer que  $G$  fixe un point  $\xi \in \overline{X}$ , si  $\xi \in \partial_\infty X$ , on regarde l'action de  $G$  sur  $X_\xi$ , etc.

Plus précisément, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.4.8.** *Soit  $X$  un complexe simplicial métrique CAT(0) et avec un nombre fini de types d'isométries de simplexes. Soit  $G$  un groupe moyennable qui agit simplicialement et proprement sur  $X$  par isométries. Soit  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$  une suite telle que  $\xi_1 \in \partial_\infty X$  et  $\xi_{i+1} \in \partial_\infty X_{\xi_1, \dots, \xi_i}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ . Soit  $F$  un plat dans  $X_{\xi_1, \dots, \xi_n}$ . Alors  $H$  fixe virtuellement un point de  $F \cup \partial_\infty F$ .*

**Référence.** Voir [Cap09, Lemme 5.2]. Ce lemme est énoncé avec l'hypothèse que  $\text{Isom}(X)$  est cocompact, mais ceci n'est utilisé que via le fait que les longueurs de translations des éléments de  $G$  forment un ensemble discret. Ceci est assuré par l'hypothèse supplémentaire que  $X$  est un complexe simplicial avec un nombre fini de types d'isométries de simplexes (proposition 1.2.5).  $\square$

La preuve du théorème 1.4.5 s'en déduit avec une récurrence facile.

### 1.4.3 Structure des groupes moyennables

Dans l'optique du théorème précédent, l'avantage du bord raffiné par rapport au bord visuel est que les stabilisateurs de points du bord raffiné sont en fait moyennables. Ainsi, on obtient une «paramétrisation» géométrique des groupes moyennables maximaux par les points du bord raffiné. On obtient également un théorème de structure des groupes moyennables.

**Théorème 1.4.9.** *Soit  $X$  un complexe simplicial métrique CAT(0) et avec un nombre fini de types d'isométries de simplexes. Soit  $G$  un groupe agissant proprement et simplicialement sur  $X$ . Soit  $x \in \partial_\infty^{\text{fine}} X$ . Alors le stabilisateur  $G_x$  est une extension d'un groupe topologiquement localement fini par un groupe abélien. En particulier, il est moyennable.*

**Corollaire 1.4.10.** *Avec les hypothèses du théorème, tout sous-groupe moyennable fermé de  $G$  est une extension d'un groupe localement fini par un groupe virtuellement abélien.*

**Preuve du théorème 1.4.9.** Voir [Cap09, Proposition 4.5]. Encore une fois, on a remplacé ici l'hypothèse : «l'action de  $G$  est cocompacte» par « $X$  est un complexe simplicial avec un nombre fini de classes d'isométrie de simplexes». Voici les grandes lignes de la preuve.

Tout d'abord, si  $\xi \in \partial_\infty X$ , choisissons une fonction de Busemann  $b_{a,\xi}$ . On déduit facilement de l'identité de cocycle que la fonction  $\beta_\xi : G_\xi \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\beta_\xi(g) = b_{a,\xi}(g.x)$  est indépendante du point  $a$  choisi et que  $\beta_\xi$  est un morphisme de groupe. On appelle  $\beta_\xi$  le *morphisme de Busemann* centré en  $\xi$ .

Si  $x = (\xi_1, \dots, \xi_n, y) \in \partial_\infty^{\text{fine}} X$ , posons  $H = G_x$ . Soit

$$\beta = \beta_{\xi_1} \times \dots \times \beta_{\xi_n} : H \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

L'objectif est alors de prouver que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(H)$  est égal à  $K := \text{Ker}(\beta)$ . Il est clair, au vu de la définition de  $\beta$ , que tous les éléments elliptiques de  $H$  sont contenus dans  $K$ . Par conséquent, on a  $\text{Rad}_{\text{LF}}(H) \subset K$ .

Pour démontrer l'inclusion inverse, supposons pour simplifier que  $n = 1$ , de sorte que  $x = (\xi, y)$ . Soit  $z \in X$  tel que  $\pi_\xi(z) = y$  et soit  $\rho : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$  le rayon géodésique de  $y$  à  $\xi$ . Posons  $x_n = \rho(n)$ . Si  $(g_1, \dots, g_k)$  sont des éléments de  $K$ , alors par définition on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, g_i x_n) = 0$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

Il faut alors démontrer qu'il existe un point fixé par tous les  $g_i$ . La preuve est en fait un raffinement de la preuve de la proposition 1.2.5. Notons  $S_n$  une face contenant  $x_n$ . Comme il y a un nombre fini de types d'isométries de faces, on peut, quitte à extraire une sous-suite de  $(x_n)$ , supposer qu'il existe une face  $S$  et une isométrie  $f_n : S \rightarrow S_n$ . Comme  $S$  est compacte, on peut extraire à nouveau pour supposer que  $f_n^{-1}(x_n)$  converge vers un point  $x$ . On a alors :

$$d(g_i f_n(x), f_n(x)) \leq d(g_i f_n(x), g_i x_n) + d(g_i x_n, x_n) + d(x_n, f_n(x)).$$

Par hypothèse, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d(x_n, f_n(x)) = 0$  et on a également choisi  $x_n$  pour que  $\lim_n d(g_i x_n, x_n) = 0$ . Par conséquent, le membre de gauche tend vers 0. Mais, comme l'action de  $G$  est cellulaire, le lemme 1.2.6 s'applique et on en déduit que pour  $n > N_i$ ,  $f_n(x)$  est fixé par  $g_i$ . Par conséquent, pour  $n > \max(N_i)$ ,  $f_n(x)$  est fixé par  $g_i$ , ce qui démontre que  $K$  est topologiquement localement fini, et par conséquent que  $K \subset \text{Rad}_{\text{LF}}(H)$ .

Dans le cas où  $n$  est quelconque, on procède par récurrence comme dans la preuve du (iii) de [Cap09, Proposition 4.5.3] pour arriver à trouver une suite  $(x_n)$  telle que  $d(g_i x_n, x_n) = 0$  pour tout  $i$ ; comme ci-dessus, on en déduit que  $K \subset \text{Rad}_{\text{LF}}(H)$ .  $\square$

# Chapitre 2

## Immeubles

Ce chapitre a pour but de définir et de donner les propriétés basiques dont on aura besoin dans la suite du texte. Pour une introduction historique rapide sur le sujet, on pourra consulter l'introduction générale.

Ce chapitre se divise en trois sections. On commence par introduire les groupes de Coxeter, qui sont les briques de base des immeubles. La seconde section constitue l'essentiel du chapitre. On y définit tout d'abord les *systèmes de chambres*, qui sont la donnée combinatoire qui encode les immeubles et on explique comment ceux-ci donnent lieu à des espaces métriques. On définit ensuite les immeubles, de deux manières différentes : la première est purement combinatoire, tandis que la seconde utilise l'espace métrique associé. La preuve de l'équivalence des deux définitions est l'occasion d'introduire des outils qui seront utiles par la suite. Enfin, on explique comment les immeubles peuvent être vus comme des espaces CAT(0). Finalement, la dernière section explique la structure que possèdent les groupes agissant sur les immeubles : on y explique d'abord ce qu'est un *système de Tits*. On définit enfin la topologie que l'on va utiliser sur ces groupes.

### 2.1 Groupes de Coxeter

La notion d'immeuble repose sur celle d'un groupe de Coxeter, qu'il nous faut donc définir et étudier. La référence historique pour ce chapitre est [Bou07a], une référence plus récente est [Dav08]. On présente ici les notions et propriétés des groupes de Coxeter dont nous aurons besoin dans l'étude des immeubles.

#### 2.1.1 Définition et premiers exemples

La définition la plus simple d'un groupe de Coxeter est donnée par une présentation.

**Définition 2.1.1.** Un groupe de Coxeter  $(W, S)$  est un groupe donné par une présentation

$$W = \langle s \in S \mid (st)^{m_{st}} = 1, s, t \in S \rangle,$$

où  $m_{st}$  est un élément de  $\mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$  tel que  $m_{ss} = 1$ ,  $m_{st} = m_{ts}$  pour tout  $s, t \in S$  et de plus  $m_{st} \geq 2$  si  $s \neq t$ . Si  $m_{st} = \infty$ , on ne met pas de relation entre  $s$  et  $t$ .

Notons qu'un groupe de Coxeter n'est pas seulement un groupe : il est muni d'un système de générateurs privilégié,  $S$ . On parle également parfois de *système de Coxeter*.

Ces générateurs sont par définition d'ordre 2 et doivent être pensés comme des réflexions, comme le montrent les exemples suivants.

*Exemple 2.1.2.* Le groupe  $W = \mathfrak{S}_n$  des permutations d'un ensemble à  $n$  éléments, engendré par les transpositions de la forme  $(i, i + 1)$  pour  $i$  variant de 1 à  $n - 1$  est un groupe de Coxeter.

Ce groupe s'interprète géométriquement de la façon suivante :  $W$  agit fidèlement sur un  $(n - 1)$ -simplexe régulier par permutation des sommets. Les transpositions agissent comme des réflexions orthogonales par rapport aux hyperplans médians des arêtes.

*Exemple 2.1.3.* Soit le groupe de Coxeter

$$W = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^3 = (st)^3 = (rt)^3 = 1 \rangle.$$

Le groupe  $W$  agit par isométries sur le plan euclidien. Les générateurs  $r$ ,  $s$  et  $t$  agissent comme des réflexions par rapport aux côtés d'un triangle équilatéral. Les conjugués des éléments de  $S$  agissent bien sûr également comme des réflexions orthogonales par rapport à certaines droites. L'ensemble de ces droites dessine un pavage régulier du plan euclidien par des triangles équilatéraux. (voir figure 2.1)

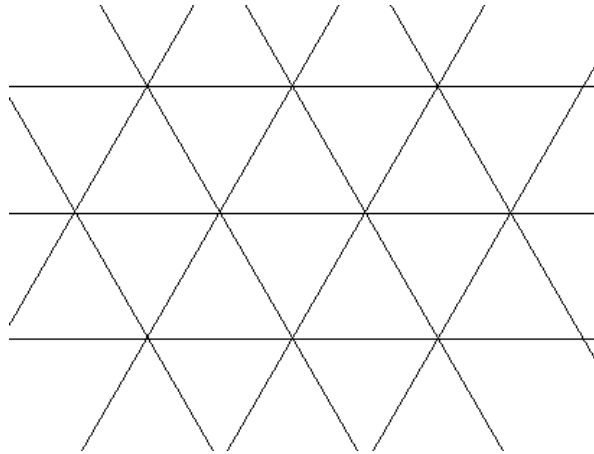


FIG. 2.1 –  $W = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^3 = (st)^3 = (rt)^3 = 1 \rangle$  et pavage euclidien associé.

*Exemple 2.1.4.* Considérons cette fois le groupe de Coxeter

$$W = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^6 = (rt)^4 = 1 \rangle.$$

Le groupe  $W$  agit par isométries sur le plan hyperbolique. Les générateurs  $r$ ,  $s$  et  $t$  agissent comme des réflexions par rapport à des géodésiques qui forment deux à deux des angles de  $\pi/2$ ,  $\pi/6$  et  $\pi/4$ . Les conjugués des éléments de  $S$  agissent également comme des réflexions par rapport à des géodésiques, qui dessinent un pavage régulier du plan hyperbolique par des triangles d'angles aux sommets  $\pi/4$ ,  $\pi/2$  et  $\pi/6$  (voir figure 2.2).

Les exemples précédents illustrent chacun un type de groupe de Coxeter : les groupes associés à des pavages de la sphère, du plan euclidien ou du plan hyperbolique. Dans ces trois situations, le théorème suivant, dû à Poincaré (voir par exemple [dlH91, Chapter 3]), permet de comprendre la relation entre le pavage et la présentation de  $W$ .

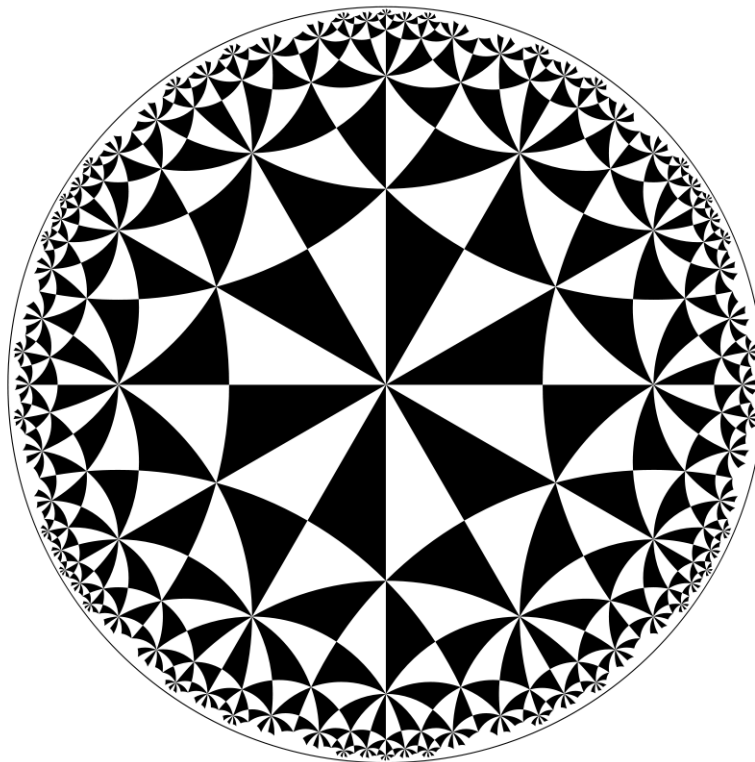


FIG. 2.2 –  $W = \langle r, s, t \mid r^2 = s^2 = t^2 = (rs)^2 = (st)^6 = (rt)^4 = 1 \rangle$  et pavage associé.

**Théorème 2.1.5.** Désignons par  $X$  l'un des espaces suivants : l'espace euclidien, la sphère ou l'espace hyperbolique. Soit  $P$  un polyèdre dans  $X$ . Associons à chaque face de codimension 1 de  $P$  un élément de  $S$ . Si l'angle entre la face  $s$  et la face  $t$  est de la forme  $\pi/m_{st}$  avec  $m_{st}$  entier (éventuellement  $\infty$  si les deux faces sont parallèles), alors le groupe engendré par les réflexions  $r_s$  par rapport aux hyperplans prolongeant les faces de  $P$  est un groupe de Coxeter, donné par la présentation suivante :

$$W = \langle r_s, s \in S \mid (r_s r_t)^{m_{st}} = r_s^2 = 1, s, t \in S \rangle.$$

De plus,  $P$  est alors un domaine fondamental pour l'action de  $W$  sur  $X$ .

**Définition 2.1.6.** Les groupes de Coxeter obtenus comme dans le théorème de Poincaré à partir d'un pavage de la sphère sont appelés groupe de Coxeter *sphériques*. Ceux obtenus à partir d'un pavage de l'espace euclidien sont appelés indifféremment *euclidiens* ou *affines* et ceux obtenus à partir d'un pavage de l'espace hyperbolique sont appelés *hyperboliques*.

Cependant, tous les groupes de Coxeter ne peuvent pas s'obtenir de cette manière. On verra dans la section 2.2.4 qu'il est possible d'associer à un groupe de Coxeter quelconque un espace géométrique, équivalent de  $X$  dans le théorème ci-dessus, mais obtenu par des recollements moins naturels.

Notons tout de même que tous les groupes de Coxeter finis peuvent être vus comme agissant sur une sphère [Bou07a, V.4.8, Théorème 2]. Ainsi, les expressions «groupe de Coxeter fini» et «groupe de Coxeter sphérique» sont équivalentes.



### 2.1.2 Un peu de combinatoire des groupes de Coxeter

Dans le théorème de Poincaré, on a noté que le polyèdre  $P$  est un domaine fondamental pour l'action de  $W$  sur  $X$ . Ainsi, les transformés de  $P$  forment un pavage de  $X$  et  $W$  agit simplement transitivement sur les blocs de ce pavage. De plus, les éléments de  $S$  transforment par définition  $P$  en un polyèdre adjacent. Ainsi, le graphe dual du pavage dessine le graphe de Cayley de  $W$  par rapport à  $S$ . Ce graphe de Cayley encode donc la combinatoire de  $W$  et on va commencer par s'intéresser à celui-ci.

Dans la suite de cette section,  $(W, S)$  est un groupe de Coxeter quelconque. On note  $\Omega$  le graphe de Cayley de  $W$  par rapport à  $S$ . Rappelons que ce graphe est défini comme le graphe dont l'ensemble des sommets est  $W$ , avec une (et une seule) arête de type  $s$  reliant un sommet  $x$  au sommet  $xs$ . La longueur d'un élément  $w$  de  $W$ , c'est-à-dire le plus petit nombre de générateurs de  $S$  qu'il faut pour écrire  $w$ , est notée  $\ell_S(w)$ , ou plus simplement  $\ell(w)$ .

**Définition 2.1.7.** Une *réflexion* est un conjugué d'un élément de  $S$ .

**Proposition 2.1.8.** Soit  $w \in W$  et  $s \in S$ . On a ou bien  $\ell(sw) = \ell(w) + 1$ , ou bien  $\ell(sw) = \ell(w) - 1$ . De plus, si  $w = s_1 \dots s_q$  est une écriture réduite de  $w$  (c'est-à-dire si  $s_i \in S$  pour tout  $i$  et  $\ell(w) = q$ ), alors dans le premier cas,  $ss_1 \dots s_q$  est une écriture réduite de  $sw$ ; dans le second cas, il existe un entier  $j$  entre 1 et  $q$  tel que  $ss_1 \dots s_{j-1}s_{j+1} \dots s_q$  soit une écriture réduite de  $w$  et  $s_1 \dots s_{j-1}s_{j+1} \dots s_q$  une écriture réduite de  $sw$ .

**Référence.** Voir [Bou07a, IV.§1.5]. □

Cette proposition est appelée «condition d'échange», elle caractérise en fait les groupes de Coxeter parmi les groupes engendrés par des réflexions. On peut également démontrer une proposition analogue avec  $ws$  à la place de  $sw$ . On en déduit que pour tout  $w \in W$ , il existe un ensemble  $S_w \subset S$  tel que toutes les décompositions réduites de  $w$  contiennent exactement les éléments de  $S_w$ .

Géométriquement, la condition d'échange signifie que si  $x$  désigne le sommet du graphe de Cayley  $\Omega$  qui correspond à l'identité de  $W$  et  $y$  le sommet correspondant à  $w \in W$ , avec  $\ell(sw) < \ell(w)$ , alors il existe un chemin de longueur minimale entre  $x$  et  $y$  dont le premier sommet traversé est le sommet relié à  $x$  par une arête de type  $s$ .

Il découle de la proposition 2.1.8 qu'un élément  $s$  de  $S$  divise  $W$  en deux parties disjointes.

**Définition 2.1.9.** L'ensemble des éléments  $w \in W$  tels que  $\ell(sw) = \ell(w) + 1$  est appelé *racine simple* de  $W$  associée à  $s \in S$ . Une *racine* est un conjugué d'une telle partie de  $W$ .

Les racines ont des interprétations géométriques dans  $\Omega$ . En effet, si l'on note  $H$  l'ensemble des arêtes de  $\Omega$  stabilisées par  $s \in S$ , alors  $\Omega$  privé de  $H$  est la réunion disjointe de deux composantes connexes, qui sont précisément les racines (c'est également une condition équivalente à la condition d'échange, voir [Dav08, §3.2]) Dans le cas des groupes de réflexions agissant sur un espace  $X$  comme dans le théorème 2.1.5, on peut voir une racine comme un demi-espace dans  $X$ . L'ensemble des arêtes stabilisées par  $s$  correspond alors à un hyperplan de réflexion, on l'appelle naturellement un *mur*. Cette définition se généralise à des groupes de Coxeter quelconques.

**Définition 2.1.10.** Un *mur* de  $\Omega$  est défini comme l'ensemble des arêtes stabilisées par une réflexion.

Ainsi, à une racine  $\alpha$  est associé un mur, que l'on note  $\partial\alpha$ . La racine qui partage le même mur que  $\alpha$  sera notée  $-\alpha$ , c'est aussi le complémentaire de  $\alpha$  dans  $W$ .

Notons que la distance entre deux points de  $\Omega$  peut s'interpréter en terme de murs :

**Proposition 2.1.11.** *La distance entre deux points  $x, y$  de  $\Omega$  est égale au nombre de murs qui les sépare. Autrement dit, c'est le nombre de racines qui contiennent  $x$  mais pas  $y$ .*

**Référence.** [Ron89, Proposition 2.7]. □

On peut être plus précis et caractériser l'ensemble des chemins de longueur minimale entre  $x$  et  $y$  :

**Proposition 2.1.12.** *Soient  $x, y \in \Omega$ . La réunion des chemins de longueur minimale entre  $x$  et  $y$  est égale à l'intersection des racines contenant  $x$  et  $y$ .*

**Référence.** [Ron89, Proposition 2.8]. □

Une partie  $Y \subset \Omega$  est dite *convexe* si elle contient tous les chemins de longueur minimale entre deux quelconques de ses points. La proposition ci-dessus affirme que les parties convexes de  $\Omega$  sont exactement les intersections de racines.

Si  $T \subset S$ , on peut définir le sous-groupe  $W_T$  de  $W$  engendré par  $T$ . Les sous-groupes ainsi définis sont appelés *paraboliques standard* et leur conjugués des *sous-groupes paraboliques*.

**Proposition 2.1.13.** *Soit  $T \subset S$ . Le groupe  $W_T$  est égal à l'ensemble des éléments  $w \in W$  dont toutes les écritures réduites ne comportent que des éléments de  $T$ . En particulier, on a  $W_T \cap S = T$ .*

**Référence.** Voir [Bou07a, IV.1.8, Corollaires 1 et 2]. □

**Proposition 2.1.14.** *Soit  $T, T' \subset S$ .*

- (i) *Le couple  $(W_T, T)$  est un groupe de Coxeter.*
- (ii) *On a  $W_{T \cap T'} = W_T \cap W_{T'}$ .*
- (iii) *On a  $W_T \subset W_{T'}$  si et seulement si  $T \subset T'$ .*

**Référence.** [Bou07a, IV.1.8, Théorème 2] □

On peut alors définir la notion d'irréductibilité :

**Définition 2.1.15.** Un groupe de Coxeter  $(W, S)$  est dit *réductible* s'il existe  $S_1 \subset S$  et  $S_2 \subset S$  tels que  $W = W_{S_1} \times W_{S_2}$ . Il est dit *irréductible* dans le cas contraire.

Il découle de la proposition 2.1.14 que la condition pour qu'un groupe de Coxeter soit réductible est équivalente à :  $S_1$  et  $S_2$  forment une partition de  $S$  et les éléments de  $S_1$  commutent avec les éléments de  $S_2$ .

Le fait que les sous-groupes paraboliques de  $W$  soient des groupes de Coxeter peut en fait se généraliser aux sous-groupes de  $W$  qui ne sont pas paraboliques, mais simplement engendrés par des réflexions :

**Théorème 2.1.16.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter,  $R$  un ensemble de réflexions. Alors le sous-groupe  $\langle R \rangle$  engendré par  $R$  est un groupe de Coxeter. Le système de chambres qui lui est associé est donné par l'ensemble des composantes connexes de  $\Omega$  privé des murs correspondant à des réflexions de  $\langle R \rangle$ ; le système de générateurs qui fait de  $\langle R \rangle$  un groupe de Coxeter est donné par l'ensemble des réflexions par rapport aux murs bordant une telle chambre.*

**Références.** Ce théorème est dû à Deodhar [Deo89]. On peut également en trouver une preuve dans [Dav08, §4.9]  $\square$

Remarquons que, contrairement au cas des groupes paraboliques, le système de générateurs d'un sous-groupe engendré par des réflexions quelconques n'est pas évident, même s'il admet une caractérisation géométrique. Par exemple, il n'y a pas de raison en général que le sous-groupe engendré par  $R$  soit de rang inférieur à celui de  $W$ .

Par exemple, si  $W$  est le groupe de Coxeter hyperbolique associé au pavage de la figure 2.1, considérons l'hexagone formé par tous les triangles dont un des sommets est le centre du disque. D'après le théorème de Poincaré, le groupe engendré par les réflexions par rapport aux côtés de cet hexagone est un groupe de Coxeter, dont le rang est égal à 6, alors que  $W$  lui-même est de rang 3.

## 2.2 Immeubles

Dans tout ce qui suit,  $S$  est un ensemble fini et  $(W, S)$  est un groupe de Coxeter.

Il y a plusieurs définitions d'immeubles : suivant le contexte, il peut s'agir de complexes simpliciaux, de graphes, d'espaces métriques plus généraux... Le point commun entre toutes ces définitions est qu'il s'agit toujours d'un recollement de «chambres», suivant certaines conditions. Aussi, de notre point de vue, un immeuble sera vu comme un *système de chambres*, c'est-à-dire comme un ensemble de chambres, avec les informations nécessaires pour pouvoir faire le recollement. Cette façon de voir les immeubles provient de l'article [Tit81], dont un des buts est justement de faire le lien entre plusieurs définitions d'immeubles.

L'avantage de ce point de vue sur les immeubles est qu'il est assez souple pour pouvoir s'adapter : on peut définir facilement des réalisations géométriques d'immeubles. Ce sont ces réalisations sur lesquelles nous allons travailler en pratique ; il nous sera parfois nécessaire de ne pas fixer de métrique a priori sur l'immeuble (voir la section 4.3).

Après avoir défini les systèmes de chambres et leur réalisations métriques, nous donnons deux définitions d'immeubles. La première est une définition combinatoire ; c'est l'une des définitions de [Tit81]. La seconde est une définition métrique, plus proche de la définition historique des immeubles [Bou07a, IV.1, Exercice 24]. Nous démontrons ensuite que ces définitions sont équivalentes, en introduisant certains outils qui seront utiles par la suite. Enfin, le dernier paragraphe explique un choix de métrique sur l'immeuble qui en fait un espace CAT(0).

### 2.2.1 Systèmes de chambres et réalisations métriques

La définition suivante provient de [Tit81, §2.1].

**Définition 2.2.1.** Un *système de chambres* sur  $S$  est un ensemble  $\mathcal{C}$ , muni d'une relation d'équivalence notée  $\sim_s$  et appelée *s-adjacence* pour chaque  $s \in S$ . Les éléments de  $\mathcal{C}$  sont appelés *chambres*.

Il est possible de donner directement des conditions sur un système de chambres pour que celui-ci devienne un immeuble ; c'est (entre autre) l'objet de l'article [Tit81]. Ces conditions seront présentées dans le paragraphe 2.2.2. Nous allons ici introduire un peu de vocabulaire sur les systèmes de chambres et définir la réalisation métrique d'un système de chambres.

*Exemple 2.2.2.* Le groupe de Coxeter  $W$  est un système de chambres. Deux chambres  $w$  et  $w'$  sont *s-adjacentes* si  $w' = ws$  ou  $w' = w$ . Le cardinal d'une classe de la relation  $\sim_s$  est égal à 2, pour tout  $s \in S$ . Pour distinguer le groupe  $W$  du complexe de chambre associé, on notera ce dernier  $\mathbf{W}$ .

Un système de chambres donne naturellement lieu à un graphe étiqueté par  $S$ , dont les sommets sont les chambres ; deux d'entre elles étant reliées par une arête de type  $s$  si elles sont *s-adjacentes* (dans l'exemple ci-dessus, on obtient le graphe de Cayley de  $W$ ). Par abus de langage, on confondra souvent dans la suite du texte un système de chambres et le graphe associé. Lorsque l'on veut marquer la distinction, on appellera ce graphe le *graphe des chambres* de  $\mathcal{C}$ .

**Définition 2.2.3.** Une *cloison de type s* est une classe d'équivalence pour  $\sim_s$ . On note  $\text{cl}(X)$  l'ensemble des cloisons d'un système de chambre  $X$ . Le système de chambre est dit *épais* si le cardinal de toutes les cloisons est  $\geq 3$ , *mince* si les cloisons ont toutes un cardinal égal à 2, *localement fini* si toutes les cloisons ont un cardinal fini.

Tous les systèmes de chambres considérés dans la suite du texte seront d'épaisseur au plus dénombrable.

**Définition 2.2.4.** Une *galerie* est une suite de chambres consécutivement adjacentes. La *longueur* d'une galerie est égale au nombre de chambres qu'elle contient. Une *galerie minimale* est une galerie qui réalise la longueur minimale entre deux chambres fixées. Le *type* d'une galerie est l'élément de  $W$  obtenu en concaténant les types des arêtes composant cette galerie. Un sous-ensemble  $\mathcal{D}$  d'un système de chambre  $\mathcal{C}$  est dit *convexe* si toute les galeries minimales entre deux chambres de  $\mathcal{D}$  restent dans  $\mathcal{D}$ .

**Définition 2.2.5.** Un *morphisme* entre un système de chambres  $\mathcal{C}$  sur  $S$  et un système de chambres  $\mathcal{C}'$  sur  $T$  est une application  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  telle qu'il existe une application  $\sigma : S \rightarrow T$  telle que  $\phi$  envoie des chambres *s-adjacentes* sur des chambres  $\sigma(s)$ -adjacentes, pour tout  $s \in S$ .

Un *morphisme strict* entre deux systèmes de chambres  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  indexés par le même ensemble  $S$  est un morphisme  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  qui envoie une paire de chambres *s-adjacentes* sur une paire de chambres *s-adjacentes*.

On note  $\text{Aut}(\mathcal{C})$  l'ensemble des automorphismes de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$  et  $\text{Aut}^0(\mathcal{C})$  l'ensemble des automorphismes stricts de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{C}$ . Notons que  $\text{Aut}^0(X)$  est un sous-groupe d'indice fini de  $\text{Aut}(X)$ .

*Exemple 2.2.6.* Soit  $(W, S)$  un groupe de Coxeter. Les automorphismes stricts du système de chambres  $\mathbf{W}$  sont les éléments de  $W$ . En effet, un élément de  $w$  définit un automorphisme de  $\mathbf{W}$  par multiplication à gauche. Réciproquement, soit  $g \in \text{Aut}^0(\mathbf{W})$ . Alors  $g.1_W$  est un

élément  $w \in W$  et l'image de  $s \in S$  par  $g$  est l'unique chambre qui est  $s$ -adjacente à  $w$ , l'image de  $st$  est l'unique chambre qui est  $t$ -adjacente à la chambre  $gs$ , etc. Par conséquent,  $g$  est uniquement déterminé par l'image de  $1_W$  et donc  $g = w$  comme automorphisme de  $\mathbf{W}$ .

À partir d'un système de chambres, on va réaliser un espace métrique. L'idée est de choisir un modèle de chambre, de se donner des sous-ensembles correspondant aux «faces» et de recoller des copies de chambres  $s$ -adjacentes sur la face correspondante. Cette construction a été utilisée pour la première fois par Vinberg [Vin70] dans le cas des groupes de Coxeter. Pour les immeubles, la définition a été esquissée dans [Tit75], mais Tits ne l'a utilisée que lorsque la chambre est un simplexe. L'utilité dans l'étude des immeubles de considérer des chambres plus générales provient du fait qu'on peut ainsi donner aux immeubles une structure d'espace métrique CAT(0) complet [Dav98].

**Définition 2.2.7.** Une *structure-miroir* est la donnée d'un espace métrique  $(Z, d_Z)$  et de sous-espaces fermés non vides  $Z_s$  pour chaque  $s \in S$ . On suppose également que, pour tout  $s$ , Si  $T \subset S$ , on note  $Z_T = \bigcap_{s \in T} Z_s$ .

**Définition 2.2.8.** On dit qu'une structure-miroir est admissible si :

- c'est un espace métrique propre,
- pour tout  $s \in S$ , il existe un  $x \in Z_s$  tel que  $x \notin Z_t$  pour tout  $t \neq s$ ,
- Il existe un  $x \in Z$  qui n'appartient à aucun  $Z_s$ .

Soit  $Z$  une structure-miroir et  $\mathcal{C}$  un système de chambres. On construit un espace métrique  $Z(\mathcal{C})$ , appelé  $Z$ -réalisation de  $\mathcal{C}$  [AB08, §12.1], de la manière suivante. En tant qu'espace topologique, l'espace  $Z(\mathcal{C})$  est défini comme le quotient de  $\mathcal{C} \times Z$  par la relation d'équivalence suivante :  $(C, z)$  est équivalent à  $(D, z)$  si  $C \sim_s D$  et  $z \in Z_s$ . Ainsi,  $(C, z)$  est équivalent à  $(C', z')$  si et seulement si  $z = z'$  et il existe une galerie de  $\mathcal{C}$  à  $C'$  dont le type appartient à  $W_T \subset W$  et si de plus  $z \in Z_T$ . On note  $[C, z]$  l'image de  $(C, z)$  dans  $X$  et  $Z(\mathcal{C})$  l'ensemble des  $[C, z]$ , lorsque  $z$  décrit  $Z$ . On appellera encore  $Z(\mathcal{C})$  une *chambre*. On note  $\tau$  la fonction (bien définie) qui à  $[C, z]$  associe  $z$ .

À un point  $x \in Z(\mathcal{C})$ , on peut associer son *type*, qui est défini comme l'ensemble des  $s \in S$  tels que  $\tau(x) \in Z_s$ . La *facette* associée à  $x$  est égale à  $\{[C, z] \mid z \in Z_T\}$ , où  $T$  est le type de  $x$  et  $C$  une chambre contenant  $x$ . Par définition, la facette associée à  $x$  ne dépend pas du choix de  $C$  contenant  $x$ . On l'appelle également *support* de  $x$ . Une facette dont le type est  $s \in S$  est appelée, par abus de langage, *cloison de type  $s$*  : une cloison, au sens du système de chambres, est égale à l'ensemble des chambres contenant la cloison, au sens géométrique, correspondante. Si, étant donné  $T \subset S$ , il existe un  $x \in Z(\mathcal{C})$  de type  $T$ , on dit que les facettes de type  $T$  sont *représentées*. Ainsi, une structure-miroir est admissible si et seulement si toutes les cloisons sont représentées, ainsi que les facettes de type  $\emptyset$  (autrement dit, les chambres elles-mêmes). L'ensemble des points de la chambre  $C$  dont le type est  $\emptyset$  seront appelés *intérieur de  $C$* .

On vérifie facilement [Rém02, 4.2.4] que, lorsque  $Z$  est une structure-miroir admissible, la  $s$ -adjacence se lit sur la réalisation géométrique : deux chambres  $c$  et  $c'$  sont  $s$ -adjacentes si et seulement si leur intersection est égale à une cloison de type  $s$ . Ainsi, la donnée de la réalisation géométrique  $Z(\mathcal{C})$  suffit à retrouver  $\mathcal{C}$ .

Il nous faut maintenant définir une métrique sur  $Z(\mathcal{C})$ . On procède exactement comme dans la section 1.1.2, même si  $Z$  n'est a priori pas un complexe simplicial.

**Définition 2.2.9.** Une *chaîne*, disons  $\gamma$  dans  $Z(\mathcal{C})$  est une suite finie de points  $x_0, \dots, x_m$  de  $Z(\mathcal{C})$  tels que, pour tout  $i$ , il existe une chambre  $C_i$  tels que  $x_{i-1}$  et  $x_i$  soient dans  $Z(C_i)$ . La *longueur* de  $\gamma$  est le réel positif

$$l(\gamma) = \sum_{i=1}^m d_Z(\tau(x_{i-1}), \tau(x_i)).$$

La distance  $d(x, y)$  entre deux points  $x, y \in Z(\mathcal{C})$  est l'infimum des longueurs des chaînes joignant  $x$  et  $y$ .

Si l'espace  $Z$  est géodésique, on peut relier  $x_{i-1}$  à  $x_i$  par une géodésique dans  $Z(C_i)$ . Ainsi, une chaîne correspond à une géodésique brisée. Notons que si  $\mathcal{C}$  est *connexe*, c'est-à-dire si toute paire de chambres peut être reliée par une galerie, alors il existe toujours une chaîne reliant deux points (en effet, on a supposé  $Z_s$  non vide). On supposera dorénavant  $\mathcal{C}$  connexe.

Lorsque  $Z$  est un complexe simplicial fini, on peut invoquer le théorème 1.1.18 pour démontrer que  $d$  est bien une distance. C'est vrai en fait dans le cas général :

**Proposition 2.2.10.** *Soient  $\mathcal{C}$  un système de chambres connexe,  $Z$  une structure miroir et  $X = Z(\mathcal{C})$ . La fonction  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  est une distance. De plus,  $\tau : Z(\mathcal{C}) \rightarrow Z$  est une isométrie, pour toute chambre  $C$ . Enfin, si  $Z$  est complet, alors  $X$  est également complet.*

**Référence.** Voir [AB08, Proposition 12.10]. Pour cette proposition, les auteurs supposent que le système de chambres  $\mathcal{C}$  est déjà un immeuble, mais la preuve n'utilise que la connexité de  $\mathcal{C}$ .  $\square$

*Exemple 2.2.11.* Dans le cas où  $W$  est un groupe de réflexions par rapport aux côtés d'un polyèdre, comme obtenu par le théorème de Poincaré 2.1.5 et si  $Z$  est égal au polyèdre en question,  $Z_s$  étant la face correspondant à la réflexion  $s$ , alors la  $Z$ -réalisation  $Z(W)$  est isométrique à l'espace sur lequel  $W$  agit.

C'est en fait un fait plus général : si  $W$  agit par réflexions sur un espace  $X$ , avec un domaine fondamental  $Z$ , alors sous des hypothèses raisonnables, la  $Z$ -réalisation de  $W$  sera isométrique à  $X$  : voir [AB08, §12.1.3].

Les mêmes critères se généralisent en fait à des systèmes de chambres quelconques :

**Proposition 2.2.12.** *Soit  $\mathcal{C}$  un système de chambres sur  $S$  et  $(X, d)$  un espace métrique géodésique. Supposons qu'il existe une structure miroir  $Z$  et une bijection  $\phi : Z(\mathcal{C}) \rightarrow X$ , telle que :*

- Pour tout  $T \subset S$  ( $y$  compris  $T = \emptyset$ ) et toute chambre  $C$ , la restriction de  $\phi$  à  $[C, Z_T]$  est une isométrie.
- Pour tout  $x \in X$ , la réunion des chambres contenant  $x$  est un voisinage de  $x$ .
- Les chambres sont des parties convexes de  $X$ .

Alors  $X$  est isométrique à  $Z(\mathcal{C})$ .

**Preuve.** Notons  $d'$  la distance dans  $Z(\mathcal{C})$ .

On sait déjà que  $\phi$  est isométrique sur toutes les chambres et sur chaque intersection de chambres. Il s'agit donc de prouver que  $\phi$  est en fait une isométrie globale.

Pour cela, on va démontrer que tout segment géodésique  $[x, y]$  de  $X$  peut être subdivisé de sorte que chaque partie soit contenue dans une unique chambre. Si l'on a vérifié ce fait, on obtient alors une chaîne de  $x$  à  $y$  de longueur  $d(x, y)$ , d'où  $d' \leq d$ . Comme une chaîne donne lieu à une géodésique par morceaux, on a également l'inégalité inverse, d'où  $d' = d$ .

Soit  $u \in [x, y]$ . Par hypothèse, il existe un intervalle  $N_u$  contenu dans  $[x, y]$  qui contient  $u$  et entièrement contenu dans la réunion des chambres contenant  $u$ . Par convexité des chambres de  $X$ ,  $N_u$  est entièrement contenu dans une union de deux chambres. Le segment compact  $[x, y]$  est alors recouvert par un nombre fini de  $N_u$ , d'où le résultat.  $\square$

À un morphisme strict  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ , on peut associer une application  $Z(\phi) : Z(\mathcal{C}) \rightarrow Z(\mathcal{C}')$ , définie par  $Z(\phi)([C, z]) = [\phi(C), z]$ . On vérifie alors facilement la proposition suivante.

**Proposition 2.2.13.** *Si  $\phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  est un morphisme strict de systèmes de chambres, l'application  $Z(\phi)$  est 1-lipschitzienne.*

*Preuve.* En effet,  $Z(\phi)$  envoie une chaîne sur une chaîne de même longueur.  $\square$

## 2.2.2 Immeubles

Passons maintenant en revue les définitions de base sur les immeubles. On donne tout d'abord une définition combinatoire, puis une définition métrique. On montre ensuite qu'un immeuble métrique est un immeuble combinatoire, en définissant et utilisant l'outil fondamental qu'est la rétraction sur un appartement.

### 2.2.2. a) Définition combinatoire

Pour qu'un système de chambres soit un immeuble, une condition de l'article [Tit81] (voir aussi [AB08, Définition 5.1]) est l'existence d'une  $W$ -distance.

**Définition 2.2.14.** Une  $W$ -distance sur un ensemble  $X$  est une application  $\delta : X \times X \rightarrow W$ , telle que

- (WD1) On a  $\delta(x, y) = 1$  si et seulement si  $x = y$ .
- (WD2) Si  $x, y \in X$  sont tels que  $\delta(x, y) = w \in W$  et  $\delta(z, x) = s \in S$ , alors  $\delta(z, y)$  est égal à  $w$  ou  $sw$ . Si de plus on a  $\ell(sw) > \ell(w)$ , alors nécessairement  $\delta(z, y) = sw$ .
- (WD3) Si  $x, y \in X$  sont tels que  $\delta(x, y) = w$ , alors pour tout  $s \in S$  il existe  $z \in X$  tel que  $\delta(z, x) = s$  et  $\delta(z, y) = sw$ .

*Exemple 2.2.15.* Considérons  $\mathbf{W}$ , muni de l'application  $\delta : W \times W \rightarrow W$  définie par  $\delta(x, y) = x^{-1}y$ . On vérifie facilement que  $\delta$  est une  $W$ -distance, on a même toujours  $\delta(z, y) = sw$  si  $\delta(x, y) = w$  et  $\delta(z, x) = s$ . Géométriquement, la  $W$ -distance  $\delta(x, y)$  peut se lire dans le graphe de Cayley de  $W$  : c'est le type d'une galerie minimale de  $x$  à  $y$ . Comme ci-dessus, on note  $\mathbf{W}$  l'immeuble ainsi obtenu ; on va voir ci-dessous qu'un immeuble donne lieu à un système de chambres, ce qui justifie la cohérence des notations.

*Exemple 2.2.16.* Le premier exemple historique d'immeuble est le suivant. Soit  $K$  un corps et  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n > 1$  sur  $K$ . Soit  $X$  l'ensemble des drapeaux complets de  $V$  : ce sont des suites de sous-espaces vectoriels  $V_i$  de  $V$  de la forme

$$\{0\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} = V,$$

avec, pour tout  $i$ ,  $\dim(V_i) = i$ . Soit  $W$  le groupe symétrique sur  $n$  lettres. On va voir que  $X$  est un immeuble de type  $W$ .

Pour cela, soient  $(V_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(V'_i)_{0 \leq i \leq n}$  des drapeaux complets. On dit qu'une base  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  est *adaptée* au drapeau  $V_i$ , avec permutation associée  $\sigma \in W$ , si  $V_i = \text{Vect}(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(i)})$  pour tout  $i$ . On peut alors prouver qu'il existe une base adaptée à  $(V_i)$  (avec permutation associée que l'on choisit égale à 1) qui soit également adaptée à  $(V'_i)$ , avec permutation associée  $\sigma$  (voir [AB08, §4.3] ou [FGN, Exercice 6.3]). De plus, la permutation  $\sigma$  ne dépend pas de la base choisie : c'est la *permutation de Jordan-Hölder* associée à  $(V_i)$  et  $(V'_i)$ .

On définit alors  $\delta((V_i), (V'_i))$  comme étant cette permutation de Jordan-Hölder. On peut alors vérifier que  $\delta$  est bien une  $W$ -distance [AB08, Exercice 4.93 et Proposition 4.84].

**Définition 2.2.17.** Soit  $X$  (resp.  $Y$ ) un ensemble muni d'une  $W$ -distance  $\delta$  (resp.  $\delta'$ ). Une  *$W$ -isométrie* est une application  $f : X \rightarrow Y$  telle que  $\delta(x, x') = \delta'(f(x), f(x'))$  pour tous  $x, x' \in X$ .

On peut définir sur un ensemble  $X$  muni d'une  $W$ -distance une structure de système de chambres sur  $S$  de la manière suivante : deux chambres  $x$  et  $y$  sont  $s$ -adjacentes si  $\delta(x, y) \in \{1, s\}$ . C'est bien une relation d'équivalence car, si  $\delta(x, y) = s$  et  $\delta(y, z) = s$ , alors ou bien  $\delta(x, z) = \delta(x, y)\delta(y, z) = s$ , ou bien  $\delta(x, z) = \delta(x, y)\delta(y, z) = s^2 = 1$ . Les autres cas se traitent aussi facilement.

### 2.2.2. b) Définition métrique

Dans cette section, on fixe une structure-miroir admissible  $Z$ .

**Définition 2.2.18.** Un *immeuble*  $X$  est un système de chambres, union de sous-systèmes de chambres appelés *appartements* tels que :

- (I1) Chaque appartement est isomorphe au système de chambres associé à un groupe de Coxeter,
- (I2) Deux points quelconques de  $Z(X)$  sont contenus dans la  $Z$ -réalisation d'un appartement,
- (I3) Si  $A$  et  $A'$  sont des appartements et  $x$  et  $y$  deux points appartenant à  $Z(A) \cap Z(A')$ , alors il existe un isomorphisme strict de systèmes de chambres  $\phi : A \rightarrow A'$  tel que  $Z(\phi)$  fixe  $x$  et  $y$ .

Notons que, dans l'axiome (I1), le groupe de Coxeter peut a priori varier ; il découle cependant de (I2) et (I3) qu'il est indépendant de l'appartement choisi. On l'appelle *groupe de Weyl* de l'immeuble.

*Exemple 2.2.19.* Si  $Z$  est un  $(|S| - 1)$ -simplexe et  $Z_s$  une face de ce simplexe pour tout  $s$ , alors la définition que l'on obtient est celle d'immeuble comme complexe simplicial [AB08, Définition 4.1], qui est la définition historique des immeubles. On appellera par la suite le complexe simplicial obtenu la *réalisation simpliciale* de l'immeuble.

Pour autant, la définition que nous avons donnée n'est pas classique. Elle est utile lorsqu'il est nécessaire de prouver qu'un espace métrique donné est la réalisation métrique d'un immeuble (voir par exemple la proposition 4.3.2). Remarquons également que, lorsqu'on aura démontré l'équivalence avec la définition combinatoire des immeubles, il en découlera



que cette définition ne dépend pas du choix de la structure-miroir admissible  $Z$  : tout choix de  $Z$  vérifiera les axiomes (I2) et (I3).

Beaucoup des arguments valables lorsqu'on voit les immeubles comme des complexes simpliciaux peuvent cependant encore être utilisés dans le cas où  $Z$  est quelconque. C'est notamment le cas de la remarque suivante.

*Remarque 2.2.20.* Par un argument standard, on peut affaiblir l'axiome (I3) [AB08, Remark 4.3 et 4.4]. Il est équivalent à l'un des deux axiomes suivants :

(I3') Si  $A$  et  $A'$  sont deux appartements contenant une chambre  $C$  et un point  $x$ , alors il existe un isomorphisme strict  $\phi : A \rightarrow A'$  tel que  $Z(\phi)$  fixe  $Z(C)$  et  $x$ .

(I3'') Si  $A$  et  $A'$  sont deux appartements contenant une chambre  $C$ , alors il existe un isomorphisme strict  $\phi : A \rightarrow A'$  tel que  $Z(\phi)$  fixe  $Z(A) \cap Z(A')$ .

En effet, vérifions tout d'abord que (I3') implique (I3). Si  $x, y$  sont deux points contenus dans  $Z(A) \cap Z(A')$ , soit  $C$  une chambre de  $A$  contenant  $x$ ,  $D$  une chambre de  $A'$  contenant  $y$ . Il existe un appartement  $A''$  contenant  $C \cup D$ . On a alors, en utilisant (I3'), un isomorphisme strict entre  $A$  et  $A''$  qui fixe  $C$  et un isomorphisme strict de  $A''$  dans  $A'$  qui fixe  $x$  et  $D$ . La composition de ces deux isomorphismes donne l'isomorphisme entre  $A$  et  $A'$  désiré.

Démontrons maintenant que (I3') implique (I3''). Si  $A, A'$  sont deux appartements contenant une chambre  $C$ , il existe pour tout point  $x$  de l'intersection  $Z(A) \cap Z(A')$  un isomorphisme  $A \rightarrow A'$  qui fixe  $x$ . Mais il n'existe qu'un seul automorphisme strict du système de chambre  $\mathbf{W}$  qui fixe un point (exemple 2.2.6). Par conséquent, tous ces isomorphismes sont égaux et fixent donc l'intersection  $Z(A) \cap Z(A')$  entière.

*Exemple 2.2.21.* Les arbres sans feuilles sont des réalisations métriques d'immeubles de type  $D_\infty$  (le groupe diédral infini) [AB08, Proposition 4.44]. Les appartements sont alors des droites géodésiques dans cet arbre.

*Exemple 2.2.22.* Soit  $K$  un corps local non archimédien,  $\mathcal{O}$  son anneau des entiers et  $v_K$  la valuation associée. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension  $n$  sur  $K$ . La théorie de Bruhat-Tits [BT72] associe alors à  $\mathrm{GL}(V)$  un immeuble. Dans ce cas cependant, on peut donner une présentation plus explicite de cet immeuble. Celle-ci est due à Goldman et Iwahori [GI63], même si ceux-ci n'utilisent pas encore le langage immobilier.

*Définition 2.2.23.* Une *norme additive* sur  $V$  est une application  $\gamma : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , telle que :

- $\forall x \in V, \gamma(x) = \infty$  si et seulement si  $x = 0$ ,
- $\forall x \in V, \lambda \in K, \gamma(\lambda x) = \gamma(x) + v_K(\lambda)$ ,
- $\forall x, y \in V, \lambda \in K, \gamma(x + y) \geq \inf(\gamma(x), \gamma(y))$ .

Une base  $e_1, \dots, e_n$  de  $V$  est dite *adaptée* à la norme  $\gamma$  si, pour tout  $x = \sum \lambda_i e_i \in V$ , il existe des nombres  $c_i \in \mathbb{R}$  tels que  $\gamma(x) = \inf(c_i + v_K(\lambda_i))$ . On peut alors démontrer [GI63, Proposition 1.3] qu'il existe toujours une base adaptée simultanément à deux normes additives données. L'ensemble des normes additives adaptées à une base donnée a alors une structure d'espace affine à  $n$  dimensions : c'est un appartement dans l'espace de toutes les normes additives, qui s'identifie à l'immeuble associé à  $\mathrm{GL}(V)$ .

Plus précisément, on définit la distance entre deux telles normes comme étant leur distance dans un appartement les contenant toutes deux. On vérifie alors qu'on obtient bien un espace métrique (qui est de plus CAT(0) !). Il est possible de voir cet espace métrique comme la réalisation métrique d'un système de chambres et on vérifie qu'il s'agit bien d'un immeuble. Pour plus de détails, on peut consulter [Rou08].

On peut également définir l'immeuble associé à  $SL(V)$ , à partir de cet espace de normes : c'est le quotient de l'espace défini ci-dessus, deux normes étant identifiées si leur différence est constante. L'immeuble que l'on obtient alors est un immeuble de type  $\tilde{A}_{n-1}$  : les appartements sont des espaces euclidiens de dimension  $n-1$ , pavés par des  $n-1$ -simplexes réguliers. En particulier, l'immeuble associé à  $SL_3(K)$  est un immeuble dont les appartements sont représentés par la figure 2.1.

Voici une tentative de dessin un peu plus global d'un immeuble triangulaire :

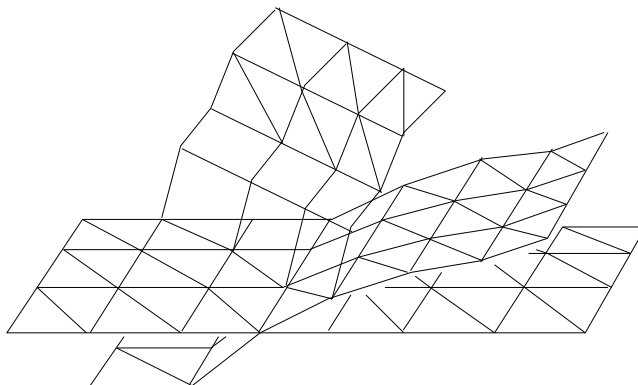


FIG. 2.3 – Quelques appartements dans un immeuble triangulaire

*Exemple 2.2.24.* Dans l'article [Bou97], M. Bourdon définit des immeubles fuchsien : ce sont des immeubles dont les appartements sont des pavages du plan hyperbolique, comme dans l'exemple 2.1.4. La définition qu'il utilise est ainsi la définition 2.2.18, avec une réalisation métrique d'un complexe de Coxeter qui le rend isométrique à un plan hyperbolique.

Il faut bien sûr démontrer que cette définition est équivalente à la précédente. Pour cela, on va introduire des outils qui nous seront utiles par la suite. On va commencer par prouver que si  $X$  est un immeuble au sens de la définition 2.2.18, alors il peut être muni d'une  $W$ -distance. On a besoin pour cela de définir des *rétractions*.

**Proposition - Définition 2.2.25.** *Soit  $X$  un immeuble,  $A$  un appartement de  $X$  et  $C$  une chambre de  $A$ .*

*L'unique application  $\rho : X \rightarrow A$  telle que, pour tout appartement  $A'$  contenant la chambre  $C$ , la restriction de  $\rho$  à  $A'$  soit l'isomorphisme strict de  $A'$  dans  $A$  qui fixe  $C$ , est appelée rétraction sur  $A$  centrée en  $C$ .*

Il faut bien sûr justifier l'existence et l'unicité de cette application (on peut se reporter à [AB08, §4.4]). L'unicité de l'isomorphisme entre  $A'$  et  $A$  provient du fait qu'il n'existe qu'un seul automorphisme strict de  $\mathbf{W}$  qui fixe une chambre (voir l'exemple 2.2.6). L'unicité de  $\rho$  s'en déduit d'après l'axiome (I2). Pour justifier l'existence de  $\rho$ , il faut vérifier que si  $A'$  et  $A''$  sont deux appartements contenant  $C$ , alors l'unique isomorphisme strict  $\alpha : A' \rightarrow A$  fixant  $C$  et l'isomorphisme strict  $\beta : A'' \rightarrow A$  fixant  $C$  coïncident sur l'intersection de  $Z(A'')$  et  $Z(A')$ . Pour cela, on introduit l'isomorphisme strict  $\gamma : A' \rightarrow A''$  qui fixe l'intersection  $Z(A') \cap Z(A'')$ . Par unicité, on a  $\gamma = \beta \circ \alpha^{-1}$ . Le fait que  $\gamma$  fixe l'intersection de  $Z(A')$  et  $Z(A'')$  signifie alors que  $\alpha$  et  $\beta$  coïncident sur cette intersection.

Remarquons qu'on a en fait défini  $\rho$  à la fois sur l'ensemble des chambres de  $X$  et sur  $Z(X)$ . En particulier, l'image par  $\rho$  d'une cloison de  $Z(X)$  est encore une cloison de  $Z(A)$ ,

ce qui signifie, étant donné l'hypothèse que l'on a faite sur la structure-miroir  $Z$ , que l'image de deux chambres  $s$ -adjacentes est encore deux chambres  $s$ -adjacentes, autrement dit que  $\rho$  est bien un morphisme strict de systèmes de chambres.

**Corollaire 2.2.26.** *Si  $A$  est un appartement d'un immeuble  $X$ , l'inclusion de  $Z(A)$  dans  $Z(X)$  est isométrique.*

*Preuve.* Soit  $\iota : A \hookrightarrow X$  l'inclusion canonique et  $\rho : X \rightarrow A$  une rétraction. Alors  $\iota$  et  $\rho$  sont des morphismes stricts de systèmes de chambres, donc  $Z(\iota)$  et  $Z(\rho)$  sont 1-lipschitziennes. Comme on a  $Z(\rho) \circ Z(\iota) = \text{Id}_{Z(A)}$ , l'application  $\iota$  est isométrique.  $\square$

Ces retractions permettent de démontrer la proposition suivante.

**Proposition 2.2.27.** *Une galerie minimale est contenue dans un appartement. Plus précisément, un appartement contenant les chambres  $x$  et  $y$  contient toutes les galeries minimales les joignant.*

*Preuve.* (Voir [AB08, Proposition 4.40]) Soient  $x$  et  $y$  des chambres de  $X$  et soit  $\Gamma : x = x_0, x_1, \dots, x_d = y$  une galerie minimale les joignant. Soit  $A$  un appartement contenant  $x$  et  $y$ . Démontrons que  $\Gamma$  est incluse dans  $A$ . Si tel n'est pas le cas, alors il existe une première chambre  $x_i$  de  $\Gamma$  telle que  $x_i \notin A$ . On a alors  $i \geq 1$  et  $x_{i-1} \in A$ . Soit  $s \in S$  tel que  $x_{i-1}$  soit  $s$ -adjacente à  $x_i$  et soit  $C$  la chambre de  $A$  qui est  $s$ -adjacente à  $x_{i-1}$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $C$ . Alors  $\rho(\Gamma)$  est une galerie qui relie  $x = \rho(x)$  à  $y = \rho(y)$ . Comme  $x_i$  est  $s$ -adjacente à  $C$ , par définition de  $\rho$ , la chambre  $\rho(x_i)$  est la chambre de  $A$  qui est  $s$ -adjacente à  $C$ , c'est donc  $x_{i-1}$ . Par conséquent la galerie  $\rho(\Gamma)$  répète deux fois la même chambre et est donc strictement plus courte que  $\Gamma$ , ce qui contredit la minimalité de  $\Gamma$ .  $\square$

Remarquons que cette proposition peut être vue comme un cas particulier de la proposition 2.2.41, au moins lorsque nous aurons démontré l'équivalence entre les deux définitions (et lorsque l'on prend le système d'appartements complet, voir la remarque 2.2.38).

Si  $X$  est un immeuble, définissons une application  $\delta$  de l'ensemble des couples de chambres de  $X$  dans  $W$  comme suit : si  $x$  et  $y$  sont deux chambres,  $\delta(x, y)$  est défini comme le type de toutes les galeries minimales de  $x$  à  $y$ . Remarquons que si on lit la même galerie en sens inverse, on obtient l'élément inverse, et donc  $\delta(y, x) = \delta(x, y)^{-1}$ .

**Lemme 2.2.28.** *L'élément de  $W$  ainsi défini ne dépend pas de la galerie choisie.*

*Preuve.* D'après la proposition 2.2.27, une galerie minimale est contenue dans un appartement  $A$  contenant  $x$  et  $y$ . Le type de cette galerie est la  $W$ -distance dans  $A$  entre  $x$  et  $y$ ; l'exemple 2.2.15 montre alors que cette distance ne dépend pas de la galerie minimale choisie.  $\square$

**Proposition 2.2.29.** *L'application  $\delta$  définie ci-dessus est une  $W$ -distance sur l'ensemble des chambres de l'immeuble  $X$ .*

*Preuve.*

Le premier axiome est évident. Le dernier est également facile à démontrer. En effet, si  $x, y \in X$  sont tels que  $\delta(x, y) = w \in W$ , alors il existe un appartement  $A$  contenant  $x$

et  $y$  d'après (I2) et dans cet appartement il existe une chambre  $z$  qui est reliée par une galerie minimale de type  $sw$  à  $y$ . D'après la proposition 2.2.27, cette galerie est également minimale dans  $X$ , et on a donc  $\delta(z, y) = sw$ .

Il reste donc le deuxième axiome à prouver. Soient  $x, y$  et  $z$  des chambres de  $X$ , telles que  $\delta(x, y) = w \in W$  et  $\delta(z, x) = s \in S$ . Soit  $n$  la longueur de  $w$ , c'est à dire la distance entre  $x$  et  $y$  dans le graphe des chambres de  $X$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $x$  et  $y$  et soit  $z'$  la chambre de  $A$  telle que  $\delta(z', y) = ws$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $x$ . Alors  $\rho(z)$  est la chambre  $z'$  de  $A$  qui est  $s$ -adjacente à  $x$ . Si  $\ell(sw) > \ell(w)$ , alors la concaténation d'une galerie minimale de  $y$  à  $x$  et de  $z'$  est une galerie minimale dans  $A$ , donc dans  $X$  d'après la proposition 2.2.27. Comme  $\rho$  est 1-lipschitzienne, une galerie minimale de  $y$  à  $x$  suivie par  $z$  est de longueur  $\geq n + 1$ , donc de longueur égale à  $n + 1$  puisque  $z$  est adjacente à  $y$ . Par conséquent c'est une galerie minimale, et on a donc  $\delta(y, z) = ws$ , et donc  $\delta(z, y) = sw$ .

Supposons maintenant  $\ell(sw) < \ell(w)$ . Comme  $z$  est adjacente à  $x$ , la distance entre  $y$  et  $z$  est égale à  $n - 1$ ,  $n$  ou  $n + 1$ . Dans ce dernier cas, la galerie de  $y$  à  $z$  qui passe par  $x$  est minimale et le type de cette galerie est  $sw$  (et on en déduit que ce cas ne peut arriver, car on a supposé  $\ell(sw) < \ell(w)$ ). Si  $d(y, z) = n - 1$ , alors la concaténation d'une galerie minimale de  $y$  à  $z$  avec  $x$  est elle-même minimale, ce qui permet de conclure que  $\delta(y, x) = \delta(y, z)s$ , donc  $\delta(z, y) = s\delta(y, x)$ . Dans le cas restant, c'est-à-dire si  $d(y, z) = n$ , considérons encore une fois la chambre  $z'$  de  $A$  qui est  $s$ -adjacente à  $x$ . Comme  $\ell(sw) < \ell(w)$ , il existe une galerie minimale dans  $A$  de  $y$  à  $x$  qui passe par  $z'$ , d'après la proposition 2.1.8. Cette galerie est de longueur  $n$ , donc la galerie de  $y$  à  $z'$  est de longueur  $n - 1$ . De plus,  $z$  est  $s$ -adjacente à  $x$ , qui est elle-même  $s$ -adjacente à  $z'$ , et donc  $z$  est  $s$ -adjacente à  $z'$ . Par conséquent, il existe une galerie minimale de  $y$  à  $z$  passant par  $z'$ , ce qui signifie que  $\delta(y, z) = \delta(y, z')s = wss = w$ .  $\square$

### 2.2.3 Résidus et projections

Dans cette section, on va démontrer qu'un ensemble muni d'une  $W$ -distance est un immeuble au sens de la définition 2.2.18. Pour cela, on introduit la notion de *résidu*. On fixe encore une structure-miroir admissible  $Z$ .

**Définition 2.2.30.** Soit  $X$  un système de chambres sur  $S$ . Si  $T \subset S$ , la relation d'équivalence engendrée par les relations  $\sim_s$ , pour  $s \in T$ , sera notée  $\sim_T$ . Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées *résidus de type  $T$* , ou parfois  *$T$ -résidu*. Si  $W_T$  est fini, les résidus de type  $T$  seront dit *sphériques*. Le *rang* d'un résidu de type  $T$  est le cardinal de  $T$ .

Si  $X$  est de plus muni d'une  $W$ -distance  $\delta$ , on a  $C \sim_T D$  si et seulement si  $\delta(C, D) \in W_T$ . D'autre part, si  $Z$  est une structure-miroir, la définition de la  $Z$ -réalisation de  $X$  rend le lemme suivant évident.

**Lemme 2.2.31.** Soit  $X$  un système de chambres sur  $S$ . Si  $x \in Z(X)$  est de type  $T \subset S$ , alors l'ensemble des chambres  $C \in X$  telles que  $x \in Z(C)$  est un résidu de type  $T$ . Réciproquement, l'intersection des  $Z(C)$ , lorsque  $C$  parcourt un résidu, est ou bien vide, ou bien une facette de  $Z(X)$ .

D'un point de vue géométrique, les résidus peuvent ainsi être vus comme des «links» de points de  $Z(X)$ . Notons que, suivant le choix de  $Z$  que l'on a fait, il se peut que tous les résidus n'apparaissent pas de cette manière. Plus précisément, un résidu se réalise géométriquement comme une facette dans  $Z(X)$ ; le résidu est alors l'ensemble des chambres

contenant cette facette. Le fait qu'un résidu apparaisse ou pas dans  $Z(X)$  ne dépend alors que de son type : un résidu de type  $T \subset S$  apparaît dans la réalisation géométrique  $Z(X)$  si et seulement si les facettes de type  $T$  sont représentées. On dit alors que les résidus de type  $T$  sont représentés dans  $Z(X)$ .

Mentionnons la proposition suivante :

**Proposition 2.2.32.** *Soit  $X$  un ensemble muni d'une  $W$ -distance et soit  $T \subset S$ . Alors, si  $R$  un résidu  $R$  de type  $T$ , la fonction  $\delta|_{R \times R}$  est une  $W_T$ -distance sur  $R$ .*

**Référence.** Voir [AB08, Corollary 5.30]. □

Il en découle en particulier que, si l'immeuble  $X$  est localement fini, alors les résidus sphériques de  $X$  sont finis. Par conséquent, si  $Z$  est une structure-miroir propre et qui ne représente que les résidus sphériques, alors l'espace métrique  $Z(X)$  est un espace métrique propre. En effet, toute petite boule autour d'un point  $x \in Z(X)$  est contenue dans la réunion des chambres qui contiennent  $x$  [AB08, Lemma 12.9], qui sont en nombre fini par hypothèse.

À partir de maintenant et jusqu'à la fin de ce paragraphe,  $X$  est un ensemble muni d'une  $W$ -distance  $\delta$ . Dans le paragraphe précédent, on a vu que, pour un immeuble au sens de la définition 2.2.18, la  $W$ -distance se lit comme le type d'une galerie minimale entre deux chambres. Si l'on veut démontrer l'équivalence des définitions, le lemme suivant paraît donc naturel.

**Lemme 2.2.33.** *Soient  $C, D \in X$  et  $w = \delta(C, D)$ . Alors il existe une galerie minimale de type  $w$  entre  $C$  et  $D$ . Réciproquement, s'il existe une galerie minimale de type  $w'$  entre  $C$  et  $D$ , alors  $w' = w$ .*

**Référence.** Voir [AB08, Lemma 5.16]. La preuve repose sur une application répétée des axiomes (WD2) et (WD3) à une écriture réduite de  $w$ . □

En particulier, il découle de ce lemme que la distance (dans le graphe des chambres  $X$ ) entre deux chambres  $C$  et  $D$  est exactement la longueur de  $\delta(C, D)$ .

**Proposition 2.2.34.** *Soit  $R$  un résidu et  $C$  une chambre. Alors il existe une unique chambre  $C_1 \in R$  telle que  $d(C, R) = d(C, C_1)$ . De plus, on a, pour toute chambre  $D \in R$  :*

1.  $\delta(D, C) = \delta(D, C_1)\delta(C_1, C)$  ,
2.  $d(C, D) = d(C, C_1) + d(C_1, D)$ .

**Référence.** Voir [AB08, Proposition 5.34]. □

**Définition 2.2.35.** Soient  $R, S$  deux résidus de  $X$  et  $C$  une chambre. La chambre  $C_1 \in R$  à distance minimale de  $C$  est appelée *projection de  $C$  sur  $R$*  et notée  $\text{proj}_R(C)$ . On appelle également *projection de  $S$  sur  $R$*  et on note  $\text{proj}_R(S)$ , l'ensemble  $\{\text{proj}_R(D) \mid D \in S\}$ .

On peut vérifier que  $\text{proj}_R(S)$  est lui-même un résidu :

**Proposition 2.2.36.** *Soient  $R$  et  $S$  deux résidus. Alors  $\text{proj}_R(S)$  est un résidu.*

**Référence.** Voir [AB08, Proposition 5.73]. □

Enfin, définissons une partie  $M$  de  $X$  (ou plus généralement d'un système de chambres) comme *convexe* si  $M$  définit une partie convexe du graphe des chambres, c'est-à-dire si toutes les galeries minimales entre deux chambres de  $M$  sont dans  $M$ .

**Lemme 2.2.37.** *Soient  $M$  une partie convexe de  $X$  et  $R$  un résidu de  $X$  qui intersecte  $M$ . Alors, pour toute chambre  $D \in M$ , on a  $\text{proj}_R(D) \in M$ .*

*Preuve.* Soit  $C \in R \cap M$ . D'après la proposition 2.2.34, on a  $d(D, C) = d(D, \text{proj}_R(D)) + d(\text{proj}_R(D), C)$ . Cela signifie qu'il existe une galerie minimale de  $D$  à  $C$  qui passe par  $\text{proj}_R(D)$ , et la convexité de  $M$  implique que  $\text{proj}_R(D) \in M$ .  $\square$

Une fois que nous aurons prouvé l'équivalence des définitions, il sera possible d'utiliser la proposition 2.2.27 pour démontrer que l'enveloppe convexe de deux chambres est incluse dans un appartement. Il résulte alors de la proposition 2.1.12 que cette enveloppe convexe est égale à l'intersection des racines qui contiennent les deux chambres. Plus généralement, la proposition 2.1.12 permet de vérifier qu'une partie convexe d'un appartement est égale à l'intersection des racines qui la contiennent.

On peut maintenant expliquer en quoi un immeuble  $X$  au sens de la définition 2.2.14, c'est-à-dire possédant une  $W$ -distance, est un immeuble au sens de la définition métrique 2.2.18. On définit pour cela un appartement de  $X$  comme étant une partie en bijection  $W$ -isométrique avec  $\mathbf{W}$ , où  $\mathbf{W}$  est muni de la  $W$ -distance de l'exemple 2.2.15.

*Remarque 2.2.38.* Dans la définition 2.2.18, la donnée des appartements de  $X$  fait partie de la structure d'immeuble, ce qui n'est pas le cas dans la définition 2.2.14. Un ensemble d'appartements sur un immeuble  $X$  vérifiant les axiomes (I1) à (I3) sera appelé *système d'appartements*. De ce point de vue, les définitions ne sont pas tout à fait équivalentes ; lorsqu'on utilise la définition 2.2.14, on utilise implicitement le *système d'appartement complet* : tous les sous-systèmes de chambres isomorphes à  $\mathbf{W}$  sont des appartements. Il n'est pas évident a priori que ce système d'appartements vérifie l'axiome (I3), mais c'est toujours le cas. Les systèmes d'appartements non complets peuvent avoir une utilité, notamment dans l'étude de groupes algébriques sur des corps valués non complets [BT72], mais nous n'utiliserons ici que le système d'appartements complet.

Le lemme ci-dessous n'est pas surprenant, surtout au vu de la proposition 2.2.27.

**Lemme 2.2.39.** *Soit  $X$  un ensemble muni d'une  $W$ -distance et soit  $A$  un appartement de  $X$ . Alors  $A$  est convexe.*

*Référence.* Cela résulte de [AB08, Proposition 5.47].  $\square$

**Proposition 2.2.40.** *Le système d'appartements décrit ci-dessus fait de  $X$  un immeuble.*

*Preuve.* (Voir [AB08, Theorem 5.91]). L'axiome (I1) découle de la définition des appartements. Le second axiome est démontré dans [AB08, Corollary 5.74]. Plus précisément, ce corollaire démontre que deux chambres quelconques sont dans un appartement ; comme un point de  $Z(X)$  est dans l'adhérence d'une chambre et que les appartements sont fermés, l'axiome (I2) est vrai.

Le corollaire [AB08, Corollary 5.68] prouve une variante de (I3'') : pour deux appartements  $A$  et  $A'$  contenant une chambre  $D$ , il existe un isomorphisme strict  $\phi$  entre les deux

qui fixe toutes les chambres de l'intersection. Pour vérifier (I3''), il faut vérifier que  $Z(\phi)$  fixe tout  $Z(A) \cap Z(A')$ . Soit  $x \in Z(A) \cap Z(A')$  et soit  $T$  le type de  $x$ . L'ensemble des chambres contenant  $x$  est un résidu  $R$  de type  $T$ , qui intersecte  $A$  et  $A'$  par construction. Pour vérifier que  $\phi$  fixe  $x$ , il suffit de vérifier que  $x \in Z(C)$ , avec  $C \in A \cap A'$ . Pour cela, on peut prendre  $C = \text{proj}_R(D)$  : c'est une chambre de  $A \cap A'$  par le lemme 2.2.37.  $\square$

Cette proposition est loin d'être évidente : avec la seule définition d'une  $W$ -distance, il n'est pas clair *a priori* qu'il existe des appartements dans  $X$  ! La preuve de la proposition fait intervenir en particulier un lemme de J.Tits [Tit81, §3.7.4], qui a un intérêt propre :

**Proposition 2.2.41.** *Soit  $X$  un ensemble muni d'une  $W$ -distance  $\delta$ . Alors toute partie de  $X$  qui est  $W$ -isométrique à une partie de  $\mathbf{W}$  est contenue dans un appartement.*

**Référence.** [AB08, Theorem 5.73]  $\square$

## 2.2.4 Réalisation de Davis-Moussong

L'objectif de cette section est de construire une structure-miroir  $Z$  telle que l'espace métrique associé à un immeuble  $X$  soit  $\text{CAT}(0)$ . Dans le cas des groupes de Coxeter, c'est l'objet de la thèse de G. Moussong [Mou]. Le même choix de structure-miroir fonctionne également pour des immeubles quelconques [Dav98].

Avant de vérifier que les immeubles sont  $\text{CAT}(0)$ , il faut vérifier que ce sont des espaces géodésiques.

**Proposition 2.2.42.** *Supposons que  $Z$  soit un espace métrique propre et géodésique et soit  $X$  un immeuble. Alors  $Z(X)$  est un espace géodésique.*

**Références.** Voir [AB08, Corollary 12.28]. Remarquons que la preuve utilise le fait que  $X$  est un immeuble et pas un système de chambres quelconque. On peut bien sûr utiliser également le théorème 1.1.18, lorsque  $Z$  est un recollement d'un nombre fini de simplexes.  $\square$

La preuve de cette proposition est également instructive ; elle permet notamment de comparer la distance combinatoire à la distance métrique dans l'immeuble. En particulier, on a :

**Proposition 2.2.43.** *Soit  $Z$  un espace métrique propre et géodésique et soit  $X$  un immeuble. Toute géodésique entre deux points de  $x$  et  $y$  est entièrement contenue dans la réalisation métrique d'une galerie minimale de  $X$ .*

**Référence.** Voir [AB08, Proposition 12.25]  $\square$

En particulier, un sous-ensemble de  $X$  convexe au sens des systèmes de chambres est convexe dans la réalisation métrique. C'est en particulier le cas des appartements et de leurs racines, ainsi que des intersections de racines.

Donnons maintenant une construction de l'espace métrique  $Z$  qu'il faut choisir pour obtenir le complexe de Moussong.

Commençons par le cas où  $(W, S)$  est fini. D'après [Bou07a, V.4.8, Théorème 2], le groupe  $W$  agit par isométries vectorielles sur un espace euclidien  $\mathbb{R}^S$ . Les hyperplans par

rapport auxquels les éléments de  $S$  agissent par réflexions bordent un cône simplicial, appelé *cône simplicial fondamental*. Pour tout  $\underline{\lambda} = (\lambda_s) \in ]0, +\infty[^S$ , il existe un unique  $x$  dans ce cône fondamental qui soit à distance  $\lambda_s$  de l'hyperplan associé à la réflexion  $s$ , pour tout  $s \in S$ .

**Définition 2.2.44.** Soit  $(W, S)$  un groupe de Coxeter fini et  $\underline{\lambda} \in ]0, +\infty[^S$ . Soit  $p_{\underline{\lambda}}$  le point  $x$  du cône simplicial fondamental à distance  $\lambda_s$  de l'hyperplan associé à la réflexion  $s$ . La *cellule de Coxeter* associée à  $W$  et notée  $P_W(\underline{\lambda})$  est défini comme l'enveloppe convexe de l'orbite  $W.p_{\underline{\lambda}}$ . Le *bloc de Coxeter*, noté  $B_W(\underline{\lambda})$ , est l'intersection de  $P_W(\underline{\lambda})$  avec le cône simplicial fondamental.

*Exemple 2.2.45.* Si  $W$  est un groupe diédral d'ordre  $2m$ , la cellule de Coxeter  $P_W(\underline{\lambda})$  est un  $2m$ -gone.

*Exemple 2.2.46.* Si  $W$  est le groupe symétrique sur  $n+1$  symbole, alors la cellule de Coxeter  $P_W(\underline{\lambda})$  est le *permutaèdre* à  $n$  dimensions.

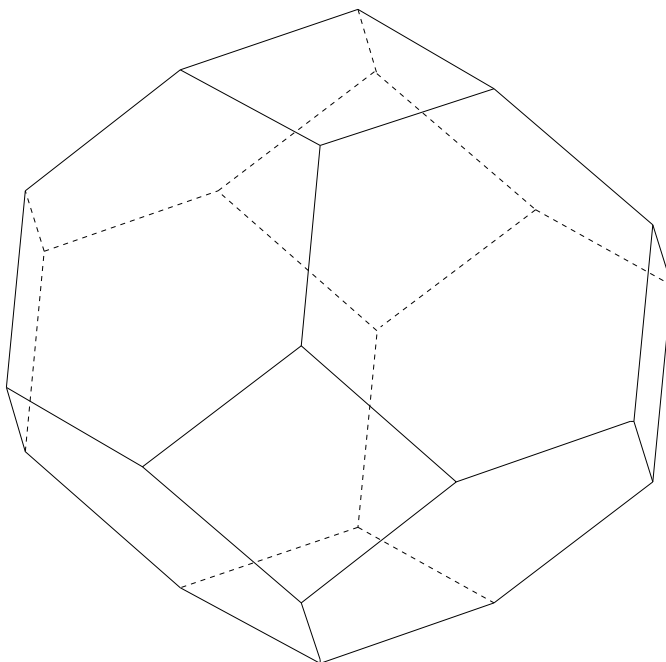


FIG. 2.4 – Le permutaèdre à 3 dimensions.

Un tel bloc de Coxeter est un polyèdre convexe euclidien, c'est-à-dire est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces, bordé par des hyperplans  $H_i$ , pour  $i$  variant dans un ensemble d'indices  $I$ . À ce titre, on peut définir une *facette* de  $P_W(\underline{\lambda})$  comme étant l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans  $H_j$ , pour  $j$  variant dans  $J \subset I$ . Lorsque  $J$  est vide, la facette que l'on obtient est par convention le polyèdre tout entier.

Le lemme suivant permet de comprendre le lien entre les facettes de  $P_W(\underline{\lambda})$  et les sous-groupes de  $W$ .

**Lemme 2.2.47.** Avec les notations de la définition précédente, une facette  $F$  est l'enveloppe convexe de l'orbite de  $x$  suivant un  $wW_J$ , où  $w \in W$  et  $J \subset S$ . De plus,  $F$  est alors isométrique à  $P_{W_J}(\lambda_J)$ , où  $\lambda_J$  est l'image de  $\underline{\lambda}$  par la projection canonique  $\mathbb{R}^S \rightarrow \mathbb{R}^J$ .



**Référence.** [Dav98, Lemma 9.1] □

Dans tout ce qui suit, le vecteur  $\underline{\lambda}$  ne joue aucun rôle. On normalise donc en prenant  $\lambda_s = 1$  pour tout  $s \in S$ . On notera alors simplement  $P_W$  et  $B_W$  à la place de  $P_W(\lambda)$  et  $B_W(\lambda)$ .

Si  $Z = B_W$  et si  $Z_s$  est l'intersection de  $B_W$  avec l'hyperplan de réflexion par rapport à  $s$ , alors on voit facilement que  $P_W$  s'identifie à la  $Z$ -réalisation de  $W$ . Ainsi, dans le cas où  $W$  est fini,  $P_W$  est le *complexe de Moussong* associé à  $W$ .

Remarquons que les facettes de  $B_W$  sont de deux sortes : ou bien ce sont des hyperplans bordant le cône simplicial fondamental, ou bien il s'agit de l'intersection de facettes de  $P_W$  avec le cône simplicial fondamental. Ces facettes de  $P_W$  sont définies comme l'enveloppe convexe de l'orbite de  $x$  suivant un sous-groupe parabolique  $W_J$ .

Revenons maintenant au cas général où  $W$  est éventuellement infini. À un sous-groupe parabolique standard sphérique  $W_J$  est associé une cellule de Coxeter  $P_{W_J}$  et un bloc de Coxeter  $B_{W_J}$ . Les facettes de  $B_{W_J}$  correspondent soit aux hyperplans de réflexions par rapport à  $s \in J$ , soit à un sous-groupe parabolique standard de  $W_J$ . Si  $W_K$  est un sous-groupe parabolique standard sphérique de  $W$ , alors  $W_K \cap W_J = W_{J \cap K}$  est à la fois un sous-groupe parabolique de  $W$ , de  $W_J$  et de  $W_K$  et par conséquent, correspond à des facettes –toutes isométriques à  $B_{W_{J \cap K}}$ – de  $B_{W_J}$  et de  $B_{W_K}$ .

On définit  $B_W$  comme étant le recollement de tous les  $B_{W_J}$ , où  $W_J$  décrit l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard sphériques et où on recolle  $B_{W_J}$  et  $B_{W_K}$  suivant la face correspondant à  $W_{J \cap K}$ . On pose alors  $Z = B_W$ . Chaque  $B_{W_J}$  contient des  $(B_{W_J})_s$ , qui sont les facettes correspondant à la réflexion  $s \in J$ . On définit alors  $Z_s$  comme étant la réunion des images de ces  $(B_{W_J})_s$ , pour tous les  $J$  contenant  $s$  tels que  $W_J$  est fini.

L'espace métrique cherché est alors la  $Z$ -réalisation de  $\mathbf{W}$ , que l'on notera  $|\mathbf{W}|$ .

**Théorème 2.2.48.** *L'espace  $|\mathbf{W}|$  est un espace CAT(0) complet.*

**Références.** C'est un théorème dû à Moussong [Mou], voir aussi [Dav08] □

*Exemple 2.2.49.* Soit  $W$  le groupe associé à un pavage du plan par des triangles équilatéraux (voir l'exemple 2.1.3). Les sous-groupes paraboliques standard sphériques sont de deux types : il y a les sous-groupes engendrés par un élément de  $S$  et les sous-groupes engendrés par deux éléments quelconques de  $S$ . Prenons par exemple  $J = \{r, s\}$ . Alors  $W_J$  est isomorphe au groupe diédral à 6 éléments ; on voit donc que  $P_{W_J}$  est un hexagone (régulier de côté 2) et  $B_{W_J}$  est l'intersection de cet hexagone avec le cône bordé par les médiatrices par rapport à deux côtés adjacents. Les facettes de  $B_{W_J}$  que l'on va recoller sont les intersections de  $B_{W_J}$  avec les côtés de l'hexagone, elles sont étiquetées par  $r$  et  $s$ . La construction est la même pour les sous-groupes engendrés par  $s$  et  $t$  et par  $r$  et  $s$ . On obtient ainsi trois blocs, à recoller suivant les facettes extérieures. Le résultat est un triangle équilatéral de côté  $2\sqrt{3}$  ; les images des facettes que l'on a recollées sont les segments joignant le milieu d'un côté au centre du triangle. De plus, les sous-espaces  $(B_W)_s$  sont les côtés du triangle. Ainsi, on voit que  $|\mathbf{W}|$  est un pavage du plan euclidien par des triangles équilatéraux (voir la figure 2.4).

On peut facilement vérifier la proposition suivante :

**Proposition 2.2.50.** *L'ensemble des fixateurs de points de  $|\mathbf{W}|$  dans  $W$  est égal à l'ensemble des sous-groupes paraboliques sphériques. En particulier, l'action de  $W$  sur  $|\mathbf{W}|$  est proprement discontinue.*

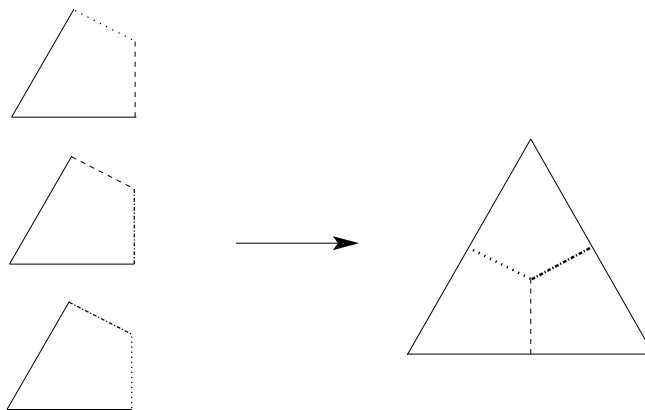


FIG. 2.5 – Construction de la chambre du complexe de Davis-Moussong, pour le groupe associé au pavage du plan par des triangles équilatéraux.

*Preuve.* Étant donné la définition de la réalisation métrique, il est facile de voir que, si  $x$  est de type  $T \subset S$ , alors le stabilisateur de  $x$  est un conjugué de  $W_T$ . Comme seuls les sous-groupes paraboliques sphériques sont pris en compte dans la définition de  $|\mathbf{W}|$ , on voit que les seuls stabilisateurs possibles sont les paraboliques sphériques. Il suffit ensuite de vérifier que chaque  $W_T$  est le stabilisateur d'un point de  $B_W$ . Mais, si  $W_T$  est sphérique, alors  $W_T$  fixe le sommet du cône simplicial qui intervient dans la définition de  $B_{W_T}$ . Comme  $B_{W_T} \subset B_W$ , on voit que  $W_T$  fixe un point de  $B_W$ .  $\square$

De plus, par construction, le domaine fondamental de l'action de  $W$  sur  $|\mathbf{W}|$  est  $B_W$ . En particulier, cette action est cocompacte.

Une fois le cas des appartements traités, il est facile de passer aux immeubles. Dans ce qui suit,  $X$  est un immeuble de type  $(W, S)$ . On note encore  $|X|$  la  $B_W$ -réalisation de  $X$ .

**Théorème 2.2.51.** *Soit  $X$  un immeuble de type  $(W, S)$ . Alors  $|X|$  est un espace CAT(0) complet.*

*Preuve.* La preuve se trouve dans [Dav98]. Elle suit en fait la preuve dans le cas affine, qui se trouve déjà dans [BT72, §3.2.1]; le tout étant de disposer d'une réalisation CAT(0) d'un appartement. Donnons-en une esquisse. On commence par vérifier que  $|X|$  est complet. Cela découle du fait que  $B_W$  est lui-même un espace complet, d'après [AB08, Proposition 12.10,(3)].

Étant donné que deux points quelconques de  $|X|$  sont contenus dans la réalisation métrique d'un appartement, qui est un espace géodésique, il est clair que  $|X|$  est un espace géodésique.

On démontre en fait l'inégalité (CN), ce qui est suffisant d'après la proposition 1.1.10. Pour cela, soient  $x, y, z \in |X|$  et  $m$  un milieu de  $[x, y]$ . Il existe un appartement  $A$  de  $X$  contenant  $x, y$ ; le point  $m$  est alors nécessairement contenu dans  $A$ . Soit  $C$  une chambre de  $A$  contenant  $m$  et  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $C$ . Notons  $z' = \rho(z)$ . Il est facile de voir que  $d(m, z) = d(m, z')$ , de plus, on a  $d(x, z') \leq d(x, z)$  et  $d(y, z') \leq d(y, z)$ , puisque  $\rho$  est 1-lipschitzienne.

Comme  $|A|$  est CAT(0), il satisfait l'inégalité (CN), on a donc :

$$d(x, z')^2 + d(y, z')^2 \geq 2d(m, z)^2 + \frac{1}{2}d(x, y)^2.$$

En utilisant les inégalités ci-dessus, il vient

$$d(x, z)^2 + d(y, z)^2 \geq 2d(m, z)^2 + \frac{1}{2}d(x, y)^2,$$

et  $|X|$  est donc CAT(0). □

Remarquons que, dans la réalisation de Davis-Moussong, seuls les résidus sphériques sont représentés. En particulier, si l'immeuble est localement fini, tout point est inclus dans un nombre fini de chambres.

## 2.3 Groupes agissant sur des immeubles

La structure d'immeuble est en lien étroit avec la structure de *BN-paire*, ou *système de Tits*, pour les groupes. Cette notion est définie et étudiée dans [Bou07a, IV.§2], elle est utile notamment dans l'étude des groupes algébriques semi-simples. Les groupes possédant un système de Tits sont en fait exactement les groupes possédant une action suffisamment transitive («fortement transitive», voir définition 2.3.5) sur un immeuble.

Encore une fois, on fixe un groupe de Coxeter  $(W, S)$

### 2.3.1 Systèmes de Tits

**Définition 2.3.1.** Une *BN-paire*, ou *système de Tits* de *groupe de Weyl*  $(W, S)$  est un triplet  $(G, B, N)$ , où  $G$  est un groupe et  $B$  et  $N$  deux sous-groupes, tel que :

(BN1)  $G$  est engendré par  $B$  et  $N$ ,

(BN2)  $B \cap N$  est distingué dans  $N$  et le quotient  $N/(B \cap N)$  est isomorphe à  $W$ ,

(BN3) On a  $sBw \subset BwB \cup BswB$  pour tout  $s \in S$  et  $w \in W$

(BN4) Pour tout  $s \in S$ , on a  $sBs \neq \subset B$ .

*Remarque 2.3.2.* L'axiome (BN2) permet d'identifier les éléments de  $W$  et en particulier des éléments de  $s$ , à des classes modulo  $B \cap N$ . On peut ainsi écrire des produits tels que  $sB$  ou  $Bw$  : ces classes sont indépendantes des représentants de  $s$  et  $w$  choisis.

Le théorème suivant est fondamental dans l'étude des *BN-paires*.

**Théorème 2.3.3** (Décomposition de Bruhat). *Soit  $(G, B, N)$  un système de Tits de groupe de Weyl  $(W, S)$ . Alors  $G$  est égal à l'union disjointe suivante :*

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB.$$

**Référence.** [Bou07a, IV, §2.3, Théorème 1] □

Le lien avec les immeubles s'explique par le fait qu'on peut munir  $G/B$  d'une  $W$ -distance, de la manière suivante. À partir de deux classes  $gB, hB$ , on associe l'élément  $w = \delta(gB, hB)$  tel que l'on ait  $Bg^{-1}hB = BwB$ .

**Proposition 2.3.4.** *La fonction  $\delta$  définie ci-dessus est une  $W$  distance et donne donc à  $G/B$  une structure d'immeubles.*

**Référence.** Voir [AB08, §6.2.1]. L'idée est que la double classe  $BwB$  correspond à l'ensemble des chambres à  $W$ -distance  $w$  de la chambre  $B$ . Par exemple, l'axiome (BN4) exprime le fait que les chambres  $s$ -adjacentes à  $B$  (c'est-à-dire  $BsBsB$ ) ne se réduisent pas à  $B$ .  $\square$

Notons  $\Delta(G, B)$  cet immeuble. Par construction, l'action de  $G$  est transitive sur les chambres. Elle a en fait des propriétés de transitivité plus fortes.

**Définition 2.3.5.** Soit  $X$  un immeuble, muni d'un système d'appartements  $\mathcal{A}$ . Soit  $G$  un groupe agissant sur  $X$  par automorphismes stricts. L'action de  $G$  est dite *fortement transitive* si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

- $G$  agit transitivement sur l'ensemble des chambres et le stabilisateur d'une chambre  $C$  agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant  $C$ ,
- $G$  agit transitivement sur l'ensembles des couples  $(C, A)$ , où  $C$  est une chambre et  $A$  un appartement de  $\mathcal{A}$  contenant  $C$ ,
- $G$  agit transitivement sur l'ensemble des appartements de  $\mathcal{A}$  et le stabilisateur d'un appartement  $A$  agit transitivement sur l'ensemble des chambres de  $A$ .

**Proposition 2.3.6.** Si  $(G, B, N)$  est un système de Tits avec groupe de Weyl  $(W, S)$ , alors il existe un système d'appartements sur l'immeuble  $\Delta(G, B)$  pour lequel l'action de  $G$  est fortement transitive.

**Référence.** Voir [AB08, Proposition 6.52].  $\square$

Il est facile de définir le système d'appartements en question : un appartement particulier (dit standard) est donné par les transformés par  $N$  de la chambre  $B$  et les autres appartements sont les images de celui-ci. La forte transitivité est alors évidente, il s'agit de vérifier que l'on obtient bien un système d'appartements.

Ainsi, à un groupe avec un système de Tits est associé un immeuble admettant une action fortement transitive. La réciproque est également vraie :

**Théorème 2.3.7.** Soit  $X$  un immeuble épais et  $G$  un groupe admettant une action fortement transitive sur  $X$ . Soit  $B$  le stabilisateur d'une chambre  $C$  et  $N$  le stabilisateur d'un appartement contenant  $C$ . Alors  $(G, B, N)$  est un système de Tits et l'immeuble  $X$  est isomorphe à  $\Delta(G, B)$ .

**Référence.** Voir [AB08, Theorem 6.56].  $\square$

**Exemples 2.3.8.** Soit  $K$  un corps. Alors le groupe  $\mathrm{SL}_n(K)$  agit fortement transitivement sur l'immeuble de drapeaux de l'exemple 2.2.16 [AB08, §6.1.2]. Plus généralement, un groupe algébrique semi-simple agit fortement transitivement sur un immeuble sphérique [Tit74].

Comme mentionné dans l'exemple 2.2.22, la théorie de Bruhat-Tits associe à un groupe algébrique réductif sur un corps local un immeuble affine. L'action du groupe sur cet immeuble est alors fortement transitive par rapport au système complet d'appartements. Plus généralement, si le corps est valué mais non complet, l'action est fortement transitive par rapport à un système d'appartements plus petit. En particulier, si  $F$  est un corps local, l'action de  $\mathrm{GL}_n(F)$  sur l'immeuble formé des normes sur  $F^n$ , comme décrit dans l'exemple 2.2.22, est fortement transitive.

### 2.3.2 Sous-groupes paraboliques

**Définition 2.3.9.** Soit  $(G, B, N)$  un système de Tits. Un *sous-groupe parabolique standard* de  $G$  est un sous-groupe contenant  $B$ ; un sous-groupe parabolique est un conjugué d'un sous-groupe parabolique standard.

**Proposition 2.3.10.** *Les sous-groupes paraboliques standard sont les ensembles de la forme  $BW_JB$ , où  $J \subset S$ .*

*Référence.* Voir [Bou07a, IV.2.6, Proposition 4]. □

On appelle un tel  $J$  le *type* du sous-groupe parabolique standard et le type d'un sous-groupe parabolique quelconque est le type du sous-groupe parabolique standard qui lui est conjugué. Il résulte également de [Bou07a, IV.2.6, Proposition 4] que le type est bien défini, autrement dit, un sous-groupe parabolique est conjugué à un unique sous-groupe parabolique standard.

Les sous-groupes paraboliques ont une interprétation géométrique : si l'on a choisi une structure-miroir  $Z$  telle que  $Z_J \neq \emptyset$  (comme c'est le cas par exemple de la réalisation simpliciale, ou de la réalisation de Davis-Moussong si  $W_J$  est sphérique), alors les paraboliques de type  $J$  sont exactement les stabilisateurs dans  $G$  des facettes de type  $J$  dans la  $Z$ -réalisation de  $\Delta(G, B)$ . La proposition suivante devient alors plausible, au vu des propriétés de transitivité de  $G$  : elle signifie que deux résidus ont des stabilisateurs distincts.

**Proposition 2.3.11.** *Un sous-groupe parabolique de  $G$  est égal à son propre normalisateur.*

*Référence.* Voir [Bou07a, IV.2.6, Théorème 4]. □

### 2.3.3 Groupes topologiques

Soit  $X$  un immeuble. Le but de cette section est de munir le groupe d'automorphismes de  $X$  d'une structure de groupe topologique.

Lorsque  $Y$  est un espace métrique, on munit le groupe  $\text{Isom}(Y)$  des isométries de  $Y$  de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. C'est alors un groupe topologique.

**Proposition 2.3.12.** *Soit  $Z$  une structure-miroir admissible. Alors les topologies de  $G = \text{Aut}^0(X)$ , vu comme sous-groupe de  $\text{Isom}(Z(X))$  et vu comme sous-groupe des isométries du graphe des chambres de  $X$ , coïncident.*

*Preuve.*

Comme le graphe  $\text{ch}(X)$  des chambres de  $X$  est discret, la topologie de  $\text{Isom}(\text{ch}(X))$  est la topologie de la convergence simple. En particulier, un ouvert de base est donné par l'ensemble des  $g$  tels que  $gC = C'$ , où  $C$  et  $C'$  sont des chambres fixées. Notons  $V(C, C')$  un tel ensemble. De l'autre côté, une base de voisinage de  $\text{Isom}(Z(X))$  est donnée par l'ensemble des  $V(g, K, \varepsilon) = \{g' \mid \forall x \in K, d(g(x), g'(x)) < \varepsilon\}$ , où  $g \in \text{Isom}(Z(X))$ ,  $K$  est un compact de  $Z(X)$  et  $\varepsilon > 0$ .

Commençons donc par vérifier que l'ensemble  $V(C, C')$  est un ouvert pour la topologie de  $\text{Isom}(Z(X))$ . Si l'on a  $V(C, C') = \emptyset$ , c'est clair. Sinon, fixons  $g \in V(C, C')$ . Soit  $\phi : [C, z] \mapsto [C', z]$  l'isométrie canonique entre  $C$  et  $C'$ . Alors, par définition, pour tout  $g' \in V(C, C')$  et

pour tout  $x \in Z(C, C')$ , on a  $gx = \phi(x)$ , et par conséquent  $gx = g'x$ . Réciproquement, s'il existe un  $x$  à l'intérieur de  $Z(C)$  tel que  $g'x \in C'$ , alors on a  $g' \in V(C, C')$ .

Vérifions donc que, si  $x$  est à l'intérieur de  $Z(C)$ , l'ensemble des  $g$  tel que  $gx = \phi(x)$  est un ouvert pour la topologie de  $G$  comme sous-groupe de  $G \cap \text{Isom}(Z(X))$ . Soit  $\varepsilon = \min_{s \in S} d_Z(x, Z_s)$ . Notons que  $\varepsilon > 0$  car  $x \notin Z_s$  et que  $Z_s$  est fermée. On voit alors que l'ensemble des  $y \in Z(X)$  tels que  $d(x, y) < \varepsilon$  est entièrement contenu dans  $C$ . Par conséquent, si  $d(gx, g'x) < \varepsilon$ , alors  $gC = g'C$ , et donc  $g' \in V(C, C')$ . On a donc  $V(C, C') = V(g, \{x\}, \varepsilon) \cap G$ . Par conséquent, c'est bien un ouvert de  $G \cap \text{Isom}(Z(X))$ .

Réciproquement, soit  $K$  un compact,  $g \in G \cap \text{Isom}(Z(X))$  et  $\varepsilon \geq 0$ . Notons que  $K$  est borné et n'intersecte donc qu'un nombre fini de chambres. Ainsi,  $K$  est une réunion finie de compacts qui sont chacun contenus dans une facette de  $Z(X)$ . On peut donc supposer que  $K$  est entièrement contenu dans une facette  $F$  de  $Z(X)$ . On peut supposer  $\varepsilon$  assez petit pour que, pour tout  $x \in K$ ,  $\{y \in Z(X) \mid d(x, y) < \varepsilon\}$  soit contenu dans l'ensemble des chambres intersectant  $K$  (voir [AB08, Lemma 12.19]). Si  $g' \in G$  est tel que  $d(g'x, gx) < \varepsilon$ , alors  $g'x$  appartient à une chambre contenant  $x$ . Par conséquent,  $V(g, K, \varepsilon)$  est contenu dans  $\bigcup V(C, C')$ , où l'union est prise sur l'ensemble des chambres  $C$  contenant  $F$  et  $C'$  contenant  $gF$ .

On a également l'inclusion réciproque : si  $g' \in V(C, C')$ , alors  $g'$  envoie la facette  $F$  sur la facette de même type de  $C'$ , qui est égale à  $gF$ , et on a donc bien  $g' \in V(g, K, \varepsilon)$ .

Par conséquent,  $V(g, K, \varepsilon)$  est un ouvert pour la topologie de  $\text{Isom}(\text{ch}(X))$ , ce qui prouve que les deux topologies coïncident.  $\square$

Il y a donc une seule topologie naturelle sur  $\text{Aut}^0(X)$  et c'est celle que l'on utilisera. De plus,  $\text{Aut}^0(X)$  est un sous-groupe d'indice fini de  $\text{Aut}(X)$ . On met sur  $\text{Aut}(X)$  la topologie qui fait de  $\text{Aut}^0(X)$  un sous-groupe ouvert ; c'est également la topologie de  $\text{Aut}(X)$  vu comme groupe des isométries du graphe des chambres.

Voici quelques propriétés élémentaires de cette topologie :

**Proposition 2.3.13.** *Soit  $X$  un immeuble. Le groupe  $\text{Aut}(X)$  est totalement discontinu, séparable, à base dénombrable de voisinages. Si de plus  $X$  est localement fini, alors les stabilisateurs de chambres sont compacts et  $\text{Aut}(X)$  est localement compact.*

Notons que l'on a supposé  $X$  d'épaisseur au plus dénombrable (et donc  $X$  lui-même dénombrable).

**Preuve.** Il est équivalent de raisonner dans  $G = \text{Aut}^0(X)$  plutôt que  $\text{Aut}(X)$ .

Une base de voisinages de l'identité est donné par les fixateurs d'ensemble de chambres de plus en plus grands, jusqu'à recouvrir tout l'immeuble. Comme le fixateur d'un nombre fini de chambres est ouvert, on en déduit que  $G$  est totalement discontinu et que l'identité possède une base dénombrable de voisinages.

Vérifions ensuite que  $G$  possède une suite dense. L'image par  $G$  d'une union finie de chambres est une union finie de chambres et il n'y a qu'un nombre dénombrable d'applications qui envoient une telle réunion sur une autre. L'intersection de ces applications avec  $G$  forme une suite dense.

Enfin, supposons  $X$  localement fini. Prouvons que le stabilisateur  $B$  d'une chambre  $C$  est compact. Soit  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $B$ . Comme le nombre de chambres adjacentes à  $C$  est fini, on peut extraire une sous-suite de  $(g_n)$  telle que ces chambres soient permutées toujours de la même façon. On extrait ensuite une nouvelle sous-suite telle que

les chambres à distance 2 de  $C$  soient permutées toujours de la même façon, et ainsi de suite. Un procédé diagonal permet alors d'extraire une sous-suite de  $(g_n)$  qui converge.

L'identité de  $G$  a donc une base de voisinages formée de sous-groupe compacts et ouverts;  $G$  est donc localement compact.  $\square$

Remarquons que, dans le cas où  $X$  est localement fini, les stabilisateurs de résidus sphériques sont également compacts, puisque ce sont des unions finies de parties compactes de  $\text{Aut}(X)$ . En particulier, l'action de  $\text{Aut}^0(X)$  sur la réalisation de Davis-Moussong de  $X$  est propre.

## Chapitre 3

# Compactifications combinatoires d'immeubles

Ce chapitre est (essentiellement) une traduction de l'article [CL09a] ; c'est un travail en commun avec Pierre-Emmanuel Caprace.

Dans tout ce qui suit, on fixe un immeuble  $X$  de type  $(W, S)$ . On va définir deux bords «combinatoires» de  $X$ , définis au moyen de projections combinatoires. Le premier bord peut se voir comme un bord du graphe des chambres de l'immeuble. Le deuxième bord est un raffinement de cette construction : on compactifie cette fois non pas le graphe des chambres, mais l'ensemble des résidus sphériques. On a pour cela besoin de munir cet ensemble d'une structure métrique qui prolonge la métrique sur les chambres, et d'étudier les projections combinatoires de résidus sphériques. C'est l'objet de la première section de ce chapitre.

Dans la deuxième section, après avoir défini ces bords combinatoires, on définit une notion de *quartier combinatoire*. Cette notion, qui généralise les quartiers et les cheminées des immeubles affines, sera l'outil principal que l'on utilisera pour étudier les bords combinatoires. On obtient ainsi un premier résultat : tout point du bord combinatoire est limite d'une suite contenue dans un appartement.

### 3.1 Graphe des résidus sphériques

Notons  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  l'ensemble des résidus sphériques de  $X$  (définition 2.2.30). Comme on manipulera souvent  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , ainsi que la réalisation métrique de  $X$ , on notera également  $\text{ch}(X)$  l'ensemble des chambres de  $X$ , pour éviter les confusions. Remarquons que l'ensemble des résidus sphériques est en bijection équivariante avec l'ensemble des facettes de la réalisation de Davis-Moussong  $|X|$ . En effet, on peut voir géométriquement un résidu comme une intersection d'adhérence de chambres fermées dans  $|X|$ , comme dans le lemme 2.2.31. De même, si  $Q$  est une partie de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , on note  $\text{ch}(Q)$  l'ensemble des chambres qui appartiennent à  $Q$ , et  $|Q|$  la réunion des réalisations géométriques des éléments de  $Q$ .

Le but de cette section est d'introduire une distance discrète (c'est-à-dire une structure de graphe) sur  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , de sorte que d'une part l'inclusion naturelle du graphe des chambres dans ce graphe soit isométrique, et d'autre part qui se comporte bien par rapport à la projection.

Par convention, on dit qu'un appartement, ou une racine de cet appartement, *contient*



un résidu sphérique s'il (ou elle) contient une chambre de ce résidu. Cette terminologie s'explique par le fait que la facette correspondant à l'intersection des réalisations géométriques des chambres de ce résidu est alors contenue dans la réalisation géométrique de l'appartement ou de la racine. Remarquons également que, lorsque  $R$  est contenu dans une racine  $\alpha$ , alors  $R$  peut être vu comme un élément de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$ . Si le résidu  $R$  est contenu à la fois dans la racine  $\alpha$  et dans la racine opposée  $-\alpha$ , on dit que  $R$  est contenu dans le mur  $\partial\alpha$ .

Soient  $R_1$  et  $R_2$  des résidus sphériques, et soit  $A$  un appartement qui les contient. Notons  $\Phi_A(R_1, R_2)$  l'ensemble des racines de  $A$  contenant  $R_1$  mais pas  $R_2$ . Cet ensemble est vide si et seulement si  $R_1$  est contenu dans  $R_2$ , puisque tout résidu coïncide avec l'intersection de tous les  $\text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$ , lorsque  $\alpha$  parcourt l'ensemble des demi-appartements de  $X$  contenant  $R$ , ou plus précisément l'ensemble des racines d'un appartement  $A$  contenant  $R$ . De plus, le cardinal de l'ensemble  $\Phi_A(R_1, R_2)$  ne dépend pas du choix de  $A$ , d'après l'axiome (I3).

**Définition 3.1.1.** La *distance radicielle*, notée  $d(R_1, R_2)$  entre  $R_1 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $R_2 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est définie par

$$d(R_1, R_2) = \frac{1}{2}|\Phi_A(R_1, R_2)| + \frac{1}{2}|\Phi_A(R_2, R_1)|.$$

D'après la proposition 2.1.12, la restriction de la distance radicielle à l'ensemble des chambres est égale à la distance usuelle. Il n'est pas évident que la distance radicielle est une distance, on démontrera ce fait dans la proposition 3.1.4. Avant de démontrer cela, introduisons un peu de terminologie.

**Définition 3.1.2.** Un ensemble  $\mathcal{R} \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est dit *fermé* si, pour tout  $R_1, R_2 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  tels que  $R_2 \subset R_1$  et  $R_2 \in \mathcal{R}$ , on a  $R_1 \in \mathcal{R}$ .

Il est dit *convexe* s'il est fermé et si pour tout  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ , on a  $\text{proj}_{R_1}(R_2) \in \mathcal{R}$ .

Géométriquement, un ensemble de résidus sphériques est fermé si l'union des facettes de  $|X|$  correspondant à ces résidus est fermée.

Comme l'intersection de sous-ensembles fermés (resp. convexes) de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est fermée (resp. convexe), et puisque  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est convexe, on peut considérer la *fermeture* (resp. l'enveloppe convexe) d'un sous-ensemble  $\mathcal{R} \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , que nous notons  $\overline{\mathcal{R}}$  (resp.  $\text{Conv}(\mathcal{R})$ ). Pour simplifier, on notera  $\text{Conv}(R_1, R_2)$  l'ensemble  $\text{Conv}(\{R_1, R_2\})$ .

Le lemme suivant fournit une caractérisation agréable de la projection sur des résidus :

**Lemme 3.1.3.** *Étant donnés deux résidus sphériques  $R$  et  $T$ , la projection  $\text{proj}_R(T)$  est l'unique résidu de rang minimal de  $\text{Conv}(R, T)$  contenu dans  $R$ .*

**Preuve.** Soit  $A$  un appartement contenant  $\text{Conv}(R, T)$  et  $\sigma_1, \sigma_2 \in \text{Conv}(R, T)$  deux résidus de rang minimal contenus dans  $R$ . Supposons  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ . Alors, quitte à les échanger, il existe une racine  $\alpha$  de  $A$  contenant  $\sigma_1$  mais pas  $\sigma_2$ . Comme  $R$  contient  $\sigma_1 \cup \sigma_2$ , on voit que  $R$  contient des chambres de  $\alpha$  et de  $-\alpha$ . Par conséquent, si  $T$  est contenu dans  $\alpha$ , alors tous les résidus de  $\text{Conv}(R, T)$  également, ce qui contredit le fait que  $\sigma_2$  n'est pas contenu dans  $\alpha$ . Donc  $T \not\subset \text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$ , ce qui signifie que toutes les chambres de  $T \cap A$  sont dans  $-\alpha$ . Comme  $\sigma_1$  est dans  $\text{Conv}(R, T)$ , on voit que  $\sigma_1$  est contenu dans  $-\alpha$ . Par conséquent, par convexité de  $-\alpha$ , toutes les chambres de  $\text{proj}_{\sigma_1}(T)$  sont contenues dans  $-\alpha$ . Comme ce dernier est un résidu sphérique contenu dans  $\sigma_1$ , donc dans  $R$ , on a par minimalité  $\sigma_1 = \text{proj}_{\sigma_1}(T)$ , ce qui contredit le fait que  $\sigma_1$  est contenu dans  $\alpha$ .

Par conséquent, il existe un unique résidu de rang minimal  $\sigma$  dans  $\text{Conv}(R, T)$  qui soit contenu dans  $R$ . Comme  $\text{proj}_R(T) \subset R$ , on a  $\sigma \subset \text{proj}_R(T)$ , par minimalité. Si cette dernière inclusion était stricte, il existerait une racine  $\beta$  contenant  $\text{proj}_R(T)$  mais pas  $\sigma$ . En particulier,  $R$  et  $\text{proj}_R(T)$  contiendraient des chambres de  $\beta$  et  $-\beta$ . Par convexité des racines, cela impliquerait que  $T$  contient des chambres de  $\beta$  et de  $-\beta$ . En utilisant encore une fois la convexité des racines, cela impliquerait qu'il en est de même de tous les résidus de  $\text{Conv}(R, T)$ , ce qui contredirait le fait que  $\sigma$  n'est pas contenu dans  $\beta$ .  $\square$

On définit ensuite *l'intervalle* entre deux résidus sphériques  $R_1$  et  $R_2$  comme étant l'ensemble  $[R_1, R_2]$  des résidus sphériques  $\sigma$  tels que  $d(R_1, R_2) = d(R_1, \sigma) + d(\sigma, R_2)$ .

**Proposition 3.1.4.** (i) *La distance radicielle fait de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  un espace métrique.*

(ii) *Les rétractions sont 1-lipschitziennes.*

(iii) *Pour tout  $R_1, R_2 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , on a  $\text{Conv}(R_1, R_2) = \overline{[R_1, R_2]}$ .*

(iv) *Un ensemble  $\mathcal{R} \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est convexe si, et seulement si, il est fermé et si pour tout  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ , l'intervalle  $[R_1, R_2]$  est entièrement contenu dans  $\mathcal{R}$ .*

Avant d'effectuer la preuve de cette proposition, vérifions le fait suivant, qui nous sera utile dans de nombreuses preuves par récurrence sur la distance radicielle :

**Lemme 3.1.5.** *Soit  $R_1, R_2 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Alors on a  $[R_1, R_2] = \{R_1, R_2\}$  si et seulement si  $R_1 \subset R_2$  ou  $R_2 \subset R_1$ , et il n'existe pas de résidu  $\sigma$  tel que  $R_1 \subset \sigma \subset R_2$  ou  $R_2 \subset \sigma \subset R_1$ .*

**Preuve.** L'implication de droite à gauche est évidente. De plus, si  $R_1 \subset R_2$  et si  $R$  est un résidu avec  $R_1 \subset R \subset R_2$ , alors  $R \in [R_1, R_2]$ . Par conséquent, il suffit de prouver que si le plus petit résidu contenant  $R_1 \cup R_2$  est différent de  $R_1$  ou de  $R_2$ , alors  $]R_1, R_2[ := [R_1, R_2] \setminus \{R_1, R_2\}$  est non vide.

On raisonne dans la réalisation de Davis-Moussong  $|X|$  de  $X$ . Notons  $|R|$  la facette correspondant au résidu sphérique  $R$ . Le *support* d'un point  $x \in |X|$  est le plus grand résidu sphérique  $R$  tel que  $x \in |R|$ .

Supposons tout d'abord qu'il existe des points  $p_1$  et  $p_2$ , dont les supports respectifs sont  $R_1$  et  $R_2$ , tels que le segment géodésique  $[p_1, p_2]$  n'est pas entièrement contenu dans  $|R_1| \cup |R_2|$ . Soit  $x$  un point de  $[p_1, p_2] \setminus |R_1| \cup |R_2|$ , et soit  $R$  le support de  $x$ . Par définition,  $R \neq R_1, R_2$ . Il suffit donc de vérifier que  $R \in [R_1, R_2]$ .

Soit  $A$  un appartement contenant  $R_1$  et  $R_2$ . Alors  $R$  est également contenu dans  $A$ , par convexité de  $|A|$ . Comme toute racine ou bien contient  $R$  ou bien ne le contient pas, on a  $\Phi_A(R_1, R_2) \subset \Phi_A(R_1, R) \cup \Phi_A(R, R_2)$ , et de même avec  $R_1$  et  $R_2$  échangés. Il suffit donc de démontrer que toute racine  $\alpha$  contenant  $R$  mais pas  $R_2$  contient également  $R_1$ , et vice-versa. Mais si  $\alpha$  ne contient pas  $R_1$ , on n'a pas non plus  $p_1 \in |\alpha|$ . Comme  $p_2 \in |\alpha|$ , par convexité de  $|\alpha|$ , on a  $x \in |\alpha|$ , ce qui contredit le fait que  $R$  est contenu dans  $\alpha$ .

Supposons maintenant que pour tous points  $p_1$  et  $p_2$ , dont les supports respectifs sont  $R_1$  et  $R_2$  le segment géodésique  $[p_1, p_2]$  est entièrement contenu dans  $|R_1| \cup |R_2|$ . Alors  $|R_1| \cap |R_2|$  est non vide, c'est une facette qui correspond à un résidu sphérique  $R$  qui est en fait le plus petit contenant  $R_1 \cup R_2$ . On peut supposer que le résidu  $R$  est différent de  $R_1$  et  $R_2$ . Il faut alors démontrer que  $R \in [R_1, R_2]$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $R_1$  et  $R_2$  et donc  $R$ . Comme ci-dessus, il suffit de vérifier que toute racine  $\alpha$  de  $A$  contenant  $R$  mais pas  $R_1$  contient également  $R_2$ . Sinon, la racine  $-\alpha$  contiendrait deux points  $p_1, p_2$  de

supports respectifs  $R_1, R_2$ . En particulier, le segment géodésique  $[p_1, p_2]$  serait contenu dans l'intérieur de  $|\alpha|$ , et éviterait donc  $|R| \subset |\alpha|$ . C'est absurde puisque  $|R| = |R_1| \cap |R_2|$ .  $\square$

**Preuve de la proposition 3.1.4.** On commence par démontrer (ii). Soit  $\rho$  une rétraction sur un appartement  $A$  et soit  $R_1, R_2 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Il faut prouver que l'on a  $d(\rho(R_1), \rho(R_2)) \leq d(R_1, R_2)$ . On travaille par récurrence sur  $d(R_1, R_2)$ . Le résultat est évident si  $R_1 = R_2$ . Plus généralement, si  $R_1 \subset R_2$ , le résultat est clair. On suppose donc que  $R_1$  et  $R_2$  ne sont pas contenus l'un dans l'autre. D'après le lemme 3.1.5, cela implique que  $|R_1, R_2| \neq \emptyset$ . Soit  $R \in ]R_1, R_2[$ . Par hypothèse de récurrence, on en déduit :

$$\begin{aligned} d(R_1, R_2) &= d(R_1, R) + d(R, R_2) \\ &\geq d(\rho(R_1), \rho(R)) + d(\rho(R), \rho(R_2)) \\ &\geq d(\rho(R_1), \rho(R_2)), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient du fait que chaque racine de  $A$  ou bien contient  $R$  ou bien ne le contient pas, et donc  $\Phi_A(R_1, R_2) \subset \Phi_A(R_1, R) \cup \Phi_A(R, R_2)$ , et de même en échangeant  $R_1$  et  $R_2$ .

(i) La seule chose à vérifier est l'inégalité triangulaire. On a déjà vérifié cette inégalité pour des triplets de résidus contenus dans un appartement. Le cas général s'en déduit par le fait que les rétractions diminuent les distances.

(iii) On démontre d'abord par récurrence sur  $d(R_1, R_2)$  que  $[R_1, R_2] \subset \text{Conv}(R_1, R_2)$ .

Soit donc  $R \in [R_1, R_2]$ . On va vérifier tout d'abord par récurrence sur  $d(R, R_2)$  que  $R \in \text{Conv}(R_1, R_2)$ . Supposons tout d'abord que  $]R, R_2[$  contient un résidu sphérique  $T$ . Alors

$$R \in [R_1, T] \subset \text{Conv}(R_1, T) \subset \text{Conv}(R_1, R_2),$$

la première inclusion provenant de la récurrence sur  $d(R_1, R_2)$  et la seconde de la récurrence sur  $d(R, R_2)$ .

Supposons maintenant que  $]R, R_2[$  est vide. Si  $R_2 \subset R$ , alors on a  $R \in \text{Conv}(R_1, R_2)$ . D'après le lemme 3.1.5, il suffit de traiter le cas  $R \subsetneq R_2$ . En particulier, on a  $d(R_1, R) < d(R_1, R_2)$ , et par récurrence on en déduit  $[R_1, R] \subset \text{Conv}(R_1, R)$ . Comme  $\text{Conv}(R_1, R)$  est fermé, il contient  $R_2$  et il existe donc un appartement contenant  $R_1, R$  et  $R_2$ . Finalement, on a  $\text{Conv}(R_1, R) = \text{Conv}(R_1, R_2)$ , puisque le fait que  $R \in [R_1, R_2]$  implique que toute racine de  $A$  contenant  $R$  mais pas  $R_2$  contient également  $R_1$ . Ainsi  $R \in \text{Conv}(R_1, R_2)$ , et on a donc bien  $[R_1, R_2] \subset \text{Conv}(R_1, R_2)$ . En particulier,  $\overline{[R_1, R_2]} \subset \text{Conv}(R_1, R_2)$  puisque les ensembles convexes sont fermés.

Soit maintenant  $x \in \text{Conv}(R_1, R_2)$ , et choisissons un résidu sphérique  $R \in \text{Conv}(R_1, R_2)$  de rang minimal contenu dans  $x$ . Alors on a  $R \in [R_1, R_2]$ . En effet, soit  $A$  un appartement contenant  $R_1$  et  $R_2$ , et  $\alpha$  une racine de  $A$  contenant  $R$  mais pas  $R_2$ . Si  $R_1$  n'est pas contenu dans  $\alpha$ , alors tous les résidus de  $\text{Conv}(R_1, R_2)$  sont contenus dans  $-\alpha$ , et donc  $R$  est contenu dans  $\alpha$  et  $-\alpha$ . Cela implique que toutes les chambres de  $\text{proj}_R(R_2)$  sont contenues dans  $-\alpha$ , ce qui contredit la maximalité de  $R$ . Ceci prouve que toute racine contenant  $R$  mais pas  $R_2$  contient également  $R_1$ . En utilisant le même argument en échangeant  $R_1$  et  $R_2$ , on démontre que  $R \in [R_1, R_2]$ . Ainsi,  $x \in \overline{[R_1, R_2]}$ , ce qui termine la preuve.

(iv) se déduit de (iii) puisqu'un ensemble  $\mathcal{R} \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est convexe si et seulement si il est fermé et si pour tout  $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ , on a  $\text{Conv}(R_1, R_2) \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ .  $\square$

Le corollaire suivant démontre que la projection d'un résidu est canoniquement déterminée par la distance radicielle. Dans le cas où l'on projette une chambre, le résultat correspondant est bien connu : c'est la proposition 2.2.34.

**Corollaire 3.1.6.** *Pour tous  $R, T \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_R(T)$  coïncide avec l'unique élément minimal de  $[R, T]$  contenant  $R$ .*

*Preuve.* D'après la proposition 3.1.4(iii), le projeté  $\text{proj}_R(T)$  est contenu dans un résidu sphérique minimal  $\pi \in [R, T]$ . En particulier,  $\pi$  est contenu dans  $\text{Conv}(R, T)$  et est donc contenu dans  $R$ . On a donc  $\pi = \text{proj}_R(T)$  d'après le lemme 3.1.3. Ainsi  $\text{proj}_R(T)$  est contenu dans l'intervalle  $[R, T]$  et le résultat s'en déduit du lemme 3.1.3 puisque  $[R, T] \subset \text{Conv}(R, T)$  d'après la proposition 3.1.4(iii).  $\square$

## 3.2 Bords combinatoires

On va maintenant définir le bord combinatoire. On étudie ensuite la structure de ce bord, toujours d'un point de vue combinatoire. On verra que certaines propriétés des immeubles affines (existence et propriétés d'incidence de quartier) se généralisent à des immeubles quelconques.

### 3.2.1 Définition

L'ingrédient clé dans la définition de la compactification combinatoire est la notion de projection, définie dans la section 2.2.3. Si  $\sigma$  est un résidu, on a ainsi une application  $\text{proj}_\sigma : \text{Res}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma)$ . Si l'on considère simplement les projections de chambres, on obtient une application  $\text{proj}_\sigma : \text{ch}(X) \rightarrow \text{ch}(\sigma)$ , qui est simplement la restriction de l'application précédente.

Ceci nous permet de définir deux applications :

$$\begin{aligned} \pi_{\text{Ch}} : \text{ch}(X) &\rightarrow \prod_{\sigma \in \text{cl}(X)} \sigma \\ C &\mapsto \left( \sigma \mapsto \text{proj}_\sigma(C) \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \pi_{\text{Res}} : \text{Res}_{\text{sph}}(X) &\rightarrow \prod_{\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma) \\ R &\mapsto \left( \sigma \mapsto \text{proj}_\sigma(R) \right). \end{aligned}$$

Les produits ci-dessus sont munis de la topologie produit, où chaque  $\sigma$  et  $\text{Res}_{\text{sph}}(\sigma)$  est muni de la topologie discrète. On peut alors considérer l'adhérence de l'image de ces applications. Autrement dit, on pose :

$$\mathcal{C}_1(X) = \overline{\pi_{\text{Ch}}(\text{ch}(X))} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) = \overline{\pi_{\text{Res}}(\text{Res}_{\text{sph}}(X))}.$$

Il est également naturel de considérer l'espace  $\overline{\pi_{\text{Res}}(\text{ch}(X))}$ ; on verra en fait dans la proposition 3.2.12 que cet espace s'identifie à  $\mathcal{C}_1(X)$ .

Si l'immeuble  $X$  est localement fini, alors chaque résidu sphérique est fini et par conséquent les espaces  $\mathcal{C}_1(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont compacts. Dans tous les cas, ces espaces sont métrisables puisque  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est dénombrable. L'action de  $\text{Aut}(X)$  sur  $X$  s'étend canoniquement à des actions sur  $\mathcal{C}_1(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ ; l'action induite par un élément  $g \in \text{Aut}(X)$  est donnée par la formule

$$\begin{aligned} g : \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) &\rightarrow \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) \\ f &\mapsto \left( \sigma \mapsto gf(g^{-1}\sigma) \right). \end{aligned}$$

**Définition 3.2.1.** Les espaces  $\mathcal{C}_1(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont appelés respectivement *bordification combinatoire minimale* et *bordification combinatoire maximale*. Quand l'immeuble  $X$  est localement fini, on utilisera le terme *compactification* à la place de bordification..

Cette terminologie est justifiée par la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Les applications  $\pi_{\text{Ch}}$  et  $\pi_{\text{Res}}$  sont  $\text{Aut}(X)$ -équivariantes et injectives; de plus, leurs images sont discrètes. En particulier,  $\pi_{\text{Ch}}$  et  $\pi_{\text{Res}}$  sont des homéomorphismes sur leurs images.*

**Preuve.** La preuve est la même pour  $\pi_{\text{Ch}}$  et  $\pi_{\text{Res}}$ , donnons-la pour  $\pi_{\text{Ch}}$ . L'équivariance est évidente, prouvons donc l'injectivité. Soient  $C$  et  $C'$  des chambres distinctes de  $X$ . Alors il existe un appartement  $A$  qui les contient toutes les deux, et un mur  $H$  de cet appartement qui les sépare, de sorte que les projections de  $C$  et  $C'$  sur chaque cloison de  $H$  ne peuvent coïncider. Ceci implique que  $\pi_{\text{Ch}}(C) \neq \pi_{\text{Ch}}(C')$ .

Soit maintenant  $(C_n)_{n \geq 0}$  une suite de chambres telle que  $(\pi_{\text{Ch}}(C_n))$  converge vers  $\pi_{\text{Ch}}(C)$ , pour une chambre  $C$  de  $X$ . Il faut démontrer que  $C_n = C$  pour  $n$  assez grand. Supposons le contraire. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer  $C_n \neq C$  pour tout  $n$ . Alors il existe une cloison  $\sigma_n$  contenant  $C$  telle que  $\text{proj}_{\sigma_n}(C_n) \neq C$ . En extrayant encore une fois, on peut supposer que  $\sigma_n = \sigma$  est indépendant de  $n$ . Ainsi, on a  $\text{proj}_{\sigma}(C_n) \neq C$ , ce qui contredit le fait que  $(\pi_{\text{Ch}}(C_n))$  converge vers  $\pi_{\text{Ch}}(C)$ .  $\square$

Dans le cas où  $X$  est localement fini, la proposition 3.2.2 implique que  $\mathcal{C}_1(X)$  est bien une compactification de  $X$ , vu comme ensemble de chambres. De même  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est une compactification de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ .

Les éléments de  $\mathcal{C}_1(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont des fonctions qui associent à chaque cloison (resp. résidu sphérique) une chambre (resp. un résidu sphérique) de cette cloison (reps. ce résidu). Suite à la proposition 3.2.2, on identifiera  $X$  et  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  à des sous-ensembles de  $\mathcal{C}_1(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  respectivement. En particulier, on pourra dire qu'une suite de chambres converge vers un élément de  $\mathcal{C}_1(X)$ .

Regardons maintenant de plus près la structure de la bordification minimale. Le cas particulier d'un appartement est facile à comprendre :

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $f \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et soient  $(R_n)$  et  $(T_n)$  des suites de résidus sphériques contenus dans un appartement  $A$  et tels que  $(\pi_{\text{Res}}(R_n))$  et  $(\pi_{\text{Res}}(T_n))$  convergent vers  $f$ . Alors, pour toute racine  $\alpha$  de  $A$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que l'une des trois possibilités se réalise :*

- ou bien  $R_n$  et  $T_n$  sont contenus dans  $\alpha$  pour chaque  $n > N$ ,
- ou bien  $R_n$  et  $T_n$  sont contenus dans  $-\alpha$  pour chaque  $n > N$ ,
- ou bien  $R_n$  et  $T_n$  sont contenus dans  $\partial\alpha$  pour chaque  $n > N$ .

Réciproquement, soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques de  $A$  telle que, pour tout demi-appartement  $\alpha$  de  $A$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $R_n$  vérifie l'une des trois possibilités ci-dessus. Alors  $(R_n)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ .

**Preuve.** Soit  $H$  un mur de  $A$ , soit  $\sigma$  une cloison de  $H$  et  $C, C'$  les deux chambres de  $A$  contenues dans  $\sigma$ . Pour tout résidu sphérique  $R$  de  $A$ , la projection  $\text{proj}_\sigma(R)$  coïncide avec  $C$  (resp.  $C'$ ) si et seulement si  $R$  est contenu dans la même racine bordée par  $H$  que  $C$  (resp.  $C'$ ). Elle coïncide avec  $\sigma$  si et seulement si  $R$  est contenu dans  $\alpha$  et  $-\alpha$ , c'est-à-dire dans  $\partial\alpha$ . La première affirmation résulte alors directement de la définition de la convergence dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .

Soit réciproquement  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques contenus dans  $A$  qui finit par rester d'un côté fixé de tous les murs de  $A$ . Soit  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)$ . Notons  $\Phi$  l'ensemble des racines  $\alpha$  de  $A$  telles que  $R$  est inclus dans  $\alpha$  et  $-\alpha$ , et que  $R_n$  finit par être contenu dans  $\alpha$ . Comme  $\Phi$  est fini, il existe un  $N$  tel que  $R_n \subset \bigcap_{\alpha \in \Phi} \alpha$  pour tout  $n > N$ . En particulier,  $\text{proj}_R(R_n) \subset \bigcap_{\alpha \in \Phi} \alpha$  pour tout  $n > N$ . On déduit du lemme 3.1.3 que  $\text{proj}_R(R_n)$  est en fait l'unique résidu sphérique maximal contenu dans  $\bigcap_{\alpha \in \Phi} \alpha$  et inclus dans  $R$ . En particulier, ce résidu est indépendant de  $n > N$ . Par conséquent, on a bien convergence de la suite  $(R_n)$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ .  $\square$

On peut bien sûr énoncer des conditions analogues pour la convergence d'une suite de chambres de  $A$  vers un élément de  $\mathcal{C}_1(X)$ .

Le sous-ensemble de  $\mathcal{C}_1(X)$  constitué par les limites de suites de chambres d'un appartement  $A$  est noté  $\mathcal{C}_1(A)$ , et on définit de même  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ . On vérifie facilement que la notation est cohérente avec le fait que  $\mathcal{C}_1(A)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  désignent respectivement la bordification combinatoire minimale et maximale. Cependant, il n'est pas clair que tout élément  $f \in \mathcal{C}_1(X)$  appartient à un  $\mathcal{C}_1(A)$  pour un appartement  $A$  convenable. C'est pourtant bien le cas :

**Proposition 3.2.4.** *L'ensemble  $\mathcal{C}_1(X)$  est égal à l'union des  $\mathcal{C}_1(A)$ , lorsque  $A$  décrit l'ensemble des appartements de  $X$ . De même,  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est égal à l'union des  $\mathcal{C}_1(A)$ .*

Cette proposition est cruciale pour comprendre les compactifications combinatoires, puisqu'elle permet de réduire de nombreux problèmes au cas mince. Sa preuve nécessite des outils préparatoires et est reportée à la section 3.2.6

*Exemple 3.2.5.* Un arbre sans feuille  $X$  est un immeuble de type  $D_\infty$  (exemple 2.2.21). Les cloisons dans ces arbres sont les sommets et une suite de chambres (*i.e.* d'arêtes)  $(x_n)$  converge dans la bordification minimale si et seulement si la projection de  $x_n$  sur chaque sommet finit par être constante. Il est facile de voir que  $\mathcal{C}_1(X)$ , tout comme  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , est isomorphe à la bordification usuelle de l'arbre, c'est-à-dire à son bord visuel  $\partial_\infty X$ .

On peut également voir un arbre homogène de valence  $r \geq 1$  comme le complexe de Coxeter  $\mathbf{W}$  associé au groupe  $W = \langle s_1, \dots, s_r \mid s_1^2, \dots, s_r^2 \rangle$ . Une chambre est alors vue comme un sommet avec les demi-arêtes qui lui sont incidentes; une cloison est le milieu d'une arête. On peut alors vérifier que la compactification combinatoire correspond avec la compactification visuelle.

*Exemple 3.2.6.* Considérons un appartement  $A$  de type  $\tilde{A}_2$  : c'est un plan euclidien, pavé par des triangles équilatéraux (voir l'exemple 2.1.3). D'après le lemme 3.2.3, on peut caractériser les points  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  par l'ensemble des racines  $\Phi(\xi)$  qui le contiennent. Il y a trois directions de murs, disons  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Dans chaque direction, si l'on choisit une origine et un sens, on peut numéroter la moitié des racines dont le mur est dans la direction de  $\alpha$  par  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , de sorte que  $\alpha_i \subset \alpha_{i+1}$  pour tout  $i$ . Les autres racines dont le mur est dans la direction de  $\alpha$  seront alors  $(-\alpha_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ . On fait de même pour  $\beta$  et  $\gamma$ .

On peut alors définir un point  $\xi_1$  du bord  $\mathcal{C}_1(A) \subset \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  par  $\Phi_A(\xi_1) = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ . Les diverses possibilités de choix de signe pour  $(\alpha_i)$ ,  $(\beta_i)$  et  $(\gamma_i)$  fournissent 6 points du même type.

Il y a également une autre catégorie de points. Avec un choix comme ci-dessus, on peut définir  $\xi_2 \in \mathcal{C}_1(A)$  par  $\Phi_A(\xi_2) = \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \mid i \leq i_0, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha_i \mid i > i_0\}$ , où  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Les points  $\xi_2$  définissent les sommets d'une «droite» de points à l'infini. Encore une fois, il y a 6 telles droites (voir la figure 3.2.6). On peut également définir  $\xi_3 \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  par  $\Phi_A(\xi_3) = \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \mid i \leq i_0, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha_i \mid i \geq i_0\}$ , où  $i_0 \in \mathbb{Z}$ . Ces points peuvent être vus comme des arêtes reliant les points du même type que  $\xi_2$ .

Lorsque  $X$  est un immeuble de type  $\tilde{A}_2$ , la proposition 3.2.4 permet d'écrire tout point du bord combinatoire de  $X$  comme un point du bord d'un appartement. Par conséquent, la description ci-dessus permet de comprendre le bord combinatoire de  $X$ .

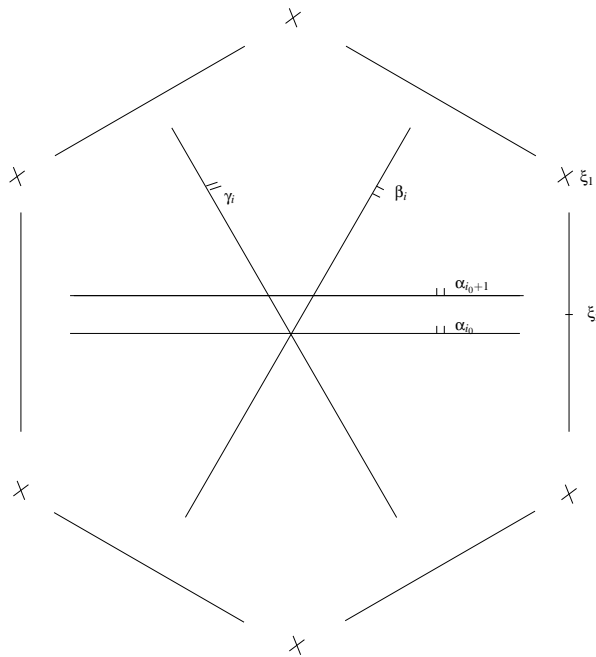


FIG. 3.1 – Bord combinatoire d'un appartement de type  $\tilde{A}_2$

Notons que cette figure apparaît déjà comme exemple dans [GR06, §6.3.1]. On verra en fait dans la section 4.1 que la construction de [GR06] donne, sous des hypothèses raisonnables, le même bord que le bord combinatoire.

*Exemple 3.2.7.* Soit  $W$  un groupe de Coxeter fuchsien, c'est-à-dire associé à un pavage du plan hyperbolique (voir exemple 2.1.4). Supposons que l'action de  $W$  sur le plan hyperbolique est cocompacte. Comme ci-dessus, on se contente de décrire le bord d'un appartement

A. Pour ce faire, on va la comparer au bord visuel  $\partial_\infty A \simeq S^1$ . À un point  $\xi$  du bord visuel, vers lequel aucun mur ne pointe, on peut associer un point du bord combinatoire, défini par l'ensemble des racines contenant une suite tendant vers  $\xi$ . Si maintenant  $\xi'$  est un point du bord visuel vers lequel pointe un mur  $H$ , on lui associe 3 points du bord combinatoire : ces trois points sont contenus dans toutes les racines dont le bord est différent de  $H$  et qui contiennent une suite tendant vers  $\xi$ . Ensuite, un de ces points est contenu dans une racine  $\alpha$  telle que  $\partial\alpha = H$ , mais pas dans  $-\alpha$ . Un autre est de même contenu dans  $-\alpha$  mais pas dans  $\alpha$ . Enfin, un troisième point (qui appartient à  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  mais pas à  $\mathcal{C}_1(A)$ ) est contenu à la fois dans  $\alpha$  et dans  $-\alpha$ .

Remarquons ensuite que l'ensemble des points qui sont limites de murs est dense dans le bord visuel du plan hyperbolique. En effet, il suffit pour vérifier ce point de prouver que l'action de  $W$  sur  $S^1$  est minimale. D'après [GdlH90a, Corollaire 26], l'action de  $W$  sur son ensemble limite est minimale, et d'après [Kat92, Theorem 4.5.2], cet ensemble limite est égal au bord  $S^1$  tout entier.

Par conséquent, si  $\xi$  et  $\xi'$  sont deux points différents de  $\partial_\infty A$ , alors  $\xi$  et  $\xi'$  sont séparés par un mur. En particulier, il existe une racine, dont le mur associé ne pointe ni vers  $\xi$  ni vers  $\xi'$ , et qui contient  $\xi$  mais pas  $\xi'$ . Il en découle que la construction ci-dessus donne toujours des points différents.

*Exemple 3.2.8.* Si  $X = X_1 \times X_2$  est un produit de deux immeubles, alors une chambre de  $X$  est simplement le produit d'une chambre de  $X_1$  et d'une chambre de  $X_2$ , et la projection sur une cloison est simplement le produit des projections dans  $X_1$  et  $X_2$ . Par conséquent, la bordification combinatoire  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est égale au produit  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X_1) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(X_2)$ .

### 3.2.2 Projections depuis l'infini

Dans cette section, on démontre que toute fonction  $f \in \mathcal{C}_1(X)$  peut se projeter sur n'importe quel résidu sphérique de  $X$ . On peut ainsi définir le plongement de  $\mathcal{C}_1(X)$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  auquel il a été fait référence plus haut.

Soit donc  $\xi \in \mathcal{C}_1(X)$  et  $R$  un résidu. D'après la proposition 2.2.32, le résidu  $R$  est un immeuble. On définit alors la *projection* de  $\xi$  sur  $R$ , notée  $\text{proj}_R(\xi)$ , comme étant la restriction de  $\xi$  à l'ensemble des cloisons  $\text{cl}(R)$  de  $R$ . Dans le cas particulier où  $R$  lui-même est une cloison, l'ensemble  $\text{cl}(R)$  est un singleton et la fonction  $\text{proj}_R(\xi)$  peut donc être identifiée à une chambre, qui coïncide en fait avec  $\xi(R)$ .

De même, si  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , on définit  $\text{proj}_R(\xi)$  comme la restriction de  $\xi$  à  $\text{Res}_{\text{sph}}(R)$ .

Le lemme suivant permet de s'assurer que la définition de  $\text{proj}_R$  a bien un sens.

**Lemme 3.2.9.** *Soit  $(C_n)$  une suite de chambres convergeant vers  $\xi \in \mathcal{C}_1(X)$ , et soit  $R$  un résidu de  $X$ . La suite des projections  $(\text{proj}_R(C_n))$  converge vers un élément  $\text{proj}_R(\xi) \in \prod_{\sigma \in \text{cl}(R)} \sigma$ . En particulier,  $\text{proj}_R(\xi)$  est un élément de  $\mathcal{C}_1(R)$ .*

*De même, toute suite  $(R_n)$  convergeant vers  $\eta \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  donne lieu à une suite  $(\text{proj}_R(R_n))$  qui converge vers un élément de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(R)$ , noté  $\text{proj}_R(\eta)$ .*

**Preuve.** On démontre le lemme dans le cas de la bordification minimale, le cas de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est similaire.

Il suffit de prouver le premier point. Par définition de la convergence dans  $\mathcal{C}_1(X)$ , pour toute cloison  $\sigma \subset R$ , il existe un entier  $N$ , qui dépend de  $\sigma$ , tel que pour tout  $n > N$ , on



ait  $\text{proj}_\sigma(C_n) = \xi(\sigma)$ . De plus, on a

$$\text{proj}_R(\text{proj}_\sigma(C_n)) = \text{proj}_R(\xi(\sigma)) = \xi(\sigma).$$

D'autre part,  $\text{proj}_\sigma(C_n)$  est égal à  $\text{proj}_\sigma(\text{proj}_R(C_n))$ .

En effet, on obtient d'après la proposition 2.2.34, si  $C = \text{proj}_R(C_n)$  et  $D = \text{proj}_\sigma(C_n)$ , pour tout  $E \in \sigma$ ,

$$d(C_n, E) = d(C_n, C) + d(C, E) = d(C_n, D) + d(D, E)$$

car  $E \in R$  et  $E \in \sigma$ , et de plus  $d(C_n, D) = d(C_n, C) + d(C, D)$  car  $D \in R$ . Par conséquent, on obtient  $d(C, E) = d(C, D) + d(D, E)$  pour tout  $E \in \sigma$ , ce qui implique que  $D = \text{proj}_\sigma(C)$ .

On en déduit que, pour  $n > N$ , on a

$$\text{proj}_\sigma(\text{proj}_R(C_n)) = \xi(\sigma),$$

ce qui signifie que  $(\text{proj}_R(C_n))$  converge vers  $\text{proj}_R(\xi)$ .  $\square$

Dans le lemme 3.2.9, si le résidu  $R$  est sphérique, alors pour tout  $\xi \in \mathcal{C}_1(X)$ , la projection  $\text{proj}_R(\xi)$  peut être identifiée avec une chambre de  $R$ . De même, pour tout  $\eta \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_R(\eta)$  peut être identifiée avec un résidu de  $R$ .

Soit maintenant  $C$  une chambre et  $\xi$  un point dans  $\mathcal{C}_1(X) \setminus X$ . Comme  $\xi \neq C$ , il existe une cloison contenant  $C$  sur laquelle la projection de  $\xi$  est différente de  $C$ . Soit  $I \subset S$  l'ensemble des types de ces cloisons. Soit  $R$  le résidu de type  $I$  contenant  $C$ .

**Lemme 3.2.10.** *Le résidu  $R$  est sphérique et  $\text{proj}_R(\xi)$  est une chambre opposée à  $C$  dans  $R$ .*

*Preuve.* Soit  $(C_n)$  une suite qui converge vers  $\xi$ . D'après le lemme 3.2.9, la suite  $(\text{proj}_R(C_n))$  converge vers  $\text{proj}_R(\xi)$ . Par conséquent, la projection  $\text{proj}_R(C_n)$  sur les cloisons adjacentes à  $C_n$  est à partir d'un certain rang la même que la projection de  $\text{proj}_R(\xi)$ , c'est-à-dire que la projection de  $\xi$ . Autrement dit, la projection de  $C_n$  sur toute cloison de  $R$  contenant  $C$  est toujours différente de  $C$ . D'après [Bro89, IV.6, Lemma 3] cela implique que  $R$  est sphérique et que  $\text{proj}_R(C_n)$  est opposée à  $C$ . Comme  $\text{proj}_R(C_n)$  converge vers  $\text{proj}_R(\xi)$ , on en déduit que  $\text{proj}_R(\xi)$  est opposée à  $C$  dans  $R$ .  $\square$

**Définition 3.2.11.** Le résidu  $R$  défini comme ci-dessus est appelé *projection résiduelle* de  $\xi$  sur  $C$ .

**Proposition 3.2.12.** *Il existe une application continue  $\text{Aut}(X)$ -équivariante et injective de  $\mathcal{C}_1(X)$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Son image est égale à l'adhérence de l'ensemble des chambres de  $X$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .*

*Preuve.* Comme on l'a remarqué plus haut, l'ensemble  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  peut être identifié avec une partie de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  via l'application  $\pi_{\text{Res}}$ . En particulier, l'ensemble des chambres de  $X$  peut être vu comme un sous-ensemble de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Les projections sur des résidus nous permettent alors d'étendre cette inclusion à une application bien définie  $\mathcal{C}_1(X) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . On vérifie facilement que cette application est injective, continue et équivariante.  $\square$

D'après cette proposition, on peut identifier l'espace  $\mathcal{C}_1(X)$  à un sous-ensemble fermé de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Le fait que  $\mathcal{C}_1(X) \cap \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  coïncide avec l'ensemble des chambres de  $X$  motive la définition suivante.

**Définition 3.2.13.** Un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  qui appartient à  $\mathcal{C}_1(X)$  est appelé une *chambre*.

### 3.2.3 Extension de la notion de quartiers à des immeubles arbitraires

La notion de quartier est cruciale dans l'analyse de la structure des immeubles euclidiens [BT72]. Dans cette section nous proposons une généralisation de cette notion à des immeubles quelconques.

Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , et soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques qui converge vers un point  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Pour simplifier les notations, on notera  $\underline{R}$  la suite  $(R_n)$ . Si  $k \in \mathbb{N}$ , on note

$$Q_k = \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(x, R_n)$$

et

$$Q(x, \underline{R}) = \bigcup_{k \geq 0} Q_k.$$

Comme  $Q_k$  est contenu dans un appartement et  $Q_k \subset Q_{k+1}$  pour tout  $k$ , on déduit de la proposition 2.2.41 que  $Q(x, \underline{R})$  est contenu dans un appartement de  $X$  (au sens où tous les résidus de  $Q(x, \underline{R})$  sont contenus dans cet appartement).

On verra au corollaire 3.2.18 que la *lim inf* qui apparaît dans la définition de  $Q$  peut en fait être vue comme une limite simple.

*Remarque 3.2.14.* Avec les mêmes notations, supposons que  $y$  est un résidu sphérique dans  $Q(x, \underline{R})$ . Alors  $Q(y, \underline{R}) \subset Q(x, \underline{R})$ .

**Proposition 3.2.15.** Soit  $(R_n) = \underline{R}$  une suite de résidus sphériques qui converge vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Alors :

- (i) L'ensemble  $Q(x, \underline{R})$  ne dépend que de  $x$  et  $\xi$ , et pas de la suite  $\underline{R}$ .
- (ii) L'ensemble  $Q(x, \underline{R})$  peut être caractérisé comme le plus petit sous-ensemble fermé  $P$  de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  qui contient  $x$  et tel que, si  $R$  est un résidu sphérique de  $P$ , alors pour tout  $\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(R)$ , la projection  $\text{proj}_\sigma(\xi)$  est encore dans  $P$ .

*Preuve.* Il est clair que (i) est une conséquence de (ii). Prouvons (ii).

Soit  $Q := Q(x, \underline{R})$ . On veut prouver que  $Q$  est égal à la « $\xi$ -enveloppe convexe»  $P$  de  $x$ , c'est-à-dire comme dans l'énoncé au plus petit ensemble de résidus sphériques tel que :

- $x \in P$  ;
- $P$  est fermé ;
- pour tout résidu sphérique  $\sigma \in P$ , on a  $\text{proj}_\sigma(\xi) \in P$ .

Pour cela, soit  $\mathcal{V}$  l'ensemble des collections de parties de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  qui satisfont les trois conditions ci-dessus. On a donc  $Q' = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V$ .

Par définition, pour tout  $k \geq 0$ , l'ensemble  $Q_k$  est convexe, donc fermé, et contient  $x$ . Par conséquent, il en est de même de  $Q$ . On a alors  $Q \in \mathcal{V}$ . En effet, pour tout  $\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_\sigma(\xi)$  coïncide avec  $\text{proj}_\sigma(R_n)$  pour  $n$  assez grand (voir le lemme 3.2.9). Par conséquent, pour tout  $\sigma \in Q$ , il existe un  $k$  assez grand tel que  $\text{proj}_\sigma(\xi) = \text{proj}_\sigma(R_n) \subset$

$\text{Conv}(x, R_n)$  pour tout  $n > k$ . Ainsi  $\text{proj}_\sigma(\xi) \subset Q_k \subset Q$ , ce qui confirme que  $Q \in \mathcal{V}$ . En particulier, on a  $Q' \subset Q$ .

Soit maintenant  $R$  un résidu sphérique de  $Q$ . On va prouver par récurrence sur la distance radicielle entre  $R$  et  $x$  que  $R \in Q'$ .

Supposons tout d'abord que  $x \subset R$ . Alors  $R \in Q'$  puisque  $Q'$  est fermé et contient  $x$ . Supposons ensuite que  $x \supset R$ . Comme  $R \in Q$ , on a  $R \in \text{Conv}(x, R_n)$  pour  $n$  assez grand. Puisque  $\text{proj}_x(R_n)$  est le résidu minimal de  $\text{Conv}(x, R_n)$  contenu dans  $x$  (voir le lemme 3.1.3), on a  $\text{proj}_x(R_n) \subset R$ . Il s'ensuit que  $R \in Q'$ , puisque  $Q'$  est fermé et que pour  $n$  assez grand on a  $\text{proj}_x(R_n) = \text{proj}_x(\xi) \in Q'$ .

D'après le lemme 3.1.5, on peut maintenant supposer que l'intervalle  $]x, R[$  est non vide et contient un résidu sphérique  $x'$ . Par hypothèse de récurrence, on a  $x' \in Q'$ . Soit  $n$  assez grand, de sorte que  $R \in \text{Conv}(x, R_n)$ . On a alors  $x' \in [x, R] \subset \text{Conv}(x, R)$  d'après la proposition 3.1.4(ii). Ainsi, dans tout appartement contenant  $\text{Conv}(x, R_n)$ , une racine qui contient  $x$  et  $R$  contient également  $x'$ . On en déduit que  $R \in \text{Conv}(x', R_n)$  pour  $n$  assez grand. En particulier,  $R \in Q(x', R)$ . Par récurrence, on voit que  $R$  appartient à la  $\xi$ -enveloppe convexe de  $x'$ , que l'on note  $Q'(x')$ . Comme  $x' \in Q'$ , on a  $Q'(x') \subset Q'$ , d'où  $R \in Q'$ .  $\square$

La proposition 3.2.15 prouve que  $Q(x, \underline{R})$  ne dépend que de  $\xi = \lim \underline{R}$ . On peut donc écrire  $Q(x, \xi)$  au lieu de  $Q(x, \underline{R})$ .

**Définition 3.2.16.** L'ensemble  $Q(x, \xi)$  est appelé le *quartier combinatoire*, ou simplement *quartier*, basé en  $x$  et pointant vers  $\xi$ .

*Remarque 3.2.17.* Dans le cas affine, les quartiers au sens classique sont également des quartiers combinatoires (voir exemple 3.2.21). Cependant, la réciproque n'est pas vraie en général : d'autres points du bord combinatoire donnent lieu à des quartiers combinatoires qui sont en fait des «cheminées» au sens de G. Rousseau [Rou77].

On peut en déduire le corollaire suivant, qui montre que le quartier  $Q(x, \xi) = Q(x, (R_n))$  est en fait la limite simple de  $\text{Conv}(x, R_n)$  :

**Corollaire 3.2.18.** Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques convergent vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Pour tout ensemble fini  $F \subset \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , il existe  $N \geq 0$  tel que, pour tout  $n > N$ , on ait  $Q(x, \xi) \cap F = \text{Conv}(x, R_n) \cap F$ .

*Preuve.* Il suffit de prouver que pour tout  $y \in F$ , ou bien  $y \in \text{Conv}(x, R_n)$  pour  $n$  assez grand, ou bien  $y \notin \text{Conv}(x, R_n)$  pour  $n$  assez grand.

Si  $y \in Q(x, \xi)$ , cela se déduit directement de la définition de  $Q(x, \xi)$ .

Supposons maintenant que  $y$  n'est pas contenu dans  $Q(x, \xi)$ . Alors il existe un  $N > 0$  tel que  $y \notin \text{Conv}(x, R_n)$  pour tout  $n > N$ . En effet, si ce n'était pas le cas, pour tout  $n > 0$  il existerait un  $\phi(n) > n$  tel que  $y \in \text{Conv}(x, R_{\phi(n)})$ . On aurait donc  $y \in \bigcap_{n>0} \text{Conv}(x, R_{\phi(n)})$ .

Comme  $(R_{\phi(n)})$  converge vers  $\xi$ , on déduirait de la proposition 3.2.15 que  $Q(x, (R_{\phi(n)})) = Q(x, \xi)$ , et donc  $y \in Q(x, \xi)$ , ce qui est absurde.  $\square$

L'interprétation suivante des projections depuis l'infini montre en particulier que, pour tous  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_x(\xi)$  est déterminée de manière canonique par le quartier  $Q(x, \xi)$ .

**Corollaire 3.2.19.** *Pour tous  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_x(\xi)$  est égale à l'unique résidu minimal inclus dans  $x$  et appartenant à  $Q(x, \xi)$ .*

*Preuve.* Se déduit directement du lemme 3.1.3 et du corollaire 3.2.18. □

*Exemple 3.2.20.* Soit  $X$  un arbre. On a vu dans l'exemple 3.2.5 que  $\mathcal{C}_1(X)$  coïncide avec la bordification visuelle  $X \cup \partial_\infty X$ . Si  $\xi \in \partial_\infty X$ , alors  $Q(x, \xi)$  est la demi-droite partant de  $x$  et pointant vers  $\xi$ .

*Exemple 3.2.21.* Reprenons l'exemple 3.2.6. Soit donc  $X$  un immeuble de type  $\tilde{A}_2$ . Suivant le type de point du bord, on obtient différentes formes de quartiers combinatoires. De plus, il y a deux orientations de triangles, qui donnent lieu également à des formes de quartiers différentes.

Soit  $\xi_1$  comme dans l'exemple 3.2.6, c'est-à-dire tel que  $\Phi_A(\xi_1) = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ , avec les notations de l'exemple 3.2.6, dans un certain appartement  $A$ . Soit  $x$  une chambre de  $A$ . Pour déterminer  $Q(x, \xi_1)$ , on considère les racines dans le même sens que les  $\alpha_i, \beta_i$  et  $\gamma_i$  qui contiennent  $x$ . On a alors deux possibilités, suivant l'orientation de  $x$ . Ces deux possibilités sont illustrées par la figure 3.2. L'une d'entre elle correspond à un quartier au sens classique du terme, et l'autre à un quartier tronqué.

Si maintenant on regarde un quartier pointant vers  $\xi_2$ , défini par  $\Phi_A(\xi_2) = \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \mid i \leq i_0, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha_i \mid i > i_0\}$ , le quartier  $Q(x, \xi_2)$  est déterminé de la même manière, mais s'arrête au mur de la racine  $\alpha_{i_0}$ . On obtient ainsi des sortes de bandes. Suivant l'orientation de  $x$ , on obtient une cheminée (au sens de G. Rousseau [Rou77]), ou une cheminée tronquée. Ces deux possibilités sont illustrées sur la figure 3.3.

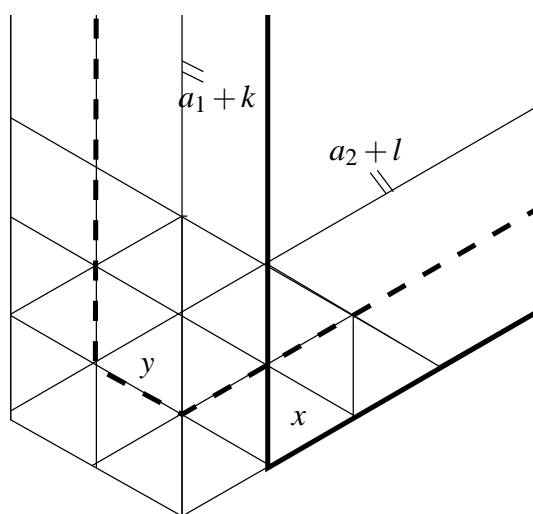


FIG. 3.2 –  $Q(x, \xi_1)$  et  $Q(y, \xi_1)$ , où  $\Phi(\xi_1) = \{\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \mid i \in \mathbb{Z}\}$

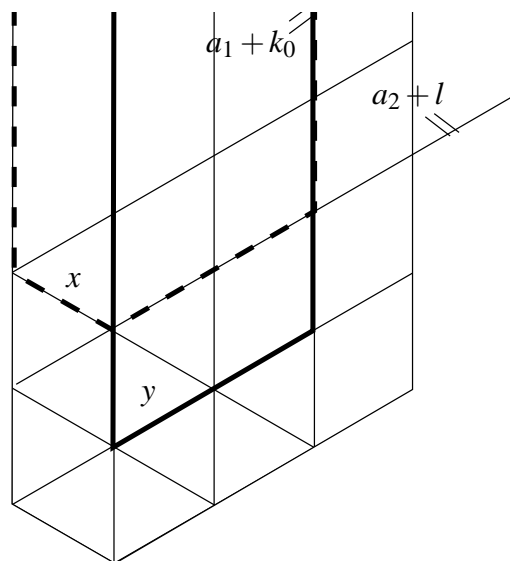


FIG. 3.3 –  $Q(x, \xi_2)$  et  $Q(y, \xi_2)$ , où  $\Phi(\xi_2) = \{\alpha_i, \beta_j, \gamma_j \mid i \leq i_0, j \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha_i \mid i > i_0\}$

### 3.2.4 Quartiers et racines

L'utilisation des quartiers va, au final, nous permettre d'étudier la compactification de  $X$  appartement par appartement. Le premier objectif est de démontrer la proposition 3.2.4.

Il n'est pas surprenant que les rétractions soient un outil important.

**Lemme 3.2.22.** *Soit  $x$  une chambre de  $X$  et  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques qui converge vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ , et soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $x$ . Alors on a :*

$$Q(x, \xi) = \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(x, \rho(R_n)).$$

**Preuve.** Soit  $Q_k = \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(x, R_n)$ , et soit  $Q'_k = \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(x, \rho_{A,x}(R_n))$ . Posons  $Q = Q(x, \xi) = \bigcup_{k \geq 0} Q_k$  et  $Q' = \bigcup_{k \geq 0} Q'_k$ . Il s'agit de prouver que  $Q = Q'$ . Comme ces deux ensembles de résidus sont convexes et contiennent la chambre  $x$ , il suffit de vérifier que l'ensemble  $\text{ch}(Q)$  des chambres de  $Q$  coïncide avec l'ensemble  $\text{ch}(Q')$  des chambres de  $Q'$ .

Fixons  $k \geq 0$ . Soit  $C \in \text{ch}(Q_k)$  et soit  $n \geq k$ . Alors  $C$  appartient à une galerie minimale entre  $x$  et une chambre de  $R_n$ . Comme  $C \in A$ , la rétraction  $\rho$  fixe  $C$ , qui appartient donc à une galerie minimale de  $x$  à une chambre contenant  $\rho(R_n)$ . Ceci prouve que  $\text{ch}(Q_k) \subset \text{ch}(Q'_k)$ . On a donc  $\text{ch}(Q) \subset \text{ch}(Q')$ .

Par l'absurde, supposons qu'il existe une chambre  $C \in \text{ch}(Q') \setminus \text{ch}(Q)$ . Comme  $\text{ch}(Q) \subset \text{ch}(Q')$ , on peut choisir  $C$  adjacente à une chambre  $C' \in \text{ch}(Q)$ . Soit  $\sigma$  la cloison contenant  $C$  et  $C'$  et soit  $\alpha$  la racine de  $A$  contenant  $C'$  et dont le mur contient  $\sigma$ . Comme  $\sigma \in Q$ , puisque  $Q$  est fermé, on a  $\text{proj}_\sigma(x) \in Q$ , d'où l'on tire  $\text{proj}_\sigma(x) = C'$  et  $x \in \alpha$ .

Soit maintenant  $k$  tel que  $C \in \text{Conv}(x, \rho(R_n))$  pour tout  $n \geq k$ , et soit  $C_n$  l'unique élément de  $\text{Conv}(x, R_n)$  tel que  $\rho(C_n) = C$ . Chaque  $C_n$  contient la cloison  $\sigma$  et on a  $\text{proj}_\sigma(R_n) = C_n$ . On en déduit que  $\xi(\sigma) = C_n$  (voir lemme 3.2.9). Comme  $Q \subset A$ , cela implique que  $C_n \in A$  d'après la proposition 3.2.15. On a donc  $C = \rho(C_n) = C_n$  et donc  $C \in \text{Conv}(x, R_n)$  pour tout  $n \geq k$ . Ceci implique que  $C \in Q$ , ce qui est absurde.  $\square$

**Lemme 3.2.23.** *Soit  $x$  une chambre de  $X$  et  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques qui converge vers un  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors, pour toute chambre  $C \in A$ , on a  $Q(C, \xi) \subset A$ . De plus, si  $\rho$  désigne la rétraction sur  $A$  centrée en  $x$  et  $\rho'$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $C$ , alors il existe  $k \geq 0$  tel que l'on ait  $\rho(R_n) = \rho'(R_n)$  pour tout  $n > k$ .*

**Preuve.** Par connexité de  $A$ , il suffit de prouver que pour toute chambre  $C$  adjacente à  $x$ , le quartier  $Q(C, \xi)$  est contenu dans  $A$  et de plus que  $\rho'(R_n) = \rho(R_n)$  pour tout  $n$  assez grand. Soit  $\sigma$  la cloison contenant  $x$  et  $C$ .

Comme  $\sigma \in Q(x, \xi)$ , la proposition 3.2.15 implique que  $\xi(\sigma)$  est contenu dans  $A$ . Les seules valeurs possibles de  $\xi(\sigma)$  sont donc  $x, C$  et  $\sigma$ . Traitons ces trois cas successivement.

Supposons que  $\xi(\sigma) = C$ . Alors  $C \in Q(x, \xi)$  et donc  $Q(C, \xi) \subset A$  d'après la remarque 3.2.14. L'égalité  $\rho(R_n) = \rho'(R_n)$  s'ensuit.

Si maintenant  $\xi(\sigma) = x$ , alors  $x \in \text{Conv}(C, R_n)$  pour  $n$  assez grand. Par conséquent, il existe une galerie minimale entre  $C$  et une chambre de  $R_n$  qui passe par  $x$  et on en déduit que  $\rho(R_n) = \rho'(R_n)$ . Le fait que  $Q(x, \xi)$  est contenu dans  $A$  découle alors du lemme 3.2.22.

Enfin, supposons  $\xi(\sigma) = \sigma$ . Pour  $n$  assez grand, de sorte que  $\text{proj}_\sigma(R_n) = \sigma$ , soit  $A_n$  un appartement contenant  $x \cup R_n$ . Le mur  $H_n$  de  $A_n$  qui contient  $\sigma$  contient également  $R_n$ ; et l'enveloppe convexe  $\text{Conv}(x, R_n)$  est entièrement dans la racine  $\alpha$  de  $A$  bordée par  $H_n$  qui contient  $x$ . Comme la chambre  $C$  est contenue dans la cloison  $\sigma$ , il existe un

demi-appartement  $\beta$  bordé par  $H_n$  et qui contient  $C$ . Alors  $\alpha \cup \beta$  est  $W$ -isométrique à un appartement, donc égale à un appartement d'après la proposition 2.2.41. On peut donc supposer que  $C$  est contenu dans  $A_n$ . Il s'ensuit que  $\rho(R_n) = \rho'(R_n)$ . On déduit encore du lemme 3.2.22 que  $Q(C, \xi)$  est contenu dans  $A$ .  $\square$

Le lemme suivant est un analogue du lemme 3.2.3, dans le cas général :

**Lemme 3.2.24.** *Soit  $x$  une chambre de  $X$ , et soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques qui converge vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $Q(x, \xi)$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $x$ , posons  $R'_n = \rho(R_n)$ . Pour toute racine  $\alpha$  de  $A$ , il existe un  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , le résidu  $R'_n$  soit contenu dans  $\alpha$ , ou bien dans  $-\alpha$ , ou bien dans  $\partial\alpha$ .*

*Preuve.* Soit  $\alpha$  une racine de  $A$ , soit  $\sigma$  une cloison du mur de  $\alpha$  et soient  $C, C'$  les chambres de  $A$  adjacentes à une cloison  $\sigma$ , que l'on choisit telles que  $\alpha$  contienne  $C$  mais pas  $C'$ . Supposons que la suite  $(R'_n)$  possède des sous-suites  $(R'_{\phi(n)})$  et  $(R'_{\psi(n)})$  telles que  $R'_{\phi(n)}$  est contenu strictement dans  $\alpha$  et  $R'_{\psi(n)}$  est contenu dans  $-\alpha$ . Alors  $\text{Conv}(C, R'_{\psi(n)})$  contient  $C'$  pour tout  $n$ , alors que  $\text{Conv}(C, R'_{\phi(n)})$  ne la contient pas. Ceci contredit le lemme 3.2.22, et termine la démonstration.  $\square$

**Définition 3.2.25.** On note  $\Phi_A(\xi)$  l'ensemble des racines  $\alpha$  de  $A$  telle que toute suite  $(R'_n)$  convergeant vers  $\xi$  est contenue dans  $\alpha$ , pour  $n$  assez grand.

D'après le lemme 3.2.23,  $\Phi_A(\xi)$  ne dépend que de  $A$  et de  $\xi$ . Les éléments de  $\Phi_A(\xi)$  doivent être pensés comme des racines qui «contiennent»  $\xi$ . Si  $\xi = R$  est un résidu sphérique, on retrouve bien l'ensemble des racines contenant  $\xi$ .

Remarquons que deux racines opposées  $\alpha$  et  $-\alpha$  peuvent être contenues dans  $\Phi_A(\xi)$ ; d'après le lemme 3.2.24, cela arrive uniquement lorsque  $R'_n$  est contenu dans le mur  $\partial\alpha$  pour  $n$  assez grand.

**Lemme 3.2.26.** *Soient  $x$  une chambre de  $X$  et  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques convergeant vers un point  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $x$ . Alors la suite  $(\rho(R_n))$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  et sa limite coïncide avec la restriction de  $\xi$  à  $\text{Res}_{\text{sph}}(A)$ .*

*De plus, pour tout  $\xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ , on a  $\xi' = \xi$  si et seulement si  $\Phi_A(\xi') = \Phi_A(\xi)$ .*

*Preuve.* Soit  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)$  et soit  $H(R)$  l'ensemble (fini) des murs contenant  $R$ . D'après le lemme 3.2.24, il existe un  $N$  tel que  $R'_n$  reste d'un côté de chaque mur de  $H(R)$ , pour  $n > N$ . Le fait que  $(R'_n)$  converge vers un élément  $\xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  découle alors du lemme 3.2.3. Par construction, on a  $\Phi_A(\xi') = \Phi_A(\xi)$ . Le lemme 3.2.3 implique alors que  $\xi|_A = \xi'|_A$ .  $\square$

La proposition suivante complète la proposition 3.2.15.

**Proposition 3.2.27.** *Soit  $x$  une chambre de  $X$ ,  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors on a*

$$Q(x, \xi) = \bigcap_{\alpha \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(\xi)} \text{Res}_{\text{sph}}(\alpha).$$

**Preuve.** Soit  $Q = Q(x, \xi)$ , et  $Q' = \bigcap_{\alpha \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(\xi)} \text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$ . D'après le lemme 3.2.26, il existe une suite  $(R'_n)$  de résidus sphériques de  $A$  qui converge vers  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ . Une racine  $\alpha$  appartient à  $\Phi_A(\xi)$  si et seulement si  $R'_n$  est contenu dans  $\alpha$  pour  $n$  assez grand. Par conséquent, l'égalité  $Q = Q'$  se déduit du lemme 3.2.22.  $\square$

Le corollaire suivant permet d'étendre les résultats de cette section aux quartiers basés en un résidu sphérique quelconque, et pas forcément une chambre.

**Corollaire 3.2.28.** *Soient  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ ,  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et soit  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors  $Q(x, \xi)$  est égal à l'intersection de tous les  $Q(y, \xi)$ , où  $y$  parcourt l'ensemble des chambres de  $x$  qui sont dans  $A$ .*

**Preuve.** D'après le lemme 3.2.26, il existe une suite  $(R_n)$  de résidus sphériques qui converge vers  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ . D'après la proposition 3.2.15, on a  $Q(x, \xi) = \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(R, R_n)$ .

En utilisant le fait que l'enveloppe convexe de deux résidus est l'intersection des racines qui les contiennent (ce qui résulte de la proposition 3.1.4), on voit que pour tout  $n$  on a

$$\text{Conv}(x, R_n) = \bigcap_{y \in x \cap A} \text{Conv}(y, R_n).$$

On en déduit que

$$Q(x, \xi) = \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{y \in x \cap A} \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(y, R_n).$$

Il suffit donc de vérifier que

$$\bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{y \in x \cap A} \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(y, R_n) = \bigcap_{y \in x \cap A} \bigcup_{k \geq 0} \bigcap_{n \geq k} \text{Conv}(y, R_n).$$

L'inclusion  $\subset$  est immédiate. L'inclusion réciproque est due au fait que  $x \cap A$  est un ensemble fini.  $\square$

**Lemme 3.2.29.** *Soient  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ ,  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et  $A$  un appartement contenant le quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors pour tous  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Phi_A(\xi)$ , l'intersection*

$$Q(x, \xi) \cap \left( \bigcap_{i=1}^n \alpha_i \right)$$

*est non vide.*

**Preuve.** D'après le lemme 3.2.28, il suffit de traiter le cas où  $x$  est une chambre, ce qu'on supposera dorénavant. De plus, si le résultat est vrai pour  $n = 1$ , alors il l'est également pour tout  $n$ , d'après la remarque 3.2.14 et une récurrence immédiate.

Il nous faut donc démontrer que  $Q(x, \xi)$  intersecte  $\alpha \in \Phi_A(\xi)$ . On travaille par récurrence sur la dimension de la réalisation de Davis-Moussong  $|X|$  de  $X$  (voir section 2.2.4). Par construction, la dimension de  $|X|$  est égale au rang maximal d'un résidu sphérique de  $X$ .

Choisissons une suite  $(R_n)$  de résidus sphériques de  $A$  convergeant vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ ; une telle suite existe d'après le lemme 3.2.26. Pour simplifier les notations, supposons que  $R_0 = x$ . Le résultat est clair si  $\xi \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , on suppose donc que  $(R_n)$  tend vers l'infini.

Soit  $p_n \in |R_n|$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $(p_n)$  converge vers un point  $\eta$  du bord visuel  $\partial_\infty|A| \subset \partial_\infty|X|$ . Soit  $\mathcal{H}_\eta$  l'ensemble des murs  $H$  de  $A$  tels que  $\eta \in \partial_\infty|H|$ . Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $X$  et  $W_\eta$  le sous-groupe engendré par les réflexions associées aux éléments de  $\mathcal{H}_\eta$ . Rappelons que d'après le théorème 2.1.16,  $W_\eta$  est un groupe de Coxeter.

Soit maintenant  $\alpha \in \Phi_A(\xi)$ . Si  $x \in \alpha$ , alors  $Q(x, \xi) \subset \text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$  d'après la proposition 3.2.27. On supposera donc désormais que  $x$  n'est pas dans  $\alpha$ .

Comme  $R_0 = x$ , on a  $p_0 \in |x|$ . Par conséquent, la proposition 3.2.27 implique que le rayon géodésique  $[p_0, \eta]$  est entièrement contenu dans  $|Q(x, \xi)|$ . Si ce rayon géodésique pénètre dans  $|\alpha|$ , le résultat s'ensuit. On supposera donc que ce n'est pas le cas. Comme  $p_n \in |\alpha|$  pour  $n$  assez grand, on voit que  $\partial\alpha \in \mathcal{H}_\eta$ .

On va alors démontrer qu'il existe  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)$  tel que  $R$  est contenu dans  $\alpha$  et dans  $\beta$ , pour tout  $\beta \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(\xi)$  tel que  $\partial\beta \in \mathcal{H}_\eta$ . La preuve utilise l'hypothèse de récurrence sur le complexe de Coxeter  $A_\eta$  associé à  $W_\eta$ . Les murs de  $A_\eta$  peuvent être canoniquement et de manière  $W_\eta$ -équivariante identifiés aux éléments de  $\mathcal{H}_\eta$ , et de même pour les racines de  $A_\eta$ . On obtient ainsi une application  $W_\eta$ -équivariante et surjective  $\pi_\eta : \text{Res}_{\text{sph}}(A) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(A_\eta)$ , qui à un résidu  $\sigma$  associe l'unique résidu sphérique contenu dans toutes les racines  $\phi$  qui contiennent  $\sigma$  et telles que  $\partial\phi \in \mathcal{H}_\eta$ . L'application  $\pi_\eta$  identifie ainsi les chambres de  $A$  qui ne sont séparées par aucun mur de  $\mathcal{H}_\eta$ .

Il nous faut maintenant vérifier que  $\dim(A_\eta) < \dim(A)$ . Pour cela, notons que les résidus sphériques de rang maximaux se réalisent géométriquement, dans une réalisation métrique où seuls les résidus sphériques sont représentés, comme une intersection de murs.

Soit  $\sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_n$  une suite maximale de résidus sphériques de  $A_\eta$ , de sorte que  $n$  est égal à  $\dim(A_\eta)$ . Alors chaque  $\sigma_i$  peut se relever en un résidu (non unique) de  $A$  (on choisit un résidu dans l'intersection des racines contenant  $\sigma_i$ ). En particulier, la suite d'inclusions ci-dessus se relève en une suite de résidus sphériques dans  $A$ , de sorte que  $\dim(A) \geq \dim(A_\eta)$ . Pour prouver l'inégalité stricte, il suffit de prouver que l'on peut relever  $\sigma_n$  en un résidu sphérique qui n'est pas maximal. L'ensemble des relevés de  $\sigma_n$  est en fait l'intersection des murs de  $\mathcal{H}_\eta$  contenant la réalisation de  $\sigma_n$  dans  $\mathcal{H}_\eta$ . Par conséquent, les relevés de  $\sigma_n$  dans  $A$  sont les résidus qui sont contenus dans l'intersection des mêmes murs, vus dans  $A$ . Comme cette intersection contient une géodésique pointant vers  $\xi$ , ce n'est pas une union de sommets, et elle contient donc un résidu sphérique qui n'est pas minimal. Par conséquent, on a bien  $\dim(A) > \dim(A_\eta)$ . On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence dans  $A_\eta$ . Quitte à extraire une sous-suite, la suite  $(\pi_\eta(R_n))$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A_\eta)$  vers un point que l'on notera  $\pi_\eta(\xi)$ . De plus, on a

$$\Phi_{A_\eta}(\pi_\eta(\xi)) = \{\beta \in \Phi_A(\xi) \mid \partial\beta \in \mathcal{H}_\eta\}.$$

Par récurrence, il existe un  $R' \in \text{Res}_{\text{sph}}(A_\eta)$  contenu à la fois dans  $\alpha$  et dans  $Q(\pi_\eta(x), \pi_\eta(\xi))$ . Soit  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)$  un élément tel que  $\pi_\eta(R) = R'$ . D'après la proposition 3.2.27, on voit que  $R$  est contenu dans  $\alpha$  et dans  $\beta$  pour tout  $\beta \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(\xi)$  tel que  $\partial\beta \in \mathcal{H}_\eta$ .

Soit maintenant  $p \in |R|$  et considérons le rayon géodésique  $\rho$  de  $p$  à  $\eta$ . On va démontrer que  $\rho$  pénètre dans  $|Q(x, \xi)|$ , ce qui impliquera le résultat. Soit  $q_n = \rho(n)$ .

Supposons par l'absurde que pour tout  $n$  on ait  $q_n \notin |Q(x, \xi)|$ . Alors, d'après la proposition 3.2.27, il existe une racine  $\alpha_n \in \Phi_A(x) \cap \Phi_A(\xi)$  qui ne contient pas  $q_n$ .

Alors aucun des murs  $\partial\alpha_n$  ne sépare le rayon géodésique  $[x, \eta]$  de  $\rho$ . En effet, si c'était le cas de  $\partial\alpha_n$ , ce mur appartiendrait à  $\mathcal{H}_\eta$ , ce qui serait en contradiction avec la définition de  $R$ .



Comme  $[x, \eta[ \subset |Q(x, \xi)| \subset |\alpha_n|$  pour tout  $n$ , on voit que pour tout  $n$  il existe un  $n'$  tel que  $q_{n'} \in |\alpha_n|$ . Quitte à extraire, on peut supposer que  $n' > n$  pour tout  $n$ , ou bien  $n' < n$  pour tout  $n$ . Dans les deux cas, on voit que l'ensemble  $\{\alpha_n\}$  est infini et que, pour tout  $k$ , l'intersection  $\bigcap_{n \leq k} |\alpha_n|$  contient un point  $q'_k \in [p, \eta[$ . En particulier, quand  $k$  tend vers l'infini, le nombre de murs séparant  $q'_k$  de  $[x, \eta[$  tend vers l'infini, ce qui contredit le fait que  $[x, \eta[$  et  $\rho$  sont asymptotes.  $\square$

### 3.2.5 Propriétés d'incidences des quartiers

Le but de cette section est d'établir que deux quartiers pointant vers un même élément du bord contiennent un sous-quartier dans leur intersection. Dans le cas classique des immeubles euclidiens, et lorsque les quartiers combinatoires sont des quartiers au sens usuel, c'est un résultat classique [BT72].

**Proposition 3.2.30.** *Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Étant donnés deux résidus  $x, y \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , il existe  $z \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  tel que  $Q(z, \xi) \subset Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)$ .*

*Preuve.* D'après la remarque 3.2.14, il suffit de prouver que l'intersection  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)$  contient un résidu sphérique  $z$ . La preuve se fait par récurrence sur la distance radicielle  $d(x, y)$ .

Si  $x \subset y$  ou  $y \subset x$ , le résultat est clair. On peut donc sans perte de généralité supposer que l'intervalle ouvert  $]x, y[$  est non vide, d'après le lemme 3.1.5. Soit  $z \in ]x, y[$ . Par récurrence, il existe  $a \in Q(x, \xi) \cap Q(z, \xi)$  et  $b \in Q(y, \xi) \cap Q(z, \xi)$ . Il suffit donc de prouver que  $Q(a, \xi) \cap Q(b, \xi)$  est non vide. Puisque les quartiers  $Q(a, \xi)$  et  $Q(b, \xi)$  sont tous deux contenus dans  $Q(z, \xi)$ , ils sont en particulier contenus dans un appartement  $A$ . Soient  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  les éléments de  $(\Phi_A(a) \cap \Phi_A(\xi)) \setminus \Phi_A(b)$ . D'après le lemme 3.2.29, il existe un résidu sphérique  $R$  contenu dans  $Q(b, \xi)$  ainsi que dans chaque  $\alpha_i$ .

On a alors  $R \in Q(a, \xi)$ . En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait  $\alpha \in \Phi_A(a) \cap \Phi_A(\xi)$  qui ne contienne pas  $R$ , d'après la proposition 3.2.27. La même proposition montre que si  $b$  est contenu dans  $\alpha$ , alors  $Q(b, \xi) \subset \text{Res}_{\text{sph}}(\alpha)$ , ce qui est absurde puisque  $R \in Q(b, \xi)$ . Par conséquent, on voit que  $\alpha \notin \Phi_A(b)$ . Ainsi,  $\alpha$  est égale à l'une des racines  $\alpha_i$ , ce qui contredit le fait que  $R$  est contenu dans toutes les  $\alpha_i$ .  $\square$

### 3.2.6 Recouvrir la compactification par des appartements

On peut maintenant démontrer la proposition 3.2.4. On va même en établir une version plus précise.

**Proposition 3.2.31.** *Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Alors*

- (i) *Il existe une suite de résidus sphériques  $(x_n)$  qui arrive et finit par rester dans tout quartier pointant vers  $\xi$  et telle que  $x_n = \text{proj}_{x_n}(\xi)$  pour tout  $n$ .*
- (ii) *Toute telle suite converge vers  $\xi$ .*

*Preuve des propositions 3.2.4 et 3.2.31.* Vu qu'une suite comme en (i) reste dans un appartement, il suffit de démontrer la proposition 3.2.31.

(i) Soit  $Q$  un quartier pointant vers  $\xi$  et  $A$  un appartement contenant  $Q$ . Comme  $A$  est localement fini et qu'une intersection finie de quartiers pointant vers  $\xi$  n'est pas vide d'après la proposition 3.2.30, on voit que  $Q$  contient une suite  $(x_n)$  de résidus sphériques qui rentre et finit par rester dans tout quartier contenu dans  $A$  et pointant vers  $\xi$ . De plus, quitte à remplacer  $x_n$  par  $\text{proj}_{x_n}(\xi)$  pour tout  $n$ , on peut (et on va) supposer que  $(x_n)$  finit par être *strictement* contenu dans toute racine  $\alpha \in \Phi_A(\xi)$  telle que  $-\alpha \notin \Phi_A(\xi)$ . Remarquons que  $\text{proj}_{x_n}(\text{proj}_{x_n}(\xi)) = \text{proj}_{x_n}(\xi)$  d'après le corollaire 3.2.19.

Si  $Q'$  est un autre quartier qui pointe vers  $\xi$ , alors  $Q \cap Q'$  contient un quartier d'après la proposition 3.2.30. Par conséquent,  $(x_n)$  finit par rester dans  $Q'$ , comme voulu.

(ii) Soit  $(R_n)$  une suite de résidus qui finit par rester dans tout quartier pointant vers  $\xi$ , et telle que  $R_n = \text{proj}_{R_n}(\xi)$  pour tout  $n$ . Soit  $R$  un résidu sphérique et  $A$  un appartement contenant  $Q(R, \xi)$ . Alors l'hypothèse sur  $R_n$  assure que la suite  $(R_n)$  finit par rester d'un côté bien défini de chaque mur de  $A$  (voir la proposition 3.2.27). En particulier,  $(R_n)$  converge vers un élément  $\xi'$  de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  d'après le lemme 3.2.3. Par construction on a  $\Phi_A(\xi) \subset \Phi_A(\xi')$ . De plus, puisque la suite  $(R_n)$  finit par quitter toute racine  $\alpha$  de  $A$  telle que  $-\alpha \notin \Phi_A(\xi)$ , on voit que l'on a en fait  $\Phi_A(\xi) = \Phi_A(\xi')$ . Ainsi  $\xi|_A = \xi'$  d'après le lemme 3.2.26. On a donc  $\text{proj}_R(\xi) = \text{proj}_R(\xi') = \text{proj}_R(R_n)$ , pour tout  $n$  assez grand.

Comme  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est arbitraire, ceci implique que  $R_n$  converge vers  $\xi$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .  $\square$

On a vu dans le lemme 3.2.3 qu'une suite  $(R_n)$  contenue dans un appartement  $A$  converge vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$  si et seulement si elle finit par rester du même côté de chaque mur de  $A$ . D'après la proposition 3.2.27, c'est équivalent au fait que  $(R_n)$  finit par rester dans tout quartier de  $A$  pointant vers  $\xi$ . Comme on vient de voir, cela implique que  $(R_n)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . On a donc démontré :

**Corollaire 3.2.32.** *Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques contenus dans un appartement  $A$ . Si  $(R_n)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A)$ , alors  $(R_n)$  converge également dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . En particulier, la suite  $(R_n)$  a toujours une sous-suite qui converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .*  $\square$



# Chapitre 4

## Liens avec d'autres compactifications

Ce chapitre provient d'une traduction de la deuxième partie de [CL09a]. Il se propose de comparer le bord combinatoire aux différentes notions de bord préexistantes.

Plus précisément, on va voir dans une première partie qu'il s'identifie, dans le cas où le groupe d'automorphisme est fortement transitif, au bord construit par Y. Guivarc'h et B. Rémy [GR06] pour les immeubles de Bruhat-Tits. Ce bord est alors vu comme une partie de l'espace des sous-groupes fermés du groupe d'automorphismes. Ensuite, on va voir que le bord combinatoire s'identifie au bord de Busemann du graphe des chambres de l'immeuble. Finalement, on donnera le lien entre le bord combinatoire et le bord raffiné : il existe une application équivariante du bord raffiné vers le bord combinatoire. Cette application nous permettra dans le chapitre suivant de caractériser les groupes moyennables agissant sur l'immeuble.

### 4.1 Compactification par la topologie de Chabauty

#### 4.1.1 Topologie de Chabauty

Soit  $G$  un groupe topologique métrisable localement compact. Notons  $\mathcal{S}(G)$  l'ensemble des sous-groupes fermés de  $G$ . On peut trouver dans [Bou07b, Chapitre VIII] plusieurs définitions équivalentes de la *topologie de Chabauty* sur  $\mathcal{S}(G)$  ; cette topologie est compacte [Bou07b, VIII.§5.2, Theorem 1], métrisable et préservée par conjugaison par un élément de  $G$ . Le lemme suivant fournit un moyen concret de voir cette topologie et peut être vu comme une autre définition de celle-ci.

**Lemme 4.1.1.** *Soit  $F_n \in \mathcal{S}(G)$  pour  $n \geq 1$ . La suite  $(F_n)$  converge vers  $F \in \mathcal{S}(G)$  si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- (i) *Pour toute suite  $(x_n)$  telle que  $x_n \in F_n$ , s'il existe une sous-suite  $(x_{\phi(n)})$  convergeant vers  $x \in G$ , alors  $x \in F$ .*
- (ii) *Pour tout élément  $x \in F$ , il existe une sous-suite  $(x_n)$  convergeant vers  $x$  et telle que  $x_n \in F_n$  pour tout  $n \geq 1$ .*

**Références.** Voir [GR06, Lemma 2] ou [Pau07, Proposition 1.8]. □

Soit maintenant  $X$  un immeuble et  $G$  son groupe d'automorphismes stricts. On suppose que  $X$  est épais et d'épaisseur finie, de sorte que  $G$  est localement compact. On suppose également que  $G$  agit fortement transitivement sur  $X$ . La compactification par la topologie de Chabauty est basée sur le simple fait suivant.

**Lemme 4.1.2.** *L'application  $\phi : \text{Res}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \mathcal{S}(G)$  qui à un résidu  $R$  associe son stabilisateur est  $G$ -équivariante, injective, continue et d'image discrète.*

**Preuve.** La continuité est évidente puisque  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  est discret. Le fait que  $\phi$  est équivariante est également évident. L'injectivité s'ensuit puisque, par forte transitivité, deux résidus distincts ont des stabilisateurs distincts (voir la proposition 2.3.11). Il suffit donc de prouver que si une suite  $(R_n)$  de résidus sphériques n'est pas constante à partir d'un certain rang, alors la suite des stabilisateurs  $G_{R_n}$  des résidus  $R_n$  ne converge pas vers un point de l'image de  $\phi$ .

Soient donc  $R_n$  et  $R$  des résidus sphériques tels que la suite  $(G_{R_n})$  converge vers  $G_R$ . Supposons par l'absurde que  $(R_n)$  n'est pas constant à partir d'un certain rang.

Supposons d'abord que  $R_n \not\subset R$  pour une infinité de  $n$ . Alors pour chacun de ces  $n$  il existe un  $g_n \in G_{R_n}$  qui stabilise un résidu sphérique maximal contenant  $R$ , mais ne stabilise pas  $R$ . Alors aucune sous-suite de  $(g_n)$  ne peut converger vers un élément de  $G_R$ . D'autre part, puisque chaque  $g_n$  stabilise un résidu sphérique, la suite  $(g_n)$  est relativement compacte et admet donc une sous-suite convergente dans  $G$ . D'après le lemme 4.1.1, ceci entre en contradiction avec l'hypothèse que  $\lim_n G_{R_n} = G_R$ .

Supposons enfin que  $R_n \subset R$  pour presque tout  $n$ . Par l'absurde, supposons que  $R_n \subsetneq R$  pour une infinité de  $n$ . Comme  $X$  est localement fini, cela implique qu'il existe une sous-suite constante  $R_{\psi(n)} = R'$  avec  $R' \subsetneq R$ . Alors la suite  $G_{R_{\psi(n)}}$  converge à la fois vers  $G_R$  et  $G_{R'}$ , ce qui implique l'égalité  $R' = R$ , exclue par hypothèse.  $\square$

**Définition 4.1.3.** L'adhérence de l'image de  $\phi$  dans  $\mathcal{S}(G)$  est appelée *compactification par la topologie de Chabauty* de  $X$  et est notée  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ .

#### 4.1.2 Stabilisateurs de points à l'infini

Soit  $X$  un immeuble et  $G$  un groupe localement compact agissant proprement sur  $X$  (au sens où les stabilisateurs de résidus sphériques sont compacts).

Le but de cette section est de fournir une description des stabilisateurs dans  $G$  des points de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .

**Lemme 4.1.4.** *Soient  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Alors tout élément  $g \in G$  fixant  $x$  et  $\xi$  fixe point par point le quartier  $Q(x, \xi)$ .*

**Preuve.** Il est clair que  $g$  stabilise  $Q(x, \xi)$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $Q(x, \xi)$  et  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en une chambre  $C$  de  $x$ . Soit  $g_A : A \rightarrow A$  la restriction de  $\rho \circ g$  à  $A$ . Alors  $g_A$  est un automorphisme strict de  $A$  et il s'agit de prouver qu'il fixe  $Q(x, \xi)$ . Soit  $y \in Q(x, \xi)$ . Si  $x \subset y$ , alors  $y$  est stabilisé par  $g_A$  puisque  $g_A$  préserve le type. Si  $y \subset x$ , alors  $y$  contient  $\text{proj}_x(\xi)$  d'après le corollaire 3.2.19 et est donc fixé par  $g_A$ . Le lemme s'ensuit avec une récurrence sur  $d(x, y)$ , en utilisant le lemme 3.1.5.  $\square$

Rappelons qu'un élément d'un groupe topologique est appelé *périodique* si le groupe cyclique qu'il engendre est relativement compact.

**Lemme 4.1.5.** *Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et soit  $G_\xi$  son stabilisateur dans  $G$ . alors :*

- (i) *L'ensemble des éléments périodiques de  $G_\xi$  est égal à  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ ,*
- (ii) *Pour tout appartement  $A$  contenant une suite de résidus sphériques convergeant vers  $\xi$ , on a*

$$\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi) = \bigcup_{x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Fix}(Q(x, \xi)) = \bigcup_{x \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)} \text{Fix}(Q(x, \xi)).$$

*Preuve.*

(i) Il est clair que tout élément de  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$  est périodique. Réciproquement, soit  $g$  un élément périodique de  $G_\xi$ . Alors  $g$  fixe un point de  $|X|$  et donc un résidu sphérique  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Étant donné un nombre fini d'éléments  $g_1, \dots, g_n$  fixant chacun un résidu sphérique  $x_n$ , le groupe  $\langle g_1, \dots, g_n \rangle$  fixe  $\bigcap_{i=1}^n Q(x_i, \xi)$  d'après le lemme 4.1.4. D'après la proposition 3.2.30, cette dernière intersection n'est pas vide. Cela montre en particulier que l'ensemble des éléments périodiques forme un sous-groupe de  $G$  qui est localement fini. La conclusion s'ensuit.

(ii) D'après le lemme 4.1.4, l'égalité  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi) = \bigcup_{x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Fix}(Q(x, \xi))$  est une reformulation de (i). L'inclusion  $\bigcup_{x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Fix}(Q(x, \xi)) \supset \bigcup_{x \in \text{Res}_{\text{sph}}(A)} \text{Fix}(Q(x, \xi))$  est immédiate et l'inclusion réciproque découle de la proposition 3.2.30.  $\square$

*Exemple 4.1.6.* Dans le cas d'un immeuble affine, il y a des points  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  pour lesquels les quartiers combinatoires sont les quartiers usuels. Dans ce cas, les groupes  $G_\xi$  et  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$  ont déjà été étudiés dans [BT72, §4], où ils étaient notés respectivement  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{B}_0$ .

Bien que nous n'utiliserons le lemme suivant que dans le cas particulier des quartiers, il est valable pour n'importe quel sous-complexe.

**Lemme 4.1.7.** *Soit  $A$  un appartement de l'immeuble  $X$  et  $Y$  une partie convexe de  $\text{Res}_{\text{sph}}(A)$ . Supposons que  $G$  agit fortement transitivement sur  $X$ . Alors le fixateur de  $Y$  dans  $G$  est topologiquement engendré par les stabilisateurs des racines de  $A$  qui contiennent  $Y$ . De plus, ce groupe agit fortement transitivement sur l'ensemble des appartements contenant  $Y$ .*

*Preuve.* Comme  $Y$  est convexe, il coïncide avec l'intersection des racines qui le contiennent. Soit  $H$  le sous-groupe de  $\text{Fix}_G(Y)$  topologiquement engendré par les fixateurs de telles racines. On va commencer par prouver que  $H$  agit transitivement sur l'ensemble des appartements contenant  $Y$ . Soit  $A'$  un tel appartement.

On va utiliser plusieurs fois le fait suivant, qui découle de la forte transitivité de l'action de  $G$  : *étant donnés deux appartements  $A_1$  et  $A_2$  qui ont une racine  $\alpha$  en commun, il existe un élément  $g \in G$  qui fixe  $\alpha$  et qui envoie  $A_1$  sur  $A_2$ .*

Ce fait peut se vérifier de la manière suivante : il suffit de trouver un élément dont la restriction à  $A_1$  est égale à la rétraction sur  $A_2$  centrée en une chambre  $C$  de  $\alpha$ . Pour cela, il suffit de prendre un élément de  $G$  qui fixe  $C$  et qui envoie  $A_2$  sur  $A_1$ .

Cette remarque implique en particulier qu'il existe un élément de  $H$  qui envoie  $A'$  vers un appartement contenant une chambre  $C$  de  $A$  qui est incluse dans un résidu de  $Y$ . Par conséquent, il suffit de vérifier lemme pour l'enveloppe convexe de  $C \cup Y$ . Autrement dit, on peut (et on va) supposer que  $Y$  contient une chambre  $C_0$ .

Soit  $C_1$  une chambre de  $A$  contenue dans un résidu de  $Y$ , mais telle que  $C_1 \not\subset Y$ . La remarque ci-dessus fournit un élément  $g_1 \in H$  qui envoie  $A'_0 := A'$  vers un appartement  $A'_1$  contenant  $C_1$ . On continue alors par récurrence pour construire des suites  $(C_n)$ ,  $(A'_n)$  et  $(g_n)$  telles que :

- $C'_n$  est une chambre de  $A$  qui n'appartient pas à  $Y_n := \text{Conv}(Y \cup \{C_0, \dots, C_{n-1}\})$ ,
- $A'_n$  est un appartement contenant  $Y_{n-1} \cup C_n$  et ayant une racine en commun avec  $A'_{n-1}$ ,
- $g_n$  est un élément de  $H$  qui envoie  $A'_{n-1}$  sur  $A'_n$ .

De plus, ces suites sont construites de façon à ce que  $\text{Res}_{\text{sph}}(A)$  soit recouvert par  $\bigcup_n Y_n$ . Ainsi, pour chaque chambre  $C'$  de  $A'$ , il existe un  $n$  assez grand tel que la rétraction  $\rho$  sur  $A$  centrée en  $C$  soit telle que  $\rho(C') \subset Y_n$ , et on en déduit que  $h_m(C')$  est contenu dans  $A$  pour tout  $m > n$ , où la suite  $(h_m)$  est définie par  $h_m = g_m \cdots g_1$ . Puisque  $H$  est compact, la suite  $(h_m)$  admet une sous-suite qui converge vers un élément  $h \in H$ . Comme l'action de  $G$  est continue, cela implique que  $h$  envoie  $A'$  sur  $A$ , comme voulu.

Il reste à prouver que  $\text{Fix}_G(Y) \subset H$ . Soit donc  $g \in \text{Fix}_G(Y)$  et posons  $A' = gA$ . Alors il existe un  $h \in H$  tel que  $hA' = A$ . Par conséquent on a  $hgA = A$  et puisque  $hg$  fixe  $Y$ , il suffit de prouver que le sous-groupe de  $\text{Stab}_G(A)$  qui fixe  $Y$  point par point est contenu dans  $H$ . Comme le fixateur de l'appartement  $A$  appartient évidemment à  $H$ , il suffit en fait de vérifier que le sous-groupe de  $\text{Stab}_G(A)/\text{Fix}_G(A) \simeq W$  fixant  $Y$  est contenu  $H$  (ou plus précisément, que chaque élément de ce sous-groupe de  $W$  peut être relevé en un élément de  $H$ ). Ce dernier sous-groupe est trivial si  $Y$  contient une chambre. Sinon, il est engendré par les réflexions de  $\text{Stab}_G(A)$  qui fixent  $Y$ .

Chacune de ces réflexions peut être exprimée comme un produit de trois éléments, chacun fixant une racine de  $A$  contenant  $Y$ . Pour démontrer ce fait, on procède comme dans [AB08, Lemma 7.5]. Soient  $\alpha$  et  $-\alpha$  les racines bordées par le mur de cette réflexion. Comme on a supposé l'immeuble épais, et en utilisant la proposition 2.2.41, il existe un demi-appartement  $\beta$  tel que  $\alpha \cup \beta$  et  $-\alpha \cup \beta$  soient tous deux  $W$ -isométriques à des appartements. En utilisant encore la proposition 2.2.41, on en déduit que ce sont tous deux des appartements, disons  $A_1$  et  $A_2$  respectivement. Soit  $h_1$  un élément de  $\text{Fix}(\alpha)$  qui envoie  $-\alpha$  sur  $\beta$ . L'image réciproque de  $-\alpha$  par  $h_1$  est alors un demi-appartement, que l'on note  $\beta'$ . De la même manière,  $\alpha \cup \beta'$  est un appartement de  $X$ . Soit maintenant  $h_2 \in \text{Fix}(-\alpha)$  un élément de  $H$  qui envoie  $\beta$  sur  $\alpha$  et  $h_3$  un élément de  $\text{Fix}(-\alpha)$  qui envoie  $\alpha$  sur  $\beta'$ . On vérifie alors que le produit  $h_2 h_1 h_3$  échange  $\alpha$  et  $-\alpha$ ; il agit donc sur  $A$  comme la réflexion par rapport à  $\partial\alpha$ .

Ainsi, on a bien  $\text{Fix}_G(Y) \subset H$ , ce qui conclut la démonstration.  $\square$

En combinant les lemmes 4.1.5 et 4.1.7, on obtient une description du radical  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$  en terme de groupes radiciels.

### 4.1.3 Description de la compactification par la topologie de Chabauty

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

**Théorème 4.1.8.** *Soit  $X$  un immeuble épais et localement fini,  $G$  son groupe d'automorphismes stricts. Supposons que  $G$  agit fortement transitivement sur  $X$ . Alors la compactifi-*

ation  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$  est homéomorphe à  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  de façon  $G$  équivariante. Plus précisément, une suite  $(R_n)$  de résidus sphériques converge vers un  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  si et seulement si la suite de leurs stabilisateurs  $(G_{R_n})$  converge vers  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$  pour la topologie de Chabauty.

Il en découle en particulier que l'image de l'adhérence de l'ensemble des chambres de  $X$  par  $\phi$  est homéomorphe à la compactification minimale  $\mathcal{C}_1(X)$  (voir la proposition 3.2.12).

*Exemple 4.1.9.* La compactification par la topologie de Chabauty des immeubles de Bruhat-Tits a été étudiée dans [GR06]. En particulier, on y trouve des calculs explicites de stabilisateurs et de groupes limites. Dans le cas de l'immeuble associé à  $\text{SL}_3$  sur un corps local, il existe un point  $\xi$  tel que  $G_\xi$  est le groupe des matrices triangulaires supérieures. Le groupe limite est alors le groupe calculé dans l'exemple 1.4.4.

La preuve du théorème 4.1.8 requiert des résultats préliminaires.

**Lemme 4.1.10.** *Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques convergeant vers un point  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et telle que la suite  $(G_{R_n})$  converge vers un groupe fermé  $D$  dans  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ . Alors  $D$  fixe  $\xi$ .*

*Preuve.* Soient  $g \in D$ , soit  $g_n \in G_{R_n}$  une suite d'éléments qui converge vers  $g$  (voir le lemme 4.1.1) et soit  $\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Alors on a  $g_n^{-1} \cdot \sigma = g^{-1} \cdot \sigma$  pour  $n$  assez grand. De même, pour  $n$  assez grand,  $g \cdot (\xi(g^{-1}\sigma)) = g_n \cdot (\xi(g^{-1}\sigma))$ . Par conséquent on a  $(g \cdot \xi)(\sigma) = g_n \xi(g_n^{-1}\sigma) = (g_n \cdot \xi)(\sigma)$  pour  $n$  grand. En prenant  $n$  assez grand pour que  $\xi(\sigma) = \text{proj}_\sigma(R_n)$  et  $\xi(g^{-1}\sigma) = \text{proj}_{g^{-1}\sigma}(R_n)$ , on obtient successivement

$$\begin{aligned} (g \cdot \xi)(\sigma) &= g \cdot (\xi(g^{-1}\sigma)) \\ &= g_n \cdot (\xi(g_n^{-1}\sigma)) \\ &= g_n \cdot (\text{proj}_{g_n^{-1}\sigma}(R_n)) \\ &= g_n \cdot (\text{proj}_{g_n^{-1}\sigma}(g_n^{-1}R_n)) \\ &= g_n \cdot (g_n^{-1} \text{proj}_\sigma(R_n)) \\ &= \text{proj}_\sigma(R_n) \\ &= \xi(\sigma). \end{aligned}$$

Ainsi  $g \cdot \xi = \xi$ , comme voulu. □

**Lemme 4.1.11.** *Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques convergeant vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Alors la suite  $(G_{R_n})$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$  et sa limite est égale à  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ .*

*Preuve.* Soit  $D$  une valeur d'adhérence de la suite  $(G_{R_n})$ . Il suffit de démontrer que  $D = \text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ . Cela implique en effet que  $(G_{R_n})$  n'a qu'un point d'accumulation et donc converge vers  $D$  par compacité de  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ .

Comme  $X$  est localement fini, le fixateur de tout ensemble borné de  $X$  est ouvert dans  $G$ . De plus, comme  $G$  agit par isométries cellulaires sur  $|X|$ , tout élément de  $G$  agit par isométrie elliptique ou hyperbolique (voir la proposition 1.2.5). Cela implique que l'ensemble des isométries elliptiques de  $G$  est fermé. Notons que cet ensemble coïncide avec l'ensemble des éléments périodiques de  $G$ . Comme tout élément de  $D$  est limite d'éléments périodiques d'après le lemme 4.1.1, on voit que  $D$  lui-même est constitué d'éléments périodiques. Les lemmes 4.1.5 et 4.1.10 impliquent alors que  $D \subset \text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ .

Pour démontrer l'inclusion réciproque, choisissons  $x \in X$  et un appartement  $A$  contenant  $Q(x, \xi)$ . Par forte transitivité, il existe un  $k_n \in G_x$  tel que  $k_n R_n$  est contenu dans  $A$ . Comme



$G_x < G$  est compact, on peut supposer, quitte à extraire une sous-suite, que  $(k_n)$  converge vers  $k \in G_x$ . Soit  $R'_n = k_n R_n$ . Alors  $(R'_n)$  est contenu dans  $A$  et converge vers  $k.\xi$ . De plus,  $(G'_{R'_n})$  converge vers  $kDk^{-1}$  dans  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ .

La suite  $(R'_n)$  entre et finit par rester dans toute racine  $\alpha \in \Phi_A(k.\xi)$ . En particulier, pour  $n$  assez grand, le fixateur  $G_\alpha$  de  $\alpha$  est inclus dans  $G_{R'_n}$ . D'après le lemme 4.1.1, cela implique que  $G_\alpha \subset kDk^{-1}$ . En conjuguant par  $k$ , on en déduit que, pour tout  $\alpha \in \Phi_A(\xi)$ , on a  $G_\alpha \subset D$ . D'après le lemme 4.1.7, cela prouve que le fixateur de  $Q(x, \xi)$  est contenu dans  $D$ . Le lemme 4.1.5 permet alors de conclure.  $\square$

**Lemme 4.1.12.** *Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques. Si la suite  $(G_{R_n})$  converge vers  $D \in \mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ , alors  $(R_n)$  converge également dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .*

*De plus, pour tout  $\xi, \xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , on a l'égalité  $\xi = \xi'$  si et seulement si  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi) = \text{Rad}_{\text{LF}}(G_{\xi'})$ .*

**Preuve.** Supposons que  $(G_{R_n})$  converge. Si la suite  $(R_n)$  a deux points d'accumulation  $\xi, \xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , alors le lemme 4.1.11 implique que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi) = \text{Rad}_{\text{LF}}(G_{\xi'})$ . Il suffit donc de vérifier que les stabilisateurs de deux points distincts ont des radicaux localement finis différents.

Étant donné  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  et  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , le quartier  $Q(x, \xi)$  coïncide avec l'ensemble des points fixes de  $G_{x, \xi}$  d'après les lemmes 4.1.7 et 4.1.4. De plus, le lemme 4.1.5 implique que  $G_{x, \xi} = R_x$ , où  $R = \text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ . Ainsi,  $Q(x, \xi)$  est l'ensemble des points fixes de  $R_x$ , pour tout  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . On en déduit que, pour tout  $\xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  tel que  $\text{Rad}_{\text{LF}}(G_{\xi'}) = \text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi)$ , les quartiers combinatoires basés en  $x$  et associés à  $\xi$  et  $\xi'$  coïncident, pour tout  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . D'après le corollaire 3.2.19, cela implique  $\xi = \xi'$ .  $\square$

On peut maintenant démontrer le théorème.

**Preuve du théorème 4.1.8.** Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) &\rightarrow \mathcal{S}(G) \\ \xi &\mapsto \text{Rad}_{\text{LF}}(G_\xi). \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.1.10, l'application  $\Psi$  prend ses valeurs dans  $\mathcal{C}_{\text{gp}}(X)$ . D'après le lemme 4.1.12, elle est bijective. L'équivariance est évidente. Il s'agit de prouver que  $\Psi$  est continue.

Soit  $(\xi_n)$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  convergeant vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . On va vérifier que tout point d'accumulation de  $(\Psi(\xi_n))$  est égal à  $\Psi(\xi)$ . Soit  $D$  un tel point d'accumulation. Quitte à extraire, on peut supposer que  $(\Psi(\xi_n))$  converge vers  $D$ .

Comme  $\xi_n$  appartient à  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , il existe une suite  $(x_m^n)_m$  de résidus sphériques qui converge vers  $\xi_n$ , pour tout  $n$ . On voit alors que  $(x_m^m)_m$  converge vers  $\xi$ . D'après le lemme 4.1.11, on en déduit que  $(\Psi(x_m^m))_m$  converge vers  $\Psi(\xi)$ , tandis que  $(\Psi(x_m^n))_n$  converge vers  $\Psi(\xi_n)$ . Par conséquent, la suite  $(\Psi(x_m^m))_m$  converge vers  $\lim_n \Psi(\xi_n) = D$  et on a donc bien  $\Psi(\xi) = D$ .  $\square$

## 4.2 Compactification de Busemann

Il y a plusieurs moyens de voir un immeuble comme un espace métrique : on peut penser bien sûr à la réalisation métrique, mais aussi au graphe d'adjacence des chambres de

l'immeuble, ainsi qu'au graphe des résidus sphériques... Chacun de ces espaces métriques possède une compactification de Busemann (voir la section 1.1.3. c). Dans le cas de la réalisation de Davis-Moussong, on obtient ainsi le bord visuel. Dans les cas «combinatoires», d'un immeuble vu comme un graphe de chambres ou de résidus sphériques, on obtient les compactifications combinatoires.

**Théorème 4.2.1.** *La compactification combinatoire minimale d'un immeuble localement fini  $X$  est homéomorphe, de manière  $\text{Aut}(X)$ -équivariante, à la compactification de Busemann du graphe des chambres.*

*De la même manière, la compactification combinatoire maximale de  $X$  est homéomorphe, de manière  $\text{Aut}(X)$ -équivariante, à la compactification de Busemann de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , muni de la distance radicielle.*

On notera  $\mathcal{C}_{\text{horo}}(X)$  la compactification de Busemann de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Notons que la compactification de Busemann du graphe des chambres de  $X$  est un sous-ensemble fermé de  $\mathcal{C}_{\text{horo}}(X)$ .

**Preuve du théorème 4.2.1.** L'idée générale est que les compactifications combinatoires sont définies en utilisant les projections, notion qui peut être décrite uniquement en terme de distance radicielle. Voici les détails.

On traite uniquement le cas de la compactification maximale ; le cas de la compactification minimale étant similaire mais plus facile.

Soit  $y_0 \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Pour  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , on note  $f_x$  la fonction qui à  $y \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  associe  $d(y, x) - d(x, y_0)$ , de sorte que  $\mathcal{C}_{\text{horo}}(X)$  est l'adhérence de l'ensemble des fonctions  $f_x$ .

Soient  $(R_n)$  et  $(T_n)$  deux suites de résidus sphériques convergeant vers le même point  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . On va prouver que les suites  $(f_{R_n})$  et  $(f_{T_n})$  convergent toutes deux dans  $\mathcal{C}_{\text{horo}}(X)$  et ont la même limite.

Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . On prouve par récurrence sur la distance  $d(x, y_0)$  que  $f_{R_n}(x)$  et  $f_{T_n}(x)$  prennent la même valeur pour  $n$  assez grand, ce qui implique l'affirmation ci-dessus.

Supposons tout d'abord  $y_0 \subset x$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $y_0$  et  $R_n$ . Comme  $y_0 \subset x$ , on a

$$\begin{aligned} |\Phi_A(R_n, y_0)| - |\Phi_A(R_n, x)| &= |\Phi_A(R_n, y_0) \setminus \Phi_A(R_n, x)| \\ &= |\Phi_A(\text{proj}_x(R_n), y_0)|, \end{aligned}$$

où la dernière égalité provient du fait que toute racine contenant  $R_n$  et  $x$  contient également  $\text{proj}_x(R_n)$ , et que toute racine contenant  $\text{proj}_x(R_n)$  mais pas  $y_0$  contient également  $R_n$  et  $x$ . Avec des arguments similaires, on obtient

$$|\Phi_A(x, R_n)| - |\Phi_A(y_0, R_n)| = |\Phi_A(x, \text{proj}_x(R_n) \cup y_0)|,$$

où  $\Phi_A(x, \text{proj}_x(R_n) \cup y_0)$  désigne l'ensemble des racines de  $A$  qui contiennent  $x$  mais pas  $\text{proj}_x(R_n)$  ni  $y_0$ . Remarquons que la projection  $\text{proj}_x(R_n)$  coïncide avec  $\text{proj}_x(\xi)$  pour  $n$  assez grand. Ceci prouve que

$$\begin{aligned} f_{R_n}(x) &= d(R_n, x) - d(R_n, y_0) \\ &= \frac{1}{2}(|\Phi_A(R_n, x)| - |\Phi_A(R_n, y_0)| + |\Phi_A(x, R_n)| - |\Phi_A(y_0, R_n)|) \end{aligned}$$

ne dépend que de  $x$ ,  $y$  et  $\text{proj}_x(\xi)$  pour tout  $n$  assez grand. En particulier, la suite  $(f_{R_n})$  converge et sa limite coïncide avec la limite de  $(f_{T_n})$ , comme voulu.

On procède de même dans le cas où  $y_0 \subset x$ .

Supposons maintenant que  $x$  et  $y_0$  ne sont pas contenus l'un dans l'autre. Alors l'intervalle ouvert  $]x, y_0[$  n'est pas vide d'après le lemme 3.1.5. Soit  $z \in ]x, y_0[$ . Par récurrence, les suites

$$n \mapsto d(R_n, z) - d(R_n, y_0)$$

et

$$n \mapsto d(R_n, x) - d(R_n, z)$$

convergent vers une valeur qui ne dépend que de  $\xi$ . Comme la somme de ces deux suites est égale à  $(f_{R_n}(x))$ , le résultat s'ensuit.

Ceci fournit une application bien définie ainsi que  $\text{Aut}(X)$ -équivariante de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  dans  $\mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$ , qui à un point  $\xi$  associe la fonction  $f_\xi$ , limite de  $(f_{R_n})$ .

Démontrons que l'application ainsi définie est continue. Soit  $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  tendant vers  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $(R_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$  une suite de résidus sphériques tendant vers  $\xi_n$ . Alors on a  $\lim_n R_n^m = \xi$  et par conséquent  $\lim_n f_{R_n^m} = f_\xi$ . D'autre part, si  $\xi'$  est une valeur d'adhérence de  $(f_{\xi_n})$ , alors on a également  $\lim_n f_{R_n^m} = f_{\xi'}$ . Par compacité de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , on en déduit que  $(f_{\xi_n})$  converge vers  $f_\xi$  et donc que  $\xi \mapsto f_\xi$  est continue.

Soit maintenant  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques telle que  $(f_{R_n})$  converge vers un  $f \in \mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$ . Étant donné  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , la projection  $\text{proj}_x(R_n)$  coïncide avec l'unique résidu sphérique  $\sigma$  contenu dans  $x$  et tel que  $f_{R_n}(\sigma)$  est minimale. (voir le corollaire 3.1.6) Comme  $X$  est localement fini,  $x$  est fini et on en déduit que  $\text{proj}_x(R_n)$  prend une valeur constante  $\xi_f(x)$ , pour tout  $n$  assez grand. De plus, si  $(T_n)$  était une autre suite telle que  $(f_{T_n})$  converge vers  $f \in \mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$ , alors les mêmes arguments montrent que  $\text{proj}_x(T_n)$  converge également vers  $\xi_f(x)$ . Ceci montre qu'il existe une application bien définie et  $\text{Aut}(X)$ -équivariante de  $\mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$  dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , qui à  $f$  associe  $\xi_f$  telle que  $f_{\xi_f} = f$  et  $\xi_{f_\xi} = \xi$  pour tout  $f \in \mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .

Finalement, les compactifications  $\mathcal{C}_{\text{hor}}(X)$  et  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont homéomorphes de manière  $\text{Aut}(X)$ -équivariante.  $\square$

### 4.3 Comparaison avec le bord raffiné

Contrairement aux sections précédentes, on ne suppose pas ici l'immeuble  $X$  localement fini. Soit  $|X|$  une réalisation métrique de l'immeuble  $X$  qui est CAT(0) et complète et dans laquelle seuls les résidus sphériques sont représentés (par exemple, la réalisation de Davis-Moussong). Pour simplifier les notations, on confondra dans cette section l'immeuble  $X$  avec sa réalisation métrique  $|X|$ . Si  $G$  est un sous-groupe de  $\text{Aut}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , on note  $G_\xi$  le fixateur de  $\xi$  dans  $G$ .

#### 4.3.1 Construction d'immeubles dans les horosphères

Soit  $\xi \in \partial_\infty X$  un point du bord visuel de  $X$ . Dans cette section, on présente un immeuble  $X^\xi$ , canoniquement attaché à  $\xi$ . On verra que l'espace  $X_\xi$  de la section 1.3 peut être vu comme une réalisation métrique de l'immeuble  $X^\xi$ .

Soit  $\mathcal{A}^\xi$  l'ensemble des appartements  $A$  tels que  $\xi \in \partial_\infty A$ . Notons également  $\frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  l'ensemble des demi-appartements  $\alpha$  tels que le bord visuel du mur  $\partial\alpha$  contienne  $\xi$ . En particulier, chaque  $\alpha \in \frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  est une racine d'un appartement de  $\mathcal{A}^\xi$ .

Comme tout rayon géodésique est contenu dans un appartement [CH09, Theorem E], on voit que l'ensemble  $\mathcal{A}^\xi$  n'est pas vide. Ce n'est pas le cas de  $\frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$ , qui est en fait vide pour un point  $\xi$  «générique» (en un sens que l'on ne précisera pas).

**Lemme 4.3.1.** *Pour tout  $A, A' \in \mathcal{A}^\xi$ , toute chambre  $C \in A$  et tout rayon géodésique  $\rho' \subset A'$  pointant vers  $\xi$ , il existe un appartement  $A'' \in \mathcal{A}_\xi$  contenant à la fois  $C$  et un sous-rayon de  $\rho'$ .*

*Preuve.* On travaille par récurrence sur  $d(C, A')$ . Soit donc  $C'$  une chambre de  $A'$  à distance minimale de  $C$  et soit  $C' = C_0, C_1, \dots, C_n = C$  une galerie minimale. La cloison qui sépare  $C_0$  de  $C_1$  définit un mur de  $A'$ , et il existe une racine  $\alpha$  de  $A'$  bordée par ce mur et contenant un sous-rayon de  $\rho'$ . Alors  $C_1 \cup \alpha$  est contenu dans un appartement et le lemme s'en déduit par récurrence.  $\square$

Étant donné  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , notons  $R^\xi$  l'intersection des demi-appartements  $\alpha \in \frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  tels que  $R$  est contenu dans  $\alpha$ . Ainsi, dans le cas des chambres, l'application  $C \mapsto C^\xi$  identifie deux chambres adjacentes de  $X$ , à moins qu'elles ne soient séparées par un mur  $\partial\alpha$  avec  $\alpha \in \frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$ . On note  $\mathcal{C}^\xi$  l'image des chambres par l'application  $C \mapsto C^\xi$  et on dit que deux éléments de  $\mathcal{C}^\xi$  sont *adjacents* si ce sont les images de deux chambres adjacentes dans  $X$ . Notons que  $R^\xi$  définit un résidu du système de chambres  $\mathcal{C}^\xi$ .

Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $X$ . Choisissons un appartement  $A \in \mathcal{A}^\xi$  et voyons  $W$  comme un groupe de réflexions agissant sur  $A$ . Les réflexions associées aux racines  $\alpha$  de  $A$  qui appartiennent à  $\frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  forment un sous-groupe de  $W$  que l'on note  $W^\xi$ . D'après le théorème 2.1.16, le groupe  $W_\xi$  est un groupe de Coxeter. Son système de générateurs  $S^\xi$  s'identifie à l'ensemble des murs bordant une chambre. De plus, il résulte également du théorème 2.1.16 que l'ensemble  $\{C^\xi \mid C \in A\}$ , avec la relation d'adjacence définie ci-dessus, est isomorphe au système de chambres associé à  $W_\xi$ .

**Proposition 4.3.2.** *Le système de chambres  $\mathcal{C}^\xi$  est un immeuble de type  $W^\xi$ , que l'on note  $X^\xi$ . L'application  $R \mapsto R^\xi$  de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$  vers  $\text{Res}_{\text{sph}}(X^\xi)$  est  $\text{Aut}(X)_\xi$ -équivariante et diminue la distance radicielle.*

*Preuve.* Commençons par vérifier que l'espace métrique  $X$  est une réalisation métrique de  $\mathcal{C}^\xi$ . Pour ne pas confondre avec l'immeuble  $X$ , on le notera  $X^\xi$ .

Il est clair que chacune toutes les chambres de  $\mathcal{C}^\xi$  donnent lieu à des réalisations métriques isométriques dans  $X^\xi$ . Notons  $Z$  le modèle d'une telle réalisation. On a une bijection  $\text{Aut}(\mathcal{C}^\xi)$ -équivariante  $\phi$  de  $Z(\mathcal{C}^\xi)$  vers  $X^\xi$ , qui à un point  $[C, z]$  associe le point  $z$  correspondant dans la chambre  $C$  dans  $X$ .

On vérifie facilement les critères de la proposition 2.2.12, qui implique que  $\phi$  est une isométrie et que  $X^\xi$  est bien une réalisation métrique de  $\mathcal{C}^\xi$ .

D'autre part, le théorème 2.1.16 donne directement  $S^\xi$  comme étant l'ensemble des murs bordant une chambre et chacun de ces murs représente donc une cloison, ce qui implique que la structure-miroir  $Z$  est admissible.

Le lemme 4.3.1 démontre alors que deux points de  $X$  sont dans un même appartement de  $\mathcal{A}^\xi$ . L'axiome (I1) découle du théorème 2.1.16, comme expliqué ci-dessus.

On démontre ensuite l'axiome (I3''). Soient donc des appartements  $A^\xi$  et  $A'^\xi$  contenant une chambre  $C^\xi$  en commun. Alors  $Z(A^\xi)$  et  $Z(A'^\xi)$  sont les réalisations métriques d'appartements de  $X$  et contiennent une chambre  $C$  de  $X$ . On va alors prouver que la rétraction  $\rho$  sur  $A$  centrée en  $C$  fournit un isomorphisme entre  $A^\xi$  et  $A'^\xi$ . En effet,  $\rho$  fixe  $A \cap A'$  et cette intersection contient un rayon pointant vers  $\xi$ . Ceci implique que pour tout demi-appartement  $\alpha$  de  $A'$ , on a  $\alpha \in \frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  si et seulement si  $\rho(\alpha) \in \frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$ , d'où l'affirmation ci-dessus.

On a donc bien démontré que  $\mathcal{C}^\xi$  est un immeuble.

Pour vérifier que  $R \mapsto R^\xi$  diminue la distance, il suffit de voir qu'une racine qui sépare  $R^\xi$  et  $S^\xi$  dans un appartement  $A$  est l'image d'une racine de  $\frac{1}{2}\mathcal{A}^\xi$  qui sépare  $R$  et  $S$  dans l'appartement  $A$ . Ainsi, il y a moins de racines séparant  $R$  et  $S$ , d'où le résultat.  $\square$

*Remarque 4.3.3.* On a  $\dim(X^\xi) < \dim(X)$  (au sens où les résidus sphériques maximaux de  $X^\xi$  sont de rang plus petit que ceux de  $X$ ). Ceci a été établi dans la preuve du lemme 3.2.29.

### 4.3.2 Une stratification de la compactification combinatoire

La proposition 4.3.2 fournit un immeuble  $\mathcal{C}^\xi$  (et une réalisation métrique  $X^\xi$ ) pour chaque point  $\xi$  du bord visuel de  $X$ . On va voir que cet immeuble peut s'interpréter dans la compactification combinatoire.

**Théorème 4.3.4.** *Pour chaque  $\xi \in \partial_\infty X$ , il existe une injection continue  $\text{Aut}(X)_\xi$ -équivariante  $r^\xi : \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . De plus, en identifiant  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi)$  avec son image par  $r^\xi$ , on a la stratification suivante :*

$$\mathcal{C}_{\text{sph}}(X) = \text{Res}_{\text{sph}}(X) \cup \left( \bigcup_{\xi \in \partial_\infty X} \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi) \right).$$

Avant de démontrer ce théorème, vérifions le lemme suivant, qui établit un lien basique entre les points du bord combinatoire et ceux du bord visuel.

**Lemme 4.3.5.** *Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques et  $(p_n)$  la suite de leurs centres. Supposons que  $(R_n)$  converge vers un point  $f \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Alors  $(p_n)$  admet une sous-suite convergente dans  $\partial_\infty X$ . De plus, tout point d'accumulation de  $(p_n)$  est dans le bord visuel de tout quartier combinatoire pointant vers  $f$ .*

Notons qu'il n'est pas clair *a priori* que  $(p_n)$  sous-converge, étant donné que l'on n'a pas supposé  $X$  localement fini (et  $X \cup \partial_\infty X$  n'est donc pas obligatoirement compact).

*Preuve.* Fixons un point base  $p \in X$  et soit  $R \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  son support. Pour tout  $n$ , le segment géodésique joignant  $p$  à  $p_n$  est contenu dans  $\text{Conv}(R, R_n)$ , dont la réalisation métrique est également convexe, au sens métrique. D'après le corollaire 3.2.18, pour tout ensemble compact  $K$ , il existe  $N$  tel que, pour tout  $n > N$ , on ait  $Q(R, f) \cap K = \text{Conv}(R, R_n) \cap K$ . Par conséquent, pour  $n$  assez grand, on a  $[p, p_n] \cap K \subset Q(R, f)$ . Comme  $Q(R, f)$  est contenu dans un appartement, et est donc propre, on en déduit qu'il existe une sous-suite (dépendant de  $K$ ) de  $([p, p_n] \cap K)_n$  qui converge uniformément. Par un procédé diagonal, on en déduit qu'il existe une sous-suite de  $([p, p_n])_n$  qui converge uniformément sur tout compact et donc telle que  $(p_n)$  admet une sous-suite convergant dans  $\partial_\infty X$ .

De plus, sa limite  $\xi$  est telle que  $[p, \xi] \cap K \subset Q(R, f)$  pour tout compact  $K$ , ce qui implique  $[p, \xi] \subset Q(R, f)$  et par conséquent  $\xi \in \partial_\infty Q(R, f)$ .  $\square$

**Preuve du théorème 4.3.4.** Soit  $\xi \in \partial_\infty X$ ,  $f \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi)$ . On va définir un élément  $\widehat{f} : \text{Res}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  qui appartient à  $\prod_{\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma)$ . La construction se fait de la manière suivante.

Considérons l'application  $\text{Res}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(X^\xi)$  construite à la section 4.3.1. Soit  $\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $\rho$  le rayon géodésique partant du centre de  $\sigma$  et pointant vers  $\xi$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $\rho$ . Notons  $\Psi_A(\xi)$  l'ensemble des demi-appartements  $\alpha$  de  $A$  tels que  $\alpha \not\subset \frac{1}{2}A^\xi$  et  $\alpha$  contient un sous-rayon de  $\rho$ . Remarquons que si  $\alpha \in \Psi_A(\xi)$ , alors  $-\alpha \notin \Psi_A(\xi)$ .

Étant donné un résidu  $\tau$  inclus dans  $\sigma^\xi$ , il existe un unique résidu  $\tau'$  de  $\sigma$  tel que  $(\tau')^\xi = \tau$  et que  $\tau'$  est contenu dans toute racine  $\alpha \in \Psi_A(\xi)$  contenant  $\sigma$ . Le résidu  $\tau'$  sera noté  $r^\xi(\tau)$ . Il est facile de voir que l'application  $r^\xi : \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma^\xi) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma)$  ne dépend pas du choix de l'appartement  $A$ .

On définit alors  $\widehat{f} \in \prod_{\sigma \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)} \text{Res}_{\text{sph}}(\sigma)$  par

$$\widehat{f} : \sigma \mapsto r^\xi(f(\sigma^\xi)).$$

Remarquons que la définition de  $\widehat{f}$  ne dépend pas du choix de  $A$ .

Alors on a  $\widehat{f} \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . En effet, soit  $(x_n)$  une suite de résidus sphériques de  $X^\xi$  convergeant vers  $f$  et contenue dans un appartement  $A'$  de  $\mathcal{C}^\xi$  (voir la proposition 3.2.4). On peut voir  $A'$  comme un appartement de  $X$ . Choisissons  $R_n \in \text{Res}_{\text{sph}}(A')$  tel que  $(R_n)^\xi = x_n$  et de sorte que la suite  $(R_n)$  pénètre et finit par rester dans l'intérieur de toute racine  $\alpha \in \Psi_{A'}(\xi)$ . On vérifie facilement qu'une telle suite existe : en effet, pour tout  $\alpha \in \Psi_{A'}(\xi)$ , il existe un relevé  $S_n$  de  $x_n$  tel que  $S_n \in \alpha$ . Il découle alors du lemme 3.2.3 et de la proposition 4.3.2 que  $(R_n)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(A')$ . Le fait que  $(R_n)$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  se déduit du corollaire 3.2.32. Enfin, le lemme 3.2.26 permet de prouver que  $\widehat{f} = \lim_n R_n$ .

Démontrons finalement que  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  admet une stratification comme décrit ci-dessus. Soit  $h \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) \setminus \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques contenus dans un même appartement  $A$  de  $X$  et convergeant vers  $h$  (voir la proposition 3.2.31). D'après le lemme 4.3.5, quitte à extraire, la suite des centres des résidus  $R_n$  converge vers un point  $\xi \in \partial_\infty A$  et la suite  $((R_n)^\xi)_{n \geq 0}$  converge dans  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi)$ . Soit  $h'$  sa limite. En utilisant la définition de l'application  $f \mapsto \widehat{f}$ , on voit que  $\widehat{h'} = h$ , ce qui fournit la conclusion.  $\square$

De la même façon, la bordification minimale  $\mathcal{C}_1(X)$  a une structure similaire :

**Théorème 4.3.6.** *Pour chaque  $\xi \in \partial_\infty X$ , il existe une injection continue  $\text{Aut}(X)_\xi$ -équivariante  $r^\xi : \mathcal{C}_1(\mathcal{C}^\xi) \rightarrow \mathcal{C}_1(X)$ . De plus, en identifiant  $\mathcal{C}_1(\mathcal{C}^\xi)$  avec son image par  $r^\xi$ , on a la stratification suivante :*

$$\mathcal{C}_1(X) = X \cup \left( \bigcup_{\xi \in \partial_\infty X} \mathcal{C}_1(\mathcal{C}^\xi) \right).$$

Autrement dit, les éléments de  $\mathcal{C}_1(X)$  peuvent être vus comme les chambres des immeubles  $X^\xi$ .

**Preuve.** La preuve est exactement la même que ci-dessus.  $\square$

### 4.3.3 Comparaison avec le bord raffiné

À un point du bord visuel  $\xi$  d'un immeuble  $X$  sont associés deux espaces : un immeuble  $\mathcal{C}^\xi$  (avec sa réalisation métrique  $X^\xi$ ), défini dans la section précédente, et un espace métrique  $X_\xi$ , défini dans la section 1.3.

On va voir que  $X_\xi$  peut en quelque sorte être vu comme une réalisation métrique de l'immeuble  $X^\xi$ , même si ce n'est pas le cas à proprement parler. Ceci permet de démontrer le théorème suivant :

**Lemme 4.3.7.** *L'espace métrique  $X_\xi$  est une réalisation métrique de l'immeuble  $\mathcal{C}^\xi$ .*

*Preuve.* On dispose d'une projection  $\pi_\xi : X \rightarrow X_\xi$ . Définissons une chambre modèle  $Z$  de  $X_\xi$  comme l'adhérence de l'image d'une chambre de  $X^\xi$  ( $= X$ , comme espace métrique) par  $\pi_\xi$  (ces chambres sont toutes isométriques, puisque ce sont les complétions des images par  $\pi_\xi$  de chambres de  $X^\xi$ , qui sont toutes isométriques). Notons que  $X_\xi$  est recouvert par la réunion de toutes ces chambres. On définit ensuite  $Z_s$  comme étant l'adhérence de deux chambres  $s$ -adjacentes, pour tout  $s \in S^\xi$ .

La proposition 2.2.12 implique alors facilement que  $X_\xi$  est isométrique à  $Z(\mathcal{C}^\xi)$ .  $\square$

*Remarque 4.3.8.* Il n'y a pas de raison que la réalisation métrique  $X_\xi$  de l'immeuble  $\mathcal{C}^\xi$  soit admissible. Ce n'est en fait pas le cas en général : par exemple, si l'on prend pour  $X$  un immeuble dont le groupe de Weyl est un groupe fuchsien, alors pour tout  $\xi \in \partial_\infty X$ , l'immeuble  $\mathcal{C}^\xi$  est fini, mais pas trivial ; alors que l'espace  $X_\xi$  est lui réduit à un point. Ainsi, seul un résidu sphérique (l'immeuble lui-même) est représenté.

**Théorème 4.3.9.** *Soit  $X$  un immeuble. Pour toute réalisation métrique  $|X|$  complète et CAT(0) de  $X$ , où seuls les résidus sphériques sont représentés, il existe une application Aut( $X$ )-équivariante  $\Theta : |X| \cup \partial_\infty^{\text{fine}}|X| \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .*

*Preuve.* Il existe une application Aut( $X$ )-équivariante et surjective  $\Theta : |X| \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , celle qui associe à un point son support. On veut étendre  $\Theta$  à  $\partial_\infty|X|$ . On fait une récurrence sur la «dimension» de  $X$ , définie comme le rang maximal d'un résidu sphérique de l'immeuble  $X$ . Si ce rang est égal à 1, alors le groupe de Weyl est un groupe de Coxeter libre et par conséquent l'immeuble est un arbre. Dans ce cas, le bord raffiné comme le bord combinatoire s'identifient à l'ensemble des bouts de l'arbre.

Revenons maintenant au cas général. Soit  $\xi \in \partial_\infty|X|$ . D'après la remarque 4.3.3, l'immeuble  $\mathcal{C}^\xi$  est de dimension  $< \dim(X)$ . Comme  $|X|_\xi$  est une réalisation métrique de  $X$ , que  $|X|_\xi$  est un espace complet et CAT(0) d'après la proposition 1.3.1, et que tous les résidus représentés dans  $|X|_\xi$  sont des projections de résidus de  $X^\xi$ , donc des résidus sphériques, l'hypothèse de récurrence s'applique : il existe donc une application Aut( $X$ ) $_\xi$ -équivariante de  $\partial_\infty^{\text{fine}}|X|_\xi$  vers  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathcal{C}^\xi)$ . En composant avec l'application  $r^\xi$  du théorème 4.3.4, on obtient une application Aut( $X$ ) $_\xi$ -équivariante de  $\partial_\infty^{\text{fine}}|X|_\xi$  vers  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Comme, par définition, on a une partition

$$\partial_\infty^{\text{fine}}|X| = \bigsqcup_{\xi \in \partial_\infty|X|} \partial_\infty^{\text{fine}}|X|_\xi,$$

le résultat s'ensuit.  $\square$

## Chapitre 5

# Arbres dans les complexes de Coxeter

Ce chapitre est consacré à l'étude des arbres dans les complexes de Coxeter généraux. Cette construction a commencé dans [MV00] puis [NV02], dans l'optique de démontrer une version forte de l'alternative de Tits pour les sous-groupes des groupes de Coxeter. Indépendamment, la construction de ces arbres a été utilisée dans [DJ99] pour démontrer la moyennabilité à l'infini des groupes de Coxeter.

On reprend ici les constructions citées et on démontre qu'elles permettent également d'étudier le bord combinatoire. Plus précisément, on va voir qu'on peut plonger un groupe de Coxeter dans un produit fini d'arbres et que l'injection que l'on obtient ainsi se prolonge en un plongement du bord combinatoire dans le produit des bords des arbres.

L'objectif est double : on va utiliser ces constructions pour mettre en valeur la dichotomie entre immeubles affines et immeubles non-affines, dans le prolongement de [MV00, NV02]. Ainsi, on va voir (théorème 7.1.5) que, dans le cas des groupes de Coxeter affines, les arbres que l'on obtient sont des droites ; tandis que dans le cas non-affine, on obtient au moins un arbre épais.

La seconde utilisation de ces arbres sera, dans la continuité de [DJ99], de démontrer la moyennabilité à l'infini des groupes agissant sur des immeubles (et pas seulement sur des complexes de Coxeter). L'idée est ici que la notion de quartier (définie à la section 3.2.3) permet de se ramener à travailler dans un appartement. Les quartiers d'un appartement seront alors plongés dans des quartiers dans un produit d'arbres, c'est-à-dire dans un quadrant de  $\mathbb{Z}^n$  (dans lequel il est beaucoup plus facile de travailler).

Ce chapitre est adapté de l'article [Léc09a], il apparaît également (un peu différemment) dans l'article [Léc09b].

### 5.1 Construction des arbres

Soit  $(W, S)$  un groupe de Coxeter, avec  $S$  fini. On note  $\Sigma$  la réalisation de Davis-Moussong du système de chambre  $\mathbf{W}$ . Par abus de langage, on appelle encore *mur* la réalisation métrique d'un mur de  $\mathbf{W}$ , c'est-à-dire la réunion des facettes correspondant aux parois de ce mur. Un tel mur  $M$  divise  $\Sigma$  en deux composantes connexes, qui sont (si l'on rajoute  $M$ ) les réalisations métriques des racines bordées par  $M$ .

D'autre part,  $W$  est un groupe linéaire : il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $W$  s'injecte dans  $GL_n(\mathbb{C})$  [Bou07a, V.4.4. Corollaire 2] et est par hypothèse de type fini. Par conséquent, le lemme de Selberg [Alp87] s'applique : il existe un sous-groupe  $W_0$  sans torsion, distingué



et d'indice fini dans  $W$ . On va voir que les orbites des murs de  $\Sigma$  donnent naissance à des arbres réguliers.

Le lemme suivant est bien connu, il a été utilisé pour la première fois en géométrie hyperbolique [Mil76] et a été utilisé dans notre contexte par G. Noskov et E. Vinberg :

**Lemme 5.1.1.** *Soit  $g \in W_0$  et soit  $H$  un mur de  $\Sigma$ , de réflexion associée  $r$ . Alors ou bien  $g$  stabilise  $H$ , ou bien  $gH \cap H = \emptyset$ . Dans le premier cas,  $g$  et  $r$  commutent.*

**Référence.** [NV02, Lemma 3.3]. □

Il en découle que les murs constituant la  $W_0$ -orbite d'un mur  $H$  sont deux à deux disjoints. Ils divisent  $\Sigma$  en composantes connexes. Considérons le graphe, noté  $T_{W_0}(H)$  dans la suite, dont les sommets sont ces composantes connexes ; deux tels sommets étant reliés par une arête s'ils sont adjacents. Ainsi, un mur de la  $W_0$ -orbite de  $H$  est représenté par une arête de  $T_{W_0}(H)$ .

Il est clair que  $T_{W_0}(H)$  est connexe. De plus, enlever une arête à  $T_{W_0}(H)$  correspond à enlever un mur de  $\Sigma$ , ce qui le déconnecte ; comme les murs de  $W_0.H$  ne s'intersectent pas, on voit que  $T_{W_0}(H)$  est également divisé en deux composantes connexes. On a ainsi démontré que  $T_{W_0}(H)$  est un arbre. Remarquons que cet arbre n'est pas nécessairement localement fini.

Par construction,  $W_0$  agit transitivement sur les arêtes de cet arbre. De plus, la réflexion par rapport à  $H$  stabilise  $T_{W_0}(H)$  et échange les sommets de l'arête de  $T_{W_0}(H)$  qui correspond à  $H$ . Il s'ensuit que le groupe des automorphismes de  $T_{W_0}(H)$  est transitif sur l'ensemble de sommets de cet arbre, qui est donc homogène.

Enfin, comme  $W_0$  est d'indice fini dans  $W$  et qu'il y a un nombre fini d'orbites de murs par  $W$  (puisque  $W$  agit transitivement sur les chambres et qu'il y a un nombre fini de murs bordant chaque chambre), il y a également un nombre fini d'ensemble d'orbites de murs sous l'action de  $W_0$ . Autrement dit, il existe un ensemble fini de murs  $H_1, \dots, H_l$ , tel que chaque mur de  $\mathbf{W}$  est représenté comme une arête dans exactement un arbre  $T_{W_0}(H_i)$ , pour  $1 \leq i \leq l$ . Notons  $T_i = T_{W_0}(H_i)$ . Il est clair que  $T_i$  ne dépend que du choix de  $W_0$  et pas du mur  $H_i$ .

## 5.2 Encodage du complexe de Coxeter

Dans la section précédente, on a défini un ensemble fini d'arbres  $T_i$ , pour  $1 \leq i \leq l$ . On a également vu que  $W_0$  agit sur chaque  $T_i$ . D'autre part, on peut définir un morphisme  $\rho : W \rightarrow \mathfrak{S}_l$  de la manière suivante : puisque  $W_0$  est distingué dans  $W$ , un élément  $w \in W$  permute les orbites de l'action de  $W_0$  sur l'ensemble des murs ; l'ensemble des orbites est en bijection avec  $\{1, \dots, l\}$ . De plus, l'image d'un mur par  $w$  est également un mur, et par conséquent l'image d'une arête de  $T_i$  est une arête de  $T_{\rho(w)(i)}$ . De plus, l'image de deux arêtes adjacentes dans  $T_i$  sera également composée de deux arêtes adjacentes dans  $T_{\rho(w)(i)}$ . Par conséquent, on obtient une action simpliciale de  $W$  sur la réunion de tous les  $T_i$ . On peut alors définir une action de  $W$  sur  $T_1 \times \dots \times T_l$  en prenant l'action coordonnées par coordonnées.

Soit  $r_i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  la valence de l'arbre homogène  $T_i$ . Remarquons que  $T_i$  est le graphe de Cayley du groupe de Coxeter «libre»  $W^{r_i} \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*r_i}$  ; ce qui nous autorise à parler de

racines dans  $T_i$ , ainsi que de la compactification combinatoire de  $T_i$  (qui coïncide de toute façon avec la compactification usuelle dans le cas des arbres).

**Lemme 5.2.1.** *Il existe une bijection  $W$ -équivariante  $\Psi$  entre l'ensemble  $\Phi(\Sigma)$  des racines de  $\Sigma$  et l'ensemble  $\Phi(T_1 \times \cdots \times T_l)$  des racines de  $T_1 \times \cdots \times T_l$ .*

*Preuve.* Remarquons tout d'abord qu'une racine dans  $T_1 \times \cdots \times T_l$  est en fait un produit de la forme  $\tilde{\alpha}_i := T_1 \times \cdots \times T_{i-1} \times \alpha_i \times T_{i+1} \times \cdots \times T_l$ , où  $\alpha_i$  est une racine dans  $T_i$ . Comme un élément  $w \in W$  agit par permutation des arbres, il envoie une racine de  $T_i$  sur une racine de  $T_{\rho(w)(i)}$  et par conséquent  $W$  agit sur  $\Phi(T_1 \times \cdots \times T_l)$ .

Si  $\alpha$  est une racine de  $\Sigma$  et  $H = \partial\alpha$ , alors il existe un unique  $i$  tel que  $T_{W_0}(H) = T_i$ . Comme  $\alpha$  est une composante connexe de  $\Sigma \setminus H$ , c'est une réunion de composantes connexes de  $\Sigma \setminus W_0.H$ . Ainsi,  $\alpha$  définit un sous-ensemble de  $T_i$ ; ce sous-ensemble est en fait une composante connexe de  $T_i$  privé de l'arête correspondant à  $H$ . Ainsi,  $\alpha$  définit une racine  $\alpha_i$  dans  $T_i$ , et l'on peut donc définir  $\Psi(\alpha)$  comme étant la racine  $\tilde{\alpha}_i$  de  $T_1 \times \cdots \times T_l$ .

On a ainsi défini une application  $\Psi : \Phi(\Sigma) \rightarrow \Phi(T_1 \times \cdots \times T_l)$ . Cette application a un inverse. En effet, soit  $\tilde{\alpha}_i$  est une racine comme ci-dessus, de sorte que  $\alpha_i$  est une racine de  $T_i$ , c'est-à-dire une composante connexe de  $T_i$  privé de l'arête correspondant à un mur  $H$ . Alors l'union de toutes les composantes connexes correspondant à des sommets de  $\alpha_i$  est une composante connexe de  $\Sigma \setminus H$ , et donc est une racine  $\alpha$  de  $\Sigma$ . L'application de  $\Phi(T_1 \times \cdots \times T_l)$  vers  $\Phi(\Sigma)$  ainsi définie est l'inverse de  $\Psi$ .

Il reste à démontrer que  $\Psi$  est équivariante. Pour cela, soit  $\alpha$  une racine de  $\Sigma$  et  $\tilde{\alpha}_i := \Psi(\alpha)$ . Soit  $H = \partial\alpha$ . Alors  $H$  correspond à une arête  $e$  dans un arbre  $T_i$ ; cette arête est par définition le mur bordant la racine  $\alpha_i$  de  $T_i$ . Par conséquent, si  $w \in W$ , le mur  $wH$  correspond à une arête  $we$  dans  $T_j := T_{\rho(w)(i)}$ , qui est également le mur bordant une racine  $\tilde{\beta}_j := w\tilde{\alpha}_i$ . De plus, si  $H'$  est un mur correspondant à une arête  $e'$  contenue dans  $\alpha_i \subset T_i$ , alors le mur  $H'$  lui-même est contenu dans  $\alpha$ . Ainsi, l'arête  $we'$  est contenue dans  $\tilde{\beta}_j$ . Par définition,  $\Psi(w\alpha)$  est la racine de  $T_1 \times \cdots \times T_l$  de frontière  $T_1 \times \cdots \times T_{j-1} \times \{e\} \times T_{j+1} \times \cdots \times T_l$  et qui contient  $we'$ . Il n'y a donc plus qu'un choix possible :  $\Psi(w\alpha)$  est égale à  $\tilde{\beta}_j = w\tilde{\alpha}_i$ , ce qui démontre l'équivariance de  $\Psi$ .  $\square$

Comme une chambre, ou un résidu sphérique, est défini par les racines qui la (ou le) contiennent, on en déduit le lemme suivant.

**Lemme 5.2.2.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter. Alors  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  se plonge de manière  $W$ -équivariante dans  $\text{Res}_{\text{sph}}(T_1 \times \cdots \times T_l) = \text{Res}_{\text{sph}}(T_1) \times \cdots \times \text{Res}_{\text{sph}}(T_l)$ .*

*Preuve.* Soit  $R$  un résidu sphérique de  $\mathbf{W}$ . Au résidu  $R$  correspond une facette de  $\Sigma$ , que l'on note  $|R|$ . Si  $R$  intersecte une racine  $\alpha$ , alors  $|R|$  est contenu dans  $|\alpha|$ ; de plus,  $|R|$  est égal à l'intersection des réalisations métriques de racines qui le contiennent.

Soit  $H$  un mur de  $\Sigma$ . Supposons tout d'abord que  $R$  n'intersecte aucun mur dans  $W_0.H$ . Comme  $|R|$  est connexe, il est contenu dans une unique composante connexe de  $\Sigma \setminus W_0.H$ . On peut donc associer à  $R$  un unique sommet  $\psi_H(R)$  dans  $T_{W_0}(H)$ . Si maintenant  $|R|$  intersecte un mur de  $W_0.H$ , alors il est contenu dans ce mur. D'après le lemme 5.1.1, ce mur est unique. On peut donc associer à  $R$  l'arête de  $T_{W_0}(H)$  qui correspond à ce mur.

On obtient ainsi une application

$$\psi_H : \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \rightarrow \text{Res}_{\text{sph}}(T_{W_0}(H)).$$

Si  $T_i = T_{W_0}(H_i)$ , le produit  $\psi : \psi_{H_1} \times \cdots \times \psi_{H_l}$  est une application de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\Sigma)$  vers  $\text{Res}_{\text{sph}}(T_1) \times \cdots \times \text{Res}_{\text{sph}}(T_l)$ .

Il faut finalement démontrer que  $\psi$  est injective et  $W$ -équivariante. Soit  $\Phi(R)$  l'ensemble des racines contenant  $R$ . On a alors  $\Phi(\psi(R)) = \Psi(\Phi(R))$ . Si  $R \neq S$ , on a  $\Phi(R) \neq \Phi(S)$ , ce qui justifie l'injectivité de  $\psi$ ; l'équivariance de  $\psi$  provient de l'équivariance de  $\Psi$ .  $\square$

On peut également démontrer, dans la continuité de la preuve ci-dessus, que ce plongement s'étend à la compactification combinatoire :

**Lemme 5.2.3.** *Il existe une application injective et  $W$ -équivariante*

$$\phi : \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \rightarrow \mathcal{C}_{\text{sph}}(T_1) \times \cdots \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(T_l),$$

telle que  $\phi|_{\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})} = \psi$ . De plus, l'image par  $\phi$  d'un quartier de  $\mathbf{W}$  est plongée dans un produit de demi-droites.

**Preuve.** Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . On définit  $\phi(\xi)$  par l'ensemble des racines qui le contiennent : on pose  $\Phi(\phi(\xi)) = \Psi(\Phi(\xi))$ . Par construction, la restriction de  $\phi$  à  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  est égale à  $\psi$ .

Il faut démontrer que  $\phi(\xi)$  est bien un élément de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(T_1 \times \cdots \times T_l)$ , autrement dit, qu'il existe une suite de résidus sphériques qui converge vers celui-ci. Soit  $(R_n)$  une suite de résidus sphériques de  $\mathbf{W}$  qui converge vers  $\xi$ . Cela signifie que, pour  $n$  assez grand, on a  $\alpha \in \Phi(R_n)$  et on en déduit que  $\Psi(\alpha) \in \Psi(\Phi(R_n))$ . Cela signifie que  $\Psi(\alpha) \in \Phi(\psi(R_n))$  et par conséquent la suite  $(\psi(R_n))$  converge vers  $\phi(\xi)$ .

Comme ci-dessus, l'équivariance et l'injectivité proviennent de l'équivariance et de l'injectivité de  $\Psi$ .

Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  et soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . Posons  $\psi(x) = (x_1, \dots, x_l)$  et  $\psi(\xi) = (\xi_1, \dots, \xi_l)$ . On sait que  $Q(x, \xi)$  est égal à l'intersection des racines de  $\Phi(\xi) \cap \Phi(x)$ . En particulier, la projection de  $\psi(Q(x, \xi))$  sur  $T_1$  est égale à l'intersection des racines de  $T_1$  contenant à la fois  $x_1$  et  $\xi_1$ . Par conséquent, c'est un quartier dans  $T_1$ . Donc c'est ou bien une demi-droite, ou bien un segment. Comme il en est de même pour chaque arbre, on voit que  $\psi(Q(x, \xi))$  est contenu dans un produit de demi-droites.  $\square$

Si  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(\Sigma)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\Sigma)$ , posons  $\psi(x) = (x_1, \dots, x_l)$  et  $\psi(y) = (y_1, \dots, y_l)$ . Soit  $y$  une chambre dans le quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors  $\psi(y)$  est contenu dans  $\psi(Q(x, \xi))$ , qui est un produit de demi-droites. Par conséquent, la chambre  $y$  est uniquement déterminée par un  $l$ -uplet d'entiers  $d(x_1, y_1), \dots, d(x_l, y_l)$ .

**Définition 5.2.4.** Le  $l$ -uplet d'entiers défini ci-dessus est appelé *position de  $y$  par rapport à  $(x, \xi)$* .

# Chapitre 6

## Classification géométrique des groupes moyennables

Dans ce chapitre, on donne quelques rappels sur les groupes moyennables, et les quelques propriétés dont nous aurons besoin.

On démontre ensuite qu'un groupe d'automorphismes d'immeuble est moyennable si et seulement si son action sur la compactification combinatoire possède une orbite finie. On en donne en fait deux preuves : la première utilise les arbres du chapitre 5, la deuxième provient de l'article [CL09a]. Dans les deux cas, l'argument clé est la propriété d'incidence des quartiers donnée par la proposition 3.2.30.

### 6.1 Notion de groupe moyennable

On donne ici les définitions basiques et quelques propriétés des groupes moyennables. Les références sur ce sujet sont nombreuses, citons notamment [Gre69, Pat88, Wag85] ou [Zim84, Chapter 4]

#### 6.1.1 Définitions équivalentes

**Définition 6.1.1.** Une *moyenne* sur  $G$  est une application linéaire  $m : L^\infty(G) \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est  $G$ -équivariante, positive et de norme 1.

**Définition 6.1.2.** Un groupe  $G$  admettant une moyenne est dit *moyennable*.

*Exemple 6.1.3.* Considérons  $G = \mathbb{Z}$ . Une moyenne sur  $G$  est une *limite de Banach* : c'est une forme linéaire sur  $\ell^\infty(G)$  qui prolonge la limite, et qui reste positive et équivariante. Son existence peut se prouver à l'aide du théorème de Hahn-Banach [Con90, III.§7].

*Exemple 6.1.4.* Un groupe fini est moyennable : il suffit de prendre la moyenne usuelle pour  $m$ . Plus généralement, un groupe compact est moyennable ;  $m$  est alors l'intégration suivant la mesure de Haar normalisée.

*Exemple 6.1.5.* Le groupe libre  $F_2$  à deux générateurs  $a$  et  $b$  n'est pas moyennable. En effet, supposons qu'il existe une moyenne  $m$  sur  $F_2$ . Pour  $x \in \{a, b, a^{-1}, b^{-1}\}$ , notons  $E_x$  l'ensemble des mots réduits commençant par  $x$ . Les fonctions caractéristiques de parties de  $F_2$  sont dans  $\ell^\infty(F_2)$ , on peut donc appliquer par abus de langage  $m$  à une partie de  $F_2$ .

Par additivité de  $m$ , on a alors :  $m(\{e\}) + m(E_a) + m(E_b) + m(E_{a^{-1}}) + m(E_{b^{-1}}) = m(F_2)$ . De plus,  $m(G) = m(E_a) + m(aE_{a^{-1}}) = m(E_a) + m(E_{a^{-1}})$ , par invariance, et de même  $m(G) = m(E_b) + m(E_{b^{-1}})$ . Comme  $m(F_2) = 1$ , on obtient une contradiction.

Il apparaît clairement dans ce dernier exemple qu'une moyenne doit être pensée comme une «mesure», même si ce n'en est pas une à proprement parler (ou plus précisément, pas sur  $G$  : en tant qu'élément du dual de  $L^\infty(G)$ , c'est une mesure sur le compactifié de Stone-Ćech de  $G$ ).

Donnons quelques notations. Si  $X$  est un espace localement compact à base dénombrable de voisinages, on note  $\mathbf{P}(X)$  l'espace des mesures de probabilités sur  $X$  et  $\mathcal{M}(X)$  l'espace des mesures signées sur  $X$ . Ce dernier espace est le dual de l'espace des fonctions continues bornées sur  $X$  ; la norme dual de la norme de la convergence uniforme est appelée *variation totale* et est notée  $\|\cdot\|$ . Le groupe  $G$  agit sur  $\mathcal{M}(C)$  et sur  $\mathbf{P}(X)$  par la formule  $g.\mu(A) = \mu(g^{-1}A)$ .

**Proposition 6.1.6.** *Le groupe  $G$  est moyennable si et seulement si, pour tout compact  $K \subset G$  et  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\mu \in \mathbf{P}(G)$  telle que*

$$\lim_n \|g\mu_n - \mu_n\| < \varepsilon,$$

pour tout  $g \in K$ .

**Référence.** C'est la «condition de Reiter», voir [Gre69, Theorem 3.2.1]. □

Il existe de nombreuses autres définitions équivalentes de la moyennabilité. Toutes ne se généralisent pas aux actions de groupes : la définition que l'on va utiliser est une généralisation de la condition de Reiter. La définition historique des actions moyennables généralise la définition suivante :

**Proposition 6.1.7.** *Un groupe localement compact  $G$  est moyennable si et seulement si, lorsque  $G$  agit continûment et par transformations affines sur tout compact convexe  $K$  d'un espace topologique localement convexe, alors  $G$  a un point fixe dans  $K$ .*

**Référence.** [Gre69, Theorem 3.3.5] □

Cette proposition s'applique principalement au cas où  $K$  est un espace de mesures de probabilités.

*Exemple 6.1.8.* Avec cette définition, la moyennabilité de  $\mathbb{Z}$  –en fait, plus généralement d'un groupe abélien – est équivalente au théorème de Markov-Kakutani [Zim84, Theorem 4.1.2]

## 6.1.2 Propriétés élémentaires

Les groupes moyennables ont des propriétés agréables, qui permettent de fabriquer beaucoup d'exemples à partir de ceux ci-dessus.

**Proposition 6.1.9.** *Une union croissante de groupes moyennables est moyennable.*

**Référence.** [Zim84, Lemma 4.1.14] □

En particulier, il en découle qu'un groupe est moyennable si et seulement si tout ses sous-groupes (topologiquement) de type fini sont moyennables. En particulier, les groupes topologiquement localement finis sont donc des groupes moyennables. D'autre part, on déduit facilement de l'exemple 6.1.3 que les groupes abéliens de type fini sont moyennables ; on en déduit également que tous les groupes abéliens discrets sont moyennables. On peut en fait démontrer que tous les groupes abéliens sont moyennables, comme mentionné dans l'exemple 6.1.8.

**Proposition 6.1.10.** *Soit  $G$  un groupe moyennable. Alors tous les sous-groupes fermés de  $G$  sont moyennables, et tous les quotients de  $G$  également.*

*Référence.* [Zim84, Proposition 4.1.6] □

**Proposition 6.1.11.** *Soit  $G$  un groupe localement compact,  $N$  un sous-groupe fermé normal, et  $Q = G/N$ . Si  $Q$  et  $N$  sont moyennables, alors  $G$  l'est également.*

*Référence.* [Zim84, Proposition 4.1.6] □

Par récurrence sur le nombre d'extensions par des groupes abéliens nécessaires pour dévisser un groupe résoluble, on démontre ainsi que les groupes résolubles sont moyennables.

## 6.2 Groupes moyennables agissant sur des immeubles

Le but de cette section est de caractériser les groupes moyennables agissant sur des immeubles. Avec le théorème 1.4.5, il est facile de prouver qu'un groupe moyennable fixe un point du bord :

**Proposition 6.2.1.** *Soit  $G$  un groupe moyennable agissant proprement par automorphismes sur un immeuble  $X$ . Alors  $G$  a un sous-groupe d'indice fini qui fixe un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ .*

*Preuve.* D'après le théorème 1.4.5,  $G$  a un sous-groupe d'indice fini  $G^*$  qui fixe un point de  $X \cup \partial_{\infty}^{\text{fine}} X$ . L'image de ce point fixe par l'application  $\Theta$  du théorème 4.3.9 est donc un point fixe de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . □

*Remarque 6.2.2.* Si de plus  $X$  est localement fini, alors on en déduit qu'il existe un sous-groupe d'indice fini de  $G$  qui fixe un point de  $\mathcal{C}_1(X)$ . En effet, dans ce cas tous les immeubles  $X^{\xi}$  sont localement finis, et par conséquent leurs résidus sphériques contiennent un nombre fini de chambres. D'après le théorème 4.3.4, on sait que  $G^*$  fixe un point dans un  $\text{Res}_{\text{sph}}(X^{\xi})$  ; on en déduit qu'il existe un sous-groupe d'indice fini de  $G^*$  qui fixe une chambre de  $X^{\xi}$ , c'est-à-dire un point de  $\mathcal{C}_1(X)$ , d'après le théorème 4.3.6.

Intéressons nous maintenant à la réciproque. On va donner deux démonstrations de celle-ci. La première se ramène au cas des arbres, en utilisant le chapitre 5 ; la deuxième est plus directe et s'appuie sur des théorèmes de Caprace et Lytchak [CL09b]. On peut aussi déduire ce théorème du fait que l'action du groupe sur la compactification est moyennable (corollaire 8.2.8). Cette dernière preuve est indépendante de ce qui va suivre dans la fin de ce chapitre, elle provient de l'article [Léc09a] et sera présentée au chapitre 8.

**Théorème 6.2.3.** *Soit  $G$  un groupe localement compact agissant proprement par automorphismes sur un immeuble  $X$  («proprement» signifiant que les stabilisateurs des résidus sphériques sont compacts). Alors le stabilisateur d'un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est un groupe moyennable.*

**Première preuve.**

Quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini de  $G$ , on peut supposer que  $G < \text{Aut}^0(X)$ .

Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Notons  $H = \text{Fix}_G(\xi)$ . Le lemme 4.1.5 donne une description de  $\text{Rad}_{\text{LF}}(H) = D$ , qui est moyennable puisque topologiquement localement fini. D'après la proposition 6.1.11 il s'agit donc de prouver que  $H/D$  est moyennable.

Soit  $A$  un appartement contenant  $\xi$ . On voit  $W$  comme un groupe d'automorphismes de  $A$ . Soit  $g \in H$ . Si  $Q(x, \xi) \subset A$ , alors il existe  $y$  tel que  $Q(y, \xi) \subset Q(gx, \xi) \cap Q(x, \xi)$ . Par conséquent, on voit que  $gA \cap A$  contient  $Q(y, \xi)$ . En particulier, il existe une chambre  $C$  dans  $A$  telle que  $gC \in A$ . Comme  $W$  agit simplement transitivement sur les chambres de  $A$ , il existe un unique  $w \in W$  tel que  $wC = gC$ . Cet élément  $w$  ne dépend pas du choix de  $C$  : c'est aussi la composée de  $g$  avec l'unique isomorphisme de  $gA$  dans  $A$  qui fixe  $gA \cap A$ .

Ceci permet de définir une application  $\phi : H \rightarrow W$ , qui à  $g$  associe l'élément  $w \in W$  défini comme ci-dessus. On vérifie facilement que  $\phi$  est un morphisme de groupes. Soit  $g \in H$  tel que  $\phi(g) = 1$ . Par définition, il existe une chambre  $C$  dans  $A$  qui est fixée par  $g$ . Par conséquent,  $g$  fixe  $Q(C, \xi)$ , donc  $g \in D$ . Réciproquement, il est clair que si  $g \in D$ , alors  $\phi(g) = 1$ . Par conséquent,  $\phi$  définit un morphisme de  $H/D$  vers  $W$ . L'image de ce morphisme est clairement incluse dans  $W' = \text{Fix}_W(\xi)$ .

Pour démontrer le résultat, il suffit donc de vérifier que  $W'$  est moyennable.

On utilise ce qu'on a vu dans le chapitre 5, ce qui nous donne un nombre fini d'arbres  $T_1, \dots, T_l$  et un sous-groupe d'indice fini  $W'_0$  de  $W_0$  qui stabilise chacun d'eux. On voit alors que  $W'_0$  agit sur chaque  $T_i$  en fixant un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(T_i) = \text{Res}_{\text{sph}}(T_i) \cup \partial_\infty T_i$ . Par conséquent, le quotient de  $W'_0$  agissant sur  $T_i$  est moyennable d'après [Neb88, Theorem1] (voir aussi [CL09b] dans le cas où  $T_i$  n'est pas de valence finie).

Ainsi,  $W'_0$  s'obtient comme extension successive du fixateur de tous les  $T_i$  par des groupes moyennables. Comme ce fixateur est trivial, il s'ensuit que  $W'_0$  est moyennable, et par conséquent que  $H$  est moyennable.  $\square$

**Deuxième preuve.**

Soit  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , notons encore  $H = \text{Fix}_G(\xi)$ . On va démontrer par récurrence sur  $\dim(X)$  que  $H$  fixe un point de  $X \cup \partial_\infty^{\text{fine}} X$  ; le théorème 1.4.9 permet alors de conclure.

Si  $\xi \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , alors  $H$  fixe le centre de  $|\xi|$  et il n'y a rien à prouver. Ceci permet également d'initialiser la récurrence, dans le cas où  $X$  est de dimension 0. Supposons donc que  $\xi$  soit à l'infini.

Notons que les réalisations métriques de quartiers combinatoires dans une réalisation  $\text{CAT}(0)$  sont fermées et convexes, comme intersection de racines. Notons  $\mathcal{Q}_\xi$  l'ensemble des quartiers pointant vers  $\xi$ . D'après la proposition 3.2.30, ces quartiers forment une *famille filtrante* de parties fermées convexes (*i.e.*, une intersection finie de quartiers est non vide et contient un quartier). D'autre part, puisque  $\xi$  n'appartient pas à  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , on a  $\bigcap \mathcal{Q}_\xi = \emptyset$ . D'après [CL09b], l'intersection des bords visuels des éléments de  $\mathcal{Q}_\xi$  est non vide et de rayon  $\leq \pi/2$  (pour la métrique de Tits [BH99, Chapter II.9]). Il découle alors de [BL05, Proposition 1.4] que cette intersection admet un barycentre canonique  $\eta \in \partial_\infty X$ , qui est

fixé par  $H$ . En particulier,  $H$  agit sur l'immeuble  $X^\eta$ .

On va alors vérifier que  $H$  fixe un point de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X^\eta)$ . Pour cela, notons que par définition  $\eta$  appartient au bord visuel de tout appartement contenant un quartier pointant vers  $\xi$ . Choisissons un tel appartement  $A$ . Alors  $A$  peut être vu comme un appartement de  $X^\eta$  et ses murs dans  $X^\eta$  sont une partie de ses murs dans  $X$ . D'après le lemme 3.2.24 et le corollaire 3.2.32, le point  $\xi$  détermine un point  $\xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X^\eta)$ . De plus, puisque  $A$  contient un sous-quartier de tout élément de  $\mathcal{Q}_\xi$ , le lemme 3.2.26 implique que  $\xi'$  est uniquement déterminé par  $\xi$ . Par conséquent,  $H$  fixe  $\xi'$ .

Comme  $\dim(X^\eta) < \dim(X)$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence :  $H$  fixe un point dans  $X^\eta \cup \partial_\infty X^\eta$ . Son image par l'application  $\pi_\eta$  est alors un point de  $X_\eta \cup \partial_\infty X_\eta$ , qui est une partie de  $X \cup \partial_\infty X$ .  $\square$





## Chapitre 7

# Dichotomie entre immeubles affines et non affines

Ce chapitre provient d'une traduction de [Léc09b]. Son but est de mettre en valeur la différence existant entre immeubles affines et immeubles non affines.

La première partie explique cette différence au niveau des groupes de Coxeter : un groupe de Coxeter infini est non affine si et seulement s'il possède une «configuration hyperbolique de racines», c'est-à-dire trois racines deux à deux disjointes. Cette configuration a été mise en évidence pour la première fois dans [CR09] dans le but de démontrer la simplicité de certains groupes d'automorphismes d'immeubles non affines. On en donne ici une autre démonstration, plus géométrique.

Cette configuration hyperbolique est ensuite utilisée dans la seconde partie de ce chapitre, dans le cadre général des immeubles. On démontre qu'un groupe d'automorphismes d'immeuble non borné admet un sous-groupe de Gelfand si et seulement si l'immeuble est affine. La stratégie de preuve que l'on suit s'inspire fortement des calculs de J. Parkinson [Par06a], qui démontre la commutativité d'une algèbre analogue pour les immeubles affines, y compris exotiques.

### 7.1 Configurations hyperboliques de racines

On prouve ici l'existence de configurations hyperboliques de racines. La preuve s'appuie avant tout sur l'*alternative de Tits forte*.

#### 7.1.1 Alternative de Tits et existence de racines disjointes

L'alternative de Tits classique [Tit72] affirme qu'un groupe linéaire de type fini, ou bien est virtuellement résoluble, ou bien contient un groupe libre non abélien. On dit qu'une classe de groupe satisfait l'alternative de Tits *forte* si un groupe dans cette classe ou bien est virtuellement abélien, ou bien se surjecte virtuellement sur un groupe libre non abélien. Un des théorèmes principaux de l'article [MV00] est que les groupes de Coxeter satisfont à l'alternative de Tits forte. La dichotomie ainsi mise en évidence est en fait la dichotomie entre groupes de Coxeter affines et non affines :

**Théorème 7.1.1.** *Un groupe de Coxeter non affine, infini et irréductible se surjecte virtuellement sur un groupe libre non abélien.*

**Référence.** Voir [MV00, Corollary 2]. □

Ce théorème a été ensuite généralisé par G. Noskov et E. Vinberg aux sous-groupes des groupes de Coxeter :

**Théorème 7.1.2.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter et  $\Gamma$  un sous-groupe de  $W$ . Alors ou bien  $\Gamma$  est virtuellement abélien, ou bien  $\Gamma$  se surjecte virtuellement sur un groupe libre non abélien.*

**Référence.** Voir [NV02, Theorem 1.1]. □

L'outil principal pour démontrer ces théorèmes est l'usage d'arbres, comme on les a présentés dans le chapitre 5. En effet, pour démontrer que  $W$  est virtuellement abélien, Noskov et Vinberg démontrent le théorème suivant :

**Proposition 7.1.3.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter infini et  $W_0$  un sous-groupe normal d'indice fini et sans torsion de  $W$ . Si, pour tout mur  $H$ , l'arbre  $T_{W_0}(H)$  est une droite, alors  $W_0$  (et donc  $W$ ) est virtuellement abélien.*

**Référence.** Voir [NV02, §5]. □

En combinant cette proposition avec le théorème précédent, on obtient immédiatement :

**Proposition 7.1.4.** *Dans un groupe de Coxeter infini et non affine, il existe trois racines deux à deux disjointes.*

**Preuve.** Soit  $W$  un tel groupe de Coxeter et  $W_0$  comme ci-dessus. Puisque  $W$  n'est pas affine, il n'est pas virtuellement abélien d'après le théorème 7.1.1 et par conséquent il existe un mur  $H$  tel que  $T_{W_0}(H)$  est régulier de valence  $\geq 3$ . Par conséquent, il existe trois racines dans  $T_{W_0}(H)$  qui sont deux à deux disjointes et ces racines sont les images par l'application  $\Psi$  (lemme 5.2.1) de trois racines disjointes de  $W$ . □

## 7.1.2 Uniformité

On va voir dans cette section que la preuve ci-dessus de l'existence de trois racines deux à deux disjointes peut être raffinée, sous une hypothèse d'irréductibilité, pour prouver que l'une de ces racines peut être choisie arbitrairement.

**Théorème 7.1.5.** *Soit  $W$  un groupe de Coxeter irréductible infini et non affine. Soit  $\alpha$  une racine de  $W$ . Alors il existe deux racines  $\beta$  et  $\gamma$  qui sont disjointes et également disjointes de  $\alpha$ .*

**Preuve.** Soit  $W_0$  un sous-groupe normal, d'indice fini et sans torsion de  $W$ . Puisque toute racine de  $W$  apparaît comme une racine dans un certain arbre  $T_{W_0}(H)$ , il s'agit de prouver que  $T_{W_0}(H)$  ne peut jamais être une droite.

Soit  $r$  une réflexion de  $W$  et  $H$  le mur associé. Si  $w \in W$ , alors  $wrw^{-1}$  est une réflexion de mur associé  $wH$ . Comme on l'a vu, l'élément  $w$  envoie l'arbre  $T_{W_0}(H)$  sur l'arbre  $T_{W_0}(wH)$ . Ces deux arbres sont donc isomorphes. On peut donc se contenter de raisonner sur les réflexions à conjugaison près.

Soit  $R$  l'ensemble des réflexions de  $W$  et soit  $R'$  la partie de  $R$  formée des réflexions dont le mur associé  $H$  est tel que  $T_{W_0}(H)$  est une droite. Soit  $R'' = R \setminus R'$ . D'après le théorème 2.1.16, les groupes  $W'$  et  $W''$  engendrés respectivement par  $R'$  et  $R''$  sont des groupes de Coxeter. De plus, l'argument ci-dessus montre que  $R'$  est stable par conjugaison par un élément de  $W$ , de sorte que  $W'$  est distingué dans  $W$ . Il en est de même de  $W''$ . Notons que, d'après la proposition 7.1.4,  $R''$  n'est pas vide et donc  $W'' \neq \{1\}$ .

On va alors utiliser alors un théorème de L. Paris [Par07, Theorem 4.1] : un groupe de Coxeter irréductible et infini ne peut pas s'écrire comme produit de sous-groupes non triviaux. On va prouver que  $W = W' \times W''$ . Comme  $W'' \neq \{1\}$ , cela prouvera que  $W'' = W$  et donc  $R'' = R$ .

Pour démontrer que  $W = W' \times W''$ , commençons par remarquer que  $W'$  et  $W''$  sont tous deux distingués dans  $W$  et engendrent  $W$ . Il suffit donc de prouver que leur intersection est triviale. Posons donc  $A = W' \cap W''$ . Le groupe  $A$  est distingué dans  $W'$  et dans  $W''$ . Commençons par vérifier que  $A$  est fini. Si  $W'_0 = W_0 \cap W'$ , on voit que pour tout mur  $H$  de  $W'$ , l'arbre  $T_{W'_0}(H)$  est en fait une droite. D'après la proposition 7.1.3, le groupe  $W'$  est virtuellement abélien et est donc moyennable.

Soient  $T_1, \dots, T_l$  les arbres construits dans le chapitre 5. Quitte à effectuer une permutation, on peut supposer que la valence de  $T_1, \dots, T_k$  est  $\geq 3$  et que la valence de  $T_{k+1}, \dots, T_l$  est  $\geq 2$  pour un certains  $k < l$ . Par construction,  $W''$  stabilise le produit  $T_1 \times \dots \times T_k$ .

De plus,  $W''$  contient toutes les réflexions par rapport aux murs de ces arbres. Donc, si  $T$  est l'un de ces arbres et est de valence  $r \geq 3$ , alors  $W''$  contient le groupe de Coxeter  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*r}$ . Ce groupe n'est pas moyennable et par conséquent son action sur  $\partial_\infty T$  a des orbites infinies.

Comme  $A$  est moyennable, il possède un sous-groupe d'indice fini qui fixe un point dans la compactification combinatoire  $\mathcal{E}_1(\mathbf{W})$  (voir 6.2.3). Remplaçons  $A$  par un sous-groupe d'indice fini  $A'$  qui fixe ce point et qui de plus stabilise chaque arbre  $T_i$  pour  $i \leq k$ . Soit  $T$  l'un de ces arbres. Comme  $A'$  fixe un point dans  $\mathcal{E}_1(\mathbf{W})$ , on sait que  $A'$  fixe un point dans  $T \cup \partial_\infty T$ . Notons ce point  $\xi$ . Supposons tout d'abord que  $\xi \in \partial_\infty T$ . Alors, pour tout  $w \in W''$ , le groupe  $wAw^{-1}$  fixe le point  $w\xi$  de  $\partial_\infty(wT)$ . Comme l'action de  $\text{Stab}_{W''}(T)$  sur  $\partial_\infty T$  a des orbites infinies, cela signifie que  $A$  fixe un nombre infini de points de  $\partial_\infty T$ . Puisqu'une isométrie hyperbolique de  $T$  fixe seulement deux points de  $\partial_\infty T$  [GdlH90b, Proposition 14], cela signifie que les éléments de  $A$  agissent tous comme des isométries elliptiques de  $T$ . En particulier, toutes ses orbites sont bornées.

De plus, toutes les réflexions de  $W''$  sont associées à des réflexions de l'un de ces arbres  $T_i$ , pour  $i \leq k$ . Ainsi  $W''$  est plongé de manière équivariante dans  $T_1 \times \dots \times T_l$ , de la même manière que dans le chapitre 5. Par conséquent,  $A'$  agit sur  $W''$  en ayant des orbites bornées (c'est-à-dire finies). Par conséquent,  $A'$  fixe donc virtuellement une chambre, et est donc virtuellement trivial. Autrement dit,  $A'$ , et donc  $A$ , est fini.

On a donc prouvé que  $W' \cap W''$  est fini. C'est donc un sous-groupe normal fini de  $W$ . D'après [Par07, Proposition 4.3], le seul tel sous-groupe est  $\{1\}$ .  $\square$

Remarquons que la preuve du théorème 7.1.5, ainsi que le résultat lui-même, permettent de prouver le fait suivant :

**Corollaire 7.1.6.** *Un groupe de Coxeter irréductible infini non affine n'a pas de sous-groupe normal moyennable.*

*Preuve.* On a vu dans la preuve du théorème 7.1.5 que, si tous les arbres  $T_{W_0}(H)$  sont

de valence  $\geq 3$ , alors un sous-groupe moyennable distingué de  $W$  est en fait fini, et donc trivial. D'après le théorème 7.1.5, c'est le cas de tous les groupes de Coxeter irréductibles infinis et non affines.  $\square$

## 7.2 Existence de paires de Gelfand

Dans cette section, on démontre que les algèbres de Hecke de groupes agissant sur des immeubles non affines, par rapport à n'importe quel sous-groupe compact maximal, ne sont jamais commutatives. La preuve consiste tout d'abord à traduire l'expression du produit de convolution en termes géométriques et combinatoires : on démontre que la commutativité du produit de convolution peut s'interpréter comme une égalité entre cardinaux de deux ensembles de chambres. On démontre ensuite que cette égalité n'a jamais lieu dans le cas non affine, en contraste avec l'analyse harmonique classique sur les immeubles de Bruhat-Tits [Mac71].

### 7.2.1 Notations

Soit  $W$  un groupe de Coxeter et  $X$  un immeuble de groupe de Weyl  $W$ . Notons  $\delta$  la  $W$ -distance sur  $X$ . Si  $a$  est une chambre de  $X$ , l'ensemble des chambres  $c$  telles que  $\delta(a, c) = w$  est noté  $\mathcal{C}_w(a)$ .

On munit le groupe  $\text{Aut}(X)$  de la topologie compacte ouverte, définie à la section 2.3.3. Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}^0(X)$ . On suppose que  $G$  agit fortement transitivement sur un système d'appartements de  $X$ .

Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . D'après le lemme du point fixe de Bruhat-Tits,  $K$  est le stabilisateur d'un sommet  $o$  de  $|X|$ . Par transitivité de l'action de  $G$ , le quotient  $G/K$  s'identifie à l'ensemble des sommets de  $X$  de même type que  $o$ . Soit  $\mathbb{A}$  un appartement contenant  $o$  et soit  $W_o$  le stabilisateur du sommet  $o$  dans  $W = \text{Aut}^0(\mathbb{A})$ . C'est un sous-groupe sphérique maximal de  $W$ .

Comme  $X$  est localement fini,  $G$  est localement compact et donc muni d'une mesure de Haar  $dg$ . On suppose que  $dg$  est normalisée de sorte que  $\text{Vol}(K, dg) = 1$ , ce qui est possible puisque  $K$  est compact et ouvert.

Soit  $\mathcal{L}(G, K)$  l'espace des fonctions à support compact de  $G$  dans  $\mathbb{C}$  qui sont bi- $K$ -invariantes, c'est-à-dire telles que

$$\forall k, k' \in K \quad \forall g \in G \quad f(kgk') = f(g).$$

C'est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ , dont une base est donnée par l'ensemble des fonctions caractéristiques de classes de  $K \backslash G / K$ . Le produit de convolution

$$(f * f')(g) = \int_G f(gh) f'(h^{-1}) dh = \int_G f(h) f'(h^{-1}g) dh$$

en fait une algèbre associative. On l'appelle *algèbre de Hecke* de  $G$  relativement à  $K$  et on la note  $\mathcal{L}(G, K)$ .

Dans le contexte classique où  $\mathbb{G}$  est un groupe algébrique semi-simple sur un corps local  $k$ , le groupe topologique  $G$  est le groupe des points  $k$ -rationnels  $\mathbb{G}(k)$  et  $X$  est l'immeuble

de Bruhat-Tits de  $\mathbb{G}$  sur  $k$ . L'algèbre  $\mathcal{L}(G, K)$  est alors un objet basique dans l'étude de l'analyse harmonique sphérique de  $G$  [Sat63, Mac71].

Les fonctions dans  $\mathcal{L}(G, K)$  peuvent également être vues comme des fonction sur  $G/K$  qui sont invariantes à gauche. Par conséquent, on peut les voir comme des fonctions sur l'ensemble des sommets de même type que  $o$  qui sont constantes sur les  $K$ -orbites de sommets.

Soit  $x \in G$  et  $\lambda \in G$ . On pose  $V_\lambda(x) = xK\lambda K$ . Il est clair que  $V_\lambda(x)$  ne dépend que de la classe de  $\lambda$  dans  $K \backslash G / K$  et de la classe de  $x$  dans  $G / K$ . Par conséquent, on peut également écrire  $V_\mu(y)$  lorsque  $\mu$  et  $y$  sont deux sommets du même type que  $o$  dans l'immeuble  $X$ . De plus, comme  $V_\lambda(x)$  est invariant par multiplication à droite par un élément de  $K$ , l'ensemble  $V_\lambda(x)$  peut être vu comme un ensemble de sommets dans l'immeuble  $X$ . Géométriquement, il faut penser à  $V_\lambda(x)$  comme à une sphère dans  $X$  centrée en  $x$  et de « rayon »  $\lambda$ . Quand  $x = o$ , on obtient exactement la  $K$ -orbite de  $\lambda$ . Notons également que  $y \in V_\lambda(x)$  si et seulement si  $x \in V_{\lambda^{-1}}(y)$ .

Comme l'action de  $G$  est fortement transitive, pour tout sommet  $\lambda \in G / K$  il existe un sommet  $\mu$  dans l'appartement  $\mathbb{A}$  tel que  $V_\lambda(x) = V_\mu(x)$ . Remarquons qu'un sommet de  $\mathbb{A}$  de même type que  $o$  peut être pensé comme un élément de  $W / W_o$ . Ainsi, on peut écrire  $V_\lambda(x)$ , lorsque  $\lambda$  et  $x$  sont des éléments de  $W / W_o$ , ou même des éléments de  $W$ .

Enfin, l'étoile d'un sommet  $x$  est définie comme étant le résidu formé de l'ensemble des chambres contenant  $x$ . On la note  $\text{st}(x)$ .

### 7.2.2 Expression géométrique du produit de convolution

Dans cette section, on traduit l'expression du produit de convolution en un comptage de nature géométrique.

**Lemme 7.2.1.** *Soient  $\lambda, \mu \in G$ . Soient  $f$  et  $g$  les fonctions caractéristiques de  $K\lambda K$  et  $K\mu K$  respectivement. Alors, pour tout  $x \in G / K$ , on a*

$$(f * g)(x) = |V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)|.$$

*Preuve.* Comme  $K$  est compact et ouvert dans  $G$ , l'espace quotient  $G / K$  est discret, et la mesure  $G$ -invariante sur  $G / K$  est la mesure de comptage. On obtient donc

$$(f * g)(x) = \int_G f(h)g(h^{-1}x) dh = \sum_{h \in G / K} \int_K f(hk)g(k^{-1}h^{-1}x) dk.$$

Puisque  $f$  et  $g$  sont bi- $K$ -invariantes, en utilisant le fait que  $dg$  est normalisée de sorte que  $\text{Vol}(K, dg) = 1$ , on déduit que  $(f * g)(x) = \sum_{h \in G / K} f(h)g(h^{-1}x)$ . On obtient finalement :

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \sum_{h \in G / K} f(h)g(h^{-1}x) \\ &= |V_\lambda(o) \cap \{h \in G / K \mid h^{-1}x \in K\bar{\mu}K\}| \\ &= |V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)|, \end{aligned}$$

ce qui finit la preuve. □

Ainsi, vérifier la commutativité de  $\mathcal{L}(G, K)$  revient à vérifier si, pour tout  $\lambda, \mu, x \in G$ , on a  $|V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)| = |V_\mu(o) \cap V_{\lambda^{-1}}(x)|$ .

Pour calculer ce nombre, on va transformer ce dénombrement de sommets en un dénombrement de chambres. Soit  $N$  le nombre de chambres dans l'étoile de  $o$ . Par transitivité de l'action de  $G$ , l'entier  $N$  est également le nombre de chambres dans l'étoile de n'importe quel sommet  $x \in G/K$ . Rappelons que l'ensemble des chambres à  $W$ -distance  $w$  d'une chambre  $a$  est noté  $\mathcal{C}_w(a)$ .

**Lemme 7.2.2.** *Pour tout  $x \in G/K$  et  $\lambda, \mu \in W$ , on a :*

$$|V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)| \leq \frac{1}{N} \sum_{a \in \text{st}(o), b \in \text{st}(x)} \sum_{w_1 \in \lambda W_o} \sum_{w_2 \in \mu^{-1} W_o} |\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b)|.$$

*Preuve.* Soit  $\pi$  l'application qui associe à une chambre de  $X$  l'unique sommet de cette chambre qui est du même type que  $o$ . Alors, par définition, la préimage de  $y \in G/K$  par  $\pi$  est l'étoile de  $y$ , et donc de cardinal  $N$ . Par conséquent, on a l'égalité :

$$N|V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)| = |\pi^{-1}(V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x))|.$$

Choisissons une chambre  $C$  contenant  $o$ . L'ensemble des chambres telles que  $\pi(a) = o$  est égal à  $\text{st}(o)$ ; c'est aussi l'ensemble des chambres dont la  $W$ -distance à  $C$  est dans  $W_o$ . De même, les chambres de  $\mathbb{A}$  contenant  $\lambda.o$  sont les chambres de  $\mathbb{A}$  dont la  $W$ -distance à  $C$  est dans  $\lambda W_o$ . Les chambres  $c$  contenant un sommet de  $V_\lambda(o)$  sont alors les transformés par  $K$  de celles-ci, c'est-à-dire telles qu'il existe  $g \in K$  tel que  $\pi(gc) = \lambda.o$ . En posant  $a = g^{-1}C$ , on voit que l'on a  $\delta(a, c) = \delta(ga, gc) = \delta(C, gc) \in \lambda W_o$ . Par conséquent, si une chambre  $c$  contient un sommet de  $V_\lambda(o)$ , alors il existe une chambre  $a$  contenant  $o$  et un élément  $w_1 \in \lambda W_o$  tel que  $c \in \mathcal{C}_{w_1}(a)$ .

De plus, pour toute chambre  $a \in \text{st}(o)$  et  $w_1 \in \lambda W_o$ , en utilisant la forte transitivité de l'action de  $G$ , on voit que toute chambre  $c \in \mathcal{C}_{w_1}(a)$  est une transformée par  $K$  d'une chambre de  $\mathbb{A}$  telle que  $\delta(a, c) \in \lambda W_o$ , et donc telle que  $\pi(c) \in V_\lambda(o)$ . On a donc :

$$\pi^{-1}(V_\lambda(o)) = \bigcup_{a \in \text{st}(o)} \bigcup_{w_1 \in \lambda W_o} \mathcal{C}_{w_1}(a). \quad (*)$$

En appliquant (\*) avec  $o$  remplacé par  $x$  et  $\lambda$  par  $\mu^{-1}$ , on voit que

$$\pi^{-1}(V_{\mu^{-1}}(x)) = \bigcup_{b \in \text{st}(x)} \bigcup_{w_2 \in \mu^{-1} W_o} \mathcal{C}_{w_2}(b).$$

Il s'ensuit que

$$\pi^{-1}(V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)) = \bigcup_{a \in \text{st}(o), b \in \text{st}(x)} \bigcup_{w_1 \in \lambda W_o} \bigcup_{w_2 \in \mu^{-1} W_o} \mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b),$$

ce qui implique l'inégalité du lemme. □

### 7.2.3 Non-commutativité dans le cas non affine

On suppose pour cette section que  $W$  est infini et non affine. On va prouver que  $\mathcal{L}(G, K)$  n'est pas commutative. Pour ce faire, on va trouver  $\lambda, \mu$  et  $x$ , choisis dans  $W$ , tels que  $|V_\lambda(o) \cap V_{\mu^{-1}}(x)| = 0$  tandis que  $|V_\mu(o) \cap V_{\lambda^{-1}}(x)| \neq 0$ .

On va en fait prendre  $\mu = x\lambda^{-1}$ . Alors  $V_\mu(o) \cap V_{\lambda^{-1}}(x)$  contient  $\mu.o$ , et n'est donc pas vide. Notre but est donc de choisir  $x$  et  $\lambda$  tels que  $V_\lambda(o) \cap V_{x\lambda^{-1}}(x)$  est vide.

En utilisant le lemme 7.2.2, il s'agit de trouver  $x$  et  $\lambda$  tels que, pour toutes chambres  $a$  et  $b$  contenant  $o$  et  $x$  respectivement, et pour tout  $w_1 \in \lambda W_o$  et  $w_2 \in \mu^{-1}W_o$ , on ait  $\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b) = \emptyset$ . Pour cela, on doit estimer la  $W$ -distance entre  $a$  et  $b$ . On va en fait choisir  $\lambda$  comme étant une réflexion de  $W$ .

**Lemme 7.2.3.** *Soit  $s \in W$  une réflexion. Soient  $a$  et  $b$  des chambres de  $X$ . Soit  $\mu \in W$ . Supposons qu'il existe  $w_1 \in sW_o$  et  $w_2 \in \mu^{-1}W_o$  tels que  $\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b) \neq \emptyset$ . Alors la  $W$ -distance entre  $a$  et  $b$  appartient à  $W_o\mu \cup sW_o\mu$ .*

*Preuve.* Comme  $G$  agit fortement transitivement sur  $X$ , l'action de  $G$  est également transitive sur l'ensemble des couples de chambres à  $W$ -distance fixée [AB08, Corollary 6.12]. Ainsi,  $|\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b)|$  dépend seulement de la  $W$ -distance  $\delta(a, b)$ . On peut donc supposer  $b \in \mu \text{st}(o)$ .

Soit  $c \in \mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b)$ . Grâce au choix que nous avons fait sur  $b$ , remarquons que

$$\text{st}(o) = \bigcup_{w \in \mu^{-1}W_o} \mathcal{C}_w(b).$$

Par conséquent, on a  $c \in \text{st}(o)$ . De plus,  $\delta(a, c) = sw_0 \in sW_o$ . Par conséquent, il existe une galerie minimale de type  $sw_0$  de  $a$  à  $c$ , avec  $w_0 \in W_o$ . Cette galerie est obtenue par concaténation d'une galerie de type  $s$  de  $a$  à une certaine chambre  $c_0$  et ensuite d'une galerie de type  $w_0$  de  $c_0$  à  $c$ . Ainsi, on obtient  $\delta(c_0, c) = w_0 \in W_o$ , et donc  $c_0 \in \text{st}(o)$ , de sorte que  $c_0 \in \mathcal{C}_w(b)$  pour un  $w \in \mu^{-1}W_o$ .

Ainsi, on a  $\delta(a, c_0) = s$  et  $\delta(c_0, b) \in W_o\mu$ . Par définition de la  $W$ -distance, cela implique que  $\delta(a, b) \in W_o\mu \cup sW_o\mu$ .  $\square$

On peut maintenant conclure :

**Théorème 7.2.4.** *Soit  $X$  un immeuble localement fini et  $G$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(X)$ . Supposons que  $G$  agit transitivement sur  $X$ . Soit  $K$  le stabilisateur dans  $G$  d'un sommet  $o$  de  $X$ . Si le groupe de Weyl de  $X$  est infini non affine, alors l'algèbre  $\mathcal{L}(G, K)$  n'est pas commutative.*

*Preuve.* Soit  $x \in W$  et  $s$  une réflexion de  $W$ . Soient  $a$  une chambre contenant  $o$  et  $b$  une chambre contenant  $x$ . La  $W$ -distance  $\delta(a, b)$  appartient à  $xW_o$ . Soit  $\mu = xs$ , de sorte que  $V_\mu(o) \cap V_s(x)$  contient  $\mu.o$ .

Comme expliqué au début de cette section, et en utilisant le lemme 7.2.2, on prouve la non-commutativité de  $\mathcal{L}(G, K)$  si l'on choisit  $s$  et  $x$  tels que, pour tout  $a \in \text{st}(o)$  et  $b \in \text{st}(x)$ , pour tout  $w_1 \in sW_o$  et  $w_2 \in sx^{-1}W_o$ , on ait  $\mathcal{C}_{w_1}(a) \cap \mathcal{C}_{w_2}(b) = \emptyset$ . D'après le lemme 7.2.3, de tels  $a$  et  $b$  vérifient  $\delta(a, b) \in W_oxs \cup sW_oxs$ . Puisque  $a \in \text{st}(o)$  et  $b \in \text{st}(x)$ , on a de plus  $\delta(a, b) \in xW_o$ . Par conséquent, il suffit de démontrer qu'il existe  $x \in W$  et une réflexion  $s \in W$  tels que  $W_oxs \cap xW_o = \emptyset$  et  $sW_oxs \cap xW_o = \emptyset$ .



Supposons que  $\mathcal{L}(G, K)$  est commutative, de sorte que pour tout  $x$  et  $s$  l'une de ces intersections est non vide. L'idée est de choisir  $x$  et  $s$  en utilisant une configuration hyperbolique de racines, pour obtenir une contradiction.

D'après la proposition 7.1.4, il existe trois racines  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dans  $\mathbb{A}$  deux à deux disjointes. Soit  $W'$  le sous-groupe de  $W$  engendré par les réflexions  $r_1, r_2$  et  $r_3$  par rapport à  $\partial\alpha, \partial\beta$  et  $\partial\gamma$  respectivement. Comme dans le chapitre 5, les murs de  $W'.\partial\alpha$  définissent un arbre dual  $T$ .

Soit  $\phi$  l'application qui à un sommet de  $T$  associe la composante connexe de  $A \setminus W'.\partial\alpha$  qui lui correspond. L'application  $\phi$  induit une autre application  $\phi_\infty$ , de  $\partial_\infty T$  vers l'ensemble des parties de  $\partial_\infty |\mathbb{A}|$ , définie comme suit : pour  $\xi \in \partial_\infty T$ , la partie  $\phi_\infty(\xi)$  est l'ensemble des limites de suites de points  $y_n \in \phi(x_n)$ , où  $(x_n)$  est une suite de sommets de  $T$  qui tend vers  $\xi$ . Alors on voit que, si  $\xi \neq \xi'$ , alors  $\phi_\infty(\xi) \cap \phi_\infty(\xi') = \emptyset$ . En effet, supposons qu'il existe un point  $\eta \in \phi_\infty(\xi) \cap \phi_\infty(\xi')$ . Cela signifierait qu'il existe des suites  $(y_n)$  et  $(z_n)$  de points de  $|\mathbb{A}|$  convergeant vers  $\eta$  et tels que  $\lim_n \phi^{-1}(y_n) = \xi$  et  $\lim_n \phi^{-1}(z_n) = \xi'$ . Cela impliquerait que  $(y_n)$  et  $(z_n)$  restent à distance bornée, et donc que  $(\phi^{-1}(y_n))$  et  $(\phi^{-1}(z_n))$  restent à distance bornée, donc que  $\xi = \xi'$ .

Soit  $\tau \in W' \subset W$  le produit de deux réflexions par rapport à des murs distincts de  $W'.\partial\alpha$ . Comme ces deux murs ne s'intersectent pas,  $\tau$  est un élément hyperbolique de  $\text{Aut}(\mathbb{A})$ . C'est aussi un élément hyperbolique de  $\text{Aut}(T)$ . Par conséquent, il existe  $\xi_1 \in \partial_\infty T$  tel que, pour tout  $y \in T$ , on ait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n y = \xi_1$ . De même, il existe  $\eta \in \partial_\infty |\mathbb{A}|$  tel que l'on ait  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tau^n z = \eta$  pour tout  $z \in |\mathbb{A}|$  (voir la proposition 1.2.8). Par définition, on a  $\eta \in \phi_\infty(\xi_1)$  (Voir figure 7.1)

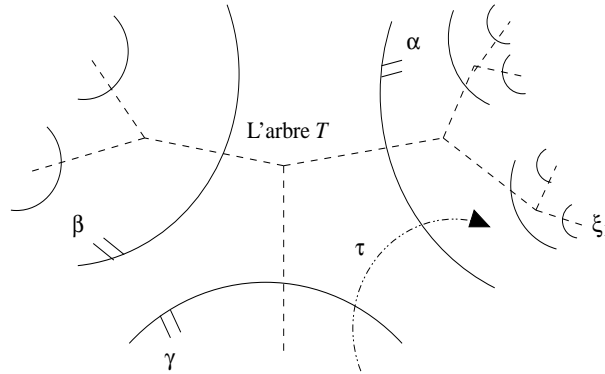


FIG. 7.1 – L'arbre  $T$  et l'isométrie hyperbolique  $\tau$

Comme on a supposé que  $\mathcal{L}(G, K)$  était commutative, on sait que pour toute réflexion  $s$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'une des intersections  $W_o \tau^{-n} \cap \tau^{-n} W_o$  et  $s W_o \tau^{-n} s \cap \tau^{-n} W_o$  n'est pas vide. Comme  $W_o$  est fini, on peut trouver un  $g \in W_o$  et une infinité de  $n$  tels que ou bien  $\tau^{-n} g \in W_o \tau^{-n} s$ , ou bien  $\tau^{-n} g \in s W_o \tau^{-n} s$ . Dans le premier cas, on a  $\tau^{-n} g s \tau^n \in W_o$ , et donc  $g s \tau^n o = \tau^n o$ . Dans le second cas, on obtient  $g s \tau^n o = \tau^n s o$ . En faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ , on obtient dans les deux cas  $g s \eta = \eta$ .

Par conséquent,  $\eta$  et  $s\eta$  sont dans la même  $W_o$ -orbite. Ainsi, on obtiendra la contradiction désirée si l'on choisit  $s$  de façon à ce que ce ne soit pas le cas. L'idée est que les orbites de points dans le bord de  $\mathbb{A}$  contiennent une copie des orbites de l'action de  $W'$  sur le bord de l'arbre  $T$  et ne peuvent donc pas être finies.

Plus précisément, soit  $\Xi = \{\xi_2 \in \partial_\infty T \mid \phi_\infty(\xi_2) \cap W_o \eta \neq \emptyset\}$ . Comme  $W_o$  est fini, cet ensemble est fini. Mais l'ensemble des  $s\xi_1$ , quand  $s$  parcourt l'ensemble des réflexions de  $W'$ , est infini. Par conséquent, il existe un  $s_0 \in W'$  tel que  $s_0\xi_1 \notin \Xi$ . Cela signifie que  $g\eta \notin \phi_\infty(s_0\xi_1)$  pour tout  $g \in W_o$ , c'est-à-dire tel que  $g\eta \notin s_0\phi_\infty(\xi_1)$ . Comme  $\eta \in \phi_\infty(\xi_1)$ , on voit que  $gs_0\eta \neq \eta$  pour tout  $g \in W_o$ , ce qui est la contradiction attendue.  $\square$

**Corollaire 7.2.5.** *Avec les mêmes hypothèses, le groupe  $G$  n'a pas de paire de Gelfand.*

*Preuve.* Soit  $K_0$  un sous-groupe compact. Par le lemme de point fixe (corollaire 1.1.13),  $K_0$  fixe un point de  $|X|$  et par conséquent une facette fermée de  $|X|$ . Il fixe donc un sommet  $o$ , et est donc contenu dans le stabilisateur  $K$  de  $o$ . D'après le théorème 7.2.4, l'algèbre  $\mathcal{L}(G, K)$  n'est pas commutative. Comme  $\mathcal{L}(G, K)$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{L}(G, K_0)$ , l'algèbre  $\mathcal{L}(G, K_0)$  n'est pas non plus commutative et le couple  $(G, K_0)$  n'est pas une paire de Gelfand.  $\square$

Ce théorème est démontré dans [BS06] dans le cas des immeubles fuchsien à angles droits. Plus précisément, U. Bader et Y. Shalom y considèrent un arbre-mur, et son stabilisateur  $H$ , avec la représentation unitaire  $\ell^2(G/H)$  associée. Cette représentation est irréductible car  $H = N_G(H)$ , mais possède une infinité de vecteurs indépendants  $K$ -fixes, pour tout sous-groupe compact  $K$  de  $G$ . Il s'ensuit que  $K$  ne peut pas être un sous-groupe de Gelfand de  $G$  [Mac71, Theorem 1.4.4]



# Chapitre 8

## Moyennabilité d'actions

Ce chapitre concerne les moyennabilités d'actions de groupes. Il est pour l'essentiel traduit de [Léc09a].

Il se compose de deux parties. On commence tout d'abord par des rappels sur la notion de moyennabilité des actions de groupes. On donne ainsi les différentes notions existantes d'actions moyennables et quelques applications.

La seconde partie démontre que l'action d'un groupe sur le bord combinatoire d'un immeuble est moyennable. Ce résultat s'inscrit à la suite de plusieurs preuves de moyennabilités d'actions. Par exemple, les groupes hyperboliques agissent moyennablement sur leur bord [Ada94] ; plus généralement, si le groupe d'isométries d'un espace hyperbolique est cocompact, alors son action sur le bord est moyennable [Kai04]. En particulier, l'action de groupes d'automorphismes d'immeubles hyperboliques sur le bord est moyennable.

Les groupes algébriques sur des corps locaux agissent également moyennablement sur l'immeuble sphérique à l'infini, voir l'exemple 8.1.8. Pour les immeubles affines de type  $\tilde{A}_2$ , ceci a été démontré dans [RS96] et pour les immeubles affines plus généraux dans [Kai05].

Les techniques que l'on utilise ici s'apparentent plus aux preuves de moyennabilités d'actions sur les espaces hyperboliques ; on utilise les propriétés de quartiers et leurs propriétés d'incidences de manière essentielle. Le plongement d'un complexe de Coxeter dans un produit d'arbre, présenté au chapitre 5, est également un outil utile. Ceci n'est peut-être pas très surprenant dans la mesure où un tel plongement a été remarqué et utilisé pour la première fois dans [DJ99] pour démontrer que les groupes de Coxeter admettent une action moyennable sur un espace compact.

### 8.1 Notion d'action moyennable

On définit ici les différentes notions existantes d'actions moyennables : topologiques, universelles et mesurées. On explique rapidement les applications que l'on peut en faire. Enfin, on explique un critère de moyennabilité que l'on va utiliser dans le cas du bord d'un immeuble. La référence principale que l'on utilise est [ADR00].

#### 8.1.1 Définitions

On se place ici dans la situation suivante : un groupe  $G$ , qui est localement compact et métrisable, agit sur un espace  $S$ . Il y a plusieurs notions de moyennabilité pour les actions ;

l'une d'entre elles se place dans un cadre mesuré. Dans ce cas, il existe une mesure  $\mu$  sur  $S$ , qui est quasi-préservée par l'action de  $G$  (i.e. si  $\mu(A) = 0$  alors  $\mu(gA) = 0$  pour tout  $g \in G$ ). Lorsque l'on parlera de moyennabilité topologique, on supposera que  $S$  est un espace topologique localement compact, et que l'action de  $G$  est continue.

Historiquement, la première définition d'une action moyennable se place dans un cadre mesuré. Le passage des groupes aux actions de groupe a été effectué par Zimmer [Zim78]. Il généralisait la propriété de point fixe (proposition 6.1.7). Pour cela, on se donne un fibré d'espaces de Banach sur  $S$  et un compact convexe  $K_s$  dans chaque fibre. La moyennabilité de l'action de  $G$  sur  $S$  est alors équivalente à l'existence d'une section invariante à valeur dans  $K_s$ , pour n'importe quel tel fibré. Les détails peuvent être trouvés dans [Zim84, 4.3]. Dans le cas des groupes discrets, Zimmer montre que cette définition est équivalente à la définition 8.1.1 ci-dessous, qui est une généralisation de la définition 6.1.1 des groupes moyennables. L'équivalence a ensuite été généralisée aux groupes localement compacts dans [AEG94]. La notion de moyenne est alors remplacée par celle d'*espérance conditionnelle* :

**Définition 8.1.1.** Soit  $S$  un espace muni d'une mesure  $\mu$ . Soit  $G$  un groupe localement compact métrisable, agissant sur  $S$  en quasi-préservant  $\mu$ . Une *espérance conditionnelle*  $E : L^\infty(G \times S) \rightarrow L^\infty(S)$  est une application linéaire continue telle que :

- $E$  est de norme 1 ;
- $E(\mathbf{1}_{G \times S}) = \mathbf{1}_S$  ;
- pour toute fonction  $f \in L^\infty(G \times S)$  et toute partie mesurable  $A \subset S$ , on a l'égalité  $E(f(\mathbf{1}_{G \times A})) = m(f)\mathbf{1}_A$ .

L'action de  $G$  sur  $S$  est dite *mesurément moyennable* s'il existe une espérance conditionnelle  $G$ -équivariante (lorsque  $G \times S$  est muni de l'action diagonale  $g.(h, x) = (gh, g.x)$ )

*Exemple 8.1.2.* Supposons que  $G$  est moyennable. Alors, pour tout  $(S, \mu)$ , l'action de  $G$  sur  $S$  est mesurément moyennable. En effet, si  $m$  est une moyenne sur  $G$ , on peut poser  $E(f)(x) = m(f(\cdot, x))$ , pour  $x \in S$  et  $f \in L^\infty(G \times S)$ . Réciproquement, supposons que  $S$  est réduit à un point et que l'action de  $G$  sur  $S$  est moyennable. Dans ce cas, l'espace  $L^\infty(G \times S)$  se réduit à  $L^\infty(G)$  et on voit que l'espérance conditionnelle est en fait une moyenne et  $G$  est donc moyennable.

Si l'on ne précise pas la classe de la mesure  $\mu$ , mais que l'on autorise celle-ci à varier parmi toutes les mesures que l'on peut mettre sur la structure borélienne de  $S$ , on obtient la définition suivante :

**Définition 8.1.3.** Soit  $S$  un espace muni d'une tribu  $\mathcal{T}$ . Soit  $G$  un groupe agissant sur  $S$  de manière borélienne. L'action de  $G$  sur  $S$  est dite *universellement moyennable* si elle est mesurément moyennable pour toute classe de mesure  $\mu$  sur  $(S, \mathcal{T})$ .

La moyennabilité universelle admet encore une fois des définitions équivalentes, elle peut s'exprimer notamment comme une généralisation de la condition de la proposition 6.1.6. Si  $B$  est muni d'une tribu, on note  $\mathbf{P}(B)$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $B$ .

**Proposition 8.1.4.** Soit  $G$  un groupe localement compact agissant continûment sur un espace métrique localement compact  $S$ . S'il existe une suite de fonctions mesurables  $f_n : G \times S \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que, en notant  $dg$  une mesure de Haar sur  $G$ , on ait :

- Pour tout  $x \in S$ ,  $\int_G f_n(h, x) dh = 1$  ;
- pour tout  $g \in G$  et  $x \in S$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_G |f_n(g^{-1}h, g^{-1}x) - f_n(h, x)| dh = 0,$$

alors l'action de  $G$  sur  $S$  est universellement moyennable.

**Référence.** Voir [ADR00, Corollary 3.3.8].  $\square$

Cette dernière condition est facile à généraliser pour obtenir une définition topologique de la moyennabilité :

**Définition 8.1.5.** Soit  $G$  un groupe localement compact métrisable et soit  $S$  un espace topologique localement compact. Supposons que  $G$  agit sur  $S$  continûment. L'action de  $G$  sur  $S$  est dite *topologiquement moyennable* s'il existe une suite de fonctions continues  $\mu_n : S \rightarrow \mathbf{P}(G)$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|g\mu_n(x) - \mu_n(gx)\| = 0,$$

uniformément sur tout compact de  $G \times S$ .

La continuité de  $\mu_n$  s'entend par rapport à la topologie faible-\* sur  $\mathbf{P}(G)$ . Notons que l'on peut en fait prendre  $\mu_n(s)$  comme étant une mesure à densité par rapport à la mesure de Haar de  $G$  [ADR00, Proposition 2.2.13].

Avec ces définitions, il est clair que la moyennabilité topologique implique la moyennabilité universelle (et donc la moyennabilité mesurée). Dans le cas où le groupe  $G$  est discret, la réciproque est vraie :

**Proposition 8.1.6.** *Supposons  $G$  discret, agissant continûment sur un espace localement compact  $S$ . Si l'action de  $G$  sur  $S$  est universellement moyennable, alors elle est topologiquement moyennable.*

**Références.** Voir [AD87, Théorème 4.9] ou [ADR00, Corollary 3.3.8].  $\square$

Notons qu'encore une fois, un groupe est moyennable si et seulement si il agit moyennablement sur un point : c'est la proposition 6.1.6. À partir de là, un moyen simple de démontrer qu'une action est moyennable est fourni par la proposition suivante.

**Proposition 8.1.7.** *Si  $P$  est sous-groupe fermé moyennable d'un groupe  $G$ , alors l'action de  $G$  sur  $G/P$  est moyennable.*

**Preuve.** Cela découle du fait que l'action de  $G$  sur  $G/P$  est «équivalente» à celle de  $P$  sur  $G/G = \{\cdot\}$  (au sens de l'équivalence de groupoïdes définie dans [ADR00, Définition 2.2.15]). La moyennabilité de l'action de  $G$  sur  $G/P$  est alors équivalente à celle de l'action de  $P$  sur  $\{\cdot\}$  [ADR00, Theorem 2.2.17], c'est-à-dire à la moyennabilité de  $P$ .  $\square$

**Exemple 8.1.8.** Le premier exemple non trivial d'action moyennable, qui est dû à Zimmer et qui a motivé l'introduction de la définition, est le suivant. Soit  $G$  un groupe algébrique semisimple défini sur un corps local  $k$ . Alors  $G$  possède un sous-groupe parabolique minimal  $P$ , qui est une extension d'un groupe compact par un groupe résoluble. En particulier,  $P$  est moyennable et l'action de  $G$  sur  $G/P$  est moyennable.

On peut également démontrer plus directement certaines moyennabilités d'actions.

**Exemple 8.1.9.** Soit  $G = F_2$  le groupe libre à deux générateurs,  $T$  son graphe de Cayley (c'est-à-dire l'arbre régulier de valence 4) et  $S = \partial_\infty T$  son bord visuel. Alors l'action de  $G$  sur  $T$  est topologiquement moyennable. L'argument qui suit provient de [Oza06a].

Un élément  $s \in S$  s'identifie à un rayon géodésique partant de  $e$ . On définit alors  $\mu_n(s)$  comme étant la fonction caractéristique normalisée du segment initial de longueur  $n$  de cette géodésique. Soit  $g \in G$ . Alors  $g\mu_n(s)$  est la fonction caractéristique du segment de longueur  $n$  par lequel débute le rayon géodésique de  $g$  à  $gx$ , tandis que  $\mu_n(gs)$  est la fonction caractéristique du segment de  $e$  à  $gx$ . Mais, pour  $n$  assez grand, ces deux segments ont une large intersection, ce qui implique que la différence  $g\mu_n(s) - \mu_n(gs)$  est petite. Plus précisément, on a

$$\|g\mu_n(s) - \mu_n(gs)\| \leq \frac{2\ell(g)}{n},$$

où  $\ell(g)$  est la longueur de  $g$  (c'est-à-dire la longueur du chemin de  $e$  à  $g$ ).

L'argument ci-dessus se retrouve dans la preuve qu'un groupe hyperbolique agit moyennablement sur son bord [Kai04] et dans la preuve qui va suivre de la moyennabilité d'actions sur les bords d'immeubles.

### 8.1.2 Quelques applications

La notion d'action moyennable, ou plutôt ses différentes variantes, est intéressante dans plusieurs domaines. On donne ici, sans trop rentrer dans les détails, quelques-unes de ses applications.

#### 8.1.2. a) Algèbres d'opérateurs

Tout d'abord, elle est utile pour l'étude d'algèbres d'opérateurs. Ce point de vue est notamment développé dans [Oza06a]. Dans ce contexte, on s'intéresse à la moyennabilité topologique d'actions d'un groupe discret  $G$  sur un espace compact  $X$ . On dit que le groupe  $G$  est *moyennable à l'infini* s'il admet une telle action. Être moyennable à l'infini implique notamment qu'un groupe est *grossièrement* plongé dans un espace de Hilbert.

**Définition 8.1.10.** Deux espaces métriques  $(X, d)$  et  $(X', d')$  sont *grossièrement isométriques* s'il existe une application continue  $f : X \rightarrow X'$  et deux applications croissantes  $\rho_{\pm} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  avec  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \rho_{\pm}(r) = +\infty$  telles que  $d(z, f(X)) < +\infty$  pour tout  $z \in X'$  et

$$\rho_-(d(x, y)) \leq d'(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d(x, y)).$$

On démontre alors :

**Théorème 8.1.11.** *Si  $G$  est un groupe discret moyennable à l'infini, alors  $G$  est grossièrement isométrique à une partie d'un espace de Hilbert.*

**Référence.** Voir [HR00]. □

Ce théorème est principalement utile grâce à des travaux de G. Yu : on en déduit la conjecture «grossière» de Baum-Connes et la conjecture de Novikov :

**Théorème 8.1.12.** *Si  $G$  est un groupe discret moyennable à l'infini, alors  $G$  satisfait à la conjecture de Novikov.*

**Référence.** Voir [Yu00]. Pour plus de précisions sur la conjecture de Novikov, on pourra consulter [KL05]. □

Rappelons que la  $C^*$ -algèbre réduite  $C_\lambda^*(G)$  d'un groupe  $G$  est la complétion de l'algèbre  $\mathbb{C}[G]$ , vue comme sous-algèbre des opérateurs bornés de la représentation régulière gauche  $\ell^2(G)$ .

Une  $C^*$ -algèbre  $A$  est dite *exacte* si le produit tensoriel par  $A$ , muni de la norme «minimale» (voir par exemple [WO93, Appendix T]) est un foncteur exact. Elle est dite *nucléaire* si, pour toute  $C^*$ -algèbre  $B$ , il n'existe qu'une seule norme compatible avec  $*$  sur le produit tensoriel  $A \otimes B$ . On démontre alors :

**Théorème 8.1.13.** *La  $C^*$ -algèbre réduite d'un groupe discret  $G$  est nucléaire si et seulement si  $G$  est moyennable ; elle est exacte si et seulement si  $G$  est moyennable à l'infini.*

**Références.** Voir [Lan73] pour la nucléarité et [GK02, Oza00] pour l'exactitude.  $\square$

Dans le cas des groupes d'automorphismes d'immeubles, la conjecture de Novikov est déjà connue : elle découle du fait que les immeubles sont des espaces boliques [BK02], ce qui implique d'après des travaux de G. Kasparov et G. Skandalis [KS03] que leur groupe d'automorphismes vérifie la conjecture de Novikov.

### 8.1.2. b) Cohomologie bornée

La moyennabilité –mesurée, cette fois– d'actions est également utile pour calculer la cohomologie bornée d'un groupe. Les résultats que l'on présente ici sont extraits de [Mon01].

Soit  $E$  un «coefficient  $G$ -module», au sens de [Mon01, Définition 1.2.1]. En particulier, c'est un  $G$ -module de Banach, et est muni de la topologie faible- $*$  ainsi que d'une structure borélienne associée. Si  $S$  est un  $G$ -espace régulier [Mon01, Définition 2.1.1], soit  $L^\infty(S, E)$  l'espace des applications essentiellement bornées de  $S$  vers  $E$ . Cet espace est muni d'une action de  $G$ , donnée par la formule  $(g.f)(s) = gf(g^{-1}s)$ .

On a alors une application  $d : L^\infty(S^n, E)^G \longrightarrow L^\infty(S^{n+1}, E)^G$ , donnée par la formule habituelle :

$$df(x_0, \dots, x_n) = \sum_{j=0}^n (-1)^j f(x_0, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_n),$$

où l'on enlève la variable surmontée d'un chapeau.

On obtient alors le théorème suivant

**Théorème 8.1.14.** *Soit  $G$  un groupe localement compact agissant moyennablement sur un espace mesuré  $S$ . Alors la cohomologie du complexe :*

$$0 \longrightarrow L^\infty(S, E)^G \longrightarrow L^\infty(S^2, E)^G \longrightarrow L^\infty(S^3, E)^G \longrightarrow \dots$$

*est canoniquement et isométriquement isomorphe à la cohomologie continue bornée  $H_{\text{cb}}^\bullet(G, E)$ .*

**Référence.** Voir [Mon01, Theorem 7.5.3].  $\square$



### 8.1.2. c) Applications bord

La moyennabilité d'actions fournit en effet des applications de bord, sous cette forme :

**Théorème 8.1.15.** *Soit  $G$  un groupe localement compact agissant mesurément moyennablement sur un espace  $S$ . Supposons également que  $G$  agit continûment sur un espace compact métrique  $X$ . Alors il existe une application mesurable (presque partout)  $G$ -équivariante de  $S$  vers l'espace  $\mathbf{P}(X)$ .*

*Référence.* Voir [Zim84, Proposition 4.3.9]. □

Ces applications bord sont souvent un premier pas vers des théorèmes de superrigidité, dans la lignée de G. Margulis [Mar91, AB94, BM96].

### 8.1.3 Critère de moyennabilité

Pour démontrer qu'une action est moyennable, il est nécessaire d'exhiber des mesures  $\mu_n(x)$  de  $\mathbf{P}(G)$ . On préfère travailler uniquement sur l'immeuble et non pas sur le groupe, que l'on connaît moins. Pour cela, on va utiliser la proposition suivante, qui est un cas particulier (facile) de [Oza06b, Proposition 11].

**Proposition 8.1.16.** *Soit  $G$  un groupe localement compact métrisable agissant proprement sur un ensemble dénombrable  $D$  et continûment sur un espace métrique  $Y$ .*

*Supposons que, pour tout compact  $Q \subset G$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une application continue  $\zeta : K \rightarrow \mathbf{P}(D)$ , telle que*

$$\sup_{q \in Q} \sup_{x \in K} \|\zeta(qx) - q\zeta(x)\| \leq \varepsilon.$$

*Alors l'action de  $G$  sur  $Y$  est topologiquement moyennable.*

Notons que, puisque  $D$  est dénombrable, la topologie de la norme et la topologie faible-\* coïncident sur  $\mathbf{P}(D)$ ; c'est la topologie que l'on considère.

**Preuve.** Soit  $Q$  une partie compacte de  $G$ ,  $\varepsilon > 0$  and  $\zeta : Y \rightarrow \mathbf{P}(D)$  une application telle que donnée par les hypothèses de l'énoncé.

Soit  $V$  un domaine fondamental pour l'action de  $G$  sur  $D$ . Notons  $v : D \rightarrow V$  la de projection associée. Soit  $a \in D$ ,  $g \in G$  et  $b = ga$ . Soit  $G_a$  le stabilisateur de  $a$ . Par propriété de l'action sur  $D$ ,  $G_a$  est un groupe compact. Notons  $H_a$  la mesure de Haar normalisée sur  $G_a$ , vue comme mesure sur  $G$  à support dans  $G_a$ . Alors  $g.H_a$  est une mesure de probabilités sur  $G$  qui ne dépend que de  $a$  et de  $b := ga$ , on note cette mesure  $H_a^b$ .

Définissons  $\mu : Y \rightarrow \mathbf{P}(G)$  par la formule

$$\mu(x) = \sum_{a \in D} \zeta(x)(a) H_{v(a)}^a.$$

Alors  $\mu$  est continue, puisque  $\|\mu_y - \mu_x\| \leq \|\zeta_y - \zeta_x\|$  et que  $\zeta$  est continue.

De plus, on a, pour  $q \in Q$  et  $x \in Y$ ,

$$q.\mu(x) = \sum_{a \in D} \zeta(x)(a) H_{v(a)}^{qa},$$

car  $q.H_{v(a)}^a = H_{v(a)}^{qa}$ .

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \|q\mu(x) - \mu(qx)\| &= \left\| \sum_{a \in D} \zeta(x)(a)H_{v(a)}^{qa} - \zeta(qx)(a)H_{v(a)}^a \right\| \\ &= \left\| \sum_{a \in D} \zeta(x)(q^{-1}a)H_{v(a)}^a - \zeta(qx)(a)H_{v(a)}^a \right\| \\ &\leq \sum_{a \in D} |\zeta(x)(q^{-1}a) - \zeta(qx)(a)|. \end{aligned}$$

Cette dernière quantité est égale à  $\|\zeta(qx) - q\zeta(x)\|$ , donc est plus petite que  $\varepsilon$  par hypothèse.  $\square$

On va appliquer ce théorème à  $D = \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $Y = \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , pour obtenir :

**Corollaire 8.1.17.** *Soit  $X$  un immeuble localement fini et  $G$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(X)$ . Supposons qu'il existe une suite d'applications continues et  $G$ -équivariantes  $\mu_n : \text{Res}_{\text{sph}}(X) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(X))$  telles que  $\|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(x', \xi)\|$  tende vers 0 uniformément sur  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  pour tout  $x, x' \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Alors l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est topologiquement moyennable.*

*Preuve.* Fixons un résidu sphérique  $x$  et soit  $m_n(\xi) = \mu_n(x, \xi)$ . Alors  $m_n$  est une application continue de  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  vers  $\mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(X))$  et de plus on a

$$\|m_n(g\xi) - g.m_n(\xi)\| = \|\mu_n(x, g\xi) - \mu_n(gx, g\xi)\|.$$

Si  $g$  parcourt un compact de  $G$ , alors  $gx$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs et donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|m_n(g\xi) - g.m_n(\xi)\| = 0$  uniformément sur tout compact de  $G \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . D'après la proposition 8.1.16, cela implique que l'action de  $G$  sur  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est moyennable.  $\square$

Le but est bien sûr maintenant de définir des applications  $\mu_n$  comme dans le corollaire 8.1.17.

## 8.2 Moyennabilité de l'action sur un immeuble compactifié

Dans cette section, on va démontrer l'existence d'applications  $\mu_n$  comme dans le corollaire 8.1.17. Pour ce faire, on procède en deux temps : on définit d'abord  $\mu_n$  sur chaque appartement, puis on recolle les mesures ainsi obtenues.

### 8.2.1 Moyennabilité à l'infini des groupes de Coxeter

Dans cette section, on construit des mesures  $\mu_n$  comme dans le corollaire 8.1.17, dans le cas où  $X$  est un complexe de Coxeter. La construction seule de ces mesures ne suffirait pas pour pouvoir les recoller dans un immeuble plus général ; on a besoin d'informations plus précises. Rappelons que le système de chambres associé à un groupe de Coxeter  $W$  est noté  $\mathbf{W}$ .

**Proposition 8.2.1.** *Il existe une suite d'applications continues et  $W$ -équivariantes*

$$\lambda_n : \mathbf{W} \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{W}),$$

telle que :

- (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ , on a  $\text{Supp}(\lambda_n(x, \xi)) \subset Q(x, \xi)$ .  
(ii) Pour tout  $x, x' \in \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ , on a  $\lim_n \|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(x', \xi)\| = 0$  uniformément en  $\xi$ .

On va diviser la preuve de la proposition 8.2.1 en trois étapes. On traite d'abord le cas où  $\mathbf{W}$  est un arbre régulier. Dans ce cas, la moyennabilité de l'action sur le bord est bien connue, mais il faut être un peu plus précis pour contrôler le support. Ensuite, on utilise ce cas particulier pour traiter les produits d'arbres. On utilise finalement le plongement d'un complexe de Coxeter général dans un produit d'arbres, comme décrit dans la section 5, pour conclure.

### 8.2.1. a) Cas des arbres

Soient  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et  $W = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*r}$ . Alors le système de chambres  $\mathbf{W}$  s'identifie à un arbre régulier  $T$  de valence  $r$ ;  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  est égal à l'ensemble des arêtes et des sommets de  $T$ . La bordification combinatoire  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(T)$  est égale à la réunion de  $\text{Res}_{\text{sph}}(T)$  avec le bord visuel  $\partial_\infty T$ .

Dans ce cas, la proposition 8.2.1 se reformule de la manière suivante :

**Lemme 8.2.2.** *Soit  $T$  un arbre régulier de valence  $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . Il existe des applications  $\text{Aut}(T)$ -équivariantes*

$$\lambda_n : \text{Res}_{\text{sph}}(T) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(T) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(T)),$$

telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  et  $\xi \in T \cup \partial_\infty T$  :

- (i) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  et  $\xi \in T \cup \partial_\infty T$ , on a  $\text{Supp}(\lambda_n(x, \xi)) \subset Q(x, \xi)$  ;  
(ii) Pour tout  $x, x' \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$ , on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(x', \xi)\| = 0$  uniformément en  $\xi$ .

Lorsque  $Z$  est un sous-ensemble fini d'un ensemble discret  $Y$ , notons  $m_Z$  la mesure définie sur  $Y$  par  $m_Z(A) = \frac{|A \cap Z|}{|Z|}$ . La preuve de la moyennabilité de l'action sur le bord est inspirée de [Kai04, Theorem 1.33]. Plus précisément, on utilise le lemme suivant, dont la preuve est un simple calcul :

**Lemme 8.2.3.** *Soient  $\{Z_k\}_{k \geq 1}$  et  $\{Z'_k\}_{k \geq 1}$  des suites croissantes d'ensembles finis dans un ensemble  $Y$ . Supposons qu'il existe un entier  $\tau > 0$  tel que, pour tout  $k \geq 1$  :*

$$Z_k \subset Z'_{k+\tau}, \quad Z'_k \subset Z_{k+\tau}. \quad (8.2.1)$$

Définissons les mesures :

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{Z_k}, \quad \lambda'_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{Z'_k}.$$

Alors

$$\|\lambda_n - \lambda'_n\| \leq \frac{2\tau}{n} + \frac{4(n-\tau)}{n} \left[ 1 - \left( \frac{|Z_1|}{|Z_{n+\tau}|} \right)^{\frac{2\tau}{n-\tau}} \right],$$

pour tout  $n > \tau$ .

**Référence.** Voir [Kai04, Lemma 1.35]. □

En particulier, si  $\lim_n |Z_n|^{1/n} = 0$ , alors  $\lim_n \|\lambda_n - \lambda'_n\| = 0$ .

**Preuve du lemme 8.2.2.** Notons  $d$  la distance radicielle sur  $\text{Res}_{\text{sph}}(T)$ ,  $d$  est la distance usuelle sur l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes, tandis qu'un sommet est à distance  $\frac{1}{2}$  des arêtes qui lui sont adjacentes. Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  et  $\xi \in \text{Res}_{\text{sph}}(T) \cup \partial_\infty T$ . Notons que  $Q(x, \xi)$  est alors un segment si  $\xi \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  et une demi-droite sinon.

Si  $\xi \in \partial_\infty T$  et  $k \leq n$ , on définit l'ensemble de résidus suivants :

$$Z(x, \xi, n, k) = \{z \in Q(x, \xi) \mid n - k \leq d(z, x) \leq n + k\}.$$

Si  $\xi \in T$ , on définit de la même manière, pour  $n - d(x, \xi) \leq k \leq n$ ,

$$Z(x, \xi, n, k) = \{z \in [x, \xi] \mid n - k \leq d(z, x) \leq n + k\} \cup \{\xi\},$$

et si  $k \leq n - d(x, \xi)$ , on pose  $Z(x, \xi, n, k) = \{\xi\}$ .

On définit alors  $\lambda_n(x, \xi)$  comme dans le lemme 8.2.3 par une moyenne de Césaro :

$$\lambda_n(x, \xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{Z(x, \xi, n, k)}.$$

Soient  $x$  et  $x'$  des résidus sphériques dans  $T$ ,  $\xi \in T \cup \partial_\infty T$  et  $\tau \geq d(x, x')$ . Alors les suites d'ensembles  $(Z(x, \xi, n, k))_k = 1^n$  et  $(Z(x', \xi, n, k))_k = 1^n$  sont « $\tau$ -sandwichées» au sens de l'équation (8.2.1). En effet, soit  $y \in Z(x, \xi, n, k)$ . Supposons tout d'abord que  $\xi \in \partial_\infty T$  ou que  $k \geq n - d(x, \xi)$ . Alors  $d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y) \leq \tau + n + k$  et  $d(x', y) \geq d(x, y) - d(x, x') \geq n - k - \tau$ . On a donc  $y \in Z(x', \xi, n, k + \tau)$ . Si  $k \leq n - d(x, \xi)$ , alors on a  $y = \xi$ . Mais alors  $d(x', \xi) \geq n - k - \tau$  et on a aussi  $y \in Z(x', \xi, n, k + \tau)$ . On a donc bien l'inclusion  $Z(x, \xi, n, k) \subset Z(x', \xi, n, k + \tau)$ . Par symétrie, on a également  $Z(x', \xi, n, k) \subset Z(x, \xi, n, k + \tau)$ .

On peut donc appliquer le lemme 8.2.3. Comme  $|Z(x, \xi, n, k)| \leq 4k + 1$ , on voit que  $\|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(x', \xi)\|$  tend vers 0. De plus, la convergence est uniforme sur  $\partial_\infty T$ .

La condition (i) du lemme est claire puisque  $Z(x, \xi, n, k) \subset Q(x, \xi)$ . De plus, pour vérifier la continuité de  $\lambda_n$ , il suffit de vérifier la continuité en  $\xi$ . Pour ce faire, on voit que si  $\xi_m \in T \cup \partial_\infty T$  est tel que  $\lim_m \xi_m = \xi$ , alors  $Q(x, \xi_m)$  converge simplement vers  $Q(x, \xi)$  d'après le corollaire 3.2.18. De plus, si  $\xi_m \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  et si  $n \in \mathbb{N}$  et  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(T)$  sont fixés, alors pour  $m$  assez grand, on voit que  $k \geq n - d(x, \xi)$  pour tout  $k$ . Ainsi, pour  $m$  assez grand, on a  $Z(x, \xi_m, n, k) = Z(x, \xi, n, k)$  pour tout  $k$ . Ceci prouve que  $\lambda_n(x, \xi_m) = \lambda_n(x, \xi)$  pour  $m$  assez grand et donc que  $\lambda_n$  est continue.

De plus,  $\lambda_n$  est  $\text{Aut}(T)$ -équivariante : en effet, si  $g \in \text{Aut}(T)$ , on a

$$\begin{aligned} g \cdot \lambda_n(x, \xi) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g \cdot m_{Z(x, \xi, n, k)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n m_{Z(gx, g\xi, n, k)} \\ &= \lambda_n(gx, g\xi). \end{aligned}$$

□

### 8.2.1. b) Cas d'un produit d'arbres

On étend maintenant cette construction au cas où  $\mathbf{W}$  s'identifie à un produit d'arbres  $T_1 \times \cdots \times T_l$ ; autrement dit, lorsque  $W = \prod_{i=1}^l (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*r_i}$ . Notons que dans ce cas, les résidus sphériques de  $\mathbf{W}$  sont des produits de résidus sphériques dans chaque  $T$  et la bordification combinatoire est le produit des bordifications combinatoires de chacun des arbres (exemple 3.2.8).

**Lemme 8.2.4.** *Si  $W = \prod_{i=1}^l (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{*r_i}$ , alors l'affirmation de la proposition 8.2.1 est vraie.*

*Preuve.* Soit  $(x_1, \dots, x_l) \in \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  et  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_l) \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . Le lemme 8.2.2 implique qu'il existe des applications  $\lambda_n^i : \text{Res}_{\text{sph}}(T_i) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(T_i) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(T_i))$  qui satisfont les conditions de la proposition 8.2.1. On définit alors

$$\lambda_n(x, \xi) = \bigotimes_{i=1}^l \lambda_n^i(x_i, \xi_i).$$

Il est clair que  $\lambda_n$  est continue; comme  $Q(x, \xi) = \prod_{i=1}^l Q(x_i, \xi_i)$ , on a bien l'inclusion  $\text{Supp}(\lambda_n(x, \xi)) \subset Q(x, \xi)$ . Il est également clair que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(x', \xi)\| = 0.$$

Enfin, on voit que l'application  $\lambda_n$  est  $\text{Aut}(T_1) \times \cdots \times \text{Aut}(T_l)$ -équivariante et donc  $W$ -équivariante.  $\square$

### 8.2.1. c) Cas d'un complexe de Coxeter général

Dans cette section, on démontre la proposition 8.2.1 pour un groupe de Coxeter  $W$  quelconque.

On a vu dans le chapitre 5 que  $W$  agit sur un produit d'arbres  $\widetilde{\mathbf{W}} = T_1 \times \cdots \times T_l$ . De plus, on sait qu'il existe un sous-groupe d'indice fini  $W_0$  de  $W$  qui stabilise chacun de ces arbres.

Le lemme 8.2.4 fournit alors des applications continues  $W_0$ -équivariantes

$$\widetilde{\lambda}_n : \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(\widetilde{\mathbf{W}})),$$

pour lesquelles la condition (ii) de la proposition 8.2.1 est vérifiée et telles que l'on ait  $\text{Supp}(\widetilde{\lambda}_n(x, \xi)) \subset \widetilde{Q}(x, \xi)$ , où  $\widetilde{Q}(x, \xi)$  est le quartier combinatoire associé à  $(x, \xi)$  dans  $\widetilde{\mathbf{W}}$ .

Comme on veut des mesures sur  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$  et non  $\text{Res}_{\text{sph}}(\widetilde{\mathbf{W}})$ , il faut transformer les mesures ainsi obtenues, de façon à ce que leur support soit vraiment inclus dans  $Q(x, \xi)$ .

Soit  $Y$  une partie convexe de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . Alors  $Y$  est l'intersection des racines qui le contiennent. D'après le lemme 5.2.1, on peut associer à une racine  $\alpha$  de  $\mathbf{W}$  une racine  $\tilde{\alpha} := \Psi(\alpha)$  de  $\widetilde{\mathbf{W}}$ . Définissons  $\widetilde{Y}$  comme étant l'intersection des  $\Psi(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  décrit l'ensemble des racines contenant  $Y$ . Par construction  $\widetilde{Y}$  est une partie convexe de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\widetilde{\mathbf{W}})$ . Remarquons également qu'à l'ensemble  $Q(x, \xi)$  est associé  $\widetilde{Q}(x, \xi)$ , qui est bien le quartier associé à  $(x, \xi)$  dans  $\widetilde{\mathbf{W}}$ , d'après la proposition 3.2.27.

**Lemme 8.2.5.** *Soit  $Y$  une partie convexe non vide de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . Supposons que  $Y$  est contenu dans un quartier  $Q(x, \xi)$ . Alors il existe un opérateur  $S = S_Y : \ell^1(\tilde{Y}) \rightarrow \ell^1(Y)$ , tel que :*

1. *L'opérateur  $S$  est continu de norme 1.*
2. *Si  $Z \subset Y$  est une partie convexe, alors  $S_Z = S_Y|_{\ell^1(\tilde{Z})}$ .*
3. *Si  $f$  est une fonction positive de norme 1, alors  $Sf$  également.*
4. *Si  $g \in W_0$ , alors  $S_{gY} = gS_Y$ .*

**Preuve.** On construit  $S$  par récurrence sur le nombre d'arbres  $l$ . Supposons tout d'abord que  $l = 1$ . Alors, avec les notations des lemmes 5.2.2 et 5.2.3, on voit que  $\tilde{Q}(x, \xi) = Q(\psi(x), \phi(\xi))$  est ou bien une demi-droite, ou bien un segment. Comme  $\tilde{Y}$  est connexe, on peut l'identifier (comme graphe) à un intervalle entier de la forme  $[0, N[$ , où  $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ . On voit ensuite que  $Y$  est un sous-graphe connexe de  $\tilde{Y}$  et est donc de la forme  $[n_1, n_2[$ , avec  $n_1 \in \mathbb{N}$  et  $n_2 \leq N$ .

Si  $f \in \ell^1(\tilde{Y})$ , définissons  $Sf(n_1) = \sum_{k \leq n_1} f(k)$ , puis  $Sf(k) = f(k)$  si  $n_1 < k < n_2 - 1$  et  $Sf(n_2 - 1) = \sum_{n_2 - 1 \leq k < N} f(k)$ , si  $n_2$  est fini.

Remarquons que  $S$  est indépendant des deux choix possibles d'ordre que l'on aurait pu faire sur  $\tilde{Y}$  et ne dépend que de sa structure de graphe. Par conséquent, si  $g \in \text{Aut}(T_1)$ , alors  $S_{gY} = gS_Y$ . Les autres propriétés de  $S$  sont évidentes.

Supposons maintenant  $l$  quelconque. Alors  $\tilde{Q}(x, \xi)$  est un produit de segments et de demi-droites. Comme  $\tilde{Y}$  est convexe, il est également isomorphe, comme graphe, à un produit de segments et de demi-droites. Comme ci-dessus, il est donc isomorphe à un produit de la forme  $[0, N^1[ \times \cdots \times [0, N^l[$ . Soit  $p_i$ , pour  $1 \leq i \leq l$ , la projection de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\tilde{W})$  sur le graphe  $\text{Res}_{\text{sph}}(T_i)$ .

Comme  $Y$  est convexe, tous ses projetés le sont également. Par conséquent, le projeté  $p_1(Y)$  est un sous-graphe connexe de  $[0, N^1[$ , donc est de la forme  $[n_1^1, n_2^1[$ . On définit tout d'abord un opérateur  $R = R_Y : \ell^1(\tilde{Y}) \rightarrow \ell^1([n_1^1, n_2^1[ \times [0, N^2[ \times \cdots \times [0, N^l[)$  par les formules suivantes, où  $z \in [0, N^2[ \times \cdots \times [0, N^l[$  :

$$Rf(n_1^1, z) = \sum_{k \leq n_1^1} f(k, z),$$

$$Rf(n_2^1 - 1, z) = \sum_{n_2^1 < k < N^1} f(k, z)$$

si  $n_2^1$  est fini et finalement

$$Rf(k, z) = f(k, z)$$

si

$$n_1^1 < k < n_2^1 - 1.$$

Encore une fois, il est facile de vérifier que  $R$  vérifie les quatre points demandés. Finalement, si  $k \in [n_1^1, n_2^1[$ , alors  $Y \cap p^{-1}(k) \neq \emptyset$  par définition et cet ensemble est connexe, puisque c'est encore une intersection de racines de  $\mathbf{W}$ . Par récurrence, on dispose d'opérateurs  $S_{Y,k} : \ell^1(\{k\} \times [0, N^2] \times \cdots \times [0, N^l]) \rightarrow \ell^1(p^{-1}(k) \cap Y)$ . On définit alors  $S_Y f(k, z) = S_{Y,k}(R(f)(k, \cdot))(z)$ .

Si  $Z$  est une partie convexe de  $Y$ , par récurrence on voit que si  $p^{-1}(k) \cap Z \neq \emptyset$ , alors  $S_{Z,k}$  est égal à la restriction de  $S_{Y,k}$  à  $\ell^1(p^{-1}(k) \cap \tilde{Z})$ . Donc  $S_Z$  est égal à la restriction de  $S_Y$  à  $\ell^1(\tilde{Z})$ .

Soit  $g \in W_0$ . Alors  $g$  stabilise chaque arbre, de sorte que  $g = (g_1, \dots, g_l) \in \text{Aut}(T_1) \times \dots \times \text{Aut}(T_l)$ . Alors il est clair que  $gR_y = R_{gY}$  et que, si  $x_1$  est le point de  $p_1(Y) \subset T_1$  numéro  $k$ , alors  $gS_{Y,k} = gS_{Y \cap p^{-1}(x_1)} = S_{gY \cap p^{-1}(g_1 x_1)}$  par hypothèse de récurrence, si bien que  $gS_Y = S_{gY}$ .  $\square$

**Preuve de la proposition 8.2.1.** Pour  $(x, \xi) \in \text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W}) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ , soit  $\lambda_n(x, \xi) = S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi))$ . Par construction,  $\lambda_n$  est  $W_0$ -équivariant et  $\text{Supp}(\lambda_n(x, \xi)) \subset Q(x, \xi)$ .

Il reste à vérifier que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)\| = 0,$$

uniformément en  $\xi$ . On sait que c'est déjà le cas pour  $\tilde{\lambda}_n$ . On sait aussi, d'après la proposition 3.2.30, que  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)$  est une partie non vide et convexe de  $\text{Res}_{\text{sph}}(\mathbf{W})$ . Par conséquent, on voit que

$$S_{Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)} = S_{Q(x, \xi)}|_{\ell^1(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi))}.$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)\| &= \lambda_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) \\ &\quad + \lambda_n(y, \xi)(Q(y, \xi) \setminus Q(x, \xi)) + |\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)). \end{aligned} \quad (*)$$

Le troisième terme est facile à estimer :

$$|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) = S_{Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)}(|\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - \tilde{\lambda}_n(y, \xi)|)(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)).$$

Comme  $S$  est continue de norme 1, on voit que

$$|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) \leq |\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - \tilde{\lambda}_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)),$$

qui converge vers 0 uniformément en  $\xi$ .

Il faut maintenant estimer la quantité

$$\lambda_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) = S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi))(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)).$$

En utilisant le fait que

$$S_{Q(x, \xi)}\tilde{\lambda}_n(x, \xi) = S_{Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi)|_{Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)}) + S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi)|_{Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)}),$$

on voit que  $S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi))) \leq \tilde{\lambda}_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi))$ . En utilisant l'équation (\*), avec  $\tilde{\lambda}$  à la place de  $\lambda$ , on voit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\lambda}_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) = 0,$$

de sorte que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) = 0.$$

Par symétrie, on a  $\lim_n \lambda_n(y, \xi)(Q(y, \xi) \setminus Q(x, \xi)) = 0$ . En recollant les morceaux, on voit que la limite lorsque  $n$  tend vers l'infini de  $\|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(y, \xi)\|$  est égale à 0, uniformément en  $\xi$ .

Il faut aussi vérifier la continuité de  $\lambda_n$ . Soient  $\xi, \xi' \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(\Sigma)$ . Comme on sait déjà que  $\tilde{\lambda}_n$  est continue, il s'agit de prouver que si  $\|\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - \tilde{\lambda}_n(x, \xi')\| \leq \varepsilon$ , alors  $\|S_{Q(x, \xi)}\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - S_{Q(x, \xi')}\tilde{\lambda}_n(x, \xi')\|$  n'est pas trop grand. On utilise le même genre d'arguments : comme on a  $\|\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - \tilde{\lambda}_n(x, \xi')\| \leq \varepsilon$ , on sait que  $\tilde{\lambda}_n(x, \xi)|_{\tilde{Q}(x, \xi) \setminus \tilde{Q}(x, \xi')} \leq \varepsilon$  et par conséquent  $S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi)|_{Q(x, \xi) \cap Q(x, \xi')}) \leq \varepsilon$ . La même inégalité est bien sûre vraie pour  $\lambda_n(x, \xi')$ .

De plus, on voit que  $|\tilde{\lambda}_n(x, \xi) - \tilde{\lambda}_n(x, \xi')|(Q(x, \xi) \cap Q(x, \xi')) \leq \varepsilon$ , de sorte que

$$\|S_{Q(x, \xi) \cap Q(x, \xi')}(\lambda_n(x, \xi)|_{Q(x, \xi) \cap Q(x, \xi')} - \lambda_n(x, \xi')|_{Q(x, \xi) \cap Q(x, \xi')})\| \leq \varepsilon,$$

et finalement  $\|\lambda_n(x, \xi) - \lambda_n(x, \xi')\| \leq 3\varepsilon$ , ce qui prouve la continuité de  $\lambda_n$  en  $\xi$  et donc la continuité de  $\lambda_n$ , puisque  $\text{Res}_{\text{sph}}(\Sigma)$  est discret.

La seule chose qui nous reste à faire est de forcer  $\lambda_n$  à être  $W$ -équivariant et pas seulement  $W_0$ -équivariant. Pour ce faire, définissons

$$\mu_n(x, \xi) = \frac{|W_0|}{|W|} \sum_{w \in W/W_0} w\lambda_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi).$$

Comme  $\lambda_n$  est  $W_0$ -équivariant,  $w\lambda_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi)$  ne dépend pas du choix de  $w$  dans une classe de  $W/W_0$  et donc  $\mu_n$  est bien définie. De plus, il est facile de vérifier que  $\mu_n$  est  $W$ -équivariante.

On a également

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\lambda_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi) - \lambda_n(w^{-1}x', w^{-1}\xi)\| = 0$$

uniformément en  $\xi$ , d'où  $\lim_n \|w\lambda_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi) - w\lambda_n(w^{-1}x', w^{-1}\xi)\| = 0$  et finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(x', \xi)\| = 0$$

uniformément en  $\xi$ . Finalement, on a

$$\text{Supp}(w\mu_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi)) \subset wQ(w^{-1}x, w^{-1}\xi) = Q(x, \xi),$$

ce qui prouve (i). □

*Remarque 8.2.6.* Soit  $y$  un résidu sphérique dans  $Q(x, \xi)$  et soit  $\tilde{y} = (y_1, \dots, y_l)$  son image dans  $\text{Res}_{\text{sph}}(T_1) \times \dots \times \text{Res}_{\text{sph}}(T_l)$ . Alors  $\mu_n(x, \xi)(y)$  ne dépend que de la position (définie dans la définition 5.2.4) de  $y$  par rapport à  $(x, \xi)$ . En effet, dans chaque arbre  $T_i$ , la valeur de  $\lambda_n^i(x, \xi)(y_i)$  ne dépend que de la distance entre  $x_i$  et  $y_i$ . Par conséquent,  $\tilde{\lambda}_n(x, \xi)(\tilde{y})$  ne dépend que de la position de  $y$  par rapport à  $(x, \xi)$ . C'est donc également le cas de  $S_{Q(x, \xi)}(\tilde{\lambda}_n(x, \xi))(y) = \lambda_n(x, \xi)(y)$ . Finalement,  $w\lambda_n(w^{-1}x, w^{-1}\xi)(\tilde{y})$  ne dépend que de la position de  $w^{-1}y$  par rapport à  $(w^{-1}x, w^{-1}\xi)$ , c'est-à-dire de la position de  $y$  par rapport à  $(x, \xi)$ .



### 8.2.2 Moyennabilité à l'infini des groupes agissant sur des immeubles

Dans cette section,  $X$  est un immeuble quelconque,  $G = \text{Aut}^0(X)$  son groupe d'automorphismes stricts et  $W$  son groupe de Weyl.

**Théorème 8.2.7.** *Il existe une suite d'applications continues  $G$ -équivariantes*

$$\mu_n : \text{Res}_{\text{sph}}(X) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(X) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(X)),$$

telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\| = 0$$

uniformément sur  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , pour tous résidus  $x, y \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$ .

*Preuve.*

**Construction de  $\mu_n$ .** Soit  $A_0$  un appartement. On choisit des arbres  $T_1, \dots, T_l$  comme dans le chapitre 5, de façon à ce que  $A$  soit plongé dans le produit  $T_1 \times \dots \times T_l$ . Soit  $A$  un autre appartement. Supposons tout d'abord que  $A_0 \cap A$  contienne une chambre  $x$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A_0$  centrée en  $x$ . Alors  $\rho|_{A'}$  est un isomorphisme et on transporte les choix d'arbres pour  $A_0$  vers un choix d'arbres pour  $A$  via la rétraction  $\rho$ . Ce choix d'arbres ne dépend pas du choix de  $x$  dans  $A \cap A_0$ .

Si  $A'$  est un autre appartement, on sait que pour tout  $x \in A'$ ,  $y \in A_0$ , il existe un appartement  $A$  contenant  $x$  et  $y$ . On peut alors transporter de la même façon le choix d'arbre effectué en utilisant la rétraction sur  $A'$  centrée en  $x$ . Encore une fois, le choix effectué ne dépend pas de  $x \in A' \cap A$  et  $y \in A_0 \cap A$ . De plus, il ne dépend pas non plus du choix de  $A$ . En effet, soit  $A''$  un autre appartement. Supposons tout d'abord que  $A'' \cap A$  contienne une chambre  $c$ . Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow & \searrow \\ A' & & A_0 \\ & \searrow & \nearrow \\ & & A'' \end{array}$$

où toutes les flèches sont données par des restrictions de retractions centrées en une chambre des deux appartements. Il s'ensuit que le choix d'arbres effectué par l'intermédiaire de  $A'$  ou de  $A''$  est le même. Si maintenant  $A'' \cap A$  ne contient aucune chambre, alors il existe un appartement  $A'''$  contenant une chambre  $x \in A \cap A'$  et  $y \in A_0 \cap A''$ . D'après la discussion ci-dessus, le choix d'arbres dans  $A'$  donné par  $A'''$  est le même que celui donné par  $A''$  et est également le même que celui donné par  $A$ . Par conséquent,  $A''$  et  $A$  donnent lieu au même choix d'arbres, ce qui prouve que ce choix ne dépend que du choix initial d'arbres que l'on a fait sur  $A_0$ .

À partir d'un choix d'arbres sur un appartement  $A$ , on obtient une application continue  $\lambda_n^A : \text{Res}_{\text{sph}}(A) \times \mathcal{C}_{\text{sph}}(A) \rightarrow \mathbf{P}(\text{Res}_{\text{sph}}(A))$  comme dans la proposition 8.2.1. De plus, si deux appartements  $A$  et  $A'$  sont tels qu'il existe un résidu  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  pour lequel  $Q(x, \xi) \subset A \cap A'$ , alors, en restriction à  $Q(x, \xi)$ , les arbres choisis pour  $A$  et  $A'$  sont les mêmes. Plus précisément, la position d'un résidu  $y$  dans  $Q(x, \xi)$  par rapport à  $(x, \xi)$  est la même, qu'elle soit calculée dans  $A$  ou bien dans  $A'$ . De plus, d'après la remarque 8.2.6,  $\lambda_n(x, \xi)(y)$  ne dépend que de la position de  $y$  par rapport à  $(x, \xi)$ . Par conséquent, si  $B$

est une partie de  $X$ , on voit que  $\lambda_n^A(B) = \lambda_n^A(B \cap Q(x, \xi))$  ne dépend pas du choix de l'appartement  $A$  contenant  $Q(x, \xi)$ .

Ainsi, on peut définir  $\mu_n(x, \xi)$  en posant  $\mu_n(x, \xi)(B) = \lambda_n^A(x, \xi)(B \cap Q(x, \xi))$ , pour tout appartement  $A$  contenant  $Q(x, \xi)$ .

**Équivariance de  $\mu_n$ .** Soit  $g \in G$  et  $F$  une partie de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $x \in \text{Res}_{\text{sph}}(X)$  et  $\xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ . Soit  $A$  un appartement contenant  $Q(x, \xi)$ . On a

$$g.\mu_n(x, \xi)(F) = \lambda_n^A(x, \xi)(g^{-1}F \cap Q(x, \xi)) = g.\lambda_n^A(x, \xi)(F \cap Q(gx, g\xi)).$$

Mais  $g.\lambda_n^A$  est précisément la mesure à support dans  $Q(gx, g\xi)$  définie par la proposition 8.2.1, dans l'appartement  $gA$ , par rapport aux arbres qui sont les images par  $g$  des arbres choisis dans l'appartement  $A$ . Ainsi, il s'agit de prouver que le choix des arbres effectué dans les appartements de  $X$  est invariant par  $G$ .

Soit donc  $A_0$  un appartement,  $A_1 = gA_0$  et  $A_2$  un appartement tel que chacune des intersections  $A_2 \cap A_1$  et  $A_2 \cap A_0$  contienne une chambre. On sait alors qu'il existe un élément  $w$  de  $W$  qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{w} & A_0 \\ g \downarrow & & \downarrow \rho \\ A_1 & \xleftarrow{\rho'} & A_2, \end{array}$$

où  $\rho$  est la rétraction sur  $A_2$  centrée en une chambre de  $A_2 \cap A_0$  et  $\rho'$  la rétraction sur  $A_1$  centrée en une chambre de  $A_1 \cap A_2$ . Ainsi les images des arbres de  $A_0$  par  $g$  sont les mêmes que les images des arbres de  $A_0$  par  $\rho' \circ \rho \circ w$ , qui sont, par définition, les arbres de  $A_1$ . On a donc bien prouvé que le système d'arbres sur  $X$  est  $G$ -invariant.

Par conséquent, la mesure  $g.\lambda_n^A(x, \xi)$  est égale à  $\lambda_n^{gA}(gx, g\xi)$  et on obtient donc  $g.\mu_n(x, \xi) = \mu_n(gx, g\xi)$ .

**Limite de  $\|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\|$ .** Soient  $x$  et  $y$  des résidus sphériques de  $X$ . On veut estimer  $\|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\|$ . Le support de la mesure  $|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)|$  est inclus dans  $Q(x, \xi) \cup Q(y, \xi)$ . Cet ensemble peut être divisé en trois parties disjointes, à savoir :  $Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)$ ,  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)$  et  $Q(y, \xi) \setminus Q(x, \xi)$ . Comme le support de  $\mu_n(x, \xi)$  (respectivement de  $\mu_n(y, \xi)$ ) est inclus dans  $Q(x, \xi)$  (resp.  $Q(y, \xi)$ ), on a :

$$\begin{aligned} \|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\| &= \mu_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) + |\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) \\ &\quad + \mu_n(y, \xi)(Q(y, \xi) \setminus Q(x, \xi)). \end{aligned}$$

On prouve que ces trois termes tendent vers 0. Soit  $A$  un appartement contenant  $Q(x, \xi)$  et  $A'$  un appartement contenant  $Q(y, \xi)$ . D'après la proposition 3.2.30, il existe une chambre  $c \in A \cap A'$ . Soit  $\rho$  la rétraction sur  $A$  centrée en  $c$ . Comme il existe une suite de chambres convergeant vers  $\xi$  et contenues dans  $A \cap A'$  (proposition 3.2.31), on voit que  $\rho$  fixe  $\xi$ . Soit  $y' = \rho(y)$ . Par définition des arbres de  $A'$ , on sait que  $\rho.\lambda_n^{A'}(y, \xi) = \lambda_n^A(\rho(y), \xi)$ .

Comme  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi) \subset A \cap A'$ , on voit que  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi) = Q(x, \xi) \cap Q(y', \xi)$ . On en déduit  $Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi) = Q(x, \xi) \setminus Q(y', \xi)$ . Par conséquent, on a

$$\mu_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) = \lambda_n^A(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) = \lambda_n^A(Q(x, \xi) \setminus Q(y', \xi)).$$

Ensuite, de la même manière que ci-dessus,  $Q(x, \xi) \cup Q(y', \xi)$  peut être découpé en trois parties, et on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)\| &= \lambda_n^A(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y', \xi)) \\ &\quad + |\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y', \xi)) + \lambda_n^A(y', \xi)(Q(y', \xi) \setminus Q(x, \xi)). \quad (**) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\lambda_n^A(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y', \xi)) \leq \|\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)\|.$$

Puisque cette quantité tend vers 0 uniformément en  $\xi$ , il existe une suite de nombres  $\varepsilon_n$  ne dépendant que de  $x$  et  $y$  tels que  $\|\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)\| \leq \varepsilon_n$  et  $\lim_n \varepsilon_n = 0$ . Ainsi, on a  $\mu_n(x, \xi)(Q(x, \xi) \setminus Q(y, \xi)) \leq \varepsilon_n$ .

En échangeant  $x$  et  $y$ , on voit que l'on a également  $\mu_n(y, \xi)(Q(y, \xi) \setminus Q(x, \xi)) \leq \varepsilon_n$ . Il ne reste donc que le deuxième terme, c'est-à-dire  $|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi))$ , à estimer. Puisque  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi) \subset A \cap A'$ , on peut écrire

$$|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) = |\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^{A'}(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)).$$

Comme précédemment, il est plus facile d'évaluer ce terme dans  $A \cap A'$ . Plus précisément, on a :

$$\begin{aligned} |\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^{A'}(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) &= |\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^{A'}(y, \xi)|(\rho^{-1}(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi))) \\ &= |\rho \cdot \lambda_n^A(x, \xi) - \rho \cdot \lambda_n^{A'}(y, \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)) \\ &= |\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi)), \end{aligned}$$

puisque  $\rho$  fixe  $x$  et  $\xi$ .

Comme on l'a déjà vu, on a  $Q(x, \xi) \cap Q(y, \xi) = Q(x, \xi) \cap Q(y', \xi)$ . Par conséquent, la dernière ligne est égale à  $|\lambda_n^A(x, \xi) - \lambda_n^A(y', \xi)|(Q(x, \xi) \cap Q(y', \xi))$ , qui est inférieure à  $\varepsilon_n$  d'après (\*\*).

On obtient donc  $\|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\| \leq 3\varepsilon_n$  et ainsi  $\|\mu_n(x, \xi) - \mu_n(y, \xi)\|$  tend vers 0 uniformément en  $\xi$ .

**Continuité de  $\mu_n$ .** Il suffit de vérifier que  $\mu_n$  est continue par rapport à son deuxième argument. On sait déjà que si  $\xi_k, \xi \in \mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  sont tels que  $\lim_k \xi_k = \xi$ , alors  $Q(x, \xi_k)$  converge simplement vers  $Q(x, \xi)$ , d'après le corollaire 3.2.18.

Soit  $F$  une partie finie de  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Pour  $k$  assez grand, on a donc  $Q(x, \xi_k) \cap F = Q(x, \xi) \cap F$ . Soit  $A_k$  un appartement contenant  $Q(x, \xi_k)$ . D'après la remarque 8.2.6,  $\lambda_n^{A_k}(x, \xi_k)(F \cap Q(x, \xi_k))$  (respectivement  $\lambda_n(x, \xi)(F \cap Q(x, \xi))$ ) ne dépend que de la positions des résidus de  $F \cap Q(x, \xi)$  par rapport à  $(x, \xi)$  dans les arbres choisis de  $A_k$  (resp. de  $A$ ). Par conséquent, ces deux quantités sont les mêmes. On a donc  $\mu_n(x, \xi_k)(F) = \mu_n(x, \xi)(F)$ , ce qui signifie que  $\mu_n(x, \xi_k)$  tend \*-faiblement vers  $\mu_n(x, \xi)$ , ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

**Corollaire 8.2.8.** *Soit  $X$  un immeuble localement fini et  $\Gamma$  un sous-groupe fermé de  $\text{Aut}(X)$  agissant proprement sur  $\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ . Alors l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$  est topologiquement moyennable.*

**Preuve.** Quitte à prendre un sous-groupe d'indice fini de  $\Gamma$ , on peut supposer que le groupe  $\Gamma$  est contenu dans  $\text{Aut}^0(X)$ . Le lemme découle alors du théorème 8.2.7 et du corollaire 8.1.17 □

# Index

- action moyennable
  - mesurément, 108
  - topologiquement, 109
  - universellement , 108
- algèbre de Hecke, 100
- appartement, 39
- axe, 22
  
- bloc de Coxeter, 47
- BN*-paire, 50
- bord raffiné, 24
- bord visuel
  - comme classes de rayons géodésiques, 18
  - comme espace de fonctions , voir compactification de Busemann
- bordification combinatoire
  - maximale, 60
  - minimale, 60
  
- cellule de Coxeter, 47
- chaîne
  - dans un complexe simplicial, 17
  - dans une réalisation d'un système de chambres, 36
- cloison, 35
- compactification combinatoire, voir bordification combinatoire
- compactification de Busemann, 20
- compactification par la topologie de Chaubauty, 76
- complexe simplicial métrique, 17
  
- dimension géométrique, 24
- distance radicielle, 56
  
- ensemble de résidus
  - convexe, 56
  - fermé, 56
- espace  $CAT(\kappa)$ , 14
  
- espace des directions, 24
- facette, 36, 47
- fonction de Busemann , voir horofonction
  
- galerie, 35
- géodésique, 14
- géométrie bornée, 23
- graphe des chambres, 35
- groupe de Coxeter, 29
- groupe de Coxeter
  - affine, 31
  - hyperbolique, 31
  - irréductible, 33
  - sphérique, 31
- groupe de Weyl, 39, 50
- groupe moyennable, 91
- groupe topologiquement localement fini, 25
  
- horoboule, 20
- horofonction, 20
- horosphère, 20
  
- immeuble
  - définition combinatoire, 38
  - définition métrique, 39
- intérieur d'une chambre, 36
- intervalle entre deux résidus, 57
- isométrie
  - elliptique, 21
  - hyperbolique, 21
  - parabolique, 21
  - semi-simple, 21
  
- morphisme de Busemann, 28
- morphisme strict, 35
- mur, 32
  
- plat, 26
- position, 90

- projection
  - d'un point du bord combinatoire, 63
  - d'un résidu, 44
- projection résiduelle, 64
- quartier, 66
- racine, 32
- radical topologiquement localement fini,  
25
- réalisation de Davis-Moussong, 48
- réalisation métrique , voir  $Z$ -réalisation
- réflexion, 32
- représenté, 36, 44
- résidu, 43
- résidu
  - rang d'un, 43
  - sphérique, 43
- rétraction, 41
- sous-groupe parabolique
  - d'un groupe de Coxeter, 33
  - dans une  $BN$ -paire, 52
- structure-miroir, 36
- structure-miroir
  - admissible, 36
- support, 36
- système d'appartements, 45
- système de chambres, 35
- système de chambres
  - localement fini, 35
  - mince, 35
  - épais, 35
- système de Tits, voir  $BN$ -paire
- type, 36
- $W$ -distance, 38
- $Z$ -réalisation, 36

# Index des notations

$\text{Aut}(X)$ , 35	$\overline{X}$ , 18
$\text{Aut}^0(X)$ , 35	$\widehat{X}$ , 20
$\partial_\infty^{\text{fine}} X$ , 24	$X_\xi$ , 23
$\partial_\infty X$ , 18	$Z(\mathcal{C})$ , 36
$B_W(\underline{\lambda})$ , 47	$Z_T$ , 36
$\text{CAT}(\kappa)$ , 14	$\Omega$ , 32
$\mathcal{C}_1(X)$ , 60	
$(X)$ , 76	
$\text{ch}(X)$ , 55	
$\mathcal{C}_{\text{horo}}(X)$ , 81	
$\text{cl}(X)$ , 35	
$\mathcal{C}_{\text{sph}}(X)$ , 60	
$\mathcal{C}_w(a)$ , 100	
$G_\xi$ , 82	
$\mathcal{L}(G, K)$ , 100	
$\mathcal{M}(X)$ , 92	
$\Phi_A(R, S)$ , 56	
$\Phi_A(\xi)$ , 69	
$\pi_\xi$ , 23	
$\mathbf{P}(X)$ , 92, 108	
$\text{proj}_R(C)$ , 44	
$\text{proj}_R(\xi)$ , 63	
$P_W(\underline{\lambda})$ , 47	
$Q(x, \xi)$ , 66	
$[R_1, R_2]$ , 57	
$\text{Rad}_{\text{LF}}(G)$ , 25	
$\text{Res}_{\text{sph}}(X)$ , 55	
$\Sigma_p(X)$ , 24	
$V_\lambda(x)$ , 101	
$W_T$ , 33	
$ X $ , 49	

# Bibliographie

- [AB94] N. A'CAMPO & M. BURGER – « Réseaux arithmétiques et commensurateur d'après G. A. Margulis », *Invent. Math.* **116** (1994), no. 1-3, p. 1–25. 112
- [AB98] S. ADAMS & W. BALLMANN – « Amenable isometry groups of Hadamard spaces », *Math. Ann.* **312** (1998), no. 1, p. 183–195. 26
- [AB08] P. ABRAMENKO & K. S. BROWN – *Buildings. theory and applications*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 248, Springer, New York, 2008. 8, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 49, 51, 53, 78, 103
- [AD87] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE – « Systèmes dynamiques non commutatifs et moyennabilité », *Math. Ann.* **279** (1987), no. 2, p. 297–315. 109
- [Ada94] S. ADAMS – « Boundary amenability for word hyperbolic groups and an application to smooth dynamics of simple groups », *Topology* **33** (1994), no. 4, p. 765–783. 107
- [ADR00] C. ANANTHARAMAN-DELAROCHE & J. RENAULT – *Amenable groupoids*, Monographies de L'Enseignement Mathématique, vol. 36, L'Enseignement Mathématique, Genève, 2000. 107, 109
- [AEG94] S. ADAMS, G. A. ELLIOTT & T. GIORDANO – « Amenable actions of groups », *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), no. 2, p. 803–822. 108
- [Ale51] A. D. ALEKSANDROV – « A theorem on triangles in a metric space and some of its applications », in *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, v 38, Izdat. Akad. Nauk SSSR, Moscow, 1951, p. 5–23. 13
- [Alp87] R. C. ALPERIN – « An elementary account of Selberg's lemma », *Enseign. Math.* **33** (1987), no. 3-4, p. 269–273. 87
- [BH99] M. R. BRIDSON & A. HAEFLIGER – *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 319, Springer-Verlag, Berlin, 1999. 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 94
- [BK02] M. BUCHER & A. KARLSSON – « On the definition of bolic spaces », *Expo. Math.* **20** (2002), no. 3, p. 269–277. 111
- [BL05] A. BALSER & A. LYTCHAK – « Centers of convex subsets of buildings », *Ann. Global Anal. Geom.* **28** (2005), no. 2, p. 201–209. 94
- [BM96] M. BURGER & S. MOZES – « CAT(-1)-spaces, divergence groups and their commensurators », *J. Amer. Math. Soc.* **9** (1996), no. 1, p. 57–93. 7, 112
- [BM99] M. BURGER & N. MONOD – « Bounded cohomology of lattices in higher rank Lie groups », *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)* **1** (1999), no. 2, p. 199–235. 4



- [Bor76] A. BOREL – « Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup », *Invent. Math.* **35** (1976), p. 233–259. 5
- [Bou97] M. BOURDON – « Immeubles hyperboliques, dimension conforme et rigidité de Mostow », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 2, p. 245–268. 3, 41
- [Bou07a] N. BOURBAKI – *Groupes et algèbres de Lie*, Éléments de Mathématique, Springer, 2007. 1, 5, 29, 31, 32, 33, 34, 46, 50, 52, 87
- [Bou07b] —, *Intégration*, Éléments de Mathématique, Springer, 2007. 75
- [BP07] S. BARRÉ & M. PICHOT – « Sur les immeubles triangulaires et leurs automorphismes », *Geom. Dedicata* **130** (2007), p. 71–91. 3
- [Bri91] M. R. BRIDSON – « Geodesics and curvature in metric simplicial complexes », in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, p. 373–463. 17, 18
- [Bri99] —, « On the semisimplicity of polyhedral isometries », *Proc. Amer. Math. Soc.* **127** (1999), no. 7, p. 2143–2146. 21, 22
- [Bro89] K. S. BROWN – *Buildings*, Springer-Verlag, New York, 1989. 16, 64
- [BS87] M. BURGER & V. SCHROEDER – « Amenable groups and stabilizers of measures on the boundary of a Hadamard manifold », *Math. Ann.* **276** (1987), no. 3, p. 505–514. 26
- [BS97] W. BALLMANN & J. ŚWIĄTKOWSKI – « On  $L^2$ -cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes », *Geom. Funct. Anal.* **7** (1997), no. 4, p. 615–645. 3
- [BS06] U. BADER & Y. SHALOM – « Factor and normal subgroup theorems for lattices in products of groups », *Invent. Math.* **163** (2006), no. 2, p. 415–454. 3, 5, 105
- [BT65] A. BOREL & J. TITS – « Groupes réductifs », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1965), no. 27, p. 55–150. 1
- [BT72] F. BRUHAT & J. TITS – « Groupes réductifs sur un corps local », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1972), no. 41, p. 5–251. 1, 5, 8, 13, 16, 40, 45, 49, 65, 72, 77
- [Cap09] P.-E. CAPRACE – « Amenable groups and Hadamard spaces with a totally disconnected isometry group », *Comment. Math. Helv.* **84** (2009), no. 2, p. 437–455. 7, 13, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28
- [CER08] L. CARBONE, M. ERSHOV & G. RITTER – « Abstract simplicity of complete Kac-Moody groups over finite fields », *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 10, p. 2147–2162. 3
- [CF08] P.-E. CAPRACE & K. FUJIWARA – « Rank one isometries of buildings and quasi-morphisms of kac-moody groups », *Preprint* (2008), To appear in GAFA. 4
- [CH09] P.-E. CAPRACE & F. HAGLUND – « On geometric flats in the CAT(0) realization of Coxeter groups and Tits buildings », *Canadian J. Math.* **61** (2009), no. 4, p. 740–761. 83
- [Cha09] C. CHARIGNON – « Compactification polygonale d'un immeuble affine », *Preprint* (2009). 6

- [Che05] C. CHEVALLEY – *Classification des groupes algébriques semi-simples*, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Collected works. Vol. 3, Edited and with a preface by P. Cartier, With the collaboration of Cartier, A. Grothendieck and M. Lazard. 1
- [CL09a] P.-E. CAPRACE & J. LÉCUREUX – « Combinatorial and group-theoretic compactifications of buildings », *Preprint ICJ* **233** (2009), Soumis. 6, 10, 55, 75, 91
- [CL09b] P.-E. CAPRACE & A. LYTCHAK – « At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces », *Preprint* (2009), To appear in *Math. Annalen.* 26, 93, 94
- [CMSZ93] D. I. CARTWRIGHT, A. M. MANTERO, T. STEGER & A. ZAPPA – « Groups acting simply transitively on the vertices of a building of type  $\tilde{A}_2$ . II. The cases  $q = 2$  and  $q = 3$  », *Geom. Dedicata* **47** (1993), no. 2, p. 167–223. 3
- [Con90] J. B. CONWAY – *A course in functional analysis*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990. 91
- [CR09] P.-E. CAPRACE & B. RÉMY – « Simplicity and superrigidity of twin buildings lattices », *Invent. Math.* **176** (2009), p. 169–221. 4, 5, 97
- [Dav98] M. W. DAVIS – « Buildings are CAT(0) », in *Geometry and cohomology in group theory (Durham, 1994)*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 252, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998, p. 108–123. 36, 46, 48, 49
- [Dav08] —, *The geometry and topology of Coxeter groups*, London Mathematical Society Monographs Series, vol. 32, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008. 29, 32, 34, 48
- [Deo89] V. V. DEODHAR – « A note on subgroups generated by reflections in Coxeter groups », *Arch. Math. (Basel)* **53** (1989), no. 6, p. 543–546. 34
- [DJ99] A. DRANISHNIKOV & T. JANUSZKIEWICZ – « Every Coxeter group acts amenably on a compact space », in *Proceedings of the 1999 Topology and Dynamics Conference (Salt Lake City, UT)*, vol. 24, 1999, p. 135–141. 87, 107
- [DJ02] J. DYMARA & T. JANUSZKIEWICZ – « Cohomology of buildings and their automorphism groups », *Invent. Math.* **150** (2002), no. 3, p. 579–627. 3
- [dlH91] P. DE LA HARPE – « An invitation to Coxeter groups », in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, p. 193–253. 30
- [FGN] S. FRANCIINU, H. GIANELLA & S. NICOLAS – *Algèbre 1*, Exercices de mathématiques, oraux X-ENS. 39
- [Gar73] H. GARLAND – «  $p$ -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of  $p$ -adic groups », *Ann. of Math. (2)* **97** (1973), p. 375–423. 3
- [GdlH90a] É. GHYS & P. DE LA HARPE – « L'action au bord des isométries », in *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 135–163. 63
- [GdlH90b] —, « Le bord d'un arbre », in *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov (Bern, 1988)*, Progr. Math., vol. 83, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 103–116. 99
- [GI63] O. GOLDMAN & N. IWAHORI – « The space of  $\mathfrak{p}$ -adic norms », *Acta Math.* **109** (1963), p. 137–177. 40

- [GJT98] Y. GUIVARC'H, L. JI & J. C. TAYLOR – *Compactifications of symmetric spaces*, Progress in Mathematics, vol. 156, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1998. 7
- [GK02] E. GUENTNER & J. KAMINKER – « Exactness and the Novikov conjecture », *Topology* **41** (2002), no. 2, p. 411–418. 111
- [GL05] S. GAUSSENT & P. LITTELMANN – « LS galleries, the path model, and MV cycles », *Duke Math. J.* **127** (2005), no. 1, p. 35–88. 8
- [GP01] D. GABORIAU & F. PAULIN – « Sur les immeubles hyperboliques », *Geom. Dedicata* **88** (2001), no. 1-3, p. 153–197. 3
- [GR06] Y. GUIVARC'H & B. RÉMY – « Group-theoretic compactification of Bruhat-Tits buildings », *Annales scientifiques de l'ENS* **39** (2006), p. 871–920. 7, 10, 26, 62, 75, 79
- [Gre69] F. P. GREENLEAF – *Invariant means on topological groups and their applications*, Van Nostrand Mathematical Studies, No. 16, Van Nostrand Reinhold Co., New York, 1969. 91, 92
- [Gro81] M. GROMOV – « Hyperbolic manifolds, groups and actions », in *Riemann surfaces and related topics : Proceedings of the 1978 Stony Brook Conference (State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1978)*, Ann. of Math. Stud., vol. 97, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1981, p. 183–213. 13
- [Gro87] — , « Hyperbolic groups », in *Essays in group theory*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 8, Springer, New York, 1987, p. 75–263. 13
- [Hae09] T. HAETTEL – « Compactification de Chabauty des espaces symétriques de type non-compact », *Preprint* (2009). 7
- [HP98] F. HAGLUND & F. PAULIN – « Simplicité de groupes d'automorphismes d'espaces à courbure négative », in *The Epstein birthday schrift*, Geom. Topol. Monogr., vol. 1, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1998, p. 181–248 (electronic). 3
- [HR00] N. HIGSON & J. ROE – « Amenable group actions and the Novikov conjecture », *J. Reine Angew. Math.* **519** (2000), p. 143–153. 110
- [Kai04] V. A. KAIMANOVICH – « Boundary amenability of hyperbolic spaces », in *Discrete geometric analysis*, Contemp. Math., vol. 347, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, p. 83–111. 9, 107, 110, 114
- [Kai05] — , « Amenability and the Liouville property », *Israel J. Math.* **149** (2005), p. 45–85, Probability in mathematics. 9, 107
- [Kar67] F. I. KARPELEVIČ – « The geometry of geodesics and the eigenfunctions of the Beltrami-Laplace operator on symmetric spaces », *Trans. Moscow Math. Soc.* **1965** (1967), p. 51–199. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967. 22
- [Kat92] S. KATOK – *Fuchsian groups*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 1992. 63
- [KL97] B. KLEINER & B. LEEB – « Rigidity of quasi-isometries for symmetric spaces and Euclidean buildings », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1997), no. 86, p. 115–197 (1998). 23
- [KL05] M. KRECK & W. LÜCK – *The Novikov conjecture*, Oberwolfach Seminars, vol. 33, Birkhäuser Verlag, Basel, 2005, Geometry and algebra. 110

- [Kle99] B. KLEINER – « The local structure of length spaces with curvature bounded above », *Math. Z.* **231** (1999), no. 3, p. 409–456. 24
- [KP85] V. G. KAC & D. H. PETERSON – « Defining relations of certain infinite-dimensional groups », *Astérisque* (1985), no. Numero Hors Serie, p. 165–208, The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984). 2
- [KS03] G. KASPAROV & G. SKANDALIS – « Groups acting properly on “bolic” spaces and the Novikov conjecture », *Ann. of Math. (2)* **158** (2003), no. 1, p. 165–206. 111
- [Lan73] C. LANCE – « On nuclear  $C^*$ -algebras », *J. Functional Analysis* **12** (1973), p. 157–176. 111
- [Lan96] E. LANDVOGT – *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1619, Springer-Verlag, Berlin, 1996. 6
- [Léc09a] J. LÉCUREUX – « Amenability of actions on the boundary of a building », *Preprint ICJ* **262** (2009), Soumis. 87, 93, 107
- [Léc09b] — , « Hyperbolic configurations of roots and Hecke algebras », *Preprint ICJ* **254** (2009), Soumis. 87, 97
- [Lee00] B. LEEB – *A characterization of irreducible symmetric spaces and Euclidean buildings of higher rank by their asymptotic geometry*, Bonner Mathematische Schriften , 326, Universität Bonn Mathematisches Institut, Bonn, 2000. 7, 13, 22, 23
- [Mac71] I. G. MACDONALD – *Spherical functions on a group of  $p$ -adic type*, Ramanujan Institute, Centre for Advanced Study in Mathematics, University of Madras, Madras, 1971, Publications of the Ramanujan Institute, No. 2. 5, 100, 101, 105
- [Mar91] G. A. MARGULIS – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991. 10, 112
- [Mat88] O. MATHIEU – « Construction du groupe de Kac-Moody et applications », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **306** (1988), no. 5, p. 227–230. 2
- [Mau08] J. MAUBON – « Riemannian symmetric spaces of the non-compact type : differential geometry », in *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, Séminaires et Congrès, vol. 18, Société mathématique de France, 2008. 15
- [Mil76] J. J. MILLSON – « On the first Betti number of a constant negatively curved manifold », *Ann. of Math. (2)* **104** (1976), no. 2, p. 235–247. 88
- [Mon01] N. MONOD – *Continuous bounded cohomology of locally compact groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1758, Springer-Verlag, Berlin, 2001. 10, 111
- [Moo79] C. C. MOORE – « Amenable subgroups of semisimple groups and proximal flows », *Israel J. Math.* **34** (1979), no. 1-2, p. 121–138 (1980). 7
- [Mou] G. MOUSSONG – *Hyperbolic Coxeter groups*, PhD Thesis, Ohio University. 46, 48
- [MV00] G. A. MARGULIS & È. B. VINBERG – « Some linear groups virtually having a free quotient », *J. Lie Theory* **10** (2000), no. 1, p. 171–180. 5, 87, 97, 98
- [Neb88] C. NEBBIA – « Amenability and Kunze-Stein property for groups acting on a tree », *Pacific J. Math.* **135** (1988), no. 2, p. 371–380. 7, 94

- [Nik95] I. NIKOLAEV – « The tangent cone of an Aleksandrov space of curvature  $\leq K$  », *Manuscripta Math.* **86** (1995), no. 2, p. 137–147. 23
- [NV02] G. A. NOSKOV & È. B. VINBERG – « Strong Tits alternative for subgroups of Coxeter groups », *J. Lie Theory* **12** (2002), no. 1, p. 259–264. 5, 87, 88, 98
- [Oza00] N. OZAWA – « Amenable actions and exactness for discrete groups », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **330** (2000), no. 8, p. 691–695. 111
- [Oza06a] —, « Amenable actions and applications », in *International Congress of Mathematicians. Vol. II*, Eur. Math. Soc., Zürich, 2006, p. 1563–1580. 109, 110
- [Oza06b] —, « Boundary amenability of relatively hyperbolic groups », *Topology Appl.* **153** (2006), no. 14, p. 2624–2630. 10, 112
- [Par06a] J. PARKINSON – « Buildings and Hecke algebras », *J. Algebra* **297** (2006), no. 1, p. 1–49. 5, 97
- [Par06b] —, « Spherical harmonic analysis on affine buildings », *Math. Z.* **253** (2006), no. 3, p. 571–606. 8
- [Par07] L. PARIS – « Irreducible Coxeter groups », *Internat. J. Algebra Comput.* **17** (2007), no. 3, p. 427–447. 99
- [Pat88] A. L. T. PATERSON – *Amenability*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 29, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988. 91
- [Pau91] F. PAULIN – « Constructions of hyperbolic groups via hyperbolizations of polyhedra », in *Group theory from a geometrical viewpoint (Trieste, 1990)*, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991, p. 313–372. 15, 17
- [Pau07] —, « De la géométrie et de la dynamique de  $SL_n(\mathbb{R})$  et  $SL_n(\mathbb{Z})$  », in *Sur la dynamique des groupes de matrices et applications arithmétiques*, Ed. Éc. Polytech., Palaiseau, 2007, p. 47–110. 75
- [Pla65] V. P. PLATONOV – « Locally projectively nilpotent radical in topological groups », *Dokl. Akad. Nauk BSSR* **9** (1965), p. 573–577. 25
- [Rémy99] B. RÉMY – « Construction de réseaux en théorie de Kac-Moody », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **329** (1999), no. 6, p. 475–478. 3
- [Rémy02] —, *Groupes de Kac-Moody déployés et presque déployés*, Astérisque, vol. 277, 2002. 2, 36
- [Ron89] M. RONAN – *Lectures on buildings*, Perspectives in Mathematics, vol. 7, Academic Press Inc., Boston, MA, 1989. 33
- [Rou77] G. ROUSSEAU – *Immeubles des groupes réductifs sur les corps locaux*, U.E.R. Mathématique, Université Paris XI, Orsay, 1977, Thèse de doctorat, Publications Mathématiques d’Orsay, No. 221-77.68. 8, 66, 67
- [Rou08] —, « Euclidean buildings », in *Géométries à courbure négative ou nulle, groupes discrets et rigidités*, Séminaires et Congrès, vol. 18, Société mathématique de France, 2008. 40
- [Rou09] —, « Les immeubles, une théorie de Jacques Tits, prix Abel 2008 », *Gazette des mathématiciens* **121** (2009), p. 47–64. 1
- [RR06] B. RÉMY & M. RONAN – « Topological groups of Kac-Moody type, right-angled twinings and their lattices », *Comment. Math. Helv.* **81** (2006), no. 1, p. 191–219. 2, 3

- [RS96] G. ROBERTSON & T. STEGER – «  $C^*$ -algebras arising from group actions on the boundary of a triangle building », *Proc. London Math. Soc. (3)* **72** (1996), no. 3, p. 613–637. 107
- [RTW] B. RÉMY, A. THUILLIER & A. WERNER – « Bruhat-Tits theory from Berkovich’s point of view. II : Satake compactifications », *Preprint ICJ* **268**. 6
- [Sat63] I. SATAKE – « Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over  $p$ -adic fields », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1963), no. 18, p. 5–69. 101
- [Ste68] R. STEINBERG – *Lectures on Chevalley groups*, Yale University, New Haven, Conn., 1968, Notes prepared by John Faulkner and Robert Wilson. 2
- [Tit64] J. TITS – « Algebraic and abstract simple groups », *Ann. of Math. (2)* **80** (1964), p. 313–329. 1
- [Tit70] J. TITS – « Sur le groupe des automorphismes d’un arbre », in *Essays on topology and related topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham)*, Springer, New York, 1970, p. 188–211. 3
- [Tit72] — , « Free subgroups in linear groups », *J. Algebra* **20** (1972), p. 250–270. 97
- [Tit74] — , *Buildings of spherical type and finite BN-pairs*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 386, Springer-Verlag, Berlin, 1974. 1, 2, 51
- [Tit75] — , « On buildings and their applications », in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Vancouver, B. C., 1974)*, Vol. 1, Canad. Math. Congress, Montreal, Que., 1975, p. 209–220. 36
- [Tit79] J. TITS – « Reductive groups over local fields », in *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977)*, Part 1, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 29–69. 2
- [Tit81] J. TITS – « A local approach to buildings », in *The geometric vein*, Springer, New York, 1981, p. 519–547. 34, 35, 38, 46
- [Tit86a] — , « Buildings and group amalgamations », in *Proceedings of groups—St. Andrews 1985* (Cambridge), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 121, Cambridge Univ. Press, 1986, p. 110–127. 3
- [Tit86b] — , « Immeubles de type affine », in *Buildings and the geometry of diagrams (Como, 1984)*, Lecture Notes in Math., vol. 1181, Springer, Berlin, 1986, p. 159–190. 2
- [Tit87] — , « Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields », *J. Algebra* **105** (1987), no. 2, p. 542–573. 2
- [Tit89] — , « Groupes associés aux algèbres de Kac-Moody », *Astérisque* (1989), no. 177-178, p. Exp. No. 700, 7–31, Séminaire Bourbaki, Vol. 1988/89. 2
- [Vin70] È. B. VINBERG – « Geometric representations of Coxeter groups », *Uspehi Mat. Nauk* **25** (1970), no. 2 (152), p. 267–268. 36
- [Wag85] S. WAGON – *The Banach-Tarski paradox*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 24, Cambridge University Press, Cambridge, 1985, With a foreword by Jan Mycielski. 91
- [Wei09] R. M. WEISS – *The structure of affine buildings*, Annals of Mathematics Studies, vol. 168, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2009. 2

- [WO93] N. E. WEGGE-OLSEN – *K-theory and C\*-algebras*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993, A friendly approach. 111
- [Yu00] G. YU – « The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space », *Invent. Math.* **139** (2000), no. 1, p. 201–240. 110
- [Zim78] R. J. ZIMMER – « Amenable ergodic group actions and an application to Poisson boundaries of random walks », *J. Functional Analysis* **27** (1978), no. 3, p. 350–372. 9, 108
- [Zim84] —, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monographs in Mathematics, vol. 81, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984. 91, 92, 93, 108, 112
- [Žuk96] A. ŽUK – « La propriété (T) de Kazhdan pour les groupes agissant sur les polyèdres », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **323** (1996), no. 5, p. 453–458. 3