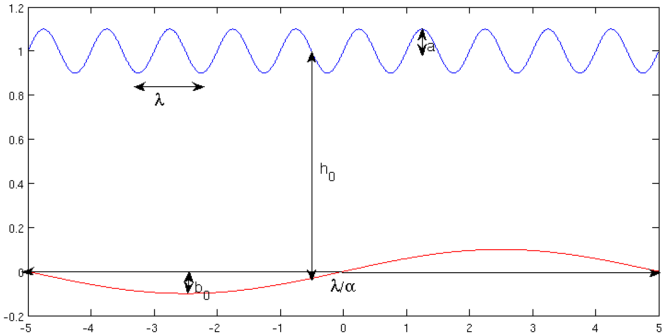
Analyse Mathématique De Problèmes En Océanographie Côtière

SAMER ISRAWI

Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Bordeaux, Université Bordeaux 1

24 mars 2010

Position du problème



$$\mu = \frac{h_0^2}{\lambda^2}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{h_0}, \qquad \beta = \frac{b_0}{h_0}$$

- $z = \varepsilon\zeta(t,x)$,
- $z = -1 + \beta b^{(\alpha)}(x)$,

On suppose que $\mu, \varepsilon, \alpha, \beta$ sont des petits paramètres.

Modèle initial

Problème de Water-Waves: ($d = 1$)

$$\begin{cases} \mu\partial_x^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0, & \text{pour} \quad -1+\beta b^{(\alpha)} < z < \varepsilon\zeta, \\ \partial_z\varphi - \mu\beta\alpha\partial_x b^{(\alpha)}\partial_x\varphi = 0 & \text{pour} \quad z = -1+\beta b^{(\alpha)}, \\ \partial_t\zeta - \dfrac{1}{\mu}(-\mu\varepsilon\partial_x\zeta\partial_x\varphi + \partial_z\varphi) = 0, & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \\ \partial_t\varphi + \dfrac{1}{2}(\varepsilon(\partial_x\varphi)^2 + \dfrac{\varepsilon}{\mu}(\partial_z\varphi)^2) + \zeta = 0 & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \end{cases}$$

φ potentiel et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$. Difficultés

Modèle initial

Problème de Water-Waves: $(d = 1)$

$$\begin{cases} \mu\partial_x^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0, & \text{pour} \quad -1+\beta b^{(\alpha)} < z < \varepsilon\zeta, \\ \partial_z\varphi - \mu\beta\alpha\partial_x b^{(\alpha)}\partial_x\varphi = 0 & \text{pour} \quad z = -1+\beta b^{(\alpha)}, \\ \partial_t\zeta - \dfrac{1}{\mu}(-\mu\varepsilon\partial_x\zeta\partial_x\varphi + \partial_z\varphi) = 0, & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \\ \partial_t\varphi + \dfrac{1}{2}(\varepsilon(\partial_x\varphi)^2 + \dfrac{\varepsilon}{\mu}(\partial_z\varphi)^2) + \zeta = 0 & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \end{cases}$$

φ potentiel et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$. Difficultés

- Domaine de calcul Ω_t mobile au cours du temps

Modèle initial

Problème de Water-Waves: $(d = 1)$

$$\begin{cases} \mu\partial_x^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0, & \text{pour} \quad -1 + \beta b^{(\alpha)} < z < \varepsilon\zeta, \\ \partial_z\varphi - \mu\beta\alpha\partial_x b^{(\alpha)}\partial_x\varphi = 0 & \text{pour} \quad z = -1 + \beta b^{(\alpha)}, \\ \partial_t\zeta - \frac{1}{\mu}(-\mu\varepsilon\partial_x\zeta\partial_x\varphi + \partial_z\varphi) = 0, & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \\ \partial_t\varphi + \frac{1}{2}(\varepsilon(\partial_x\varphi)^2 + \frac{\varepsilon}{\mu}(\partial_z\varphi)^2) + \zeta = 0 & \text{pour} \quad z = \varepsilon\zeta, \end{cases}$$

φ potentiel et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$. Difficultés

- Domaine de calcul Ω_t mobile au cours du temps
- Calcul 2-D avec non-linéarité sur les conditions aux limites

Equations de Green-Naghdi

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x (hu) = 0, \\ \\ (1 + \frac{\mu}{h}\mathcal{T}[h, \beta b^{(\alpha)}])\partial_t u + \partial_x \zeta + \varepsilon u \partial_x u \\ \\ \\ \end{cases}$$

- $h = 1 + \varepsilon\zeta - \beta b^{(\alpha)}$ et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$

Equations de Green-Naghdi

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(hu) = 0, \\ \\ (1 + \frac{\mu}{h}\mathcal{T}[h, \beta b^{(\alpha)}])\partial_t u + \partial_x \zeta + \varepsilon u \partial_x u \\ \\ \\ \end{cases}$$

- $h = 1 + \varepsilon\zeta - \beta b^{(\alpha)}$ et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$
-

$$\mathcal{T}[h, \beta b^{(\alpha)}]W \quad = \quad -\frac{1}{3}\partial_x(h^3 \partial_x W)$$

.

Equations de Green-Naghdi

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x(hu) = 0, \\ (1 + \frac{\mu}{h}\mathcal{T}[h, \beta b^{(\alpha)}])\partial_t u + \partial_x \zeta + \varepsilon u \partial_x u \\ + \mu\varepsilon\{ - \frac{1}{3h}\partial_x(h^3(u\partial_x^2 u) - (\partial_x u)^2) + \Im[h, \beta b^{(\alpha)}]u\} = 0 \end{cases}$$

- $h = 1 + \varepsilon\zeta - \beta b^{(\alpha)}$ et $b^{(\alpha)}(x) = b(\alpha x)$
-

$$\begin{aligned} \mathcal{T}[h, \beta b^{(\alpha)}]W &= -\frac{1}{3}\partial_x(h^3\partial_x W) + \frac{\beta}{2}\partial_x(h^2\partial_x b^{(\alpha)})W \\ &\quad + \beta^2 h(\partial_x b^{(\alpha)})^2 W. \end{aligned}$$

Résultats connus

- Dans le cas de fond plat et dans le régime de type KdV

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\mu),$$

Résultats connus

- Dans le cas de fond plat et dans le régime de type KdV

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\mu),$$

- Le modèle de KdV:

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\varepsilon u u_x + \frac{\mu}{6} u_{xxx} = 0,$$

Résultats connus

- Dans le cas de fond plat et dans le régime de type KdV

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\mu),$$

- Le modèle de KdV:

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\varepsilon u u_x + \frac{\mu}{6} u_{xxx} = 0,$$

- A été justifié par:

Résultats connus

- Craig, W. Commun. Partial Differ. Equations 10, (1985)

Résultats connus

- Craig, W. Commun. Partial Differ. Equations 10, (1985)
- Kano, T., Nishida, T. J. Math. (1986)

Résultats connus

- Craig, W. Commun. Partial Differ. Equations 10, (1985)
- Kano, T., Nishida, T. J. Math. (1986)
- Schneider, G., Wayne, C.E. Pure Appl. Math. (2000)

Résultats connus

- Craig, W. Commun. Partial Differ. Equations 10, (1985)
- Kano, T., Nishida, T. J. Math. (1986)
- Schneider, G., Wayne, C.E. Pure Appl. Math. (2000)
- Bona, J.L., Colin, T., Lannes, D. Arch. Ration. Mech. Anal. (2005)

Résultats connus

- Avec un fond plat, mais dans un régime de type Camassa-Holm

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\sqrt{\mu}),$$

Résultats connus

- Avec un fond plat, mais dans un régime de type Camassa-Holm

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\sqrt{\mu}),$$

- Les effets non linéaires sont plus forts

Résultats connus

- Avec un fond plat, mais dans un régime de type Camassa-Holm

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\sqrt{\mu}),$$

- Les effets non linéaires sont plus forts
- Johnson (2002 J. Fluid Mech) a remplacé l'équation de KdV par l'équation de CH (formellement)

Résultats connus

- Avec un fond plat, mais dans un régime de type Camassa-Holm

$$\mu \ll 1, \quad \varepsilon = O(\sqrt{\mu}),$$

- Les effets non linéaires sont plus forts
- Johnson (2002 J. Fluid Mech) a remplacé l'équation de KdV par l'équation de CH (formellement)
- Constantin et Lannes (2008 Arch. Ration. Mech. Anal.) ont rigoureusement justifié cette généralisation:

$$u_t + u_x + \frac{3}{2}\varepsilon u u_x + \mu(A u_{xxx} + B u_{xxt}) = \varepsilon\mu(E u u_{xxx} + F u_x u_{xx}).$$

Nouveaux résultats

- En 2009, et avec un fond non plat, (à paraître dans M2AN)

Nouveaux résultats

- En 2009, et avec un fond non plat, (à paraître dans M2AN)
- On a prouvé qu'une bonne généralisation de l'équation de CH, sous le régime $\varepsilon = O(\sqrt{\mu})$ en supposant que: L^∞-CH-cond

$$\beta\alpha = O(\mu), \quad \beta\alpha^{3/2} = O(\mu^2) \quad \beta\alpha\varepsilon = O(\mu^2),$$

Nouveaux résultats

- En 2009, et avec un fond non plat, (à paraître dans M2AN)
- On a prouvé qu'une bonne généralisation de l'équation de CH, sous le régime $\varepsilon = O(\sqrt{\mu})$ en supposant que: L^∞-CH-cond

$$\beta\alpha = O(\mu), \quad \beta\alpha^{3/2} = O(\mu^2) \quad \beta\alpha\varepsilon = O(\mu^2),$$

- Est l'équation CH-bott suivante:

$$u_t + cu_x + \frac{3}{2}c_x u + \frac{3}{2}\varepsilon u u_x + \mu(\tilde{A}u_{xxx} + Bu_{xxt}) \\ = \varepsilon\mu\tilde{E}uu_{xxx} + \varepsilon\mu\Big(\partial_x(\frac{\tilde{F}}{2}u)u_{xx} + u_x\partial_x^2(\frac{\tilde{F}}{2}u)\Big),$$

Nouveaux résultats

- En 2009, et avec un fond non plat, (à paraître dans M2AN)
- On a prouvé qu'une bonne généralisation de l'équation de CH, sous le régime $\varepsilon = O(\sqrt{\mu})$ en supposant que: L^∞-CH-cond

$$\beta\alpha = O(\mu), \quad \beta\alpha^{3/2} = O(\mu^2) \quad \beta\alpha\varepsilon = O(\mu^2),$$

- Est l'équation CH-bott suivante:

$$u_t + cu_x + \frac{3}{2}c_x u + \frac{3}{2}\varepsilon uu_x + \mu(\tilde{A}u_{xxx} + Bu_{xxt})$$
$$= \varepsilon\mu\tilde{E}uu_{xxx} + \varepsilon\mu\Big(\partial_x(\frac{\tilde{F}}{2}u)u_{xx} + u_x\partial_x^2(\frac{\tilde{F}}{2}u)\Big),$$

- Avec $c = \sqrt{1 - \beta b^{(\alpha)}}$.

Les équations de GN

Dans les scalings

$$\varepsilon = O(\sqrt{\mu}), \quad \beta\alpha = O(\mu), \quad \beta\alpha^{3/2} = O(\mu^2) \quad \beta\alpha\varepsilon = O(\mu^2).$$

Les équations de GN peuvent s'écrire:

$$\begin{cases} \zeta_t + [hu]_x = 0, \\ u_t + \zeta_x + \varepsilon u u_x = \dfrac{\mu}{3h}[h^3(u_{xt} + \varepsilon u u_{xx} - \varepsilon u_x^2)]_x. \end{cases}$$

Résultats de consistance de type L^∞

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$

Résultats de consistance de type L^∞

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$
- ζ est donné par:

$$\zeta := cu + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} c_x u + \frac{\varepsilon}{4}u^2 + \frac{\mu}{6}c^4 u_{xt} - \varepsilon\mu c^4[\frac{1}{6}uu_{xx} + \frac{5}{48}u_x^2],$$

Résultats de consistance de type L^∞

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$
- ζ est donné par:

$$\zeta := cu + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} c_x u + \frac{\varepsilon}{4}u^2 + \frac{\mu}{6}c^4 u_{xt} - \varepsilon\mu c^4[\frac{1}{6}uu_{xx} + \frac{5}{48}u_x^2],$$

- Alors (u, ζ) est L^∞-consistente sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ avec les équations de GN

Régime onde-longue

- ε, β, α et μ vérifient: L^∞-KdV-cond

$$\varepsilon = O(\mu), \quad \alpha\beta = O(\varepsilon), \quad \alpha^{3/2}\beta = O(\varepsilon^2).$$

Les équations de Boussinesq:

$$\begin{cases} \zeta_t + [hu]_x = 0, \\ u_t + \zeta_x + \varepsilon u u_x = \dfrac{\mu}{3} c^4 u_{xxt}. \end{cases}$$

Régime onde-longue

- ε, β, α et μ vérifient: L^∞-KdV-cond

$$\varepsilon = O(\mu), \quad \alpha\beta = O(\varepsilon), \quad \alpha^{3/2}\beta = O(\varepsilon^2).$$

Les équations de Boussinesq:

$$\begin{cases} \zeta_t + [hu]_x = 0, \\ u_t + \zeta_x + \varepsilon u u_x = \dfrac{\mu}{3} c^4 u_{xxt}. \end{cases}$$

- $h = 1 + \varepsilon\zeta - \beta b^{(\alpha)}$ et $c^2 = 1 - \beta b^{(\alpha)}$

Résultats de consistance pour KdV-top

- On démontre que l'équation de KdV-top:

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3}{2c}\varepsilon\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}\mu c^5\zeta_{xxx} + \frac{1}{2}c_x\zeta = 0.$$

Est L^∞-consistente sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ avec Boussinesq

Résultats de consistance pour KdV-top

- On démontre que l'équation de KdV-top:

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3}{2c}\varepsilon\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}\mu c^5\zeta_{xxx} + \frac{1}{2}c_x\zeta = 0.$$

  Est L^∞-consistente sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ avec Boussinesq
- Formellemnt, par J. Kirby, I. Svendsen et Dingemans

Résultats de consistance de type H^s

- Les conditions H^s-cond sont:

$$\varepsilon = O(\sqrt{\mu}), \; \beta\alpha = O(\varepsilon), \; \beta\alpha = O(\mu^2).$$

Résultats de consistance de type H^s

- Les conditions H^s-cond sont:

$$\varepsilon = O(\sqrt{\mu}),\ \beta\alpha = O(\varepsilon),\ \beta\alpha = O(\mu^2).$$

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$

Résultats de consistance de type H^s

- Les conditions H^s-cond sont:

$$\varepsilon = O(\sqrt{\mu}),\ \beta\alpha = O(\varepsilon),\ \beta\alpha = O(\mu^2).$$

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$
- ζ est donné par:

$$\zeta := cu + \frac{\varepsilon}{4}u^2 + \frac{\mu}{6}c^4 u_{xt} - \varepsilon\mu c^4[\frac{1}{6}uu_{xx} + \frac{5}{48}u_x^2],$$

Résultats de consistance de type H^s

- Les conditions H^s-cond sont:

$$\varepsilon = O(\sqrt{\mu}),\ \beta\alpha = O(\varepsilon),\ \beta\alpha = O(\mu^2).$$

- Si u est une solution de CH-bott sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$
- ζ est donné par:

$$\zeta := cu + \frac{\varepsilon}{4}u^2 + \frac{\mu}{6}c^4 u_{xt} - \varepsilon\mu c^4[\frac{1}{6}uu_{xx} + \frac{5}{48}u_x^2],$$

- Alors (u, ζ) est H^s-consistente sur $[0, \frac{T}{\varepsilon}]$ avec les équations de GN

Preuve

Le term $c_x u$ (responsable de phénomène de croissance séculaire) est d'ordre $O(\mu^2)$ dans l'espace $L^\infty([0, \frac{T}{\varepsilon}], H^s(\mathbb{R}))$

Commentaires et Théorème 1

- Nous avons construit une famille (u, ζ) *consistente* avec les équations de GN

Commentaires et Théorème 1

- Nous avons construit une famille (u, ζ) *consistente* avec les équations de GN
- Cette famille donne une bonne approximation des solutions exactes $(\underline{u}, \underline{\zeta})$ de Green-Naghdi avec mêmes données initiales

Commentaires et Théorème 1

- Nous avons construit une famille (u, ζ) *consistente* avec les équations de GN
- Cette famille donne une bonne approximation des solutions exactes $(\underline{u}, \underline{\zeta})$ de Green-Naghdi avec mêmes données initiales
- Dans le sens que $(\underline{u}, \underline{\zeta}) = (u, \zeta) + O(\mu^2 t)$ pour temps d'ordre $O(1/\varepsilon)$

Conclusion

- Alvarez-Samaniego et Lannes (Inventiones 08): GN se rapproche de problème d'Euler (Water-Waves) avec une précision $O(\mu^2 t)$

Conclusion

- Alvarez-Samaniego et Lannes (Inventiones 08): GN se rapproche de problème d'Euler (Water-Waves) avec une précision $O(\mu^2 t)$
- On a montré CH-bott se rapproche de GN avec une précision $O(\mu^2 t)$

Conclusion

- Alvarez-Samaniego et Lannes (Inventiones 08): GN se rapproche de problème d'Euler (Water-Waves) avec une précision $O(\mu^2 t)$
- On a montré CH-bott se rapproche de GN avec une précision $O(\mu^2 t)$
- Alors, CH-bott fournie une approximation au premier ordre des équations de problème d'Euler (Water-Waves) avec une précision $O(\mu^2 t)$.

Caractère bien posé de CH-bott localement en temps

$$
\left|
\begin{aligned}
&(1-\mu m\partial_x^2)u_t + cu_x + kc_x u + \sum_{j\in J}\varepsilon^j f_j u^j u_x + \mu g u_{xxx} \\
&\qquad\qquad = \varepsilon\mu\Big[h_1 u u_{xxx} + \partial_x(h_2 u)u_{xx} + u_x\partial_x^2(h_2 u)\Big], \\
&u_{|_{t=0}} = u^0
\end{aligned}
\right. \tag{1}
$$

Caractère bien posé de CH-bott localement en temps

$$\left|\begin{array}{l} (1-\mu m\partial_x^2)u_t + cu_x + kc_x u + \sum_{j\in J}\varepsilon^j f_j u^j u_x + \mu g u_{xxx} \\ \qquad\qquad = \varepsilon\mu\Big[h_1 u u_{xxx} + \partial_x(h_2 u)u_{xx} + u_x\partial_x^2(h_2 u)\Big], \\ u_{|_{t=0}} = u^0 \end{array}\right. \tag{1}$$

- $m > 0$, $J \subset \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{R}$ et $f_j = f_j(c)$, $g = g(c)$, $h_1 = h_1(c)$ et $h_2 = h_2(c)$

Théorème 2

- Théorème 2 ci-dessous, montre que le problème de Cauchy pour CH-bott est bien posé, avec $T = O(1/\varepsilon)$

Théorème 2

- Théorème 2 ci-dessous, montre que le problème de Cauchy pour CH-bott est bien posé, avec $T = O(1/\varepsilon)$
- Nous avons besoin de définir l'espace de l'énergie X^s ($s \in \mathbb{R}$) par: $X^{s+1}(\mathbb{R}) = H^{s+1}(\mathbb{R})$ muni de la norme

$$|f|^2_{X^{s+1}} = |f|^2_{H^s} + \mu m |\partial_x f|^2_{H^s}$$

Théorème 2

- Soit $\wp$ une famille de paramètres $\theta = (\varepsilon, \beta, \alpha, \mu)$ satisfaisant L^∞-CH-cond avec $\beta\alpha = O(\varepsilon)$

Théorème 2

- Soit $\wp$ une famille de paramètres $\theta = (\varepsilon, \beta, \alpha, \mu)$ satisfaisant L^∞-CH-cond avec $\beta\alpha = O(\varepsilon)$
- Alors pour tout $u^0 \in H^{s+1}(\mathbb{R})$, il existe une famille de solution $u_{(\theta\in\wp)}$ pour (1) appartenant à $C([0, \frac{T}{\varepsilon}]; X^{s+1}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, \frac{T}{\varepsilon}]; X^s(\mathbb{R}))$

Caractère bien posé de KdV-top localement en temps

$$\left| \begin{array}{l} u_t + cu_x + kc_x u + \varepsilon g u u_x + \frac{1}{6}\mu c^5 u_{xxx} = 0, \\ u_{|_{t=0}} = u^0. \end{array} \right. \tag{2}$$

Où $k \in \mathbb{R}$ et $g = \frac{3}{2c}$

Théorème 3

- Soit $\wp'$ une famille de paramètres $\theta = (\varepsilon, \beta, \alpha, \mu)$ satisfaisant L^∞-KdV-cond avec $\beta\alpha = O(\varepsilon)$

Théorème 3

- Soit $\wp'$ une famille de paramètres $\theta = (\varepsilon, \beta, \alpha, \mu)$ satisfaisant L^∞-KdV-cond avec $\beta\alpha = O(\varepsilon)$
- $$\exists c_0 > 0, \quad \forall\, \theta \, \in \, \wp', \qquad c(x) = \sqrt{1 - \beta b^{(\alpha)}(x)} \geq c_0,$$

Théorème 3

- Soit $\wp'$ une famille de paramètres $\theta = (\varepsilon, \beta, \alpha, \mu)$ satisfaisant L^∞-KdV-cond avec $\beta\alpha = O(\varepsilon)$
- $$\exists c_0 > 0, \quad \forall\, \theta \, \in \, \wp', \qquad c(x) = \sqrt{1 - \beta b^{(\alpha)}(x)} \geq c_0,$$
- Alors pour tout $u^0 \in H^{s+1}(\mathbb{R})$, il existe une famille de solution $u_{(\theta \in \wp')}$ pour KDV-top appartenant à $C([0, \frac{T}{\varepsilon}]; X^{s+1}(\mathbb{R})) \cap C^1([0, \frac{T}{\varepsilon}]; X^s(\mathbb{R}))$

Déferlement de la vague

- Il est possible de donner quelques informations sur l'explosion sur la norme L^∞ de la dérivée de la solution pour l'équation CH-choc:

Déferlement de la vague

- Il est possible de donner quelques informations sur l'explosion sur la norme L^∞ de la dérivée de la solution pour l'équation CH-choc:
-

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{1}{2}c_x\zeta + \frac{3}{2}\varepsilon\zeta\zeta_x - \frac{3}{8}\varepsilon^2\zeta^2\zeta_x + \frac{3}{16}\varepsilon^3\zeta^3\zeta_x + \frac{\mu}{12}(\zeta_{xxx} - \zeta_{xxt}) = -\frac{7}{24}\varepsilon\mu(\zeta\zeta_{xxx} + 2\zeta_x\zeta_{xx}),$$

Déferlement de la vague

- Si le temps d'existence maximal $T_m > 0$ est fini

Déferlement de la vague

- Si le temps d'existence maximal $T_m > 0$ est fini
- $\zeta \in C([0, T_m); H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T_m); H^2(\mathbb{R}))$ vérifie

Déferlement de la vague

- Si le temps d'existence maximal $T_m > 0$ est fini
- $\zeta \in C([0, T_m); H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T_m); H^2(\mathbb{R}))$ vérifie
- $$\sup_{t\in[0,T_m),\, x\in\mathbb{R}} \{|\zeta(t,x)|\} < \infty;$$

Déferlement de la vague

- Si le temps d'existence maximal $T_m > 0$ est fini
- $\zeta \in C([0, T_m); H^3(\mathbb{R})) \cap C^1([0, T_m); H^2(\mathbb{R}))$ vérifie
- $$\sup_{t \in [0, T_m),\, x \in \mathbb{R}} \{|\zeta(t, x)|\} < \infty;$$
- $$\sup_{x \in \mathbb{R}} \{\zeta_x(t, x)\} \uparrow \infty \quad \textit{quand} \quad t \uparrow T_m.$$

Motivation

- Travail commun avec M. Duruflé

Motivation

- Travail commun avec M. Duruflé
- Valider numériquement les modèles asymptotiques développés dans la première partie

Plan

- Schémas différences finies conservatifs et semi-explicites pour KdV et Camassa-Holm dans le cas d'un fond variable

Plan

- Schémas différences finies conservatifs et semi-explicites pour KdV et Camassa-Holm dans le cas d'un fond variable
- Comparaison KdV-top / Boussinesq

Plan

- Schémas différences finies conservatifs et semi-explicites pour KdV et Camassa-Holm dans le cas d'un fond variable
- Comparaison KdV-top / Boussinesq
- Comparaison différences finies / LDG (Local Discontinuous Galerkin)

Equation de KdV

Modèle original:

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3}{2c}\varepsilon\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}\mu c^5\zeta_{xxx} + \frac{1}{2}c_x\zeta = 0,$$

- Problème : Modèle non-conservatif (stabilité exponentielle)

Modèle gentil :

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3}{2}\varepsilon\zeta\zeta_x + \frac{1}{6}\mu\zeta_{xxx} + \frac{1}{2}c_x\zeta = 0,$$

Modèle violent :

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{3}{2}(\frac{1}{c})^{2/3}\varepsilon\zeta((\frac{1}{c})^{1/3}\zeta)_x + \frac{1}{6}\mu\Gamma_3\zeta + \frac{1}{2}c_x\zeta = 0,$$

$$\Gamma_3\zeta \;=\; c^5\,\zeta_{xxx} \;+\; \frac{3}{2}(c^5)_x\,\zeta_{xx} \;+\; \frac{3}{4}\,(c^5)_{xx}\,\zeta_x \;+\; \frac{1}{8}(c^5)_{xxx}\,\zeta.$$

Equation de Camassa-Holm

Modèle original:

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{1}{2}c_x\zeta + \frac{3}{2c}\varepsilon\zeta\zeta_x - \frac{3}{8c^3}\varepsilon^2\zeta^2\zeta_x + \frac{3}{16c^5}\varepsilon^3\zeta^3\zeta_x$$
$$+\mu(\tilde{A}\zeta_{xxx} + B\zeta_{xxt}) = \varepsilon\mu\tilde{E}\zeta\zeta_{xxx} + \varepsilon\mu\Big(\partial_x(\frac{\tilde{F}}{2}\zeta)\zeta_{xx} + \zeta_x\partial_x^2(\frac{\tilde{F}}{2}\zeta)\Big),$$

Modèle gentil :

$$\zeta_t + c\zeta_x + \frac{1}{2}c_x\zeta + \frac{3}{2}\varepsilon\zeta\zeta_x - \frac{3}{8}\varepsilon^2\zeta^2\zeta_x + \frac{3}{16}\varepsilon^3\zeta^3\zeta_x$$
$$+\frac{\mu}{12}(\zeta_{xxx} - \zeta_{xxt}) = -\frac{7}{24}\varepsilon\mu(\zeta\zeta_{xxx} + 2\zeta_x\zeta_{xx}).$$

Equation de Camassa-Holm

Modèle violent :

$$\begin{aligned}
&\zeta_t + c\zeta_x + \frac{1}{2}c_x\zeta + \frac{3}{2}\varepsilon\left(\frac{1}{c}\right)^{2/3}\zeta\left(\left(\frac{1}{c}\right)^{1/3}\zeta\right)_x \\
&\quad -\frac{3\varepsilon^2}{8}\left(\frac{1}{c^3}\right)^{1/4}\left(\left(\frac{1}{c^3}\right)^{1/4}\zeta\right)^2\left(\left(\frac{1}{c^3}\right)^{1/4}\zeta\right)_x + \frac{3}{16}\varepsilon^3\frac{1}{c}\left(\frac{1}{c}\zeta\right)^3\left(\frac{1}{c}\zeta\right)_x \\
&\quad +\mu(a_{1/12})^{1/2}\Big((a_{1/12})^{1/2}\zeta\Big)_{xxx} - \mu(b_{1/12})^{1/2}\Big((b_{1/12})^{1/2}\zeta\Big)_{xxx} \\
&\quad -\frac{\mu}{12}\zeta_{xxt} = -\frac{7}{24}\varepsilon\mu(\zeta\zeta_{xxx} + 2\zeta_x\zeta_{xx}).
\end{aligned}$$

Où, $a_{1/12} = \frac{1}{6}c^5$ et $b_{1/12} = \frac{1}{12}c$.

Schéma différences finies

Discrétisation de $u^p u_x$ (p entier)

Choix simple : $u^p D_1 u$

Avec $D_1 u = \dfrac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x}$

IPP $\Rightarrow (u^{p+1}, D_1 u) = -(D_1(u^{p+1}), u)$

Choix conservatif : $\dfrac{1}{p+2}(u^p D_1 u + D_1 u^{p+1})$

Avec un schéma semi-explicite :

$$\frac{1}{p+2}[(u^p)^{n+1/2} D_1 \frac{u^n + u^{n+1}}{2} + D_1((u^p)^{n+1/2} \frac{u^n + u^{n+1}}{2})]$$

Schéma différences finies

Schéma semi-explicite pour KdV-top conserve exactement l'énergie discrète

$$\frac{\zeta^{n+1}-\zeta^{n}}{\Delta t}+D_1^v\frac{\zeta^{n+1}+\zeta^{n}}{2}+\frac{\mu}{6}\left(D_3^v\frac{\zeta^{n+1}+\zeta^{n}}{2}\right)+$$
$$\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{1}{c}\right)^{1/3}\left[v^{n+1/2}D_1\left(\frac{v^{n+1}+v^{n}}{2}\right)+D_1\left(v^{n+1/2}\frac{v^{n+1}+v^{n}}{2}\right)\right]=0$$

Où,

$$v=\left(\frac{1}{c}\right)^{1/3}\zeta.$$

Schéma pour Camassa-Holm

Terme supplémentaire : $2\zeta_{xx}\zeta_x + \zeta_{xxx}\zeta$

Si on pose $f[u] = u_{xx}$, on a $2f[u]u_x + f[u]_x u$

Discrétisation conservative : $f[u]D_1 u + D_1(f[u]u)$

Discrétisation semi-explicite :

$$f[u^{n+1/2}]\, D_1\Big(\frac{u^{n+1}+u^n}{2}\Big) + D_1\Big(f[u^{n+1/2}]\, \frac{u^{n+1}+u^n}{2}\Big)$$

Comparaison KdV/Bouss (convergence)

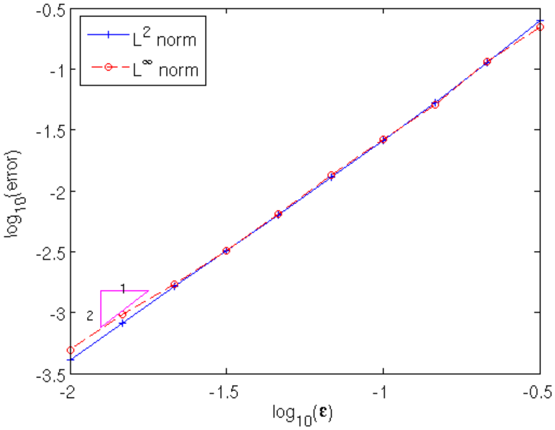
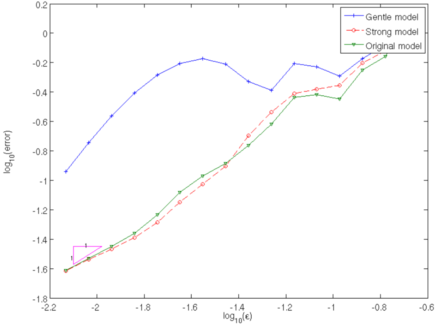


Figure: Erreur relative entre les solutions de Boussinesq et KdV pour un fond plat (Log-log scale)

Comparaison KdV-top/Bouss (convergence)



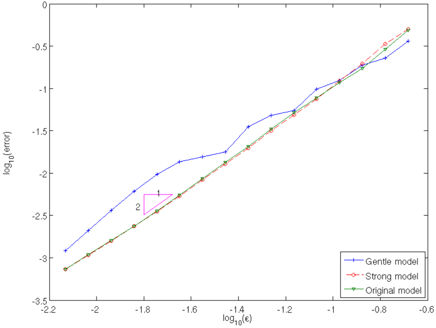


Figure: Erreur relative entre les solutions de Boussinesq et KdV-top pour un fond sinusoïdal (Log-log scale). À gauche $\alpha = 0.5\,\varepsilon,\ \beta = 0.5$, à droite $\alpha = 0.5\varepsilon,\ \beta = \varepsilon$.

Comparaison modèles de CH $T = 20$ fond sinus

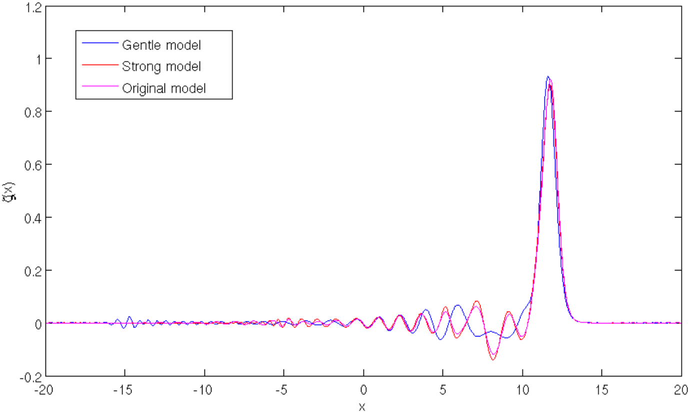


Figure: ($c_1 = 0.5,\ \mu = 0.05,\ \varepsilon = \sqrt{\mu},\ \alpha = 0.5\,\varepsilon,\ \beta = \varepsilon$)

Comparaison différences finies/LDG: convergence

Erreurs L^2 pour un soliton et un fond sinusoïdal (modèle gentil):

LDG, order 3

Error	Order
1.770e-2	-
2.124e-3	3.06
4.347e-5	5.61
2.460e-6	4.14
1.600e-7	3.95

LDG, order 7

Error	Order
9.192e-3	-
3.247e-5	8.15
1.785e-7	7.51
7.071e-10	7.98
2.926e-12	7.92

Finite Difference

Error	Order
2.395e-1	-
6.804e-2	1.82
1.743e-2	1.97
4.367e-3	1.997
1.092e-3	2.00

Comparaison différences finies/LDG: performance

Pour une erreur à 1% :

	LDG ordre 5	DF
Pas de temps	$\Delta t = 0.2$ (ordre 4)	$\Delta t = 0.01$
Erreur	0.92 %	1.63 %
Nombre ddls pour ζ	1440 ddls	15 000 ddls
Temps calcul (solveur Mumps)	33 s	732s
Temps calcul (solveur optimal)	x	71s

Comparaison différences finies/LDG: performance

Pour une erreur à 10% :

	LDG ordre 5	DF
Pas de temps	$\Delta t = 0.25$ (ordre 4)	$\Delta t = 0.05$
Erreur	8.92 %	9.6 %
Nombre ddls pour ζ	990 ddls	4 000 ddls
Temps calcul (solveur Mumps)	19 s	22s
Temps calcul (solveur optimal)	x	1s

Les équations de Green-Naghdi

- La vitesse horizontale intégrée sur la verticale

$$v(t,X) = \frac{1}{1+\varepsilon\zeta-\beta b}\int_{-1+\beta b}^{\varepsilon\zeta} \nabla\varphi(t,X,z)dz, \qquad (3)$$

Les équations de Green-Naghdi

- La vitesse horizontale intégrée sur la verticale

$$v(t,X) = \frac{1}{1+\varepsilon\zeta-\beta b}\int_{-1+\beta b}^{\varepsilon\zeta} \nabla\varphi(t,X,z)dz, \qquad (3)$$

-

$$\begin{cases} \partial_t\zeta + \nabla\cdot(hv) = 0, \\ \big(h+\mu\mathcal{T}[h,\varepsilon b]\big)\partial_t v + h\nabla\zeta + \varepsilon\big(h+\mu\mathcal{T}[h,\varepsilon b]\big)(v\cdot\nabla)v \\ \quad + \mu\varepsilon\{\frac{2}{3}\nabla[(h^3(\partial_1 v\cdot\partial_2 v^{\perp} + (\nabla\cdot v)^2)] + \Re[h,\varepsilon b](v)\} = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

Où, $v = (V_1, V_2)^T$, $v^{\perp} = (-V_2, V_1)^T$

Problème

- $$\mathcal{T}[h,\varepsilon b]W = -\frac{1}{3}\nabla(h^3\nabla\cdot W)$$

Problème

- $$\mathcal{T}[h,\varepsilon b]W = -\frac{1}{3}\nabla(h^3\nabla\cdot W) + \frac{\varepsilon}{2}[\nabla(h^2\nabla b\cdot W) - h^2\nabla b\nabla\cdot W] + \varepsilon^2 h\nabla b\nabla b\cdot W.$$
- La norme de l'énergie $|\cdot|_{Y^s}$ associée à (4) est donnée par:

$$|(\zeta,v)|_{Y^s}^2 = |\zeta|_{H^s}^2 + |v|_{H^s}^2 + \mu|\nabla\cdot v|_{H^s}^2,$$

Problème

- $$\begin{aligned} \mathcal{T}[h,\varepsilon b]W &= -\frac{1}{3}\nabla(h^3\nabla\cdot W) + \frac{\varepsilon}{2}[\nabla(h^2\nabla b\cdot W) \\ &\quad -h^2\nabla b\nabla\cdot W] + \varepsilon^2 h\nabla b\nabla b\cdot W. \end{aligned}$$

- La norme de l'énergie $|\cdot|_{Y^s}$ associée à (4) est donnée par:

$$|(\zeta,v)|_{Y^s}^2 = |\zeta|_{H^s}^2 + |v|_{H^s}^2 + \mu|\nabla\cdot v|_{H^s}^2,$$

- Le terme $\partial_1 v\cdot\partial_2 v^\perp$ n'est pas contrôlé par la norme $|\cdot|_{Y^s}$

$1D$ Green-Naghdi

- Pour $1D$ de surface, les équations de GN (4) peuvent simplifier sous cette forme

$$\begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x (hv) = 0, \\ (h + \mu h \mathcal{T}[h, \varepsilon b])[\partial_t v + \varepsilon v \partial_x v] + h \partial_x \zeta + \varepsilon \mu h Q[h, \varepsilon b](v) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$1D$ Green-Naghdi

- Pour $1D$ de surface, les équations de GN (4) peuvent simplifier sous cette forme

$$\begin{cases} \partial_t\zeta + \partial_x(hv) = 0, \\ (h + \mu h\mathcal{T}[h,\varepsilon b])[\partial_t v + \varepsilon v\partial_x v] + h\partial_x\zeta + \varepsilon\mu hQ[h,\varepsilon b](v) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

- Il est clair, que dans le cas $d = 1$

$$\partial_1 v \cdot \partial_2 v^{\perp} = 0.$$

Résultats connus

- Une justification rigoureuse récente en $1D$ et $2D$ de GN a été donné par:

Résultats connus

- Une justification rigoureuse récente en $1D$ et $2D$ de GN a été donné par:
- Y. A. Li. Appl. Math.(2005) (pour $b = 0$, $d = 1$) en utilisant une méthode de point fixe de type Picard

Résultats connus

- Une justification rigoureuse récente en $1D$ et $2D$ de GN a été donné par:
- Y. A. Li. Appl. Math.(2005) (pour $b = 0$, $d = 1$) en utilisant une méthode de point fixe de type Picard
- B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes (Indiana Univ. Math 08) dans le cas général en utilisant une méthode de type Nash-Moser

Résultats connus

- Une justification rigoureuse récente en $1D$ et $2D$ de GN a été donné par:
- Y. A. Li. Appl. Math.(2005) (pour $b = 0$, $d = 1$) en utilisant une méthode de point fixe de type Picard
- B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes (Indiana Univ. Math 08) dans le cas général en utilisant une méthode de type Nash-Moser
- Car Les équations linéarisées comportent des pertes de dérivées

Nouveaux résultats ($d = 1$)

- Théorème 4 ci-dessous,montre que le modèle de GN (5) admet une solution unique avec $T = O(1/\varepsilon)$, sous la condition suivante

$$\exists\ h_{min} > 0, \quad \inf_{x \in \mathbb{R}} h \geq h_{min}, \quad h = 1 + \varepsilon(\zeta - b), \qquad (6)$$

Nouveaux résultats ($d = 1$)

- Théorème 4 ci-dessous,montre que le modèle de GN (5) admet une solution unique avec $T = O(1/\varepsilon)$, sous la condition suivante

$$\exists\ h_{min} > 0, \quad \inf_{x\in\mathbb{R}} h \geq h_{min}, \quad h = 1 + \varepsilon(\zeta - b), \tag{6}$$

- Nous avons besoin de définir l'espace de l'énergie X^s ($s \in \mathbb{R}$) par: $H^s(\mathbb{R}) \times H^{s+1}(\mathbb{R})$ muni de la norme

$$\forall\ U = (\zeta, v) \in X^s, \quad |U|^2_{X^s} := |\zeta|^2_{H^s} + |v|^2_{H^s} + \mu|\partial_x v|^2_{H^s},$$

Théorème 4

- Pour tout $U_0 = (\zeta_0, v_0)^T \in X^s$, vérifie (6), les équations de GN (5) admettent une solution unique $U = (\zeta, v)^T$ appartenant à $C([0, \frac{T}{\varepsilon}]; X^s(\mathbb{R}))$.

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- On définie la trace du potentiel φ sur la surface libre par

$$\psi = \varphi_{|z=\varepsilon\zeta},$$

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- On définie la trace du potentiel φ sur la surface libre par

$$\psi = \varphi_{|_{z=\varepsilon\zeta}},$$

- Où, φ potentiel de vitesse

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- On définie la trace du potentiel φ sur la surface libre par

$$\psi = \varphi_{|_{z=\varepsilon\zeta}},$$

- Où, φ potentiel de vitesse
- Comme on a:

$$\nabla\psi = v + \frac{\mu}{h}\mathcal{T}[h, \varepsilon b]\nabla\psi + O(\mu^2);$$

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- On définie la trace du potentiel φ sur la surface libre par

$$\psi = \varphi_{|_{z=\varepsilon\zeta}},$$

- Où, φ potentiel de vitesse
- Comme on a:

$$\nabla\psi = v + \frac{\mu}{h}\mathcal{T}[h, \varepsilon b]\nabla\psi + O(\mu^2);$$

- On obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{curl}\, \partial_t v &= O(\mu), \\ \mathrm{curl}\, (v \cdot \nabla) v &= O(\mu). \end{aligned}$$

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- Les quantités $\mu\nabla^\perp \mathrm{curl}\, \partial_t v$ et $\mu\nabla^\perp \mathrm{curl}\, \varepsilon(v \cdot \nabla)v$ sont d'ordre $O(\mu^2)$ qui est la précision des équations de GN (4)

Nouveaux résultats ($d = 2$)

- Les quantités $\mu\nabla^\perp \mathrm{curl}\, \partial_t v$ et $\mu\nabla^\perp \mathrm{curl}\, \varepsilon(v\cdot\nabla)v$ sont d'ordre $O(\mu^2)$ qui est la précision des équations de GN (4)
- Nous pouvons donc inclure ces nouveaux termes dans la deuxième équation de GN (4) pour obtenir

$$\begin{cases} \partial_t\zeta + \nabla\cdot(hv) = 0, \\ \Big(h + \mu\big(\mathcal{T}[h,\varepsilon b] - \nabla^\perp \mathrm{curl}\,\big)\Big)\partial_t v + h\nabla\zeta \\ \quad + \varepsilon\Big(h + \mu\big(\mathcal{T}[h,\varepsilon b] - \nabla^\perp \mathrm{curl}\,\big)\Big)(v\cdot\nabla)v \\ \quad + \mu\varepsilon\Big\{\frac{2}{3}\nabla[h^3(\partial_1 v\cdot\partial_2 v^\perp + (\nabla\cdot v)^2)] + \Re[h,\varepsilon b](v)\Big\} = O(\mu^2). \end{cases} \tag{7}$$

Théorème 5

- Nous avons besoin de définir l'espace de l'énergie Z^s ($s \in \mathbb{R}$) par: $H^s(\mathbb{R}^2) \times (H^{s+1}(\mathbb{R}^2))^2$ muni de la norme

$$|U|_{Z^s}^2 := |\zeta|_{H^s}^2 + |v|_{H^s}^2 + \mu|\nabla \cdot v|_{H^s}^2 + \mu|\mathrm{curl}\, v|_{H^s}^2.$$

Théorème 5

- Nous avons besoin de définir l'espace de l'énergie Z^s ($s \in \mathbb{R}$) par: $H^s(\mathbb{R}^2) \times (H^{s+1}(\mathbb{R}^2))^2$ muni de la norme

$$|U|_{Z^s}^2 := |\zeta|_{H^s}^2 + |v|_{H^s}^2 + \mu|\nabla \cdot v|_{H^s}^2 + \mu|\mathrm{curl}\, v|_{H^s}^2.$$

- Pour tout $U_0 = (\zeta_0, v_0^T)^T \in Z^s$, et vérifie

$$\exists\ h_{min} > 0, \quad \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h \geq h_{min}, \quad h = 1 + \varepsilon(\zeta - b), \tag{8}$$

Théorème 5

- Nous avons besoin de définir l'espace de l'énergie Z^s ($s \in \mathbb{R}$) par: $H^s(\mathbb{R}^2) \times (H^{s+1}(\mathbb{R}^2))^2$ muni de la norme

$$|U|_{Z^s}^2 := |\zeta|_{H^s}^2 + |v|_{H^s}^2 + \mu|\nabla \cdot v|_{H^s}^2 + \mu|\mathrm{curl}\, v|_{H^s}^2.$$

- Pour tout $U_0 = (\zeta_0, v_0^T)^T \in Z^s$, et vérifie

$$\exists\, h_{min} > 0, \qquad \inf_{X \in \mathbb{R}^2} h \geq h_{min}, \quad h = 1 + \varepsilon(\zeta - b), \qquad (8)$$

- Le *nouveau modèle GN* (7) admet une solution unique $U = (\zeta, v^T)^T$ appartenant à $C([0, \frac{T}{\varepsilon}]; Z^s(\mathbb{R}^2))$.

MERCI!