



**HAL**  
open science

# Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés

Julien Ducarne

► **To cite this version:**

Julien Ducarne. Modélisation et optimisation de dispositifs non-linéaires d'amortissement de structures par systèmes piézoélectriques commutés. Autre. Conservatoire national des arts et métiers - CNAM, 2009. Français. NNT : 2009CNAM0633 . tel-00464513v2

**HAL Id: tel-00464513**

**<https://theses.hal.science/tel-00464513v2>**

Submitted on 8 Sep 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONSERVATOIRE NATIONAL DES ARTS ET MÉTIERS

THÈSE

Spécialité : Mécanique

présentée par

Julien DUCARNE

pour obtenir le grade de DOCTEUR

**Modélisation et optimisation de dispositifs  
non-linéaires d'amortissement de structures  
par systèmes piézoélectriques commutés**

Soutenue le 27 Mars 2009,

devant le jury composé de :

Louis JÉZÉQUEL	École Centrale, Lyon	<i>Président</i>
Étienne BALMÈS	ENSAM Paris	<i>Rapporteur</i>
Joël POUGET	CNRS, UPMC	<i>Rapporteur</i>
Paolo ERMANNI	ETH Zurich	<i>Examineur</i>
Jean-Paul GRELLIER	DGA	<i>Examineur</i>
Daniel GUYOMAR	INSA Lyon	<i>Examineur</i>
Jean-François DEÛ	CNAM Paris	<i>Co-encadrant de thèse</i>
Olivier THOMAS	CNAM Paris	<i>Co-encadrant de thèse</i>
Roger OHAYON	CNAM Paris	<i>Directeur de thèse</i>

---

## Remerciements

Ce document de thèse présente des travaux réalisés au Cnam Paris d'Octobre 2005 à Mars 2009 sous la direction de Roger Ohayon et la supervision attentive d'Olivier Thomas et Jean-François Deü, qui ont toujours su me guider en me laissant de bonnes marges de liberté. Qu'ils soient remerciés pour m'avoir permis de réaliser ce travail, en montant tout d'abord le projet avec la DGA, puis en me suivant dans chacune des étapes, des congrès internationaux à la rédaction. Cette thèse a été rendue possible grâce à une bourse de la Délégation Générale de l'Armement (dans le cadre du contrat numéro 05.43.063.00 470 7565), que je remercie. Je remercie d'ailleurs Jean-Paul Grellier, de la DGA, qui a fait l'honneur d'être présent pour le jury.

Je remercie également Étienne Balmès et Joël Pouget, rapporteurs, pour leur lecture attentive. Enfin je remercie Louis Jezéquel d'avoir présidé le jury et Paolo Ermanni d'être venu spécialement de Suisse pour assister à la soutenance.

Durant mon travail j'ai eu de nombreux échanges avec l'équipe du LGEF Lyon en général, en particulier Daniel Guyomar, présent dans le jury, mais aussi Claude Richard et Élie Lefevre qui a réalisé un des circuits utilisés ; je les remercie pour ce qu'ils m'ont apporté. Je remercie également Mickaël Lallart pour les discussions d'électronique et Gaël Sebald pour ses réflexions sur l'énergie électrique lors d'ICAST 2008. De manière générale je remercie l'équipe qui m'a accueilli lors de mon passage à Lyon.

J'ai aussi eu l'occasion d'être accueilli par toute l'équipe du laboratoire MAE, dirigée par le professeur Wei-Hsin Liao à Hong-Kong, pour un séjour très enrichissant. Je les remercie ici de m'avoir accueilli.

Plus près de Paris, je remercie Laurent Prévond et les techniciens de la chaire d'électrotechnique du Cnam qui m'ont aidé à réaliser quelques circuits et ont réalisé la carte de l'inducteur synthétique. Enfin, à la chaire de mécanique, je remercie bien sur toute l'équipe du LMSSC, Fred et Lionel, Antoine, Walid, Romain et Aurélien, Monica et Eleonora et les différents élèves ingénieurs qui se sont succédés dans notre bureau. Grâce à eux j'ai pu travailler dans la bonne humeur, au sein d'une équipe soudée et efficace.

Finalement je remercie chaleureusement mes amis et ma famille qui m'ont apporté un soutien sans faille même au plus fort de la rédaction, quand je n'ai pas toujours pu leur rendre l'attention qu'ils m'ont portée.

Paris, le 9 Avril 2009



---

---

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
1.1	Cadre de l'étude . . . . .	1
1.1.1	Catégories de dispositifs anti-vibration . . . . .	1
1.1.2	Dispositifs piézoélectriques . . . . .	2
1.1.3	Shunts piézoélectriques . . . . .	4
1.1.4	Shunts à commutation . . . . .	4
1.1.5	Projet DGA . . . . .	5
1.2	Travail présenté . . . . .	5
1.2.1	Objectif . . . . .	5
1.2.2	Organisation du document . . . . .	6

## I MODÈLE ÉLECTROMÉCANIQUE

<b>2</b>	<b>Matériau piézoélectrique</b>	<b>11</b>
2.1	Effet piézoélectrique . . . . .	11
2.2	Grandeurs électriques . . . . .	12
2.2.1	Dans le vide . . . . .	12
2.2.2	Dans un matériau . . . . .	13
2.2.3	En résumé . . . . .	16
2.3	Isolants et conducteurs en électrostatique . . . . .	17
2.3.1	Formulation du problème . . . . .	17
2.3.2	Conducteurs en équilibre électrostatique . . . . .	18
2.3.3	Condensateur plan . . . . .	18
2.4	Piézoélectricité . . . . .	20
2.4.1	Historique . . . . .	20
2.4.2	Principales catégories de matériaux piézoélectriques . . . . .	20
2.4.3	Spécificités . . . . .	25
2.4.4	Applications . . . . .	26
2.5	Piézoélectricité linéaire . . . . .	27
2.5.1	Loi de comportement . . . . .	27
2.6	Modélisation d'un milieu piézoélectrique . . . . .	33
2.7	Coefficients de couplage électromécaniques . . . . .	34
2.7.1	Coefficients de couplage matériau . . . . .	34
2.8	Conclusion . . . . .	38

<b>3</b>	<b>Modélisation semi-analytique d'une poutre avec éléments piézoélectriques</b>	<b>39</b>
3.1	Formulation générale . . . . .	39
3.1.1	Géométrie . . . . .	39
3.1.2	Hypothèses mécaniques . . . . .	40
3.1.3	Hypothèses électriques . . . . .	42
3.1.4	Réduction de la loi de comportement . . . . .	42
3.1.5	Grandeurs généralisées . . . . .	43
3.1.6	Cas particulier d'une structure symétrique . . . . .	46
3.1.7	Équations d'équilibre . . . . .	46
3.2	Poutre symétrique munie de deux pastilles piézoélectriques . . . . .	47
3.2.1	Grandeurs généralisées . . . . .	47
3.2.2	Équations du mouvement . . . . .	48
3.2.3	Adimensionnement . . . . .	49
3.3	Réduction modale . . . . .	50
3.3.1	Calcul des modes propres en court-circuit . . . . .	51
3.3.2	Projection modale du système couplé . . . . .	53
3.4	Coefficient de couplage effectif . . . . .	53
3.4.1	Projection modale du système circuit ouvert . . . . .	53
3.4.2	Coefficient de couplage . . . . .	54
3.4.3	Troncature modale . . . . .	55
3.5	Conclusion . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Modélisation éléments finis adaptée aux cas de shunts</b>	<b>57</b>
4.1	Étude bibliographique . . . . .	57
4.2	Modélisation d'un milieu piézoélectrique . . . . .	58
4.2.1	Formulation variationnelle en terme de déplacement et potentiel $(u_i, \psi)$ . . . . .	59
4.3	Structure élastique avec éléments piézoélectriques . . . . .	60
4.3.1	Problème général, hypothèses . . . . .	60
4.3.2	Formulation variationnelle en déplacement et différence de potentiel $(u_i, V^{(p)})$ . . . . .	61
4.3.3	Formulation en éléments finis . . . . .	64
4.3.4	Cas pratiques . . . . .	65
4.4	Réduction modale et coefficients de couplage . . . . .	66
4.4.1	Modes propres en court-circuit . . . . .	66
4.4.2	Projection modale du problème général . . . . .	67
4.4.3	Coefficient de couplage effectif . . . . .	68
4.5	Application au cas d'une poutre stratifiée piézoélectrique . . . . .	70
4.5.1	Hypothèses sur les champs électriques et mécaniques . . . . .	71
4.5.2	Formulation variationnelle . . . . .	71
4.5.3	Discrétisation éléments finis . . . . .	74
4.5.4	Matrice de couplage électromécanique . . . . .	75
4.5.5	Association de plusieurs éléments piézoélectriques . . . . .	75
4.6	Comparaison avec le modèle analytique . . . . .	77
4.7	Conclusion . . . . .	78
<b>II SHUNTS LINÉAIRES</b>		
<b>5</b>	<b>Shunts linéaires : modélisation et optimisation</b>	<b>81</b>
5.1	Bibliographie . . . . .	82
5.2	Objectif . . . . .	83
5.3	Shunt résistif . . . . .	83
5.3.1	Modèle . . . . .	83
5.3.2	Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement . . . . .	85

5.3.3	Modèle 1 ddl avec amortissement . . . . .	88
5.3.4	Performances : atténuation et couplage électromécanique . . . . .	90
5.3.5	Influence d'un désaccord . . . . .	91
5.3.6	Performances dans le cas plusieurs degrés de liberté . . . . .	92
5.3.7	Analogie mécanique . . . . .	95
5.4	Shunt résonant . . . . .	97
5.4.1	Modèle . . . . .	97
5.4.2	Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement . . . . .	98
5.4.3	Modèle 1 ddl avec amortissement . . . . .	103
5.4.4	Performances : atténuation et couplage électromécanique . . . . .	104
5.4.5	Influence d'un désaccord . . . . .	105
5.4.6	Performances dans un cas à plusieurs ddl . . . . .	107
5.4.7	Analogie mécanique . . . . .	109
5.5	Conclusion . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Expérimentation sur les shunts</b>	<b>113</b>
6.1	Réalisation d'une poutre avec couplage optimisé . . . . .	113
6.1.1	Choix des éléments . . . . .	113
6.1.2	Collage . . . . .	118
6.2	Dispositif expérimental . . . . .	120
6.3	Circuit shunt . . . . .	120
6.3.1	Résistance . . . . .	120
6.3.2	Inductance . . . . .	120
6.4	Résultats . . . . .	126
6.4.1	Régime forcé . . . . .	126
6.4.2	Variation du couplage . . . . .	130
6.4.3	Régime libre . . . . .	132
6.5	Conclusion . . . . .	135
<b>III SHUNTS À COMMUTATION</b>		
<b>7</b>	<b>Shunts à commutation sur un système à un degré de liberté</b>	<b>139</b>
7.1	Shunts à commutation : concept et recherche existante . . . . .	140
7.1.1	Principe de base . . . . .	140
7.1.2	Origine du concept et développement . . . . .	141
7.1.3	Cas de la récupération d'énergie . . . . .	143
7.1.4	Originalité de cette étude . . . . .	143
7.2	Modèle à un degré de liberté . . . . .	144
7.2.1	Équations générales . . . . .	144
7.2.2	Principe des simulations . . . . .	144
7.2.3	Hypothèses des modèles 1 ddl . . . . .	146
7.3	Réponse libre . . . . .	146
7.3.1	Modèle SSDS sans amortissement . . . . .	146
7.3.2	Modèle SSDI sans amortissement . . . . .	147
7.3.3	Taux de décroissance . . . . .	148
7.3.4	Optimisation de la technique SSDS . . . . .	150
7.3.5	Optimisation de la technique SSDI . . . . .	151
7.3.6	Effet de l'amortissement mécanique . . . . .	151
7.4	Réponse forcée avec commutation synchronisée . . . . .	154
7.4.1	Réponse temporelle du système . . . . .	154
7.4.2	Réponse en SSDS . . . . .	155
7.4.3	Réponse en SSDI . . . . .	156
7.4.4	Comparaison avec les shunts linéaires . . . . .	159

7.4.5	Comparaison avec un modèle existant . . . . .	159
7.5	Modèle 1 ddl avec stratégie évoluée . . . . .	159
7.5.1	Comparaison sur un cas . . . . .	161
7.5.2	Évaluation de l'atténuation . . . . .	165
7.6	Conclusion sur le modèle 1 DDL . . . . .	167
7.6.1	Cas de la technique SSDS . . . . .	167
7.6.2	Cas de la technique SSDI . . . . .	167
7.6.3	Limites du modèle . . . . .	167
<b>8</b>	<b>Shunt à commutation sur un système à plusieurs degrés de liberté</b>	<b>169</b>
8.1	Modèle utilisé . . . . .	170
8.1.1	Comportement en circuit ouvert . . . . .	170
8.1.2	Comportement en circuit fermé . . . . .	171
8.1.3	Transitions entre états . . . . .	172
8.1.4	Aspects énergétiques . . . . .	172
8.2	Stratégies de commutation . . . . .	175
8.2.1	Critères d'optimisation de la réduction de vibrations . . . . .	175
8.2.2	Stratégies de commutation multimode . . . . .	176
8.3	Simulation numérique . . . . .	178
8.3.1	Simulation de la réponse libre . . . . .	178
8.3.2	Simulation de la réponse forcée . . . . .	181
8.4	Résultats en régime libre . . . . .	185
8.4.1	Effet de la stratégie de commutation pour les cas 1 ddl . . . . .	185
8.4.2	Choix de l'inductance . . . . .	185
8.4.3	Systèmes à 2 DDL . . . . .	186
8.4.4	Optimisation du système . . . . .	192
8.5	Résultats en régime forcé . . . . .	193
8.5.1	Cas 1 ddl . . . . .	193
8.5.2	Cas 2 ddl . . . . .	195
8.5.3	Cas N ddl . . . . .	200
8.6	Conclusion sur le modèle N DDL . . . . .	206
<b>9</b>	<b>Expérimentation sur les shunts à commutation</b>	<b>209</b>
9.1	Structures utilisées . . . . .	209
9.1.1	Poutre symétrique . . . . .	209
9.1.2	Poutre asymétrique . . . . .	209
9.2	Circuits à commutation . . . . .	212
9.2.1	Circuit autonome . . . . .	212
9.2.2	Circuit à commutation commandée . . . . .	213
9.3	Dispositifs de mesure . . . . .	221
9.3.1	Poutre symétrique . . . . .	221
9.3.2	Poutre asymétrique . . . . .	221
9.4	Résultats en régime forcé . . . . .	222
9.4.1	Analyse en temps . . . . .	222
9.4.2	Analyse en fréquence . . . . .	226
9.5	Résultats en régime libre . . . . .	235
9.6	Conclusion . . . . .	237
<b>10</b>	<b>Conclusion</b>	<b>239</b>
10.1	Organisation de la thèse et résultats. . . . .	239
10.1.1	Partie I : modèles électromécaniques . . . . .	239
10.1.2	Partie II : shunts linéaires . . . . .	240
10.1.3	Partie III : shunts à commutation . . . . .	241



10.2 Exemple de démarche d'optimisation . . . . .	243
10.3 Prolongements de l'étude . . . . .	245

ANNEXES

<b>A Programme Simulink</b>	<b>251</b>
<b>B Matrices élémentaires éléments finis</b>	<b>253</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>255</b>



---

# Introduction

## 1.1 Cadre de l'étude

À l'heure actuelle, toute une catégorie d'applications (génie civil, transport, spatial. . .) fait appel à des structures légères et confrontées à un environnement dynamique. Pour ces structures, un niveau élevé de vibrations peut conduire à la destruction ou à des phénomènes de fatigue. D'autre part, les vibrations peuvent être une source d'inconfort, de bruit, ou perturber le fonctionnement de certains systèmes. Ainsi, le concepteur doit éviter que les vibrations ne soient un problème. Pour ce faire, différentes possibilités s'offrent à lui :

- il peut chercher à soustraire la structure aux sollicitations, par exemple avec une bonne suspension pour une voiture, ou bien dans le cas d'un avion en filtrant les commandes envoyées aux gouvernes pour éviter l'excitation des modes de la cellule. . . Cette solution n'est pas toujours suffisante.
- Il est possible de délibérément ajouter de la masse au système. On peut citer par exemple le cas du lestage d'enceintes acoustiques par du sable. Cette solution ne peut s'appliquer que quand le poids n'est pas une contrainte forte ; rares sont les cas où elle est adoptée.
- Il est parfois possible d'ajouter de la raideur au système. De manière générale, en procédant à des analyses modales pendant la phase de conception, il est possible d'éviter de faire coïncider les résonances de la structure avec l'excitation, d'éviter que ces résonances correspondent à des déformées qui les rendent pénalisantes. . . Bien sur, cela a un coût en terme de temps de travail, de complexité de fabrication et de masse ajoutée à la structure.
- Si une solution basée sur la masse ou la raideur ne donne pas satisfaction, le concepteur pourra alors chercher à jouer sur l'amortissement de la structure ; ou bien encore utiliser un dispositif spécialement conçu pour régler le problème de vibration.

### 1.1.1 Catégories de dispositifs anti-vibration

Une des solutions les plus utilisées pour lutter contre les vibrations est l'ajout de matériau dissipatif (par exemple viscoélastique) sur la structure. Ces matériaux, lorsqu'ils sont déformés, vont dissiper l'énergie des vibrations. Un exemple de ce type de solution est l'utilisation de plaques de matériau caoutchouté sur les portières de voiture. On cherche généralement à placer ces matériaux là où la déformation est maximale pour le mode de vibration à réduire. Ce type de solution est simple à mettre en œuvre, efficace pour les vibrations haute

fréquence ; par contre pour des vibrations basse fréquence, la quantité de matériau à ajouter devient prohibitive.

Une autre manière de réduire l'amplitude des vibrations consiste à utiliser un résonateur accordé (Tuned Mass Damper) ; celui ci va "pomper" l'énergie des vibrations de la structure principale. On munit ce résonateur d'un dispositif viscoélastique qui dissipera l'énergie. On peut citer le cas de l'immeuble Taipei 101 au sommet duquel un pendule joue le rôle d'amortisseur à masse accordée. Ce type de dispositif doit être placé là où le déplacement est important et impose l'ajout d'une masse, ce qui peut être pénalisant. Il est de plus efficace seulement sur une gamme de fréquence très limitée.

Pour des cas de vibration à basse fréquence et à grande échelle, il est possible d'utiliser des amortisseurs à friction, hydrauliques ou magnéto-rhéologiques ; ces dispositifs peuvent être très efficaces, mais ne peuvent être placés qu'entre deux parties de la structure ayant un déplacement relatif important, ce qui limite leur application à des cas particuliers, par exemple les amortisseurs de vibrations des haubans de ponts placés entre le tablier et le hauban, ou bien les ailerons de requin des aubes de turbine placés entre deux pales successives.

Enfin, on peut citer les dispositifs faisant appel à un couplage électromécanique. Dans ce cas, on utilise un circuit électronique couplé à la structure pour réduire l'amplitude des vibrations. On peut citer deux grandes catégories de techniques :

- les techniques électromagnétiques, utilisant le déplacement relatif d'aimants et de bobines ;
- les techniques piézoélectriques, faisant appel à la déformation d'un matériau piézoélectrique.

On peut regrouper les atouts et faiblesses de ces techniques sous forme de tableau synthétique (tab. 1.1). À la lecture de ce tableau, il apparait que si l'on souhaite amortir des vibrations de basse fréquence en étant efficace, avec un dispositif à l'encombrement limité qui vient se placer au maximum de déformation, un système utilisant le couplage piézoélectrique est tout indiqué.

### 1.1.2 Dispositifs piézoélectriques

En associant un élément piézoélectrique à une structure, on va coupler les vibrations de la structure à la tension et au courant dans un circuit électrique. Suivant le type de circuit, le système se comportera différemment. On distinguera trois grandes catégories de systèmes :

- Les systèmes actifs, où un contrôleur électronique utilise des informations fournies par des capteurs pour élaborer une commande. Cette commande est envoyée grâce à un amplificateur sur les éléments piézoélectriques. Ce type de système peut être très efficace, mais requiert une électronique de contrôle et de puissance lourde et coûteuse en énergie, ce qui limite ses applications. De plus, comme de l'énergie est fournie au système, une commande mal maîtrisée peut engendrer une instabilité.
- Les systèmes passifs, où le circuit relié aux éléments piézoélectriques est constitué de composants passifs (par exemple, une simple résistance). Ces systèmes ont l'avantage de ne requérir ni énergie, ni information pour fonctionner ; ils sont moins chers que les systèmes actifs. L'efficacité est par contre à priori moins bonne.
- Les systèmes semi-passifs font appel à des composants actifs pour le circuit électronique ; néanmoins ils n'injectent pas directement d'énergie dans les éléments piézoélectriques

	Ajout viscoélastique	Amortisseur à masse accordée	Amortisseur à friction ou hydraulique	Système électromagnétique	Système piézoélectrique
✓ Efficace en HF	✓ Efficace en BF	✓ Efficace en BF	✓ Efficace en large bande	✓ Efficace en large bande	
✓ Peu cher	✓ Technologie éprouvée	✓ Technologie éprouvée	✗ placé entre deux points au déplacement différent	✓ Travaille en déformation	
✓ Technologie éprouvée	✗ Masse au max. de déplacement.	✗ placé entre deux points au déplacement différent	✗ alimentation nécessaire	✗ Cher	
✓ Travaille en déformation	✗ Nécessite un accord précis				
✗ Peu efficace en BF			Efficacité dépendant de l'électronique	Efficacité dépendant de l'électronique	

TAB. 1.1: Principales caractéristiques de dispositifs antivibration.

(à la différence d'un système actif). Ils consomment relativement peu d'énergie. Dans certains cas, il est possible d'alimenter un système semi-passif à partir d'une pile, ou même de l'énergie électrique présente dans l'élément piézoélectrique : il est alors possible de le rendre autonome.

On peut regrouper les atouts et faiblesses des techniques piézoélectriques sous forme de tableau synthétique (1.2).

Système actif	Système semi-passif	Système passif
✓ Efficace	✓ Relativement simple	✓ Très simple
✗ Électronique complexe	✗ Peut requérir de l'énergie	✗ Moins efficace
✗ Consomme de l'énergie		
✗ Potentiellement instable		

TAB. 1.2: Différences entre les techniques faisant appel au couplage piézoélectrique.

### 1.1.3 Shunts piézoélectriques

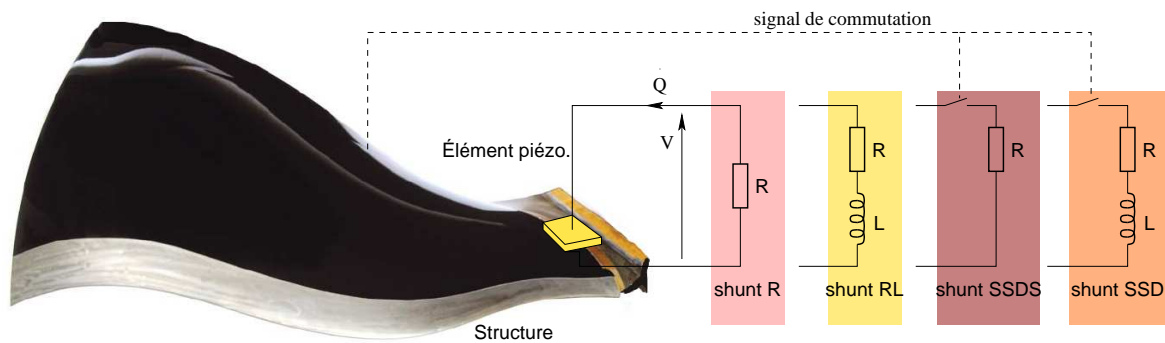


FIG. 1.1: Différents types de shunts associés à une structure.

Une catégorie particulière de dispositifs piézoélectriques est celle faisant appel à des shunts. On appelle shunt un circuit qui vient se mettre en parallèle d'un autre ; dans le cas qui nous intéresse, cela signifie que pour réduire les vibrations d'une structure, on la munit d'éléments piézoélectriques, puis ces éléments sont connectés à un circuit simple. On peut citer le cas d'un shunt résistif (shunt "R") où une résistance électrique dissipera de la puissance par effet Joule et le cas d'un shunt inductif ou résonant (shunt "RL") où une inductance permet d'augmenter le courant circulant dans le shunt, et donc la dissipation par la résistance (fig. 1.1). Ces circuits doivent être accordés sur le mode de vibration que l'on souhaite réduire.

### 1.1.4 Shunts à commutation

On appelle shunt à commutation une catégorie particulière de shunts où le circuit peut être ouvert ou fermé de manière synchronisée avec les vibrations de la structure. On peut citer notamment le cas des shunts "Synchronized Switch Damping on Short" (SSDS) et "Synchronized Switch Damping on Inductor" (SSDI), où le circuit associé est respectivement

une résistance, ou bien une résistance et une inductance ; chacun des circuits est de plus muni d'un dispositif à commutation qui ferme et ouvre le circuit à des instants bien choisis (fig. 1.1). La manière d'accorder ces circuits est différente de la manière d'accorder des shunts résistifs ou résonants ; d'autre part, comme la commutation est synchronisée sur les vibrations, le système est capable de s'adapter à différentes fréquences.

### 1.1.5 Projet DGA

Les dispositifs à commutation synchronisée ont des propriétés prometteuses : efficacité sans besoin de réglage précis, et faible besoin en énergie. Ces dispositifs semi-passifs ont suscité l'intérêt de la Délégation Générale de l'Armement, qui a associé trois laboratoires pour une recherche sur le sujet :

- À Paris, le Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes couplés (LMSSC) est chargé de proposer des outils de simulation d'une structure en vibration avec des éléments piézoélectriques et un circuit à commutation. Le but est de comprendre le mécanisme de réduction de vibration et de proposer des pistes pour optimiser l'association des éléments piézoélectriques à la structure ainsi que le circuit. La présente thèse est une partie de ce travail.
- À Lyon, le Laboratoire de Génie Électrique et de Ferroélectricité (LGEF), à l'origine de recherches sur le sujet de la commutation synchronisée, s'intéresse à l'optimisation de la technique, particulièrement en termes de choix des instants de fermeture et d'ouverture du circuit.
- Toujours à Lyon, le Laboratoire d'Électronique, Nanotechnologie, Capteurs (LENAC) est chargé d'étudier la manière de réaliser et d'optimiser un circuit de commutation sous forme de circuit intégré.

Le but de ce projet est à terme de disposer d'un système autonome, constitué d'un élément piézoélectrique avec l'électronique associée, le plus compact possible et si possible autonome, qui peut être de manière pratique et sans réglage être posé sur toute structure et en réduire les vibrations.

## 1.2 Travail présenté

### 1.2.1 Objectif

Les objectifs de ce travail sont au nombre de trois.

- Le premier objectif est de développer des outils de simulation d'une structure en vibration munie d'un dispositif de réduction de vibration de type shunt commuté ou non. Pour ce faire, on souhaite développer des modèles électromécaniques *réalistes et réduits* qui incluent la structure mécanique, les éléments piézoélectriques et le circuit électrique.
- Le second objectif est d'optimiser les dispositifs de réduction des vibrations. Il s'agit de choisir les caractéristiques, d'une part des éléments piézoélectriques (dimensions, position, matériau) et d'autre part des composants du circuit électrique. Dans le cas des shunts commutés, il faut aussi optimiser la stratégie de commutation (c'est à dire le choix des instants de commutation).
- Le troisième objectif est de comprendre les mécanismes de réduction de vibration des shunts commutés. Il s'agit notamment de comprendre les transferts d'énergie entre modes produits par la commutation et d'expliquer les mécanismes de dissipation de l'énergie.

### 1.2.2 Organisation du document

Cette thèse se décompose en trois grandes parties. La première partie concerne la modélisation de structures en vibration avec des éléments piézoélectriques et leur couplage électromécanique avec un circuit quelconque. La seconde partie est une étude de l'association de circuits passifs (résistances et inductances) aux éléments piézoélectriques. Enfin la troisième partie est l'étude de shunts à commutation ; chacune des parties utilise des éléments introduits dans les parties précédentes. Voici plus précisément une vue d'ensemble du travail.

#### Partie I : Modélisation électromécanique

- Dans le chapitre 2, on introduit le phénomène de la piézoélectricité. Un rappel d'électrostatique, l'introduction des notations ainsi que quelques références bibliographiques sont proposées. La technologie des matériaux piézoélectriques ainsi que leurs applications sont évoquées. Ensuite, la relation de comportement piézoélectrique qui est utilisée dans la suite est exposée. Les divers coefficients de couplage, qui caractérisent les transferts d'énergie électromécanique au sein du matériau sont introduits. On verra que leur importance est capitale pour l'optimisation des dispositifs étudiés.
- Dans le chapitre 3 un modèle semi-analytique de poutre stratifiée avec éléments piézoélectriques est proposé. Ce modèle associe une cinématique d'Euler-Bernoulli et une hypothèse de potentiel linéaire dans l'épaisseur des éléments piézoélectriques. Les grandeurs généralisées (moment de flexion, effort normal, tension électrique et charge électrique) sont introduites, ainsi que les équations dynamiques qui régissent leur évolution. En se plaçant dans un cas de flexion pure, les équations dynamiques sont adimensionnées, puis projetées sur la base modale du système en court-circuit. Après troncature, on obtient une écriture réduite ( $N$  degrés de liberté mécaniques et 1ddl électrique), qui fait apparaître un coefficient de couplage électromécanique pour chaque mode. Une expression analytique originale de ce coefficient est obtenue et utilisée par la suite.
- Dans le chapitre 4, on étudie le cas d'une structure quelconque, associée à des éléments piézoélectriques minces. Une formulation éléments finis originale du problème électromécanique couplé est proposée, qui utilise des variables électriques globales (tension et charge dans chaque élément piézoélectrique). En projetant le problème couplé sur la base modale du système en court-circuit, on obtient une expression des coefficients de couplage modaux en fonction des matrices du problème éléments finis. Finalement, un modèle éléments finis de poutre fondé sur cette formulation est introduit.

À la fin de cette partie, on dispose d'une représentation modale du problème électromécanique (pour une poutre ou pour une structure quelconque) qu'on peut naturellement coupler aux équations d'un circuit électrique.

**Partie II : Shunts linéaires** On étudie dans cette partie l'association de shunts résistifs ou résonants aux éléments piézoélectriques, pour réduire les vibrations.

- Au chapitre 5, une étude bibliographique est proposée. Ensuite, le modèle électromécanique du chapitre 3 est tronqué à un ddl mécanique. Cela permet de calculer les paramètres électriques optimaux du shunt pour réduire les vibrations. Le résultat principal de cette étude est que le seul paramètre à maximiser est le coefficient de couplage modal introduit dans les formulations de la partie I. Cette étude 1 ddl est complétée par :



- une étude en  $N$  ddl, qui montre que les résultats de l'étude 1 ddl sont toujours valables ;
- une étude avec des paramètres électriques non optimaux, qui permet de quantifier la robustesse de la réduction des vibrations.
- Au chapitre 6 , une étude expérimentale est proposée. Tout d'abord on utilise le modèle électromécanique de la partie I pour concevoir une poutre avec couplage élevé. Ensuite, des mesures en régime forcé et en régime libre sont réalisées. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les différents modèles. Une étude originale de la performance du système avec une variation du coefficient de couplage est réalisée et montre encore une fois un bon accord théorie / expérience.

**Partie III : Shunts à commutation** Dans cette partie, on s'intéresse à l'étude et l'optimisation des shunts à commutation de type SSDS et SSDI. Les objectifs sont d'optimiser (i) les éléments piézoélectriques, (ii) la valeur des composants R ou RL et (iii) la stratégie de commutation.

- Le chapitre 7 commence par une présentation du principe de systèmes étudiés, ainsi qu'une étude bibliographique. Ensuite, deux modèles originaux, réduits à un ddl mécanique, l'un en régime libre, l'autre en régime forcé, sont présentés. Dans chaque cas, des valeurs optimales des composants électriques sont calculées, ainsi que les performances du dispositif. On montre que la performance ne dépend que du couplage électromécanique, comme dans le cas des shunts linéaires. Enfin, des stratégies de commutation évoluées, permettant d'améliorer les performances, sont introduites.
- Au chapitre 8, on introduit des modèles à  $N$  ddl mécaniques. Ceux-ci permettent de prendre en compte l'excitation des modes élevés provoquée par la commutation, et d'étudier son influence sur l'efficacité du dispositif. Une analyse énergétique originale est également proposée. Elle permet d'expliquer le mécanisme de la réduction de vibration par shunt commuté. Les différentes stratégies introduites au chapitre précédent sont aussi testées dans le cas  $N$  ddl.
- Au chapitre 9, une étude expérimentale vient confirmer ces résultats. Elle associe des poutres avec éléments piézoélectriques optimisées suivants différents critères à deux circuits à commutation :
  - l'un, fourni par le LGEF, totalement autonome ;
  - l'autre, développé au laboratoire pour mettre en œuvre des stratégies variées, basé sur un ordinateur temps réel.

Bien qu'une comparaison modèle / expérience soit moins aisée que dans le cas des shunts linéaires, on obtient des résultats concordants avec l'étude théorique, en particulier sur l'excitation des modes de fréquence élevée.



PREMIÈRE PARTIE I

---

Modèle électromécanique

*La femme est une substance matérielle organique composée de nombreux sels minéraux et autres produits chimiques parés de noms gréco-latins qu'on retrouve également chez l'homme, mais dans des proportions qui forcent le respect.*

*Pierre Desproges*



## Matériau piézoélectrique

Ce chapitre est une introduction aux matériaux piézoélectriques. On procède d'abord à un rappel d'électrostatique (§2.2) qui permet au lecteur de se familiariser avec les grandeurs en jeu. Ensuite, les aspects technologiques des matériaux piézoélectriques sont explorés (§2.4). Finalement, la relation de comportement piézoélectrique que l'on utilisera dans cette thèse est exposée et réduite (§2.5.1), ainsi que les équations dynamiques couplées d'un milieu piézoélectrique (§2.6) ; on définit finalement les divers coefficients de couplage du matériau (§2.7).

### 2.1 Effet piézoélectrique

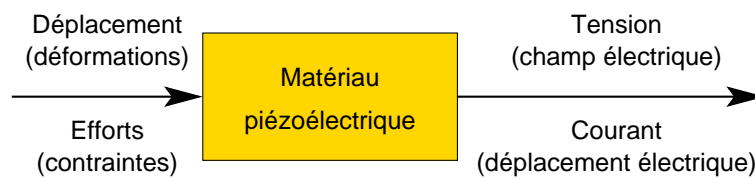


FIG. 2.1: *Effet piézoélectrique direct*

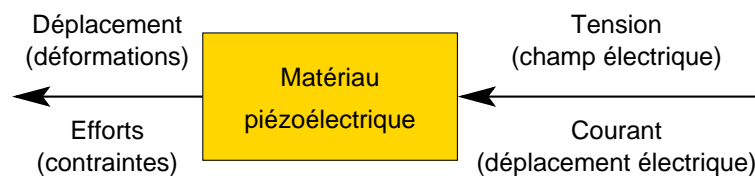


FIG. 2.2: *Effet piézoélectrique inverse*

Un matériau piézoélectrique (du grec *piezein*, presser) est par définition capable de convertir :

- de l'énergie mécanique en énergie électrique, c'est l'effet piézoélectrique direct (Fig. 2.1) ;
- de l'énergie électrique en énergie mécanique, c'est l'effet piézoélectrique inverse (Fig. 2.2).

Afin de décrire ces phénomènes il est nécessaire de décrire les champs de déformation, contrainte, et le champ électrique et de déplacement électrique. Ces deux derniers, moins classiques dans un contexte de mécanique des structures, font l'objet d'un rappel ci-après.

## 2.2 Grandeurs électriques

### 2.2.1 Dans le vide

#### Champ électrique

On considère un ensemble de particules chargées électriquement ; des efforts apparaissent sur ces particules, que l'on appelle forces de Lorentz [45, p. 28]. Une partie de ces forces dépend de la vitesse de chaque particule ; on parle de force associée au champ magnétique ; l'autre partie ne dépend pas de la vitesse de la particule, et est appelée force associée au champ électrique.

En particulier, dans le cas de deux particules immobiles chargées  $A$  et  $B$ , de charge  $q_A$  et  $q_B$ , on observe la force de Coulomb qui est exercée sur  $B$  par  $A$  :

$$\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{r^2} \mathbf{u}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}, \quad (2.1)$$

où  $r$  est la distance entre les particules,  $\mathbf{u}_{A \rightarrow B}$  le vecteur unitaire allant de  $A$  à  $B$  et  $\epsilon_0$  la permittivité électrique du vide, constante égale à  $8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m [2]. On définit alors le champ électrique en tout point de l'espace ; ce champ  $\mathbf{E}$  permet de rendre compte de la force de Coulomb par la relation suivante :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}. \quad (2.2)$$

Pour représenter l'interaction entre les particules  $A$  et  $B$ , d'après (2.1) et (2.2), le champ créé par chaque particule est un champ à symétrie sphérique ; ainsi le champ créé par  $A$  en un point  $M$  est

$$\mathbf{E} = \frac{q_A}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{u}_{A \rightarrow M}, \quad (2.3)$$

où dans ce cas  $r$  est la distance  $AM$ . Comme les forces s'additionnent, les champs de chaque particule s'additionnent. Il est ainsi possible d'écrire le champ électrique d'un système de particules chargées.

#### Théorème de Gauss

Si l'on considère maintenant une densité volumique de charges, notée  $\rho_v$ , on peut écrire le champ électrique produit par cette densité en tenant compte des versions locale ou intégrale du théorème de Gauss [45, p. 29-30] :

- En tout point de l'espace où la densité volumique de charge est  $\rho_v$ , le champ électrique vérifie :

$$\operatorname{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v \quad (2.4)$$

- Pour tout volume  $\Omega$  à l'intérieur duquel la densité volumique de charge est  $\rho_v$ , on a :

$$\oiint_{\partial\Omega} \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_v d\Omega = Q. \quad (2.5)$$

avec  $Q$  la charge contenue dans  $\Omega$ .

### 2.2.2 Dans un matériau

Les propriétés électriques et magnétiques d'une région matérielle sont caractérisées par trois phénomènes [45, p. 112] :

1. la *conduction électrique*, représentée par le paramètre  $\sigma$ , conductivité du matériau ;
2. la *polarisation électrique*, représentée par le paramètre  $\epsilon$ , permittivité du matériau ;
3. la *polarisation magnétique*, représentée par le paramètre  $\mu$ , perméabilité du matériau ;

Comme on s'intéresse aux matériaux piézoélectriques soumis à des champs magnétiques négligeables, la suite évoquera simplement les deux premiers points.

#### Conduction et charges libres

La conductivité d'un matériau (solide) est liée à la présence dans ce matériau d'électrons libres, qui sont capables de se déplacer d'une orbite atomique à une autre et de créer des courants électriques [45, p. 113] ; les atomes qui constituent le matériau restent eux immobiles. On représente les courants par une densité volumique de courant électrique, définie par :

$$\mathbf{J} = \rho_v \mathbf{v}_m, \quad (2.6)$$

où  $\rho_v$  est la densité volumique de charges libres et  $\mathbf{v}_m$  la vitesse moyenne de ces charges. Comme ces électrons libres (qui sont des charges négatives) se déplacent lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique  $\mathbf{E}$ , on a la relation suivante, appelée loi d'Ohm locale :

$$\boxed{\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}}, \quad (2.7)$$

où  $\sigma$  est la conductivité du matériau, exprimée en A/V/m ou Siemens par mètre (S/m).

Selon la valeur de la conductivité  $\sigma$  d'un matériau donné, celui-ci est plus ou moins conducteur. On distingue en général les deux cas extrêmes [45, p. 112]

- les matériaux isolants (ou diélectriques) ne possèdent pas d'électrons libre en leur sein, si bien qu'aucun courant électrique ne peut y prendre naissance. Ils sont caractérisés par des valeur très faibles de  $\sigma$ , de l'ordre de  $10^{-16}$ S/m pour les meilleurs isolants [45, p. 115]. Les matériaux piézoélectriques font partie de cette famille.
- les matériaux conducteurs, quand à eux, sont caractérisés par des électrons libres de se déplacer d'un atome à l'autre. Leur conductivité est grande, de l'ordre de  $10^8$ S/m pour les meilleurs conducteurs [45, p. 115].

#### Polarisation d'un diélectrique et charges liées

Lorsqu'un diélectrique est soumis à un champ électrique, les charges positives et négatives le constituant sont soumises à des forces de Coulomb et se déplacent légèrement par rapport à leur position d'équilibre moyenne, sans pouvoir circuler sur de grandes distances. Même si ces déplacements sont de l'ordre de quelques fractions des diamètres moléculaires, le cumul des charges déplacés peut causer un changement significatif de l'état électrique du milieu. Ce phénomène est la polarisation.

Les charges électriques dans un diélectrique sont organisées par paires de charge positives et négatives, chaque paire étant appelée un dipôle, de charge globale nulle. Ce peut être entre autres :

- tout atome (la charge positive est le noyau et la charge négative son nuage d'électrons) ;

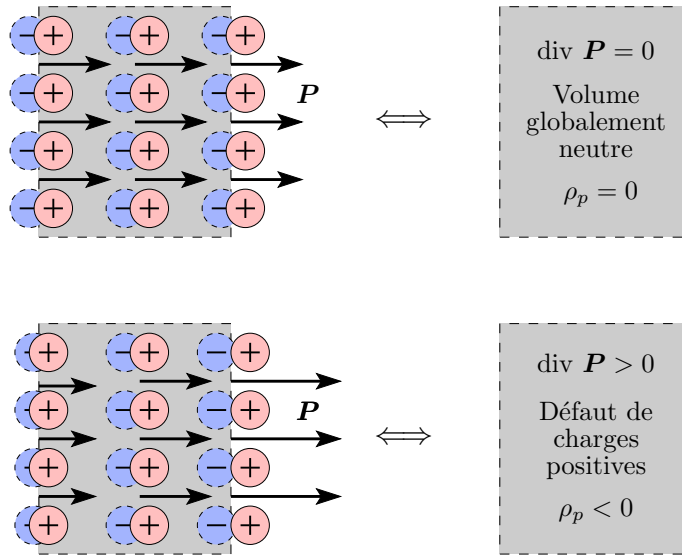


FIG. 2.3: Polarisation  $\mathbf{P}$  uniforme (en haut) et non-uniforme (en bas) d'un élément de matière et densité de charge de polarisation  $\rho_p$  équivalente

- une liaison polaire (comme dans la molécule d'eau, où les électrons des deux atomes d'hydrogène sont fortement attirés par l'atome d'oxygène, ce qui décale leur position moyenne dans la direction du noyau de l'atome d'oxygène) ;
- l'ensemble des ions d'un cristal ionique où des atomes voisins ont échangé des électrons
- ...

Chaque dipôle, est caractérisée par son moment  $\mathbf{p}$  défini par :

$$\mathbf{p}_i = q_i \mathbf{d}_i, \quad (2.8)$$

où  $q_i$  est la charge positive du  $i$ -ième dipôle et  $\mathbf{d}_i$  le vecteur représentant la distance de la charge négative vers la charge positive. Pour certains dipôles (par exemple dans le cas des atomes) cette distance est nulle au repos tandis que pour d'autres elle ne l'est pas (cas des liaisons polaires). Le *champ de polarisation électrique* du milieu est alors défini comme la densité volumique de dipôles, qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta v} \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \rho_+ \mathbf{d}, \quad (2.9)$$

avec  $\Delta v$  un petit volume du matériau,  $N$  le nombre de dipôles contenus dans  $\Delta v$ ,  $\rho_+$  la densité de charge positives déplacées et  $\mathbf{d}$  le déplacement moyen des charges positives par rapport aux charges négatives. Une polarisation nulle peut signifier que les moments sont soit nuls (par exemple dans le cas d'atomes au repos) ou que les moments sont non nuls mais répartis dans toutes les directions (par exemple c'est le cas de certains cristaux comprenant des liaisons polaires).

Le champ de polarisation  $\mathbf{P}$  caractérise un déplacement de charges positives par rapport aux charges négatives. Si il n'est pas uniforme sur un volume donné, sa variation se traduit par un excès de charge positives *hors* du volume considéré (Fig. 2.3). D'un point de vue quantitatif, cela permet de définir une densité volumique de charge de polarisation  $\rho_p$ , telle que :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{P} = -\rho_p.} \quad (2.10)$$



Cette dernière relation montre qu'une polarisation  $\mathbf{P}$  non uniforme (caractérisée par  $\text{div } \mathbf{P}$  non nulle) dans le matériau correspond à la création d'une densité de charge  $\rho_p$ , de signe opposé à celui de la divergence de  $\mathbf{P}$ .

### Déplacement et champ électrique

Par rapport au vide, un milieu matériel peut donc contenir une densité de charge de polarisation non-nulle (des charges liées, définies par la densité volumique  $\rho_p$ ) en plus d'éventuelles charges libres (caractérisées par leur densité volumique  $\rho_v$ ). Cette ensemble de charges est responsable du champ électrique  $\mathbf{E}$  dans le matériau, créé à la fois par les charges libres et les charges liées. L'expression locale du théorème de Gauss (2.4) devient alors, dans le cas d'un milieu matériel :

$$\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p, \quad (2.11)$$

soit encore, avec l'équation (2.10) :

$$\text{div}(\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_v. \quad (2.12)$$

Cela permet de définir le *champ de déplacement électrique* (ou *induction électrique*)  $\mathbf{D}$  par :

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}.} \quad (2.13)$$

Le théorème de Gauss dans un milieu matériel s'écrit alors :

$$\boxed{\text{div } \mathbf{D} = \rho_v,} \quad (2.14)$$

soit encore

$$\boxed{\oint_{\partial\Omega} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \iiint_{\Omega} \rho_v d\Omega = Q.} \quad (2.15)$$

### Loi de comportement

La polarisation du milieu décrite au paragraphe (2.2.2) se traduit par une relation entre  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{P}$ . Lorsque le matériau est linéaire, la polarisation est proportionnelle au champ électrique, ce qui s'écrit :

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (2.16)$$

avec  $\chi_e$  la susceptibilité du milieu (c'est un paramètre adimensionné).

On a pour habitude d'écrire cette relation en fonction de  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  à partir de la relation (2.13). On obtient :

$$\boxed{\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E},} \quad (2.17)$$

avec  $\epsilon$  la permittivité du milieu. Celle-ci s'écrit aussi

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0, \quad (2.18)$$

avec  $\epsilon_r$  la permittivité relative (par rapport au vide). On a aussi  $\epsilon_r = 1 + \chi_e$ , en comparant les équations (2.18), (2.17) et (2.13).

Lorsque le milieu est non-linéaire (c'est le cas lorsque le matériau est soumis à un fort champ électrique), la relation (2.17) est toujours valable, avec  $\epsilon$  (ou  $\epsilon_r$ ) qui dépend de  $\mathbf{E}$  :

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E}) \mathbf{E} = \epsilon_r(\mathbf{E}) \epsilon_0 \mathbf{E}. \quad (2.19)$$

Enfin, remarquons que les relations (2.16) et (2.17) ne sont valables que pour un milieu isotrope. Si ce n'est pas le cas,  $\epsilon_r$  et  $\chi_e$  sont des tenseurs.

### Conditions aux limites

En appliquant le théorème de Gauss (Eq. (2.15)) au volume d'un petit disque construit sur l'interface  $\Sigma$  entre deux milieux matériels [45], on montre en faisant tendre l'épaisseur vers 0 que :

$$(\mathbf{D}_1 - \mathbf{D}_2) \cdot \mathbf{n} = \rho_s, \quad (2.20)$$

avec  $\rho_s$  la densité surfacique de charges libres présente à l'interface,  $\mathbf{D}_1$  et  $\mathbf{D}_2$  les champs électriques de part et d'autre de l'interface,  $\mathbf{n}$  la normale à l'interface, dirigée de 2 vers 1. Cette expression signifie que la composante normale du déplacement électrique est discontinue et que la valeur du saut est égale à  $\rho_s$  :

$$\boxed{\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s.} \quad (2.21)$$

Par le même raisonnement, on peut montrer que le saut du champ de polarisation à travers une interface est l'opposé d'une densité surfacique de charges de polarisation  $\rho_{sp}$  :

$$\boxed{\llbracket \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = -\rho_{sp}.} \quad (2.22)$$

Enfin, en combinant les équations (2.21), (2.22) et (2.13), on obtient la conditions au limite pour le saut de  $\mathbf{E}$  :

$$\llbracket \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_v + \rho_{sp}. \quad (2.23)$$

### 2.2.3 En résumé

Source	Champ modifié	Loi locale	Conditions aux limites
Charges libres $\rho_v, \rho_s$	$\mathbf{D}$	$\text{div } \mathbf{D} = \rho_v$	$\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s$
Charges liées $\rho_p, \rho_{ps}$	$\mathbf{P}$	$\text{div } \mathbf{P} = -\rho_p$	$\llbracket \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = -\rho_{ps}$
Toute charge	$\mathbf{E}$	$\text{div } (\epsilon_0 \mathbf{E}) = \rho_v + \rho_p$	$\llbracket \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \rrbracket_{\Sigma} = \rho_s + \rho_{ps}$

TAB. 2.1: Différentes formes du théorème de Gauss dans un milieu matériel

Pour caractériser l'état électrostatique d'un milieu, on a introduit trois champs ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{D}$ ) et deux types de charges : les charges libres et les charges liées. L'existence de ces trois champs à un endroit donné d'un milieu est étroitement liée à la présence de charges. Les équation (2.11) et (2.23) montrent qu'un champ électrique  $\mathbf{E}$  est créé à la fois par des charges *libres* et des charges *liées*. Ensuite, la contribution de chacune des familles de charges se retrouve :

- d'une part dans le champ de polarisation  $\mathbf{P}$ , qui est créé par la présences de charges *liées* (Eqs. (2.10) et (2.22)), et
- d'autre part dans le champ de déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , qui est créé par la présences de charges *libres* uniquement (Eqs. (2.14) et (2.21))

## 2.3 Isolants et conducteurs en électrostatique

### 2.3.1 Formulation du problème

#### Équations de Maxwell

Les équations de Maxwell pour un milieu matériel donné sont, dans le cas général [45, p. 180] :

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_v, \quad (2.24a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.24b)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2.24c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.24d)$$

où  $\mathbf{B}$  est le champ (ou induction) magnétique et  $\mathbf{H}$  est l'excitation (ou champ) magnétique. En prenant la divergence de l'équation (2.24c) et en utilisant (2.24a), on retrouve l'équation de conservation des charges électriques :

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho_v}{\partial t} = 0. \quad (2.25)$$

L'hypothèse électrostatique [45, p. 181] stipule que les répartitions de charge et les densités de courant sont quasi-stationnaires, ce qui conduit à éliminer les dérivées temporelles des équations (2.24 a-d)<sup>1</sup>. Dans ce cas, le couplage entre les quantités électriques  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  et magnétiques  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$  n'a donc plus lieu et l'état électrostatique (les vecteurs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$ ) ne dépend donc que :

- des équations locales (2.24a) et (2.24d), cette dernière devenant :

$$\boxed{\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}.} \quad (2.26)$$

- de la relation de comportement électrique du milieu (Eq. (2.17) ou (2.19)),
- des conditions aux limites (Eq. (2.21) et (2.30)).

Si besoin est, le vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  peut être calculé par la relation (2.13), en fonction de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  après résolution du problème ci-dessus.

#### Potentiel électrique

L'équation (2.26) montre que le champ électrique  $\mathbf{E}$  est irrotationnel dans le cas électrostatique, ce qui signifie qu'il existe un potentiel électrique  $\phi$  tel que :

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla \phi.} \quad (2.27)$$

On peut remarquer que le potentiel  $\phi$  est alors défini à une constante près, si bien qu'il est souvent commode d'utiliser la différence de potentiel entre deux points, qui s'obtient en intégrant (2.27) sur n'importe quel courbe reliant deux point  $A$  et  $B$  :

$$\boxed{\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \phi_A - \phi_B.} \quad (2.28)$$

<sup>1</sup>Dans le cas d'un problème de vibration avec des éléments piézoélectriques on peut remarquer que la célérité des ondes mécaniques est en ordre de grandeur  $10^{-5}$  fois plus faible que celle des ondes électromagnétiques. Les constantes de temps mécaniques sont donc bien inférieures aux constantes de temps électromagnétiques, et les phénomènes quasi-stationnaires du point de vue des équations de Maxwell [99].

Une conséquence de (2.28) est que la circulation du champ électrique  $\mathbf{E}$  est nulle sur toute courbe fermée  $\Gamma$  :

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0. \quad (2.29)$$

D'un point de vue qualitatif, on représente souvent le champ électrique à partir de ses lignes de champ (c'est à dire les courbes telles que  $\mathbf{E}$  est tangent en tout point). Le potentiel  $\phi$  est représenté par des surfaces équipotentielles (surfaces telles que  $\phi$  est uniforme). L'équation (2.28) montre alors que les lignes de champ sont orthogonales aux surfaces équipotentielles et que si on se déplace dans le même sens que  $\mathbf{E}$ , le potentiel  $\phi$  diminue.

### Condition aux limites additionnelle

Lorsque les variables électriques inconnues sont  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$ , en plus de la condition aux limites sur la composante normale du déplacement électrique (Eq. (2.21), issue du théorème de Gauss, Eq. (2.24a)), on doit aussi considérer celle qui découle de (2.26), qui porte sur la composante tangentielle de  $\mathbf{E}$  au voisinage d'une interface. Elle est obtenue en appliquant (2.29) à une courbe rectangulaire construite sur l'interface et s'écrit [45, p. 148] :

$$\boxed{[[\mathbf{E}_t]]_{\Sigma} = 0}, \quad (2.30)$$

où  $\mathbf{E}_t$  est la projection de  $\mathbf{E}$  sur l'interface ( $\mathbf{E} = E_n \mathbf{n} + \mathbf{E}_t$ ). Ainsi, la composante tangentielle du champ électrique  $\mathbf{E}$  est toujours continue à l'interface entre deux milieux.

## 2.3.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

### Grandeurs électriques dans un conducteur

Comme vu au début du paragraphe 2.2.2, les matériaux conducteurs contiennent des électrons libres capables de créer des courants électriques. Si le conducteur est parfait, c'est à dire que sa conductivité est très grande ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), comme la densité de courant doit avoir une valeur bornée, l'équation (2.7) montre que  $\mathbf{E} = 0$  dans le conducteur ; *le potentiel est donc uniforme dans un conducteur* [45, p. 124, 196-197]. On arrive à la même conclusion lorsque le conducteur est en équilibre électrostatique, où dans ce cas il n'est le siège d'aucun courant électrique :  $\mathbf{J} = \mathbf{0}$

Comme en général un conducteur n'est pas polarisable, on a  $\mathbf{P} = \mathbf{0}$ , ce qui donne  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ , d'après (2.13). Par suite, l'équation (2.24a) montre que  $\rho_v = 0$ , ce qui signifie qu'aucune charge volumique n'est présente dans un conducteur à l'équilibre électrostatique. Par suite, les charges libres contenues dans le conducteur sont toutes concentrées à la surface de celui-ci, ce qui correspond à une densité surfacique de charges libres non nulle ( $\rho_s \neq 0$ ) à la surface du conducteur.

### 2.3.3 Condensateur plan

Un condensateur plan est constitué de deux armatures (ou électrodes) conductrices planes. On peut insérer une couche de matériau diélectrique de permittivité  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ , ou laisser un vide. Sous réserve que les surfaces soient grandes devant l'épaisseur  $e$  de l'espace entre les électrodes, les effets de bord sont négligeables, et les champs sont tous de direction verticale  $\mathbf{E} = E\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{D} = D\mathbf{x}$  et  $\mathbf{P} = P\mathbf{x}$ . En l'absence de perturbation extérieure, les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{P}$  sont négligeables hors du condensateur. En appliquant le théorème de Gauss (Eqs. (2.14) ou Eqs. (2.15)), la relation de comportement (2.17) et les conditions aux limites (2.21) et (2.22), et en tenant compte du fait que les armatures sont conductrices, on trouve :

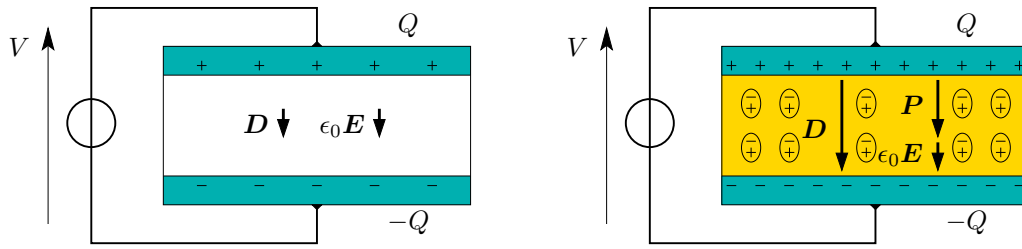


FIG. 2.4: Condensateurs d'armatures identiques, dans le vide (à g.) et avec milieu diélectrique (à droite), soumis à la même différence de potentiel.

- pour une différence de potentiel imposé  $V$  on obtient un champ électrique  $E = -V/e$  ;
- le déplacement électrique est  $D = \epsilon_0 E$  pour un condensateur sans diélectrique ;
- en présence de diélectrique, apparaît une polarisation  $P = \chi_e \epsilon_0 E$  ; le déplacement devient  $D = \epsilon_r \epsilon_0 E$  ;
- sur l'électrode supérieure, la charge surfacique est l'opposé du flux de  $D$  : c'est donc  $Q^+ = -A \epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$
- sur l'électrode inférieure, on trouve une charge opposée :  $Q^- = A \epsilon_r \epsilon_0 (-V/e)$  où  $A$  est l'aire des armatures ;

Finalement, la capacité du condensateur est :

$$V = \frac{Q}{C}, \quad C = \frac{\epsilon_r \epsilon_0 A}{e}, \quad (2.31)$$

On peut formuler les remarques suivantes :

- Le déplacement électrique est toujours dirigé des charges surfaciques *libres* positives vers les négatives. Le vecteur polarisation est quand à lui toujours dirigé dans le sens du déplacement des charges *liées*, c'est-à-dire des charges surfaciques *liées* négatives vers les positives.
- Les interfaces diélectrique/armatures concentrent des charges libres provenant du conducteurs et des charges liées provenant du diélectrique. À l'équilibre, la densité de charges libres est opposée et inférieure à celle des charges liées.
- On peut comparer le condensateur avec un diélectrique de permittivité  $\epsilon$  au même condensateur avec du vide entre les armatures (Fig. 2.4). À potentiel imposé le champ électrique sera le même. La présence du matériau fait apparaître une polarisation,  $D$  augmente et la quantité de charges libres  $Q = AD$  dans les armatures augmente de la même manière, pour équilibrer le déplacement de charges liées dans le diélectrique et ne pas changer la valeur de  $E$ . On doit amener plus de charges libres dans les armatures pour compenser le mouvement des charges liées dans l'isolant. L'effet de la permittivité  $\epsilon_r > 1$  peut être vue de la manière suivante : il ajoute dans  $D$  le vecteur polarisation  $P$  à  $E$ , si bien que le déplacement électrique est augmenté de la valeur de  $P$ , ce qui permet d'accroître la quantité de charges stockable par le condensateur (à  $V$  donné) en déplaçant des charges liées dans le milieu. C'est pour cette raison que la capacité du condensateur est directement proportionnelle à  $\epsilon_r$ .

## 2.4 Piézoélectricité

### 2.4.1 Historique

Les premières théories et observations de l'effet piézoélectrique direct sont dues aux travaux de Pierre et Jacques Curie présentés en 1880 [27] sur les cristaux présentant une structure asymétrique. Gabriel Lippman a montré en 1881 que la thermodynamique impliquait l'existence de l'effet indirect [54], mis en évidence de manière expérimentale par les frères Curie [27] l'année suivante. Les premières applications seront des appareils de mesure en laboratoire (balance de précision et générateur de charges utilisant l'effet piézoélectrique respectivement direct et indirect).

En 1910, Woldemar Voigt publie une étude rigoureuse des classes de cristaux asymétriques et de leur propriétés piézoélectriques [106].

Pendant la première guerre mondiale, l'invention du sonar va catalyser la recherche sur le sujet ; pendant la seconde guerre, la demande importante va contribuer à créer une industrie de la céramique piézoélectrique.

### 2.4.2 Principales catégories de matériaux piézoélectriques

#### Cristaux

Un certain nombre de cristaux présentent un comportement piézoélectrique ; on peut citer le quartz, la tourmaline, le sel de Seignette <sup>2</sup>, le sucre ... Ce comportement apparaît dans des cristaux présentant une structure asymétrique et des liaisons ioniques ; il peut être décrit en observant la figure (2.5), qui représente une vue de la structure du quartz<sup>3</sup>.

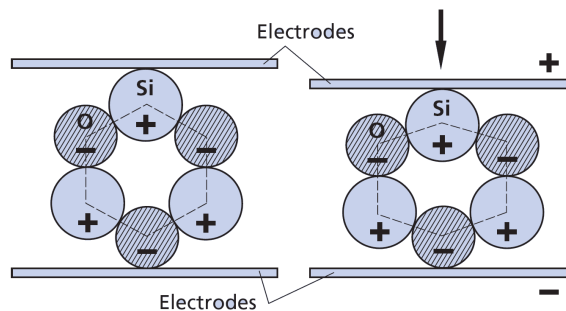


FIG. 2.5: Coupe d'une cellule élémentaire d'un cristal de quartz sous l'action d'un effort mécanique [87]

**Effet direct** Si on applique un effort, les contraintes mécaniques qui apparaissent dans le matériau provoquent des déformations de sa structure cristalline et ainsi des déplacements relatifs des charges électriques des ions. Ces déplacements correspondent à une polarisation électrique dans le matériau. L'état électrostatique (représenté par les champs électrique  $\mathbf{E}$  et déplacement électrique  $\mathbf{D}$ , reliés à la polarisation  $\mathbf{P}$  par l'équation (2.13)) du matériau est ainsi modifié par une action mécanique : c'est l'effet direct. Dans le cas du cristal de quartz de la figure 2.5, les centres de gravité des charges positives et négatives sont confondus en l'absence d'effort extérieur. Sous l'action de l'effort de compression, le centre des charges positives descend et celui des charges négatives remonte : un vecteur polarisation dirigé vers le bas apparaît alors.

<sup>2</sup>acide tartrique cristallisé, aussi appelé sel de Rochelle

<sup>3</sup>la structure du quartz est très complexe mais cette projection simplifie la représentation

**Effet inverse** Inversement, l'application d'un champ électrique extérieur crée des forces électrostatiques sur les charges électriques liées aux molécules du cristal, qui se déplacent les unes par rapport aux autres, créant ainsi des déformations dans le matériau. Ainsi, l'état mécanique du matériau est modifié par une action électrostatique : c'est l'effet piézoélectrique inverse.

Les cristaux naturellement disponibles étaient au départ la source exclusive de matériaux piézoélectriques ; cependant leur fragilité, la difficulté de les obtenir en grandes pièces et de les mettre en forme est un problème. De plus, le coefficient de couplage des cristaux naturels n'est pas très élevé. À l'heure actuelle, on développe des cristaux de synthèse comme l'orthophosphate de gallium  $GaPO_3$ , au coefficient de couplage très élevé ; les difficultés de fabrication et de mise en œuvre subsistent.

### Céramiques

À la différence des cristaux dont la structure est figée, les céramiques piézoélectriques ont une structure qui peut varier ; leur polarisation peut être modifiée, après quoi ils présentent une polarisation rémanente<sup>4</sup>. Une famille importante de céramiques piézoélectriques est celle des PZT (Oxyde de plomb, zirconium et titane ou *Lead-Zirconate-Titanate* en anglais) qui possèdent d'excellentes propriétés piézoélectriques. Leur formule générale s'écrit  $A^{2+} B^{4+} O_3^{2-}$  où A est un ion métallique divalent (comme le Plomb ou le Barium) et B est un ion métallique tétravalent (comme le titanium ou le zirconium)<sup>5</sup>. Une cellule élémentaire ou maille est représentée sur la figure 2.6.

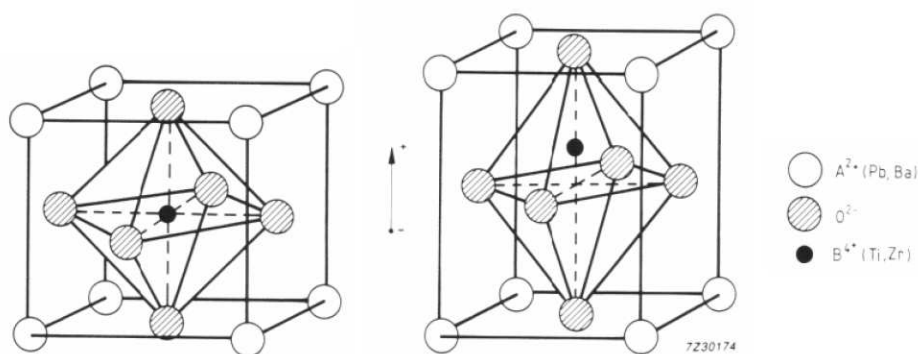


FIG. 2.6: Cellule élémentaire d'un PZT. Gauche : structure cubique non polarisée (au dessus de la température de Curie) ; droite : structure tétragonale polarisée (en dessous de la température de Curie) [64]

**Structure initiale** Au dessus d'une température appelée température de Curie (entre 200°C et 350°C pour les PZT [79]), ces cristaux ont une structure cristalline cubique (fig. 2.6 à gauche) avec les centres de gravité des charges positives et négatives coïncidents, si-bien qu'ils ne sont pas polarisés (ils sont dit paraélectriques) ; comme ils sont souvent obtenus par frittage à chaud, ils commencent leur existence sous cette forme. Au sein du matériau, on

<sup>4</sup>On les dit ferroélectriques, par analogie entre les propriétés de polarisation et la magnétisation des matériaux ferromagnétiques. Les céramiques étudiées ne contiennent en général pas de fer [64, 43]

<sup>5</sup>Les PZT sont en général formés de cristaux de zirconate de plomb  $Pb^{2+} Zr^{4+} O_3^{2-}$  et de titanate de plomb  $Pb^{2+} Ti^{4+} O_3^{2-}$ , frittés et en proportions à peu près égales [43]. Le titanate de Barium  $Ba^{2+} Ti^{4+} O_3^{2-}$  est une autre céramique piézoélectrique qui possède la même structure cristalline que les PZT (fig. 2.6).

peut distinguer plusieurs cristallites ou grains, où la structure est régulière.

En dessous de la température de Curie, les cristaux ont une structure tétragonale (fig. 2.6 à droite) pour laquelle l'ion  $B^{4+}$  n'est plus au centre de la structure, si bien que chaque maille est le siège d'un dipôle électrostatique, dont la direction et le moment peuvent être modifiés par application d'un champ électrostatique (ils est alors ferroélectrique). Plusieurs mailles contigues ont en général la même polarisation et constituent un domaine ferroélectrique (ou domaine de Weiss) auquel est associé un vecteur polarisation  $\mathbf{P}$  particulier. Au sein d'un cristallite donné peuvent coexister plusieurs domaines de Weiss, avec une polarisation qui peut prendre 6 directions différentes (on pourrait tourner la maille fig. 2.6 à droite dans 6 directions différentes).

Le matériau à ce stade est globalement isotrope et ne présente pas de couplage piézoélectrique (figure 2.8 (a)).

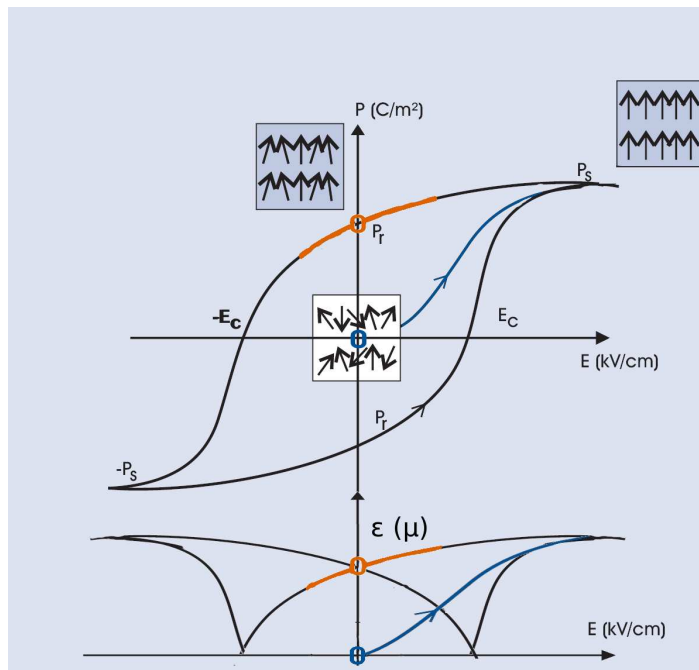


FIG. 2.7: Polarisation et déformation en fonction du champ électrique, adapté de [79]

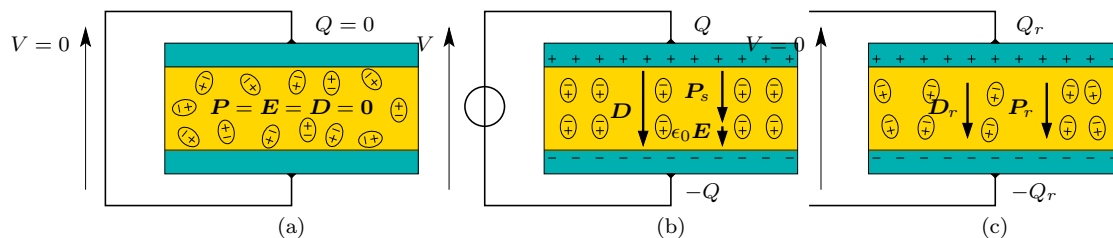


FIG. 2.8: Différents états d'une pastille piézoélectrique. (a) état non polarisé ( $P = 0$ ); (b) état saturé ( $P = P_s$ ); (c) pastille après polarisation ( $P = P_r$ )

**Polarisation** On munit l'élément piézoélectrique d'électrodes et on applique un champ électrique important.  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{E}$  prennent des valeurs importantes (figure 2.7, tracé bleu);



au sein du cristal, les ions  $B^{4+}$  se déplacent dans les mailles en direction de l'électrode négative. La polarisation augmente rapidement et de façon non linéaire ; dans chaque cristallite, le domaine de Weiss qui correspond à une des 6 directions la plus proche du champ électrique croît, jusqu'à ce que chaque cristallite soit entièrement polarisé dans la même direction. Ensuite la polarisation cesse d'augmenter rapidement ; on dit que l'on est arrivé à saturation, et presque tous les dipôles sont alignés avec le champ électrique (figure 2.8 (b)). En même temps que ces modifications se produisent, les mailles se déforment, s'étirent légèrement dans la direction du champ et se rétrécissent orthogonalement ; au niveau macroscopique on observe que le matériau s'étire dans la direction d'application du champ et se rétrécit dans la direction orthogonale.

**Polarisation rémanente** Si maintenant on cesse d'appliquer un champ électrique et que l'on ramène la différence de potentiel entre les électrodes à 0 (figure 2.8 (c), figure 2.7 au point cerclé en orange) , les ions ne se réarrangent pas dans les mailles de manière uniforme ; la plupart d'entre eux restent orientés vers l'électrode négative. Il subsiste ainsi une polarisation rémanente  $P_r$  et un déplacement électrique  $D_r$  ; ainsi qu'une charge libre à la surface des électrodes, qui assure un champ électrique nul ;  $Q_r = P_r A$  où  $A$  est la surface des électrodes. À partir de maintenant, les évolutions se font autour de cet état d'équilibre. Dans cet état le matériau présente aussi une déformation rémanente.

**Effet piézoélectrique** Pour de petites variations du champ électrique autour de cet état polarisé, on obtient une déformation du matériau (figure 2.7, partie du graphe en orange) ; le matériau au niveau macroscopique présente désormais un couplage piézoélectrique. Ce comportement peut s'expliquer par le fait que les mailles sont plus ou moins toutes alignées ; si on observe une maille seule (figure 2.9), sous l'application d'un champ électrique dans la direction de polarisation rémanente (souvent appelée direction 3), on observe un étirement dans l'axe de polarisation (ce qu'on appelle le couplage "33") et une contraction dans les directions orthogonales (couplage "31" ) (figure 2.9, au centre) . Ces deux couplages sont les plus fréquemment utilisés, car les mêmes électrodes sont utilisées pour la polarisation et pour utiliser l'effet piézoélectrique. Si par contre on parvient à appliquer un champ orthogonal à la direction de polarisation rémanente, ce qui requiert de nouvelles électrodes et éventuellement d'enlever les anciennes, on obtient un cisaillement du matériau (couplage "51" figure 2.9, au centre). On peut remarquer que si l'on dépasse certaines valeurs du champ électrique on risque de dépolariiser le matériau, en changeant de branche du cycle de la figure 2.7.

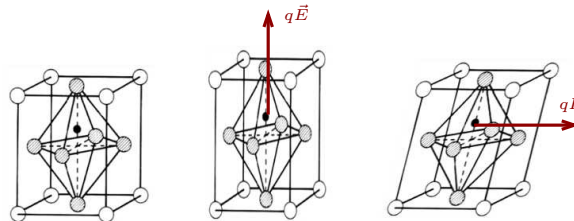


FIG. 2.9: Efforts sur l'ion positif et déformations de la maille pour un champ nul, parallèle ou orthogonal à la polarisation rémanente

**Propriétés** Les céramiques piézoélectriques sont produites et utilisées en volume. Du point de vue de la fabrication, l'obtention par frittage permet une variété de formes et de tailles bien plus importante que pour les cristaux. Pour obtenir un couplage important, il est préférable de maximiser le champ en tout point lors de la polarisation ; pour ce faire, une épaisseur constante entre les électrodes est préférable. Les éléments piézoélectriques sont donc très souvent des plaquettes droites ; on trouve aussi des portions de coque sphérique [87].

Les céramiques présentent des coupages élevés, mais sont fragiles. Presque tous les paramètres piézoélectriques sont sensibles à la température [79], et peuvent évoluer au cours du temps. Cependant, il est possible de les repolariser périodiquement afin de compenser ce vieillissement.

### Polymère PVDF

Le polyfluorure de vinylidène (Polyvinylidene fluoride, PVDF) est un polymère thermoplastique très résistant et léger ; il peut de plus présenter des propriétés piézoélectriques. Le motif élémentaire (monomère) qui constitue le matériau est répété suivant la formule  $-(CH_2CF_2)_n-$ , avec les atomes de fluor et d'hydrogène constituant un dipôle électrostatique (figure 2.10). Sur une même chaîne les directions de ces dipôles sont variées et aucune polarisation n'apparaît globalement. De plus, le matériau est constitué de nombreuses chaînes moléculaires entremêlées ; il est difficile d'obtenir une polarisation rémanente dans cette configuration.

Afin d'avoir une polarisation rémanente il est nécessaire d'aligner les chaînes de molécules ; pour ce faire le matériau est étiré à chaud, puis muni d'électrodes (souvent un film mince de métal) ; il est alors possible d'appliquer un champ électrique intense et d'aligner chaque dipôle avec le champ ; on obtient une polarisation rémanente du matériau. Cela a aussi pour effet de faire apparaître un effet piézoélectrique [91].

Par rapport aux céramiques et cristaux, le PVDF est bien plus souple, léger, et supporte des déformations plus importantes. L'obtention du matériau sous forme de film souple, peu cher et facile à mettre en œuvre lui donne de bonnes propriétés en tant que capteur. Par contre le couplage piézoélectrique est plus faible que celui observé dans les autres matériaux. Sa raideur réduite rend difficile l'adaptation d'impédance mécanique avec des structures rigides.

### Composites piézoélectriques

Afin de s'affranchir d'un certain nombre de problèmes inhérents aux céramiques (fragilité, raideur excessive) de nombreux travaux visent actuellement à associer des fibres en céramique piézoélectrique (la qualité de fabrication - et la durée de vie - de la céramique est bien meilleure sous cette forme) à un réseau d'électrodes appropriées (par exemple, orthogonales aux fibres et alternées, fig. 2.11). Le tout est noyé dans une matrice époxy qui protège et assure la tenue mécanique de l'ensemble. En choisissant bien la forme des électrodes on peut assurer une polarisation du matériau permettant un bon couplage piézoélectrique ; l'idée est d'obtenir une polarisation dans la direction des fibres (et de la contrainte que subira le matériau), et d'exploiter ainsi le couplage "33" (fig. 2.9).

Le composite obtenu ainsi est souple et peut être facilement associé à des surfaces courbes. De nombreux travaux sont consacrés à ces développements [107, 93, 65]. La modélisation de ces matériaux fait souvent appel à une première phase d'homogénéisation de l'élément composite, pour obtenir des équations similaires à un élément piézoélectrique monolithique.

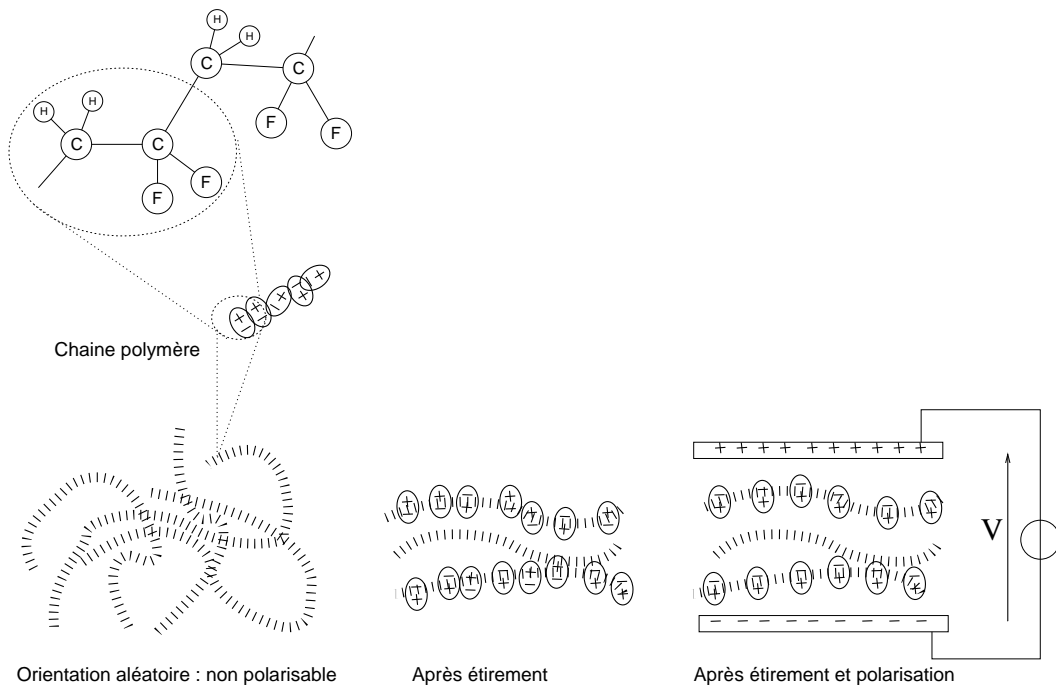


FIG. 2.10: Structure du PVDF et polarisation

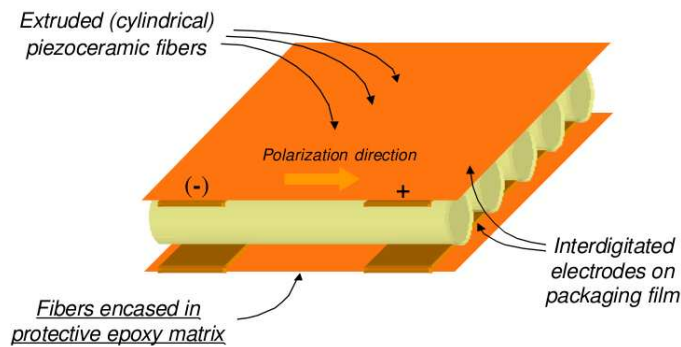


FIG. 2.11: Composite piézoélectrique à électrode croisée [107]. Le champ électrique est dans la direction de contraction et d'étirement des fibres.

### 2.4.3 Spécificités

Les éléments piézoélectriques sont utilisés pour des applications de capteur où l'on utilise l'effet piézoélectrique direct ou d'actionneur en utilisant l'effet piézoélectrique inverse. Ils ont des spécificités dans ce domaine qui les font préférer à d'autres éléments ou systèmes à couplage électromécanique (par exemple, actionneurs électrodynamiques de type bobine-aimant, alliages à mémoire de forme, dispositifs électrostrictifs ...) :

- Ce sont des actionneurs / capteurs solides travaillant directement en déformation, il n'y a pas de mécanisme pouvant s'user ou frotter. Cela est un avantage pour les applications dans des milieux hostiles. De plus, comme il faut les placer aux maximums de déformation, l'ajout de masse correspondant se fait à un endroit où les vitesses sont faibles et est donc peu pénalisant.

- Ils présentent une bonne linéarité et une réponse quasi-instantanée. Des applications haute fréquence sont ainsi possibles.
- Le phénomène étant réversible, le rendement est élevé.
- La puissance massique admissible est importante, sous réserve de travailler en haute fréquence.
- Les céramiques sont très rigides (impédance mécanique élevée) et les tensions apparaissant sont élevées pour de faibles déformations (sensibilité).

Au nombre de leurs défauts, on peut citer un prix de revient pour l'instant assez élevé, un vieillissement mal connu, et aussi le fait que les hautes tensions et faibles charges en jeu ne sont pas toujours adaptée au couplage avec des circuits électroniques (en particulier il faut souvent un amplificateur haute tension pour actionner un élément piézoélectrique). Enfin, travaillant en déformation, ils ne permettent que de faibles déplacements.

#### 2.4.4 Applications

On trouve d'ores et déjà des éléments piézoélectriques dans des bien des applications industrielles :

- Dans des capteurs de pression, d'effort, ou d'accélération où l'effet direct est utilisé : la linéarité et la sensibilité (tensions détectables même pour de faibles efforts) sont mises à profit.
- Des émetteurs ultrasonores utilisent l'effet indirect ; en particulier on peut citer l'utilisation comme émetteur dans les systèmes sonar, première application de l'effet indirect proposée par Langevin en 1915. Des éléments piézoélectriques sont également utilisés pour détecter les ondes sonores dans l'eau, où leur impédance mécanique et leur sensibilité fait de très bons hydrophones. On peut aussi utiliser ce type de systèmes en imagerie médicale (échographie). Ces systèmes sont aussi utilisés dans l'air et maintenant répandus jusque dans les pare-chocs de certaines voitures (improprement appelés radars de recul).
- Le rendement et la puissance des émetteurs peuvent être très élevés si on les utilise à leur résonance mécanique ; on le trouve dans des applications comme le nettoyage à ultrasons (les ondes de pression émises dans un liquide provoquent de la cavitation à la surface de la pièce à nettoyer), la soudure par ultrasons (où les vibrations à l'interface entre deux pièces créent de la chaleur), la destruction de calculs rénaux et tumeurs cancéreuses (où on focalise des ultrasons sur la partie à détruire), le détartrage des dents (où l'outil du dentiste vient gratter la surface des dents) ...
- On peut aussi utiliser des éléments piézoélectriques comme haut-parleurs d'aigu (tweeters à pavillon avec élément céramique) ou large bande (où la membrane du haut-parleur est un film PVDF) ; ils ont un meilleur rendement que des haut-parleurs électrodynamiques mais une qualité souvent réduite, du fait de la présence de résonances mécaniques.
- On utilise des éléments piézoélectriques dans des circuits d'horloge (montre à quartz) où les oscillations mécaniques à haute fréquence d'un petit élément piézoélectrique (souvent appelé quartz) sont couplées à un circuit qui compte les oscillations ; l'oscillateur ainsi constitué est très stable et constitue l'horloge de nombreux circuits électroniques.
- On peut également réaliser des gyroscopes piézoélectriques ; un élément piézoélectrique est mis en vibration par effet indirect ; puis l'effet direct est utilisé pour mesurer les variations de ces vibrations liées aux effets de Coriolis.

- Dans certains transformateurs, on utilise les vibrations d’un bloc de matériau piézoélectrique pour abaisser une tension ; le bloc est mis en vibration par le circuit primaire et l’énergie des vibrations est récupérée pour alimenter le circuit secondaire, avec une tension différente.
- Dans les briquets dits “électroniques”, les hautes tensions générées par un choc ou une pression importante sur une céramique permettent d’obtenir une étincelle.
- On utilise des éléments piézoélectriques pour des applications de micro-positionnement dans des microscopes, de contrôle de déformation dans des optiques adaptatives, ou de contrôle de vibrations.
- Dans des moteurs piézoélectriques, ou moteurs à ultrasons, on utilise un éléments piézoélectrique pour produire des ondes de surface dans une pièce métallique au contact d’une autre ; suivant la nature des ondes les points de contact vont se déplacer et provoquer le mouvement relatif des deux pièces. Ce type de moteur est utilisé dans certains dispositifs auto-focus d’appareils photo ; ses avantages sont d’être bloqué à l’arrêt et d’avoir la forme d’un anneau monté autour de l’objectif.

D’autres applications font actuellement l’objet de développements :

- On envisage de récupérer l’énergie de vibrations mécaniques sous forme électrique : on parle de *piezoelectric energy harvesting* [53, 51, 5].
- La miniaturisation croissante fait que les procédés de fabrication permettent d’intégrer des éléments piézoélectriques directement sur des circuits intégrés ; puis les échelles ont diminué jusqu’à ce que l’on parle de MEMS et NEMS (*Micro et Nano ElectroMechanical Systems*) ; ils sont toujours utilisés comme capteurs ou actionneurs, mais l’application finale peut différer complètement ; on peut ainsi créer de nouveaux capteurs physiques ou chimiques [67, 96], ou encore des filtres électroniques.
- Un effort est en cours pour réduire les coûts des capteurs piézoélectriques, en utilisant des films PVDF par exemple, et pour les adapter à des cas spécifiques : écrans ou capteurs tactiles par exemple ; en imprimant des électrodes adaptées on peut réaliser différentes fonctions [81].

## 2.5 Piézoélectricité linéaire

On va maintenant écrire la loi de comportement ensuite utilisée dans ce document. Les grandeurs qui entrent en jeu sont :

- le champ des contraintes  $\boldsymbol{\sigma}$ , un tenseur d’ordre 2, de composante  $\sigma_{ij}$ , exprimées en Pa ;
- le champ des déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , un tenseur d’ordre 2, de composante  $\varepsilon_{kl}$ , sans dimension ;
- le champ déplacement électrique  $\boldsymbol{D}$ , de composantes  $D_i$ , exprimées en C/m<sup>2</sup> et
- le champ électrique  $\boldsymbol{E}$ , de composantes  $E_k$ , exprimé en V/m.

où  $i, j, k, l$  peuvent correspondre aux trois directions  $x, y, z$ .

### 2.5.1 Loi de comportement

Lorsque les grandeurs électriques ( $\boldsymbol{E}$  et  $\boldsymbol{D}$ ) et mécaniques ( $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ) sont d’intensité modérée, on fait l’approximation de relations linéaires entre ces grandeurs. À partir du premier

principe de la thermodynamique, qui stipule l'existence d'une énergie interne  $U$  et la conservation de l'énergie, on montre que nécessairement, à température constante<sup>6</sup>[54, 99] :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial H}{\partial E_i}, \quad (2.32)$$

avec l'enthalpie définie par

$$H = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} = H(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E}), \quad (2.33)$$

qui dépend des variables  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{E}$ . Comme on ne s'intéresse qu'à une théorie linéaire, on écrit  $H$  sous la forme :

$$H = \frac{1}{2} c_{ijkl}^E \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_i \varepsilon_{jk} - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^E E_i E_j. \quad (2.34)$$

On obtient alors la relation de comportement suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = c_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, & (2.35a) \\ D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \varepsilon_{ik}^E E_k. & (2.35b) \end{cases}$$

Les constantes qui apparaissent dans ces équations sont :

- $c_{ijkl}^E$  : les constantes de raideur à champ électrique constant, exprimé en Pa,
- $e_{kij}$  : les constantes piézoélectriques, exprimées en N/m/V,
- $\varepsilon_{ik}^E$  : les permittivités ou constantes diélectriques, à déformation nulle, exprimées en F/m.

Elles vérifient les symétries suivantes [99] :

$$c_{ijkl} = c_{ijlk} = c_{jikl} = c_{klij}, \quad e_{ijk} = e_{ikj}, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.36)$$

Ces relations correspondent à une linéarisation du comportement des matériau piézoélectrique autour de leur état de repos. Dans le cas des cristaux piézoélectriques évoqués au paragraphe 2.4.2, qui ne sont pas polarisés à l'état de repos, c'est une linéarisation autour de l'état  $E = D = P = 0$ . Dans le cas des céramiques piézoélectriques décrites au paragraphe 2.4.2, c'est une linéarisation autour de l'état de polarisation rémanente. D'un point de vue graphique, les courbes de la figure 2.7 donnent une interprétation graphique de la valeur de certains  $\varepsilon_{ik}$  et  $e_{ijk}$ , par la pente de la tangente aux courbes, autour du point circé en orange. Dans ce dernier cas, les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{D}$  des relations (2.35) correspondent à des petites variations autour des valeurs à l'équilibre  $E = 0, P = D = P_r$ . D'autre part, il est intéressant de remarquer qu'une pastille piezoélectrique au repos a ses électrodes qui contiennent une quantité de charge non-nulle : la charge libre calculée à partir du  $\mathbf{D}$  de (2.35) est là encore une variation autour de  $Q = Q_r$  (Fig. 2.8(c)).

### Indices contractés et lois alternatives

Pour pouvoir écrire des relations avec des matrices à deux indices, et en tenant compte des symétries des Eqs. (2.36), il est commode d'utiliser des notations avec indices contractés appelées aussi notations de Voigt-Kelvin [82], résumées dans le tableau 2.2, de sorte que toutes les grandeurs des relations (2.35) deviennent des vecteurs ou des matrices, que l'on note :  $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_i)^\top$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_i)^\top$  etc. La relation de comportement (2.35) s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}^E & -\mathbf{e}^\top \\ \mathbf{e} & \boldsymbol{\varepsilon}^E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

De plus, selon les variables indépendantes utilisées, on peut écrire quatre relations de comportement équivalentes, résumées dans le tableau 2.3 [41, 101].

<sup>6</sup>Des relations analogues sont obtenus non plus en conditions isothermes mais en condition adiabatiques, la distinction étant rarement mentionnée [41, 101]

	Contraintes						Déformations					
Tensorielles	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$\sigma_{zz}$	$\sigma_{yz}$	$\sigma_{xz}$	$\sigma_{xy}$	$\varepsilon_{xx}$	$\varepsilon_{yy}$	$\varepsilon_{zz}$	$2\varepsilon_{yz}$	$2\varepsilon_{xz}$	$2\varepsilon_{xy}$
Voigt	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\varepsilon_3$	$\varepsilon_4$	$\varepsilon_5$	$\varepsilon_6$

TAB. 2.2: Correspondance entre les notations tensorielles et les notations de Voigt

Forme	Variables indep.	Variables	Relation de comportement
Forme “en $d$ ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$	Intensives	$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^E \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{d}^\top \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{d} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{E} \end{cases}$
Forme “en $e$ ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{E})$	Mélangées	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^E \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^\top \mathbf{E} \\ \mathbf{D} = \mathbf{e} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon \mathbf{E} \end{cases}$
Forme “en $g$ ”	$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{D})$	Mélangées	$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{s}^D \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{g}^\top \mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -\mathbf{g} \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}^\sigma \mathbf{D} \end{cases}$
Forme “en $h$ ”	$(\boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{D})$	Extensives	$\begin{cases} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{c}^D \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{h}^\top \mathbf{D} \\ \mathbf{E} = -\mathbf{h} \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{D} \end{cases}$

TAB. 2.3: Différentes formes de la loi de comportement piézoélectrique linéaire [2, 101]

Élastiques	Piézoélectriques	Diélectriques
$\mathbf{s}^D = \mathbf{s}^E - \mathbf{d}^\top \mathbf{g}$	$\mathbf{d} = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma \mathbf{g}$	$\boldsymbol{\beta}^\sigma = (\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^{-1}$
$\mathbf{c}^E = (\mathbf{s}^E)^{-1}$	$\mathbf{e} = \mathbf{d} \mathbf{c}^E$	$\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon = \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma - \mathbf{e} \mathbf{d}^\top$
$\mathbf{c}^D = \mathbf{c}^E + \mathbf{e}^\top \mathbf{h}$	$\mathbf{h} = \boldsymbol{\beta}^\varepsilon \mathbf{e}$	$\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = \boldsymbol{\beta}^\sigma + \mathbf{h} \mathbf{g}^\top$
$\mathbf{c}^D = (\mathbf{s}^D)^{-1}$	$\mathbf{h} = \mathbf{g} \mathbf{c}^D$	$\boldsymbol{\beta}^\varepsilon = (\boldsymbol{\varepsilon}^\varepsilon)^{-1}$

TAB. 2.4: Relation de passage entre les constantes élastique, piézoélectrique et diélectriques [2]

Cas d'une céramique piézoélectrique

**Material Data**

Material type		PIC 151	PIC 255	PIC 155	PIC 153	PIC 152
<b>Parameter</b>						
<b>Physical and dielectric properties</b>						
Density	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	7.80	7.80	7.80	7.60	7.70
Curie temperature	$T_c$ (°C)	250	350	345	185	340
Permittivity	in the polarization direction $\epsilon_{33}^T / \epsilon_0$	2400	1750	1450	4200	1350
	perpendicular to the polarity $\epsilon \quad \epsilon$	1980	1650	1400		
Dielectric loss factor	$\tan\delta$	20	20	20	30	15
<b>Electromechanical properties</b>						
Coupling factors	$k_D$	0.62	0.62	0.62	0.62	0.48
	$k_t$	0.53	0.47	0.48		
	$k_{31}$	0.38	0.35	0.35		
	$k_{33}$	0.69	0.69	0.69		0.58
	$k_{15}$			0.66		
Piezoelectric charge constants	$d_{31}$	-210	-180	-165		
	$d_{33}$ (10 <sup>-12</sup> C/N)	500	400	360	600	300
	$d_{15}$		550			
Piezoelectric voltage constants	$g_{31}$ (10 <sup>3</sup> Vm/N)	-11.5	-11.3	-12.9		
	$g_{33}$	22	25	27	16	25
<b>Acousto-mechanical properties</b>						
Frequency constants	$N_0$	1950	2000	1960	1960	2250
	$N_1$	1500	1420	1500		
	$N_3$	1750		1780		
	$N$	1950	2000	1990	1960	1920
Elastic constants (compliance)	$S_{11}^E$ (10 <sup>-12</sup> m <sup>2</sup> /N)	15.0	16.1	15.6		
	$S_{33}^E$	19.0	20.7	19.7		
Elastic constants (stiffness)	$C_{33}^D$ (10 <sup>10</sup> N/m <sup>2</sup> )	10.0		11.1		
Mechanical quality factor	$Q_m$	100	80	80	50	100
<b>Temperature stability</b>						
Temperature coefficient of $\epsilon_{33}$ (in the range -20°C up to +125°C)	$TK \epsilon_{33}$ (x10 <sup>-3</sup> /K)	6	4	6	5	2
<b>Aging stability (relative change of the parameter per decade in %)</b>						
Relative dielectric constant	$C$		-1.0	-2.0		
Coupling factor	$C_K$ (%)		-1.0	-2.0		

Further information:

The following values are valid approximations for all PZT materials from PI Ceramic.

Specific heat capacity	HC = approx. 350 J / kg K
Specific thermal conductivity	TC = approx. 1.1 W / m K
Poisson's ratio	$\nu$ = approx. 0.34
Coefficient of thermal expansion	$\alpha_s$ = approx. -4 to -6 x 10 <sup>-6</sup> / K (in the polarization direction, shorted) $\alpha_{\perp}$ = approx. 4 to 8 x 10 <sup>-6</sup> / K (⊥ to the polarization direction, shorted)
Static compressive strength	larger than 600 Mpa

TAB. 2.5: Extrait du catalogue Polytec PI [79]

Une céramique piézoélectrique, polarisée dans une direction donnée, est en général considérée comme un matériau isotrope transverse, avec le plan d'isotropie orthogonal à la direction de polarisation. La forme en  $e$  de la relation de comportement, dans le cas où la direction de polarisation est  $z \equiv 3$ , s'écrit alors sous la forme matricielle suivante :



$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{12}^E & C_{11}^E & C_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\ C_{13}^E & C_{13}^E & C_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & 0 & 0 & -e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^E & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix}$$

La polarisation explique les composantes nulles de l'opérateur  $e$  : seule la composante suivant  $z$  ( $E_3 = E_z$ ) du champ électrique crée des contraintes normales  $\sigma_{ii}$ . Inversement, seule la composante suivant  $z$  ( $D_3 = D_z$ ) du déplacement électrique est modifiée par des déformations normales  $\varepsilon_{ii}$ . Ce matériau est alors caractérisé par 11 constantes indépendantes (6 élastiques, 3 piézoélectriques et 2 diélectriques). Le tableau 2.5 précise la valeur des constantes pour quelques matériaux piézoélectrique du commerce.

### Lois de comportement réduites pour les poutres

Si on s'intéresse au comportement électromécanique d'un solide piézoélectrique de la forme d'une poutre, on est conduit à réduire la relation de comportement pour ne faire apparaître que les grandeurs mécaniques dans l'axe de la poutre et les grandeurs électriques dans la direction de polarisation.

On considère une poutre dont l'axe principal est la direction 1. Pour fixer les idées, on s'intéresse à un couplage 31, qui est observé lorsque le matériau est polarisé suivant la direction 3 et qu'on considère les couplage entre les grandeurs mécaniques axiales ( $\sigma_1$  et  $\varepsilon_1$ ) et les grandeurs électriques transverses ( $E_3$  et  $D_3$ ). Pour réduire la loi de comportement tridimensionnelle, on peut considérer les deux cas suivants :

**Hypothèses "poutre"** Dans le cas purement élastique, ces hypothèses sont bien adaptées à une poutre dont les dimensions de la section suivant 2 et 3 sont comparables. Il s'agit de supposer que les contraintes sont nulles dans les directions 2 et 3 :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (2.38)$$

Dans ce cas, la loi de comportement tridimensionnelle "en  $d$ " se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^E E_3 \end{cases}. \quad (2.39)$$

Celle "en  $e$ " (Eq. (2.38)) s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33}^E E_3 \end{cases} \quad (2.40)$$

où  $\bar{c}_{11}^E$ ,  $\bar{e}_{31}$  et  $\bar{\epsilon}_{33}^E$  sont les constantes matériaux modifiées en tenant compte de (2.38), définies par :

$$\bar{c}_{11}^E = Y_1^E = c_{11} + \frac{c_{12}^2 c_{33} + c_{13}^2 c_{11} - 2c_{12} c_{13} c_{23}}{\Delta}, \quad (2.41a)$$

$$\bar{e}_{31} = e_{31} - \frac{c_{12} c_{33} - c_{13} c_{23}}{\Delta} e_{31} - \frac{c_{13} c_{11} - c_{12} c_{23}}{\Delta} e_{33}, \quad (2.41b)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^E = \epsilon_{33}^E + \frac{c_{33} e_{31}^2 + c_{11} e_{33}^2 - 2c_{23} e_{31} e_{33}}{\Delta}, \quad (2.41c)$$

avec

$$\Delta = c_{11}c_{33} - c_{23}^2. \quad (2.42)$$

et  $Y_1$  le module d'Young du matériau dans le plan 12. On précise que tous les  $c_{ij}$  sont à champ électrique constant - ou "en court circuit".

On obtient des relation analogues en réduisant de la même manière les lois tridimensionnelles "en  $g$ " et "en  $h$ ". Le tableau 2.6 regroupe les quatre lois réduite possible. On peut remarquer que celles "en  $d$ " et "en  $g$ " font apparaître les coefficients tridimensionnels alors que celles "en  $e$ " et "en  $h$ " ont des constantes modifiées.

Enfin, en identifiant deux à deux les lois du tableau 2.6, on obtient les relations de passage suivantes :

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{s_{11}^E}, \quad \bar{c}_{11}^D = \frac{1}{s_{11}^D}, \quad \epsilon_{33}^\sigma = \frac{1}{\beta_{33}^\sigma}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon = \frac{1}{\beta_{33}^\varepsilon}, \quad (2.43a)$$

$$s_{11}^D = s_{11}^E - \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad \bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}, \quad (2.43b)$$

$$\bar{e}_{31} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E}, \quad g_{31} = \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad \bar{h}_{31} = \frac{g_{31}}{s_{11}^D}. \quad (2.43c)$$

On montre ainsi que la raideur en court-circuit est toujours plus faible que celle en circuit ouvert et que la permittivité à déplacement bloqué est plus faible que celle à contrainte nulle. Le tableau 2.7 donne quelques valeurs numériques dans le cas du matériau PIC151.

**Hypothèses "plaque"** Dans le cas purement élastique, ces hypothèses sont bien adaptées à une poutre de section rectangulaire, avec l'épaisseur (suivant 3) petite devant sa largeur (suivant 2). On suppose ici que les contraintes sont nulles dans la direction transverse 3 et que les déplacements sont bloqués dans la direction 2 et 3 :

$$\varepsilon_2 = 0, \quad \sigma_3 = 0. \quad (2.44)$$

Dans ce cas, la loi de comportement tridimensionnelle "en  $d$ " se réduit à l'expression suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \bar{s}_{11}^E \sigma_1 + \bar{d}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{d}_{31} \sigma_1 + \bar{\epsilon}_{33}^\sigma E_3 \end{cases} \quad (2.45)$$

où  $\bar{s}_{11}^E$ ,  $\bar{d}_{31}$  et  $\bar{\epsilon}_{33}^\sigma$  sont les constantes matériaux modifiées en tenant compte de (2.44), définies par :

$$\bar{s}_{11}^E = s_{11}^E (1 - \nu_{12}^2), \quad \bar{d}_{31} = d_{31} (1 + \nu_{12}), \quad \bar{\epsilon}_{33}^\sigma = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E}. \quad (2.46)$$

La relation de comportement "en  $e$ " se réduit à l'équation (2.40) avec les constantes réduites suivantes :

$$\bar{c}_{11}^E = \frac{1}{\bar{s}_{11}^E} = \frac{1}{s_{11}^E (1 - \nu_{12}^2)}, \quad \bar{e}_{31} = \frac{\bar{d}_{31}}{\bar{s}_{11}^E} = \frac{d_{31}}{s_{11}^E (1 - \nu_{12})}, \quad (2.47)$$

$$\bar{\epsilon}_{33}^\varepsilon = \bar{\epsilon}_{33}^\sigma - \frac{\bar{d}_{31}^2}{\bar{s}_{11}^E} = \epsilon_{33}^\sigma - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E} \frac{2}{1 - \nu_{12}}. \quad (2.48)$$

## 2.6 Modélisation d'un milieu piézoélectrique

On considère un élément piézoélectrique occupant un domaine  $\Omega_p$  au repos. Cet élément subit un déplacement imposé  $u_i^d$  <sup>7</sup> sur une partie  $\Gamma_u$  de sa frontière et une densité d'efforts  $t_i^d$  sur la partie complémentaire  $\Gamma_t$  de sa frontière. Les conditions aux limites électriques sont un potentiel électrique  $\psi^d$  et une densité surfacique de charge libres  $q^d$  sur des domaines  $\Gamma_\psi$  et  $\Gamma_q$ , qui constituent une partition de la frontière  $\partial\Omega_p$ .

Les tenseurs de déformation linéarisée et de contrainte sont notés avec leurs composantes  $\varepsilon_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$ ; les vecteurs de champ électrique et champ de déplacement électrique sont notés  $E_i$  et  $D_i$ .  $n_i$  est le vecteur normal unitaire sortant de  $\Omega_p$ ,  $\rho$  la masse volumique locale et  $t$  le temps.

Les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i^d = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.49a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t, \quad (2.49b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u; \quad (2.49c)$$

pour la partie mécaniques; et pour la partie électrique :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (2.50a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \Gamma_q, \quad (2.50b)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur } \Gamma_\psi, \quad (2.50c)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions initiales.

L'équation (2.49a) est l'équation fondamentale de la dynamique; Les équations (2.49b) et (2.49c) sont les conditions aux limites imposées; l'équation (2.50a) est la loi de Gauss; les équations (2.50b) et (2.50c) sont les conditions aux limites (§2.3, [45]).

L'équation (2.50b) n'est valide que lorsque le déplacement électrique autour de  $\Omega_p$  est négligeable par rapport à celui régnant à l'intérieur. Il faudrait sinon prendre en compte le saut de valeur à l'interface dans (2.50b). De plus, aucune charge volumique libre n'est présente dans  $\Omega_p$ , car c'est soit un isolant (cas le plus fréquent, sans charge libre), soit un conducteur où les charges libres sont toujours concentrées aux bords sous forme de densité surfacique (§2.3.2).

On utilise la relation de comportement (2.35) pour rendre compte des effets piézoélectriques directs et indirects [2, 99] :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (2.51)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k. \quad (2.52)$$

On utilise les relations de gradient suivantes pour identifier les relations entre le déplacement et les déformations et le potentiel et champ électrique :

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (2.53)$$

$$E_k(\psi) = -\psi_{,k}. \quad (2.54)$$

L'équation (2.54) est l'approximation électrostatique, utilisée pour les raisons développées au chapitre 2.3 [99].

---

<sup>7</sup>Pour rappel, les indices  $i, j, k, l$  repèrent les composantes des vecteurs et tenseurs et l'on fait usage de la convention d'Einstein.

## 2.7 Coefficients de couplage électromécaniques

### 2.7.1 Coefficients de couplage matériau

Des coefficients de couplage électromécanique sont généralement utilisés pour caractériser l'efficacité d'un matériau piézoélectrique. Ils caractérisent la quantité d'énergie mécanique qu'un matériau est capable de transformer en énergie électrique et inversement. Plusieurs définitions ont été proposées [41]. Nous proposons d'en retenir deux, expliquées ci-après.

La première, proposée dans [59], permet de définir un coefficient de couplage  $k$  par les deux relations équivalentes suivantes :

$$k^2 = \frac{\text{Énergie électrique stockée}}{\text{Énergie mécanique fournie}} = \frac{\text{Énergie mécanique stockée}}{\text{Énergie électrique fournie}}. \quad (2.55)$$

La seconde définition consiste à simplement définir  $k$  à partir d'une des relations piézo-électriques du tableau 2.3 réduite à une dimension seulement, de la manière suivante :

$$k^2 = \frac{\text{constante piézoélectrique}^2}{\text{constante élastique} \cdot \text{constante diélectrique}}. \quad (2.56)$$

Un exemple de cette seconde définition est la définition usuelle de  $k_{31}$  à partir de la loi de comportement "en  $d$ " réduite (2.39) :

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}. \quad (2.57)$$

On peut alors obtenir les trois autres coefficients suivants, à partir des lois "en  $e$ ", "en  $g$ " et "en  $h$ " (Tab. 2.3) réduites au seul couplage  $(E_3, D_3) \leftrightarrow (\epsilon_1, \sigma_1)$  :

$$k_{31}^{(e)2} = \frac{e_{31}^2}{c_{11}^E \epsilon_{33}^\epsilon}, \quad k_{31}^{(g)2} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^\sigma}, \quad k_{31}^{(h)2} = \frac{h_{31}^2}{c_{11}^D \beta_{33}^\epsilon}. \quad (2.58)$$

Ces coefficients ne sont pas égaux, comme on va le voir ci-après.

### Barreau cylindrique en traction-compression

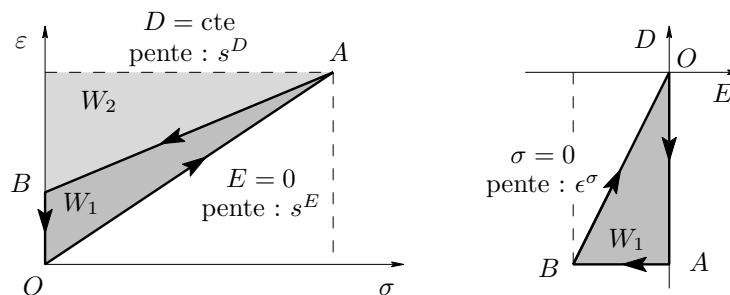


FIG. 2.12: Cycle de chargement à effort imposé

On a vu au paragraphe précédent que plusieurs coefficients de couplages peuvent être définis. On va voir que en fait tel ou tel coefficient apparaît naturellement, selon le système électromécanique étudié. Pour illustrer cela et pour donner une interprétation aux différents coefficients, le présent paragraphe propose de relier les deux définitions (2.55) et (2.56) en

considérant le problème particulier d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, chargé en traction compression suivant son axe 1, muni d'électrodes dans la direction 3 et soumis à des cycles de transformation imposés. C'est de cette manière que la norme définit les coefficients de couplages [2].

Pour appliquer la définition (2.55), on rappelle l'expression des travaux volumiques mécaniques et électrique dans le matériau, entre deux états 1 et 2 :

$$W_m = \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sigma(\varepsilon) d\varepsilon, \quad W_e = \int_{D_1}^{D_2} E(D) dD. \quad (2.59)$$

Le coefficient  $k_{31}$  défini par (2.56) apparaît lorsqu'on impose le cycle de la figure 2.12, à *contraintes transverses nulles* (c'est l'hypothèse poutre décrite plus haut (Eqs. (2.38))) :

- de  $O$  à  $A$  : chargement imposé en court-circuit ( $\sigma \nearrow, E = 0$ ),
- de  $A$  à  $B$  : déchargement imposé en circuit ouvert ( $\sigma \searrow, D = \text{cte}$ ),
- de  $B$  à  $O$  : retour au repos par transport de charge entre les électrodes en court-circuit, à chargement nul ( $D \searrow, \sigma = 0$ ).

Les différents travaux mécaniques et électriques correspondent aux aires entre les courbes d'évolution et les axes des ordonnées des diagrammes  $(\varepsilon, \sigma)$  et  $(D, E)$  de la figure 2.12. Pour chaque phase du cycle, la relation de comportement (2.39) donne :

$$W_{m,O \rightarrow A} = W_1 + W_2 = \frac{1}{2} s_{11}^E \sigma_A^2, \quad (2.60)$$

$$W_{m,A \rightarrow B} = W_2 = \frac{1}{2} s_{11}^E \left( 1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} \right) \sigma_A^2, \quad (2.61)$$

$$W_{e,B \rightarrow O} = W_1 = \frac{1}{2} \frac{d_{31}^2}{\epsilon_{33}^\sigma} \sigma_A^2, \quad (2.62)$$

avec  $\sigma_A$  la contrainte maximale imposée (au point  $A$ ) et  $W_1$  et  $W_2$  définis sur la figure 2.12.

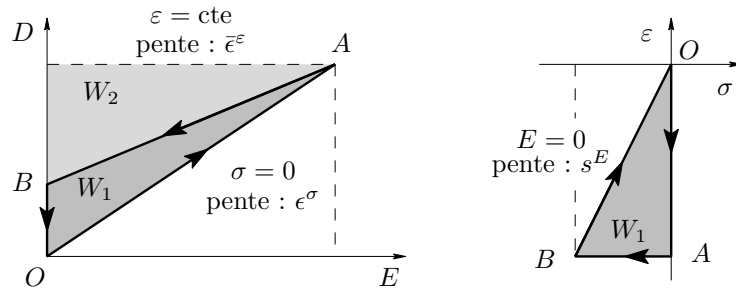


FIG. 2.13: Cycle de chargement à champ électrique imposé

On constate alors que :

- Le travail mécanique est maximal en valeur absolue pendant la phase de court-circuit.
- La différence entre les travaux mécaniques en court-circuit ( $O \rightarrow A$ ) et circuit ouvert ( $A \rightarrow B$ ) est toujours égale au travail électrique  $W_1$  nécessaire pour retrouver le système au repos ( $B \rightarrow O$ ).
- Les définitions (2.55) et (2.56) mènent au même résultat :

$$k_{31}^2 = \frac{W_1}{W_1 + W_2} = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma}. \quad (2.63)$$

Variables	Constantes	Lois réduites	Coefficients de couplage
Intensives	3D	$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^E \sigma_1 + d_{31} E_3 \\ D_3 = d_{31} \sigma_1 + \epsilon_{33}^{\sigma} E_3 \end{cases}$	$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^{\sigma}} = \frac{\bar{h}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^D \bar{\beta}_{33}^{\varepsilon}}$
Extensives	Modifiées	$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^D \varepsilon_1 - \bar{h}_{31} D_3 \\ E_3 = -\bar{h}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\beta}_{33}^{\varepsilon} D_3 \end{cases}$	
Mélangées	Modifiées	$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{c}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{31} E_3 \\ D_3 = \bar{e}_{31} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33}^{\varepsilon} E_3 \end{cases}$	$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^E \bar{\epsilon}_{33}^{\varepsilon}} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^{\sigma}}$
Mélangées	3D	$\begin{cases} \varepsilon_1 = s_{11}^D \sigma_1 + g_{31} D_3 \\ E_3 = -g_{31} \sigma_1 + \beta_{33}^{\sigma} D_3 \end{cases}$	

TAB. 2.6: Différentes lois de comportement réduites éventuellement modifiées par les hypothèses poutre ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) et coefficients de couplages associés

Paramètre	Symbole	Unités	Valeurs numériques
Souplesse en CC	$s_{11}^E$	$[10^{-12} \text{ Pa}^{-1}]$	15.0
Raideur en CC (Module d'Young)	$\bar{c}_{11}^E = Y_{11}^E$	[GPa]	66.7
Souplesse en CO	$s_{11}^D$	$[10^{-12} \text{ Pa}^{-1}]$	12.9
Raideur en CO	$\bar{c}_{11}^D = Y_{11}^D$	[GPa]	77.4
Permittivité à contrainte constante	$\epsilon_{33}^{\sigma}$		$2400\epsilon_0$
Permittivité à déformation constante	$\bar{\epsilon}_{33}^{\varepsilon}$		$2068\epsilon_0$
Constante piézoélectrique “d”	$d_{31}$	$[10^{-12} \text{ C/N}]$	-210
Constante piézoélectrique “e”	$\bar{e}_{31}$	$[\text{C/m}^2]$	-14
Coef. de couplage	$k_{31}$	[Adim.]	0.372
Coef. de couplage	$\tilde{k}_{31}$	[Adim.]	0.401

TAB. 2.7: Constantes matériaux du PIC151, obtenues à partir du tableau 2.5 et des formules (2.41) et (2.66), en hypothèses “poutre”.

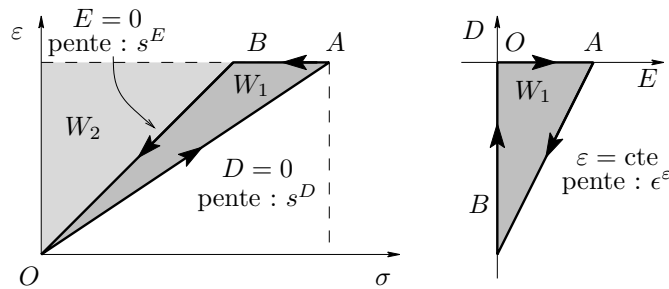


FIG. 2.14: Cycle de chargement à déplacement imposé

- Deux coefficients de couplage  $k_{31}$  et  $\tilde{k}_{31}$  coexistent<sup>8</sup> [41] :

$$k_{31}^2 = \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \epsilon_{33}^\sigma} = \frac{\bar{h}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^D \bar{\beta}_{33}^\epsilon}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\bar{e}_{31}^2}{\bar{c}_{11}^E \bar{\epsilon}_{33}^\epsilon} = \frac{g_{31}^2}{s_{11}^D \beta_{33}^\sigma}, \quad (2.64)$$

$$\tilde{k}_{31}^2 = \frac{k_{31}^2}{1 - k_{31}^2}. \quad (2.65)$$

$k_{31}$  est relié aux deux lois de comportement en variables intensives et extensives et  $\tilde{k}_{31}$  est relié aux deux autres, en variables mélangées.

- $k_{31}$  et  $\tilde{k}_{31}$  sont reliés aux rapports des constantes élastiques (en circuit ouvert et en court circuit) et des constantes diélectriques (à effort nul et à déplacement constant)<sup>9</sup> :

$$1 - k_{31}^2 = \frac{s_{11}^D}{s_{11}^E} = \frac{\bar{\epsilon}_{33}^\epsilon}{\epsilon_{33}^\sigma}, \quad 1 + \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\bar{c}_{11}^D}{\bar{c}_{11}^E} = \frac{\bar{\beta}_{33}^\epsilon}{\beta_{33}^\sigma}. \quad (2.66)$$

- Les coefficients  $k_{31}$  et  $\tilde{k}_{31}$  obtenus ici sont différents de  $k_{31}^{(h)}$  et  $k_{31}^{(e)}$  introduits par l'équation (2.58) : la différence provient des constantes modifiées du fait de l'hypothèse “poutre”.  $k_{31}^{(h)}$  et  $k_{31}^{(e)}$  apparaissent naturellement avec une hypothèse “déformation unidirectionnelle” ( $\epsilon_2 = \epsilon_3 = 0$ ).
- Les pentes des différentes phases du cycle sont indiqués sur la figure 2.12 et sont obtenues en appliquant les différentes lois du tableau 2.6.
- On obtient exactement les mêmes résultats (et notamment la relation (2.63)) en utilisant les cycles à champ électrique imposé et déformations imposées des figures 2.13 et 2.14.
- Le coefficient de couplage  $k_{31}$  intervient aussi dans les rapports des grandeurs aux points  $A$  et  $B$  de chacun des cycles :

$$\text{Fig. 2.12 : } \frac{\epsilon_B}{\epsilon_A} = k_{31}^2, \quad \text{Fig. 2.13 : } \frac{D_B}{D_A} = k_{31}^2, \quad \text{Fig. 2.14 : } \frac{\sigma_B}{\sigma_A} = 1 - k_{31}^2. \quad (2.67)$$

### Barreau cylindrique en vibration

Une autre manière de faire apparaître le rapport des énergies dans le matériau, est de considérer les vibrations d'un matériau piézoélectrique, soit en court-circuit, soit en circuit ouvert ; on étudie le problème particulier d'un barreau cylindrique en matériau piézoélectrique, de section rectangulaire, vibrant en traction compression suivant son axe 1 et muni d'électrodes dans la direction 3 [2]. Avec l'hypothèse poutre (Eqs. (2.38)) et en considérant que toutes les grandeurs ne dépendent que de  $x$ , l'équation du mouvement (4.1a) sans efforts volumiques devient :

$$\sigma_{,x} = \rho \ddot{u}, \quad (2.68)$$

avec  $\sigma = \sigma_1$  et  $u$  la composante du champ de déplacement de la poutre suivant  $x$ . En utilisant la relation de comportement réduite (2.39) et la relation déplacement/déformations (4.5), on obtient l'équation du mouvement du barreau, soit en fonction de  $E = E_3$  :

$$u_{,xx} - d_{31} E_{,x} = \rho s_{11}^E \ddot{u}, \quad (2.69)$$

ou en fonction de  $D = D_3$  :

$$u_{,xx} - \frac{d_{31}}{\epsilon_{33}^\sigma} D_{,x} = \rho s_{11}^D \ddot{u}. \quad (2.70)$$

<sup>8</sup>Cela se montre soit en utilisant les différentes lois de comportement réduite du tableau 2.6 pour calculer  $W_1$  et  $W_2$ , soit en mélangeant les relations (2.43)

<sup>9</sup>Il faut encore utiliser les relations (2.43)

En court-circuit ( $E = 0$ ), l'équation du mouvement est alors :

$$u_{,xx} - \rho s_{11}^E \ddot{u} = 0. \quad (2.71)$$

Les modes propres sont obtenus en cherchant une solution découplée en temps et espace :

$$u(x, t) = \Phi(x)q(t). \quad (2.72)$$

On obtient alors que les pulsations propres  $\omega_i$  et les modes propres  $\Phi_i(x)$ ,  $i = 1, \dots, +\infty$ , vérifient :

$$\begin{cases} \Phi_{i,xx} + \beta_i^2 \Phi_i = 0, \\ \ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0, \end{cases} \quad (2.73)$$

avec

$$\omega_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\rho s_{11}^E}}, \quad (2.74)$$

La première des équations ci-dessus permet d'obtenir les déformées modales :

$$\Phi_i(x) = A_i \cos \beta_i x + B_i \sin \beta_i x. \quad (2.75)$$

Les conditions aux limites alors fixent la valeur des  $\beta_i$  (et donne une relation entre  $A_i$  et  $B_i$ ), si bien que les fréquences propres en circuit ouvert sont données par l'équation (2.74).

En circuit ouvert ( $D = 0$ ), l'équation du mouvement est :

$$u_{,xx} - \rho s_{11}^D \ddot{u} = 0, \quad (2.76)$$

et par le même raisonnement, les fréquences propres en circuit ouvert sont données par

$$\hat{\omega}_i = \frac{\beta_i}{\sqrt{\rho s_{11}^D}}. \quad (2.77)$$

La valeur des  $\beta_i$  est commune entre les cas court-circuit et circuit ouvert, pour un jeu de conditions aux limites données, si bien que :

$$\frac{\hat{\omega}_i^2}{\omega_i^2} = \frac{s_{11}^E}{s_{11}^D} = \frac{\bar{c}_{11}^D}{\bar{c}_{11}^E}, \quad (2.78)$$

le rapport des carrés des fréquences propres est identique à celui des raideurs. À partir des relations entre les coefficients de couplage et les constantes matériaux (2.66), on obtient alors :

$$k_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\hat{\omega}_i^2}, \quad \tilde{k}_{31}^2 = \frac{\hat{\omega}_i^2 - \omega_i^2}{\omega_i^2}. \quad (2.79)$$

Les coefficients de couplage matériaux sont directement reliés aux rapport des fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert d'un solide piézoélectrique.

## 2.8 Conclusion

On a écrit dans cette partie le modèle qui va être utilisé par la suite pour le comportement d'un matériau piézoélectrique ; il s'agit de piézoélectricité linéaire. On a présenté les divers coefficients de couplage matériau, ainsi que la réduction de la relation de comportement pour des cas poutre ou plaque.

Dans les deux chapitres qui viennent, on étudie le cas d'une structure en vibration sur laquelle on ajoute des éléments piézoélectriques, en utilisant pour ceux-ci le modèle de ce chapitre.



# Modélisation semi-analytique d'une poutre avec éléments piézoélectriques

Dans ce chapitre, un modèle semi-analytique de poutre stratifiée avec éléments piézoélectriques est proposé. L'intérêt d'un tel modèle est en premier lieu l'écriture d'un problème simplifié où des paramètres physiques peuvent être facilement dégagés. En second lieu, il permet d'obtenir une écriture réduite du problème, sous formes de modes ; dans l'écriture de chacun des modes apparaît naturellement un coefficient de couplage électromécanique. Ce coefficient joue le même rôle que celui défini pour le matériau seul au chapitre 2 ; la différence est qu'ici son expression tient compte du couplage entre la structure et les éléments piézoélectriques. Ces résultats seront utilisés dans les parties II et III. Notamment, la formulation modale sera la base de toutes les études vibratoires menées sur les systèmes à shunts étudiés. Ensuite, on montrera que les coefficients de couplages modaux introduits dans le présent chapitre seront un facteur déterminant la performance des shunts en réduction de vibration.

## 3.1 Formulation générale

Ce chapitre vise tout d'abord à exposer les principales étapes qui mènent à l'établissement des équations dynamiques qui gèrent les états élastique et piézoélectrique couplés d'une poutre stratifiée munie de pastilles piézoélectriques, éventuellement couplées à un circuit électrique. Ces équations dynamiques font intervenir les grandeurs généralisées classiques qui sont :

- l'effort  $N$  de traction compression dans la poutre,
- le moment  $M$  de flexion dans la poutre,
- la différence de potentiel  $V_k$  aux bornes de la  $k$ -ième pastille,
- la charge  $Q_k$  à la surface de l'une des électrodes de la  $k$ -ième pastille (la charge est considérée la même sur les électrodes supérieure et inférieure).

### 3.1.1 Géométrie

La figure 3.1 décrit le système : la poutre est composée de  $N$  couches, chacune d'elles étant constituée d'un matériau homogène isotrope transverse, piézoélectrique ou non. L'axe  $\boldsymbol{x}$  est l'axe de la poutre, c'est-à-dire la direction d'élanement de la géométrie et l'axe  $\boldsymbol{z}$  est normal au plan des couches. Les caractéristiques sont les suivantes.

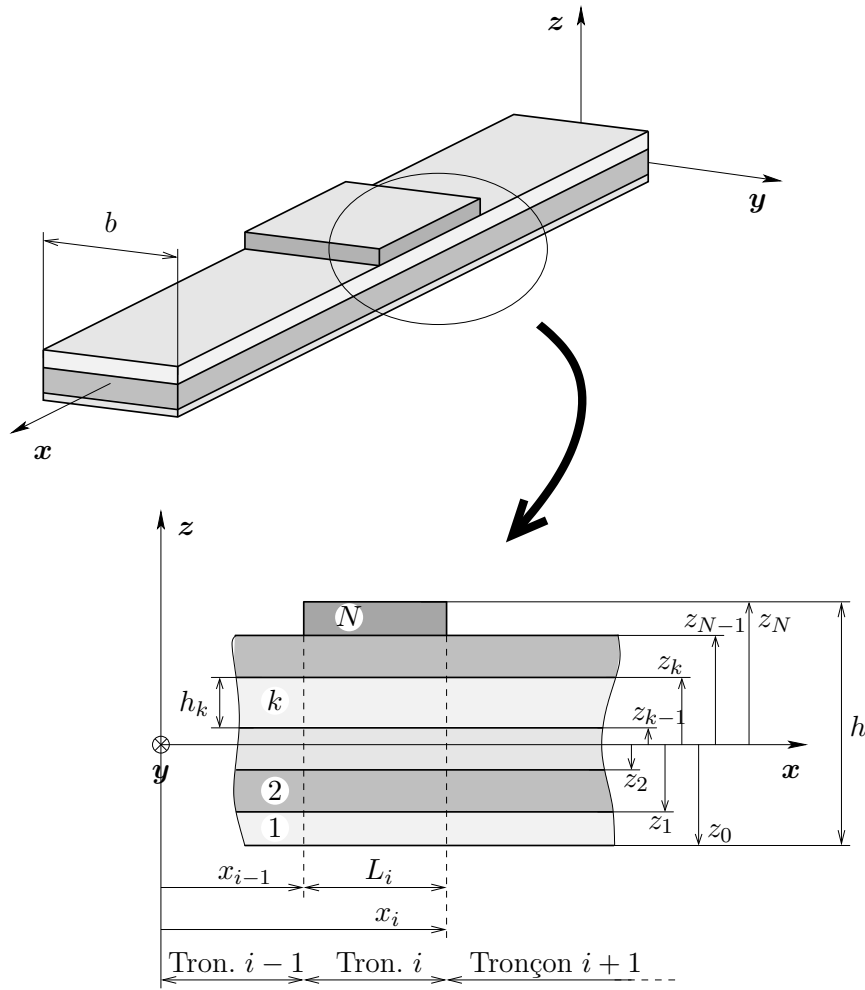


FIG. 3.1: Système de coordonnées, numérotation des couches et des tronçons de la poutre stratifiée

- La  $k$ -ième couche est située entre les cotes  $z = z_{k-1}$  et  $z = z_k$ , son épaisseur est notée  $h_k = z_k - z_{k-1}$  et sa masse volumique  $\rho_k$ .
- Plusieurs tronçons sont considérés suivant la direction  $x$  : le  $i$ -ième est situé entre les abscisses  $x = x_{i-1}$  et  $x = x_i$ , et à l'intérieur de chaque tronçon, les quantités matérielles et géométriques sont uniformes pour chaque couche (leur épaisseur, les constantes de la relation de comportement...). La longueur du  $i$ -ième tronçon est  $l_i = x_i - x_{i-1}$ .
- La largeur de la poutre (suivant l'axe  $y$ ) est notée  $b$ .

L'origine  $O$  du repère est choisie dans le plan de symétrie suivant  $y$  de la poutre (de sorte que  $y \in [-b/2; b/2]$ ), à une extrémité suivant  $x$ , la poutre étant située du côté des  $x$  positifs ( $x \in [0; l]$ , avec  $l$  la longueur totale de la poutre). La cote de  $O$  est choisie en fonction d'éventuelles symétries verticales (§3.1.6 ou §3.2.1).

### 3.1.2 Hypothèses mécaniques

La cinématique de la poutre utilisée est une extension au cas des poutres (milieu élastique unidimensionnel) de la *théorie classique des plaques stratifiées* (Classical Laminated Plate Theory, CLPT, [82]). Les hypothèses principales sont les suivantes :

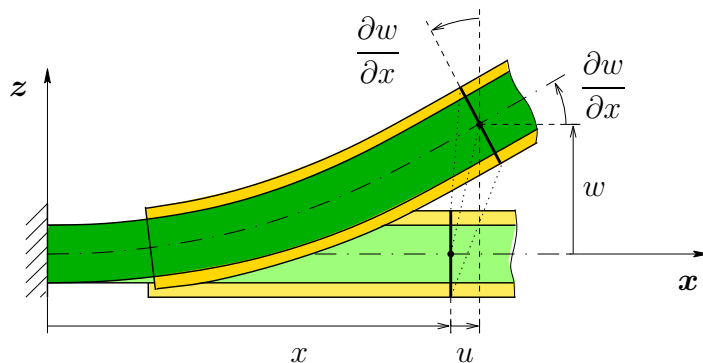


FIG. 3.2: Champ de déplacement de la poutre en traction / flexion

- la poutre est un milieu mince, c'est-à-dire que l'épaisseur est très faible devant la longueur totale de la poutre ;
- les effets de bord sont négligés ;
- les couches sont parfaitement collées les unes aux autres si bien qu'un éventuel délaminage entre couches n'est pas pris en compte ici ;
- les modules d'élasticité des différentes couches sont du même ordre de grandeur ;
- les déformations de cisaillement transverse  $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{yz}$  sont négligeables.

À partir de ces cinq hypothèses, on suppose que :

#### HYPOTHÈSE 3.1

|| toute section normale et droite (à travers toutes les couches) reste normale, droite et indéformable. C'est une généralisation des hypothèses d'Euler-Bernouilli au cas d'une poutre stratifiée.

De plus, en supposant que :

- le chargement extérieur de la poutre est contenu dans le plan  $(x, z)$  ;
- les déformations des pastilles piezoélectriques suivant la direction  $\mathbf{y}$  sont négligées (la poutre ne s'incurve pas autour de son axe) ;

#### HYPOTHÈSE 3.2

|| les déplacements suivant la profondeur  $\mathbf{y}$  et la dépendance des variables en  $y$  est négligée.

Si les coordonnées de tout point  $M$  de la poutre sont notées  $(x, y, z)$ , on obtient le déplacement de ce point  $M$  par :

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \left( u(x, t) - z \frac{\partial w}{\partial x}(x, t) \right) \mathbf{x} + w(x, t) \mathbf{z}, \quad (3.1)$$

où  $(u, w)$  sont les composantes du déplacement de tout point de coordonnée  $x$  de la ligne moyenne (voir Fig. 3.2).

La composante normale des déformations suivant  $\mathbf{x}$  est alors :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

En considérant là encore que la poutre est élancée,



$$\sigma_4 = \sigma_5 = 0, \quad D_1 = D_2 = 0, \quad (3.5)$$

En éliminant  $\varepsilon_2$  et  $\varepsilon_3$ , la relation de comportement (2.38) se réduit, comme montré section 2.5.1 pour le cas d'une poutre :

$$\begin{cases} \sigma_1 = \bar{C}_{11}^E \varepsilon_1 - \bar{e}_{13} E_3, \\ D_3 = \bar{e}_{13} \varepsilon_1 + \bar{\epsilon}_{33} E_3, \end{cases} \quad (3.6)$$

où les coefficients  $\bar{C}_{11}^E, \bar{\epsilon}_{33}, \bar{e}_{13}$  sont définis par (2.41). On peut remarquer que par définition,  $\bar{C}_{11}^E$  est la contrainte qui apparaît suivant la direction 1 pour une déformation dans la direction 1 et une contrainte uniaxiale ; il s'agit donc du module d'Young (à champ électrique constant ou "en court circuit" ) dans cette direction. Dans la suite, pour différencier les différentes couches de la structure si besoin est, la relation de comportement de la  $k$ -ième couche sera notée :

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_1 = c_k \varepsilon_1 - e_k E_3, \\ D_3 = e_k \varepsilon_1 + \epsilon_k E_3, \end{cases}} \quad (3.7)$$

où  $\sigma_1, \varepsilon_1, D_3$  et  $E_3$  sont des fonctions de  $(x, z, t)$  et  $c_k, e_k$  et  $\epsilon_k$  sont les constantes réduites du matériau de la  $k$ -ième couche.

### 3.1.5 Grandeurs généralisées

On définit tout d'abord la force de traction et le moment de flexion de la poutre par :

$$N = \int_{\mathcal{S}} \sigma_1 d\mathcal{S} = b \int_{z_0}^{z_N} \sigma_1(x, z, t) dz \quad \text{et} \quad M = \int_{\mathcal{S}} z \sigma_1 d\mathcal{S} = b \int_{z_0}^{z_N} z \sigma_1(x, z, t) dz, \quad (3.8)$$

où  $\mathcal{S} = [-b/2; b/2] \times [z_0; z_N]$  est la section totale de la poutre à l'abscisse  $x$ . Le moment de flexion correspond à un moment autour d'un axe  $(P, \mathbf{y})$ , avec  $P$  le point de l'axe  $(O, \mathbf{x})$  d'abscisse  $x$ .

Ensuite, la différence de potentiel  $V_k$  aux bornes de la  $k$ -ième pastille piézoélectrique est :

$$V_k = \phi(z_k) - \phi(z_{k-1}) = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = - \int_{z_{k-1}}^{z_k} E_3 dz. \quad (3.9)$$

À partir de la géométrie stratifiée de la poutre décrite au paragraphe 3.1.1, en remplaçant  $\sigma_1$  par sa valeur en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $E_3$ , puis en fonction de  $u$  et  $w$  grâce aux équations (3.2) et (3.7), en intégrant sur l'épaisseur de la poutre, et enfin en tenant compte de l'identité :

$$\int_{z_0}^{z_N} dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} dz, \quad (3.10)$$

on obtient :

$$\boxed{\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} - B \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Xi_k V_k, \\ M = B \frac{\partial u}{\partial x} - D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Theta_k V_k, \end{cases}} \quad (3.11)$$

où  $\mathcal{P}$  est un ensemble d'entiers contenant les numéros des couches piézoélectriques et :

$$A = \sum_{k=1}^N bh_k c_k, \quad B = \sum_{k=1}^N I_{1k} c_k, \quad D = \sum_{k=1}^N I_{2k} c_k \quad (3.12)$$

$$\Xi_k = be_k, \quad \Theta_k = \frac{I_{1k}}{h_k} e_k = b \frac{z_k + z_{k-1}}{2} e_k, \quad (3.13)$$

avec  $h_k$ ,  $I_{1k}$  et  $I_{2k}$  l'épaisseur, le moment linéaire et le moment quadratique de la  $k$ -ième couche, définis par :

$$h_k = z_k - z_{k-1}, \quad I_{1k} = \int_{\mathcal{S}} z d\mathcal{S} = b \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2}, \quad I_{2k} = \int_{\mathcal{S}} z^2 d\mathcal{S} = b \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3}. \quad (3.14)$$

Les grandeurs  $N$ ,  $M$ ,  $u$  et  $w$  sont des fonctions de  $(x, t)$ ,  $V_k$  est une fonction de  $t$  uniquement et les paramètres  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $\Xi_k$  et  $\Theta_k$  sont des fonctions constantes par morceau de  $x$  (elles varient d'un tronçon de poutre à l'autre).

La charge  $Q_k$  de la  $k$ -ième pastille est par définition la quantité de charges électriques libres contenues dans l'une des électrodes. *On choisira dans cette étude l'électrode supérieure.* C'est le flux du saut de déplacement électrique à travers la surface de l'électrode, comme établi au chapitre 2.2.2. En supposant que chaque électrode couvre toute la surface du  $i$ -ième tronçon de la poutre, on obtient :

$$Q_k = \int_{\mathcal{S}_k} [\mathbf{D} \cdot \mathbf{z}]_{z_k^-}^{z_k^+} d\mathcal{S} = b \int_{x_{i-1}}^{x_i} -D_3(x, z_k) dx, \quad (3.15)$$

car  $\mathbf{D} = D_3 \mathbf{z}$  à l'intérieur de la pastille et  $\mathbf{D} = \mathbf{0}$  à l'intérieur de l'électrode. On a noté  $\mathcal{S}_k = [x_{i-1}; x_i] \times [-b/2; b/2]$  la surface de l'électrode et  $z_k^- < z_k$  et  $z_k^+ > z_k$  deux cotes au voisinage de  $z_k$ . Il faut remarquer que l'on se place dans le cas où une électrode n'est pas placée entre deux éléments piézoélectriques, ni au contact d'un isolant dans lequel un déplacement important existerait.

De plus, en remarquant que dans un isolant il n'y a pas de charge libre, et que donc la divergence de  $\mathbf{D}$  est nulle, on peut écrire avec (3.5) :

$$\frac{\partial D_3}{\partial z} = 0, \quad \text{soit} \quad \mathbf{D} = D_3(x, t) \mathbf{z}, \quad (3.16)$$

c'est-à-dire que  $D_3$  est indépendant de  $z^2$ . En revanche, on peut remarquer que  $D_3$  est une fonction de  $x$ , puisque  $\varepsilon_1$  dépend de  $x$ ; cela provient d'un déplacement de charges électriques libres dans l'électrode, suivant  $\mathbf{x}$ , à charge globale  $Q$  constante.

En remplaçant  $D_3$  dans l'équation (3.15) par sa valeur en fonction de  $\varepsilon_1$  et  $E_3$ , puis en fonction de  $u$ ,  $w$  et  $E_3$  au moyen des relations (3.2) et (3.7) et enfin en intégrant sur l'épaisseur de la pastille pour faire apparaître  $V_k$ , on obtient :

$$Q_k = -\Xi_k \left[ u \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} + \Theta_k \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} + C_k V_k, \quad (3.17)$$

où  $C_k$  est la capacité du condensateur électrique équivalent à la pastille piézoélectrique sans déformation, définie par :

$$C_k = \epsilon_k \frac{bl_i}{h_k} = \epsilon_k \frac{\mathcal{S}_k}{h_k}, \quad (3.18)$$

<sup>2</sup>Ce résultat viole la relation de comportement (3.7), puisque  $\varepsilon_1$  est une fonction linéaire de  $z$  et  $E_3$  ne dépend pas de  $z$ . Il faudrait pour y remédier utiliser un champ électrique  $E_3$  linéaire dans l'épaisseur (et donc un potentiel  $\phi$  quadratique).

avec  $l_i = x_i - x_{i-1}$  la longueur de l'électrode, longueur du  $i$ -ième tronçon de la poutre, et  $S_k$  l'aire de la surface de l'électrode.

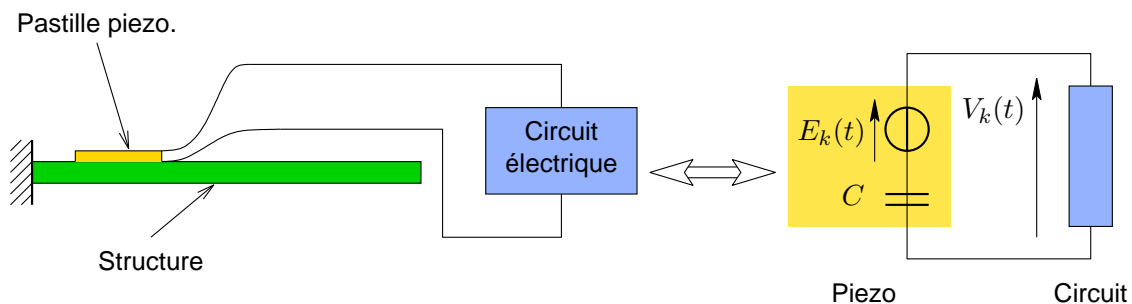


FIG. 3.4: Équivalent électrique de la pastille piézoélectrique.

On peut remarquer que :

- dans les équations (3.11), le terme  $B$  est directement lié à la non-symétrie dans l'épaisseur de la poutre stratifiée : il couple les mouvements longitudinaux au moment de flexion et les mouvements de flexion à l'effort normal ;
- les équations (3.11) représentent *l'effet piézoélectrique inverse*, c'est-à-dire que des différences de potentiel  $V_k$  aux bornes des pastilles piézoélectriques modifient l'état mécanique de la structure, représenté par l'effort normal  $N$  et le moment de flexion  $M$ . En terme de sens, lorsque  $\bar{e}_{31} > 0$ , une différence de potentiel  $V_k$  *positive* produit un *raccourcissement* de la pastille lorsque celle-ci est libre.
- l'équation (3.17) représente *l'effet piézoélectrique direct*, c'est-à-dire qu'une déformation de la structure, représentée par les déplacements longitudinal  $u$  et transversal  $w$ , modifie les charges électriques  $Q_k$  des pastilles piézoélectriques. En terme de sens, une *élongation* de la pastille produit une différence de potentiel *négative* ( $V < 0$ ) en circuit ouvert (à charge  $Q_k$  nulle) ou un amoncellement de charges *négatives* ( $Q < 0$ ) sur l'électrode supérieure en court-circuit ( $V_k = 0$ ) ;
- l'équation (3.17) montre que chaque pastille (disons la  $k$ -ième ) est équivalente du point de vue électrique à un condensateur de capacité  $C_k$  en série avec une source de tension de force électromotrice  $E_k$  (Fig. 3.4) :

$$V_k(t) = E_k(t) + \frac{Q_k(t)}{C_k}, \quad \text{avec} \quad E_k(t) = \frac{\Xi_k}{C_k} \left[ u \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i} - \frac{\Theta_k}{C_k} \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_{i-1}}^{x=x_i}; \quad (3.19)$$

- en appliquant le même raisonnement que précédemment (Eq. (3.15) et (3.16)) à l'électrode inférieure, on montre que celle-ci contient une charge égale et opposée à celle de l'électrode supérieure.
- ces équations (3.11) et (3.17) font apparaître les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $\Xi_k$ ,  $\Theta_k$  et  $C_k$  de

manière symétrique :

$$\begin{pmatrix} N \\ M \\ -Q_1 \\ \vdots \\ -Q_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & \Xi_1 & \cdots & \Xi_P \\ B & D & \Theta_1 & \cdots & \Theta_P \\ \Xi_1 & \Theta_1 & -C_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_P & \Theta_P & 0 & \cdots & -C_P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \text{ ou } [u]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \text{ ou } -\left[\frac{\partial w}{\partial x}\right]_{x_{i-1}}^{x_i} \\ V_1 \\ \vdots \\ V_P \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

### 3.1.6 Cas particulier d'une structure symétrique

Lorsque la structure présente une symétrie à la fois géométrique et matérielle par rapport à son plan milieu, en choisissant l'origine  $O$  du repère dans ce plan, on montre que :

$$\sum_{k=1}^N I_{1k} \bar{c}_k = 0, \quad \text{soit } \boxed{B = 0}. \quad (3.21)$$

Les équations (3.11) se réduisent alors à :

$$\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Xi_k V_k, \\ M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_{k \in \mathcal{P}} \Theta_k V_k, \end{cases} \quad (3.22)$$

La partie mécanique de ces équations est alors similaire à celle d'une poutre homogène par tronçons, où il y a découplage entre traction et flexion :

- une elongation de la poutre produit seulement un effort normal,
- une courbure de la poutre produit seulement un moment de flexion.

### 3.1.7 Équations d'équilibre

En négligeant l'inertie de rotation de la poutre, les équations d'équilibre sont :

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = p - \frac{\partial q}{\partial x}, \quad (3.23)$$

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = r, \quad (3.24)$$

où :

- $p = p(x, t)$  est une répartition linéique d'efforts transversaux (exprimés en N/m),
- $q = q(x, t)$  est une répartition linéique de moment (exprimés en N.m/m),
- $r = r(x, t)$  est une répartition linéique d'effort longitudinaux (exprimés en N/m),
- $m = m(x)$  est la masse linéique de la poutre (exprimé en kg/m), définie par :

$$m = b \sum_{k=1}^N \rho_k h_k, \quad (3.25)$$

où  $\rho_k$  est la masse volumique de la  $k$ -ième couche. C'est une fonction de  $x$  constante par morceau.



## 3.2 Poutre symétrique munie de deux pastilles piézoélectriques

### 3.2.1 Grandeurs généralisées

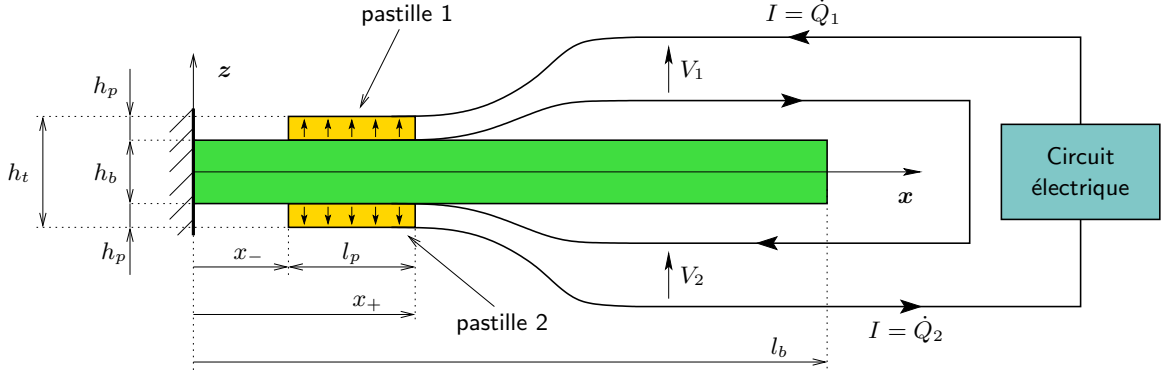


FIG. 3.5: Poutre symétrique munie de deux pastilles piézoélectriques.

On se propose ici de particulariser les développements du paragraphe 3.1 précédent au cas d'une poutre homogène et isotrope, de module d'Young  $Y_b$  et de masse volumique  $\rho_b$ , sur laquelle sont collées deux éléments piézoélectrique (ou pastilles, ou patches) identiques, l'une sur la face supérieure (la pastille 1) et l'autre sur la face inférieure (la pastille 2, cf. Fig. 3.5). L'épaisseur de la poutre est notée  $h_b$ , celle de chaque pastille  $h_p$ , de sorte que l'épaisseur totale de la poutre au niveau du tronçon où sont collées les pastilles est  $h_t = h_b + 2h_p$ . La longueur totale de la poutre est notée  $l_b$ , celle des pastilles  $l_p$ . La position des pastilles est repérée par les abscisses  $x_-$  et  $x_+$ , avec  $x_+ - x_- = l_p$ . La largeur commune aux pastilles et à la poutre est notée  $b$ .

Les deux pastilles sont toutes les deux pourvues d'électrodes métalliques qui couvrent toute la surface de leurs deux faces et sont câblées en série, avec l'électrode inférieure de la pastille 1 connectée à l'électrode supérieure de la pastille 2. Pour avoir un effet de flexion, on polarise les deux pastilles en sens inverse (cela joue sur le signe des constantes piézoélectriques  $e_{ij}$  dans l'équation (2.38)). On note  $c_1 = c_2 = \bar{c}_{11} = Y_p$ ,  $e_1 = -e_2 = -\bar{e}_{31}$  et  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_{33}$  les constantes élastiques ( $Y_p$  est le module d'Young dans la direction longitudinale des pastilles, celles-ci étant supposées constituées d'un matériau isotrope transverse), piézoélectrique et diélectrique des pastilles piézoélectriques,  $\rho_p$  leur masse volumique. La valeur des coefficients  $\Xi_k$ ,  $\Theta_k$  et  $C_k$  sur le tronçon central de la poutre, pour  $k = 1$  ou  $k = 2$  selon la pastille considérée, sont alors :

$$\Xi_1 = -\Xi_2 = \Xi = -b\bar{e}_{31}, \quad (3.26)$$

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta = b \frac{h_p + h_b}{2} \bar{e}_{31}, \quad (3.27)$$

$$C_1 = C_2 = C = \bar{\epsilon}_{33} \frac{bl_p}{h_p}. \quad (3.28)$$

Les équations (3.11) et (3.17) deviennent alors, pour tout  $x$  dans  $[x_-; x_+]$  :

$$\begin{cases} N = A \frac{\partial u}{\partial x} + \Xi(V_1 - V_2), \\ M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Theta(V_1 + V_2), \\ Q_1 = \Xi \left[ u \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + \Theta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV_1, \\ Q_2 = -\Xi \left[ u \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + \Theta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV_2. \end{cases} \quad (3.29)$$

Les équations précédentes montrent que :

- si la même différence de potentiel est imposée aux deux pastilles, alors la poutre est simplement soumise à un moment de flexion ;
- si des différences de potentiel opposées sont imposées aux deux pastilles, alors la poutre est simplement soumise à de la traction/compression ;

Le câblage des pastilles en série implique que  $Q_1 = Q_2 = Q$ . En supposant qu'aucun effort extérieur ne crée une élongation  $[u]$  des pastilles, on obtient (Eq. 3.17) que  $V_1 = V_2 = V$ . En conséquence, les équations (Eq. 3.29) précédentes deviennent, pour tout  $x$  dans  $[x_-; x_+]$  :

$$\begin{cases} M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\Theta V, \\ Q = \Theta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV. \end{cases} \quad (3.30)$$

On se place donc dans un cas de flexion pure.

### 3.2.2 Équations du mouvement

$\Theta$  étant une fonction de  $x$ , constante par morceau et non-nulle simplement sur le tronçon central de la poutre, on peut écrire, pour tout  $x$  dans  $[0; l_b]$  :

$$\Theta(x) = \Theta [H(x - x_-) - H(x - x_+)], \quad (3.31)$$

où  $\Theta$  est défini par l'équation (3.27) et  $H(x)$  est la fonction de Heavyside :

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \forall x < 0, \\ H(x) = 1 & \forall x \geq 0. \end{cases} \quad (3.32)$$

On obtient alors, quel que soit  $x$  dans  $[0; l_b]$  :

$$M = -D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\Theta V [H(x - x_-) - H(x - x_+)]. \quad (3.33)$$

En injectant l'équation précédente dans l'équation d'équilibre (3.23), et en notant que la dérivée de la fonction de Heavyside correspond à la fonction de Dirac  $\delta(x)$ , on obtient l'équation du mouvement de la poutre, associée à l'équation électrique :

$$\boxed{\begin{cases} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 2\Theta V \Delta(x) + p - \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q = \Theta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV, \end{cases}} \quad (3.34)$$

où :

$$\Delta(x) = \frac{\partial}{\partial x} [\delta(x - x_-) - \delta(x - x_+)]. \quad (3.35)$$

et

$$\begin{cases} D(x) = D_b = \frac{bh_b^3}{12} Y_b, & \forall x \in [0; x_- \cup x_+; l_b], \\ D(x) = D_p = D_b + bh_p \frac{4h_p^2 + 6h_b h_p + 3h_b^2}{6} Y_p, & \forall x \in [x_-; x_+], \end{cases} \quad (3.36)$$

$$\begin{cases} m(x) = m_b = bh_b \rho_b, & \forall x \in [0; x_- \cup x_+; l_b], \\ m(x) = m_p = m_b + 2bh_p \rho_p, & \forall x \in [x_-; x_+]. \end{cases} \quad (3.37)$$

$D_b$  et  $m_b$  représentent la raideur en flexion et la masse linéique du tronçon sans pastille et  $D_p$  et  $m_p$  celles du tronçon avec pastille.

Les équations précédentes permettent de conclure que :

- les pastilles ajoutent localement de la masse et de la raideur à la poutre ;
- l'action des pastilles piézoélectrique est équivalente à *deux moments concentrés* (dérivées de Dirac), d'intensités égales et opposées, appliqués aux deux extrémités des pastilles, en  $x = x_-$  et  $x = x_+$  ;
- la charge électrique produite par une déformation de la poutre est proportionnelle à *la différence des pentes* de la poutre déformée, en  $x = x_-$  et  $x = x_+$ .

On peut réécrire les équations (3.34) en éliminant  $V$  au profit de  $Q$  dans la première, ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( D \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\Theta^2}{C} \Delta(x) \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} = 2 \frac{\Theta}{C} \Delta(x) Q + p - \frac{\partial q}{\partial x}, \\ Q = \Theta \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + CV. \end{cases}} \quad (3.38)$$

Les inconnues du problème sont alors  $w(x, t)$ ,  $Q(t)$  et  $V(t)$ . La troisième équation, qui permet d'imposer une relation supplémentaire entre  $Q$  et  $V$ , dépend du circuit électrique utilisé.

### 3.2.3 Adimensionnement

Pour la suite des développements, on choisit d'adimensionner les équations. On introduit alors les variables sans dimension suivantes (repérées avec une barre supérieure) :

$$\bar{x} = \frac{x}{l_b}, \quad \bar{w} = \frac{w}{h_b}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau_m} = \frac{1}{l_b^2} \sqrt{\frac{D_b}{m_b}} t, \quad \bar{\Delta} = \frac{1}{l_b^2} \Delta, \quad \bar{p} = \frac{l_b^4}{h_b D_b} p, \quad (3.39)$$

$$\bar{D} = \frac{D}{D_b}, \quad \bar{m} = \frac{m}{m_b}, \quad \alpha = \Theta \sqrt{\frac{2l_b}{CD_b}}, \quad (3.40)$$

$$\bar{Q} = \frac{l_b}{h_b} \frac{\alpha}{\Theta} Q = \frac{1}{h_b} \sqrt{\frac{2l_b^3}{CD_b}} Q, \quad \bar{V} = \frac{1}{h_b} \sqrt{\frac{l_b^3 C}{2D_b}} V \quad (3.41)$$

avec  $D_b$  et  $m_b$  définies par les équations (3.36) et (3.37). Les équations (3.34) et (3.38) deviennent respectivement

$$\boxed{\begin{cases} \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = \alpha \Delta(x) V + p, \\ Q = \alpha \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + V, \end{cases}} \quad (3.42)$$

et

$$\boxed{\begin{cases} \bar{m} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{D} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \alpha^2 \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} \Delta(x) = \alpha \Delta(x) Q + p, \\ Q = \alpha \left[ \frac{\partial w}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+} + V, \end{cases}} \quad (3.43)$$

où les grandeurs sans dimension  $\bar{x}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{t}$ ,  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{V}$  et  $\bar{Q}$  sont notées sans barre supérieure, pour alléger l'écriture. On peut remarquer que :

- un paramètre important apparaît dans cet adimensionnement : c'est le paramètre  $\alpha$ , qui régit le couplage électromécanique. En utilisant les équations (3.27), (3.28), (3.36) et (3.39), on montre que :

$$\alpha = \sqrt{6} \frac{\bar{e}_{31}}{\underbrace{\sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}}_{\tilde{k}_{31}}} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_b}} \sqrt{\frac{l_b}{l_p}} \left( 1 + \frac{h_p}{h_b} \right) \sqrt{\frac{h_p}{h_b}}. \quad (3.44)$$

$\alpha$  dépend donc des paramètres suivants :

- le coefficient de couplage  $\tilde{k}_{31} = \bar{e}_{31} / \sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}$  du matériau piézoélectrique, qui ne dépend que des constantes matérielles des pastilles : leur module d'Young  $Y_p$ , leur constante diélectrique modifiée  $\bar{e}_{33}$  et leur constante piézoélectrique modifiée  $\bar{e}_{31}$  (voir §2.5.1 pour la comparaison avec  $k_{31}$ ),
- le rapport des modules d'Young  $Y_p/Y_b$ ,
- le rapport des longueurs  $l_p/l_b$ ,
- le rapport des épaisseurs  $h_p/h_b$ .

Il ne dépend pas de la position de la pastille sur la poutre, qui intervient pour le couplage à travers le terme  $[w'(x)]_{x_-}^{x_+} \Delta(x)$ .

- l'adimensionnement de la charge électrique est imposée par l'adimensionnement de la partie mécanique du système, et ne dépend donc pas du circuit électrique utilisé.

### 3.3 Réduction modale

Afin d'accélérer la résolution du problème, on souhaite projeter les équations aux dérivées partielles (3.43) sur une base adaptée ; on choisit d'utiliser les modes propres de la poutre avec éléments piézoélectriques en court-circuit.

### 3.3.1 Calcul des modes propres en court-circuit

On s'intéresse ici à la solution de la partie conservative de (3.42) ( $p = 0$ ) avec les éléments piézoélectriques court-circuités ( $V = 0$ ) :

$$\boxed{\bar{m}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \bar{D}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0.} \quad (3.45)$$

On cherche une solution découplée en temps et en espace, soit :

$$w(x, t) = \Phi(x) q(t). \quad (3.46)$$

En remplaçant l'équation précédente dans (3.45) on obtient :

$$\bar{m}(x) \Phi(x) \ddot{q}(t) = - [\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx} q(t), \quad (3.47)$$

où  $\ddot{q}$  est la dérivée seconde de  $q$  par rapport au temps et où  $(\cdot)_{,x}$  désigne la dérivée par rapport à  $x$ . Par suite :

$$\frac{[\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx}}{\bar{m}(x) \Phi(x)} = -\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)}. \quad (3.48)$$

Du fait de l'hypothèse de séparation des variables, les deux membres de cette équation sont égaux à une constante, que l'on suppose positive et que l'on note  $\omega^2$ , ce qui sera justifié ci-après. On obtient alors les deux équations :

$$\ddot{q}(t) + \omega^2 q(t) = 0, \quad (3.49)$$

$$[\bar{D}(x) \Phi_{,xx}(x)]_{,xx} - \bar{m}(x) \omega^2 \Phi = 0. \quad (3.50)$$

La première équation donne le classique mouvement harmonique à la fréquence  $\omega$ , ce qui justifie le signe de la constante (le système est conservatif et la solution  $w(x, t)$  doit rester finie lorsque  $t$  augmente). La seconde équation permet de déterminer les déformées modales  $\Phi(x)$ .

Pour calculer analytiquement les déformées modales, on considère les trois tronçons de la poutre numérotés à partir de l'encastrement. Sachant que  $\bar{D} = \bar{m} = 1$  sur les tronçons 1 et 3 et que  $\bar{D} = \bar{D}_p = D_p/D_b$  et  $\bar{m} = \bar{m}_p = m_p/m_b$  sur le tronçon 2, on doit résoudre :

$$\begin{cases} \Phi_{1,xxxx} - \xi^4 \Phi_1 = 0, & \forall x \in [0; x_-[ \\ \Phi_{2,xxxx} - (\gamma\xi)^4 \Phi_2 = 0, & \forall x \in [x_-; x_+] \\ \Phi_{3,xxxx} - \xi^4 \Phi_1 = 0, & \forall x \in ]x_+; 1] \end{cases} \quad (3.51)$$

où on a noté

$$\gamma = \sqrt[4]{\frac{\bar{m}_p}{\bar{D}_p}} = \sqrt[4]{\frac{m_p D_b}{m_b D_p}}. \quad (3.52)$$

Les solutions générales de ces trois équations sont :

$$\begin{cases} \Phi_1(x) = A_1 \cos(\xi x) + B_1 \sin(\xi x) + C_1 \cosh(\xi x) + D_1 \sinh(\xi x), \\ \Phi_2(x) = A_2 \cos(\gamma\xi x) + B_2 \sin(\gamma\xi x) + C_2 \cosh(\gamma\xi x) + D_2 \sinh(\gamma\xi x), \\ \Phi_3(x) = A_3 \cos(\xi x) + B_3 \sin(\xi x) + C_3 \cosh(\xi x) + D_3 \sinh(\xi x), \end{cases} \quad (3.53)$$

On a donc 13 inconnues à déterminer :  $\xi$  et les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$ ,  $C_i$  et  $D_i$ . Leur valeurs sont imposées par les conditions aux limites encastree en  $x = 0$  et libre en  $x = 1$  et les

conditions de raccordement en  $x = x_-$  et  $x = x_+$ . Pour ces dernières, on impose la continuité du déplacement  $\Phi$ , de la pente  $\Phi_{,x}$ , des moments de flexion  $M$  et des efforts tranchants  $T$ , reliés à  $\Phi$  par :

$$M(x, t) = -\bar{D}(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\bar{D}(x) \Phi_{,xx} q(t), \quad T(x, t) = -\frac{\partial M}{\partial x} = \bar{D}(x) \Phi_{,xxx} q(t), \quad (3.54)$$

car  $\bar{D}(x)$  est constant sauf sur des ensembles de mesure nulle. On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 : \\ x = x_- : \\ x = x_+ : \\ x = 1 : \end{array} \right. \begin{array}{l} \Phi_1(0) = 0, \\ \Phi_1(x_-) = \Phi_2(x_-), \\ \Phi_{1,xx}(x_-) = \bar{D}_p \Phi_{2,xx}(x_-), \\ \Phi_2(x_+) = \Phi_3(x_+), \\ \bar{D}_p \Phi_{2,xx}(x_+) = \Phi_{3,xx}(x_+), \\ \Phi_{3,xx}(1) = 0, \end{array} \begin{array}{l} \Phi_{1,x}(0) = 0, \\ \Phi_{1,x}(x_-) = \Phi_{2,x}(x_-), \\ \Phi_{1,xxx}(x_-) = \bar{D}_p \Phi_{2,xxx}(x_-), \\ \Phi_{2,x}(x_+) = \Phi_{3,x}(x_+), \\ \bar{D}_p \Phi_{2,xxx}(x_+) = \Phi_{3,xxx}(x_+), \\ \Phi_{3,xxx}(1) = 0. \end{array} \quad (3.55)$$

En combinant les équations (3.55) avec les équations (3.51), on obtient le système singulier suivant à résoudre :

$$\mathbf{M}(\xi) \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ \vdots \\ D_3 \end{pmatrix} = (0), \quad (3.56)$$

où  $\mathbf{M}(\xi)$  est une matrice  $12 \times 12$  où les coefficients sont des fonctions de  $\xi$ . On obtient alors :

- les fréquences propres : la  $r$ -ième est  $\omega_r = \xi_r^2$  où  $\xi_r$  est le  $r$ -ième zéro de l'équation caractéristique  $\det \mathbf{M}(\xi) = 0$  ;
- les déformées modales : la  $r$ -ième,  $\Phi_r(x)$ , est définie à une constante multiplicative près à partir des équations (3.53) avec les valeurs de onze des  $(A_1, \dots, D_3)$  obtenus en fonction du douzième (disons  $D_3$ ) en résolvant le système (3.56) privé d'une ligne.

Le modes sont enfin normalisés en calculant le coefficient multiplicatif ( $D_3$  ici) pour que :

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 \bar{m}(x) \Phi_r(x)^2 dx = 1. \quad (3.57)$$

Ce calcul analytique des modes est intéressant car il permet d'effectuer aisément une étude paramétrique de l'influence de la raideur ajoutée des pastilles sur le comportement vibratoire de la structure. De plus, il permet de façon immédiate le calcul des coefficients  $\Delta_r$  de l'équation (3.68) qui, on le verra (§5), sont directement liés au transfert d'énergie entre la structure mécanique et le circuit électrique et par suite à l'efficacité du système amortissant. On peut montrer que les modes de la poutre sont orthogonaux, c'est-à-dire que :

$$\forall (p, q) / \omega_p \neq \omega_q, \quad \int_0^1 \bar{m}(x) \Phi_p(x) \Phi_q(x) dx = \delta_{pq}, \quad (3.58)$$

$$\int_0^1 [\bar{D}(x) \Phi_{p,xx}(x)]_{,xx} \phi_q(x) dx = \omega_p^2 \delta_{pq}, \quad (3.59)$$

où  $\delta_{pq}$  est le symbole de Kronecker.

### 3.3.2 Projection modale du système couplé

On va maintenant se servir de la base des modes propres pour réécrire le système (3.43) ; en utilisant  $(\Phi_r, \omega_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$  l'ensemble des modes propres du système en court-circuit, on écrit la flèche en fonction du temps :

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^{+\infty} \Phi_r(x) q_r(t), \quad (3.60)$$

puis on intègre la partie mécanique de (3.42) ou (3.43) multipliée par  $\Phi_r$  sur la longueur de la poutre et on écrit la partie électrique en tenant compte de (3.60) ; alors, avec l'orthogonalité des modes (3.58) on trouve un système d'équations de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) - \alpha \Delta_r V(t) = F_r, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.61)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta_r \Delta_j q_j(t) - \alpha \Delta_r Q(t) = F_r, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.62)$$

où les modes sont couplés par des termes croisés. On a dans les deux systèmes les coefficients suivants :

- $F_r$  le terme de forçage modal sur le  $r$ -ième mode, tel que  $F_r = \int_0^1 p(x, t) \Phi_r(x) dx$  ;
- $\Delta_r$  la courbure des éléments piézoélectriques pour le  $r$ -ième mode, définie par  $\Delta_r = \left[ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x-}^{x=x+}$

## 3.4 Coefficient de couplage effectif

### 3.4.1 Projection modale du système circuit ouvert

En partant de l'équation (3.61) on écrit les équations du problème conservatif associé en court circuit ( $F = 0$  et  $V = 0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \\ Q(t) - \alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = 0. \end{array} \right. \quad (3.63)$$

Les modes sont naturellement découplés, en raison de la base modale choisie. En revanche, si l'on écrit les équations du problème conservatif associé en circuit ouvert à partir de (3.62) ( $F = 0$  et  $Q = 0$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in \mathbb{N}^*, \quad \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \alpha^2 \sum_{j=1}^{+\infty} \Delta_r \Delta_j q_j(t) = 0, \\ -\alpha \sum_{r=1}^{+\infty} \Delta_r q_r(t) = V, \end{array} \right. \quad (3.64)$$

et on constate que les équations de chaque mode sont couplées entre elles, par un terme de raideur ajoutée.

### 3.4.2 Coefficient de couplage

De manière analogue à ce qui est proposé dans la norme [2], on définit le coefficient de couplage effectif, dépendant des fréquences en circuit ouvert ( $\omega_{CO}$ ) et en court-circuit ( $\omega_{CC}$ ), pour le mode de vibration considéré par<sup>3</sup> :

$$k_{\text{eff}}^2 = \frac{\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2}{\omega_{CC}^2}. \quad (3.65)$$

Ce coefficient est utilisé pour le calcul dans de nombreuses applications ; on montrera que c'est un paramètre essentiel pour la réduction de vibrations avec shunt ou switch. En partant des équations (3.63) et (3.64) restreintes à un seul mode ( $q_j = 0 \forall j \in \mathbb{N}^*, j \neq r$ ) on écrit la pulsation en court-circuit et une approximation de la pulsation en circuit ouvert :

$$\begin{cases} \text{court circuit} & \ddot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) = 0, \\ \text{circuit ouvert} & \ddot{q}_r(t) + (\omega_r^2 + \alpha^2 \Delta_r^2) q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (3.66)$$

on note ainsi  $\hat{\omega}_r^2 = \omega_r^2 + \alpha^2 \Delta_r^2$  l'approximation de la pulsation en circuit ouvert, et on définit une approximation du coefficient de couplage effectif :

$$k_r^2 = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2} = \frac{\alpha^2 \Delta_r^2}{\omega_r^2} \quad (3.67)$$

cependant, à la différence du coefficient  $k_{\text{eff}}$ , toujours positif, il est possible d'attribuer un signe à  $k_r$  d'après le signe de  $\Delta_r$  ; on obtient alors l'écriture suivante :

$$k_r = \frac{\alpha \Delta_r}{\omega_r} = \sqrt{6} \underbrace{\frac{\bar{e}_{31}}{\sqrt{Y_p \bar{e}_{33}}}}_{\tilde{k}_{31}} \underbrace{\sqrt{\frac{Y_p}{Y_b}} \sqrt{\frac{l_b}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_b}\right)}_{\text{coefficients mat. et dimensions}} \underbrace{\sqrt{\frac{h_p}{h_b}} \frac{1}{\omega_r} \left[ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+}}_{\text{carac. modales}}. \quad (3.68)$$

On verra par la suite que ce coefficient est capital pour la performance des applications de type shunt (§5.3.4, 5.4.4, [37, 32, 31]) ou switch (§7.4.4, [30]) ; il est souvent essentiel de le maximiser. Pour des applications moins fréquentes il peut être intéressant de le minimiser, afin de découpler certains modes. Dans les deux cas, comme les modes dépendent des paramètres entrant dans l'écriture de  $\alpha$ , il est difficile de conclure directement sur la valeur optimale de ces paramètres sans calculer les modes. La seule conclusion qu'on peut tirer ici, c'est que tous autres paramètres égaux, il faut maximiser  $\tilde{k}_{31}$ .

Au paragraphe 6.1 on verra comment il est possible de maximiser ce coefficient en adaptant les éléments piézoélectriques à la structure ; une analyse de l'effet de chaque paramètre est proposée.

<sup>3</sup>On peut remarquer que le coefficient  $k_{\text{eff}}$  défini ici est analogue au  $\tilde{k}_{31}$  de la section 2.7.1. Les deux sont égaux pour des géométries simples comme celles du barreau cylindrique de la section 2.7.1. Ils sont différents dans le cas général :  $\tilde{k}_{31}$  ne dépend que du matériau tandis que  $k_{\text{eff}}$  dépend aussi de la géométrie du système complet ainsi que du mode considéré. On aurait pu aussi définir un  $k_{\text{eff}}$  analogue à  $k_{31}$ , soit  $(\omega_{CO}^2 - \omega_{CC}^2)/\omega_{CO}^2$ , ce qui est précisément proposé dans la norme [2, p. 59]. Nous utilisons dans ce texte le  $k_{\text{eff}}$  de l'équation (3.65) car c'est celui-ci qui apparaît naturellement dans les équations. Les deux sont de toute façon très proches.



### 3.4.3 Troncature modale

En utilisant la notation ci-dessus, on peut réécrire les équations (3.62), en les tronquant aux  $N$  premiers modes; on introduit également un amortissement modal  $\xi_r$  sur chacun des modes (cet amortissement sera par exemple mesuré expérimentalement, ou posé arbitrairement);

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + k_r\omega_r \sum_{j=1}^N k_j\omega_j q_j(t) - k_r\omega_r Q(t) = F_r(t), \\ - \sum_{r=1}^N k_r\omega_r q_r(t) + Q(t) = V(t), \end{array} \right. \quad (3.69)$$

ces équations peuvent se mettre sous forme matricielle : on obtient

$$\left[ \begin{array}{c} \left( \begin{array}{ccc} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \omega_N^2 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} & & 0 \\ & [k_i\omega_i k_j\omega_j] & \vdots \\ 0 & & 0 \end{array} \right) + \left( \begin{array}{ccc} & & -k_1\omega_1 \\ & 0 & \vdots \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N \end{array} \right) \end{array} \right] \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ V \end{pmatrix}, \quad (3.70)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (3.71)$$

avec :

- $\mathbf{q}$  le vecteur des inconnues modales et de la charge ,
- $\mathbf{M}$  la matrice de masse, diagonale, avec un 0 sur le ddl électrique,
- $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement, avec là aussi un 0 sur le ddl électrique,
- $\mathbf{K}$  la matrice de raideur en court-circuit, diagonale, avec un 1 sur le ddl électrique qui correspond à la capacité des éléments piézoélectriques,
- $\mathbf{K}_p$  la matrice d'ajout de raideur piézoélectrique, qui couple les modes mécaniques entre eux et n'a aucun effet sur la charge;  $\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \mathbf{K}_p$  correspond à la matrice de raideur en circuit ouvert ( $Q = 0$ ),
- $\mathbf{K}_c$  la matrice de couplage électromécanique comprend les termes de couplage liés aux effets piézoélectriques directs et indirects,
- $\mathbf{F}$  le vecteur de forçage, avec la tension appliquée aux éléments piézoélectriques sur la ligne de la charge.

## 3.5 Conclusion

Ce chapitre a permis de définir un modèle réduit mais précis d'une structure avec éléments piézoélectriques. Le choix de décrire le système avec la charge comme degré de liberté

électrique va faciliter l'association de shunts au système ; mais de manière générale, n'importe quel circuit électrique pourra être associé à ce modèle. Ce circuit va imposer soit (i) une tension électrique, soit (ii) la charge électrique, soit (iii) une relation entre ces deux variables. Ce dernier cas est l'objet des parties II et III de cette thèse. Dans la partie II, une étude expérimentale des shunts (chap. 6) est proposée, qui inclut la réalisation de poutres avec éléments piézoélectriques telles qu'elles sont calculées dans le présent chapitre. On constate que le modèle proposé est en bon accord avec l'expérience.

Avant de continuer vers ces parties, on peut remarquer que la représentation d'un problème électromécanique couplé sous la forme (3.71) devrait convenir à tout problème avec couplage piézoélectrique projeté sur les modes en court-circuit ; dans le chapitre suivant on choisit d'étudier un problème plus général, c'est à dire non limité à une poutre, et de le réduire de manière similaire.

---

---

# Modélisation éléments finis adaptée aux cas de shunts

Après avoir étudié au chapitre 3 un problème de poutre avec éléments piézoélectriques symétriques, il est intéressant de voir comment modéliser un problème à la géométrie plus arbitraire. Ce chapitre propose en premier lieu une formulation éléments finis adaptée au cas d'une structure élastique munie d'éléments piézoélectriques minces. Sa principale originalité est qu'elle introduit des variables électriques globales (la différence de potentiel aux bornes des éléments piézoélectriques d'une part et la charge contenue dans ses électrodes d'autre part). Ces variables sont naturellement adaptées au couplage du modèle éléments-finis avec un shunt.

Dans une seconde partie, ce modèle éléments-finis est projeté sur la base des modes propres du système avec les éléments piézoélectriques en court-circuit (§4.4). Une formulation analogue à celle obtenue au chapitre 3 est obtenue. Elle permet de faire apparaître de manière naturelle les coefficients de couplage modaux, qui s'exprime cette fois-ci en fonction des déformées modales et de la matrice de couplage problème éléments-finis.

Enfin, dans une dernière partie (§4.5), la formulation ci-dessus permet de bâtir un modèle éléments finis d'une poutre symétrique similaire à celle du chapitre 3. Cela permet d'une part de valider la présente formulation éléments-finis et d'autre part de fournir un modèle qui sera utilisé au chapitre 9 pour optimiser les coefficients de couplage d'une poutre utilisée pour les expériences avec les shunts à commutation (§9.1.2).

## 4.1 Étude bibliographique

Les premiers travaux sur des éléments finis électromécaniques couplés par piézoélectricité [1] reposent sur une formulation couplant par effet direct et inverse les champs de déplacement mécanique et de potentiel électrique. On peut remarquer que dans le cas d'applications capteur ou actionneur uniquement, les variables électriques peuvent être condensées de sorte que le problème à résoudre prend la forme d'un problème d'élasticité conventionnel, avec l'effet d'éventuels actionneurs piézoélectriques similaire à un effort imposé (parfois simulé par une contrainte de type thermique) proportionnel à la tension ; cette formulation est la base de la plupart des modèles de structures élastiques avec éléments piézoélectriques [102, 40, 103, 46, 14, 88, 100, 49, 12]. On peut trouver dans [28, 9, 55] une revue des développements récents dans le domaine.

À la différence de ces applications, les circuits type shunt ou switch imposent uniquement

une relation entre la tension et la charge dans le circuit, et nécessitent un calcul simultané de l'effet capteur et actionneur. Cela peut être fait en utilisant les fonctions adaptées d'un logiciel commercial éléments finis [66], mais cette démarche est lourde en terme de calculs.

On se propose ici de développer un modèle éléments finis adaptée au cas d'éléments piézoélectriques minces, munis d'électrodes sur leur surface et polarisés dans la direction transverse. La partie mécanique est décrite de manière conventionnelle avec des éléments finis en déplacement. On décrira l'état électrique uniquement par la différence de potentiel et la charge des électrodes, sans passer par la description complète du champ électrique. Un des avantages est que cette formulation est naturellement adaptée au cas d'électrodes imposant un potentiel uniforme et à l'intégration des charges libres sur celles-ci ; cela se fait d'habitude en imposant un potentiel identique à tous les nœuds. [62, 3, 80]. Ensuite, on projette le système couplé sur les modes du problème conservatif en court-circuit associé, qui, comme nous allons le voir, peut être considéré comme purement élastique ; on montrera ainsi que les coefficients de couplage effectifs peuvent être calculés en post-traitement d'un calcul d'élasticité effectué avec un code éléments finis standard. Ce chapitre reprend pratiquement [95].

## 4.2 Modélisation d'un milieu piézoélectrique

Cette section présente la forme générale des équations utilisées pour modéliser le comportement d'un milieu piézoélectrique, sous forme locale puis sous forme faible adaptée pour un passage à la méthode des éléments finis. Les indices  $i, j, k, l$  repèrent les composantes des vecteurs et tenseurs et l'on fait usage de la convention d'Einstein ; on utilise les équations d'un milieu piézoélectrique vues au chapitre 2.6 :

- l'élément piézoélectrique occupe un domaine  $\Omega_p$  au repos ;
- il subit un déplacement imposé  $u_i^d$  sur une partie  $\Gamma_u$  de sa frontière et une densité d'efforts  $t_i^d$  sur la partie complémentaire  $\Gamma_t$  de sa frontière ;
- un potentiel électrique  $\psi^d$  et une densité surfacique de charge libres  $q^d$  sont prescrites sur des domaines  $\Gamma_\psi$  et  $\Gamma_q$ , qui constituent une partition de la frontière  $\partial\Omega_p$

En considérant que les équations du problème s'écrivent (2.49, 2.50), les équations du problème s'écrivent :

$$\sigma_{ij,j} + f_i^d = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (4.1a)$$

$$\sigma_{ij} n_j = t_i^d \quad \text{sur } \Gamma_t, \quad (4.1b)$$

$$u_i = u_i^d \quad \text{sur } \Gamma_u; \quad (4.1c)$$

pour la partie mécaniques ; et pour la partie électrique :

$$D_{i,i} = 0 \quad \text{dans } \Omega_p, \quad (4.2a)$$

$$D_i n_i = -q^d \quad \text{sur } \Gamma_q, \quad (4.2b)$$

$$\psi = \psi^d \quad \text{sur } \Gamma_\psi, \quad (4.2c)$$

auxquelles il faut ajouter les conditions initiales. On utilise la relation de comportement suivante :

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{kij} E_k, \quad (4.3)$$

$$D_i = e_{ikl} \varepsilon_{kl} + \epsilon_{ik} E_k, \quad (4.4)$$

où  $c_{ijkl}$  est le module d'élasticité à champ électrique constant (raideur en court-circuit),  $e_{kij}$  les constantes piézoélectriques et  $\epsilon_{ik}$  la permittivité électrique à déformation constante (permittivité bloquée). Cette écriture simplifie l'approche éléments finis.

On utilise les relations de gradient suivantes pour identifier les relations entre le déplacement et les déformations et le potentiel et champ électrique :

$$\varepsilon_{kl}(u) = \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}), \quad (4.5)$$

$$E_k(\psi) = -\psi_{,k}. \quad (4.6)$$

Les quantités mécaniques et électriques  $\sigma_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $u_i$ ,  $D_i$ ,  $E_i$  et  $\psi$  sont fonction du temps  $t$  et du vecteur position dans  $\Omega_p$ . Les quantités imposées sont fonction du temps et du vecteur position dans  $\Omega_p$  pour  $f_i^d$  et sur  $\partial\Omega_p$  pour les densités surfaciques  $u_i^d$ ,  $t_i^d$ ,  $\psi^d$  et  $q^d$ . Les caractéristiques du matériau  $\rho$ ,  $c_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$  et  $\epsilon_{ik}$  peuvent être fonction du vecteur position.

#### 4.2.1 Formulation variationnelle en terme de déplacement et potentiel $(u_i, \psi)$

Les équations locales de la section précédente sont exprimées avec pour inconnues le déplacement mécanique  $u_i$  et le potentiel électrique  $\psi$ . Afin d'obtenir une formulation variationnelle associée à ces équations on utilise la méthode de fonction test, en deux étapes, d'abord avec les équations mécaniques puis électriques.

Tout d'abord on introduit l'espace  $\mathcal{C}_u$  des fonctions  $u_i$  définies sur  $\Omega_p$ , suffisamment régulières et en particulier l'espace des fonctions cinématiquement admissibles à 0,  $\mathcal{C}_u^* = \{u_i \in \mathcal{C}_u \mid u_i = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$ . En multipliant l'équation de la dynamique (4.1a) par une fonction indépendante du temps  $\delta u_i \in \mathcal{C}_u^*$ , en intégrant sur  $\Omega_p$ , en utilisant la formule de Green et en prenant en compte la condition de bord (4.1b), on obtient :

$$\int_{\Omega_p} \sigma_{ij}(u, \psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega + \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega_p} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^*. \quad (4.7)$$

Ensuite on considère l'espace  $\mathcal{C}_\psi$  des fonctions  $\psi$  suffisamment régulières dans  $\Omega_p$ . En multipliant (4.2a) par une fonction indépendante du temps  $\delta\psi \in \mathcal{C}_\psi$ , en intégrant sur  $\Omega_p$  en utilisant la formule de Green et en prenant en compte l'équation (4.2b) on obtient :

$$\int_{\Omega_p} D_i(u, \psi) E(\delta\psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} q^d \delta\psi \, dS + \int_{\Gamma_\psi} q^r \delta\psi \, dS \quad \forall \delta\psi \in \mathcal{C}_\psi. \quad (4.8)$$

où  $q^r = -D_i n_i$  est la densité surfacique de charge libre apparaissant sur  $\Gamma_\psi$ .

Finalement en prenant en compte la relation de comportement (4.3) et (4.4), on peut réécrire les équations (4.7) et (4.8) sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega_p} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega_p} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega_p} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \end{aligned} \quad (4.9)$$

et

$$\int_{\Omega_p} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) \, d\Omega + \int_{\Omega_p} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_q} q^d \delta\psi \, dS + \int_{\Gamma_\psi} q^r \delta\psi \, dS. \quad (4.10)$$

Ainsi la formulation variationnelle des équations couplées du problème électromécanique, équivalent aux équations (4.1a à 4.6), consiste en trouver  $u_i \in \mathcal{C}_u$  tel que  $u_i = u_i^d$  sur  $\Gamma_u$ ,  $\psi \in \mathcal{C}_\psi$  tel que  $\psi = \psi^d$  sur  $\Gamma_\psi$  et la densité de charge libre surfacique  $q^r$  sur  $\Gamma_\psi$ , satisfaisant les équations (4.9) et (4.10) pour toutes les fonctions test  $\delta u_i \in \mathcal{C}_u^*$  et  $\delta \psi \in \mathcal{C}_\psi$ , en tenant compte des conditions initiales.

### 4.3 Structure élastique avec éléments piézoélectriques

Dans cette section la formulation générale introduite est appliquée au cas particulier d'une structure munie d'éléments piézoélectriques minces, collés à sa surface ou inclus dans son volume. Cela permet avec certaines hypothèses de passer d'une formulation habituelle avec variables électriques locales  $\psi$  et  $D_i$  à une formulation faisant intervenir des variables discrètes définies pour chaque élément piézoélectrique : la différence de potentiel et la charge libre contenue sur une électrode.

#### 4.3.1 Problème général, hypothèses

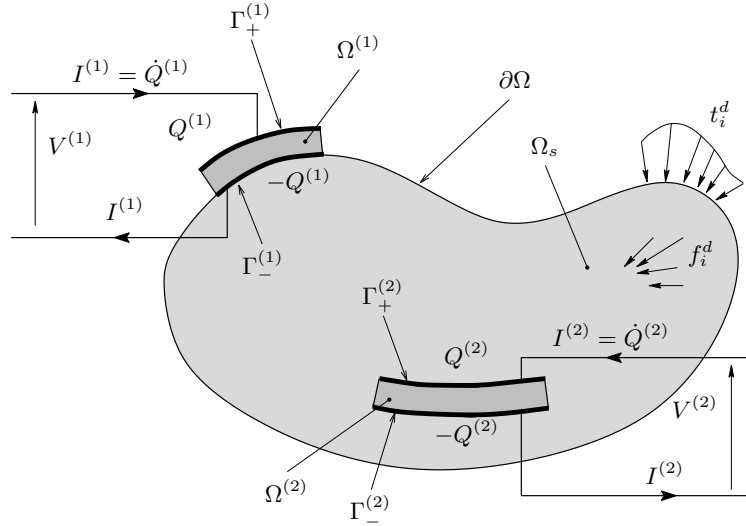


FIG. 4.1: Structure élastique avec deux éléments piézoélectriques

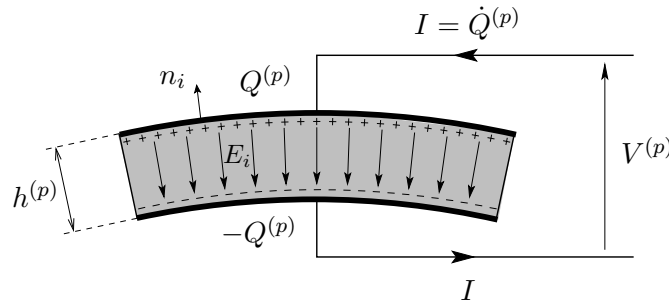


FIG. 4.2:  $p$ -ième élément piézoélectrique soumis à la différence de potentiel  $V^{(p)}$ , avec les charges  $Q_+^{(p)}$  et  $Q_-^{(p)}$  aux surfaces des électrodes (avec  $Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}$  d'après (4.22).

On considère une structure élastique munie de  $P \in \mathbb{N}$  éléments piézoélectriques (Figure 4.1). Le domaine occupé par la structure est  $\Omega_s$ . Chaque élément piézoélectrique a la forme d'une plaque ou d'une coque légèrement courbée, d'épaisseur constante, et munie sur les faces supérieures et inférieures d'électrodes conductrices très fines. Dans tout le reste de ce chapitre, la notation  $(p)$ ,  $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$  désigne une quantité liée au  $p$ -ième élément ; ainsi les surfaces supérieures, inférieures et latérales du  $p$ -ième élément sont respectivement notées  $\Gamma_+^{(p)}$ ,  $\Gamma_-^{(p)}$  et  $\Gamma_0^{(p)}$ . Les domaines  $(\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)})$  sont une partition du domaine occupé par la structure avec éléments piézoélectriques  $\Omega$ .

Un ensemble d'hypothèses est proposé, permettant de s'adapter à la plupart des cas pratiques comme montré dans la section 4.3.4.

1. Seuls les éléments piézoélectriques sont constitués de matériau piézoélectrique. Les constantes de couplage piézoélectrique  $e_{ijk}$  disparaissent donc dans  $\Omega_s$ . Par contre la permittivité  $\epsilon_{ik}$  n'est pas forcément négligeable dans  $\Omega_s$  [45].
2. L'épaisseur des éléments piézoélectriques  $h^{(p)}$  pour le  $p$ -ième patch est constante et plus faible que sa longueur caractéristique (Figure 4.2).
3. L'épaisseur de l'électrode est négligeable devant  $h^{(p)}$ .
4. Les éléments piézoélectriques sont polarisés dans la direction transverse (normale aux électrodes), souvent notée 3. Cela induit un couplage avec la contrainte transverse, noté usuellement "33" (§2.4.2, [99, 2]) et un avec les contraintes longitudinales noté usuellement "31" ; par la suite seul ce dernier couplage sera pris en compte.
5. Les éléments piézoélectriques sont istropes dans les directions longitudinales.
6. Aucune charge libre surfacique n'est présente sur  $\Gamma_0^{(p)}$ .
7. Les effets de bord du champ électrique aux extrémités des éléments sont négligés.
8. Le champ électrique de composantes  $E_k$  est normal et d'amplitude constante sur l'élément, de sorte que pour tout  $p \in \llbracket 1, P \rrbracket$  :

$$E_k = -\frac{\psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}}{h^{(p)}} n_k = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} n_k, \quad \text{dans } \Omega^{(p)}, \quad (4.11)$$

où  $V^{(p)} = \psi_+^{(p)} - \psi_-^{(p)}$  est la différence de potentiel entre  $\Gamma_+^{(p)}$  et  $\Gamma_-^{(p)}$  et  $n_k$  est la  $k$ -ième composante du vecteur normal unitaire à la surface des électrode (Figure 4.2). Cette hypothèse est justifiée par les hypothèses 2, 4, 5 et 7.

9. Le champ de déplacement électrique de composantes  $D_i$  est négligé dans  $\Omega_s$ , par rapport à sa valeur dans  $\Omega^{(p)}$ . Cette hypothèse est justifiée dans 4.3.4. Cependant le champ électrique ne s'annule pas toujours dans  $\Omega_s$ .

### 4.3.2 Formulation variationnelle en déplacement et différence de potentiel $(u_i, V^{(p)})$

Une formulation variationnelle du problème électromécanique associé au système peut être obtenue en tenant compte des hypothèses 1-6 et en utilisant la formulation variationnelle du chapitre 4.2.1 à chaque sous domaine de  $\Omega$ , soit  $\Omega_s, \Omega^{(1)}, \dots, \Omega^{(P)}$ .

#### Équations mécaniques

En utilisant la formulation variationnelle (4.9) successivement à chaque sous domaine de  $\Omega$  puis en ajoutant toutes les équations et en tenant compte de la partition de  $\Omega$  :

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega_s} + \sum_{p=1}^P \int_{\Omega^{(p)}}, \quad (4.12)$$

on élimine toutes les intégrales de surface liées à des frontières entre sous domaines de  $\Omega$ , par continuité des déplacements et équilibre des frontières. Il ne reste ainsi que les surfaces extérieures de  $\Omega$  dont les domaines où les déplacement et les efforts sont imposés,  $\Gamma_u$  et  $\Gamma_t$ , sont une partition.

On définit  $\mathcal{C}_u$  l'espace des fonctions suffisamment régulières définies sur  $\Omega$  et en particulier l'espace des déplacements cinématiquement admissibles à 0  $\mathcal{C}_u^* = \{u_i \in \mathcal{C}_u \mid u_i = 0 \text{ on } \Gamma_u\}$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e_{ijk} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega - \int_{\Omega} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS. \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^* \end{aligned} \quad (4.13)$$

De plus le terme piézoélectrique intégral de cette équation peut être réécrit :

$$\int_{\Omega} e_{kij} E_k(\psi) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega = \sum_{p=1}^P -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega, \quad (4.14)$$

où  $V^{(p)}$  est la différence de potentiel entre les électrodes du  $p$ -ième élément piézoélectrique, introduit dans l'équation (4.11). Pour montrer cela il faut utiliser l'hypothèse 1 impliquant  $e_{ijk} = 0$  dans  $\Omega_s$  et éliminer les intégrales correspondantes. Ensuite l'hypothèse 8 avec l'équation (4.11) permet d'obtenir le résultat.

### Équations électriques

On applique l'équation (4.10) à chaque élément piézoélectrique.

On choisit ici d'imposer le potentiel  $\psi$  sur les électrodes  $\Gamma_+^{(p)}$  et  $\Gamma_-^{(p)}$ , et une densité de charge surfacique nulle  $q^d = 0$  sur le domaine complémentaire  $\Gamma_0^{(p)}$  conformément à l'hypothèse 6 ; l'équation (4.10) appliquée au  $p$ -ième élément s'écrit alors quelque soit  $\delta\psi \in \mathcal{C}_\psi$  :

$$\int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) \, d\Omega + \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = \int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS \quad (4.15)$$

Les termes piézoélectriques de l'équation (4.15) peuvent être traités de la même manière qu'à la section 4.3.2 de façon à obtenir :

$$\int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = -\frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega, \quad (4.16)$$

où  $\delta V^{(p)} = \delta\psi_+^{(p)} - \delta\psi_-^{(p)}$  avec  $\delta\psi_+^{(p)}$  et  $\delta\psi_-^{(p)}$  les valeurs de  $\delta\psi$  sur les électrodes supérieures et inférieures du  $p$ -ième élément.

De la même façon le terme diélectrique de l'équation (4.15) peut être réécrit en considérant les hypothèses 8 :

$$\int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} n_i n_k \, d\Omega. \quad (4.17)$$

Avec l'hypothèse 2, le volume du  $p$ -ième élément est proche de  $h^{(p)} S^{(p)}$ , où  $S^{(p)}$  est la surface moyenne de l'élément, ce qui donne :

$$\int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{ik} E_k(\psi) E_i(\delta\psi) \, d\Omega = C^{(p)} V^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.18)$$



où

$$C^{(p)} = \frac{\epsilon_{33} S^{(p)}}{h^{(p)}} \quad (4.19)$$

est la capacité de l'élément et  $\epsilon_{33} = \epsilon_{ik} n_i n_k$  la permittivité à déformation constante (ou bloquée) du matériau dans la direction normale aux électrodes. Le terme à droite de l'équation (4.15) peut être réécrit en prenant en compte le fait que le potentiel test est uniforme sur les électrodes ; l'intégrale se réduit au produit des charges libres présentes sur les électrodes supérieures et inférieures  $Q_+^{(p)}$  et  $Q_-^{(p)}$  par le potentiel de ces électrodes :

$$\int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS = Q_+^{(p)} \delta\psi_+^{(p)} + Q_-^{(p)} \delta\psi_-^{(p)}, \quad (4.20)$$

ce qu'on peut simplifier en appliquant la forme intégrale du théorème de Gauss à une surface fermée  $\Sigma$  entourant le  $p$ -ième élément ; à l'équilibre électrostatique on obtient

$$\oint_{\Sigma} D_i n_i \, dS = Q, \quad (4.21)$$

où  $Q$  est la charge libre contenue dans  $\Sigma$ . Dans le cas étudié, en plaçant  $\Sigma$  dans  $\Omega_s$  ou à l'extérieur de  $\Omega$  on ne lui fait traverser que des domaines où  $D_i$  est négligé, c'est à dire soit le milieu entre les éléments piézoélectriques, soit un des fils conducteurs reliés aux électrodes du  $p$ -ième élément. Le coté gauche de l'équation (4.21) s'annule et la charge libre intégralement contenue dans  $\Sigma$  est nulle, ce qui établit que les charges à la surface des électrodes sont opposées (voir Figure (4.2)). En notant  $Q^{(p)}$  la charge présente sur l'électrode supérieure  $\Gamma_+^{(p)}$  on obtient :

$$Q_+^{(p)} = -Q_-^{(p)} = Q^{(p)}. \quad (4.22)$$

et ensuite :

$$\int_{\Gamma_+^{(p)} \cup \Gamma_-^{(p)}} q^r \delta\psi \, dS = Q^{(p)} (\delta\psi_+^{(p)} - \delta\psi_-^{(p)}) = Q^{(p)} \delta V^{(p)}. \quad (4.23)$$

### Formulation variationnelle

La formulation variationnelle du problème peut maintenant être écrite, en prenant en compte les équations (4.13) et (4.15) pour chacun des  $P$  éléments et en prenant en compte les équations (4.14), (4.16), (4.18) et (4.23).

Il faut trouver  $u_i \in \mathcal{C}_u$  (tel que  $u_i = u_i^d$  sur  $\Gamma_u$ ) et les  $P$  charges électriques  $Q^{(p)}$  (avec les différences de potentiel  $V^{(p)}$  associées prescrites) satisfaisant :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \\ + \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega = \int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \quad \forall \delta u_i \in \mathcal{C}_u^* \end{aligned} \quad (4.24)$$

et

$$- \sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega + \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} = \sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)}, \quad \forall \delta V^{(p)} \in \mathbb{R}, \quad (4.25)$$

avec les conditions initiales adéquates.

Cette formulation variationnelle est adaptée au cas où les éléments piézoélectriques sont utilisés en tant qu'actionneurs, car dans ce cas une source de tension impose la différence de potentiel  $V^{(p)}$  à leurs bornes. Il est ainsi possible de calculer la réponse en déplacement du système à partir des tensions imposées  $V^{(p)}$  et seulement ensuite calculer les charges si besoin avec l'équation (4.25).

On peut aussi utiliser cette formulation lorsque les éléments piézoélectriques sont en circuit ouvert ( $Q^{(p)} = 0$ ), ou lorsqu'une charge électrique leur est imposée. Dans ce cas, ce sont les différences de potentiel qui sont solution de (4.24) et (4.25).<sup>1</sup>

Enfin on peut utiliser (et c'est ici le but) cette formulation pour le cas d'éléments piézoélectriques connectés à un circuit électronique (shunt) qui n'impose ni la charge, ni la différence de potentiel, mais plutôt une relation entre les deux, liée à son impédance électrique. Dans ce cas, il faut ajouter cette relation aux équations (4.24) et (4.25) pour trouver la solution du problème.

### 4.3.3 Formulation en éléments finis

Après discrétisation éléments finis de la partie mécanique des équations (4.24) et (4.25) et en notant  $\mathbf{U}$  le vecteur des coordonnées nodales de  $u_i$  et  $\mathbf{Q} = (Q^{(1)} Q^{(2)} \dots Q^{(P)})^\top$ ,  $\mathbf{V} = (V^{(1)} V^{(2)} \dots V^{(P)})^\top$  les vecteurs colonnes des charges libres et différences de potentiel, les équations (4.24) et (4.25) s'écrivent :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \delta u_i \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{M}_m \ddot{\mathbf{U}} \quad (4.26a)$$

$$\int_{\Omega} c_{ijkl} \varepsilon_{kl}(u) \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{K}_m \mathbf{U} \quad (4.26b)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{kij} n_k \varepsilon_{ij}(\delta u) \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{K}_c \mathbf{V} \quad (4.26c)$$

$$\int_{\Omega} f_i^d \delta u_i \, d\Omega + \int_{\Gamma_t} t_i^d \delta u_i \, dS \Rightarrow \delta \mathbf{U}^\top \mathbf{F} \quad (4.26d)$$

$$\sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{ikl} \varepsilon_{kl}(u) n_i \, d\Omega \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{K}_c^\top \mathbf{U} \quad (4.26e)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} C^{(p)} V^{(p)} \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{K}_e \mathbf{V} \quad (4.26f)$$

$$\sum_{p=1}^P \delta V^{(p)} Q^{(p)} \Rightarrow \delta \mathbf{V}^\top \mathbf{Q} \quad (4.26g)$$

On obtient ainsi la formulation éléments finis générale du problème électromécanique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{V}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_m & \mathbf{K}_c \\ -\mathbf{K}_c^\top & \mathbf{K}_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Dans cette équation  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  sont les matrices de masse et raideur mécaniques, de dimension  $N \times N$  où  $N$  est le nombre de degrés de liberté (ddl).  $\mathbf{K}_e = \text{diag}(C^{(1)} C^{(2)} \dots C^{(P)})$

<sup>1</sup>On parle très souvent de cette condition comme le "cas capteur". Pourtant, les capteurs piézoélectriques font parfois appel à un amplificateur de charge qui a pour effet de fixer  $V^{(p)} = 0$  et de mesurer  $Q^{(p)}$  [90]. Il est donc nécessaire de vérifier le type d'électronique utilisée avant de conclure quant à la condition limite ainsi qu'à la valeur de la mesure.

est la matrice diagonale des capacités de chacun des éléments piézoélectriques.  $\mathbf{K}_c$  et la matrice de couplage électromécanique, de taille  $N \times P$ .  $\mathbf{F}$  est le vecteur des efforts nodaux. On peut reformuler ce système avec la charge comme ddl et la différence de potentiel imposée :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{Q}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_m & \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \\ \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top & \mathbf{K}_e^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{pmatrix}, \quad (4.28)$$

avec  $\hat{\mathbf{K}}_m = \mathbf{K}_m + \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top$  matrice de raideur en circuit ouvert ; cette expression est de la même forme que celle que l'on souhaite obtenir (3.70), à quelques différences près :

- l'équation (4.28) est dimensionnée ;
- il y a plusieurs éléments piézoélectriques et donc plusieurs ddl électriques ;
- le nombre de ddl mécaniques est bien plus important (il n'y a pas eu réduction du modèle).

Si l'on souhaite converger vers la forme de l'équation (3.70) il faut réduire le système par projection modale et l'adimensionner.

#### 4.3.4 Cas pratiques

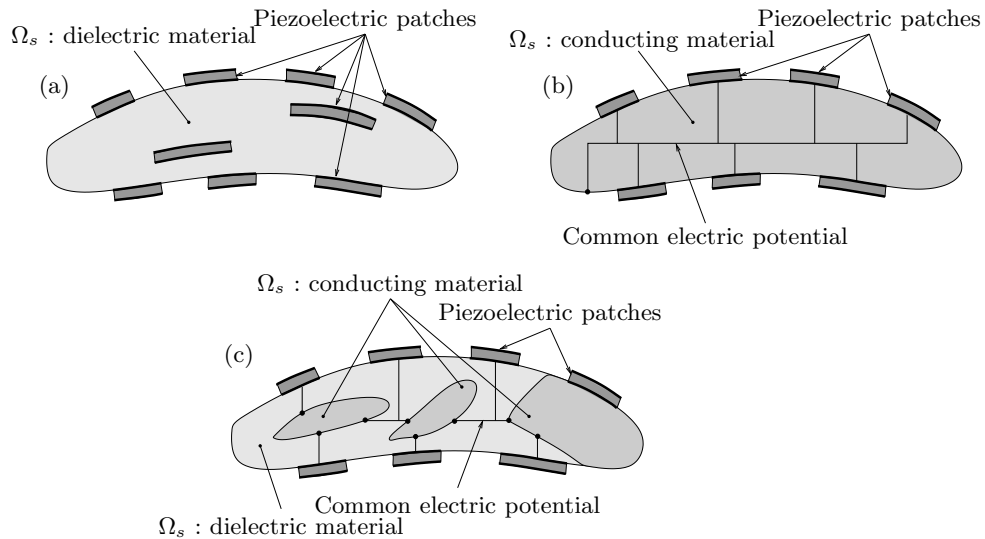


FIG. 4.3: Exemples de configurations correspondant aux hypothèses de la section 4.3.1. (a) structure  $\Omega_s$  diélectrique ; (b) structure conductrice ; (c) structure  $\Omega_s$  partiellement conductrice et partiellement diélectrique.

Les cas pratiques où les hypothèses de la section 4.3.1 sont valides correspondent aux cas où :

- Les éléments piézoélectriques sont minces, ce qui valide les hypothèses 2 à 8.
- Le système est tel que les éléments sont du point de vue électrique comparables à un réseau de capacités indépendantes, ce qui valide les hypothèses 9 et 6.

Le premier point est clair, et le second point est ici éclairci : En posant l'hypothèse 9 on suppose que le champ de déplacement électrique  $D_i$  est négligeable dans  $\Omega_s$ . Or d'après l'hypothèse 1, il n'y a pas d'effet piézoélectrique et  $D_i = \epsilon_{ik} E_k$  dans  $\Omega_s$ . Alors  $D_i$  dépend uniquement du champ électrique  $E_k$  et de la permittivité  $\epsilon_{ik}$  de la structure.

La plupart des matériaux structurels, conducteurs et diélectriques, ont des permittivités de l'ordre de  $3\epsilon_0$  ( $\epsilon_0$  étant la permittivité du vide), bien plus faible que celle de matériaux piézoélectriques qui peuvent atteindre  $1000\epsilon_0$  [45]. L'hypothèse 9 est donc vraie si le champ électrique est de même ordre de grandeur ou inférieur dans la structure, comparé à sa valeur dans les patches.  $E_k$  étant le gradient du potentiel, son ordre de grandeur est la différence de potentiel entre les électrodes de divers éléments divisée par la distance entre ces électrodes. Ce champ pourra donc être important si deux conducteurs à des potentiels différents sont proches l'un de l'autre ; cette situation peut être évitée en éloignant des électrodes à des potentiels différents, ou en les ramenant à des potentiels proches. Un cas où l'on enfreindrait cette règle serait celui d'un élément piézoélectrique collé sur une structure conductrice, avec une différence de potentiel entre l'électrode collée et la structure, possible de par la présence d'un film de colle isolant. Il régnerait ainsi un champ électrique intense dans le film de colle, et celui-ci constituerait un condensateur plan de capacité non négligeable. Il faudrait alors tenir compte de cette capacité "parasite" dans la matrice  $\mathbf{K}_e$ .

Cette situation doit de toute façon être évitée, puisqu'une partie de l'énergie électrique que l'on souhaite utiliser (par exemple dans un shunt) ou que l'on amène avec un contrôleur actif serait stockée dans cette capacité ; l'efficacité<sup>2</sup> serait alors réduite.

Finalement, l'hypothèse 6 est vérifiée si la surface latérale  $\Gamma_0^{(p)}$  est en contact avec un milieu diélectrique ne pouvant amener de charges libres.

Des cas pratiques vérifiant les hypothèses de la section 4.3.1 et permettant d'obtenir des systèmes efficaces sont introduits ci-dessous et présentés figure (4.3).

- Si  $\Omega_s$  est constituée de matériau diélectrique, il faut vérifier que  $\epsilon_{ik}$  est assez faible et que les éléments ne sont pas placés trop près l'un de l'autre. Certains éléments peuvent être inclus dans  $\Omega_s$  (Figure 4.3(a)). C'est le cas typique d'une structure composite avec éléments inclus dans la matrice.
- Si  $\Omega_s$  est intégralement conductrice (cas d'une structure métallique), il faut mettre toutes les électrodes en contact avec  $\Omega_s$  au même potentiel que  $\Omega_s$ , afin d'éviter les effets de capacité parasite du film de colle. Une bonne manière de procéder est d'utiliser une colle conductrice.
- Si certaines parties de  $\Omega_s$  sont diélectriques et d'autres conductrices, il faut si possible imposer un potentiel identique à toutes les parties conductrices de  $\Omega_s$ . Ainsi par exemple dans le cas d'une structure sandwich on évitera d'avoir des peaux à différents potentiels.

## 4.4 Réduction modale et coefficients de couplage

Dans cette section un modèle réduit du problème discrétisé obtenu à la section 4.3.3 est introduit, en projetant les inconnues du déplacement mécanique sur la base des modes en court-circuit. Il s'agit de la même démarche qu'au chapitre 3.4.1, à la différence que les modes sont ici issus du modèle élément finis.

### 4.4.1 Modes propres en court-circuit

Les modes propres du système en court-circuit sont les solutions de l'équation (4.27) avec  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ . Les pulsations (liées aux valeurs) propres  $\omega_r$  et modes (vecteurs) propres  $\Phi_r$  ( $\Phi_r$  étant un vecteur colonne de dimension  $N$ ) sont les  $N$  solutions du problème :

$$\mathbf{K}_m \Phi - \omega^2 \mathbf{M}_m \Phi = \mathbf{0}, \quad (4.29)$$

<sup>2</sup>Souvent liée au coefficient de couplage électromécanique défini au chapitre 4.4, qui serait réduit par la capacité parasite. Sauf cas très particulier [8], les capacités parasites sont à éviter ; voir 9.1.2.

qui ne dépend que des propriétés élastodynamiques de  $\Omega$ . Ces modes vérifient les propriétés d'orthogonalité suivantes :

$$\forall (i, j), \quad \Phi_i^\top \mathbf{M}_m \Phi_j = \delta_{ij}, \quad \Phi_i^\top \mathbf{K}_m \Phi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}. \quad (4.30)$$

avec les  $\Phi_j$  normalisés par rapport à la matrice de masse<sup>3</sup> :

$$\forall r, \quad \Phi_r^\top \mathbf{M}_m \Phi_r = 1. \quad (4.31)$$

#### 4.4.2 Projection modale du problème général

Le vecteur déplacement est écrit sous la forme :

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{r=1}^N \Phi_r q_r(t). \quad (4.32)$$

En insérant cette équation dans le système (4.27), en multipliant la partie mécanique du système par  $\Phi_r^\top$  et en prenant l'orthogonalité des modes en compte (4.30), le problème s'écrit pour tout  $r \in \llbracket 1, N \rrbracket$  :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \Phi_r^\top \mathbf{K}_c \mathbf{V} = \Phi_r^\top \mathbf{F}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{K}_e \mathbf{V} - \sum_{j=1}^N \mathbf{K}_c^\top \Phi_j q_j = \mathbf{Q} \quad (4.34)$$

Cet ensemble d'équations peut se réécrire en séparant les équations de chaque élément piézoélectrique :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{p=1}^P \chi_r^{(p)} V^{(p)} = F_r, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.35a)$$

$$C^{(p)} V^{(p)} - Q^{(p)} - \sum_{j=1}^N \chi_j^{(p)} q_j = 0, \quad \forall p \in \llbracket 1, P \rrbracket, \quad (4.35b)$$

où  $\chi_r^{(p)}$  est le coefficient de couplage du  $r$ -ième mode avec le  $p$ -ième élément piézoélectrique, défini par :

$$\left( \chi_r^{(1)} \chi_r^{(2)} \dots \chi_r^{(P)} \right) = \Phi_r^\top \mathbf{K}_c, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket, \quad (4.36)$$

et  $F_r(t) = \Phi_r^\top \mathbf{F}(t)$  le forçage externe sur le  $r$ -ième mode.

On peut obtenir une autre écriture du problème (4.35a,b) en substituant  $Q^{(p)}$  à  $V^{(p)}$  (d'après l'équation (4.35b)) dans l'équation (4.35a) :

$$\ddot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \sum_{p=1}^P \sum_{k=1}^N \frac{\chi_r^{(p)} \chi_k^{(p)}}{C^{(p)}} q_k - \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = F_r, \quad \forall r \in \llbracket 1, N \rrbracket. \quad (4.37)$$

Avec les unités suivantes pour les paramètres :  $\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m}$  pour  $q_i$ ,  $\text{N} \cdot \text{kg}^{-1/2}$  pour  $F_i$  et  $\text{kg}^{1/2} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{V}^{-1}$  ( $\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s} \cdot \text{A}$  en SI.) pour  $Q^{(p)}$ .

<sup>3</sup>Ce qui fait que les unités des déformées modales sont des  $\text{kg}^{-1/2}$  pour les degrés de liberté de translation et  $\text{kg}^{-1/2} \cdot \text{m}^{-1}$  pour les degrés de liberté en rotation ; voir (B.1) p. 253 pour les unités de  $\mathbf{M}_m$ .

La formulation élément finis de la section 4.3.3 peut ainsi être remplacée par la formulation modale (4.35a,b) ou (4.35a,4.37) dont les inconnues sont les  $N$  coordonnées modales  $q_r$  et les  $P$  paires différence de potentiel/charge  $(V^{(p)}, Q^{(p)})$  associées à chaque élément. En pratique l'intérêt de ce type de formulation est de tronquer la base modale à quelques modes, par exemple les  $\tilde{N} \ll N$ . Les données nécessaires pour obtenir ce modèle sont :

- les  $\tilde{N}$  modes propres en court-circuit  $(\omega_r, \Phi_r)_{r \in \llbracket 1, \tilde{N} \rrbracket}$ , normalisés par rapport à la matrice masse (eq. 4.31) ;
- les forçages modaux  $F_i$  ;
- les  $\tilde{N} \times P$  coefficients de couplage  $(\chi_r^{(p)})_{r \in \llbracket 1, \tilde{N} \rrbracket, p \in \llbracket 1, P \rrbracket}$ .
- les  $P$  capacités des éléments piézoélectriques  $C^{(p)}$ , données par l'équation. (4.19).

L'intérêt principal de la méthode proposée est que les calculs ci-dessus ne nécessitent qu'une seule analyse modale du problème *elastodynamique*. Il s'agit donc :

- de calculer les matrices liées au problème (4.27), soit  $\mathbf{M}_m, \mathbf{K}_m, \mathbf{K}_c$  ;
- de calculer les  $\tilde{N}$  fréquences propres  $\omega_r$  et déformées modales  $\Phi_r$ , par résolution du problème (4.29). C'est un cas classique faisant intervenir uniquement  $\mathbf{M}_m$  et  $\mathbf{K}_m$  ;
- d'appliquer la formule (4.36) pour obtenir  $\chi_r^{(p)}$ . La matrice  $\mathbf{K}_c$  est la seule matrice dont l'assemblage requiert la prise en compte des caractéristiques piézoélectriques.

#### 4.4.3 Coefficient de couplage effectif

Cette section a pour but de montrer que le coefficient  $\chi_r^{(p)}$  introduit ci-dessus est directement lié au coefficient introduit au chapitre 2.7.1 pour le matériau piézoélectrique et au chapitre 3.4.2 pour une structure de type poutre. Ce coefficient de couplage effectif caractérise l'échange d'énergie entre les éléments piézoélectriques et la structure mécanique. Il est défini pour le  $r$ -ième mode par la norme [2] :

$$k_{\text{eff},r}^2 = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}, \quad (4.38)$$

où  $\omega_r$  et  $\hat{\omega}_r$  sont les fréquences propres en court-circuit et circuit ouvert du  $r$ -ième mode. L'ensemble d'équations (4.37) tronqué à la  $i$ -ième ligne uniquement (c'est à dire  $q_j(t) \equiv 0 \quad \forall j \neq r$ ) donne :

$$\ddot{q}_r + \left[ \omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^{(p)})^2}{C^{(p)}} \right] q_r - \sum_{p=1}^P \frac{\chi_r^{(p)}}{C^{(p)}} Q^{(p)} = F_r. \quad (4.39)$$

En circuit ouvert ( $Q^{(p)} = 0 \quad \forall p$ ), le problème s'écrit :

$$\ddot{q}_r + \hat{\omega}_r^2 q_r = F_r, \quad (4.40)$$

Et en comparant les équations (4.39) et (4.40) on obtient :

$$\hat{\omega}_r \simeq \omega_r^2 + \sum_{p=1}^P \frac{(\chi_r^{(p)})^2}{C^{(p)}}. \quad (4.41)$$

Cette expression est une approximation de la fréquence du  $r$ -ième mode en circuit ouvert, notée  $\hat{\omega}_r$ , à condition que la troncature modale soit valide. Alors en combinant les équations (4.38) et (4.41), le coefficient de couplage modal pour le  $r$ -ième mode est :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq \sum_{p=1}^P \left( k_r^{(p)} \right)^2, \quad (4.42)$$

où  $k_r^{(p)}$ , défini par

$$k_r^{(p)} = \frac{\chi_r^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}\omega_r}}, \quad (4.43)$$

est le coefficient de couplage réduit entre le  $r$ -ième mode et le  $p$ -ième élément piézoélectrique. En reprenant les définitions matricielles de  $\chi_r^{(p)}$ ,  $\omega_r$  et  $C^{(p)}$  liées au problème initial (4.27) on obtient une autre expression pour  $k_{\text{eff},r}$  d'après (4.42) :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq \frac{\Phi_r^\top \mathbf{K}_c \mathbf{K}_e^{-1} \mathbf{K}_c^\top \Phi_r}{\Phi_r^\top \mathbf{K}_m \Phi_r}. \quad (4.44)$$

Il faut ainsi distinguer le cas d'un élément piézoélectrique unique, où  $k_{\text{eff},r}$  est directement lié à  $\chi_r$  :

$$k_{\text{eff},r}^2 \simeq k_r^2 = \frac{\chi_r^2}{C\omega_r^2}, \quad (4.45)$$

avec  $C$  capacité de l'élément. Cette relation peut être généralisée au cas de plusieurs éléments en définissant le coefficient de couplage effectif entre le  $r$ -ième mode et le  $p$ -ième élément  $k_{\text{eff},r}^{(p)}$  défini par la différence des pulsations entre la situation où tous les éléments sont en court-circuit et le cas où ils sont en court-circuit sauf le  $p$ -ième qui serait en circuit ouvert (pulsation notée  $\hat{\omega}_r^{(p)}$ ); on a alors

$$\left( k_{\text{eff},r}^{(p)} \right)^2 = \frac{\left( \hat{\omega}_r^{(p)} \right)^2 - \omega_r^2}{\omega_r^2}. \quad (4.46)$$

En effet, en écrivant les équations (4.35a,b) tronquées au  $r$ -ième mode avec uniquement le  $p$ -ième élément en circuit ouvert on obtient :

$$\ddot{q}_r + \left[ \omega_r^2 + \frac{\left( \chi_r^{(p)} \right)^2}{C^{(p)}} \right] q_r = F_r. \quad (4.47)$$

qui donne l'approximation suivante de  $\hat{\omega}_r^{(p)}$  :

$$\left( \hat{\omega}_r^{(p)} \right)^2 \simeq \omega_r^2 + \frac{\left( \chi_r^{(p)} \right)^2}{C^{(p)}}, \quad (4.48)$$

permettant finalement d'approcher  $k_{\text{eff},r}^{(p)}$  du coefficient de couplage défini par (4.43) :

$$\boxed{k_{\text{eff},r}^{(p)} \simeq k_r^{(p)} = \frac{\chi_r^{(p)}}{\sqrt{C^{(p)}\omega_r}}.} \quad (4.49)$$

Cette équation montre le lien direct entre  $\chi_r^{(p)}$  et le coefficient de couplage modal effectif avec l'élément concerné  $k_{\text{eff},r}^{(p)}$ .

On peut résumer les caractéristiques de ces divers coefficients de couplage comme suit :

- $\chi_r^{(p)}$  est issu de l'assemblage de la matrice piézoélectrique et des modes en court-circuit
- $k_r^{(p)}$  est lié à  $\chi_r^{(p)}$  et présente l'avantage supplémentaire d'être sans dimension.
- $k_{\text{eff},r}^{(p)}$  est lié à  $k_r^{(p)}$  et est facilement mesurable (il suffit en effet d'identifier les fréquences propres mentionnées dans la relation (4.46), comme cela a été fait par exemple §9.1.2). On pourrait aussi l'obtenir avec un code éléments finis permettant de trouver les fréquences propres avec un élément piézoélectrique en circuit ouvert.
- $k_{\text{eff},r}$  est le coefficient de couplage global et regroupe les participations de tous les éléments piézoélectriques.

On verra par la suite que ces coefficients sont capitaux pour la performance des applications de type shunt (§5.3.4, 5.4.4, [37, 32, 31]) ou switch (§7.4.4, [30]) ; il est souvent essentiel de le maximiser. C'est pourquoi un soin particulier a été pris de montrer qu'au moins deux méthodes (assemblage de matrices et différence de fréquences) permettent de les obtenir.

Il faut cependant remarquer que la formule (4.49) n'est pertinente que si la troncature à un mode est valide, ce qui exclut les cas de fréquences propres proches les unes des autres. Dans le cas où les modes seraient rapprochés, les définitions proposées peuvent être utilisées mais  $k_i^{(p)}$  et  $k_{\text{eff},i}^{(p)}$  pourraient être différents.

## 4.5 Application au cas d'une poutre stratifiée piézoélectrique

L'objectif de cette section est de proposer une formulation générale pour une poutre similaire à celle du chapitre 3 avec différentes couches, dont certaines piézoélectriques (Figure 4.4). On garde l'utilisation des notations de Voigt pour les composantes de tenseurs.

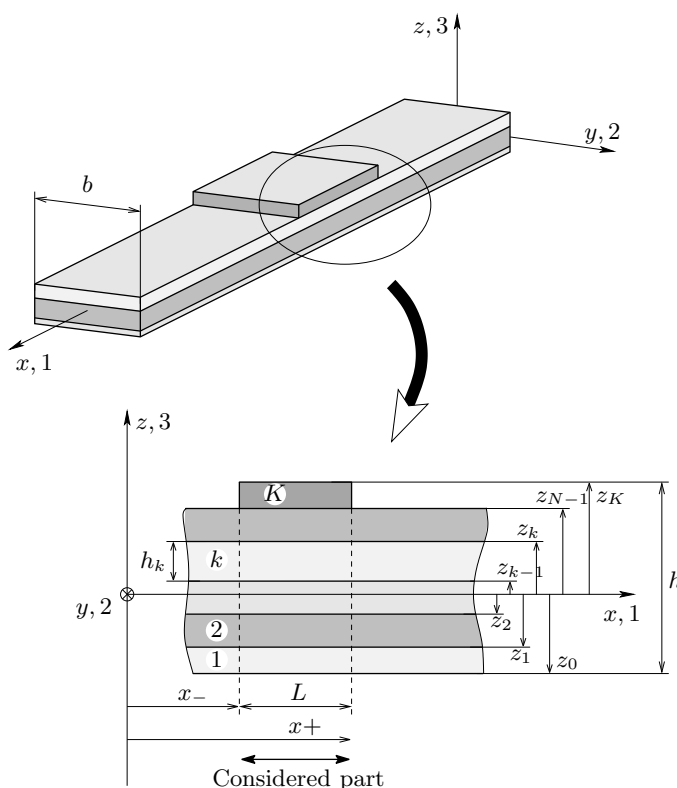


FIG. 4.4: Poutre laminée avec éléments piézoélectriques



### 4.5.1 Hypothèses sur les champs électriques et mécaniques

La poutre est modélisée avec les hypothèses d'Euler-Bernoulli. Le champ de déplacement s'écrit :

$$u_x(x, z, t) = u(x, t) + z\theta(x, t), \quad (4.50a)$$

$$u_z(x, z, t) = w(x, t), \quad (4.50b)$$

où  $u_x$  et  $u_z$  sont les déplacements axiaux et transverses ;  $u$  est le déplacement axial sur la fibre neutre de la poutre,  $w$  le déplacement transverse et  $\theta$  la rotation des sections définie par :

$$\theta = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.51)$$

À partir des équations (4.5) et des hypothèses cinématiques la déformation s'écrit :

$$\varepsilon_1 = e + z\kappa, \quad (4.52)$$

où la déformation de membrane  $e$  et la courbure  $\kappa$  sont définies par

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{and} \quad \kappa = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (4.53)$$

En ce qui concerne les aspects électrostatiques, toutes les hypothèses de la section 4.3.1 sont utilisées, ce qui fait que le champ électrique est normal aux électrodes et uniforme dans chaque élément. Sa seule composante non nulle est :

$$E_3^{(p)} = -\frac{V^{(p)}}{h^{(p)}}. \quad (4.54)$$

Enfin on utilise la constante de couplage piézoélectrique réduite  $e_{31}$ , tenant compte des hypothèses "poutre" (2.43).

### 4.5.2 Formulation variationnelle

En considérant une partie de la poutre comprise entre  $x^-$  et  $x^+$  où ses caractéristiques sont constantes (longueur  $L_e = x^+ - x^-$  avec  $K$  couches dont  $P$  éléments piézoélectriques), les équations (4.24) et (4.25) de la formulation variationnelle avec couplage électromécanique peuvent être réécrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} \rho^k (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_z \delta u_z) d\Omega + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} c_{11}^k \varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \delta \varepsilon_1 d\Omega \\ & = \sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_t^k} (t_x^k \delta u_x + t_z^k \delta u_z) dS + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u_x + f_z^k \delta u_z) d\Omega, \end{aligned} \quad (4.55)$$

$$-\sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \varepsilon_1 d\Omega + \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)} d\Omega = \sum_{p=1}^P Q^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.56)$$

où  $\rho^k$  et  $\Omega^k$  sont la densité et le domaine occupé par la  $k$ -ième couche. La poutre subit des efforts de axiaux et transverses de surface sur les extrémités  $(t_x^k, t_z^k)$  et volumiques  $(f_x^k, f_z^k)$ .

Avant de détailler les termes de la formulation variationnelle on définit les moments d'ordre 0, 1 et 2 de chaque couche par :

$$\begin{aligned} [J_0^k, J_1^k, J_2^k] &= b \int_{z_{k-1}}^{z_k} [1, z, z^2] dz, \\ &= b \left[ h^k, \frac{z_k^2 - z_{k-1}^2}{2}, \frac{z_k^3 - z_{k-1}^3}{3} \right], \end{aligned}$$

où  $b$  et  $h^k$  sont la largeur de la poutre et l'épaisseur de la  $k$ -ième couche. On reconnait alors dans la formulation variationnelle (4.55) et (4.56) les expressions suivantes

– Variation de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} \rho^k (\ddot{u}_x \delta u_x + \ddot{u}_z \delta u_z) d\Omega &= \int_{x^-}^{x^+} \left[ I_0 (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) + I_1 (\ddot{u} \delta \theta + \ddot{\theta} \delta u) + I_2 \ddot{\theta} \delta \theta \right] dx \\ &= \int_{x^-}^{x^+} (\delta u \ \delta w \ \delta \theta) \begin{pmatrix} I_0 & 0 & I_1 \\ 0 & I_0 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où les moments d'inertie d'ordre 0, 1 et 2 sont :

$$[I_0, I_1, I_2] = \sum_{k=1}^N \rho^k [J_0^k, J_1^k, J_2^k].$$

– Variation d'énergie interne mécanique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega^k} c_{11}^k \varepsilon_1 \delta \varepsilon_1 d\Omega &= \int_{x^-}^{x^+} \left[ A e \delta e + B (\kappa \delta e + e \delta \kappa) + D \kappa \delta \kappa \right] dx \\ &= \int_{x^-}^{x^+} (\delta e \ \delta \kappa) \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \kappa \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où  $A$  est la rigidité globale,  $D$  la rigidité de flexion et  $B$  la rigidité de couplage membrane-flexion définies par

$$[A, B, D] = \sum_{k=1}^N c_{11}^k [J_0^k, J_1^k, J_2^k].$$

– Travail des efforts extérieurs

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^K \int_{\Gamma_t^k} (t_x^k \delta u_x + t_z^k \delta u_z) dS + \sum_{k=1}^K \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u_x + f_z^k \delta u_z) d\Omega \\ &= \sum_{k=1}^K \left\{ \left[ \int_{\Sigma^k} (t_x^k \delta u + t_z^k \delta w - z t_x^k \delta \theta) dS \right]_{x^-}^{x^+} + \int_{\Omega^k} (f_x^k \delta u + f_z^k \delta w - z f_x^k \delta \theta) d\Omega \right\} \\ &= [N \delta u + T \delta w - M \delta \theta]_{x^-}^{x^+} + \int_{x^-}^{x^+} (n \delta u + t \delta w - m \delta \theta) dx, \end{aligned}$$

où  $\Sigma^k$  est la section droite de la couche  $k$  et les efforts (i) normaux , (ii) transverses et (iii) le moment de flexion des efforts de contact et volumiques sont :

$$[N, T, M] = \sum_{k=1}^K \left[ \int_{\Sigma^k} t_x^k dS, \int_{\Sigma^k} t_z^k dS, \int_{\Sigma^k} z t_z^k dS \right]$$

et

$$[n, t, m] = \sum_{k=1}^K \left[ \int_{\Sigma^k} f_x^k dS, \int_{\Sigma^k} f_z^k dS, \int_{\Sigma^k} z f_z^k dS \right].$$

– Contribution des effets piézoélectriques (direct et indirect) à la variation d'énergie

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \delta \varepsilon_1 d\Omega &= \sum_{p=1}^P \left[ \int_{x^-}^{x^+} G_0^k V^{(p)} \delta e dx + \int_{x^-}^{x^+} G_1^k V^{(p)} \delta \kappa dx \right] \\ &= \sum_{p=1}^P \int_{x^-}^{x^+} (\delta e \ \delta \kappa) \begin{pmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{pmatrix} V^{(p)} dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^P \frac{\delta V^{(p)}}{h^{(p)}} \int_{\Omega^{(p)}} e_{31}^{(p)} \varepsilon_1 d\Omega &= \sum_{p=1}^P \left[ \int_{x^-}^{x^+} G_0^{(p)} e \delta V^{(p)} dx + \int_{x^-}^{x^+} G_1^{(p)} \kappa \delta V^{(p)} dx \right] \\ &= \sum_{p=1}^P \int_{x^-}^{x^+} \delta V^{(p)} \begin{pmatrix} G_0^{(p)} & G_1^{(p)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ \kappa \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

où  $G_0^{(p)}$  et  $G_1^{(p)}$  sont donnés par

$$\begin{bmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{bmatrix} = \frac{e_{31}^{(p)}}{h^{(p)}} \begin{bmatrix} J_0^{(p)} \\ J_1^{(p)} \end{bmatrix}.$$

– Partie électrostatique de la variation d'énergie

$$\sum_{p=1}^P \frac{V^{(p)} \delta V^{(p)}}{(h^{(p)})^2} \int_{\Omega^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)} d\Omega = \sum_{p=1}^P V^{(p)} C^{(p)} \delta V^{(p)}, \quad (4.63)$$

avec  $C^{(p)}$  capacité de chaque élément, identique à (4.19) :

$$C^{(p)} = \frac{bL}{h^{(p)}} \epsilon_{33}^{(p)}, \quad (4.64)$$

– Travail de la charge sur les électrodes :

$$\int_{\partial\Omega^{(p)}} q \delta \psi dS = \sum_{p=1}^P Q^{(p)} \delta V^{(p)},$$

ce qui est similaire à l'équation (4.23).

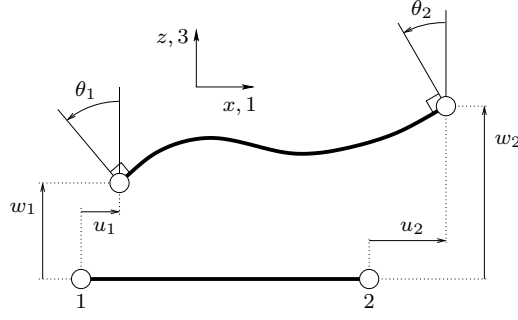


FIG. 4.5: Élément fini de poutre à deux nœuds

### 4.5.3 Discrétisation éléments finis

La formulation éléments finis de la poutre stratifiée est décrite dans cette section. Une notation indicielle  $e$  réfère à une quantité élémentaire. Les déplacements sont discrétisés avec des fonctions linéaires (pour le déplacement axial) et cubiques (pour le mouvement transverse). Les déplacements correspondants sont liés au vecteur des déplacement nœaux  $\mathbf{U}^e$  par

$$u^e = \mathbf{N}_u \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad w^e = \mathbf{N}_w \mathbf{U}^e, \quad (4.65)$$

où

$$\mathbf{U}^e = (u_1 \ w_1 \ \theta_1 \ | \ u_2 \ w_2 \ \theta_2)^\top,$$

$u_1$ ,  $w_1$  et  $\theta_1$  (resp.  $u_2$ ,  $w_2$  et  $\theta_2$ ) étant liés au premier (resp. second) nœud (voir Figure 4.5). Dans l'équation (4.65), les vecteurs d'interpolation sont définis par

$$\mathbf{N}_u = (N_1 \ 0 \ 0 \ | \ N_2 \ 0 \ 0)$$

et

$$\mathbf{N}_w = (0 \ N_3 \ N_4 \ | \ 0 \ N_5 \ N_6),$$

avec pour tout  $x \in [0, L_e]$

$$\begin{aligned} N_1 &= 1 - \frac{x}{L_e}; \quad N_2 = \frac{x}{L_e}; \quad N_3 = \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2 \left(1 + \frac{2x}{L_e}\right) \\ N_4 &= x \left(1 - \frac{x}{L_e}\right)^2; \quad N_5 = \frac{x^2}{L_e^2} \left(3 - \frac{2x}{L_e}\right); \quad N_6 = \frac{x^2}{L_e} \left(\frac{x}{L_e} - 1\right) \end{aligned}$$

On peut remarquer que les équations (4.51), (4.53) et (4.65) amènent l'expression suivante des rotations, déformation de membrane et courbure élémentaires :

$$\theta^e = -\mathbf{N}'_w \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad e^e = \mathbf{N}'_u \mathbf{U}^e \quad \text{et} \quad \kappa^e = -\mathbf{N}''_w \mathbf{U}^e, \quad (4.66)$$

où  $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$ . En utilisant cette discrétisation les matrices de masse et de raideur ainsi que le vecteur des efforts généralisés au niveau de l'élément peuvent s'écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_m^e &= \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u^T \ \mathbf{N}_w^T \ -\mathbf{N}_w'^T) \begin{pmatrix} I_0 & 0 & I_1 \\ 0 & I_0 & 0 \\ I_1 & 0 & I_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u \\ \mathbf{N}_w \\ -\mathbf{N}_w' \end{pmatrix} dx, \\ \mathbf{K}_m^e &= \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u'^T \ -\mathbf{N}_w''^T) \begin{pmatrix} A & B \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{N}_u' \\ -\mathbf{N}_w'' \end{pmatrix} dx, \end{aligned}$$

$$\mathbf{F}^e = [N\mathbf{N}_u^T + T\mathbf{N}_w^T + M\mathbf{N}_w^T]_0^{L_e} + \int_0^{L_e} (n\mathbf{N}_u^T + t\mathbf{N}_w^T + m\mathbf{N}_w^T) dx.$$

Les matrices sont données en annexe B.

#### 4.5.4 Matrice de couplage électromécanique

On utilise maintenant la discrétisation proposée pour assembler la matrice de couplage électromécanique  $\mathbf{K}_c$ , qui couple les  $N$  ddl mécaniques de  $\mathbf{U}$  au  $P$  différences de potentiel de  $\mathbf{V}$  :

$$\mathbf{K}_c = \left( \mathbf{K}_c^{(1)} \mathbf{K}_c^{(2)} \dots \mathbf{K}_c^{(P)} \right), \quad (4.67)$$

où  $\mathbf{K}_c^{(p)}$  est le vecteur colonne des ddl mécaniques avec le  $p$ -ième élément. Un élément piézoélectrique est le plus souvent discrétisé par plusieurs éléments finis et  $\mathbf{K}_c^{(p)}$  est obtenu par assemblage des matrices élémentaires  $\mathbf{K}_c^{e(p)}$  définies par :

$$\mathbf{K}_c^{e(p)} = \int_0^{L_e} (\mathbf{N}_u^T - \mathbf{N}_w^T) \begin{pmatrix} G_0^{(p)} \\ G_1^{(p)} \end{pmatrix} dx. \quad (4.68)$$

L'expression de ces matrices de dimension  $(6 \times 1)$  est donnée en annexe (Eq. (B.4)). En raison de leur forme particulière, lors de l'assemblage, toutes les composantes de  $\mathbf{K}_c^{(p)}$  s'annulent excepté celles liées aux extrémités de l'élément piézoélectrique. Il y a ainsi couplage entre la différence de potentiel et le mouvement transverse et de rotation des extrémités uniquement ; l'effet indirect se traduit par des efforts et moments ponctuels à ces points, comme déjà constaté dans [25, 94].

#### 4.5.5 Association de plusieurs éléments piézoélectriques

Dans un des cas étudiés expérimentalement, deux éléments piézoélectriques identiques ont été utilisés, reliés en série avec le même shunt. On explique ici comment est formulé le problème associant deux éléments piézoélectriques de capacité  $C$  identique, en partant de l'écriture (4.27) avec une matrice de couplage constituée de deux colonnes  $\mathbf{K}_c = [\chi_1 \chi_2]$  :

$$\begin{pmatrix} M_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{U} \\ \ddot{V}_1 \\ \ddot{V}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_m & \chi_1 & \chi_2 \\ -\chi_1^\top & C & 0 \\ -\chi_2^\top & 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}. \quad (4.69)$$

On définit alors les vecteurs et matrices suivantes :

- $V_S$  est la somme des tensions dans les éléments  $V_S = V_1 + V_2$
- $V_D$  est la différence des tensions dans les éléments  $V_D = V_1 - V_2$
- $\mathbf{K}_S$  est la matrice de couplage entre la partie mécanique et la moitié de  $V_S$  :  $\chi_S = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}$
- $\mathbf{K}_D$  est la matrice de couplage entre la partie mécanique et la moitié de  $V_D$  :  $\chi_D = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$

et on peut alors réécrire le système (4.27) sous la forme

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + K_m U + \chi_S V_S + \chi_D V_D = F \\ -2\chi_S^\top U + C V_S = Q_1 + Q_2 \\ -2\chi_D^\top U + C V_D = Q_1 - Q_2 \end{cases} \quad (4.70)$$

### Cas parallèle

En connectant les deux éléments en parallèle à un circuit on impose la situation suivante :

- La tension est la même dans les deux éléments, donc la différence est nulle  $V_D = 0$  ;
- La tension totale dans chaque élément est celle dans le circuit  $V = \frac{V_S}{2}$  ;
- La charge libre circulant dans le circuit est la somme de celle présente dans les électrodes  
 $Q = Q_1 + Q_2$

L'équation (4.70) permet d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + K_m U + 2\chi_S V = F \\ -2\chi_S^\top U + CV_S = Q_1 + Q_2 \end{cases},$$

ou encore

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + K_m U + (\chi_1 + \chi_2)V_S = F \\ -(\chi_1 + \chi_2)^\top U + 2CV = Q \end{cases}. \quad (4.71)$$

On constate ainsi qu'en utilisant les éléments piézoélectriques en parallèle on obtient un système couplé par la somme des matrices de couplage et dont la capacité est double de celle des éléments piézoélectriques. La tension dans le circuit est la tension dans chaque élément, et le charge qui circule est la somme des charges libres sur les électrodes des éléments. Si l'on ouvre le circuit, en imposant  $Q = 0$ , on obtient le système suivant en éliminant  $V$  :

$$M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_S \chi_S^\top}{C})U = F. \quad (4.72)$$

On observe un ajout de raideur par rapport à la situation circuit fermé.

### Cas série

En connectant les deux éléments en série on impose la situation suivante :

- La charge à la surface des électrodes des deux éléments est identique :  $Q_1 - Q_2 = 0$  ;
- La tension dans le circuit est la somme des tensions dans les éléments :  $V = V_S$  ;
- La charge circulant dans le circuit est  $Q = Q_1 = Q_2$ .

En partant de l'équation (4.70) et en remplaçant la valeur de  $V_D$  qui se déduit de la condition  $Q_1 - Q_2 = 0$  on obtient :

$$\begin{cases} M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C})U + \chi_S V = F \\ -\chi_S^\top U + \frac{C}{2}V = Q \end{cases}.$$

On constate donc que le fait de relier les éléments piézoélectriques en série fait apparaître un couplage par la demi-somme des matrices de couplage et une capacité moitié de celle des éléments piézoélectriques. Ce qui est surtout remarquable est un terme de raideur ajoutée de la forme  $2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C}$  qui s'explique par l'impossibilité d'avoir une charge électrique différente sur certaines électrodes. Ce terme n'apparaît pas dans le cas du couplage en parallèle. Si l'on ouvre maintenant le circuit, en imposant  $Q = 0$  dans (4.73) il vient :

$$M_m \ddot{U} + (K_m + 2\frac{\chi_D \chi_D^\top}{C} + 2\frac{\chi_S \chi_S^\top}{C})U = F, \quad (4.73)$$

il y a donc un *ajout supplémentaire de raideur avec l'association série*. D'autrepart, comme la tension observée est la somme des tensions, mais que la charge circulant n'est que celle présente à la surface de chaque élément, pour un mouvement identique de la structure et par rapport à la mise en parallèle des éléments piézoélectriques *on observe une tension double et une courant moitié*.

## 4.6 Comparaison avec le modèle analytique

Afin de vérifier les résultats on étudie le cas d'une poutre simple avec éléments piézoélectriques symétriques ; les paramètres sont donnés dans le tableau 6.7 (p. 118) ; une comparaison expérimentale est effectuée peu après. On compare ici les résultats obtenus (uniquement par le calcul) pour ce système, avec la méthode éléments finis proposée ci-dessus, ou bien avec la méthode du chapitre 3.

On choisit d'effectuer le calcul éléments finis avec 1 élément sur la première section de la poutre, 5 éléments sous les éléments piézoélectriques et 25 sur l'extrémité nue. Les éléments piézoélectriques sont reliés en série en utilisant la technique présentée ci-dessus (§4.5.5).

On calcule les modes propres en court-circuit cherchant les valeurs et vecteurs propres de  $(\mathbf{M}_m, \mathbf{K}_m)$  ; les déformées obtenues analytiquement (figure 4.6) se recouvrent parfaitement et les paramètres calculés analytiquement (début du tableau 4.1) sont en très bon accord.

On calcule également les valeurs et vecteurs propres de  $(\mathbf{M}_m, \hat{\mathbf{K}}_m)$  qui sont les modes en circuit ouvert ; on peut ainsi obtenir  $k_{\text{eff},r}$  par la différence des fréquences et le comparer à  $k_r$ , ce qui permet de vérifier que  $k_r$  est une bonne approximation de celui-ci.

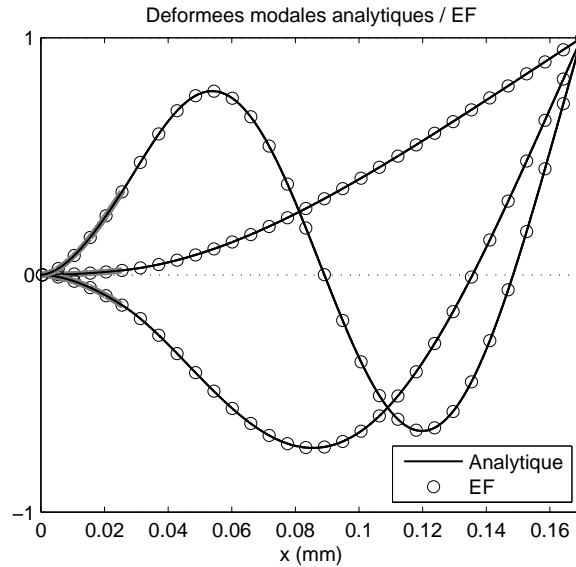


FIG. 4.6: Comparaison des trois premières déformées modales

Paramètre	mode 1 EF/ana.	mode 2 EF/ana.	mode 3 EF/ana.
$\omega_r$	69.698/69.7	416.13/416.2	1106.8 /1107.5
$k_r$	0.145158 / 0.145160	0.144417 /0.14442	0.1292/ 0.1291
$\hat{\omega}_r$	70.37 / -	420.2 / -	1115.7 / -
$k_{\text{eff}}$	0.1398 / -	0.1404 / -	0.1267 / -

TAB. 4.1: Comparaison de paramètres pour les trois premiers modes

## 4.7 Conclusion

Un modèle éléments finis d'une structure arbitraire munie d'éléments piézoélectriques minces est proposé. La particularité de cette étude est d'avoir écrit la partie électrique du problème avec une formulation en charge et tension aux bornes des patches piézoélectriques, ce qui est différent de la plupart des modèles de la littérature.

Ensuite, le problème électromécanique couplé est projeté sur la base modale des modes propres en court-circuit, de la même manière que dans le cas du modèle analytique de poutre du chapitre 3. Cette base a été choisie parcequ'elle peut être identifiée par résolution d'un problème d'élasticité classique. Cette formulation est aussi particulièrement adaptée à l'étude de shunts qui suit ; en effet elle permettra d'accélérer considérablement les simulations, et de mettre en valeur les coefficients ayant une influence pour la performance du système.

Dans les études expérimentales des chapitres 6 et 9, on comparera les résultats expérimentaux à ceux prévu par le modèle du présent chapitre. En particulier on se servira de ce modèle pour optimiser une structure de poutre asymétrique à plusieurs éléments piézoélectriques adaptée aux shunts à commutation (§9.1.2).



---

---

## Shunts linéaires

*Quoi de plus réconfortant, en ce siècle glacé, figé, engoncé dans son froid rigorisme, que de vérifier encore l'exquise sagesse de ces vieux dictons populaires que nos ancêtres, gorgés de vin rouge et boursoufflés d'idées reçues, jetaient jadis dans l'âtre, au cœur paisible des veillées campagnardes ? Mais, direz-vous, ces vieux dictons n'ont-ils pas pris quelques rides ? Pour le savoir, nous pouvons prendre un bon rat, un bon chat, une pierre qui roule et de la mousse, par exemple. (...) Hé oui, le vieux dicton a raison : Chihuahua bouillu, Chihuahua foutu.*

*Pierre Desproges*



## Shunts linéaires : modélisation et optimisation

Ce chapitre présente une optimisation de la réduction des vibrations d’une structure (modélisée d’après les chapitres précédents 3 ou 4) munie d’éléments piézoélectriques associés à des circuits “shunts”<sup>1</sup> passifs. On étudie le cas d’un shunt résistif (shunt “R”) où une résistance électrique dissipera de la puissance par effet Joule et le cas d’un shunt inductif ou résonant (shunt “RL”) où une inductance permet d’augmenter le courant circulant dans le shunt, et donc la dissipation par la résistance (figure 5.1). On utilise pour ce faire le modèle électromécanique de la structure avec patch piézoélectrique obtenu aux chapitres précédents ; le shunt introduit une relation entre le courant (qui dépend de la charge libre sur le patch) et la tension aux bornes de celui-ci.

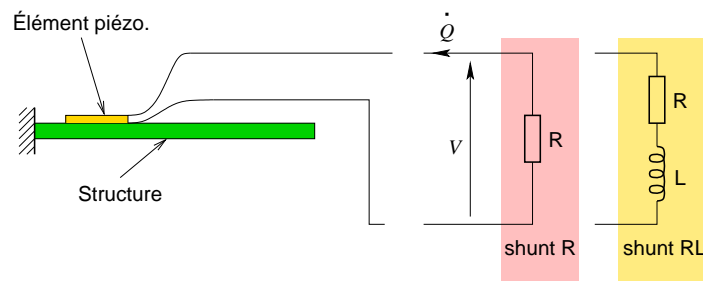


FIG. 5.1: Structure, éléments piézoélectrique et shunts linéaires au choix R ou RL.

Cette étude constitue un bon point de départ pour l’étude de la partie III sur des dispositifs à commutation :

- les shunts linéaires sont relativement simples à étudier ;
- le modèle que l’on développe pour les circuits sera réutilisé ;
- les optimisations auxquelles on procède donnent des pistes pour ensuite optimiser un dispositif à commutation ;
- la linéarité et la simplicité du système facilitent l’étude et les mesures expérimentales.

Tout d’abord, une étude bibliographique succincte est proposée ( §5.1). Ensuite, pour chacun des shunts, on écrit un modèle où la partie mécanique est restreinte à un seul mode

<sup>1</sup>On appelle shunt tout circuit mis en parallèle d’un autre.

( §5.3.1 et 5.4.1 respectivement pour les shunts R et RL) ; ensuite les valeurs optimales des composants électroniques sont identifiées pour le système 1 ddl, pour le cas de la réponse libre et forcée ( §5.3.2 et 5.4.2). Finalement, on constate que les performances dans ce cas ne dépendent que du coefficient de couplage ( §5.3.4 et 5.4.4). On teste alors la tenue de cette performance lorsqu'un des composants électroniques n'est pas optimal, c'est à dire la robustesse du système ( §5.3.5 et 5.4.5). Finalement, on vérifie que le passage à un modèle N ddl ne remet pas en cause les résultats obtenus ( §5.3.6 et 5.4.6).

Dans le chapitre suivant (chap. 6) on validera expérimentalement ces résultats.

## 5.1 Bibliographie

Dans un des premiers articles sur le sujet, Hagood et Von Flotow [37] présentent ces deux types de shunt et leur optimisation dans le cas d'un système conservatif à un degré de liberté. Les auteurs font les constatations suivantes :

- les shunts résistifs et résonants doivent être adaptés à la pulsation d'un mode de vibration à réduire et à la capacité de l'élément piézoélectrique ;
- cet accord doit être très précis dans le cas de l'inductance, ce qui exclut l'amortissement de plusieurs modes ;
- la performance obtenue dépend du coefficient de couplage ;
- les valeurs d'inductance requises sont très élevées.

Par la suite, de nombreux ajouts ont été faits à ce modèle de base pour par exemple comparer différentes topologies de circuits : dans [13] et [75] sont comparés des shunts résonants R-L parallèle, R-L-C parallèle et R-L série ; il peut être aussi intéressant de chercher des méthodes permettant de réduire l'inductance souvent énorme requise pour un shunt résonant, par exemple en ajoutant un condensateur en série [8]. Quelques études proposent des shunts résonants à plusieurs branches avec pour objectif d'amortir plusieurs modes d'un système à plusieurs degrés de liberté [104, 63, 7]. La plupart des études sur des shunts multimodes butent sur la difficulté d'optimiser un circuit où tous les composants ont des réglages fortement dépendants. Une solution pour contourner ce problème consiste à utiliser un réseau d'éléments piézoélectriques reliés par des shunts résonants ; ce réseau constitue un analogue électrique de la structure [61]. À l'heure actuelle de nombreuses études concernent des systèmes adaptatifs où le shunt est accordé en permanence sur les vibrations de la structure ; cela sort du cadre de cette étude.

Une revue des développements dans le domaine peut être trouvée dans [52] et [63] ; une très bonne classification des différents types de shunts est faite dans l'introduction de [69] et enfin un exemple d'application du shunt résonant à un cas concret dans [76].

Pour l'étude de shunts résistifs, on étudiera la similarité avec l'amortissement par ajout de matériau dissipatif avec un modèle viscoélastique, ou bien encore avec un amortisseur de type Lanchester présentés dans [42] et [92], entre autres.

Pour l'étude des shunts résonants, on utilise une démarche d'optimisation qui s'apparente à celle d'un amortisseur à masse accordée (*Tuned mass Damper*, TMD, ou *Damped Vibration Absorber*, DVA, ou amortisseur de Frahm du nom de son inventeur). On se réfère donc à l'optimisation présentée par Den Hartog, [29] ainsi qu'à une note sur ce calcul [10] ; la solution exacte de ce problème est présentée par Nishihara et Asami dans [72] et des solutions de problèmes similaires dans [73].

## 5.2 Objectif

Dans ce chapitre on suppose qu'on dispose d'une représentation sous forme modale de la structure, y compris le couplage électromécanique, avec les  $N$  premiers modes. Ces paramètres auront pu être obtenus par le calcul avec un modèle analytique comme proposé au chapitre 3, ou bien avec un modèle éléments finis proposé au chapitre 4, ou encore expérimentalement. On se fixe comme objectifs :

- de choisir une résistance optimale pour amortir un mode avec un shunt résistif, en étudiant la réponse libre et forcée ;
- de choisir une résistance et une inductance optimales pour amortir un mode avec un shunt résonant, aussi pour la réponse libre ou forcée ;
- d'évaluer la performance de ces méthodes en comparant les réponses en court-circuit et avec shunt optimal ;
- d'évaluer la perte de performance lorsque les paramètres électriques ne sont pas optimaux (robustesse) ou bien en présence d'autres modes.

On montrera à l'issue de cette étude que l'optimisation doit être faite deux étapes :

- tout d'abord en maximisant  $k_r$  le coefficient de couplage modal ;
- puis en adaptant  $R$  ou  $L$  et  $R$  à ce mode.

## 5.3 Shunt résistif

### 5.3.1 Modèle

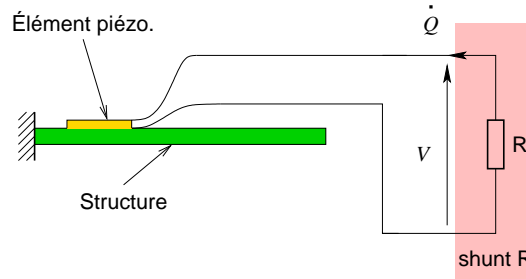


FIG. 5.2: Structure, éléments piézoélectrique et shunt résistif.

On ajoute à l'ensemble structure et éléments piézoélectriques le circuit de la figure 5.2, constitué d'une résistance unique. Cette résistance impose la relation suivante, à ajouter aux équations du système électromécanique :

$$V = -RI = -R\dot{Q}, \quad (5.1)$$

avec  $V$  tension aux bornes des éléments piézoélectriques et  $Q$  charge libre présente à leur surface. On adimensionne le système en utilisant les valeurs utilisées chapitre 3.2.3 :

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (5.2)$$

où  $\tau_m$  est une constante de temps dépendante de la partie mécanique, dans le cas de la poutre :

$$\tau_m = l_b^2 \sqrt{\frac{m_b}{D_b}}$$

et

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (5.3)$$

avec  $C$  capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28). Alors en introduisant (5.2) et (5.3) dans (5.1) on obtient :

$$\bar{V} = -\tau_e \dot{Q}, \quad (5.4)$$

avec

$$\tau_e = \frac{RC}{\tau_m}. \quad (5.5)$$

$\tau_e$  est la constante de temps du circuit  $RC$  (le temps de décharge d'un condensateur de capacité  $C$  dans une résistance  $R$ ), adimensionnée par une constante de temps liée à la partie mécanique du système. Dans toute la suite, on adopte des notations sans barre pour les grandeurs adimensionnée; on gardera à l'esprit que  $\tau_e$  est proportionnel à la résistance. Pour étudier le shunt résistif, on utilise le modèle électromécanique ((3.62)) et on élimine  $V$  en tenant compte de (5.4); il vient alors

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + k_r \omega_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - k_r \omega_r Q(t) = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \tau_e \dot{Q}(t) + Q(t) - \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

ou sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 2\xi_N \omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tau_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} & 0 \\ [k_i \omega_i k_j \omega_j] & \vdots \\ & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & -k_1 \omega_1 \\ & \vdots \\ 0 & & -k_N \omega_N \\ -k_1 \omega_1 & \dots & -k_N \omega_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.7)$$

avec une écriture matricielle similaire à (3.71) où les  $N + 1$  inconnues sont les coordonnées modales et la charge :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.8)$$

où les seules différences par rapport au système sans shunt (3.71) sont :

- $\mathbf{F}$  le vecteur des forçages modaux où la tension n'apparaît plus comme un effet extérieur; le forçage est nul sur la charge;
- $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement de la partie mécanique où un terme électrique (la résistance) apparaît sous la forme de  $\tau_e$

### 5.3.2 Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement

Afin de simplifier l'étude on tronque le système (5.6) en conservant seulement le  $r$ -ième mode, on suppose donc  $q_k = 0$  pour tout  $k$  différent de  $r$ . Alors

$$w(x, t) = q_r(t)\Phi_r(x),$$

et le système (5.6) se simplifie en :

$$\begin{aligned} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \hat{\omega}_r^2 q_r(t) - k_r\omega_r Q(t) &= F_r(t), \\ \tau_e \dot{Q}(t) + Q(t) - k_r\omega_r q_r(t) &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

où  $\hat{\omega}_r^2 = \omega_r^2(1 + k_r^2)$  est la pulsation en circuit ouvert ; on peut aussi noter ce système :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_r\omega_r & 0 \\ 0 & \tau_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\omega}_r^2 & -k_r\omega_r \\ -k_r\omega_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.10)$$

#### Réponse forcée

On souhaite tout d'abord minimiser le maximum de gain de la fonction réponse en fréquence du système ; on cherche  $\tau_e$  optimal pour ce critère, ce qui permet de déduire la valeur de  $R$  à adopter. On se place dans le cas  $\xi_r = 0$  ; cela permet de trouver une solution optimale de manière analytique. Cette démarche a été proposée dans [37] et est reprise par la suite.

On se place en régime harmonique de pulsation  $\Omega$  ; on impose un effort  $F_r(t) = \Re(\underline{F}_r e^{j\Omega t})$  et la réponse est alors de la forme  $q_r(t) = \Re(\underline{q}_r e^{j\Omega t})$  avec  $\underline{q}_r$  et  $\underline{F}_r$  complexes. La FRF déplacement modal / effort est alors :

$$H(\Omega) = \frac{\underline{q}_r}{\underline{F}_r} = \frac{j\Omega\tau_e + 1}{(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)(j\Omega\tau_e + 1) - k_r^2\omega_r^2}, \quad (5.11)$$

soit pour le gain au carré

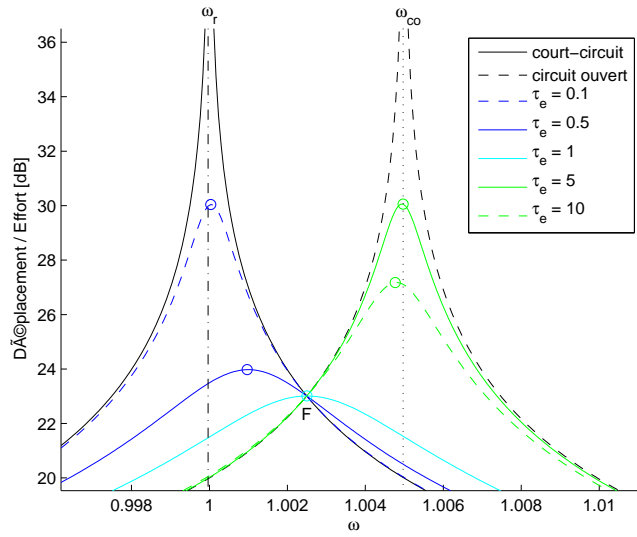
$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\Omega^2\tau_e^2 + 1}{\Omega^2\tau_e^2(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)^2 + (\omega_r^2 - \Omega^2)^2}. \quad (5.12)$$

En traçant les FRF de gain déplacement/effort (fig. 5.3), on constate qu'il existe un point  $F$  indépendant de la résistance  $\tau_e$ , donc commun à toutes les courbes. On cherche la pulsation  $\omega_F$  correspondant à ce point fixe : en particulier on utilise le fait que le gain est le même quand  $\tau_e = 0$  et  $\tau_e \rightarrow \infty$ .

$$\begin{aligned} |H(\omega_F)|^2 &= \lim_{\tau_e \rightarrow 0} |H(\omega_F)|^2 = \lim_{\tau_e \rightarrow \infty} |H(\omega_F)|^2 \\ &= \frac{1}{(\omega_r^2 - \omega_F^2)^2} = \frac{1}{(\hat{\omega}_r^2 - \omega_F^2)^2}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \omega_r^2 - \omega_F^2 &= -\hat{\omega}_r^2 + \omega_F^2 \\ \omega_F^2 &= \omega_r^2 + k_r^2\omega_r^2/2 \\ \omega_F &= \sqrt{\omega_r^2 + k_r^2\omega_r^2/2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$


 FIG. 5.3: Tracés de FRF pour différentes valeurs de  $\tau_e$ ,  $\omega_r = 1$ ,  $k_r = 0.1$ .

En injectant l'expression (5.13) dans l'expression (5.11) on trouve le gain en ce point :

$$|H(\omega_F)| = \frac{2}{k_r \omega_r^2}. \quad (5.14)$$

Comme toutes les FRF passent par le point F, le maximum de gain est supérieur ou égal à F ; au mieux il lui est égal. On cherche la valeur  $\tau_e^{\text{fr}}$  optimale telle que le point F soit le maximum de gain.  $\tau_e^{\text{fr}}$  permet donc d'avoir :

$$\left. \frac{\partial |H(\Omega)|^2}{\partial \Omega} \right|_{\Omega=\omega_F} = 0,$$

dont le numérateur s'obtient par dérivation de (5.12) :

$$2\omega_F \tau_e^{\text{fr}2} \left[ \omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1 \right] (k_r^2 \omega_r^2 / 2)^2 - (\omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1) (k_r^2 \omega_r^2 / 2) \left[ 2\omega_F \tau_e^{\text{fr}2} (k_r^2 \omega_r^2 / 2) + 2\omega_F (\omega_F^2 \tau_e^{\text{fr}2} + 1) \right] = 0,$$

dont la solution est :

$$\tau_e^{\text{fr}} = \frac{1}{\omega_F} = \frac{1}{\omega_r \sqrt{1 + k_r^2 / 2}}. \quad (5.15)$$

Il faudra donc choisir  $R$  afin d'avoir  $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$  pour minimiser le maximum de la fonction réponse en fréquence. Dans ce cas, ce maximum est situé à la pulsation  $\omega_F$ .

## Réponse libre

On étudie maintenant le cas de la réponse libre du système restreint à un mode (5.9) avec une partie mécanique non amortie,  $\xi_r = 0$ . On cherche  $\tau_e$  maximisant le taux de décroissance de la réponse libre ; on écrit la réponse de (5.9) avec  $F_r = 0$  sous la forme d'une exponentielle du temps :

$$\begin{pmatrix} q_r(t) \\ Q(t) \end{pmatrix} = \Re(\Psi e^{\lambda t}), \quad (5.16)$$



où  $\Psi$  et  $\lambda$  sont solution de :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & \tau_e \lambda \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Les solutions  $\lambda$  non nulles sont des exponentielles décroissantes avec  $\lambda$  telle que  $\det(A(\lambda)) = 0$ . Les valeurs typiques de  $\lambda$ , constatées pour des simulations numériques avec des paramètres réalistes, sont une valeur réelle et deux complexes conjugués qu'on note  $-\sigma$ ,  $-\mu + j\omega$  et  $-\mu - j\omega$  ( $\sigma$ ,  $\omega$ ,  $\mu$  réels positifs)

Numériquement on constate que  $\sigma$  est typiquement 1000 fois supérieur à  $\mu$ ; ces valeurs correspondent à deux phénomènes :

- d'une part la valeur réelle  $-\sigma$  correspond à un phénomène qui est principalement la décharge très rapide du condensateur dans la résistance avec un faible mouvement de la partie mécanique ;
- d'autre part les valeurs complexes  $-\mu - j\omega$  et  $-\mu + j\omega$  correspondent à un phénomène qui est principalement l'oscillation de la partie mécanique amortie par la circulation de courant dans la résistance.

Comme  $\mu$  est le facteur pénalisant, car responsable de la décroissance la plus lente, on cherche la valeur de  $\tau_e$  qui maximise  $\mu$ , c'est à dire le taux de décroissance de la réponse libre. On note  $\tau_e^{\text{tp}}$  (pour critère temporel) cette valeur optimale.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \tau_e \lambda^3 + \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 \tau_e \lambda + \omega_r^2 \\ &= K(\lambda + \sigma)(\lambda + \mu - j\omega)(\lambda + \mu + j\omega). \end{aligned} \quad (5.18)$$

On identifie les termes en procédant par degré de  $\lambda$  décroissant :

$$\begin{cases} K = \tau_e \\ 1 = \tau_e(\sigma + 2\mu) \\ \hat{\omega}_r^2 = 2\mu\sigma + \mu^2 + \omega^2 \\ \omega_r^2 = \tau_e\sigma(\mu^2 + \omega^2) \end{cases} \quad (5.19)$$

On isole les expressions de  $\sigma$  et  $\mu^2 + \omega^2$  depuis les équations (5.19)

$$\begin{cases} \sigma = -2\mu + 1/\tau_e \\ \mu^2 + \omega^2 = \hat{\omega}_r^2 - 2\mu\sigma = \hat{\omega}_r^2 - 2\mu(-2\mu + 1/\tau_e) \end{cases}, \quad (5.20)$$

puis on injecte ces expressions dans la dernière relation du système (5.19) :

$$\omega_r^2 = f(\mu, \tau_e) = \hat{\omega}_r^2 + 8\mu^2 - 2\mu\tau_e\hat{\omega}_r^2 - 8\mu^3\tau_e - 2\mu/\tau_e \quad (5.21)$$

On dérive l'équation (5.21) par  $\tau_e$ , sachant que  $d\omega_r/d\tau_e = 0$ . Comme on suppose avoir trouvé  $\mu$  maximum on écrit  $\partial\mu/\partial\tau_e = 0$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\omega_r^2}{d\tau_e} &= \frac{\partial f}{\partial \tau_e} + \frac{\partial f}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \tau_e} \\ &= 8\mu^3 - 2\mu\hat{\omega}_r^2 + 2\frac{\mu}{\tau_e^2} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

ce qui donne

$$\mu = \frac{1}{2} \sqrt{\hat{\omega}_r^2 - \frac{1}{\tau_e^2}}. \quad (5.23)$$

En injectant l'expression (5.23) dans l'équation (5.21) on trouve finalement  $\tau_e^{\text{tp}}$  :

$$\omega_r^2 = \hat{\omega}_r^2 + \frac{2}{\tau_e^{\text{tp}^2}} - 2\hat{\omega}_r^2 - \frac{2}{\tau_e^{\text{tp}}} \sqrt{\frac{1}{\tau_e^{\text{tp}^2}} - \hat{\omega}_r^2}$$

$$\tau_e^{\text{tp}} = \frac{1}{\omega_r(1 + k_r^2/2)}. \quad (5.24)$$

La valeur optimale de  $\tau_e$  pour la réponse libre  $\tau_e^{\text{tp}}$  est légèrement différente de la valeur optimale pour la réponse forcée  $\tau_e^{\text{fr}}$  (5.15). Elle permet d'obtenir un taux de décroissance dépendant du couplage et de  $\omega_r$  :

$$\mu = \frac{\omega_r k_r}{\sqrt{8}} \quad (5.25)$$

### 5.3.3 Modèle 1 ddl avec amortissement

#### Influence de l'amortissement mécanique : réponse forcée

On considère le système réduit à un mode (5.10) avec  $\xi_r$  non nul. On souhaite vérifier si  $\tau_e^{\text{fr}}$  constitue aussi un bon choix pour amortir les vibrations du système lorsque l'amortissement mécanique est non nul. La FRF du système avec amortissement mécanique s'écrit :

$$H(\Omega) = \frac{q_r}{F_r} = \frac{1 + j\Omega\tau_e}{(\omega_r^2 - \Omega^2 - 2\xi_r\omega_r\tau_e\Omega^2) + j\Omega(\tau_e(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + 2\xi_r\omega_r)}, \quad (5.26)$$

soit pour le gain au carré :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{\Omega^2\tau_e^2 + 1}{(\Omega\tau_e(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + 2\xi_r\omega_r\Omega)^2 + (\omega_r^2 - \Omega^2 - 2\Omega^2\xi_r\omega_r\tau_e)^2}. \quad (5.27)$$

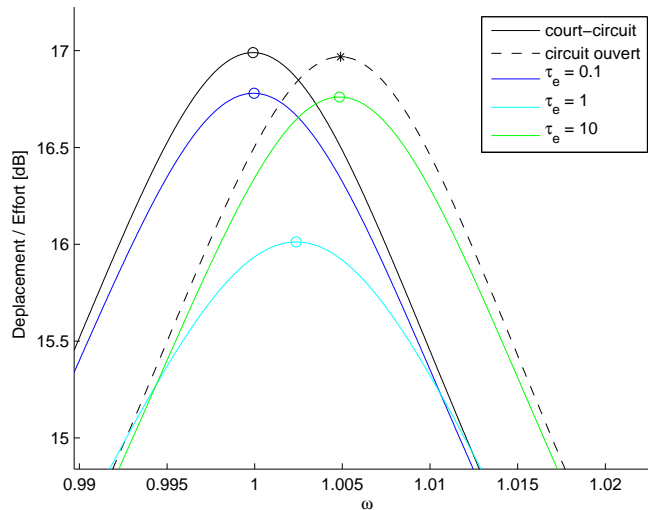


FIG. 5.4: Tracés de FRF pour différentes valeurs de  $\tau_e$ ,  $\omega_r = 1$ ,  $k_r\omega_r = 0.1$ ,  $\xi_r = 0.01$  : pas de point fixe

On constate sur les FRF (fig. 5.4) qu'il n'y a plus de point fixe. On effectue numériquement les calculs suivants (avec  $\omega_r = 1$  et  $k_r = 0.1$ ) :

- Pour plusieurs valeurs de  $\xi_r$  et en fonction de  $\tau_e$  on cherche le maximum de la FRF ;
- On identifie numériquement la valeur de  $\tau_e$  minimisant ce maximum, qu'on appelle  $\tau_e^{\text{num}}$ .

Les résultats sont tracés figure (5.5) ; on constate que :

- $\tau_e^{\text{num}}$  est légèrement différent de  $\tau_e^{\text{fr}}$  quand l'amortissement est important ;
- par contre, l'amplitude du maximum de la FRF varie de moins en moins autour de  $\tau_e^{\text{num}}$ .

Il est donc raisonnable de choisir  $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$  quel que soit  $\xi_r$ , on obtiendra un résultat en termes d'amplitude proche de l'optimum dans tous les cas.

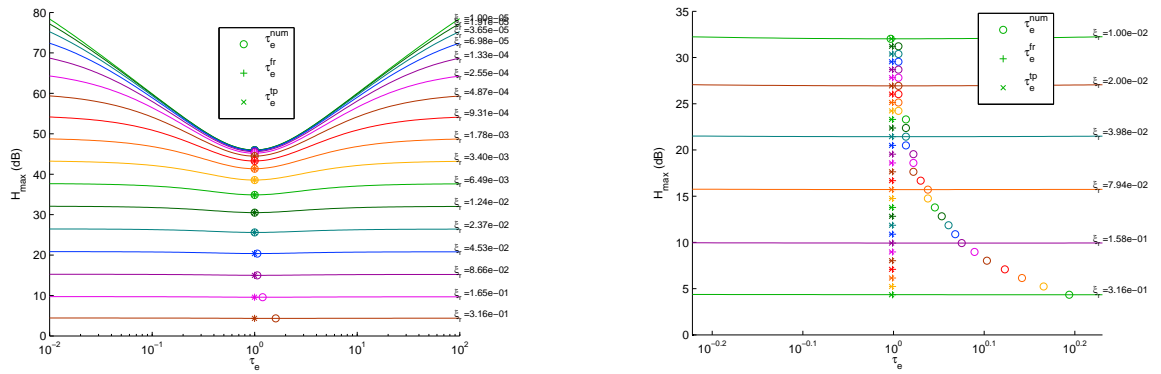


FIG. 5.5: Tracé des maxima des FRF en fonction de  $\tau_e$  pour plusieurs valeurs d'amortissement  $\xi_r$  et valeurs optimales  $\tau_e^{\text{fr}}$ ,  $\tau_e^{\text{tp}}$  et  $\tau_e^{\text{num}}$

### Influence de l'amortissement mécanique : réponse libre

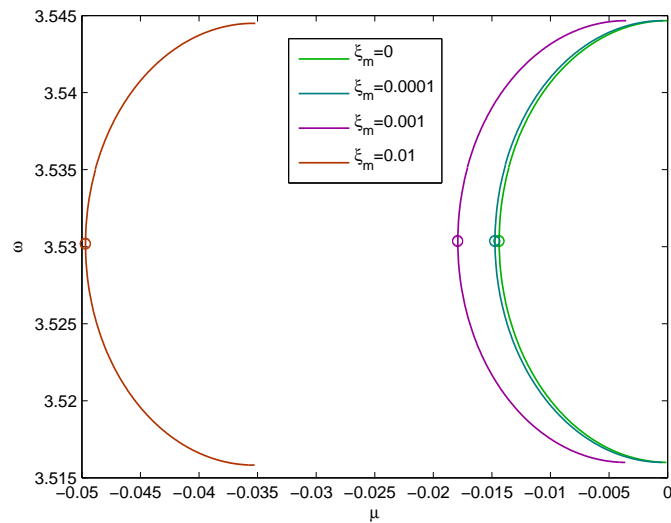


FIG. 5.6: Lieu d'Evans pour  $\omega_r = 1$ ,  $k_r = 0.1$ ,  $0 < \tau_e < \infty$  et plusieurs valeurs d'amortissement

La réponse libre du système avec amortissement peut s'écrire sous forme d'exponentielle décroissante  $\Re(\Psi e^{\lambda t})$ , où  $\Psi$  et  $\lambda$  sont solution de :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + 2\lambda\xi_r\omega_r + \hat{\omega}_r^2 & -k_r\omega_r \\ -k_r\omega_r & \tau_e\lambda \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

On cherche numériquement les valeurs de  $\lambda$  annulant  $\det(A(\lambda))$ , et on isole une des deux valeurs propres de partie réelle la plus basse<sup>2</sup> ; on trace alors le lieu d'Evans (fig . 5.6), qui est la courbe paramétrée  $\mu + j\omega$  dans le plan complexe en fonction de  $\tau_e$  pour plusieurs valeurs d'amortissement  $\xi_r$ . On obtient deux résultats :

- $\tau_e^{\text{tp}}$  calculée analytiquement pour  $\xi_r = 0$  est aussi optimale en présence d'amortissement mécanique (valeur repérée par un cercle sur les courbes, dont la partie réelle est quasiment la plus basse possible) ;
- la partie réelle de cette valeur est pratiquement la somme de l'amortissement mécanique  $\xi_r$  et de l'amortissement apporté par le shunt lorsque  $\xi_r = 0$ .

### 5.3.4 Performances : atténuation et couplage électromécanique

On souhaite quantifier l'apport du shunt résistif pour la réponse forcée et voir quels paramètres sont influents. On compare le maximum du gain de la réponse forcée dans trois cas :

- Tout d'abord on considère le système en court-circuit, en partant du système (5.9) avec  $\tau_e = 0$  et  $\xi_r \neq 0$ . Il se résume à

$$\ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) = F_r(t), \quad (5.29)$$

dont le pic d'amplitude se situe à la pulsation de résonance du système mécanique  $\tilde{\omega}_r = \omega_r\sqrt{1 - 2\xi_r^2}$ . Le gain au carré est donné par :

$$\begin{aligned} H_0^2 &= |H(\tilde{\omega}_r)|^2 |_{\tau_e=0} = \frac{1}{(\tilde{\omega}_r^2 - \omega_r^2)^2 + (2\xi_r\omega_r\tilde{\omega}_r)^2} \\ &= \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{4\xi_r^2} \frac{1}{1 - \xi_r^2}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

$H_0$  est choisi comme étant l'amplitude de référence de la réponse du système et ne dépend que de l'amortissement mécanique.

- On impose maintenant  $\tau_e = \tau_e^{\text{fr}}$  qu'on sait être une valeur proche de la valeur optimale. On suppose que le maximum de la FRF se situe à la même fréquence  $\omega_F$  que le maximum de réponse du système sans amortissement mécanique, c'est à dire à la même abscisse que le point fixe. On cherche alors l'amplitude  $H_{\text{opt}}^{\text{fr}}$  de la réponse à cette fréquence pour le système amorti en calculant (5.26) :

$$\begin{aligned} H_{\text{opt}}^{\text{fr}2} &= |H(\omega_F)|^2 |_{\tau_e=\tau_e^{\text{fr}}} \\ &= \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{\left(k_r^2/2 + 2\xi_r\sqrt{1 + k_r^2/2}\right)^2}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

<sup>2</sup>Donc la plus pénalisante en terme de taux de décroissance.

- On peut aussi calculer numériquement le maximum d'amplitude de  $H_{\tau_e^{fr}}$  : on notera celui-ci  $H_{opt}^{num}$ .

On définit le rapport entre  $H_0$  et  $H_{opt}^{fr}$  comme l'atténuation apportée par le shunt ; on l'exprimera en dB et on constate que  $\omega_r$  n'intervient pas dans l'expression :

$$A_{dB}^{th} = 20 \log \left( \frac{H_0}{H_{opt}^{fr}} \right) = 10 \log \left( \frac{H_0^2}{H_{opt}^{fr2}} \right)$$

$$\boxed{A_{dB}^{th} = 10 \log \left( \frac{(k_r^2/2 + 2\xi_r \sqrt{1 + k_r^2/2})^2}{4\xi_r^2(1 - \xi_r^2)} \right)}. \quad (5.32)$$

Sur la figure (5.7) on trace les rapports d'amplitudes pour plusieurs valeurs de  $\xi_r$  et en fonction de  $k_r$  :

- $A_{dB}^{num}$  calculés par identification numérique des maxima des FRF en court-circuit et avec  $\tau_e = \tau_e^{fr}$  en traits pleins, c'est à dire  $20 \log \left( \frac{H_0^{num}}{H_{opt}^{num}} \right)$ .
- $A_{dB}^{th}$  calculés d'après l'expression (5.32) en pointillés.

On constate que les hypothèses faites sur  $H_0$  et  $H_{opt}^{fr}$  sont pertinentes, c'est à dire que le maximum trouvé numériquement est très proche de (5.31). On peut faire les remarques suivantes sur les valeurs obtenues :

- Le coefficient de couplage  $k_r$  est le paramètre à optimiser si l'on veut augmenter l'atténuation. C'est assez naturel, car physiquement ce facteur représente la fraction d'énergie électrique que l'on pourra dissiper dans la résistance sur l'énergie totale de la structure en vibration.
- La différence d'amplitude est d'autant plus importante que l'amortissement mécanique de la structure en court circuit est faible.
- Pour des valeurs réalistes d'une structure faiblement amortie ( $\xi_r = 0,001$ ) et bien couplée ( $k_r = 0,1$ ) on obtient environ 10 dB d'atténuation.

### 5.3.5 Influence d'un désaccord

On étudie maintenant le cas où  $\tau_e$  n'est pas optimale. En effet, on peut commettre une imprécision au niveau du réglage de la résistance, ou aussi des paramètres du système peuvent varier avec le temps : par exemple, en raison de la sensibilité des éléments piézoélectriques à la température [79] la capacité peut varier, ou encore la fréquence d'un mode peut changer suite à une modification de la structure ...

Les courbes de la figure 5.8 montrent l'évolution de l'atténuation sur un cas où  $\xi_r = 0,001$  en fonction de  $\tau_e$ . On constate que pour des variations de  $\tau_e$  d'un facteur 2 ( $2 \simeq 10^{0,3}$  fig. 5.8 à droite), les performances restent du même ordre de grandeur. On peut donc affirmer que le shunt résistif est robuste, c'est à dire qu'une erreur d'accord n'entraîne pas une perte de performance importante.

On constate d'autre part (fig. 5.8 à gauche) que même pour une valeur totalement inadaptée de  $\tau_e$ , en cas de couplage fort, une certaine atténuation est toujours réalisée. Par exemple si  $k_r = 0.3$  on obtient toujours 10dB d'atténuation avec  $\tau_e = 10\tau_e^{fr}$ . On peut donc s'attendre à ce qu'un shunt résistif calculé pour un mode soit également efficace sur les modes voisins.

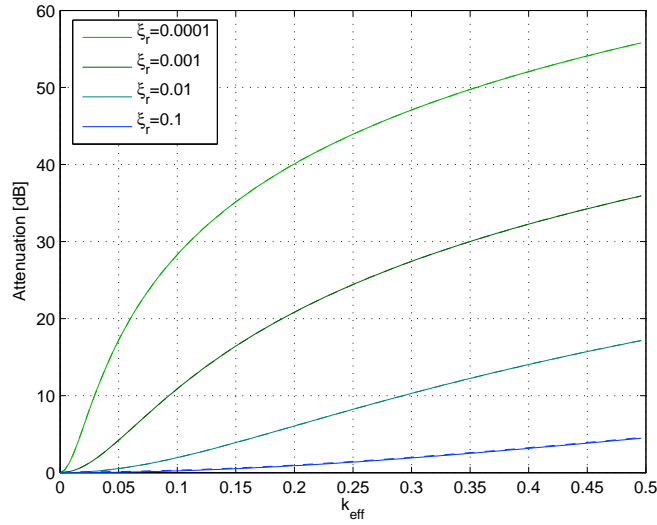


FIG. 5.7: Atténuation du pic de réponse obtenue avec une résistance optimale en fonction du couplage : résultats numériques  $A_{dB}^{num}$  en traits pleins et  $A_{dB}^{th}$  obtenus avec (5.32) en pointillés

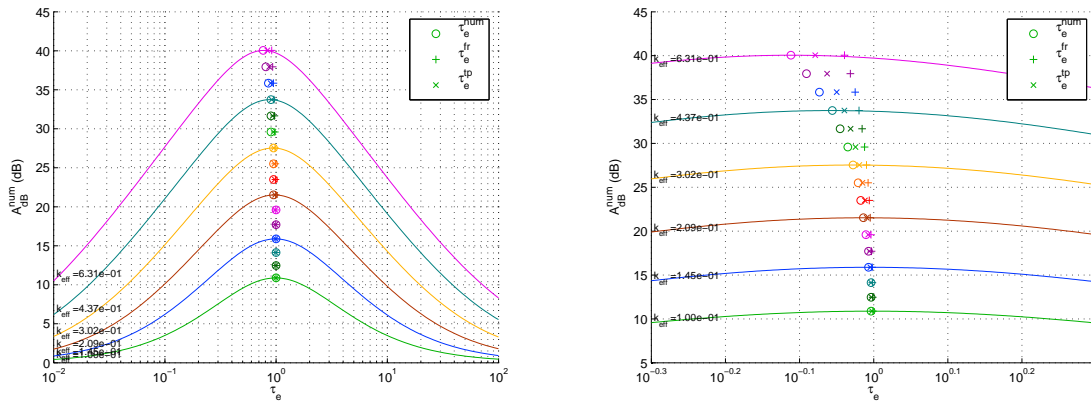


FIG. 5.8: Tracé des atténuations en fonction de  $\tau_e$  pour plusieurs valeurs du coefficient de couplage  $k_r$  et valeurs optimales

### 5.3.6 Performances dans le cas plusieurs degrés de liberté

On souhaite évaluer l'efficacité d'un dispositif de type shunt résistif, choisi d'après les critères développés au chapitre 5.3.2, quand la partie mécanique est modélisée avec plusieurs modes.

On étudie la réponse forcée en régime harmonique avec une FRF déplacement / effort, avec le déplacement mesuré en un point de position <sup>3</sup>  $x_m$  et l'excitation appliquée en un point  $x_n$ . On obtient une expression de l'effort modal en considérant que l'effort  $F(t)$  exercé correspond à un dirac de pression exercée sur la structure :

$$p(x, t) = \delta(x - x_n)F \cos(\omega t), \quad (5.33)$$

<sup>3</sup>Dans le cas d'un poutre une coordonnée suffit, dans le cas d'un système 3 D  $x_m$  et  $x_n$  sont des vecteurs.

avec  $\delta$  fonction de Dirac; alors l'expression de l'effort modal donnée avec (3.61) permet d'écrire :

$$\underline{F}_r = \int_{\Omega} F \cos(\omega t) \delta(x - x_n) \Phi_r(x) d\Omega = F \cos(\omega t) \Phi_r(x_n). \quad (5.34)$$

On écrit respectivement les coordonnées modales, la charge et le déplacement sous forme complexe :

$$\begin{aligned} w(x_m, t) &= \Re(\underline{w} e^{j\omega t}) = |\underline{w}| \cos(\omega t + \arg(\underline{w})), \\ q_r(t) &= \Re(\underline{q}_r e^{j\omega t}) = |\underline{q}_r| \cos(\omega t + \arg(\underline{q}_r)), \\ Q(t) &= \Re(\underline{Q} e^{j\omega t}) = |\underline{Q}| \cos(\omega t + \arg(\underline{Q})), \end{aligned}$$

avec le déplacement qui s'écrit d'après l'expression (3.60) à partir des  $\underline{q}_r$  et  $\underline{Q}$ <sup>4</sup> :

$$\underline{w} = \sum_{r=1}^N \Phi_r(x_m) \underline{q}_r = \begin{pmatrix} \Phi_1(x_m) \\ \vdots \\ \Phi_N(x_m) \\ 0 \end{pmatrix}^{\top} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \Phi_m^{\top} \underline{\mathbf{q}}, \quad (5.35)$$

où  $\underline{\mathbf{q}}$  est la représentation complexe de  $\mathbf{q}$  introduit avec l'équation (5.8) et  $\Phi_m$  défini de manière évidente.  $\underline{\mathbf{q}}$  est la solution de l'équation (5.7) qu'on réécrit en régime harmonique :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\xi_1\omega_1 j\omega + \hat{\omega}_1^2 & & k_i\omega_i k_j\omega_j & -k_1\omega_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ k_i\omega_i k_j\omega_j & & -\omega^2 + 2\xi_N\omega_N j\omega + \hat{\omega}_N^2 & -k_N\omega_N \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N & \tau_e j\omega + 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}_R = -\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)} \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_N \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qu'on note

$$\mathbf{Z}_R \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{F}, \quad (5.36)$$

avec  $\mathbf{Z}_R$  matrice impédance. On peut obtenir  $\underline{\mathbf{q}}$  par :

$$\underline{\mathbf{q}} = \mathbf{Z}_R^{-1} \begin{pmatrix} \underline{F}_1 \\ \vdots \\ \underline{F}_N \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Z}_R^{-1} \begin{pmatrix} \Phi_1(x_n) \\ \vdots \\ \Phi_N(x_n) \\ 0 \end{pmatrix} F = \mathbf{Z}_R^{-1} \Phi_n F \quad (5.37)$$

Ce qui donne la FRF avec (5.35) et (5.37) :

$$\underline{H}_{mn}(\omega) = \Phi_m^{\top} \mathbf{Z}_R^{-1} \Phi_n. \quad (5.38)$$

On se placera le plus souvent dans le cas particulier de la réponse au point d'excitation,  $x_n = x_m$ .

Une autre manière de calculer la FRF est de condenser  $\underline{Q}$  pour retrouver un système à  $N$  degrés de liberté : on part de l'écriture complexe de la charge (5.6) :

$$\underline{Q}(1 + \tau_e j\omega) = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r \underline{q}_r, \quad (5.39)$$

<sup>4</sup>La charge électrique n'a pas d'influence directe sur le déplacement mais doit être prise en compte pour le calcul.

qu'on injecte dans la partie mécanique de l'équation (5.6) toujours avec une écriture complexe :

$$-\omega^2 \underline{q}_r(t) + 2\xi_r j\omega \omega_r \underline{q}_r(t) + \omega_r^2 \underline{q}_r(t) = F_r + k_r \omega_r \frac{j\omega}{1+j\omega} \sum_{k=1}^N k_k \omega_k \underline{q}_k \quad \forall r \in [1, N] \quad (5.40)$$

Cela qui donne sous forme matricielle en introduisant  $H_Q(\omega) = \frac{j\omega}{1+j\omega}$  :

$$\left[ \begin{pmatrix} -\omega^2 + 2\xi_1 \omega_1 j\omega + \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & -\omega^2 + 2\xi_N \omega_N j\omega + \omega_N^2 \end{pmatrix} + H_Q(\omega) \begin{pmatrix} k_1 \omega_1 & & \\ & \ddots & \\ & & k_N \omega_N \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \underline{q}_1 \\ \vdots \\ \underline{q}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix},$$

ou aussi

$$\mathbf{Z}'_R \mathbf{q}' = \mathbf{F}', \quad (5.41)$$

avec  $\mathbf{q}'$  et  $\mathbf{F}'$  qui ne concernent plus que les degrés de libertés mécaniques et  $\mathbf{Z}'_R$  matrice d'impédance avec le degré de liberté électrique condensé ; en introduisant  $\Phi'_n$  vecteur des déplacements modaux en  $\vec{x}_n$  on peut alors écrire la FRF :

$$H_{mn}(\omega) = \frac{w}{F} = \Phi'_m{}^\top \mathbf{Z}'_R{}^{-1} \Phi'_n, \quad (5.42)$$

où la matrice d'impédance est cette-fois-ci de dimension  $N$ , à comparer à l'expression (5.38) qui fait appel à des matrices plus simples mais de dimensions  $N + 1$ . On utilisera un calcul numérique de (5.38) sur une plage de fréquences pour tracer les FRF.

### Cas d'une poutre

On étudie la poutre de référence (tableau 6.7, p. 118) avec excitation et mesure du déplacement à l'extrémité libre de la poutre ; on trace le module de la FRF adimensionnée pour différentes situations : court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de  $\tau_e^{\text{fr}}$  calculées pour les trois premiers modes, qu'on note  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\tau_3$ . Les résultats lisibles sur les figures 5.9 et 5.10 sont collectés dans le tableau 5.3.6. On constate que les atténuations obtenues sont similaires sur chaque mode, ce qui est lié aux coefficients de couplage  $k_r$  similaires pour les trois modes étudiés (tableau 6.1). On constate également que le fait d'amortir un mode amène une atténuation sur les modes voisins.

	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Att. mode 1	-14 dB	-8 dB	-4 dB
Att. mode 2	-7 dB	-16 dB	-11 dB
Att. mode 3	-3 dB	-11 dB	-13 dB

TAB. 5.1: Atténuation obtenues pour des modes distincts

### Cas de plusieurs modes de fréquence proche

On étudie le cas où  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 1,05$ ,  $\omega_3 = 1,1$ , et  $F_r = 1$ ,  $\xi_r = 0,001$  et  $k_r = 0,1$  pour chaque mode. Le résultat est présenté figure 5.11 et les atténuations dans le tableau 5.3.6 ; on obtient des résultats très voisins pour les modes proches.



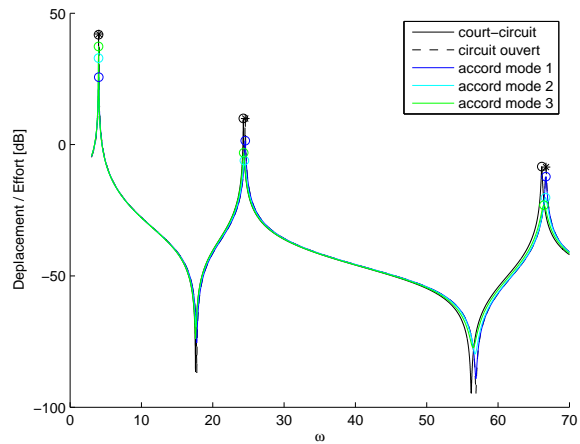


FIG. 5.9: FRF déplacement / effort pour les cas court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de résistance adaptées aux trois modes.

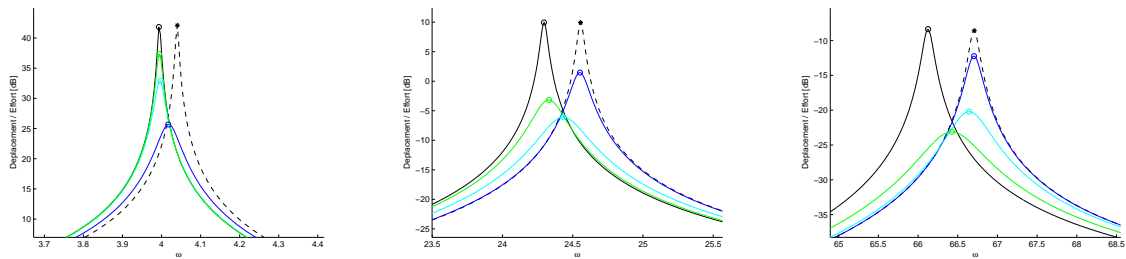


FIG. 5.10: FRF déplacement / effort sur les plages de fréquence autour des pics de résonance

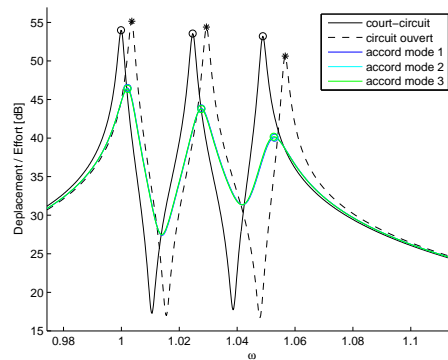


FIG. 5.11: FRF déplacement / effort pour les cas court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de résistance adaptées aux trois modes; atténuation en dB indiquées sur les pics

### 5.3.7 Analogie mécanique

La technique de shunt résistif présente des similarités avec un ajout de matériau dissipatif viscoélastique à un système masse-ressort-amortisseur [92]. On peut proposer un analogue

	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
Att. mode 1	-11,24 dB	-11,2 dB	-11,16 dB
Att. mode 2	-10,88 dB	-10,88 dB	-10,88 dB
Att. mode 3	-10,4 dB	-10,44 dB	-10,26 dB

TAB. 5.2: Atténuation obtenues pour des modes rapprochés

mécanique du système électromécanique couplé pour un degré de liberté. Le dispositif présenté figure 5.12 a un comportement similaire à celui décrit par l'équation (5.10) :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K + K_c & -K_c \\ -K_c & K_c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

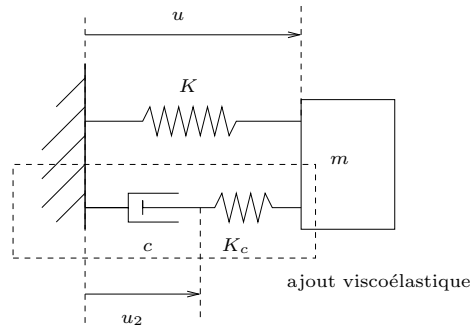


FIG. 5.12: Analogue mécanique du système

Dans cette analogie, la raideur  $K_c$  joue le rôle de l'inverse de la capacité des éléments piézoélectriques, l'amortissement  $c$  un rôle similaire à la résistance et  $u_2$  un rôle similaire à la charge électrique. L'analogie du coefficient de couplage  $k_r$  est ici  $Kc/(K + K_c)$  [92]. On peut remarquer que le coefficient de couplage ne peut dépasser 1. Les équivalences sont résumées dans le tableau 5.3.

<i>Grandeurs mécaniques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
Déplacement	$u_2$	Charge électrique	$Q$
Vitesse	$\dot{u}_2$	Intensité	$I = \dot{Q}$
Force	$F = K_c(u_2 - u)$	Tension électrique	$V = \frac{Q}{C} - \chi q_r$
Raideur additionnelle	$K_c$	Inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$
Amortissement	$c$	Résistance	$R$

TAB. 5.3: Équivalences mécanique/électrique

On observe les comportements suivants qui sont similaires :

- Quand le couplage tend vers 0, l'amortisseur (la résistance) ne travaille pas,  $u_2$  ( $Q$ ) varie très peu. On a intérêt à maximiser le couplage ( $K_c$  ( $k_r$ ) élevé) si on veut diminuer l'amplitude de la réponse du système.

- Quand la viscosité de l'amortisseur (la résistance) augmente beaucoup le système s'apparente à un ajout de raideur  $K_c$  (ajout de raideur circuit ouvert  $\omega_r^2 k_r^2$ ) sans amortissement,  $u_2$  varie très peu (très peu de courant circule) et l'amortisseur (la résistance) ne travaillent pas.
- Quand l'amortisseur est peu visqueux (la résistance faible)  $u_2$  varie librement (le courant circule librement), la partie raideur ajoutée n'a pas d'effet (pas d'ajout de raideur en court circuit) et le système n'a pas d'effet sur la structure.

Avant de conclure sur les qualités du shunt résistif, on analyse dans la section suivante les qualités du shunt résonant.

## 5.4 Shunt résonant

Par analogie avec les amortisseurs à masse accordée, on souhaite réaliser un circuit résonant accordé à un des modes de la structure. À la résonance de celle-ci, on devrait obtenir un courant plus important dans le circuit, et dissiper plus d'énergie dans la résistance.

### 5.4.1 Modèle

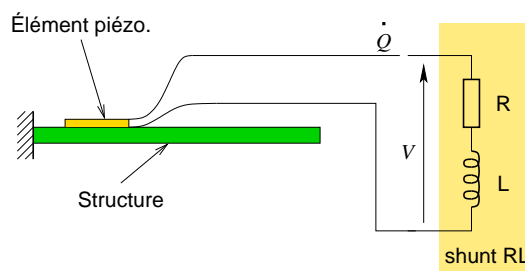


FIG. 5.13: Structure, éléments piézoélectrique et shunt résistif.

En plaçant une inductance  $L$  et une résistance  $R$  aux bornes des éléments (fig. 5.13) on impose la relation suivante entre tension et courant :

$$V = -RI - R\dot{Q} = -R\dot{Q} - L\ddot{Q}, \quad (5.44)$$

avec  $V$  tension aux bornes des éléments piézoélectriques et  $Q$  charge libre présente à leur surface. On adimensionne le système en réutilisant la démarche du paragraphe 5.3.1 ; en remarquant que l'adimensionnement de la partie mécanique se fait avec

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (5.45)$$

où

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (5.46)$$

avec  $C$  capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28). Alors en introduisant ces relations dans (5.44) on obtient :

$$\bar{V} = -\frac{\bar{Q}}{\omega_e^2} - 2\xi_e \frac{\dot{\bar{Q}}}{\omega_e}, \quad (5.47)$$

avec  $\omega_e$  pulsation propre adimensionnée et  $\xi_e$  coefficient d'amortissement du circuit électrique résonant constitué par la capacité des éléments piézoélectriques avec le shunt ; on a :

$$\omega_e = \frac{1}{\sqrt{LC\tau_m}} \quad , \quad \xi_e = \frac{RC\omega_e}{2\tau_m}. \quad (5.48)$$

On retiendra donc que  $\omega_e$  dépend de  $L$  tandis que  $\xi_e$  dépend de  $R$ . On utilise le modèle électromécanique (3.62) et on élimine  $V$  en tenant compte de (5.47) ; il vient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r\omega_r\dot{q}_r(t) + \omega_r^2q_r(t) + k_r\omega_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - k_r\omega_r Q(t) = F_r(t) \quad \forall r \in [1, N] \\ \frac{\ddot{Q}(t)}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}(t)}{\omega_e} + Q(t) - \sum_{r=1}^N k_r\omega_r q_r(t) = 0, \end{array} \right. \quad (5.49)$$

soit sous forme matricielle analogue à (5.7) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \ddots & \vdots & \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 2\xi_N\omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} & 0 \\ [\chi_i\chi_j] & \vdots \\ & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \chi_1 \\ & \vdots \\ 0 & \chi_N \\ \chi_1 & \dots & \chi_N & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.50)$$

ce qu'on note aussi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K} + \mathbf{K}_p + \mathbf{K}_c)\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.51)$$

où les seules différences par rapport aux équations du système électromécanique sans shunt (3.71) sont :

- $\mathbf{F}$  le vecteur des forçages modaux qui ne contient plus de tension imposée,
- $\mathbf{M}$  la matrice de masse qui comprend désormais un terme électrique correspondant à l'inductance,
- $\mathbf{C}$  la matrice d'amortissement qui comprend un terme électrique de résistance.

### 5.4.2 Optimisation : cas 1 ddl sans amortissement

L'objectif de cette partie est d'optimiser les grandeurs électriques (résistance et inductance) pour réduire les vibrations dans le cas d'un système ramené à un degré de liberté.

#### Cas sans amortissement, réponse forcée

Pour calculer plus simplement les paramètres optimaux on tronque le système (5.49) en conservant seulement le  $r$ -ième mode, on impose donc  $q_k = 0$  pour tout  $k$  différent de  $r$ . On se place de plus dans un cas d'amortissement mécanique nul  $\xi_r = 0$ . Le système se simplifie en :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + \hat{\omega}_r^2 q_r(t) - k_r \omega_r Q(t) = F_r(t) \\ \frac{\ddot{Q}}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}}{\omega_e} + Q(t) - k_r \omega_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (5.52)$$

soit sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_r \\ \ddot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_r \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_r^2 + k_r \omega_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_r \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_r \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

On se place en régime harmonique de pulsation  $\Omega$  ; on impose un effort  $F_r(t) = \Re(\underline{F}_r e^{j\Omega t})$  et la réponse est alors de la forme  $q_r(t) = \Re(\underline{q}_r e^{j\Omega t})$  avec  $\underline{q}_r$  et  $\underline{F}_r$  complexes. Alors la fonction réponse en fréquence du système s'écrit :

$$H(\Omega) = \frac{\underline{q}_r}{\underline{F}_r} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}}{\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2 + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)}. \quad (5.54)$$

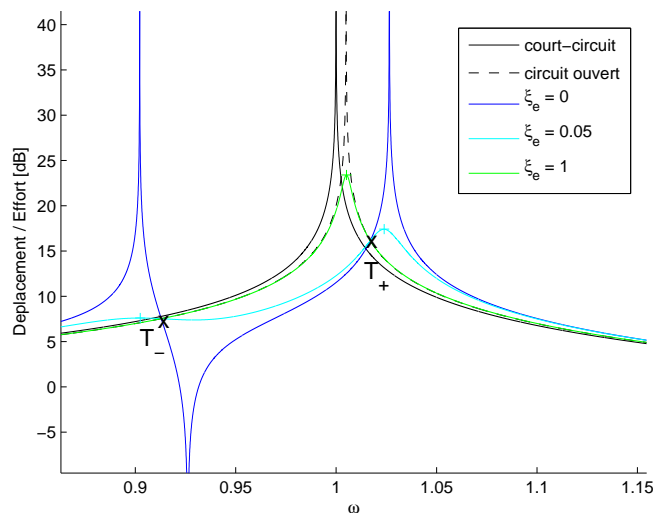


FIG. 5.14: Tracés de FRF pour plusieurs valeurs de  $\xi_e$  ,  $\omega_r = 1$  ,  $k_r \omega_r = 0.1$  ,  $\omega_e = 0.9$

En traçant plusieurs FRF (fig. 5.14) on constate qu'à inductance constante (donc  $\omega_e$  constante), les courbes d'amplitude passent toutes par deux points fixes  $T_-$  et  $T_+$ . On constate que si  $\omega_e$  varie les points fixes se déplacent en ordonnée dans des directions opposées. On minimisera donc le maximum des deux en les plaçant à la même ordonnée [29]. On va chercher les pulsations  $\omega_+$  et  $\omega_-$  correspondant à ces points fixes. Tout d'abord on écrit  $|H(\omega)|^2$  en isolant les termes en  $\xi_e$  :

$$|H(\Omega)|^2 = \frac{(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})^2 + (2\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e})^2}{(\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2)^2 + (2\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2))^2} = \frac{A_0 + A_2 \xi_e^2}{B_0 + B_2 \xi_e^2}, \quad (5.55)$$

avec

$$\begin{cases} A_0 = (1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})^2 \\ A_2 = (2\frac{\Omega}{\omega_e})^2 \\ B_0 = (\frac{\Omega^4}{\omega_e^2} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2)^2 \\ B_2 = (2\frac{\Omega}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2))^2 \end{cases} .$$

Alors les solutions  $\omega_{\pm}$  sont telles que  $|\underline{H}(\omega_{\pm})|^2$  est indépendant de  $\xi_e$  :

$$\frac{\partial |\underline{H}(\omega_{\pm})|^2}{\partial \xi_e} = 0,$$

ce qui signifie que le numérateur de cette dérivée est nul :

$$\begin{aligned} 2A_2\xi_e(B_0 + B_2\xi_e^2) - 2B_2\xi_e(A_0 + A_2\xi_e^2) &= 0 \\ \text{ce qui donne pour le cas } \xi_e \neq 0 \quad A_2B_0 - A_0B_2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.56)$$

on développe (5.56) :

$$(2\frac{\omega_{\pm}}{\omega_e})^2 \left[ \frac{\omega_{\pm}^4}{\omega_e^2} - \omega_{\pm}^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \omega_r^2 \right]^2 - (1 - \frac{\omega_{\pm}^2}{\omega_e^2})^2 \left[ 2\frac{\omega_{\pm}}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \omega_{\pm}^2) \right]^2 = 0, \quad (5.57)$$

ce qu'on factorise en

$$\left( \frac{\omega_{\pm}^4}{\omega_e^2} - \omega_{\pm}^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \frac{\omega_r^2 + \hat{\omega}_r^2}{2} \right) k_r \omega_r^2 = 0. \quad (5.58)$$

On trouve donc les  $\omega_{\pm}$ , pulsations des points fixes, qui sont les racines de l'équation bicarrée (5.58) :

$$\begin{cases} \omega_-^2 = \frac{\omega_e^2}{2} \left( (1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) - \sqrt{(1 - \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + 2\frac{k_r\omega_r^2}{\omega_e^2}} \right) \\ \omega_+^2 = \frac{\omega_e^2}{2} \left( (1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + \sqrt{(1 - \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2}) + 2\frac{k_r\omega_r^2}{\omega_e^2}} \right) \end{cases}. \quad (5.59)$$

Les deux points fixes mis en évidence dépendent de  $\omega_e$  et pas de  $\xi_e$ . Un premier pas de l'optimisation va consister à choisir  $\omega_e$  de telle sorte qu'ils soient à la même amplitude [29]. On écrit cela quand  $\xi_e = 0$  pour simplifier le calcul :

$$\begin{aligned} &|H(\omega_+)|^2 - |H(\omega_-)|^2 = 0 \\ \text{On injecte les résultats (5.59) dans (5.55)} &\quad \frac{(1 - \frac{\omega_+^2}{\omega_e^2})^2}{k_r\omega_r^4/4} - \frac{(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2}{k_r\omega_r^4/4} = 0 \\ &\text{ce qui donne} && (\omega_e^2 - \omega_+^2)^2 - (\omega_e^2 - \omega_-^2)^2 = 0 \\ &\text{qu'on factorise en} && (\omega_+^2 - \omega_-^2)(\omega_+^2 + \omega_-^2 - 2\omega_e^2) = 0 \\ &\text{et comme } \omega_+ \neq \omega_-, && \omega_e^2 = \frac{\omega_+^2 + \omega_-^2}{2} \\ & && \omega_e = \hat{\omega}_r. \end{aligned}$$

On trouve que  $\omega_e$  égalisant les amplitudes de la FRF aux points fixes est égale à la pulsation du système isolé  $\hat{\omega}_r$ ; il faut maintenant identifier la valeur optimale de la résistance, liée à celle de  $\xi_e$ .

On trace quelques FRF pour observer l'influence de  $\xi_e$  (fig. 5.4.2) avec  $\omega_e = \hat{\omega}_r$ . On observe que :

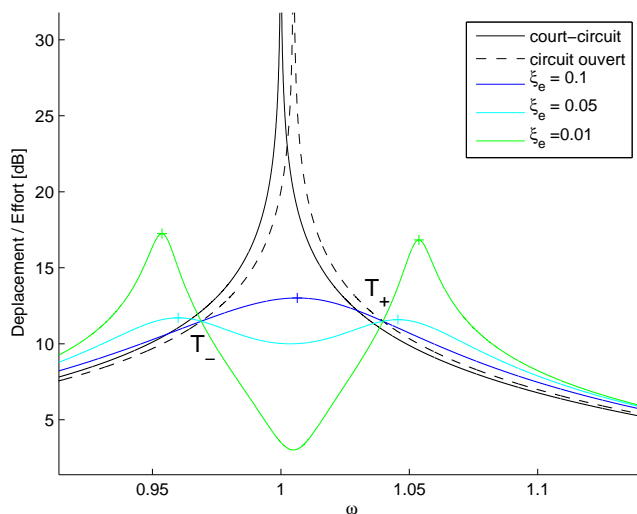


FIG. 5.15: Tracés de FRF pour différentes valeurs de  $\xi_e$ ,  $\omega_r = 1$ ,  $k_r\omega_r = 0.1$ ,  $\omega_e = \hat{\omega}_r$

- quand  $\xi_e$  augmente, on obtient un pic de résonance amorti tendant vers la réponse du système isolé ;
- quand  $\xi_e$  diminue fortement on obtient deux modes de fréquences distinctes. On peut remarquer que d'après (5.55) il y aura une antirésonance en  $\omega_e$  dans ce cas.
- la valeur intermédiaire de  $\xi_e$  choisie semble être un bon compromis.

On cherche maintenant une valeur de  $\xi_e$  telle que les points fixes soient des maxima de la courbe de gain.

- On cherche d'abord à annuler la dérivée de  $|H|$  en  $\omega_-$  avec une valeur adaptée  $\xi_-$ . D'après [10], on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_-} &= 0 \\ \xi_- &= \frac{\sqrt{3}k_r\omega_r}{2\sqrt{\omega_e(2\omega_e - \sqrt{2}k_r\omega_r)}} = \frac{\sqrt{3}k_r}{2\sqrt{2 - \sqrt{2}k_r}}. \end{aligned} \quad (5.60)$$

Cette valeur permet d'avoir un maximum local en  $T_-$  ; dans ce cas, un autre maximum local est observé près de  $T_+$  avec une amplitude légèrement supérieure (fig. 5.16).

- On cherche alors à annuler la dérivée de  $|H|$  en  $\omega_+$  avec une valeur adaptée  $\xi_+$ , d'après [10], on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial |H(\omega)|^2}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_+} &= 0 \\ \xi_+ &= \frac{\sqrt{3}k_r\omega_r}{2\sqrt{\omega_e(2\omega_e + \sqrt{2}k_r\omega_r)}} = \frac{\sqrt{3}k_r}{2\sqrt{2 + \sqrt{2}k_r}}. \end{aligned} \quad (5.61)$$

Dans ce cas un maximum local est observé près de  $T_-$  avec une amplitude légèrement supérieure (fig. 5.16).

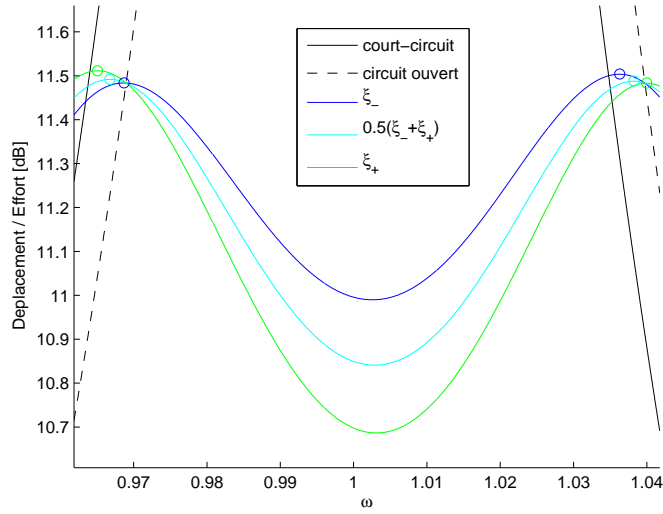


FIG. 5.16: Tracés de FRF pour différentes valeurs de  $\xi_e$ ,  $\omega_r = 1$ ,  $k_r \omega_r = 0.1$ . Remarquer les positions relatives des maxima et des points fixes.

La valeur optimale de  $\xi_e$  est donc située entre  $\xi_-$  et  $\xi_+$ , et ces valeurs sont assez peu éloignées.  $1/2(\xi_+ + \xi_-) \simeq \sqrt{3/8}k_r$  en est une bonne approximation (fig. 5.16). Dans [72], la valeur optimale exacte est calculée ; son expression est compliquée et elle permet qu'une amélioration marginale des performances. Par la suite on utilisera  $\sqrt{3/8}k_r$  en supposant qu'il s'agit de la valeur optimale.

### Réponse libre

On fait les mêmes hypothèses qu'au chapitre 5.3.2 avec cette fois-ci  $\Psi$  et  $\lambda$  solutions de

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda^2 + \hat{\omega}_r^2 & -k_r \omega_r \\ -k_r \omega_r & \frac{\lambda^2}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\lambda}{\omega_e} + 1 \end{pmatrix}}_{A(\lambda)} \Psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.62)$$

Il y a quatre solutions non nulles de  $\lambda$ , deux paires de complexes conjugués  $-\mu_1 + j\omega_1$ ,  $-\mu_2 + j\omega_2$ ,  $-\mu_1 - j\omega_1$  et  $-\mu_2 - j\omega_2$ . Une rapide étude numérique montre que :

- la décroissance est la plus rapide lorsque  $\mu_1 = \mu_2$
- lorsque cela est vrai, on a aussi  $\omega_1 = \omega_2$ .

On prend en compte ces égalités et on trouve les valeurs optimales de  $\omega_e$  et  $\xi_e$  pour le critère de la réponse libre (critère temporel) qu'on note  $\omega_e^{\text{tp}}$  et  $\xi_e^{\text{tp}}$  :

$$\begin{aligned} \omega_e^{\text{tp}} &= \omega_r(1 + k_r^2) \\ \xi_e^{\text{tp}} &= \frac{k_r^2}{1 + k_r^2}, \end{aligned} \quad (5.63)$$

et avec ces paramètres on obtient le taux de décroissance suivant :

$$\mu_1 = \mu_2 = \omega_r k_r \sqrt{1 + k_r^2}, \quad (5.64)$$



soit une valeur plus élevée que pour le shunt résistif, et ne dépendant aussi que de  $k_r$  et  $\omega_r$ . On peut remarquer que la fréquence d'accord est légèrement plus élevée et que la résistance optimale est supérieure à la valeur optimale pour la réponse forcée.

### 5.4.3 Modèle 1 ddl avec amortissement

#### Réponse forcée

En tronquant (5.49) à un mode avec  $\xi_r$  non nul, puis en passant en régime harmonique, on trouve la FRF du système à un degré de liberté avec amortissement

$$H(\Omega) = \frac{q_r}{F_r} = \frac{1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e \frac{\Omega}{\omega_e}}{\frac{\Omega^4}{\omega_e^4} - \Omega^2(1 + \frac{\hat{\omega}_r^2}{\omega_e^2} + 4\xi_e \xi_r \frac{\omega_r}{\omega_e}) + \omega_r^2 + 2j\Omega[\frac{\xi_e}{\omega_e}(\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2) + \xi_r \omega_r(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_e^2})]}. \quad (5.65)$$

On suppose que  $\omega_e = \hat{\omega}_r$  constitue toujours l'accord optimal; par contre en calculant numériquement le maximum d'amplitude de la réponse pour plusieurs valeurs de  $\xi_e$  puis en choisissant la valeur de  $\xi_e$  qui donne le résultat le plus faible, on constate que cet optimum dépend de  $\xi_r$ . On trace sur la figure (5.17) les valeurs optimisées numériquement de  $\xi_e$  pour différentes valeurs du coefficient de couplage, et l'on peut voir que  $\sqrt{3/8}k_r$  est une bonne approximation tant que  $\xi_r \leq 1\%$ .

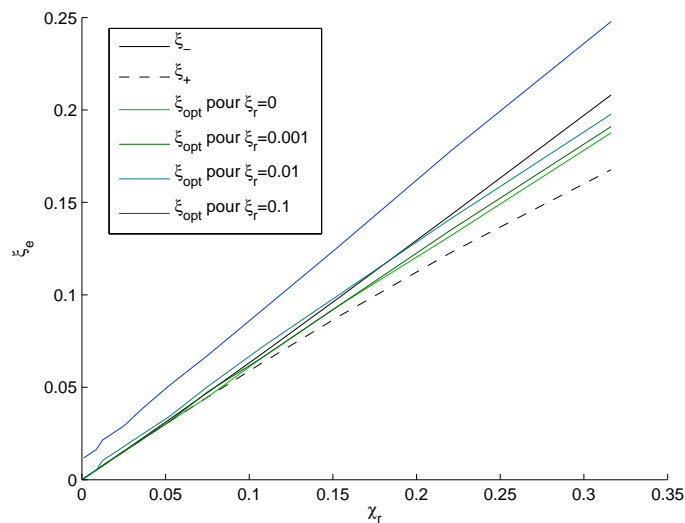


FIG. 5.17: Tracé de valeurs optimales de  $\xi_e$  trouvées numériquement (en fonction du coefficient de couplage noté  $\chi_r$  ici)

#### Réponse libre

En calculant les valeurs des différents  $\lambda$  pour plusieurs valeurs de  $\xi_e$  en présence d'amortissement, on peut constater que comme dans le cas du shunt résistif, les amortissements mécanique et ajoutés par le shunt résonant s'ajoutent à peu près (figure 5.18).

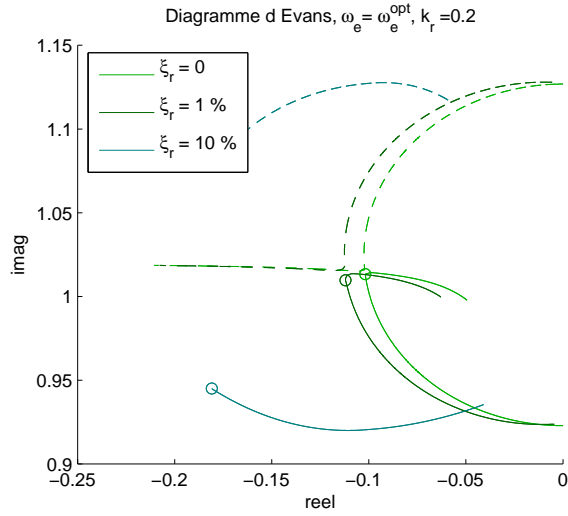


FIG. 5.18: Diagramme d'Evans avec  $\omega_r = 1$ ,  $k_r = 0.2$ ,  $\omega_e = \omega_e^{tp}$ ,  $0 < \xi_e < \infty$  et différentes valeurs de  $\xi_r$

#### 5.4.4 Performances : atténuation et couplage électromécanique

On se place dans le cas d'un mode faiblement amorti : d'après l'équation (5.30) le maximum d'amplitude en court-circuit est :

$$H_0^2 = |H(\tilde{\omega}_r)|^2 = \frac{1}{\omega_r^4} \frac{1}{\xi_r^2} \frac{4}{1 - \xi_r^2}.$$

On compare cela au maximum d'amplitude de la réponse du système qu'on suppose être proche du gain en  $\omega_-$ , en choisissant  $\omega_e = \hat{\omega}_r$  et  $\xi_e = \sqrt{3/8}k_r$  :

$$\begin{aligned} H_{opt}^2 &= |\underline{H}(\omega_-)|^2 \Big|_{\omega_e = \hat{\omega}_r, \xi_e = \sqrt{3/8}k_r} \\ &= \frac{(1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2 + (2\xi_e \frac{\omega_-}{\omega_e})^2}{(\omega_r^2 - 2\omega_-^2 + \frac{\omega_-^4}{\omega_e^2} - 4\xi_e \xi_r \omega_-^2)^2 + 4\omega_-^2 (\xi_e \omega_e + \xi_r \omega_r)^2 (1 - \frac{\omega_-^2}{\omega_e^2})^2} \\ &= \frac{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2} + 4\xi_e^2 (1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}})}{\omega_r^4 (1 + k_r^2)^2 ((-2k_r^2 - 4\xi_e \xi_r (1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}}))^2 + 4(1 - \sqrt{\frac{k_r^2}{2+2k_r^2}}) \frac{k_r^2}{2+2k_r^2} (\xi_e + \xi_r \frac{1}{1+k_r^2})^2)}, \end{aligned} \quad (5.66)$$

On remarque que  $H_{opt}^2$  peut s'exprimer uniquement en fonction de  $\omega_r^4$ ,  $k_r$ ,  $\xi_r$  et  $\xi_e$  ; d'autre part,  $\xi_e$  s'exprime uniquement à partir de  $k_r$ . On choisit donc de noter

$$H_{opt}^2 = \frac{1}{\omega_r^4} f_H(k_r, \xi_r) \quad (5.67)$$

Le rapport des amplitudes nous donne l'atténuation apportée par le shunt résonant :

$$A_{dB}^{th} = 20 \log\left(\frac{H_0}{H_{opt}}\right) = 10 \log\left(\frac{H_0^2}{H_{opt}^2}\right)$$

$$A_{dB}^{th} = 10 \log\left(\frac{1}{4\xi_r^2(1 - \xi_r^2)} \frac{1}{f_H(k_r, \xi_r)}\right). \quad (5.68)$$

On constate qu'on a un résultat similaire au cas du shunt résistif vu avec l'expression (5.32), c'est à dire une dépendance uniquement à  $k_r$  et  $\xi_r$ . Là encore, **c'est donc  $k_r$  qu'il faut optimiser.**

Sur la figure (5.19) on trace l'atténuation (calculée d'après l'identification numérique des maxima des FRF) en traits pleins, et d'après l'expression (5.68) en pointillés ; on constate que cette expression est une très bonne estimation. L'atténuation croît avec  $k_r$  et décroît avec  $\xi_r$ . Par rapport au shunt résistif, les performances sont nettement supérieures, ainsi on obtient 30 dB d'atténuation pour un cas où  $k_r = 0,1$  et  $\xi_r = 0,1\%$ , là où le shunt résistif donnait 10 dB.

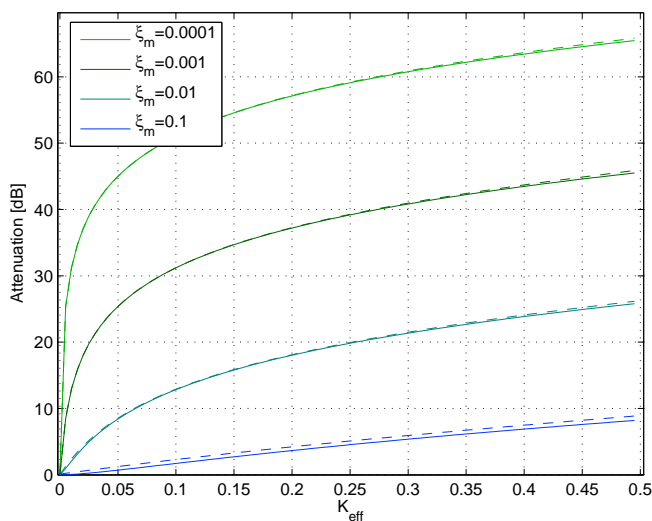


FIG. 5.19: Atténuation du pic de réponse obtenue : résultats numériques en traits pleins et (5.68) en pointillés

#### 5.4.5 Influence d'un désaccord

Comme dans le cas du shunt résistif, on souhaite évaluer les performances du shunt résonant lorsqu'un des paramètres électriques n'est plus optimal ; ainsi dans [70] l'auteur étudie expérimentalement l'influence de la température sur les performances d'un shunt résonant et constate qu'elles se dégradent nettement. Ce phénomène est certainement lié à la dépendance de la permittivité du matériau piézoélectrique à la température [79] ; la capacité change proportionnellement, et  $\omega_e$  aussi d'après la relation d'adimensionnement (5.48).

On va étudier le cas "idéal" d'un mode faiblement amorti et bien couplé :  $k_r = 0.1$ ,  $\xi_r = 0.001$ . On cherche numériquement le maximum d'amplitude de la FRF pour différentes valeurs de  $\omega_e$  et  $\xi_e$  et on le compare au maximum d'amplitude en court-circuit ; on trace les lignes de contour de l'atténuation ainsi obtenue en dB.

On constate qu'on obtient une efficacité remarquable si l'accord est bon sur la figure (5.20), au centre. Par contre, si on s'éloigne de l'accord entre  $\omega_e$  et  $\omega_r$  de 2% par exemple, on obtient déjà 5 dB d'atténuation en moins. La valeur de l'amortissement est moins critique, ainsi une erreur de 50% causera 5dB d'atténuation en moins. On peut donc affirmer que la performance du shunt résonant n'est pas robuste par rapport à des variations de  $\omega_e$ , et

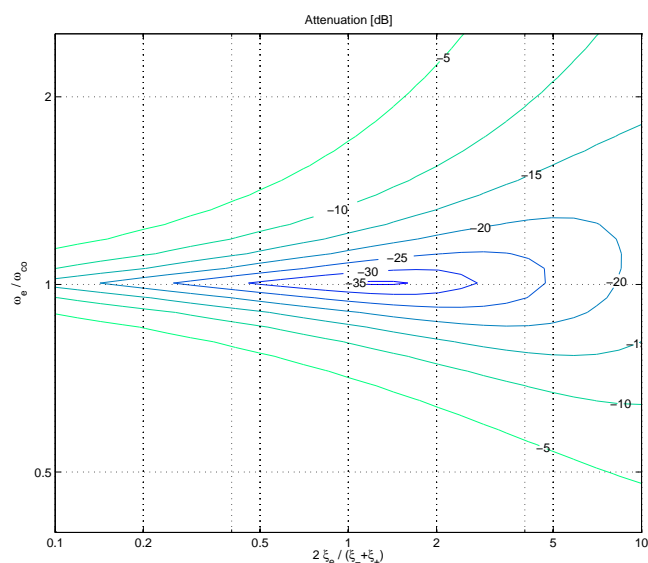


FIG. 5.20: Lignes de contour de l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de  $\omega_e$  et  $\xi_e$ ;  $k_r = 0.1$ ,  $\xi_r = 0.001$

robuste par rapport à des variations de  $\xi_e$ .

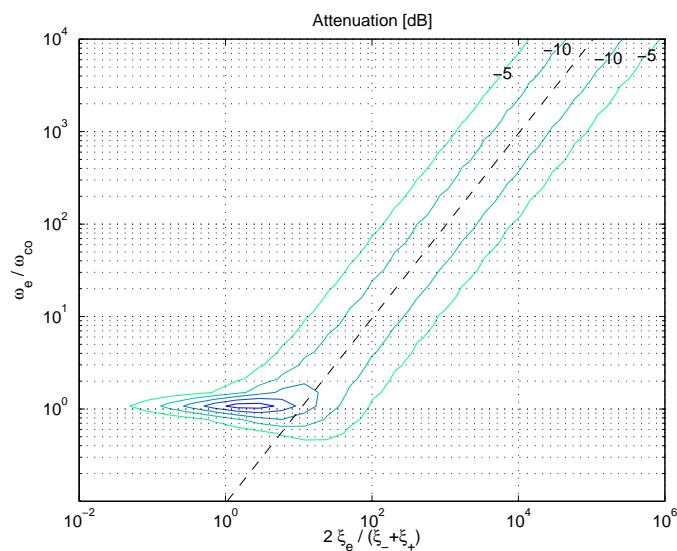


FIG. 5.21: Même étude que 5.20 avec une échelle différente; en pointillés valeur de la résistance correspondant au shunt résistif optimal

Si on s'éloigne fortement des valeurs optimales on obtient un comportement représenté figure (5.21). On constate qu'il existe des couples de valeurs de  $\omega_e$  et  $\xi_e$  pour lesquelles l'atténuation reste importante. Il s'agit en fait de la situation où  $\omega_e$  est grande, c'est à dire que l'inductance est basse et laisse circuler le courant à la résonance mécanique, tandis que  $\xi_e$  est

tel que la valeur de la résistance corresponde à un shunt résistif optimal. Le comportement du système (5.53) tend vers (5.10).

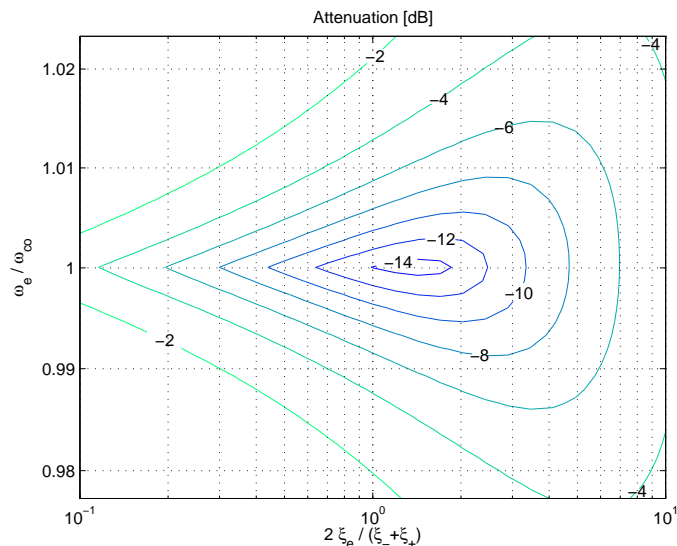


FIG. 5.22: Lignes de contour de l'atténuation obtenue pour différentes valeurs de  $\omega_e$  et  $\xi_e$  ;  $k_r = 0,01$ ,  $\xi_r = 0,001$  ; remarquer l'échelle de  $\omega_e$

On peut remarquer que d'après les courbes figure (5.19) le shunt résonant permet d'obtenir une atténuation importante même pour des couplages peu élevés. On se place dans le cas d'un mode faiblement amorti et mal couplé,  $k_r = 0,01$  ; on fait varier  $R$  et  $L$  et le résultat est tracé figure (5.22). On constate que l'efficacité est correcte, mais que la sensibilité à un désaccord devient nettement plus critique (remarquer l'échelle verticale en particulier) ; ainsi un désaccord de 2 % en fréquence rend le système presque inopérant.

#### 5.4.6 Performances dans un cas à plusieurs ddl

On se place dans la situation du chapitre 5.3.6, avec un système à plusieurs modes, en remplaçant le shunt résistif par un shunt résonant ; on réutilise les notations des relations (5.34) à (5.35) qui ne concernent que la partie mécanique ; on écrit alors la représentation complexe de l'équation (5.50) :

$$\begin{pmatrix} -\Omega^2 + 2\xi_1\omega_1j\Omega + \hat{\omega}_1^2 & k_i\omega_i k_j\omega_j & -k_1\omega_1 & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ k_i\omega_i k_j\omega_j & -\Omega^2 + 2\xi_N\omega_Nj\Omega + \hat{\omega}_N^2 & -k_N\omega_N & & \\ -k_1\omega_1 & \dots & -k_N\omega_N & -\frac{\Omega^2}{\omega_e^2} + 2j\xi_e\frac{\Omega}{\omega_e} + 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{q_1} \\ \vdots \\ \underline{q_n} \\ \underline{Q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix},$$

ce qu'on note

$$\mathbf{Z}_{RL}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (5.69)$$

avec  $\mathbf{Z}_{RL}$  matrice d'impédance de dimensions  $N + 1 \times N + 1$ . Alors la FRF déplacement/effort entre le point d'excitation  $x_n$  et le point de mesure  $x_m$  peut s'écrire de façon similaire à (5.38) :

$$\underline{H}_{mn}(\omega) = \frac{w}{F} = \underline{\Phi}_m^T \underline{Z}_{RL}^{-1} \underline{\Phi}_n. \quad (5.70)$$

### Cas d'une poutre

On étudie la poutre utilisée pour les expériences (tableau 6.7 p. 118) avec excitation et mesure du déplacement à l'extrémité libre; on trace le module de la FRF adimensionnée pour différentes situations : court-circuit, circuit ouvert, et des valeurs de shunt adaptées aux modes 1,2 et 3 par le calcul qu'on a fait dans le cas 1 ddl; on choisit donc  $\omega_e = \hat{\omega}_r$  et  $\xi_e = \sqrt{3/8}k_r$  pour chaque mode. On calcule alors la FRF numériquement à partir de (5.70). D'après la FRF (5.23) et les résultats (tab. 5.4) on constate que la technique de shunt résonant est efficace sur le mode visé et très peu sur les autres; elle est beaucoup plus sélective que la technique de shunt résistif. On constate également que la présence de modes voisins perturbe la symétrie des deux "bosses" de la FRF, qui au lieu d'être au même niveau se retrouvent légèrement décalées.

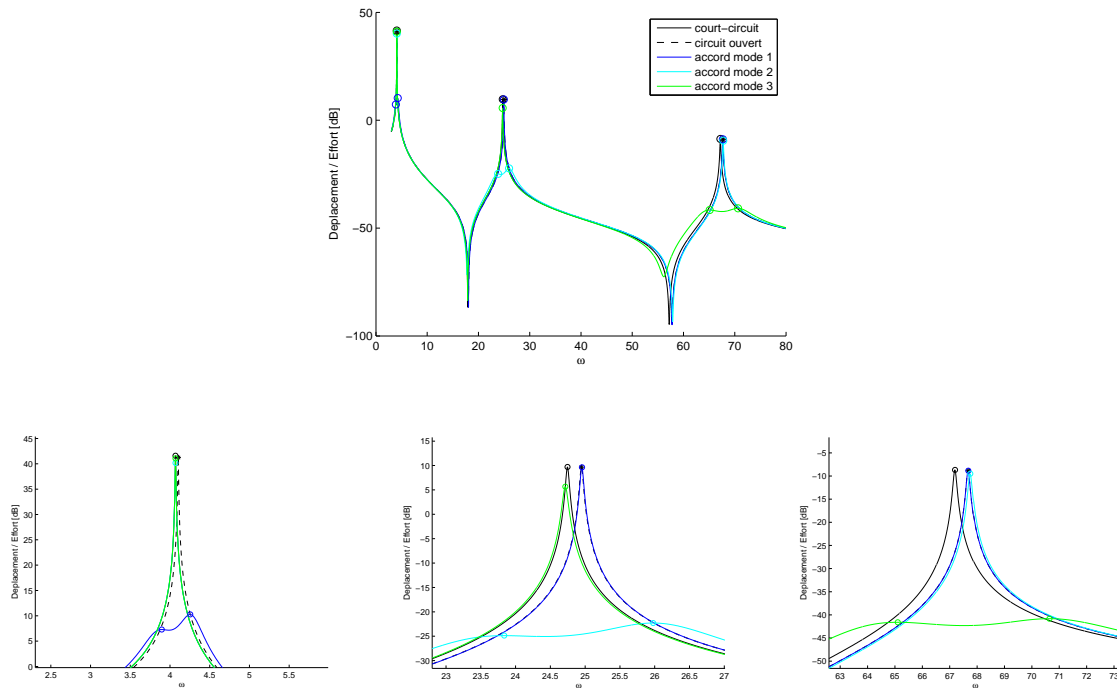


FIG. 5.23: FRF déplacement / effort avec détail sur les plages de fréquence autour des pics de résonance

	accord sur 1	accord sur 2	accord sur 3
Att. mode 1	-31,8 dB	-2 dB	-0,6 dB
Att. mode 2	-0,06 dB	-32,2 dB	-4 dB
Att. mode 3	-0,2 dB	-0,8 dB	-32,2 dB

TAB. 5.4: Atténuations obtenues sur les différents modes

### Cas de plusieurs modes de fréquence proche

On se place dans le cas d'un système à trois modes rapprochés de pulsations 1, 1,05 et 1,1,  $\Phi$  identiques, coefficients de couplages  $k_r = 0,05$  et amortissement mécanique de 0,1%. On peut constater que dans ce cas l'efficacité est bonne pour les trois pics simultanément (figure 5.24 et tableau 5.5).

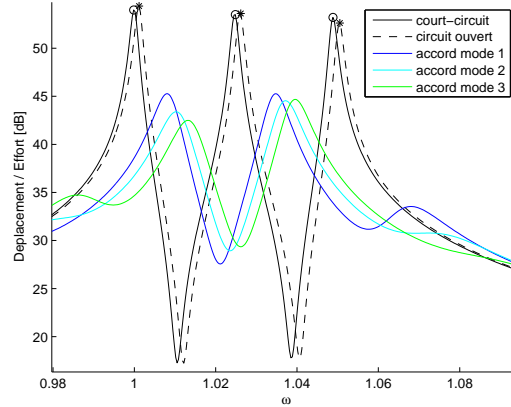


FIG. 5.24: FRF déplacement / effort pour trois modes proches

	accord sur 1	accord sur 2	accord sur 3
Att. mode 1	-22 dB	-20 dB	-16 dB
Att. mode 2	-22 dB	-27 dB	-22 dB
Att. mode 3	-16 dB	-18 dB	-22 dB

TAB. 5.5: Atténuations obtenues sur les différents modes proches

#### 5.4.7 Analogie mécanique

La technique de shunt résonant présente des similarités avec un système amortisseur à masse accordée (fig. 5.25).

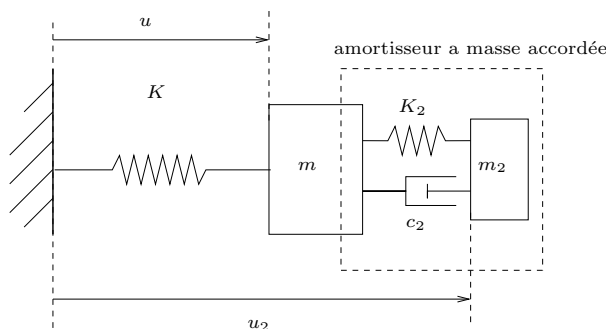
La mise en équation de ce système se fait comme suit et donne un système de forme assez similaire à (5.53) :

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.71)$$

On peut regrouper les paramètres par similarités : voir le tableau (5.6).

On observe les tendances suivantes qui sont communes aux deux systèmes :

- Le paramètre qui fixe l'efficacité maximale sera le rapport des masses (coefficient de couplage) . Il faut faire un compromis acceptable par rapport à l'encombrement et poids de l'amortisseur ( des éléments piézoélectriques).


 FIG. 5.25: *Analogie mécanique du système*

<i>Grandeurs mécaniques</i>		<i>Grandeurs électriques</i>	
Déplacement	$u_2$	Charge électrique	$Q$
Vitesse	$\dot{u}_2$	Intensité	$I = \dot{Q}$
Force	$F = K_2(u_2 - u)$	Tension électrique	$V = \frac{Q}{C} - k_r \omega_r q_r$
Raideur de l'amortisseur	$K_2$	Inverse de la capacité	$\frac{1}{C}$
Masse de l'amortisseur	$m_2$	Inductance	$L$
Amortissement	$c_2$	Résistance	$R$

 TAB. 5.6: *Équivalences mécanique/électrique*

- Il faut accorder la raideur de l'amortisseur ( l'inductance du shunt) de telle façon que les fréquences propres du mode à amortir et du TMD (du shunt) soient coincidentes ; alors à la résonance l'amplitude du mouvement du TMD (du courant) sera très élevée par rapport au déplacement de la structure et l'énergie sera dissipée rapidement dans l'amortisseur (la résistance).
- Si la viscosité de l'amortisseur (la résistance) est trop élevée le système se comporte comme un ajout de masse (de raideur).
- Si la viscosité (résistance) est trop basse le système présente deux modes et une antirésonance.

## 5.5 Conclusion

On a montré comment optimiser des shunts R et RL associés à un élément piézoélectrique pour réduire les vibrations d'une structure. Dans les deux cas, on montre que *la performance ne dépend que du coefficient de couplage*.

La technique de shunt résistif présente des caractéristiques intéressantes. En effet, il est très facile d'associer une résistance à un élément piézoélectrique, et de coller cela à la structure ; le système ainsi constitué est autonome. De plus, la performance n'est pas trop dégradée si un des paramètres varie. Par contre, il est nécessaire d'avoir un couplage élevé pour obtenir un amortissement important. Cela impose, sauf cas particulier, des éléments piézoélectriques de grande taille, et donc un ajout de masse et/ou d'encombrement.



Par rapport au shunt résistif, la technique de shunt résonant est bien plus efficace mais dépend de l'accord précis de l'inductance avec la résonance du système. Étant donné que les caractéristiques des matériaux piézoélectriques et peut être celles de la structure peuvent varier au cours du temps, par exemple en fonction de la température, il est probable que la mise en œuvre de shunts inductifs nécessite un accord périodique, voire continu. De plus, cette technique n'est efficace que sur une faible plage de fréquences. Enfin, les inductances très élevées requises, ainsi que la nécessité de régler leur valeur, font qu'il est nécessaire de faire appel à un inducteur synthétique. Celui-ci a besoin d'une alimentation ; on perd le bénéfice d'un système autonome. Par contre, il devrait être possible à *condition d'avoir un réglage précis* d'avoir une atténuation correcte même pour de faibles couplages.

La démarche d'optimisation de ces deux systèmes est similaire. Il faut commencer par déterminer l'atténuation souhaitée, ainsi que l'amortissement mécanique du mode que l'on souhaite atténuer. Grâce aux abaques (5.7 et 5.19) il est possible de déterminer le coefficient de couplage nécessaire ; on calcule alors les matériaux, dimensions et positions du ou des éléments piézoélectriques à associer à la structure avec la méthode des chapitres 3 ou 4. Ensuite on règle l'impédance d'après les formules (5.5),(5.15),(5.48) et les valeurs trouvées §5.4.2 : pour le shunt résistif

$$R = \frac{\tau_m}{C\omega_r\sqrt{1+k_r^2/2}},$$

et pour le shunt résonant

$$L = \frac{\tau_m^2}{C\hat{\omega}_r^2}, \quad R = \sqrt{3/2}k_r\frac{\tau_m}{C\hat{\omega}_r},$$

où pour rappel,  $\tau_m$  dépend des propriétés mécaniques, par exemple dans le cas d'une poutre avec le modèle du chapitre 3 :

$$\tau_m = l_b^2\sqrt{\frac{m_b}{D_b}}$$

Dans le chapitre suivant (§6) on suit cette démarche d'optimisation pour une étude expérimentale du cas d'une poutre symétrique.



## Expérimentation sur les shunts

Afin de valider les résultats des chapitres 3 et 5 on souhaite :

- optimiser par le calcul, avec le modèle du chapitre 3, le coefficient de couplage d'un ensemble poutre et éléments piézoélectriques ;
- associer à cet ensemble des shunts résistifs et résonants tels que ceux du chapitre 5 ;
- mesurer les caractéristiques du tout pour vérifier l'accord avec la théorie.

L'optimisation de la poutre consiste à maximiser le coefficient de couplage, qui d'après le chapitre 5 joue un rôle déterminant. Ensuite, on décrit le dispositif utilisé pour les mesures (§6.2) ainsi que les circuits utilisés pour les shunts (§6.3). Finalement, des mesures sont effectuées, analysées et comparées aux résultats théoriques, en régime forcé (§6.4.1) et libre (§6.4.3). Dans le cas du régime forcé, on propose en particulier au paragraphe 6.4.2 une expérience originale de variation du couplage, permettant de valider la relation trouvée au chapitre 5 entre performances et coefficient de couplage.

### 6.1 Réalisation d'une poutre avec couplage optimisé

On trouve bon nombre d'articles traitant de la réduction de vibrations avec des shunts R ou RL ; néanmoins un certain nombre d'entre eux négligent le résultat évoqué dans [37] et montré au chapitre précédent, c'est à dire la nécessité d'optimiser le coefficient de couplage. Afin d'obtenir des résultats nets en terme d'atténuation, on décide de réaliser une structure avec un couplage important.

#### 6.1.1 Choix des éléments

##### Structure

On étudie une poutre encastree libre, relativement simple à réaliser et raisonnablement exempte de non-linéarités. Le technicien du laboratoire a réalisé un étai permettant d'encastree différentes poutres avec une longueur bloquée de 30 mm (fig.6.1). D'autre part un stock de plaquettes métalliques dans différentes dimensions était disponible. Une analyse modale de chacune de ces plaques a été conduite afin d'en choisir une qui aie des caractéristiques adaptées ; cette analyse modale est réalisée avec le dispositif présenté figure 6.2, combinant une excitation par un aimant plongé dans le champ d'une bobine et un vibromètre laser à balayage<sup>1</sup>. Les fonctions réponse en fréquence vitesse sur effort sont acquises sur une grille de

---

<sup>1</sup>Ce dispositif est commenté plus en détail dans la partie (6.2)

points sur chaque plaque, puis analysées avec un logiciel qui permet d'obtenir les fréquences propres, déformées, et amortissements.

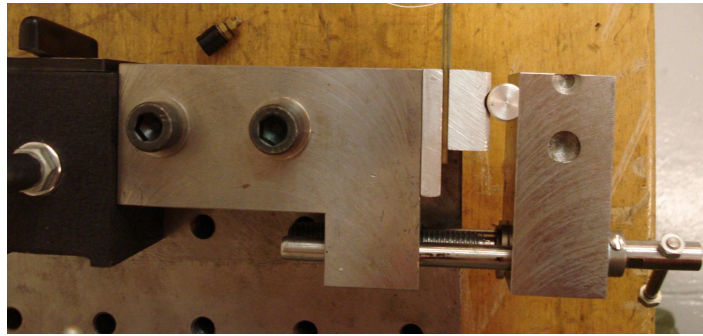
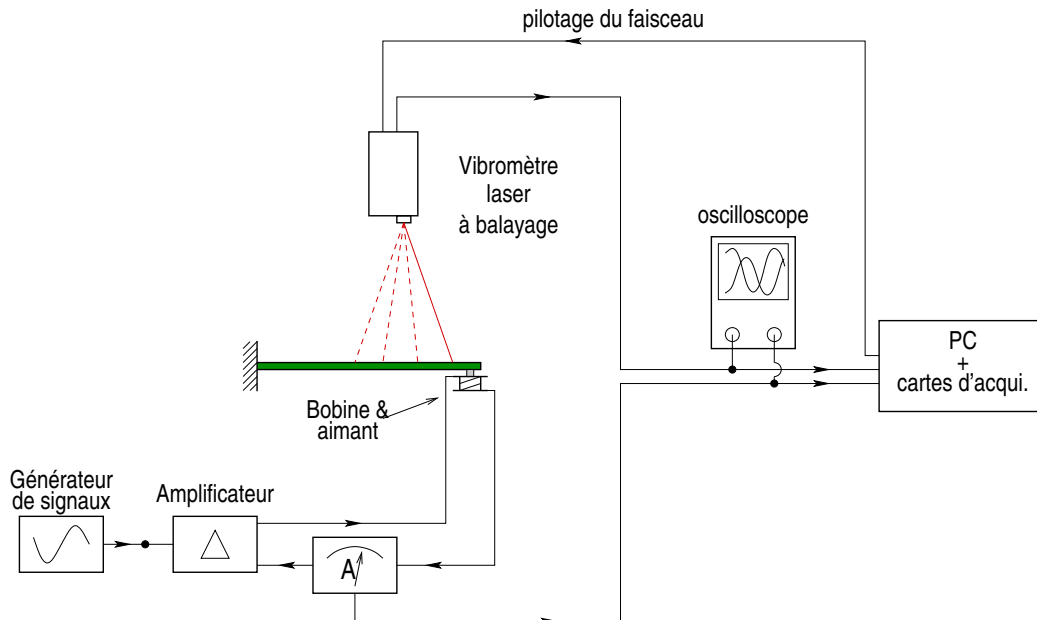


FIG. 6.1: Étau permettant la réalisation d'un encastrement, vue de dessus ; remarquer la pige métallique faisant pivot pour répartir la pression de contact.



Appareils	Constructeurs	Modèles
Synthétiseur de signaux	Bruel & Kjær	1051
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjær	2719
Vibromètre laser	Polytec	OFV 056/OFV 3001 S
Boîtier d'acquisition	Polytec	PSV-Z-040-H
Logiciel d'acquisition	Polytec	PSV
Logiciel d'analyse modale	M+P International	Smart Office

FIG. 6.2: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

Les remarques suivantes sont utilisées pour sélectionner les poutres :

- Certaines poutres présentent un amortissement plus important que d'autres ; comme l'on souhaite mettre en valeur l'atténuation apportée par le shunt, elles sont évitées ;

- Certaines poutres imparfaitement fabriquées présentent des modes couplés flexion - torsion ; on souhaite une poutre s'approchant autant du modèle flexion pure que possible ;
- Enfin souhaitant coller les éléments piézoélectriques, il fallait choisir une poutre ayant un bon état de surface.

Notre choix s'est porté sur une poutre en aluminium AU4G de 2 mm d'épaisseur et de 20 mm de large disponible au laboratoire. La longueur totale est de 200 mm, mais l'étau laisse une longueur libre de 170mm à partir de l'encastrement.

### Éléments piézoélectriques

Comme cela a été vu avec les relations (5.32) et (5.68) si l'on souhaite obtenir une atténuation optimale des vibrations il est nécessaire de maximiser le coefficient de couplage pour le mode visé. Celui-ci dépend des caractéristiques matériau, des dimensions du système, et du mode visé d'après l'équation (3.68) :

$$k_r = \sqrt{6} \underbrace{\tilde{k}_{31} \sqrt{\frac{Y_p}{Y_s}}}_{\text{matériau}} \underbrace{\sqrt{\frac{l_s}{l_p}} \left(1 + \frac{h_p}{h_s}\right)}_{\text{dimensions}} \underbrace{\sqrt{\frac{h_p}{h_s}} \frac{1}{\omega_r} \left[ \frac{\partial \Phi_r}{\partial x} \right]_{x=x_-}^{x=x_+}}_{r\text{-ième mode}}. \quad (6.1)$$

On commence par choisir un matériau piézoélectrique avec un coefficient de couplage  $k_{31}$  élevé. On notera que de nombreuses études sont actuellement consacrées à l'intérêt de composites piézoélectriques à électrodes interdigitées, comme par exemple [65] ; cependant la supériorité de ces matériaux n'est pas nette et la modélisation et mise en œuvre plus complexe nous ont conduit à les éviter. Après un tour de plusieurs fournisseurs la céramique PIC 151 de PI Ceramic avec un coefficient  $k_{31}$  de 38% a été retenue. Il s'agit d'une céramique de type zirconate de plomb / titanate de plomb qui a de bonnes caractéristiques piézoélectriques.

Afin de rester dans le cadre du modèle simple développé au chapitre 3, des éléments d'une largeur identique à la poutre sont retenus ; comme la méthode de calcul développée est très rapide (un dixième de seconde pour obtenir les couplages des trois premiers modes), on étudie systématiquement toutes les positions, longueurs et épaisseurs d'éléments, associées aux 4 matériaux possibles pour la structure. Pour chaque longueur et position on détermine une épaisseur optimale (il n'y en a qu'une, à la différence de la longueur optimale qui admet par exemple deux valeurs locales pour le mode 2).

Pour le premier mode les résultats sont tracés figure (6.3) ; la position optimale est systématiquement près de l'encastrement. On constate qu'il y a bien une épaisseur optimale, et que pour ce mode le couplage augmente avec la longueur de l'élément. On constate aussi que les éléments piézoélectriques doivent être plus épais pour une structure plus rigide, ce qui est caractéristique d'un cas d'adaptation d'impédance mécanique.

Pour le deuxième mode on optimise aussi l'épaisseur, mais cette fois-ci deux positions optimales existent. Les résultats sont tracés figure (6.4).

La longueur et l'épaisseur sont alors choisies parmi les éléments disponibles en stock chez notre fournisseur ce qui nous conduit à choisir des éléments de 25 mm de long et 0.5 mm d'épaisseur (voir tableau 6.7). Les déformées prévues pour ces valeurs sont comparées à celle de la figure nue, figure 6.5. L'effet de raidissement lié à la présence de l'élément piézoélectrique est bien visible. On choisit arbitrairement d'orienter toutes les déformées avec un déplacement positif à l'extrémité (pour comparer les signes des  $k_r$ ).

On peut commenter les valeurs et les signes des coefficients de couplage obtenus ; sur la figure 6.6 on a tracé la variation des trois premiers coefficients pour des variations d'un seul paramètre autour de la valeur optimale, où l'on observe l'influence des paramètres de l'équation (6.1) :

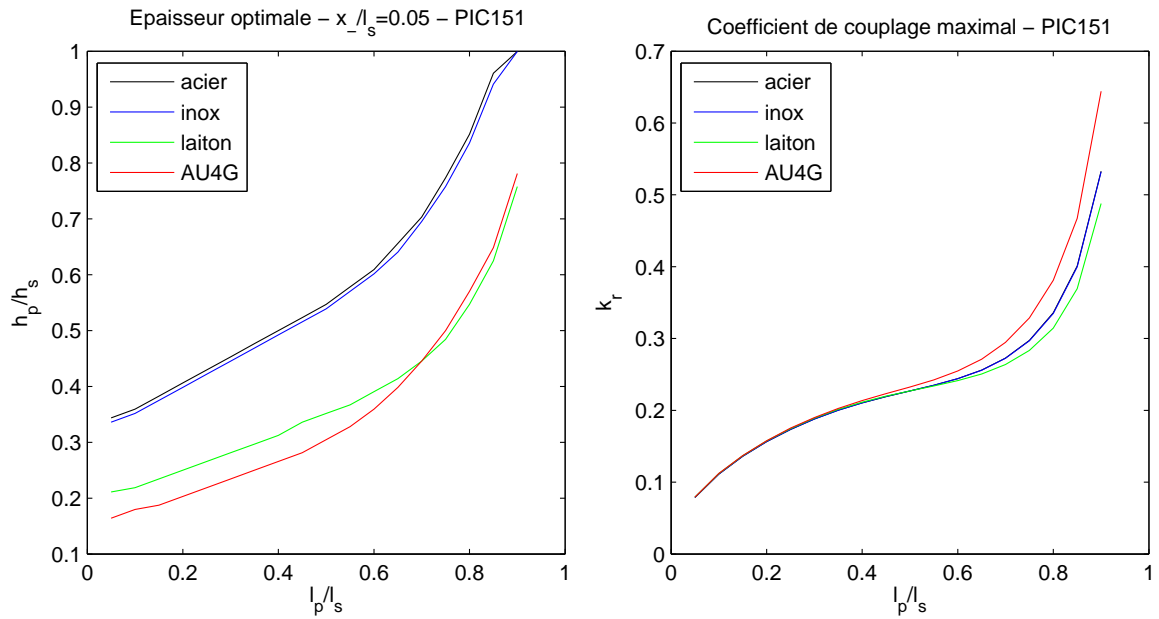


FIG. 6.3: (à g.) épaisseur optimale des éléments (à dr.) couplage obtenu avec cette épaisseur en fonction de la longueur de l'élément, pour différentes poutres

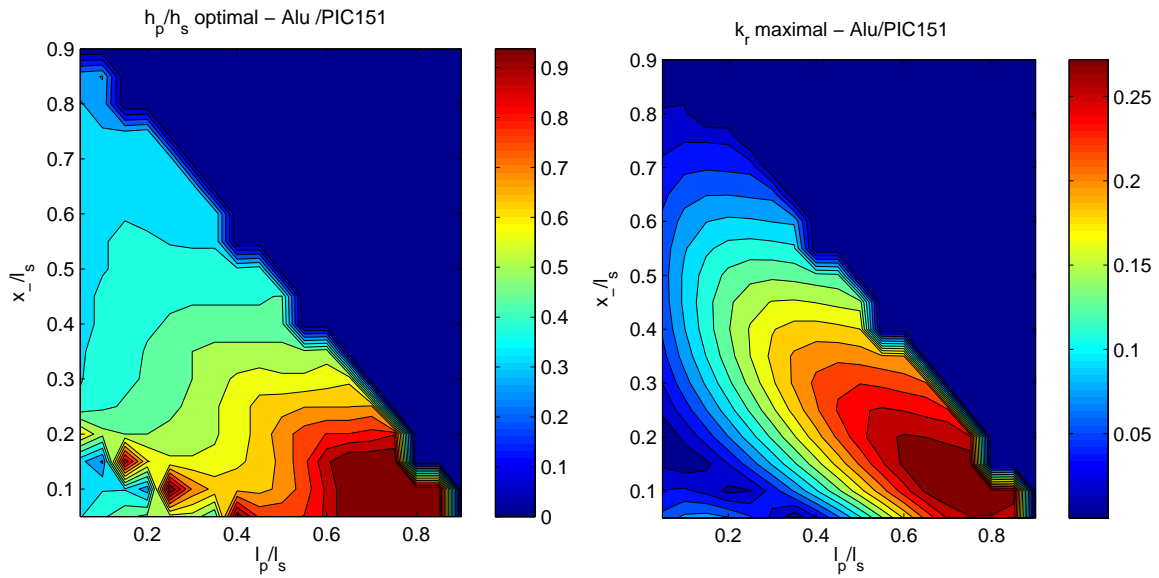


FIG. 6.4: (à g.) épaisseur optimale des éléments (à dr.) couplage obtenu avec cette épaisseur en fonction de la longueur de l'élément et de sa position pour une poutre en aluminium.

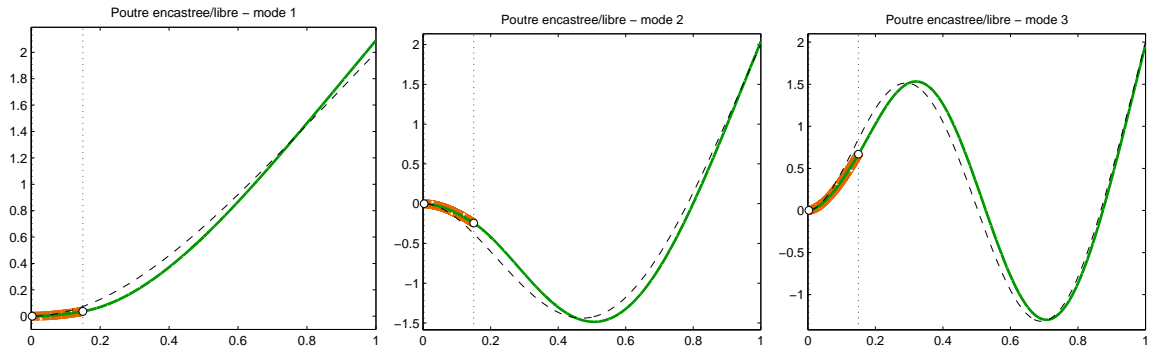


FIG. 6.5: 3 premières déformées modales avec les éléments piézoélectriques retenus

- il n'y a qu'un seul optimum pour l'épaisseur ; l'épaisseur optimale est un compromis entre un élément piézoélectrique assez souple pour que la structure se déforme sous lui et assez épais pour stocker une fraction importante de l'énergie de déformation ;
- il y a plusieurs maxima locaux du couplage en fonction de la longueur ou de la position de l'élément pour les modes élevés. On observe également des changements de signe du couplage ; cela est lié au terme de courbure ; l'encastrement reste une position privilégiée.
- pour le premier mode on peut remarquer que bien que la courbure soit du même signe sur toute la longueur (donc que la différence des pentes entre les extrémités de l'élément augmente avec sa longueur), le couplage admet un maximum. Ce phénomène est lié au terme en  $l_b/l_p$  dans (6.1), qui correspond à la capacité de l'élément piézoélectrique qui augmente avec sa surface, et réduit le couplage. Ainsi, même dans le cas d'une courbure de même signe sur toute la surface, il peut être contre-productif de trop augmenter la taille de l'élément piézoélectrique.

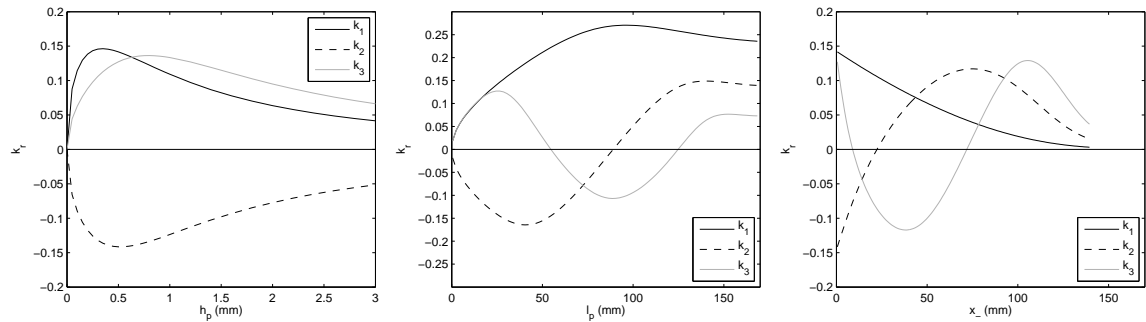


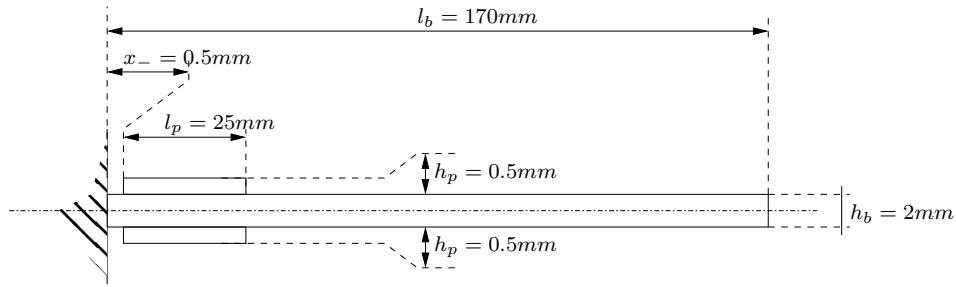
FIG. 6.6: Variation des coefficients de couplage des trois premiers modes en fonction de (de g. à dr.) l'épaisseur, la longueur et la position des éléments piézoélectriques

Les éléments piézoélectriques sont livrés avec une électrode en cuivre/nickel retournée, c'est à dire qu'une des électrodes fait le tour de l'élément et est accessible de l'autre côté pour contact électrique. Par contre, cette électrode retournée nous impose de coller les éléments avec des polarités opposées. Le champ électrique doit donc être dans la même direction dans chacun des éléments si l'on souhaite coupler le mouvement de flexion au shunt, comme indiqué aux équations (3.29). Cela laisse deux possibilités de câblage :

- Soit on câble les éléments en parallèle, ce qui augmente le courant dans le shunt et diminue la tension. Les faces intérieures des éléments piézoélectriques ne sont alors pas

au même potentiel et il faut les isoler de la poutre (qui est conductrice). Cela peut faire apparaître des capacités parasites - le film de colle entre la poutre et l'électrode intérieure d'un élément piézoélectrique agissant comme un condensateur. De plus, ce film de colle est très fin et il est difficile de garantir qu'il soit absolument isolant<sup>2</sup>.

- Soit on câble les éléments en série en reliant les faces intérieures. Il n'y a alors pas de champ électrique entre les faces intérieures des éléments piézoélectriques. Cela impose par contre que le potentiel de la poutre soit intermédiaire entre les deux bornes du shunt<sup>3</sup>. En raison de l'incertitude sur le film de colle, cette solution est préférée.



	Poutre (AU4G)	Pastille piézoélectriques (PIC 151)
Longueur, position	$l_b = 170 \text{ mm}$	$l_p = 25 \text{ mm}$ $x_- = 0.5 \text{ mm}$
Épaisseur	$h_b = 2 \text{ mm}$	$h_p = 0.5 \text{ mm}$
Largeur	$b = 20 \text{ mm}$	$b = 20 \text{ mm}$
Masse volumique	$\rho_b = 2800 \text{ kg/m}^3$	$\rho_p = 8500 \text{ kg/m}^3$
Module d'Young	$Y_b = 74 \text{ GPa}$	$Y_p = 57 \text{ GPa}$
Coefficient de couplage matériau	–	$k_{31} = 0.4$
Constantes diélectrique modifiée	–	$\bar{\epsilon}_{33} = 2400 \times \epsilon_0$

FIG. 6.7: Dimensions du système choisi.  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Le placement à 0.5 mm des éléments piézoélectriques a été choisi aussi près que possible des mâchoires de l'étau sans risquer de contact.

### 6.1.2 Collage

Les éléments choisis disposent d'électrodes retournées et les deux électrodes sont accessibles par le dessus; la colle n'a donc pas de rôle électrique à remplir. On choisit une colle Araldite 2011 pour ses bonnes propriétés mécaniques (limite en cisaillement d'au moins 20 MPa d'après la documentation [39]). La procédure de collage est inspirée de celle conseillée pour des jauges de déformation [105] afin d'obtenir un bon état de surface. Pour être tout à fait rigoureux, une étape de déaération (passage sous vide) de la colle serait nécessaire. Les photos de la figure (6.8) présentent les principales étapes de cette procédure<sup>4</sup>.

La mesure au pied à coulisse de l'ensemble permet d'estimer à posteriori l'épaisseur des films de colle entre 0.04 et 0.05 mm - ce qui devrait donner une épaisseur de chaque film de

<sup>2</sup>Une mesure à posteriori montre qu'une résistance de fuite de quelques  $M\Omega$  existe, valeur pénalisante dans ce cas.

<sup>3</sup>Cela a en particulier pour conséquence de devoir laisser électriquement flottant le bâti mécanique si un des pôles du shunt est à la terre, ce qui ne s'est pas révélé problématique par la suite.

<sup>4</sup>Certaines photos correspondent à la poutre réalisée pour le chapitre (9.1.2) mais les étapes sont identiques.





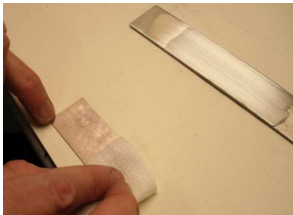
Ponçage à la toile émeri de grain 400.



Nettoyage avec une solution diluée d'acide phosphorique. Essuyage dans une seule direction.



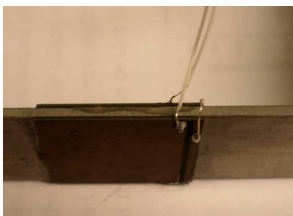
Neutralisation de l'acide avec une goutte d'ammoniaque. Essuyage dans une seule direction.



Nettoyage de l'élément piézoélectrique à l'acétone ; le film de colle époxy a été déposé sur la poutre en léger excès.



Élément piézo. positionné avec ruban adhésif et mis sous pression par un poids ; un peu de colle sera chassée avec les bulles d'air. Temps de prise : 24h. à température ambiante.



Fil à wrapper (30 AWG, 0.255 mm de diamètre) soudé à l'étain sur les électrodes extérieures ; une petite longueur est utilisée pour relier les électrodes intérieures.

FIG. 6.8: Étapes du collage inspirée d'une méthode prévue pour des jauges de contrainte [105]

l'ordre de 0.02 mm environ. L'approximation consistant à négliger l'épaisseur du film de colle est donc ici justifiée.

## 6.2 Dispositif expérimental

La mesure qu'on souhaite réaliser sur la poutre est la fonction de réponse en fréquence vitesse / effort. Un générateur de signaux crée un signal en tension et un amplificateur de puissance asservi en courant envoie dans la bobine un courant proportionnel à ce signal. Le courant est mesuré au sein de l'amplificateur et disponible pour la mesure. On fait l'hypothèse que l'effort sur la structure est proportionnel au courant dans la bobine [97]. Cette méthode présente les avantages suivants par rapport à un pot vibrant :

- L'excitation est en effort directement, sans dépendance au mouvement ;
- Il y a peu de non-linéarités ;
- L'excitation se fait sans contact et ne relie pas la structure à la masse électrique ; cela est utile car parfois le potentiel électrique de la structure doit être laissé flottant ;
- La masse ajoutée est celle de l'aimant, de 2 à 4 g suivant le type utilisé à comparer à la masse de la structure qui est d'une dizaine de grammes.

Comme défaut, les efforts disponibles sont faibles. Notre structure étant assez petite et souple, cela n'est pas pénalisant. Pour des cas particuliers on peut obtenir des efforts importants en faisant circuler jusqu'à 20 A dans la bobine ; il faut alors la refroidir avec un ventilateur et respecter des périodes d'arrêt entre les mesures.

La vitesse est ensuite mesurée par un vibromètre laser qui permet une mesure sans contact ; cela a deux avantages, d'une part l'absence de masse ajoutée, d'autre part l'absence de liaison de la structure à la masse électrique<sup>5</sup>. Le schéma du dispositif, ainsi qu'une photographie de la poutre en situation sont présentés figures 6.9 et 6.9.

## 6.3 Circuit shunt

### 6.3.1 Résistance

Afin de régler la partie résistive du shunt on utilise un boîtier de potentiomètres de 100  $\Omega$  à 10  $M\Omega$ .

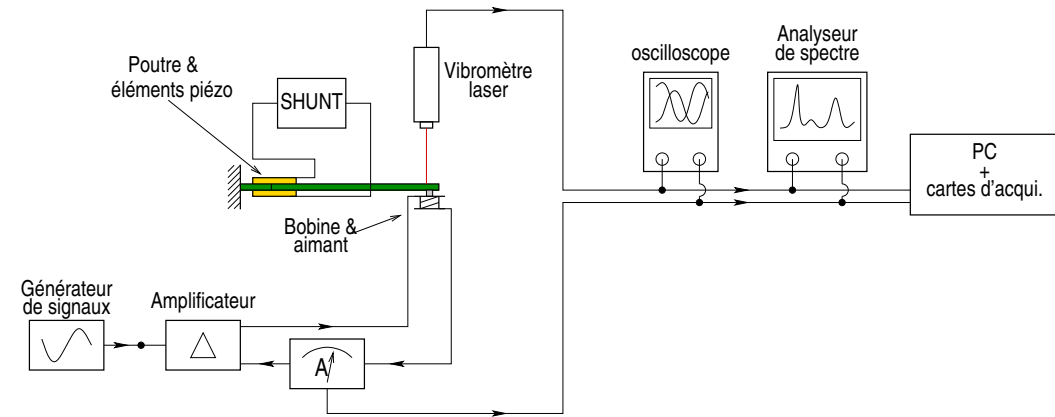
### 6.3.2 Inductance

#### Choix d'un inducteur synthétique

Les valeurs d'inductance prévues sont élevées : 123 H pour le premier mode par exemple (5.48). Cela peut s'obtenir avec des bobines de plusieurs kilomètres de fil et un noyau en ferrite ; ces bobines ont souvent une résistance interne parasite non négligeable. De plus on souhaite pouvoir régler précisément la valeur de l'inductance. Ces raisons font qu'une inductance synthétique réalisée à base d'amplificateurs opérationnels est préférable. On utilise un circuit simple, un inducteur synthétique d'Antoniu [4], avec une modification proposée par Senani [89] permettant de compenser d'éventuelles résistances internes.

---

<sup>5</sup>À l'occasion d'une mesure à l'accéléromètre, on a pu constater que ceux-ci, bien que réputés flottants, ne le sont pas en pratique ; d'autre part ils sont difficiles à isoler électriquement de la structure à laquelle ils sont collés.



<i>Appareils</i>	<i>Constructeurs</i>	<i>Modèles</i>
Vibromètre laser	Polytec	OFV 303/OFV 3001 S
Analyseur FFT	Bruel & Kjær	2032
Synthétiseur de signaux	Bruel & Kjær	1051
Amplificateur de puissance	Bruel & Kjær	2719
Cartes d'acquisition	National Instruments	NI 4472
Logiciel d'acquisition	M+P international	Smart Office

FIG. 6.9: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

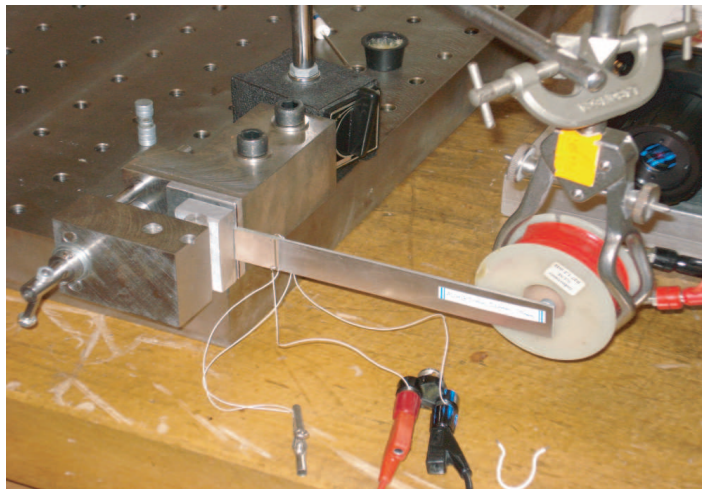


FIG. 6.10: Photographie de la poutre en place.

## Réalisation

Les amplificateurs opérationnels sont des OPA445AP choisis après discussion avec Corrado Maurini [61] pour leur possibilité d'alimentation à des tensions élevées [11] évitant la saturation dès de petites amplitudes de vibration. Une alimentation régulée Hewlett-Packard E3620A alimente les deux composants en  $+30V$  /  $-30V$ . Les valeurs de résistances et de la capacité fixe ont été choisies pour limiter le courant sortant des amplificateurs. Une carte regroupant tous les composants sauf le deuxième potentiomètre P2 est réalisée. Pour P2 on

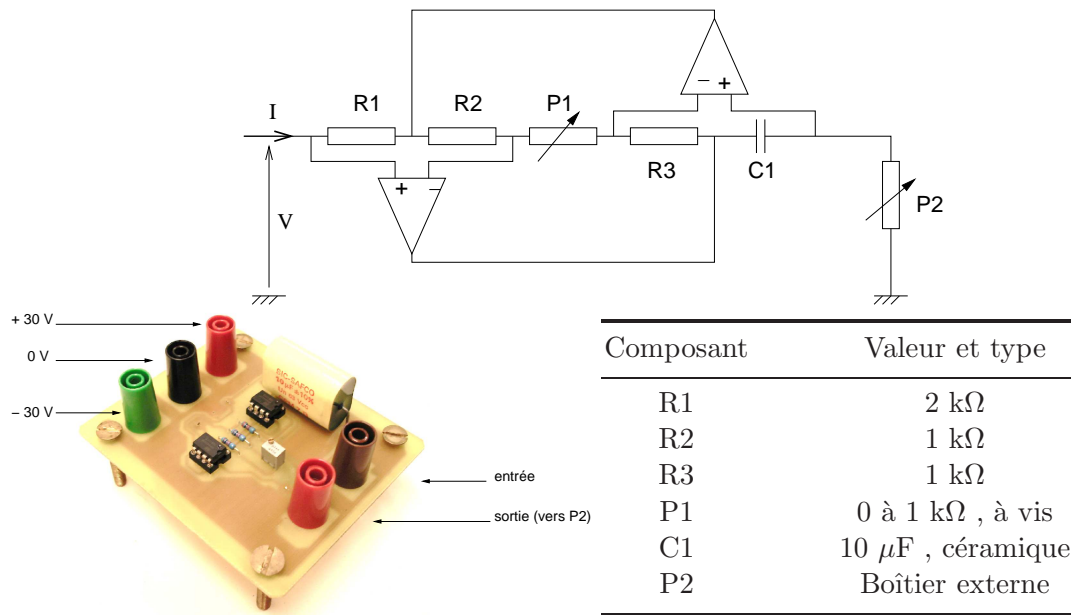


FIG. 6.11: Schéma, photographie et composants de l'inducteur synthétique utilisé

utilise un boîtier externe de potentiomètres de  $100 \Omega$  à  $10 M\Omega$ . On peut ainsi mesurer la valeur de  $P_2$  au multimètre avant de réaliser une mesure.

On peut montrer que l'impédance d'entrée de ce système en régime harmonique, tous les composants étant supposés idéaux, est équivalente à une inductance et une résistance négative :

$$Z_{eq} = \frac{V}{I} = jC\omega P_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} - P_1 \frac{R_1}{R_2} = jL_{eq}\omega + R_{eq} \quad (6.2)$$

avec  $L_{eq} = CP_2 R_3 \frac{R_1}{R_2} = \alpha P_2$  et  $R_{eq} = -P_1 \frac{R_1}{R_2}$ . L'inductance devrait être proportionnelle à  $P_2$  avec une constante  $\alpha$  égale à  $20 \text{ H.k}\Omega^{-1}$ . Il faut donc tout d'abord régler  $P_1$  afin de compenser une éventuelle résistance parasite du circuit ; ensuite en réglant  $P_2$  on peut changer à volonté la valeur de l'inductance. Cependant la constante  $\alpha$  doit être connue avec précision, ce qui n'est pas possible en la calculant d'après les caractéristiques nominales des composants<sup>6</sup>.

### Validation expérimentale

On souhaite mesurer l'impédance (résistance et inductance) du circuit. On associe celui-ci à une résistance et une capacité test  $R_t$  et  $C_t$ , qui ont été mesurées avec un multimètre Langlois GDM8246 avec une incertitude de mesure de  $\pm 0.1\%$ . On obtient ainsi un circuit RLC série dont on va analyser le comportement.

On étudiera la fonction réponse en fréquence (FRF)  $H(\omega) = \frac{V_2}{V_1}$  qui s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega + R_{eq}}{L_{eq}j\omega + R_{eq} + R_t + \frac{1}{jC_t\omega}} \quad (6.3)$$

<sup>6</sup>Les tolérances sont de  $\pm 10\%$  sur chaque composant soit jusqu'à  $-33\%$  /  $+47\%$  sur la valeur de  $\alpha$ .

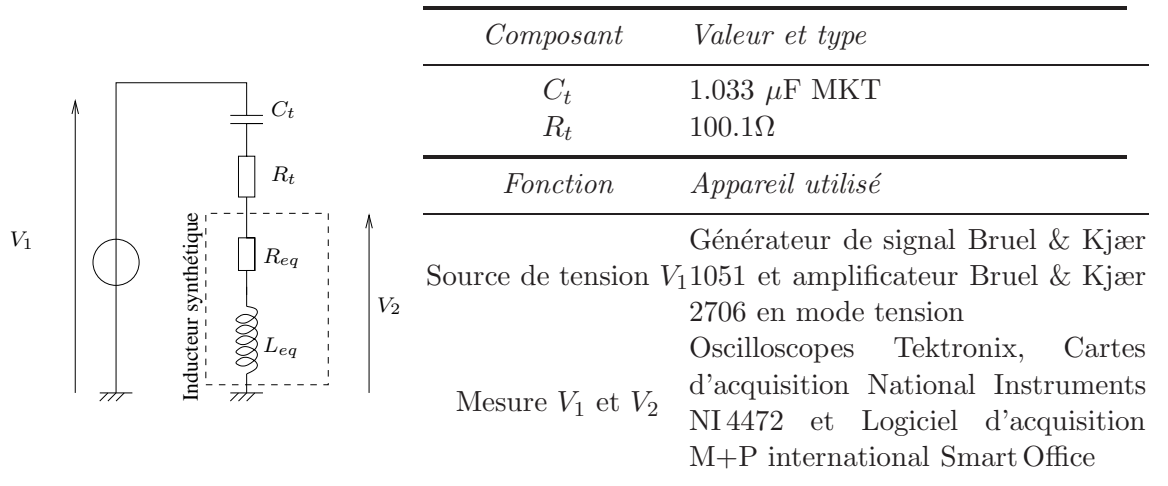


FIG. 6.12: Identification de l'impédance

La première mesure est effectuée en supprimant  $C_t$  et en très basse fréquence. Sous ces hypothèses la FRF (6.3) se simplifie :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega + R_{eq}}{L_{eq}j\omega + R_{eq} + R_t} \simeq \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_t} \quad (6.4)$$

En imposant à  $V_1$  des signaux sinusoïdaux à des fréquences inférieures à 1 Hz ou une tension continue on observe à l'oscilloscope la relation entre  $V_1$  et  $V_2$  ; la résistance mesurée ainsi est très faible<sup>7</sup>. On ne touche alors pas au réglage de  $P_1$  qui est laissé à 0. La résistance interne est supposée nulle et on cherche maintenant à déterminer  $L_{eq}$ .

La deuxième mesure est effectuée avec le condensateur  $C_t$ . En l'absence de résistance interne, la FRF s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{L_{eq}j\omega}{L_{eq}j\omega + R_t + \frac{1}{jC_t\omega}} = \frac{-\omega^2}{-\omega^2 + 2\xi_e\omega_e j\omega + \omega_e^2} \quad (6.5)$$

Pour retrouver  $L_{eq}$  on souhaite identifier la valeur de la pulsation propre  $\omega_e = \frac{1}{\sqrt{L_{eq}C_t}}$  et le coefficient d'amortissement  $\xi_e = \frac{R_t C_t \omega_e}{2}$  à partir de la FRF. On procèdera par pseudo-inversion. Tout d'abord, la FRF est mesurée : le générateur est réglé pour envoyer un bruit blanc restreint à la bande 2-2000 Hz et un logiciel d'acquisition est utilisé pour acquérir et moyenner  $H$  pour des fréquences  $\omega_i$  discrètes. L'équation (6.5) peut être réécrite de la manière suivante, pour chaque point de mesure :

$$H(\omega_i)(\omega_e^2 + 2j\xi_e\omega_i\omega_e) = \omega_i^2(H(\omega_i) - 1) \quad \forall i \in [1, n], \quad (6.6)$$

ce qui peut s'écrire pour l'ensemble des points mesurés de  $\omega_1$  à  $\omega_n$  par un unique produit matriciel :

<sup>7</sup>Un léger courant de repos des amplificateurs opérationnels est observé et masque la résistance interne ; ce phénomène n'est pas jugé pénalisant pour la suite des mesures.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} H(\omega_1) & 2j\omega_1 H(\omega_1) \\ \vdots & \vdots \\ H(\omega_n) & 2j\omega_n H(\omega_n) \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}, \text{Mesurée}} \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix}}_{\text{Inconnues}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1^2(H(\omega_1) - 1) \\ \vdots \\ \omega_n^2(H(\omega_n) - 1) \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}, \text{Mesurée}}. \quad (6.7)$$

Suivant le nombre de points expérimentaux retenus le système (6.7) peut être de nature différente :

- si  $n = 1$  le système est indéterminé ;
- si  $n = 2$  le système a autant d'équations que d'inconnues et peut être résolu ; cependant toute erreur de mesure sur un des échantillons se traduit par une erreur sur les paramètres à identifier ;
- si  $n > 2$  le système a plus d'équations que d'inconnues, il est surdéterminé. On peut alors chercher une solution minimisant la norme suivante :

$$\left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix} - \mathbf{B} \right)^\top \left( \mathbf{A} \begin{pmatrix} \omega_e^2 \\ \xi_e \omega_e \end{pmatrix} - \mathbf{B} \right). \quad (6.8)$$

Cela fait qu'une erreur de mesure ponctuelle sur  $H$  n'affectera que peu le résultat. En pratique, la résolution est faite avec Matlab, en tronquant manuellement la FRF à une bande de fréquence assez large autour de la résonance ; en effet un excès de points au delà ou en deçà du pic de résonance perturbe l'identification.

On effectue plusieurs essais en réglant le potentiomètre P2 sur différentes valeurs de résistances. La valeur de la résistance est mesurée au multimètre, puis P2 est connecté à l'inducteur synthétique et la FRF est mesurée. Les FRF expérimentales et identifiées sont tracées sur la figure (6.13). On obtient un bon accord entre les FRF mesurées et identifiées. La valeur de l'inductance est déduite de la pulsation<sup>8</sup>  $L_{eq} = \frac{1}{C_t \omega_e^2}$ . Les valeurs d'inductance obtenues sont comparées à la résistance de P2 et une régression linéaire (fig. 6.13) permet de trouver la valeur de  $\alpha$  à  $20.88 \text{ H.k}\Omega^{-1}$  avec une bonne précision ; la valeur théorique calculée d'après la relation (6.2) et les valeurs nominales des composants étant de  $20 \text{ H.k}\Omega^{-1}$ .

<sup>8</sup>On peut remarquer qu'il est aussi possible de déduire la valeur de l'inductance de  $\xi_e$  ; cependant les valeurs obtenues par cette méthode ne sont pas satisfaisantes.

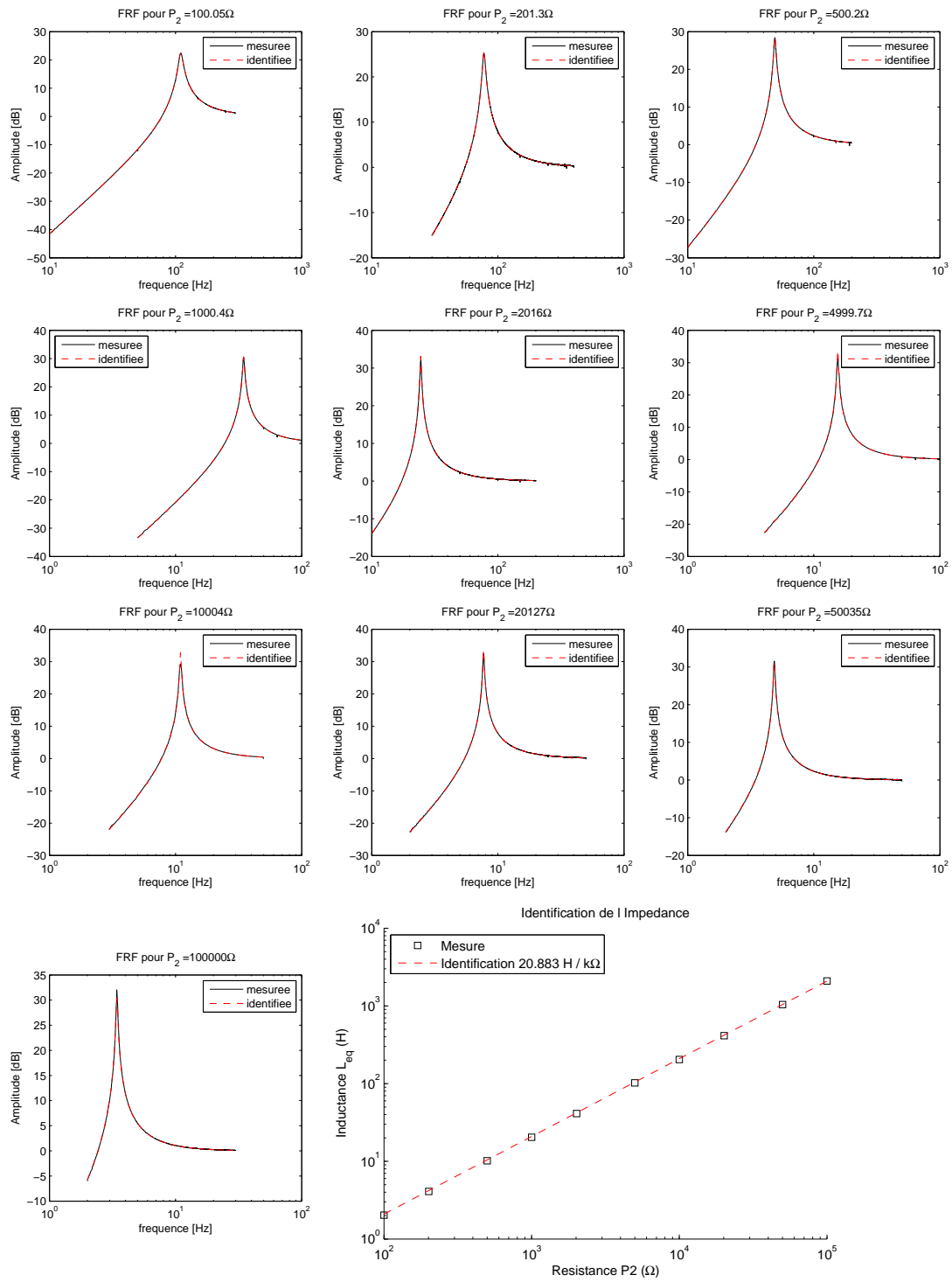


FIG. 6.13: FRF mesurées et identifiées pour différents réglages du potentiomètre  $P_2$ ; identification de l'inductance synthétique en fonction du réglage du potentiomètre  $P_2$

## 6.4 Résultats

### 6.4.1 Régime forcé

Le dispositif présenté figure (6.9) est utilisé pour acquérir des fonctions réponse en fréquence (FRF) vitesse sur effort. Un bruit blanc est utilisé pour l'excitation ; les réglages éventuels sont faits en observant la FRF à l'analyseur de spectre. L'acquisition est réalisée un grand nombre de fois par le logiciel et les résultats sont moyennés. Ces mesures sont tout d'abord effectuées en circuit ouvert puis fermé. Ensuite pour les deux premiers modes, les shunts sont réglés de la manière suivante :

- Le shunt résistif est réglé manuellement en tournant le potentiomètre et en observant la FRF présentée sur l'analyseur de spectre ; on minimise l'amplitude du pic correspondant au mode visé, puis la mesure est faite à l'ordinateur. La valeur de la résistance est mesurée ensuite.
- Pour le shunt inductif l'inductance est réglée approximativement à la valeur d'accord prévue pour le mode visé et la résistance additionnelle laissée à 0. On observe une antirésonance sur la FRF, qui correspond à la résonance du shunt ; on règle alors l'inductance pour amener l'antirésonance sur le mode visé.
- Une fois l'inductance réglée, la partie résistive du shunt inductif est réglée en observant la FRF à l'analyseur. Finalement, l'acquisition est faite avec l'ordinateur, puis les valeurs d'inductance et résistance sont relevées au multimètre.

### Comparaison calcul - essai : modèle réduit

Tout d'abord on procède à une identification des paramètres modaux à partir de la FRF, avec le logiciel SmartOffice. Ensuite on compare les résultats à ceux obtenus avec deux théories :

- d'une part les résultats obtenus avec le modèle analytique (chap 3) ;
- d'autre part, les résultats obtenus avec le modèle élément finis (chap 4) .

Une différence entre ces deux modèles est la prise en compte de la masse de l'aimant utilisé pour l'excitation. En effet, la partie libre de la poutre nue pèse 18g, et l'aimant utilisé pour l'excitation, situé à l'extrémité, pèse 4.6g, ce qui n'est pas négligeable. Ainsi, les fréquences prévues par le modèle analytique qui ne tient pas compte de cette masse sont plus élevées que les valeurs réelles. On constate un bon accord avec le modèle élément finis en mettant une masse ponctuelle de 4.2g sur le dernier élément (la position réelle de l'aimant étant légèrement éloignée de l'extrémité ce résultat est logique.)

On peut de plus comparer le coefficient de couplage modal réduit (noté  $k_r$ , calculé par les coefficients matériau et la géométrie des modes, non mesurable directement) et le coefficient de couplage effectif  $k_{\text{eff},r}$  (calculé par différence des fréquences, calcul qui n'est pas fait avec le modèle analytique.) ; on remarque que les valeurs sont proches et que l'hypothèse faite au paragraphe 4.4.3 est ici justifiée.

Finalement, on constate la présence d'un mode de torsion sur le système réel, qui n'est pas prévisible par les modèles poutre Euler-Bernoulli EF ou analytique. Ce mode de torsion devrait logiquement être découplé électriquement, en raison de l'antisymétrie du champ de déformation (qui est donc d'intégrale nulle sur les éléments piézoélectriques). On constate expérimentalement qu'il est peu couplé.

On peut reconstituer à partir des paramètres modaux identifiés (participation des modes, pulsations, coefficients de couplage et amortissements) la FRF du système avec différentes



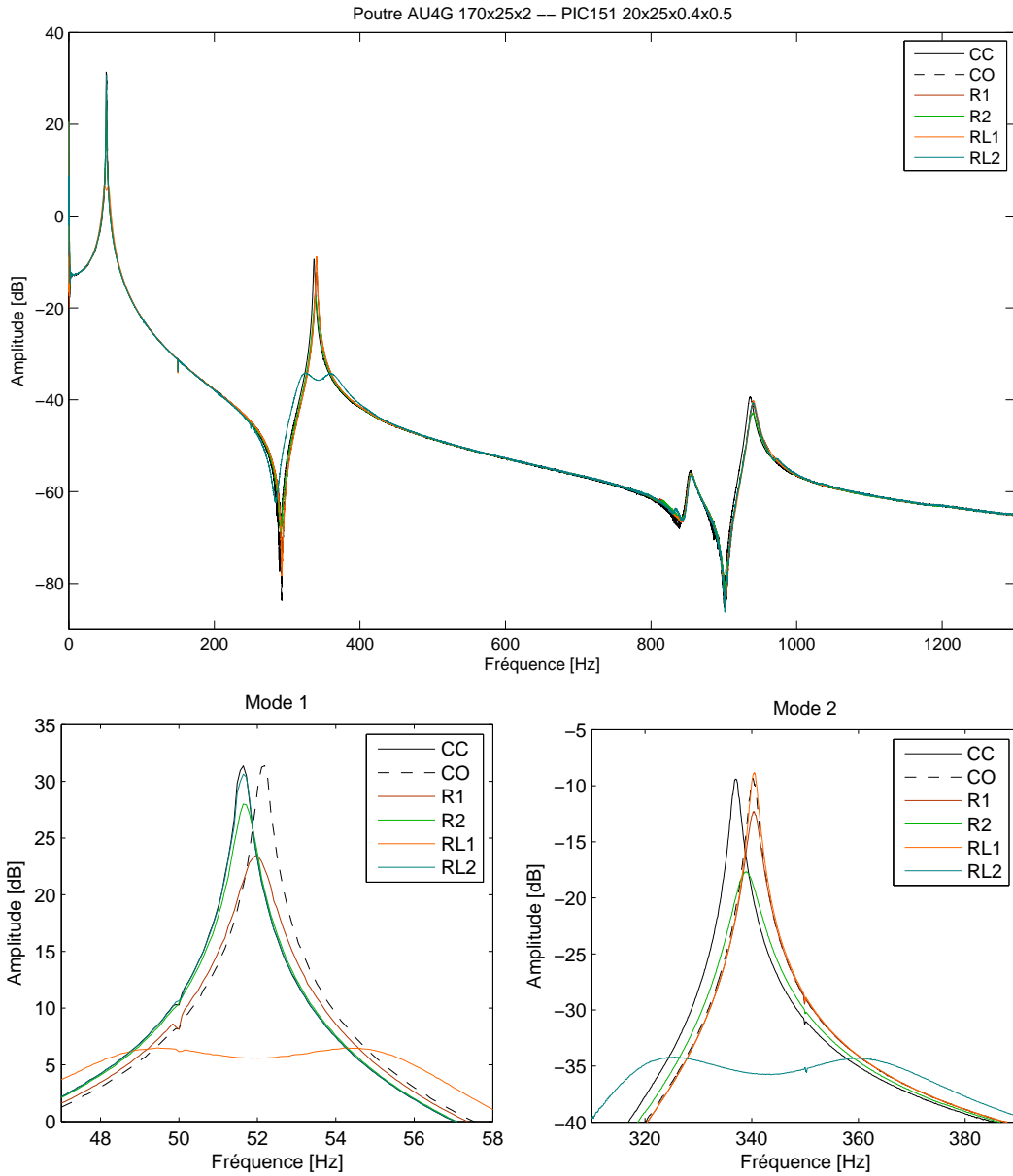


FIG. 6.14: FRF de la structure étudiée avec shunt court-circuit, circuit ouvert, résistif et résonant adaptés aux deux premiers modes. Agrandissement au voisinage des deux premiers pics de résonance.

	Freq. CC $\omega_r$ [Hz]			Freq. CO $\hat{\omega}_r$ [Hz]		$k_{\text{eff},r}$		$k_r$		$\xi_r$
	Ana.	EF	Exp.	EF	Exp.	EF	Exp.	Ana.	EF	Exp.
mode F <sub>1</sub>	68.87	48.96	51.46	49.42	51.98	0.137	0.143	0.147	0.143	0.17 %
mode F <sub>2</sub>	411.18	337.1	335.4	340.7	338.5	0.145	0.136	0.143	0.15	0.25 %
mode T <sub>1</sub>	–	–	853	–	854	–	0.05	–	–	0.5 %
mode F <sub>3</sub>	1094.3	951.8	926.8	960.6	931.4	0.137	0.10	0.125	0.14	0.4 %

TAB. 6.1: Fréquences propres et coefficients de couplage (modèle EF et mesure)

conditions électriques ; en particulier on peut reproduire l'association avec des shunts résistifs et résonants optimaux, en utilisant un modèle réduit à trois modes et l'expression (5.38 ou 5.70) ; on constate alors (fig. 6.15) un assez bon accord avec les résultats expérimentaux, avec une légère déviation liée aux modes voisins, comme vu à la section 5.4.6.

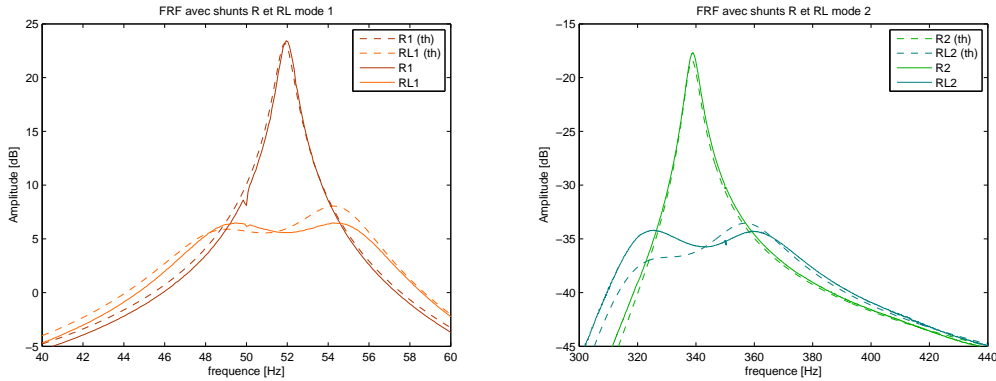


FIG. 6.15: FRF de la structure étudiée avec shunts  $R$  et  $RL$  adaptés aux modes 1 (à g.) et 2 (à dr.), résultats expérimentaux (traits pleins) et théoriques (pointillés)

On peut aussi utiliser le modèle éléments finis du chapitre 4 pour tracer la FRF. On part de l'équation (4.73), où on aura calculé les matrices de raideur et couplage d'après le modèle poutre (§4.5). Ensuite, cette équation est réécrite avec la charge comme ddl électrique et un shunt résonant associé de la même façon qu'au chapitre 5. On tient compte de la masse de l'aimant en ajoutant une masse ponctuelle sur le dernier élément de la poutre. La FRF déplacement / effort à ce nœud est tracée ; on adapte la valeur de l'inductance pour obtenir le même aspect des courbes et on obtient un très bon accord (fig. 6.16). Toutefois l'amplitude du pic de résonance n'est pas bien prise en compte, en raison de l'absence d'amortissement dans le modèle EF.

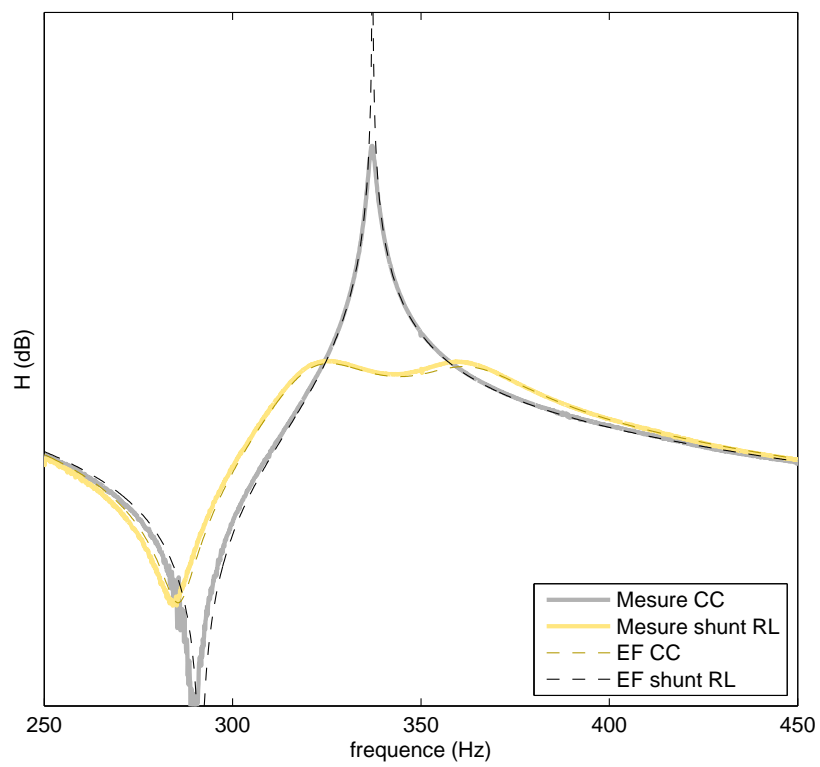


FIG. 6.16: *FRF en court-circuit et avec shunt RL au voisinage du deuxième mode*

## 6.4.2 Variation du couplage

### Association de capacité et réduction du couplage

Afin de vérifier la relation entre l'atténuation apportée par le système de shunt et le coefficient de couplage, on souhaite faire évoluer celui-ci, sans avoir à reconstruire une nouvelle structure pour chaque expérience. Une possibilité est d'associer une capacité en parallèle de l'élément piézoélectrique (figure 6.17). Cela a pour effet de baisser le couplage électromécanique. Si l'on écrit les équations du problème électromécanique couplé, avec le couplage en tension, pour le système électromécanique, on a (équations adimensionnées) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r - k_r \omega_r V = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r + Q = V, \end{array} \right. \quad (6.9)$$

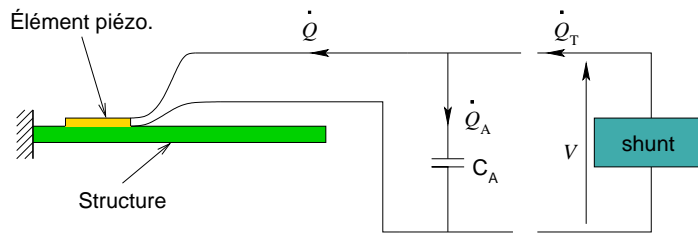


FIG. 6.17: Capacité en parallèle de l'élément piézoélectrique.

Le fait d'associer une capacité en parallèle à cet ensemble ne va changer ni  $Q$ , charge libre présente sur les électrodes des éléments, ni  $V$  différence de potentiel à leurs bornes. Par contre la nouvelle capacité stocke une charge  $Q_A$  ; en notant  $C_A$  sa capacité, on a la relation suivante (dimensionnée) :

$$Q_A = VC_A.$$

Si l'on tient compte de l'adimensionnement pratiqué pour le problème électromécanique (§3.2.3),

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau_m}, \quad \bar{V} = \frac{V}{V_0}, \quad \bar{Q} = \frac{Q}{Q_0}, \quad (6.10)$$

avec

$$V_0 = \frac{Q_0}{C}, \quad (6.11)$$

avec  $C$  capacité des éléments piézoélectriques, donnée par l'équation (3.28), il vient alors la relation adimensionnée suivante :

$$\bar{Q}_A = \bar{V} \frac{C_A}{C}. \quad (6.12)$$

À partir de cette équation et dans ce qui suit, on notera sans barre les grandeurs toutes adimensionnées. On peut remarquer que la charge qui circule dans le shunt est désormais la somme de la charge aux bornes des éléments piézoélectriques et de la capacité additionnelle :  $Q_T = Q_A + Q$ . En écrivant  $Q_T$  en tenant compte de (6.12) il vient :

$$Q_T = Q + \frac{C_A}{C} Q - \frac{C_A}{C} \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r. \quad (6.13)$$

En notant  $\alpha = 1 - C_A/C$  on écrit

$$Q_T - \alpha V = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r,$$

ce qu'on injecte dans (6.9) pour obtenir l'équation du système couplé désormais écrit avec la charge totale circulant dans le circuit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r - k_r \omega_r V = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\alpha} q_r + \frac{1}{\alpha} Q_T = V. \end{array} \right. \quad (6.14)$$

En réécrivant maintenant le système couplé sur la charge, et en remplaçant la valeur de la charge par une autre valeur adimensionnée définie à un facteur près  $Q_{eq} = Q_T/\sqrt{\alpha}$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^N \frac{k_j \omega_j}{\sqrt{\alpha}} q_j - \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} Q_{eq} = F_r, \\ - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = V \sqrt{\alpha}. \end{array} \right. \quad (6.15)$$

Dans ce système on peut alors remplacer  $V$  par sa valeur imposée par le shunt ; on obtient alors suivant le type de shunt

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall r \in [1, N], \quad \ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r + \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} \sum_{j=1}^N \frac{k_j \omega_j}{\sqrt{\alpha}} q_j - \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} Q_{eq} = F_r, \\ \text{shunt R} \quad \alpha \tau_e \dot{Q}_{eq} - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = 0, \\ \text{shunt RL} \quad \alpha \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q}_{eq} + \alpha \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q}_{eq} - \sum_{r=1}^N \frac{k_r \omega_r}{\sqrt{\alpha}} q_r + Q_{eq} = 0, \end{array} \right. \quad (6.16)$$

c'est à dire que *l'écriture adimensionnée du système avec capacité parallèle et shunt est rigoureusement identique à celle du système sans capacité parallèle, à la seule différence que le coefficient de couplage est réduit d'un facteur  $1/\sqrt{\alpha}$ , et les pulsations et amortissements électriques différents*. Dans [8] les auteurs se servent de cette modification pour réduire la valeur de l'inductance nécessaire et constatent la baisse du couplage.

Comme les seuls paramètres qui ont changé sont les paramètres électriques, la partie mécanique du problème va se comporter de manière rigoureusement identique suivant les valeurs de  $C_A$ .

## Résultat

On se place à la résonance du mode 1, en associant des capacités croissantes à l'élément piézoélectrique. Pour chaque capacité, la fréquence circuit ouvert et court-circuit sont mesurées, permettant de déduire le coefficient de couplage. Ensuite, des shunts optimaux R et RL sont réglés à la main. On constate expérimentalement que la pulsation court-circuit n'est pas affectée, par contre on observe la baisse des impédances signalée dans [8]. Finalement on compare les amplitudes en court-circuit et avec shunts R et RL optimaux avec chacune

des capacités test utilisées ; on obtient des points (figure 6.18) qu'on compare aux formules (5.32,5.68) prévoyant la performance en fonction du coefficient de couplage (et de l'amortissement mesuré de la structure). On constate un bon accord expérimental, avec cependant une baisse de performance en dessous de 5 % de couplage : il devient en effet aux couplages faibles très difficile de régler correctement le shunt résonant, problème prévu numériquement (par exemple figure 5.22). On peut tirer les conclusions suivantes de cette étude :

- Il est possible expérimentalement, *tous paramètres mécaniques égaux*, de réduire le coefficient de couplage artificiellement pour réaliser une étude paramétrique. Il suffit d'ajouter une capacité en parallèle des éléments piézoélectriques. L'impédance du circuit doit être adaptée.
- Au dessus de 5 % de couplage, la prédiction de performance des shunts R et RL (5.32,5.68) est bonne. Les performances sont intéressantes.
- En dessous de 5 % de couplage, le shunt résistif n'apporte presque rien à notre structure test en terme d'amortissement.
- En dessous de 5 % de couplage, en conditions contrôlées de laboratoire, avec de bons appareils de mesure, il devient très difficile de régler un shunt résonant satisfaisant, la performance n'est alors plus conforme à la prédiction.

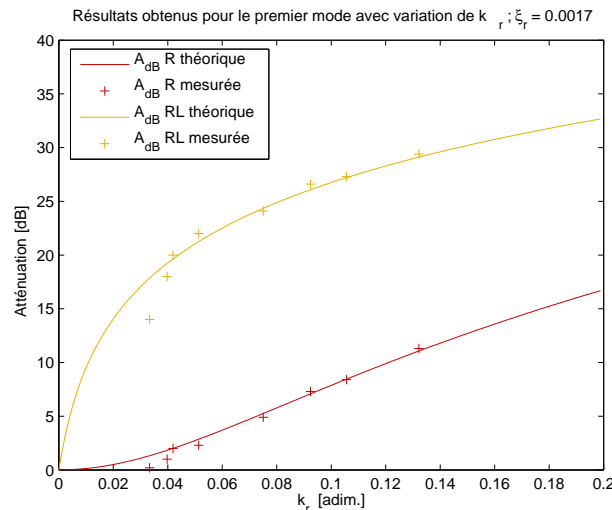


FIG. 6.18: Atténuations prévues et obtenues avec des shunts R et RL pour le premier mode avec variation du couplage

### 6.4.3 Régime libre

On se propose d'étudier la réponse en régime libre de la structure, pour cela on veut la déformer statiquement d'une flèche donnée, puis la laisser libre.

**Lâcher mécanique** Une première idée était de fléchir la poutre à l'aide d'un système de poids, avec une poulie de renvoi pour obtenir un effort de traction à l'horizontale. Cet effort est transmis à travers un fil de nylon ; ce fil est brûlé par la flamme d'un briquet pour qu'il cède brusquement et la structure est alors libérée. Expérimentalement, ce système fonctionne mal pour deux raisons liées à la petite échelle du dispositif :

- le frottement dans la poulie et peut être d'autres phénomènes font qu'il est visiblement difficile d'obtenir une flèche constante ; la mesure au micromètre de cette flèche nécessitant un appui sur la touche du micromètre perturberait la mesure ;
- la rupture du fil n'est pas du tout reproductible ; parfois le fil se contracte sous l'effet de la chaleur avant de céder, d'autrefois il s'étire et cède progressivement, ou même se détend complètement avant de brûler.

**Lâcher électromagnétique** On décide de se servir du dispositif utilisé pour la réponse forcée (figure 6.9) ; la seule différence est l'utilisation d'un générateur de tension continue branché sur l'amplificateur. Celui-ci est réglé pour délivrer un courant fixe de 20 A environ<sup>9</sup>, ce qui correspond à une déflexion fixe d'environ 1 mm de la poutre. Le câble reliant la bobine est alors débranché brutalement afin d'arrêter le courant dans un temps très court<sup>10</sup>. La poutre est alors en régime libre, à partir d'une position de départ parfaitement reproductible.

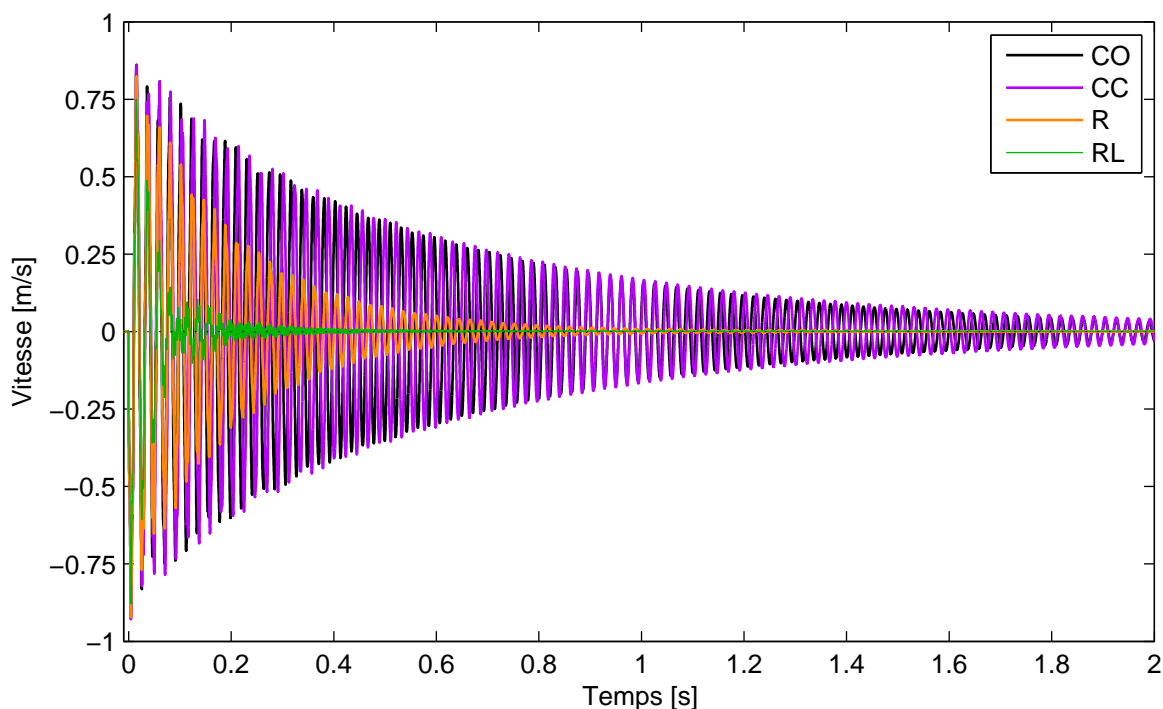


FIG. 6.19: Oscillations libres de la poutre à déplacement initial non nul et vitesse nulle.

**Résultats** On peut faire les remarques suivantes :

- La déformée statique initiale de la structure est très proche de la première déformée modale, si bien qu'une grande partie de l'énergie est transférée au mode F1. Par suite, la forme des oscillation est très proche d'une sinusoïde de fréquence proche de celle du mode F1.

<sup>9</sup>Nécessitant un ventilateur de refroidissement sur la bobine entre les mesures.

<sup>10</sup>Un interrupteur à couteaux aurait été plus indiqué pour cette opération. Néanmoins le temps d'arrêt du courant, mesuré à l'oscilloscope, est systématiquement de l'ordre de la milliseconde, ce qui est satisfaisant.

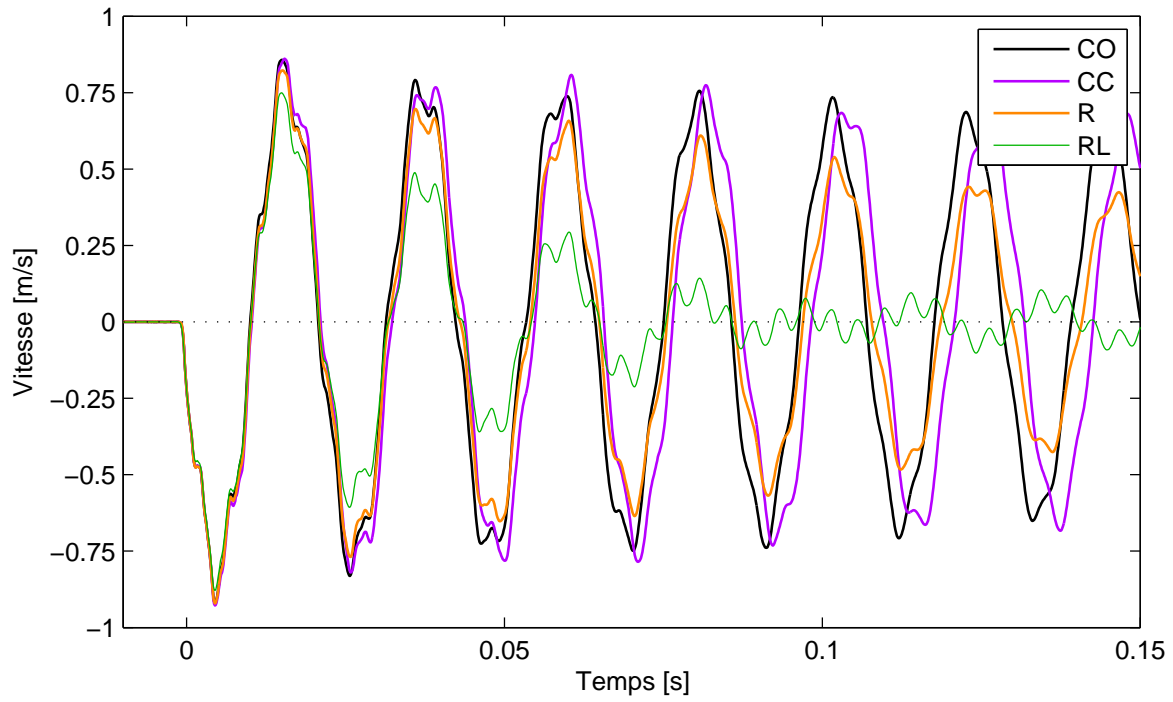


FIG. 6.20: Détail de la figure 6.19 entre 0 s et 0.15 s

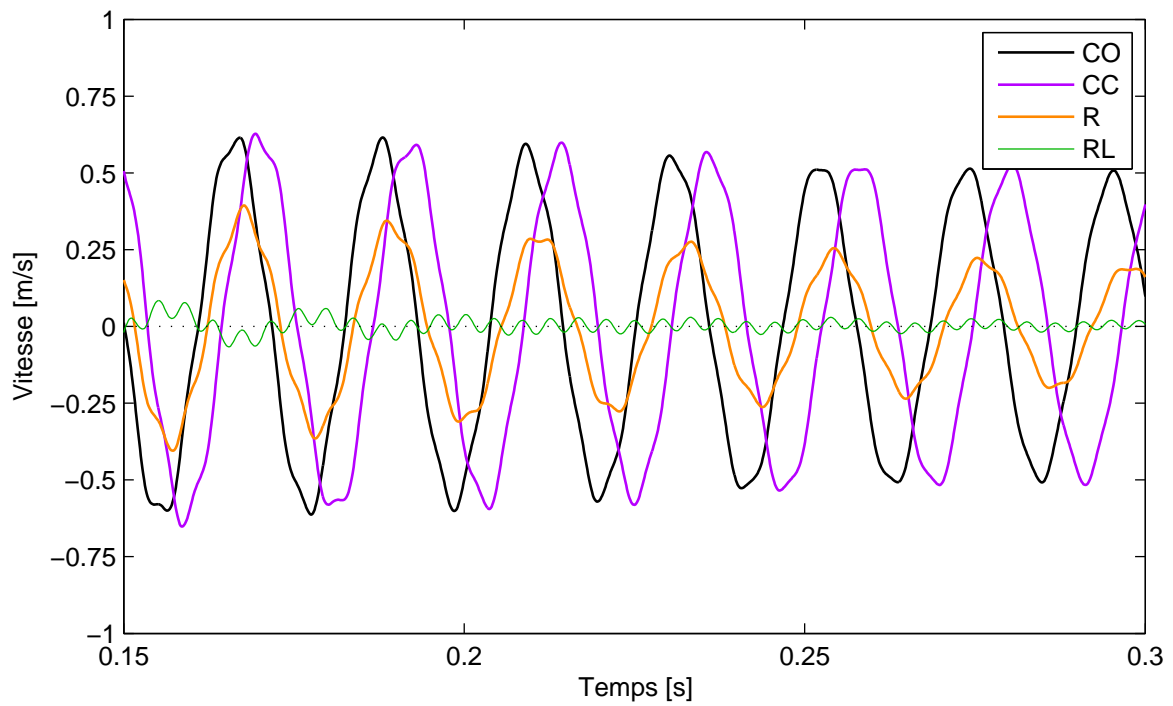


FIG. 6.21: Détail de la figure 6.19 entre 0.15 s et 0.3 s



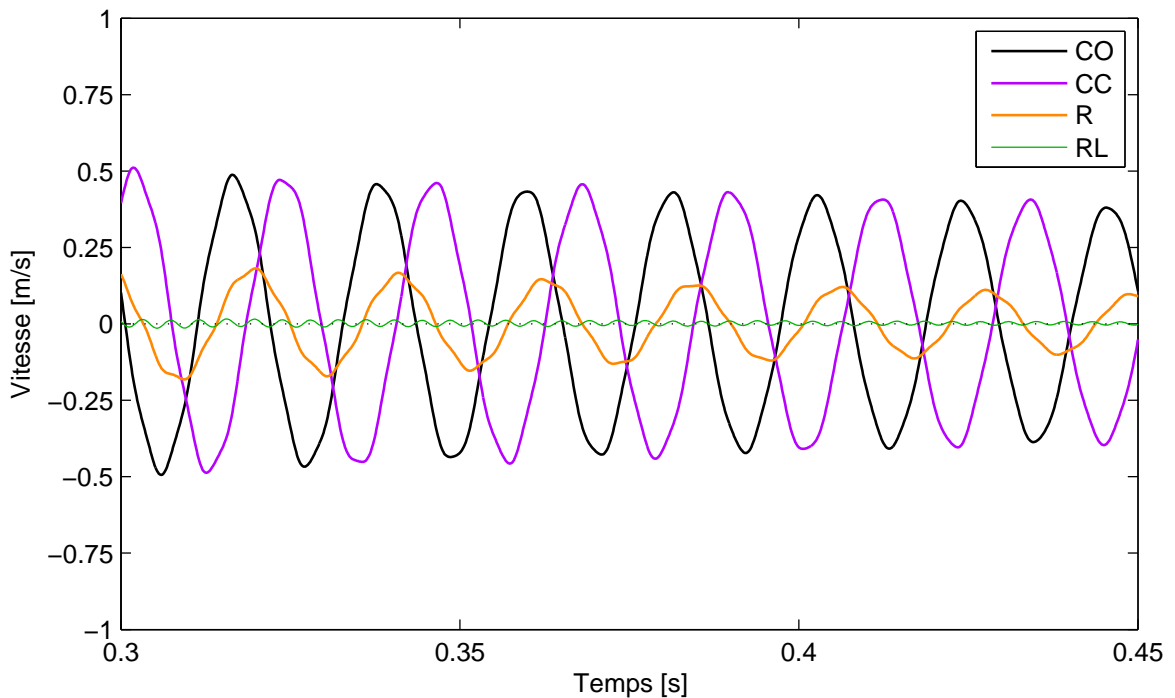


FIG. 6.22: Détail de la figure 6.19 entre 0.3 s et 0.45 s

- Les décroissances rapides, dues au shunt résistif d'une part et au shunt résonant d'autre part sont clairement visible sur la figure 6.19. Il faut respectivement 0.4 s et 1 s avec les shunts résonant et résistif pour diviser l'amplitude des oscillations par un facteur 100, alors que 3 s sont nécessaire en court-circuit.
- On observe facilement la différence de valeur entre la fréquence en court-circuit et celle en circuit ouvert, par un décalage des oscillations : la structure en circuit ouvert oscille plus rapidement qu'en court-circuit, effet de la raideur ajoutée en circuit ouvert.
- La sélectivité fréquentielle du shunt résonant, accordé sur le mode F1, est très visible car seule les oscillations à la fondamentale du signal sont amorties de façon significative. Après extinctions du mode F1, il subsiste encore des oscillations de plus haute fréquence, correspondant à la fréquence du mode F2.
- Le shunt résonant ayant été réglé en observant la réponse en régime forcé n'est pas tout à fait optimal pour le régime libre. La résistance choisie en observant la FRF (réponse forcée) est trop faible pour être optimale en régime libre (§5.4.2), ce qui fait apparaître un phénomène de battement du mode 1 visible au début de la réponse (figure 6.19).

## 6.5 Conclusion

Les résultats expérimentaux sont en bon accord avec la théorie, pour mémoire :

- Les fréquences propres et coefficients de couplage obtenus par modèle analytique ou éléments finis ;
- Le comportement du système avec shunt R ou RL ;
- La dépendance au coefficient de couplage de l'atténuation obtenue.

On a également établi que le shunt résonant donne de bonnes atténuations jusqu'à 5 % de couplage, valeur en dessous de laquelle il devient trop difficile à régler pour atteindre la performance souhaitée. L'idéal serait donc de trouver un dispositif capable d'atteindre les mêmes performances que le shunt résonant, tout en étant capable de s'adapter à la fréquence de la structure.

Dans les chapitres qui viennent, on s'intéresse aux shunts à commutations, qui sont basiquement des shunts que l'on ferme et ouvre de manière synchronisée avec le mouvement de la structure; ainsi une partie des outils développés et validés ici pourront être réutilisés.

On espère que les shunts à commutation permettront d'obtenir de bonnes performances sans nécessiter d'accord précis.

---

---

## Shunts à commutation

*On a pu prouver scientifiquement que le Breton était têtu. Les travaux des plus éminents chercheurs du CNRS ont démontré théoriquement que le Breton trempé est encore plus résistant aux fortes pressions que l'acier trempé. Pour passer de la théorie à la pratique, il suffirait de porter un Breton à ébullition. Mais jusqu'à ce jour aucun Breton contacté pour aider la science dans ce domaine n'a voulu prêter son concours. Donc le Breton est têtu. Par sa faute, la recherche française marque le pas.*

*Pierre Desproges*



## Shunts à commutation sur un système à un degré de liberté

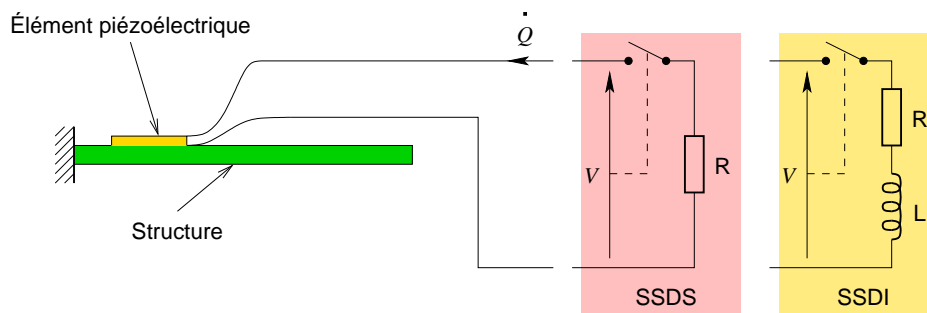


FIG. 7.1: Structure élastique couplée à des shunts commutés SSDS ou SSDI

Ce chapitre est le premier des trois chapitres de cette thèse consacrés à l'étude de la réduction des vibrations par un shunt à commutation, système dénommé "switch" dans la littérature anglo-saxonne. Notre étude est restreinte aux dispositifs dits "Synchronized Switch Damping on Short" (SSDS) et "Synchronized Switch Damping on Inductor" (SSDI). Ils consistent tous les deux à connecter les éléments piézoélectriques à un circuit résistif (technique SSDS) ou résonant (technique SSDI), muni d'un interrupteur que l'on ouvre ou ferme à certains instants choisis de l'évolution vibratoire du système. De cette manière, le shunt (c'est-à-dire le circuit électrique connecté aux éléments piézoélectriques) passe alternativement de situations en circuit ouvert à des situations en circuit fermé, et cela permet d'obtenir une réduction des vibrations.

Le présent chapitre propose en premier lieu une étude bibliographique de l'existant, qui permet de dégager les principales originalités de cette étude (§7.1). La suite du chapitre est consacré à un modèle d'un système mécanique couplé à des shunts SSDS et SSDI, dans le cas particulier où *le système mécanique est réduit à un seul mode de vibration*. Le modèle obtenu comporte alors un seul degré de liberté mécanique (§7.2). Comme dans le cas des shunts linéaires présentés au chapitre 5, ce modèle à 1 ddl permet d'obtenir des résultats analytiques intéressants et originaux sur le choix des composants du circuit électrique. Il permet aussi de quantifier la réduction des vibrations produite par le dispositif, en régime libre (§7.3) et en régime forcé (§7.4). Dans ce modèle 1 ddl, le choix des instants de commutation

(appelé stratégie de commutation) est le plus simple possible : on impose une commutation à chaque maximum du déplacement mécanique. Une dernière partie introduit des stratégies plus évoluées et permet d'en évaluer les performances (§7.5).

## 7.1 Shunts à commutation : concept et recherche existante

### 7.1.1 Principe de base

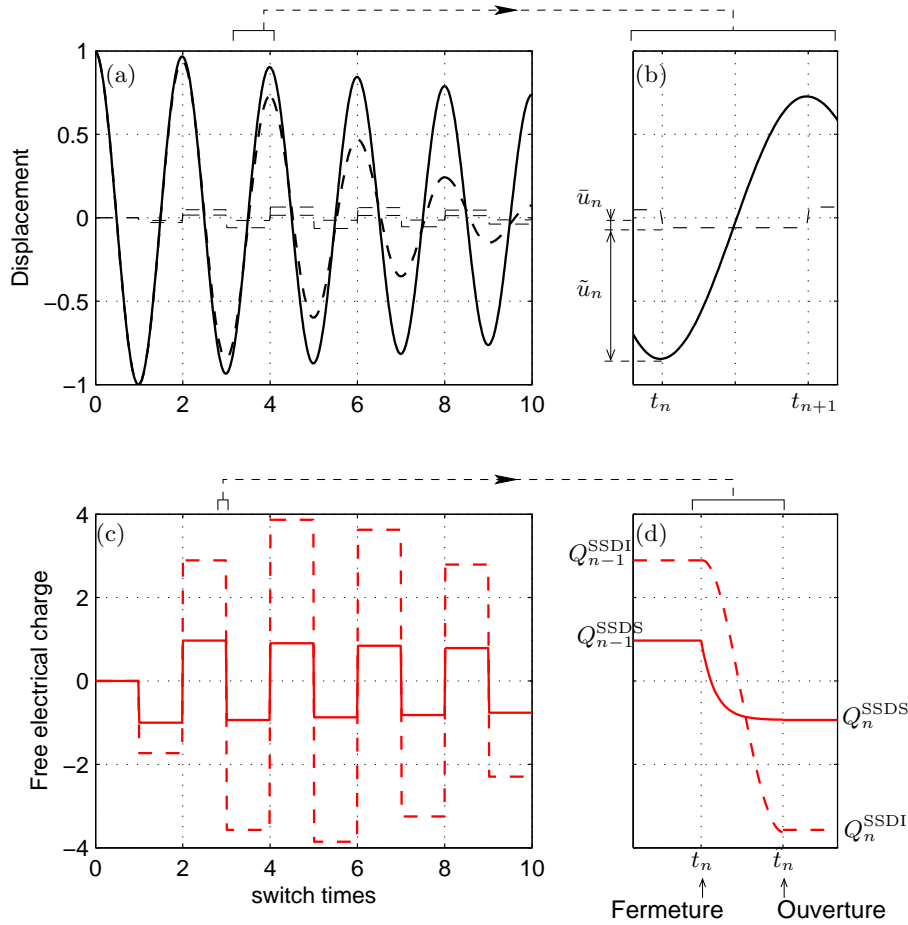


FIG. 7.2: Évolution (a) du déplacement  $u(t)$  et (c) de la charge électrique libre  $Q(t)$ , dans un cas SSDS (trait plein) et SSDI (trait interrompu), avec zoom (b) sur un pas d'évolution mécanique et (d) sur un pas d'évolution électrique.

Le principe de base est, comme le cas des shunts résonants, d'utiliser la charge électrique afin de réduire les vibrations mécaniques. Comme il a été vu au chapitre 5.4.5 (et constaté expérimentalement §6.4.2), les systèmes linéaires sont difficiles à accorder. L'idée d'un shunt à commutation synchronisée (*synchronized switch damping*, SSD) est d'utiliser un shunt dont la constante de temps est très courte, mais d'en bloquer l'évolution une partie du temps. L'objectif est d'accumuler une charge électrique et de se servir de son effet pour s'opposer au mouvement de la structure. On changera donc le signe de la charge lorsque la vitesse change de signe, afin de toujours s'opposer au mouvement.

On peut utiliser deux types de shunt en conjonction avec cette technique :

- La technique de commutation synchronisée sur court-circuit (*synchronized switch damping on short*, SSDS) fait juste appel à un shunt de faible résistance, ou court-circuit. On bloque le courant la majeure partie du temps, et on le laisse circuler seulement lorsque le déplacement de la structure est maximal, c’est à dire aux annulations de vitesse. Cela met la tension à zéro et fait circuler une charge, qui est conservée lorsque le circuit est ouvert.
- La technique de commutation synchronisée sur inductance (*synchronized switch damping on inductor*, SSDI) s’apparente à un shunt résonant ayant une faible constante de temps mais qu’on laisse osciller d’une demi période seulement à chaque maximum du déplacement. Par rapport à la technique SSDS, cela permet d’obtenir une inversion partielle de la tension lors de la phase de fermeture, et donc un mouvement de charge plus important ; la charge plus importante permet de freiner plus efficacement le mouvement.

La réponse libre d’un système avec un mode dominant est tracée figure 7.2 ; on constate que la charge électrique avec les deux méthodes s’apparente à un signal de type créneau, de signe opposé à la vitesse - et donc exerce un effort qui dissipe l’énergie. Dans le cas de la technique SSDI l’amplitude plus importante de la charge permet un amortissement plus rapide des vibrations.

### 7.1.2 Origine du concept et développement

#### State switching

Un des premiers concepts de shunt à commutation est proposé dans [18, 19], où l’auteur étudie le cas d’un shunt résistif qui peut être ouvert ou fermé à volonté. À la différence de ce qui est décrit ci-dessus, les phases de fermeture et d’ouverture sont de durée comparable (c’est pourquoi l’on parle de “state switching”). Ce type de système peut être étudié en l’assimilant à un système mécanique à raideur variable ; le principe se décrit alors comme suit pour le cas d’un seul degré de liberté (coordonnée  $u$ ) :

- Lorsque le système s’éloigne de la position d’équilibre, la raideur doit être élevée :  
 $u\dot{u} > 0 \Rightarrow$  circuit ouvert
- Lorsqu’il se rapproche de la position d’équilibre la raideur doit être réduite :  
 $u\dot{u} < 0 \Rightarrow$  circuit fermé.

L’optimisation d’un tel dispositif peut se faire pour un système multimode en prenant en compte la contrainte locale dans l’élément à raideur variable ; cela conduit à une variation rapide entre les états ouverts et fermés par exemple constatée dans [26]. Cette stratégie est efficace sur tous les modes mais pas optimale.

#### Synchronized switching

Dans [84, 83] les auteurs proposent de ne fermer le circuit qu’un très court instant et d’ajouter une inductance afin d’augmenter la charge électrique présente dans l’élément piézo-électrique. La technique est nommée “Synchronized Switch Damping” de manière générale, puis déclinée suivant le shunt utilisé :

- “Synchronized Switch Damping on Short”, SSDS, où le shunt est purement résistif ;
- “Synchronized Switch Damping on Inductance”, SSDI, avec un shunt inductif
- “Synchronized Switch Damping on Voltage source”, SSDV, où le shunt comprend un générateur de tension [50] (ce qui place alors le système dans la catégorie des contrôleurs

actifs nécessitant de l'énergie) et comporte un risque d'instabilité. Ce problème peut être mitigé par une variation lente de la tension pour suivre l'amplitude moyenne des vibrations, comme proposé dans [47, 44]

Dans les articles initiaux dédiés à cette technique, l'amortissement est estimé avec un modèle 1D très simplifié. À peu près simultanément différentes équipes travaillent sur des systèmes similaires, et se posent en particulier la question de l'efficacité multimode :

- L'équipe de William W. Clark [21, 22] compare le state switching et le synchronized switching et montre que le dernier est plus efficace ; cela fait partie du début du travail de thèse de Lawrence R. Corr [23] sur la réduction de vibration par éléments piézoélectriques commutés. Les auteurs s'intéressent particulièrement au contrôle multimode [24], en observant l'effet de la charge sur les modes visés. Ils développent alors une technique de synchronisation de la commutation basée sur plusieurs filtres modaux, chacun pouvant être pondéré afin d'obtenir les résultats visés. La technique requiert donc des filtres complexes et alimentés, mais l'efficacité est bonne. Ce type de travail est actuellement repris par une autre équipe américaine [20].

- Dans son travail de thèse [56, 57, 58], Kanjuro Makihara et ses collaborateurs utilisent une technique de type SSDI pour contrôler les modes de vibration d'un treillis métallique dont une des barres est un actionneur (stack) piézoélectrique. La spécificité de ces travaux est d'utiliser un contrôleur de type contrôle actif (LQR) afin de choisir les instants de commutation ; cela permet d'obtenir de très bons résultats, mais nécessite un contrôleur temps réel fonctionnant sur un ordinateur. L'influence du délai de déclenchement de la commutation, lié à la méthode de filtrage du signal et au taux d'échantillonnage du contrôleur est étudiée.

Un circuit actif est également utilisé pour simuler un système de commutation sans résistance interne (ce circuit compense les tensions de seuil des diodes et du transistor servant à la commutation), afin d'améliorer le stockage de la charge.

Enfin une technique simplifiée mais non optimale est proposée, qui permet un fonctionnement autonome du système. Le circuit fait d'ailleurs l'objet d'une demande de brevet d'un collaborateur de l'auteur [74].

- Dans son travail de thèse [71, 70, 68, 69], Dominik Niederberger étudie des techniques variées de shunt pour réduction de vibration, et en particulier une technique de type SSDI où la synchronisation de la commutation est obtenue en choisissant un élément piézoélectrique sélectivement couplé aux modes visés comme capteur. Cela permet d'obtenir un système autonome et visant un mode. Une réflexion sur l'efficacité multimode est également présentée mais ne fait pas l'objet d'une implémentation autonome. Enfin, une réflexion est menée sur la question du délai de déclenchement, et la proposition est faite d'un délai négatif (possible en connaissant la période du mode visé), c'est à dire une commutation "juste avant" le maximum de position. Cela peut améliorer les performances.

- L'équipe du Laboratoire de Génie Électrique et de Ferroélectricité (LGEF) à Lyon, dirigée par Daniel Guyomar, a affiné la technique SSDI [77, 78] en en proposant un circuit autonome efficace (et breveté [85]) ; cependant la méthode consistant en une détection de maximum local n'est pas optimale pour les cas multimodes. Les auteurs ont alors proposé un critère probabiliste (en pratique, une détection de maximum dépassant nettement le niveau moyen) qui donne de bons résultats [34] et peut être implémenté sur des circuits simples et autoalimentés [48]. Afin d'accélérer les simulations un modèle réduit de la partie mécanique et piézoélectrique du système est proposé [6]. Une étude de l'efficacité du système pour de la réduction de bruit transmis a aussi été proposée



d'abord avec un modèle 1D [35], puis d'un modèle de plaque rayonnante [36].

- Dans son travail de thèse en cours [15, 16, 17], Monica Ciminello étudie des formulations éléments finis de plaque adaptés à l'association de composites laminés avec des éléments piézoélectriques plus ou moins épais, en prenant en compte une déformation linéaire par morceaux dans l'épaisseur ; le couplage est optimisé avec un algorithme génétique. Ensuite, un circuit original, basé sur un tachymètre et des composants CMOS (nécessitant une alimentation de faible puissance) est utilisé pour réaliser un système SSDI. Un ou plusieurs de ces circuits sont utilisés sur une plaque munie de plusieurs éléments piézoélectriques ; de bons résultats sont obtenus pour plusieurs modes lorsque chaque élément est associé à un circuit.

### 7.1.3 Cas de la récupération d'énergie

Un domaine de recherche très actif et connexe à celui des éléments piézoélectriques est celui de la récupération d'énergie, où le but est d'alimenter un circuit électrique en prélevant l'énergie vibratoire. Un des effets annexes de ce prélèvement est l'amortissement des vibrations [53] ; néanmoins l'objectif final n'est pas exactement le même et l'optimisation de l'extraction d'énergie n'a pas forcément les mêmes résultats que l'optimisation de l'amortissement. Cependant, l'utilisation d'une technique SSDI, permettant d'accumuler une charge importante dans l'élément piézoélectrique, améliore l'efficacité de la récupération, comme proposé dans [51, 5]. Il faut remarquer que le concept même de commutation est peu présent en mécanique (où les grandeurs peuvent rarement varier instantanément) et qu'il s'agit d'un concept très utilisé en électronique de puissance ; d'ailleurs le brevet [85] couvre également l'utilisation d'un dispositif à commutation autonome pour tout système de transfert d'énergie, avec par exemple une utilisation possible dans un transformateur piézoélectrique.

### 7.1.4 Originalité de cette étude

L'étude de systèmes à switch se fera à travers quatre modèles de complexité croissante, permettant une modélisation de plus en plus pertinente.

- Un modèle analytique de la réponse libre d'un système switch avec une partie mécanique réduite à un seul ddl ;
- Un modèle semi-analytique de la réponse forcée du même système, avec un forçage sinusoïdal à la résonance ou hors-résonance ;
- Un modèle semi-analytique de la réponse libre d'un système switch avec une partie mécanique à N ddl ;
- Un modèle numérique de la réponse forcée du même système. Cet algorithme est fondé sur une intégration temporelle de la dynamique par un algorithme de Newmark, et permet un forçage quelconque (sinusoïdal, bruit aléatoire. . .).

Les deux modèles à 1 ddl sont décrits dans la suite du présent chapitre ; les deux modèles à N ddl le sont dans le chapitre suivant (chap. 8).

Les objectifs suivis lors de l'écriture de ces différents modèles ont été d'une part d'obtenir des algorithmes de simulation du comportement électromécanique du système les plus réalistes possible, et d'autre part de dégager des critères d'optimisation du dispositif, notamment pour le choix des composants électroniques et de la stratégie de commutation. Les deux modèles réduits à un seul ddl du présent chapitre répondent au second objectif : ils permettent de dégager des valeurs optimales des composants électriques ainsi qu'une évaluation

des performances des système en terme d'un seul paramètre : une réduction du maximum de vibration en régime forcé sinusoïdal et un taux d'amortissement équivalent en régime libre. En revanche, le premier objectif n'est pas atteint car la réduction à un seul degré de liberté mécanique ne permet pas de prendre en compte l'excitation multimodale qui résulte des transferts d'énergie hors de la bande fréquentielle d'excitation, liés aux non-linéarités des commutations. Les deux modèles à  $N$  ddl proposés au chapitre 8 permettent de palier à ce manque, tout en augmentant la complexité de l'optimisation du dispositif et de la caractérisation de son efficacité, éliminant du même coup des résultats simples des modèles à un ddl.

## 7.2 Modèle à un degré de liberté

### 7.2.1 Équations générales

Le système dont on se propose d'étudier l'évolution est obtenu à partir des équations (3.69), tronquées en ne gardant qu'un seul mode. Il faut ajouter au système les équations du circuit électrique, qui alterne entre circuit ouvert et circuit fermé. Dans ce dernier cas, le circuit électrique est alors un shunt résistif (cas du SSDS) ou un shunt résonant (cas du SSDI), qui sont modélisés de la même manière qu'au chapitre 5. Pour simplifier les écritures, la seule coordonnée modale conservée (la  $r$ -ième) est notée  $u(t) \equiv q_r(t)$ . Les équations du problème sont alors :

$$\text{Partie mécanique :} \quad \ddot{u} + 2\omega_r \xi_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q + \tilde{F}_r, \quad (7.1a)$$

$$\text{Tension électrique} \quad V = Q - k_r \omega_r u, \quad (7.1b)$$

$$\text{Circuit ouvert :} \quad \dot{Q} = 0, \quad (7.1c)$$

$$\text{SSDS fermé :} \quad \tau_e \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u, \quad (7.1d)$$

$$\text{SSDI fermé :} \quad \frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u. \quad (7.1e)$$

Dans les équations ci-dessus, le mode étudié (le  $r$ -ième) est caractérisé par :

- sa pulsation propre  $\omega_r$ ,
- son facteur d'amortissement  $\xi_r$ ,
- son coefficient de couplage  $k_r$ .
- sa pulsation propre en circuit ouvert :  $\hat{\omega}_r = \omega_r \sqrt{1 + k_r^2}$ .

L'équation (7.1b) donne l'expression de la tension électrique  $V$  aux bornes des éléments piézoélectriques en fonction de la charge  $Q$  et de  $u$ . Les équations (7.1a,b) sont valables en permanence. L'équation (7.1c) est valable pour les phases où le circuit est ouvert. Les équations (7.1d,e) caractérisent l'évolution électrique du système en circuit fermé : respectivement dans les cas SSDS et SSDI. Les paramètres sont les suivants :

- $\tau_e$  est la constante de temps du shunt SSDS, liée à la résistance  $R$  (eq. 5.5) ;
- $\xi_e$  et  $\omega_e$  sont le facteur d'amortissement et la pulsation propre, respectivement liées à la résistance  $R$  et l'inductance  $L$  du shunt SSDI (eq. 5.48).

### 7.2.2 Principe des simulations

Le principe des shunts à commutation est d'utiliser la charge  $Q$  pour "freiner" les oscillations mécaniques. Il s'agit pratiquement de faire en sorte que le terme  $k_r \omega_r Q$  dans l'équation (7.1a) soit toujours de signe opposé à la vitesse et le plus grand possible en valeur absolue.

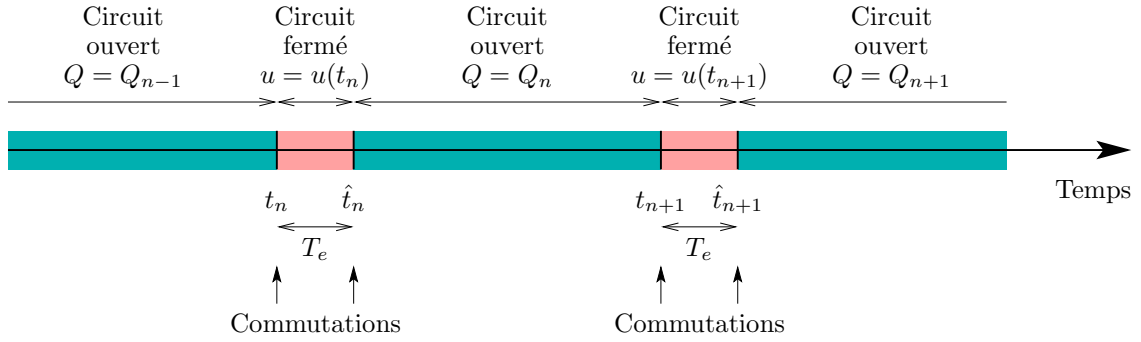


FIG. 7.3: Succession des commutations

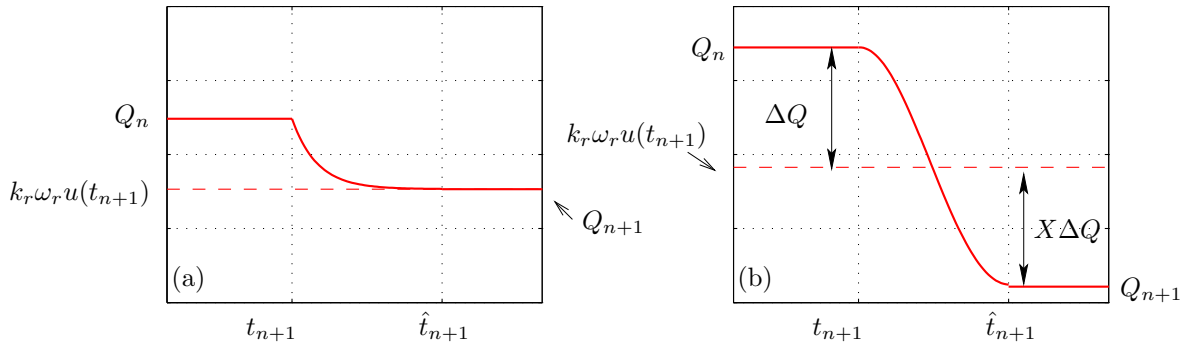


FIG. 7.4: Évolution de la charge électrique pendant une phase circuit fermé. (a) : technique SSDS; (b) : technique SSDI.

Pour réaliser cela, à chaque fois que la vitesse  $\dot{u}$  de la partie mécanique change de signe (c'est à dire lorsqu'elle s'annule,  $\dot{u} = 0$ ), on ferme le circuit électrique un bref instant. En faisant cela, on espère que l'évolution électrique du shunt va changer le signe de  $Q$  au moment où  $\dot{u}$  change de signe. En choisissant de plus la constante de temps du shunt très petite devant celle du mode mécanique, le changement de signe de  $Q$  est vu de manière quasiment instantanée par la partie mécanique, si bien que du point de vue de la structure le terme  $k_r \omega_r Q$  change de signe à chaque demi-oscillation de la partie mécanique. Ce comportement s'apparente à du frottement sec, à la différence que le terme  $k_r \omega_r Q$ , équivalent de la force de frottement, change d'intensité en valeur absolue d'une oscillation à l'autre.

Le choix de l'instant de fermeture, crucial pour le bon fonctionnement du dispositif, peut se faire de plusieurs manières, exposées au paragraphe 7.5. Ici, pour obtenir un modèle semi-analytique simple, on choisit de fermer le circuit *chaque fois* que la vitesse s'annule, soit  $\dot{u} = 0$ .

On représente l'évolution de la partie mécanique par une succession d'états en circuit ouvert, entre lesquels des phases d'évolution en circuit fermé, de durée négligeable devant la période mécanique, sont intercalées (voir figure 7.2). On note  $t_n$  l'instant de la  $n$ -ième fermeture du circuit et  $\hat{t}_n$  l'instant de la  $n$ -ième ouverture, qui suit donc  $t_n$ ; on note  $T_e$  la durée de fermeture du circuit, si bien que  $T_e = \hat{t}_n - t_n$  (Voir Fig. 7.3). Cette durée  $T_e$  vérifie les propriétés suivantes.

- Dans le cas d'un shunt résistif (technique SSDS),  $T_e$  est grande devant  $\tau_e$ , ce qui permet d'atteindre le régime établi de l'équation électrique (7.1d). Cela est représenté sur la

figure 7.4(a) où  $\tau_e$  est de l'ordre de grandeur du temps de décroissance de la charge, pour passer de  $Q_n$  à  $Q_{n+1}$ .

- Dans le cas d'un shunt résonant (technique SSDI),  $T_e$  est exactement la demi-période de l'oscillateur électrique de l'équation (7.1e) :  $T_e = \pi/\omega_e$  (Voir fig. 7.4(b)). C'est ce choix qui permet d'assurer une inversion de charge maximale.
- Dans les deux cas,  $T_e$  est négligeable devant la période mécanique, ce qui fait que la charge électrique varie rapidement entre  $t_n$  et  $\hat{t}_n$  tandis que la partie mécanique ne change pas (voir figure 7.2).

### 7.2.3 Hypothèses des modèles 1 ddl

On propose par la suite deux modèles à un ddl mécanique pour simuler l'évolution temporelle du système, en régime libre (§ 7.3) et en régime forcé par un effort sinusoïdal (§ 7.4). Ils consistent à raccorder, à chaque commutation, par continuité, les solutions analytiques des équations (7.1a-e) :

1. pour les phases de circuit ouvert (entre  $\hat{t}_n$  et  $t_{n+1}$  par exemple), on résout les équations (7.1a) avec  $Q = \text{cte} = Q_n$  (c'est l'équation (7.1c)). Cela permet de calculer  $u(t)$ ,  $\forall t \in [\hat{t}_n, t_{n+1}]$ .
2. pour les phases de circuit fermé, (entre  $t_{n+1}$  et  $\hat{t}_{n+1}$  par exemple), on résout les équations (7.1d) (cas SSDS) ou (7.1e) (cas SSDI) avec  $u = \text{cte} = u(t_{n+1})$  (c'est l'hypothèse  $T_e$  négligeable devant la période mécanique). Cela permet de calculer  $Q_{n+1}$  pour la phase suivante de circuit ouvert.
3. Pour chacun de ces deux modèles, on suppose que  $T_e$  est *infinitement court* par rapport à l'évolution mécanique ( $T_e = \hat{t}_n - t_n \ll \pi/\hat{\omega}_r$  (fig. 7.2(d))). De ce fait, on supposera que les grandeurs mécaniques ne changent pas pendant la phase de circuit fermé, si bien que :  $\dot{u}(\hat{t}_n) = \dot{u}(t_n)$  et  $u(\hat{t}_n) = u(t_n)$ .

## 7.3 Réponse libre

### 7.3.1 Modèle SSDS sans amortissement

**Phase de circuit ouvert** Entre  $\hat{t}_n$  et  $t_{n+1}$ ,  $u(t)$  est solution de l'équation (7.1b), avec  $F_r = 0$  (régime libre) et  $\xi_r = 0$  (pas d'amortissement mécanique) :

$$\ddot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q_n, \quad (7.2)$$

qui est une branche de sinusoïde. Comme les commutations se produisent à chaque annulation de vitesse, celle-ci est nulle à toute les fins de phase de circuit ouvert ( $\dot{u}(t_n) = 0$ ). Avec l'hypothèse 3 ci dessus, on montre que la vitesse est également nulle au début des phases de circuit ouvert. Leur durée est alors exactement une demi-période mécanique :

$$t_{n+1} = \hat{t}_n + \pi/\hat{\omega}_r, \quad (7.3)$$

et la solution de (7.2) est la demi période de cosinus (voir fig. 7.2(b)) :

$$u(t)|_{\hat{t}_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + \tilde{u}_n \cos(\hat{\omega}_r(t - t_n)), \quad (7.4)$$

avec  $\bar{u}_n$  la partie constante

$$\bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n, \quad (7.5)$$

et  $\tilde{u}_n$  l'amplitude de la partie oscillante, qui est calculée par continuité avec la commutation précédente. Ce point est expliqué ci-après.

**Phase de circuit fermé** Entre  $t_{n+1}$  et  $\hat{t}_{n+1}$ , dans le cas SSDS, la partie électrique est solution de l'équation (7.1d) avec le déplacement  $u$  constant et égal à sa valeur au début de la phase de circuit fermé  $u = u(t_{n+1})$  :

$$\tau_e \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u(t_{n+1}). \quad (7.6)$$

La solution est une exponentielle décroissante (voir Fig. 7.4(a)). Comme on suppose que le temps de circuit fermé  $T_e$  est grand devant la constante de temps électrique  $\tau_e$ , la valeur de  $Q$  à la fin de la phase de circuit fermé est sa valeur asymptotique, soit :

$$Q(\hat{t}_{n+1}) = Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}). \quad (7.7)$$

En prenant en compte les équations (7.3) et (7.4), on obtient le déplacement à la fin de la phase de circuit ouvert précédente :  $u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - \tilde{u}_n$ . On a alors :

$$Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n). \quad (7.8)$$

**Raccordement de  $u(t)$**  En insérant l'équation (7.8) dans (7.5), on obtient la partie constante  $\bar{u}_{n+1}$  pour la  $n + 1$ -ième phase de circuit ouvert en fonction des parties constantes  $\bar{u}_n$  et  $\tilde{u}_n$  de la phase précédente :

$$\bar{u}_{n+1} = \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n). \quad (7.9)$$

Comme le déplacement est considéré constant pendant les phases de circuit fermé, on a :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = u(t_{n+1}). \quad (7.10)$$

Avec l'équation (7.5) écrite en fin de la  $n$ -ième phase de circuit ouvert (à l'instant  $t_{n+1}$ ) et au début de la suivante (à l'instant  $\hat{t}_{n+1}$ ) et la condition de continuité (7.10), on obtient :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} = u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - \tilde{u}_n. \quad (7.11)$$

**Instants de commutation** Avec l'hypothèse 3, on choisit de négliger la durée  $T_e$  des phase de circuit fermé par rapport aux phase de circuit ouvert, si bien que les instants de commutations arrivent à chaque demi-période mécanique, soit :

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega_r}. \quad (7.12)$$

Cela est représenté sur les figures 7.2(a,c).

### 7.3.2 Modèle SSDI sans amortissement

Dans le cas de la technique SSDI, le modèle des phases en circuit ouvert est identique à celui de la technique SSDS. On obtient alors de la même manière que précédemment les équations (7.5) et (7.11). En revanche, les phases de circuit fermé dépendent du circuit résonant et donc de l'équation (7.1e). La valeur de  $Q_n$  change donc par rapport au cas SSDS, puisque la partie électrique se comporte comme un oscillateur harmonique amorti, pendant que le déplacement mécanique  $u(t)$  est supposé constant et égal à sa valeur lors de la fermeture du switch. Lors de la  $n$ -ième phase de circuit fermé (entre  $t_n$  et  $\hat{t}_n$ ) :

$$\frac{1}{\omega_e^2} \ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e} \dot{Q} + Q = k_r \omega_r u(t_n), \quad (7.13)$$

La valeur initiale de la charge lors d'une phase de circuit fermé (entre  $t_n$  et  $\hat{t}_n$ ) est  $Q(t_n) = Q_{n-1}$ . Elle évolue ensuite sous la forme d'une sinusoïde amortie (voir figure (7.4(b))) :

$$Q(t)|_{t_n < t < \hat{t}_n} = \hat{Q}_n + \tilde{Q}_n e^{-\xi_e \omega_e (t-t_n)} \left( \cos [\tilde{\omega}_e (t-t_n)] + \frac{\xi_e \omega_e}{\tilde{\omega}_e} \sin [\tilde{\omega}_e (t-t_n)] \right), \quad (7.14)$$

avec

$$\hat{Q}_n = k_r \omega_r u(t_n), \quad \tilde{Q}_n = Q_{n-1} - \hat{Q}_n, \quad (7.15)$$

et  $\tilde{\omega}_e = \omega_e \sqrt{1 - \xi_e^2}$  la pseudo-pulsation de l'oscillateur. Le circuit reste fermé pendant la moitié de la période de cet oscillateur, pour obtenir une charge finale maximale en valeur absolue. L'instant d'ouverture du switch est alors  $\hat{t}_n = t_n + \pi/\tilde{\omega}_e$  et avec l'équation (7.14),  $Q_n$  est :

$$\begin{aligned} Q_n &= Q(\hat{t}_n) \\ &= k_r \omega_r u(t_n) - X [Q_{n-1} - k_r \omega_r u(t_n)], \end{aligned} \quad (7.16)$$

avec  $X$  le facteur de dépassement, dont la définition est illustrée figure 7.4(b), défini par :

$$X = \exp \frac{-\pi \xi_e}{\sqrt{1 - \xi_e^2}}, \quad (7.17)$$

qui ne dépend que de  $\xi_e$ . En prenant en compte les équations (7.5), (7.11) et (7.16) on obtient :

$$\bar{u}_{n+1} = (1 - X) \frac{k_r^2}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) - X \bar{u}_n \quad (7.18)$$

### 7.3.3 Taux de décroissance

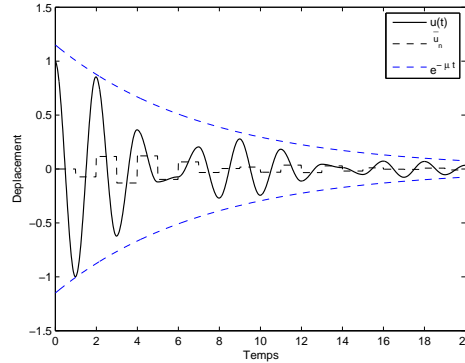


FIG. 7.5: Évolution du déplacement dans un cas SSDI, borné par une exponentielle décroissante

En résumé des paragraphes 7.3.1 et 7.3.2, on a :

$$\begin{aligned} \hat{t}_n < t < t_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit ouvert} & \begin{cases} \dot{Q} = 0 \Rightarrow Q(t) = Q_n \\ u(t) = \bar{u}_n + \tilde{u}_n \cos(\hat{\omega}_r (t-t_n)) \\ \bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n \end{cases} \\ t_{n+1} < t < \hat{t}_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit fermé SSDS} & \begin{cases} \dot{u} = 0 \Rightarrow \bar{u}_n - \tilde{u}_n = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} \\ Q \text{ exponentielle décroissante} \\ Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) \end{cases} \\ t_{n+1} < t < \hat{t}_{n+1} &\Rightarrow \text{Circuit fermé SSDI} & \begin{cases} \dot{u} = 0 \Rightarrow \bar{u}_n - \tilde{u}_n = \bar{u}_{n+1} + \tilde{u}_{n+1} \\ Q \text{ oscillation amortie} \\ Q_{n+1} = k_r \omega_r (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) (1 + X) - X Q_n \end{cases} \end{aligned}$$

Les valeurs de  $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  peuvent être obtenues en écrivant une relation de récurrence à partir des équations (7.11)-(7.9) pour le cas SSDS et les équations (7.11)-(7.18) dans le cas SSDI. Ainsi, pour le cas SSDS on a :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) = \frac{k_r^2}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n), \\ \tilde{u}_{n+1} &= \bar{u}_n - \tilde{u}_n - \bar{u}_{n+1} = \frac{1}{1 + k_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n)\end{aligned}$$

tandis que pour le cas SSDI on a :

$$\begin{aligned}\bar{u}_{n+1} &= \frac{k_r^2 \omega_r^2}{\hat{\omega}_r^2} (\bar{u}_n - \tilde{u}_n) (1 + X) - X \bar{u}_n \frac{\hat{\omega}_r^2}{k_r \omega_r} = \frac{1 + X}{1 + k_r^2} \bar{u}_n - \frac{1 - k_r^2 X}{1 + k_r^2} \tilde{u}_n, \\ \tilde{u}_{n+1} &= \bar{u}_n - \tilde{u}_n - \bar{u}_{n+1} = -\frac{(1 + X) k_r^2}{1 + k_r^2} \bar{u}_n + \frac{k_r^2 - X}{1 + k_r^2} \tilde{u}_n\end{aligned}$$

On peut alors écrire les relations précédentes sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A} \mathbf{u}_{n-1} = \mathbf{A}^n \mathbf{u}_0, \quad (7.19)$$

avec  $\mathbf{u}_n = (\tilde{u}_n \ \bar{u}_n)^\top$  et la matrice d'amplification  $\mathbf{A}$  donnée par :

$$\mathbf{A}^{\text{SSDS}} = \frac{1}{1 + k_r^2} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -k_r^2 & k_r^2 \end{pmatrix}, \quad (7.20)$$

$$\mathbf{A}^{\text{SSDI}} = \frac{1}{1 + k_r^2} \begin{pmatrix} X k_r^2 - 1 & 1 + X \\ -k_r^2 (1 + X) & k_r^2 - X \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Si  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont les valeurs propres de  $\mathbf{A}$ , alors :

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \mathbf{P}, \quad (7.22)$$

avec  $\mathbf{P}$  la matrice de passage. Par suite, on a :

$$\mathbf{A}^n = \mathbf{P}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix} \mathbf{P}. \quad (7.23)$$

ce qui permet de réécrire l'équation (7.19) sous la forme :

$$\begin{cases} \bar{u}_n = \bar{a}_1 \lambda_1^n + \bar{a}_2 \lambda_2^n \\ \tilde{u}_n = \tilde{a}_1 \lambda_1^n + \tilde{a}_2 \lambda_2^n \end{cases}, \quad (7.24)$$

avec  $\bar{a}_1, \tilde{a}_1, \bar{a}_2, \tilde{a}_2$  dépendant des conditions initiales et de  $\mathbf{P}$ . On montre alors que  $(\bar{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  s'écrivent comme la somme de deux suites géométriques.

En ordonnant les valeurs pour avoir  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$ , on peut montrer d'après les équations (7.4) et (7.24) que :

$$\begin{aligned}|u(t_n)| &\leq |\bar{u}_n| + |\tilde{u}_n| \\ &\leq \left( |\bar{a}_1| + |\tilde{a}_1| + (|\bar{a}_2| + |\tilde{a}_2|) \frac{|\lambda_2|^n}{|\lambda_1|^n} \right) |\lambda_1|^n \\ &\leq a |\lambda_1|^n.\end{aligned}$$

avec  $a = |\bar{a}_1| + |\tilde{a}_1| + |\bar{a}_2| + |\tilde{a}_2|$ . Les inégalités ci-dessus montrent que  $u(t)$  est bornée par une enveloppe exponentielle décroissante (voir par exemple la figure 7.5) de taux de décroissance  $\mu$ , défini par :

$$ae^{-\mu t_n} = a|\lambda_1|^n, \quad (7.25)$$

soit encore

$$\mu = -\frac{\hat{\omega}_r}{\pi} \ln(|\lambda_1|). \quad (7.26)$$

On obtient alors que  $\mu$  est positif quand  $|\lambda_1| < 1$  et décroît quand  $|\lambda_1|$  décroît. Par conséquent, *il faut minimiser le module de la valeur propre de  $\mathbf{A}$  de plus grand module afin de maximiser le taux de décroissance de la réponse de la structure et ainsi augmenter l'amortissement apporté.* Comme l'évolution de  $u(t)$  est quasiment une oscillation de fréquence  $\hat{\omega}_r$ , il est pratique de définir le coefficient d'amortissement  $\xi$  de la réponse libre de la structure avec SSD par :

$$\mu = \xi^{\text{SSD}} \hat{\omega}_r \implies \xi^{\text{SSD}} = -\frac{\ln(|\lambda_1|)}{\pi}. \quad (7.27)$$

### 7.3.4 Optimisation de la technique SSDS

Dans le cas SSDS, avec l'équation (7.20) on obtient

$$|\lambda_1| = \frac{1 - k_r^2}{1 + k_r^2}, \quad \lambda_2 = 0.$$

Le coefficient d'amortissement équivalent est alors (Eq. (7.27)) :

$$\xi^{\text{SSDS}} = -\frac{1}{\pi} \ln\left(\frac{1 - k_r^2}{1 + k_r^2}\right). \quad (7.28)$$

Le coefficient d'amortissement équivalent ne dépend pas de  $\tau_e$  et est donc indépendant de la résistance. Il faut juste s'assurer que celle-ci est assez petite afin que les hypothèses soient vérifiées : une évolution de la partie électrique bien plus rapide que la partie mécanique ( $T_e \ll \pi/\hat{\omega}_r$ ), et une durée de fermeture suffisante pour atteindre la valeur asymptotique de la charge. Le coefficient d'amortissement équivalent  $\xi^{\text{SSD}}$  est tracé figure (7.6) ; on constate que pour le maximiser il faut augmenter  $k_r$ , en choisissant et en plaçant des éléments piézoélectriques adaptés. C'est un résultat similaire au cas des shunts R et RL (§5.3.4 et 5.4.4).

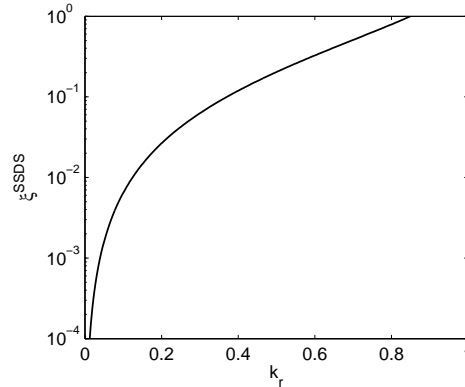


FIG. 7.6: Coefficient d'amortissement équivalent apporté par la technique SSDS



### 7.3.5 Optimisation de la technique SSDI

Dans le cas SSDI,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dépendent de  $\xi_e$ , coefficient d'amortissement du circuit électrique, via  $X$  facteur de dépassement. La figure (7.7, à g.) montre les modules des valeurs propres  $|\lambda_1|$  et  $|\lambda_2|$  de  $\mathbf{A}^{\text{SSDI}}$  en fonction de  $\xi_e$  pour un coefficient de couplage donné. Pour de faibles valeurs de  $\xi_e$  ces valeurs propres sont complexes conjuguées et pour de grandes valeurs de  $\xi_e$  des réels distincts. On souhaite minimiser le module de la valeur propre de plus grand module; cela est obtenu pour la valeur d'amortissement  $\xi_e$  optimale, notée  $\xi_e^{\text{opt}}$ , qui permet d'avoir des valeurs propres égales :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{1 - |k_r|}{1 + |k_r|}, \quad (7.29)$$

Ce qui donne la valeur optimale de  $X$  et  $\xi_e$  :

$$X^{\text{opt}} = \frac{(1 - |k_r|)^2}{(1 + |k_r|)^2}, \quad \xi_e^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\ln(X^{\text{opt}})^2}{\ln(X^{\text{opt}})^2 + \pi^2}}, \quad (7.30)$$

L'amortissement équivalent de la structure avec shunt SSDI est alors

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDI}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{1 - |k_r|}{1 + |k_r|} \right). \quad (7.31)$$

La figure (7.7, à dr.) montre l'évolution de  $\xi_e^{\text{opt}}$  en fonction de  $k_r$ , et la figure (7.8) montre l'amortissement ajouté par le système lorsque cette valeur est choisie.

La figure (7.9) montre l'évolution temporelle de  $u(t)$  pour trois valeurs de  $\xi_e$  et confirme le résultat : pour  $\xi_e < \xi_e^{\text{opt}}$  un phénomène de battement lié aux valeurs propres complexes conjuguées apparaît ; pour  $\xi_e > \xi_e^{\text{opt}}$  la décroissance (liée à la plus grande valeur propre qui augmente de module) est plus lente ; la valeur optimale de  $\xi_e$  permet d'avoir une décroissance rapide.

Afin d'optimiser le système il convient donc tout d'abord de maximiser  $k_r$  en choisissant les éléments piézoélectriques et leur position, car l'amortissement équivalent croît avec  $k_r$  ; ensuite il faut choisir la valeur appropriée de  $\xi_e$ . On peut remarquer qu'avec ce modèle,  $\omega_e$ , lié à l'inductance  $L$ , n'a aucune influence sur le résultat. La seule contrainte est de choisir  $L$  faible pour avoir  $\omega_e$  grand et que l'évolution de la partie électrique soit bien plus rapide que l'évolution mécanique ( $T_e \ll \pi/\hat{\omega}_r$ ).

Le résultat d'optimisation de la résistance est nouveau. Dans sa thèse [56], Makihara compare des amplitudes RMS de réponse libre d'une structure complète sur un intervalle de temps précis et déduit une valeur optimale de résistance ; néanmoins cette valeur dépend de tous les paramètres de son modèle et peut être de l'intervalle de temps choisi. Le fait d'avoir ici adimensionné et simplifié le problème permet d'obtenir un résultat bien plus général. De plus, la dépendance au coefficient de couplage (qui peut être du même ordre de grandeur sur plusieurs modes) laisse présager d'une optimisation facile, contrairement à une dépendance à la pulsation mécanique (qui aurait rendu l'optimisation forcément associée à un mode). À la connaissance de l'auteur il n'existe pas d'autre étude systématique de l'effet de l'amortissement, bien que la plupart des équipes étudiant la question aient testé diverses valeurs.

### 7.3.6 Effet de l'amortissement mécanique

Les résultats précédents ont été obtenus en négligeant l'amortissement mécanique  $\xi_r$ . En le prenant en compte le déplacement vérifie :

$$\ddot{u} + 2\xi_r\omega_r\dot{u} + \hat{\omega}_r^2u - k_r\omega_rQ_n = 0, \quad (7.32)$$

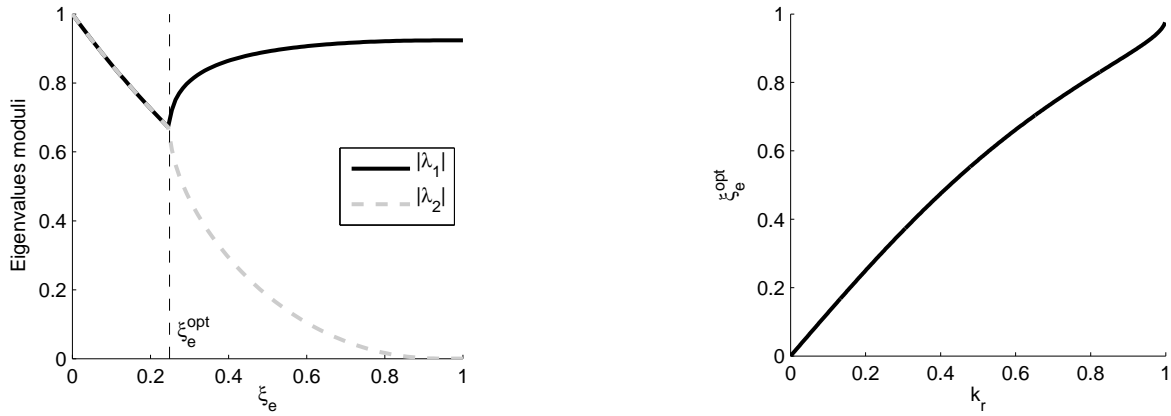


FIG. 7.7: (à g.) Module des valeurs propres de  $\mathbf{A}^{SSDI}$  pour  $k_r = 0.2$ . (à dr.) Valeur optimale de l'amortissement électrique  $\xi_e^{opt}$  en fonction de  $k_r$

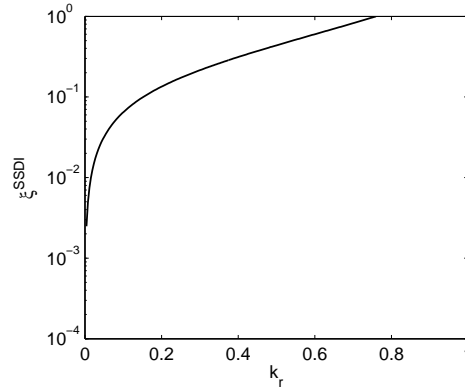


FIG. 7.8: Coefficient d'amortissement équivalent apporté par la technique SSDI lorsque l'amortissement électrique optimal est choisi

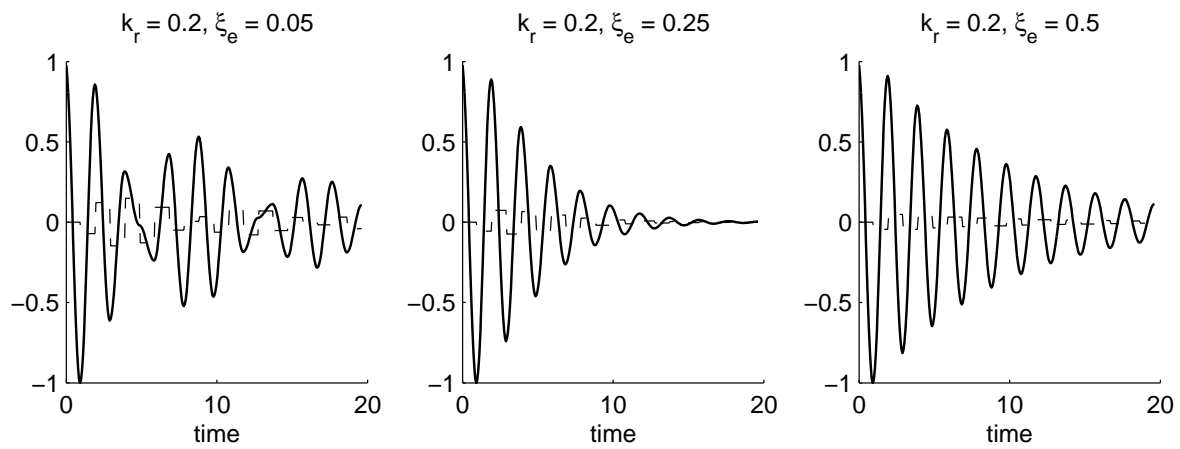


FIG. 7.9: Évolution temporelle de  $u(t)$  (trait plein) et de  $u_n$  (pointillés) avec SSDI, pour trois valeurs de  $\xi_e$ . (à g.) :  $\xi_e$  bas ; (centre) :  $\xi_e^{opt}$  ; (à dr.)  $\xi_e$  élevé.

dont la solution est

$$u(t)|_{t_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + \tilde{u}_n e^{-\xi_r \tilde{\omega}_r t} (\cos(\tilde{\omega}_r(t - t_n)) + \frac{\xi_r \hat{\omega}_r}{\tilde{\omega}_r} \sin(\tilde{\omega}_r(t - t_n))), \quad (7.33)$$

avec  $\tilde{\omega}_r = \hat{\omega}_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$ . La valeur de  $u$  lorsqu'elle atteint son premier extremum (annulation de vitesse) est donc caractéristique du premier dépassement :

$$u(t_{n+1}) = \bar{u}_n - X_r \tilde{u}_n, \quad (7.34)$$

où  $X_r = \exp[-\pi \xi_r / ((1 - \xi_r^2) \sqrt{1 + k_r^2})]$  est le facteur de dépassement de l'oscillateur mécanique amorti. Il faut remarquer que la période des commutations est légèrement modifiée et dépend de la pseudo-pulsation  $\tilde{\omega}_r$ . La relation (7.19) peut être réécrite pour prendre en compte l'amortissement :

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u}_{n-1} = (\mathbf{A} \mathbf{B})^n \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} X_r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

Où la matrice  $\mathbf{B}$  représente les pertes mécaniques. Avec la même démarche qu'aux parties 7.3.4 et 7.3.5, nous pouvons obtenir les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de la matrice  $\mathbf{A} \mathbf{B}$  et obtenir les résultats suivants :

- Dans le cas SSDS on obtient  $|\lambda_1| = (X_r - k_r^2) / (1 + k_r^2)$  et  $\lambda_2 = 0$ . Le taux d'amortissement équivalent de la réponse s'écrit alors :

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDS}} = -\frac{1}{\pi} \ln \left( \frac{X_r - k_r^2}{1 + k_r^2} \right). \quad (7.36)$$

- Dans le cas SSDI, la valeur optimale de  $\xi_e$  dépend de  $k_r$  et  $\xi_r$  :

$$X^{\text{opt}} = \frac{\sqrt{X_r k_r^4 + k_r^2 + X_r^2 k_r^2 + X_r + 4k_r^2 X_r - 2(X_r(1 + X_r))^2 (1 + k_r^2)^2 k_r^2}}{X_r^2 k_r^4 - 2k_r^2 X_r + 1},$$

$$\xi_e^{\text{opt}} = \sqrt{\frac{\log(X^{\text{opt}})^2}{\log(X^{\text{opt}})^2 + \pi^2}}. \quad (7.37)$$

Pour simplifier on peut remarquer en observant les valeurs pour de faibles amortissements mécaniques - ce qui est souvent le cas - que la valeur de  $\xi_e^{\text{opt}}$  est toujours très proche de la valeur optimale sans amortissement donnée par l'équation (7.30) ajoutée à l'amortissement mécanique (éq. 7.38) , ce qui est représenté sur la figure (7.10) :

$$\xi_e^{\text{opt}}|_{\xi_r \neq 0} \simeq \xi_e^{\text{opt}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r. \quad (7.38)$$

- Dans les deux cas (SSDS et SSDI) on peut définir l'amortissement ajouté  $\xi_{\text{add}} = \xi_{\text{tot}} - \xi_r$ . La figure (7.11) montre que  $\xi_{\text{add}}$  est pratiquement indépendant de  $\xi_r$ . Cela signifie qu'en première approximation *l'amortissement total est la somme de l'amortissement mécanique  $\xi_r$  et de l'amortissement ajouté par le switch, calculé d'après les expressions (7.28) et (7.31).*

$$\xi_{\text{tot}}^{\text{SSDS}} \simeq \xi^{\text{SSDS}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r, \quad \xi_{\text{tot}}^{\text{SSDI}} \simeq \xi^{\text{SSDI}}|_{\xi_r = 0} + \xi_r. \quad (7.39)$$

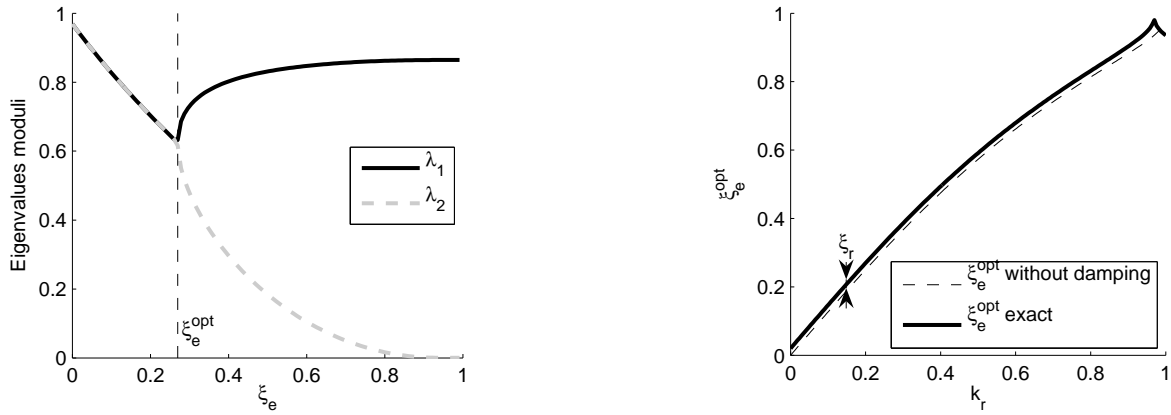


FIG. 7.10: (à g.) Module des valeurs propres de  $\mathbf{A}^{\text{SSDI}}\mathbf{B}$  pour  $k_r = 0.2$  et  $\xi_r = 2\%$ ; (à dr.) amortissement électrique optimal  $\xi_e^{\text{opt}}$  en fonction de  $k_r$  avec amortissement mécanique

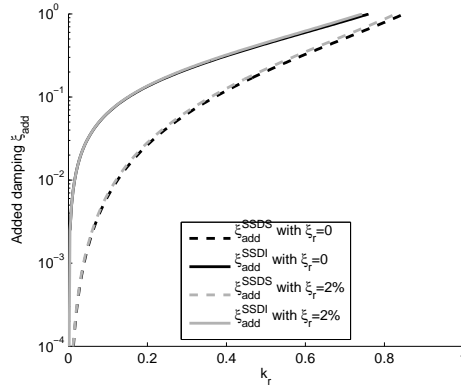


FIG. 7.11: Amortissement ajouté  $k_r$  avec et sans amortissement mécanique.

## 7.4 Réponse forcée avec commutation synchronisée

### 7.4.1 Réponse temporelle du système

On étudie une structure avec SSDS ou SSDI en oscillations forcées autour du  $r$ -ième mode ; on reprend donc le système (7.1) en prenant maintenant en compte le forçage modal. Celui-ci est harmonique, et s'écrit  $\tilde{F}_r(t) = F_r \cos \Omega t$ . On utilise la même démarche que pour le modèle en réponse libre (§7.3.1). Les phases en circuit fermé sont modélisées de manière identique. Pendant la phase de circuit ouvert comprise entre  $\hat{t}_n$  et  $t_{n+1}$ , le déplacement vérifie :

$$\ddot{u} + 2\xi_r \hat{\omega}_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u = k_r \omega_r Q_n + F_r \cos(\Omega t), \quad (7.40)$$

avec  $Q_n$  la charge finale de la phase de circuit fermé précédente. On a alors :

$$u(t)_{\hat{t}_n < t < t_{n+1}} = \bar{u}_n + u_T(t) + u_F(t), \quad (7.41)$$

où :

- $\bar{u}_n$  est la réponse statique du système avec une charge appliquée  $Q_n$ , donc un décalage qui s'écrit comme à l'équation (7.2) :

$$\bar{u}_n = \frac{k_r \omega_r}{\hat{\omega}_r^2} Q_n.$$

- $u_F(t)$  est la réponse (harmonique) forcée du système, qui s'écrit indépendamment de l'intervalle de temps :

$$u_F(t) = \frac{\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2}{d(\Omega)} \cos \Omega t - \frac{2\xi_r \omega_r \Omega}{d(\Omega)} \sin \Omega t, \quad (7.42)$$

avec  $d(\Omega) = (\hat{\omega}_r^2 - \Omega^2)^2 + 4\xi_r^2 \omega_r^2 \Omega^2$ ;  $u_F(t) + \bar{u}_n$  constitue une solution particulière de l'équation (7.40) ;

- $u_T(t)$  est la solution générale de l'équation homogène associée à (7.40) sur l'intervalle de temps de  $\hat{t}_n$  à  $t_{n+1}$ .  $u_T(t)$  s'écrit :

$$u_T(t) = e^{-\xi_r \hat{\omega}_r \hat{t}} [\tilde{u}_n \cos(\tilde{\omega}_r \hat{t}) + \tilde{u}'_n \sin(\tilde{\omega}_r \hat{t})], \quad (7.43)$$

avec  $\tilde{u}_n$  et  $\tilde{u}'_n$  deux coefficients dépendant des conditions initiales sur cet intervalle de temps, donc des valeurs de  $u$  et  $\dot{u}$  à  $\hat{t}_n$ .

Les valeurs de  $(t_n, Q_n, \bar{u}_n, \tilde{u}_n, \tilde{u}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  permettent de décrire l'évolution du système. On utilise les mêmes hypothèses que précédemment, c'est à dire une phase circuit fermé très courte devant l'évolution mécanique ; alors la transition entre deux phases d'évolution en circuit ouvert est décrite de la manière suivante, en reprenant les équations (7.7), (7.16) et la continuité du déplacement :

$$u(\hat{t}_{n+1}) = u(t_{n+1}) \quad (7.44)$$

$$\dot{u}(\hat{t}_{n+1}) = \dot{u}(t_{n+1}) = 0 \quad (7.45)$$

$$\text{switch SSDS } Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}) \quad (7.46)$$

$$\text{switch SSDI } Q_{n+1} = k_r \omega_r u(t_{n+1}) - X [Q_n - k_r \omega_r u(t_{n+1})]. \quad (7.47)$$

La stratégie de commutation est conservée, c'est à dire que le switch se ferme à l'annulation de la vitesse (maximum de position). Alors que dans le cas du régime libre (§7.3) les instants de commutation sont connus analytiquement, ici, on ne connaît pas d'expression analytique de l'annulation de la vitesse (le déplacement  $u(t)$  étant donné par (7.41)). *On cherche donc numériquement l'annulation de  $\dot{u}(t)$  pour obtenir l'instant  $t_n$  de fin de chaque phase de circuit ouvert.*

Comme la durée des phases de circuit ouvert n'est a priori pas constante, même si le forçage est sinusoïdal, la réponse du système n'est pas périodique. Il est donc nécessaire de simuler son évolution temporelle complète pour en déduire son comportement. On n'a donc pas accès à des valeurs analytiques de ses caractéristiques. D'autres travaux de la littérature, faisant l'hypothèse restrictive d'une réponse périodique, obtiennent des valeurs analytiques de la réduction des vibrations [36]. Ce cas sera évoqué au paragraphe 7.4.5.

### 7.4.2 Réponse en SSDS

Avec la technique SSDS, on ne constate pas d'autre comportement qu'une réponse qui se stabilise sur un régime périodique de pulsation  $\Omega$ , la fréquence d'excitation (Fig. 7.12). Afin d'évaluer la réponse du système en fonction de la fréquence d'excitation, la valeur efficace (*Root Mean Square*)  $u^{\text{RMS}}$  est utilisée<sup>1</sup> ; elle est calculée pour différentes fréquences d'excitation  $\Omega$  autour de la fréquence de résonance  $\hat{\omega}_r$  avec la formule suivante :

$$u^{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt}, \quad (7.48)$$

<sup>1</sup>En effet le signal n'est pas strictement harmonique et le critère RMS permet de se ramener à une valeur unique

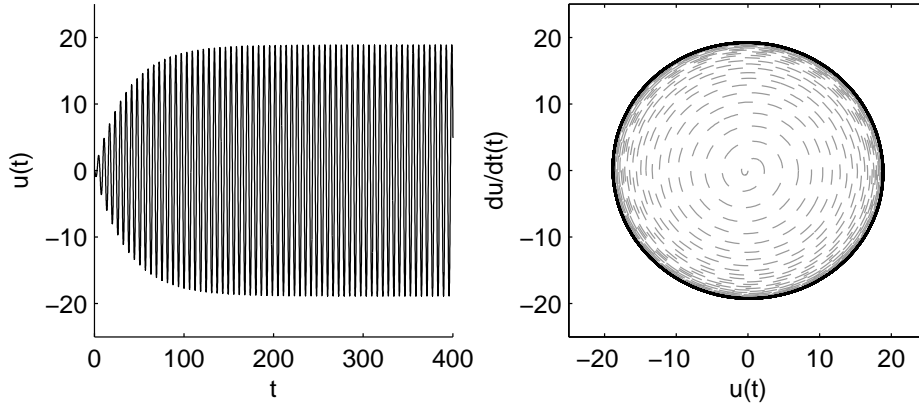


FIG. 7.12: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec SSDS et espace des phases, pour  $k_r = 0.2$  et  $\xi_r = 0.1\%$ ; système forcé près de la résonance ( $\Omega \simeq \omega_r$ )

calculée pour  $T$  suffisamment grand afin que le régime établi soit atteint. On obtient le résultat de la figure 7.13, similaire à une fonction réponse en fréquence mais tenant compte des différentes composantes spectrales de  $u(t)$  sur un seul pic.

L'amplitude maximum est observée à la résonance; pour évaluer l'efficacité du système on définit l'atténuation  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDS}}$  apportée par le système comme la différence (en dB) entre l'amplitude du pic de résonance en circuit ouvert et avec SSDS. On peut alors calculer cette atténuation pour différentes valeurs de  $k_r$  et  $\xi_r$ , présentée Fig. 7.13 et l'on constate que une fois de plus,  $k_r$  doit être maximisé. Aussi, comme dans le cas de la réponse libre (paragraphe 7.3.4), il n'y a pas de paramètre électrique à régler autre que de choisir une résistance faible permettant une évolution électrique rapide par rapport à la partie mécanique.

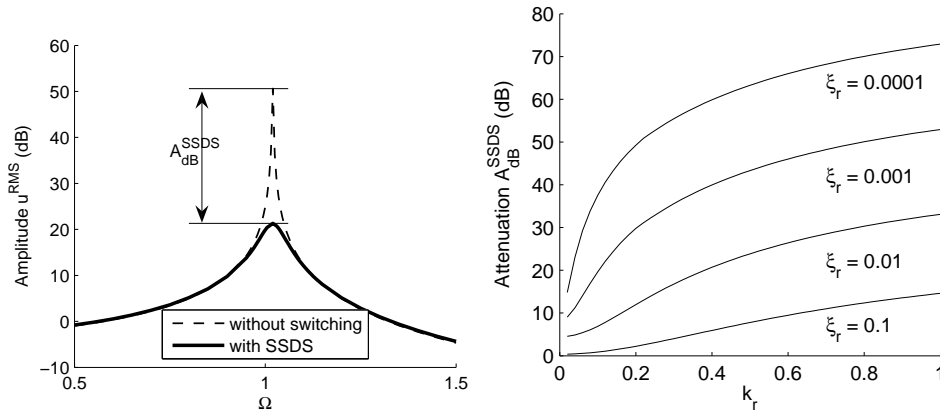


FIG. 7.13: (à g.) amplitude RMS  $u^{\text{RMS}}$  de la réponse  $u(t)$  en fonction de  $\Omega$  fréquence d'excitation, pour  $k_r = 0.2$  et  $\xi_r = 0.1\%$ . (à dr.)  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDS}}$  en fonction de  $k_r$ , pour différents coefficients d'amortissement mécanique  $\xi_r$

### 7.4.3 Réponse en SSDI

En observant la réponse d'un système SSDI on constate que pour des valeurs élevées de  $\xi_e$  la réponse converge vers un régime périodique à la fréquence d'excitation, comme pour la technique SSDS. On constate aussi que des valeurs décroissantes de  $\xi_e$  permettent de mieux réduire l'amplitude des vibrations, comme montré figure 7.14 (à droite et au centre).

Finalement, il existe une valeur critique de  $\xi_e$  en dessous de laquelle l'évolution temporelle ne converge pas vers un régime périodique, comme on peut le voir par exemple sur la figure 7.14 (à gauche) où la trajectoire dans l'espace des phases est complexe et s'apparente à celle d'un système chaotique. Dans certains cas, l'évolution converge vers un régime dont la période est un multiple de celle de l'excitation. Dans les deux derniers cas, l'amplitude est souvent importante.

D'une manière similaire à ce qui a été fait pour le cas SSDS (section 7.4.2), on peut tracer la valeur efficace<sup>2</sup>  $u^{\text{RMS}}$  en fonction de la fréquence d'excitation et définir l'atténuation  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$  (Fig. 7.15) apportée par le système SSDI. On constate alors que décroître la valeur de  $\xi_e$  augmente l'atténuation tant que le système est en régime synchronisé sur la fréquence d'excitation. Pour la valeur critique de  $\xi_e$  et toutes les valeurs inférieures, il n'y a plus de synchronisation et l'atténuation est considérablement plus faible. On peut donc définir une valeur optimal  $\xi_e^{\text{opt}}$  de  $\xi_e$  maximisant l'atténuation apportée par le système, qui est aussi la valeur critique.

On constate en réglant la précision numérique de Matlab (pour la détection de l'annulation de vitesse) que le résultat varie faiblement, c'est à dire que la valeur de  $\xi_e^{\text{opt}}$  fluctue un peu. Il y a donc une dépendance à la précision de calcul; cependant il n'est pas possible de changer complètement le comportement ou la valeur de  $\xi_e^{\text{opt}}$ . L'instabilité observée correspond à une caractéristique du système.

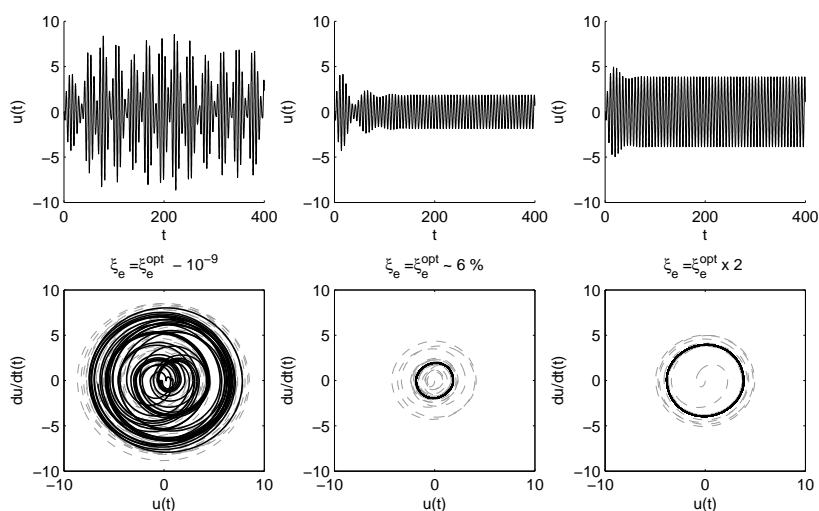


FIG. 7.14: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec technique SSDI et espace des phases, pour  $k_r = 0.2$  et  $\xi_r = 0.1\%$ ; système forcé près de la résonance ( $\Omega \simeq \hat{\omega}_r$ ) avec amortissement électrique  $\xi_e$  trop faible (à g.), optimal (au centre) et élevé (à dr.).

La figure 7.16 (à g.) montre l'évolution de  $\xi_e^{\text{opt}}$  en fonction de  $k_r$ , pour deux valeurs de  $\xi_r$ . On constate que  $\xi_e^{\text{opt}}$  dépend principalement de  $k_r$ , et la valeur trouvée pour le régime forcé est à peu près la moitié de la valeur optimale pour le régime libre (chapitre 7.3.5); c'est un résultat un peu similaire à ce qu'on a vu pour les shunts RL, où la valeur optimale pour le régime forcé est plus faible que pour le régime libre. Finalement, l'atténuation  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$  obtenue pour chaque coefficient de couplage avec l'amortissement électrique optimal ( $\xi_e = \xi_e^{\text{opt}}$ ) est tracée, pour diverses valeurs de  $\xi_r$ .

<sup>2</sup>Obtenue par intégration sur un temps assez long, y compris dans le cas de l'absence de régime établi cette valeur est significative

**Optimisation** On constate qu'une fois de plus,  $k_r$  est le paramètre à maximiser. La valeur de l'inductance doit être choisie pour être suffisamment petite<sup>3</sup>. La valeur de la résistance doit être choisie pour assurer un amortissement électrique optimal  $\xi_e = \xi_e^{\text{opt}}$  qui dépend de  $k_r$ .

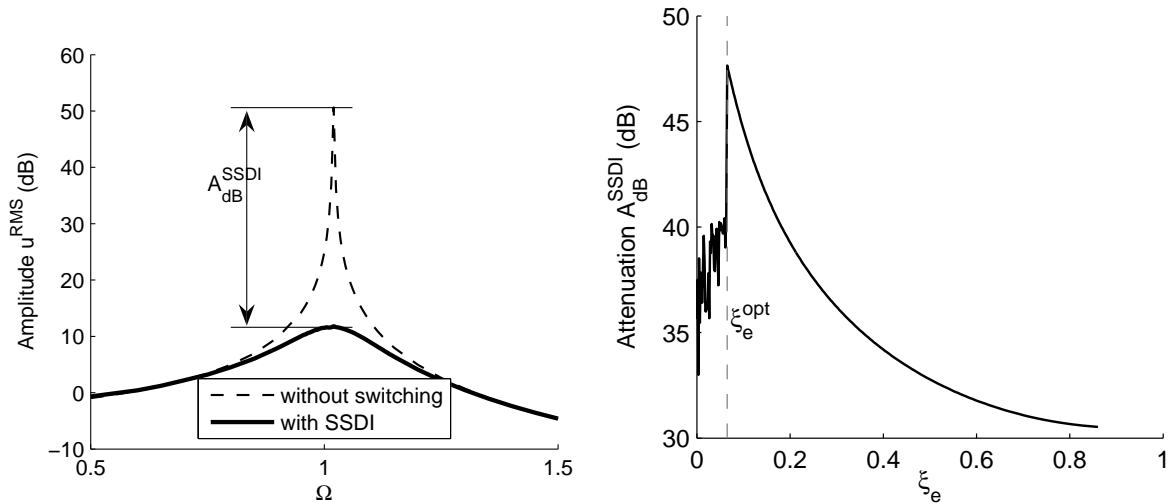


FIG. 7.15: (à g.) Amplitude  $RMS$   $u^{\text{RMS}}$  du déplacement  $u(t)$  en fonction de la fréquence d'excitation  $\Omega$ . (à dr.) Atténuation  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$  en fonction de  $\xi_e$ ; remarquer la valeur critique de  $\xi_e$  pour laquelle l'atténuation varie brusquement. Paramètres :  $k_r = 0.2$  et  $\xi_r = 0.1\%$

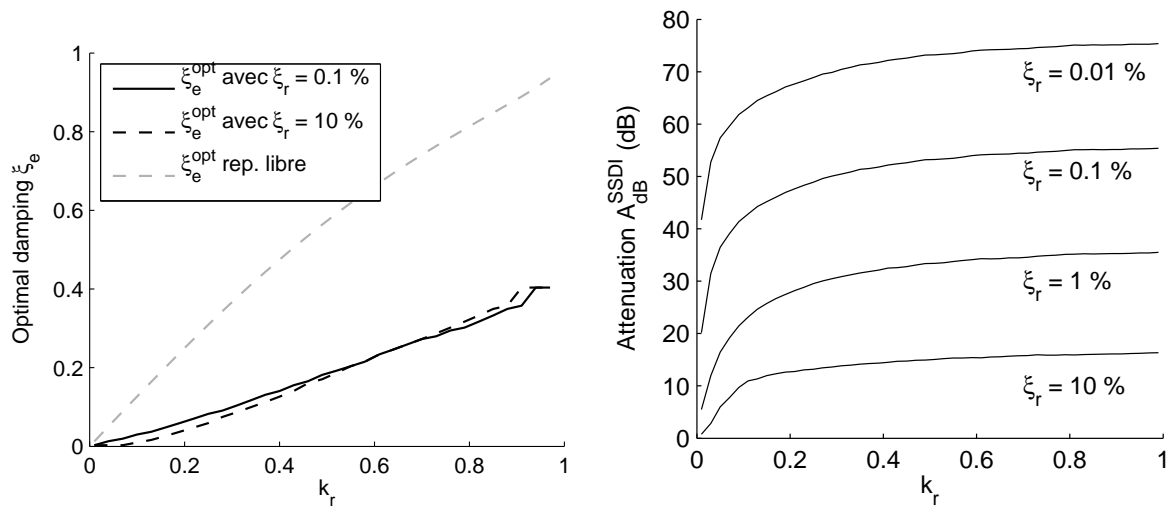


FIG. 7.16: (à g.)  $\xi_e^{\text{opt}}$  en fonction de  $k_r$  pour différentes valeurs d'amortissement, et rappel du résultat analytique pour la réponse libre; (à dr.)  $A_{\text{dB}}^{\text{SSDI}}$  en fonction de  $k_r$ , pour différentes valeurs de l'amortissement mécanique  $\xi_r$ .

<sup>3</sup>Le modèle 1 DDL utilisé ici ne prend pas en compte la constante de temps électrique et ne permet donc pas de quantifier ce choix - ce qui est fait plus tard (§8.4.2, 8.5.1)



#### 7.4.4 Comparaison avec les shunts linéaires

À ce stade, il est intéressant de comparer les résultats obtenus avec ce qui a été calculé pour les shunts linéaires. Sur la figure (7.17) on trace les atténuations calculées pour l'amortissement mécanique du premier mode de la poutre symétrique utilisée expérimentalement (§6.4.2); cela permet de comparer les shunts R, RL, SSDS et SSDI, dans un cas réaliste et avec des points expérimentaux pour les shunts linéaires.

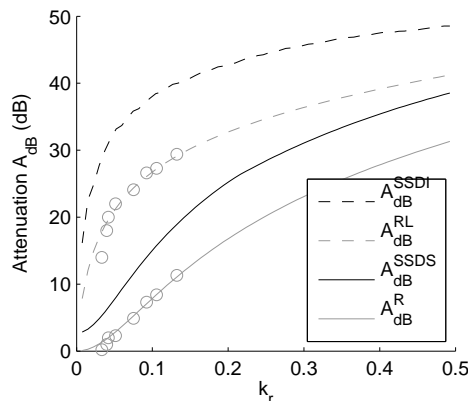


FIG. 7.17: Atténuation calculée  $A_{dB}$  en fonction du coefficient de couplage  $k_r$  pour les shunts R, RL, SSDS et SSDI;  $\xi_r = 0.17\%$ . '—', '- -' : résultats théoriques; 'o' : résultats expérimentaux pour les shunts R et RL

On peut remarquer que les valeurs théoriques d'atténuation sont très élevées, avec en plus l'avantage d'avoir un système ne nécessitant théoriquement pas de réglage fin.

#### 7.4.5 Comparaison avec un modèle existant

Une comparaison avec l'atténuation prévue par un des modèles de l'équipe du LGEF [36, 86] peut être faite, à condition de se fixer une valeur de  $\xi_e$ . On utilise la formule :

$$A_{dB}^{LGEF} = 20 \log_{10} \left[ 1 + k_r^2 \frac{1}{2\xi_r} \frac{4}{\pi} \frac{1+X}{1-X} \right]$$

avec  $X$  premier dépassement calculé d'après l'équation (7.17), dépendant de  $\xi_e$ . En traçant l'atténuation obtenue pour un coefficient de couplage (fig. 7.18 à g.), on constate qu'on peut arbitrairement mettre une valeur basse de  $\xi_e$  et faire tendre l'atténuation à l'infini. En effet, dans ce modèle, on suppose que le système est toujours synchronisé, et la réponse sinusoïdale. Si on tient compte de l'amortissement critique trouvé avec le modèle développé au chapitre précédent, alors on peut tracer l'atténuation en fonction de  $k_r$  (fig. 7.18 à dr.); on constate un bon accord des valeurs. L'écart de 2 dB observé peut s'expliquer par la comparaison entre l'amplitude d'un signal sinusoïdal (modèle LGEF) et l'amplitude efficace d'un signal périodique mais pas forcément sinusoïdal.

### 7.5 Modèle 1 ddl avec stratégie évoluée

En observant la réponse libre du système avec la technique SSDI, comme par exemple illustré figure (7.9), on constate que dans certains cas il y a un phénomène de battement. Ce qui se passe dans ce cas est qu'une charge électrique importante a été stockée dans l'élément

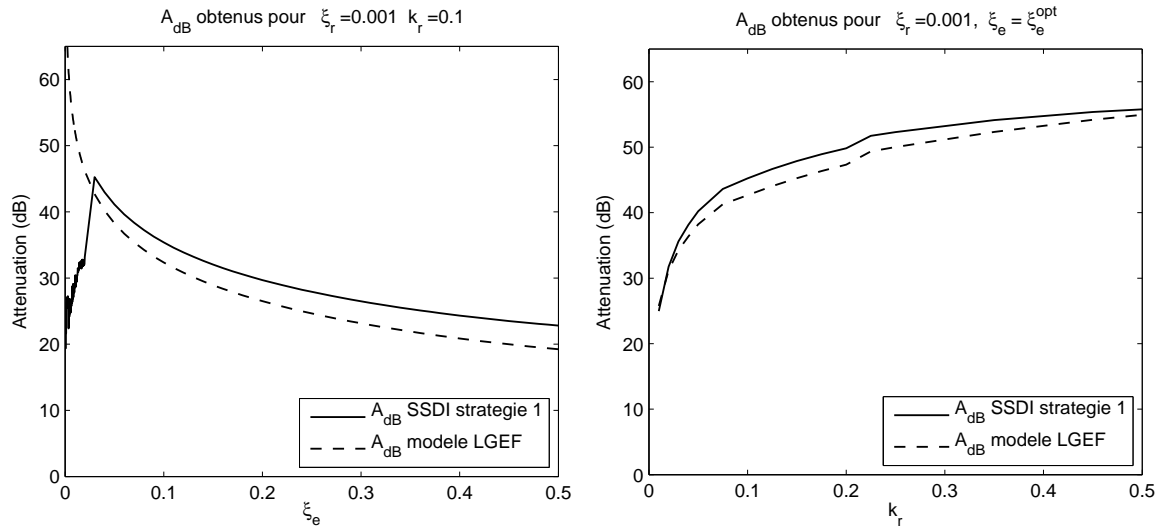


FIG. 7.18: Atténuation calculée comparée à l'atténuation prévue par le modèle du LGEF pour un coefficient de couplage donné (à g.) ; même comparaison en tenant compte de l'amortissement critique, en fonction du coefficient de couplage (à dr.).

piézoélectrique, ce qui réduit rapidement les vibrations ; ensuite cette charge électrique excessive remet la structure en mouvement.

Dans le cas de la réponse forcée et avec un amortissement électrique bas, comme par exemple illustré figure (7.14), la commutation peut devenir erratique. On se propose de modifier les instants auxquels le switch se ferme et d'évaluer les gains qui peuvent être obtenus. On rappelle l'équation (7.40) ; dans cette équation l'effet de la charge est similaire à un effort constant entre les commutations :

$$\ddot{u} + 2\xi_r \hat{\omega}_r \dot{u} + \hat{\omega}_r^2 u \Big|_{\hat{t}_n < t < \hat{t}_{n+1}} = k_r \omega_r Q_n + F_r \cos(\Omega t).$$

L'objectif est alors, en choisissant les instants de commutation, d'obtenir les valeurs de  $k_r \omega_r Q_n$  permettant de réduire le plus possible l'amplitude de  $u$ . Il faudrait conserver  $k_r \omega_r Q_n$  de signe opposé à  $\dot{u}$  et de grande amplitude.

Comme le modèle analytique présenté repose sur des instants de commutation réguliers, il ne peut pas représenter de choix différent de commutation. On procèdera uniquement à des simulations avec le modèle semi-analytique du paragraphe 7.4. Trois stratégies sont ainsi définies afin de choisir les instants de commutation.

### Stratégie 1 : Annulation de vitesse

Il s'agit du critère déjà utilisé : le switch se ferme aux extrema de déplacement (annulations de vitesse, repérées par l'annulation de  $\dot{V}$  d'après l'équation (7.1) ). En procédant ainsi, on inverse la charge au moment où la vitesse change de signe, gardant ainsi en théorie le signe de  $k_r \omega_r Q_n$  opposé à  $\dot{u}$  ; néanmoins il arrive que la charge ne change pas de signe, et  $k_r \omega_r Q_n$  prend alors le même signe que  $\dot{u}$ . À ce moment, l'effet du switch est d'augmenter la vitesse de la structure, et l'objectif de réduction de vibrations n'est pas rempli.

### Stratégie 2 : Force toujours opposée à la vitesse

Afin d'améliorer l'efficacité du système, on souhaite conserver  $k_r\omega_r Q_n$  de signe opposé à  $\dot{u}$ ; pour ce faire on ferme le circuit uniquement dans les conditions suivantes :

- Lorsque la vitesse atteint une valeur nulle (ce qui est repéré par l'annulation de  $\dot{V}$ ); on s'attend à ce que la vitesse change de signe; il est donc possible de prévoir le signe de la vitesse après le switch.
- Lorsque la vitesse prédite immédiatement après le switch et la charge prédite immédiatement après le switch permettent d'assurer que la force sera bien opposée à la vitesse. Afin de vérifier cela on calcule la charge immédiatement après le switch d'après l'équation (7.16). Le signe de la vitesse est supposé opposé à ce qu'il était juste avant le switch. Si  $k_r\omega_r Q_{n+1}\dot{u}(\hat{t}_{n+1})$  est positif, le switch reste ouvert jusqu'à la prochaine annulation de vitesse; sinon il se ferme.

En théorie, on devrait ainsi garder le signe de l'effort exercé par la charge toujours opposé à la vitesse, et donc freiner le mouvement en permanence.

### Stratégie 3 : Force de grande amplitude

Une autre manière d'améliorer l'efficacité du système est de maximiser l'amplitude de  $Q$ , sans vérifier son signe; on suppose que spontanément le terme  $k_r\omega_r Q_n$  aura un signe opposé à la vitesse et que le système réduira les vibrations. On peut remarquer que l'équation électrique (7.13), pendant que le switch est fermé, est celle d'un système du second ordre avec un effet extérieur (force électromotrice)  $k_r\omega_r u$  supposé constant pendant l'évolution électrique :

$$\frac{1}{\omega_e^2}\ddot{Q} + \frac{2\xi_e}{\omega_e}\dot{Q} + Q = k_r\omega_r u$$

On peut distinguer deux cas lors de l'inversion, suivant le signe de  $k_r\omega_r u$ , illustrés sur la figure (7.19) :

- Si la charge initiale et  $k_r\omega_r u$  sont de même signe, (figure (7.19) à gauche) la valeur finale de la charge électrique est plus faible qu'avant le switch;
- Si leurs signes sont opposés (figure (7.19) à droite), une évolution importante de la charge se produira et la valeur finale de la charge devrait être importante, en particulier dans le cas d'un amortissement électrique faible.

Le critère choisi pour fermer le switch ( $n + 1$ -ème fermeture,  $t_{n+1}$ ) est donc le suivant :

- Il faut atteindre un extremum de position afin que  $k_r\omega_r u$  soit grand, ce que l'on repère avec  $\dot{u}(t_{n+1}) = 0$ ;
- Il faut que les signes de la charge initiale et celui de  $k_r\omega_r u$  soient opposés, pour obtenir une inversion satisfaisante :  $Q_n k_r\omega_r u(t_{n+1}) < 0$

#### 7.5.1 Comparaison sur un cas

Comme introduit au début du chapitre 7.5, pour des valeurs faibles de  $\xi_e$  et en régime forcé, la stratégie 1 peut entraîner une commutation erratique et les performances en terme d'amortissement de vibrations sont très fortement dégradées (fig. 7.14); en appliquant une des stratégies proposées ci-dessus on espère améliorer les performances. On se place dans le cas du forçage à résonance d'un mode de fréquence propre  $\omega_r = 1$ , coefficient de couplage

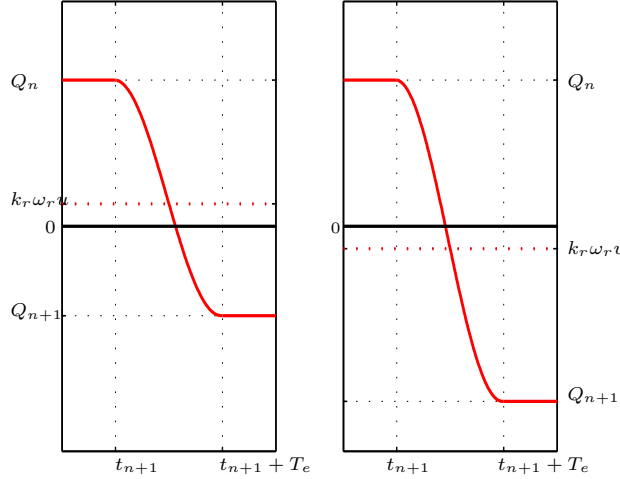


FIG. 7.19: Évolution de la charge électrique lors d'un switch dans deux cas (à g.) charge et  $k_r \omega_r u$  de même signe (à dr.) charge et  $k_r \omega_r u$  de signe opposé ; on suppose que le deuxième cas est favorable.

$k_r = 0.1$ , amortissement mécanique  $\xi_r = 0.001$  et on procède à des simulations du système avec chacune des stratégies possibles, que l'on peut résumer ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Stratégie 1 : fermeture quand } \dot{u}(t) = 0 \text{ ( Critère habituel )} \\ \text{Stratégie 2 : fermeture quand } \dot{u}(t) = 0 \text{ et } Q_{n+1} k_r \dot{u}(t_{n+1}) < 0 \\ \text{Stratégie 3 : fermeture quand } \dot{u}(t) = 0 \text{ et } Q_n k_r \dot{u}(t_{n+1}) < 0 \end{array} \right.$$

Pour un tel système, on a vu qu'avec la stratégie 1 la commutation devient erratique lorsque l'amortissement électrique passe en dessous d'une valeur critique, ici à peu près égale à 3.5 % (fig. 7.16 ). On simule l'évolution temporelle du système pour différentes valeurs de cet amortissement ; les résultats font apparaître les tendances suivantes :

- Pour un amortissement électrique  $\xi_e = 5\%$  (fig. 7.20), supérieur à la valeur critique, les trois stratégies donnent des résultats identiques.
- Pour un amortissement  $\xi_e = 2\%$  (fig. 7.21) , inférieur à la valeur critique, les stratégies 2 et 3 permettent de conserver une synchronisation correcte des commutations, et les performances sont alors nettement meilleures que ce qu'on obtient avec la stratégie 1. On peut remarquer que les régimes transitoires sont différents entre les stratégies 2 et 3.
- Si l'on réduit encore l'amortissement, par exemple avec  $\xi_e = 1\%$  (fig. 7.22), on observe que la stratégie 2 permet au système de rester synchronisé tandis que la stratégie 3 le fait rentrer sur un cycle limite (dont la période varie, mais est ici de 4 périodes mécaniques) ; l'amplitude est supérieure, mais toujours inférieure à ce que permet la stratégie 1 ;
- Enfin pour un amortissement électrique très bas (partie électrique pratiquement conservative,  $\xi_e = 0.1\%$  ) (fig. 7.23) toutes les stratégies conduisent à des commutations erratiques ; cependant, il apparaît que la stratégie 2 permet de garder une amplitude plus réduite que la stratégie 3, elle même plus efficace que la stratégie 1.

Comme remarqué précédemment, il est toujours bénéfique de diminuer  $\xi_e$ , jusqu'à l'apparition du régime critique ou non synchronisé. L'utilisation des critères avancés semble permettre de retarder cette apparition.

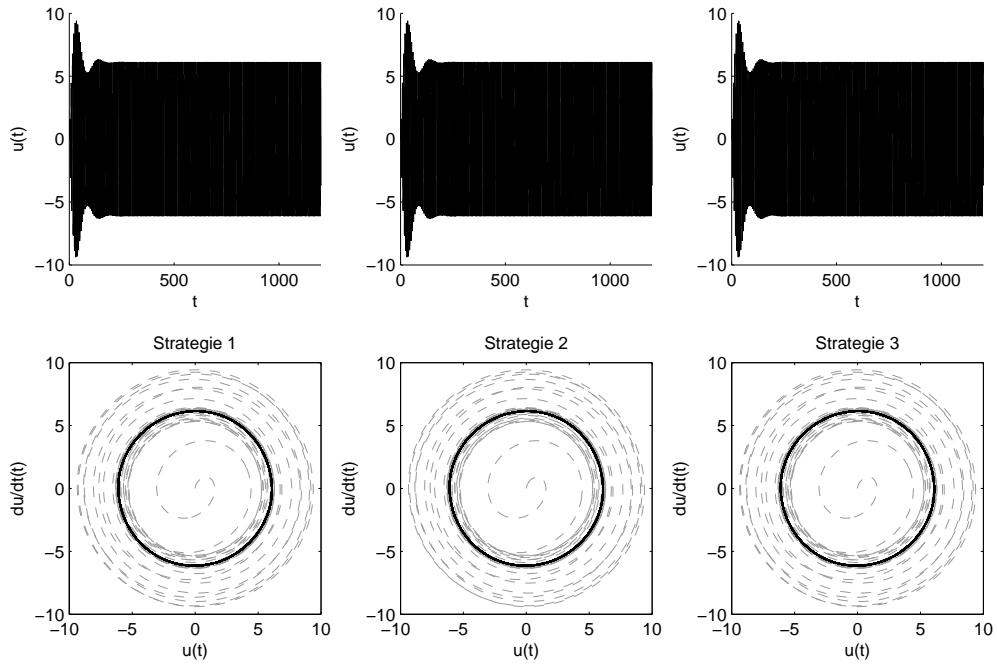


FIG. 7.20: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 5 % et différentes stratégies.

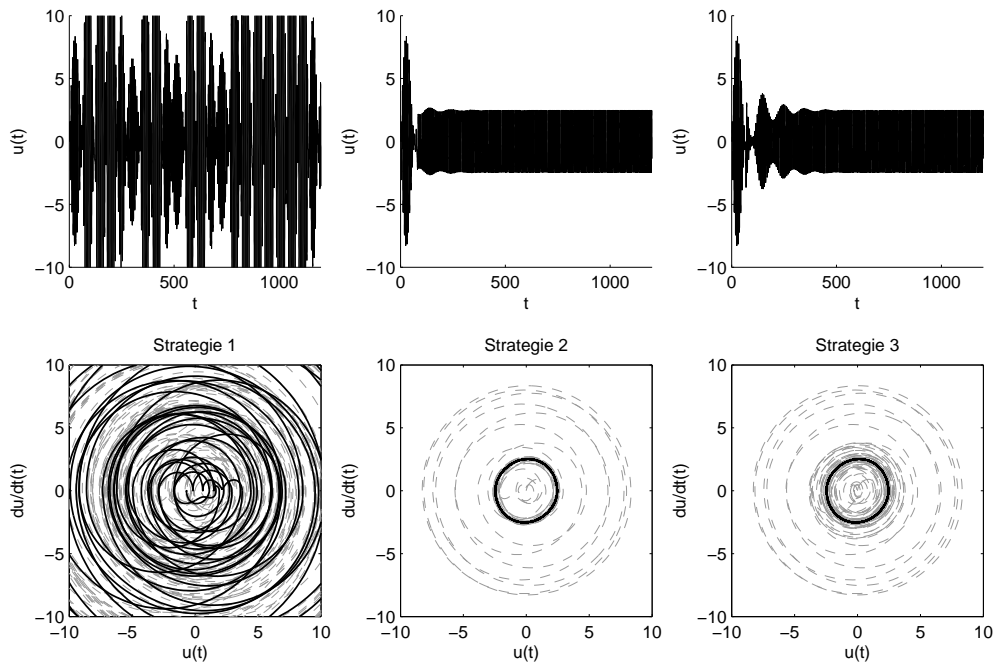


FIG. 7.21: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 2 % et différentes stratégies.

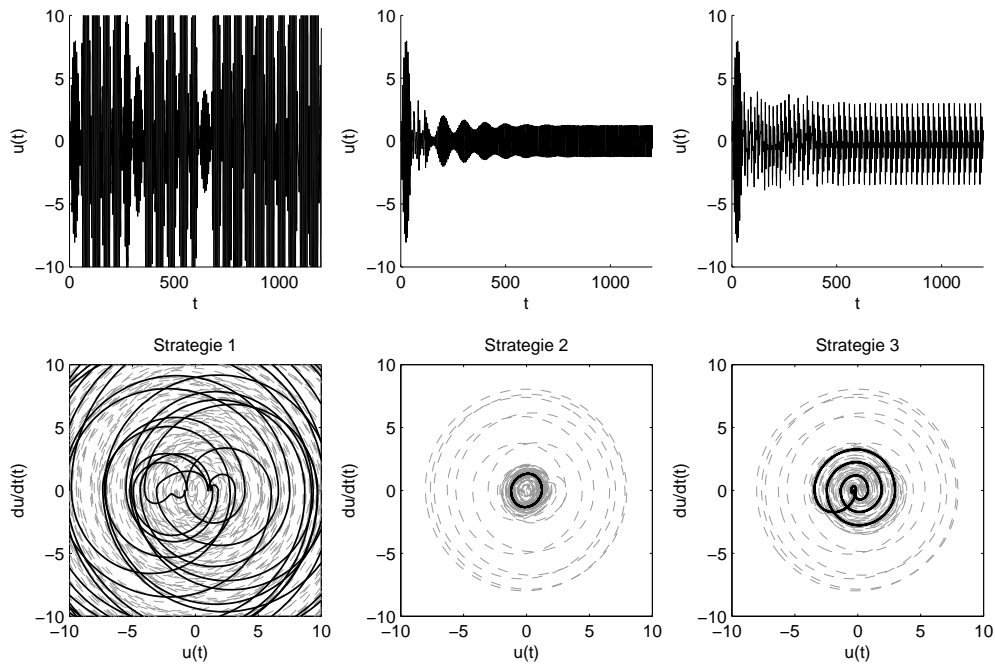


FIG. 7.22: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 1 % et différentes stratégies.

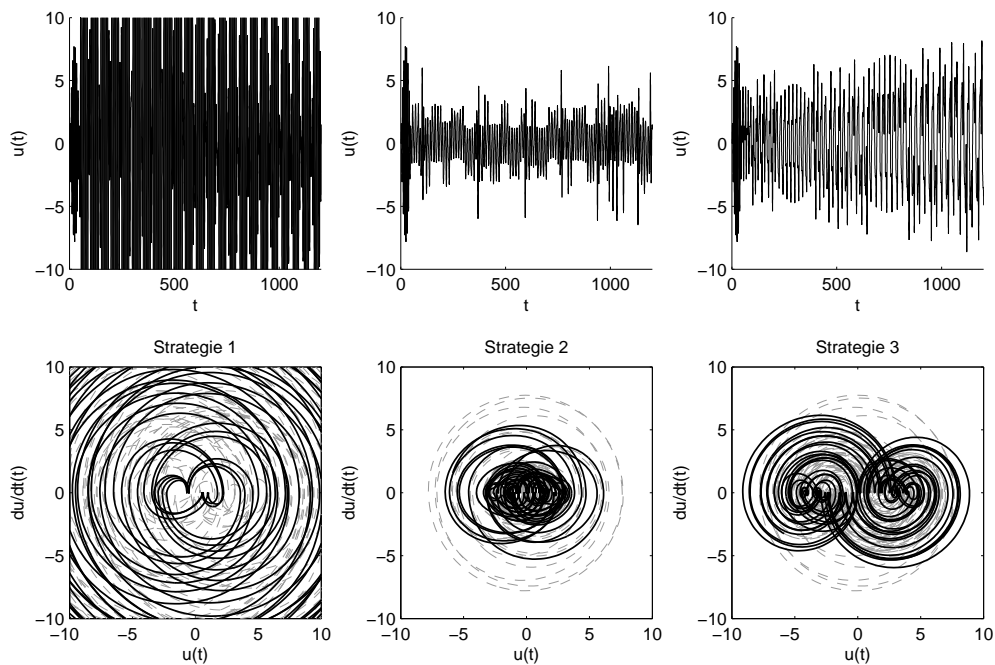


FIG. 7.23: Évolution temporelle du déplacement  $u(t)$  avec technique SSDI et espace des phases, pour un amortissement électrique de 0.1 % et différentes stratégies.

### 7.5.2 Évaluation de l'atténuation

On procède à un grand nombre de simulations, pour diverses valeurs du coefficient de couplage, de la fréquence d'excitation et de  $\xi_e$ . L'amplitude efficace du signal est utilisée comme indice de performance du système, comme aux paragraphes 7.4.2 et 7.4.3. On a vu avec les comparaisons sur un cas particulier que la différence entre stratégies s'observait surtout quand l'amortissement électrique est très faible ; cette tendance est explorée ; on procède à des simulations du système étudié au paragraphe précédent en variant plusieurs paramètres et l'on trace l'amplitude efficace de  $u$  en fonction de la fréquence d'excitation. En observant les résultats, présentés figure 7.24 pour des valeurs d'amortissement décroissantes, on constate que l'instabilité apparaît plus tôt avec la stratégie 1, et ce sur une plage de fréquence plus étendue que les autres stratégies. La stratégie 2 permet de conserver la synchronisation plus longtemps, et permet aussi de conserver une bonne atténuation lorsque la synchronisation ne se fait plus. La stratégie 3 offre des résultats intermédiaires.

De la même manière qu'aux chapitres 7.4.2 et 7.4.3 on définit l'atténuation apportée par les différentes stratégies par rapport à la situation circuit ouvert ; on peut alors tracer dans le cas étudié l'atténuation en fonction de  $\xi_e$  (figure 7.25) et définir le taux d'amortissement électrique  $\xi_e$  optimal ainsi que l'atténuation maximale possible.

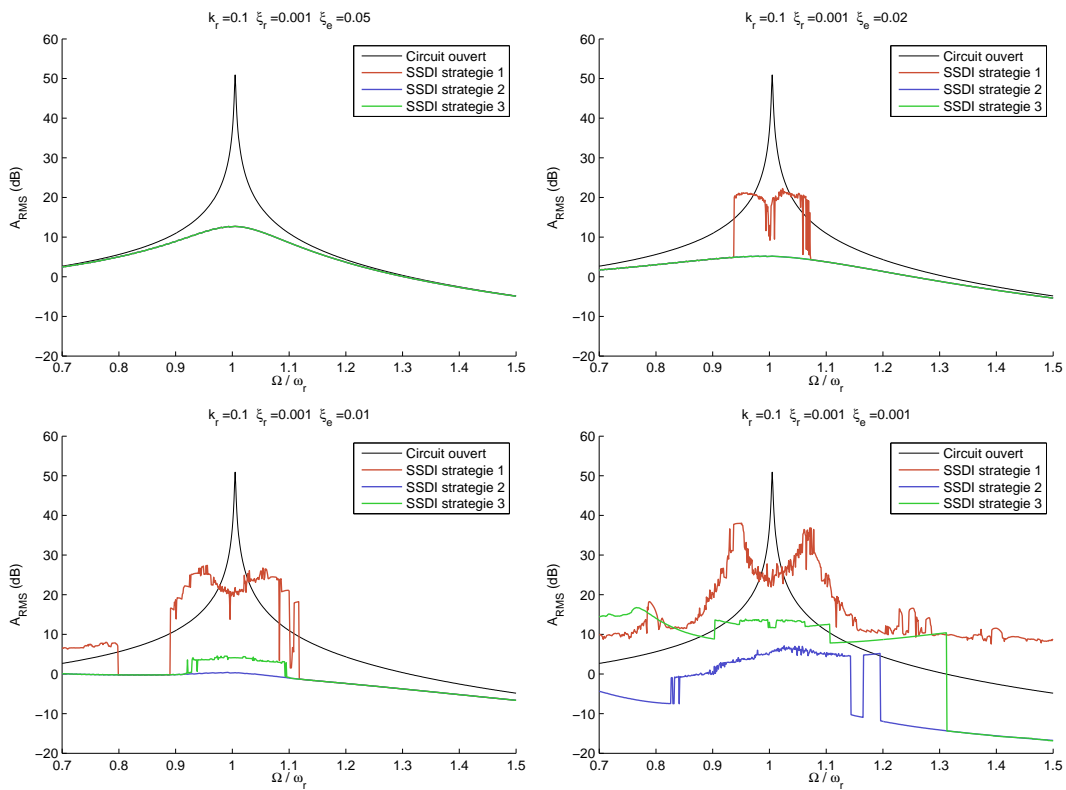


FIG. 7.24: Amplitude RMS en fonction de la fréquence d'excitation pour des amortissements électriques décroissants  $\xi_e = 5\%$ ,  $2\%$ ,  $1\%$ ,  $0.1\%$

On étudie alors le cas de tous les coefficients de couplage  $k_r$  avec un amortissement mécanique de  $0.1\%$  ; on obtient trois valeurs optimales de  $\xi_e$ , dépendant de la stratégie mise en œuvre, tracées figure (7.26) à gauche ; et on obtient avec ces paramètres l'atténuation maximale possible avec la stratégie en fonction du coefficient de couplage (fig. 7.26) à droite. On peut constater ainsi que :

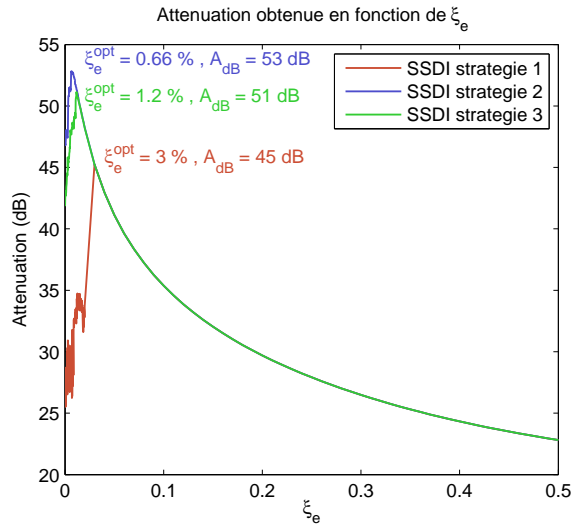


FIG. 7.25: Amplitude de l'atténuation apportée par la technique SSDI en fonction de  $\xi_e$  dans le cas étudié. Une stratégie adaptée permet de baisser la valeur critique.

- L'amortissement optimal est plus bas avec les stratégies évoluées ;
- Les stratégies sont de la plus efficace à la moins efficace dans l'ordre 2, 3, 1 ;
- Si l'amortissement électrique utilisé est trop important (au dessus de la valeur critique pour la stratégie 1), la stratégie utilisée n'a plus d'importance car la synchronisation du système se fait toujours.

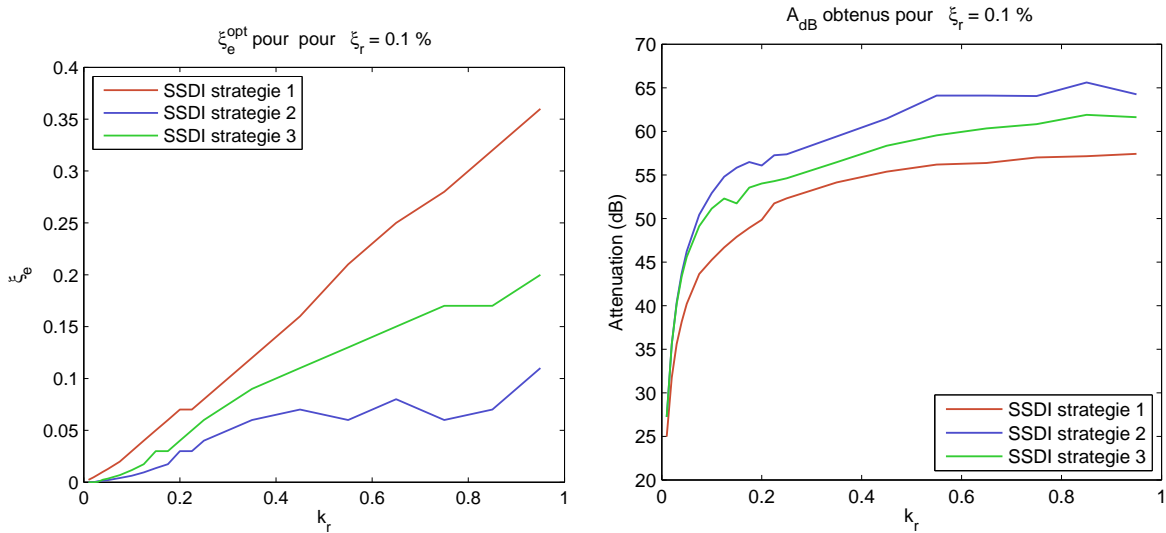


FIG. 7.26: (à g.)  $\xi_e^{opt}$  en fonction de  $k_r$  pour les trois stratégies ; (à dr.)  $A_{dB}^{SSDI}$  en fonction de  $k_r$ , pour  $\xi_r = 0.1\%$



## 7.6 Conclusion sur le modèle 1 DDL

### 7.6.1 Cas de la technique SSDS

Le modèle des réponse libres et forcées permettent d'obtenir le résultat suivant : l'efficacité (amortissement ajouté en régime libre et atténuation en régime forcé) ne dépend que du coefficient de couplage. On ne constate pas d'instabilité de la synchronisation dans les cas étudiés, il n'y a pas besoin de stratégie de commutation évoluée.

### 7.6.2 Cas de la technique SSDI

À l'issue de cette étude sur des modèles 1 DDL, trois résultats ont été obtenus :

- Un modèle analytique de la réponse libre permet d'obtenir un amortissement électrique optimal  $\xi_e^{opt}$  ne dépendant que du coefficient de couplage  $k_r$  et un amortissement ajouté par le système ne dépendant lui aussi que de  $k_r$ . L'objectif est ici de dissiper l'énergie le plus rapidement possible.
- Un modèle semi-analytique de la réponse forcée permet de constater qu'un amortissement électrique très bas permet d'obtenir une meilleure atténuation ; en effet l'objectif n'est plus de dissiper l'énergie, mais de contrer les vibrations de la structure. Pour ce faire, il convient donc de stocker le plus possible d'énergie électrique, comme on le montre au chapitre 8.2.1. Cela est déjà perceptible dans les modèles existants de la réponse forcée [83] où l'on peut arbitrairement augmenter l'atténuation en diminuant  $\xi_e$ , car la synchronisation est supposée parfaite. Une analyse énergétique précisera cette notion (§8.2.1).
- Néanmoins, et à la différence des modèles 1 DDL déjà existants, près de la résonance et pour  $\xi_e$  très bas, les commutations peuvent devenir erratiques, et l'amplitude remonte brusquement ; ce phénomène est retardé par des stratégies évoluées.
- On définit ainsi un amortissement électrique critique, qui est le plus bas auquel la synchronisation se fait bien ; c'est la valeur optimale. On peut ainsi déduire l'atténuation maximale possible avec la technique SSDI, qui ne dépend que du coefficient de couplage, de la stratégie et de l'amortissement initial (mécanique) de la structure. Le choix d'une stratégie évoluée permet d'obtenir un amortissement électrique optimal (différent, plus bas ) et une atténuation apportée par le système plus élevée, ne dépendant aussi que de  $k_r$ .

### 7.6.3 Limites du modèle

Les stratégies avancées qui ont été proposées pour la commutation ne nécessitent de connaître que des données disponibles immédiatement, et ne requièrent pas de calcul complexe. Néanmoins, il est difficile de mesurer simultanément la charge électrique et la force électromotrice dans l'élément piézoélectrique. L'objectif de l'étude sur les stratégies est plutôt une base d'optimisation qu'une solution pratique. De plus, les atténuations attendues même avec la stratégie de base sont très élevées, on remarque même pour certains paramètres une atténuation de la réponse hors-résonance (fig. 7.24). Il est probable que le passage au modèle multimode permette de calculer des performances plus réalistes.



---

## Shunt à commutation sur un système à plusieurs degrés de liberté

On se propose dans ce chapitre de simuler la réponse dynamique d'un système à plusieurs ddl dont les vibrations sont réduites avec un shunt à commutation. À la différence des shunts linéaires (chapitre 5) pour lesquels les résultats obtenus avec le modèle 1 ddl s'appliquent facilement au cas  $N$  ddl, le comportement des shunts à commutation peut changer nettement en présence de plusieurs modes. En effet, sur un système multimode, lorsqu'on cherche à réduire les vibrations d'un mode donné, à chaque commutation, des variations brutales de charge dans l'élément piézoélectrique vont exciter les autres modes. Cela va perturber la tension dans l'élément piézoélectrique ; or, justement, la commutation est déclenchée lorsque cette tension passe par un maximum. Ainsi, la présence de composantes de fréquence élevée dans le signal de tension peut perturber la commutation et réduire l'efficacité du dispositif. Un des objectifs de ce chapitre est de vérifier si les résultats du chapitre 7 peuvent s'extrapoler aux cas  $N$  ddl, on simule donc un système à plusieurs ddl mécaniques. Un autre objectif est de prendre en compte l'effet de l'inductance. Il est donc nécessaire de prendre en compte le ddl électrique, et non plus de négliger la durée des commutations.

Tout d'abord, les équations du modèle sont posées, réutilisant le modèle électromécanique des chapitres 3 et 4. Ensuite, une étude énergétique du système est proposée (§8.1.4) ; cette étude permet de redéfinir les stratégies de commutation étudiées dans le chapitre précédent pour le cas 1 ddl. En particulier, on explique chacune des stratégies en terme d'optimisation de puissance (§8.2).

Au paragraphe 8.3, on expose les deux modèles à  $N$  ddl mis en place : un modèle semi-analytique de la réponse libre (basé sur des exponentielles matricielles) et un modèle numérique de la réponse forcée (faisant appel à un schéma de Newmark). Ils sont ensuite utilisés pour réaliser plusieurs simulations. On étudie ainsi l'influence de divers paramètres et de la stratégie de commutation sur l'efficacité de la réduction de vibration :

- Aux paragraphes 8.4.2 et 8.5.1 on étudie l'effet de l'inductance du shunt sur la réponse libre et forcée ;
- Aux paragraphes 8.4.3 et 8.5.2 on étudie l'influence d'un mode voisin lorsqu'on réduit les vibrations d'un mode donné. On constate que la synchronisation est perturbée, en particulier lorsque les modes ont des pulsations en rapport entier, et que la réduction de vibrations est alors moins efficace. On observe aussi l'effet du choix de l'inductance sur ce phénomène.

- Au paragraphe 8.5.2 on étudie également l’effet de l’amortissement mécanique d’un mode élevé ; la question est de savoir si un système à commutation pourrait être complété par un amortissement de type visqueux sur les modes élevés.

Ces résultats permettent de définir de nouvelles pistes pour optimiser le système.

Finalement, au paragraphe 8.5.3 une simulation à trois modes mécaniques est présentée, les transferts d’énergie entre les différentes parties du système sont étudiés, et les mécanismes de réduction de vibration sont analysés. On peut alors commenter les choix qui ont été faits pour les stratégies. L’ensemble de ces résultats constituent une étude originale sur le sujet des shunts à commutation.

Une des spécificités de la présente étude est d’avoir utilisé un grand nombre de simulations pour évaluer la dépendance entre plusieurs paramètres, pour une plage complète de valeurs. Beaucoup des études de la littérature se limitent à un jeu de paramètres réduit (par exemple, en s’intéressant à un seul coefficient de couplage, ou à une seule structure ; puis en l’excitant avec un seul type de signal).

Une autre spécificité est l’utilisation de stratégies de commutation fondées sur des critères uniquement instantanés (du moins pour les simulations). Cette approche n’est pas la plus efficace, mais permet de mettre en valeur des comportements limite du système : instabilité, commutation mal synchronisée... Il est important de remarquer que c’est une approche complémentaire à celles des autres équipes, basées sur des critères de temps ou de niveau.

## 8.1 Modèle utilisé

Le modèle retenu dans ce chapitre est le système (3.69) tronqué aux  $N$  premiers modes. On rappelle que les paramètres du modèle ont été obtenus par calcul semi-analytique (§3), par éléments finis (§4.3) ou encore expérimentalement (§6.4.1). Il est nécessaire de prendre en compte les deux états possibles du switch : ouvert ou fermé, et de décrire les transitions entre ces états.

### 8.1.1 Comportement en circuit ouvert

Pendant la majeure partie du temps, le switch est ouvert : le courant ne circule pas. On note ici  $\chi_r = \omega_r k_r$  pour alléger les notations<sup>1</sup> ; on a alors à partir de (3.69) :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \chi_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - \chi_r Q = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \dot{Q} = 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

ce qui donne sous forme matricielle, avec la charge électrique  $Q$  constante,

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1 \omega_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\xi_N \omega_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \end{pmatrix} + \\ & \left( \begin{pmatrix} \omega_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_N^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} [\chi_i \chi_j] \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \vdots \\ \chi_N \end{pmatrix} Q, \end{aligned} \quad (8.2)$$

<sup>1</sup>C’est un facteur différent du  $\chi_r^{(p)}$  du chapitre 4 qui, lui n’est pas adimensionné.

ou encore

$$\mathbf{M}_{co}\ddot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{C}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{K}_{co}\mathbf{q}_{co} = \mathbf{F}_{co} + \chi Q, \quad (8.3)$$

avec :

- $\mathbf{M}_{co}$  matrice de masse pour les  $N$  modes (ici la matrice identité) ;
- $\mathbf{C}_{co}$  matrice des amortissement modaux ;
- $\mathbf{K}_{co}$  matrice de raideur en circuit ouvert ;
- $\mathbf{q}_{co}$  vecteur des  $N$  coordonnées modales ;
- $\mathbf{F}_{co}$  vecteur des forçages modaux ;
- $\chi$  vecteur des couplages électromécaniques (adimensionné ici à la différence du §4.4.2)

Pendant cette phase, la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique est donnée par la dernière ligne de (3.69) :

$$V = Q - \sum_{r=1}^N \chi_r q_r = Q - \chi^\top \mathbf{q}_{co}. \quad (8.4)$$

### 8.1.2 Comportement en circuit fermé

Pendant que le switch est fermé, le courant peut circuler dans le shunt, qu'on modélise avec une inductance et une résistance<sup>2</sup>. On utilise donc un modèle identique à celui d'un shunt résonant :

$$\begin{cases} \ddot{q}_r(t) + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r(t) + \omega_r^2 q_r(t) + \chi_r \sum_{k=1}^N \chi_k q_k(t) - \chi_r Q = F_r(t) & \forall r \in [1, N] \\ \frac{\dot{Q}(t)}{\omega_e^2} + 2\xi_e \frac{\dot{Q}(t)}{\omega_e} + Q(t) - \sum_{r=1}^N \chi_r q_r(t) = 0, \end{cases} \quad (8.5)$$

avec  $\omega_e = \sqrt{LC}/\tau_m$  et  $\xi_e = \frac{RC}{2\omega_e\tau_m}$  respectivement les pulsations propres adimensionnées et coefficient d'amortissement de l'association shunt / éléments piézoélectriques (5.48). On écrit les équations (8.5) sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1/\omega_e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \vdots \\ \ddot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\xi_1\omega_1 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 2\xi_N\omega_N & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 2\xi_e/\omega_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \vdots \\ \dot{q}_N \\ \dot{Q} \end{pmatrix} \\ & + \begin{pmatrix} \left( \begin{matrix} \omega_1^2 & 0 & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & \omega_N^2 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{matrix} \right) + \begin{pmatrix} & 0 \\ [\chi_i\chi_j] & \vdots \\ & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} & \chi_1 \\ & \vdots \\ 0 & \chi_N \\ \chi_1 & \dots & \chi_N & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_N \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.6)$$

ou encore

$$\mathbf{M}_{cf}\ddot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{C}_{cf}\dot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{K}_{cf}\mathbf{q}_{cf} = \mathbf{F}_{cf}, \quad (8.7)$$

avec des matrices et vecteurs de dimension  $N + 1$  :

<sup>2</sup>une modélisation plus détaillée devrait prendre en compte la nature des composants électroniques utilisés, qui n'ont pas des résistances pures mais plutôt des tensions de seuil ou autres non-linéarités.

- $\mathbf{M}_{cf}$  matrice masse comprenant le terme d'inductance  $1/\omega_e^2$  ;
- $\mathbf{C}_{cf}$  matrice d'amortissement y compris le terme de résistance  $2\xi_e/\omega_e$  ;
- $\mathbf{K}_{cf}$  matrice de raideur, de couplage électromécanique et de capacité des éléments piézoélectrique ;
- $\mathbf{q}_{cf}$  vecteur des  $N$  coordonnées modales et de la charge électrique  $Q$  ;
- $\mathbf{F}_{cf}$  vecteur des forçages modaux prolongé d'un zéro (pas de forçage sur la partie électrique).

Une remarque importante est que l'étude de la technique SSDS peut se faire avec ce modèle, en prenant une valeur faible de  $L$  et  $\xi_e = 1$  ; c'est pourquoi cette technique ne fait pas l'objet d'un traitement à part.

### 8.1.3 Transitions entre états

Pour simuler la réponse du système on considère une suite de phases d'évolution (circuit ouvert ou circuit fermé) qui nécessite d'écrire la continuité des grandeurs aux instants de commutation. On rappelle que le switch se ferme à une suite d'instant  $t_n, n \in \mathbb{N}$  puis s'ouvre à une suite d'instant  $\hat{t}_n, n \in \mathbb{N}$  ( $t_n \leq \hat{t}_n$ ) ; la simulation débute switch ouvert. Lors des transitions on suppose qu'il y a continuité des déplacements et de leurs dérivées, ainsi que de la charge et du courant :

$$\begin{aligned} q_r(\hat{t}_n^-) &= q_r(\hat{t}_n^+) ; \dot{q}_r(\hat{t}_n^-) = \dot{q}_r(\hat{t}_n^+) ; Q(\hat{t}_n^-) = Q(\hat{t}_n^+) ; \dot{Q}(t = \hat{t}_n^-) = \dot{Q}(\hat{t}_n^+), \\ q_r(t_n^-) &= q_r(t_n^+) ; \dot{q}_r(t_n^-) = \dot{q}_r(t_n^+) ; Q(t_n^-) = Q(t_n^+) ; \dot{Q}(t_n^-) = \dot{Q}(t_n^+). \end{aligned} \quad (8.8)$$

Le courant circule entre  $t_n$  et  $\hat{t}_n$  pendant un intervalle de temps le plus souvent assez court.

#### Fermeture du switch

L'instant  $t_n$  de fermeture du switch doit être choisi afin d'optimiser l'atténuation des vibrations. Une étude énergétique ci-après permet de proposer quelques stratégies pour effectuer ce choix.

#### Ouverture du switch

L'ouverture du switch se fait à  $\hat{t}_n$  lorsque le courant s'annule (c'est à dire lorsque  $\dot{Q} = 0$ ). En pratique, les systèmes à commutation sont souvent réalisés avec deux branches munies de diodes "anti-retour" : celles-ci bloquent effectivement le courant dans une direction, même si la branche du switch reste fermée plus longtemps. L'effet est bien celui de l'arrêt total du courant à sa première annulation.

### 8.1.4 Aspects énergétiques

#### Énergie mécanique

En multipliant (8.3) par  $\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top$ , on obtient une expression des puissances agissant sur la partie mécanique du problème :

$$\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{M}_{co} \ddot{\mathbf{q}}_{co} + \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{C}_{co} \dot{\mathbf{q}}_{co}}_{\mathcal{D}_m} + \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{K}_{co} \mathbf{q}_{co} = \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{F}_{co}}_{\mathcal{P}_{ext}} + \underbrace{\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \chi Q}_{\mathcal{C}_m}, \quad (8.9)$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} \mathcal{E}_m = \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_m + \mathcal{V}_m) = -\mathcal{D}_m + \mathcal{C}_m + \mathcal{P}_{ext},} \quad (8.10)$$

où :

- $\mathcal{E}_m$  est l'énergie mécanique, somme de l'énergie cinétique  $\mathcal{T}_m = 1/2\dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{M}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co}$  et de l'énergie potentielle  $\mathcal{V}_m = 1/2\mathbf{q}_{co}^\top \mathbf{K}_{co}\mathbf{q}_{co}$  ;
- $\mathcal{P}_{ext} = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{F}_{co}$  est la puissance mécanique des efforts extérieurs
- $\mathcal{D}_m = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \mathbf{C}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co}$  est la puissance mécanique dissipée, toujours positive ;
- $\mathcal{C}_m = \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q$  est la puissance de couplage de l'effet piézoélectrique indirect (effet de la charge électrique sur la partie mécanique).

L'expression (8.10) est également valable en circuit fermé. En effet, on obtient le même résultat en multipliant (8.7) par  $\dot{\mathbf{q}}_{cc}^\top$  où on impose  $\dot{Q} = 0$  afin d'éliminer les termes liés au courant.

### Énergies modales

On peut séparer différents termes de (8.10) par modes. Il est ainsi possible de distinguer pour chaque mode :

- L'énergie cinétique  $\mathcal{T}_r = \dot{q}_r^2$  ; on a  $\sum_{r=1}^N \mathcal{T}_r = \mathcal{T}_m$  ;
- L'énergie potentielle  $\mathcal{V}_r = \hat{\omega}_r^2 q_r^2$  ; on a  $\sum_{r=1}^N \mathcal{V}_r \simeq \mathcal{V}_m$  ; en effet la matrice de raideur  $\mathbf{K}_{co}$  n'est pas rigoureusement diagonale et un faible couplage existe entre les modes ;
- On peut alors définir l'énergie mécanique modale :

$$\mathcal{E}_r = \mathcal{T}_r + \mathcal{V}_r = \dot{q}_r^2 + \hat{\omega}_r^2 q_r^2, \quad (8.11)$$

La somme de ces énergies n'est pas tout à fait l'énergie mécanique ; elle constitue cependant une bonne estimation tant que  $\mathbf{K}_{co}$  est presque diagonale. On peut utiliser l'énergie de chaque mode pour avoir une idée de la répartition des énergies. On peut aussi définir les puissances dépendant de chaque mode :

- La puissance dissipée  $\mathcal{D}_r = 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r^2$  ; on a  $\sum_{r=1}^N \mathcal{D}_r = \mathcal{D}_m$  ;
- La puissance de couplage  $\mathcal{C}_r = \dot{q}_r \chi_r Q$  ; on a  $\sum_{r=1}^N \mathcal{C}_r = \mathcal{C}_m$  .

### Énergie électrique

En multipliant la ligne du degré de liberté électrique du système (8.5) par  $\dot{Q}$  on obtient une expression des puissances électriques pendant la phase circuit fermé :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\mathcal{E}_e = \frac{d}{dt}(\mathcal{T}_e + \mathcal{V}_e) = -\mathcal{D}_e + \mathcal{C}_e,} \quad (8.12)$$

où :

- $\mathcal{E}_e$  est l'énergie électromagnétique, somme de l'énergie stockée dans l'inductance  $\mathcal{T}_e = 1/2\dot{Q}\frac{1}{\omega_e^2}\dot{Q}$  et de l'énergie potentielle stockée dans la capacité de l'élément piézoélectrique  $\mathcal{V}_e = 1/2Q^2$  ;
- $\mathcal{D}_{em} = \dot{Q}^2 \frac{2\xi_e}{\omega_e}$  est la puissance électrique dissipée par effet Joule, toujours positive ;
- $\mathcal{C}_e = \dot{Q}\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co}$  est la puissance de couplage de l'effet piézoélectrique direct (effet de la force électromotrice sur la charge électrique).

Pendant la phase circuit ouvert, comme le courant est nul, il y a conservation de  $\mathcal{V}_e$  et (8.12) reste valable :

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}_e = \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\mathcal{T}_e}_{=0} + \underbrace{\mathcal{V}_e}_{\text{constante}} \right) = - \underbrace{\mathcal{D}_e}_{=0} + \underbrace{\mathcal{C}_e}_{=0}. \quad (8.13)$$

## Énergie totale

En ajoutant les équations (8.10) et (8.12) on écrit toutes les puissances du système :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e) = -\mathcal{D}_m - \mathcal{D}_e + \mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e + \mathcal{P}_{\text{ext}}, \quad (8.14)$$

or on peut remarquer que les termes  $\mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e$  dérivent d'une énergie :

$$\mathcal{C}_m + \mathcal{C}_e = \dot{Q}\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} + \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q = \frac{d}{dt}(\mathbf{q}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q). \quad (8.15)$$

En notant  $\mathcal{E}_{em} = -\mathbf{q}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q$  l'énergie de couplage électromécanique on peut écrire la variation d'énergie totale du système :

$$\boxed{\frac{d}{dt}(\underbrace{\mathcal{E}_m + \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_{em}}_{\mathcal{E}_t}) = -\mathcal{D}_m - \mathcal{D}_e + \mathcal{P}_{\text{ext}}} \quad (8.16)$$

où l'on introduit  $\mathcal{E}_t$  l'énergie totale, somme de l'énergie mécanique, électrique et de couplage. L'énergie de couplage peut être négative ; par contre on peut remarquer que l'énergie totale peut se décomposer en deux parties toujours positives, et est donc elle aussi toujours positive :

- L'énergie cinétique totale, somme de l'énergie cinétique mécanique et de l'énergie électromagnétique stockée dans la bobine :  $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_m + \mathcal{T}_e = 1/2\dot{\mathbf{q}}_{cf}^\top \mathbf{M}_{cf} \dot{\mathbf{q}}_{cf}$  ;
- L'énergie potentielle totale, somme de l'énergie potentielle mécanique, électrique et de couplage :  $\mathcal{V}_t = \mathcal{V}_m + \mathcal{V}_e + \mathcal{E}_{em} = 1/2\mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf}$ . On peut montrer que cette énergie est toujours positive :

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{q}_{cf} \in \mathbb{R}^{N+1} \quad \mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf} &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 q_i^2 + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \chi_i q_i \chi_j q_j - \sum_{i=1}^N \chi_i q_i Q - \sum_{j=1}^N \chi_j q_j Q + Q^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \omega_i^2 q_i^2 + \sum_{i=1}^N \chi_i q_i \sum_{j=1}^N \chi_j q_j - \sum_{i=1}^N \chi_i q_i Q - \sum_{j=1}^N \chi_j q_j Q + Q^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \underbrace{\omega_i^2 q_i^2}_{\geq 0} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^N \chi_i q_i - Q\right)^2}_{=V^2 \geq 0} \geq 0. \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ceci permet d'ailleurs d'établir que  $\mathbf{K}_{cf}$  est définie positive ; en effet supposons une énergie potentielle totale nulle :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathbf{q}_{cf}^\top \mathbf{K}_{cf} \mathbf{q}_{cf} &= 0 \\ \text{alors } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, q_i &= 0 \text{ et } V = \left(-\sum_{i=1}^N \chi_i q_i + Q\right) = 0 \\ \text{alors } \forall i \in \llbracket 1, N \rrbracket, q_i &= 0 \text{ et } Q = 0, \end{aligned} \quad (8.18)$$

la seule solution possible est  $\mathbf{q}_{cf}$  vecteur nul. Notons que  $\mathbf{K}_{cf}$  est symétrique, définie positive et donc inversible.

On peut représenter sur un diagramme (fig. 8.1) les différentes énergies et puissances présentes dans le système.



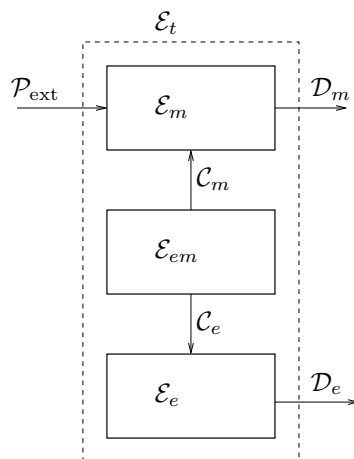


FIG. 8.1: Relations entre les énergies et puissances transférées et dissipées. Le sens des flèches représente la convention de signe adoptée aux équations (8.10) et (8.12).  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ ,  $\mathcal{C}_m$  et  $\mathcal{C}_e$  peuvent être négatives.

## 8.2 Stratégies de commutation

### 8.2.1 Critères d'optimisation de la réduction de vibrations

#### Puissance mécanique transférée

Une manière d'optimiser l'effet du switch consiste à observer que dans l'équation (8.10), l'effet de la charge sur l'énergie mécanique est  $\mathcal{C}_m$  ; c'est le seul terme de puissance mécanique que l'on peut modifier par l'intermédiaire du switch. Pour diminuer l'amplitude des vibrations, on se fixe comme objectif de réduire le plus rapidement possible l'énergie mécanique, c'est-à-dire d'avoir  $\mathcal{C}_m$  grand et négatif : *on fera en sorte que l'effet piézoélectrique freine la partie mécanique*. Cette idée est illustrée sur la figure (8.2).

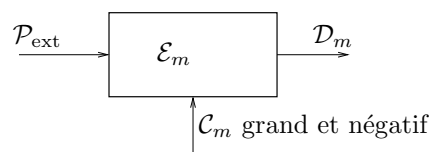


FIG. 8.2: Optimisation de l'effet de la charge sur la partie mécanique.

#### Puissance électrique dissipée

Une autre manière d'optimiser l'effet du switch consiste à observer que dans l'équation (8.16) les deux sources de dissipation sont la dissipation mécanique et électrique ; on peut donc chercher à optimiser l'effet du switch en choisissant les instants de commutation de telle sorte que *la puissance dissipée dans la résistance soit maximale*. Cette idée est illustrée sur la figure (8.3).

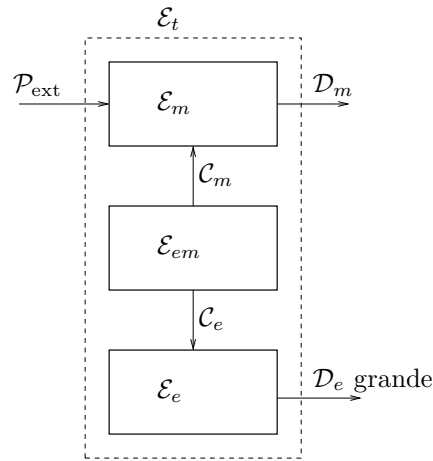


FIG. 8.3: Optimisation de la dissipation électrique.

### Puissance électrique transférée

Un point de vue intermédiaire consiste à supposer que l'énergie de couplage reste bornée ; alors maximiser  $\mathcal{C}_e$  devrait permettre d'obtenir une valeur négative et élevée de  $\mathcal{C}_m$ , c'est à dire qu'on on fera en sorte que l'effet piézoélectrique transfère le plus possible d'énergie vers la partie électrique. Cette idée est illustrée sur la figure (8.4).

On peut aussi lier cette idée à la maximisation de la dissipation électrique en remarquant que la puissance dissipée et transférée sont liées :

$$\mathcal{D}_e = \mathcal{C}_e - \frac{d}{dt} \mathcal{E}_e. \quad (8.19)$$

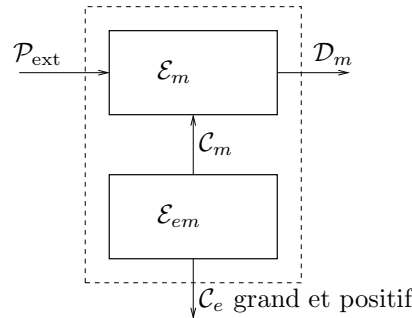


FIG. 8.4: Optimisation de l'effet de la partie mécanique sur l'énergie électrique

### 8.2.2 Stratégies de commutation multimode

Les remarques précédentes sur l'énergie permettent d'établir des stratégies de commutation.

#### Stratégie 1

Cette stratégie est celle habituellement utilisée pour la technique SSDI. Elle consiste à maximiser  $\mathcal{C}_m$  dans (8.10) (figure 8.2), en rappelant l'expression de la tension (8.4) :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_m &= \dot{\mathbf{q}}_{co}^\top \boldsymbol{\chi} Q \\
 &= \boldsymbol{\chi}^\top \dot{\mathbf{q}}_{co} Q \\
 &= (\dot{Q} - \dot{V})Q,
 \end{aligned}$$

ce qui en circuit ouvert, comme  $\dot{Q} = 0$ , donne :

$$\mathcal{C}_m|_{\text{circuit ouvert}} = -\dot{V}Q. \quad (8.20)$$

Comme on souhaite obtenir une puissance négative, il faut changer le signe de  $Q$  en fermant le switch chaque fois que  $\dot{V} = 0$  ; cela devrait permettre d'avoir une puissance négative pendant les phases circuit ouvert, supposées les plus longues. On peut remarquer que cette stratégie est exactement la même que la stratégie 1 du paragraphe 7.5 pour un système à un ddl ; il se pourrait donc qu'elle aie les mêmes défauts, à savoir que parfois le signe de  $Q$  risque de ne pas être le bon.

### Stratégie 2

En considérant l'expression (8.20), on peut améliorer la stratégie ci-dessus en vérifiant explicitement que la puissance sera négative immédiatement après le switch. Ainsi, pour fermer le switch à l'instant  $t_{n+1}$ , on vérifie :

- Le signe de  $\dot{V}$  par continuité juste après la fermeture du switch ;
- Le signe de  $Q$  en utilisant la formule (7.16), adaptée au cas multimode pour estimer sa valeur après le switch :

$$Q_{\text{est}} = \sum_{r=1}^N k_r \omega_r q_r(t_{n+1})(1 + X) - XQ_n = (1 + X)\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} - XQ_n \quad (8.21)$$

cette estimation repose sur l'hypothèse d'un switch très court par rapport à l'évolution mécanique ; il faut remarquer que cette hypothèse n'est ici plus forcément vraie.

Alors le switch se ferme lorsque :

- la dérivée de la tension s'annule :  $\dot{V}(t_{n+1}) = 0$
- la puissance estimée immédiatement après le switch sera négative :  $\mathcal{C}_m(t_{n+1}^+) \simeq -\dot{V}(t_{n+1}^+)Q_{\text{est}} \leq 0$

Cette stratégie est très similaire à la stratégie 2 du paragraphe 7.5, à la différence que la participation de tous les modes est ici prise en compte.

### Stratégie 3

En considérant l'expression (8.20), on peut aussi se fixer comme objectif de maximiser  $Q$  ; alors on suppose que le signe de  $\mathcal{C}_m$  sera spontanément négatif. Cette démarche consiste aussi à maximiser  $\mathcal{C}_e$  (figure 8.4) pour avoir une charge électrique importante dans l'élément piézoélectrique. Ainsi, on s'intéresse aux phases de circuit fermé. La puissance transférée s'écrit :  $\mathcal{C}_e = \dot{Q}\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co}$  ; on distingue deux éléments dans cette expression :

- le courant  $\dot{Q}$  ;
- la force électro-motrice de l'élément piézoélectrique  $\boldsymbol{\chi}^\top \mathbf{q}_{co} = V - Q$  (notée  $E_k$  sur la figure 3.4).

On fait l'hypothèse que la charge va diminuer ou changer de signe, donc que le courant sera de signe opposé au signe de la charge au début de la phase de commutation. Alors, en faisant l'hypothèse que la force électro-motrice  $\chi^\top \mathbf{q}_{co}$  est à peu près constante pendant cette phase (c'est à dire que la partie mécanique évolue peu), on trouve deux cas possibles :

- Soit la fém est du même signe que la charge initiale et  $\mathcal{C}_e < 0$ ; la valeur absolue de la charge décroît (cas illustré figure 7.19 à gauche, pour un système 1 ddl)
- Soit la fém est de signe opposé à la charge initiale et  $\mathcal{C}_e > 0$ ; la valeur absolue de la charge croît (cas illustré figure 7.19 à droite, pour un système 1 ddl)

C'est une démarche identique à celle utilisée pour définir la stratégie 3 pour un seul mode (§7.5, figure 7.19). En vérifiant que le signe de  $Q\chi^\top \mathbf{q}_{co}$  est négatif on devrait *s'assurer que  $\mathcal{C}_e$  soit positive, c'est à dire que de l'énergie soit transférée de la partie mécanique à la partie électrique.*<sup>3</sup> Finalement, cela permettra de dissiper beaucoup d'énergie par effet Joule, comme expliqué au paragraphe 8.2.1.

### Autres stratégies multimode

Les simulations et les expériences montrent que les critères proposés ci-dessus ont tous la même limite : l'influence de modes haute fréquence fait que  $\dot{V}$  change très souvent de signe. Ainsi, la commutation est déclenchée très fréquemment, et la charge accumulée n'est pas très importante. On peut trouver dans la littérature d'autres idées pour réduire l'énergie de plusieurs modes à la fois, dont certaines évitent cet écueil :

- dans [24] les auteurs font une analyse énergétique similaire à celle de l'énergie mécanique ci-dessus (§8.2.1) et aboutissent aux mêmes conclusions sur la stratégie à suivre (§8.2.2). Néanmoins, ils proposent de filtrer  $V$  afin de ne retenir que la participation de certains modes, au lieu de tous les prendre en compte. Cela permet d'éviter que des modes haute fréquence, peu énergétiques mais perturbant beaucoup  $\dot{V}$ , ne déclenchent trop souvent la commutation.
- Bien que les articles initiaux n'en fassent pas mention [83], les dispositifs expérimentaux de commutation de l'équipe du LGEF comprennent un filtre passe bas qui évite le problème de commutation trop fréquente [85],[48].
- Dans [34] les auteurs proposent de commuter sur les maxima de  $V$  qui dépassent significativement le niveau moyen. Ce critère a l'avantage de pouvoir être mis simplement en œuvre avec des circuits autonomes [48]. En procédant ainsi une charge importante est stockée dans l'élément piézoélectrique. L'idée des auteurs est de maximiser la puissance électrique dissipée (§8.2.1).
- Dans [16, 17], un filtrage passe-bas de la tension est utilisé pour éviter les problèmes expérimentaux, même si les simulations font appel à une mesure directe du déplacement.
- Dans [58] l'auteur utilise un contrôleur de type LQR pour déclencher la commutation, avec un nombre de modes observés ou pris en compte limité par l'électronique.

## 8.3 Simulation numérique

### 8.3.1 Simulation de la réponse libre

On se propose de calculer la réponse libre du système sous forme quasi-analytique en écrivant la solution à partir d'exponentielles de matrices après avoir écrit le système à résoudre

<sup>3</sup>Je remercie ici Gaël Sebal, qui m'a donné l'idée d'écrire cette puissance lors d'une discussion lors d'ICAST 2008.

sous forme d'équations d'état.

### Équations d'état

En l'absence d'efforts extérieurs les équations (8.3,8.7) s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{co}\ddot{\mathbf{q}}_{co} + \mathbf{C}_{co}\dot{\mathbf{q}}_{co} + \hat{\mathbf{K}}_{co}\mathbf{q}_{co} = \chi Q & \text{et } \dot{Q} = 0 & \text{circuit ouvert} \\ \mathbf{M}_{cf}\ddot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{C}_{cf}\dot{\mathbf{q}}_{cf} + \mathbf{K}_{cf}\mathbf{q}_{cf} = 0 & & \text{circuit fermé.} \end{cases} \quad (8.22)$$

Sous forme d'équation d'état on obtient :

$$\begin{cases} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{co} & \mathbf{M}_{co} \\ \mathbf{M}_{co} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{co}} \dot{\mathbf{X}}_{co} + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_{co} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{co}} \mathbf{X}_{co} = \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} Q & \text{circuit ouvert} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{C}_{cf} & \mathbf{M}_{cf} \\ \mathbf{M}_{cf} & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}_{cf}} \dot{\mathbf{X}}_{cf} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{K}_{cf} & 0 \\ 0 & -\mathbf{M}_{cf} \end{pmatrix}}_{\mathbf{B}_{cf}} \mathbf{X}_{cf} = 0 & \text{circuit fermé,} \end{cases} \quad (8.23)$$

avec  $\mathbf{X}_{co} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{co} \\ \dot{\mathbf{q}}_{co} \end{pmatrix}$  et  $\mathbf{X}_{cf} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{cf} \\ \dot{\mathbf{q}}_{cf} \end{pmatrix}$ .

La continuité (éq. (8.8)) permet de décrire les transitions entre circuit ouvert et fermé. Chacun de ces problèmes est de la forme

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{B}\mathbf{X} = \mathbf{F}$$

avec l'effort extérieur nul ou constant ; on cherche la solution sous la forme d'une somme  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_p + \mathbf{X}_g$  avec

- $\mathbf{X}_p$  solution particulière de l'équation complète (SPEC), donnée dans le cas  $\mathbf{F}$  constante par :

$$\mathbf{X}_p = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{F}$$

- $\mathbf{X}_g$  solution générale de l'équation homogène (SGEH) ; celle-ci s'écrit

$$\mathbf{X}_g(t) = e^{-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}t}\mathbf{X}_g(0),$$

ou encore

$$\mathbf{X}_g(t) = \mathbf{\Phi}e^{-\mathbf{\Lambda}t}\mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{X}_g(0)$$

avec  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbf{\Phi}$  matrices des valeurs propres et vecteurs propres du problème aux valeurs propres s'écrivant

$$\mathbf{B}\mathbf{\Phi} = \mathbf{A}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Lambda}$$

On cherche donc les valeurs et vecteurs propres de  $\mathbf{A}_{co}$  et  $\mathbf{B}_{co}$  et de  $\mathbf{A}_{cf}$  et  $\mathbf{B}_{cf}$  solutions<sup>4</sup> de :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{co}\mathbf{\Phi}_{co} &= \mathbf{A}_{co}\mathbf{\Phi}_{co}\mathbf{\Lambda}_{co} \\ \mathbf{B}_{cf}\mathbf{\Phi}_{cf} &= \mathbf{A}_{cf}\mathbf{\Phi}_{cf}\mathbf{\Lambda}_{cf}, \end{aligned} \quad (8.24)$$

et on peut écrire directement la réponse transitoire en circuit fermé (après la  $n$ -ième fermeture) avec la solution générale, en prenant en compte les conditions initiales  $\mathbf{X}_{cf}(t_n)$ , calculées par continuité :

$$\mathbf{X}_{cf}(t) = \underbrace{\mathbf{\Phi}_{cf}e^{-\mathbf{\Lambda}_{cf}(t-t_n)}}_{\text{SGEH}} \underbrace{\mathbf{\Phi}_{cf}^{-1}\mathbf{X}_{cf}(t_n)}_{\text{C.I.}}, \quad (8.25)$$

<sup>4</sup>En remarquant que l'inductance ne doit pas être nulle, sinon  $\mathbf{A}_{cf}$  est singulière.

tandis que la réponse en circuit ouvert après la  $n$ -ième ouverture dépend de la condition initiale  $\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n)$  et de la charge  $Q_n$  stockée sur les électrodes, calculées par continuité. On cherche donc la solution particulière et générale et on trouve

$$\mathbf{X}_{co}(t) = \underbrace{\Phi_{co} e^{-\Lambda_{co}(t-\hat{t}_n)} \Phi_{co}^{-1}}_{\text{SGEH}} \left[ \underbrace{\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n)}_{\text{C. I}} - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{co}^{-1} \boldsymbol{\chi} \\ 0 \end{pmatrix} Q_n \right] + \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co}^{-1} \boldsymbol{\chi} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{SPEC}} Q_n. \quad (8.26)$$

Cette réponse est la somme d'un régime établi, qui est la réponse statique à l'effet de la charge électrique, et d'un régime transitoire. Le fait d'utiliser les matrices des valeurs propres permet de calculer les exponentielles matricielles sous forme de matrice diagonale, c'est à dire que l'évolution temporelle des vecteurs propres est découplée.

### Mise en œuvre numérique

Une particularité remarquable d'une simulation de réponse libre avec switch est qu'il s'agit d'une succession de régimes transitoires ; l'observation montre que chacun de ces régimes (circuit ouvert ou circuit fermé) ne dure jamais très longtemps<sup>5</sup>. Il serait donc très intéressant d'accélérer le plus possible chacun de ces calculs, quitte à devoir calculer préalablement quelques résultats.

Pour les phases circuit ouvert et fermé on crée un vecteur de pas de temps<sup>6</sup>  $\Delta t$ , de longueur  $N_t$ . Ensuite les valeurs de  $e^{-\Lambda_{co} t}$  et  $e^{-\Lambda_{cf} t}$  sont calculées pour ces vecteurs et réarrangées en colonnes. Ce calcul est fait une seule fois ; on obtient des matrices rectangulaires qu'on peut noter  $\mathbf{E}_{co}$  et  $\mathbf{E}_{cf}$ . Chaque ligne de ces matrices représente la réponse d'un des vecteurs propres (de  $\mathbf{A}_{cf}^{-1} \mathbf{B}_{cf}$  ou  $\mathbf{A}_{co}^{-1} \mathbf{B}_{co}$  respectivement), qui est une exponentielle décroissante.

$$[\mathbf{E}_{co}]_{ij} = \left[ e^{-[\Lambda_{co}]_{ii}(j\Delta t)} \right]_{ij}, [\mathbf{E}_{cf}]_{ij} = \left[ e^{-[\Lambda_{cf}]_{ii}(j\Delta t)} \right]_{ij}. \quad (8.27)$$

Alors, à condition de réarranger les conditions initiales dans l'espace des vecteurs propres (ce qu'on obtient grâce à la matrice de passage) sous forme de matrices diagonales  $\mathbf{D}_{co}$  et  $\mathbf{D}_{cf}$ ,

$$[\mathbf{D}_{co}]_{ii} = \left[ \Phi_{co}^{-1} \left( (\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n) - \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{co}^{-1} \boldsymbol{\chi} \\ 0 \end{pmatrix} Q) \right) \right]_i, [\mathbf{D}_{cf}]_{ii} = [\Phi_{cf}^{-1} \mathbf{X}_{cf}(t_n)]_i. \quad (8.28)$$

On peut obtenir la réponse du système *sur tous les pas de temps en une seule opération de multiplication* :

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + \Delta t), \mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + 2\Delta t), \dots, \mathbf{X}_{co}(\hat{t}_n + N_t \Delta t)] &= \Phi_{co} \mathbf{D}_{co} \mathbf{E}_{co} + \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{co}^{-1} \boldsymbol{\chi} \\ 0 \end{pmatrix} Q \quad (8.29) \\ [\mathbf{X}_{cf}(t_n + \Delta t), \mathbf{X}_{cf}(t_n + 2\Delta t), \dots, \mathbf{X}_{cf}(t_n + N_t \Delta t)] &= \Phi_{cf} \mathbf{D}_{cf} \mathbf{E}_{cf}. \quad (8.30) \end{aligned}$$

Pour simuler le comportement du système on passe par les étapes suivantes :

- On fixe une condition initiale, puis on calcule la réponse en circuit ouvert de 0 à  $N_t \Delta t$  ;
- On identifie le premier instant de commutation suivant la stratégie utilisée ; on tronque alors la réponse à cet instant ;
- Par continuité, on calcule la réponse en circuit fermé ; on repère l'instant d'annulation du courant et on tronque la réponse ;

<sup>5</sup> pas plus de 6 périodes du mode le plus bas pour les phases circuit ouvert et 2 pour les phases circuit fermé.

<sup>6</sup>  $\Delta t$  doit être suffisamment petit pour assurer une bonne précision du calcul.

- On alterne ensuite entre circuit ouvert et fermé, jusqu'à avoir simulé la durée requise.

Chaque étape fait donc appel à une multiplication de matrice, puis à quelques tests, et finalement à un assemblage. L'exponentielle matricielle n'est calculée qu'une seule fois, ce qui accélère les calculs. Le passage par les valeurs propres permet de réordonner les indices et d'avoir une seule multiplication à faire pour l'intervalle de temps  $[0, N_t \Delta_t]$ .

### Comparaison avec le modèle analytique 1 DDL

Les résultats de l'expérience présentée figure 7.9, calculés avec le modèle analytique du paragraphe 7.3.2, sont comparés à des résultats obtenus avec le modèle ci-dessus. On choisit une période mécanique de 2 unités de temps et une période électrique 100 fois plus faible, afin de rester proche de l'hypothèse faite pour le modèle analytique qui est que la partie électrique réagit instantanément. Les résultats sont présentés sur la figure 8.5 où l'on constate une assez bonne superposition des tracés ; néanmoins, la coïncidence n'est pas exacte. La matrice  $\Phi_{cf}$  du problème aux valeurs propres de l'équation (8.24) est en effet mal conditionnée ; la multiplication par  $\Phi_{cf}^{-1}$  à chaque fermeture du switch pour calculer l'évolution du système provoque des erreurs numériques. On remarque cependant que l'évolution à long terme du système est correctement représentée - c'est à dire que les erreurs ne se cumulent pas.

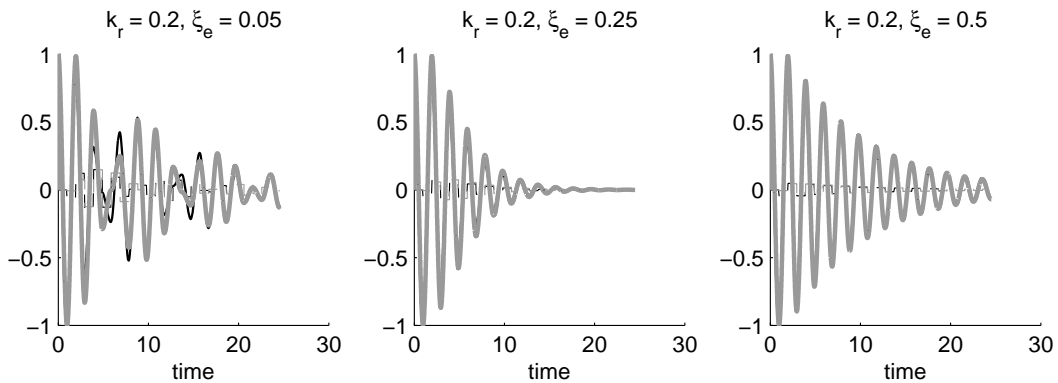


FIG. 8.5: Réponse d'un système SSDI pour trois amortissements électriques différents ; en trait plein le déplacement, pointillés, la charge ; en noir résultats analytiques, en gris résultats numériques

### 8.3.2 Simulation de la réponse forcée

#### Choix du modèle

À partir du moment où un effort extérieur (qui peut prendre une forme quelconque) s'exerce au cours du temps sur le système, sa réponse durant les phases circuit ouvert ou fermé nécessite un calcul au cours du temps, et ne peut plus être écrite immédiatement à partir des conditions initiales<sup>7</sup>.

On décide d'utiliser un algorithme de Newmark pour modéliser la réponse du système ; en raison de la projection sur les modes déjà effectuée la taille des matrices est réduite et les calculs sont relativement rapides. On procède par étapes :

<sup>7</sup>Il est probablement possible de créer un modèle semi-analytique comparable à ce qui a été fait dans le cas 1 DDL avec un régime établi en réponse à une excitation harmonique ; néanmoins la complexité des calculs en rend l'intérêt douteux par rapport à un algorithme de Newmark, plus souple

- On commence par une étape d'évolution en circuit ouvert, où l'on simule le système (8.3) ; à chaque pas de temps, on vérifie si le switch se ferme, suivant la stratégie adoptée ;
- à la fermeture du switch, les conditions initiales sont données par continuité et on simule l'évolution du système (8.7) ; à chaque pas de temps on vérifie si le courant s'annule et donc si le switch s'ouvre ;
- on alterne ensuite entre circuit ouvert et fermé, jusqu'à avoir simulé sur la durée requise.

### Algorithme de Newmark

On utilise un algorithme de Newmark adapté à la simulation d'un système dynamique simple [38] ; le système étudié est (8.3) ou (8.7) que l'on met sous la forme générale :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = F(t), \quad (8.31)$$

avec les matrices  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ , et  $\mathbf{K}$  constantes et le forçage  $F$  dépendant du temps. Les conditions initiales  $\dot{u}(0)$  et  $u(0)$  sont connues.

On choisit d'étudier le système à des instants discrets  $t_n$  avec  $n \in [0, N_t]$  séparés par un pas de temps  $\Delta t$  ; on cherche une approximation de la solution  $\mathbf{u}(t)$  sous forme de valeurs discrètes  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{a}_n$  qui sont des approximations de  $\mathbf{u}(t_n)$ ,  $\dot{\mathbf{u}}(t_n)$  et  $\ddot{\mathbf{u}}(t_n)$ . Le pas de temps  $\Delta t$  doit être choisi nettement inférieur à la constante de temps du phénomène le plus rapide à modéliser<sup>8</sup>. L'algorithme se présente comme suit :

- À l'instant  $t_n$  on note  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{a}_n$  les positions, vitesses et accélérations, supposées connues. L'objectif est donc de calculer  $\mathbf{d}_{n+1}$ ,  $\mathbf{v}_{n+1}$  et  $\mathbf{a}_{n+1}$ .
- Tout d'abord l'algorithme fait intervenir une étape de prédiction où l'on estime les valeurs de  $\mathbf{d}_{n+1}$  et  $\mathbf{v}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^p &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \\ \mathbf{v}_{n+1}^p &= \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (8.32)$$

- La valeur de l'accélération est calculée d'après ces valeurs estimées en résolvant le système linéaire suivant :

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S} \mathbf{a}_{n+1} = F_{n+1} - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1}^p - \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1}^p \quad (8.33)$$

dont la solution est

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} (F_{n+1} - \mathbf{C} \mathbf{v}_{n+1}^p - \mathbf{K} \mathbf{d}_{n+1}^p). \quad (8.34)$$

- Les valeurs du déplacement et de la vitesse sont corrigées avec l'accélération calculée :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \mathbf{d}_{n+1}^p + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \mathbf{v}_{n+1}^p + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1}. \end{aligned} \quad (8.35)$$

- On procède alors au calcul de l'étape suivante, et ainsi de suite pour simuler l'évolution du système, en obtenant à chaque pas de temps une approximation  $\mathbf{d}_n$ ,  $\mathbf{v}_n$  et  $\mathbf{a}_n$  des valeurs de  $u(t_n)$ ,  $\dot{u}(t_n)$  et  $\ddot{u}(t_n)$ . La valeur initiale de l'accélération peut être obtenue en utilisant l'équation (8.34) avec les valeurs initiales de position et de vitesse (connues).

---

<sup>8</sup>Il s'agit souvent de capturer l'inversion de charge ; ainsi il faut un pas de temps beaucoup plus petit que la constante de temps électrique, donc très fin. On pourrait éventuellement adopter un pas variable entre circuit ouvert et court-circuit.



Afin d'accélérer le calcul<sup>9</sup> on condense ces étapes en une seule. L'accélération peut être obtenue en injectant (8.32) dans (8.34) :

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{S}^{-1} \left( F_{n+1} - \mathbf{C}(\mathbf{v}_n + (1 - \gamma)\Delta t \mathbf{a}_n) - \mathbf{K}(\mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{a}_n) \right),$$

soit

$$\mathbf{a}_{n+1} = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{d}_n - \mathbf{S}^{-1}(\mathbf{K}\Delta t + \mathbf{C})\mathbf{v}_n - \mathbf{S}^{-1}((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{K})\mathbf{a}_n + \mathbf{S}^{-1}F_{n+1},$$

soit

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{L}_1\mathbf{d}_n + \mathbf{L}_2\mathbf{v}_n + \mathbf{L}_3\mathbf{a}_n + \mathbf{S}^{-1}F_{n+1} \quad (8.36)$$

En injectant (8.36) dans (8.35) on obtient les valeurs de la vitesse et du déplacement déjà corrigées :

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= (\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_1)\mathbf{d}_n + (\Delta t\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_2)\mathbf{v}_n + \left(\frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_3\right)\mathbf{a}_n + \beta\Delta t^2\mathbf{S}^{-1}F_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \gamma\Delta t\mathbf{L}_1\mathbf{d}_n + (\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_2)\mathbf{v}_n + ((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_3)\mathbf{a}_n + \gamma\Delta t\mathbf{S}^{-1}F_{n+1}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de dimension  $N$ . Les équations (8.37) et (8.36) peuvent être écrites sous forme d'une seule opération élémentaire qui devient alors l'unique calcul à réaliser pour chaque pas de temps :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_{n+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_1 & \Delta t\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_2 & \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta)\mathbf{I} + \beta\Delta t^2\mathbf{L}_3 \\ \gamma\Delta t\mathbf{L}_1 & \mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_2 & (1 - \gamma)\Delta t\mathbf{I} + \gamma\Delta t\mathbf{L}_3 \\ \mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2 & \mathbf{L}_3 \end{pmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{d}_n \\ \mathbf{v}_n \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_n} + \underbrace{\begin{pmatrix} \beta\Delta t^2\mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \\ \gamma\Delta t\mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \\ \mathbf{S}^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{G}} \underbrace{\begin{pmatrix} F_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{F}_{n+1}}, \quad (8.38)$$

avec  $\mathbf{L}_1 = -\mathbf{S}^{-1}\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{L}_2 = -\mathbf{S}^{-1}(\mathbf{K}\Delta t + \mathbf{C})$  et  $\mathbf{L}_3 = -\mathbf{S}^{-1}((1 - \gamma)\Delta t\mathbf{C} + (1 - 2\beta)\frac{\Delta t^2}{2}\mathbf{K})$ .

On peut calculer une fois pour toutes les matrices  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{G}$  pour les systèmes circuit ouvert et fermé; alors chaque pas d'évolution consiste d'après l'équation (8.38) en deux multiplications et une addition. Pour le cas circuit ouvert, l'effet de la charge électrique est pris en compte comme un effort ajouté.

### Comparaison avec le modèle semi-analytique 1ddl

On compare les résultats obtenus par le modèle ci-dessus avec ceux du modèle semi-analytique développé au chapitre 7.4. On choisit une pulsation mécanique pour l'unique mode  $\omega_1 = 1$ , une pulsation électrique  $\omega_1 = 20\omega_1$  (pour rester près de l'hypothèse d'une commutation rapide, mais ne pas trop alourdir les calculs en raison d'un pas de temps devenant très fin), et une excitation hors-résonance  $\Omega = 1.5\omega_1$  afin de faire apparaître du battement et des commutations irrégulières. On trace le déplacement et la charge électrique figure (8.6); les résultats obtenus sont extrêmement proches, avec juste une faible différence au niveau des durées fermetures du circuit.

<sup>9</sup>Le calcul étant réalisé sous Matlab avec un faible nombre de degrés de liberté il est préférable de réaliser une seule multiplication de grosses matrices plutôt que plusieurs opérations sur des matrices plus petites.

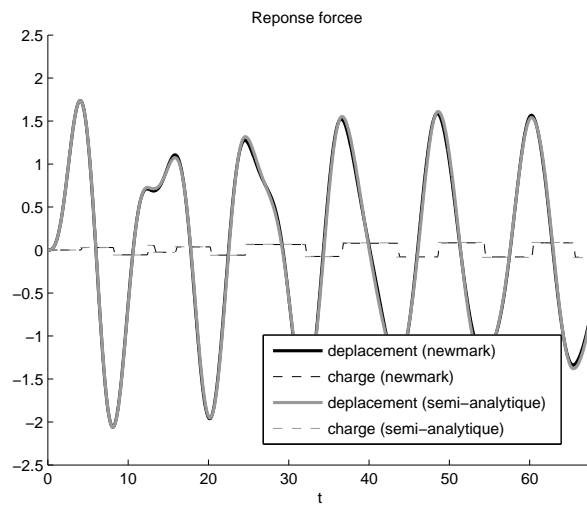


FIG. 8.6: Comparaison du modèle semi-analytique 1 ddl et calcul avec algorithme de Newmark

## 8.4 Résultats en régime libre

### 8.4.1 Effet de la stratégie de commutation pour les cas 1 ddl

À la différence du modèle du chapitre 7.2, le modèle de la réponse libre développé ci-dessus permet de prendre en compte la durée de la commutation électrique ; il permet également de prendre en compte des commutations irrégulières. On peut donc tester les différentes stratégies de commutation. Comme dans le cas de la réponse libre analytique, on définit l'amortissement équivalent comme l'amortissement mécanique qui permettrait d'obtenir la même décroissance exponentielle de l'amplitude (7.27). Pour un coefficient de couplage de 0.1 on trace cet amortissement équivalent en fonction de  $\xi_e$ , pour les trois stratégies utilisées, ainsi qu'un rappel de l'amortissement équivalent lié aux valeurs propres de la matrice d'amplification définie avec le modèle analytique du paragraphe 7.3.3. La valeur de  $\omega_e$  est fixée à 10.

Les résultats tracés figure 8.7 montrent que l'amortissement optimal est le même pour les trois stratégies et que les performances obtenues sont pratiquement similaires à celles prévues par le modèle 1 ddl analytique. On cherche alors pour tous les coefficients de couplage l'amortissement électrique optimal  $\xi_e^{\text{opt}}$  ainsi que l'amortissement équivalent ajouté ; ceux-ci sont tracés figure 8.8, où on constate des résultats très proches de ceux du modèle analytique quelle que soit la stratégie retenue. Les stratégies 2 et 3 permettent d'obtenir des résultats légèrement meilleurs.

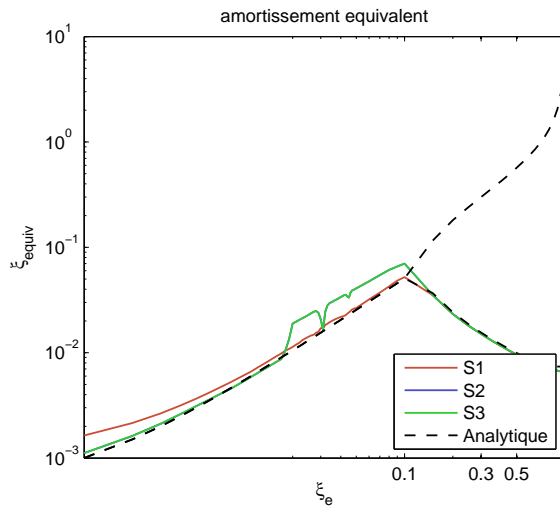


FIG. 8.7: Amortissement équivalent obtenu pour différentes valeurs de  $\xi_e$  et stratégies.

### 8.4.2 Choix de l'inductance

On se place maintenant dans le cas d'un couplage de 0.1, avec l'amortissement électrique optimal correspondant ( $\xi_e \simeq 0.127$ ), et on fait varier la pulsation du circuit électrique (liée à l'inductance) ; on trace l'amortissement équivalent obtenu (taux de décroissance) en fonction de  $\omega_e$  sur la figure 8.9, comparé à l'amortissement prévu avec le modèle analytique (qui lui ne prend pas en compte  $\omega_e$ ). On constate que :

- pour de faibles valeurs de  $\omega_e$ , la performance est dégradée, en particulier pour  $\omega_e \leq 3\omega_1$  ;

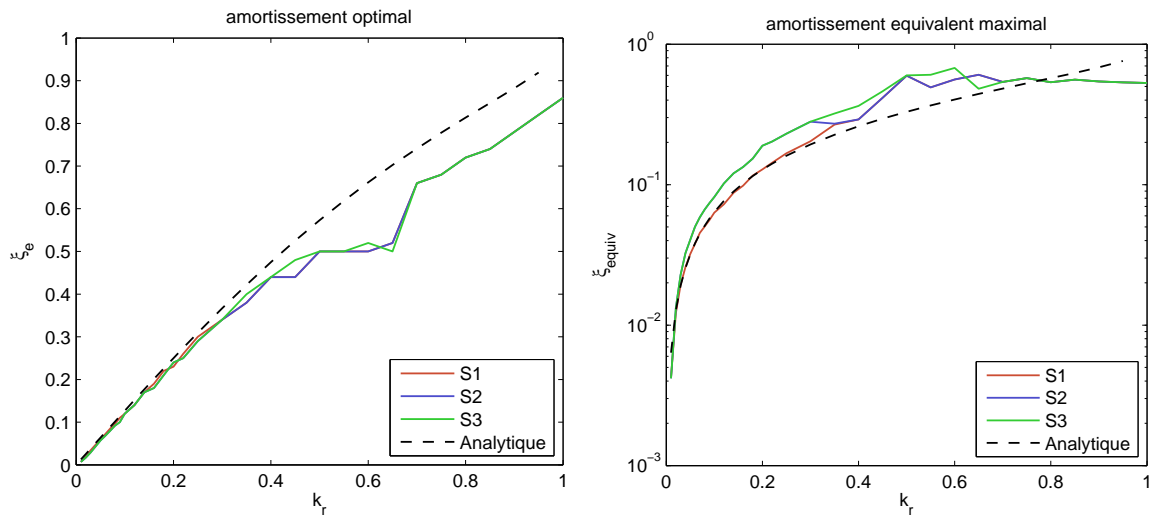


FIG. 8.8: (à g.) valeur optimale de  $\xi_e$ ; (à dr.) amortissement équivalent obtenu avec cette valeur

- pour des valeurs élevées  $\omega_e \geq 10\omega_1$ , on obtient la performance prédite par le modèle avec commutations instantanées;
- le choix de la stratégie n'a pas d'importance pour ce résultat.

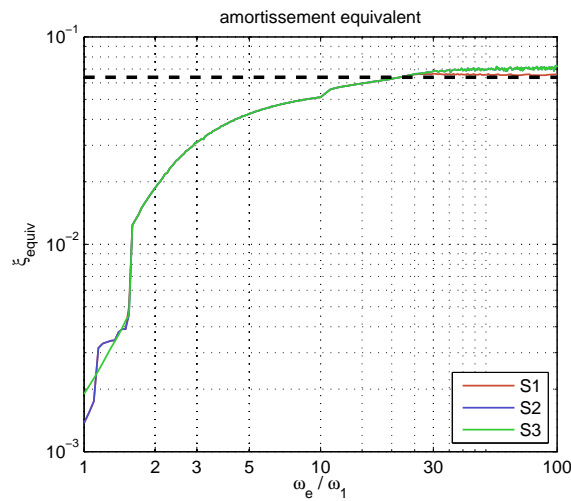


FIG. 8.9: Amortissement équivalent obtenu pour différentes valeurs de  $\omega_e$  et stratégies.

### 8.4.3 Systèmes à 2 DDL

#### Amortissement équivalent

Afin de pouvoir comparer diverses situations à plusieurs ddl, on définit par convention un amortissement équivalent, ramené sur le mode 1. Pour ce faire on compare la réponse libre d'un mode avec amortissement modal :

$$q_1(t) = q_0 e^{-\hat{\omega}_1 \xi_1 t} \cos(\hat{\omega}_1 t) \quad (8.39)$$

dont l'énergie mécanique décroît de manière à peu près exponentielle<sup>10</sup> :

$$\mathcal{E}_1 = \frac{1}{2}(\dot{q}_1(t)^2 + \hat{\omega}_1^2 q_1(t)^2) \simeq \hat{\omega}_1^2 q_0^2 e^{-2\hat{\omega}_1 \xi_1 t} \quad (8.40)$$

dans ce qui suit, on observe le taux de décroissance de l'énergie totale (8.10) du système ; ce taux prend en compte l'énergie de l'ensemble des modes et la partie électrique. Pour pouvoir comparer les performances, on ramène ce taux à un amortissement équivalent, c'est à dire *l'amortissement du mode 1 qui permettrait d'avoir le même taux de décroissance*. On note cet amortissement équivalent  $\xi_{eq}$ . Afin de l'identifier, on effectue une régression linéaire sur le tracé de l'énergie totale (tracé en dB, voir par exemple figure 8.8 ) qui permet de retrouver le taux de décroissance moyen  $\tau_{dB}$  de celle-ci. Alors avec (8.40), il vient :

$$\begin{aligned} \tau_{dB} &= \left( \frac{\mathcal{E}_t(t)}{\mathcal{E}_t(0)} \right)_{dB} = 10 \log \frac{\mathcal{E}_1(t)}{\mathcal{E}_1(0)} \\ &= 10 \log(e^{-2\hat{\omega}_1 \xi_{eq} t}) \\ &= -20 \frac{\hat{\omega}_1 \xi_{eq} t}{\ln 10} \\ \Rightarrow \quad \xi_{eq} &= \frac{\ln(10)}{20\hat{\omega}_1} \tau_{dB}. \end{aligned} \quad (8.41)$$

Cette expression peut être écrite indépendamment du nombre de modes pris en compte. Dans le cas d'un système à un DDL, on retombe sur la définition de l'amortissement ajouté vue au chapitre 7.3.3 ; dans le cas d'un système à plusieurs DDL, cela permet de rendre compte des performances multimode du système en ramenant tout au premier mode uniquement.

### Exemple de simulation : cas typique

On étudie le cas d'un système arbitraire à deux modes non amortis :

- Les fréquences propres adimensionnées sont  $\omega_1 = 1$  et  $\omega_2 = 1.3$
- Les coefficients de couplages sont identiques :  $k_1 = 0.1$  et  $k_2 = 0.1$ .
- L'essai est réalisé en lâchant le système avec une amplitude initiale unitaire sur le mode 1 et nulle sur le mode 2.
- Le déplacement mesuré est la somme des modes avec des coefficients  $\Phi_1 = \Phi_2 = 1$ , comme si on mesurait la position à un emplacement où les modes ont une amplitude identique.
- Le système électrique est bien plus rapide que le mode 1 :  $\omega_e = 25\hat{\omega}_1$ , et son amortissement est la valeur optimale pour le cas 1 mode avec ce couplage (fig. 8.8)  $\xi_e = 0.127$  ; on devrait ainsi obtenir une commutation courte devant la période d'évolution mécanique du système.

Ces paramètres peuvent être résumés sous forme de tableau :

	$\omega$	$\xi$	$k_r$	ampl. init.	$\Phi$
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	1.3	0	0.1	0	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

<sup>10</sup>Avec peu d'oscillation, car on prend en compte l'énergie cinétique et potentielle.

La stratégie de commutation est basée sur la tension électrique (stratégie multimode numéro 1); les résultats tracés figure (8.10) montrent que l'amplitude décroît de manière soutenue. Le tracé des énergies totale, de chaque mode et du taux de décroissance (eq. 8.41), même figure à droite, montre que malgré un lâcher avec une amplitude nulle sur le mode 2, celui-ci est excité par la commutation. On peut remarquer que l'énergie décroît bien de manière exponentielle (décroissance linéaire en dB).

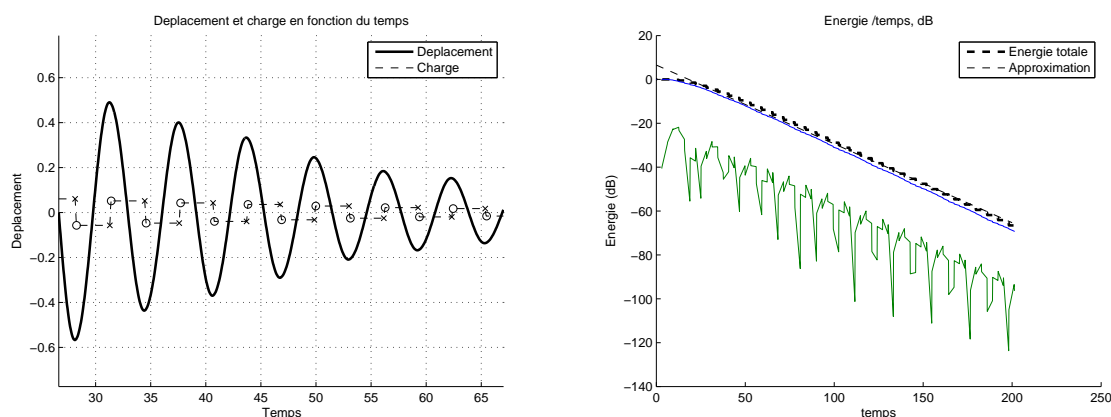


FIG. 8.10: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL de pulsations 1 et 1.3 (à dr.) Énergies totale et décroissance exponentielle; énergies mécaniques des modes 1 et 2 (bleu et vert)

### Cas pathologique

On procède maintenant à une simulation utilisant exactement les mêmes paramètres, sauf la fréquence du mode 2 : on choisit une pulsation de 3.

	$\omega$	$\xi$	$k_r$	ampl. init.	$\Phi$
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	3	0	0.1	0	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Cette pulsation triple de la première fait que la commutation, au départ synchronisée sur le mode 1, réexcite le mode 2; on constate alors une perturbation de la commutation, qui devient trop fréquente et intervient à des moments défavorables, c'est à dire tels que la charge électrique permettant de contrer le mouvement de la structure n'augmente pas beaucoup. Sur la figure (8.11) sont tracés les déplacements, charge électrique et coordonnées modales en fonction du temps. En traçant l'énergie, figure (8.12), on constate que le taux de décroissance est très inférieur à ce qu'il était à la figure (8.11).

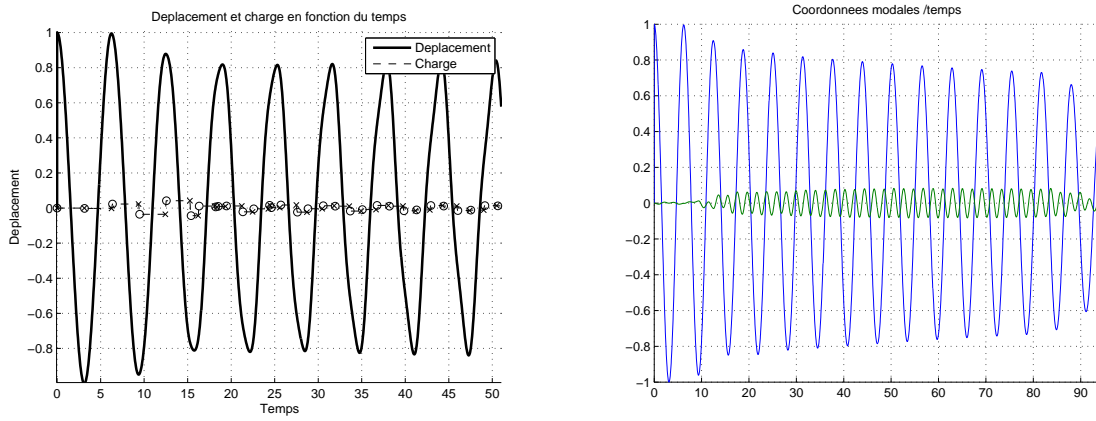


FIG. 8.11: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL dont un mode de pulsation triple de l'autre; (à dr.) amplitude des modes 1 et 2 (bleu et vert)

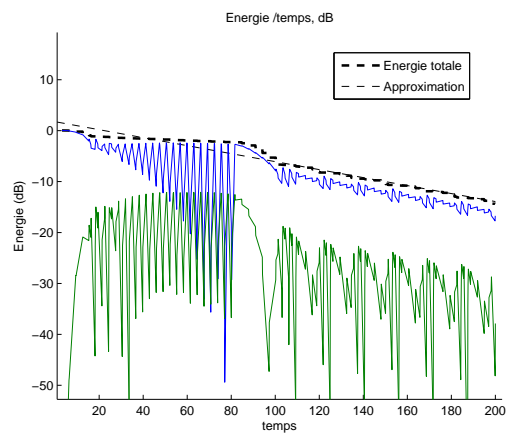


FIG. 8.12: Énergies totales et mécanique de chaque mode.

### Cas d'un mode double

On procède maintenant à une simulation identique en tout point, avec cette fois-ci le mode 2 à la même pulsation que le mode 1.

	$\omega$	$\xi$	$k_r$	ampl. init.	$\Phi$
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	1	0	0.1	0	1
shunt	$25\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Sur la figure (8.13) sont tracés les déplacements, charge électrique et coordonnées modales en fonction du temps. Le déplacement qui a été tracé dépend de l'amplitude de chaque mode par un coefficient identique ; ce déplacement décroît très rapidement. Cependant l'observation de chaque coordonnée modale (à dr.) montre que l'amplitude des deux modes ne décroît pas ; au contraire le mode 2 est excité et se met à osciller en opposition de phase avec le mode 1 ; ce mouvement n'est pas du tout amorti par le dispositif, qui atténue les vibrations en phase des deux modes, et non les vibrations hors-phase.

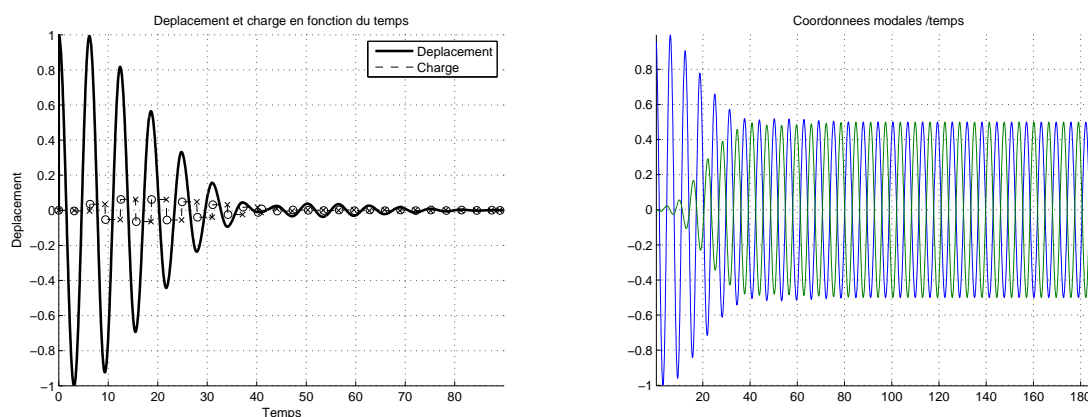


FIG. 8.13: (à g.) Déplacement et charge en fonction du temps dans un cas 2DDL avec des modes doubles ; (à dr.) amplitude des modes 1 et 2 (bleu et vert)

### Influence de modes harmoniques

On procède maintenant à des simulations en faisant varier la pulsation du mode 2 comme paramètre ; on choisit un shunt à grande pulsation pour être bien plus rapide que les deux modes.

	$\omega$	$\xi$	$k_r$	ampl. init.	$\Phi$
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	0.1 à 10	0	0.1	0	1
shunt	$100\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

Le coefficient d'amortissement équivalent, lié au taux de décroissance de l'énergie, est tracé en fonction de  $\omega_2$  figure (8.14) à gauche ; on trace également le maximum de l'énergie



mécanique du mode 2 (calculée d'après l'expression (8.11)) sur la même figure, à droite. Cela permet de visualiser la réexcitation du mode 2. On constate les effets suivants :

- Dans le cas de modes très proches ou doubles, la performance est fortement réduite, le mode 2 est fortement excité ;
- Dans le cas de modes multiples impairs le même phénomène est observé ;
- Dans le cas de modes multiples pairs, la performance est réduite, cependant la stratégie 3 permet d'éviter une réduction trop importante ;
- Dans les cas de modes non multiples, la performance n'est pas trop affectée ; on constate une certaine dégradation lorsque le mode 2 est éloigné (pulsation bien plus haute ou plus basse).

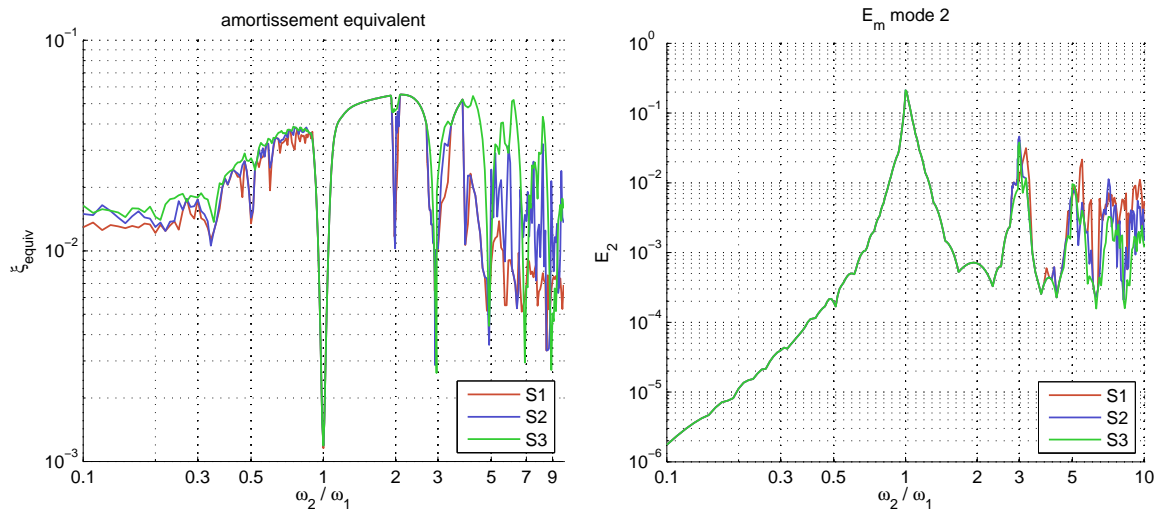


FIG. 8.14: (à g.) Amortissement équivalent en fonction de la pulsation du mode 2, avec les trois stratégies ; (à dr.) Maximum de l'énergie mécanique du mode 2 initialement au repos.

### Choix de l'inductance pour éviter l'excitation de modes supérieurs

En constatant que l'excitation du mode 2 dans les cas précédents conduit à une désynchronisation de la commutation et à une baisse de performance, on souhaite choisir une inductance différente. L'idée est qu'en prenant une inductance importante, les fluctuations de la charge seront moins brutales. On devrait ainsi moins exciter le mode 2. On garde les paramètres des simulations précédentes, mais l'on choisit arbitrairement  $\omega_2 = 7.3$  et on fait varier  $\omega_e$ .

	$\omega$	$\xi$	$k_r$	ampl. init.	$\Phi$
mode 1	1	0	0.1	1	1
mode 2	7.3	0	0.1	0	1
shunt	1 à 100 $\hat{\omega}_1$	0.127	-	0	0

En observant l'amortissement équivalent en fonction de  $\omega_e$ , tracé figure (8.15) à gauche, ainsi que le maximum de l'énergie mécanique du mode 2 (initialement au repos), calculée d'après l'expression (8.40), tracé à droite, on constate que la performance est affectée de la manière suivante :

- Pour de faibles valeurs de  $\omega_e$ , comme dans le cas d'un seul mode tracé figure (8.9), la performance n'est pas bonne quand  $\omega_e \leq 2\omega_1$ . Les changements de signe de la charge sont trop lents pour agir sur le mode visé ;
- Pour des valeurs intermédiaires de  $\omega_e$  ( $\omega_e \simeq 3\omega_1$ ) la performance est plus élevée ; l'excitation réduite du mode 2 permet d'éviter la désynchronisation ;
- Lorsque  $\omega_e \simeq \omega_2$ , l'excitation du mode 2 est très importante et la performance chute nettement, en raison de la désynchronisation du switch ;
- Finalement, avec  $\omega_e > \omega_2$ , l'excitation du mode 2 est toujours présente, mais à un niveau moindre.

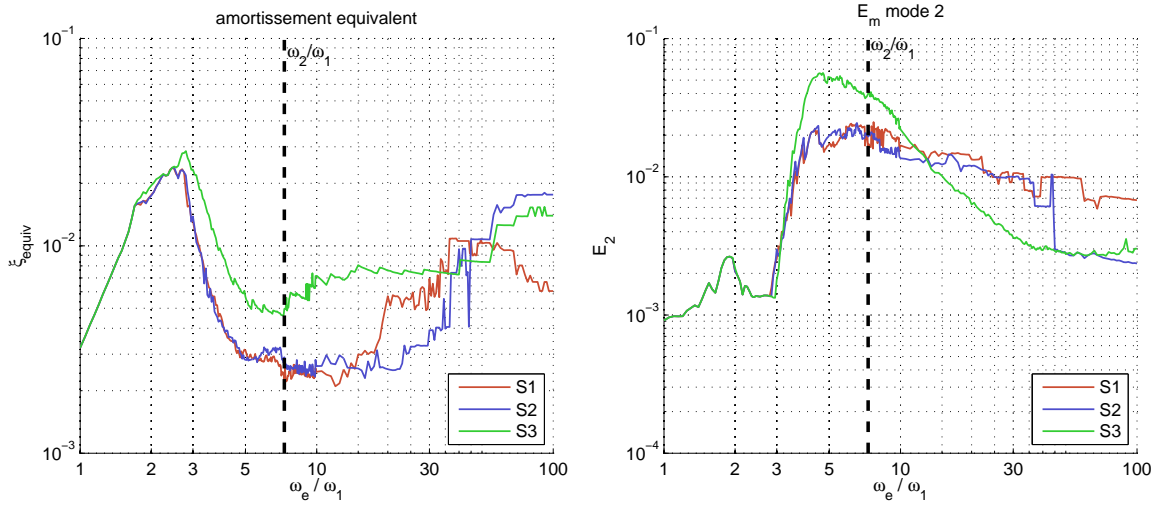


FIG. 8.15: (à g.) Amortissement équivalent en fonction de la pulsation électrique, en présence d'un deuxième mode ( $\omega_2 = 7.3$ ), avec les trois stratégies. (à dr.) Maximum de l'énergie mécanique du mode 2 initialement au repos.

#### 8.4.4 Optimisation du système

L'analyse des résultats obtenus avec le modèle de la réponse libre fait apparaître des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle à un ddl, entre autres l'amortissement électrique optimal qui est assez similaire et dépend du couplage électromécanique, comme montré figure (8.8) ; en revanche, le modèle N ddl permet de trouver quelques directions pour optimiser le système :

- Tout d'abord, la présence de modes harmoniques impairs et électromécaniquement couplés peut réduire la performance, tout comme celle de modes doubles. Il peut donc être intéressant de coupler sélectivement le mode que l'on souhaite réduire. Ce résultat est différent de ce qui est obtenu avec les shunts R et RL, où les modes voisins n'affectent pas les performances ;
- Ensuite, l'inductance doit être choisie pour que la commutation soit nettement plus rapide que le mode à réduire ; on trouve que  $\omega_e > 3\omega_1$  convient pour amortir le mode 1 par exemple ;
- Enfin, en fonction de la valeur de l'inductance, il est possible d'éviter l'excitation de modes élevés ; ainsi une inductance importante ( $\omega_e$  réduit) évite l'excitation de modes

haute fréquence. Il faut cependant éviter de tomber dans le cas où  $\omega_e$  coïncide avec la pulsation d'un des modes, auquel cas celui-ci sera fortement excité et pourra perturber la synchronisation.

## 8.5 Résultats en régime forcé

### 8.5.1 Cas 1 ddl

On commence par simuler la réponse à un forçage harmonique. Afin d'évaluer la performance de l'atténuation en vibration, on utilise l'amplitude RMS de la réponse  $u_{\text{RMS}} = \frac{1}{T_f} \sqrt{\int_0^{T_f} u^2 dt}$  où  $T_f$  est le temps de fin de la simulation<sup>11</sup>, avec une échelle en dB. La réponse d'un système de pulsation unitaire, amortissement mécanique  $\xi_1 = 0.01$ , et coefficient de couplage  $k_1 = 10\%$  est tracée figure 8.16. On exerce sur le mode un forçage harmonique d'amplitude  $F_1$  et on observe le déplacement en un point où l'amplitude du mouvement est  $\Phi_1 q_1$ . On obtient des résultats similaires à ceux obtenus avec le modèle 1 ddl au chapitre 7.4.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = 0.7 \text{ à } 1.4$	-	-	-	-

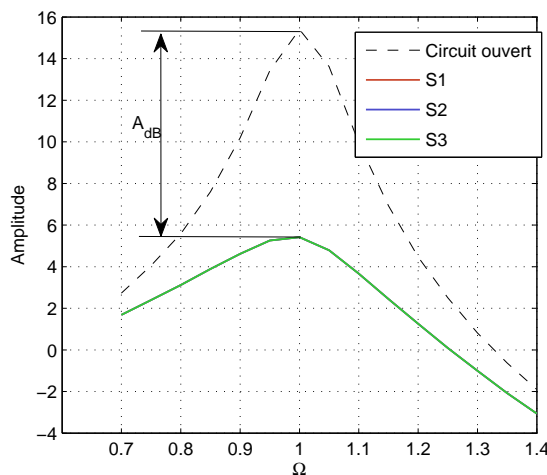


FIG. 8.16: Atténuation obtenue en fonction de  $\Omega$

De la même manière qu'au chapitre 7.4, on définit l'atténuation  $A_{dB}$  apportée par le dispositif de switch comme la différence d'amplitude RMS, en dB, entre les maxima<sup>12</sup> de la

<sup>11</sup>Étant donné la lenteur relative des calculs, on choisit un amortissement mécanique plus élevé dans ces simulations afin d'atteindre le régime établi assez rapidement ; cependant l'influence des régimes transitoires peut parfois donner des résultats différents de ceux du chapitre 7.4.

<sup>12</sup>Dans le chapitre 7.4 les maxima étaient identifiés sur la plage de fréquence ; ici la lenteur des calculs fait que l'on choisit d'exciter le système à la première résonance en circuit ouvert et que l'on suppose que c'est le maximum de la réponse avec switch aussi.

réponse circuit ouvert et avec switch ; cette atténuation dépend du forçage et de la participation de chaque mode ( $F_r$  et  $\Phi_r$ ) qui seront précisés.

On teste plusieurs valeurs du coefficient de couplage  $k_1$  et du coefficient d'amortissement électrique  $\xi_e$  ; on identifie  $\xi_e^{\text{opt}}$  permettant d'obtenir l'atténuation la plus élevée possible : ces résultats sont tracés figure (8.17) ; ils sont très similaires à ceux obtenus précédemment (figure (7.16) et (7.26)), mais la valeur de l'amortissement mécanique différente ne permet pas de comparaison directe.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0 à 1	1	1
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0 à 1	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

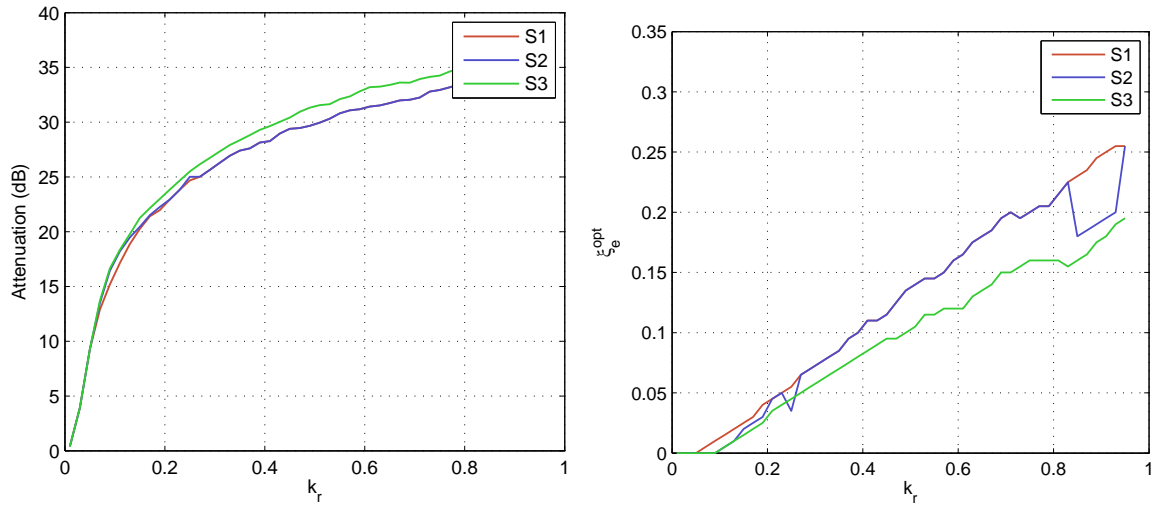
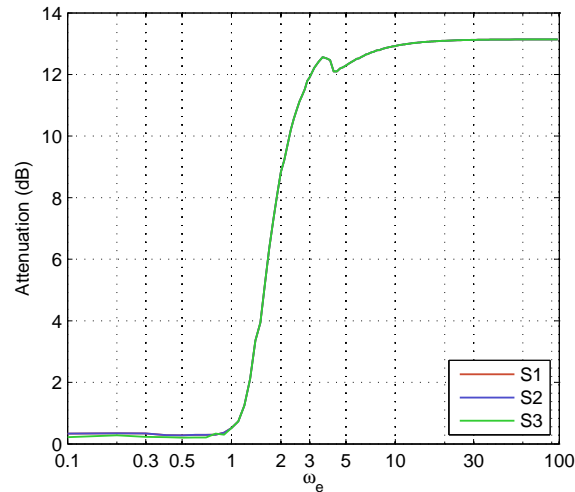


FIG. 8.17: (à g.) Atténuation maximale en fonction du couplage ; (à dr.) Valeur de  $\xi_e$  permettant d'obtenir cette atténuation. Ces résultats peuvent être comparés à la figure (7.26) obtenue avec le modèle 1 ddl, mais l'amortissement mécanique différent ne permet pas de comparaison directe.

### Choix de l'inductance

Comme au paragraphe 8.4.2, on observe l'influence de  $\omega_e$  sur la performance du système ; cela ne pouvait être fait avec le modèle 1 ddl, qui ne prend pas en compte la durée des phases circuit fermé. L'atténuation obtenue est tracée figure (8.18) ; de la même manière que pour le cas du régime libre, on constate que l'atténuation est pratiquement nulle pour  $\omega_e$  faible, et que des valeurs  $\omega_e > 3\omega_1$  permettent d'amortir correctement le premier mode.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$\omega_e = 0.1 \text{ à } 100 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

FIG. 8.18: Atténuation obtenue en fonction de  $\omega_e$ 

### 8.5.2 Cas 2 ddl

#### Effet des modes harmoniques

On étudie maintenant l'effet de la présence d'un deuxième mode, dont on teste plusieurs pulsations. Ce mode n'est pas forcé directement et ne participe pas au déplacement mesuré ; l'atténuation que l'on mesure n'est donc que celle du mode 1. Par contre, l'effet de la charge peut exciter le mode 2, et celui-ci peut à son tour désynchroniser la commutation.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	$\omega_2 = 0.1 \text{ à } 10 \hat{\omega}_1$	0.01	0.1	0	0
shunt	$25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

En fonction de  $\omega_2$  on trace l'atténuation du mode 1 ainsi que l'amplitude RMS du mode 2, qui permet de rendre compte de l'excitation (ou non) du deuxième mode ; les résultats sont tracés figure 8.19. On constate, comme pour le cas de la réponse libre au chapitre 8.4.3, les phénomènes suivants :

- La présence d'un mode double (ou presque double) entraîne une baisse très nette de l'efficacité ; le deuxième mode est en effet fortement excité et vient perturber la synchronisation de la commutation ;
- Lorsque le deuxième mode est harmonique impair, il est également excité, et on observe une baisse de l'efficacité de l'amortissement du premier mode ;
- La présence d'un mode de pulsation élevée perturbe la synchronisation ; la stratégie 3 permet néanmoins de conserver une certaine efficacité.

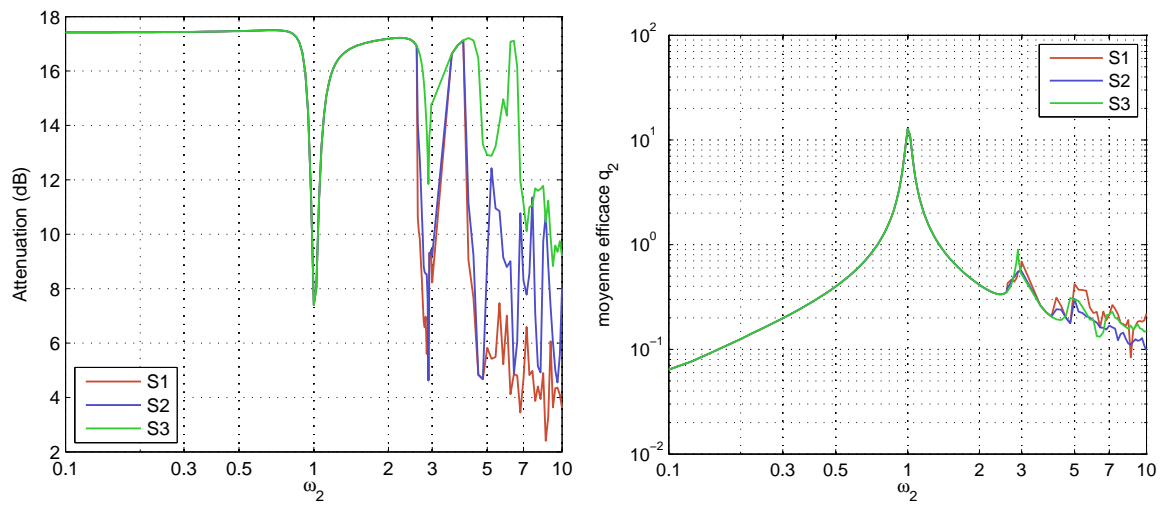


FIG. 8.19: (à g.) Atténuation obtenue sur le mode 1 en fonction de la pulsation du deuxième mode, (à dr.) Amplitude RMS du mode 2.

### Choix de l'inductance : spectre du signal de charge

Au paragraphe 8.4.2 on a vu qu'il était possible de choisir l'inductance pour éviter d'exciter un mode plus élevé, dans le cas de la réponse libre. Cette possibilité existe également en régime forcé ; de plus il est possible d'expliquer le phénomène en observant le spectre d'une partie de la réponse forcée. On choisit un système à un ddl excité à résonance, avec switch. Le signal de charge est tracé figure (8.20, à g.) pour une inductance telle que la pulsation électrique soit  $\omega_e = 3$  ou bien  $\omega_e = 25$  ; le spectre de ce signal une fois le régime établi atteint est tracé à côté.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
shunt	$\omega_e = 3$ ou $25 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

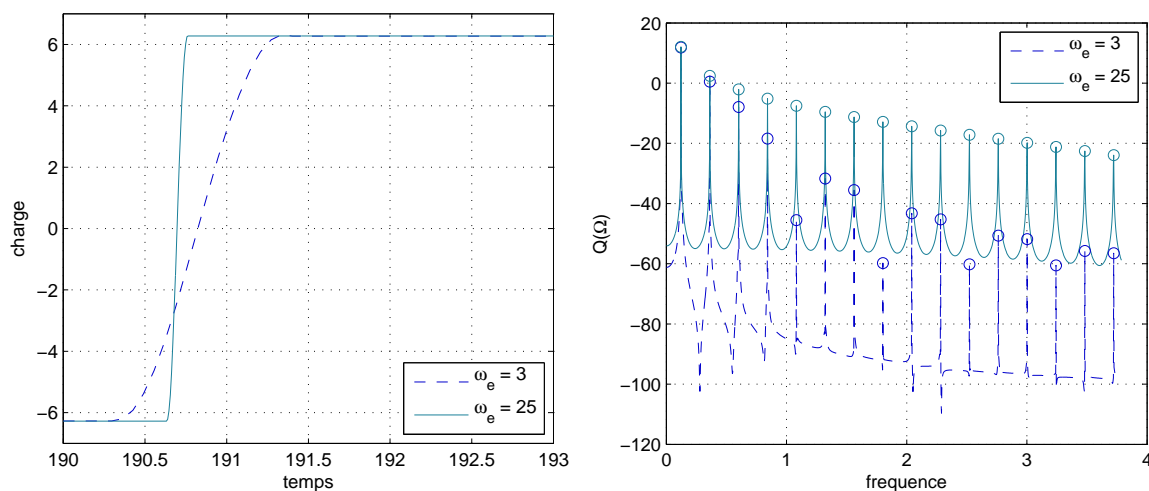


FIG. 8.20: (à g.) Charge en fonction du temps autour d'une commutation pour deux inductances différentes ; (à dr.) spectre de ce signal en régime établi.

On constate que les changements de signe de la charge se font plus brutalement avec  $\omega_e$  élevée ; le spectre du signal est comparable à celui d'un signal carré. Au contraire, pour des valeurs faibles de  $\omega_e$ , le signal est comparable à un signal carré "adouci", avec des harmoniques d'amplitude plus réduite. Ainsi, si  $\omega_e$  est suffisamment bas, l'effet de la charge sur les modes élevés devrait être réduit.

### Choix de l'inductance : excitation d'un mode élevé

On simule maintenant un système à deux modes arbitraires, et on teste plusieurs valeurs de  $\omega_e$  afin de vérifier si il est possible d'éviter l'excitation du mode 2 et donc d'amortir correctement le mode 1. Le mode 1 est le seul forcé et le seul à participer au déplacement ; le mode 2 ne fait que perturber la commutation.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	7.3	0.01	0.1	0	0
shunt	$\omega_e = 0.1 \text{ à } 100 \hat{\omega}_1$	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

Sur la figure (8.21) on trace à gauche l'atténuation apportée sur le mode 1 ; à droite la moyenne RMS de l'amplitude du mode 2. On peut faire les observations suivantes :

- Pour de faibles valeurs de  $\omega_e$ , la commutation est trop lente et le système n'est pas efficace ;
- Pour des valeurs intermédiaires de  $\omega_e$  ( $2\omega_1 < \omega_e < \omega_2$ ) l'atténuation est bonne ; l'excitation réduite du mode 2 permet d'éviter la désynchronisation ;
- Lorsque  $\omega_e \simeq \omega_2$ , l'excitation du mode 2 est importante et l'atténuation chute nettement, en raison de la désynchronisation du switch ;
- Finalement, avec  $\omega_e > \omega_2$ , l'excitation du mode 2 est toujours présente, mais à un niveau moindre. L'atténuation est correcte ; en particulier avec la stratégie 3. La stratégie 1, qui consiste à commuter à chaque annulation de la dérivée du voltage, reste perturbée par le mode 2.

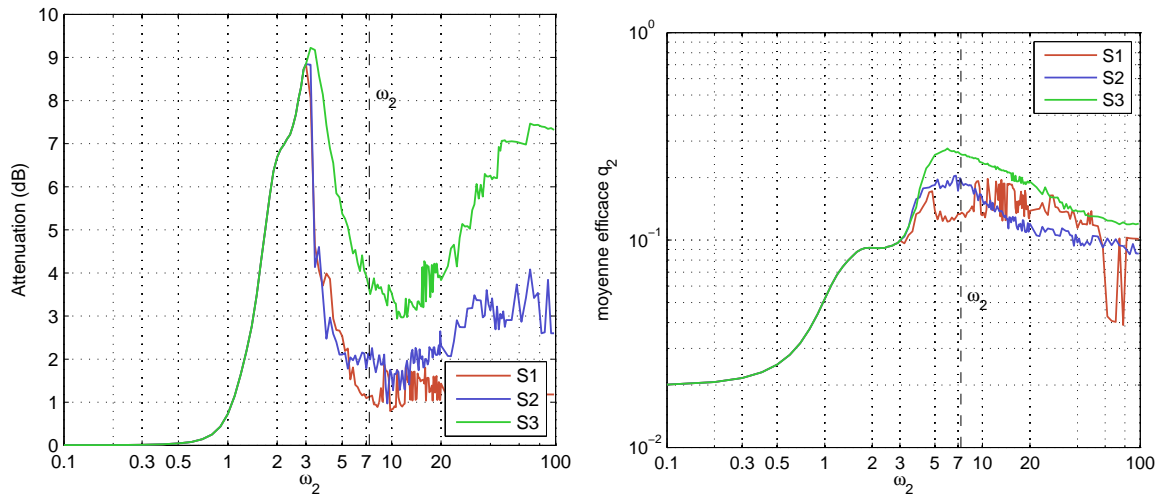


FIG. 8.21: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 ; (à dr.) moyenne RMS de l'amplitude du mode 2

### Effet de l'amortissement du mode 2 sur la dissipation

Suivant les cas, on a constaté que les modes élevés peuvent être excités par la commutation. Dès lors, une puissance mécanique est dissipée par leur amortissement. À la section 8.1.4 on a défini différentes puissances, dont la puissance mécanique dissipée par chaque mode. En constatant qu'une partie de la puissance entrant dans le système est dissipée par les modes élevés (bilan d'énergie (8.10), schéma 8.2) , on se propose d'évaluer l'influence de leur amortissement. L'idée serait par exemple de combiner un dispositif à commutation avec un dispositif qui permet d'apporter un amortissement sur les modes haute fréquence. On fait



des simulations d'un système à deux modes en faisant varier l'amortissement du mode 2 ; l'atténuation du mode 1 est tracée figure 8.22 à gauche. À droite on trace les puissances<sup>13</sup> moyennes  $-C_m$ ,  $D_1$  et  $D_2$  ( d'après §8.1.4 ) en fonction de l'amortissement  $\xi_2$ . On définit la moyenne d'une puissance comme :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} \mathcal{P} dt$$

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	2.3	0 à 1	0.1	0	0
shunt	20	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

On peut faire les remarques suivantes :

- L'atténuation varie peu ici, l'amortissement des modes élevés a peu d'importance ;
- La puissance dissipée par le mode 2 augmente en fonction de  $\xi_2$ , l'amplitude du mouvement variant peu ;
- Cette puissance reste très faible devant la puissance dissipée mécanique dans le mode 1 ;
- La puissance (négative) de l'effet de la charge sur la partie mécanique,  $C_m$ , est bien plus importante.

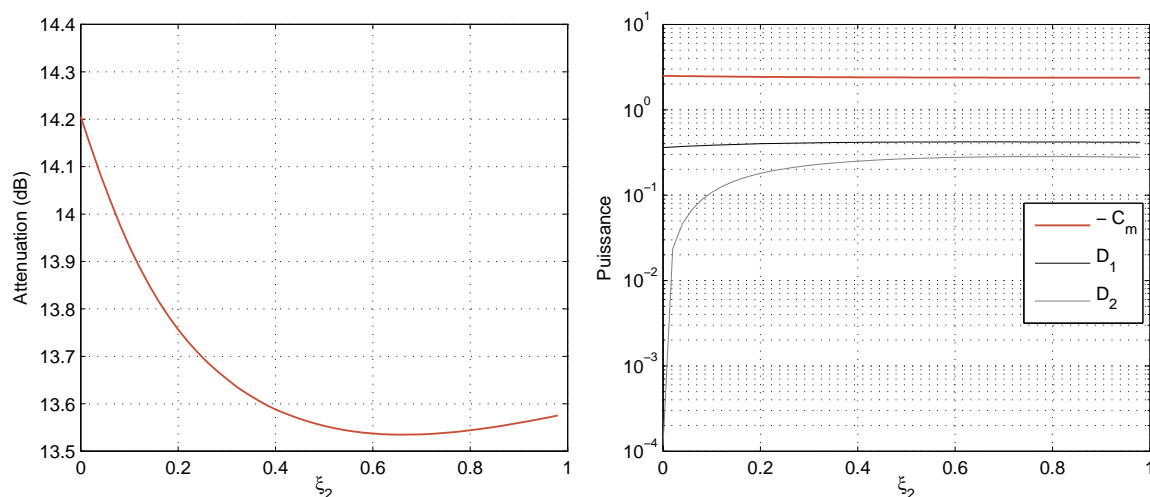


FIG. 8.22: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 en fonction de  $\xi_2$  - remarquer l'échelle ; (à dr.) Puissances en fonction de  $\xi_2$ .

<sup>13</sup>Où l'opposé de celles qui sont négatives

### Effet de l'amortissement du mode 2 sur la synchronisation

On fait les mêmes simulations que précédemment, à la différence que le mode 2 est maintenant un harmonique 3 du mode 1 ; on a vu que cela causait une désynchronisation et une perte d'efficacité du système lorsqu'il était faiblement amorti. Les résultats sont tracés figure (8.23)

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.1	1	1
mode 2	3	0 à 1	0.1	0	0
shunt	20	0.05	-	-	-
forçage	$\Omega = \hat{\omega}_1$	-	-	-	-

On constate l'effet suivant :

- L'amortissement mécanique du mode 2 dissipe peu d'énergie ;
- Le mode 2, lorsqu'il est faiblement amorti, perturbe la synchronisation et réduit l'efficacité du système ;
- Ce problème disparaît lorsque le mode 2 est fortement amorti ( $\xi_2 > 0.8$ ) ; néanmoins, vu les valeurs d'amortissement requises même pour améliorer un peu la réponse, il ne s'agit pas d'une solution pratique.

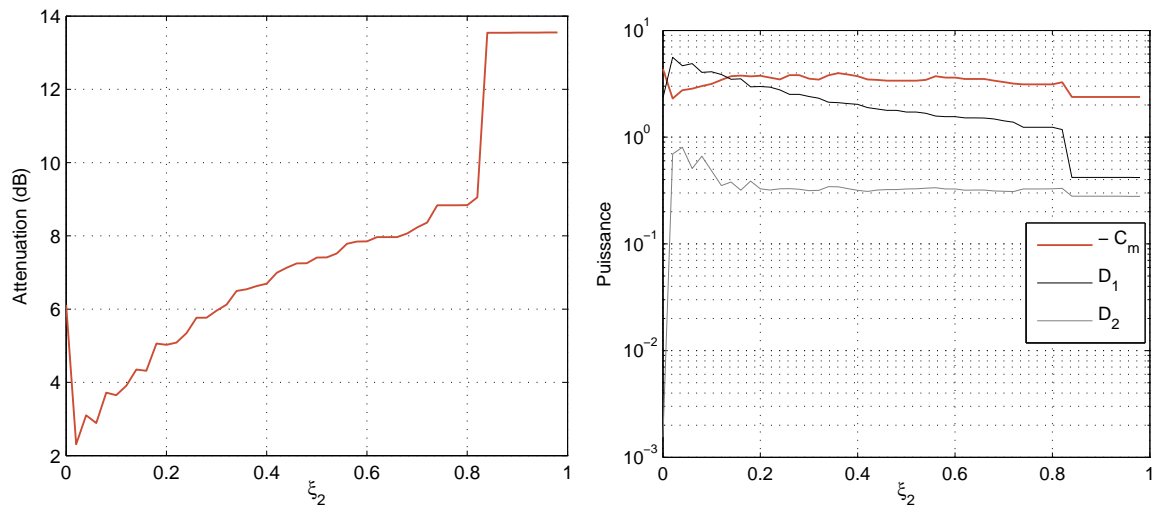


FIG. 8.23: (à g.) Atténuation apportée sur le mode 1 en fonction de  $\xi_2$  (à dr.) Puissances en fonction de  $\xi_2$

### 8.5.3 Cas N ddl

On observe maintenant la réponse temporelle d'un système ayant les caractéristiques suivantes (choisies arbitrairement) :

- La partie mécanique se constitue de trois modes , avec  $\omega_1 = 1$ ,  $\omega_2 = 2.5$   $\omega_3 = 7.3$ , d'amortissements respectifs  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0.01$  et de coefficient de couplage  $k_1 = 0.15$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.05$  ;

- Chacun des modes est excité par le même effort modal, et le déplacement est la somme des coordonnées modales avec un coefficient identique ;
- Le système est forcé par un sinus glissant passant par la résonance du mode 1 ;
- Le shunt utilisé est tel que  $\omega_e = 25$  et  $\xi_e = 0.05$  ; on fait la simulation en circuit ouvert, puis avec les trois stratégies de commutation proposées.

	$\omega_r$	$\xi_r$	$k_r$	$F_r$	$\Phi_r$
mode 1	1	0.01	0.15	1	1
mode 2	2.5	0.01	0.1	1	1
mode 3	7.3	0.01	0.05	1	1
shunt	25	0.05	-	-	-
forçage	glissant	-	-	-	-

Le déplacement est tracé en fonction du temps figure 8.24. On observe bien, pour la simulation en circuit ouvert, le passage par la résonance, qui se traduit par une amplitude importante. Par contre en présence de switch, l'amplitude est plus réduite. On constate également l'efficacité de la stratégie 3, qui permet de conserver une amplitude bien plus faible que les autres. Les stratégies 1 et 2 apportent une réduction d'amplitude, cependant on observe une certaine instabilité de l'amplitude au cours du temps.

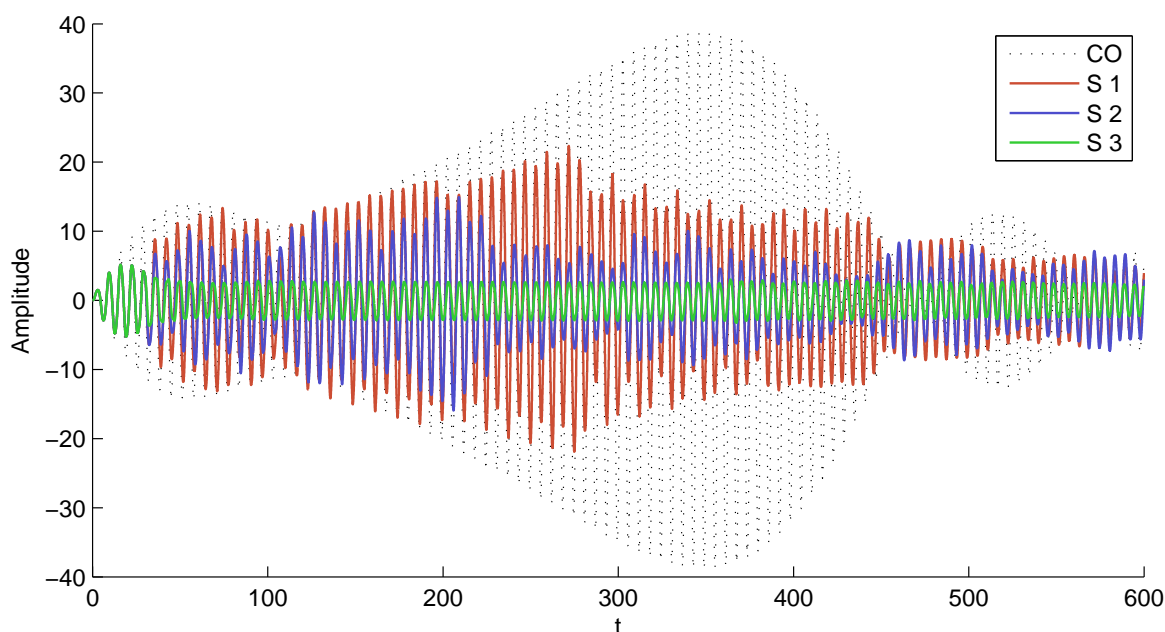


FIG. 8.24: Amplitude du déplacement avec forçage en sinus glissant

## Tension

On trace figure 8.25 la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique pour chacune des trois stratégies, en mettant en valeur l'instabilité de la tension avec la stratégie 1. Avec la stratégie 2 on peut constater que par moments la tension passe par un maximum mais la commutation n'a pas lieu (commutation évitée). Enfin pour la stratégie 3 on remarque que les

commutations se produisent régulièrement. Ces tracés sont utiles pour comprendre l'évolution des puissances et énergies dans le système.

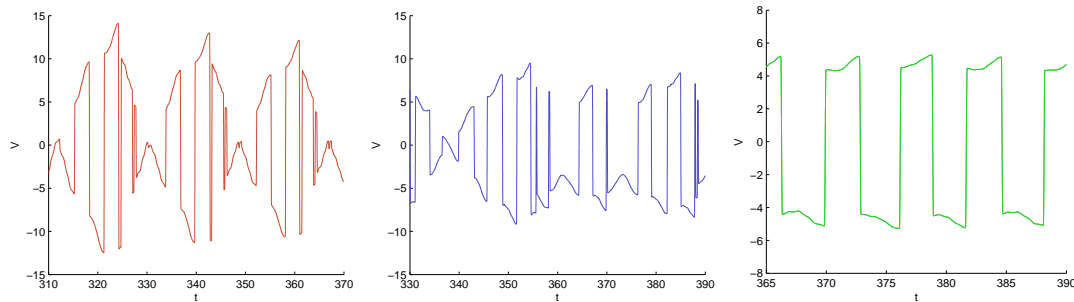


FIG. 8.25: Tension aux bornes de l'élément piézoélectrique au cours de la simulation (détail) ; stratégies 1 à 3 de  $g$ . à  $dr$ .

## Énergies

Il est intéressant de tracer les énergies au cours du temps pour ces systèmes (définies au §8.1.4) ; on trace figure 8.26 l'évolution des énergies mécaniques de chacun des modes ainsi que de l'énergie électrique (équations (8.11) et (8.12)) ; la moyenne de l'énergie du mode 1  $\langle \mathcal{E}_1 \rangle$  ainsi que les rapports entre les énergies des autres modes et l'énergie électromagnétique sont décrites dans le tableau (8.1). On observe les résultats suivants :

- Le mode 1 est la principale contribution à l'énergie mécanique ; la commutation provoque une remontée du niveau relatif des autres modes ;
- Pour la stratégie 1, on observe régulièrement un début de stockage d'énergie électrique, puis lors d'une commutation survenant à un moment défavorable, l'énergie électromagnétique chute brutalement, créant un motif "en dents de scie". Chaque fois que l'énergie électromagnétique chute, l'énergie mécanique croît ; c'est le mode 1 vers lequel cette réinjection se produit, ce qui est le plus pénalisant en termes d'amplitude, en raison de sa faible raideur. Cependant les autres modes sont également excités et leur niveau (relativement au mode 1) remonte. Ce comportement correspond à un tracé de tension qui présente un phénomène de battement figure 8.25 à gauche.
- Pour la stratégie 2, on observe le même motif, cependant les commutations défavorables surviennent moins souvent (certaines sont évitées, voir figure 8.25 au centre) ; l'énergie électrique stockée est environ la moitié de l'énergie mécanique, ce qui montre que malgré un couplage  $k_1 = 0.15$  il est possible de "pomper" l'énergie au cours du temps ;
- Enfin pour la stratégie 3, les chutes d'énergie électrique sont évitées. Une énergie électrique importante (environ 2.6 fois l'énergie mécanique) est stockée dans l'élément piézoélectrique, et l'effet de la charge limite fortement l'amplitude du mouvement. Cela est possible car les commutations se produisent de manière régulière (figure 8.25 à droite) et toujours à un moment où de l'énergie est prélevée sur la partie mécanique.

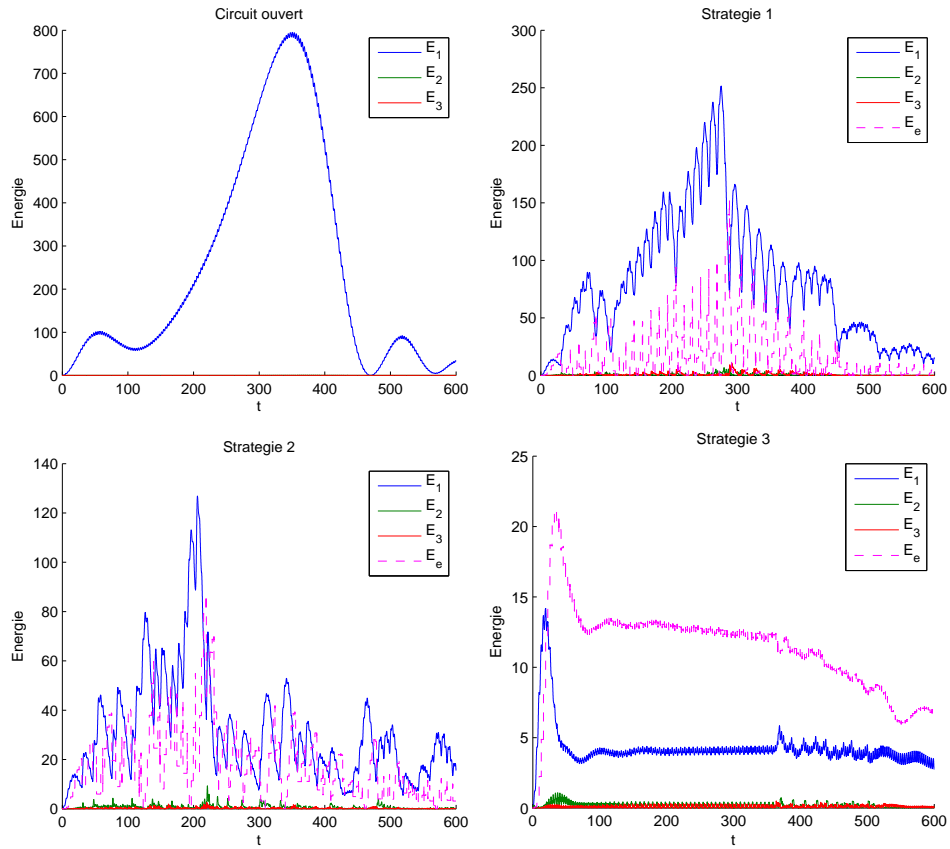


FIG. 8.26: Énergies mécaniques et électrique en fonction du temps pour des simulations circuit ouvert (en haut à gauche), avec les stratégies 1 2 et 3 respectivement en haut à droite, en bas à gauche et en bas à droite.

	Circuit ouvert	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
$\langle \mathcal{E}_1 \rangle$	247	80.5	30.9	4.24
$\langle \mathcal{E}_2 \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0.047 %	0.7 %	2.1 %	4.4 %
$\langle \mathcal{E}_3 \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0.005 %	1 %	0.6 %	2.3 %
$\langle \mathcal{E}_e \rangle / \langle \mathcal{E}_1 \rangle$	0	19.5 %	54 %	267 %

TAB. 8.1: Comparaison des énergies moyennes du mode 1 et des autres entre stratégies

## Puissances

On trace maintenant différentes puissances en fonction du temps ; on s'intéresse en particulier à  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ , les puissances de dissipation mécanique de chaque mode (§8.1.4), à  $\mathcal{D}_e$  la puissance électrique dissipée par effet Joule, et à  $\mathcal{C}_m$ , la puissance exercée par l'effet de la charge sur la partie mécanique. Les résultats sont tracés figure 8.27 ; on donne les moyennes de la puissance extérieure ainsi que les moyennes des puissances dissipées, et de la puissance  $\mathcal{C}_m$  ainsi que sa répartition par modes dans le tableau 8.2. On constate les résultats suivants, qui peuvent être interprétés en gardant la répartition de l'énergie et des puissances à l'esprit (fig. 8.1) :

- La puissance instantanée dissipée par effet Joule  $\mathcal{D}_e$  est très importante (fig. 8.27 en haut à gauche) ; par contre sa valeur moyenne est du même ordre de grandeur que les autres puissances ; cela est dû à la faible durée des phases circuit fermé ;
- Les stratégies que l'on a proposé ont pour but d'avoir une puissance  $\mathcal{C}_m$  importante et négative (§8.2.2) ; ce critère est vérifié avec plus ou moins de succès. Ainsi, on observe que la stratégie 1 consistant à switcher sur tous les extrema de tension n'est pas adaptée,  $\mathcal{C}_m$  devenant fréquemment positive ;
- La stratégie 2, basée sur une estimation de  $\mathcal{C}_m$  avant le switch et censée conserver cette puissance toujours négative, est un peu plus efficace. Néanmoins, des commutations intempestives subsistent. Cela est lié à l'estimation de  $\mathcal{C}_m$  avant chaque switch, qui n'est pas exacte. Contrairement à ce qui a été vu avec le modèle 1 ddl (fig. 7.26), où la stratégie 2 était la meilleure, la stratégie 3 est ici la plus efficace.
- La stratégie 3, basée sur un critère électrique, permet d'avoir une puissance  $\mathcal{C}_m$  importante (et négative) ; cela peut être vu dans le tableau 8.2 où 91 % de la puissance exercée par les efforts extérieurs est absorbée par la charge. L'autre manière d'analyser le comportement du système est d'observer la puissance dissipée par effet Joule : de ce point de vue aussi, la stratégie 3 est la plus efficace, puisque 89 % de l'énergie apportée est dissipée dans la résistance.
- Dans chacun des cas étudiés, l'amortissement des modes supérieurs n'a que peu d'importance ; les puissances dissipées sont faibles par rapport à la puissance exercée par l'extérieur. Cependant, on constate que la proportion de la puissance de dissipation mécanique dans les modes élevés augmente. En regardant les moyennes des composantes de  $\mathcal{C}_m$  par mode, on observe bien que  $\mathcal{C}_1$  est négative (donc on prélève de l'énergie sur le premier mode) tandis que  $\mathcal{C}_2$  et  $\mathcal{C}_3$  sont positives (on injecte de l'énergie sur les modes élevés).
- La somme des dissipations n'est pas 100 % car de l'énergie est stockée dans le système à la fin de l'évolution.

## Mécanisme de réduction de vibration

Le mécanisme principal de réduction de l'amplitude des vibrations est l'effet de la charge électrique  $\mathcal{C}_m$  sur la partie mécanique, qui s'oppose au mouvement. La puissance des efforts extérieurs est dès lors moindre, et l'énergie mécanique diminue globalement. L'énergie prélevée sur la partie mécanique est transférée essentiellement vers une charge stockée dans l'élément piézoélectrique, puis dissipée par la résistance. La réémission d'énergie vers les modes haute fréquence (puis sa dissipation par l'amortissement mécanique de ces modes) intervient pour une faible part dans la dissipation de l'énergie stockée dans l'élément piézoélectrique.

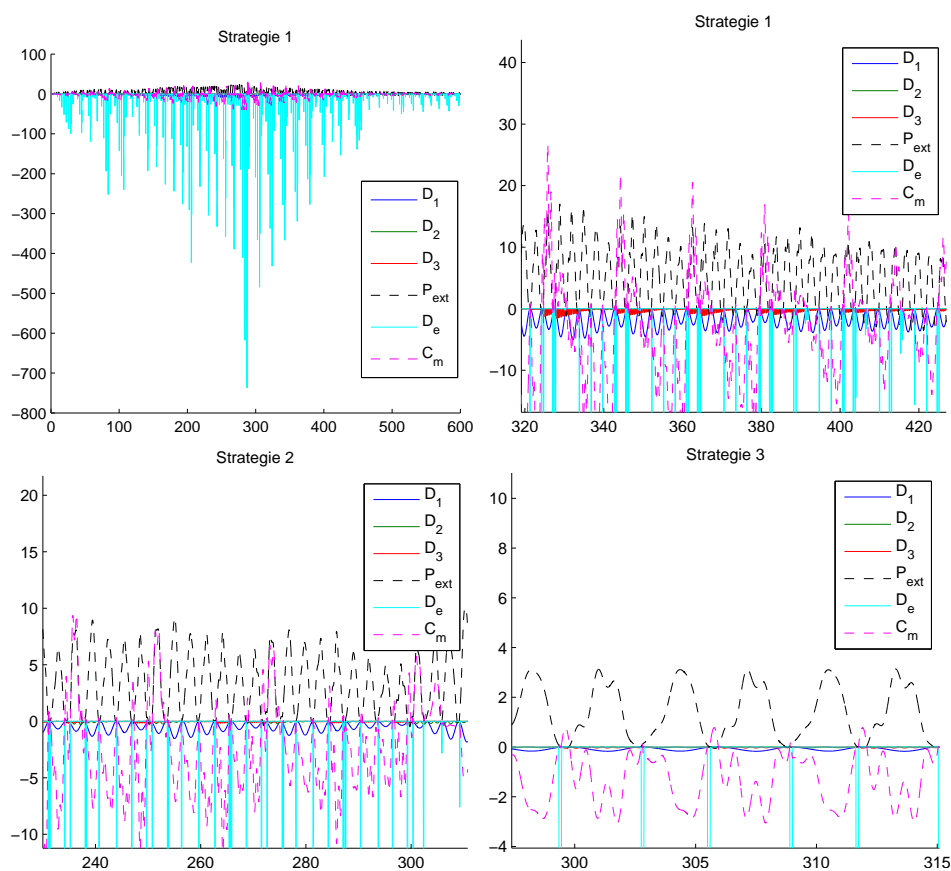


FIG. 8.27: Puissances mécaniques, électriques et de couplage en fonction du temps ; en haut à g. , avec stratégie 1, en haut à dr. détail avec stratégie 1, en bas à g. détail avec stratégie 2, en bas à dr. détail avec stratégie 3

	Circuit ouvert	Stratégie 1	Stratégie 2	Stratégie 3
$\langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	5.0	4.27	3.05	1.28
$\langle \mathcal{D}_1 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	98.9 %	37.5 %	20.1 %	6.6 %
$\langle \mathcal{D}_2 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0.03 %	0.5 %	0.9 %	0.7 %
$\langle \mathcal{D}_3 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0.001 %	2.7 %	0.8 %	0.98 %
$-\langle \mathcal{C}_m \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	58.6%	77.2 %	91.2 %
$-\langle \mathcal{C}_1 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	62.6%	80 %	94.5 %
$-\langle \mathcal{C}_2 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	-1.1%	-1.7 %	-2 %
$-\langle \mathcal{C}_3 \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	-2.8%	-1 %	-1.2 %
$\langle \mathcal{D}_e \rangle / \langle \mathcal{P}_{\text{ext}} \rangle$	0	57.9 %	76.1 %	89.4 %

TAB. 8.2: Comparaison des intégrales des puissances extérieure et dissipée entre stratégies.

### Remarque sur les puissances et les énergies

Sur la simulation précédente, si l'on calcule les intégrales de  $-\mathcal{C}_m$  ou  $\mathcal{D}_e$  entre différentes stratégies, on constate que celles-ci diminuent avec les stratégies plus efficaces. Par contre, si on les compare à l'intégrale de  $\mathcal{P}_{\text{ext}}$ , la fraction d'énergie transférée augmente. Au paragraphe 8.2.2, il était mentionné que le but de ces stratégies était de maximiser ces puissances ; or il semble qu'au contraire, plus une stratégie est efficace pour réduire les vibrations, moins la puissance transférée est importante. Cette contradiction apparente provient de la différence d'approche :

- On peut optimiser une puissance à effort imposé ; cela conduit à chercher à obtenir un système se comportant de manière “souple” ; ainsi les déplacements sont de grande amplitude et la puissance extérieure est importante. Cette démarche n'est pas adaptée à l'optimisation d'un système de réduction de vibrations. Elle pourrait éventuellement être adaptée à un cas de récupération d'énergie.
- Ou bien on peut optimiser cette puissance à déplacement imposé. Cela conduit à adopter un système se comportant de manière “raide” et fortement amortie ; pour le même déplacement une puissance importante est dissipée. Par contre, lorsqu'on impose un effort à ce type de système, son mouvement de faible amplitude fait que la puissance extérieure est faible. La faible amplitude de mouvement est justement l'objectif recherché en réduction de vibrations.

Ainsi l'optimisation de la stratégie pour maximiser la puissance  $\mathcal{C}_m$  ou  $\mathcal{D}_e$  à *déplacement imposé* réduit l'amplitude du mouvement et finalement engendre une baisse de la puissance à *effort imposé*.

## 8.6 Conclusion sur le modèle N DDL

**Optimisation** Deux modèles ont été développés afin d'étudier la réponse libre et forcée de systèmes à commutation. Les résultats obtenus prolongent ceux du chapitre 1 DDL ; ainsi les résultats suivants sont similaires :

- Le coefficient de couplage  $k_r$  doit être maximisé pour atténuer efficacement le  $r$ -ième mode ;
- Le coefficient d'amortissement du shunt  $\xi_e$  doit être adapté au coefficient de couplage.

En revanche, de nouveaux résultats sont obtenus en ce qui concerne l'optimisation des composants :

- L'inductance doit être choisie assez faible pour obtenir  $\omega_e > 3\omega_r$  ; en dessous de cette valeur la commutation, trop “lente”, n'est pas efficace ; ce résultat était supposé dans d'autres travaux [70], mais ici il est établi.
- Une inductance faible, entraînant une valeur de  $\omega_e$  élevée, engendre des variations de charge rapides ; l'effet de la commutation sur la structure a alors un spectre comportant plus d'énergie dans les hautes fréquences. Ce résultat était mentionné pour la plupart des études expérimentales [24, 70], mais est ici vérifié par le tracé de spectres (figure 8.20).
- De manière générale, les modes haute fréquence ayant une grande influence sur la dérivée de la tension peuvent désynchroniser la commutation ; les précautions expérimentales prises par la plupart des équipes montrent que le problème est connu.
- La présence d'un mode harmonique impair et couplé électromécaniquement peut être très pénalisante pour la performance du système ; en effet, cela peut engendrer une



désynchronisation de la commutation. Il peut alors être intéressant de changer sa fréquence en modifiant la structure, ou de le découpler électromécaniquement afin d'éviter son excitation ; de nombreuses discussions avec l'équipe du LGEF montrent que ce problème est très connu ; il est ici vérifié en simulation.

- En choisissant une inductance élevée, il est possible d'éviter l'excitation de certains modes haute fréquences, ce qui permet dans certains cas d'éviter la désynchronisation.

**Stratégie** Sur la simulation finale d'un système à trois ddl, les trois stratégies proposées ont des comportements différents :

- La stratégie 1, consistant à fermer le circuit à chaque annulation de dérivée de la tension, ne permet pas de garder la synchronisation ;
- la stratégie 2, basée sur une évaluation de la puissance  $\mathcal{C}_m$  et visant à la garder négative, est plus efficace mais des commutation intempestives se produisent toujours. L'évaluation de la puissance utilisée pour cette stratégie est basée sur une prédiction de la vitesse basée sur l'hypothèse de commutation instantanée. C'est sans doute cela qui pose un problème, puisqu'à la différence du chapitre précédent, la durée des phases circuit fermé est prise en compte. On peut remarquer que dans le cas 1 ddl avec commutations instantanées, cette stratégie était la plus efficace.
- La stratégie 3, basée sur un critère électrique et consistant à maximiser  $\mathcal{C}_e$  l'énergie transférée à l'élément piézoélectrique, présente de bons résultats. La commutation reste synchronisée et la charge stockée est importante, ce qui permet d'agir sur la partie mécanique de manière efficace et de limiter l'amplitude des vibrations.

Le choix d'une stratégie de commutation adaptée permet d'améliorer la performance. Néanmoins, dans cette étude, *on s'est volontairement limité à des stratégies de commutation ne faisant appel qu'à des grandeurs connues instantanément.*

Les simulations et les expériences montrent que les critères proposés ci-dessus ont tous la même limite : l'influence de modes haute fréquence fait que  $\dot{V}$  change très souvent de signe. Ainsi, la commutation peut être déclenchée très fréquemment si la stratégie n'est pas bien conçue. On trouve dans les travaux d'autres équipes de nombreuses manières d'éviter cet écueil (§7.1.2, 8.2.2), basées sur des critères de filtrage temporel ou de niveau, qui permettent d'améliorer significativement la robustesse du système. Il serait intéressant de combiner les approches : critère de signe instantané développé dans ce chapitre, filtrage temporel et critère de niveau significatif. L'étude expérimentale qui suit (chap. 9) fait appel à cette démarche.

**Énergies et puissances** Une analyse énergétique est proposée ; on constate qu'il y a bien réexcitation des modes élevés, mais que *la puissance mécanique dissipée par l'amortissement mécanique des modes élevés n'est pas importante.* L'essentiel de la dissipation a lieu dans la résistance. Par contre, *le mécanisme essentiel de réduction de vibration est l'effet de la charge électrique qui s'oppose à l'effort extérieur.* On peut parfois éviter un problème de désynchronisation en amortissant passivement un mode harmonique ; mais cela requiert un amortissement très élevé, peu réaliste.



---

# Expérimentation sur les shunts à commutation

Dans ce chapitre, on souhaite évaluer expérimentalement la pertinence des modèles développés aux chapitres précédents (chap. 7 et 8). Deux systèmes à commutation sont utilisés. Le premier, réalisé au LGEF, est un dispositif représentatif de l'état de l'art en matière de shunt à commutation. Une de ses caractéristiques est que c'est un circuit électronique autonome, c'est à dire qu'il ne nécessite pas d'alimentation ni de commande extérieure : il se branche simplement sur les éléments piézoélectriques. Le second système à commutation a été mis au point par l'auteur. Il est basé sur un circuit électronique très simple, commandé par un système informatique temps réel, qui permet de programmer et tester différentes stratégies de commutation. Ces deux systèmes sont associés à deux poutres munies d'éléments piézoélectriques. La première est celle déjà utilisée pour les shunts linéaires (chap. 6). La seconde a été conçue spécialement pour l'association avec des shunts à commutation.

Les deux poutres utilisées pour les expériences sont décrites au paragraphe 9.1. Dans une seconde partie (§9.2), les deux circuits à commutation sont décrits : le circuit réalisé au LGEF (§9.2.1) et l'autre basé sur l'ordinateur temps réel (§9.2.2). Dans ce dernier cas, la mise au point des circuits électroniques est détaillée, ainsi que les stratégies de commutation mises en œuvre. Le dispositif de mesure est décrit au paragraphe 9.3. Il est utilisé pour réaliser des mesures en régime forcé, qui sont analysées dans le domaine temporel (§9.4.1) et fréquentiel (§9.4.2). Une rapide analyse d'un résultat en régime libre est également proposée (§9.5).

## 9.1 Structures utilisées

### 9.1.1 Poutre symétrique

On réutilise la poutre du paragraphe 6.1 (fig. 9.1), qui a été optimisée pour l'association avec des shunts linéaires. Cette poutre est en aluminium (AU4G) et dispose de deux éléments piézoélectriques (PIC 151) symétriques collés près de l'encastrement. Cette poutre dispose d'un coefficient de couplage élevé sur les trois premiers modes.

### 9.1.2 Poutre asymétrique

À la différence du cas des shunts linéaires où l'on cherche le couplage maximum avec tous les modes, on a montré au paragraphe 8.5.2 qu'un mode de pulsation élevée et couplé

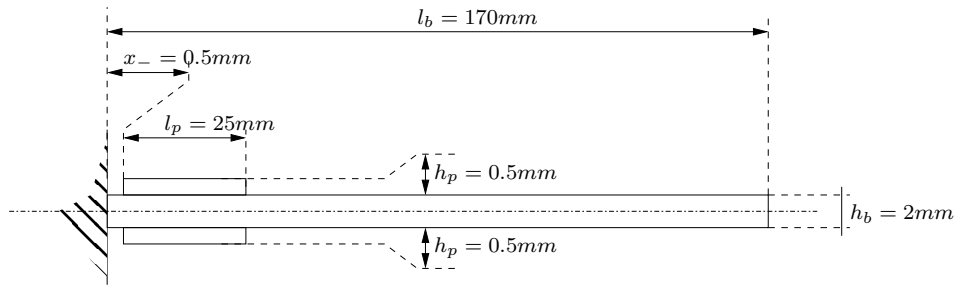
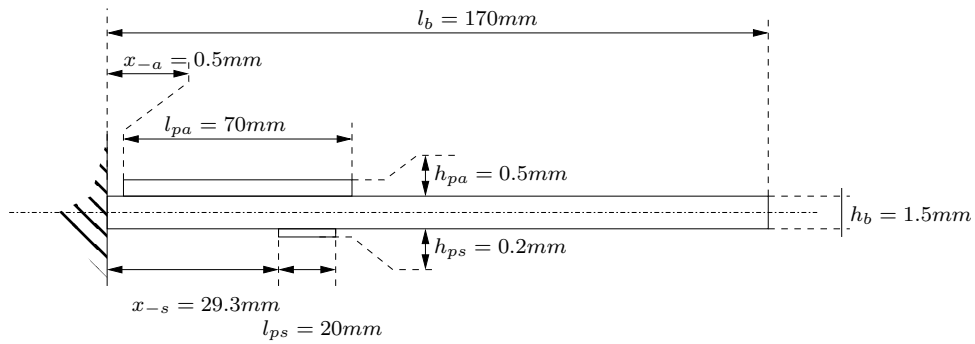


FIG. 9.1: Schéma de la poutre symétrique du chapitre 6.



Mode	$\omega_r$	$k_r$ piézo. actionneur	$k_r$ piézo. capteur
1	73.74 Hz	0.268	0.058
2	366.12 Hz	-0.059	<b>0.00048</b>
3	1001 Hz	-0.075	- 0.047

FIG. 9.2: Dimensions et caractéristiques calculées de la poutre asymétrique.

pouvait être pénalisant. Pour cette raison, on réalise une poutre munie de deux éléments piézoélectriques. L'un (appelé actionneur<sup>1</sup>) est choisi pour avoir des coefficients de couplage forts avec le mode 1 mais faible avec le mode 2. Le second est choisi de telle manière que le couplage avec le mode 2 soit nul. L'idée est de réduire les vibrations du premier mode de la poutre avec un shunt à commutation relié à l'élément actionneur (fortement couplé). L'élément capteur est utilisé simplement pour synchroniser la commutation, en tirant parti de son couplage nul avec le mode 2, pour éliminer les perturbations qu'il provoque.

Un avantage d'utiliser un élément actionneur unique est que cela permet d'avoir la structure, l'encastrement et le bati au potentiel électrique de la masse. On évite ainsi d'avoir des capacités parasites dans le circuit - bien qu'aucun problème lié à cela n'ait été constaté expérimentalement. Cela peut aussi faciliter la pose de capteurs sur la structure. Par exemple, l'expérience montre que les accéléromètres, même réputés flottants, peuvent mettre à la masse la structure et perturber le fonctionnement des shunts.

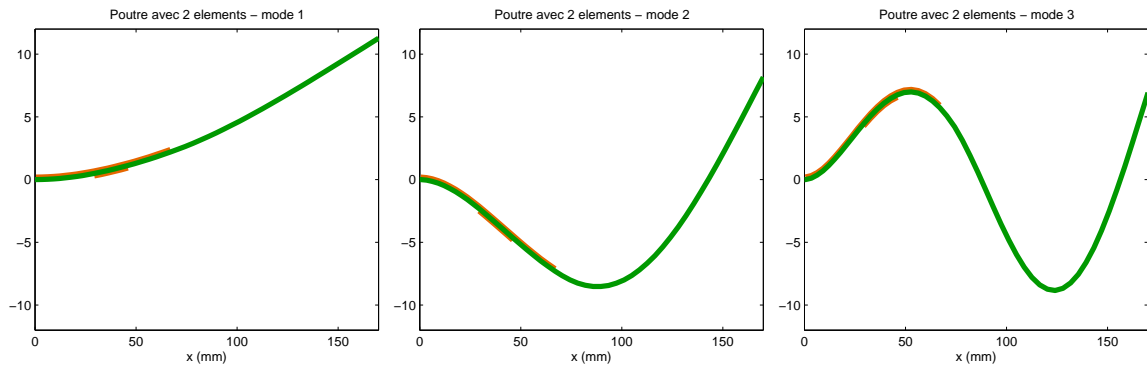


FIG. 9.3: 3 premières déformées modales avec les éléments piézoélectriques retenus

## Optimisation

On choisit un élément piézoélectrique de taille importante ( $70 \times 25 \times 0.5$  mm) parmi ceux disponibles au laboratoire, pour jouer le rôle d'actionneur ; le matériau est toujours une céramique PIC151. Comme on souhaite un couplage important avec le mode 1, on le place près de l'encastrement de la poutre. Pour l'élément capteur, qu'on souhaite découpler au maximum du mode 2, on choisit un élément de petite taille ( $20 \times 20 \times 0.2$  mm). Parmi les structures disponibles avec une largeur de 25 mm (pour accepter l'élément actionneur), une poutre en aluminium est retenue. Le seul paramètre à choisir est la position de l'élément capteur (la distance à l'encastrement). Le modèle du chapitre 3 prévu pour une structure à trois sections symétriques ne peut convenir. On a alors recours au modèle éléments finis décrit au paragraphe 4.5 pour calculer les coefficients de couplage pour plusieurs positions de l'élément capteur et choisir celle qui présente le découplage souhaité. On peut remarquer que l'élément capteur ne fait pas la largeur totale de la poutre ; on fait donc une approximation consistant à supposer qu'il n'y a pas d'effet de bord et que tout se passe comme si cet élément faisait la largeur totale.

La figure 9.2 montre la géométrie de la structure obtenue et le résultat du calcul pour les trois premières fréquences propres et coefficients de couplage. On peut observer que le couplage prévu de l'élément actionneur avec le mode 1 est élevé et faible avec le mode 2 ; d'autre part le couplage de l'élément capteur avec le mode 2 est quasiment nul. En observant les déformées modales sur la figure 9.3, on constate que l'élément capteur est à un point d'inflexion pour le deuxième mode.

## Réalisation pratique

La fabrication est identique à ce qui a été décrit au paragraphe 6.1.2 (p. 118). L'élément capteur ne disposant pas d'une électrode retournée, il faut relier sa face intérieure à la poutre. Cette face intérieure sera maintenue au potentiel 0 et on mesurera la tension sur la face extérieure. Afin d'assurer la connexion électrique avec la poutre, une goutte de résine conductrice chargée d'argent (Ecolit 340) est déposée au milieu du film de colle (voir fig. 9.4).



FIG. 9.4: Ajout de résine conductrice dans le film de colle

Mode	$\omega_r$	$k_r$ piézo. actionneur	$k_r$ piézo. capteur
1	58.37 Hz	0.2255	0.052
2	313.31 Hz	0.038	0
3	814.18 Hz	0.0225	0

TAB. 9.1: Fréquences et coefficients de couplage mesurés pour la poutre à éléments capteur et actionneur

## Mesure des caractéristiques

On réutilise le dispositif du paragraphe 6.2 (figure 6.9, p. 121). Les fréquences de résonances en court-circuit sont mesurées en excitant la structure avec un effort sinusoïdal et en choisissant sa fréquence pour mettre la vitesse et l'effort en phase<sup>2</sup>, avec tous les éléments en court-circuit. On place alors un seul élément à la fois en circuit ouvert et on identifie le coefficient de couplage d'après la différence de fréquence, comme montré au paragraphe 4.4.3.

Les valeurs mesurées des coefficients de couplage correspondent au résultat escompté : le couplage avec le mode 2 est faible pour l'actionneur et nul pour le capteur. Les différences entre les fréquences expérimentales et théoriques peuvent s'expliquer par la masse ajoutée de l'aimant servant à exciter la structure.

Remarque : bien que des coefficients aient été trouvés nuls par la méthode des différences de fréquence, on mesure tout de même un signal de tension sur les éléments piézoélectriques en circuit ouvert. Le découplage n'est donc pas parfait.

## 9.2 Circuits à commutation

### 9.2.1 Circuit autonome

Ce circuit a été réalisé par Élie Lefeuvre au LGEF Lyon sur le schéma de base du brevet [85] (fig. 9.5). Il fait fortement appel aux non-linéarités des composants électroniques, en particulier des tensions de seuil des composants ; le comportement est ainsi potentiellement dépendant de l'amplitude du mouvement. Il est autoalimenté et il suffit donc de le connecter aux éléments piézoélectriques ; l'ensemble peut être électriquement flottant. Dans certains cas on peut utiliser un pont diviseur avec amplificateur opérationnel (AOP, p. 215) afin de

<sup>1</sup>Cet élément n'est pas un actionneur à proprement parler car on n'impose jamais explicitement la tension. C'est juste l'élément associé au shunt, voir figure 9.14 .

<sup>2</sup>Le tracé sur un oscilloscope en mode "xy" est alors une droite.

mesurer la tension aux bornes du circuit sans trop perturber celle-ci.

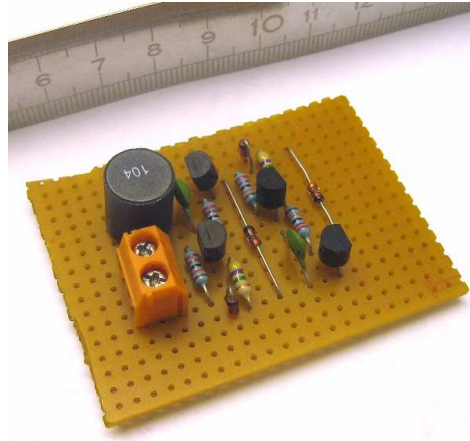


FIG. 9.5: Circuit autonome fourni par le LGEF.

### 9.2.2 Circuit à commutation commandée

L'objectif est ici d'associer un ordinateur fonctionnant en temps réel au circuit de commutation. Son rôle est de créer la commande de fermeture et d'ouverture du circuit. Il analyse les signaux provenant de différents capteurs et met en oeuvre une stratégie que l'on peut redéfinir au besoin. Cette solution est plus lourde à mettre en oeuvre qu'un circuit dédié, mais présente des avantages en terme de facilité de modifications ultérieures, très utiles pour la mise au point de stratégies de commutation.

#### Informatique temps réel

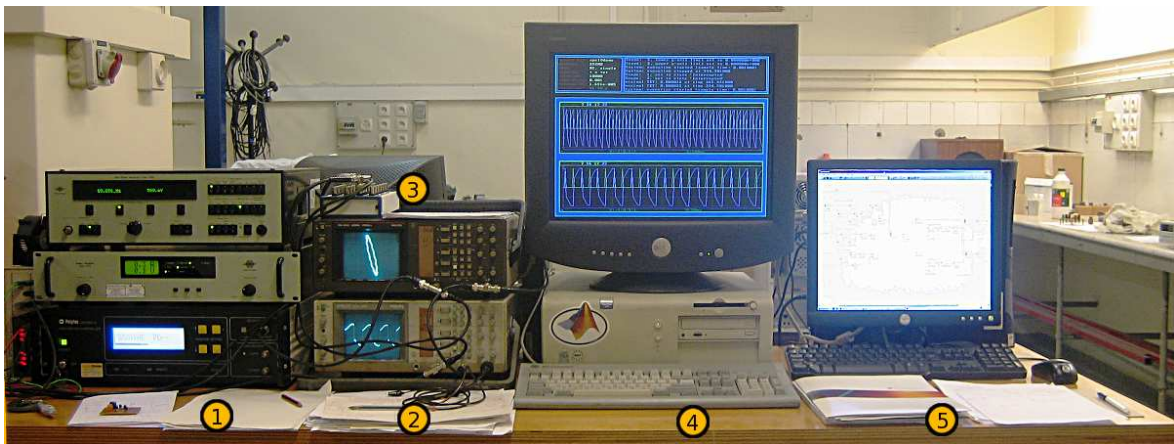


FIG. 9.6: Partie du dispositif expérimental : 1. Générateur de signaux, amplificateur, conditionneur de signal du vibromètre ; 2. Oscilloscopes ; 3. Boîtier d'interface de la carte d'acquisition ; 4. PC temps réel ; 5. PC de contrôle.

Pour faciliter la programmation, on choisit d'utiliser le module logiciel de Matlab xPC target associé à Matlab Simulink. Le dispositif comprend deux ordinateurs (voir figs. 9.6, 9.13

et 9.14). Le premier (le PC de contrôle) est utilisé pour créer un programme de commande, qui est ensuite exécuté en temps réel de manière autonome par le deuxième (PC temps réel). D'une manière pratique, le programme est créé sous forme de schéma bloc avec Matlab Simulink. Ensuite, il est compilé et envoyé par le réseau au PC temps réel<sup>3</sup>, qui, lui, fonctionne avec un système d'exploitation temps réel fourni par Mathworks avec le module xPC target.

Le PC temps réel est muni d'une carte d'acquisition National Instruments PCI-6024 E, choisie pour sa compatibilité avec xPCtarget et son faible temps de latence<sup>4</sup>. À chaque pas de temps, l'ordinateur acquiert un échantillon de tension via la carte, exécute le programme de détection, et si il y a lieu, fait sortir par la carte une commande en tension qui viendra fermer le switch. Quelques commandes basiques peuvent être exécutées, et des tracés affichés sur l'ordinateur temps réel. On peut aussi changer certains paramètres du modèle, typiquement des gains, localement ou via le PC de contrôle. En raison des latences des cartes, le pas de temps est d'au moins  $60 \mu\text{s}$  avec le matériel choisi. Une bonne partie de ce temps est liée à des temps d'attente du matériel et non aux calculs eux-mêmes ; même des modèles bien plus complexes ont fonctionné avec un pas de temps inférieur à  $100 \mu\text{s}$ . Cette partie du dispositif est présentée figure 9.6.

### Mise au point électronique

De nombreux problèmes ont surgi pendant la mise au point de l'électronique. L'idée de base était d'utiliser des transistors de type CMOS pour laisser passer le courant ou non dans le dispositif. Une des conditions essentielles pour avoir un dispositif SSDI efficace est de parvenir à inverser la tension lors de la fermeture du switch, c'est-à-dire de fermer le circuit exactement une demi-période électrique après l'ouverture (fig. 7.4(b), 145). Cela peut être obtenu de deux manières.

- Soit on utilise un dispositif capable de commander la fermeture exactement une demi période électrique. Cela nécessite un système extrêmement précis en temps. L'interrupteur utilisé doit de plus, lorsqu'il est fermé, laisser passer le courant dans deux directions. De manière pratique il faudrait deux transistors tête bêche recevant la même commande.
- Soit avec deux branches de circuit comportant chacune une diode anti-retour (fig. 9.7, 9.8, 9.9). Il faut alors fermer une des branches plus longtemps que la demi-période électrique ; c'est la diode qui va se charger de bloquer le courant pour réaliser la fermeture apparente du circuit au bon moment. Comme le courant circule dans un seul sens dans chacune des branches, on peut utiliser un seul transistor par branche ; par contre chacun d'entre eux doit être commandé séparément ; il faut générer deux signaux de commande, l'un pour les maxima de tension, l'autre pour les minima.

Comme le pas de temps minimum ( $60 \mu\text{s}$ ) n'est pas négligeable devant la demi-période (par exemple  $90 \mu\text{s}$  pour l'association de la poutre symétrique et d'une inductance de  $10 \text{ mH}$ ), il est difficile de maîtriser l'inversion par la durée de fermeture. On choisit la seconde solution, c'est-à-dire un circuit à deux branches distinctes avec des diodes anti-retour.

**Circuit avec MOSFETs identiques** Le premier circuit réalisé sur une plaquette d'essais fait appel à deux transistors à canal N International Rectifier IRFD 220 choisis pour leur faible résistance interne et pour supporter des tensions d'au moins  $100 \text{ V}$  lors d'essais à grande amplitude. Des diodes UF4003 permettent à chaque branche de ne fonctionner que

<sup>3</sup>Choisi pour son processeur Pentium III, plus rapide pour certaines applications temps réel que des processeurs plus récents.

<sup>4</sup>Il s'agit du délai entre le moment où l'ordinateur temps réel demande une valeur à la carte et où cette valeur est disponible pour le programme.



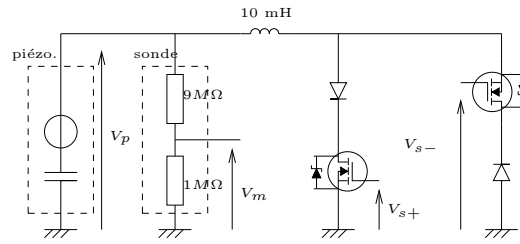


FIG. 9.7: Circuit symétrique à base de MOSFETs canal N

dans le sens voulu. La tension aux bornes de l'éléments piézoélectrique est mesurée à travers la sonde de mesure d'un oscilloscope (Philips PM 8927A) afin de la ramener à des valeurs tolérables par la carte d'acquisition, c'est à dire  $\pm 10$  V. L'ordinateur déclenche la commutation en imposant un potentiel de  $-5$  V à la grille du transistor de la branche à déclencher (fig. 9.7). Pour ce faire, deux sorties de la carte d'acquisition sont utilisées : chacune d'elles est reliée directement à la grille des transistors.

Ce circuit ne fonctionne pas en raison du déclenchement intempestif du transistor de la deuxième branche lorsque la tension aux bornes de l'élément piézoélectrique devient positive. Pour qu'il reste fermé, il faudrait appliquer la tension  $V_p$  ou  $V_p - 5$  V à la grille - ce qui n'est pas possible en raison de la limitation à  $\pm 10$  V de la carte d'acquisition. Un transformateur d'isolement pourrait régler ce problème.

D'autre part, des perturbations en dents de scie à la fréquence d'échantillonnage (donc visibles seulement à l'oscilloscope) sont observées sur la mesure de la tension piézoélectrique, probablement liés au circuit bloqueur de la carte d'acquisition qui a une impédance variant fortement avec le temps.

**Amplificateur suiveur** Afin de s'affranchir du problème de l'impédance de la carte d'acquisition, on associe aux éléments piézoélectriques un pont diviseur de tension constitué d'une résistance de  $9.87$  M $\Omega$  et une de  $0.97$  M $\Omega$ . On obtient ainsi un potentiel divisé par 11. Ensuite un amplificateur suiveur est utilisé pour adapter les impédances ; on choisit un OPA445 AP qui a donné de bons résultats sur l'inducteur synthétique. Des oscillations de tension en sortie ont été observées ; elles ont disparu en laissant l'alimentation flottante et en ajoutant des capacités de filtrage de  $22$  nF aux bornes d'alimentation de l'amplificateur opérationnel, conformément aux instructions du fabricant [11]. Ce montage a une influence réduite sur la tension piézoélectrique puisque l'impédance d'entrée est grande ( $10.84$  M $\Omega$ ) ; par contre l'impédance de sortie est faible et le montage est une source de tension que la carte d'acquisition ne perturbe pas.

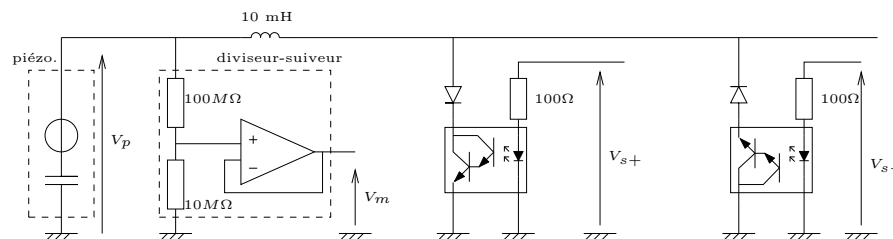


FIG. 9.8: Circuit symétrique à base d'optocoupleurs

**Circuit avec optocoupleurs** On décide d'utiliser des optocoupleurs darlington de type MOC 8050 directement sur l'élément piézoélectrique pour leur bonne tenue en tension et leur gain élevé. Les optocoupleurs permettent surtout d'isoler galvaniquement la partie piézoélectrique et la partie commande de la commutation et devraient remédier au problème de déclenchement intempestif. Au repos l'optocoupleur ne laisse pas passer de courant dans la partie phototransistor. Pour déclencher la commutation une tension de 3 V est appliquée par la carte d'acquisition à la partie diode lumineuse (protégée par une résistance de 100  $\Omega$ ). La lumière émise dans l'optocoupleur rend alors la partie phototransistor passante (fig. 9.8).

L'observation des tensions à l'oscilloscope fait apparaître une inversion imparfaite de la tension électrique lors des commutations, sans doute due à une résistance ou capacité parasite<sup>5</sup>. Par contre il n'y a pas de déclenchement intempestif. Afin de régler ce problème on devrait munir le système d'une paire de transistors supplémentaires, commandés chacun par les optocoupleurs, et alimentés par une alimentation flottante, ce qui correspond à la plupart des montages commandés utilisés par le LGEF. Faute de temps, ce dispositif n'a pu être mis en place

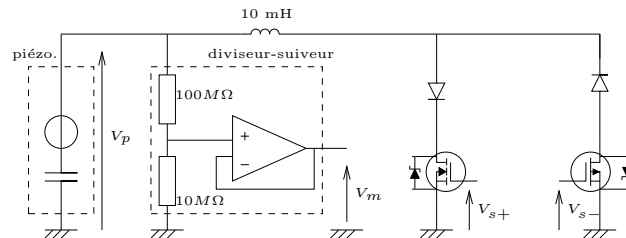


FIG. 9.9: Circuit à base de MOSFET canal N et P

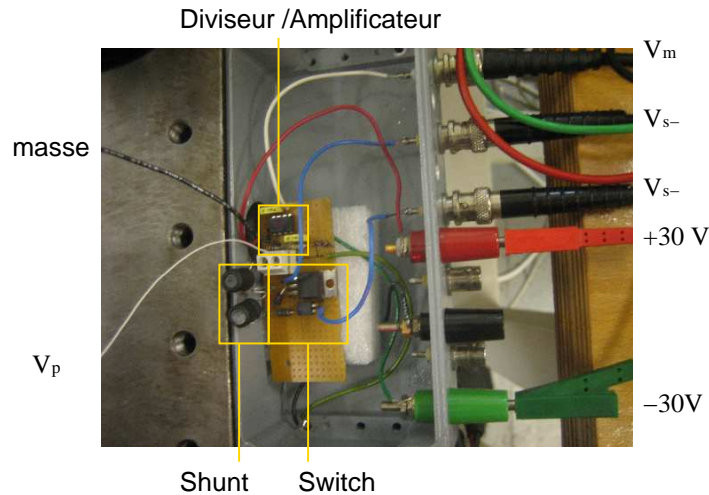


FIG. 9.10: Boîtier électronique avec connecteurs comprenant le pont diviseur, l'AOP, le shunt (qui peut être changé par enfichage) et le circuit switch avec ses deux branches.

**Circuit avec MOSFETs appairés** Finalement, on utilise des transistors MOSFET, en choisissant un transistor à canal N pour la commutation lorsque la tension est positive et

<sup>5</sup>La lecture de la documentation du composant [33] ne permet pas de conclure à ce sujet.

un transistor à canal P pour l'inversion depuis une tension négative. La mesure de tension s'effectue avec le même circuit diviseur et suiveur ; la commutation est déclenchée par une tension positive appliquée à la grille du transistor à canal N ou une tension positive appliquée à la grille du transistor à canal P (fig. 9.9, 9.10). Le défaut de cette approche est que la différence des composants pourrait introduire une différence de comportement lors des commutations dans un sens ou dans l'autre. Cela n'a pas été observé par la suite.

### Stratégies de commutation

La stratégie de commutation est déterminée par le programme Simulink qui fonctionne sur l'ordinateur temps réel. Ce programme est présenté sous forme de diagramme bloc (fig. 9.12) où les fonctions ont été regroupées en bloc. Le schéma complet peut être retrouvé en annexe (A). On a le choix entre deux types de signaux pour déclencher la commutation.

**Signal de tension** Le signal de tension est mesuré grâce à l'amplificateur suiveur (p. 215) ; il est pris soit sur l'élément connecté au switch, soit sur un élément piézoélectrique séparé faisant office de capteur.

Afin de s'affranchir des problèmes de commutation intempestive liés aux composantes haute fréquence du signal de tension, il est nécessaire de le filtrer. Pour cela on utilise deux techniques.

- On utilise un filtre à réponse impulsionnelle finie (FIR, Finite Impulse Response). Des essais ont été faits avec des filtres écrits dans le domaine temporel mais le résultat obtenu n'est pas satisfaisant (en pratique des problèmes peuvent apparaître dès qu'une partie du système n'est pas écrite en mode échantillonné [60]). Le filtre à réponse impulsionnelle a été utilisé comme un filtre passe-bas ou désactivé suivant les essais.
- On utilise aussi une réduction du taux d'échantillonnage qui évite de détecter trop de maxima non significatifs, comme illustré figure 9.11 ; il faut faire un compromis entre un taux d'échantillonnage trop élevé (précis en temps mais détectant trop tôt un maximum local) et trop bas (imprécis en temps et switchant parfois "tard").

La stratégie de commutation mise en place est la suivante :

- Le signal filtré est alors dérivé et des zéros de la dérivée sont détectés, qui correspondent donc à des extrema.
- Le signal filtré est aussi analysé afin de détecter lorsque le niveau est significativement élevé. Pour ce faire, le carré de l'amplitude est comparé à la valeur RMS sur une période d'intégration (en pratique quelques dixièmes de seconde) et la commutation est possible si la valeur instantanée dépasse la valeur moyenne d'un coefficient réglable. On se rapproche ainsi du critère proposé dans [34, 48]. En pratique et dans les cas étudiés ce critère n'a pas apporté d'amélioration significative et peut être désactivé à volonté.
- Enfin, afin de décider de la branche du circuit de commutation à fermer, le signe de la tension est pris en compte. Un gain négatif peut éventuellement être utilisé dans un cas où un élément piézoélectrique est utilisé comme capteur avec un coefficient de couplage de signe opposé à l'élément piézoélectrique sur lequel on a placé le système de commutation.
- Un délai d'inhibition peut être réglé pour éviter que deux commutations ne surviennent immédiatement l'une après l'autre.
- Enfin, la durée pendant laquelle le switch restera fermé, ainsi que l'amplitude du signal de fermeture (la tension à appliquer aux transistors) peuvent être réglées. Il faut respecter une durée supérieure à la demi-période électrique afin que l'inversion aie lieu.

Les stratégies 2 et 3 telles qu'elles sont définies au chapitre 8 ne peuvent être mises en œuvre facilement en l'absence de moyen fiable de mesurer la charge. En utilisant plusieurs éléments piézoélectriques ou une mesure du courant, il est peut être possible de l'obtenir. C'est dans cette optique que ce dispositif a été prévu, mais la mise au point électronique est plus longue que prévu.

**Signal de vitesse** Une autre manière de déclencher la commutation est d'utiliser un capteur extérieur (par exemple le signal fourni par le vibromètre laser). On souhaite déclencher la commutation aux maxima de déplacement, donc aux annulations de vitesse. Le signe (direction dans laquelle on commute) est donné par la valeur instantanée, donc après passage par 0 de la vitesse. On peut changer ce signe pour tenir compte du fait que le coefficient de couplage pour un mode peut être négatif ou positif et que le vibromètre mesure la vitesse à un point de la structure où la déformée peut être dans un sens ou dans l'autre.

Il est intéressant de remarquer qu'en pointant le laser du vibromètre sur un noeud d'un mode donné, on réduit à 0 la participation de ce mode à la mesure - et qu'on peut donc s'affranchir d'une partie des problèmes de synchronisation évoqués au chapitre 8.5.2.

Comme pour le cas du signal de tension, on peut régler un délai minimum entre deux commutations, ainsi que la durée de la phase de fermeture et la tension appliquée aux transistors.

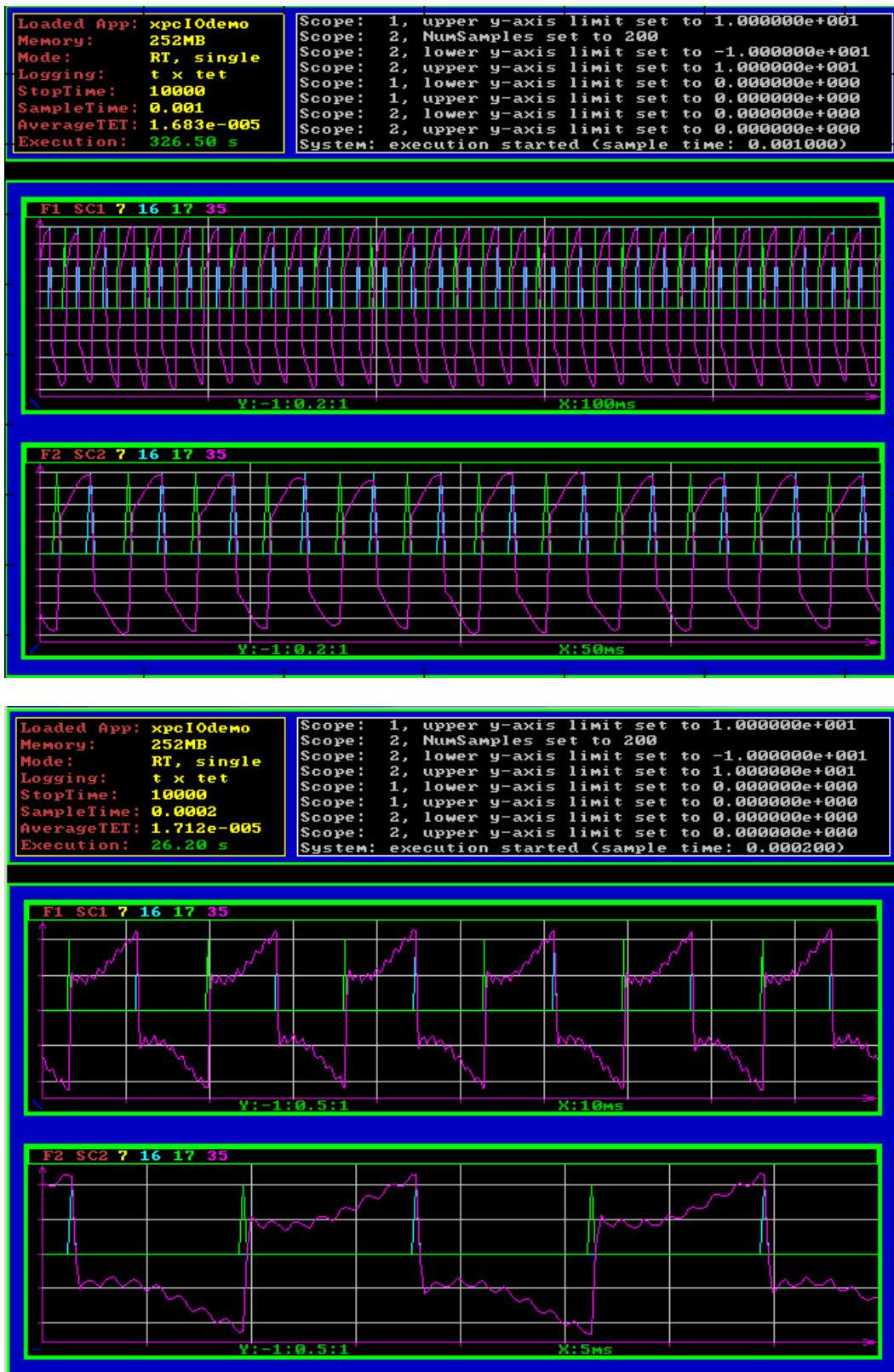


FIG. 9.11: Captures d'écran de l'ordinateur temps réel illustrant l'effet d'un changement de fréquence d'échantillonnage sur la détection de max. (en haut) taux réduit, (en bas) taux plus élevé. Les signaux de tension dans l'élément piézoélectrique représentés sont identiques dans les deux cas; par contre la mesure du haut, sous-échantillonnée, montre moins de composantes haute fréquence.

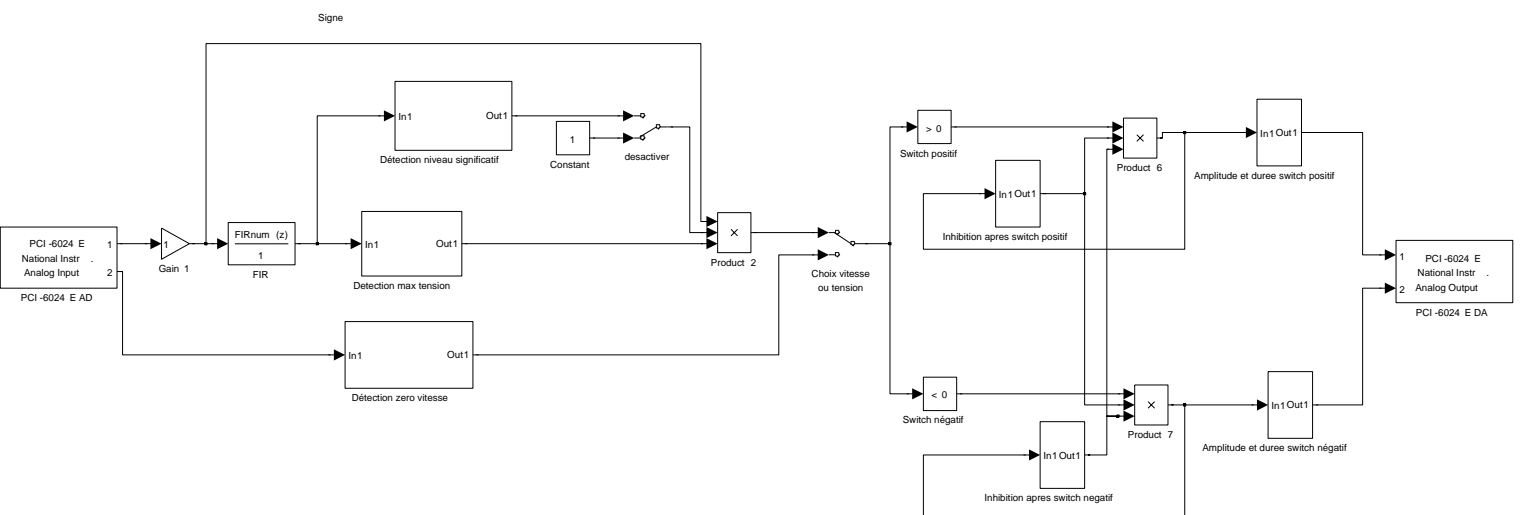


FIG. 9.12: Schéma bloc simplifié du programme Simulink utilisé.

## 9.3 Dispositifs de mesure

### 9.3.1 Poutre symétrique

La figure 9.13 présente le dispositif utilisé avec la poutre symétrique (§9.1.1). Le système de commutation avec ordinateur temps réel du paragraphe 9.2.2 est utilisé avec le circuit à MOSFETs appairés. La mesure de la tension piézoélectrique ou la mesure de vitesse par le vibromètre peuvent être utilisées pour déterminer les instants de commutation. Un pont diviseur et un amplificateur suiveur (présentés au paragraphe 9.2.2) évitent la perturbation de la tension piézoélectrique par la carte d'acquisition.

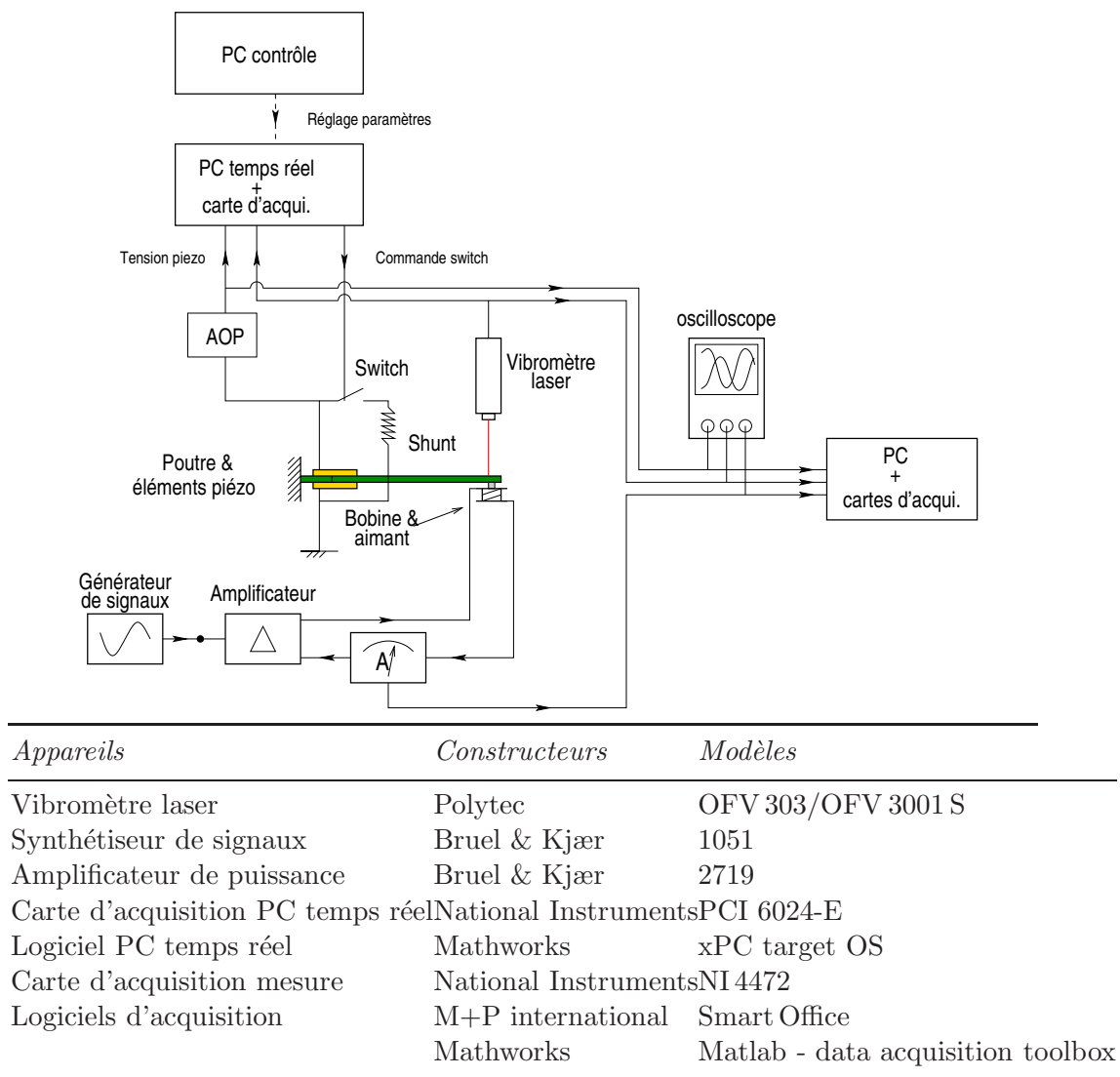


FIG. 9.13: Dispositif expérimental et références des appareils utilisés.

### 9.3.2 Poutre asymétrique

Le dispositif, présenté figure 9.14, est identique à celui du paragraphe précédent, à la différence de la structure utilisée, définie paragraphe 9.1.2, qui possède un élément capteur et

un élément actionneur séparés. La vitesse ou la tension dans chacun de ces éléments peuvent être utilisées pour synchroniser le switch.

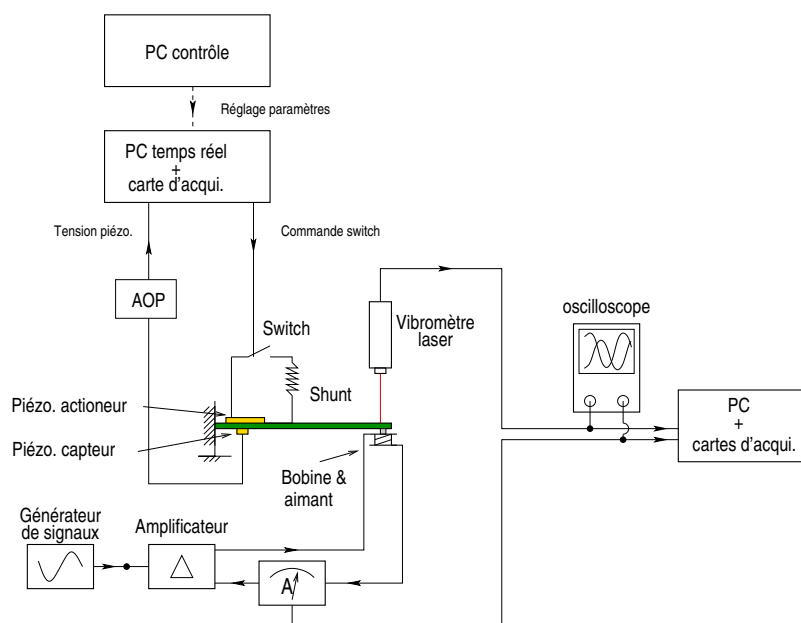


FIG. 9.14: Dispositif expérimental à deux éléments piézoélectriques

## 9.4 Résultats en régime forcé

### 9.4.1 Analyse en temps

**Protocole** On utilise la poutre asymétrique, qui permet de mettre en œuvre toutes les techniques de switch envisagées<sup>6</sup>. Grâce à l'aimant situé en bout de poutre, on excite celle-ci avec un signal sinusoïdal à la résonance (en circuit ouvert) du premier mode.

On effectue des mesures dans 7 situations différentes.

- Avec les éléments piézoélectriques en circuit ouvert.
- Avec le switch autonome du LGEF.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo actionneur et n'est pas filtré numériquement.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo actionneur et filtré par un filtre numérique passe-bas.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo capteur et n'est pas filtré numériquement.
- Avec le circuit à commutation commandée; le signal de tension est pris sur le piézo capteur et filtré par un filtre numérique passe-bas.
- Avec le circuit à commutation commandée, déclenchée par le signal de vitesse mesuré par le vibromètre.

<sup>6</sup>La poutre qui a été utilisée pour ces mesures est une poutre en inox asymétrique dont les caractéristiques sont proches de celle du paragraphe 9.1.2; les fréquences sont légèrement différentes. Il s'agit d'une première version de poutre asymétrique à deux éléments. Les résultats observés sur la poutre en aluminium (mais qui faute de temps n'ont pas été mesurés systématiquement) sont similaires.



Sur la figure 9.15, on trace la mesure de l'effort, de la vitesse au point d'excitation, et de la tension électrique dans l'élément piézoélectrique actionneur quand c'est possible. Voici quelques remarques sur les tracés.

- L'effort imposé est le même dans chacun des cas.
- L'échelle des tracés est la même dans chacun des cas ; ce sont les signaux en Volts de chacun des capteurs.
- La mesure de l'effort est effectuée en supposant que celui-ci est proportionnel au courant dans la bobine ; les tracés d'effort sont en réalité une mesure du courant avec un calibre  $10 \text{ A.V}^{-1}$ . Le rapport entre l'effort et le courant n'est pas connu. Il est de l'ordre de grandeur de  $0.5 \text{ N.A}^{-1}$ .
- La mesure de vitesse s'effectue au vibromètre sur l'aimant avec un calibre de  $125 \text{ mm.s}^{-1}.\text{V}^{-1}$ .
- La mesure de tension est effectuée à travers le pont diviseur avec AOP (§9.2.2) - avec un rapport de réduction de 1/11.2.
- L'acquisition de tension est parfois faite sur un autre élément piézoélectrique pour la commutation ; ainsi les deux tracés avec switch commandé par patch capteur ne montrent pas la tension du patch actionneur ; on remarque d'ailleurs qu'il n'y a pas d'inversion périodique de tension ...

**Analyse des résultats** On commente maintenant les résultats de gauche à droite puis de haut en bas :

- Le tracé en circuit ouvert est conforme à la théorie ; on observe que l'effort est en phase avec la vitesse, et que la tension électrique, qui dépend du déplacement, est décalée de  $\pi/2$ .
- Le tracé avec circuit switch autonome montre que les commutations sont bien synchronisées ; par contre l'inversion de tension n'est pas satisfaisante, à chaque commutation la tension retombe presque à 0. Un début d'explication est que ce circuit a été conçu pour une association avec la poutre symétrique, qui comporte des éléments piézoélectriques en série dont la capacité est faible. Ici, la capacité de l'élément seul est bien supérieure ; le courant qui circule est plus important et les tensions moins élevées, et la résistance interne du circuit devient plus pénalisante. Il aurait été intéressant de faire réaliser un circuit adapté à l'élément piézoélectrique utilisé. La vitesse a nettement diminué par rapport à la situation circuit ouvert, et on constate que le signal est bien plus chahuté, avec des modes de fréquence supérieure qui sont excités.
- Le tracé avec switch commandé par ordinateur temps réel montre un défaut de synchronisation lorsqu'on utilise la stratégie 1 qui consiste à fermer le switch à chaque maximum de tension. Comme le signal de tension est fortement perturbé par les modes élevés, il présente des maxima locaux à intervalles très courts. Pour des raisons de taux d'échantillonnage et probablement beaucoup de facteurs, le switch ne se ferme pas tout le temps, néanmoins les commutations se produisent à des intervalles de temps variables et l'amortissement de vibration n'est pas optimal. Par contre, on peut remarquer que lorsqu'il se ferme, on obtient une inversion de la tension assez nette. Les performances sont finalement meilleures que le circuit autonome, malgré les irrégularités.
- Le tracé avec switch commandé par ordinateur temps réel et filtre passe-bas montre que la commutation se produit bien plus régulièrement. Cependant, elle n'est pas exactement périodique : la durée des phases circuit ouvert fluctue légèrement. On assiste tout de même à une nette augmentation de la charge stockée par rapport au cas sans

filtre passe-bas, et l'amplitude du mouvement diminue. On peut remarquer également que les modes élevés sont davantage excités. L'atténuation obtenue est très bonne.

- En utilisant un élément piézoélectrique séparé comme capteur pour synchroniser les commutations, on observe que le signal de tension est moins perturbé par les modes haute fréquence (on rappelle que cet élément a des couplages quasi-nuls avec les modes 2 et 3). Evidemment, la tension mesurée ne s'inverse plus à chaque commutation. On remarque cependant une faible influence instantanée du phénomène de switch, qui est peut être liée à la déformation longitudinale instantanée de la poutre sous l'effet du changement brusque de tension. Une autre possibilité est que ce phénomène soit une interaction dans le circuit électrique.
- En utilisant un filtre passe-bas avec l'élément piézoélectrique capteur on améliore légèrement l'efficacité. On peut donc déduire que bien que l'élément capteur soit à peu près découplé du mode 2, d'autres modes perturbent la tension, et que le signal de tension doit être traité afin d'améliorer la synchronisation même lorsqu'il est issu d'un capteur dédié.
- En utilisant la mesure de vitesse pour déclencher la commutation on parvient à obtenir des commutations régulières et une très bonne atténuation des vibrations.

**Atténuation globale du niveau vibratoire** Le tableau 9.2 regroupe les atténuations par rapport à la situation circuit ouvert calculées à partir des valeurs efficaces des signaux de vitesse<sup>7</sup>, par la formule :

$$A_{dB} = 20 \log \frac{V_{RMS}^{CO}}{V_{RMS}}$$

Technique	$A_{dB}$
Switch autonome	9.6 dB
Switch commandé	12.8 dB
Switch commandé et filtre passe bas	16.6 dB
Switch commandé par piézo. capteur	13.2 dB
Switch commandé par piézo. capteur et passe bas	16.2 dB
Switch commandé par vibromètre	17.8 dB

TAB. 9.2: Atténuation obtenues avec les divers dispositifs à commutation, correspondant au signaux de vitesse de la figure 9.15

<sup>7</sup>Ce qui n'est pas exactement identique à la comparaison des moyennes RMS du signal en déplacement, mais doit être proche.

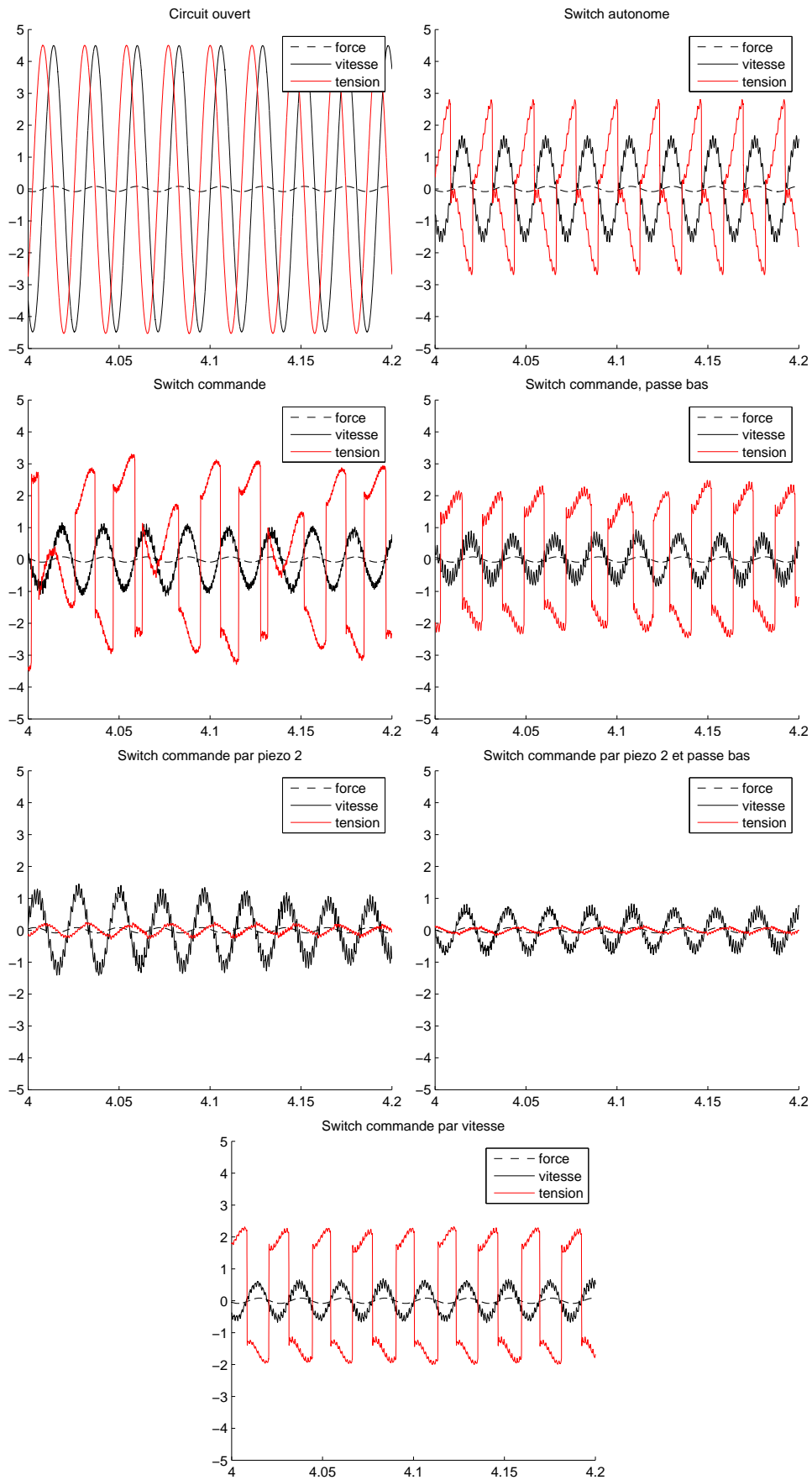


FIG. 9.15: Tracés en temps [s] des signaux [V] d'effort, de vitesse et de tension avec divers circuits électriques.

## 9.4.2 Analyse en fréquence

### Influence de la stratégie

On prend les signaux temporels des mesures précédentes (fig. 9.15) et on en fait le spectre ; le signal de 10 s est découpé en 15 blocs avec 78% de recouvrement<sup>8</sup>, traités avec une fenêtre de Hanning ; les spectres sont obtenus par fft, puis les amplitudes moyennées. On s'est limité aux techniques utilisant l'élément piézoélectrique actionneur afin de mettre en valeur l'effet de la stratégie de commutation et non le choix du capteur.

On peut faire les remarques suivantes sur les résultats :

- On remarque que le spectre du système en circuit ouvert présente des harmoniques (de niveau faible), qui sont liés aux non-linéarités du dispositif (le signal d'excitation est sinusoïdal) ;
- La réponse du système avec switch autonome présente un spectre harmonique ; le signal est périodique. On remarque que l'amplitude des harmoniques est plus importante que dans le cas circuit ouvert, avec en particulier des niveaux élevés des harmoniques voisines des fréquences propres de la poutre. Cela est par exemple le cas de la 16-ième harmonique qui est proche de la fréquence du troisième mode.
- Les spectres des systèmes avec switch commandé (avec et sans filtre passe-bas) présentent un spectre beaucoup plus bruité, lié à l'irregularité des commutations, visible sur la figure 9.15. La réponse n'est pas périodique, même si l'utilisation du filtre passe-bas permet d'avoir des commutations à peu près régulières. D'ailleurs, ces commutations plus régulières se traduisent sur le spectre par un niveau de bruit plus bas. On remarque par contre un "trou" très net dans le spectre à la fréquence de 1kHz, avec un motif localement symétrique pour les signaux avec switch commandé ; il s'agit probablement d'un phénomène lié à l'échantillonnage (le PC temps réel accomplit sa boucle de calcul à 1 kHz exactement et les commutations arrivent à un intervalle variable mais entier de ms). L'explication exacte de ce motif reste à déterminer.

### Transfert d'énergie

La figure 9.17 correspond à un extrait de la figure 9.16. Elle représente le spectre de la vitesse en circuit ouvert et celui avec switch commandé et filtre passe-bas. Ce dernier spectre peut s'interpréter comme la superposition (i) d'un spectre harmonique (à la fréquence d'excitation) à (ii) un spectre bruité avec des pics prépondérants aux fréquences propres des modes de flexion. Le signal de tension électrique correspondant (fig. 9.15, 2-ième ligne à droite), peut s'interpréter de manière analogue : la superposition d'un signal périodique et d'une perturbation non périodique. Comme le signal de tension joue le rôle d'un effort sur la structure (Voir les équations (3.34), p. 48 ou (4.27), p. 64), sa partie périodique explique la partie harmonique du spectre de vitesse. De manière analogue, la partie non-périodique du signal de tension vient faire résoner la structure à ses fréquences propres, qui se retrouvent dans le spectre de vitesse.

Alors que les pics des modes de flexion 1, 3 et 4 sont très visibles, on peut remarquer que le pic du second mode de flexion (autour de 300 Hz) est quasiment absent du spectre de vitesse. Cela s'explique en considérant que chaque mode est excité par le signal de tension à travers son coefficient de couplage (voir par exemple la formulation modale (3.61), p. 53). Comme l'élément piézoélectrique actionneur est faiblement couplé au mode 2 (voir tab. 9.1), l'effet du switch sur ce mode est réduit.

<sup>8</sup>Ce qui permet d'avoir un nombre d'échantillons en puissance de 2 dans chaque bloc.

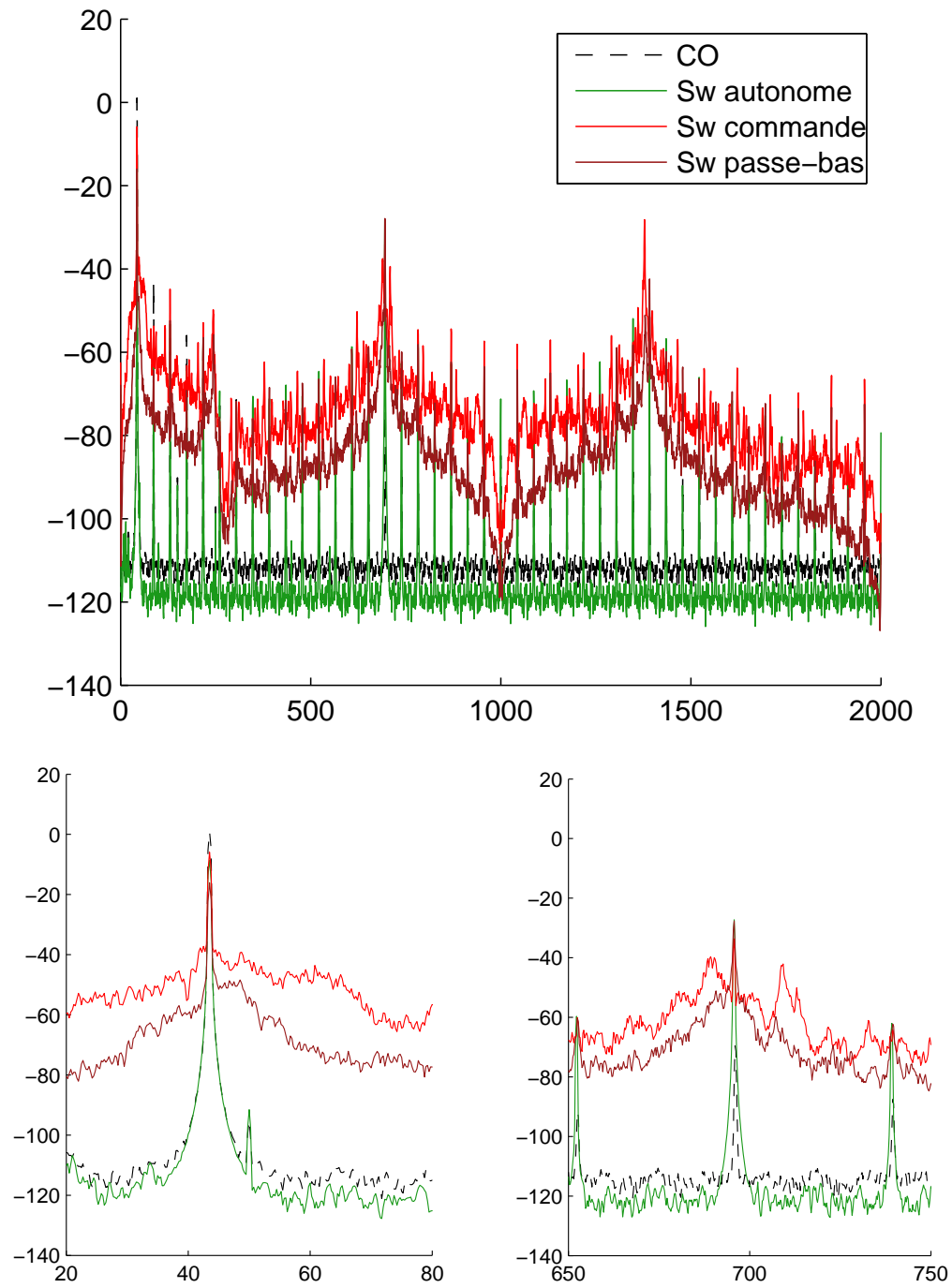


FIG. 9.16: Spectres de la vitesse pour les 4 premières situations de la figure 9.15. Détail au voisinage des modes 1 et 3. Le mode 2 est autour de 300 Hz et peu présent.

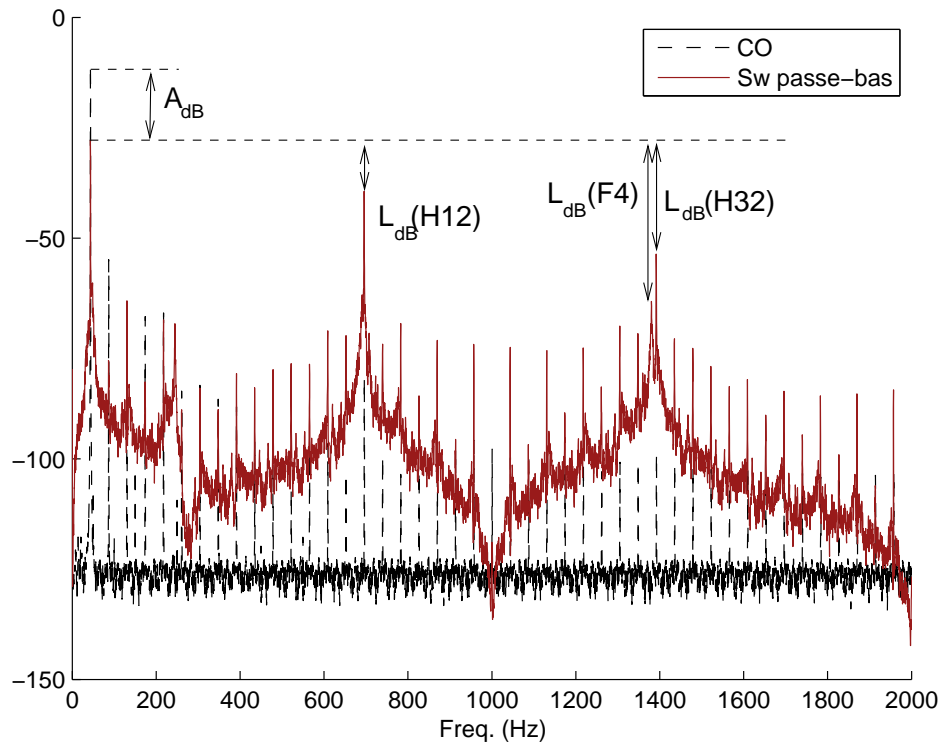


FIG. 9.17: Spectre de la vitesse en circuit ouvert et avec switch commandé avec filtre passe-bas (extrait de la figure 9.16).

Dans le cas d'un switch parfaitement synchronisé avec le signal d'excitation, le signal de tension est périodique et le spectre de vitesse correspondant est harmonique ; les pics aux fréquences propres exactes des modes de flexion n'apparaissent pas. De même, le "plancher" de bruit est très bas. Cela est très visible avec le switch autonome (figs. 9.15 et 9.16). Cependant, le spectre de vitesse présente des zones de niveau plus élevé au voisinage des fréquences propres, dues au filtrage du signal de tension par la réponse de la structure.

Au contraire, dans le cas d'une commutation "mal" synchronisée, on observe une remontée du niveau de bruit, cela est visible par exemple figure 9.16 dans le cas du switch commandé sans passe-bas.

### Atténuation et amplitude des harmoniques

Pour quantifier l'atténuation apportée par le dispositif ainsi que le transfert d'énergie vers les hautes fréquences, on définit les grandeurs suivantes.

- $A_{dB}$  est l'atténuation apportée par le dispositif, par rapport à la situation en circuit ouvert, à la fréquence d'excitation  $\Omega_F$  du système.

$$A_{dB} = 20 \log \frac{|V_{CO}(\Omega_F)|}{|V(\Omega_F)|},$$

avec  $V_{CO}(\omega)$  et  $V(\omega)$  les spectres moyennés des signaux de vitesse en circuit ouvert et avec le dispositif à commutation considéré, à la fréquence  $\omega$ , respectivement.

- $L_{dB}(\omega)$  le niveau relatif d'un pic secondaire du spectre à la fréquence  $\omega$  par rapport au

Système	$A_{dB}$	$L_{dB}(N12)$	$L_{dB}(F4)$	$L_{dB}(N32)$
Circuit ouvert	0	70	-	87.3
Switch autonome	9.6	18.6	-	46.5
Switch commandé	12.9	27.7	25	51.9
Switch avec passe-bas	17	11.2	47	25.8

TAB. 9.3: Atténuation apportée et niveau relatif des modes / harmoniques.

fondamental (à  $\Omega_F$ ) du même spectre.

$$L_{dB} = 20 \log \frac{|V(\Omega_F)|}{|V(\omega)|},$$

Pour caractériser le transfert d'énergie vers les fréquences autres que celles d'excitation, on s'intéresse aux pics prépondérants : on mesure  $L_{dB}$  pour les pics harmoniques proches des fréquences des modes de flexion 3 et 4 ainsi que pour le pic à la fréquence du 4-ième mode de flexion. Les résultats sont indiqués dans le tableau 9.3, où l'on note :

- $L_{dB}(H12)$  le niveau relatif du 12-ième harmonique (696 Hz), très proche du mode F3 (690 Hz) ; le pic de résonance n'est pas observé à la pulsation du mode, mais plutôt à l'harmonique le plus proche ;
- $L_{dB}(F4)$  le niveau relatif du 4-ième mode de flexion (1378 Hz) ;
- $L_{dB}(H32)$  le niveau relatif du 32-ième harmonique (1392 Hz).

On a retiré les valeurs correspondant à un niveau "plancher" du spectre (autour de -120 dB). On peut faire les remarques suivantes :

- Les  $A_{dB}$  calculés ici (à la fréquence d'excitation) sont quasiment identiques à ceux du tableau 9.2, calculés avec la valeur efficace de la vitesse et prenant en compte toute la bande fréquentielle.
- Dans tous les cas, lorsque le fondamental est atténué, les niveaux relatifs des harmoniques remontent ; on peut s'attendre à ce que la synchronisation soit alors plus difficile.
- Au voisinage du mode 4 il arrive que le pic d'amplitude la plus élevée soit à la fréquence du mode propre (1378 Hz) ou bien sur l'harmonique 32 du signal d'excitation (1392 Hz), suivant la qualité de la synchronisation.

### Influence du couplage

On compare maintenant le spectre à la résonance entre la poutre symétrique (§6.1.1) et asymétrique (§9.1.2). La première a été conçue pour avoir les trois premiers coefficients de couplage élevés ; tandis que la deuxième a été conçue pour avoir le coefficient de couplage du premier mode élevé et celui du deuxième mode faible. On espère ainsi limiter les phénomènes de désynchronisation observés sur les simulations du paragraphe 8.5.2, où la présence de mode élevés réduit l'efficacité du switch.

La figure 9.18 permet de comparer les spectres de la vitesse avec excitation à la résonance du premier mode, en circuit ouvert et avec switch autonome, de la poutre symétrique (à gauche) et asymétrique (à droite). Le spectre est obtenu en effectuant un grand nombre de moyennes

pendant une acquisition continue (par le logiciel SmartOffice). Le spectre de la vitesse du système en circuit ouvert est un spectre harmonique ; seule l'amplitude des harmoniques est représentée. On observe les différences qualitatives suivantes - une comparaison quantitative est sans objet, les structures étant différentes.

- L'excitation du mode 2 est bien réduite par le découplage de la structure asymétrique ;
- L'amortissement des vibrations est plus important avec la structure asymétrique ;
- L'aspect "en peigne" du spectre avec structure asymétrique montre que la synchronisation est meilleure qu'avec la structure symétrique (où l'on observe d'autres raies que celle des harmoniques du mode 1 ; ce comportement est interprété ci après (§9.4.2))
- L'excitation du mode 3 est plus importante avec la structure asymétrique ; néanmoins cela ne pose pas de problème de désynchronisation apparent.

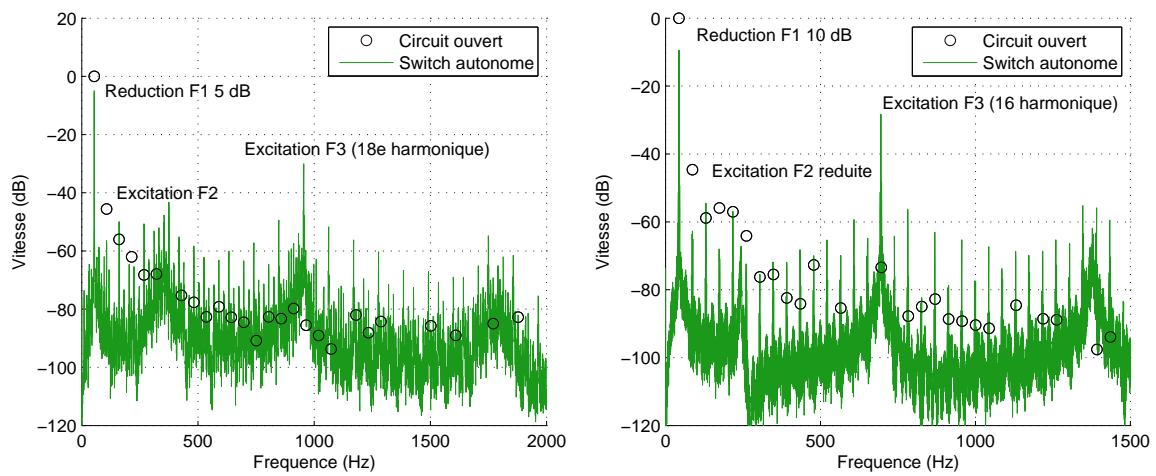


FIG. 9.18: (à g.) Spectre de la vitesse avec poutre symétrique (à dr.) avec poutre asymétrique.



### Excitation croisée entre modes, théorie et expérience

L'observation du comportement et de simulations du système montre que la synchronisation des commutations est perturbée par la présence de modes voisins, particulièrement lorsqu'ils sont harmoniques impairs. Afin de visualiser ce phénomène on réalise une simulation et un essai d'excitation par un sinus glissant lentement, passant par la première résonance, sur la poutre symétrique qui présente un couplage important des trois premiers modes. Le résultat est tracé sous forme de diagramme temps/fréquence figure 9.19 ; le but est de mettre en valeur les comportements des harmoniques.

On distingue les éléments suivants :

- La ligne diagonale de faible pente que l'on observe sur les deux diagrammes correspond à la réponse directe à l'effort d'excitation.
- On peut également observer les harmoniques impairs de cette réponse, qui sont liés à l'effet du switch ; ils se voient sous formes de lignes dont la pente est multiple impair de la pente de l'effort d'excitation.
- Les barres horizontales sur le diagramme correspondent aux modes 1 et 2.
- Les harmoniques impairs excitent légèrement le deuxième mode ; on observe un phénomène d'addition / retrait de fréquence qui fait apparaître des lignes montantes et descendantes de part et d'autre de la fréquence du deuxième mode. Cette addition / retrait de fréquence des signaux montre qu'il y a une modulation des amplitudes, c'est à dire un phénomène de multiplication entre un phénomène à la fréquence d'excitation et un à la fréquence propre d'un mode. Il ne s'agit pas d'un artefact de mesure, puisqu'il s'observe également sur les simulations.
- Au moment où la fréquence d'excitation passe par la pulsation du premier mode (passage à la résonance) on constate que le deuxième mode est fortement excité ; de plus, on observe un élargissement du spectre. Cet élargissement montre que le système se comporte de manière irrégulière à ce moment.

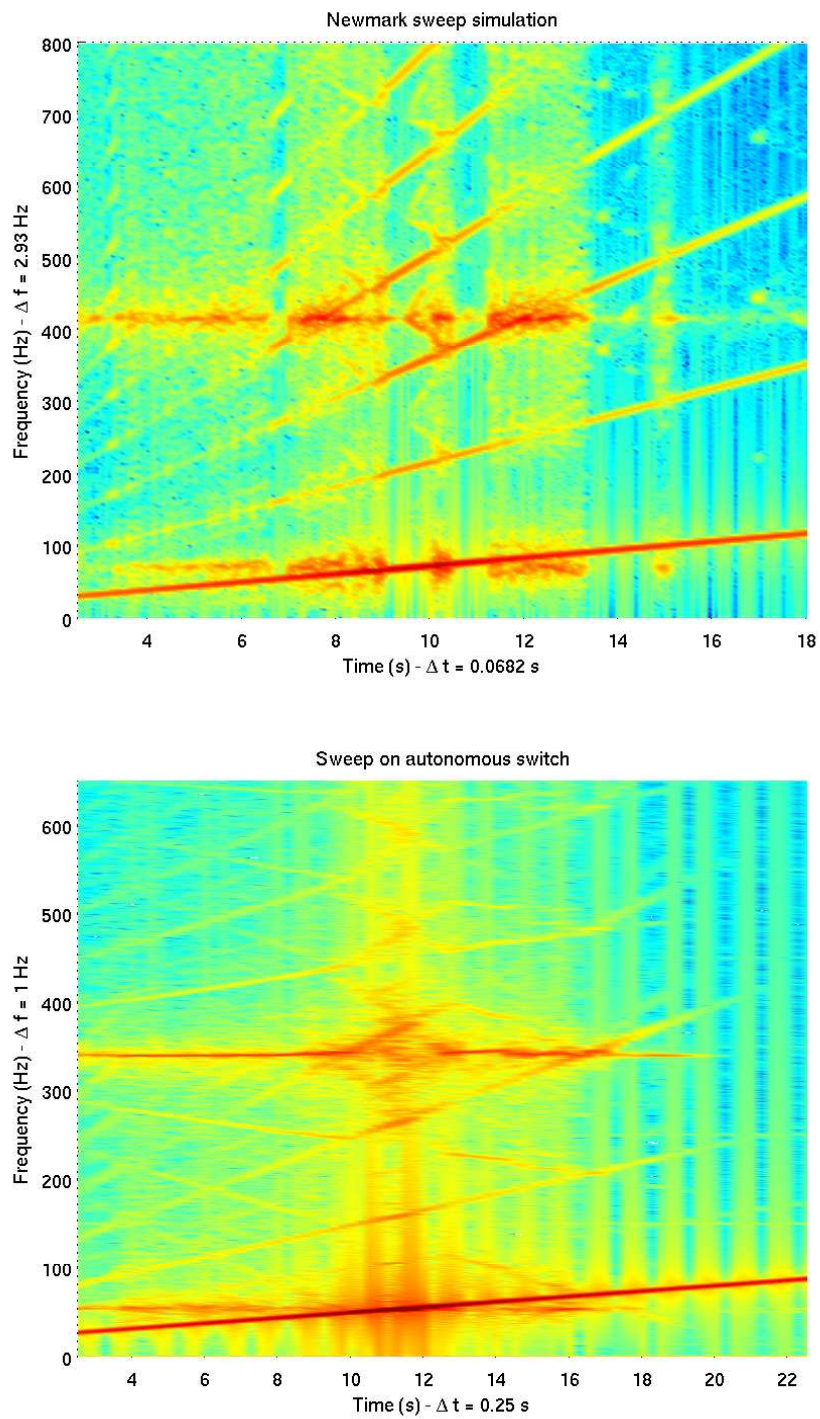


FIG. 9.19: Diagrammes temps-fréquence pour une excitation sinus glissant : (en haut) simulation et (en bas) expérience.

### Influence de l'inductance

On se place à la résonance du mode 1 de la poutre asymétrique. On utilise le dispositif à switch commandé avec filtre passe bas, qui permet de changer la valeur de l'inductance du shunt ; on mesure le spectre de la réponse avec une inductance de 1 mH et une de 20 mH<sup>9</sup>. Le spectre de la vitesse est tracé figure 9.20 à gauche et le spectre du signal de tension est tracé à droite. On peut rapprocher cette expérience du tracé du spectre de la charge (§8.5.2), même si le signal de tension et de charge n'ont pas exactement la même forme.

En comparant les spectres on constate que les composantes haute fréquence sont bien plus présentes dans les signaux de tension et dans la vitesse de la structure. De plus, étant donné qu'à ces fréquences la structure rayonne très bien du bruit acoustique, la différence de niveau sonore est spectaculaire à l'oreille. Ainsi le bruit produit par les commutations est nettement audible avec une inductance de 20 mH, et vraiment très désagréable avec une inductance de 1 mH. L'efficacité du système est à peu près la même avec les deux inductances ; on observe cependant un niveau de réexcitation de certains modes intermédiaires un peu supérieur avec une inductance de 20 mH.

---

<sup>9</sup>Plus grosse valeur disponible au moment de la mesure.

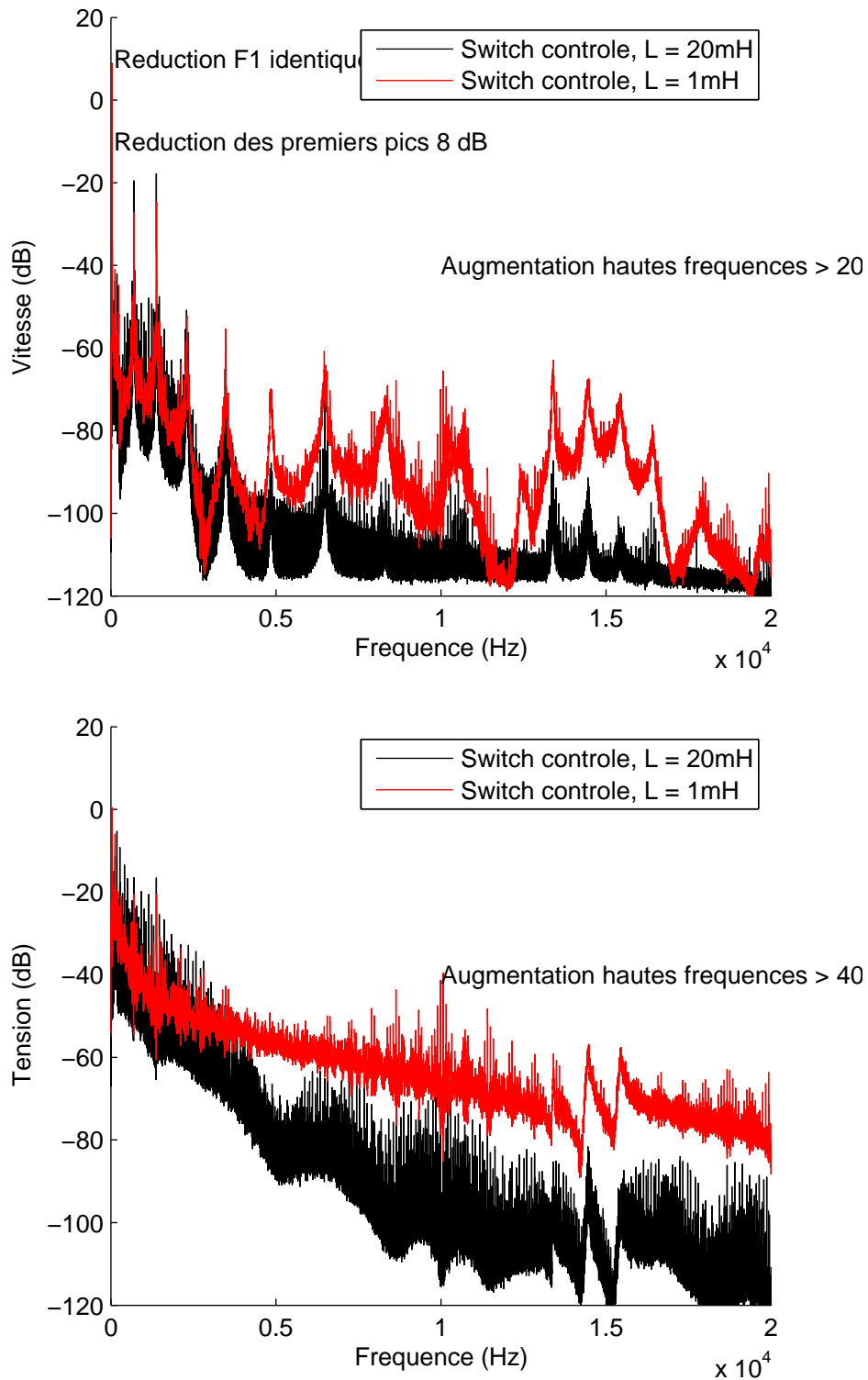


FIG. 9.20: (en haut) Spectre de la vitesse avec deux inductances différentes (en bas) spectre du signal de tension.

## 9.5 Résultats en régime libre

On réutilise le dispositif expérimental de lâcher électromagnétique du chapitre 6.4.3 ; on compare deux shunts possibles, le shunt RL linéaire et le shunt SSDI, avec le circuit autonome ; ces deux dispositifs sont associés à la poutre symétrique ( §6.1 , tab. 6.7). Le début de *deux réponses superposées* et un détail sont tracés figure 9.21, où on a porté en gris clair l'enveloppe de décroissance de la réponse en circuit fermé. On peut faire les commentaires suivants :

- L'efficacité du shunt SSDI est bonne sur le début de la réponse, sans atteindre celle du shunt résonant.
- Le circuit autonome cesse de fonctionner assez rapidement, aux alentours de 0.2s ; il n'y a plus assez de tension dans l'élément piézoélectrique pour déclencher la commutation ; c'est une non-linéarité de type seuil de l'électronique qui n'est pas prise en compte dans nos modèles.
- L'observation des deux réponses superposées pour le cas du shunt RL montre une superposition exacte des réponses. Les conditions initiales sont donc parfaitement identiques entre deux lâchers.
- Par contre, la réponse du cas avec shunt SSDI montre des différences nettes en terme de phase des modes 1 et 2. On peut déduire de cette observation que le système avec shunt est très sensible aux conditions initiales ; ainsi la déviation minuscule qui passe inaperçue avec le shunt RL provoque une différence notable d'évolution avec le shunt SSDI. Il s'agit d'une des caractéristiques d'un système chaotique [98].

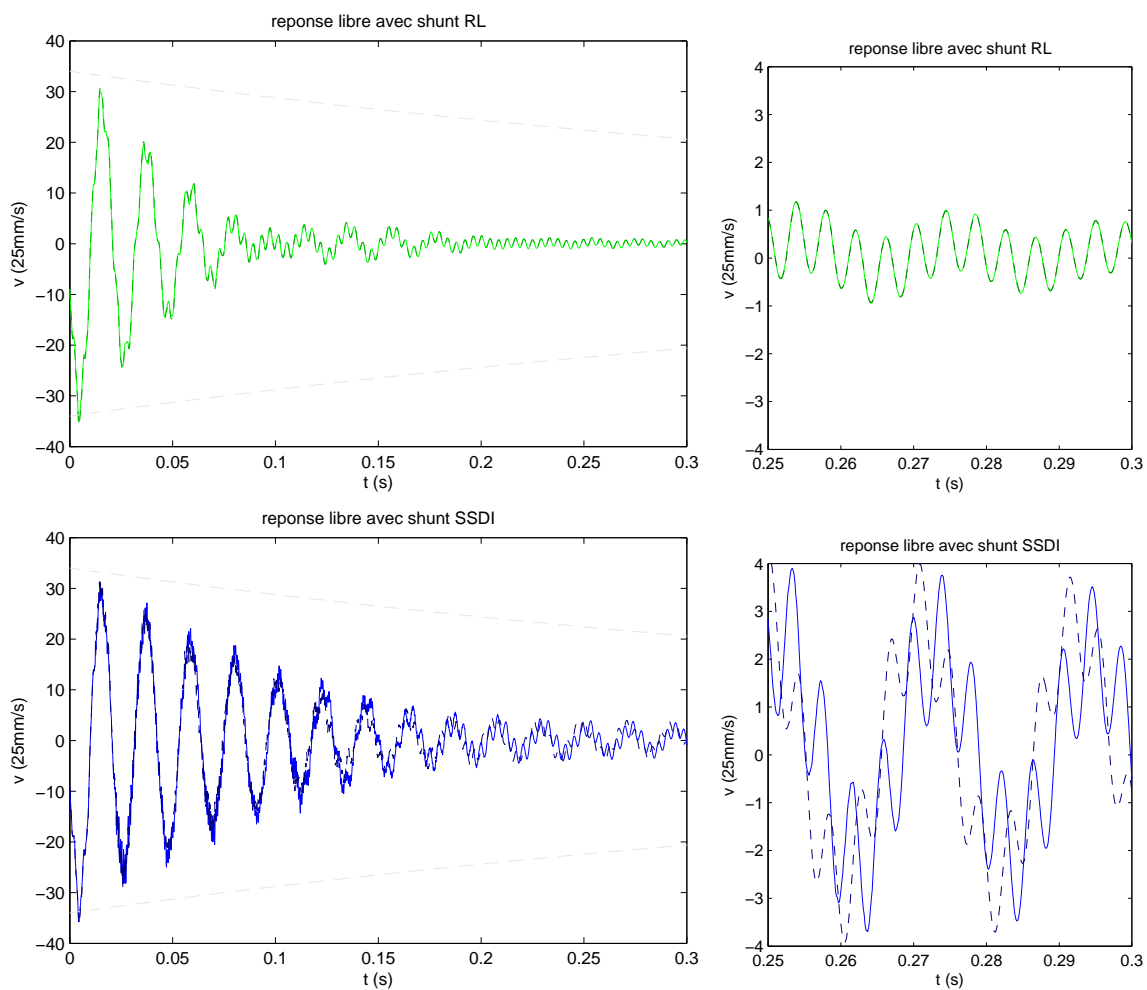


FIG. 9.21: Début (à g.) et détail (à dr.) de deux réponses libres avec shunt RL (en haut) et SSDI (à droite)

## 9.6 Conclusion

L'étude expérimentale de shunts à commutation montre que plusieurs phénomènes dégradent la performance par rapport à la prédiction du modèle 1 ddl. Ainsi, à chaque switch, le changement rapide de la charge dans l'élément piézoélectrique provoque un changement de contrainte qui excite les modes de vibration élevés de la structure. Ce phénomène perturbe le signal de tension qui sert à déclencher la commutation, ce qui peut diminuer les performances. On a observé trois situations dans le cas d'une excitation harmonique :

- Dans certain cas, le système reste synchronisé sur le signal d'excitation, et la réponse est périodique à la fréquence d'excitation. Certains harmoniques, proches des modes propres de la structure, peuvent prendre une amplitude importante.
- Dans certain cas, le système a une synchronisation qui fluctue, c'est à dire que la réponse n'est pas tout à fait périodique, néanmoins les commutations se produisent non loin du maximum de déplacement du mode que l'on cherche à atténuer. La réponse du système n'est plus tout à fait périodique, mais en terme d'atténuation, ce cas n'est pas forcément très pénalisant.
- Dans certain cas, la synchronisation est perturbée, les commutations surviennent trop souvent, trop peu ou au mauvais moments, et le système ne parvient pas à stocker une charge importante ; alors l'efficacité est dégradée.

Ces comportements avaient été constatés avec le modèle N ddl (§8) ; dans ce chapitre on s'est volontairement limité à des stratégies de commutation basées uniquement sur des critères instantanés. Cette démarche avait pour but de mettre en valeur les phénomènes de transfert d'énergie entre modes. Expérimentalement, ces phénomènes se constatent bien ; de plus on observe la baisse de performance en termes d'atténuation en présence de modes élevés. Les systèmes qui ont bien fonctionné en terme d'atténuation sont ceux qui sont capables de ne pas commuter à chaque maximum local :

- le circuit autonome, avec ses composants qui réalisent un passe-bas et une détection de niveau ;
- le système commandé avec ordinateur temps réel, réglé avec un taux d'échantillonnage bas, ou un filtre passe bas ;
- le système commandé avec un élément piézoélectrique capteur sélectivement couplé au mode visé ;
- le système commandé avec la mesure de vitesse...

Certains des dispositifs étudiés sont évidemment peu réalistes pour un objectif de shunt autoalimenté (vibromètre laser ...) ; néanmoins ils sont autant de pistes pour des développements ultérieurs.





---

---

## Conclusion

### 10.1 Organisation de la thèse et résultats.

Les objectifs initiaux de cette thèse étaient au nombre de trois. Il s’agissait tout d’abord de développer un modèle du comportement d’une structure avec éléments piézoélectriques et shunt à commutation. Ensuite, ce modèle devait permettre d’optimiser le système (c’est à dire, les éléments piézoélectriques, le shunt associé, et les instants de fermeture du circuit). Finalement, il fallait décrire le mécanisme de réduction de vibration. On a ajouté comme objectif “intermédiaire” d’étudier les shunts linéaires en préalable aux shunts à commutation.

#### 10.1.1 Partie I : modèles électromécaniques

Afin de modéliser les systèmes de type shunt, deux modèles électromécaniques ont été proposés, aux propriétés complémentaires. Le premier est celui d’une poutre avec éléments piézoélectriques (chap. 3). Ses avantages sont d’une part la rapidité du calcul des paramètres et d’autre part une expression semi-analytique du coefficient de couplage modal. Cette dernière permet de comprendre la physique du couplage électromécanique, et de l’optimiser. Le deuxième modèle fait appel à des éléments finis (chap. 4). Il a pour originalité de coupler une représentation éléments finis standard en déplacement (variables locales) directement avec la tension et la charge dans les éléments piézoélectriques (variables globales). L’intérêt de ce modèle est d’être adapté au cas de structures quelconques avec éléments piézoélectriques minces, ce qui permet de couvrir presque tous les cas. Chacun de ces modèles a été écrit en faisant deux choix aux conséquences importantes (et bénéfiques ici) :

- Le premier choix a été de projeter le problème couplé sur une base modale, ce qui permet d’obtenir un modèle réduit mais décrivant bien la dynamique du système. Cette écriture fait apparaître naturellement les coefficients de couplage modaux qui jouent un rôle capital dans les applications de type shunt. On a choisi la base des modes propres en court-circuit, car elle est la solution d’un problème élastique ; cela simplifie le calcul analytique (chap. 3) et permet de calculer les modes avec un logiciel éléments finis standard (chap. 4).
- Le deuxième choix a été de formuler le couplage avec la charge électrique comme variable, et non la tension. Ce choix est particulièrement adapté au cas des shunts, où l’écriture de la tension en fonction de la charge présente des similarités avec des termes de masse et d’amortissement, tandis que l’écriture inverse fait appel à une intégrale

dans le temps. Un autre avantage de cette approche est que pour le cas des shunts à commutation, la charge est constante lorsque le circuit est ouvert (ce qui est le cas la plupart du temps). Cela simplifie l'écriture des équations. La contrepartie de ces avantages est que la projection sur la base modale de ne découple plus la partie mécanique du problème complet. Un terme de raideur ajoutée (en réalité, l'ajout de raideur en circuit ouvert) couplant directement les modes court-circuit entre eux apparaît.

Finalement on a obtenu une description réduite du problème électromécanique qui a été utilisée dans les parties II et III. Les résultats obtenus dans ces parties peuvent donc s'appliquer indifféremment à une poutre symétrique (utilisée expérimentalement) ou bien à une structure quelconque.

### 10.1.2 Partie II : shunts linéaires

Dans la partie II, on s'est fixé comme objectif d'étudier des systèmes de type shunt linéaire (shunt résonant et résistif), de manière exhaustive. Cette étude devait constituer un préalable à l'étude des systèmes à commutation.

Tout d'abord, on a étudié le système couplé tronqué à un mode mécanique (chap. 5). On a montré dans ce cas que la performance dépend uniquement du coefficient de couplage électromécanique, pour les deux types de shunt. Pour bien atténuer les vibrations, il suffit seulement de maximiser celui-ci, ce qui peut être fait d'après les modèles électromécaniques de la partie I. Les résultats théoriques sont rappelés figure 10.1 pour un amortissement mécanique donné (celui du premier mode de la structure expérimentale).

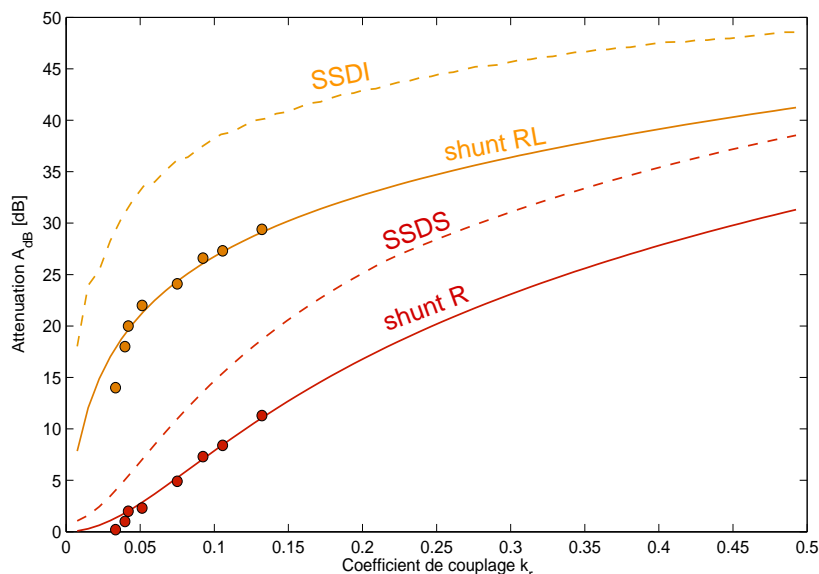


FIG. 10.1: Atténuation calculée  $A_{dB}$  en fonction du coefficient de couplage  $k_r$  pour les shunts R, RL, SSDS et SSDI;  $\xi_r = 0.17\%$ . '—', '---' : résultats théoriques; 'o' : résultats expérimentaux pour les shunts R et RL

Afin de vérifier que les résultats de l'étude 1 ddl sont valides, on a prolongé l'étude à des cas plus réalistes, et remarqué les points suivants :

- les shunts résistifs conservent leurs performances même lorsque la résistance n'est pas idéale ; ils amortissent également les modes voisins du mode visé pour la réduction de vibrations ;

- les shunts résonants, beaucoup plus performants, perdent cependant toute efficacité en cas de désaccord avec le mode à amortir. Leur comportement sélectif ne réduit que le mode visé.

On a alors procédé à une étude expérimentale des shunts linéaires (chap. 6). Tout d’abord, le modèle électromécanique du chapitre 3 a été utilisé pour concevoir une poutre avec éléments piézoélectriques optimisés, permettant d’avoir un couplage important sur les premiers modes. Les caractéristiques mesurées de la poutre ont montré un bon accord avec le calcul, validant le modèle électromécanique. Ensuite, le comportement des divers shunts a été observé conforme au modèle, avec des performances élevées : atténuations obtenues de 25 dB pour le shunt résonant, ou de 8 dB pour le shunt résistif. Finalement, en associant des capacités aux éléments piézoélectriques, on a simulé (tous paramètres mécaniques égaux) une réduction du coefficient de couplage. On peut ainsi tracer l’atténuation apportée en fonction du coefficient de couplage, rappelée figure 10.1. On observe un très bon accord avec les valeurs prédites au chapitre 5. Cependant, la difficulté de régler le shunt résonant en dessous de 5 % de couplage fait que l’atténuation prédite n’est pas obtenue.

Globalement, les deux premières parties de ce travail (modèle électromécanique et shunts linéaires) concernent des sujets où beaucoup de travaux ont déjà été proposés. Par exemple, la physique des systèmes de type shunt R et RL était déjà bien connue dès les premiers articles sur le sujet [37]. Néanmoins, on s’est attaché à développer des modèles électromécaniques réduits et précis, en s’intéressant particulièrement à l’écriture du coefficient de couplage électromécanique. Ensuite, l’étude des shunts a permis d’isoler ce coefficient comme le *seul paramètre fixant la performance* du dispositif pour la réduction de vibration.

### 10.1.3 Partie III : shunts à commutation

Dans ces chapitres, on a souhaité réaliser une étude la plus complète possible de l’influence de divers paramètres sur la performance de shunts à commutation, et comprendre le fonctionnement du dispositif.

<p><b>Modèle 1 ddl libre</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– analytique (suite régulière d’étapes simples)</li> <li>– peu de paramètres</li> <li>– stratégie unique</li> <li>– optimisation directe</li> </ul>	<p><b>Modèle 1 ddl forcé</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– semi-analytique (forçage harmonique)</li> <li>– simulations rapides</li> <li>– peu de paramètres</li> <li>– plusieurs stratégies</li> <li>– optimisation par simulations systématiques</li> </ul>
<p><b>Modèle N+1 ddl libre</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– semi-analytique (exponentielles matricielles)</li> <li>– simulations rapides</li> <li>– nombreux paramètres, stratégies</li> <li>– étude de l’influence des paramètres</li> </ul>	<p><b>Modèle N+1 ddl forcé</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– simulation numérique (Newmark)</li> <li>– simulations plus lentes</li> <li>– nombreux paramètres, stratégies</li> <li>– étude de l’influence des paramètres</li> <li>– étude énergétique</li> </ul>

FIG. 10.2: Modèles proposés pour la simulation de systèmes avec shunt commuté.

**Modèles et simulations.** On a introduit plusieurs modèles pour simuler la réponse d’un système de type shunt à commutation (voir fig. 10.2). Les deux premiers modèles, entièrement nouveaux, sont basés sur deux hypothèses : la troncature de la partie mécanique à un mode, et l’hypothèse de variation instantanée de la charge électrique lors des commutations (chap. 7).

Ces modèles permettent d'obtenir des résultats simples et clairs quant à l'optimisation (sous une forme analogue aux résultats concernant les shunts). Leur défaut est que la troncature à un mode est une hypothèse très restrictive et peu réaliste pour un système à commutation. En effet, à chaque commutation, la variation brutale de la charge (dont l'effet mécanique peut être comparé à un choc) excite les modes de fréquence plus élevée. Cette excitation répétée peut conduire à un niveau important de ces modes et cela a une influence sur la tension piézoélectrique. Comme cette tension est utilisée pour synchroniser la fermeture du circuit, les instants de commutation peuvent être perturbés. Dans certains cas, l'efficacité du système peut être fortement réduite. Ce phénomène est absent des modèles 1 ddl, mais présent expérimentalement.

On a donc établi des modèles de la réponse libre et forcée du système N+1 ddl (prenant en compte N modes court-circuit et la charge électrique, chap. 8), plus représentatifs de la réalité. Étant donné le nombre de paramètres en jeu, on s'est limité à une étude de l'influence séparée de divers paramètres. Il n'y a donc pas d'optimisation systématique du dispositif, mais un ensemble de règles permettant de faire des choix de conception. Cela vient compléter les résultats de l'étude 1 ddl.

### Résultat : performances.

- Avec le modèle 1 ddl, on a obtenu comme résultat que l'atténuation dépend uniquement du coefficient de couplage. Les performances prévues sont excessivement élevées (fig. 10.1) sans besoin d'accord précis. Ce résultat peut être utilisé comme base pour l'optimisation, mais les performances obtenues en pratique peuvent être inférieures, à cause de l'influence des modes de fréquence élevée.
- Avec le modèle multimode, on a montré que la désynchronisation du switch (et la perte de performance qui en découle) survient en présence de modes couplés et de plus haute fréquence que le mode dont on réduit les vibrations, spécialement les modes harmoniques impairs si il y en a. D'éventuels modes de plus basse fréquence ne posent pas de problème.
- Afin de réaliser tout de même la synchronisation, une solution répandue consiste à filtrer le signal de tension avant de l'analyser. On a choisi ici de s'intéresser à d'autres critères (stratégies) pour choisir les instants de commutation, basés sur des grandeurs instantanées. On obtient de bons résultats avec l'une des stratégies proposées (stratégie 3).
- Une autre manière d'éviter la désynchronisation consiste à réduire l'excitation des modes élevés. On a montré que cela peut être fait par une augmentation de l'inductance du shunt. Néanmoins, une inductance trop élevée ne permet pas de réduire les vibrations de manière efficace. Il y a là un compromis à trouver.

**Mécanisme de réduction de vibrations.** Une des interrogations au début de ce travail était de savoir si le transfert d'énergie entre modes (en particulier l'excitation des modes élevés) participait à la réduction de vibrations. Une étude énergétique a permis d'interpréter le résultat des simulations en terme de puissances et d'énergies. Dans le cas de la réponse libre, on a montré que la seule source de dissipation est l'effet Joule, et que les vibrations sont réduites par transfert de l'énergie puis dissipation dans la résistance. Il y a bien excitation des modes élevés, mais l'énergie n'est pas dissipée par ce phénomène.

Dans le cas de la réponse forcée, on a détaillé les différents transferts de puissance sur une simulation et on a relevé les éléments suivants :

- L'effet essentiel de la réduction de vibration est causé par l'action de la charge électrique, qui s'oppose au mouvement de la structure. Le mouvement étant moindre, la puissance mécanique injectée dans le système par les efforts extérieurs diminue ; c'est ce qui provoque la réduction des vibrations par rapport au cas circuit ouvert.
- L'action de la charge électrique a (comme vu ci-dessus) aussi pour effet d'exciter les modes de fréquence plus haute que celui qui est forcé.
- La puissance mécanique qui est injectée dans le système par les efforts extérieurs est essentiellement transférée vers les éléments piézoélectriques et finalement dissipée dans la résistance électrique, à chaque commutation. Les modes élevés sont aussi légèrement excités, mais une fraction négligeable de la puissance est dissipée par l'amortissement de ces modes.

**Comparaison expérimentale.** Afin de valider les résultats obtenus un dispositif expérimental a été mis au point. Ce dispositif (chap. 9) utilise les éléments suivants :

- Deux structures différentes en vibration, soit la poutre mise au point pour l'étude des shunts, avec un couplage important des trois premiers modes, soit une poutre conçue pour avoir un couplage important du premier mode et bas pour les suivants. L'idée derrière ce choix était d'éviter la réexcitation des modes élevés pour obtenir un meilleur comportement du switch.
- Deux circuits de commutation. L'un est un circuit autonome fourni par le LGEF, représentatif de l'état de l'art en matière de circuit à commutation. L'autre est un système de commutation commandé par un ordinateur temps réel, permettant d'étudier l'effet de la variation du circuit électrique et de la stratégie de commutation.

Dans la mesure où le modèle et le dispositif ont beaucoup de différences (commentées au paragraphe 10.3), une comparaison quantitative est difficile. On observe par contre les mêmes comportements et tendances.

- Les stratégies de commutation basées sur la stratégie la plus simple, un critère instantané d'annulation de la dérivée de tension, ne sont pas très efficaces, la commutation se déclenche de manière irrégulière en raison des perturbations de la tension induites par les modes haute fréquence.
- Le filtrage en temps, ou bien l'utilisation de capteurs autres que l'élément piézoélectrique principal avec l'ordinateur temps réel, permettent de se rapprocher d'une stratégie adaptée. Les performances sont alors meilleures.
- Il n'y a pas besoin d'accord précis avec ce système, contrairement au cas d'un shunt résonant. Les mêmes réglages ont été utilisés avec succès sur les deux structures, alors que les fréquences propres et la capacité des éléments piézoélectriques sont différentes.
- On observe bien un transfert d'énergie vers les modes élevés. Ce transfert est d'autant plus important que les modes en question sont couplés, qu'ils sont proches d'un harmonique de la fréquence d'excitation (qui est ici celle du premier mode) et que la commutation est bien synchronisée sur ce mode.
- La valeur de l'inductance a un effet sur ce transfert. Une inductance élevée lisse les fluctuations de charge et diminue la réexcitation des modes élevés.

## 10.2 Exemple de démarche d'optimisation

À partir des résultats de cette thèse, on peut proposer une démarche d'adaptation et d'optimisation d'un système de shunt (résumée sur l'organigramme de la fig. 10.3). On s'intéresse

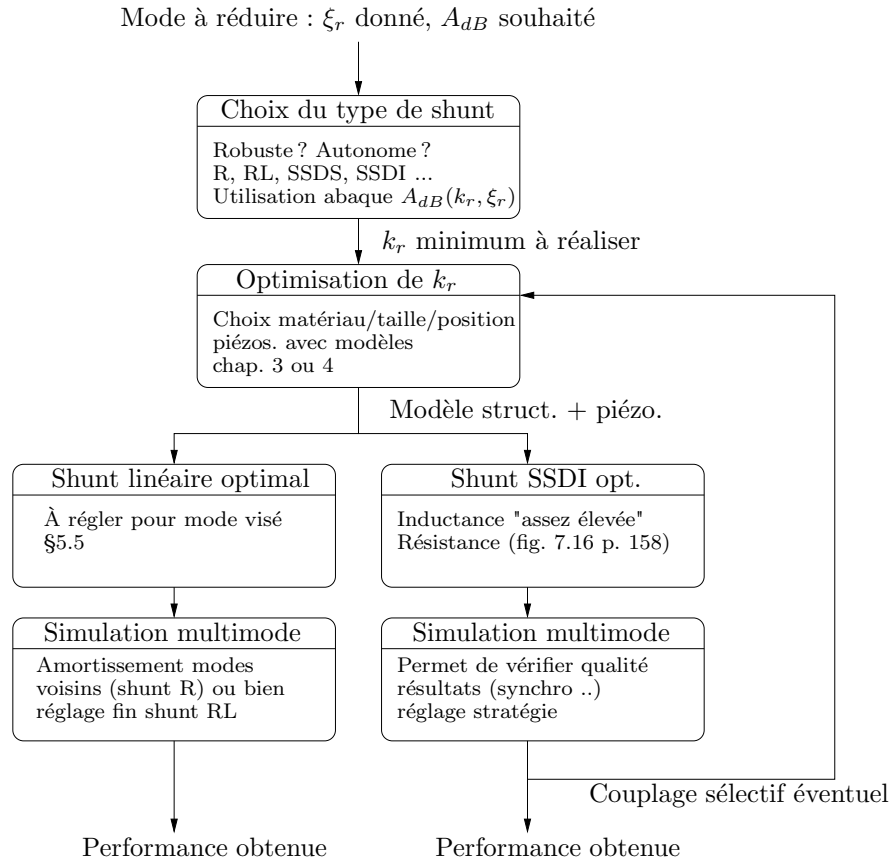


FIG. 10.3: Démarche de choix d'un système de type shunt.

au cas d'une structure dont un mode de vibration particulier est à réduire. Il faut choisir le type de dispositif utilisé d'après leurs caractéristiques :

- Le shunt résistif est très simple et robuste. En revanche, il faudra un couplage élevé, donc peut-être des éléments piézoélectriques de grande taille.
- Le shunt résonant doit être accordé très précisément, mais est très efficace. Il doit être alimenté pour réaliser l'inductance synthétique, même si la puissance utilisée est faible (quelques watts sur notre dispositif, qui n'a pas été optimisé pour une basse consommation).
- Les systèmes de type switch ont de bonnes performances, et peuvent être autoalimentés. Ils ne requièrent pas de réglage précis. Leur comportement non-linéaire va provoquer une réémission d'énergie vers des modes haute fréquence qui peut être pénalisante (bruit acoustique ...)

Connaissant l'amortissement du mode que l'on cherche à réduire, en supposant qu'on est en régime harmonique, on peut observer les abaques (fig. 5.7 p. 92 , fig. 5.19 p. 105, fig. 7.13 p. 156, fig. 7.16 p. 158) respectivement pour des shunts R, RL, SSDS et SSDI. Ces abaques permettent de définir le coefficient de couplage piézoélectrique nécessaire pour réduire l'amplitude de la réponse d'un facteur  $A_{dB}$  donné. Il faut remarquer que dans le cas d'un mode déjà fortement amorti mécaniquement, il faudra un couplage très important. On peut à cette occasion comparer les performances respectives des shunts d'après la figure 10.1, tracée pour le cas du premier mode d'une des poutres d'essai, en gardant à l'esprit le fait que l'estimation théorique de performance des shunts SSDI 1 dll est optimiste, et que la performance réelle

peut être inférieure.

On cherche ensuite à obtenir le coefficient de couplage nécessaire avec un ou des éléments piézoélectriques respectant par ailleurs les contraintes de conception : encombrement, poids, position. . . . En première approche, les éléments piézoélectriques doivent être placés au maximum de déformation du mode visé, et avoir une raideur équivalente à celle de la structure. Pour une optimisation précise il est nécessaire de faire appel aux méthodes de calcul des chapitres 3 ou 4 et de calculer les modes tenant compte de la raideur des éléments piézoélectriques ainsi que les coefficients de couplage correspondants.

Une fois les éléments piézoélectriques choisis, il faut régler le shunt. Cela peut être fait d'après les formules du chapitre 5 (rappelées p. 110) pour les shunts linéaires. Pour le shunt de type SSDS, il faut choisir une résistance assez faible. Pour un shunt de type SSDI, l'inductance doit être assez faible pour avoir une période du circuit électrique inférieure à un tiers de la période du mode à amortir ; éventuellement elle doit être assez grande pour éviter une réémission importante d'énergie vers des modes haute fréquence. Ensuite, on choisit la résistance pour obtenir le coefficient d'amortissement électrique optimal (fig. 7.16 p. 158), qui dépend du coefficient de couplage et non de la pulsation du mode visé.

La dernière étape de cette démarche consiste à vérifier avec un calcul multimode que les performances souhaitées sont obtenues. Cela peut amener des résultats différents. Pour les shunts de type R, on peut constater l'amortissement des modes voisins, et à priori il n'y a aucun réglage à retoucher. Pour le shunt résonant, il faudra le cas échéant modifier légèrement la valeur de l'inductance pour obtenir la meilleure performance possible ; de toute façon cette valeur devra être réglée expérimentalement, il est peu probable avec le nombre de paramètres en jeu pouvant varier que l'accord soit parfait du premier coup. Enfin, cette simulation est particulièrement importante pour le cas des shunts à commutation. On pourra vérifier que la synchronisation se fait bien, suivant le type d'excitation et les modes voisins du mode à amortir. Il est très possible que la performance obtenue ne corresponde pas à ce que le modèle 1 ddl prévoit. Dans ce cas, les remèdes suivants peuvent être apportés :

- modifier la stratégie, avec par exemple un filtrage du signal de tension adapté ;
- augmenter le couplage du mode à réduire en modifiant les éléments piézoélectriques ;
- diminuer le couplage des modes de pulsation immédiatement supérieure à celui-ci ;
- augmenter l'inductance afin de ne plus exciter les modes perturbateurs (si c'est possible).

### 10.3 Prolongements de l'étude

Le travail effectué pendant cette thèse appelle plusieurs prolongements. Un premier point qui reste à finaliser à l'issue de cette thèse est la convergence entre l'étude expérimentale et la simulation de systèmes à commutation. Les modèles et dispositifs existants ne nécessitent que quelques modifications pour réaliser ces études.

- Tout d'abord il faudrait étudier expérimentalement l'influence de la résistance et de l'inductance d'un shunt à commutation. Le dispositif à base d'ordinateur temps réel a été conçu en partie pour cela. Dans cette thèse, on s'est limité à l'étude de deux valeurs d'inductance seulement, obtenues avec des composants passifs ; il faudrait utiliser un inducteur synthétique (flottant) afin d'atteindre de grandes valeurs d'inductance. Cela permettrait de tester l'effet de filtrage du signal de charge évitant l'excitation de modes élevés. L'étude de l'influence de la résistance (pour comparer sa valeur optimale à la théorie) peut être faite à condition que la résistance interne ou la tension de seuil du circuit soit compensée (le comportement du circuit est en effet affecté par les tensions

de seuil des transistors et diodes ; celles-ci sont souvent suffisamment importantes pour qu'une résistance additionnelle soit inutile dans le shunt. Il faudrait d'abord les compenser par une source de tension, comme dans [56, 57] par exemple, et seulement ensuite ajouter une résistance variable pour l'expérience). L'idée de cette étude serait donc de rapprocher le dispositif expérimental d'un shunt idéal  $RL$  à commutation.

- Cependant, dans une application réaliste, particulièrement dans le cas de circuits autonomes, on ne peut s'affranchir des non-linéarités de type seuil du système de commutation, inhérentes aux transistors et diodes. Il faudrait que le modèle utilisé pour les simulations prenne celles-ci en compte ; son comportement deviendrait alors dépendant de l'amplitude, alors que jusqu'à présent il était linéaire en amplitude. L'idée est donc d'améliorer le modèle pour le rapprocher d'un cas réaliste, en particulier pour définir une gamme d'amplitude dans laquelle le système fonctionne bien.
- Toujours pour rapprocher le modèle de cas réalistes, il faut que celui-ci prenne en compte un filtrage temporel du signal de tension piézoélectrique, tel que celui présent dans la plupart des implémentations autonomes de circuit à commutation [85, 74]. Il sera alors possible d'optimiser ce filtrage par simulation d'une part, et expérimentalement (avec le dispositif temps réel). On peut aussi envisager une optimisation des critères de niveau de la tension (proposée dans [34] et implémentée physiquement dans [48]), qui a des caractéristiques prometteuses.
- Les essais et simulations présentés ont été menés avec des excitations monofréquentielles. Néanmoins, en raison des fortes non-linéarités en temps du système, ces résultats ne peuvent être réutilisés pour des cas large bande (pas de principe de superposition). Bien que quelques essais avec excitation large bande aient été effectués, il est difficile de conclure. Une étude complète, théorique et expérimentale, peut être menée avec le modèle et le dispositif existants.
- Une étude de la robustesse du système à une variation de fréquence propre peut être menée en modifiant la structure ; on pourrait ainsi vérifier que la performance est effectivement maintenue. Une telle étude est d'ailleurs en projet dans le cadre de la collaboration entre le LGEF et le LMSSC. La structure utilisée est une plaque dont on peut modifier les conditions d'encastrement, et sur laquelle des aimants amovibles permettent d'ajouter de la masse.
- Une étude de la performance en fonction du coefficient de couplage pourrait aussi être menée, en utilisant la technique d'association de capacités du chapitre 6 et le dispositif temps réel. Les dispositifs autonomes sont en revanche sensibles à la capacité piézoélectrique et ne peuvent être utilisés pour cette étude.

Un deuxième axe d'étude concerne le modèle électromécanique et les techniques de simulation. On peut envisager de projeter le système couplé sur les modes en situation circuit ouvert. Ces modes peuvent être obtenus par une méthode de calcul prenant en compte le couplage directement, ou bien par orthogonalisation du problème réduit en circuit ouvert. Cela permet de formuler un système  $N+1$  ddl plus simple où les modes ne sont couplés qu'avec la charge. Il est alors possible d'écrire un modèle semi-analytique de la réponse forcée (forçage harmonique).

Une autre manière d'écrire la réponse forcée d'un système  $N+1$  ddl consiste à chercher une solution périodique. En effet, au chapitre 9 on constate expérimentalement qu'une synchronisation exacte en réponse forcée est possible. Or les modes ne sont pas exactement harmoniques, et donc les vibrations de ces modes ne se font pas exactement à leur fréquence propre mais à un harmonique proche. Il doit donc exister une somme d'harmoniques de la fréquence d'excitation qui est une solution du problème sur une période. Une étude de la stabilité au-



tour de cette solution permettrait de savoir si la synchronisation est facilement obtenue.

Un troisième axe d'étude est la validation sur des cas plus industriels. Dans le cadre de sa thèse au LMSSC, Aurélien Sénéchal travaille actuellement à utiliser la méthode de calcul du chapitre 4 pour associer divers shunts à une aube de turboréacteur CFM 56-7 (en remarquant que l'optimisation du coefficient de couplage est la même quel que soit le type de shunt). L'objectif est de réduire les vibrations des premiers modes de flexion. Un calcul de type plan d'expérience est programmé dans un script qui met à jour la géométrie de l'élément piézoélectrique dans un modèle CAO (Catia) comprenant l'aube ; le tout est maillé et le maillage exporté. Le calcul des modes court-circuit est effectué sous Nastran, et les matrices de couplage construites et projetées sur les modes avec Matlab. À l'issue de ce calcul, on dispose d'un modèle de la variation de couplage pour de petites variations des dimensions et positions de l'élément piézoélectrique autour de la position de départ du calcul, et on peut identifier précisément la position optimale d'après ce modèle réduit. Une réalisation expérimentale du dispositif est prévue, mais les détails restent à préciser (en particulier sur la nature de l'élément piézoélectrique, acheté sur catalogue, assemblé à partir d'éléments plus petits, ou commandé sur mesure afin d'épouser la courbure de la pièce).

En dehors de ces propositions, qui concernent des travaux suivant immédiatement la présente thèse, on peut distinguer des directions de recherche à plus long terme. Une des spécificités de cette thèse est l'écriture de stratégies basées sur des critères instantanés et sans dimension, qui est un choix orthogonal et complémentaire des voies explorées au LGEF. Le cas de la stratégie 3 (voir p. 177) en particulier est intéressant. Initialement, le critère a été écrit pour le cas 1 ddl en considérant la partie mécanique du problème, et dans ce cas il ne s'est pas révélé le plus efficace. Par contre, dans le cas d'un système  $N+1$  ddl, on a obtenu des résultats très encourageants. Il serait extrêmement intéressant de combiner cette approche avec un filtrage temporel, à condition que cela reste possible avec un circuit électronique autonome. Cela permettrait peut être d'améliorer l'efficacité du système pour des sollicitations variées. La difficulté serait de mesurer la charge stockée dans l'élément piézoélectrique, ce qui est peut être possible en utilisant sur le même élément piézoélectrique une électrode capteur et une électrode pour la commutation.

L'étude énergétique montre que cette stratégie peut se décrire comme une optimisation du transfert d'énergie entre la partie mécanique et électrique du système. Ainsi, elle pourrait être utilisée non seulement dans le cas de la réduction de vibration, mais aussi dans celui de la récupération d'énergie.

Expérimentalement, l'utilisation d'un capteur séparé (vibromètre) pour synchroniser la commutation a donné de bons résultats. Dans le cadre des circuits électriques autonomes, l'utilisation d'un accéléromètre miniature pour synchroniser les commutations peut être étudiée. Les technologies de fabrication permettent désormais d'intégrer ces capteurs directement sur une puce et leur consommation est faible. La stratégie de commutation à appliquer à partir de la mesure de l'accélération reste à définir, et pourra être testée avec un accéléromètre classique en premier lieu, associé au dispositif temps réel existant.

Enfin, en ce qui concerne l'élément piézoélectrique à associer pour des applications de type shunt, une réflexion pourrait être menée sur l'utilisation de divers motifs d'électrodes pour améliorer le couplage (électrode interdigitée, à l'instar des composites piézoélectriques) tout en conservant une céramique qui présente de bonnes propriétés (raideur élevée) pour le couplage avec une structure métallique.



---

# Annexes



# Programme Simulink

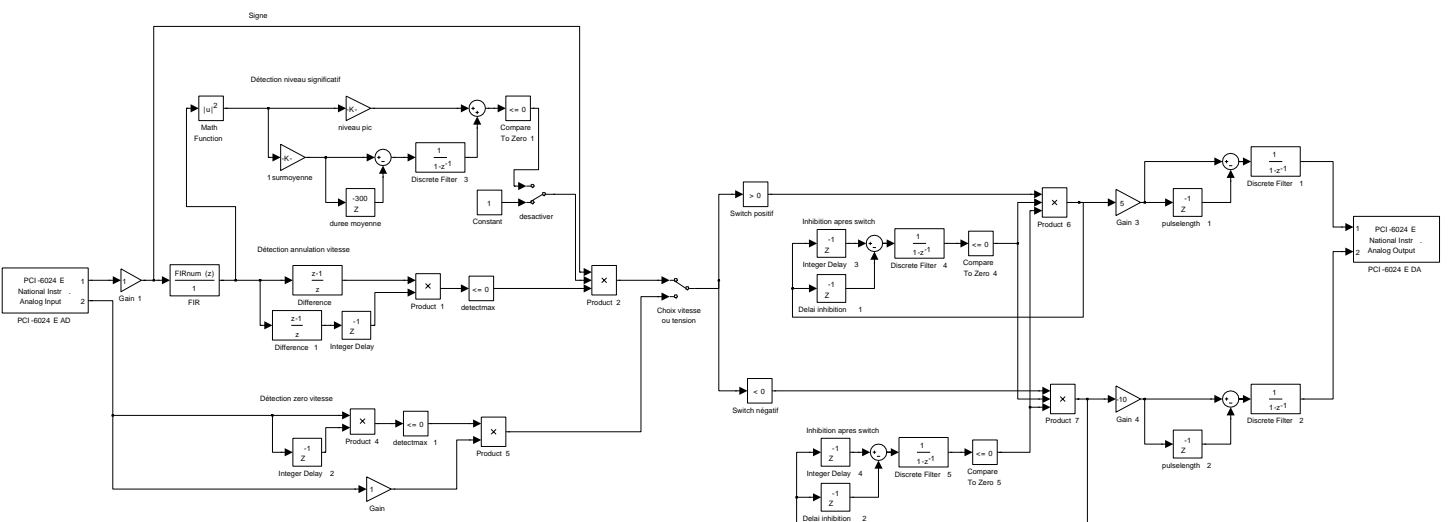


FIG. A.1: Schéma complet du programme Simulink utilisé pour la synchronisation du switch

## Matrices élémentaires éléments finis

Les matrices suivantes sont adaptées au cas de poutre stratifiée avec éléments piézoélectriques décrit au chapitre 4.5.

### Matrice de masse élémentaire

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_m^e = & \frac{I_0 L_e}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22 L_e & 0 & 54 & -13 L_e \\ 0 & 22 L_e & 4 L_e^2 & 0 & 13 L_e & -3 L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13 L_e & 0 & 156 & -22 L_e \\ 0 & -13 L_e & -3 L_e^2 & 0 & -22 L_e & 4 L_e^2 \end{bmatrix} + \frac{I_1}{12} \begin{bmatrix} 0 & 6 & -L_e & 0 & -6 & L_e \\ 6 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ -L_e & 0 & 0 & L_e & 0 & 0 \\ 0 & 6 & L_e & 0 & -6 & -L_e \\ -6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ L_e & 0 & 0 & -L_e & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 & + \frac{I_2}{30 L_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 3 L_e & 0 & -36 & 3 L_e \\ 0 & 3 L_e & 4 L_e^2 & 0 & -3 L_e & -L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36 & -3 L_e & 0 & 36 & -3 L_e \\ 0 & 3 L_e & -L_e^2 & 0 & -3 L_e & 4 L_e^2 \end{bmatrix} \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

### Matrice de raideur élémentaire

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_m^e = & \frac{A}{L_e} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{B}{L_e} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{D}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6 L_e & 0 & -12 & 6 L_e \\ 0 & 6 L_e & 4 L_e^2 & 0 & -6 L_e & 2 L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6 L_e & 0 & 12 & -6 L_e \\ 0 & 6 L_e & 2 L_e^2 & 0 & -6 L_e & 4 L_e^2 \end{bmatrix} \tag{B.2}
 \end{aligned}$$

### Vecteur d'efforts élémentaires

$$\mathbf{F}^e = \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{x=0} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N \\ T \\ M \end{bmatrix}_{x=L_e} + \frac{n L_e}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{t L_e}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ L_e \\ 0 \\ 6 \\ -L_e \end{bmatrix} + m \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{B.3}$$

Matrice de couplage électromécanique élémentaire (un élément fini / un DDL électrique)

$$\mathbf{K}_c^{e(p)} = G_0^{(p)} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + G_1^{(p)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

Matrice de “raideur” électrique (capacité)

$$K_e^{(p)} = C^{(p)} \quad (\text{B.5})$$



---

---

# Bibliographie

- [1] ALLIK, H., AND HUGHES, T. J. R. Finite Element Method for Piezoelectric Vibration. *International Journal of Numerical Methods in Engineering* **2**, 2 (1970), 151–157.
- [2] ANSI/IEEE STD 176-1987. *IEEE Standard on Piezoelectricity*. The Institute of Electrical and Electronics Engineers, Inc., 1988.
- [3] ANSYS, INC. *Basic Analysis Procedures Guide*, 5.5 ed. Notes on CP command, Chapter 12 : Coupling and Constraint Equations.
- [4] ANTONIOU, A. Realization of Gytrators Using Operational Amplifiers, and their Use in RC-Active-Network Synthesis. In *Proc. of IEEE* (1969), vol. 116, pp. 1838–1850.
- [5] BADEL, A., GUYOMAR, D., LEFEUVRE, E., AND RICHARD, C. Piezoelectric Energy Harvesting using a Synchronized Switch Technique. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **17** (2006), 831–839.
- [6] BADEL, A., LAGACHE, M., GUYOMAR, D., LEFEUVRE, E., AND RICHARD, C. Finite Element and Simple Lumped Modeling for Flexural Nonlinear Semi-passive Damping. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **18** (2007), 727–742.
- [7] BEHRENS, S., MOHEIMANI, S., AND FLEMING, A. Multiple mode current flowing passive piezoelectric shunt controller. *Journal of Sound and Vibration* **266** (2003), 929–942.
- [8] BEHRENS, S., MOHEIMANI, S., AND FLEMING, A. Reducing the inductance requirements of piezoelectric shunt damping systems. *Smart Materials and Structures* **12** (2003), 57–64.
- [9] BENJEDDOU, A. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements : a survey. *Computers and Structures* **76**, 1-3 (2000), 347–363.
- [10] BROCK, J. A note on the Damped Vibration Absorber. *ASME Journal of Applied Mechanics* **13(4)** (1995), 284.
- [11] BURR BROWN PRODUCTS FROM TEXAS INSTRUMENTS. *OPA445 High Voltage FET-Input Operational Amplifier*.
- [12] CARRERA, E., AND BOSCOLO, M. Classical and mixed finite elements for static and dynamic analysis of piezoelectric plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **70**, 10 (2007), 1135–1181.
- [13] CARUSO, G. A critical analysis of electric shunt circuits employed in piezoelectric passive vibration damping. *Smart Materials and Structures* (2001), 1059–1068.
- [14] CHEN, S., WANG, Z., AND LIU, X.-H. Active vibration control and suppression for intelligent structures. *Journal of Sound and Vibration* **200**, 2 (1997), 167–177.
- [15] CIMINELLO, M., AMEDURI, S., AND CONCILIO, A. FE Modelling on an Innovative Vibration Control Shunt Technique. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **19** (2008), 875–887.
- [16] CIMINELLO, M., CALBRÒ, A., AMEDURI, S., AND CONCILIO, A. Synchronized Switched Shunt Control Technique Applied on a Cantilevered Beam : Numerical and Experimental Investigation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **19** (2008), 1089–1100.

- 
- [17] CIMINELLO, M., LECCE, L., AMEDURI, S., CALABRÒ, A., AND CONCILIO, A. Switched Shunt Control implemented through a PZT network embedded within a composite panel : design, manufacture and test. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **submitted** (2009).
- [18] CLARK, W. State switched piezoelectric systems for vibration control. *Structures, Structural Dynamics and Materials AIAA Journal* **1533** (1999), 2623–2629.
- [19] CLARK, W. Vibration Control with State-Switched Piezoelectric Materials. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **11** (2000), 263–273.
- [20] COLLINGER, J. C., AND WICKERT, J. A. Adaptive Piezoelectric Vibration Control With Synchronized Switching. In *Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, IMECE 2007-41427* (Seattle, Washington, USA, Nov. 2007).
- [21] CORR, L., AND CLARK, W. Energy Dissipation Analysis of Piezoelectric Semi-Active Vibration Control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **12** (2001), 729–736.
- [22] CORR, L., AND CLARK, W. Comparison of low-frequency piezoelectric switching shunt techniques for structural damping. *Smart Materials and Structures* **11** (2002), 370–376.
- [23] CORR, L. R. *Investigation of real-time switching of piezoceramic shunts for structural vibration control*. PhD thesis, School of Engineering, University of Pittsburgh, 2001.
- [24] CORR, L. R., AND CLARK, W. W. A novel semi-active multimodal vibration control law for a piezoceramic actuator. *Journal of Vibration and Acoustics* **125** (2003), 214–222.
- [25] CRAWLEY, E. F., AND DE LUIS, J. Use of Piezoelectric Actuators as Elements of Intelligent Structures. *AIAA Journal* **25**, 10 (1987), 1373–1385.
- [26] CUNEFARE, K. A. State-switched Absorber for Vibration Control of Point-Excited Beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **13** (2002), 97–104.
- [27] CURIE, P. *Œuvres de Pierre Curie publiées par les soins de la société française de physique*. Éditions des archives contemporaines, 1859-1906. texte complet disponible à l'adresse <http://gallica2.bnf.fr/>.
- [28] D. A. SARAVANOS, P. R. H. Mechanics and computational models for laminated piezoelectric beams, plates, and shell. *Applied Mechanics Review* **52**, 10 (1999).
- [29] DEN HARTOG, J. P. *Mechanical vibrations*. Mc Graw Hill, 1956, ch. 3.
- [30] DUCARNE, J., THOMAS, O., AND DEÜ, J.-F. Structural vibration reduction optimization by switch shunting of piezoelectric elements. In *2007 ASME international mechanical engineering congress and exposition* (Seattle, USA, Nov. 2007).
- [31] DUCARNE, J., THOMAS, O., AND DEÜ, J.-F. Performance and optimization of piezoelectric shunts for vibration reduction. *Journal of Sound and Vibration* (2009). In preparation.
- [32] DUCARNE, J., THOMAS, O., AND DEÜ, J.-F. Optimisation de dispositif passif d'atténuation de vibration par shunt piézoélectrique. In *Actes du 8ème colloque national en calcul de structures* (Giens, France, May 2007), vol. 2, Hermes, pp. 519–524.
- [33] FAIRCHILD SEMICONDUCTOR CORPORATION. *MOC8021M, MOC8050M Rev. 1.0.3*.
- [34] GUYOMAR, D., AND BADEL, A. Nonlinear semi-passive multimodal vibration damping : An efficient probabilistic approach. *Journal of Sound and Vibration* **294** (2006), 249–268.
- [35] GUYOMAR, D., FAIZ, A., AND RICHARD, C. Wave reflection and transmission reduction using a piezoelectric semipassive nonlinear technique. *Journal of the Acoustical Society of America* **119** (2005), 285–298.
- [36] GUYOMAR, D., RICHARD, T., AND RICHARD, C. Sound Wave Transmission Reduction through a Plate using Piezoelectric Synchronized Switch Damping Technique. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **19** (2008), 791–803.
- [37] HAGOOD, N. W., AND FLOTOW, A. V. Damping of structural vibrations with piezoelectric materials and passive electrical networks. *Journal of Sound and Vibration* **146**, 2 (1991), 243–268.
- [38] HUGHES, T. *The Finite Element Method*. Dover publications, 2000, ch. 9.
- [39] HUNTSMAN ADVANCED MATERIALS. *Araldite® 2011, Adhésif époxyde bicomposant*.

- [40] HWANG, W.-S., AND PARK, H. C. Finite element modeling of piezoelectric sensors and actuators. *AIAA Journal* **31**, 5 (1993), 930–937.
- [41] IKEDA, T. *Fundamentals of piezoelectricity*. Oxford university press, 1990.
- [42] INMAN, D. J. *Engineering Vibration*. Prentice Hall International, 1994, ch. 2,5.
- [43] JAFFE, B., COOK, W. R., AND JAFFE, H. *Piezoelectric ceramics*. Academic press, 1971.
- [44] JI, H., QIU, J., BADEL, A., AND ZHU, K. Semi-active Vibration Control of a Composite Beam using an Adaptive SSDV Approach. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures online first* (2008).
- [45] JOHNK, C. T. A. *Engineering electromagnetic fields and waves*, 2nd. ed. J. Wiley & sons, 1988.
- [46] KIM, J., VARADAN, V. V., AND VARADAN, V. K. Finite element modelling of structures including piezoelectric active devices. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40**, 5 (1997), 817–832.
- [47] LALLART, M., BADEL, A., GUYOMAR, D., AND LEBRUN, L. Non-linear semi-passive damping using constant or adaptive voltage sources : a stability analysis. In *ICAST 2005 - Sixteenth International Conference on Adaptive Structures and Technologies* (2005), pp. 158–165.
- [48] LALLART, M., LEFEUVRE, É., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. Self-powered circuit for broadband, multimodal piezoelectric vibration control. *Sensors and Actuators A* **143** (2008), 377–382.
- [49] LAMMERING, R., AND MESECKE-RISCHMANN, S. Multi-field variational formulations and related finite elements for piezoelectric shells. *Smart Materials and Structures* **12**, 6 (2003).
- [50] LEFEUVRE, E., BADEL, A., PETIT, L., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. Semi-passive Piezoelectric Structural Damping by Synchronized Switching on Voltage Sources. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **17** (2006), 653–660.
- [51] LEFEUVRE, E., BADEL, A., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. Piezoelectric Energy Harvesting Device Optimization by Synchronous Electric Charge Extraction. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **16** (2005), 865–876.
- [52] LESIEUTRE, G. A. Vibration damping and control using shunted piezoelectric materials. *The Shock and Vibration Digest* **30**, 3 (1998), 187–195.
- [53] LESIEUTRE, G. A., OTTMAN, G., AND HOFFMAN, H. Damping as a result of piezoelectric energy harvesting. *Journal of Sound and Vibration* **269**, 1 (2004), 991–1001.
- [54] LIPPMAN, G. Principe de la conservation de l'électricité. *Annales de Chimie et de Physique, 5<sup>e</sup> série* **XXIV** (1881), 145–178.
- [55] MACKERLE, J. Smart materials and structures – a finite element approach – an addendum : a bibliography (1997-2002). *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* **11**, 5 (2003).
- [56] MAKIHARA, K. *Energy-recycling Semi-active Vibration Suppression of Space Structures*. PhD thesis, Departement of Aeronautics and Astronautics, The University of Tokyo, 2003.
- [57] MAKIHARA, K., ONODA, J., AND MINESUGI, K. Low-Energy-Consumption Hybrid Vibration Suppression Based on an Energy-Recycling Approach. *AIAA Journal* **43** (2005), 1706–1715.
- [58] MAKIHARA, K., ONODA, J., AND MINESUGI, K. Performance of Simple and Sophisticated Control in Energy-recycling Semi-active Vibration Suppression. *Journal of Vibration and Control* **14** (2008), 417–436.
- [59] MASON, W. P. *Piezoelectric Crystals and Their Application to Ultrasonics*. D. Van Nostrand Company, Inc., 1950.
- [60] THE MATHWORKS, INC. *xPC Target® for Use with Real-Time Workshop*.
- [61] MAURINI, C. *Piezoelectric composites for distributed passive electric control : beam modelling, modal analysis and experimental implementation*. PhD thesis, Università degli Studi di Roma, La Sapienza, 2005.
- [62] MAURINI, C., POUGET, J., AND DELL'ISOLA, F. Extension of the Euler - Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach. *Computers and Structures* **4**, 22-23 (2006), 1438–1458.

- [63] MOHEIMANI, S. O. R. A Survey of Recent Innovations in Vibration Damping and Control Using Shunted Piezoelectric Transducers. *IEEE transactions on control systems technology* **11**, 4 (2003).
- [64] MORGAN ELECTRO CERAMICS. *Piezoelectric ceramics. Properties & Applications*. <http://www.morganelectroceramics.com/pzbook.html>, 2008.
- [65] NGUYEN, C. H., AND KORNMANN, X. A Comparison of Dynamic Piezoactuation of Fiber-based Actuators and Conventional PZT Patches. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **17** (2006), 45–55.
- [66] NGUYEN, C. H., AND PIETRZKO, S. J. FE analysis of a PZT-actuated adaptive beam with vibration damping using a parallel R-L shunt circuit. *Finite Elements in Analysis and Design* **42** (2006), 1231–1239.
- [67] NICU, L., GUIRADEL, M., CHAMBOSSE, F., ROUGERIE, P., HINH, S., TREVISIOL, E., FRANÇOIS, J.-M., MAJORAL, J.-P., CAMINADE, A.-M., CATTAN, E., AND BERGAUD, C. Resonating piezoelectric membranes for microelectromechanically-based bioassay : detection of streptavidin-gold nanoparticles interaction with biotinylated DNA. *Sensors and Actuators B : Chemical* **110**, 1 (2005), 125–136.
- [68] NIEDERBERGER, D. Design of Optimal Autonomous Switching Circuits to Suppress Mechanical Vibration. In *Lecture Notes in Computer Science* (2005), pp. 511–525.
- [69] NIEDERBERGER, D. *Smart Damping Materials using Shunt Control*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology - ETH Zurich, 2005.
- [70] NIEDERBERGER, D., AND MORARI, M. An autonomous shunt circuit for vibration damping. *Smart Materials and Structures* (2005), 359–364.
- [71] NIEDERBERGER, D., MORARI, M., AND PIETRZKO, S. A new control approach for switching shunt damping. In *Proc. of SPIE* (2004), vol. 5386, pp. 426–437.
- [72] NISHIHARA, O., AND ASAMI, T. Closed-Form Solutions to the Exact Optimization of Dynamic Vibration Absorbers (minimization of the maximum amplitude magnification factors). *Journal of Vibrations and Acoustics* **124** (october 2002), 576–582.
- [73] NISHIHARA, O., AND ASAMI, T. Closed-Form Exact Solution to  $H_\infty$  Optimization of Dynamic Vibration Absorber (Application to Different Transfer Functions and Damping Systems). *Journal of Vibrations and Acoustics* **125** (july 2003), 398–405.
- [74] ONODA, J., TAKEUCHI, S., AND YABU, T. Structural Vibration Damping Device. Tech. rep., US Patent Bureau, 2006. Patent Application Publicatio number : US 2007 / 0052325 A1.
- [75] PARK, C. H. Dynamics modelling of beams with shunted piezoelectric elements. *Journal of Sound and Vibration* **268** (2003), 115–129.
- [76] PARK, J., LIM, S., CHOI, S., KIM, J., AND PARK, Y. Vibration reduction of a CD-ROM drive base using a piezoelectric shunt circuit. *Journal of Sound and Vibration* **269** (2004), 1111–1118.
- [77] PETIT, L., GUYOMAR, D., AND RICHARD, C. Piezoelectric damping : a comparison between passive and semipassive switching techniques. In *Proc. of 4th JFSIMS (Japan-France Seminar on Intelligent Materials and Structures)* (Lyon, July 2002).
- [78] PETIT, L., LEFEUVRE, E., RICHARD, C., AND GUYOMAR, D. A broadband semi passive piezoelectric technique for structural damping. In *Proc. of SPIE* (2004), vol. 5386, pp. 414–425.
- [79] PHYSIK INSTRUMENTE. *Piezoelectric ceramic products*. <http://www.piceramic.com>, 2009.
- [80] PIEFORT, V., AND PREUMONT, A. Finite Element Modeling of Piezoelectric Structures. In *Samtech User's Conference* (Paris, France, Jan. 2001). <http://www.ulb.ac.be/scmero/piezo.html>.
- [81] PREUMONT, A., FRANÇOIS, A., MAN, P. D., LOIX, N., AND HENRIOULLE, K. Distributed sensors with piezoelectric films in design of spatial filters for structural control. *Journal of Sound and Vibration* **282** (2005), 701–712.
- [82] REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates*. CRC press, 1997.
- [83] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AUDIGIER, D., AND BASSALER, H. Enhanced semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device on an inductor. In *Smart Structures and Materials : Passive Damping and Isolation, SPIE* (2000), vol. 3989, pp. 288–299.

- 
- [84] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AUDIGIER, D., AND CHING, G. Semi-passive damping using continuous switching of a piezoelectric device. In *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* (1999), vol. 3672, pp. 104–111.
- [85] RICHARD, C., GUYOMAR, D., AND LEFEUVRE, E. Self-powered Electronic Breaker with Automatic Switching by Detecting Maxima or Minima of Potential Difference Between its Power Electrodes. Tech. rep., Organisation Mondiale de la Propriété Intellectuelle, 2007. Patent # PCT/FR2005/003000, Publication number : WO/2007/063194, 2007.
- [86] RICHARD, T. *Diminution du coefficient de transmission acoustique d'une paroi à l'aide d'amortisseurs piézoélectriques semi-passifs*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, 2007.
- [87] SAINT-GOBAIN. *Céramiques piézoélectriques*. <http://www.quartz.saint-gobain.com>, 2006.
- [88] SARAVANOS, D. A., HEYLIGER, P. R., AND HOPKINS, D. A. Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. *International Journal of Solids and Structures* **34**, 3 (1997), 359–378.
- [89] SENANI, R. Alternative modification of the classical GIC structure. *Electronic letters* **32** (1996), 1329.
- [90] SERRIDGE, M., AND LICHT, T. R. *Accéléromètres piézoélectriques et préamplificateurs de vibration - Théorie et applications*. Brüel & Kjær, 1988.
- [91] SESSLER, G. M. Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride. *Journal of the Acoustical Society of America* **70**, 8 (1981), 1596–1608.
- [92] SNOWDOWN, J. C. *Vibration and shock in damped mechanical systems*. John Wiley and sons, 1968, ch. 2,4,5,7-10,12-13.
- [93] SODANO, H. A., LLOYD, J., AND INMAN, D. J. An experimental comparison between several active composite actuators for power generation. *Smart Materials and Structures* **15** (2006), 1211–1216.
- [94] SONTI, V. R., KIM, S. J., AND JONES, J. D. Equivalent forces and wavenumber spectra of shaped piezoelectric actuators. *Journal of Sound and Vibration* **187**, 1 (1995), 111–131.
- [95] THOMAS, O., DEÜ, J.-F., AND DUCARNE, J. Vibrations of an elastic structure with shunted piezoelectric patches : efficient finite element formulation and electromechanical coupling coefficients. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* (2009).
- [96] THOMAS, O., NICU, L., AYELA, C., AND TOUZÉ, C. Buckling and non-linear vibrations of a MEMS biosensor. In *Proc. of the sixth EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference (ENOC 2008)* (St. Petersburg, Russia, July 2008).
- [97] THOMAS, O., TOUZÉ, C., AND CHAIGNE, A. Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates, part 2 : experiments. *J. Sound Vib.* **265**, 5 (2003), 1075–1101.
- [98] THOMSEN, J. J. *Vibrations and stability*. Mc Graw Hill, 1997.
- [99] TIERSTEN, H. F. *Linear piezoelectric plate vibrations*. Plenum Press, 1969.
- [100] TRINDADE, M. A., BENJEDDOU, A., AND OHAYON, R. Finite element modelling of hybrid active-passive vibration damping of multilayer piezoelectric sandwich beams - part I : Formulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **51**, 7 (2001), 835–854.
- [101] TZOU, H. *Piezoelectric shells*. Kluwer academic publishers, 1993.
- [102] TZOU, H. S., AND TSENG, C. I. Distributed piezoelectric sensor/actuator design for dynamic measurement/control of distributed parameter systems : a piezoelectric finite element approach. *Journal of Sound and Vibration* **138**, 1 (1990).
- [103] VASQUES, C. M. A., AND RODRIGUES, J. D. Coupled three-layered analysis of smart piezoelectric beams with different electric boundary conditions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **62** (2005), 1488–1518.
- [104] VIANA, F. A. C., AND V. STEFFEN, J. Implementing Multi-Modal Shunted Piezoelectrics. In *IMAC* (2006).
- [105] VISHAY MICROMESURES. *Préparation des surfaces pour le collage des jauges, notice d'emploi des colles M300*.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [106] VOIGT, W. *Lehrbuch der kristallphysik (mit ausschluss der kristalloptik)*. Leipzig, Berlin, B.G. Teubner, 1910.
- [107] WILKIE, W. K., BRYANT, R. G., HIGH, J. W., FOX, R. L., HELLBAUM, R. F., JR., A. J., LITTLE, B. D., AND MIRICK, P. H. Low Cost Piezocomposite Actuator for Structural Control Applications. In *SPIE's 7th Annual International Symposium on Smart Structures and Materials* (2000), NASA Langley Research Center.