



Maillage 3D de structures anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique

Julien Dardenne

► To cite this version:

Julien Dardenne. Maillage 3D de structures anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique. Modélisation et simulation. INSA de Lyon, 2009. Français. NNT: . tel-00464815

HAL Id: tel-00464815

<https://theses.hal.science/tel-00464815>

Submitted on 18 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR

ÉCOLE DOCTORALE : ÉLECTRONIQUE, ÉLECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE

FORMATION DOCTORALE : IMAGES ET SYSTÈMES

par

Julien DARDENNE

**Maillage 3D de structures anatomiques pour la
simulation électromagnétique et thermique.**

Soutenue le 19 novembre 2009 devant le jury :

M. Olivier Devillers	Directeur de recherche, INRIA	Rapporteur
M. Yves Maréchal	Professeur, ENSE3-Grenoble	Rapporteur
M. Frédéric Truchetet	Professeur, IUT le Creusot	Président du Jury
M. Jean-Marc Chassery	Directeur de Recherche, CNRS	Examineur
M. Nicolas Siauve	Maître de Conférence, Université Lyon 1	Co-encadrant
M. Sébastien Valette	Chargé de recherche, CNRS	Co-encadrant
M. Noël Burais	Professeur, Université Lyon 1	Directeur de Thèse
M. Rémy Prost	Professeur, INSA-Lyon	Directeur de Thèse

INSA Direction de la Recherche - Ecoles Doctorales - Quadriennal 2007-2010

SIGLE	ECOLE DOCTORALE	NOM ET COORDONNEES DU RESPONSABLE
CHIMIE	<u>CHIMIE DE LYON</u> http://sakura.cpe.fr/ED206 M. Jean Marc LANCELIN Insa : R. GOURDON	M. Jean Marc LANCELIN Université Claude Bernard Lyon 1 Bât CPE 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 72 43 13 95 Fax : lancelin@hikari.cpe.fr
E.E.A.	<u>ELECTRONIQUE, ELECTROTECHNIQUE, AUTOMATIQUE</u> http://www.insa-lyon.fr/eea M. Alain NICOLAS Insa : C. PLOSSU ede2a@insa-lyon.fr Secrétariat : M. LABOUNE AM : 64.43 - Fax : 64.54	M. Alain NICOLAS Ecole Centrale de Lyon Bâtiment H9 36 avenue Guy de Collongue 69134 ECULLY Tél : 04 72 18 60 97 Fax : 04 78 43 37 17 eea@ec-lyon.fr Secrétariat : M.C. HAVGOUDOUKIAN
E2M2	<u>EVOLUTION, ECOSYSTEME, MICROBIOLOGIE, MODELISATION</u> http://biomserv.univ-lyon1.fr/E2M2 M. Jean-Pierre FLANDROIS Insa : H. CHARLES	M. Jean-Pierre FLANDROIS CNRS UMR 5558 Université Claude Bernard Lyon 1 Bât G. Mendel 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 26 23 59 50 Fax 04 26 23 59 49 06 07 53 89 13 e2m2@biomserv.univ-lyon1.fr
EDISS	<u>INTERDISCIPLINAIRE SCIENCES-SANTE</u> Sec : Safia Boudjema M. Didier REVEL Insa : M. LAGARDE	M. Didier REVEL Hôpital Cardiologique de Lyon Bâtiment Central 28 Avenue Doyen Lépine 69500 BRON Tél : 04 72 68 49 09 Fax : 04 72 35 49 16 Didier.revel@creatis.univ-lyon1.fr
INFOMATHS	<u>INFORMATIQUE ET MATHEMATIQUES</u> http://infosmaths.univ-lyon1.fr M. Alain MILLE Secrétariat : C. DAYEYAN	M. Alain MILLE Université Claude Bernard Lyon 1 LIRIS - INFOMATHS Bâtiment Nautibus 43 bd du 11 novembre 1918 69622 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 72 44 82 94 Fax : 04 72 43 13 10 infosmaths@bat710.univ-lyon1.fr - alain.mille@liris.cnrs.fr
	<u>MATERIAUX DE LYON</u> M. Jean Marc PELLETIER Secrétariat : C. BERNAVON 83.85	M. Jean Marc PELLETIER INSA de Lyon MATEIS Bâtiment Blaise Pascal 7 avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04 72 43 83 18 Fax 04 72 43 85 28 Jean-marc.Pelletier@insa-lyon.fr
MEGA	<u>MECANIQUE, ENERGETIQUE, GENIE CIVIL, ACOUSTIQUE</u> M. Jean Louis GUYADER Secrétariat : M. LABOUNE PM : 71.70 - Fax : 87.12	M. Jean Louis GUYADER INSA de Lyon Laboratoire de Vibrations et Acoustique Bâtiment Antoine de Saint Exupéry 25 bis avenue Jean Capelle 69621 VILLEURBANNE Cedex Tél : 04.72.18.71.70 Fax : 04 72 43 72 37 mega@lva.insa-lyon.fr
SxSo	<u>ScSo*</u> M. OBADIA Lionel Insa : J.Y. TOUSSAINT	M. OBADIA Lionel Université Lyon 2 86 rue Pasteur 69365 LYON Cedex 07 Tél : 04.78.69.72.76 Fax : 04.37.28.04.48 lionel.obadia@univ-lyon2.fr

*ScSo : Histoire, Géographie, Aménagement, Urbanisme, Archéologie, Science politique, Sociologie, Anthropologie

“Marche avec des sandales jusqu’à ce que
la sagesse te procure des souliers.”
Avicenne, philosophe et médecin persan, IXème siècle.

A Anaïs,
A mes parents,
A mon frère et ma soeur.

Remerciements

Cette thèse est née d’une collaboration entre le laboratoire CREATIS et le laboratoire Ampère. Je tiens donc à remercier, respectivement, Madame **Isabelle Magnin** et Monsieur **Laurent Nicolas**, responsables de ces deux centres de recherche, pour m’avoir accueilli.

Que Monsieur **Rémy Prost**, reçoive toute l’expression de ma reconnaissance pour m’avoir proposé ce sujet de recherche, et, pour tout son dynamisme et ses compétences scientifiques qui m’ont permis de mener à bien cette thèse.

Je remercie également Monsieur **Noël Burais** pour avoir bien voulu accepter d’être le co-directeur de cette thèse.

Je remercie tous particulièrement Monsieur **Olivier Devillers**, Directeur de Recherche, dans l’équipe GEOMETRICA, à l’INRIA, ainsi que Monsieur **Yves Maréchal**, Professeur à l’Université Joseph Fourier de Grenoble, du Laboratoire G2Elab, qui ont accepté de juger ce travail et d’en être les rapporteurs.

Je tiens également à remercier Monsieur **Jean-Marc Chassery**, Directeur de Recherche, ainsi que Monsieur **Frédéric Truchetet**, Professeur à l’IUT, du laboratoire d’Électronique, Informatique et Image, au Creusot, qui ont acceptés, respectivement, de participer et de présider au jury de cette thèse.

Je tiens à remercier tout particulièrement mes deux co-encadrants, **Sébastien Valette** et **Nicolas Siauve** qui m’ont donné sans compter leur science et leur temps.

A l’heure de conclure 20 années de scolarité, des enseignants déterminants me reviennent en mémoire :

- à l’université de Rouen, Monsieur **Thierry Paquet**, Monsieur **Laurent Heutte**, Monsieur **Stéphane Nicolas**, Monsieur **Yves Lecourtier** et Madame **Christelle Lecomte**.
- à l’IUT de Rouen, Monsieur **Attilio Pavan** ainsi que Monsieur **Philippe Eudeline**.
- au Lycée Clément Ader, Monsieur **Philippe Fournil** qui m’a donné le goût à l’électronique et à l’enseignement.

J’adresse également mes remerciements à mes collègues de bureau : **Adrien Marion**, **Carole Frindel** et **Wallid Aoudi** pour les discussions et les bons moments passés ensemble.

Un grand Merci également à tous ceux qui ont participé à rendre cette période de vie si agréable : **Basma Touil, Sandrine Tomeï, Delphine Charpigny, Stanislas Rappachi, Pierre Gueth, Joël Schaerer, Bertrand Delhay, Olivier Bernard, Arnaud Gelas, Simon Marache, Hervé Liebgott, Ursula Max, Faty Berkai, Marion Lissac, Gwénaëlle Pequay, Fabrice Bellet, Jean-pierre Roux, Eduardo Davila, Pierre Ferrier et Jérôme Barat.**

Je conclurais ces remerciements en adressant mes plus sincères sentiments à ma famille qui m'ont soutenu et qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui'hui. Je n'ai pas pu tous vous citer mais soyez tous remerciés de ma part. Je vous souhaite une bonne lecture.

Julien Dardenne

Résumé

Dans son environnement quotidien, l'homme est volontairement ou involontairement exposé à des champs électromagnétiques radiofréquences. La prédiction de l'élévation de température induite par ce rayonnement, à l'aide d'un calcul sur un modèle anatomique maillé, dépend beaucoup de la qualité de ce modèle.

Les méthodes actuelles de génération de maillages volumiques utilisent des représentations surfaciques intermédiaires des données anatomiques. Nous montrons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une représentation surfacique pour générer un maillage volumique. Nous proposons une construction de maillages tétraédriques basée sur les diagrammes de Voronoi Centroïdaux et leur dual, la triangulation de Delaunay. Cette approche, contrairement aux approches de la littérature, traite directement un volume de voxels segmentés, obtenu par IRM ou par tomographie X, sans passer par une représentation surfacique. Afin d'obtenir des maillages, non plus uniformes mais adaptés à la complexité anatomique, nous avons proposé une nouvelle méthode de capture de cette complexité à l'aide d'une approximation de l'axe médian. Une comparaison, avec trois autres méthodes de génération de maillages de la littérature, montre que notre approche construit des tétraèdres de meilleure qualité géométrique pour différents critères. De cette qualité découle une meilleure précision sur la température induite par le rayonnement électromagnétique, calculée par une méthode d'éléments finis, ainsi qu'un temps de calcul réduit. Ces résultats montrent le potentiel de notre approche discrète de type "Voronoi-Delaunay" pour la génération de maillages tétraédriques.

Abstract

In his daily environment, the man is voluntarily or involuntarily exposed to Radio-Frequency Electromagnetic Fields. The prediction of inferred temperature rise by this radiation, by means of the calculation on a meshed anatomical model, depends a lot from quality of this model. The current methods of tetrahedral mesh generation use intermediate surface representations on the anatomical data. We show that it is not necessary to have a surface representation to generate a volume mesh. We propose a tetrahedral mesh generation based on the Centroidal Voronoi Diagram and their dual, the Delaunay Triangulation. This approach, contrary to surrounding areas of the literature, treats directly a volume of segmented voxels, obtained by MRI or by tomography X. To obtain meshes, either uniform but adapted at the anatomical complexity, we proposed a new method of capture of this complexity by means of medial axis approximation. A comparison with three other methods of tetrahedral mesh generation shows that our approach builds tetrahedra of better geometrical quality for various criteria. Of this quality ensues a better precision of the temperature inferred by the electromagnetic radiation, calculated by finite element methods, as well as a calculation time reduction. These results show the potential of our discrete approach of type "Voronoi-Delaunay" for tetrahedral mesh generation.

Table des matières

Remerciements	v
Résumé	ix
Table des matières	xi
Table des figures	xvi
Liste des tableaux	xxii
Liste des abréviations	xxv
Liste des notations	xxvii
Introduction	1
I Modélisation électromagnétique et thermique	5
Résumé	7
1 Ondes électromagnétiques et santé	9
1.1 Rayonnements électromagnétiques et expositions	9
1.2 Effets Biologiques des champs électromagnétiques	11
1.3 Normes et recommandations	12
1.4 Exemple d'application médicale : traitement des tumeurs cancéreuses par hyperthermie.	13
2 Équations régissant la propagation et l'énergie des ondes électro- magnétique et la distribution thermique	17
2.1 Équations de Maxwell	17
2.2 Équation de Pennes	20
2.2.1 Bilan thermique du corps humain	20
2.2.2 Définition des échanges thermiques dans le corps humain . . .	21
2.2.3 Équation de la biochaleur	22

3	Méthode de résolution des E.D.P	23
3.1	Méthode des différences finies	23
3.2	Méthode des éléments finis	24
3.2.1	Définition d'un élément fini	25
3.2.2	Formulation variationnelle du problème	25
3.2.3	Résolution du système d'équations aux dérivées partielles . . .	27
	Discussion	29
II	Génération de maillages volumiques	31
	Résumé	33
4	Géométrie discrète et images numériques	35
4.1	Méthodes d'acquisition	35
4.2	Modèles de discrétisation	36
4.2.1	Représentation analytique	37
4.2.2	Espace et objets discrets	37
4.2.3	Structure et relation de voisinage	40
4.3	Reconstruction surfacique de données volumétriques	42
4.4	Définition d'un maillage	42
5	Etat de l'art de la construction de maillages volumiques	45
5.1	Génération de maillages volumiques non structurés	45
5.1.1	Méthodes frontales	45
5.1.2	Méthodes basées sur un partitionnement hiérarchique	47
5.1.3	Méthodes de type "Delaunay-Voronoi"	48
5.2	Optimisation	52
5.3	Qualité géométrique et simulation numérique	53
5.3.1	Classification des tétraèdres	53
5.3.2	Qualité d'un maillage	55
5.3.3	Influence sur la modélisation	56
5.4	Discussion	57
6	Triangulation basée sur les diagrammes de Voronoï Centroidaux	59
6.1	Contexte	59
6.2	Notre approche	61
6.2.1	Représentation d'une surface discrète	62
6.2.2	Diagrammes de Voronoï Centroidaux	63
6.2.3	Génération des éléments du maillage	75
6.2.4	Intégrité de la frontière	83
6.2.5	Qualité géométrique d'une T.V.C	86
6.3	Optimisation topologique	86
6.4	Schéma du mailleur	89
	Conclusion	91

III	Adaptation de maillages volumiques	93
7	Etat de l'art de l'adaptation géométrique et physique des maillages volumiques	97
7.1	Adaptation au comportement physique du phénomène étudié	97
7.2	Adaptation de nature strictement géométrique	99
7.3	Etat de l'art des méthodes d'approximation de l'axe médian	100
7.3.1	Méthodes utilisant une fonction de distance	101
7.3.2	Erosion morphologique	101
7.3.3	Approches de type Voronoï	101
	Orientation choisie	103
8	TVC adaptatif	105
8.1	Introduction	105
8.2	Diagramme de Voronoï Centroïdal Contraint	109
8.3	Graphe de Voronoï discret	109
8.4	Conditions de filtrage	110
8.4.1	Estimation de l'anisotropie des cellules :	110
8.4.2	Critère basé sur les pôles	113
8.4.3	Critère basé sur l'angle :	115
8.5	Carte de densité pour une meilleure approximation de l'axe médian	116
8.6	Resultats	119
8.6.1	Comparaison entre l'approche uniforme et adaptative	119
8.6.2	Comparaison entre notre approche et l'approche RDMA	121
8.7	TVC adaptatif	123
8.7.1	Prise en compte de la largeur locale	123
8.7.2	Prise en compte de la largeur et de la courbure locale	128
8.8	Conclusion	128
IV	Exemples d'applications et évaluations	131
	Conclusion	133
9	Evaluation de notre approche	135
9.1	Critères de qualité	135
9.2	Géométrie simple	136
9.3	Géométrie complexe	138
9.3.1	Modèles virtuels	138
9.3.2	Structures anatomiques	138
10	Influence de la qualité du maillage sur la simulation par la MEF	143
10.1	Expérimentations	143
10.1.1	Expérience 1 :	144
10.1.2	Expérience 2 :	145
10.1.3	Expérience 3 :	146

10.1.4 Expérience 4 :	147
10.2 Conclusions	147
11 Comparaisons avec différentes approches	149
11.1 Géométrie simple	150
11.2 Géométrie complexe	155
11.3 Comparaison dans le cadre de l'hyperthermie	158
11.4 Conclusion	159
Conclusion	161
Bibliographie personnelle	165
Bibliographie	174

Table des figures

1.1	Illustration du spectre électromagnétique	10
1.2	Sources électromagnétiques “polluantes”	10
1.3	Illustration des effets biologiques des champs électromagnétiques . . .	11
1.4	Dispositif d’hyperthermie interstitiel	13
1.5	Processus de traitement par hyperthermie	15
2.1	Représentation d’une onde électromagnétique.	17
2.2	Illustration du volume de contrôle d’un tissu vivant modélisant les mécanismes de transferts de chaleur et le débit sanguin	20
3.1	Illustration des éléments discret dans le cadre de l’imagerie médicale pour les différences finies et les éléments finis	24
4.1	Illustration de scanner-ct et capteur laser commerciaux.	36
4.2	Diverses représentations du modèle “Stanford Bunny”	36
4.3	Représentation de pavages réguliers 2D	37
4.4	Représentation de complexes cellulaires de dimensions 1, 2 et 3. . . .	38
4.5	Décomposition cellulaire d’un pixel et d’un voxel	38
4.6	Illustration de la forme des ouverts pour O-, 1-, 2- et 3-cellules dans des complexes cellulaires de dimensions 1, 2 ou 3	39
4.7	Illustration de voisinage	40
4.8	Illustration des adjacences pour un voxel	40
4.9	Représentation du graphe primaire et dual	41
4.10	Table de configuration pour l’algorithme “ <i>Marching-cubes</i> ”	43
4.11	Primitives géométriques simples	44
5.1	Illustration d’une méthode frontale	46
5.2	Illustration du polyèdre de Schönhardt	47
5.3	Illustration d’une méthode basée sur un partitionnement hiérarchique	47
5.4	Illustration du critère de Delaunay	49
5.5	Illustration du problème de non respect de la frontière	50
5.6	Illustration de la transformation d’un hexaèdre à faces triangulaires en 2 ou 3 tétraèdres.	53
5.7	Les trois types de triangles pour la classification	54
5.8	Exemple de classification des tétraèdres.	54
5.9	Processus de discrétisation	58
6.1	Illustration du processus de génération 2D	61

6.2	Définition de la surface discrète	62
6.3	Représentation des différentes contraintes	63
6.4	Test élémentaire de minimisation entre deux cellules de Voronoï . . .	65
6.5	Les trois configurations possibles, aux orientations près pour définir la frontière	66
6.6	Illustration des conditions de positionnement d'un site	68
6.7	Prise en compte de l'orientation dans les contraintes géométriques . .	69
6.8	Tests élémentaires de minimisation	70
6.9	Processus de partitionnement uniforme	72
6.10	Processus de nettoyage du partitionnement	73
6.11	Illustration des ambiguïtés 3D	76
6.12	Illustration du processus d'obtention de l'ensemble des tétraèdres ad- missibles	79
6.13	Organisation des structures géométriques	80
6.14	Illustration du processus de propagation par front d'onde	82
6.15	Illustration des ambiguïtés induisent par un DVC discret	83
6.16	Patrons utilisés pour résoudre les ambiguïtés lorsque $n \leq 6$	84
6.17	Illustration d'une ambiguïté topologique sur la frontière	84
6.18	Illustration du processus de restauration	85
6.19	Transformations topologiques notées 5-4, 2-3 et 3-2	87
6.20	Schéma du mailleur	90
7.1	Axe médian d'une forme et largeur locale (inspiré de [Devillers 08]). .	100
7.2	Approximation d'axe médian par une approche de type Voronoï . . .	102
8.1	Illustration de notre processus d'approximation de l'axe médian . . .	106
8.2	Représentation bi-dimensionnelle de l'axe médian de la frontière d'une forme dans le cas continu et discret	107
8.3	(a) le graphe primaire de la forme (inspiré de [Attali 07a]) (b) la forme frontière dans son graphe dual (c) son diagramme de Voronoï centroïdal contraint (d) l'approximation de l'axe médian après son filtrage	108
8.4	Exemples de partitionnement	109
8.5	Illustration du graphe de Voronoï discret	110
8.6	Exemple d'estimation de l'anisotropie des cellules	111
8.7	Illustration de l'anisotropie d'un DVC contraint	112
8.8	Correction dans le cas de cellules isotropes	112
8.9	Illustration d'une cellule de Voronoï anisotrope	113
8.10	Représentation du graphe de Voronoï et de l'estimation de la direction de la normale pour l'ensemble des cellules	114
8.11	Illustration du critère basé sur les pôles	115
8.12	Illustration du premier critère de filtrage basé sur la position des pôles.	115
8.13	Illustration du critère basé sur l'angle	116
8.14	Illustration de l'approche pour l'approximation de l'axe médian . . .	118
8.15	Image binarisée représentant un sphinx.	119
8.16	Comparaison entre l'approche uniforme et adaptative	120

8.17	Trois coupes d'une image 3D du cœur segmentée et leurs axes médians respectifs.	121
8.18	Comparaison entre notre approche et l'approche RDMA	122
8.19	Processus de partitionnement adaptatif : (a) partitionnement initial ((b)-(e)) partitionnement <i>sans contrainte</i> ((f)-(i)) partitionnement <i>avec contrainte</i>	124
8.20	Illustration de notre approche sur une image représentant un "kiwi" .	125
8.21	Illustration de notre approche pour un volume 3D représentant un coeur humain	126
8.22	Cartes de densité et maillages adaptatifs ($N=1000$) pour $\alpha = 0.3, 1$ et 10	127
8.23	Maillages adaptatifs pour $\gamma = 0$ et 0.5 avec $\alpha = 10$	129
9.1	(a) maillage tétraédrique d'une sphère comprenant 15000 sommets (b) l'histogramme de la distribution de la qualité par rapport à Q_3 . .	137
9.2	(a) maillage tétraédrique comprenant 10000 sommets (b) coupe du maillage volumique (c) surface de l'objet interne maillée.	137
9.3	Représentations maillées des modèles "Armadillo", "Stanford bunny" et "Venusbody"	139
9.4	Représentations maillées d'un fœtus et d'un cœur	140
9.5	Représentations maillées d'un crane et d'un cerveau humain	141
9.6	Représentations maillées d'un rein de souris de façon uniforme et adapté	142
10.1	Effet d'un seul mauvais tétraèdre sur la simulation électromagnétique et thermique pour plusieurs types de préconditionnement.	144
10.2	Impact de la qualité d'un tétraèdre sur la simulation thermique pour différents critères normalisés, Q_3 à Q_6	145
10.3	Impact de l'ajout un à un de mauvais éléments selon le critère Q_1 par rapport à l'erreur numérique maximale $Error_{max}$ calculée entre la solution numérique et la solution analytique.	146
10.4	Influence de la qualité des éléments sur le facteur de conditionnement sur la simulation thermique ST	147
11.1	Comparaisons avec différentes approches sur une géométrie sphérique	151
11.2	Histogrammes de qualité associés aux maillages S_1, S_2 générés avec AMIRA et notre méthode S_3 pour les critères (Q_1 - Q_4).	153
11.3	Histogrammes de qualité associés au maillage S_3 issu de notre approche et aux maillages S_4, S_5 générés, respectivement, avec TetGen et GHD3D pour les critères (Q_1 - Q_4).	154
11.4	Représentation de la qualité des maillages obtenus entre AMIRA, GHS3D et notre approche	156
11.5	Histogrammes de qualité associés aux maillages C_1, C_2 générés respectivement avec AMIRA et GHS3D à partir d'un maillage surfacique et notre méthode C_3 pour les critères (Q_1 - Q_4).	157
11.6	Ensemble discret tri-dimensionnel et représentation volumique du patient.	158
11.7	Représentation du SAR dans le cadre de la planification du traitement.	158

11.8 Comparaison entre différentes structures anatomiques extraites des maillages issus de AMIRA et TVC.	160
11.9 Meshview	163

Liste des tableaux

9.1	Critère de qualité	135
9.2	Evaluation de notre étape d’optimisation pour les modèles “Arma- dillo”, “Stanford bunny” et “Venusbody”.	138
9.3	Evaluation de notre étape d’optimisation de la qualité des maillages. .	141
9.4	Temps de calcul avec notre algorithme	142
11.1	Qualité du maillage et précision pour la résolution par la MEF en simulation thermique(1) et électromagnétique (2).	152
11.2	Qualité du maillage surfacique S utilisé pour générer C_1 et C_2	155
11.3	Qualité des maillages C_1, C_2 et C_3	155
11.4	Qualité du maillage et temps de résolution par la MEF en simulation électromagnétique (1) et thermique(2).	159

Liste des abréviations

BHTE	Bio Heat Transfert Equation
B-Rep	Boundary Representation
CAO	Conception Assistée par Ordinateur
CLA	Conditions aux Limites Absorbantes
CLP	Complexe Linéaire par Morceaux
CT	Computer Tomography
DAS	Densité d’Absorption Spécifique
DV	Diagramme de Voronoï
DVC	Diagramme de Voronoï Centroïdal
EDP	Equation aux dérivées partielles
EEG	Electro-Encephalogramme
ELF	Extremely Low Frequency
FA	Fractionnal Anisotropy
FEB	Fréquence Extrêmement Basse
GC	Gradient Conjugué
GVD	Graphe de Voronoï Discret
ICNIRP	International Commission on Non-Ionising Radiation Protection
IRM	Imagerie par Résonance Magnétique
LFS	Local Feature Size
MA	Medial Axis
MEF	Méthode des Eléments Finis
MEG	Magneto-Encephalogramme
MO	Micro-Ondes
OEM	Onde Electro-Magnétique
PLC	Piecewise Linear Complex
RDMA	Reduced Discrete Medial Axis
RF	Radio-Fréquences
SAR	Spécific Absorption Rate
SSOR	Symmetric Successive Over Relaxation
TVC	Triangulation basée sur les diagrammes de Voronoï Centroïdaux

Liste des notations

$\mathbf{B}$	l'induction magnétique
$\dot{B}$	la puissance thermique évacuée par l'ensemble de la vascularisation
B_i	l'ensemble des éléments frontières d'une cellule C_i
C_i	une cellule de Voronoï
c_t	la chaleur spécifique
$\mathbf{D}$	l'induction électrique
$\mathbf{E}$	le champ électrique
FA_i	l'anisotropie fractionnelle
$\mathbf{H}$	le champ magnétique
$\mathbf{H}(g)$	la matrice hessienne
$\mathbf{J}_e$	la densité du courant électrique
$\mathbf{J}_m$	la densité du courant magnétique
k	la constante de propagation du champ électromagnétique
$\dot{K}$	la puissance thermique transférée dans les tissus par conduction
q_e	la densité de charge électrique
q_m	la densité de charge magnétique
Q_m	la puissance thermique métabolique totale
Q_1	l'angle dièdre minimal
Q_2	l'angle dièdre maximal
Q_3	Critère défini dans [Liu 94]
ρ_t	la masse volumique des tissus
$\rho(x)$	la fonction de densité associée
$\dot{S}$	l'énergie thermique stockée au sein du tissu
T	la température
T_a	la température des artères
$V(z_i)$	la cellule de Voronoï de z_i
(x, y, z)	Repère
x	Direction latérale
y	Direction axiale
z	Direction azimutale
z_i	le site d'une cellule de Voronoï
α	le paramètre de graduation
γ	le paramètre de pondération de l'influence de la courbure par rapport à la LFS
Γ	l'ensemble des tétraèdres possibles
Ω	le domaine à mailler
ω_b	le débit sanguin
∂_O	les frontières internes du domaine à mailler
∂_Ω	la frontière du domaine à mailler
Ψ	le graphe d'adjacence
ρ	la carte de densité
μ	la fonction de taille
Θ	l'ensemble des faces possibles

Introduction

Les ondes électromagnétiques radio-fréquences ou micro-ondes sont utilisées dans de nombreuses applications, aussi bien dans le domaine médical, industriel, ou dans notre vie quotidienne. Leur utilisation est en augmentation dans notre société, faisant naître des interrogations sur leurs effets sur la santé. Les effets des champs électromagnétiques sur l'être humain, notamment au niveau thermique restent méconnus. Les mesures de champ électromagnétique et de température se révèlent difficiles dans le corps humain. D'une part, les mesures directes, en introduisant des sondes dans le corps humain, sont impossibles avec une résolution spatiale suffisante, ou encore pour atteindre des zones difficiles d'accès. De plus, les sondes perturbent la distribution de la température. D'autre part, les dispositifs de mesure non intrusifs ne disposent pas, pour l'instant, d'une résolution suffisante. Que ce soit dans le but d'améliorer les traitements basés sur l'exposition à ces ondes, comme dans le cas de l'hyperthermie thérapeutique en oncologie, ou pour nous permettre d'évaluer les effets induits dans le corps humain des champs électromagnétiques, la communauté scientifique se tourne vers la simulation et le calcul sur modèle. Ces modélisations reposent sur le calcul de la puissance absorbée et des phénomènes de transfert thermique dans le corps humain. Lors de la simulation de phénomènes électromagnétiques et thermiques, il est nécessaire de disposer de modèles fiables du corps humain. Ainsi, un des critères essentiels de la modélisation numérique réside dans la qualité de la modélisation géométrique. Nous énumérons brièvement, dans le paragraphe suivant, les différents processus permettant d'obtenir une représentation géométrique. Le processus de reconstruction géométrique peut être décomposé en trois étapes :

- une première étape est l'acquisition de données géométriques sur le corps humain et leur analyse ;
- une deuxième étape est la segmentation 2D/3D des différents éléments anatomiques que l'on souhaite modéliser ;
- une troisième étape discrétise le domaine d'étude pour les simulations numériques.

Ce processus est parfois lourd à mettre en place et, par conséquent, coûteux en temps. Toutefois, il peut être rendu performant par des procédés de traitement automatique ou semi automatique [Bidal 02].

La phase d'acquisition des données s'appuie généralement sur des techniques d'imagerie médicale (radiographies, scanner 3D, IRM 3D, coupes anatomiques ...) ou encore sur des mesures réalisées directement sur le corps humain (biométrie, scanner de profondeur (3D), ...).

L'analyse de ces données brutes est alors souvent réalisée par des experts du domaine médical (anatomistes, chirurgiens, ...). Elle consiste à appliquer des algorithmes de traitement d'images pour extraire les contours des éléments à modéliser. Cette opération, appelée aussi "segmentation", consiste à extraire des iso-contours (ou iso-surfaces) ou des régions homogènes (niveau de gris, texture). Les techniques de segmentation sont décrites dans [Cocquerez 95]. La segmentation génère un fichier image (2D, 3D) binaire ou labellisés.

L'étape de discrétisation 3D fait appel à des méthodes mathématiques avancées. Parmi elles, citons les méthodes basées sur la triangulation de Delaunay [Boissonnat 92, George 97b], les méthodes basées sur la déformation de maillages simples [Delingette 97] et enfin les méthodes basées sur l'algorithme du marching cube [Lorensen 87a]. Ce travail s'effectue à partir de l'image binaire fournie par la segmentation. Les maillages volumiques doivent se rapprocher le plus fidèlement possible du modèle anatomique puisqu'ils seront utilisés pour des simulations de phénomènes réalistes. Cette étape est tout aussi délicate que les deux autres puisqu'elle nécessite plusieurs choix cruciaux dont dépend la qualité des simulations. Ce choix concerne le type d'éléments, triangles ou quadrangles (en surfacique), tétraèdres ou cubes (en volumique) et la "qualité" des éléments. Les critères de qualité d'un maillage dépendent de la dimension des éléments, leurs angles minimal, maximal et leurs proportions (longueur, largeur, épaisseur). Bien entendu, le nombre d'éléments résulte d'un compromis entre le temps de calcul et la précision des simulations.

Mes travaux, au sein des laboratoires CREATIS et Ampère, ont pour but de proposer une méthode de génération de maillage à partir de données médicales segmentées. L'objectif de cette thèse réside donc dans le développement d'une stratégie d'obtention des représentations maillées des structures anatomiques du corps humain. Cette stratégie part d'images médicales segmentées permettant la reconstruction de leur surface sous forme maillée (maillages surfaciques et volumiques) munie de bonnes propriétés pour un calcul précis et rapide par la Méthode des Éléments Finis (MEF).

Cette thèse s'inscrit dans le projet ANR BioRFMod, portant sur la détermination de la température dans le corps humain lors de son exposition à un rayonnement électromagnétique : radio-fréquence ou micro-onde et la région Rhône Alpes, Cluster 2 ISLE, PP3, sous-projet SIMED : Simulation en Imagerie MEDicale pour le Diagnostic et la Thérapie. L'objectif de la thèse est l'obtention d'un maillage volumique spécifique à un patient, à partir de séquences d'images acquises par tomographie ou par résonance magnétique. Contrairement aux méthodes actuelles qui génèrent un maillage volumique (constitué de tétraèdres) à partir d'un maillage surfacique triangulaire, nous avons développé une méthode de génération de maillages volumiques directement à partir des images segmentées. L'approche proposée s'appuie sur la construction d'un diagramme de Voronoï discret dont le dual est : la triangulation de Delaunay. Nous obtenons la représentation maillée complète du domaine d'étude (intérieur et extérieur des interfaces). Ce manuscrit de thèse se compose de quatre parties dont nous détaillons rapidement le contenu.

Dans la première partie, nous présentons les bases de la simulation électromagnétique et thermique. Nous rappelons les équations physiques nécessaires à la résolution de ce type de problème couplé puis nous introduisons les différentes méthodes de résolution de ces équations par MEF. Ces aspects sont importants et doivent être pris en compte dans le développement de notre approche. Nous terminerons cette partie en introduisant la méthode choisie dans le cadre de l'ANR BioRFMod pour la résolution des différents phénomènes physiques.

La deuxième partie sera consacrée à un état de l'art des méthodes de construction de maillages volumiques. Nous commencerons par introduire les différentes définitions que nous utiliserons dans ce mémoire. Nous ferons ensuite une revue des méthodes de génération de maillages volumiques. Notre approche sera développée ensuite. Dans un premier temps, nous décrirons notre méthode de génération de maillage dans un contexte 2D et dans un second temps en 3D. Un algorithme original d'optimisation topologique sera aussi présenté.

Nous présenterons ensuite un état de l'art sur l'approximation de l'axe médian que nous utilisons pour construire des maillages dit "adaptatifs" d'un point de vue strictement géométrique. La version adaptative de notre approche utilise la connaissance de l'axe médian. La troisième partie sera alors dédiée à la méthode originale que nous avons proposée pour l'approximation de l'axe médian à partir de diagrammes de Voronoï contraints. Nous montrerons, en fin de partie, une comparaison avec l'approche RDMA [Coeurjolly 07a] et l'adaptativité obtenue grâce à l'axe médian dans le cadre de notre processus de génération de maillage.

Dans la quatrième partie, notre méthode de construction de maillage volumique à partir d'images segmentées 3D sera évaluée. Nous nous intéresserons aux résultats obtenus avec notre approche sur différents volumes segmentés avant de dresser un bilan de notre méthode. Nous montrerons une étude comparative entre notre mailleur et les mailleurs commerciaux "AMIRA" et "GHS3D", et le mailleur libre "TetGen". Nous présenterons une étude montrant l'influence de la qualité des maillages sur la précision et les temps de calcul en MEF pour notre étude. Finalement, nous générerons un maillage volumique comportant plusieurs structures anatomiques et nous procéderons à une simulation numérique par la MEF dans le cadre de l'hyperthermie.

Nous concluons ce mémoire en faisant un bilan des contributions proposées, aussi bien en termes de génération de maillages adaptatifs, qu'en terme de l'influence de leur qualité sur la simulation numérique par MEF. Nous développerons enfin plusieurs perspectives de ces travaux de recherche.

I Modélisation électromagnétique et thermique

Résumé

La multiplication des sources électromagnétiques, tant domestiques que professionnelles, fait que l'étude de l'exposition humaine à ces champs est un sujet d'actualité. Ce développement pose aujourd'hui le problème délicat des éventuels effets nocifs sur la santé de l'homme, du champ électromagnétique rayonné. D'un autre point de vue, l'hyperthermie thérapeutique, utilisant des sources électromagnétiques, est une technique médicale utilisée dans le traitement des cancers.

La simulation numérique des traitements en hyperthermie est une procédure en deux étapes qui consiste à déterminer dans un premier temps le dépôt de puissance à l'intérieur du corps induit par la source de chauffage. La deuxième étape concerne le calcul de la distribution de l'énergie due à la conduction thermique des tissus et de la circulation sanguine. Pour étudier les effets thermiques induits par la transformation de l'énergie électrique dans les tissus, il faut combiner le modèle électromagnétique à un modèle thermique, dit de biochaleur. Au terme de l'ANR BioRFMod, un modèle global de l'interaction entre rayonnement électromagnétique et tissus vivants incluant les effets thermiques devrait être disponible. Outre les simulations réalisées pour créer des stratégies de traitement de tumeurs cancéreuses par hyperthermie, un tel modèle pourrait servir, par exemple, à la modélisation numérique des effets thermiques des téléphones portables.

Cette première partie, consacrée à la modélisation électromagnétique et thermique, exposera, dans un premier chapitre, le contexte de notre approche. Dans le second chapitre seront présentées les équations de Maxwell et de Pennes pour modéliser, respectivement, les phénomènes électromagnétique et thermique induits dans le corps humain. Dans le dernier chapitre, les différentes méthodes de résolution numérique seront décrites. La méthode numérique retenue pour calculer la distribution du champ électrique ainsi que la distribution de la température induite par les ondes électromagnétique radio-fréquence sera présentée.

Chapitre 1

Ondes électromagnétiques et santé

1.1 Rayonnements électromagnétiques et expositions

Bien qu'invisible, le rayonnement électromagnétique est un phénomène omniprésent de notre environnement. On distingue les rayonnements naturels des rayonnements artificiels :

- **Les rayonnements naturels** sont créés par le soleil, la terre, par son champ magnétique, ou par l'activité des orages. Le corps humain lui même produit des rayonnements électromagnétiques de par son activité naturelle (cœur, muscle, activité cérébrale ...). Ils sont de très faible intensité.
- **Les rayonnements artificiels** sont nombreux autour de nous, ils proviennent des circuits électriques et des appareils : cuisinières, radiateur électrique, appareil de communication sans fil ... Même en veille, ces appareils émettent des champs électromagnétiques.

Avec le développement exponentiel de ces sources électromagnétiques artificielles depuis ces dernières années, de plus en plus de recherches ont pour objectif d'évaluer l'influence de ce rayonnement électromagnétique sur le corps humain. La détermination des grandeurs électromagnétiques et thermiques induites intra corporelles est devenue un enjeu sociétal primordial.

Dans son environnement quotidien, l'homme est volontairement ou involontairement exposé à des rayonnements artificiels (figure 1.1 et 1.2) :

- **Les expositions volontaires** concernent les applications médicales en diagnostic (IRM : *Imagerie par Résonance Magnétique*) et en thérapie (hyperthermie, physiothérapie, ...).
- **Les expositions involontaires** sont dues à la pollution électromagnétique issue de l'utilisation de l'électricité et de l'électromagnétisme en milieu professionnel (soudeuse, four à induction, cuve à électrolyse ...) et domestique (téléphonie sans fil, micro-ondes, réseau wifi, ...).

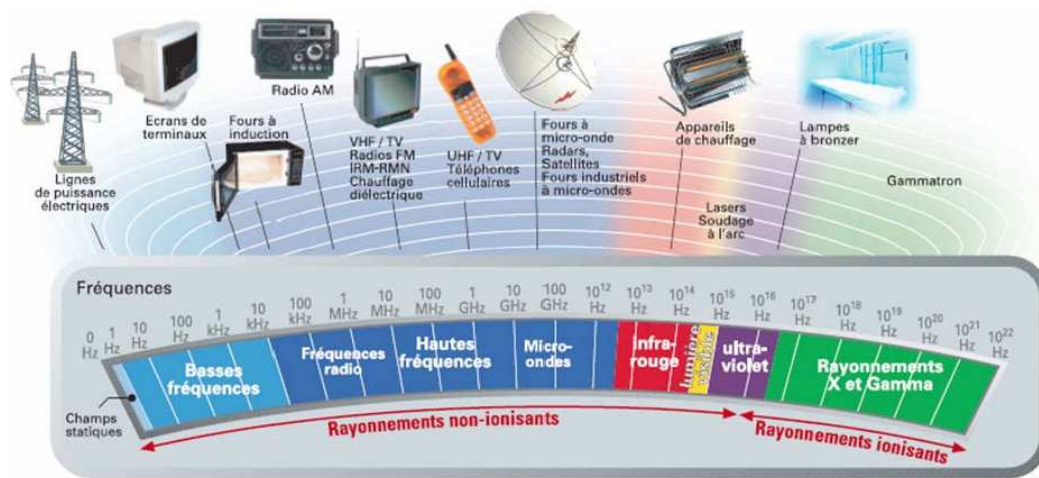


FIG. 1.1 – Illustration du spectre électromagnétique (source : <http://crealab.info/>).

Il existe une inquiétude grandissante de la société concernant les possibles effets des champs électromagnétiques, que ce soient des champs électriques et magnétiques de Fréquence Extrêmement Basse (FEB ou ELF : *Extremely Low Frequency*), les Radio-Fréquences (RF) ou les Micro-Ondes (MO).



(a)



(b)

FIG. 1.2 – Sources électromagnétiques “polluantes” : (a) pistolet de soudage à l'arc (b) antenne relais

corporelle (entre 0,5 et 1°C) et des troubles du comportement ainsi que de l'apprentissage [Stuchly 90, Sander 82]. Ces effets thermiques constatés chez l'animal ont permis de définir la Densité d'Absorption Spécifique (W/kg) (DAS ou SAR : *Specific Absorption Rate*) chez l'homme avec une marge de sécurité d'un facteur 50. La DAS pour le corps entier chez l'homme a donc été fixé à 80 mW/kg . Cette valeur représente la norme définie par l'ICNIRP (International Commission on Non-Ionising Radiation Protection) [ICNIRP 98]. Mais il faut bien savoir qu'il représente une puissance moyenne d'absorption, et que l'énergie absorbée l'est de façon très inhomogène d'une région du corps à l'autre.

1.3 Normes et recommandations

De nombreux rapports et recommandations ont alors vu le jour [Lorrain 02, Aran 03]. La recommandation européenne s'appuie sur des effets immédiats des champs électromagnétiques, sur la base de mécanismes d'interaction champs - tissus biologiques vivants faisant l'objet d'un consensus scientifique :

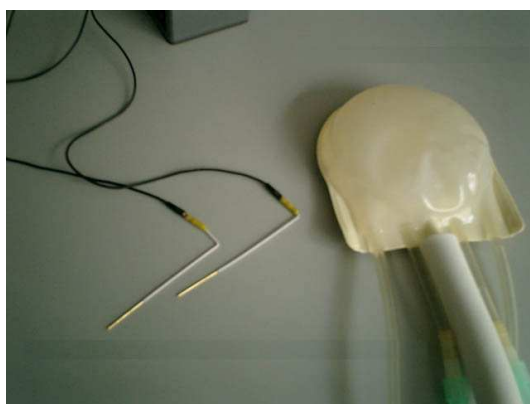
- en basse et moyenne fréquences, les champs induisent des courants dans l'organisme pour lesquels il ne faut pas dépasser une certaine densité J (mA/m^2),
- en haute fréquence, les effets thermiques deviennent prépondérants et sont caractérisés par la densité d'absorption spécifique (W/kg), qui doit rester inférieure à un certain niveau.

Malgré de nombreuses études réalisées à ce jour, il y a encore peu d'avancées significatives dans la connaissance des effets des champs électromagnétique sur le corps humain. Aujourd'hui, la communauté scientifique est encore loin de pouvoir conclure avec certitude sur leur innocuité ou leur nocivité. Seules certaines nuisances, telles que les effets des courants électriques induits dans le corps humain par les basses fréquences, les réactions humaines liées aux courants de contact et les effets thermiques dans les tissus provoqués par les hautes-fréquences, sont scientifiquement reconnus. Les normes fixées en France par le décret (référence : 2002-775) du 3 mai 2002 préconisent un DAS inférieur à 80 mW/kg pour le corps entier et $2W/kg$ pour la tête et le tronc.

Dans le cadre de cette thèse, nous nous situons dans le domaine des hautes fréquences couvrant une gamme allant de $1MHz$ à $3GHz$ ce qui correspond à des ondes non ionisantes produisant essentiellement un effet thermique. Notre étude portera sur le développement et le renseignement de modèle numériques 3D spécifiques adaptés au corps humain permettant de déterminer la répartition de température induite lors de son exposition volontaire ou involontaire à un rayonnement radiofréquence ou micro-onde.

1.4 Exemple d'application médicale : traitement des tumeurs cancéreuses par hyperthermie.

L'hyperthermie à but thérapeutique est basée sur une augmentation de la température à l'intérieur des cellules cancéreuses afin de les détruire ou de les affaiblir, sans léser les cellules saines avoisinantes. Elle consiste à maintenir les tissus à une température modérément élevée (comprise entre 42 et 45°C) pendant une très longue durée (30 à 60 min) [Kaatee 97]. L'ablathermie par radiofréquence est une technique où le champ radiofréquence est délivré localement dans un tissu par le biais d'une aiguille-antenne et d'un générateur HF (figure 1.4), permettant d'obtenir des destructions tissulaires. La destruction est obtenue par une nécrose provoquée par augmentation subite de la température.



(a)



(b)

FIG. 1.4 – Dispositif d'hyperthermie interstitiel : un applicateur externe (a) et le générateur HF (b) (source : Dept of Neurosurgery, Brain Research Institute, Niigata university, Japon).

L'hyperthermie thérapeutique est généralement employée en association avec la radiothérapie. Soumis à ce traitement, les tissus cancéreux sont alors plus sensibles aux rayonnements, ce qui permet une destruction sélective des cellules tumorales. L'hyperthermie renforce aussi l'action du médicament anticancéreux dans le cadre d'une chimiothérapie. L'élévation localisée de température peut être réalisée par des dispositifs travaillant dans une gamme de fréquence comprise entre 10 MHz et 2.45 GHz . Les progrès technologiques récents permettent de traiter des tumeurs profondes par des ondes électromagnétiques en utilisant des IRM ouvertes pour mesurer la température [Ronkainen 06]. En Allemagne et en Hollande, l'hyperthermie est un standard pour le traitement des cancers du col utérin et de certains sarcomes. En France, ces techniques sont peu appliquées. Les seules évaluations dans ce domaine se limitent à l'hyperthermie superficielle par micro-ondes, à l'ablathermie par radiofréquences ou par ultrasons focalisés, ainsi qu'à l'hyperthermie localisée [Mar 03]. L'un des facteurs limitant d'un traitement par hyperthermie est l'apparition de points chauds plus ou moins douloureux et dangereux pour le patient. L'importance de la modélisation de tels phénomènes provient des difficultés rencontrées pour mesurer les températures à l'intérieur de la région désirée lorsque les tumeurs sont situées en

profondeur. Elle provient aussi dans ce cadre du degré de variabilité et de complexité des traitements entre chaque patient qui varie en fonction de la taille, de la forme et de la localisation de la tumeur, mais aussi de la morphologie de chaque patient.

La connaissance, le contrôle et la maîtrise parfaite des conditions d'exposition sont indispensables. Pour expérimenter, comprendre et modéliser les interactions des ondes électromagnétiques avec des cellules et des tissus biologiques, une dosimétrie appropriée et complète est donc nécessaire. La dosimétrie étant la quantification des champs et puissances induites dans les tissus. Cette quantification passe par une modélisation numérique des phénomènes en jeu qu'ils soient de nature électromagnétique et/ou thermique. Il est indispensable de développer un programme 3D de planification de traitement prenant en compte la géométrie et les caractéristiques spécifiques du patient. Des fonctions objectifs sont utilisées par la suite pour optimiser les paramètres, amplitude et phase, des sources radiofréquences constituant le système de chauffe afin d'atteindre un plan de traitement satisfaisant pour chaque patient.

Un modèle numérique 3D basé sur les éléments finis d'arêtes a été mis au point dans le cadre de cette planification des traitements par hyperthermie [Siauve 04]. Ce modèle permet de calculer la répartition du Débit d'Absorption Spécifique (DAS ou SAR : *Specific Absorbtion Ratio*) (W/kg), il est utilisé pour optimiser les sources de rayonnement. Toute la complexité de la thérapie par hyperthermie réside en la bonne focalisation de la puissance induite dans certains organes, donc du champ électromagnétique. L'objectif final est de déterminer la distribution de température induite dans le corps humain lorsqu'il est soumis à un champ radiofréquence. La représentation maillée devra donc avoir des caractéristiques, en termes de qualité de maillage, adaptées à la résolution des problèmes électromagnétiques et thermiques par la méthode des éléments finis.

Dans le cadre de cette thèse, nous cherchons à obtenir une méthode, rapide et robuste, pour construire, à partir d'un ensemble de voxels, obtenu par IRM (Fig. 1.5(a)) ou par tomographie X, une représentation maillée spécifique du patient (b). Cette représentation maillée (b) sera utilisée pour déterminer la répartition du champ électrique induit dans le corps lors de son exposition à des champs radio-fréquences ou micro-ondes (c). Le réglage des sources des applicateurs (module et phase) mais également le positionnement des applicateurs et le choix de l'applicateur peuvent être alors réalisés (d) selon la précédente modélisation (c) dans le cadre d'un traitement par hyperthermie.

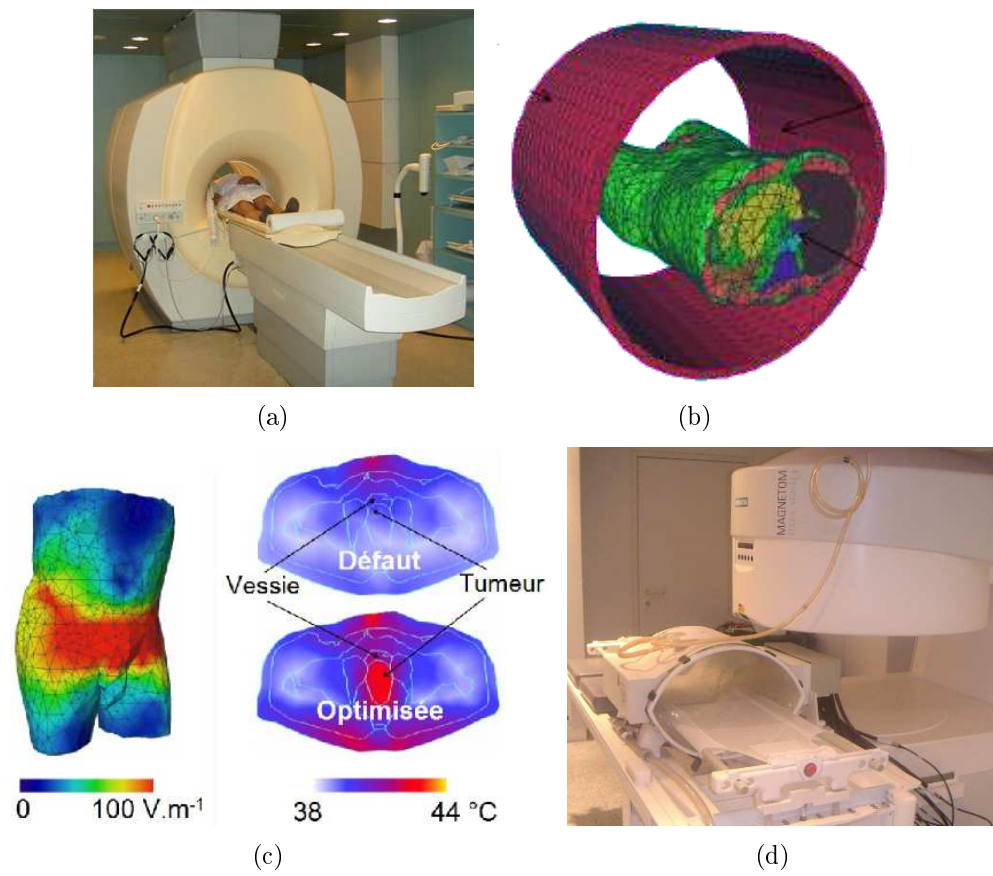


FIG. 1.5 – Processus de traitement par hyperthermie : (a) examen IRM du patient (b) segmentation et modélisation 3D de l'image du patient (c) simulation pour la planification du traitement (d) dispositif d'hyperthermie pour le traitement.

Équations régissant la propagation et l'énergie des ondes électromagnétique et la distribution thermique

2.1 Équations de Maxwell

Toute installation électrique peut créer dans son voisinage un champ électrique, un champ magnétique ou un champ électromagnétique, combinaison des deux, champs qui se propagent dans l'espace sous forme d'onde non ionisante. Ces champs se caractérisent par leur fréquence (exprimée en hertz, (Hz)) ou leur longueur d'onde (en mètre, (m)). Une Onde Electro-Magnétique (OEM) est l'association d'un champ électrique périodique sinusoïdal, $\mathbf{E}$, et d'un champ magnétique, $\mathbf{H}$, sinusoïdal de même période, perpendiculaire en tout point.

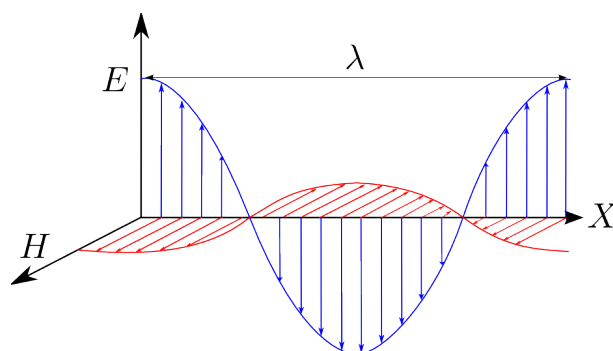


FIG. 2.1 – Représentation d'une onde électromagnétique.

Les équations de Maxwell représentent les bases de l'électromagnétisme. Ces équations découlent de l'utilisation de différents théorèmes (Gauss, Ampère, Faraday) qui régissaient l'électromagnétisme. Maxwell les a réunis sous forme d'équations intégrales. Elles permettent de décrire les évolutions spatio-temporelles du champ électrique et du champ magnétique. La forme générale des équations de Maxwell sous leur forme différentielle est la suivante :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_e, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{J}_m \quad (2.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \quad (2.2)$$

où $\mathbf{E}$ est le champ électrique (V/m),
 $\mathbf{D}$ est l'induction électrique (C/m^2),
 $\mathbf{B}$ est l'induction magnétique (T),
 $\mathbf{H}$ représente le champ magnétique (A/m),
 $\mathbf{J}_e$ est la densité du courant électrique (A/m^2),
 $\mathbf{J}_m$ est la densité du courant magnétique,
 q_e et q_m représentent respectivement la densité de charge électrique (C/m^3) et magnétique.

Une onde électromagnétique et un milieu interagissent par l'intermédiaire de trois paramètres : la conductivité σ , la permittivité électrique ϵ et la perméabilité magnétique μ . A ces équations, il est donc nécessaire d'ajouter les lois de comportement caractérisant les différents milieux. Dans le cas de milieux linéaires, ces relations s'expriment ainsi :

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad (2.3)$$

avec ϵ la permittivité (F/m),
 μ la perméabilité (H/m),
et σ la conductivité (S/m).

En régime harmonique de pulsation ω , la variation des champs électromagnétiques en fonction du temps est sinusoïdale, $\frac{\partial}{\partial t}$ est alors remplacé par $j\omega$.

Les équations de Maxwell deviennent :

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_e, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{J}_m$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = q_m \quad (2.4)$$

Dans le contexte spécifique des problèmes de dosimétrie numérique, la perméabilité μ est considérée comme constante et égale à la perméabilité du vide. Nous

sommes alors dans le vide ou en espace libre. En l'absence de charge et de courant, les équations de Maxwell prennent la forme simplifiée suivante :

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}_e, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0\end{aligned}\tag{2.5}$$

A partir de cette simplification, on obtient l'équation vectorielle des ondes en champ électrique :

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \omega^2\mu_0\epsilon\mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{J}_e \\ \nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} &= -j\omega\mu_0\mathbf{J}_e\end{aligned}\tag{2.6}$$

avec

$$k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon\tag{2.7}$$

où k représente la constante de propagation du champ électromagnétique relative à un milieu.

Pour établir le rapport entre les effets thermiques et l'exposition à un rayonnement électromagnétique, le DAS a été défini. Il représente la densité de puissance dissipée par unité de masse de tissus. Le DAS peut être calculé grâce au champ électrique (2.8) ou par le biais de la température (2.9). Les mesures expérimentales avec des sondes restent difficiles. Une alternative numérique peut être envisagée pour obtenir cette information. Deux types de DAS sont à considérer :

- le DAS corps entier, moyenné sur la totalité du corps.
- le DAS localisé, moyenné sur 10 grammes.

Le DAS est un paramètre significatif en ce qui concerne :

- les comparaisons entre les niveaux d'exposition et des effets biologiques.
- la détermination des normes d'exposition.

La recommandation européenne qui sert de référence stipule que la valeur maximale du DAS intégré dans 10 g de tissu ne doit pas excéder 2 W/kg. La norme américaine fixe la valeur maximale du DAS intégré dans 1 g de tissu à 1,6 W/kg.

Le DAS est déterminé par l'intermédiaire du champ électrique $\mathbf{E}$:

$$DAS = \frac{1}{2} \frac{\sigma |\mathbf{E}|^2}{\rho}\tag{2.8}$$

ou soit à partir de la température :

$$DAS = c_t \frac{\partial T}{\partial t}\tag{2.9}$$

où σ est la conductivité électrique du tissu (S/m), et ρ sa masse volumique (kg/m³). c_t est la chaleur spécifique (J/(kg.°C)), T , la température (°C) et t est le temps (s). Dans [Gabriel 96], les propriétés électromagnétiques du corps humain sont décrites.

2.2 Équation de Pennes

L'élévation de température générée par les ondes électromagnétiques peut être calculée par l'équation définie par Pennes (BHTE : *Bio Heat Transfert Equation*). Cette équation permet d'obtenir la réponse thermique des tissus biologiques perfusés soumis à un apport d'énergie externe [Pennes 48].

2.2.1 Bilan thermique du corps humain

Le transport de l'énergie thermique dans les tissus vivant est un processus complexe faisant intervenir des phénomènes multiples incluant la convection, la conduction, le métabolisme basal et les changements de phase qui sont les transitions d'une substance d'une phase vers une autre. Cependant on peut considérer la thermorégulation comme l'équilibre des deux phénomènes : la thermo-genèse (production de chaleur) et la thermolyse (perte de chaleur). Ces deux phénomènes vont dépendre de divers paramètres : variation des conditions extérieures, situation physiopathologiques (jeûne, exercice physique, présence d'agents infectieux ...).

Le maintien de la vie au niveau cellulaire, le fonctionnement des différents organes et l'activité musculaire nécessitent une dépense d'énergie permanente. Cette énergie provient de la transformation bio-chimique. Elle est transformée en chaleur d'une part et en travail d'autre part. A l'intérieur du corps humain, le sang assure la répartition de la chaleur et l'homogénéité de la température au centre du corps. Un gradient de température s'établit entre le centre du corps et la surface de la peau. La chaleur produite est alors échangée avec l'environnement par divers modes de transfert de chaleur, qui constitueront les conditions aux limites de notre modèle.

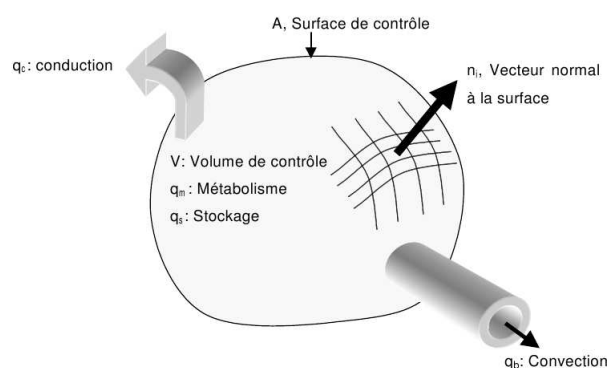


FIG. 2.2 – Illustration du volume de contrôle d'un tissu vivant modélisant les mécanismes de transferts de chaleur et le débit sanguin (source : [Roussel 99]).

2.2.2 Définition des échanges thermiques dans le corps humain

Les échanges thermiques résultent de quatre mécanismes :

- la génération d'énergie thermique par le métabolisme cellulaire,
- le stockage d'énergie thermique par le tissu lors des régimes thermiques transitoires,
- le transfert d'énergie thermique par conduction,
- le transfert d'énergie thermique par convection, réalisé par la perfusion tissulaire.

Les échanges thermiques peuvent être visualisés en considérant un volume de contrôle représentatif montré dans la figure 2.2.

Production métabolique

La puissance thermique métabolique totale Q_m (W) est déterminée par la sommation sur le volume témoin V (m^3) de la production métabolique volumique :

$$Q_m = \int_v \rho_t q_m . d_v \quad (2.10)$$

avec ρ_t , la masse volumique des tissus (kg/m^3) et q_m , la production métabolique massique. Les valeurs usuelles dans la littérature [Foster 04] pour un homme au repos sont de l'ordre du Watt par kilogramme.

Énergie thermique stockée au sein du tissu

L'énergie thermique stockée est déterminée par la sommation sur le volume de la capacité thermique intrinsèque. Ramenée par unité de temps, cette énergie est relative à une puissance $\dot{S}$ (W).

$$\dot{S} = \int_v \rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} . d_v \quad (2.11)$$

où c_t est la chaleur spécifique du tissu ($J/(kg \cdot ^\circ C)$).

Echange thermique par conduction

La puissance thermique transférée dans les tissus par conduction $\dot{K}$ (W) est déterminée par sommation du vecteur de densité du flux de chaleur sur la surface d'échange S du volume témoin V , avec pour vecteur normal $\vec{n}$.

$$\dot{K} = \int_S k_t \nabla T . \vec{n} . d_s \quad (2.12)$$

avec k_t , la conductivité thermique des tissus ($W/m \cdot ^\circ C$)).

En utilisant le théorème d'Ostrogradsky, on obtient :

$$\dot{K} = \int_v \nabla(k_t \nabla T) \cdot d_v \quad (2.13)$$

On considère k_t comme constante dans tout le volume. On considère que les tissus sont homogènes et isotropes. On peut ainsi écrire :

$$\dot{K} = \nabla \cdot (k_t \nabla T) \quad (2.14)$$

Transfert thermique par convection sanguine

La difficulté principale dans le cadre de la modélisation thermique réside dans la prise en compte correcte du phénomène de thermo-régulation qui compense au moins partiellement l'hyperthermie provoquée par les ondes électromagnétiques. Idéalement, une modélisation précise de ce phénomène nécessiterait une connaissance de l'écoulement sanguin qui irrigue les tissus. En pratique, la formulation la plus utilisée, a été proposée par H.H. Pennes [Pennes 48]. Elle énonce que la quantité de chaleur volumique quittant le volume témoin par unité de temps est égale à la chaleur du contenu artériel moins la chaleur du contenu veineux évacuée par le débit sanguin local. La puissance thermique $\dot{B}$ (W) évacuée par l'ensemble de la vascularisation est donnée par :

$$\dot{B} = \int_v c_b \omega_b (T - T_a) \cdot d_v \quad (2.15)$$

où ω_b est le débit sanguin ($kg/(m^3.s)$),
 C_b est la chaleur spécifique du sang ($J/(kg.^{\circ}C)$),
 T_a est la température des artères ($^{\circ}C$).

Puissance électromagnétique

Q_{em} est le terme prenant en compte la chaleur produite par le champ électrique E . Elle vaut :

$$Q_{em} = \int_v DAS \cdot \rho_t \cdot d_v \quad (2.16)$$

2.2.3 Équation de la biochaleur

Les termes vu précédemment sont rassemblés dans l'équation de la chaleur, appliqués au tissu, appelé équation de Pennes ou de biochaleur, exprimée ici en W :

$$\rho_t c_t \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k_t \nabla T) - C_b \omega_b (T - T_a) + Q_{em} + Q_m \quad (2.17)$$

Pour ces études, chaque milieu est caractérisé par des grandeurs physiques qui lui sont propres comme la permittivité ϵ ($A.s.V^{-1}.m^{-1}$), la conductivité électrique σ (S/m), la perméabilité μ_t ($V.s.A^{-1}.m^{-1}$), la densité volumique ρ (kg/m^3), la conductivité thermique λ_t ($W.m^{-1}.K^{-1}$) et la chaleur spécifique C_t ($J.K^{-1}.kg^{-1}$).

Chapitre 3

Méthode de résolution des E.D.P

A l'exception des milieux de géométrie très simple et sous certaines hypothèses, il n'existe pas de solution analytique des équations aux dérivées partielles que nous venons de voir. On a alors recours à une méthode numérique.

3.1 Méthode des différences finies

La méthode des différences finies fait partie des méthodes qui se sont imposées de par sa robustesse et sa facilité d'implémentation. Le concept de base pour utiliser cette méthode en électromagnétisme est de trouver une approximation algébrique des équations de Maxwell, sous leur forme différentielle, au moyen d'un développement en série de Taylor tronqué en fonction du degré de précision souhaité. Elle consiste à résoudre les équations de Maxwell en discrétisant le domaine étudié par apposition d'une grille de points dont la finesse permet une bonne approximation du contour du domaine étudié. En chaque point de la grille, une approximation des dérivées à l'aide des différences finies est effectuée (approximation à l'ordre 2 dans le développement de Taylor), permettant une résolution locale des équations de Maxwell. Cette méthode n'est toutefois bien adaptée qu'à des domaines à géométrie simple (rectangulaires par exemple), et ne s'adapte que très difficilement à des domaines à géométrie complexe (nécessite alors un nombre d'élément élevé pour discrétiser le domaine d'étude). Pour ce type de domaine, la méthode des éléments finis semble naturellement plus adaptée et plus maniable. La figure 3.1 montre une coupe tomographique d'un patient (a) et les différents modes de représentation géométrique utilisés pour les différences finies (b) et pour les éléments finis (c). La représentation de la frontière est meilleur dans le dernier cas pour ce type de donné et ne subit pas d'effet "marche d'escalier".

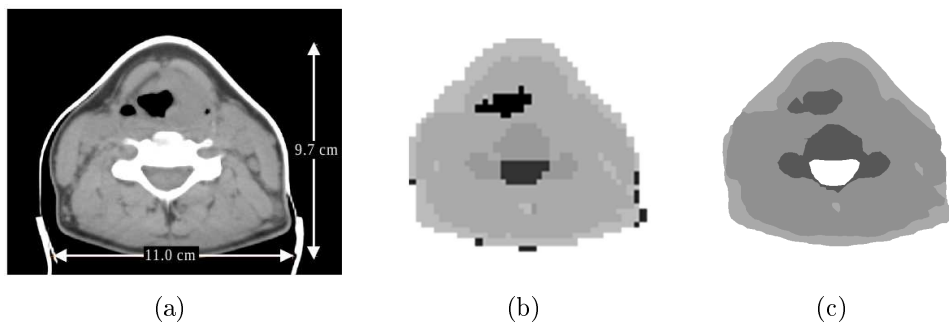


FIG. 3.1 – Illustration des éléments discrets dans le cadre de l'imagerie médicale pour les différences finies et les éléments finis : (a) coupe tomographique d'un patient représentation discrétisée pour les différences finies (b) et pour les éléments finis (c). La représentation de la frontière est meilleure dans le dernier cas et ne subit pas d'effet "marche d'escalier".

3.2 Méthode des éléments finis

La Méthode des Eléments Finis (MEF ou FEM : *Finite Element Method*) est basée sur une formulation intégrale des équations aux dérivées partielles. Cette méthode consiste à découper le domaine étudié en sous-domaines appelés éléments finis, sur lesquels on approche localement la fonction inconnue recherchée par interpolation. Cette méthode possède de nombreux avantages et, en particulier, les suivants :

- Elle est adaptée à la résolution numérique des équations aux dérivées partielles,
- Elle permet d'affecter des propriétés différentes à chaque élément maillé,
- Elle permet d'avoir une résolution géométrique adaptée aux problèmes,
- Elle prend en compte avec une bonne précision les frontières anatomiques du corps humain.

Le fondement de cette méthode est la méthode de Galerkin qui est un cas particulier de la méthode des résidus pondérés. Cette méthode permet une adaptation à un grand nombre de situations, car, non seulement la taille des éléments, mais aussi leur forme et leur degré d'approximation, peuvent être modifiés. Les bases mathématiques de cette méthode sont relativement complexes. Elle repose sur la formulation variationnelle des équations aux dérivées partielles vues précédemment et consiste à chercher une solution approchée s_m des problèmes (3.9) et (3.15) dans un sous-espace de dimension finie de Ω . L'approximation s_m de s sera alors d'autant meilleure que l'espace de discrétisation Ω_m sera proche de l'espace Ω . Notre problème se réécrit alors naturellement :

Trouver $s_m \in \Omega_m$ tel que

$$a(s_m, e_m) = l(e_m) \quad \forall e_m \in \Omega_m \quad (3.1)$$

où Ω_m est un sous-espace vectoriel de Ω de dimension finie N . Il n'est alors pas nécessaire de résoudre le problème pour tout $e_m \in \Omega_m$ mais uniquement sur une base

$(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ de Ω_m . Il reste alors à remarquer qu'un élément $s_m \in \Omega_m$ s'écrit sous la forme $s_m(x) = \sum_{i=1}^N s_i \alpha_i(x)$ et d'utiliser la linéarité de l'opérateur a par rapport à sa première composante pour formaliser le problème :

Trouver $(s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{i=1}^N s_i a(\alpha_i, \alpha_j) = l(\alpha_j) \quad \forall j = 1, \dots, N \quad (3.2)$$

Ainsi le problème à résoudre est un système linéaire de dimension $N \times N$:

$$AX = B \quad (3.3)$$

où $A = (a(\alpha_i, \alpha_j))$, $1 \leq i, j \leq N$, B est le vecteur colonne de composantes $l(\alpha_i)$ et X est le vecteur colonne contenant les coefficients s_i de s_m dans la base $(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ de Ω_m . Il reste maintenant à expliciter la construction des espaces Ω_m inclus dans Ω . C'est à l'aide d'éléments finis que l'on construit ces espaces fonctionnels.

3.2.1 Définition d'un élément fini

En pratique, il est très rare de pouvoir représenter correctement la solution recherchée dans un domaine à l'aide d'un polynôme. On a alors recours à une discrétisation du domaine étudié en sous-domaines de forme géométrique simple (segments de droite, triangles, quadrangles, tétraèdres, etc.) et de dimension finie : les éléments finis. La solution recherchée est alors calculée indépendamment sur chaque élément. Le résultat de cette discrétisation constitue ce que l'on appelle le maillage du domaine d'étude. Nous établissons des équations discrètes qui approchent les équations à résoudre. Les inconnues de ces équations discrètes sont les valeurs de la solution. Dans notre cas, sur les nœuds en thermique, sur les arêtes en électromagnétisme.

3.2.2 Formulation variationnelle du problème

La résolution des équations de Maxwell et de Pennes par la méthode des éléments finis passe par l'obtention d'une formulation variationnelle de ces équations. En appliquant la méthode de Galerkin à l'équation (2.6), on obtient :

$$\int_v W[\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E}].dv = -j\omega\mu_0 \int_v W \mathbf{J}_e.dv \quad (3.4)$$

où W est la fonction de poids.

Puis en utilisant l'identité vectorielle suivante :

$$\nabla \times (\Psi \mathbf{A}) = \nabla \Psi \times \mathbf{A} + \Psi \nabla \times \mathbf{A} \Rightarrow \Psi \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (\Psi \mathbf{A}) - \nabla \Psi \times \mathbf{A} \quad (3.5)$$

avec $\Psi = W$ et $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{E}$, et le théorème de Stokes :

$$\int_v \nabla \times W \times \nabla \times \mathbf{E}.dv = \int_s n \times W \times \nabla \times \mathbf{E}.ds \quad (3.6)$$

L'utilisation de la méthode des éléments finis pour modéliser un problème électromagnétique en milieu ouvert nécessite la troncature du domaine infini par une frontière fictive. La prise en compte du domaine extérieur est alors réalisé à l'aide des Conditions aux Limites Absorbantes (CLA) [Bayliss 80]. Le couplage des CLA avec la méthode des éléments finis consiste à substituer le terme surfacique de l'équation (3.6) par :

$$n \times \nabla \times \mathbf{E} = g_{ABC}(\mathbf{E}) = jk_0 \mathbf{E}_t \quad (3.7)$$

où $\mathbf{E}_t$ représente le champ tangentiel et avec $k_0 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$.

La formulation élément finis pour notre problème électromagnétique est ainsi obtenue :

$$-\int_v \nabla W \times \nabla \times \mathbf{E}.dv - \int_v W k^2 \mathbf{E}.dv + \int_{S_{ext}} g_{ABC}(\mathbf{E}).ds = -j\omega\mu_0 \int_{\tau} W \mathbf{J}_e.dv \quad (3.8)$$

Nous avons alors un système différentiel du type :

$$[A].\{X\} = \{B\} \quad (3.9)$$

Nous venons d'établir la formulation variationnelle pour le problème électromagnétique. La solution de ce problème permet de déterminer le DAS à partir de $\mathbf{E}$ et de l'injecter comme terme source dans le problème thermique. Nous déterminons à présent la formulation variationnelle pour le problème thermique. En appliquant la méthode de Galerkin à l'équation de Pennes 2.17, on obtient par intégration sur le volume de contrôle à l'aide de la fonction d'interpolation Φ_i :

$$\begin{aligned} & \int_v \nabla(\lambda_t \nabla T) \Phi_i.dv - \int_v C_b \omega_b (T - T_a) \Phi_i.dv - \\ & \int_v \rho_t C_t \frac{\partial T}{\partial t} \Phi_i.dv + \int_v Q_e m \Phi.dv + \int_v Q_m \Phi_i.dv = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Après l'intégration par partie du premier terme de l'équation, on écrit finalement :

$$\begin{aligned} & \int_v \lambda_t \nabla T \Phi_i.dv + \int_v C_b \omega_b (T - T_a) \Phi_i.dv - \int_v \rho_t C_t \frac{\partial T}{\partial t} \Phi_i.dv + \\ & \int_v Q_e m \Phi.dv + \int_v Q_m \Phi_i.dv = \int_s \lambda_t \vec{\nabla} T . \vec{n} \Phi_i.ds \end{aligned} \quad (3.11)$$

On exprime alors la température à l'aide d'une deuxième fonction d'interpolation Φ_j :

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= \sum_{j=1}^N T_j \Phi_j(x, y, z) \\ \frac{\partial T}{\partial t}(x, y, z) &= \sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial t} \Phi_j(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Il reste alors à remplacer le terme représentant le transfert thermique :

$$\begin{aligned} \int_v \nabla \left(\sum_{j=1}^N T_j \Phi_j \right) \cdot \nabla \Phi_i dv + \int_v C_b \omega_b \cdot \left(\sum_{j=1}^N T_j \Phi_j \right) \cdot \Phi_i dv + \int_v \rho_t C_t \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial T_j}{\partial t} \Phi_j \right) \cdot \Phi_i dv = \\ \int_v Q_m \Phi_i dv + \int_v Q_{em} \Phi_i dv + \int_V C_b \omega_b T_a \Phi_i dv + \int_s \lambda_t \vec{\nabla} \left(\sum_{j=1}^N T_j \Phi_j \right) \cdot \vec{n} \Phi_i ds \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nous avons alors un système différentiel pour le problème thermique du type :

$$[A] \cdot \{T\} + [B] \cdot \{\dot{T}\} = \{C\} \quad (3.14)$$

avec pour composantes :

$$\begin{cases} A_{i,j} = \int_v \lambda_t \cdot \nabla \Phi_j \cdot \nabla \Phi_i \cdot dv + \int_v C_b \omega_b \cdot \Phi_j \Phi_i dv \\ B_{i,j} = \int_v \rho_t C_t \cdot \Phi_j \Phi_i dv \\ C_i = \int_v (C_b \omega_b T_a + Q_{em} + Q_m) \cdot \Phi_i dv + \int_s \lambda_t \vec{\nabla} \left(\sum_{j=1}^N T_j \Phi_j \right) \cdot \vec{n} \Phi_i ds \end{cases} \quad (3.15)$$

où $[A]$ (W/K), la matrice de conductivité thermique, $[B]$ (J/K), la matrice de capacité thermique, $\{C\}$, le vecteur de flux nodaux, $\{T\}$, le vecteur de températures nodales.

3.2.3 Résolution du système d'équations aux dérivées partielles

La méthode du Gradient Conjugué (GC) est un procédé itératif de résolution des problèmes linéaires de la forme $Ax = b$, où A est une matrice de taille $n \times n$ symétrique définie positive ($A^T = A$ et $x^T Ax > 0$, pour tout vecteur $x \in \mathbf{R}^n$ non nul) et b un vecteur de taille n . On se ramène à la résolution d'un problème de minimisation du résidu $r = Ax - b$ dont la solution vérifie également $Ax = b$.

Il arrive parfois que le conditionnement $cond(A) = |\lambda_{max}/\lambda_{min}|$ de telles matrices soit beaucoup trop élevé (valeurs propres trop faibles). La technique du préconditionnement consiste à introduire une matrice régulière $C \in M_n(\mathbf{R})$ et de résoudre le système :

$$C^{-1}Ax = C^{-1}b \Leftrightarrow Ax = b \quad (3.16)$$

tel que la nouvelle matrice $C^{-1}A$ ait un meilleur conditionnement que A , puis appliquer la méthode de résolution au nouveau système $C^{-1}Ax = C^{-1}b$. On cherchera pour C une bonne approximation de A , facile à inverser [Gardan 87]. Préconditionner la matrice permet d'accélérer la convergence mais chaque itération est alors plus coûteuse puisqu'elle implique la résolution d'une opération supplémentaire :

$$g = C^{-1} \times r \quad (3.17)$$

L'intérêt du préconditionnement réside dans le fait que si C est bien choisie, $C^{-1}A$ approxime la matrice unité, et le système devient :

$$x \approx C^{-1}b \quad (3.18)$$

La matrice de préconditionnement C doit être facile à construire, à stocker et à inverser. Il existe différentes méthodes de préconditionnement dans la littérature. Dans le paragraphe suivant, nous expliquons celles utilisées dans le cadre de nos simulations.

Préconditionnement diagonal

Le préconditionnement diagonal consiste à prendre pour matrice C la diagonale de A :

$$C_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.19)$$

Les avantages d'un tel préconditionneur sont la facilité de son implémentation et le peu d'espace mémoire qu'il occupe. Cependant, il existe des préconditionneurs qui apportent une plus grande amélioration de la résolution du système linéaire. C'est le cas du préconditionnement SSOR.

Préconditionnement SSOR (Symmetric Successive Over Relaxation)

On décompose la matrice A comme suit :

$$A = L + D + L^T \quad (3.20)$$

où L est la partie triangulaire à diagonale nulle de la matrice A et D représente la diagonale de A . Le préconditionnement SSOR consiste alors à prendre pour matrice :

$$C = \left(\frac{D}{\omega} + L\right) \frac{\omega}{2 - \omega} D^{-1} \left(\frac{D}{\omega} + L^T\right) \quad (3.21)$$

où ω est un paramètre de relaxation. Une condition nécessaire et suffisante pour que la convergence du GC préconditionné soit assuré est de fixer le paramètre ω dans l'intervalle $]0, 2[$.

Discussion

Les travaux menés ces dernières années dans le domaine de la simulation numérique ont largement tiré profit de l'augmentation des capacités de calcul et de stockage des ordinateurs. Néanmoins, les modèles numériques utilisés à cette fin reposent encore majoritairement sur une représentation géométrique insatisfaisante du corps humain en termes de résolution, de variabilité et de précision. Dans le cas des différences finies, le principal inconvénient est que ni les contours des organes, ni leur grande hétérogénéité du point de vue de leurs caractéristiques électromagnétiques et thermiques ne sont correctement pris en compte. De plus, il n'est souvent pas possible d'affiner la représentation dans certaines régions anatomiques jugées plus importantes sans entraîner une dégradation importante de la précision de la solution recherchée. De nombreuses publications traitent la modélisation des phénomènes électromagnétiques dans le corps humain [Shaw 91, Shellock 00, Siauve 05, Cepeda 08]. Nous utilisons la MEF pour résoudre les équations électromagnétique (2.6) et thermique (2.17). Il est donc nécessaire, dans une première étape, de générer un maillage EF du corps humain prenant en compte ses divers organes et sa structure complexe.

II Génération de maillages volumiques

Résumé

Dans le cas particulier des géométries simples, une solution analytique du problème du calcul de l'élévation de la température induite par un champ électromagnétique peut être trouvée. Lorsque le domaine d'étude est trop complexe, la simulation numérique permet de trouver une solution approchée. La première étape, dans la mise en œuvre d'une simulation numérique, est la définition du domaine d'étude.

Avec le développement de systèmes d'imagerie médicale, il est maintenant possible de collecter des images 3D (voxels) des organes quasiment en temps réel. Ces dernières années, de nombreux algorithmes de génération de maillages d'isosurfaces de ces volumes ont été proposés. La génération d'un maillage volumique, directement à partir des images de voxels, n'a jamais été explorée. La plupart des méthodes de génération de maillages volumiques utilisent une représentation surfacique initiale. Ces méthodes nécessitent des techniques d'optimisations de la qualité du maillage volumique.

Cette seconde partie est consacrée à la génération de maillages volumiques. Le quatrième chapitre porte sur des généralités en géométrie discrète et sur les images numériques. Le cinquième chapitre présentera un état de l'art de la construction de maillages volumiques. Le sixième chapitre proposera notre méthode de génération d'un maillage tétraédrique, directement à partir des images de voxels segmentées.

Géométrie discrète et images numériques

4.1 Méthodes d'acquisition

Il existe plusieurs techniques d'acquisition de données 3D, suivant le domaine d'application. On distingue deux grandes familles. Celles permettant l'acquisition du volume d'un objet, et celles permettant d'acquérir uniquement la surface de celui-ci. L'acquisition volumique est celle de l'imagerie médicale, du contrôle industriel non destructif et des contrôles de sécurité des transports de marchandises. Ces techniques sont dites "tomographiques". L'approche par une acquisition de tranches (coupes) successives de l'objet est la méthode la plus répandue. Par exemple, la tomodensitométrie par rayons X reconstruit une tranche de l'objet par mesure de l'atténuation du faisceau incident suivant plusieurs angles et positions. C'est généralement le cas des scanners de l'imagerie médicale (figure 4.1 (a)). En rayon X, on peut obtenir une vraie reconstruction 3D à l'aide d'un faisceau conique qui permet l'acquisition d'une image pour chaque position angulaire [Feldkamp 84]. Les algorithmes de reconstruction tomographique construisent un volume de cubes élémentaires affectés d'une valeur numérique : les voxels. Le voxel est aux images 3D ce que le pixel est aux images 2D.

L'acquisition des surfaces d'objets sont généralement obtenues à l'aide de scanners lasers (figure 4.1 (b)). Ils permettent de reproduire l'objet sous forme d'un nuage de points dans l'espace. Cette représentation est difficilement exploitable. Différentes approches sont utilisées pour obtenir des maillages polygonaux qui sont plus faciles à manipuler. Ainsi, cette technique donne lieu à des maillages surfaciques.

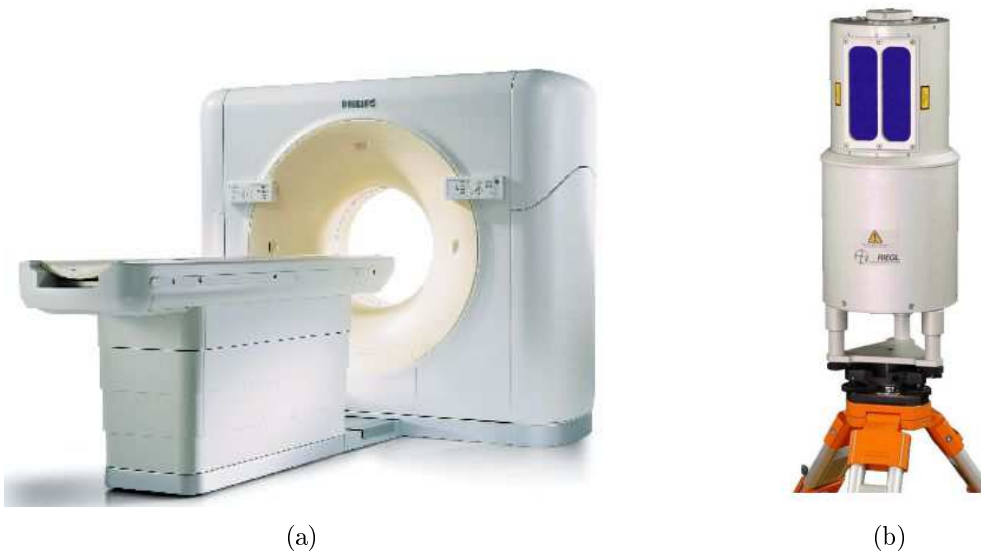


FIG. 4.1 – Illustration de scanner-ct et capteur laser commerciaux.

4.2 Modèles de discrétisation

Il est possible de représenter un objet sous différentes formes (figure 4.2), qui sont directement liées aux techniques d’acquisition décrites ci-dessus. Cette représentation doit refléter les caractéristiques géométriques de l’objet. Il existe un très grand nombre de représentations mathématiques et informatiques. En trois dimensions, les domaines à mailler sont généralement des volumes définis par rapport à leurs frontières. Ces frontières pouvant être définies de façon analytique (isosurface) ou discrète (maillage, image 2D et 3D).

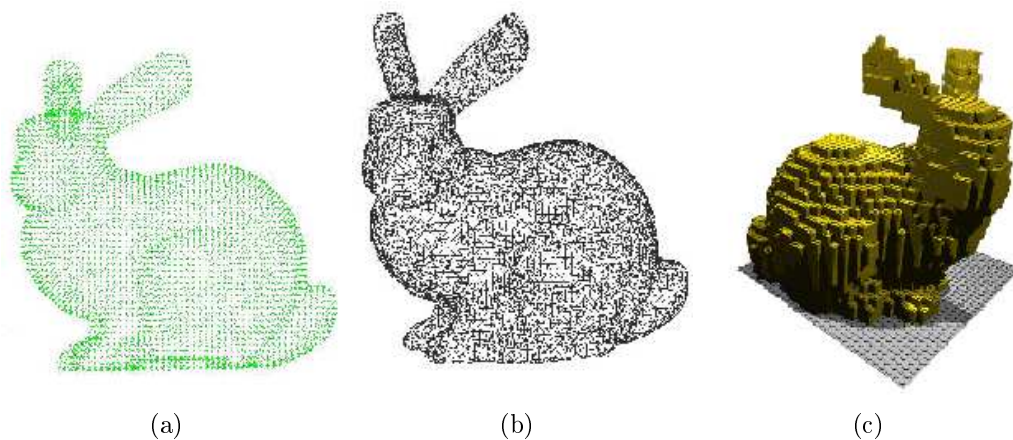


FIG. 4.2 – Diverses représentations du modèle “Stanford Bunny” : (a) nuage de points (b) maillage triangulaire (c) volumique (voxels) (Illustration de Andrew P. Van Pernis de l’université de Clemson).

4.2.1 Représentation analytique

Dans une représentation analytique, le domaine frontière est défini à l'aide d'une ou plusieurs isosurfaces. Ce type de représentation géométrique est une surface définie par une équation implicite du type $f(p) = c$. Les modèles implicites permettent de déterminer si un point $p(x, y, z)$ appartient à la surface et à l'intérieur ou à l'extérieur en regardant le signe de $f(p)$. De plus, la fonction f permet de calculer une approximation de la distance d'un point de l'espace à la surface. De nombreuses méthodes de reconstruction ont été proposées permettant d'obtenir une surface 3D interpolant un ensemble de points [Amenta 98a, Amenta 98b, Gelas 06]. Dans le cas de la reconstruction à partir de données discrètes, telles qu'un ensemble de contours obtenus par segmentation de coupes CT, les modèles implicites ne sont pas forcément de bons candidats en raison de leur nature continue.

4.2.2 Espace et objets discrets

Dans cette section, nous donnons les définitions et notions de topologie discrète nécessaires à la compréhension de notre approche. Une partie de ces définitions sont issues de [Kovalevsky 89] et [Coeurjolly 07b]. On nomme espace discret en dimension N un pavage régulier de $\mathbb{R}^n$. Si on utilise des polygones réguliers, le nombre de possibilités est restreint : en 2D, trois types de pavés peuvent convenir (figure 4.3 : carré (a), hexagone (b), triangle équilatéral (c)) et un seul en 3D (le cube). Le pavé est positionné par les coordonnées de son centre de gravité, qui peuvent être exprimées dans un repère discret dans $\mathbb{Z}^n$. En 2D, c'est le pavé carré (élément pixelique) qui est le plus souvent utilisé cela étant lié à la géométrie des capteurs et à la facilité de le manipuler et de le stocker.

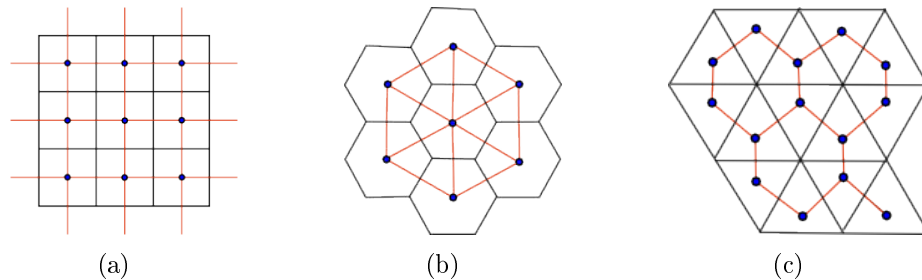


FIG. 4.3 – Représentation de pavages réguliers 2D (inspiré de [Coeurjolly 07b]).

Un pavage peut être modélisé à l'aide d'un complexe cellulaire. La définition d'un complexe cellulaire est la suivante [Kovalevsky 89] :

Définition 4.1. *Un complexe cellulaire $C = (E, B, \dim)$ est un ensemble E d'éléments, appelés cellules, équipées d'une relation binaire irréflexive, antisymétrique et transitive $B \subset E \times E$, appelée relation de frontière ou relation de bord, ainsi qu'une fonction de dimension $\dim : E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\dim(e) < \dim(e')$ pour tous $(e, e') \in B$.*

Dans la figure 4.4, nous pouvons voir différents complexes cellulaires de dimensions 1, 2 et 3.

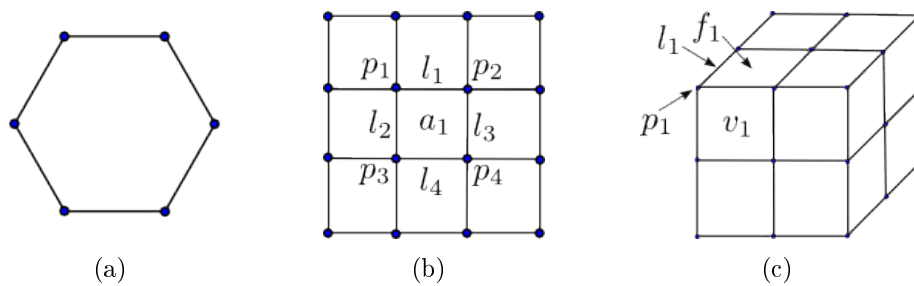


FIG. 4.4 – Représentation de complexes cellulaires de dimensions 1, 2 et 3.

Dans l'objectif de définir une surface discrète, certaines approches utilisent une décomposition cellulaire du pavage de $\mathbb{Z}^n$ (figure 4.5). En 2D, les sommets de chaque polygone du pavage sont les cellules de dimensions 0, ou *pointels*, les arêtes sont les cellules de dimensions 1, ou *lignels*, et enfin l'intérieur (ouvert) du polygone est la cellule de dimension 2, assimilée au pixel. En 3D, de manière analogue, les *pointels* et les *lignels* sont, respectivement, les sommets et les arêtes du cube. Les cellules de dimensions 2 sont appelées *surfels* (face du cube) et la cellule de dimension 3 est le voxel. Ces notions permettent de définir les différents voisinages dans un pavage régulier.

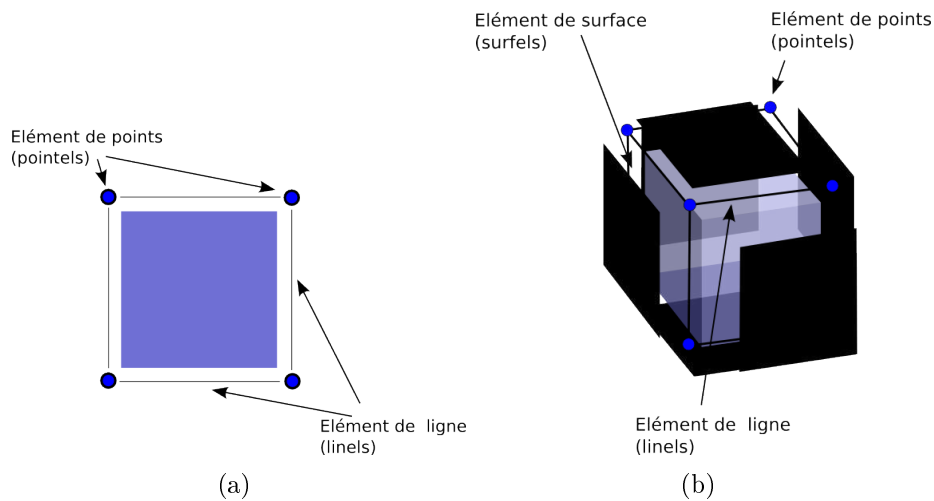


FIG. 4.5 – Décomposition cellulaire d'un pixel et d'un voxel (inspiré de [Coeurjolly 07b]).

En utilisant cette représentation, nous pouvons considérer, non plus des chemins de pixels, mais des chemins ou des voisinages établis, par exemple en 2D, par des ensembles de *pointels* ou de *lignels*. L'intérêt majeur d'utiliser les complexes cellulaires pour modéliser un espace discret réside dans la possibilité de définir une topologie cohérente sur les images discrètes. Dans [Kovalevsky 89], V. Kovalevsky propose une définition des ouverts liée au domaine de l'imagerie qui permet d'induire une topologie sur les images discrètes.

Définition 4.2. Soit un complexe cellulaire $C = (E, B, \dim)$, un sous-ensemble $S \subset E$ est appelé ouvert de C , si pour tout élément $e \in S$, tous les éléments de S qui sont bornés par e sont dans C .

Cette définition des ouverts permet d'utiliser les notions de la topologie standard. Ainsi, la frontière d'un objet est unique et la frontière de son complémentaire est égale à la frontière de l'objet. Cette dernière notion sera utilisée par la suite pour la représentation des frontières de l'espace discret. La figure 4.6 illustre la forme des ouverts de cellules élémentaires de dimension 0,1,2 et 3 dans les complexes cellulaires de dimensions 1, 2 et 3. Kovalevsky a aussi montré que la seule forme possible pour définir une topologie est l'utilisation des complexes cellulaires pour un espace discret.

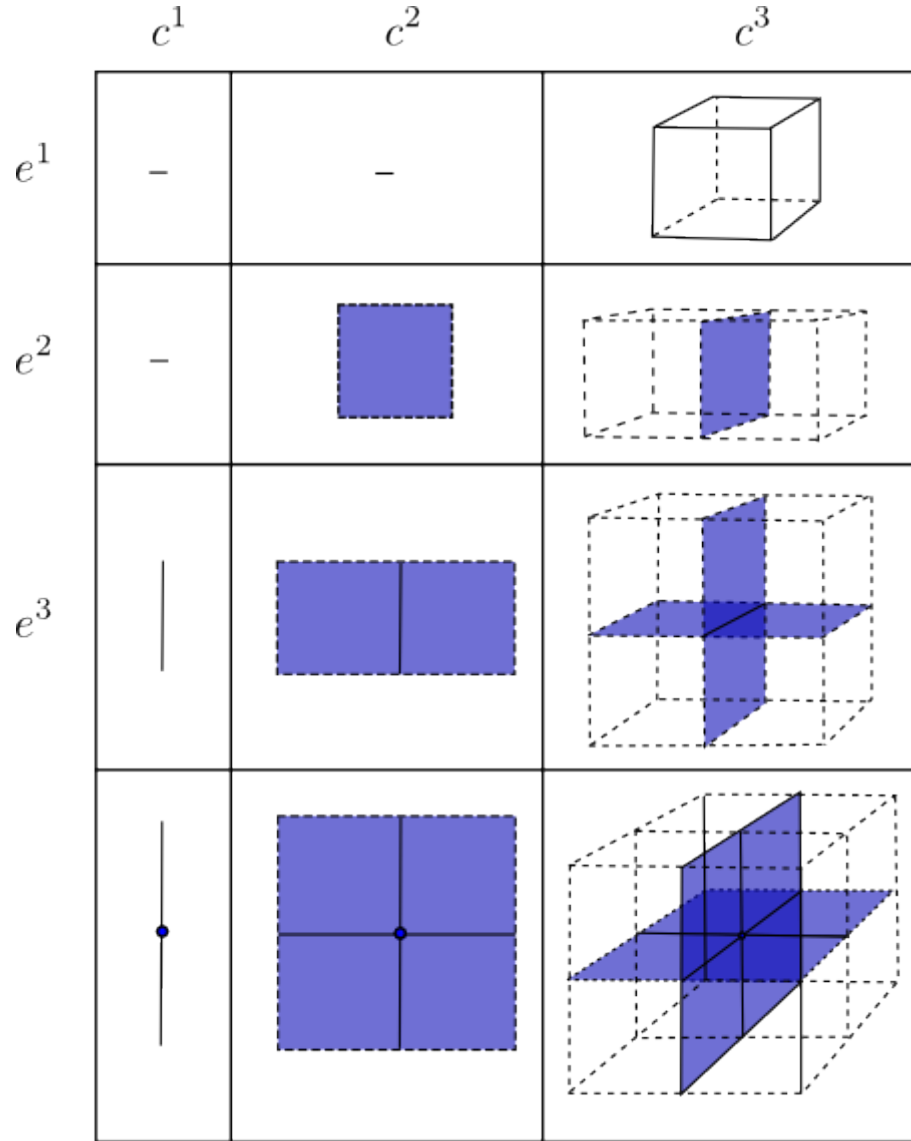


FIG. 4.6 – Illustration de la forme des ouverts pour 0-, 1-, 2- et 3-cellules (e_0, e_1, e_2, e_3) dans des complexes cellulaires de dimensions 1, 2 ou 3 (c_1, c_2, c_3) (inspiré de [Kovalevsky 89]).

4.2.3 Structure et relation de voisinage

Nous introduisons les notions de structure et de relation de voisinage permettant de construire des graphes d'adjacence (de voisinage) qui permettent de savoir si deux éléments discrets sont voisins ou non. Nous considérons par la suite une image segmentée constitué d'éléments pixellique ou un volume discret constitué d'éléments voxelique. Rappelons qu'une image (resp. un volume) segmentée est une image (resp. un volume) où l'on a attribué une étiquette à chaque pixel (resp. à chaque voxel). Les pixels (resp. voxels) qui ont la même étiquette appartiennent à une même région de l'objet discret. Lorsqu'une image (resp. un volume) a été segmentée en régions, nous nous intéressons aux contours discrets (resp. aux surfaces discrètes) de celui-ci. Ces contours vont permettre de structurer les diverses relations topologiques entre les régions et d'obtenir ainsi le maximum d'informations utilisables pour notre processus de génération de maillage.

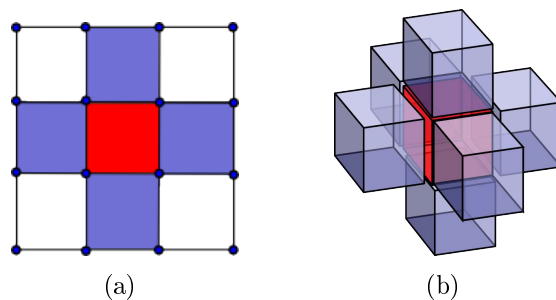


FIG. 4.7 – Illustration de voisinage : (a) 4-voisinage en 2D (b) 8-voisinage en 3D.

Une structure de voisinage sur un ensemble P est une relation $N \subset P \times P$ irréflexive et symétrique. La relation N est dite relation de voisinage et son graphe est le graphe d'adjacence (de voisinage). Nous commençons par introduire la notion de relation de voisinage sur un espace discret 2D constitué de pavés. Le 4-voisinage est défini comme étant la relation d'adjacence par arêtes dans l'espace discret (figure 4.7 (a)).

En 3D, les relations de voisinage sont couramment de 6-, 18- ou 26-voisinage en considérant alors les adjacences, par, respectivement, sommets, arêtes et faces (figure 4.8).

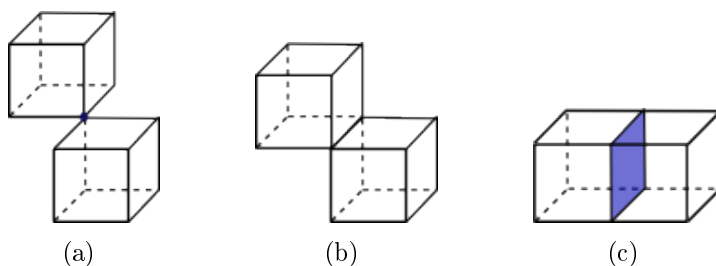


FIG. 4.8 – Illustration des adjacences pour un voxel : (a) par sommets, (b) par arêtes (c) par faces.

On définit un N -voisinage, $n = 6, 18$ ou 26 d'un voxel, l'ensemble des voxels qui lui sont adjacents.

Suivant la définition de l'adjacence, on obtient en 3D les voisinages suivants :

- 6-voisinage : une face en commun ;
- 18-voisinage : au moins une arête en commun ;
- 26-voisinage : au moins un sommet en commun ;

Nous pouvons noter que le domaine discret Ω peut s'écrire par l'union des objets O_i :

$$\Omega = \cup_i O_i \quad (4.1)$$

Une frontière entre deux régions est constituée de l'ensemble des pixels (resp. voxels) de la région A voisins des pixels (resp. voxels) des régions B, C , etc. Nous définissons les frontières du domaine discret par ∂_O :

$$\partial_O = \partial_\Omega \cup [\cup_{i,j} \partial_{O_{i,j}}] \quad (4.2)$$

où ∂_Ω représente la frontière du domaine et $\partial_{O_{i,j}}$, la frontière entre les objets O_i et O_j .

A une image (resp. un volume) est associée un graphe tel que, pour chaque pixel (resp. voxel), un sommet lui est associé et les pixels (resp. voxels) voisins sont connectés par une arête [Kovalevsky 89] (figure 4.9).

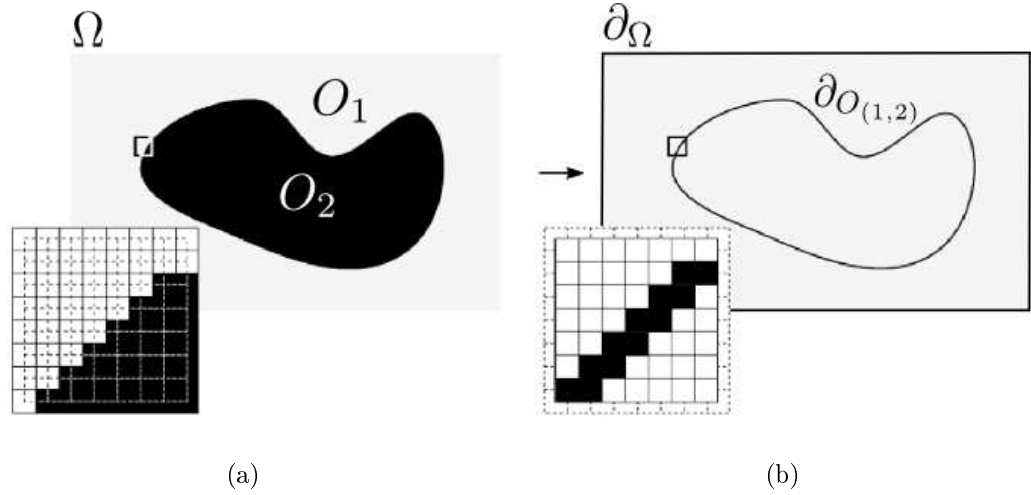


FIG. 4.9 – Représentation du graphe primaire (a) et dual (b)

Ce graphe, dit primaire ou de voisinage, est noté $G = (V, E)$. Où V et E sont, respectivement, l'ensemble des sommets et l'ensemble des arêtes du graphe. Le dual de ce graphe $\bar{G}$ représente les arêtes inter-pixels et les sommets inter-pixels. La notion d'inter-pixel consiste à considérer une image non pas uniquement comme une matrice de pixels, mais comme une subdivision de l'espace (ici 2D) en un ensemble de complexes cellulaires discrets. Un sous-ensemble *pointels*, *lignels* et *surfels* appartenant au graphe dual seront alors des éléments frontières de l'objet défini dans le graphe primaire.

4.3 Reconstruction surfacique de données volumétriques

Dans cette section, nous présentons différentes méthodes pour la reconstruction surfacique de données volumétriques. Les méthodes de reconstruction surfacique permettent de réduire la quantité d'information en modélisant un ensemble de voxels par un ensemble de surfaces. Cet ensemble représente les frontières sous forme d'un ensemble d'éléments entre les différents milieux présents dans le volume discret. Ces méthodes sont utilisées sur des images 3D binaires ou de niveaux de gris, avec une segmentation intégrée par simple seuillage. L'image est considérée comme une grille régulière dont les nœuds sont les valeurs échantillonnées d'un champ scalaire, dénoté $P(x,y,z)$. Ce champ est supposé être proche de l'interpolation trilineaire des valeurs données aux nœuds de la grille. L'utilisateur fournit un paramètre π , appelé iso-valeur (c'est le seuil de segmentation). L'iso-surface de ce champ ou potentiel P est défini comme l'ensemble des points tels que $P(x,y,z) = \pi$. La surface extraite par ces algorithmes, formée de triangles, doit alors approcher au mieux l'iso-surface de ce champ. L'algorithme le plus répandu est le "*Marching-cubes*" [Lorensen 87b]. Il utilise un balayage de l'image par blocs de huit voxels et associe un ou plusieurs triangles à ce bloc. La réunion de tous ces triangles forme une surface triangulée qui correspond à l'iso-surface recherchée. Le pré-calcul d'une table de 14 configurations (figure 4.10) permet d'optimiser l'extraction des triangles au sein de chaque bloc. Le seuil fourni par l'utilisateur définit implicitement l'image binaire. Les niveaux de gris ne sont alors utilisés que pour lisser la surface et extraire les normales par calcul du gradient. Ces algorithmes permettent d'extraire assez rapidement le modèle géométrique d'un volume de données. Ces modèles peuvent être utilisés pour la génération de maillages volumiques.

4.4 Définition d'un maillage

Un maillage est un ensemble de sommets reliés entre eux par des arêtes. Plusieurs caractéristiques les distinguent :

- Si les sommets sont tous situés dans un même plan, le maillage sera 2D. Dans le cas contraire, ce sera un maillage 3D.
- Les éléments du maillage peuvent être de différents degrés. Si tous les éléments sont des triangles, on parlera alors de maillage triangulaire. Si tous les éléments sont des tétraèdres, le maillage est dit tétraédrique.
- La connectivité d'un maillage définit le type de connexions entre ses éléments. Un maillage est **structuré** si sa connexité est fixe et identique pour chaque élément du maillage. Un maillage est **non-structuré** si sa connexité est quelconque.

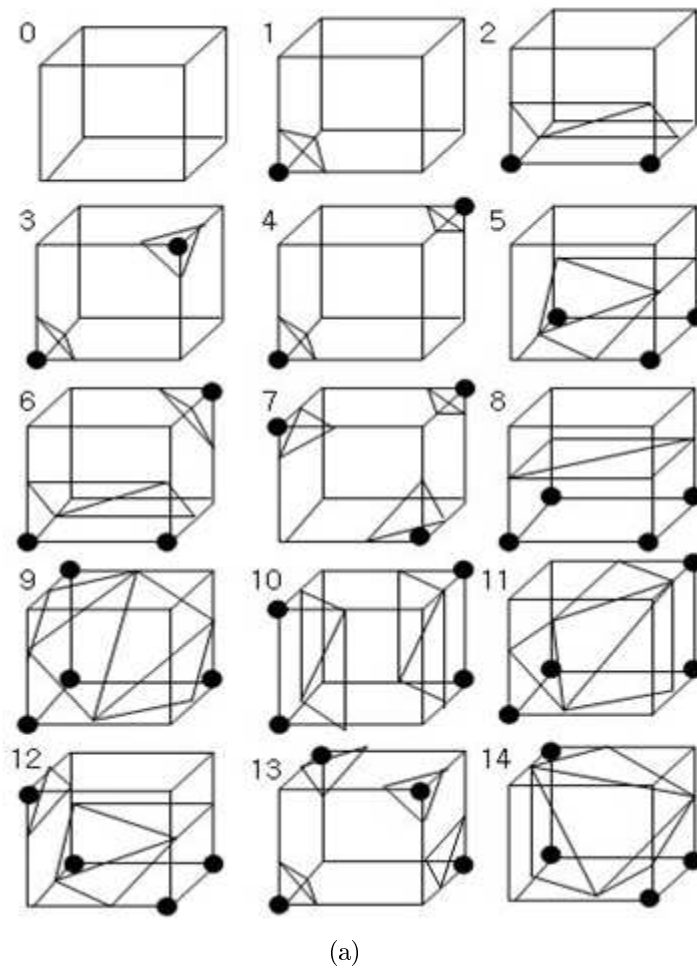


FIG. 4.10 – Table de configuration pour l’algorithme “*Marching-cubes*” [Lorensen 87b].

La représentation d'un maillage contient deux types d'information :

- des informations géométriques : les coordonnées des sommets
- des informations topologiques concernant la connectivité du maillage c'est à dire la description des éléments du maillage, d'où peuvent être déduites toutes les relations de voisinage entre les sommets.

Un maillage tétraédrique possède trois primitives géométriques : sommets, arêtes, triangles et tétraèdres. Ce sont des simplexes de dimension, respectivement 0, 1, 2 et 3 (figure 4.11).

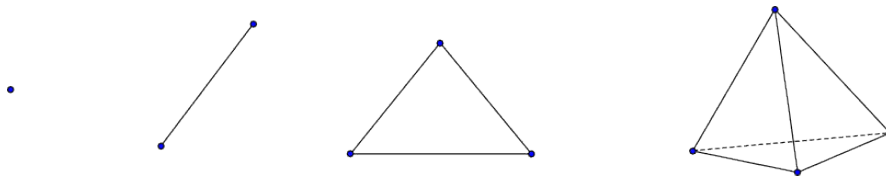


FIG. 4.11 – Primitives géométriques simples : sommet, arête, triangle et tétraèdre sont les simplexes de dimensions 0, 1, 2, 3.

Etat de l'art de la construction de maillages volumiques

5.1 Génération de maillages volumiques non structurés

La génération de maillages non structurés a été étudiée historiquement dans le domaine de l'informatique et des sciences de l'ingénieur. Il existe principalement trois approches pour créer un maillage tétraédrique : les méthodes frontales, les méthodes basées sur la triangulation de Delaunay et celles basées sur un partitionnement hiérarchique de l'espace. Pour des informations plus détaillées sur ces méthodes, le lecteur pourra se référer à [Bern 92], [Owen 98] ou [Frey 07].

5.1.1 Méthodes frontales

Cette approche a été introduite initialement par [Lo 85] à la même époque que la méthode par partitionnement hiérarchique. Elles consistent à construire un maillage élément par élément (figure 5.1) en créant de manière optimale de nouveaux nœuds et en les connectant aux éléments déjà créés [Choi 03, Wu 05]. Un front initial est formé par les éléments (arêtes en 2D où faces en 3D) correspondant à la discrétisation des frontières du domaine d'étude. Partant de l'un de ces éléments, un point est choisi ou construit puis connecté avec celui-ci pour former une cellule (triangle où tétraèdre). Le front est alors mis à jour et le même processus est poursuivi tant que le front n'est pas vide.

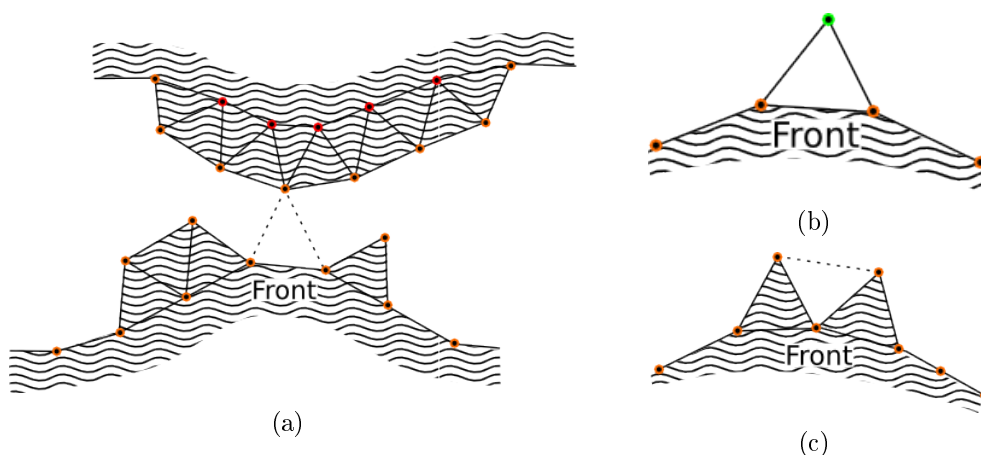


FIG. 5.1 – Illustration d’une méthode frontale : (a) progression du maillage par génération d’un front d’onde (b) insertion d’un nouveau sommet (c) insertion d’un nouvel élément (inspiré de [Rappaz 98])

Les étapes de cette approche sont les suivantes :

- Le front initial est la triangulation de la frontière de l’objet.
- on ajoute un élément de bonne qualité qui s’appuie sur une face du front, en introduisant éventuellement un nœud supplémentaire. Cet élément ne doit pas intersecter le maillage déjà construit. On obtient alors un nouveau front et on recommence tant que le front n’est pas vide.

Les principales difficultés rencontrées par ce type d’approche sont les suivantes :

- comment choisir la face initiale pour commencer l’insertion ?
- comment choisir où placer le nœud à introduire ?
- comment savoir si un élément intersecte le maillage ?

Si le front peut progresser librement, la méthode se déroule sans problème. Le problème majeur de ce type de méthode survient lors de la rencontre du front avec lui-même. La méthode se heurte alors à différentes configurations possibles. En deux dimensions, ces configurations sont peu nombreuses et faciles à résoudre. En trois dimensions, le problème devient très complexe. Le front peut devenir chaotique et tous les points candidats peuvent être rejetés et l’algorithme ne converge pas (sauf en 2D). Il faut alors supprimer une partie du voisinage et recommencer. Le polyèdre de Shönhardt [Schönhardt 28] constitue le contre-exemple de référence car il n’est pas décomposable sans ajout de points internes (figure 5.2).

Cette méthode est facile à implémenter en deux dimensions mais pose donc un certain nombre de difficultés, du point de vue de la convergence et de la qualité du maillage, en trois dimensions.

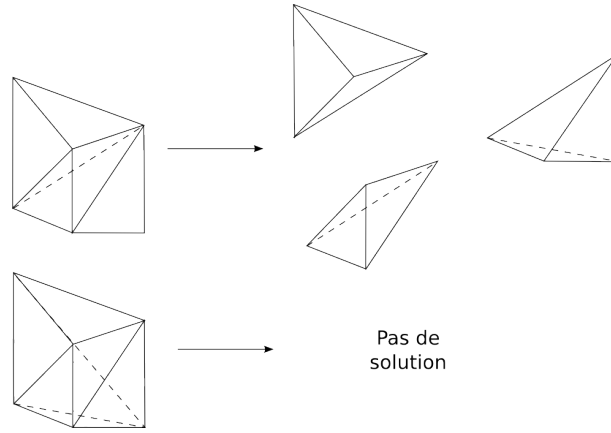


FIG. 5.2 – Le polyèdre de Schönhardt [Schönhardt 28] : triangulation contrainte d'un prisme régulier possible sans ajout de points (en haut) et une configuration impossible à trianguler sans ajout de point interne (en bas) (inspiré de [George 98]).

5.1.2 Méthodes basées sur un partitionnement hiérarchique

Introduites il y a une vingtaine d'années [Yerry 83], les méthodes basées sur un partitionnement hiérarchique (ou décomposition spatiale) sont aujourd'hui activement utilisées en 3D [Tchon 03]. Ces méthodes reposent sur un partitionnement hiérarchique du domaine d'étude [Labelle 07, Mitchell 00]. Le domaine est inclus dans une partition contenant des cellules cubiques disjointes. Ces cellules, de tailles variables, sont subdivisées récursivement afin de capturer la frontière ou satisfaire un critère sur la taille des éléments. Un critère d'arrêt simple peut être le suivant : chaque cellule contient au plus un nœud. Les cellules extérieures au domaine à mailler sont supprimées. On obtient alors un arbre appelé quadtree en 2D et octree en 3D. Les cellules restantes sont décomposées en tétraèdres. L'ensemble de ces tétraèdres formera alors le maillage du domaine. Cette méthode est décrite en deux dimensions dans la figure 5.3. Le domaine d'étude est discrétisé par un arbre quaternaire (a). La structure est régularisée pour obtenir une bonne approximation de la frontière (b). Finalement, le maillage est généré (c).

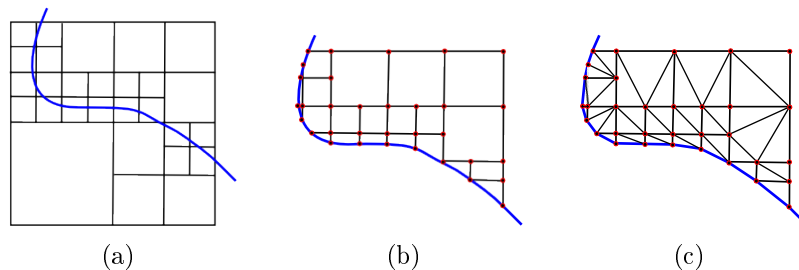


FIG. 5.3 – Illustration d'une méthode basé sur un partitionnement hiérarchique : (a) discrétisation du domaine par un arbre quaternaire (b) rééquilibrage de la structure (c) construction du maillage triangulaire (inspiré de [Rappaz 98]).

Cette approche nécessite donc les étapes suivantes :

- Définir une partition mère (un rectangle en 2D, un parallélépipède en 3D) englobant l'objet à mailler.
- Décomposer de manière récursive chaque cellule (partition) contenant plusieurs nœuds en cellules de mêmes tailles.
- Supprimer les cellules extérieures au domaine.
- Trianguler les cellules contenant un nœud, en respectant la frontière donnée.
- Eliminer, dans ces cellules, les éléments extérieurs au domaine.
- Trianguler les cellules vides en considérant leurs sommets comme des nœuds supplémentaires.

L'avantage principal de cette approche est la structure d'arbre qui est très utile. Elle peut permettre, par exemple, de faire des localisations rapides dans le maillage. Les désavantages de cette méthode sont :

- Le découpage des parties en dehors de la frontière du domaine ne pose pas de problème mais les autres conduisent à de nombreux cas particuliers.
- Les éléments de moins bonne qualité sont générés près des frontières où une plus grande précision est souvent souhaitée.

5.1.3 Méthodes de type “Delaunay-Voronoi”

Nous commençons par rappeler l'ensemble des définitions permettant de mettre oeuvre ce type de méthode.

5.1.3.1 Diagramme de Voronoï et triangulation de Delaunay

Definition 5.1. *Donnons un ensemble ouvert Ω de $\mathbb{E}^d$, et n différents sites (ou graines) $z_i; i=0,1,\dots,n-1$. Le diagramme de Voronoï peut être défini comme n cellules distinctes (ou régions) C_i tels que :*

$$C_i = \{w \in \Omega | d(w, z_i) < d(w, z_j) j = 1, 2, \dots, n, j \neq i\} \quad (5.1)$$

où d est une mesure de distance.

Nous pouvons définir plus simplement le diagramme de Voronoï comme :

Definition 5.2. *Soit S un ensemble de n sites de l'espace euclidien $\mathbb{E}^d$. Pour chaque site z_i de S , la cellule de Voronoï $V(z_i)$ de z_i est l'ensemble des points de $\mathbb{E}^d$ qui sont plus proches de z_i que de tous les autres sites de S . Le diagramme de Voronoï de S est la décomposition de $\mathbb{E}^d$ formé par les cellules de Voronoï des sites.*

La triangulation de Delaunay est définie comme :

Definition 5.3. *Soit S un ensemble de n points de $\mathbb{E}^d$. La triangulation de Delaunay de S est le dual géométrique du diagramme de Voronoï de S : deux points de S sont reliés par une arête dans la triangulation de Delaunay si et seulement si leurs cellules sont adjacentes dans le diagramme de Voronoï de S .*

La triangulation de Delaunay satisfait le critère de Delaunay. Ce critère indique qu'il n'existe aucun nœud dans le cercle circonscrit à chaque triangle en deux dimensions (resp. dans la boule circonscrite à chaque tétraèdre, en trois dimensions).

Definition 5.4. *Critère de Delaunay : Soit S un nuage de points et T une triangulation de l'enveloppe convexe de S , T est une triangulation de Delaunay de S si et seulement si, la boule ouverte circonscrite de chaque élément ne contient aucun nœud.*

La figure 5.4 montre l'exemple d'un élément T_1 ne satisfaisant pas le critère de Delaunay : le point P appartient au cercle circonscrit au triangle T_1 (a) et une seconde configuration vérifiant ce critère (b).

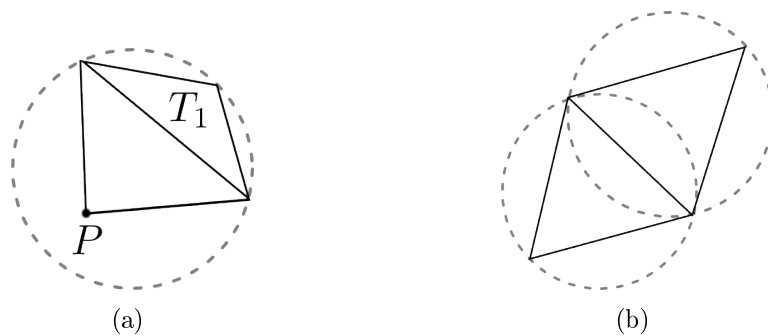


FIG. 5.4 – Illustration du critère de Delaunay : (a) un exemple sur lequel le critère de Delaunay est violé. T_1 ne satisfait pas le critère de Delaunay : le point P appartient au cercle circonscrit au triangle T_1 (b) est une configuration de triangles vérifiant ce critère.

En trois dimensions, le critère de Delaunay est insuffisant pour garantir un maillage volumique de qualité. Des éléments nommés “*slivers*” (tétraèdres plats) peuvent être créés, ceux-ci ont un facteur de forme qui peut être critique pour la résolution par éléments finis [Cheng 99]. L’un des problèmes de l’approche de type “Delaunay” réside dans le fait que l’objet à mailler correspond rarement à l’enveloppe convexe de l’ensemble de ses points. Dans un premier temps, il faut construire un maillage de l’enveloppe convexe puis le modifier ensuite pour obtenir un maillage respectant la frontière de l’objet. Ce problème porte sur le non respect de la frontière et se nomme “*boundary recovery problem*”. Il est intrinsèque aux méthodes de type Delaunay car elles ne tiennent pas compte des contraintes topologiques, par exemple, le respect des frontières. Pour prendre en compte ces contraintes et ainsi préserver les frontières, les méthodes de type “Delaunay” utilisent généralement un maillage d’arête (ou triangulaire en 3D) de la frontière de l’objet. Ces arêtes (ou triangles) permettent de définir des contraintes topologiques que les méthodes de raffinement de Delaunay tentent de respecter au mieux.

Deux approches peuvent être envisagées [Borouchaki 97] :

- L'approche dite “boundary integrity” : elle redéfinit les contraintes *a priori* en faisant en sorte qu'elles apparaissent dans la triangulation de Delaunay.
- L'approche dite “boundary recovery” : elle traite les contraintes *a posteriori* en modifiant la triangulation de Delaunay pour définir les frontières.

Les approches de type “Delaunay-Voronoi” (figure 5.5) se différencient donc selon la stratégie utilisée pour prendre en compte le respect de la frontière. La première approche (c) force le maillage initial à recouvrir le bord par des transformations locales, sans ajout de nouveaux points. Dans ce cas, on parle de triangulation de Delaunay Contrainte (constrained boundary recovery). La seconde approche (d) reconstruit le bord en insérant des points et en re-triangulant (conforming boundary recovery).

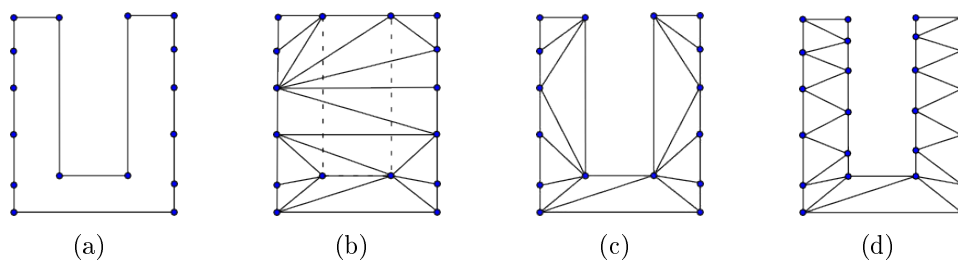


FIG. 5.5 – Illustration du problème de non respect de la frontière : (a) Discrétisation de l'objet (b) triangulation de Delaunay (c) triangulation de Delaunay Contrainte (d) insertion de points et re-triangulation.

5.1.3.2 Raffinement de Delaunay

Une méthode dite de “raffinement” ajoute des sommets à un maillage grossier qui lui est donné, et produit un maillage plus fin [George 98, Frey 01]. Le maillage grossier donné peut, par exemple, avoir été construit directement à partir de la frontière du domaine. Parmi les algorithmes de raffinement, on distingue une classe d'algorithmes appelés “algorithmes de raffinement de Delaunay”. Ces algorithmes sont basés sur l'insertion itérative de points “bien choisis” dans une triangulation de Delaunay initiale. Le raffinement de Delaunay est devenu une méthode standard pour la génération de maillages. Par contre, la phase de raffinement est toujours suivie d'un post traitement (optimisation locale) pour éliminer les “slivers”, seule catégorie de tétraèdres mal formés qui ne sont pas éliminés par le raffinement de Delaunay. Pour construire une triangulation de Delaunay, on ne construit pas explicitement le diagramme de Voronoï. En pratique, la technique de maillage de type “Delaunay” est une procédure itérative qui construit la triangulation du domaine en insérant des points internes et en vérifiant le critère de Delaunay. Ces points sont appelés points de Steiner.

Ce type de méthode apporte quelques difficultés :

- pendant tout le processus, il faut maintenir une liste des centres et rayons des boules circonscrites. Pour les calculer, il faut résoudre un système linéaire.
- ce type d'approche est particulièrement créateur d'erreurs numériques, notamment pour les calculs concernant les centres et les rayons des boules circonscrites en trois dimensions.
- en 2D, nous sommes sûr de pouvoir respecter la frontière (c'est à dire d'imposer les faces données au départ) car un opérateur de bascule d'arête permet de visiter toutes les triangulations possibles. Par contre en 3D, ce n'est plus le cas et le respect de la frontière est difficile à obtenir.
- en 3D, le mailleur de Delaunay peut faire apparaître des éléments de mauvaise qualité dans le maillage. Ces éléments sont les “sliver” (volume quasi-nul, critique pour les simulations numériques) qui sont dégénérés et qui satisfont pourtant le critère de Delaunay. Nous pouvons en déduire que le critère de Delaunay n'est pas un critère de qualité optimal.

5.1.3.3 Approches variationnelles

Dans le cadre des approches de type “Delaunay-Voronoi”, les propositions les plus prometteuses utilisent le cadre théorique des Diagrammes de Voronoï Centroïdaux (DVC), dont les détails sont donnés dans [Du 99]. Il a été prouvé que la création d'un DVC génère des partitions V_i minimisant la fonction d'objectif définie par :

$$f = \sum_i \int_{V_i} \phi(x) \|x - z_i\|^2 dx \quad (5.2)$$

Les approches variationnelles, bien que plus coûteuses en temps de calcul, sont très intéressantes en terme de qualité des résultats obtenus. La définition d'une fonction d'objectif de qualité permet une optimisation des éléments générés. Dans [Alliez 05], il est proposé une approche variationnelle pour la génération et l'optimisation de maillages tétraédriques. Le cœur de cette approche optimise la connectivité et la position des sommets en minimisant une fonction d'énergie. La fonction d'énergie à minimiser a des propriétés théoriques intéressantes, mais il n'y a aucun résultat théorique portant sur la qualité des éléments générés en minimisant cette fonctionnelle. Pour obtenir des maillages adaptés, le critère d'énergie doit être modifié pour prendre en compte une carte traduisant la densité des éléments à adapter ou générer. Les auteurs utilisent une procédure d'optimisation originale pour élaborer un algorithme de génération de maillage. Cet algorithme présente aussi un moyen de créer le maillage initial, nécessaire pour commencer l'optimisation. Alliez et al. obtiennent de bons résultats en combinant une approche variationnelle et la triangulation de Delaunay, mais il n'est pas montré qu'ils évitent l'obtention de “slivers” dans leurs maillages. Dernièrement, Tournois et al. [Tournois 09] présentent une méthode de génération de maillages tétraédriques isotropes pour des domaines 3D bornés par des surfaces lisses par morceaux. Cette approche consiste à combiner raffinement de Delaunay et optimisation de Delaunay pour maximiser la qualité des maillages tout en satisfaisant un ensemble de critères définis par l'utilisateur. Les auteurs montrent

que leur procédé est (expérimentalement) plus parcimonieux en nombre de points de Steiner que le raffinement seul, et produit des maillages de meilleure qualité que l'optimisation appliquée comme post-traitement. Un traitement particulier est réservé à la gestion des bords et des arêtes vives afin d'obtenir un cadre générique pour la génération de maillages.

5.2 Optimisation

Il faut souvent ajouter, aux trois grandes catégories d'approches précédentes, une étape finale d'optimisation du maillage afin d'améliorer la qualité des éléments générés. Les outils d'optimisation du maillage peuvent être classés en deux catégories selon que les modifications soient topologiques ou géométriques. L'opérateur topologique modifie uniquement les connexions entre les points d'un maillage. Les opérateurs géométriques (par déplacement de sommets ou fusion) modifient la position et/ou le nombre de points du maillage. Dans ce dernier cas, la topologie du maillage est changée. Les opérateurs géométriques permettent de déplacer un ou plusieurs sommets du maillage pour améliorer la qualité géométrique des éléments et ne changent pas la connectivité des mailles. Les opérateurs topologiques font appel à l'optimisation combinatoire et les opérateurs géométriques à l'optimisation numérique. Les deux techniques sont plus efficaces quand elles sont utilisées dans le même processus [Klingner 07]. Les transformations topologiques sont locales, signifiant que seulement un petit nombre d'éléments est changé par une opération simple [Shewchuk 02a]. Les nombres $m - n$ de la figure 5.6 désignent le nombre de tétraèdres à l'origine m et le nombre de tétraèdres à l'arrivée n .

En 2D, l'opérateur "bascule" (*flip*) est une opération simple consistant à échanger les deux diagonales d'un quadrilatère convexe formé de deux triangles. En 3D, la transformation analogue est plus complexe. En effet, le correspondant 3D de l'arête est le triangle et celui du quadrilatère est l'hexaèdre à faces triangulaires. Un hexaèdre peut être décomposé en tétraèdres de deux façons (figure 5.6). La première décomposition consiste à couper l'hexaèdre en deux par la facette interne $F(s_2, s_3, s_4)$. On obtient ainsi les deux tétraèdres $T_1(s_1, s_2, s_3, s_4)$ et $T_2(s_2, s_3, s_4, s_5)$. La seconde fait passer une arête centrale par les deux sommets de part et d'autre de cette facette interne. Les trois tétraèdres obtenus sont $T_3(s_1, s_2, s_5, s_3)$, $T_4(s_1, s_2, s_5, s_4)$ et $T_5(s_1, s_3, s_5, s_4)$. L'opération correspondant à la bascule en 2D, est appelé une transformation (*flip*) en 3D et consiste à passer d'une décomposition à l'autre. Cette transformation n'est possible que si l'hexaèdre est convexe. Les opérations topologiques présentées ci-dessus sont utilisées dans un processus qui vise à optimiser la qualité du maillage. Une fonction "objectif" peut être établie pour un tel processus d'optimisation à partir de la qualité de chaque élément du maillage. Le processus applique une opération à un ensemble d'éléments spécifiques dans le maillage selon la valeur de la fonction d'objectif souhaitée. Si, après l'opération de transformation $m - n$, la qualité de l'ensemble est meilleure, l'opération est appliquée sinon elle est rejetée. Le processus cherchera alors une autre opération qui améliorera le maillage. Le processus s'arrête quand aucune opération ne peut apporter une amélioration. Ainsi, la qualité du maillage ne peut que s'améliorer.

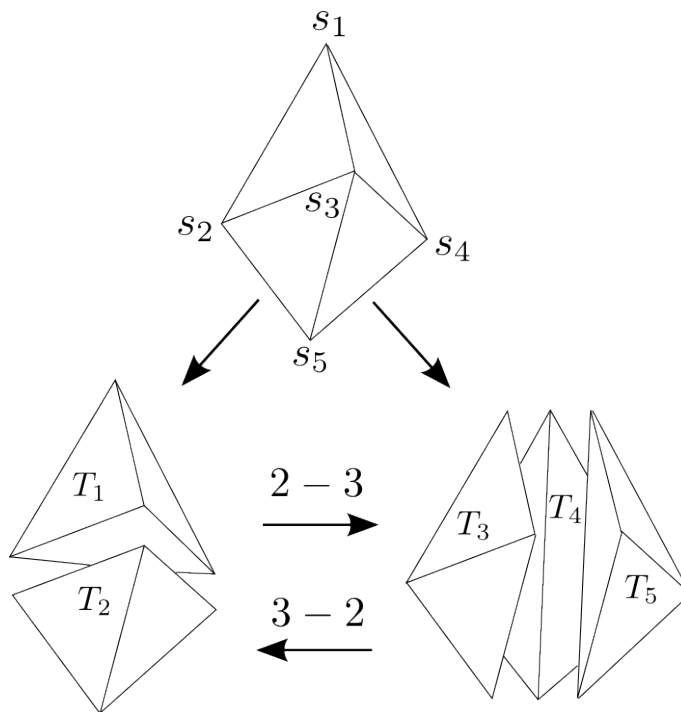


FIG. 5.6 – Illustration de la transformation d’un hexaèdre à faces triangulaires en 2 ou 3 tétraèdres.

5.3 Qualité géométrique et simulation numérique

Lors d’une simulation numérique par la méthode des éléments finis des divergences et des instabilités numériques peuvent se produire. Afin d’éviter ces phénomènes, il faut obtenir des maillages avec des propriétés géométriques particulières. On définit la “qualité” d’un maillage à l’aide de ses propriétés géométriques. Il existe de nombreux critères qui mesurent cette qualité. La plupart du temps, on mesure le rapport de forme et/ou de taille des éléments. On essaiera ainsi d’éviter des éléments trop fins ou étirés, pour privilégier les éléments dits “réguliers”. Dans le paragraphe suivant, nous abordons, dans un premier temps, la classification des tétraèdres et nous énumérons, dans un second temps, les différents critères de qualité issus de la littérature. Finalement, nous étudions, de façon théorique, l’influence de la qualité des éléments constituant le maillage sur la simulation numérique par la MEF.

5.3.1 Classification des tétraèdres

La précision et la validité des solutions calculées par MEF sont liées aux propriétés du maillage. Dans le but de générer, valider ou d’optimiser ce maillage, il peut être intéressant, d’un point de vue qualitatif, de discriminer les éléments de mauvaise qualité. D’après [George 98], on peut répertorier huit types de tétraèdres. On peut les discriminer sur la base d’un critère associé au “type” de triangle de leurs faces et à leur volume.

Avant de donner la classification des tétraèdres, il convient de définir trois types de triangles (figure 5.3.1) :

- le triangle “admissible” (a) : les trois côtés du triangle sont de longueurs comparables, il en va de même pour ses angles.
- le triangle aigu (b) : un côté est nettement plus petit que les deux autres, ce qui revient à dire qu’un de ses angles est “fortement” aigu.
- le triangle obtus (c) : un côté a sa longueur de l’ordre de la somme des longueurs des deux autres, ce triangle a donc un angle “fortement” obtus.

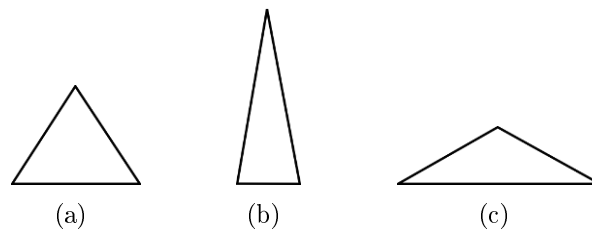


FIG. 5.7 – Les trois types de triangles pour la classification

On peut alors distinguer les huit types de tétraèdres de la figure 5.8 :

- L’élément est de bonne qualité : les quatre faces sont admissibles et son volume n’est pas faible.
- Seul une face est admissible, les trois autres sont aiguës.
- Les quatre faces du tétraèdre sont aiguës.
- Deux des faces du tétraèdre sont aiguës, les deux autres étant admissibles.
- Le tétraèdre a deux faces aiguës et deux faces obtues.
- Les quatre faces de l’élément sont admissibles, son volume est presque nul et un de ses sommets est voisin du barycentre d’une des faces.
- Trois des faces du tétraèdre sont admissibles, la quatrième est obtue.
- Les quatre faces de l’élément sont admissibles mais son volume est très proche de zéro : on nomme communément cet élément “sliver”.

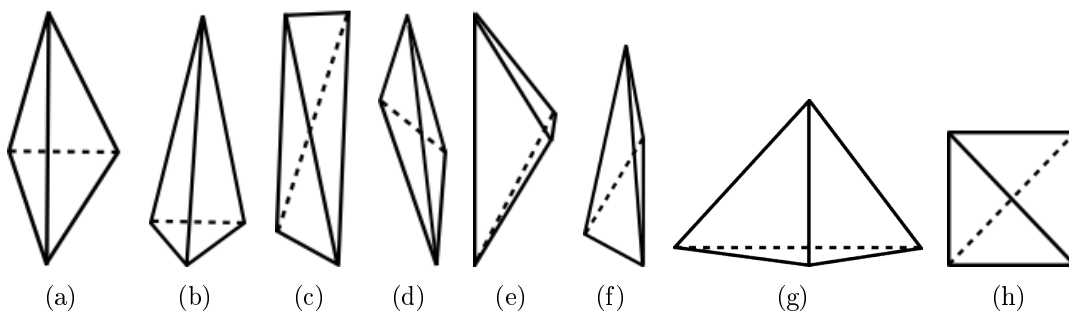


FIG. 5.8 – Exemple de classification des tétraèdres.

D’autres modes de classification sont envisageables [Cheng 99]. Cette classification est qualitative, nous allons maintenant voir des critères objectifs pour mesurer la qualité d’un maillage.

5.3.2 Qualité d'un maillage

Dans le cadre de la simulation électromagnétique et thermique par la MEF, il est préférable de générer des maillages tétraédriques isotropes. Idéalement, un algorithme de génération de maillages optimiserait directement le critère de qualité à partir du système d'équations aux dérivées partielles utilisées. Cependant, cette approche n'est pas réaliste du fait de sa complexité. Ainsi, en pratique, un maillage est optimisé selon un critère purement géométrique. De nombreux critères sont disponibles dans la littérature. Nous présentons ici les six critères les plus souvent cités [Shewchuk 02b] pour l'évaluation de la qualité de maillage tétraédrique isotrope. Les critères Q_1 et Q_2 correspondent à l'angle dièdre minimal et maximal. Ils sont définis par :

$$Q_1 = \alpha_{min} = \min(\alpha_{i,j}) \quad (5.3)$$

et

$$Q_2 = \alpha_{max} = \max(\alpha_{i,j}) \quad (5.4)$$

où $\alpha_{i,j}$ est l'angle dièdre formé par les faces voisines à l'arête $e_{i,j}$ qui est connectée aux sommets v_i et v_j . Notons qu'un tétraèdre régulier possède six angles dièdres qui valent $\arccos(1/3)$ soit $70^\circ,5$. Cet élément est idéal dans le cadre d'une simulation de nature isotrope.

Le troisième critère Q_3 défini dans [Liu 94] est défini par :

$$Q_3 = \frac{12}{\bar{l}} \cdot (3 \cdot V)^{2/3} \quad (5.5)$$

où $\bar{l}$ est la longueur moyenne des arêtes du tétraèdre et V son volume.

Le critère Q_4 [Cavendish 85] est basé sur le rapport entre le rayon de la sphère inscrite r_{in} et le rayon de la sphère circonscrite r_{out} :

$$Q_4 = \frac{3r_{in}}{r_{out}} \quad (5.6)$$

Le critère Q_5 est défini par le rapport entre les longueurs minimales et maximales des arêtes du tétraèdre.

$$Q_5 = \frac{l_{min}}{l_{max}} \quad (5.7)$$

Le dernier critère Q_6 est défini par le rapport d'aspect suivant :

$$Q_6 = \frac{12}{\sqrt{6}} \frac{3V}{l_{max} \sum A_i} \quad (5.8)$$

où A_i est l'aire de la face i du tétraèdre et V son volume.

Les critères Q_3 à Q_6 sont normalisés entre 0 et 1. Une valeur proche de 0 signifie un mauvais facteur de forme, une valeur de 1 correspond au tétraèdre régulier.

5.3.3 Influence sur la modélisation

La qualité de la discrétisation géométrique est cruciale pour l'efficacité des MEF [Shewchuk 98]. Le rapport entre la plus grande valeur propre et la plus petite, de la matrice du système d'équations à résoudre, s'appelle le facteur de conditionnement. Il doit être le plus faible possible. Une matrice mal conditionnée affecte la résolution du système en le ralentissant (augmentation du nombre d'itérations) et en présentant des erreurs importantes au niveau du résultat (amplification des erreurs sur les données et des erreurs d'arrondis de calcul). La forme des éléments du maillage a une influence forte sur le conditionnement de la matrice, mais à la différence des erreurs d'interpolations, les angles aigus pénalisent la matrice et les angles obtus (seuls) ne la pénalisent pas. La relation entre la forme des éléments et le conditionnement de la matrice dépend de l'équation aux dérivées partielles (EDP) qui est résolue et de l'algorithme utilisé pour discrétiser le domaine d'étude. L'influence de la qualité des éléments pour un type de problème donné ne peut être évaluée qu'au cas par cas.

L'erreur de discrétisation est la différence entre l'approximation calculée par la méthode des éléments finis et la solution exacte. De même que pour le facteur de conditionnement de la matrice, l'erreur de discrétisation dépend en partie de l'EDP et de la méthode de discrétisation utilisée. Cependant, l'erreur de discrétisation est très liée aux erreurs d'interpolations. Ces erreurs peuvent être atténuées par des éléments dont les formes et les tailles sont choisies pour contrôler les erreurs d'interpolation.

En deux dimensions, l'article de Babuska et Aziz [Babuska 76] démontre que l'exactitude de la solution générée par la méthode des éléments finis, à partir d'un maillage triangulaire, se dégrade lorsque les angles des triangles s'approchent de 180° . Mais, quand l'angle d'un triangle s'approche de 0° , tant que les deux autres angles ne sont pas trop grands, la solution ne se dégrade pas. Les auteurs ont pu en conclure que les angles faibles ne sont ni délétères de l'erreur d'interpolation, ni de l'erreur de discrétisation, par contre, il a été démontré que les angles faibles pénalisent le conditionnement de la matrice.

En trois dimensions, une discrétisation grossière et la présence de mauvais éléments peuvent amener des résultats incorrects et des instabilités numériques. Des éléments dégénérés, avec des volumes quasi-nuls et des angles dièdres faibles, peuvent mener à de grandes erreurs locales de la solution numérique. Des angles dièdres faibles ont un effet négatif sur le facteur de conditionnement de la matrice et des angles dièdres élevés causent de grandes erreurs d'interpolation. Le pire des cas aboutit à un système d'équations impossible à résoudre (matrice singulière). Le nombre de sommets et d'éléments constituant le maillage est typiquement dicté par la nécessité de limiter l'erreur de discrétisation et donc l'erreur d'interpolation. Des bornes doivent être aussi placées pour limiter les angles des éléments afin d'avoir un maillage dit de "bonne" qualité.

5.4 Discussion

Les approches de reconstruction et de modélisation, décrites dans ce chapitre, montrent, qu’actuellement, il existe plusieurs approches et méthodes permettant la construction de maillages surfaciques et volumiques. Cependant, toutes ces méthodes présentent aussi bien des avantages spécifiques que des défauts. Les différentes approches nécessitent des hypothèses plus ou moins fortes sur le type de données utilisées. Les méthodes basées sur la triangulation de Delaunay sont bien adaptées à la reconstruction d’objets lisses à partir d’un nuage de points. Les résultats sont soumis à des conditions fortes d’échantillonnage mais les maillages obtenus possèdent des propriétés géométriques et des garanties topologiques intéressantes pour les simulations numériques par la méthode des éléments finis. Ces approches ont un point commun : elles construisent un maillage tétraédrique à partir d’un maillage surfacique. Ce maillage surfacique permet de garantir le respect des frontières du maillage volumique. Cependant, cela apporte des contraintes difficiles à satisfaire lorsque deux surfaces sont voisines. Par conséquent, la robustesse de ces méthodes est conditionnée par la qualité des maillages surfaciques. En imagerie médicale, la qualité de l’interface entre organes affecte alors le maillage volumique et engendre des éléments tétraédriques avec de mauvais facteurs de forme (plats et/ou avec des angles aigus) pénalisant le conditionnement des matrices de la Méthode par Éléments Finis. Nous avons vu dans la section 5.3.3 que la forme des éléments du maillage peut augmenter les temps de calculs et réduire la précision de la MEF. L’approche classique d’obtention d’un maillage avec des rapports d’aspects raisonnables passe par une étape de remaillage où les éléments qui ont un mauvais rapport d’aspect sont remplacés. Une variable importante dans cette stratégie est le choix du critère de qualité. Des maillages surfaciques de structures anatomiques pour les types d’approches cités sont difficiles à générer. L’utilisation de ces différentes méthodes pose un certain nombre de problèmes :

- La procédure de maillage doit satisfaire des contraintes surfaciques et de liaison entre les différentes interfaces.
- La qualité du maillage surfacique influence fortement la qualité du maillage volumique.
- Les représentations surfaciques obtenues présentent souvent un nombre important de sommets. Cela complique une procédure de construction de maillage volumique, et impose donc une décimation afin de réduire le nombre de sommets.

En résumé, cet état de l’art montre que la majorité des travaux en reconstruction volumique ont besoin d’une modélisation surfacique et que peu de travaux se sont penchés, à notre connaissance, sur une modélisation volumique dite “directe”. Notre approche consiste à travailler au plus près de l’image, en la considérant au niveau de sa structure élémentaire, c’est-à-dire comme un ensemble d’éléments discrets pavant l’espace et organisés selon une relation d’adjacence suivant une grille rectangulaire.

Notre approche, décrite dans le prochain chapitre, construit le maillage volumique sans l’étape de maillage surfacique. Elle est fondée sur un partitionnement du domaine d’intérêt dans l’espace discret qui permet d’approximer un diagramme

de Voronoï Centroïdal. Le dual de ce diagramme (la triangulation de Delaunay) est construit et elle est suivit de transformations préservant la topologie du maillage aux différentes interfaces. Notons qu'actuellement, nous ne connaissons pas de méthode de génération de maillage tétraédrique permettant la reconstruction directe, à partir d'un ensemble de voxels (figure 5.9), sans passer par l'extraction d'une iso-surface [Labelle 07].

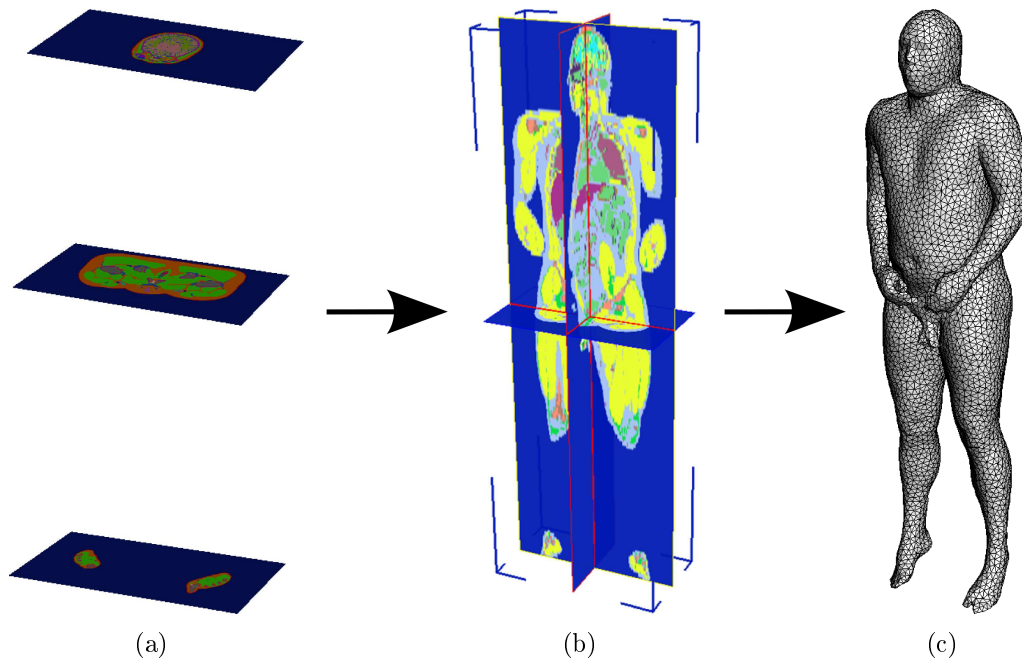


FIG. 5.9 – Processus de discrétisation : (a) coupes anatomiques segmentées du projet “*Visible Human*” (b) ensemble discret tri-dimensionnel (c) maillage volumique de (b)

Triangulation basée sur les diagrammes de Voronoï Centroïdaux

Dans ce chapitre, nous allons décrire notre approche qui repose sur une Triangulation basée sur les diagrammes de Voronoï Centroïdaux (TVC). Nous rappelons brièvement le contexte et certaines interrogations préalables au développement de notre proposition. Notre approche comprend un pré-traitement approprié des données volumiques (voxels). Nous approchons un Diagramme de Voronoï Centroïdal par une méthode variationnelle. Puis vient la génération du maillage proprement dite, par dualité. Nous verrons comment résoudre les ambiguïtés dues à l'approximation d'un diagramme de Voronoï centroïdal dans un espace discret. Une fois le maillage volumique créé, nous proposerons une technique d'optimisation topologique pouvant lui être appliqué. Enfin, un schéma général faisant la synthèse de notre approche sera exposé.

6.1 Contexte

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la reconstruction et à la modélisation d'objets discrets représentés dans des images 3D segmentées. Rappelons que ces images sont très fréquentes en imagerie médicale et sont obtenues après la segmentation d'images tomographiques ou IRM du patient. L'image segmentée représente chacune des structures avec un attribut spécifique. Par conséquent, l'ensemble des voxels contenant le même attribut constitue déjà un modèle discret. Comme nous avons vu dans le chapitre 3, dans le cadre des différences finies, c'est un modèle suffisant, mais pour les éléments finis, il est nécessaire de transformer ce modèle voxelique en un modèle tétraédrique. Notre but est l'obtention d'une représentation volumique sous forme maillée à partir d'une image 3D segmentée.

Partant de cet objectif, nos travaux se sont naturellement orientés vers une approche de génération de maillages tétraédriques alternative, remplissant les critères suivants :

- Etre adaptée aux images binaires ou labellisées.
- Obtenir une modélisation topologiquement cohérente de l'ensemble des composantes.
- Avoir la possibilité d'adapter la taille des éléments du maillage à la complexité des interfaces.

Dans le cadre de la reconstruction, les considérations topologiques sont indispensables. Rappelons que l'un de nos objectifs est de reconstruire avec précision les différentes interfaces des objets discrets. Les maillages volumiques obtenus sont destinés à être utilisés dans le cadre de la MEF. La problématique que l'on se fixe dans ce chapitre est la suivante : comment construire un maillage tétraédrique directement à partir d'une image 3D ? Pour atteindre les objectifs cités précédemment, nous avons choisi d'explorer une nouvelle approche de génération de maillage qui combine la topologie avec des Diagrammes de Voronoï Centroïdaux (DVC) et par dualité, la triangulation de Delaunay. Nous avons choisi d'utiliser cette stratégie en combinant une approche variationnelle pour approximer un DVC et une approche qui permet de générer le dual du DVC pour obtenir les maillages volumiques.

Nos justifications sont les suivantes :

- Les maillages obtenus avec une approche de type "Delaunay-Voronoï" sont généralement de bonne qualité.
- Cette approche est globale et possède des bases mathématiques solides.
- Les approches de type "Voronoï-Delaunay" se prêtent à une généralisation en 3D.
- De par sa nature variationnelle, cette approche permet l'adaptation de la taille des éléments du maillage à la complexité géométrique locale.

L'idée principale de notre méthode peut se résumer ainsi. Nous distribuons un ensemble de N points dans le volume discret Ω en préservant les différentes interfaces en approchant un DVC. C'est à dire que nous partitionnons l'espace d'entrée avec un ensemble de contraintes pour préserver les interfaces. Le maillage est obtenu par dualité, à partir de l'approximation discrète du DVC. Nous appelons cette méthode : Triangulation de Voronoï Centroïdal (TVC). Les originalités de cette approche résident dans le fait de sa nature entièrement discrète et qu'elle n'utilise pas un maillage surfacique initial ce qui offre des libertés supplémentaires pour construire les tétraèdres. La concrétisation de cette idée soulève cependant plusieurs questions importantes :

- Comment extraire et définir les frontières d'un volume discret ?
- Comment réaliser l'approximation du diagramme de Voronoï ?
- Comment extraire le maillage par dualité ?

6.2 Notre approche

La figure 6.1 résume la succession des étapes du processus de maillage, sur un exemple 2D. Nous partons d'une image (a). Une approximation de l'axe médian (b) est créée. Nous calculons ensuite une carte ρ traduisant la densité locale de tétraèdres souhaitée (c). Nous calculons le Diagramme de Voronoï Centroïdal (d) de l'image (a) en prenant en compte les poids $\rho(x)$ issus de (c). Le dual de ce diagramme est construit (e) et constitue le maillage. Pour des raisons de clarté, le calcul de la carte de densité $\rho(x)$ (étapes correspondantes aux images (b) et (c)) sera décrit dans la troisième partie de ce manuscrit. Dans ce chapitre, les maillages générés par notre approche sont uniformes.

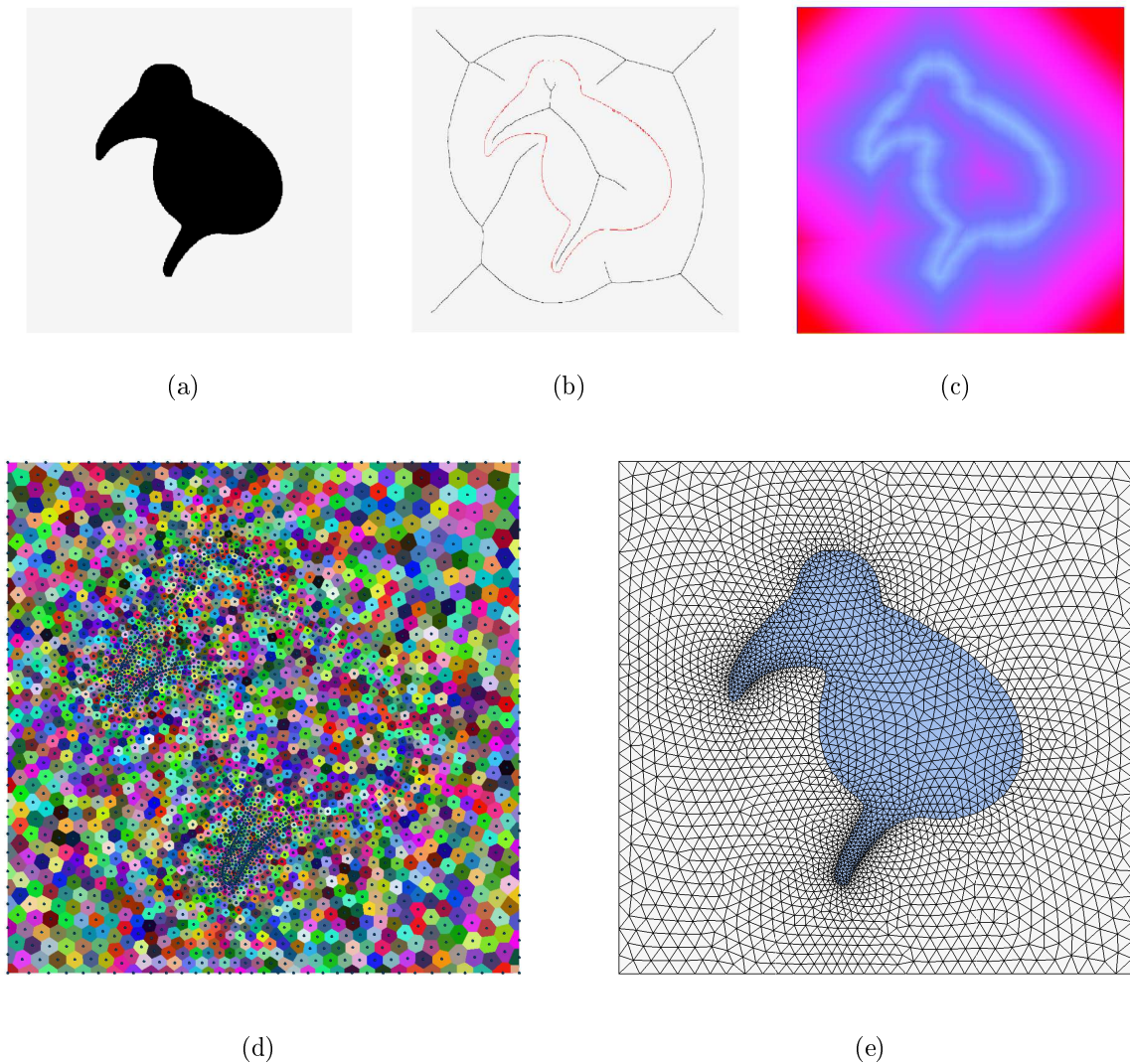


FIG. 6.1 – Illustration du processus de génération 2D : Une approximation de l'axe médian (b) de l'image (a) (inspiré de [Alliez 05]) est calculée (c) Une carte de densité est alors estimée (d) Un Diagramme de Voronoï Centroïdal de (a) est approché en prenant en compte (c). (e) Le dual de ce diagramme est obtenu et constitue notre maillage.

6.2.1 Représentation d'une surface discrète

Dans le chapitre 4, nous avons rappelé certaines définitions et notions de topologie discrète. Nous avons vu en particulier les notions de complexe cellulaire, de graphe primaire et dual, définis par Kovalevsky [Kovalevsky 89]. Ces notions permettent de définir la frontière discrète d'un ensemble de pixels ou de voxels. Dans notre approche, nous utilisons la définition du graphe dual pour représenter la surface discrète d'un objet 3D par un sous-ensemble d'éléments inter-voxels. Par conséquent, notre algorithme d'extraction de la frontière discrète d'un objet utilise une représentation duale du volume. L'algorithme prend en entrée une image 3D binaire ou labellisée et renvoie une image 3D duale labellisée, où les voxels de la frontière et les voxels internes ou externes à l'objet sont étiquetés avec des attributs différents (figure 6.2). Cette étape peut être considérée comme une segmentation topologique permettant de définir différents attributs selon le type de voisinage rencontré dans l'image.

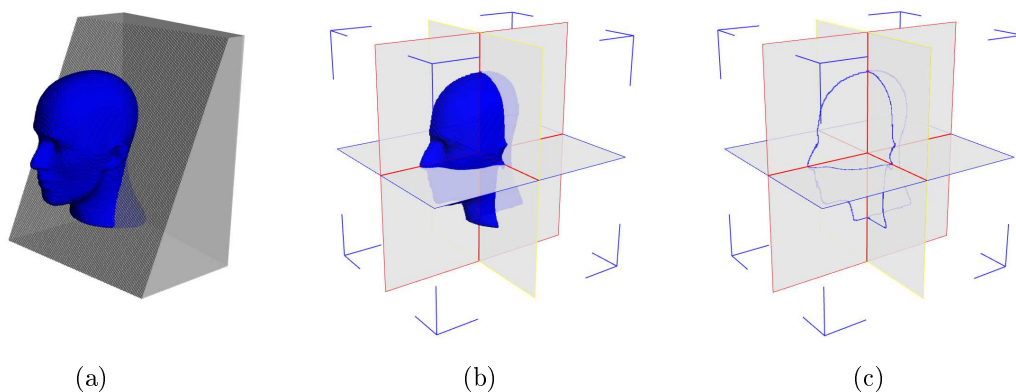


FIG. 6.2 – Définition de la surface discrète : (a) l'image originale représentant une tête humaine (b) sous la forme d'un plan 3D (c) l'image duale avec la frontière discrète (en bleu) ; les pixels internes sont représentés en blanc ; un ensemble d'attributs est ajouté selon le type de voisinage.

Dans le cadre de notre application en électromagnétique et en thermique par la MEF, le domaine d'étude doit être borné pour appliquer des conditions aux limites absorbantes (CLA). Le domaine d'étude (dans notre cas, le corps humain) doit être placé dans une boîte englobante. La nature de nos données (images tomographiques ou IRM) permet d'obtenir directement ses caractéristiques géométriques. Des contraintes doivent être utilisées lors du partitionnement de façon à préserver cette géométrie. Les contraintes, nécessaires pour représenter les bords du domaine $\partial\Omega$, sont au nombre de sept. A l'intérieur du volume, deux attributs seulement sont utilisés couramment. Les organes du corps humain ne présentent pas de caractéristique spécifique comme des coins ou des arêtes vives à préserver. Ces caractéristiques sont souvent représentées dans les pièces manufacturées modélisées en CAO. Les organes comportent une géométrie généralement "lisse". Cependant, nous pouvons leur associer des contraintes identiques à celles de l'extérieur du domaine si nous en avons besoin.

Nous disposons des 7 attributs suivants pour préserver les différents types de bords :

- C_0 représente un élément correspondant à un coin.
- C_{1X} représente un élément appartenant à une arête vive d'orientation X.
- C_{1Y} représente un élément appartenant à une arête vive d'orientation Y.
- C_{1Z} représente un élément appartenant à une arête vive d'orientation Z.
- C_{2X} représente un élément appartenant à une face d'orientation X.
- C_{2Y} représente un élément appartenant à une face d'orientation Y.
- C_{2Z} représente un élément appartenant à une face d'orientation Z.

Ces attributs permettent de définir la position des sites lors du partitionnement. Les représentations de ces différentes contraintes sont illustrées dans la figure 6.3. L'orientation dans le plan discret d'un élément correspondant à une face ou à une arête doit être prise en compte. Cette orientation est indispensable pour assurer le placement du site z_i . Nous reviendrons sur ce point dans les sections suivantes.

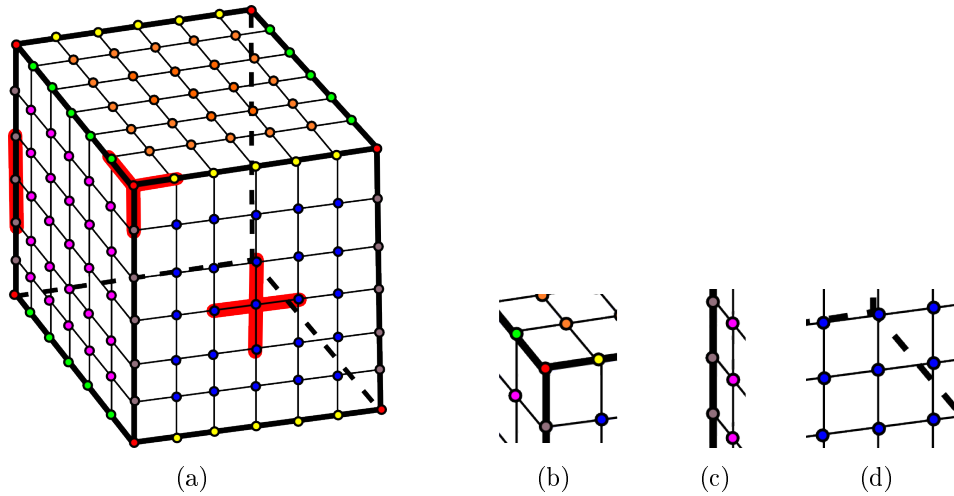


FIG. 6.3 – Représentation des différentes contraintes (a), aux orientations près, pour préserver les coins C_0 (b), les arêtes C_1 (c) et les faces externes C_2 (d).

6.2.2 Diagrammes de Voronoï Centroidaux

Un choix important dans la génération d'un maillage non structuré est la distribution des nœuds de ce maillage. Comme nous allons le voir par la suite, cette distribution influence grandement la qualité des maillages générés. Supposons, que nous souhaitons obtenir un maillage triangulaire uniforme de l'image discrète Ω . Dans ce cas, les nœuds doivent être distribués de façon *quasi-uniforme* dans l'image 3D tout en préservant la frontière (discrète) de l'objet à mailler $\partial\Omega$. Pour obtenir une telle distribution, la première étape de notre méthode est l'obtention d'une approximation d'un DVC en utilisant une approche variationnelle.

Un DVC est un diagramme de Voronoï où les sites sont les centres de gravité de leurs régions de Voronoï respectives. Où chaque site de Voronoï z_i (qui correspond à un point de la future triangulation) est le centre de gravité de sa cellule :

$$z_i = \frac{\int_{C_i} x \cdot \rho(x) dx}{\int_{C_i} \rho(x) dx} \quad (6.1)$$

Les DVC minimisent le terme d'énergie suivant :

$$E_V = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{p_j \in C_i} \int_{p_j} \rho(x) \|x - z_i\|^2 dx \right) \quad (6.2)$$

où x est un point de l'espace, $\rho(x)$ la fonction de densité associée et C_i est une cellule de Voronoï.

Ce terme d'énergie E_V est une mesure objective de la compacité des cellules. La construction de cette partition peut s'effectuer par la méthode des *K-means* [MacQueen 67] ou par relaxation de Lloyd [Lloyd 82], présentée dans l'algorithme 6.1.

Algorithme 6.1 : Relaxation de Lloyd

Données : Un ensemble de N sites z_i dans un espace euclidien Ω

Résultat : Les N sites et un partitionnement optimisé

début

tant que *Convergence non détectée* **faire**

 Calculer le diagramme de Voronoï sur Ω en considérant les sites z_i ;

 Déplacer chaque site z_i à la position du barycentre de la cellule de Voronoï correspondante;

fin

fin

Dans le cadre du partitionnement de maillages, un terme énergétique, favorisant la compacité des cellules est utilisé dans [Valette 08]. Ce choix favorise le facteur de forme des éléments générés. Cette approche est itérative et permet de minimiser la fonction d'objectif. Le principe de cet algorithme est la mise en compétition des partitions entre elles, par des tests élémentaires (figure 6.4). L'algorithme visite les frontières entre les partitions pour faire évoluer globalement le partitionnement en minimisant l'énergie. Un avantage intéressant de cette méthode est l'utilisation de tests uniquement locaux pour minimiser l'énergie (figure 6.4 et l'algorithme 6.2). La complexité est constante en termes de nombre d'éléments du maillage de départ et du maillage simplifié.

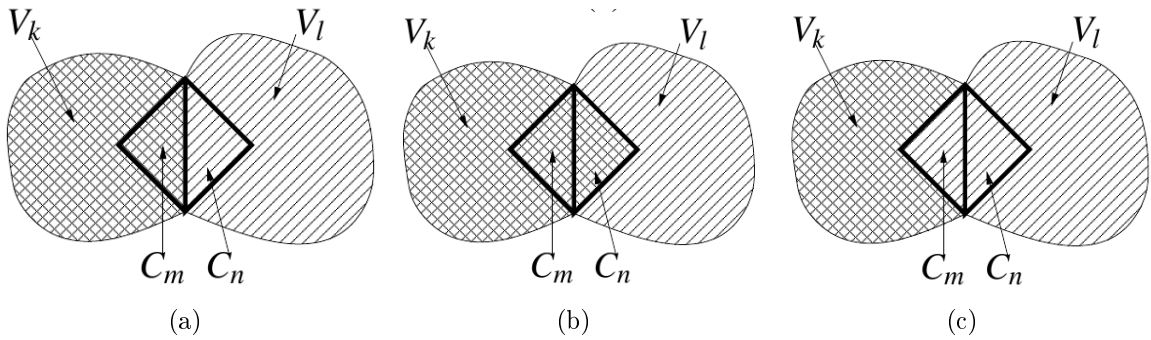


FIG. 6.4 – Test élémentaire de minimisation entre deux cellules de Voronoï V_k et V_l : (a) la configuration initiale du partitionnement (b) V_k grandit en absorbant l'élément C_n et V_l rétrécit (c) V_k rétrécit et V_l grandit en absorbant l'élément C_m .

Algorithme 6.2 : Génération d'un partitionnement optimisé [Valette 08]

Données : Un maillage avec N sites

Résultat : partitionnement optimisé du maillage en N parties

début

tant que *Convergence non détectée* **faire**

pour *Chaque arête e_j frontière entre deux partitions* **faire**

 Calculer les trois termes d'énergie E_{init} , E_1 et E_2 correspondant aux trois configurations possibles (figure 6.4) ;

 Mettre à jour la configuration des deux triangles en fonction de la configuration donnant le plus petit terme d'énergie ;

fin

fin

fin

Nous utilisons cette approche pour regrouper des éléments puis former le maillage en construisant le dual du DVC. Le critère d'énergie E_V (équation 6.2), pour l'ensemble des cellules de Voronoï, se simplifie en :

$$F = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{p_j \in C_i} \rho_j z_i^T (z_i - 2\gamma_j) \right] \quad (6.3)$$

avec

$$\rho_j = \int_{p_j} \rho(x) dx \quad (6.4)$$

et

$$\gamma_j = \frac{1}{\rho_j} \int_{p_j} x \cdot \rho(x) dx \quad (6.5)$$

où p_j est un élément du graphe dual $\bar{G}$, $\bar{G}$ est le complément de G (graphe primaire ou de voisinage), ρ_j est le poids associé à p_j , γ_j représente le barycentre de p_j .

La première étape consiste à partitionner les données discrètes (voxels) en N cellules C_i en approchant un DVC. Ce partitionnement prend en compte la fonction de densité de tétraèdres désirée ρ et un ensemble de contraintes pour placer correctement les sites z_i des cellules de Voronoï au voisinage de l'ensemble des frontières ∂_Ω . On notera que le site z_i n'est pas nécessairement un point de la grille discrète. Le calcul de la densité ρ est précisé dans la troisième partie de ce manuscrit. Les maillages générés dans ce chapitre sont uniformes car $\rho_j = 1$.

Définition des sites et des contraintes associés

Le placement des sites de Voronoï est un enjeu important lors du processus de partitionnement. Nous devons préserver les frontières discrètes ∂_Ω définies précédemment. Dans la figure 6.5, nous rappelons, les trois configurations possibles, aux orientations près, pour définir l'ensemble des contraintes qui vont préserver les différentes caractéristiques géométriques.

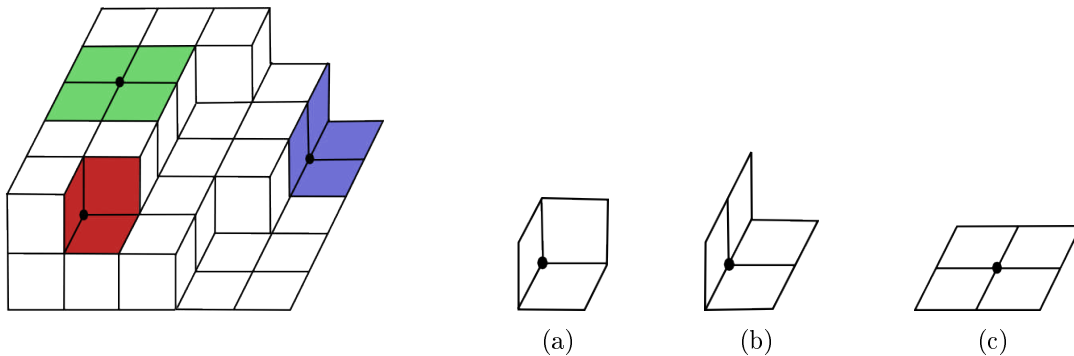


FIG. 6.5 – Les trois configurations possibles, aux orientations près, pour définir un ensemble de contraintes sur (a) les coins, (b) les arêtes et (c) les faces frontières.

Nous associons des contraintes qui sont liées à la localisation du site dans l'espace discret. Si une cellule C_i coupe la frontière discrète, le calcul de son site z_i sera modifié selon l'attribut de l'élément qui a été absorbé. Les contraintes définies par la suite permettent d'augmenter la qualité du futur maillage en respectant la géométrie des différentes interfaces. Nous définissons un ensemble B_i pour chaque région de Voronoï par :

$$B_i = C_i \cap \partial_O \quad (6.6)$$

La position des sites z_i dépend des conditions suivantes :

- Si la cellule C_i ne coupe pas ∂_O ($B_i = \emptyset$), nous sommes dans le cas non contraint. Nous fixons z_i au barycentre de la cellule : $z_i = G_i$.

$$z_i = G_i = \frac{\sum_{C_i} \rho_j \cdot \gamma_j}{\sum_{C_i} \rho_j} \quad (6.7)$$

- Si la cellule C_i contient une partie de la frontière $\partial_{O_{m,n}^i}$ ($B_i \neq \emptyset$), nous sommes dans le cas contraint et le site de la région est fixé au barycentre de la frontière :

$$z_i = \frac{\sum_{B_i} \rho_j \cdot \gamma_j}{\sum_{B_i} \rho_j} \quad (6.8)$$

Ces conditions sont illustrées dans la figure 6.6. Pour un ensemble donné d'éléments, une position optimale du site peut être calculée à partir des attributs des éléments. Nous enregistrons et mettons à jour différents compteurs selon le type d'attribut absorbé ou restitué par la cellule. Cela permet de calculer, à chaque itération, le meilleur placement pour un site donné et de prendre en compte ce placement dans le calcul de l'énergie E_v . Par conséquent, quand une cellule C_i contient au moins un attribut, le site z_i est placé pour approximer le sous-ensemble frontière B_i tout en optimisant, indépendamment, la compacité de la cellule. Nous pouvons noter qu'une cellule peut évoluer de *non-contrainte* à *contrainte*, et inversement, durant la minimisation de l'énergie. Le positionnement du site sera calculé à partir de l'ensemble des éléments contenus dans la cellule ou d'un sous-ensemble choisi selon leurs attributs.

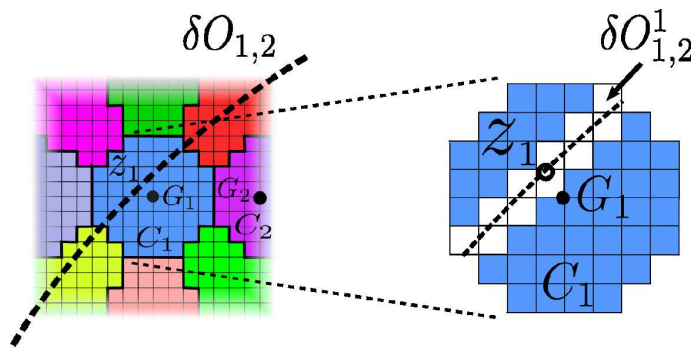


FIG. 6.6 – Illustration des conditions de positionnement d'un site : La cellule C_1 est dite *contrainte*. Le site z_1 est estimé à partir de $\partial O_{1,2}^1$ qui représente le sous-ensemble frontière de la cellule C_1 . La cellule C_2 est dite *non-contrainte* car elle n'est pas liée à une frontière.

L'orientation dans le plan des différentes contraintes géométriques doit être prise en compte. La définition de la frontière discrète influence fortement le potentiel de reconstruction de notre méthode. Dans la figure 6.7, nous donnons un exemple en 2D d'une mauvaise définition de la frontière qui peut engendrer une reconstruction erronée. Si l'orientation n'est pas prise en compte, la configuration illustrée en (a) peut se réaliser. Le site z_1 a été calculé à partir d'éléments disposant d'un même attribut sans prendre en compte l'orientation. Le positionnement de ce site, par rapport à la frontière, est incorrect. La figure (c) illustre l'adjacence des cellules de Voronoï. La configuration illustrée en (b) prend en compte l'orientation de la frontière dans le plan pour une contrainte géométrique. Nous pouvons voir que les sites de Voronoï appartenant à des cellules dites "contraintes" modélisent parfaitement la frontière du domaine. La figure (d) illustre l'adjacence des cellules de Voronoï et donne, pour ce cas, la triangulation de Delaunay correspondante.

Algorithme de partitionnement

Le terme d'énergie E_V peut être minimisé avec un algorithme itératif. Il met à jour le partitionnement en effectuant des tests sur les frontières entre les différentes cellules. Prenons un *lignel* frontière $l_{i,j}$ (une arête frontière entre deux pixels) entre deux cellules C_i et C_j , $l_{i,j}$ est adjacent aux éléments V_a et V_b appartenant respectivement à C_i et C_j . Nous pouvons alors calculer trois valeurs pour E_v :

- F_{init} (la configuration initiale) : V_a appartient à C_i et V_b appartient à C_j .
- F_1 (C_i grandit et C_j rétrécit) : V_a et V_b appartiennent à C_i .
- F_2 (C_i rétrécit et C_j grandit) : V_a et V_b appartiennent à C_j .

La configuration du partitionnement est mise à jour en tenant compte du terme énergétique le plus faible entre F_{init} , F_1 et F_2 .

En itérant sur le sous-ensemble de *lignels* correspondant aux frontières entre deux cellules, nous minimisons E_V . Minimiser E_V correspond à maximiser la compacité des régions [Valette 08].

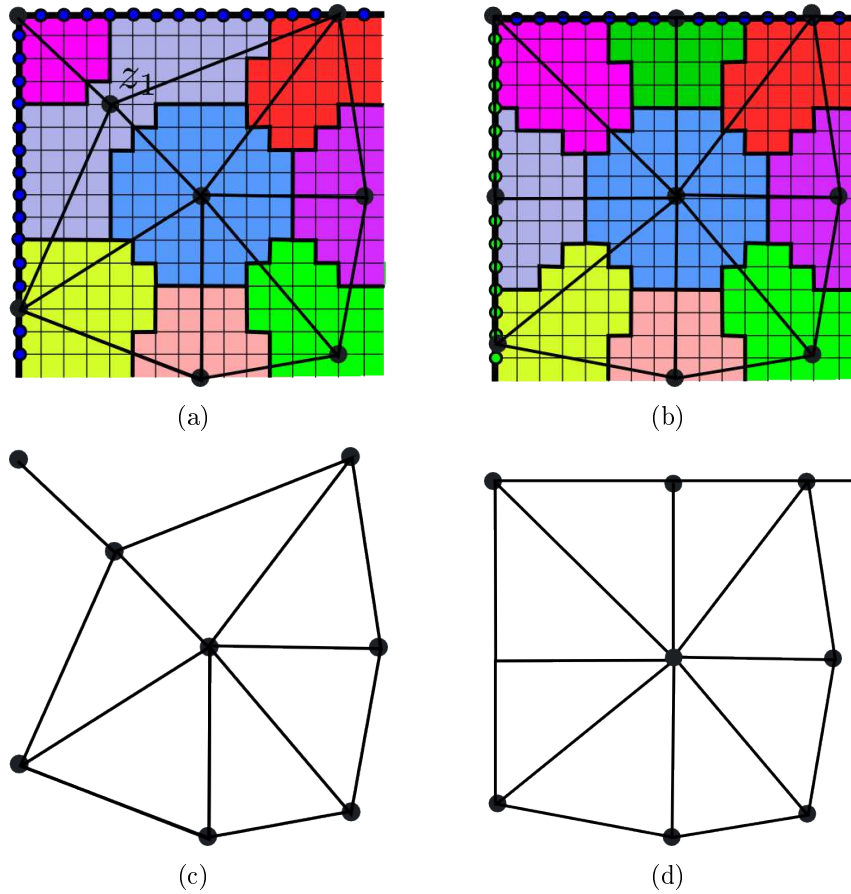


FIG. 6.7 – Prise en compte de l’orientation dans les contraintes géométriques : si l’orientation n’est pas prise en compte, la configuration illustrée en (a) peut se réaliser. Le site z_1 a été calculé à partir d’éléments disposant d’un même attribut sans prendre en compte l’orientation. Le positionnement de ce site par rapport à la frontière est incorrect. (b) illustre l’adjacence des cellules de Voronoï. La configuration illustrée en (c) prend en compte l’orientation dans le plan pour une caractéristique géométrique. Nous pouvons voir que les sites de Voronoï appartenant à des cellules dites “contraintes” modélisent parfaitement la frontière du domaine. (d) illustre l’adjacence des cellules de Voronoï et donne la triangulation de Delaunay correspondante.

Un premier intérêt de la fonction d'objectif (équation 6.3) vient de sa minimisation par des tests locaux (décrit par la figure 6.8 et l'algorithme 6.3) avec une complexité indépendante du nombre d'éléments initiaux. Un second intérêt est que le terme d'énergie est toujours positif, la convergence de l'algorithme est donc garantie. Pour calculer rapidement et efficacement le terme E_V , nous n'avons pas réellement besoin de comparer les différentes valeurs globales de F à partir des trois possibilités F_{init} , F_1 et F_2 , lors d'un test élémentaire. Nous avons juste besoin de comparer les valeurs $F_1 + F_2$ des cellules qui ont été modifiées.

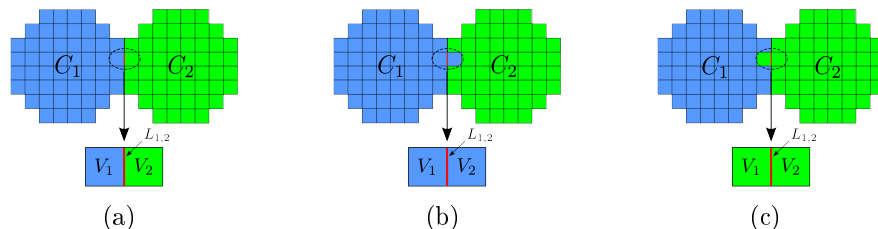


FIG. 6.8 – Tests élémentaires de minimisation : (a) la configuration initiale du partitionnement, le *lignel* $l_{1,2}$ est une frontière entre deux cellules C_1 et C_2 . (b) C_1 grandit et C_2 rétrécit. (c) C_1 rétrécit et C_2 grandit.

Afin d'augmenter la rapidité et la convergence de notre algorithme, nous effectuons la minimisation en deux étapes. La première étape consiste à créer le partitionnement en n'ajoutant aucune contrainte. Cette étape a pour effet de distribuer les cellules de façon homogène. Le site de la cellule est calculé par rapport à son barycentre. Cette étape prend fin lorsque l'algorithme de minimisation commence à converger. La deuxième étape consiste à ajouter les contraintes pour préserver les frontières (discrètes) du domaine Ω . Typiquement, ce schéma permet de réduire le temps de minimisation de l'ordre de 50 %, les calculs étant plus coûteux lors de la seconde étape. Un exemple de partitionnement est donné dans la figure 6.9 à différentes itérations. Nous pouvons voir en (a) le partitionnement initial. Le partitionnement *sans contrainte* est illustré de (b) à (e) et *avec contrainte* de (f) à (i). Nous pouvons voir qu'entre (e) et (f), seuls les sites appartenant aux cellules coupant la frontière sont modifiés. Les cellules non contraintes et contraintes s'ajustent lors de cette dernière étape. Cet algorithme de minimisation a plusieurs avantages par rapport à la relaxation de Lloyd :

- Nous conservons un suivi de la frontière entre les cellules en utilisant une simple queue FIFO contenant les *lignels* (arêtes) candidats. La complexité de la boucle sur les éléments frontières est linéaire.
- Notre algorithme de minimisation a une garantie de convergence. De plus, quand l'algorithme est près de la convergence, seulement un sous-ensemble des bords de la frontière, appartenant à une cellule, est modifié. En effet, certaines cellules ont déjà atteint, localement, leur convergence. Ainsi, pendant une boucle, nous conservons la trace des cellules qui ont été modifiées pendant la boucle précédente et nous sommes capables d'éviter d'évaluer un *lignel* lors de la mise à jour si les deux cellules voisines n'ont pas été précédemment changées. Ce test permet d'éviter des calculs inutiles et d'augmenter la vitesse du partitionnement.

Algorithme 6.3 : Algorithme de partitionnement**Données** : Le graphe dual de l'espace discret Ω **Résultat** : Un partitionnement optimisé doté de N sites qui préserve les frontières discrètes ∂_O **début**

```

    Etablir un partitionnement initial où chaque cellule a au moins un
    élément associé ;
    Remplir la queue Queue1 avec les lignels appartenant aux frontières
    discrètes  $\partial_O$ ;
    Vider la queue Queue2;
    répéter
        Modifications = 0;
        tant que Queue1 non vide faire
            Prendre un lignel candidat  $l$  de Queue1;
            si le lignel  $l$  est frontière à deux cellules  $i$  et  $j$  et qu'il n'a pas
            encore été testé dans cette boucle alors
                 $C_i$  et  $C_j$  sont les cellules pour lesquelles  $l_{i,j}$  est frontière;
                pour les trois configurations possibles (figure 6.8) faire
                    pour les deux cellules  $C_i$  et  $C_j$ , calculer  $z_i$  et  $z_j$  faire
                        si La cellule coupe la frontière  $\partial_O$  alors
                            Le site  $z_k$  de la cellule  $k$  est calculé par rapport aux
                            éléments frontières  $B_k$ ;
                        fin
                    sinon
                        Le site  $z_k$  est fixé comme étant le barycentre de la
                        cellule;
                    fin
                fin
            Comparer les valeurs  $F_i + F_j$  entre les trois configurations;
            si l'énergie la plus faible ne correspond pas à la
            configuration initiale alors
                Mettre à jour la cellule permettant de minimiser
                l'énergie;
                Mettre les lignels de l'élément modifié dans la queue2;
                Modifications++;
            fin
        sinon
            Mettre le lignel  $l$  dans la queue2
        fin
    fin
    Permutation de Queue1 et Queue2;
    jusqu'à Modifications == 0 ;
fin

```

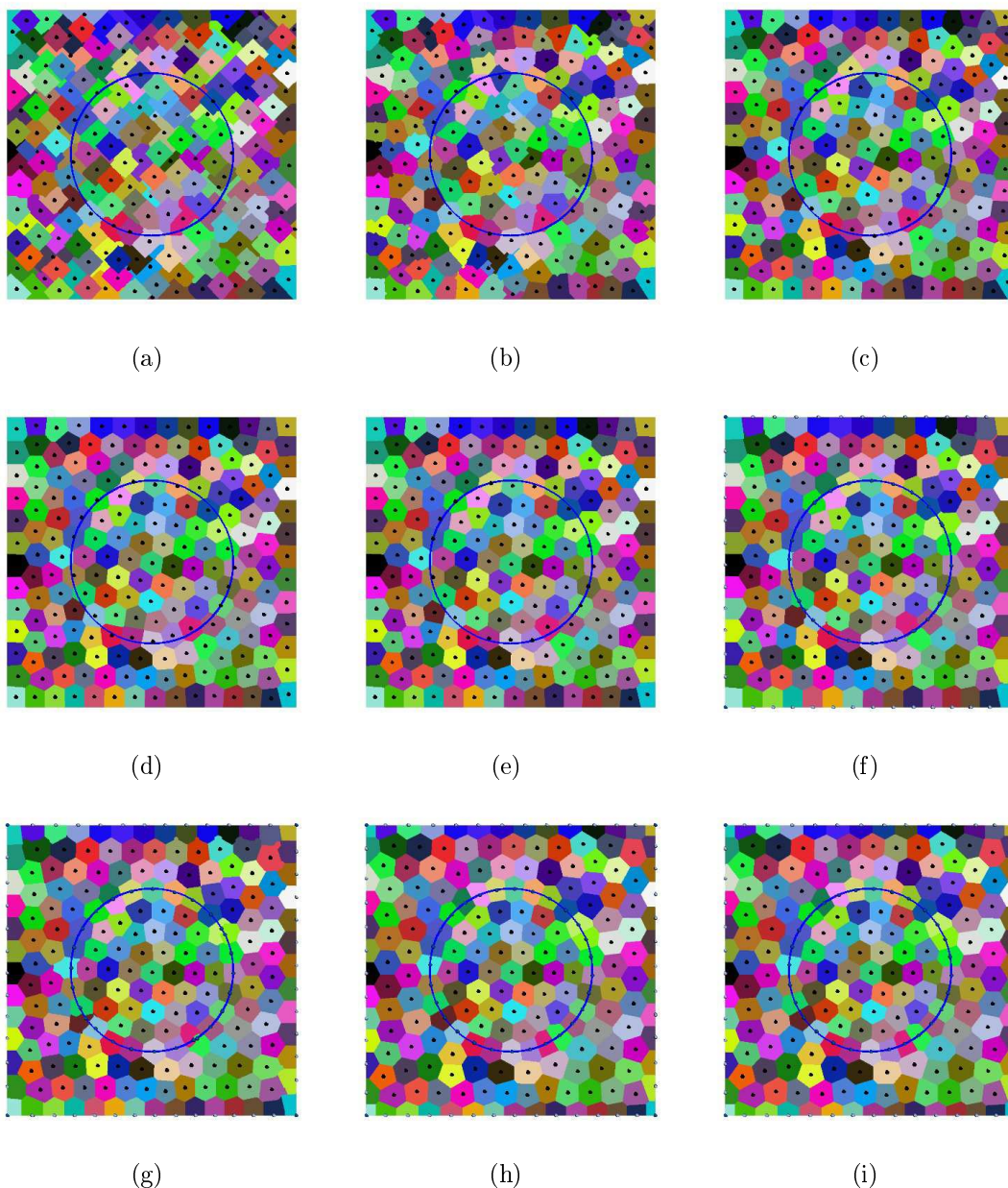


FIG. 6.9 – Processus de partitionnement uniforme : (a) partitionnement initial ((b) - (e)) évolution du partitionnement *sans contrainte* ((f) - (i)) *avec contrainte*.

Validité des cellules

Une fois le partitionnement réalisé, chaque cellule doit être associée à un site et ce site doit avoir une seule et même composante connexe. Une façon de respecter cette contrainte, après la convergence de l'algorithme, est d'effectuer une étape de nettoyage des cellules ayant plusieurs composantes connexes et de reprendre l'étape de minimisation. Ces deux étapes de minimisation et de "nettoyage" peuvent être répétées jusqu'à satisfaction de la contrainte.

Dans nos expérimentations, la convergence est proche lorsque le nombre d'éléments modifiés entre les *lignels* pendant une itération est plus petit que 0.1 %. La figure 6.10 montre l'effet de l'étape de "nettoyage" sur un partitionnement comportant un défaut (a). La cellule bleu possède deux composantes connexes. L'étape de nettoyage (b) enlève la plus petite composante connexe, représentée en blanc, celle-ci n'est plus affectée à une cellule. Après plusieurs itérations de l'étape de minimisation, la composante déconnectée a été absorbée par la cellule qui l'englobe (c).

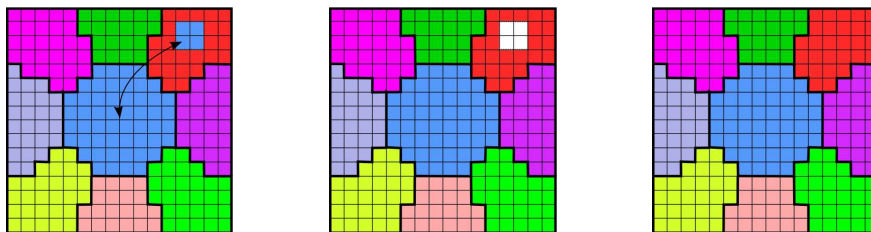


FIG. 6.10 – Processus de nettoyage du partitionnement : (a) le partitionnement possède un défaut, la cellule bleu possède deux composantes connexes (a) une étape de nettoyage enlève la plus petite composante connexe, représentée en blanc, celle-ci n'est plus affectée à une cellule (c) Après des itérations supplémentaires de l'étape de minimisation, la composante déconnectée a été absorbée par la cellule qui l'englobe

Initialisation du partitionnement

Nous avons décrit précédemment l'algorithme de partitionnement qui permet d'optimiser le positionnement de N sites afin d'approcher un DVC. Une étape d'initialisation doit être réalisée pour associer au moins un élément de l'espace discret à une cellule de la partition. Nous devons donc fournir à cet algorithme une configuration initiale du partitionnement comprenant ses N sites. Nous plaçons aléatoirement N germes dans l'espace discret Ω . Chaque germe correspond alors à une cellule distincte contenant un ensemble d'éléments connexes. Les éléments restants appartiennent à aucune cellule, ce qui est équivalent à associer ces éléments dans une cellule vide. L'espace discret Ω , à cette étape, possède $N + 1$ cellules : N cellules contenant un germe, correspondant à un ensemble d'éléments V connexe, et la cellule nulle contenant les autres éléments. Pour commencer le processus d'optimisation du partitionnement, une étape d'initialisation, basée sur un algorithme "glouton", est utilisée. Pour chaque germe, nous choisissons aléatoirement un élément libre V (un élément qui n'a été précédemment associé à aucune cellule) et nous développons la cellule autour de V en absorbant les éléments libres qui sont adjacents. L'optimisation du partitionnement peut maintenant commencer. Pour chaque *lignel* l , adjacent à deux cellules C_i et C_j , nous effectuons un test avant le calcul de l'énergie pour les trois configurations possibles : si l'un des deux éléments appartient à la cellule vide, elle est attribuée automatiquement à l'autre cellule, sans aucun calcul d'énergie.

Dans le cadre d'un partitionnement adaptatif, une carte de densité $\rho(x)$ est utilisée pour spécifier la densité des cellules dans les différentes régions de l'espace discret. L'initialisation du partitionnement doit alors être adaptative pour une convergence plus rapide de l'algorithme d'optimisation du partitionnement.

Après l'initialisation, les régions de l'espace discret, avec une densité élevée, devraient contenir plus de cellules que les régions de densité plus faible. Pour initialiser le partitionnement de manière adaptatif, les cellules sont distribuées selon la fonction de densité $\rho(x)$.

Dans ce but, nous calculons d'abord la densité moyenne globale des cellules :

$$D = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \rho_j \quad (6.9)$$

où N est le nombre de cellules désirés. Cette densité correspond à la densité moyenne accumulée que chaque cellule devrait avoir à la fin du processus d'optimisation. L'algorithme 6.4 prend alors en compte cette densité. Les cellules sont développées jusqu'à obtenir la densité souhaitée. Cette approche permet d'obtenir un partitionnement de Ω par approximation d'un DVC. Les N futurs, sommets du maillage, peuvent être distribués, de façon uniforme, ou adaptés en prenant en compte une fonction de densité $\rho(x)$. Ce dernier point sera détaillé dans la partie suivante.

Algorithme 6.4 : Initialisation d'un partitionnement avec N cellules.

Données : Un espace discret Ω et N cellules à initialiser

Résultat : Un partitionnement initial de $N + 1$ cellules

début

 Construire un tableau d'accès aléatoire aux éléments ;

 Calculer la densité moyenne des cellules à partir de la carte de densité ρ ;

tant que *Tous les éléments n'ont pas été visités et que toutes les cellules n'ont pas été engendrées* **faire**

 Choisir un élément "libre" V n'appartenant pas à une cellule;

pour V **faire**

 Cet élément devient le germe d'une nouvelle cellule C_i ;

 Cette cellule grandit jusqu'à obtenir la densité désirée en absorbant des éléments "libres" initialement adjacents à V ;

fin

fin

si *il reste des cellules non engendrées* **alors**

 Choisir aléatoirement un élément qui est attribué pour chaque cellule non engendrée.;

fin

fin

6.2.3 Génération des éléments du maillage

Une fois le DVC approché, nous pouvons commencer la génération du maillage. Cette génération du maillage est obtenue en utilisant la dualité géométrique entre un diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. Nous utilisons l'approche variationnelle pour regrouper des voxels par approximation d'un Diagramme de Voronoï Centroïdal discret puis nous obtenons le maillage tétraédrique en construisant le dual. Le passage au dual nécessite la résolution d'ambiguïtés liées au partitionnement d'un espace discret. Notre approche de génération du maillage se décompose en trois étapes :

- Obtention de l'ensemble des tétraèdres admissibles à partir du DVC.
- Propagation par front d'onde des éléments du maillage à partir de l'ensemble défini précédemment.
- Résolution des ambiguïtés dues au DVC discret.

Ambiguïtés inhérentes au DVC discret

Notre algorithme de partitionnement crée une approximation du diagramme de Voronoï mais deux types d'ambiguïtés inhérentes au partitionnement d'un espace discret sont alors recensées dans les configurations suivantes :

- Quatre cellules possèdent un cycle de longueur 4 et aucun cycle interne de longueur 3.
- Quatre cellules possèdent un cycle de longueur 4 et plus de deux cycles internes de longueur 3.

Ces ambiguïtés sont analogues au cas continu où des points du diagramme de Voronoï sont cocycliques. La première ambiguïté produit une insuffisance du nombre d'arêtes et la seconde un surplus (figure 6.11). Il en résultera un manque ou un surplus de tétraèdres dans les zones d'ambiguïtés du maillage généré. On notera que ces ambiguïtés peuvent être voisines et donner d'autres cas d'ambiguïtés. Les sites z_i des cellules de Voronoï C_i constituent les sommets de notre maillage. Les relations d'adjacence entre les cellules de Voronoï permettent de construire l'ensemble Γ des tétraèdres admissibles.

Obtention de l'ensemble des tétraèdres admissibles

La première phase de l'algorithme calcule l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ . L'obtention de Γ nécessite trois étapes :

- Création d'un graphe d'adjacence Ψ des cellules du DVC.
- Recherche des cycles dans le graphe d'adjacence Ψ pour établir l'ensemble des faces possibles Θ .
- Création de l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ à partir de l'ensemble Θ .

La première étape concerne donc la création d'un graphe d'adjacence Ψ portant sur les cellules du DVC. Ce graphe est obtenu en parcourant les éléments du volume discret Ω (algorithme 6.5).

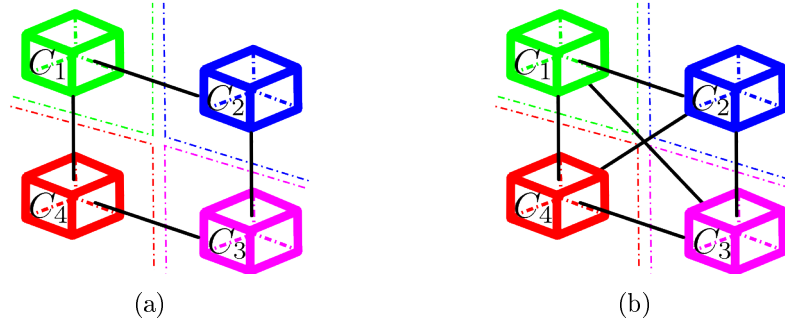


FIG. 6.11 – Illustration des ambiguïtés 3D : (a) Quatre cellules possèdent un cycle de longueur 4 et aucun cycle interne de longueur 3, cette première ambiguïté produit une insuffisance du nombre d'arêtes (b) Quatre cellules possèdent un cycle de longueur 4 et plus de deux cycles internes de longueur 3, cette seconde ambiguïté produit un surplus d'arêtes.

Algorithme 6.5 : Création d'un graphe d'adjacence Ψ portant des cellules du DVC

Données : Un DVC discret constitué de N sites z_i

Résultat : Un graphe d'adjacence $\Psi(V, E)$ du DVC discret

début

 Créer les sommets v du graphe à partir des sites z_i du DVC;

pour *Chaque arête appartenant au graphe dual $\bar{G}$* **faire**

 Obtenir les *pointels* p_a et p_b de l'arête;

 Identifier les attributs des *pointels* i_a et i_b ;

si $i_a \neq i_b$ *et l'arête $e_{a,b}$ n'existe pas* **alors**

 Créer l'arête $e_{a,b}$ du graphe d'adjacence Ψ ;

fin

fin

fin

On dispose maintenant d'un graphe $\Psi(V, E)$. V est l'ensemble des sommets et E est l'ensemble des arêtes du graphe. La seconde étape consiste à effectuer une recherche de cycle "minimum" dans le graphe Ψ pour établir l'ensemble des faces possibles Θ . Nous rappelons la définition d'un cycle dans le cas général.

Définition 6.1. *Un cycle dans le cas général est défini par un ensemble d'arêtes $\{e_1, \dots, e_n\}$ distinctes deux à deux, telles que $\forall i, \exists u, v, w$, tel que $e_i = (u, v)$ et $e_{i+1} = (v, w)$, autrement formulé les arêtes forment un chemin. De plus, on a une fermeture du chemin, $e_1 = (u, v)$ $e_n = (w, x) \rightarrow x = u$*

Par définition un cycle dit "minimal" est un cycle élémentaire qui ne repasse pas deux fois par un même sommet (sauf fermeture du cycle). Nous cherchons à obtenir l'ensemble des cycles minimaux dans le graphe Ψ .

Il existe plusieurs méthodes de recherche d'un cycle élémentaire de longueur k dans un graphe. Plaçons nous dans le cas général :

- On cherche un chemin de longueur k .
- Ce chemin est élémentaire : il ne repasse pas deux fois par un même sommet ou n'utilise pas deux fois une même arête.

Une méthode connue pour obtenir ce chemin est la multiplication de matrices d'adjacences. Soit le graphe d'adjacence $\Psi(V, E)$, on établit une matrice d'adjacence $A_{(i,j) \in \{1 \dots V\}}$. $A_{i,j} = 1$ si et seulement si $(i, j) \in E$. Pour une matrice $M = A^2$, on se rend compte que $M_{i,j}$ est égal au nombre de chemins de longueur deux entre i et j .

En effet,

$$M_{i,j} = \sum_{k=0}^V A_{i,k} \times A_{k,j} \quad (6.10)$$

Or $A_{i,k} \times A_{k,j}$ vaut 1 si et seulement si $A_{i,k}$ et $A_{k,j}$ valent 1, c'est à dire que (i, j, k) est un chemin de longueur 2 de i à j . Donc ce produit est égal au nombre de ces chemins. On peut ainsi recommencer le processus k fois pour obtenir, pour chaque couple (i, j) , le nombre de chemins de longueur k qui relient i à j . Cependant, avec ce type d'approche, on n'obtient pas des chemins élémentaires. En effet, les chemins obtenus peuvent repasser par les mêmes sommets. Par exemple, si à une étape, on obtient $M_{i,i} = 1$, on a une boucle de retour sur i pour un chemin de longueur k . A l'étape suivante, certains des chemins, établis pour aller de i à ces voisins, seront des chemins qui bouclent sur i . Pour résoudre ce problème, la diagonale de la matrice est mise à zéro. Cela évite de repasser par un même point. Dans [Zwick 97], les auteurs proposent un algorithme de recherche de k -cycle. Ils démontrent aussi la complexité de leur algorithme. La complexité est de $O(m^{2-\frac{2}{k}})$ pour des cycles pairs et $O(m^{2-\frac{2}{k+1}})$ pour des cycles de longueur impaire. On donne ici les points clés de l'algorithme :

- Chercher tous les chemins de longueur k et $k + 1$.
- Utiliser la théorie des sous-collections représentatives : créer des sous-ensembles qui s'intersectent entre eux si et seulement si les ensembles de départ s'intersectent. Cette théorie est utilisée pour trouver des chemins qui n'intersectent qu'en leur extrémités, on obtient ainsi des cycles par recollement des chemins.

Cet algorithme permet d'obtenir l'ensemble des cycles triangulaires minimaux du graphe.

La dernière étape consiste à obtenir l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ à partir de l'ensemble Θ . Pour cela, nous essayons de former des tétraèdres en utilisant un graphe d'adjacence de l'ensemble des faces possibles Θ . Cet ensemble Γ donne, pour une face f , les sommets possibles pour construire un tétraèdre. Si le DVC ne possède pas d'ambiguïtés, le nombre de sommets est égal à deux pour une face interne et à un pour une face externe. Une face externe est une face appartenant à la frontière $\partial\Omega$. Une face interne est situé à l'intérieur du domaine Ω . Dans le cas où le DVC comporte des ambiguïtés, le nombre de sommets pour une face donnée est supérieur à un pour une face externe et à deux pour une face interne.

La figure 6.12 montre le graphe d'adjacence Ψ (a), l'ensemble des faces possibles Θ (b) et l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ (c). Ce dernier ensemble est utilisé par la suite pour générer le maillage à l'aide d'un algorithme de propagation par front d'onde.

Structure du maillage

Généralement, dans une méthode de propagation par front d'onde, deux maillages sont présents simultanément en mémoire :

- un maillage de fond.
- un maillage en cours de génération.

Les deux sont structurés à l'identique, à la différence près de la structure des éléments. Dans notre approche, nous utilisons une structure de fond composée du front d'onde et de l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ , ainsi que du maillage en cours de génération. Les informations essentielles sont les coordonnées des points (correspondants aux sites du DVC) et la description des éléments en termes de sommets (les cellules du DVC). Un maillage a la structure suivante :

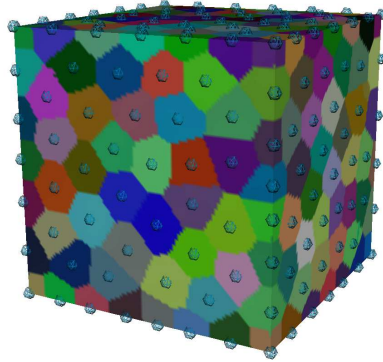
- Le nombre de points et de tétraèdres du maillage.
- Le tableau correspondant aux trois coordonnées du maillage.
- Le tableau des tétraèdres du maillage (leurs quatre sommets).

Dans la figure 6.13, nous avons représenté les liens entre les structures géométriques utilisées pour la génération du maillage à l'aide d'une structure de fond.

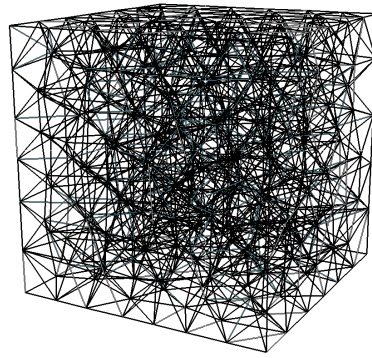
Propagation par front d'onde

Nous utilisons un algorithme de propagation par front d'onde (algorithme “glouton”) pour construire le maillage en utilisant les tétraèdres de Γ . Deux tétraèdres adjacents sont sélectionnés dans une région de Γ sans ambiguïté. Le front est créé avec les faces externes des deux tétraèdres construits. Nous ajoutons ensuite des tétraèdres jusqu'à ce que le front coïncide avec $\partial\Omega$.

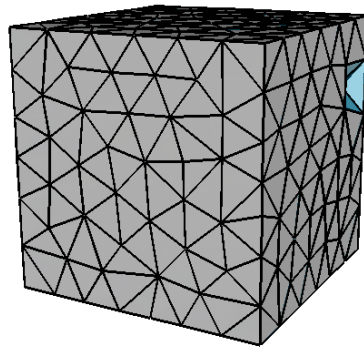
Critères de validité : Ces critères permettent d'assurer la conformité du maillage à chaque création d'un nouvel élément.



(a)



(b)



(c)

FIG. 6.12 – Illustration du processus d'obtention de l'ensemble des tétraèdres admissibles : (a) le graphe d'adjacence Ψ (b) l'ensemble des faces possibles Θ (c) l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ . Ce dernier comporte une ambiguïté qui se traduit par une absence de tétraèdre sur une face de la boîte.

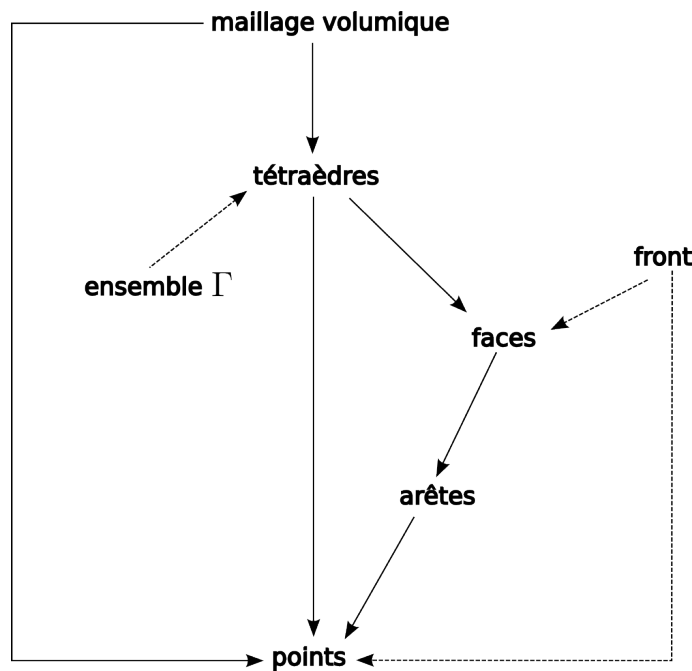


FIG. 6.13 – Organisation des structures géométriques : En trait plein, les références au maillage volumique. En pointillés, les références aux structures de fond permettant la génération du maillage.

Définition 6.2. *Un tétraèdre est valide si les trois conditions suivantes sont remplies :*

1. *le volume du tétraèdre est strictement positif ;*
2. *le tétraèdre n'intersecte pas le front ;*
3. *l'intérieur du tétraèdre ne contient aucun point ;*

La condition 1 est vérifiée, l'orientation et la définition des faces étant assurées par l'algorithme. La condition 2 se résume à vérifier que les arêtes créées n'intersectent aucun élément voisin. Dans notre cas, les faces comportant des ambiguïtés ne sont pas insérées. Dans ce cas, la condition 3 n'est pas à vérifier car les points de la triangulation sont les sites z_i du DVC. La figure 6.14 illustre le processus de propagation par front d'onde.

Résolution des ambiguïtés

Après la phase de propagation, les ambiguïtés induites par le DVC ont créés des lacunes dans le maillage volumique (figure 6.15). Nous avons estimé ce déficit à 10% du nombre total de tétraèdres. Nous détectons ces artefacts en recherchant les faces internes ne possédant qu'un seul tétraèdre. Nous considérons des groupes, de 6 faces ou plus, voisines car elles permettent un remaillage local. Nous utilisons un algorithme de type “glouton” pour dissocier les différents groupes. Finalement, pour les trianguler, nous utilisons, localement, une transformation topologique et/ou une triangulation de Delaunay contrainte.

Algorithme 6.6 : Propagation par front d'onde

Données : L'ensemble des tétraèdres admissibles Γ et le DVC**Résultat** : Un maillage tétraédrique du domaine discret Ω Créer les sommets v du maillage tétraédrique à partir des sites z_i du DVC;**pour** *Chaque face f appartenant à l'ensemble des tétraèdres admissibles Γ*
faire **si** *Deux tétraèdres sont adjacents à f* **alors**

Créer les deux tétraèdres;

 Remplir la queue *Front* avec les faces externes des deux tétraèdres
 construits; **tant que** *Front non vide* **faire** Prendre une face candidate f de *Front*; **si** *la face f ne comporte aucune ambiguïtés et cette face*
 n'appartient pas à deux tétraèdres **alors**

Tester l'orientation du futur tétraèdre;

si *le futur tétraèdre est adjacents à f* **alors**

Créer le tétraèdre;

 Remplir *Front* avec les faces externes du tétraèdre
 construit; **fin** **fin** **fin** **fin****fin**

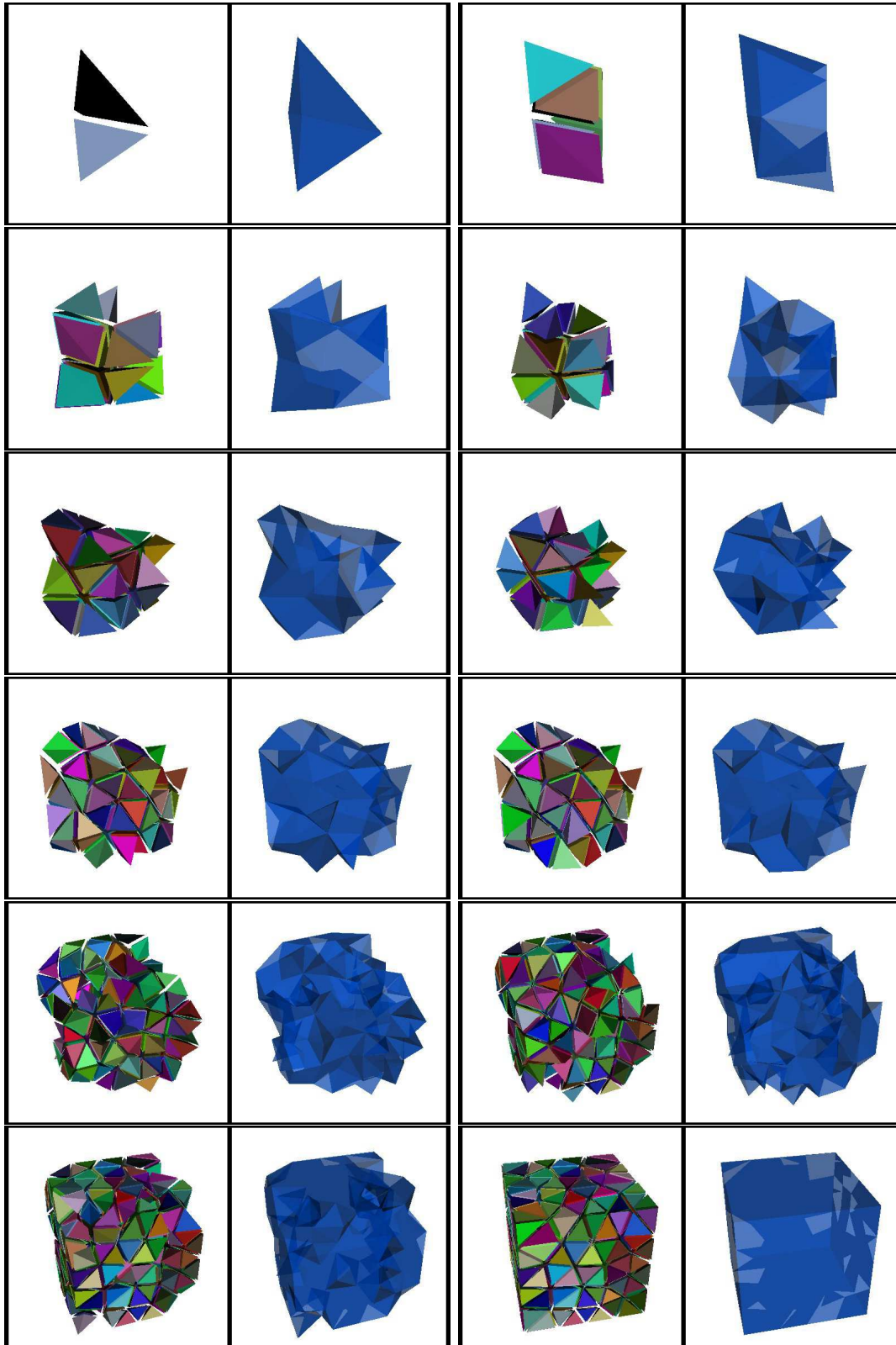


FIG. 6.14 – Illustration du processus de propagation par front d'onde. A gauche de l'imagette, la génération des éléments du maillage. A droite de l'imagette, l'avancement du front.

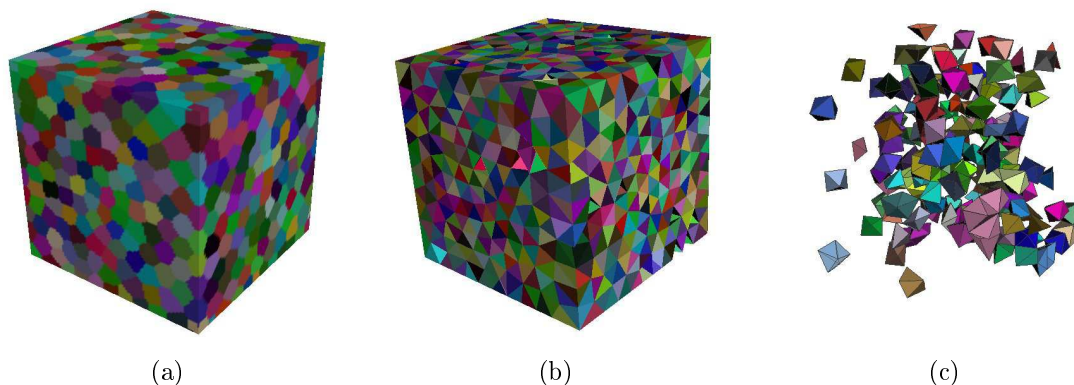


FIG. 6.15 – Illustration des ambiguïtés dues à un DVC discret : (a) partitionnement discret (b) maillage comportant des ambiguïtés (c) représentation des ambiguïtés.

Utilisation de patrons Si le nombre de sommets du groupe est inférieur ou égale à six, nous pouvons procéder à une décomposition tétraédrique en utilisant un système de patrons. La figure 6.16 donne les patrons utilisés. Lors de cette décomposition, nous cherchons à maximiser la qualité des éléments générés selon un critère de qualité donné.

Triangulation de Delaunay Contrainte Lorsque le nombre de sommets est supérieur à six, la décomposition devient complexe. Nous utilisons alors une triangulation de Delaunay Contrainte. Cette triangulation est réalisée grâce à l’algorithme proposé par Si et Gärtner [Si 05a]. Les données d’entrée de cet algorithme sont les groupes de lacunes qui ont plus de six sommets. L’algorithme a été implémenté par Si et Gärtner dans un code C++ (TetGen), que nous utilisons.

6.2.4 Intégrité de la frontière

Il est nécessaire de rappeler que l’algorithme ne peut pas identifier la frontière du domaine après le partitionnement. Il peut seulement identifier un ensemble de sommets qui appartient ou n’appartient pas à la frontière du domaine. Il en résulte des ambiguïtés topologiques sur la frontière. La figure 6.17 illustre une ambiguïté (“un pic”) au niveau du front. Une arête voisine à quatre tétraèdres est perpendiculaire à la frontière.

Dans notre approche, chaque tétraèdre est alloué à un objet en comptabilisant les voxels qu’il contient. Si des voxels appartiennent à deux objets différents, le tétraèdre est alloué à la classe dominante. Le processus d’allocation permet alors de résoudre les ambiguïtés topologiques en détectant les tétraèdres appartenant initialement à deux régions distinctes du domaine. Nous procédons alors à une transformation topologique pour corriger la frontière du domaine. Ces transformations sont présentées dans la section 6.3. Un exemple 2D du processus est illustré par la figure 6.18.

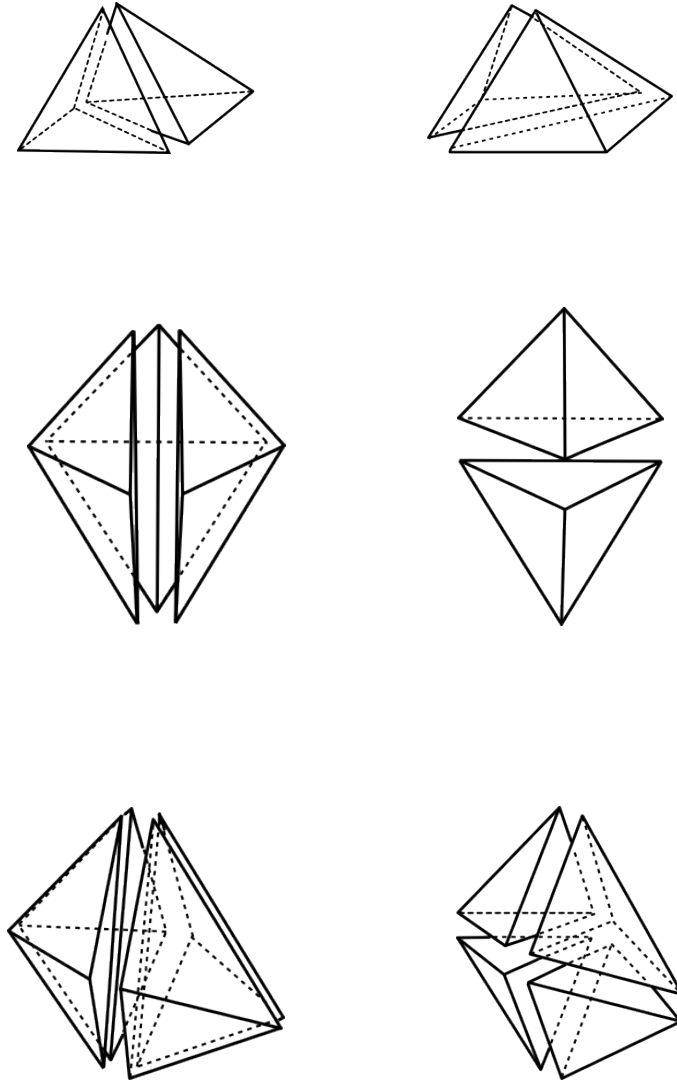


FIG. 6.16 – Patrons utilisés pour résoudre les ambiguïtés lorsque $n \leq 6$

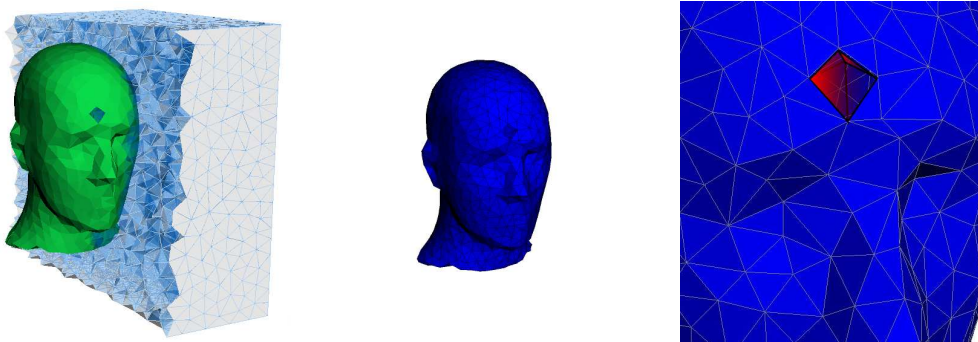


FIG. 6.17 – Illustration d'une ambiguïté topologique sur la frontière

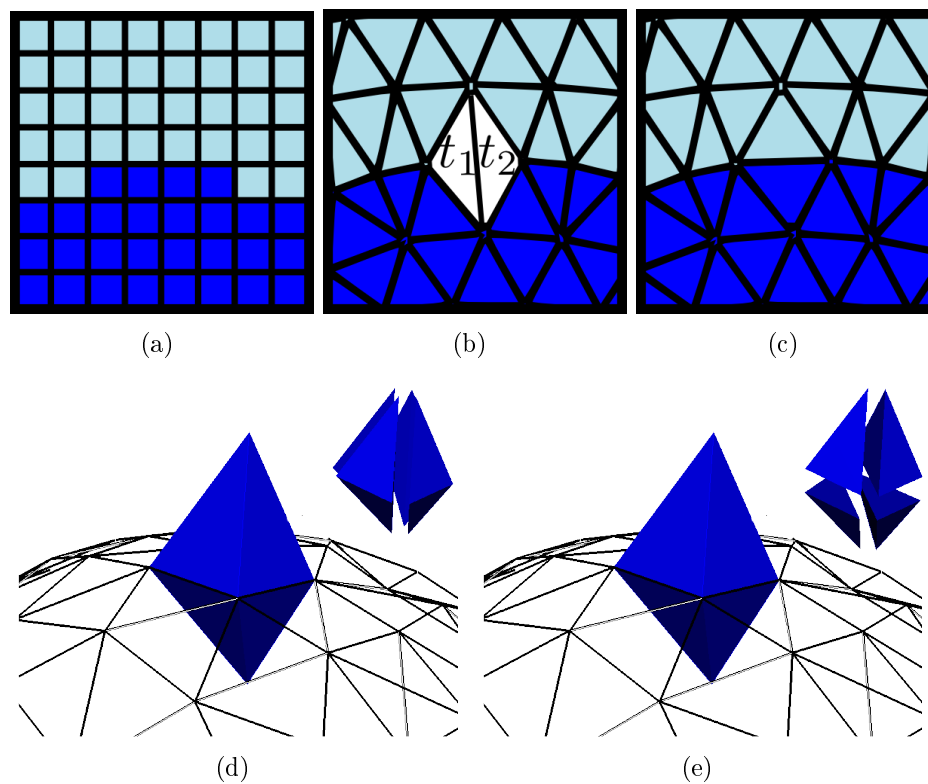


FIG. 6.18 – Illustration du processus de restauration : (a) image composée de deux régions (b) la triangulation obtenue possède une ambiguïté topologique : les triangles t_1 et t_2 appartiennent à deux régions (c) la restauration de la frontière est réalisée par le basculement d'une arête (d) En 3D, un ensemble de tétraèdres appartient à deux régions (e) la restauration de la frontière est réalisée par une transformation topologique 4-4 (figure 6.19).

6.2.5 Qualité géométrique d'une T.V.C

Les approches de type “Voronoi-Delaunay” reposent sur des bases mathématiques solides. Dans le plan, la triangulation de Delaunay permet d’obtenir une “bonne” triangulation (triangles quasi équilatéraux) si les points sont bien répartis. En trois dimensions, un critère équivalent pour l’angle solide entre deux faces, n’est pas vérifié et la triangulation de Delaunay ne conduit pas forcément à un bon maillage. La fonction d’énergie E_V (équation 6.2) à minimiser a des propriétés théoriques intéressantes, mais il n’y a aucun résultat théorique portant sur la qualité des éléments générés en minimisant cette fonctionnelle. L’approche utilisée, pour résoudre les ambiguïtés du DVC, fait appel à une triangulation de Delaunay contrainte. Dès lors que l’on souhaite obtenir une triangulation qui respecte la frontière, force est de constater qu’il faut quitter cette théorie et qu’un certain nombre d’éléments plats (*slivers*) peuvent être générés.

6.3 Optimisation topologique

Dans cette section, nous présentons notre algorithme original d’optimisation. Nous utilisons un ensemble de modifications topologiques du maillage pour augmenter sa qualité. Nous ne procédons pas à des insertions ou suppressions de sommets, mais nous modifions la connectivité de ces sommets (bascules d’arêtes en 2D). Les transformations 3 – 2 et 2 – 3 sont présentées dans [Shewchuk 02a, George 03]. En trois dimensions, ces opérations peuvent ajouter ou supprimer des arêtes ou des faces et peuvent modifier le nombre de tétraèdres. Nous notons ces transformations par le nombre de tétraèdres (figure 6.19) à l’origine m et le nombre de tétraèdres à l’arrivée n sous la forme $m - n$:

- La transformation 3-2 porte sur la configuration formée par trois tétraèdres partageant une même arête. On notera que cette transformation peut être généralisée sur m tétraèdres partageant une même arête. Dans ce cas le cycle des tétraèdres autour de cette arête forme un polygone qui est ensuite triangulé. Les faces de cette triangulation sont associées aux sommets de l’arête pour former la nouvelle configuration qui est de $2m - 4$ tétraèdres. Cette transformation topologique supprime une arête et ajoute une ou plusieurs faces [Shewchuk 02a].
- La transformation 2-3 est l’inverse de la transformation 3-2. On notera que cette transformation peut être étendue à son voisinage. L’extension consiste à regarder si les tétraèdres des faces voisines de la face courante forment un polyèdre convexe. Notons que cette transformation topologique supprime une ou plusieurs faces et construit une arête [Shewchuk 02a].
- La transformation 5-4 permet de supprimer les mauvais éléments nommés “*slivers*”. Elle supprime le tétraèdre adjacent aux quatre autres et les oriente dans le même sens. Cette bascule n’existe pas dans la littérature. Ce type de transformation peut se résumer à une transformation 3-2 qui prend en compte l’ensemble des tétraèdres adjacents à un tétraèdre en sélectionnant la meilleure configuration possible.

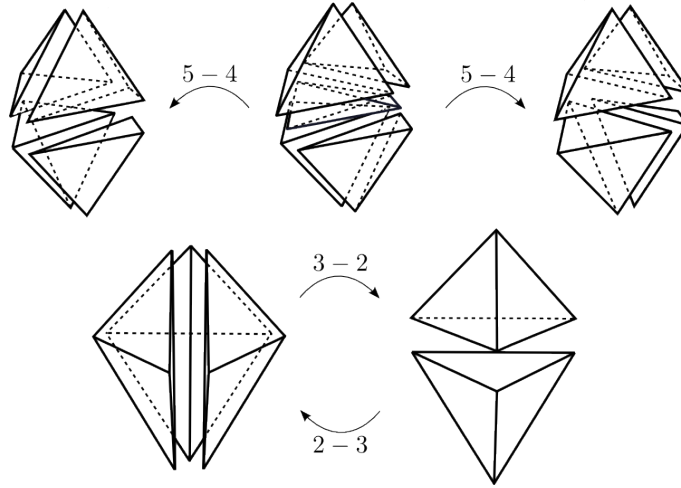


FIG. 6.19 – Transformations topologiques notées 5-4, 2-3 et 3-2

L'algorithme 6.7 d'optimisation topologique nécessite les opérations suivantes. Une queue de priorité $Q_{(i, qual)}$ est créée, elle est constituée d'un ensemble d'éléments i et de l'indice de qualité $qual$ associé à l'élément i ou un élément voisin de i . L'élément i choisi étant toujours celui ayant le moins bon facteur de forme. La queue de priorité contient tous les éléments du maillage ne satisfaisant pas ce critère. Les éléments placés dans la queue de priorité sont de différents types selon la transformation topologique effectuée :

- Ils correspondent aux faces pour une transformation 2-3.
- Ils correspondent aux arêtes pour une transformation 3-2.
- Ils correspondent aux tétraèdres pour une transformation 5-4.

Les opérations topologiques sont réalisées jusqu'à l'obtention de la qualité souhaitée selon un critère donné, ou lorsque aucune nouvelle transformation ne peut plus être effectuée.

Les quatre transformations topologiques sont suffisantes pour l'amélioration de la qualité du maillage. L'apport de ces transformations sera démontré par des exemples numériques divers dans la dernière partie de ce manuscrit.

Algorithme 6.7 : Algorithme d'optimisation du maillage par transformations topologiques.

Données : Un maillage tétraédrique du domaine discret Ω

Résultat : Un maillage tétraédrique du domaine discret Ω optimisé

début

 Calculer la qualité des tétraèdres par rapport aux éléments i (arêtes ou faces selon la transformation);

pour chaque élément i du maillage (arêtes ou faces selon la transformation) **faire**

 Trouver le tétraèdre de plus mauvaise qualité T_{old} parmi les voisins de i ;

si la qualité de T_{old} ne satisfait pas le critère désiré **alors**

 Insérer l'élément dans la queue de priorité $Q_{(i,qual)}$;

fin

fin

tant que $Q_{(i,qual)}$ non vide et des transformations sont réalisables **faire**

 Prendre un élément candidat i de $Q_{(i,qual)}$;

$Q_{old} = qual$;

 Appliquer la transformation topologique pour les tétraèdres voisins de i ;

 Calculer la qualité Q_{new} du tétraèdre de plus mauvaise qualité T_{new} pour cette nouvelle configuration;

si $Q_{new} > Q_{old}$ **alors**

 Effectuer la transformation topologique;

si Q_{new} est inférieur au critère d'optimisation fixé **alors**

 Insérer les éléments de T_{new} dans $Q_{(i,qual)}$;

fin

fin

fin

fin

6.4 Schéma du mailleur

On résume ici les étapes de construction du maillage (figure 6.20) :

- 1 Création du graphe dual et identification des frontières à partir du domaine discret Ω .
- 2 Distribution de N sites par approximation d'un DVC en utilisant une approche variationnelle.
- 3 Création d'un graphe d'adjacence à partir des cellules du DVC.
- 4 Recherche de cycles triangulaires dans le graphe d'adjacence.
- 5 Obtention de l'ensemble des tétraèdres admissibles à partir du graphe d'adjacence.
- 6 Maillage par propagation d'un front d'onde.
Tant que le front n'est pas vide, créer un élément :
 - Choix d'une face d'un front.
 - Test de validité et si validité, création de l'élément.
 - Mise à jour du maillage et du front.
- 7 Résolution des ambiguïtés et allocation à la classe dominante.
- 8 Analyse de la qualité du maillage.
- 9 Optimisation topologique éventuelle du maillage

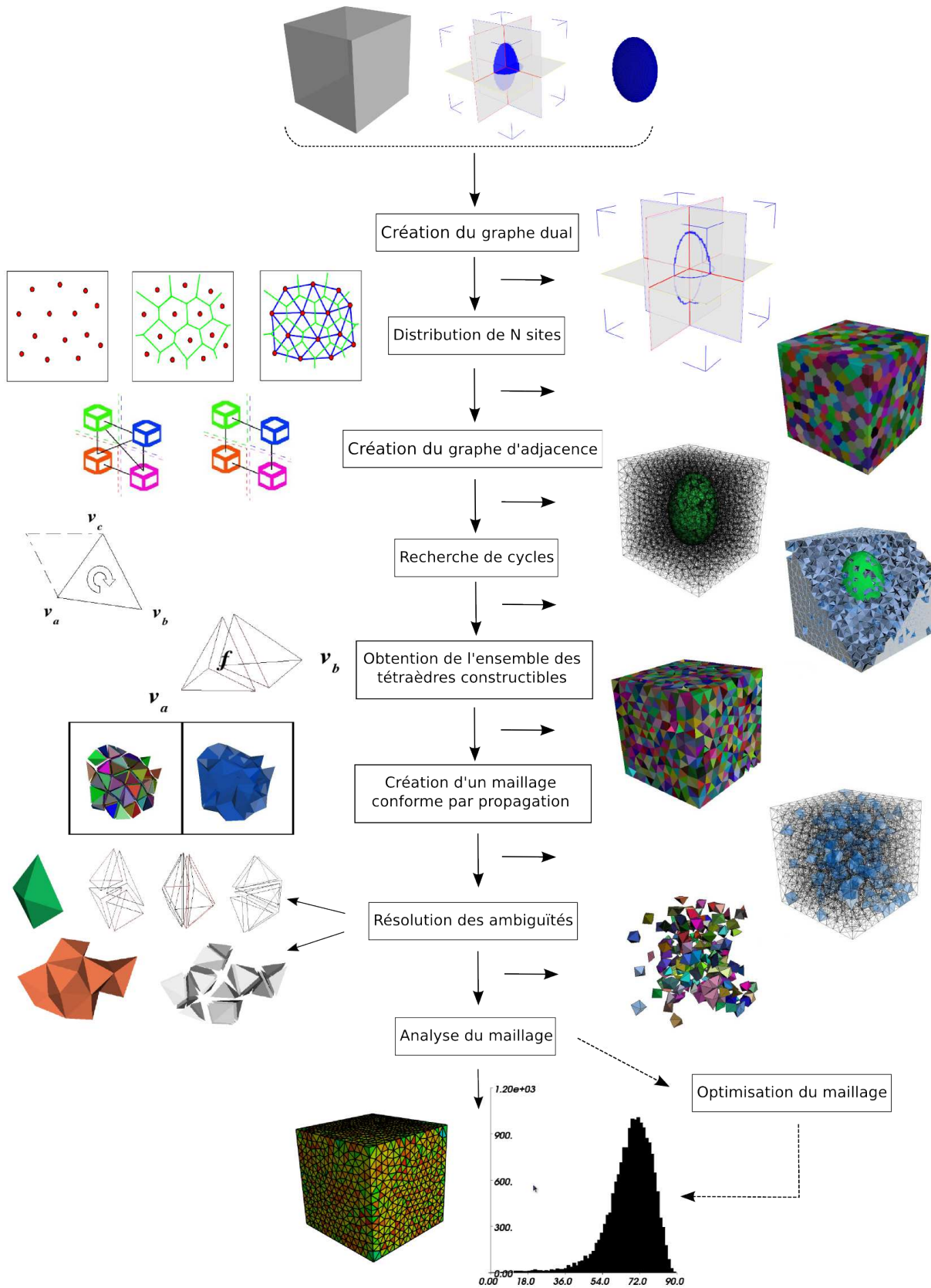


FIG. 6.20 – Schéma du mailleur

Conclusion

Nous avons décrit toutes les étapes de la nouvelle méthode que nous proposons. La génération du maillage peut se heurter à des ambiguïtés induites par le partitionnement d'un espace discret, mais des remèdes ont été trouvés. Enfin, bien que le cadre des DVC apporte un positionnement "optimal" des sommets du maillage et que de nombreux contrôles soient effectués lors du processus de génération des éléments pour assurer sa qualité, nous avons vu qu'il est souhaitable d'ajouter à la méthode proposée une étape d'optimisation topologique du maillage. Dans la partie suivante, nous construisons des cartes de densités afin d'obtenir des maillages non plus uniformes mais adaptés. L'approche 2D a été présentée au colloque national GRETSI [Dardenne et al., 2009d]. Les résultats complets ont été présentés à la conférence *Computer Graphic International* (CGI) et publiés dans la revue internationale "*The Visual Computer*", [Dardenne et al., 2009a].

Dans le cadre de la simulation électromagnétique et thermique, il est préférable de générer des maillages isotropes, dont la taille des éléments est localement adaptée, en fonction de critères physiques ou géométriques. Cependant, il est impossible de générer le maillage *idéal*, sans connaissance, *a priori*, sur la solution du problème traité. Nous proposons, dans ces travaux, de construire un maillage en utilisant uniquement un *a priori* géométrique.

III Adaptation de maillages volumiques

Résumé

Dans le cadre de nos travaux, les méthodes de résolution des EDP, en électromagnétique et en thermique, calculent respectivement la solution sur les arêtes et les nœuds du maillage. Selon le nombre et la disposition de ces nœuds, le maillage est plus ou moins bien adapté à la recherche de la solution pour une précision donnée. En effet, le maillage peut être trop fin dans certaines régions du domaine alors que dans d'autres régions, il peut être trop grossier et ainsi laisser échapper des détails. La simulation numérique repose donc sur un compromis entre le coût de calcul engendré par le grand nombre de nœuds du maillage et le niveau de précision souhaité. L'objectif de l'adaptation géométrique du maillage est d'obtenir la précision recherchée pour un coût aussi faible que possible. Lorsque le maillage permet d'approcher la solution en tout point du domaine avec la précision recherchée, on dit qu'il est "optimal". L'optimalité est atteinte si le nombre de tétraèdres du maillage est minimal assurant ainsi un coût calculatoire minimal pour l'obtention de la solution des EDP. Pour atteindre ce but, une adaptation géométrique du maillage est nécessaire. Cette partie a pour objectif de proposer une adaptation de notre précédente approche de façon à générer, non plus des maillages uniformes, mais des maillages avec une densité de tétraèdres adaptée à la géométrie. Nous allons donc passer en revue, dans un premier temps, les méthodes d'adaptations de maillages. Nous commencerons par définir les notions d'optimalité d'un maillage volumique dans le cadre d'une simulation numérique par la MEF. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux méthodes spécifiques d'approximation de l'axe médian, information préliminaire à la mise en œuvre de notre méthode de maillage adaptatif. Nous proposons une méthode originale, bien adaptée à notre problématique, d'approximation de l'axe médian. Finalement, notre procédure d'adaptation du maillage volumique sera décrite.

Etat de l'art de l'adaptation géométrique et physique des maillages volumiques

De nombreuses méthodes peuvent être utilisées à des fins d'optimisation et d'adaptation de maillages tétraédriques. Le contrôle de la taille des éléments est un aspect important de la génération du maillage. L'information portant sur l'adaptation, au niveau de la taille et de l'orientation des éléments, peut être :

- liée au comportement physique du phénomène étudié.
- apportée par un expert.
- de nature strictement géométrique.

Le principe de base pour gouverner un algorithme de construction de maillage est la notion de champ de métriques correspondant au problème étudié. Ce champ se traduit par une carte de spécifications de tailles et/ou de directions (adaptation anisotrope alors dans ce cas) liées, d'une part, à l'analyse des solutions du problème traité via un estimateur d'erreurs approprié et/ou, d'autre part, à des contraintes de nature géométriques.

7.1 Adaptation au comportement physique du phénomène étudié

L'adaptation des maillages au comportement physique du phénomène étudié est un moyen de réduire les temps de calcul et d'améliorer la précision des résultats numériques. La génération du maillage est alors gouvernée par ces résultats pour obtenir un nouveau maillage "mieux" adapté au phénomène physique modélisé. L'idée est alors d'utiliser des algorithmes de maillage "gouvernés" en les insérant dans une boucle de calculs de simulation numérique par élément finis. Chaque pas de la boucle comprend une phase de génération de maillage, une phase de résolution

pour trouver la solution correspondante, une phase d'analyse de cette solution et, si besoin est, le processus complet est répété jusqu'à obtention d'une solution de précision donnée (au sens de l'estimateur d'erreur). Après avoir construit un premier maillage selon des critères géométriques du domaine ou des critères inhérents à la solution approchée, le maillage peut être modifié. Ces modifications doivent permettre d'adapter le maillage au problème simulé pour le rendre plus efficace (dans le sens plus optimal). On appelle raffinements du maillage ces modifications. Ces raffinements se font habituellement en fonction d'un opérateur d'estimation de l'erreur. Si l'erreur due à la discrétisation est inférieure à un certain seuil, alors le mécanisme d'adaptation est stoppé et la solution est considérée suffisamment précise. Sinon, on construit une carte de l'erreur pour permettre un raffinement local du maillage dans les zones où la précision est insuffisante. Le raffinement du maillage peut être obtenu par plusieurs méthodes qui peuvent influencer sur la position des nœuds du maillage (r -adaptation), sur la taille et la topologie du maillage (h -adaptation) ou encore sur l'ordre de la solution (p -adaptation). Ces différentes méthodes peuvent être combinées, les combinaisons les plus couramment utilisées étant les stratégies hp et hr .

r -adaptation

Une stratégie de raffinement par r -adaptation change la position des nœuds du maillage, sans changer leur nombre ni le nombre de mailles, ou la topologie du maillage. Les nœuds des zones de faible gradient sont déplacés vers les zones du domaine à fort gradient. On obtient ainsi une forte concentration de points de discrétisation, et donc une augmentation de la précision dans les zones d'intérêt du domaine. Si le nombre de points de discrétisation n'est pas suffisant pour obtenir la précision voulue, alors la méthode par r -adaptation doit être utilisée en conjonction avec une méthode permettant d'augmenter le nombre de nœuds : hr -adaptation.

h -adaptation

Avec la stratégie h -adaptation, c'est le nombre d'éléments du maillage qui évolue. Le raffinement et la simplification du maillage permet, respectivement, d'augmenter et de diminuer le nombre d'éléments du maillage. Lorsqu'elle est raffinée, une maille est remplacée par un certain nombre de mailles plus petites qui couvrent la même portion du domaine. Il en résulte une augmentation du nombre de points de discrétisation et donc une augmentation de la précision (et inversement quand des mailles sont simplifiées). Le raffinement peut être appliqué de manière uniforme à l'ensemble des éléments du maillage ou bien de manière locale pour un ensemble d'éléments sélectionnés (raffinement hiérarchique). Le raffinement hiérarchique peut être ajouté assez facilement à un solveur existant, une structure de données hiérarchique permettant, par exemple, d'effectuer l'opération de simplification simplement en supprimant localement un niveau de la structure.

***p*-adaptation**

Les méthodes utilisant la stratégie de raffinement par *p*-adaptation permettent de faire évoluer le degré des fonctions d'interpolation utilisées pour reconstruire la solution sur chaque maille. Concrètement, le nombre de points de discrétisation par maille peut augmenter dans les zones où la discrétisation n'est pas assez précise par rapport à la solution exacte. Ces points supplémentaires permettent l'utilisation d'un opérateur d'interpolation d'ordre supérieur, et donc de se rapprocher de la solution exacte. Il est à noter que ces méthodes ne modifient pas la topologie du maillage.

La convergence, la précision et les théorèmes d'estimation d'erreurs pour des calculs par éléments finis sont liés au paramètre h . Le paramètre h prend en compte la plus grande arête d'un tétraèdre. Les différents travaux de Frey et al [Frey 01] concernent, en partie, le calcul par éléments finis avec contrôle de l'erreur avec une *h*-adaptation. Un estimateur d'erreur doit être créé pour ce type d'adaptation. Cet estimateur, lié au paramètre h , permet de déterminer, sur un maillage tétraédrique, l'erreur liée à une connaissance *a priori* de la solution du problème direct du phénomène physique étudié. Dans la thèse de Jérémie Pescatore [Pescatore 01], une méthode de construction et d'adaptation (de type *h*-adaptation) est présentée pour les maillages volumiques tétraédriques des tissus de la tête. Leurs contributions concernent la simulation numérique de l'activité électrique du cerveau à partir d'électro-encéphalogramme (E.E.G) et la magnéto-encéphalogramme (M.E.G). Leur estimateur d'erreur permet la répartition homogène de l'erreur en connaissant *a priori* la solution du problème direct. Pour cela, une solution du problème direct est calculée à partir d'un modèle sphérique.

7.2 Adaptation de nature strictement géométrique

Des contraintes de nature géométrique peuvent aussi conduire à l'adaptation du maillage volumique. Elles permettent d'optimiser le maillage ainsi que la simulation en diminuant le nombre de sommets dans les régions continues (à l'intérieur d'un objet) où en les augmentant dans les régions proches de la frontière. Ces contraintes géométriques peuvent être prises en compte de différentes manières. Elles nécessitent une mesure permettant de caractériser, localement, la frontière de la forme. Cette mesure doit refléter à la fois la courbure de la surface et l'épaisseur de la région. Plusieurs techniques ont été proposées pour la génération automatique de carte de densité pour les maillages. Quadros et al. [Quadros 04] utilisent la génération de l'axe médian sur la frontière du domaine pour construire des cartes de densité. Alliez et al. [Alliez 05] utilisent la notion de largeur locale (LFS, *Local Feature Size*) introduite par [Amenta 98a] pour contrôler la taille des éléments générés.

La *local feature size* $LFS(x)$ d'un point $x \in S$ est une fonction $LFS : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui mesure la distance minimale entre x et l'axe médian $MA(S)$, i.e. :

$$LFS(x) = \min_{y \in MA(S)} \|x - y\| \quad (7.1)$$

Une représentation de cette mesure est illustrée dans la figure 7.1.

Un inconvénient de la *LFS* est que l'axe médian est très instable par rapport aux détails de la forme. Cela signifie que de petites variations dans la forme peuvent

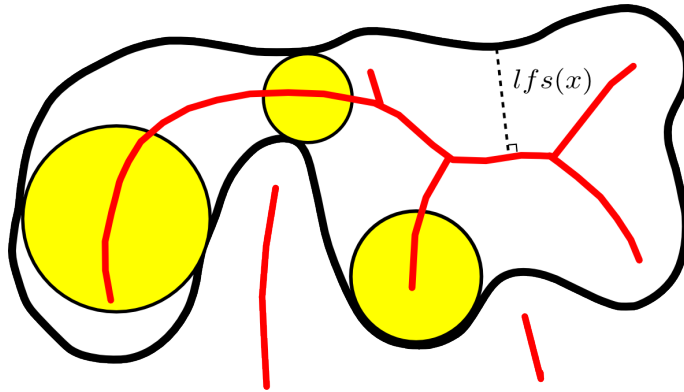


FIG. 7.1 – Axe médian d’une forme et largeur locale (inspiré de [Devillers 08]).

conduire à des axes médians très différents. L’axe médian ne devra donc pas comporter de bruit pour calculer une fonction de densité prenant en compte la *LFS*. Nous donnerons, dans la section suivante, la définition de l’axe médian. Nous effectuerons ensuite un état de l’art des différentes approches d’approximation de l’axe médian.

7.3 Etat de l’art des méthodes d’approximation de l’axe médian

Au cours de ces quarante dernières années, l’axe médian a été un sujet de recherche constant. L’axe médian d’une forme fournit une représentation compacte de ses caractéristiques géométriques et topologiques. L’axe médian a été proposé comme un outil en reconnaissance de forme, en reconstruction de surface, dans le contrôle des animations, pour la génération de maillages et dans de nombreuses applications [Bonassie 01, Jia 07, Chazal 06, Dellas 07]. Une définition concise de l’axe médian (ou squelette d’une forme), dans le cas continu, a été donné par Blum [Blum 67]. Celle-ci postule l’analogie bien connue de la “prairie en feu” (*grassfire analogy*) [Attali 07b]. L’axe médian peut aussi être défini, mathématiquement, par l’ensemble des centres des cercles maximaux passant par la frontière de la forme. Dans les paragraphes suivants, nous donnons un bref état de l’art des méthodes d’approximation de l’axe médian, dans un contexte continu et discret. Cet état de l’art est loin d’être exhaustif en raison du grand nombre de méthodes existantes. Ces méthodes peuvent être classées en :

- méthodes utilisant une fonction de distance,
- érosion morphologique,
- approches de type Voronoï.

7.3.1 Méthodes utilisant une fonction de distance

Le lieu des points de l'axe médian coïncide avec les singularités de la fonction de distance à la frontière. Les fonctions de distance ou champ de distance D sont définies pour chaque point x d'une forme S par la plus petite distance à un point de la frontière de la forme B_S :

$$D(x) = \min_{x \in B_S, y \in S} (d(x, y)) \quad (7.2)$$

où d est une métrique de distance. Les maximums locaux de cette fonction de distance ou les discontinuités de ses dérivées indiquent des points de l'axe médian [Ge 96]. Dans [Coeurjolly 07a], Coeurjolly et al. présentent des algorithmes optimaux d'extraction de l'axe médian discret utilisant le carré de la transformée de la distance et la transformation inverse de la distance Euclidienne. Un lien est établi entre la transformée en distance euclidienne et la construction d'un diagramme de Voronoï.

7.3.2 Erosion morphologique

L'érosion morphologique est basée sur le principe de la "prairie en feu" et opère successivement par l'érosion des points à partir de la frontière de l'objet, jusqu'à obtention de lignes de points où l'érosion n'est plus possible [Ju 07]. Les algorithmes d'érosion opèrent dans l'espace discret. Ils ont été utilisés sur les données pixeliques et voxeliques dans les domaines de la reconnaissance de formes et de l'analyse d'images. Récemment, ce principe a été utilisé dans un volume discret par [Quardros 04].

7.3.3 Approches de type Voronoï

Il y a aussi beaucoup d'approches basées sur les diagrammes de Voronoï dans l'espace continu [Miklos 07]. Un état de l'art de ces différentes approches de construction de l'axe médian (et des diagrammes de Voronoï) est donné par Sherbrooke et al. [Sherbrooke 95]. L'approche la plus classique, basée sur l'extraction des pôles, a été introduite dans l'algorithme Crust [Amenta 01] pour la reconstruction d'objet.

Definition 7.1. Soit V_p la cellule de Voronoï d'un point p d'un ensemble P . Alors le pôle positif $p+$ est défini comme le sommet de Voronoï de V_p le plus éloigné de p . Le vecteur $pp+$, appelé vecteur pôle, fournit une approximation de la direction de la normale en p . Le pôle négatif $p-$ est défini comme le sommet de la cellule de Voronoï V_p le plus éloigné de $p+$ dans le sens opposé au vecteur $pp+$.

Les pôles fournissent une bonne approximation de l'axe médian de la surface échantillonnée par P . L'axe médian (MA, *Medial Axis*) est représenté comme un sous-ensemble de la frontière des cellules de Voronoï V_p défini par un ensemble compact B de points sur la frontière. Les éléments de l'axe médian sont les ensembles de points équidistants à au moins deux points de la frontière et leur union représente une symétrie locale de la forme.

Plus précisément, il a été montré pour le cas bi-dimensionnel dans [Brandt 92, Fabbri 02] et pour le cas tri-dimensionnel dans [Amenta 01, Dey 03] que, sous certaines conditions d'échantillonnage, et lorsque la distribution de cellules augmente, les sommets du diagramme de Voronoï d'un ensemble de points frontière convergent exactement vers l'axe médian de la forme. Dans le cas continu, l'approximation de l'axe médian à partir de diagramme de Voronoï a été réalisée [Dey 03]. Le Diagramme de Voronoï est déduit de la triangulation de Delaunay puis un filtrage est appliqué sur le DV pour approximer l'axe médian. Dey and Zhao calculent un sous-ensemble d'arêtes et de facettes de Voronoï localisé à l'intérieur de la surface de l'objet et réalisent un filtrage sur des sommets de Voronoï et de leur éléments incidents. Ils utilisent un critère basé sur l'aspect et l'angle d'un élément. Une illustration de ce type d'approche est donnée dans la figure 7.2.

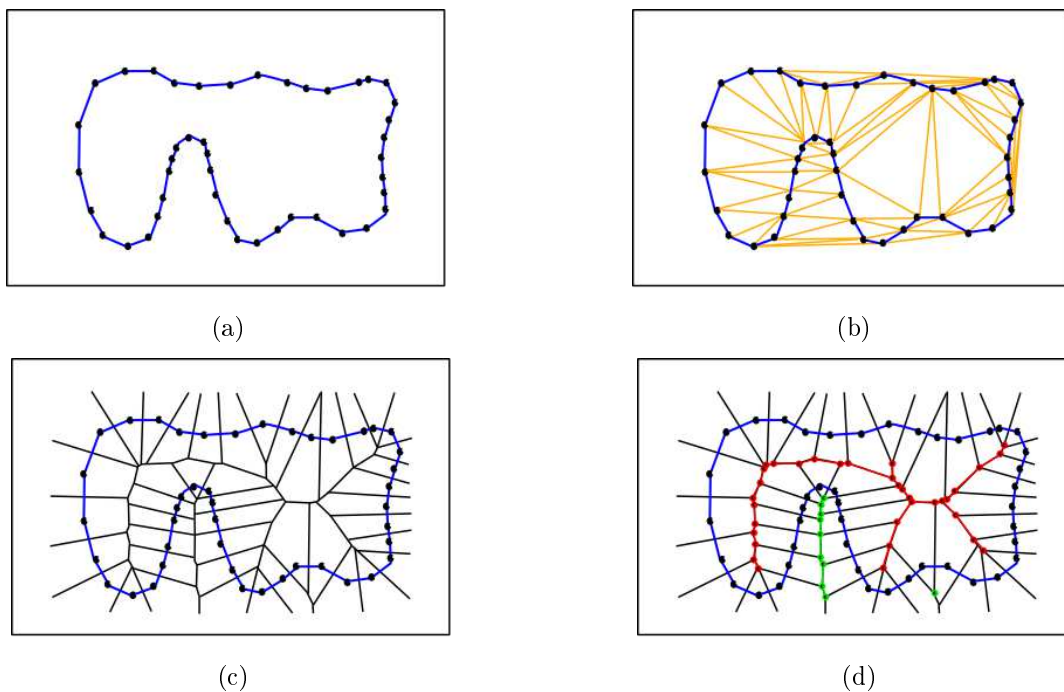


FIG. 7.2 – Approximation d'axe médian par une approche de type Voronoï : (a) forme initiale (inspiré de [Devillers 08]) (b) triangulation de Delaunay (c) son dual, le diagramme de Voronoï (d) représentation de l'axe médian et des pôles à extraire à partir du diagramme de Voronoï.

Dans le cadre discret, l'ensemble des pôles extraits du diagramme de Voronoï d'une surface échantillonnée est très instable par rapport au bruit. Une approche intéressante a été proposée par Chazal et Lieutier [Chazal 05]. Ils ont introduit la notion de λ -axe médian. Cette approche permet de filtrer l'axe médian pour prendre en compte qu'un certain niveau de détail.

Orientation choisie

L'objectif de ce travail de thèse est la génération de maillage tétraédrique à partir d'image 3D, particulièrement dans le cadre de l'imagerie médicale. L'adaptation géométrique du maillage permet d'obtenir la précision recherchée pour un coût aussi faible que possible. A cet effet, nous avons présenté différentes approches d'adaptation de maillage, existantes dans la littérature. Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes aussi intéressés à l'approximation de l'axe médian à partir de DVC contraint pour réaliser une adaptation de maillage de nature strictement géométrique. Contrairement au domaine continu, l'approximation de l'axe médian à partir d'un DVC n'a pas encore été considérée dans une image 3D. Ainsi nous proposons, dans le cadre de cette thèse, une approximation de l'axe médian basée sur des diagrammes de Voronoï centroïdaux contraint. Nous allons donc présenter notre approche dans le prochain chapitre.

Chapitre 8

TVC adaptatif

Notre proposition est de construire le Diagramme de Voronoï Centroïdal par un partitionnement Contraint (DVCC), où chaque cellule représente potentiellement une partie de l'axe médian. La performance de l'approximation de l'axe médian est réduite si la forme d'entrée est bruitée. Pour résoudre ce problème, nous proposons d'effectuer un filtrage géométrique de la frontière de la forme. La figure 8.1 résume notre approche. Elle comprend trois étapes :

- 1 le diagramme de Voronoï centroïdal (b) de (a) est approché par la méthode définie dans la section 6.2.2, avec, comme contrainte, que les sites soient placés exclusivement sur la frontière.
- 2 L'anisotropie des cellules de Voronoï est mesurée par une analyse en composantes principales (c). le graphe de Voronoï discret (d) est extrait à partir de (b) par relation de voisinage.
- 3 Finalement une approximation de l'axe médian est créée (f) en filtrant les éléments constituant le graphe (e).

8.1 Introduction

Les images médicales acquises par un scanner tomographique par rayon X ou par imagerie par résonance magnétique sont bruitées. Le calcul de l'axe médian nécessite un temps de calcul important et sa représentation est dense du fait de la présence du bruit. Il y a deux challenges pour calculer un axe médian avec ce type de données :

- l'axe médian est hautement sensible aux petits détails dans la forme,
- seulement une approximation discrète de l'axe médian est connue et l'échantillonnage est dépendant de la distribution des points d'entrée.

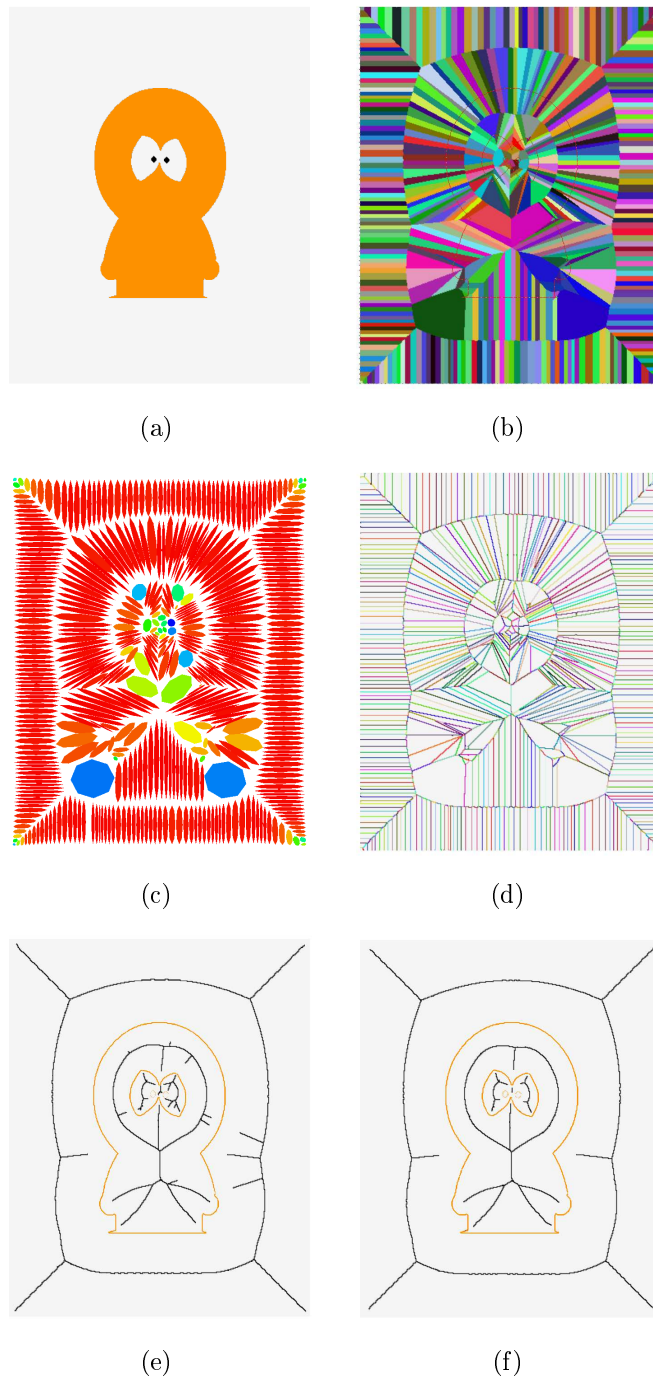


FIG. 8.1 – Illustration de notre processus d'approximation de l'axe médian : Le diagramme de Voronoï centroïdal contraint (b) est calculé à partir du modèle original (a) (inspiré de [Miklos 07]). L'anisotropie des cellules de Voronoï est mesurée par une analyse en composante principale (c). Le graphe de Voronoï discret (d) est extrait à partir de (b) par relation de voisinage. Finalement une approximation de l'axe médian est créée (f) en filtrant les éléments constituant le graphe (e).

Dans la figure 8.2 (a), nous considérons l'axe médian d'une forme continue basé sur le principe de "la prairie en feu". Le front de propagation commence en même temps en chaque point de la frontière de l'ensemble B . Il avance à une vitesse constante en étant localement perpendiculaire à la frontière et le lieu où plusieurs fronts se rencontrent définit l'axe médian. Dans la figure 8.2 (c), du bruit a été ajouté à la forme originale et son axe médian est calculé. Nous pouvons observer que l'axe médian est très sensible au bruit et qu'une petite variation sur la frontières introduit des "barbes" sur l'axe médian. Cependant, beaucoup d'applications, nécessitent l'approximation de l'axe médian avec des données discrètes, tel que celles acquises avec des scanners médicaux. Dans le cas discret, les définitions sont analogues au cas continu. Dans la figure 8.2 (c), nous procédons dans le cas discret en ajoutant du bruit sur la frontière de la forme. Dans le cas discret, notre approche d'extraction de l'axe médian est robuste et la topologie de l'axe médian trouvée est correcte (d).

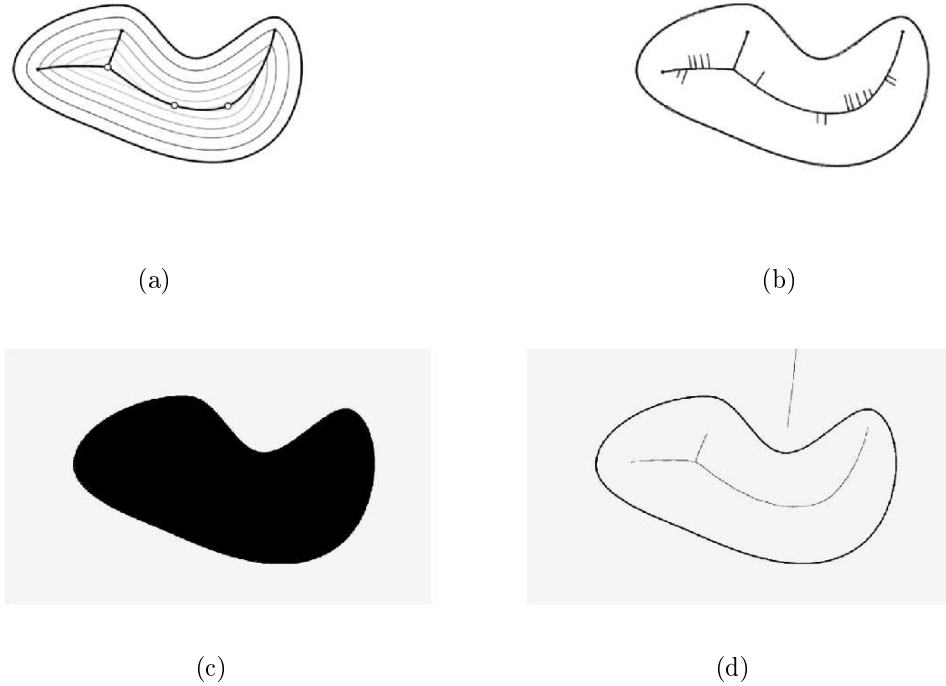


FIG. 8.2 – Représentation bi-dimensionnelle de l'axe médian de la frontière d'une forme dans le cas continu ((a)-(b), illustration de [Attali 07a]) et discret ((c)-(d)).

L'axe médian d'un objet peut être défini et calculé par une approche continue ou discrète. Dans le premier cas, le squelette est approximé en utilisant le graphe de Voronoï d'un ensemble discret d'échantillons des frontières de l'objet. Dans le second cas, la topologie discrète des images est directement considérée et les méthodes sont basées soit sur des algorithmes d'amincissement, soit sur des calculs de maxima dans des cartes de distance. Nous proposons une nouvelle approche qui permet de calculer un Graphe de Voronoï Discret (GVD). Nous utilisons ensuite différents critères de filtrage pour obtenir le sous-ensemble du GVD correspondant à l'axe médian. La figure 8.3 résume notre approche. (a) illustre la forme originale. En (b), la frontière

de la forme est détectée. En (c), nous approchons le DVC contraint de l'image. L'axe médian (d) est extrait à partir du graphe de Voronoï en éliminant les arêtes de Voronoï intersectant la frontière de la forme et selon un critère d'angle.

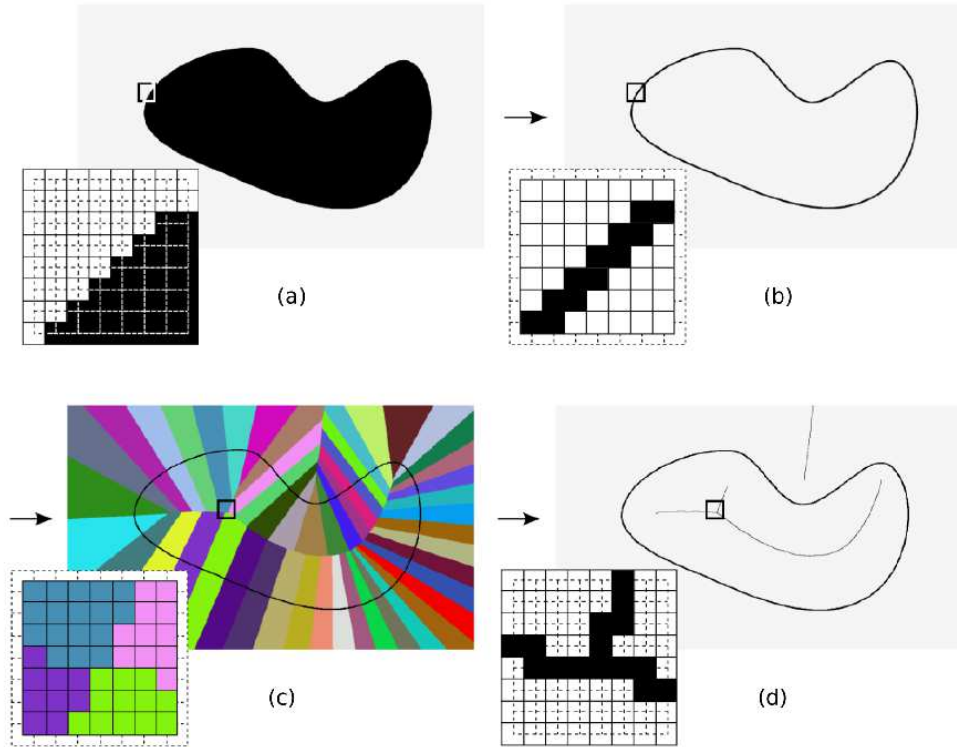


FIG. 8.3 – (a) le graphe primaire de la forme (inspiré de [Attali 07a]) (b) la forme frontière dans son graphe dual (c) son diagramme de Voronoï centroïdal contraint (d) l'approximation de l'axe médian après son filtrage

Cette approche est de nature complètement discrète : elle est spécialement conçue pour les données pixelliques et voxeliques. Elle est basée sur une définition discrète d'un Diagramme de Voronoï Centroïdal avec contrainte lequel fournit une distribution d'échantillons uniforme ou non uniforme de la frontière de la forme. Nous souhaitons avoir une densité plus importante d'éléments dans les régions complexes et étroites de nos maillages volumiques. Cette densité est nécessaire pour avoir une bonne précision locale dans la méthode par éléments finis. L'axe médian permet de définir la carte de densité [Alliez 05] de façon à mailler plus finement certaines régions du domaine d'étude. Cette approche de nature strictement géométrique permet une adaptation du maillage dans le cadre de nos simulations par la MEF.

8.2 Diagramme de Voronoï Centroïdal Contraint

Nous utilisons l'algorithme de partitionnement que nous avons détaillées auparavant dans la section 6.2.2. La frontière de la forme est utilisée pour initialiser le partitionnement. Le domaine d'étude est défini par un ensemble de *pointels* étiquetés appartenant à la frontière ou non du graphe dual $\overline{G}$. La différence majeur avec la précédente utilisation (figure 8.4 (a)) de notre algorithme est le choix du site. Il correspond ici au centre de gravité des éléments frontières contenus dans la cellule (b).

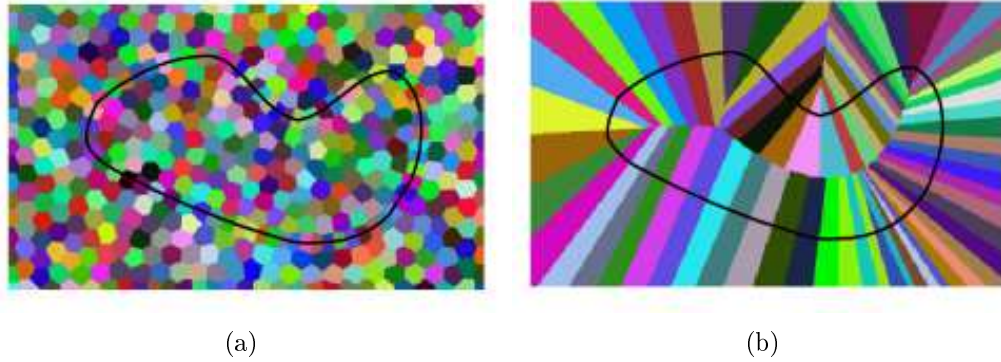


FIG. 8.4 – Exemples de partitionnement : (a) pour la génération de maillage (b) pour l'extraction de l'axe médian

Nous faisons l'hypothèse que le facteur d'échantillonnage de ce partitionnement est élevé, i.e le rapport entre le nombre de sites du diagramme de Voronoï et le nombre de sommets frontières est grand. Nous devons alors évaluer le nombre optimal de cellules. Si nous avons peu de cellules, il est difficile de définir précisément la forme de l'objet. Dans le cas d'un grand nombre de cellules, des "barbes" peuvent apparaître sur l'axe médian. La figure 8.1 (b) montre un exemple de partitionnement contraint sur une forme avec 400 cellules. Nous définissons maintenant les différents graphes extraits du DVCC. La motivation pour cette dualisation est la recherche d'une bonne approximation des cellules de Voronoï frontières pour une meilleure localisation de l'axe médian. Durant la prochaine étape, le DVCC doit être transformé en un graphe de Voronoï discret.

8.3 Graphe de Voronoï discret

Le graphe de Voronoï discret (GVD) est un graphe de sommets et d'arêtes qui est un sous-ensemble du DVC. Les points du GVD sont les lieux des points du DVC qui ont au moins trois pixels avec des étiquettes différentes et les arêtes sont les lieux des points contenant au moins deux pixels avec des étiquettes différentes. Dans le cas discret, nous appelons "éléments" du graphe de Voronoï, les arêtes incidentes aux pixels (*lignels*) venant du DVC, respectivement en 3D, les faces incidentes aux voxels (*surfels*). Il y a une large variété d'algorithmes de détection de frontières dans la littérature. Ils sont généralement conduits par des relations de voisinage.

Dans la figure 8.5, un exemple de relation de voisinage entre une région de Voronoï et une triangulation de Delaunay, en deux dimensions, est donnée dans le cas continu (a) et discret (b). Les sites de Voronoï Z_i sont joints par une arête de Delaunay si les régions de Voronoï sont adjacentes. $E_{i,j}$ est un élément du graphe de Voronoï discret (c) qui est frontière entre les cellules de Voronoï C_i et C_j .

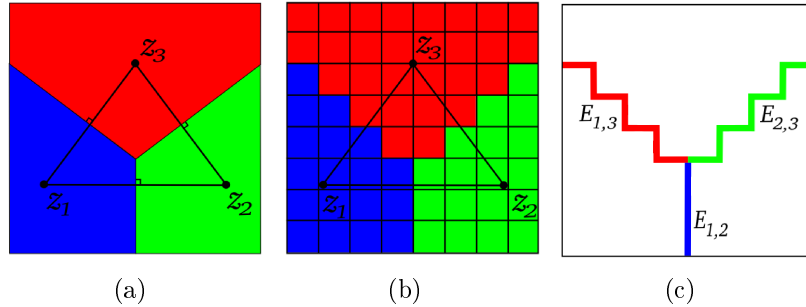


FIG. 8.5 – Illustration du graphe de Voronoï discret : (a) Triangulation de Delaunay et son dual, le diagramme de Voronoï dans le cas continu (b) configuration similaire dans le cas discret (c) le graphe de Voronoï discret.

8.4 Conditions de filtrage

Dans cette partie, nous décrivons l'algorithme de filtrage. Il est bien connu que l'axe médian est très sensible aux petites perturbations de la frontière de la forme et de nombreuses méthodes ont été défini en continu pour supprimer les "barbes". [Chazal 05, Hulin 06] et [Attali 07a] donnent un état de l'art de ses approches dans le cas continu. Notre but est d'approcher l'axe médian avec un sous-ensemble d'arête et de facette de Voronoï. i.e pour décider si un sommet donné appartient ou n'appartient pas à l'axe médian. Notre algorithme utilise deux critères de sélection des éléments issus du graphe de Voronoï.

8.4.1 Estimation de l'anisotropie des cellules :

Suivant l'observation générale que les cellules de Voronoï sont allongées par rapport à la direction de la normale des points frontières [Amenta 98a]. Notre algorithme mesure l'anisotropie de chaque cellule C_i afin d'obtenir une mesure de confiance sur l'estimation de la normale à la frontière pour les différentes cellules. Pour chaque cellule C_i , nous calculons sa matrice de covariance M_i et déduisons l'anisotropie locale de la cellule à partir de ses valeurs propres [Alliez 07]. M_i peut être vu comme un tenseur 3 x 3. Les valeurs et vecteurs propres de cette matrice symétrique, définie positive, correspondent respectivement aux longueurs et aux directions des trois axes d'un ellipsoïde associé à la cellule. Nous pouvons en déduire l'axe principal à partir du vecteur propre associés à la plus grande valeur propre de M_i .

L'anisotropie fractionnelle FA_i permet d'évaluer l'anisotropie locale de chaque cellule C_i [Basser 96] :

$$FA_i = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{(\lambda_i^1 - \bar{\lambda}_i)^2 + (\lambda_i^2 - \bar{\lambda}_i)^2 + (\lambda_i^3 - \bar{\lambda}_i)^2}}{\sqrt{(\lambda_i^1)^2 + (\lambda_i^2)^2 + (\lambda_i^3)^2}} \quad (8.1)$$

avec :

$$\bar{\lambda}_i = \frac{(\lambda_i^1 + \lambda_i^2 + \lambda_i^3)}{3} \quad (8.2)$$

où $\lambda_i^{j,j=1,2,3}$ sont les valeurs propres de M_i , avec $\lambda_i^1 > \lambda_i^2 > \lambda_i^3$.

On note que :

$$0 \leq FA_i \leq 1 \quad (8.3)$$

L'index FA_i est nul dans le cas d'une parfaite isotropie (une sphère) et unitaire dans le cas d'une très forte anisotropie (cylindre de longueur infinie). L'augmentation des valeurs FA_i indique une forte anisotropie dans le diagramme de Voronoï (figure 8.6).

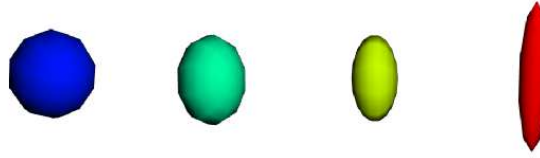


FIG. 8.6 – Cellules de Voronoï extraites du DVC représentées par leurs ellipsoïdes équivalents.

La figure 8.7 (à gauche) montre la vue d'une coupe du DVC d'une boîte où la frontière du cube définit les frontières de la forme. Dans la figure 8.7 (à droite), chaque cellule est remplacée par son ellipsoïde équivalent. L'allongement des ellipsoïdes montre clairement l'anisotropie des cellules du diagramme.

Parfois, une cellule peut être isotrope (FA_i proche de 0) et son axe principal n'est pas une approximation de la direction de la normale. Nous détectons ces cas avec le test suivant :

$$d(\bar{C}_i, z_i) > \alpha \cdot \lambda_i^1 \quad (8.4)$$

où λ_i^1 est la valeur propre principale de C_i , $\bar{C}_i$ est son barycentre et α est une constante arbitraire (lors de nos différentes expérimentations, nous avons choisi $\alpha = 0.6$).

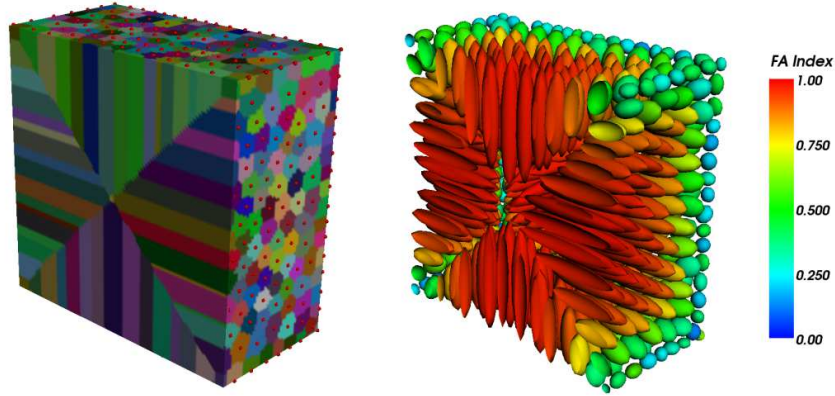


FIG. 8.7 – A gauche : coupe d'un diagramme de Voronoï centroïdal contraint d'une boîte contenant 1000 cellules. A droite : chaque cellule est remplacée par son ellipsoïde équivalent. L'anisotropie fractionnelle d'une cellule FA_i montre l'anisotropie locale pour chaque cellule C_i .

Lorsque ce test est vrai pour une cellule, nous estimons la direction de la normale par :

$$\vec{N}_i = \frac{\overrightarrow{C_i z_i}}{\|\overrightarrow{C_i z_i}\|} \quad (8.5)$$

Dans la figure 8.8 (b), l'axe principal (entouré) donne une mauvaise approximation de la direction de la normale. Nous calculons alors la direction de la normale comme décrite ci-dessus et nous obtenons alors une approximation exacte de cette direction (c).

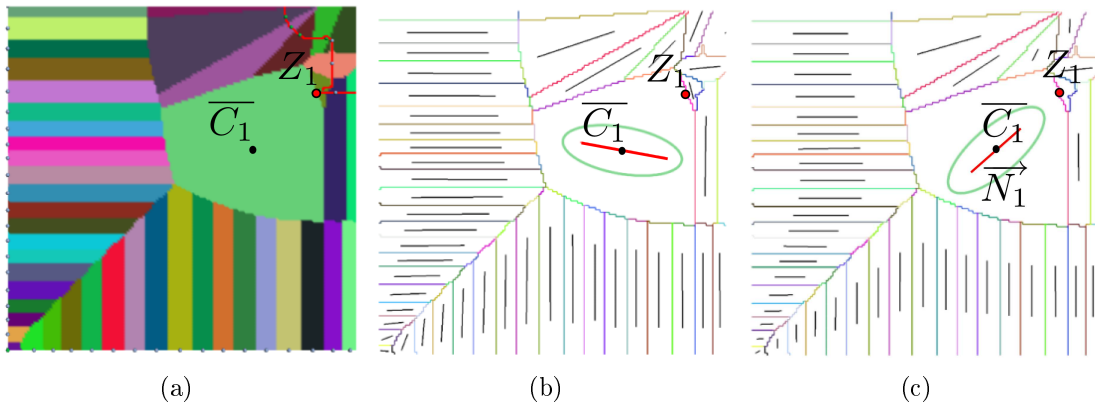


FIG. 8.8 – (a) diagramme de Voronoï Centroïdal contraint pour une partie de la figure 8.1 (b) estimation de l'axe principal pour chaque cellule (c) après correction, la direction entourée est maintenant estimée correctement.

8.4.2 Critère basé sur les pôles

Ce critère est basé sur une estimation de la position des sommets du graphe de Voronoï par rapport à la frontière de la forme ∂_o et la direction de la normale locale. Nous cherchons à étiqueter les sommets de chaque élément du GVD (arête ou facette) comme *positif* ou *négatif*. Si un élément contient des sommets qui ne sont pas toujours du même signe, cet élément traverse la frontière de l'objet, il s'ensuit qu'il n'appartient pas à l'axe médian. Dans le cas opposé, tous les éléments avec le même signe sont à l'intérieur de l'objet. Amenta et al. ont été les premiers à proposer la définition des pôles [Amenta 98b] et un algorithme ("Powercrust") [Amenta 01] pour la construction de triangulation "manifold" à partir d'un nuage de points 3D. Quand la frontière est suffisamment dense, l'algorithme Powercrust garantit la construction d'une approximation géométriquement et topologiquement correcte. Nous rappelons qu'un ensemble de pôles est un sous-ensemble des sommets de Voronoï. En 2D, tous les sommets du Diagramme de Voronoï convergent vers l'axe médian. En 3D, parfois des sommets du diagramme de Voronoï peuvent être éloignés de l'axe médian mais les pôles convergent vers l'axe médian. Chaque point frontière est associé à deux pôles, notés respectivement par p_{i+} et p_{i-} . Ces deux pôles sont les sommets de Voronoï de la cellule la plus éloignées. La frontière est divisée en deux ensembles de pôles : pôles intérieur et extérieur. La définition des pôles joue un rôle essentiel dans l'approximation des normales. Quand la frontière est suffisamment échantillonnée, les cellules de Voronoï apparaissent naturellement anisotropes. Elles sont approximativement perpendiculaires à la frontière de la forme (figure 8.9).

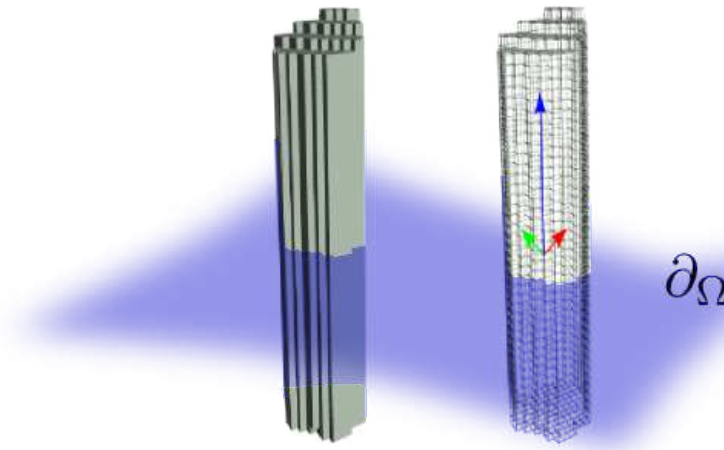


FIG. 8.9 – Si $\partial\Omega$ est suffisamment échantillonnée, les cellules de Voronoï apparaissent naturellement anisotropes. Elles sont approximativement perpendiculaires à la frontière de la forme.

Notre approche est basée sur une estimation de la position des sommets de Voronoï par rapport à la frontière et une estimation de la direction de la normale. Nous définissons un élément discret $E_{i,j}$ comme un sous-ensemble de sommets adjacents aux cellules C_i et C_j . La figure 8.10 représente le graphe de Voronoï et une estimation de la direction de la normale pour l'ensemble des cellules.

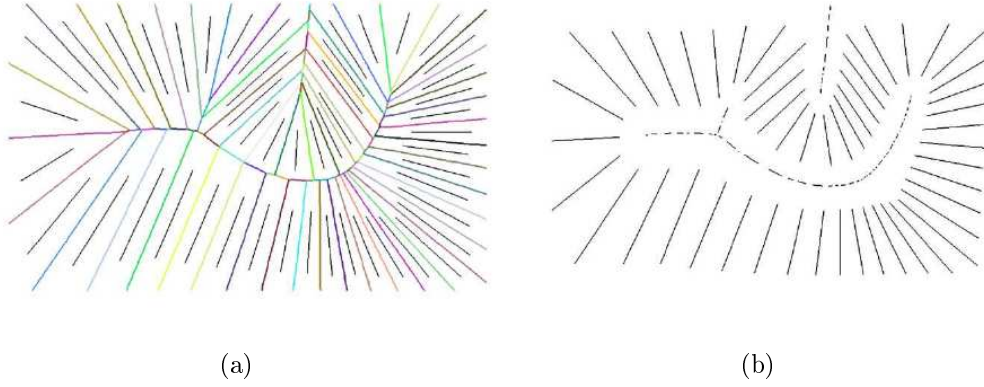


FIG. 8.10 – (a) représentation du graphe de Voronoï (b) estimation de la direction de la normale pour l'ensemble des cellules.

La partie critique consiste à étiqueter chaque sommet de chaque élément *positif* ou *negatif*.

Pour chaque élément $E_{i,j}$, nous définissons un opérateur $f_{(i,j)}$:

$$f(i, j) = \begin{cases} i & \text{quand } FA_i > FA_j \\ j & \text{quand } FA_j > FA_i \end{cases} \quad (8.6)$$

Nous notons son site par $z_{f(i,j)}$ et l'axe principal estimé par $N_{f(i,j)}$. Ceci permet une bonne approximation de la direction de la normale $N_{f(i,j)}$ à la frontière de la forme. Par cette définition, un sommet candidat $v \in E_{i,j}$ pourra être étiqueté *positif* ou *negatif* selon le signe de $S_{f(i,j)}(v)$ défini par :

$$S_{f(i,j)}(v) = \langle \overrightarrow{z_{f(i,j)}v}, \overrightarrow{N_{f(i,j)}} \rangle \quad (8.7)$$

$S_{f(i,j)}(v)$ fournit une information sur v par rapport à la frontière de la forme.

Nous définissons alors la première condition de filtrage par :

$$E_{i,j} \in MA \text{ si } S_{f(i,j)}(v_1) \cdot S_{f(i,j)}(v_2) \geq 0, \quad \forall (v_1, v_2) \in (E_{i,j} \otimes E_{i,j}) \quad (8.8)$$

Si un élément $E_{i,j}$ contient des sommets v pour lequel $S_{f(i,j)}(v)$ n'est pas toujours du même signe, nous pouvons déduire que cet élément croise la frontière de la forme et, par conséquent, il n'appartient pas à l'axe médian. Dans le cas opposé, tous les éléments avec le même signe appartiennent à un même côté de la frontière. Cependant, avec ce critère, nous ne pouvons pas savoir si un élément est à l'intérieur ou à l'extérieur de la forme. La figure 8.11 montre deux exemples où $E_{1,2}$ n'appartient pas à l'axe médian et où $E_{1,3}$ correspond à une partie de l'axe médian. La figure 8.12 illustre le premier critère de filtrage basé sur la position des pôles.

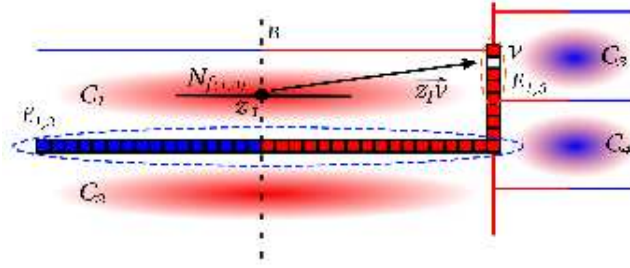


FIG. 8.11 – Illustration du critère basé sur les pôles : un sommet candidat $v \in E_{1,3}$; $E_{1,3}$ ne croise pas la frontière de la forme et ses sommets sont étiquetés avec le même signe ; $E_{1,2}$ croise la frontière et ses sommets ne sont pas du même signe. Par conséquent, $E_{1,3} \in MA$ et $E_{1,2} \notin MA$;

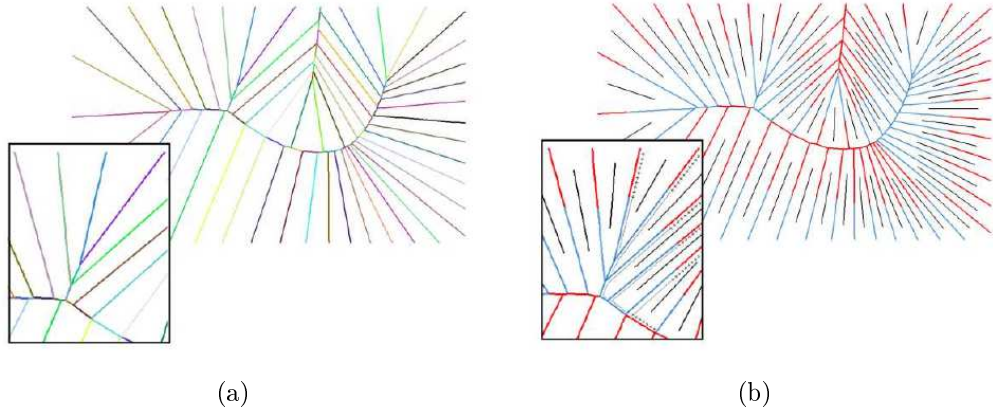


FIG. 8.12 – Illustration du premier critère de filtrage basé sur la position des pôles.

8.4.3 Critère basé sur l'angle :

Dans certains cas, avec le premier critère, nous observons des “barbes” sur l’axe médian. Nous utilisons un critère basé sur l’angle pour les filtrer. Nous considérons l’angle entre la normale d’un élément du graphe de Voronoï et la direction de la normale à la frontière de l’objet. Ce dernier est estimé à partir des cellules voisines. Un critère basé sur l’angle peut être utilisé pour éliminer les “barbes” dans l’axe médian. Dey et Zhao [Dey 03] utilisent un critère basé sur l’angle pour retenir les facettes du diagramme de Voronoï obtenu par un ensemble de points sur la frontière. Ils considèrent un angle défini à partir de l’approximation de la direction à la normale et une arête de Delaunay (dual à une facette de Voronoï). Si l’angle est faible, la facette de Voronoï appartient à l’axe médian de la forme. Notre approche est basée sur la construction directe du graphe de Voronoï dans l’espace discret. Nous considérons l’angle entre la direction principale à une cellule du diagramme de Voronoï (dual à une arête de Delaunay) et la direction de la normale à la frontière qui est estimé par l’axe principal associé à chaque cellule voisine.

Pour chaque élément frontière candidat $E_{i,j}$, nous associons un angle $\Theta_{i,j}$.

$$\Theta_{i,j} = \angle N_{f(i,j)}, N_{i,j} \quad (8.9)$$

Le calcul de l'angle $\Theta_{i,j}$ pour un élément de l'axe médian requiert l'axe principal $N_{f(i,j)}$ de la cellule voisine ayant la plus grande anisotropie et l'estimation de la direction de la normale $E_{i,j}$, noté $N_{i,j}$. Le produit scalaire est utilisé pour obtenir l'angle entre les deux vecteurs.

Nous définissons le critère de filtrage basé sur l'angle par :

$$E_{i,j} \in MA \text{ si } A_{i,j} > \gamma, \lambda_{f(i,j)}^1 > \beta \cdot \lambda_{i,j}^3 \quad (8.10)$$

avec

$$A_{i,j} = | \langle N_{f(i,j)}, N_{i,j} \rangle | \quad (8.11)$$

où $\lambda_{f(i,j)}^1$ et $\lambda_{i,j}^3$ sont respectivement la plus grande valeur propre de $C_{f(i,j)}$ et la plus petite valeur propre de $E_{i,j}$. γ et β sont définis arbitrairement. Dans nos expérimentations, nous choisissons $\gamma = 0.8$ et $\beta = 0.7$. La figure 8.13 montre un exemple où l'angle $A_{i,j}$ est calculé.

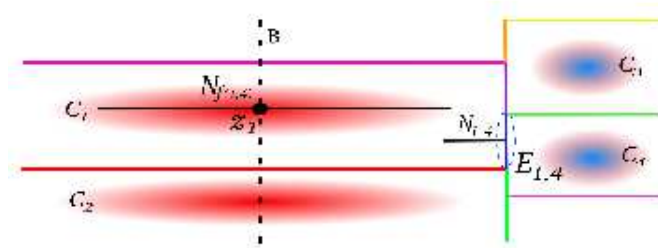


FIG. 8.13 – Illustration du critère basé sur l'angle : L'angle entre $N_{f(1,4)}$ et $N_{1,4}$ doit être dans une plage donnée, où l'élément $E_{1,4}$ sera filtré.

Nous avons proposé, dans cette section, une nouvelle approche pour obtenir une approximation de l'axe médian d'un objet discret 2D ou 3D. Dans la section suivante, nous proposons une amélioration de cette approche.

8.5 Carte de densité pour une meilleure approximation de l'axe médian

La répartition et la densité des cellules de Voronoï jouent un rôle important dans la qualité de l'approximation de l'axe médian. Dans cette section, nous proposons d'utiliser une carte de densité pour obtenir un DVC adaptatif. Au voisinage des régions de forte courbure, il est préférable d'avoir une densité de cellule de Voronoï plus importante, au contraire, dans celles qui sont plates, il est préférable d'avoir une densité plus faible. Cette adaptation locale de la densité permet d'obtenir une meilleure approximation de l'axe médian. La figure 8.14 résume notre approche. Elle est constituée de trois étapes. Nous calculons, dans un premier temps, une carte de distance euclidienne discrète g (b) à partir de la frontière de la forme (a). Nous calculons ensuite la matrice hessienne $\mathbf{H}(g)$, ses valeurs propres et ses vecteurs propres. (c) illustre le vecteur propre principal de $\mathbf{H}(g)$. La courbure (equation (8.13)) est utilisée pour générer une fonction de densité ρ (d).

La seconde étape consiste à construire un diagramme de Voronoï centroïdal contraint (e) par une approche variationnelle en utilisant la fonction de densité ρ (d). Dans une dernière étape nous filtrons les éléments des cellules frontières de ce diagramme afin d'obtenir une approximation cohérente de l'axe médian (f).

Nous proposons d'initialiser notre partitionnement en utilisant une carte de courbure. Nous utilisons la matrice hessienne 8.12 pour décrire la courbure locale en chaque point (x) de l'image.

$$\mathbf{H}(g) = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} \quad (8.12)$$

où la fonction g est la distance euclidienne.

La carte de distance euclidienne M_g est obtenue à l'aide de l'algorithme proposé dans [Saito 94]. Cet algorithme permet le calcul de distances exactes en considérant le carré de la distance euclidienne. Le chemin le plus court pour atteindre un point extérieur à l'objet est déterminé et la longueur euclidienne de ce chemin est calculée. Les courbures principales locales λ_j^1 et λ_j^2 (resp. les directions principales) sont les valeurs propres (resp. les vecteurs propres) de $\mathbf{H}$. Le vecteur propre principal v_j^1 définit la tangente au pixel p_j de g . Nous définissons un indicateur de courbure c_j par l'équation (8.13).

$$c_j = \sqrt{\lambda_j^{1^2} + \lambda_j^{2^2}} \quad (8.13)$$

Nous définissons le poids ρ_j , associé à chaque pixel j ainsi :

$$\text{si } c_j \neq 0 \text{ alors } \rho_j = c_j^2 \text{ sinon } \rho_j = \beta \quad (8.14)$$

Dans nos expérimentations, nous avons choisi $\beta = 0.005$. Notre motivation dans la définition de cette carte de courbure est la recherche d'un bon positionnement des cellules de Voronoï et ainsi d'une localisation efficace de l'axe médian. Grâce à cette méthode, nous pouvons répartir N sites de Voronoï avec une densité choisie ρ sur ∂_Ω . Où chaque frontière entre les cellules du DV contribue potentiellement à l'axe médian.

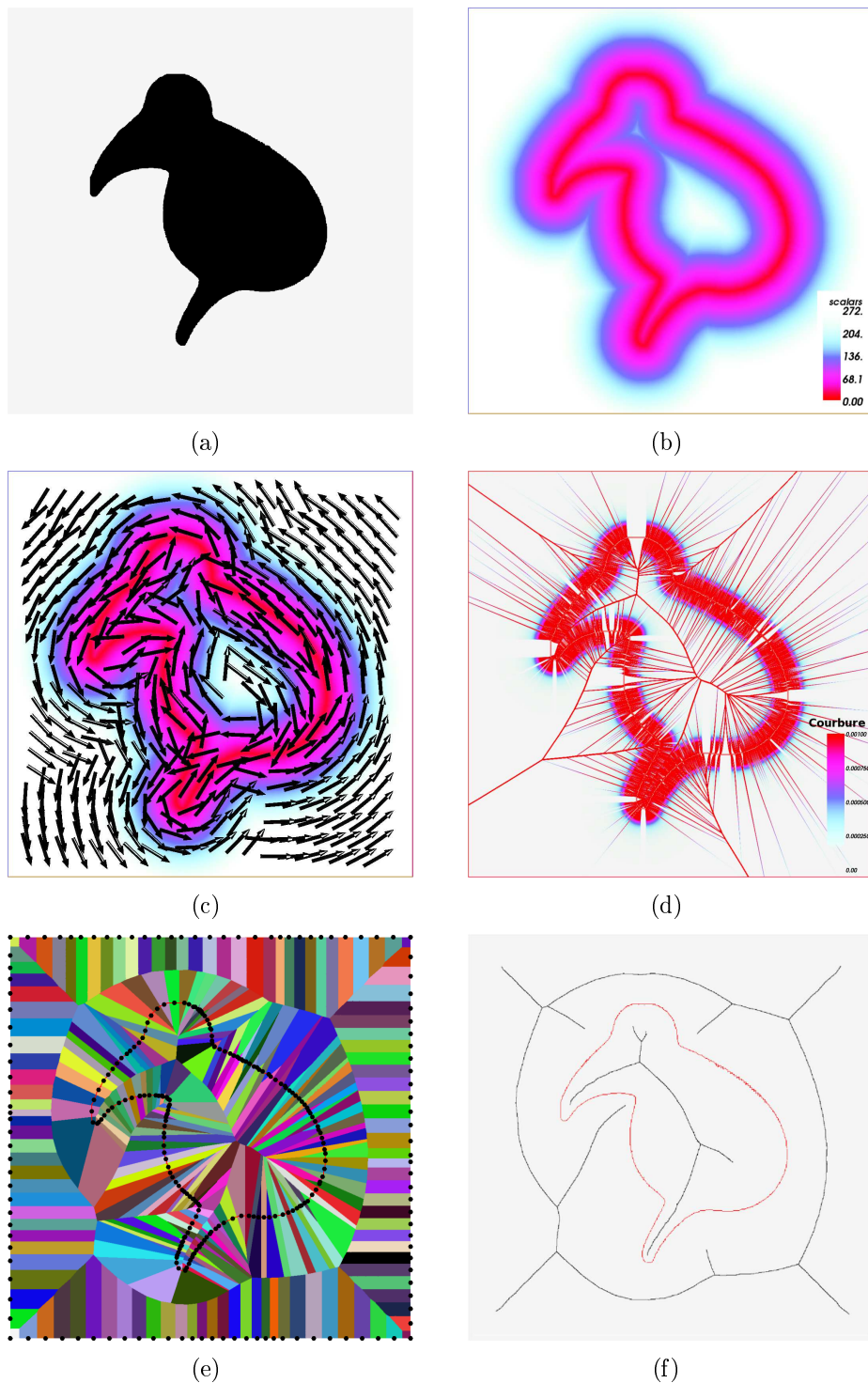


FIG. 8.14 – Illustration de l'approche pour l'approximation de l'axe médian : (a) Image Originale (b) (inspiré de [Alliez 05]) Carte de distance euclidienne discrète g construite à partir de la frontière de la forme . (c) Direction du vecteur principal de $\mathbf{H}(g)$. (d) La courbure (équation (8.13)) est utilisée pour générer une fonction de densité ρ . (e) Nous construisons un diagramme de Voronoï centroïdal contraint en utilisant la carte de densité (d) lequel est finalement filtré. (f) Une approximation de l'axe médian est obtenue.

8.6 Resultats

Dans cette partie, nous effectuons, dans un premier temps, une comparaison entre l'approche uniforme et adaptative, avec prise en compte de la courbure, pour l'approximation de l'axe médian. Finalement, nous comparons notre approche à l'approche RDMA (*Reduced Discrete Medial Axis*) [Coeurjolly 07a] qui permet le calcul exact de l'axe médian.

8.6.1 Comparaison entre l'approche uniforme et adaptative

La figure 8.16 montre l'approximation du DV ($N = 350$) de l'image 8.15 de manière uniforme (a) et adaptative (c) et les approximations de leurs axes médians (b) et (d).

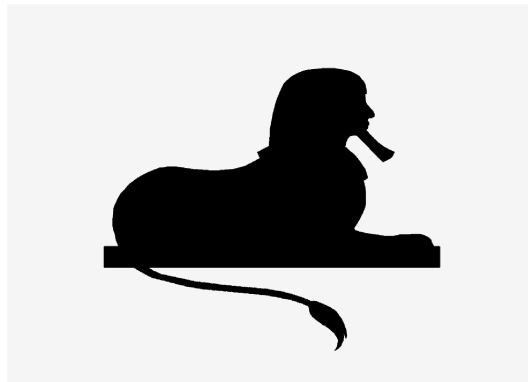


FIG. 8.15 – Image binarisée représentant un sphinx.

Nous observons que pour le même nombre de sommets, l'approximation de l'axe médian avec une distribution uniforme est moins détaillée ((b), la queue du sphinx). Contrairement à (d) où l'approximation de l'axe médian est meilleure. La répartition et la densité des cellules de Voronoï jouent donc un rôle important dans la qualité de l'approximation de l'axe médian. Pour obtenir une approximation aussi détaillée avec l'approche uniforme, il faut distribuer deux fois plus de cellules sur la frontière. L'approche adaptative permet donc une distribution plus judicieuse des cellules de Voronoï. Expérimentalement, le gain au niveau du temps de calcul est de l'ordre de 15%.

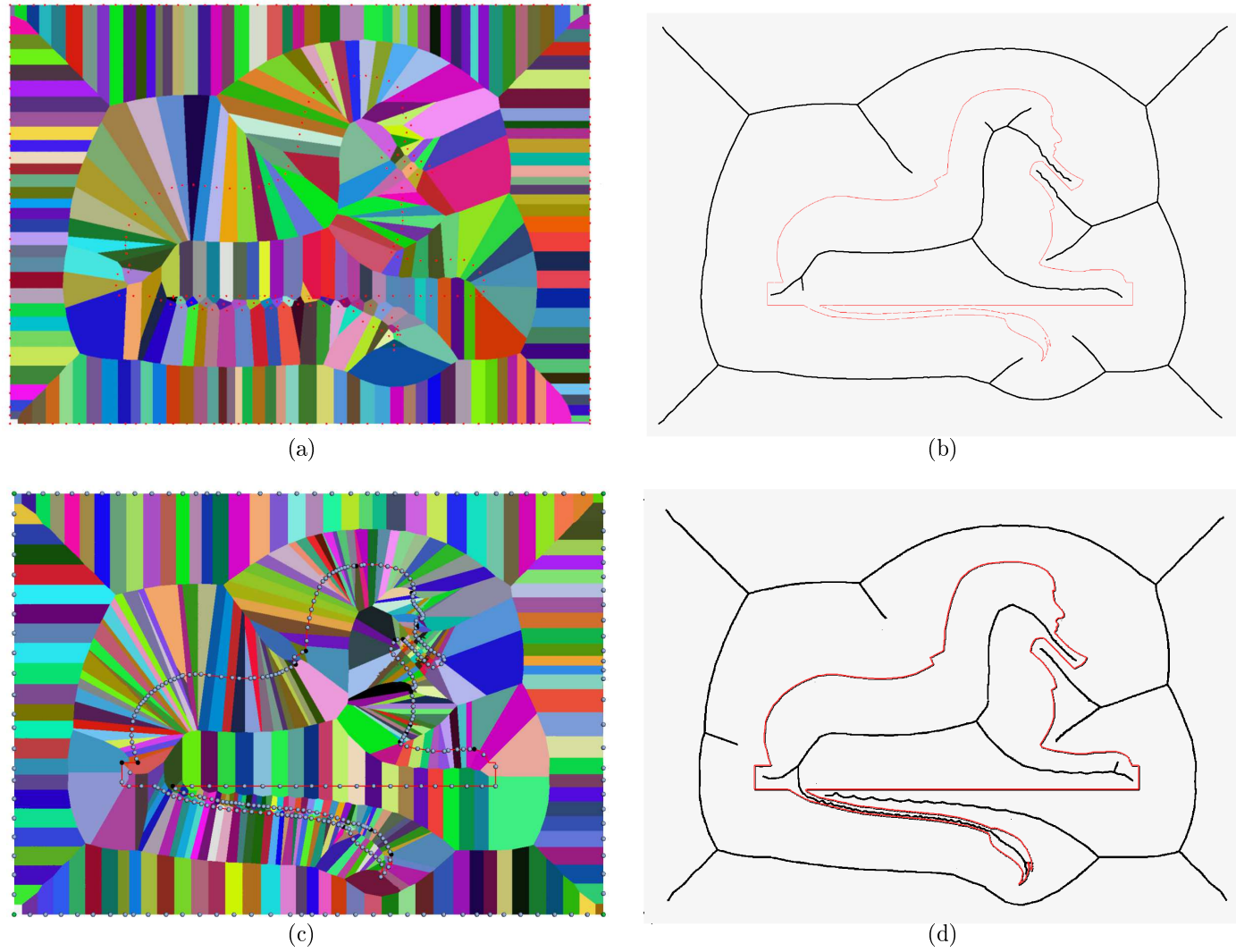


FIG. 8.16 – Approximation du DV ($N = 350$) de l'image 8.15 de manière uniforme (a) et adaptative (c) et les approximations de leurs axes médians respectifs ((b)-(d)).

8.6.2 Comparaison entre notre approche et l'approche RDMA

La figure 8.17 montre l'approximation de l'axe médian obtenue avec notre approche sur trois coupes d'une image 3D d'un cœur segmentée.

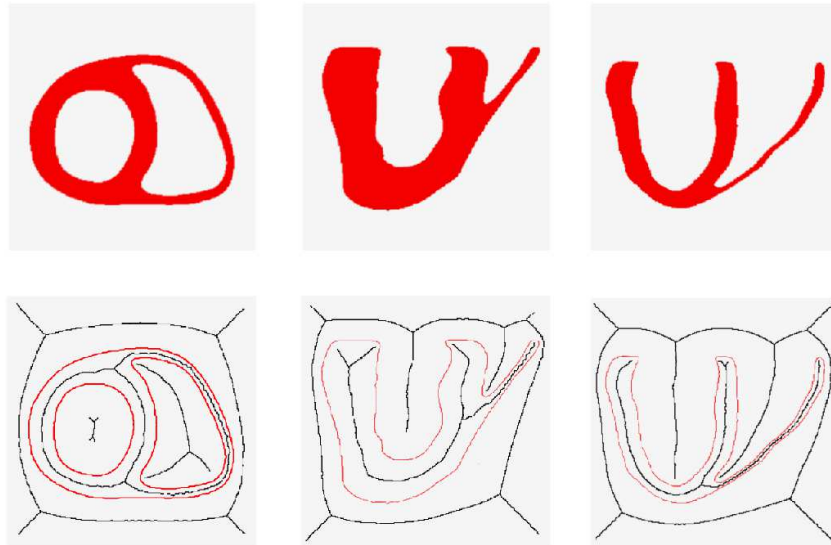


FIG. 8.17 – Trois coupes d'une image 3D du cœur segmentée et leurs axes médians respectifs.

La figure 8.18 montre des résultats comparatifs entre notre approche et l'approche RDMA [Coeurjolly 07a]. La première colonne montre les différentes formes d'entrée. La seconde colonne montre les résultats obtenus avec l'approche RDMA. La troisième colonne représente les résultats obtenus avec notre approche. La première ligne illustre les résultats obtenus sur une forme simple comportant des coins. La seconde ligne est une coupe d'un modèle représentant un cœur humain. La troisième ligne montre la même coupe mais avec du bruit sur la frontière. Nous pouvons voir clairement, que dans notre approche, l'axe médian est continu et connexe pour les trois cas.

Nos expérimentations ont montré que les critères de filtrage, basés sur les pôles et l'angle, permettent une bonne approximation de l'axe médian. De plus, notre approche a montré une forte résistance au bruit.

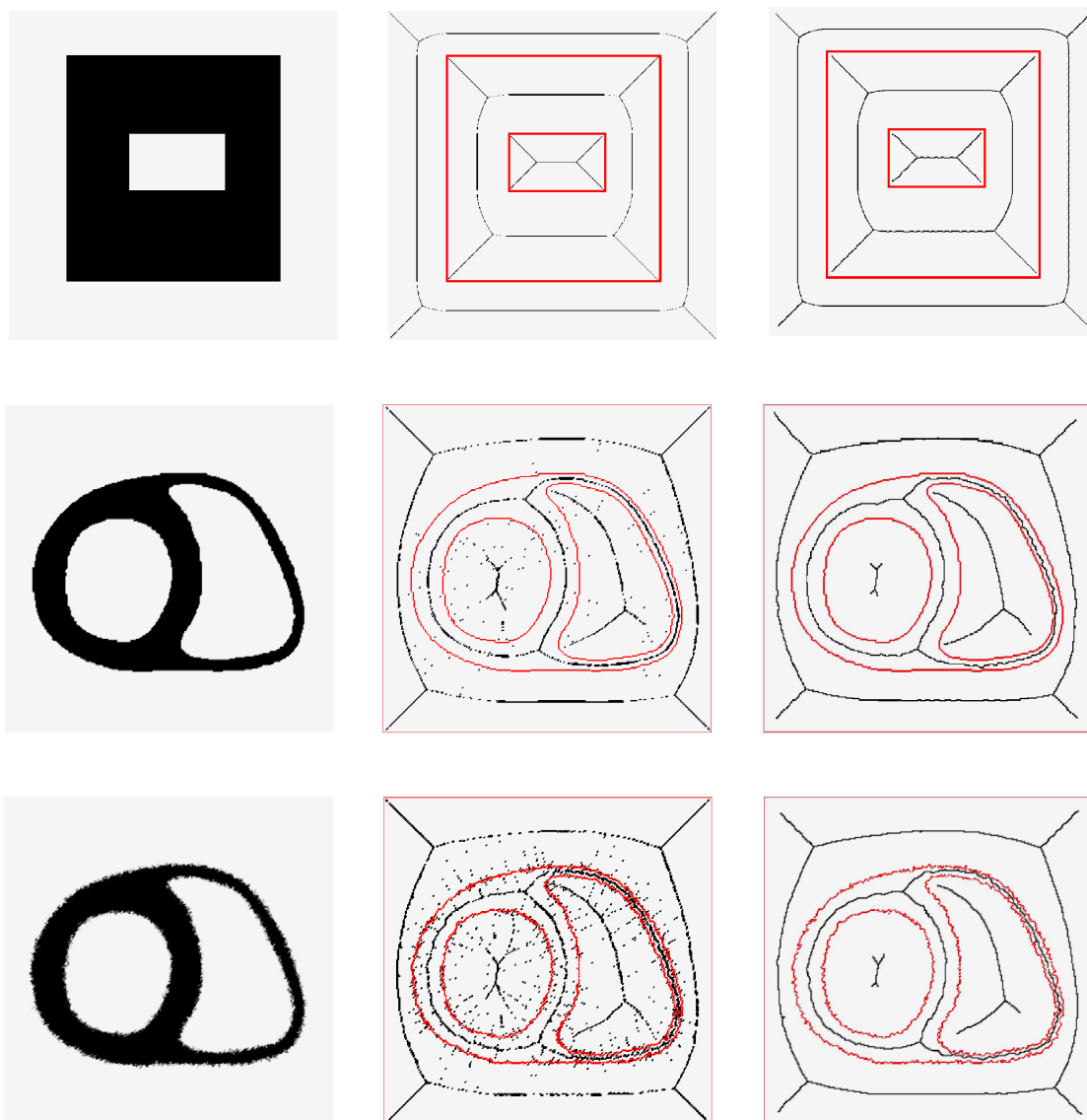


FIG. 8.18 – Comparaison entre notre approche et l'approche RDMA [Coeurjolly 07a]. A gauche : forme originale. Au milieu : RDMA ; A droite : notre approche

8.7 TVC adaptatif

Dans cette section, nous montrons la prise en compte d'une carte de densité ρ à travers l'équation 6.3 pour une génération de maillages non plus uniformes mais adaptés.

Les algorithmes de génération de maillages actuels peuvent prendre en compte une fonction de densité pour imposer la taille des éléments du maillage [Alliez 05, Quadros 04, Tournois 09]. Nous utilisons l'approximation de l'axe médian généré avec notre approche pour estimer la largeur locale (*LFS*, *Locale Feature Size*) qui a été introduite par [Amenta 98a]. Pour S , une surface lisse dans $\mathbb{R}^3$, la largeur locale pour un point x noté $LFS(x)$ est définie par :

$$LFS(x) = \min_{y \in MA(S)} \|x - y\| \quad (8.15)$$

Amenta et Bern ont montré que la *LFS* est une fonction continue 1-lipschitzienne :

$$LFS(x) \leq LFS(y) + \|x - y\| \quad \forall x, y \in S \quad (8.16)$$

D'après [Antani 07], une fonction de densité doit posséder les caractéristiques suivantes :

- les frontières du domaine doivent avoir un haut degré d'approximation,
- la graduation du maillage doit être réglable par l'utilisateur,
- le nombre de nœuds du maillage doit être le plus faible que possible.

8.7.1 Prise en compte de la largeur locale

Des travaux récents ont été consacrés à des algorithmes pouvant offrir la génération de maillages adaptatifs. Alliez et *al.* ont ainsi utilisé la notion de largeur locale définie par [Amenta 98a] pour générer des triangulations adaptatives [Alliez 05]. La méthode proposée nécessite de pouvoir calculer ou estimer la largeur locale de la surface afin de régler la densité de l'échantillonnage. Ils ont montrés que si $\mu(x)$ est une fonction K -Lipschitzienne maximale qui n'est jamais plus grande que $LFS(x)$, alors μ possède les caractéristiques décrites ci-dessus.

Nous définissons μ_j , associé à P_j ainsi :

$$\mu_j = \min_{i \in \partial_\Omega} (\alpha d(i, j) + LFS(i)) \quad (8.17)$$

Où $p_i \in \partial_\Omega$ représente un point appartenant à la frontière ∂_Ω et $d(i, j)$ est la distance euclidienne entre p_i et p_j . α est un paramètre de graduation, qui permet l'ajustement des niveaux de détails.

Dans nos travaux, nous utilisons cette approche qui calcule une fonction de taille μ à partir de l'axe médian. La fonction de densité ρ (équation 6.3) et la fonction de taille μ sont liées par la formule suivante [Du 06] :

$$\rho_j = \frac{1}{\mu_j^{d+2}} \quad (8.18)$$

Où d est la dimension de l'espace.

Un exemple de partitionnement adaptatif est donné dans la figure 8.19 à différentes itérations. Nous pouvons voir en (a) le partitionnement initial. Les images de (b) à (e) illustrent le partitionnement *sans contrainte* et de (f) à (i) *avec contrainte*. Nous pouvons voir qu'entre (e) et (f), seul le positionnement des sites des cellules coupant la frontière sont modifiés. Les cellules *non contraintes* et *contraintes* s'ajustent lors de cette dernière étape.

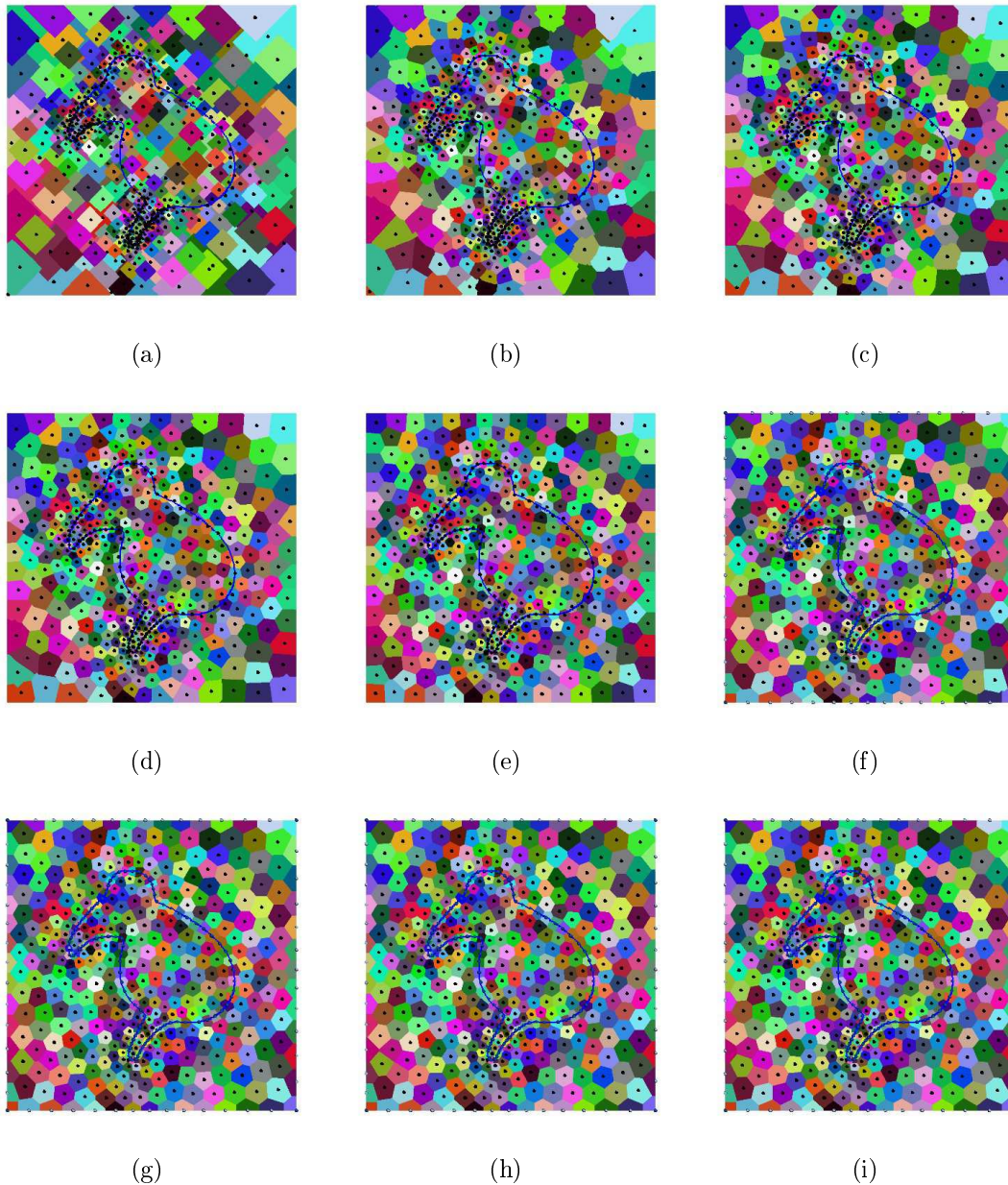


FIG. 8.19 – Processus de partitionnement adaptatif : (a) partitionnement initial ((b)-(e)) partitionnement *sans contrainte* ((f)-(i)) partitionnement *avec contrainte*.

La figure 8.20 montre l'approximation de l'axe médian sur une image représentant un "kiwi". Nous pouvons voir l'adaptation, une densité de mailles plus impor-

tante est obtenue dans les zones étroites et de forte courbure.

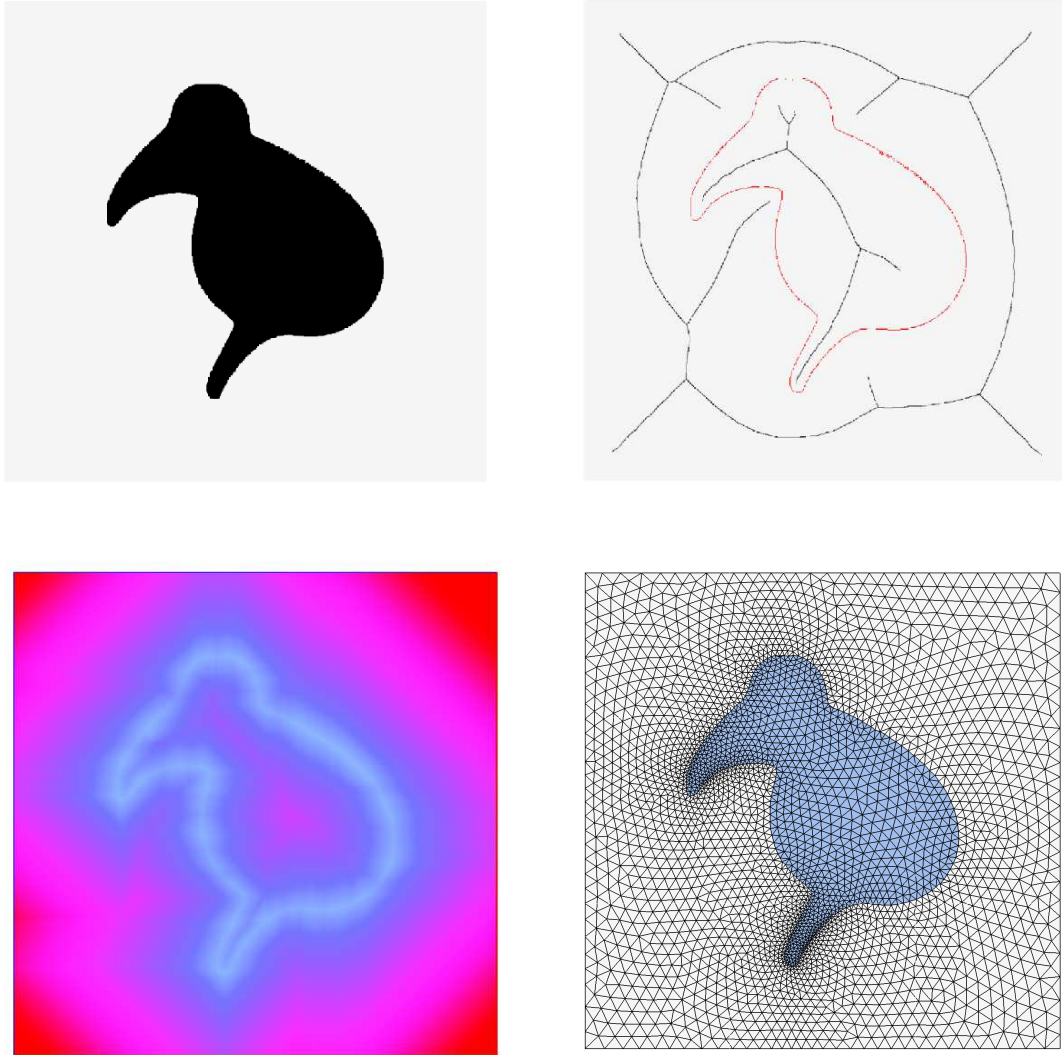


FIG. 8.20 – Exemple d’approximation sur une image représentant un “kiwi” (inspiré de [Alliez 05]) : (a) une image représentant un kiwi (b) l’approximation de l’axe médian. (c) la carte de densité ρ calculée à partir de la *LFS*. Les couleurs représentent les valeurs de pondération (d) le maillage généré avec notre approche en prenant en compte ρ .

La figure 8.21 montre un processus similaire pour un volume 3D représentant un coeur humain.

La figure 8.22 montre l’adaptativité de notre approche pour un nombre de sommets fixés ($N=1000$ sites) avec $\alpha = 0.3, 1$ et 10 .

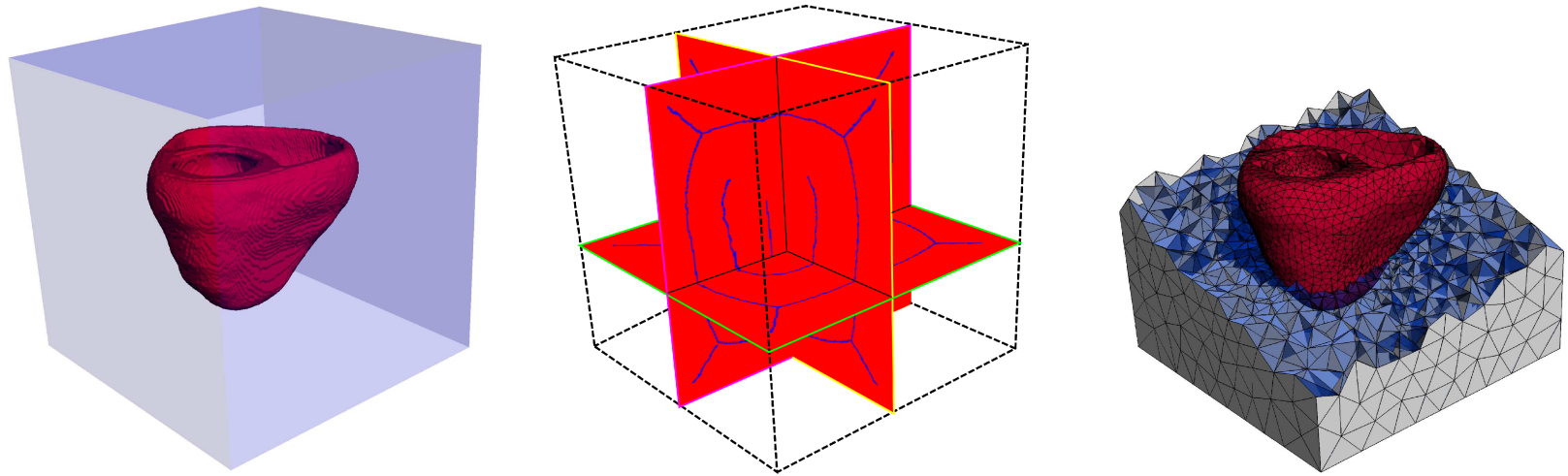
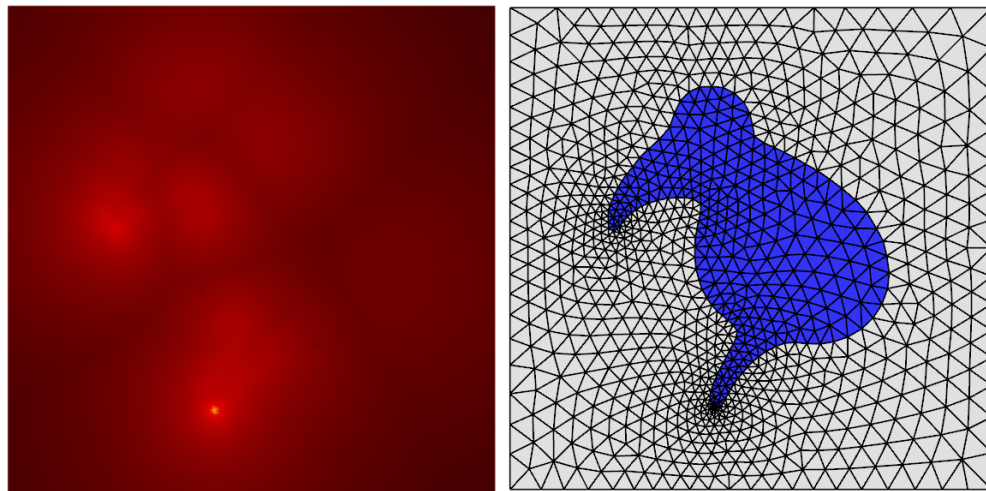
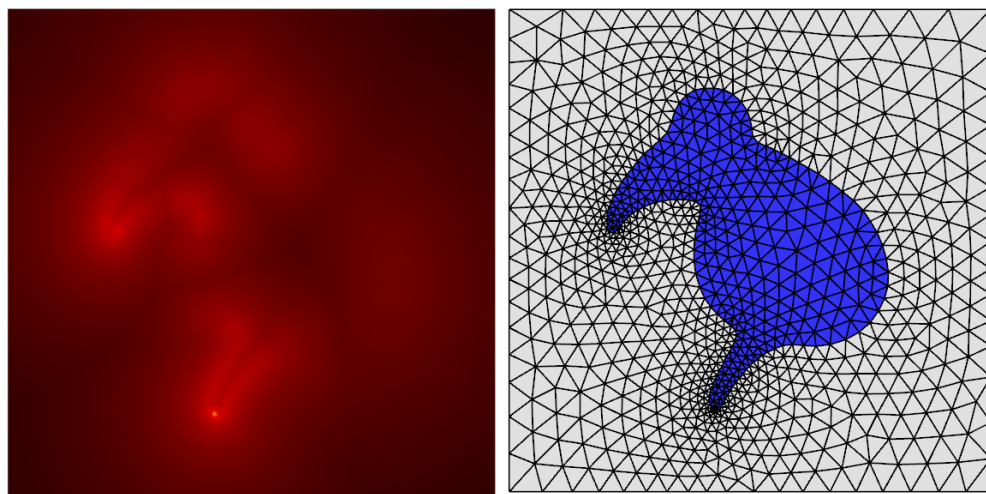
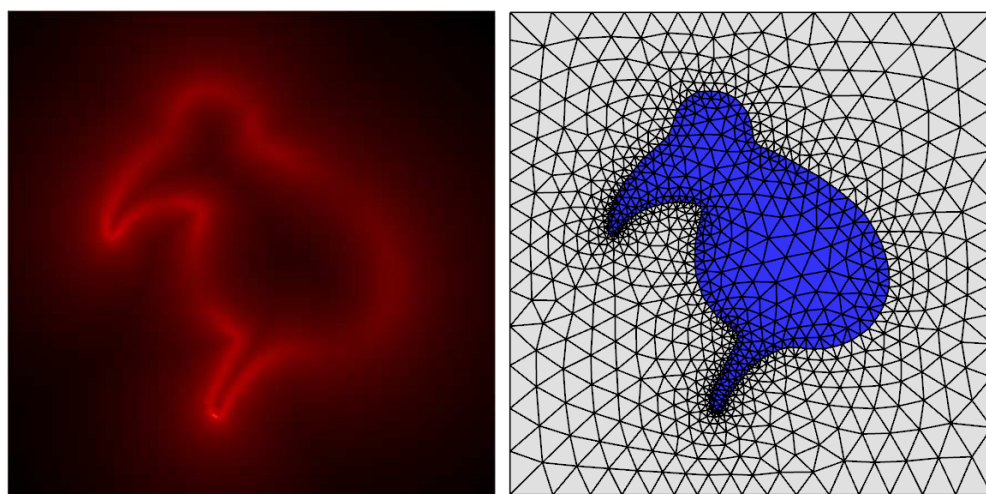


FIG. 8.21 – A gauche : un volume représentant un coeur humain. Au milieu : son axe médian. A droite : le maillage adaptatif (10000 sommets).

(a) $\alpha = 0.3$ (b) $\alpha = 1$ (c) $\alpha = 10$ FIG. 8.22 – Cartes de densité et maillages adaptatifs ($N=1000$) pour $\alpha = 0.3, 1$ et 10 .

8.7.2 Prise en compte de la largeur et de la courbure locale

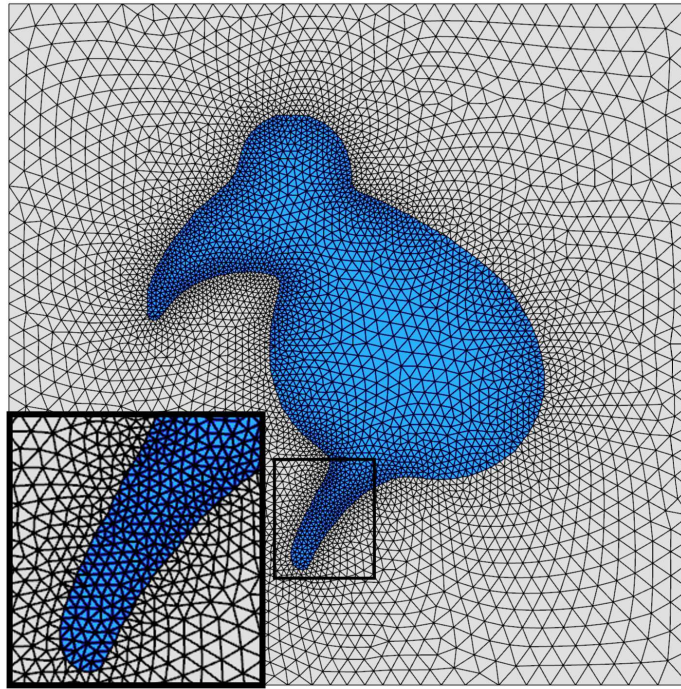
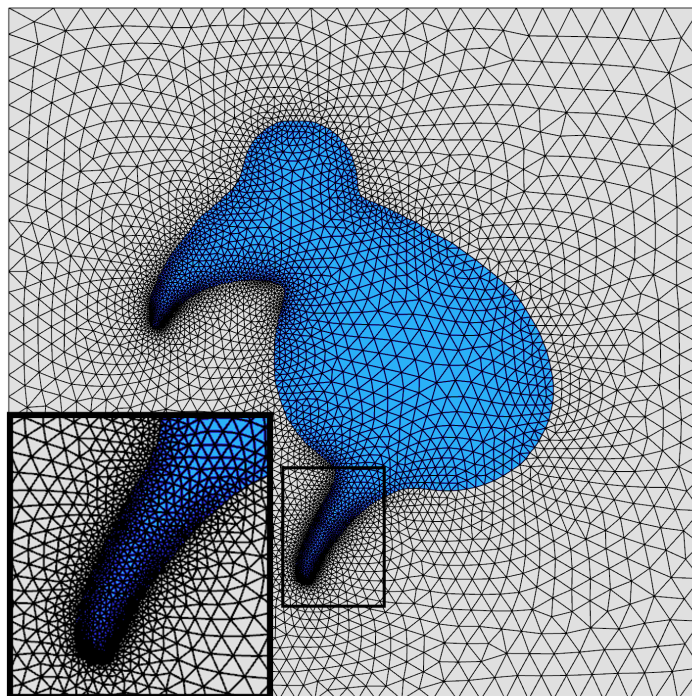
La largeur locale capture l'épaisseur locale. Par exemple, les régions de la forme qui sont étroites ou qui possèdent une forte courbure sont indiquées avec des valeurs faibles au niveau de la *LFS*. Inclure le degré de courbure dans l'équation 8.13 permet d'assurer que les petites caractéristiques qui ne sont pas pris en compte par l'axe médian apparaissent dans la carte de densité. Nous avons deux informations géométriques, la largeur locale (*LFS*) et la carte de courbure, et deux paramètres, λ et γ , qui gouvernent la construction de notre nouvelle carte de densité. Nous proposons une nouvelle fonction de taille μ qui fournit la taille d'un élément pour chaque point p_j :

$$\mu_j = \min_{i \in \partial\Omega} (\alpha d(i, j) + (LFS(i) + \gamma c(i))) \quad (8.19)$$

α est le paramètre de graduation, qui permet l'ajustement des niveaux de détails. γ permet de pondération de l'influence de la courbure par rapport à la *LFS*. Il est utilisé pour limiter l'influence de la courbure, de telle sorte que les valeurs de la *LFS* restent prépondérantes. La figure 8.23 montre l'adaptativité de notre approche pour un nombre de sommets fixés ($N=5000$ sites) avec $\gamma = 0$ et 0.5 avec $\alpha = 10$.

8.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle approche qui approxime l'axe médian d'une forme pour des objets discrets 2D ou 3D. Cette approche est basée sur le calcul d'un DVC contraint pour un ensemble de sites distribué autour de la frontière. L'un des aspects original est sa nature complètement discrète. Les résultats expérimentaux ont montré que notre approche génère une approximation de l'axe médian qui est robuste au bruit. Cela est très profitable pour la génération de maillages. Ces résultats ont donné lieu à différentes communications internationales [*Dardenne et al.*, 2008a], [*Dardenne et al.*, 2009e] et nationales [*Dardenne et al.*, 2009c].

(a) $\alpha = 10, \gamma = 0$ (b) $\alpha = 10, \gamma = 0.5$ FIG. 8.23 – Maillages adaptatifs pour $\gamma = 0$ et 0.5 avec $\alpha = 10$.

IV Exemples d'applications et évaluations

Résumé

Cette dernière partie a pour objectif de montrer des exemples d'applications de la méthode décrite précédemment. Les maillages présentés recouvrent des objets de géométrie variée afin de démontrer les performances de notre mailleur. Dans une première partie, nous évaluons notre mailleur sur des géométries dite "simples". Nous montrons ensuite une étude comparative entre notre mailleur et les mailleurs commerciaux "AMIRA" et "GHS3D", et le mailleur libre "TetGen". Les parties suivantes sont destinées à montrer les performances de notre mailleur sur des cas plus réalistes. Dans un premier temps, nous utilisons des modèles géométriques couramment utilisés dans la littérature, le modèle "standford bunny" ou le modèle "armadillo". Dans un second temps, nous générons des maillages volumiques à partir de structures anatomiques et nous présentons une seconde comparaison sur un modèle plus complexe. Une étude expérimentale montrant l'influence de la qualité du maillage sur la simulation par la MEF est présentée ensuite. Finalement, nous générons un maillage volumique comportant plusieurs structures anatomiques et nous procédons à une simulation numérique par la MEF dans le cadre de l'hyperthermie.

Evaluation de notre approche

9.1 Critères de qualité

Nous rappelons, dans cette section, les différentes notions de qualité géométrique des éléments constitutifs du maillage. D’une manière générale les “bons” tétraèdres sont ceux qui se rapprochent le plus du tétraèdre équilatéral (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux), et les “mauvais” tétraèdres sont ceux qui ont une forme singulière. Une étude bibliographique nous a permis d’identifier plusieurs critères numériques de mesure de la qualité d’un tétraèdre. Le tableau 9.1 présente les critères de qualité utilisés pour l’évaluation des différents maillages.

Critère	Q_1 : min (DA)	Q_2 : max (DA)	Q_3 : L.J.	Q_4 : Radius ratio	Q_5 : Edge ratio	Q_6 : Aspect ratio
Formule	α_{min}	α_{max}	$\frac{12\sqrt[3]{9V^2}}{\sum l_{i,j}^2}$	$3 \frac{r_{in}}{r_{out}}$	$\frac{l_{min}}{l_{max}}$	$\frac{12}{\sqrt{6}} \frac{3V}{l_{max} \sum A_i}$

TAB. 9.1 – Critère de qualité

Dans le tableau 9.1, $l_{i,j}$ est la longueur d’une arête reliée à deux sommets i et j . l_{min} et l_{max} sont, respectivement, les longueurs minimales et maximales. A est l’aire des faces d’un tétraèdre, r_{in} le rayon de la sphère inscrite, r_{out} le rayon de la sphère circonscrite et V son volume. Le critère Q_3 est cité dans [Liu 94]. Les critères sont normalisés entre 0 et 1 (sauf pour les critères Q_1 et Q_2), où 0 représente un mauvais élément et 1 un tétraèdre équilatéral.

Nous pouvons définir la notion de qualité d'un élément pour ces différents critères normalisés :

Valeur du critère	Qualité de l'élément
1	équilatéral
Entre 0.75 et 1	Excellente
Entre 0.5 et 0.75	Bonne
Entre 0.25 et 0.5	Correcte
Entre 0.1 et 0.25	Pauvre
Entre 0 et 0.1	Mauvaise
0	Dégénéré

De même pour le critère Q_1 ,

Valeur du critère	Qualité de l'élément
$70^\circ,5$	équilatéral
Entre 69° et $70^\circ,5$	Excellente
Entre 50° et 69°	Bonne
Entre 30° et 50°	Correcte
Entre 10° et 30°	Pauvre
Entre 0° et 10°	Mauvaise
0°	Dégénéré

Ces critères géométriques sont utilisés par la suite pour définir la qualité des maillages générés par notre approche.

9.2 Géométrie simple

Dans cette section, nous présentons différents résultats de notre algorithme sur des géométries dites "simples". Le premier exemple (figure 9.1 (a)) montre une sphère maillée (15000 sommets) de façon uniforme. L'histogramme en (b) montre la distribution de la qualité calculé par rapport au critère Q_3 .

Le second exemple illustré dans la figure 9.2 montre la préservation des frontières internes. Le maillage est composé de 6000 sommets. Nous pouvons voir que les caractéristiques telles que les coins et les arêtes du cube interne (en bleu) sont préservés.

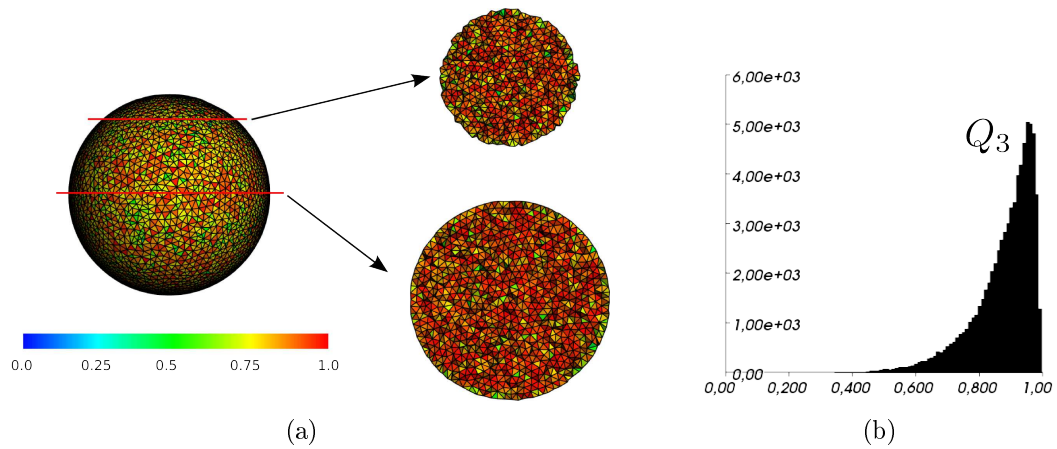


FIG. 9.1 – (a) maillage tétraédrique d'une sphère comprenant 15000 sommets (b) l'histogramme de la distribution de la qualité par rapport à Q_3 .

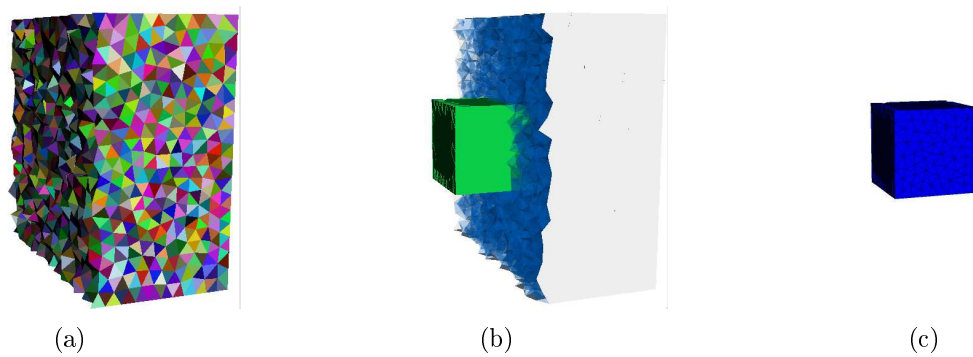


FIG. 9.2 – (a) maillage tétraédrique comprenant 10000 sommets (b) coupe du maillage volumique (c) surface de l'objet interne maillée.

9.3 Géométrie complexe

Dans cette section, nous présentons différents résultats de notre algorithme sur des géométries dites “complexes”. Dans un premier temps, les objets à mailler sont les modèles surfaciques “Armadillo”, “Stanford bunny” et “VenusBody” qui ont été voxellisés préalablement. Dans un second temps, nous utilisons des structures anatomiques segmentées pour démontrer l’efficacité de notre approche.

9.3.1 Modèles virtuels

Nous utilisons les modèles surfaciques “Stanford bunny”, “Armadillo” et “VenusBody” comme données d’entrées pour notre mailleur. Ces modèles sont couramment utilisés dans la littérature. Les modèles “Stanford bunny” et “Armadillo” représentent la reconstruction surfacique d’un objet numérisé par un scanner (Department Of Computer Science de l’université de Stanford, USA). Nous voxellisons les différents modèles et nous procédons ensuite à leurs triangulations 3D avec notre mailleur (figure 9.3 ((a)-(c))). Les histogrammes pour le critère de qualité Q_3 montrent que les maillages générés sont de très bonne qualité. Le tableau 9.2 montre l’efficacité de notre algorithme d’optimisation topologique pour les modèles précédents.

Modèles		Armadillo	Stanford bunny	Venus Body
Critères				
# tétraèdres		55329	113409	55103
Maillage initial	$< 6^\circ$	40	99	33
	$< 12^\circ$	138	358	113
	$< 18^\circ$	364	654	226
Après optimisation	$< 6^\circ$	0	0	0
	$< 12^\circ$	1	1	5
	$< 18^\circ$	5	8	13
$\min(Q_1) (^\circ)$		10.81°	11.54°	10.17°

TAB. 9.2 – Evaluation de notre étape d’optimisation pour les modèles “Armadillo”, “Stanford bunny” et “Venusbody”.

9.3.2 Structures anatomiques

Nous utilisons, maintenant, différentes structures anatomiques segmentées pour démontrer l’efficacité de notre mailleur. La figure 9.4 montre les résultats obtenus sur deux modèles différents : un fœtus (a) et un cœur (b). Les histogrammes montrent la distribution de Q_3 pour chaque tétraèdre dans les maillages.

La figure 9.5 montre la représentation maillée d’un crane et d’un cerveau humain avec 52132 et 38212 tétraèdres.

Le tableau 9.3 illustre les effets de notre algorithme d’optimisation topologique sur la qualité des tétraèdres pour différentes structures anatomiques.

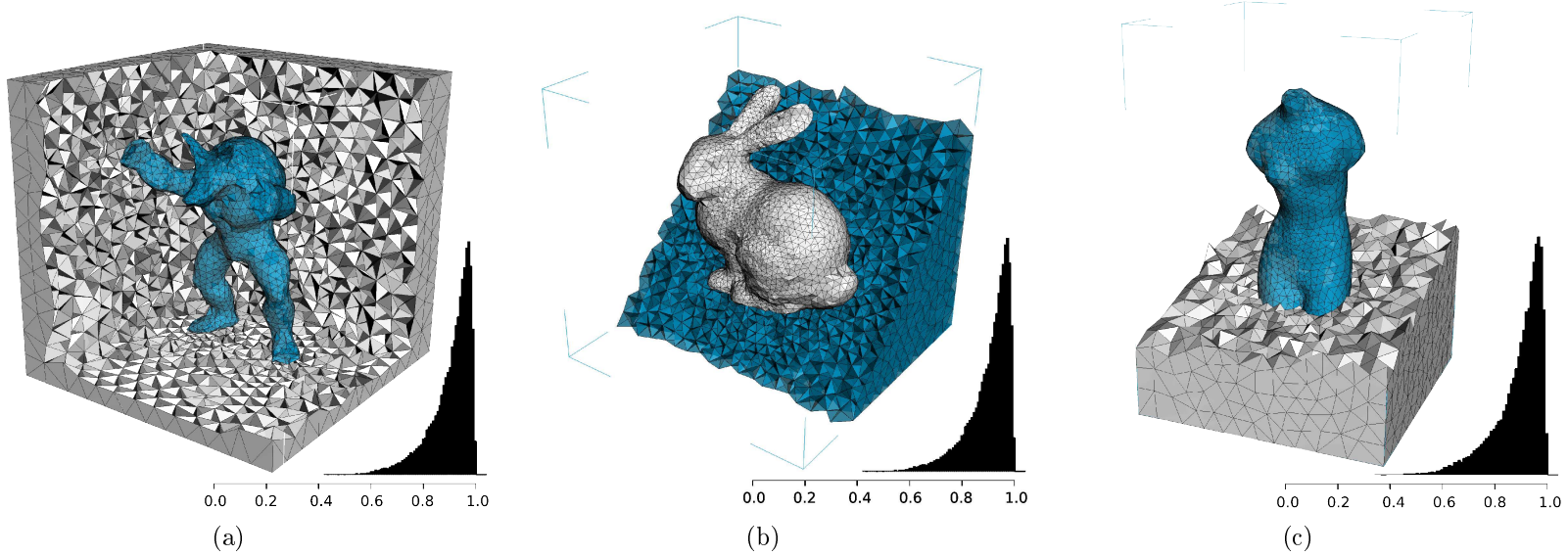


FIG. 9.3 – Représentations maillées : (a) "Armadillo" (b) "Stanford bunny" (c) "Venusbody". Les histogrammes montrent les distributions de Q_4 .

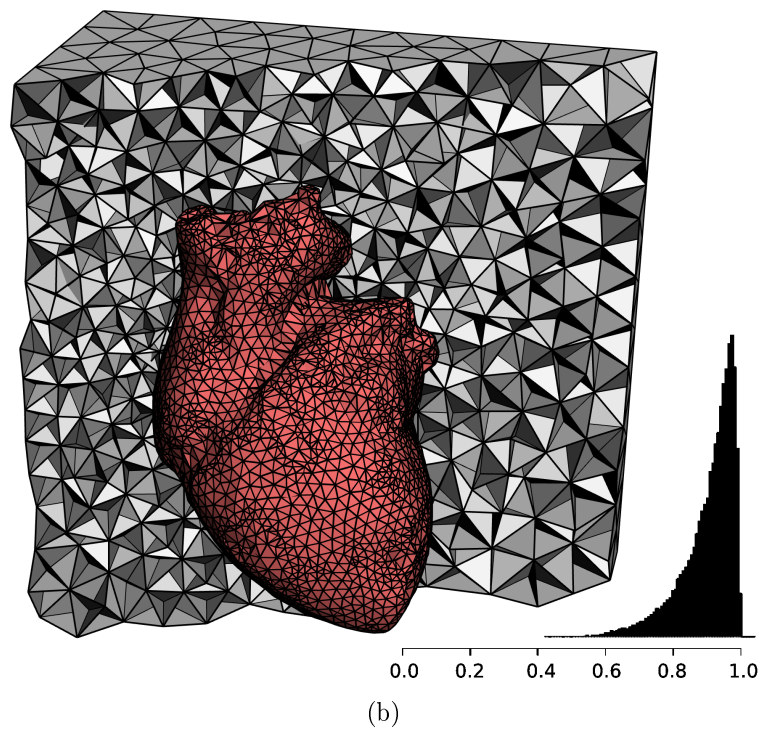
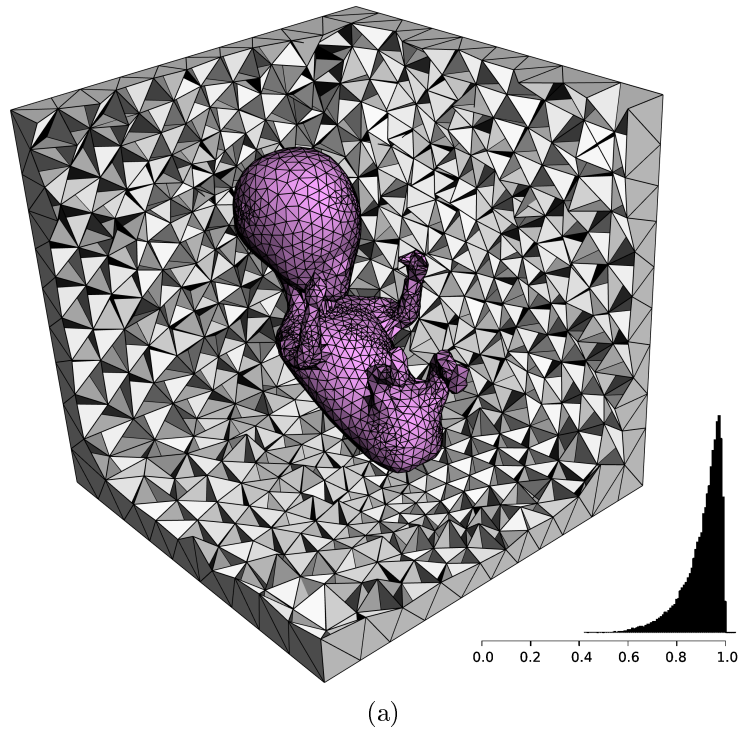


FIG. 9.4 – Représentations maillées d'un fœtus (a) et d'un cœur (b). Les histogrammes montrent la distribution de Q_3 pour chaque tétraèdre dans chaque maillages.

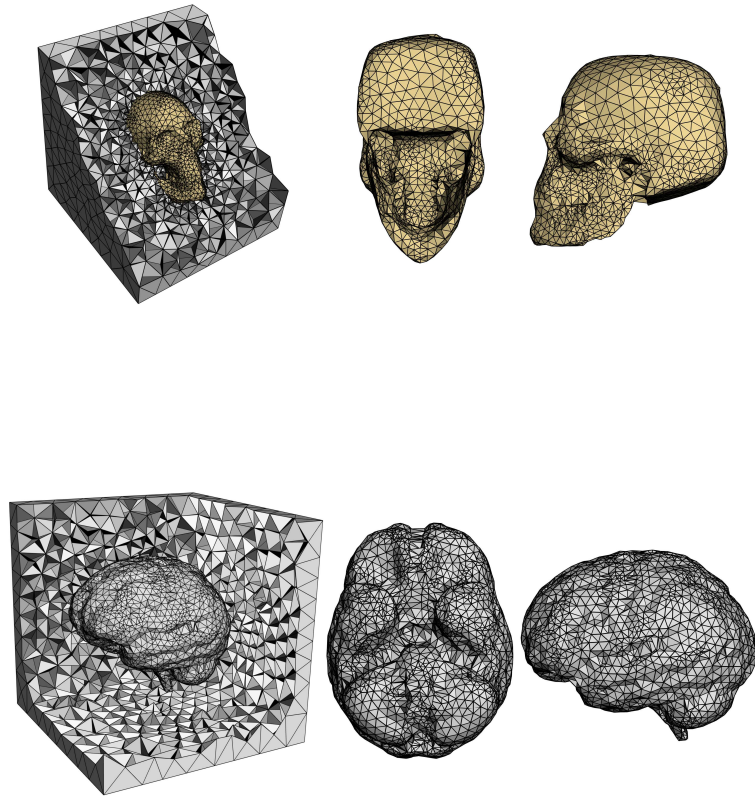


FIG. 9.5 – Représentation maillée d'un crane (a) et d'un cerveau humain (b)

Critères \ Modèles		foetus	cœur	crane
# tétraèdres		32867	45602	52132
Maillage initial	$< 6^\circ$	24	73	21
	$< 12^\circ$	113	223	89
	$< 18^\circ$	123	231	212
Après optimisation	$< 6^\circ$	0	0	0
	$< 12^\circ$	0	1	4
	$< 18^\circ$	4	5	9
$\min(Q_1) (^\circ)$		12.28°	11.98°	10.93°

TAB. 9.3 – Evaluation de notre étape d'optimisation de la qualité des maillages.

La figure 9.6 illustre un volume segmenté par [Rose 07], représentant le rein gauche d'une souris (a). Le maillage obtenu en (b) possède des poids uniformes. (c) est réalisé avec une carte de pondération et respecte les régions complexes.

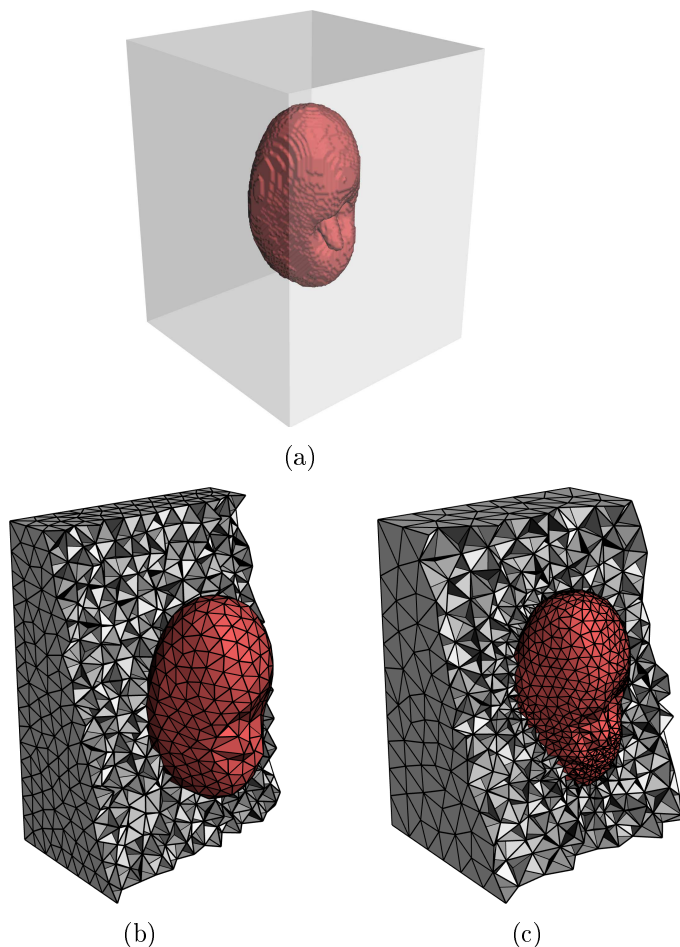


FIG. 9.6 – (a) volume représentant le rein gauche d'une souris (b) maillage obtenu avec des poids uniforme (c) maillage adapté : le maillage respecte les régions complexes grâce à l'utilisation d'une carte de pondération.

Le tableau 9.4 référence les temps de calculs pour chaque étape du processus. Les résultats sont obtenus avec un ordinateur portable cadencé à 2.53 GHz, avec 4GB de RAM.

# Voxels en entrée	# Sommets en sortie	Temps (s)		
		Partitionnement	Maillage	Optimisation
50^3	500	2.42	0.44	0.72
100^3	4000	34.13	4.3	6.02
200^3	36000	271.96	36.11	42.26

TAB. 9.4 – Temps de calcul avec notre algorithme

Chapitre 10

Influence de la qualité du maillage sur la simulation par la MEF

Cette étude a pour but de montrer l'influence de la qualité du maillage sur la simulation par la MEF pour nos problèmes électromagnétiques et thermiques. Nous considérons le temps de résolution par la MEF et l'erreur sur la solution. Nous effectuons différentes expériences dont le but sous-jacent est de déterminer un critère de qualité ainsi que sa valeur idéale dans le cadre de notre étape d'optimisation. Nous parlons d'expérience car cette étude est réalisée de façon expérimentale.

10.1 Expérimentations

Les différentes expérimentations sont réalisées sur la géométrie sphérique générée par notre approche S_3 dans la section 11.1. L'angle dièdre minimal est de 16.31° . Nous utilisons la transformation topologique $5 - 4$ du chapitre 6 de manière inverse ($4 - 5$) pour insérer des éléments de mauvaise qualité dans S_3 (figure 6.19). Les expérimentations réalisées sont les suivantes :

- Ajout d'un seul mauvais élément, caractérisé par son angle dièdre minimum, pour tester la rapidité de la convergence de la simulation électromagnétique et thermique selon le type de pré-conditionnement.
- Ajout de mauvais éléments par rapport aux critères normalisés Q_3 à Q_6 pour tester la rapidité de la convergence de la simulation thermique.
- Ajout de mauvais éléments par rapport au critère Q_1 pour tester l'erreur entre les solutions analytiques et numériques thermiques.
- Ajout de mauvais éléments par rapport au critère Q_3 pour voir si il existe un lien avec le facteur de conditionnement de la matrice pour la simulation thermique.

10.1.1 Expérience 1 :

Cette première expérience est illustrée dans la figure 10.1.1. Elle consiste à insérer un seul élément de mauvaise qualité dans le maillage et d'effectuer la simulation électromagnétique SE ou thermique ST selon différents type de préconditionnement. Nous utilisons trois types de préconditionnement :

- $Pre_{Diagonale}$: Préconditionnement diagonal,
- Pre_{Gauss} : Préconditionnement de type Gauss,
- Pre_{SSOR} : Préconditionnement SSOR.

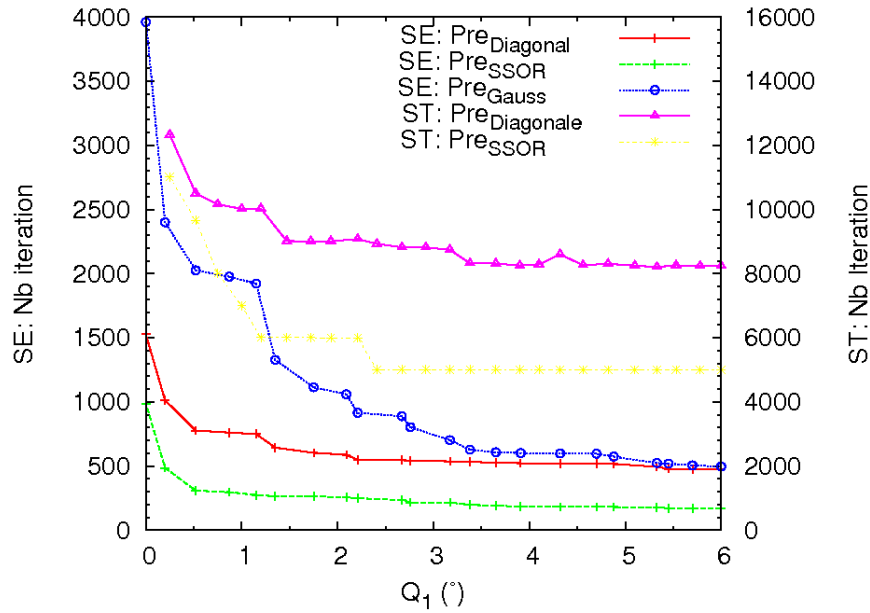


FIG. 10.1 – Effet d'un seul mauvais tétraèdre sur la simulation électromagnétique et thermique pour plusieurs types de préconditionnement.

Les préconditionnements de type Diagonale, Gauss et SSOR permettent sous certaines conditions d'obtenir un meilleur conditionnement de la matrice à résoudre. Nous pouvons observer pour les préconditionnements de type Diagonale et Gauss que l'ajout d'un élément plat (un volume proche de 0°) influence grandement le nombre d'itérations pour obtenir la solution recherchée. Les différents résultats en S_T et S_E montrent qu'un préconditionnement de type SSOR permet de gagner en temps de résolution si des éléments plats ne sont pas présent dans le maillage volumique. La simulation ne sera pas affectée par la qualité du maillage si ces éléments ont un angle dièdre minimal supérieur à 4° . Cette première expérience montre que le type de pré-conditionnement peut diminuer le temps de calcul mais qu'un seul mauvais élément de faible qualité peut doubler ce temps.

10.1.2 Expérience 2 :

Cette seconde expérience, illustrée dans la figure 10.1.2, consiste à insérer un seul élément de mauvaise qualité selon les critères Q_3 à Q_6 pour la simulation thermique ST .

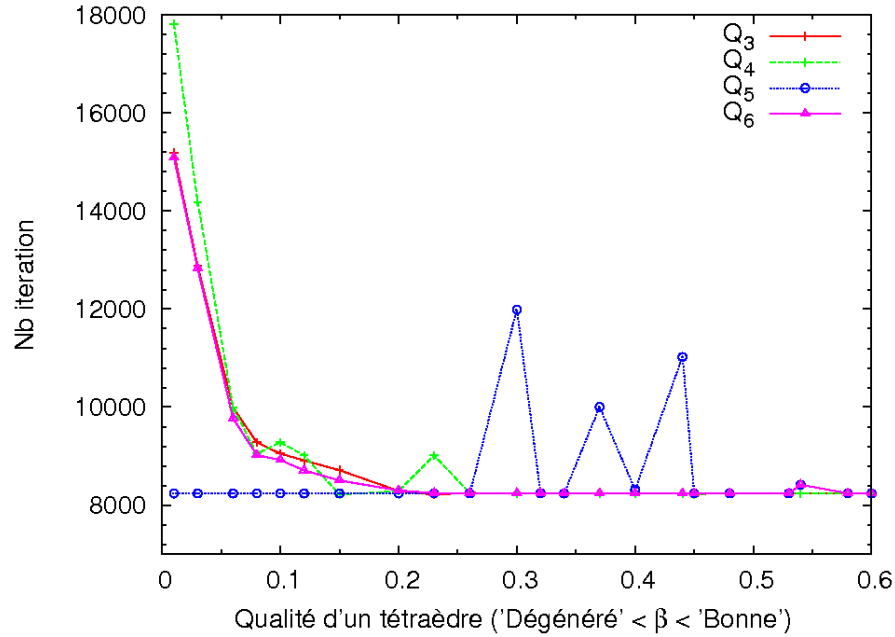


FIG. 10.2 – Impact de la qualité d'un tétraèdre sur la simulation thermique pour différents critères normalisés, Q_3 à Q_6 .

Le critère Q_5 d'après ce test apparaît insuffisant pour pouvoir déterminer la qualité d'un élément. Ce critère est basé sur le rapport entre l'arête minimale et l'arête maximale d'un tétraèdre. Ce critère ne peut détecter les configurations comportant un rapport entre arête non-nulle et le volume d'un tétraèdre qui serait proche de zéro. Ces éléments étant par nature les plus pénalisants dans le conditionnement de la matrice par MEF. Les critères Q_3 et Q_6 possèdent certaines irrégularités mais elles semblent négligeables par rapport à Q_5 . Le critère Q_4 semble le plus indiquer pour classer les éléments du maillage. De cette expérience peut découler différentes gammes de valeurs pour les critères normalisés Q_3 à Q_6 . Cependant, les critères Q_3 , Q_4 et Q_6 semblent plus robustes que le critère Q_5 .

10.1.3 Expérience 3 :

Cette troisième expérience est illustrée dans la figure 10.1.3. Elle consiste à insérer un à un des éléments de mauvaise qualité dans une gamme allant de 0° à 6° selon le critère Q_1 , pour la simulation thermique ST avec un préconditionnement de type SSOR Pre_{SSOR} . Nous calculons alors l'erreur numérique maximale $Error_{max}$ entre la solution numérique et la solution analytique.

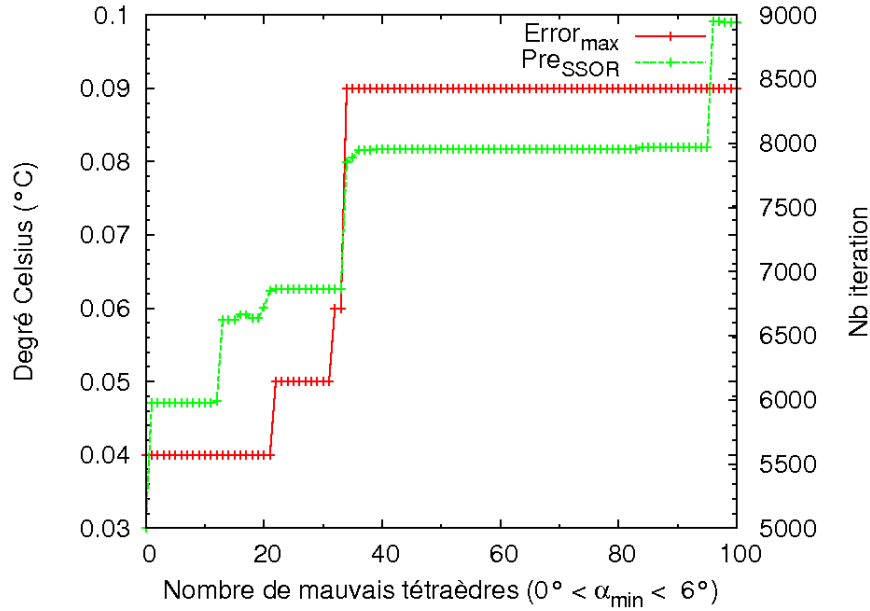


FIG. 10.3 – Impact de l'ajout un à un de mauvais éléments selon le critère Q_1 par rapport à l'erreur numérique maximale $Error_{max}$ calculée entre la solution numérique et la solution analytique.

Cette troisième expérience montre que la qualité des éléments joue un rôle important dans l'approximation de la solution recherchée et sur la vitesse de résolution de l'EDP. Cette expérience illustre une certaine corrélation entre le nombre d'itérations et l'erreur numérique maximale pour la simulation thermique ST .

10.1.4 Expérience 4 :

Cette dernière expérience est illustrée dans la figure 10.1.4. Elle consiste à insérer un à un des éléments de mauvaise qualité dans une gamme allant de 0 à 0.3 selon le critère Q_3 , pour la simulation thermique ST avec un préconditionnement de type SSOR Pre_{SSOR} . Nous calculons alors le facteur de conditionnement de la matrice à résoudre.

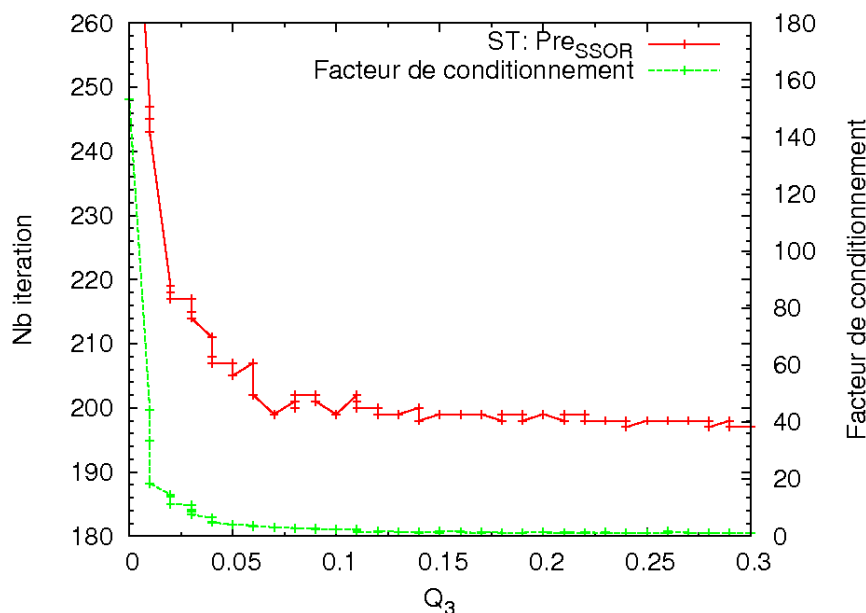


FIG. 10.4 – Influence de la qualité des éléments sur le facteur de conditionnement sur la simulation thermique ST .

Cette dernière expérience permet de montrer une corrélation entre le nombre d'itérations et le facteur de conditionnement pour la simulation thermique ST . Nous pouvons en déduire une seconde corrélation entre le critère de qualité Q_3 et le facteur de conditionnement.

10.2 Conclusions

D'après cette étude expérimentale, nous concluons que certaines mesures de qualité géométrique ne sont pas pertinentes pour la MEF utilisée. Le critère Q_5 est basé sur le ratio des arêtes minimales et maximales. Ce critère ne permet pas de caractériser les éléments plats (*slivers*). Nous avons montré d'une façon expérimentale l'impact de la qualité des éléments du maillage sur les modèles éléments finis utilisés en électromagnétique et en thermique. Nos résultats montrent clairement que la solution numérique recherchée peut être directement affectée par la qualité des tétraèdres. Ces expérimentations suggèrent des réductions de temps considérables en utilisant le critère de qualité approprié. Nous concluons qu'il est préférable d'utiliser le critère basé sur l'angle dièdre minimal Q_1 et le critère Q_3 pour l'évaluation et l'optimisation de notre algorithme de génération de maillage.

Chapitre 11

Comparaisons avec différentes approches

Nous présentons une comparaison de nos résultats avec ceux obtenus à partir du logiciel libre TetGen et des logiciels commerciaux AMIRA et GHS3D (GHS3D-TETMESH).

AMIRA AMIRA a été créé et développé par le groupe de recherche d’analyse de données et de visualisation du ZIB (Zuse Institute Berlin). Il est maintenant commercialisé et distribué par la compagnie Visage Imaging. AMIRA est un système de modélisation et de visualisation 3D, il permet de générer des maillages à partir d’isosurfaces, de maillages surfaciques ou de données discrètes [Zachow 07].

TetGen TetGen est un mailleur “open source” qui a été développé par [Si 05b]. Il regroupe différentes méthodes pour obtenir des maillages de qualité en utilisant une triangulation de Delaunay contrainte. TetGen peut générer des triangulations de Delaunay, des diagrammes de Voronoï, et des triangulations de Delaunay Contraintes à partir de PLC. Le but principal de TetGen est de produire des maillages appropriés pour résoudre des EDP par la MEF. La différence principale entre TetGen et d’autres algorithmes portant sur une CDT est l’utilisation d’un algorithme combinant le déplacement de sommets et l’insertion de sommets qui sont utilisés pour construire un nouvel ensemble de sommets compatible avec $\partial\Omega$. La robustesse de TetGen est obtenue par l’utilisation du code source proposé par [Shewchuk 97], il permet de limiter les erreurs numériques. Le mailleur TetGen propose un algorithme de raffinement de type “Delaunay” qui a été proposé par [Shewchuk 98].

GHS3D GHS3D [George 97a] est un mailleur de l’INRIA issu du projet Gamma (Génération Automatique de Maillages et Méthodes d’Adaptation). Ce projet est spécialement dédié à la conception d’algorithmes de maillage pour des méthodes par éléments finis d’un domaine défini par une discrétisation (en principe en triangles)

de sa surface. Le logiciel “GHS3D-Tetmesh” est maintenant un outil phare dans le domaine de la génération de maillage. GHS3D est déjà intégré dans la plupart des codes commerciaux existants proposés par les éditeurs de logiciels en CFAO. Ce mailleur est de type “Delaunay”. Il génère le maillage par le principe suivant : un maillage vide en tétraèdres est d’abord construit (sans point interne) en utilisant le noyau de Delaunay, ce maillage est ensuite itérativement enrichi par ajout de points internes, de manière à saturer le domaine. Cette seconde étape est répétée jusqu’à ce que toutes les arêtes aient une longueur moyenne proche de un. À l’issue de la construction, une étape de lissage est appliquée sur les sommets du maillage pour en améliorer la qualité.

Cette étude portera, dans un premier temps, sur une géométrie sphérique. Pour ce type de géométrie, nous connaissons la solution analytique du problème thermique. Nous pouvons déterminer numériquement différents types d’erreur pour la simulation thermique par la MEF. Dans un second temps, nous utiliserons une géométrie plus complexe et nous évaluerons la qualité des maillages générés.

11.1 Géométrie simple

Nous générons, à l’aide de AMIRA, deux maillages S_1 et S_2 , le premier maillage est construit à partir d’une isosurface et le second à partir de voxels. Un troisième maillage nommé S_3 est généré avec notre méthode avec le même ensemble de voxels (figure 11.1). Un quatrième maillage est généré à l’aide de TetGen en prenant comme entrée les points du maillage S_3 . Le dernier maillage volumique S_5 est généré avec GHS3D à partir du maillage surfacique de S_3 .

Nous avons réalisé ce comparatif à partir d’une sphère homogène, dont nous connaissons la formulation analytique [Thiele 02] pour le phénomène de convection thermique [2.17] dans laquelle la sphère est refroidie d’une température initiale T_0 à une température extérieure T_e [Dubbel 99].

La température $T(r, t)$ pour une sphère peut être déterminée par une solution analytique de la forme :

$$\frac{T(r, t) - T_e}{T_0 - T_e} = \sum_{n=1,2,3,\dots} B_n \frac{\sin(\omega_n r)}{\omega_n r} \exp^{-\omega_n^2 a t} \quad (11.1)$$

avec

$$a = \frac{k}{\rho C}, \quad \omega_n = \frac{\xi_n}{R}, \quad 1 - \frac{\xi_n}{\tan \xi_n} = \frac{h \cdot R}{\lambda} \quad (11.2)$$

et

$$B_n = 2 \frac{\sin \xi_n - \xi_n \cos \xi_n}{\xi_n - \sin \xi_n \cos \xi_n} \quad (11.3)$$

Le maillage volumique obtenu à l’étape précédente a été utilisé pour la simulation par éléments finis du phénomène de convection pour le problème thermique.

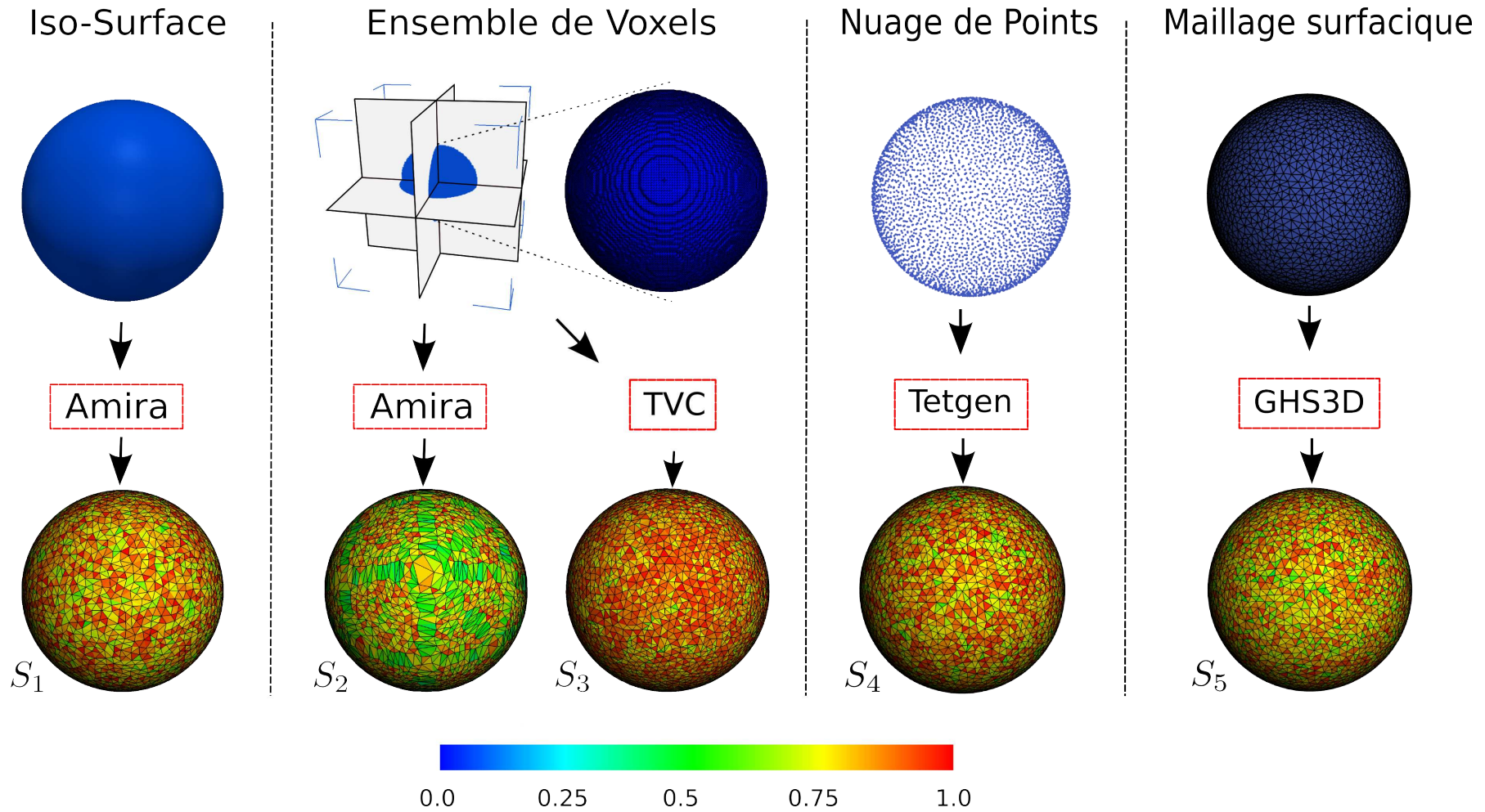


FIG. 11.1 – Comparaisons avec différentes approches sur une géométrie sphérique : S_1 et S_2 sont générés à l'aide de AMIRA, le premier maillage est construit à partir d'une isosurface et le second à partir de voxels. S_3 est généré avec notre méthode avec le même ensemble de voxels utilisé pour S_2 . S_4 est généré à l'aide de TetGen à partir d'un nuage de points issu de S_3 . S_5 est généré à l'aide de GHS3D à partir du maillage surfacique de S_3 .

La température initiale est de $37^{\circ}C$, l'environnement extérieur a une température constante de $20^{\circ}C$. La sphère a une densité de 1000 kg/m^3 et un rayon $R = 200 \text{ mm}$. λ et C représentent respectivement la conductivité thermique et la chaleur spécifique. $T(r, t)$ est la température actuelle au temps t pour un rayon r . Ces propriétés sont inspirées de celles du corps humain au niveau de la tête.

Mailleurs	AMIRA	AMIRA	TVC	TetGen	GHS3D
Maillages	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
Critères					
$\overline{Q_1}$	51.97°	50.88°	56.32°	47.07148°	46.00°
$\overline{Q_4}$	0.843	0.824	0.911	0.838	0.823
$\min(Q_1)$	13.41°	10.12°	16.31°	8.00°	6.72°
$\min(Q_4)$	0.362	0.282	0.376	0.20	0.176268
$\epsilon_{max} (1)$	$0.035^{\circ}C$	$0.094^{\circ}C$	$0.047^{\circ}C$	$0.075^{\circ}C$	$0.033^{\circ}C$
$\epsilon_{rms} (1)$	0.010	0.061	0.025	0.011	0.010
# arêtes	100875	102274	101027	100972	101014
# itérations (1)	171	205	121	158	169
# itérations (2)	5002	5004	4004	4970	5001

TAB. 11.1 – Qualité du maillage et précision pour la résolution par la MEF en simulation thermique(1) et électromagnétique (2).

Le tableau 11.1 comporte la moyenne et la valeur minimale des critères de qualité Q_1 , Q_4 pour l'ensemble des tétraèdres de S_1 à S_5 . Les lignes ϵ_{max} et ϵ_{rms} donnent l'erreur maximale et l'erreur quadratique moyenne (*rms*) entre le résultat de la simulation par la MEF [2.17] et la solution analytique exacte. Ces valeurs montrent que notre maillage S_3 apporte une erreur moins importante que S_2 et S_4 . Cette erreur est cependant supérieure à celle de S_1 et S_5 . Nous interprétons ce résultat par le rôle prépondérant de la surface de la sphère en régime thermique, or dans S_1 et S_5 , cette surface est bien définie par un maillage surfacique.

Nous calculons l'erreur de discrétisation avec la distance de Hausdorff pour S_2 et S_3 en prenant comme référence S_1 . Nous prenons S_1 car il a été généré à partir d'une isosurface qui est issue des données discrètes servant à mailler S_2 et S_3 . La distance mesurée vaut 0.31% de la diagonale de la boîte englobante pour S_2 et 0.17% pour S_3 . Ainsi, l'erreur pour notre méthode est environ deux fois moins importante.

Les deux dernières lignes du tableau montrent le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre les équations électromagnétiques [2.6] et thermiques [2.17]. Pour les deux résolutions par MEF, notre méthode apporte une qualité des tétraèdres qui permet une réduction significative du temps de calcul.

Les figures 11.2 et 11.3 représentent les histogrammes de qualité (Q_1 à Q_4), des tétraèdres associés aux maillages S_1 à S_5 . Pour l'ensemble de ces critères, la qualité des tétraèdres obtenus pour cet exemple avec notre méthode est supérieure à celle que nous avons obtenue avec AMIRA, TetGen ou GHS3D.

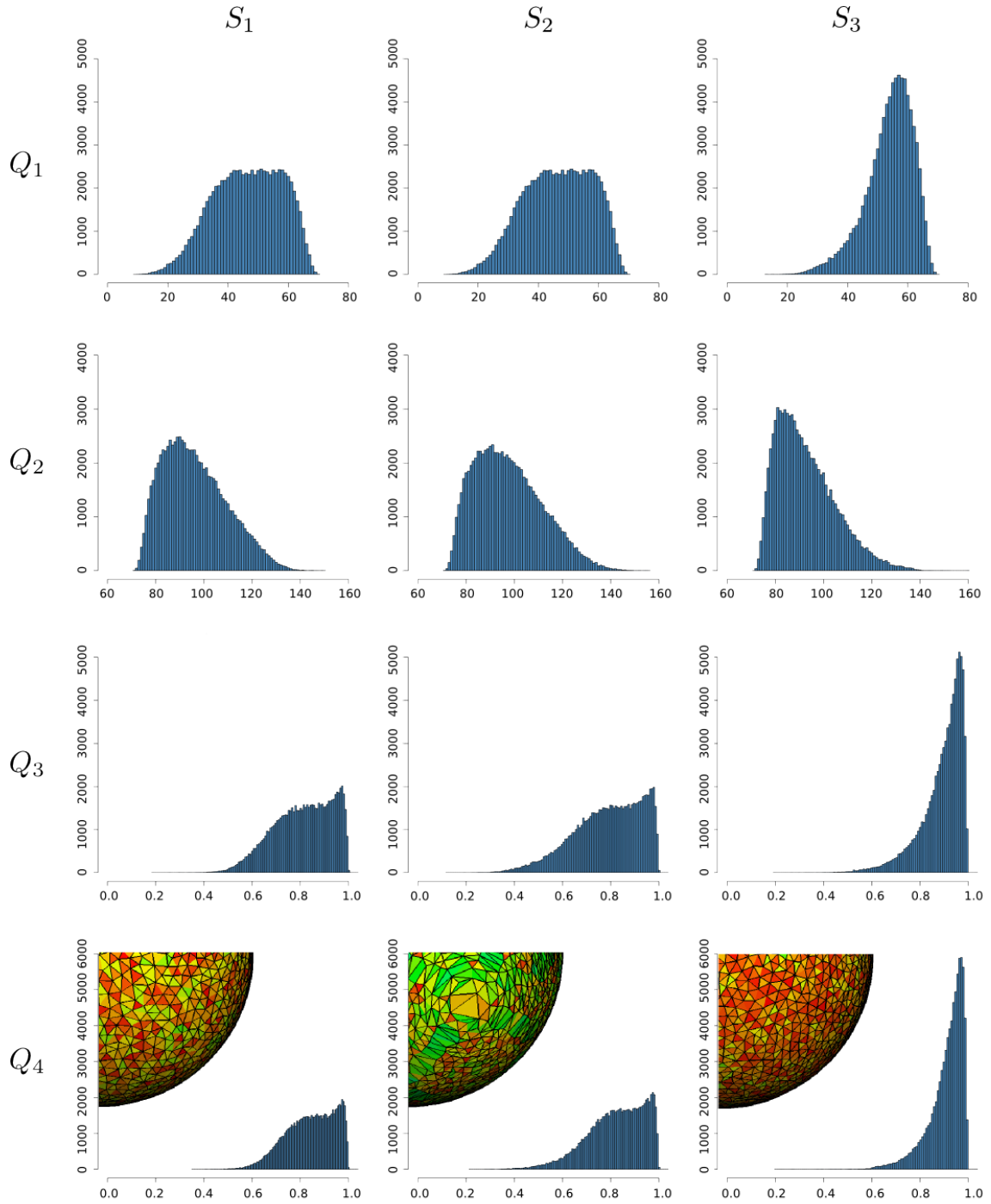


FIG. 11.2 – Histogrammes de qualité associés aux maillages S_1 , S_2 générés avec AMIRA et notre méthode S_3 pour les critères (Q_1 - Q_4).

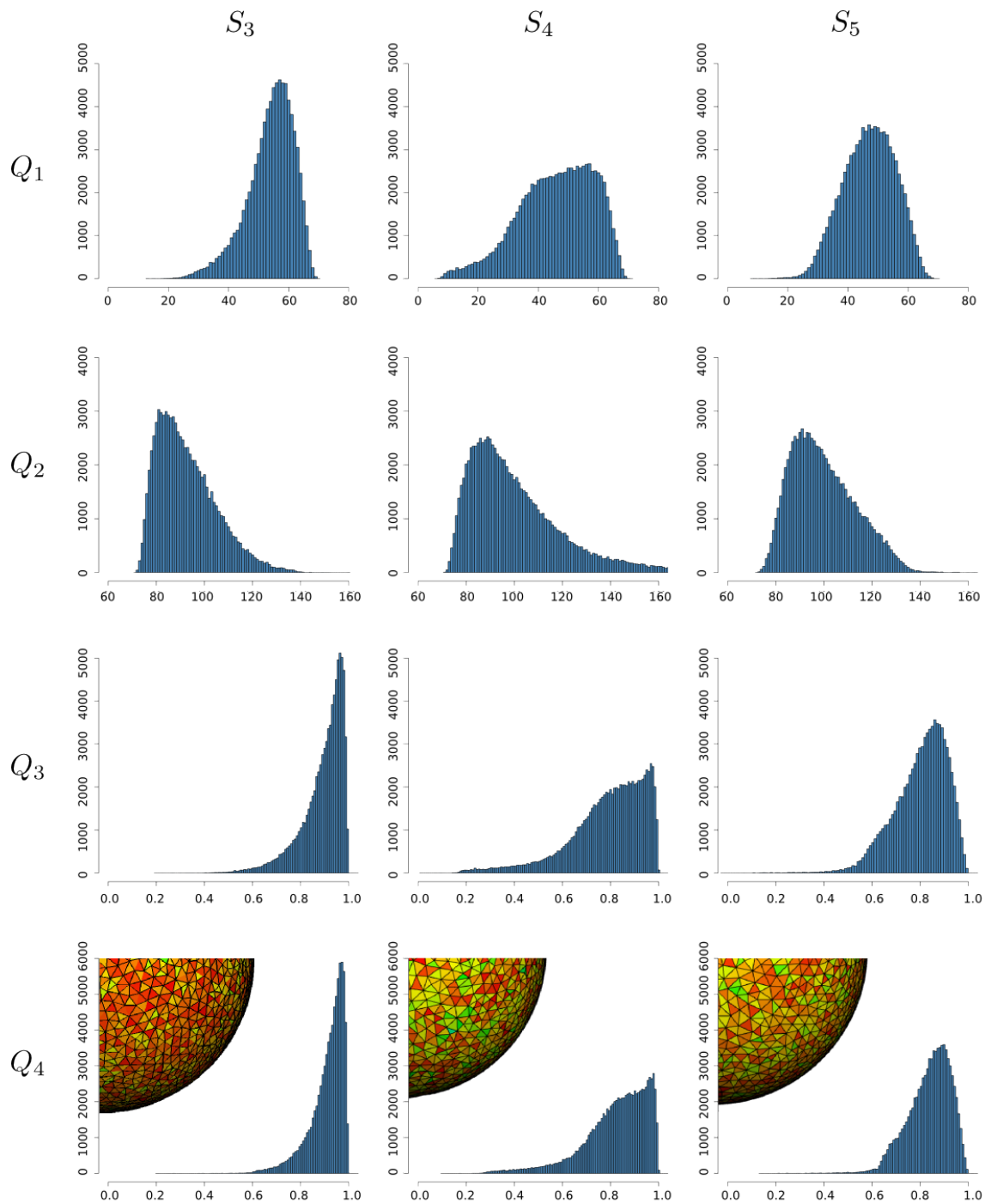


FIG. 11.3 – Histogrammes de qualité associés au maillage S_3 issu de notre approche et aux maillages S_4 , S_5 générés, respectivement, avec TetGen et GHD3D pour les critères (Q_1 - Q_4).

11.2 Géométrie complexe

Nous utilisons maintenant une structure anatomique qui représente un cœur humain. Nous générons, à l'aide de AMIRA, deux maillages C_1 et C_2 . Le premier maillage est construit à partir d'un maillage surfacique S et le second à partir de voxels. Un troisième maillage nommé S_3 est généré avec notre méthode avec le même ensemble de voxels. Le dernier maillage volumique C_4 est généré avec GHS3D à partir de S . S possède les propriétés géométriques suivantes :

# sommets	$\angle_{min}$	$\overline{\angle_{min}}$	Q_{min}	$\overline{Q}$
7793	22.45°	49.29°	0.44	0.86

TAB. 11.2 – Qualité du maillage surfacique S utilisé pour générer C_1 et C_2 .

Le tableau 11.3 comporte le nombre de tétraèdres pour certaines gammes de valeur ainsi que la moyenne et la valeur minimale des critères de qualité Q_1 et Q_2 pour les maillages C_1 à C_3 .

Mailleurs		AMIRA	TVC	GHS3D
Maillages		C_1	C_2	C_3
Critères				
# tétraèdres		93731	96002	94340
Q_1	$< 6^\circ$	30	0	0
	$< 12^\circ$	919	0	0
	$< 18^\circ$	2702	44	9
$\min(Q_1) (^\circ)$		4.45°	12.14°	13.44°
$\min(Q_3) (^\circ)$		0.20	0.35	0.37
$\overline{Q_1} (^\circ)$		48.19°	46.06°	54.44°
$\overline{Q_3} (^\circ)$		0.82	0.82	0.91

TAB. 11.3 – Qualité des maillages C_1, C_2 et C_3 .

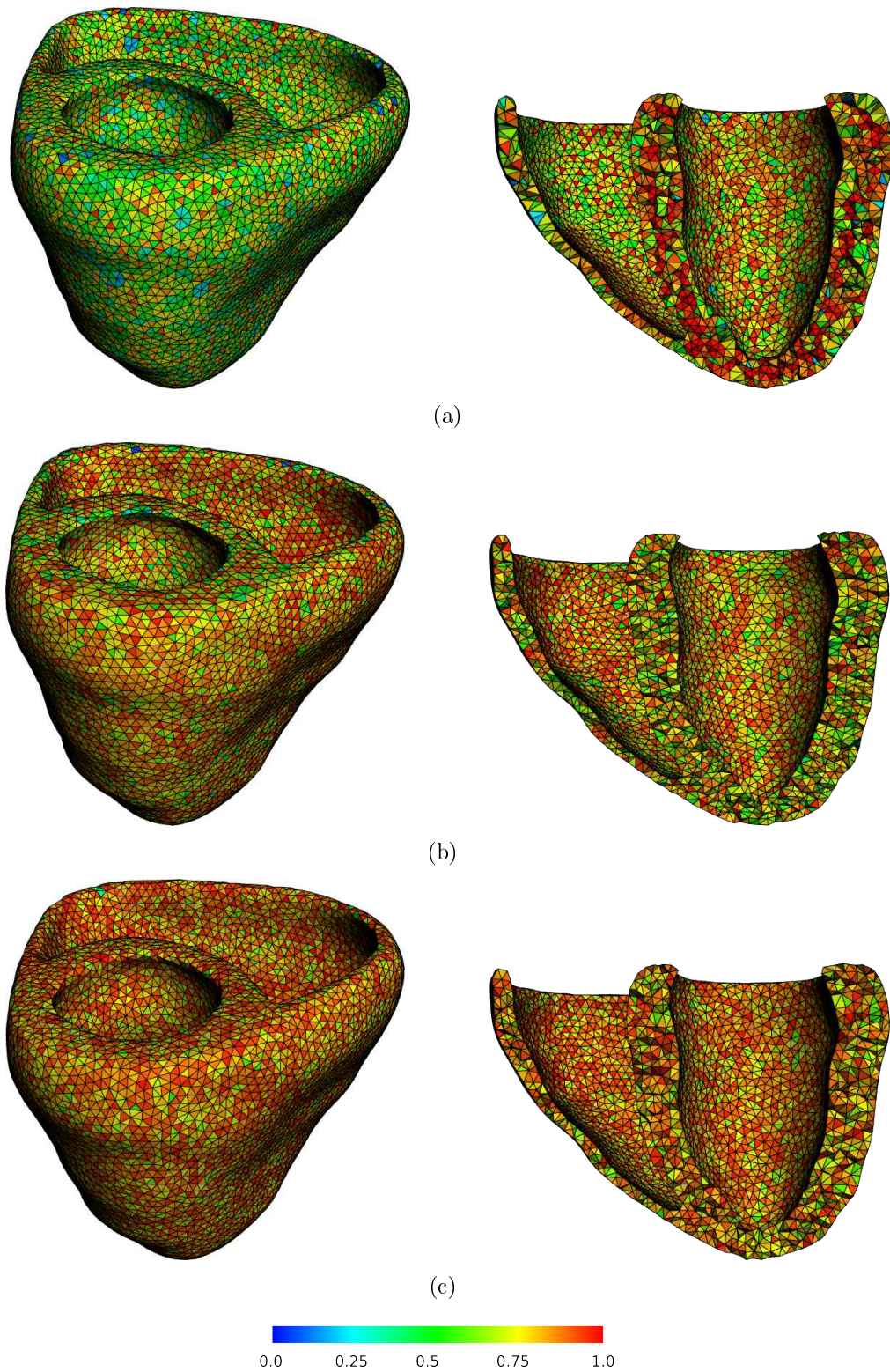


FIG. 11.4 – Représentation de la qualité des maillages obtenus entre (a) AMIRA, (b) GHS3D et (c) notre approche pour le critère Q_3

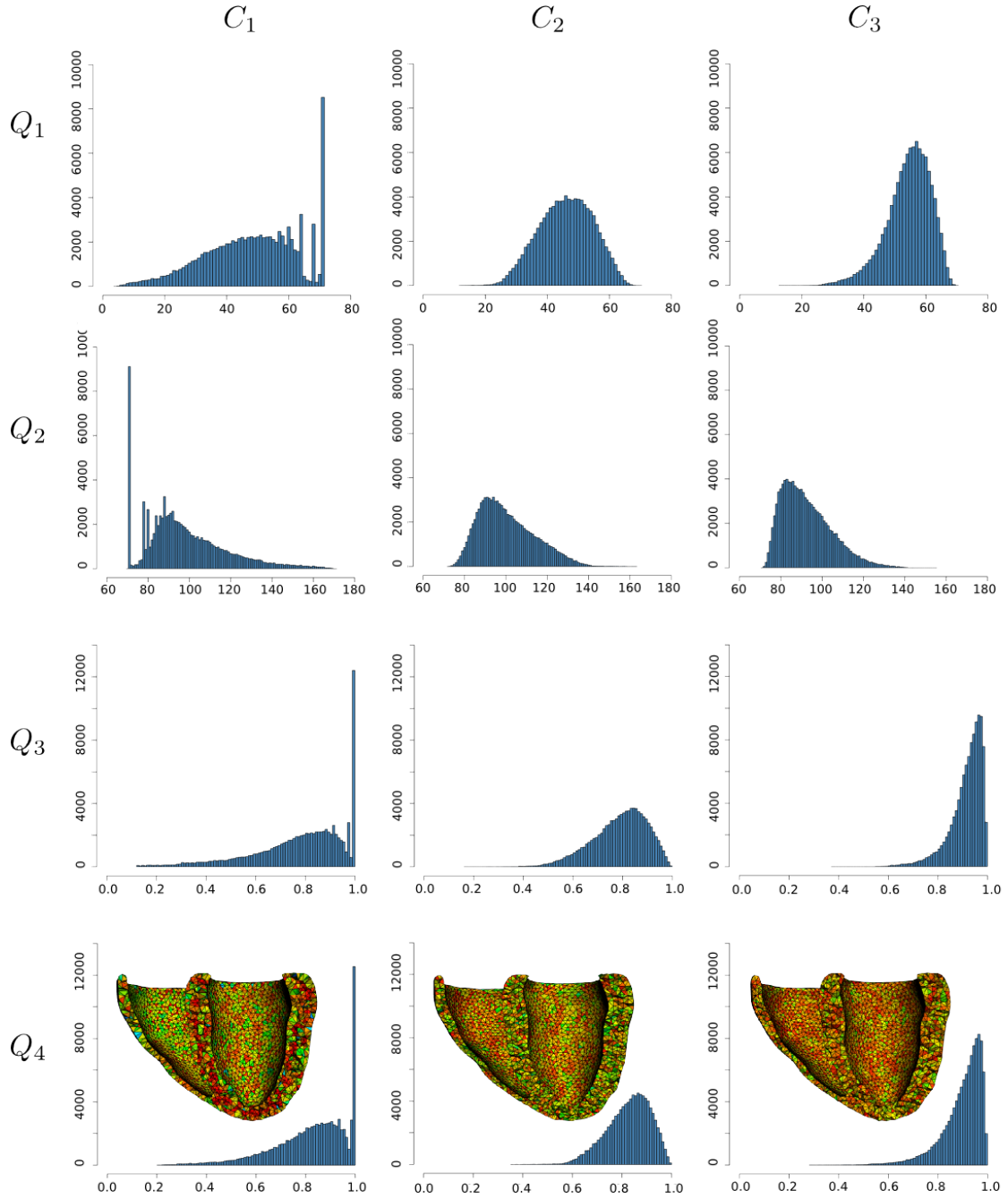


FIG. 11.5 – Histogrammes de qualité associés aux maillages C_1 , C_2 générés respectivement avec AMIRA et GHS3D à partir d'un maillage surfacique et notre méthode C_3 pour les critères (Q_1 - Q_4).

11.3 Comparaison dans le cadre de l'hyperthermie

Pour démontrer la capacité de notre mailleur dans une application réelle, nous modélisons une configuration réaliste utilisée en hyperthermie, basée sur une antenne interstitielle [Siauve 06]. Nous effectuons une comparaison entre le logiciel AMIRA et notre approche en terme de qualité des éléments générés et de vitesse de résolution au niveau de la simulation par la MEF. Le modèle patient est généré à partir d'un ensemble d'images tomographiques segmentées (figure 11.6). Ce modèle est constitué de 9 organes : muscle, graisse, os, intestin, reins, foie, vessie, artères et tumeur.

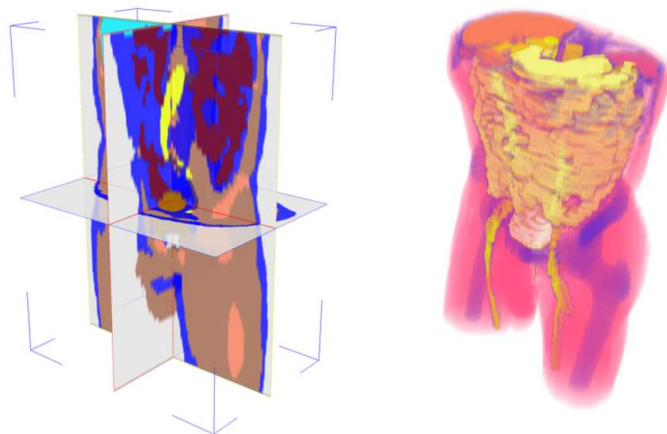


FIG. 11.6 – Ensemble discret tri-dimensionnel et représentation volumique du patient.

Le dispositif d'hyperthermie est constitué d'un applicateur interstitiel, directement placé à l'intérieur de la tumeur, et émettant à 433 MHz. La figure 11.7 illustre la distribution du SAR dans le modèle.

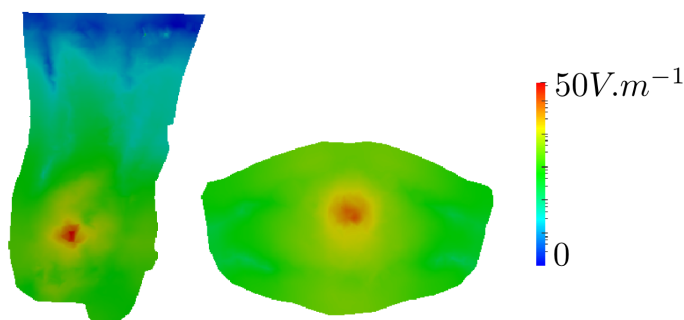


FIG. 11.7 – Représentation du SAR dans le cadre de la planification du traitement.

Nous générons, à l'aide de AMIRA et notre approche (TVC), deux maillages tétraédriques à partir du même ensemble discret tri-dimensionnel. La figure 11.8 représente différentes structures anatomiques extraites des maillages issus de AMIRA et TVC. Les tétraèdres générés par notre approche TVC sont de meilleure qualité

que ceux de AMIRA. Le tableau 11.4 donne les valeurs numériques de la moyenne et de la valeur minimale des critères de qualité Q_1 , Q_4 pour l'ensemble des tétraèdres issus de AMIRA et TVC. Les deux dernières lignes du tableau montrent le nombre d'itérations nécessaire pour résoudre les équations électromagnétiques [2.6] et thermiques [2.17]. La durée de génération du maillage par notre algorithme est de six minutes et le temps de simulation pour ce problème couplé est de trente six minutes.

Critères \ Maillages	AMIRA	TVC
$\overline{Q_1}$	46.32°	52.28°
$\overline{Q_4}$	0.804	0.862
$\min(Q_1)$	0.19°	10.01°
$\min(Q_4)$	0.03	0.278
# points	39052	39100
# itérations (1)	166	128
# itérations (2)	130	82

TAB. 11.4 – Qualité du maillage et temps de résolution par la MEF en simulation électromagnétique (1) et thermique(2).

Pour cette simulation par MEF couplée, notre méthode génère des tétraèdres de très bonne qualité ce qui réduit de façon significative le temps de calcul.

11.4 Conclusion

Nous avons construit, dans cette partie, des maillages très divers et nous avons effectué une étude comparative avec différents maillages. Notre approche conduit à des maillages de très bonne qualité. Le temps nécessaire à la génération des maillages est plus court que celui du temps de résolution par la MEF des différents problèmes. Il reste cependant à compléter nos travaux par quelques améliorations et extensions que nous allons préciser dans la conclusion générale.

AMIRA

TVC

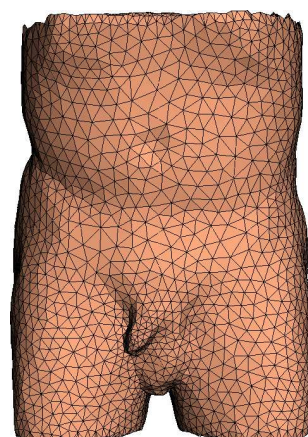
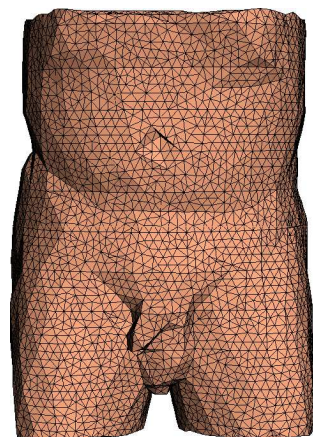
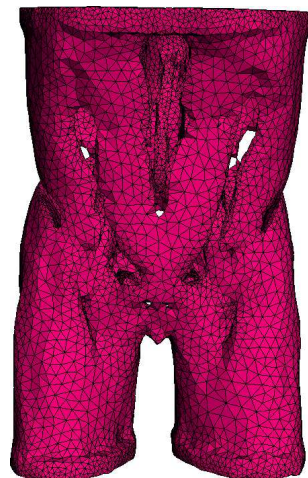
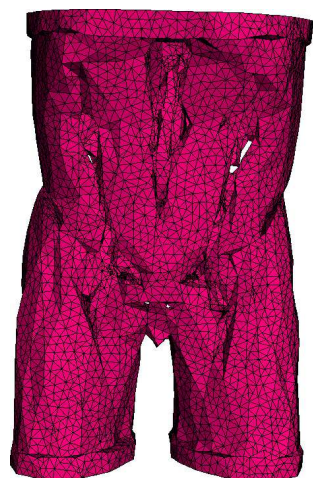
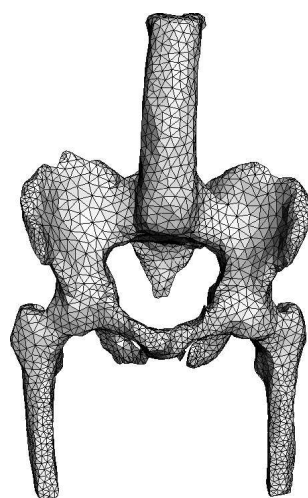
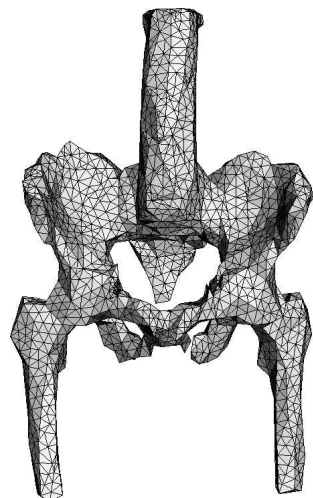


FIG. 11.8 – Comparaison entre différentes structures anatomiques extraites des maillages issus de AMIRA et TVC.

Conclusion

L'objectif de cette thèse était de proposer une nouvelle approche pour la génération de maillages tétraédriques de structures anatomiques dans le but de résoudre des E.D.P (en électromagnétisme et en thermique) par la méthode des éléments finis. Les méthodes de génération de maillage volumique actuelles utilisent, généralement, des représentations surfaciques maillées des données anatomiques pour construire le maillage volumique. Nous nous sommes posés la question suivante : "Est-il nécessaire d'avoir une représentation surfacique pour générer un maillage volumique ? " En effet, cette représentation surfacique apporte des contraintes à la construction du maillage volumique. Dans une première partie, nous avons rappelé le cadre physique de notre étude. Nous avons ensuite dressé un état de l'art des méthodes de génération de maillage pour différents types de données. Cette seconde partie, nous a conduit à nous orienter vers une approche de type "Voronoi-Delaunay" pour traiter le problème posé. L'approche variationnelle utilisée permet l'approximation des diagrammes de Voronoi centroïdaux. Nous utilisons le dual, la triangulation de Delaunay, pour obtenir notre maillage tétraédrique. L'approche a été présentée dans un formalisme 2D puis 3D, dans le cas d'un maillage uniforme. Nous avons montré que notre mailleur peut résoudre les ambiguïtés induites par un partitionnement discret du volume à mailler. Nous avons proposé un algorithme original d'optimisation topologique afin d'améliorer la qualité des maillages générés. La troisième partie a été dédiée à la méthode originale que nous avons proposée pour l'approximation de l'axe médian à partir de diagrammes de Voronoi contraints. La version adaptative de notre approche utilise différentes informations géométriques. La première est basée sur la largeur locale et la seconde sur la courbure locale. Cette seconde information permet de prendre en compte des changements dans la forme qui ne seraient pas pris en compte par l'axe médian. La validation de la méthode a été largement détaillée dans la dernière partie de cette thèse. Elle a mis en évidence l'intérêt de ce type d'approche pour la génération de maillages volumiques. Nous avons notamment démontré la capacité de notre mailleur à fournir des maillages de haute-qualité pour des données discrètes. Nous avons également montré l'aptitude de notre mailleur à générer des maillages adaptatifs. La qualité des maillages obtenus a été comparée à celle de trois autres méthodes de génération de maillage. Nos maillages sont de bonne qualité. L'approche développée au cours de cette thèse répond aux objectifs fixés et produit de très bons résultats. Elle est entièrement automatique, s'adapte à des géométries complexes et produit de grands maillages volumiques de bonne qualité, en un temps de calcul acceptable par rapport aux temps de simulation par la MEF. Notre approche permet d'obtenir un maillage avec une densité de tétraèdres non uniforme. Ces tétraèdres ont une très bonne qualité géométrique. Un autre

avantage de notre méthode est de traiter directement les voxels de l'image 3D sans nécessiter la construction de maillages surfaciques. Nous montrons que l'adaptativité, du maillage (accroissement ou réduction de la densité locale de tétraèdres), peut être pilotée par des informations géométriques, par exemple la largeur locale et/ou la courbure locale. Nous avons montré que cette méthode apporte une bonne approximation des frontières entre régions.

Les améliorations susceptibles d'être apportées au code actuel concernent la qualité du maillage, la vitesse de génération et la gestion de la mémoire.

La qualité du maillage au niveau de l'approximation des frontières et des éléments générés peut être améliorée. La définition des sites peut inclure la direction de la normale pour une meilleure approximation.

La vitesse de génération du maillage est inférieure aux temps de résolution de la MEF. Pour le problème électromagnétique et thermique, le temps de maillage est faible par rapport au temps de calcul qui suit. La vitesse peut être accrue par une optimisation appropriée du code et des algorithmes utilisés.

Pour notre algorithme, nous avons fait en sorte d'utiliser des structures de données riches. Cependant, on ne peut prétendre avoir trouvé la structure de données optimales et des efforts restent encore à faire dans ce sens.

Le travail réalisé dans le cadre de cette thèse ouvre également de nombreuses perspectives. Nous allons détailler quatre d'entre elles pour conclure ce document.

La première piste de travail consisterait à ajouter, à l'information géométrique, un critère lié à l'erreur de calcul par la MEF. La carte de densité $\rho(x)$ serait alors la traduction, en termes de taille des éléments, de l'évolution de la solution via l'erreur. Nous pensons que cela pourrait apporter une réelle avancée et c'est pour cette raison que nous envisageons de nous orienter dans cette direction.

Le deuxième axe de poursuite de nos travaux est la construction progressive du maillage en terme de résolution spatiale. Nous allons accélérer le calcul MEF électromagnétique et thermique grâce à cette approche. Cet axe de travail constitue un véritable enjeu car la résolution spatiale des données peut jouer un rôle important dans les précisions du simulateur.

La troisième perspective accompagnant ce travail de thèse et plus généralement le projet de recherche associé, **consiste à une interface homme machine** combinant les différents modules de notre mailleur. Ce travail est déjà en cours de réalisation (figure 11.9).

La dernière perspective envisagée est la génération de maillages anisotropes. Nous souhaitons nous intéresser à ce type de génération dans le cadre de la simulation thermique. La construction de tels maillages nécessite alors d'estimer l'anisotropie des différentes régions anatomiques.

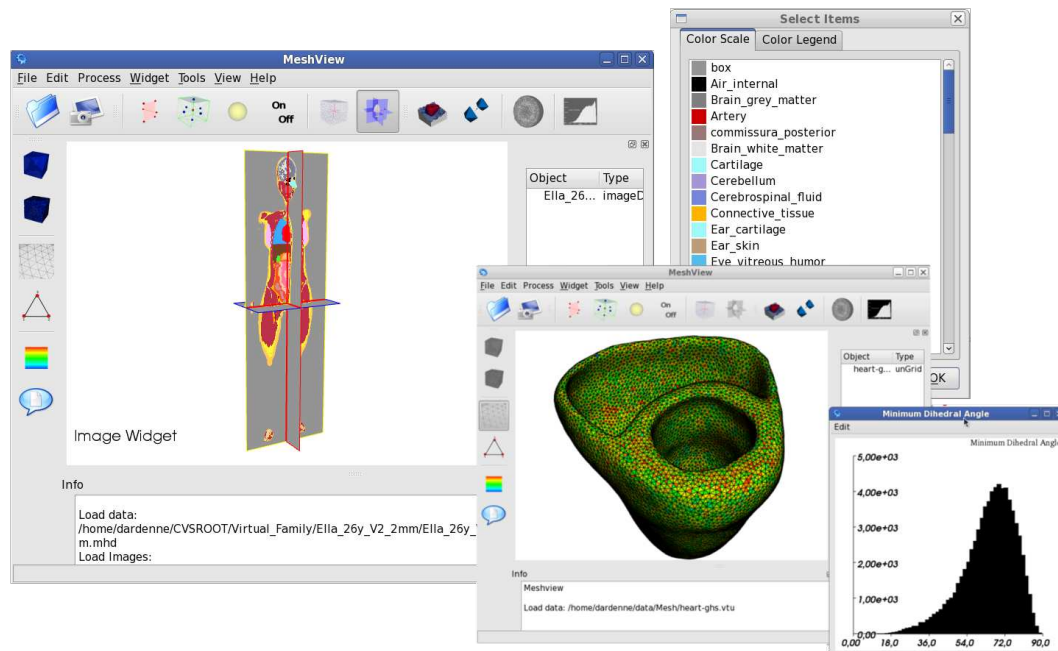


FIG. 11.9 – Meshview

Le travail accompli au cours de cette thèse a fait émerger de nombreux aspects nouveaux liés au traitement direct des données discrètes. Nous avons ainsi mis en évidence le potentiel de notre approche discrète de type “Voronoi-Delaunay” dans le cadre de la génération de maillages tétraédriques. A notre connaissance, cette approche n’avait pas encore été exploitée dans ce cadre.

Bibliographie personnelle

Revue internationale avec comité de lecture

[Dardenne and al., 2009b] **J. Dardenne**, S. Valette, N. Siauve, N. Burais and R. Prost. “Modélisation adaptative 3d de structures anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique”. *European Journal of Electrical Engineering*. Acceptée en 2009.

[Dardenne and al., 2009a] **J. Dardenne**, S. Valette, N. Siauve, N. Burais and R. Prost. “Variational tetrahedral mesh generation from discrete volume data.” *The Visual Computer, Special issue on Computer Graphics International (CGI’09), Volume 25, no. 5, pages 401-410, May 2009*.

Conférences internationales avec actes et avec comité de lecture

[Dardenne and al., 2009g] **J. Dardenne**, S. Valette, N. Siauve, R. Prost and N. Burais. “Impact of Tetrahedral Mesh Quality for Electromagnetic and Thermal Simulations”. In *Proceedings of the IEEE International Conference on the Computation of Electromagnetic, COMPUMAG’09*, Florianopolis, Brazil, November 2009. A paraître.

[Siauve and al., 2009f] N. Siauve, C. Lormel, R. Marion, **J. Dardenne** and F. Sixdenier. “Electromagnetic Characterization of Biological Tissues with Particle Swarm Optimization”. In *Proceedings of the IEEE International Conference on the Computation of Electromagnetic, COMPUMAG’09*, Florianopolis, Brazil, November 2009. A paraître.

[Dardenne and al., 2009e] **J. Dardenne**, S. Valette, N. Siauve, B. Khaddour and R. Prost. “Exploiting curvature to compute the medial axis with constrained centroidal voronoi diagram on discrete data”. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Image Processing, ICIP’09*, Cairo, Egypt, November 2009. A paraître.

[Dardenne and al., 2008a] **J. Dardenne**, S. Valette, N. Siauve and R. Prost. “Medial axis approximation with constrained centroidal voronoi diagrams on discrete data.”. In *Proceedings of the Computer Graphics International, CGI’08*, Istanbul, Turkey, pages 299-306, June 2008.

Conférences nationales avec actes et avec comité de lecture

[Dardenne and al., 2009d] J. Dardenne, S. Valette, N. Siauve and R. Prost. “Génération de maillages triangulaires adaptatifs 2d avec des diagrammes de voronoï centroïdaux”. Dans *Actes du Colloque GRETSI*, Dijon, France, Septembre 2009.

[Dardenne and al., 2009c] J. Dardenne, S. Valette, N. Siauve and R. Prost. “Approximation de l’axe médian pour les objets discrets avec prise en compte de la courbure”. Dans *Actes du Colloque GRETSI*, Dijon, France, Septembre 2009.

[Dardenne, 2008b] J. Dardenne. “Génération de maillages tétraédriques adaptatifs de structure anatomique du corps humain pour la simulation électromagnétique et thermique”. **Prix JCGE’08**. Dans *Actes du Colloque JCGE*, pages 299-306, Lyon, France, Décembre 2008.

Bibliographie

- [Alliez 05] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, M. Yvinec & M. Desbrun. *Variational tetrahedral meshing*. ACM Transactions on Graphics, vol. 24, no. 3, pages 617–625, 2005.
- [Alliez 07] P. Alliez, D. Cohen-Steiner, Y. Tong & M. Desbrun. *Voronoi-based variational reconstruction of unoriented point sets*. In SGP '07 : Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing, pages 39–48, 2007.
- [Amenta 98a] N. Amenta & M. Bern. *Surface reconstruction by Voronoi filtering*. In SCG '98 : Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry, pages 39–48, 1998.
- [Amenta 98b] N. Amenta, M. Bern & M. Kamvysselis. *A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm*. In SIGGRAPH '98 : Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques, pages 415–421, 1998.
- [Amenta 01] N. Amenta, S. Choi & R.K Kolluri. *The Power Crust*. In Proceedings of 6th ACM Symposium on Solid Modeling, pages 249–260, 2001.
- [Antani 07] L. Antani, C. Delage & P. Alliez. *Mesh Sizing with Additively Weighted Voronoi Diagrams*. In Proc. of the 16th Int. Meshing Roundtable, pages 335–346, 2007.
- [Aran 03] J.-M. Aran, J.-C. Bolomey, P. Buser, R. De Seze, M. Hours, I. Lagroye & B. Veyret. *Rapport à l'Agence Française de Sécurité Sanitaire Environnementale AFSSE : Téléphonie mobile et santé*. mars 2003.
- [Attali 07a] D. Attali, J.D. Boissonnat & H. Edelsbrunner. *Stability and Computation of Medial Axes : a State of the Art Report*. In Mathematical Foundations of Scientific Visualization, Computer Graphics, and Massive Data Exploration. 2007.
- [Attali 07b] D. Attali, D. Coeurjolly & E. Remy. *Géométrie discrète et images numériques, chapitre Représentation par axe médian, Chapitre 9. Traité IC2*. Hermès, 2007.
- [Babuska 76] I. Babuska & A.K. Aziz. *On the Angle Condition in the Finite Element Method*. SIAM Journal on Numerical Analysis, vol. 13, no. 2, pages 214–226, 1976.

- [Basser 96] P. J. Basser & C. Pierpaoli. *Microstructural and physiological features of tissues elucidated by quantitative-diffusion-tensor MRI*. Journal of Magnetic Resonance, pages 209–219, 1996.
- [Bayliss 80] A. Bayliss & E. Turkel. *Radiation boundary conditions for wave-like equations*. Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 33, pages 707–725, 1980.
- [Bern 92] M. Bern & D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. Computing in Euclidean Geometry. Ding-Zhu Du and Frank Hwang, Singapore, lecture notes series on computing edition, 1992.
- [Bidal 02] S. Bidal, T. Serre, K. Kayvantash, M. Fieschi & J. Bonnoit. *Semiautomatic 3D reconstruction and meshing of organs from 2D contours*. In Actes du 7ème Congrès Numérisation 3D – Human Modelling, April 2002.
- [Blum 67] H. Blum. *A transformation for extracting new descriptors of form*. Models for the Perception of Speech and Visual Form, pages 362–380, 1967.
- [Boissonnat 92] J.D. Boissonnat & B. Geiger. *Three-dimensional reconstruction of complex shapes based on the Delaunay triangulation*. Rapport technique, INRIA, 1992.
- [Bonnassie 01] A. Bonnassie, F. Peyrin & D. Attali. *Shape description of three-dimensional images based on medial axis*. In Proceedings. 2001 International Conference on Volume 3, pages 931–934, 2001.
- [Borouchaki 97] H. Borouchaki & P.L. George. *Aspects of 2-D Delaunay mesh generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 40, no. 3, pages 1957–1975, 1997.
- [Brandt 92] J.W. Brandt & V. R. Algazi. *Continuous skeleton computation by Voronoi diagram*. CVGIP : Image Underst., vol. 55, no. 3, pages 329–338, 1992.
- [Cavendish 85] J. C. Cavendish, D. A. Field & W. H. Frey. *An Approach to Automatic Three-Dimensional Finite Element Mesh Generation*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 21, no. 2, pages 329–347, 1985.
- [Cepeda 08] M.F.J. Cepeda, A. Vera, L. Leija & C. Trujillo. *Coaxial double slot antenna design for interstitial Hyperthermia in smooth muscle using a finite element computer modeling*. In IEEE International Instrumentation & Measurement Technology Conference, I2MTC 2008, pages 961–963, 2008.
- [Chazal 05] F. Chazal & A. Lieutier. *The lambda medial-axis*. Graph. Models, vol. 67, no. 4, pages 304–331, 2005.
- [Chazal 06] F. Chazal, D. Cohen-Steiner & A. Lieutier. *A sampling theory for compact sets in Euclidean space*. In SCG '06 : Proceedings of the twenty-second annual symposium on Computational geometry, pages 319–326, 2006.

-
- [Cheng 99] S.-W. Cheng, T.K. Dey, H. Edelsbrunner, M.A. Facello & S.H. Teng. *Sliver exudation*. In SCG '99 : Proceedings on Computational geometry, pages 1–13, 1999.
 - [Choi 03] W.Y. Choi, D.Y. Kwak, I.H. Son & Im Y.T. *Tetrahedral mesh generation based on advancing front technique and optimization scheme*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 58, pages 1857–1872, Oct 2003.
 - [Cocquerez 95] J. P. Cocquerez & S. Philipp. *Analyse d'image : filtrage et segmentation*. 1995.
 - [Coeurjolly 07a] D. Coeurjolly & A. Montanvert. *Optimal Separable Algorithms to Compute the Reverse Euclidean Distance Transformation and Discrete Medial Axis in Arbitrary Dimension*. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, vol. 29, no. 3, pages 437–448, 2007.
 - [Coeurjolly 07b] D. Coeurjolly, A. Montanvert & J.-M. Chassery. *Géométrie discrète et images numériques*. 2007.
 - [Delingette 97] H. Delingette. *General Object Reconstruction based on Simplex Meshes*. Rapport technique 3111, Inria, February 1997.
 - [Dellas 07] F. Dellas, L. Moccozet, N. Magnenat-Thalmann, M. Mortara, G. Patane, M. Spagnuolo & B. Falcidieno. *Knowledge-based extraction of control skeletons for animation*. In SMI '07 : Proceedings of the IEEE International Conference on Shape Modeling and Applications 2007, pages 51–60, 2007.
 - [Devillers 08] O. Devillers. *De la géométrie algorithmique au calcul géométrique l'exemple de la triangulation de Delaunay : Application à la reconstruction*. École Polytechnique, <http://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF572/>, 2008.
 - [Dey 03] T.K. Dey & W. Zhao. *Approximating the Medial Axis from the Voronoi Diagram with a Convergence Guarantee*. Algorithmica, vol. 38, no. 1, pages 179–200, 2003.
 - [Du 99] Q. Du, V. Faber & M. Gunzburger. *Centroidal Voronoi Tessellations : Applications and Algorithms*. SIAM Review, vol. 41, no. 4, pages 637–676, 1999.
 - [Du 06] Qiang Du & Desheng Wang. *Recent progress in robust and quality Delaunay mesh generation*. J. Comput. Appl. Math., vol. 195, no. 1, pages 8–23, 2006.
 - [Dubbel 99] H. Dubbel. *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, 1999.
 - [Fabbri 02] R. Fabbri, L.F. Estrozi & L.F. Costa. *On Voronoi Diagrams and Medial Axes*. J. Math. Imaging Vis., vol. 17, no. 1, pages 27–40, 2002.
 - [Feldkamp 84] L.A. Feldkamp, L.C. Davis & J.W. Kress. *Practical cone-beam algorithm*. J. Opt. Soc. Amer. Ag, vol. 1, no. 6, pages 612–619, 1984.
-

- [Foster 04] K.R. Foster & E. Adair. *Modelling thermal reponses in human subjects following extended exposure to radiofrequency energy*. Bio-medical Engineering Online, vol. 3, no. 4, 2004.
- [Frey 01] J. Frey & F. Alauzet. *Anisotropic mesh adaptation for CFD computations*. Computer methods in applied mechanics and engineering, vol. 194, no. 48, pages 5068–5082, 2001.
- [Frey 07] P.J. Frey & P.L. George. *Mesh generation : Application to finite elements*. ISTE, 2007.
- [Gabriel 96] S. Gabriel, R.W. Lau & C. Gabriel. *The dielectric properties of biological tissues : II. Measurements in the frequency range 10 Hz to 20 GHz*. Physics in Medicine and Biology, vol. 41, no. 11, pages 2251–2269, 1996.
- [Gardan 87] Y. Gardan. *Mathématiques et cao : méthode de base*. 1987.
- [Ge 96] Y. Ge & J. M. Fitzpatrick. *On the Generation of Skeletons from Discrete Euclidean Distance Maps*. IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell., vol. 18, no. 11, pages 1055–1066, 1996.
- [Gelas 06] A. Gelas. *Compactly supported radial basis functions : multidimensional reconstruction and applications*. phddoctorat, INSA Lyon, nov 2006.
- [George 97a] P.-L. George. *Improvements on Delaunay-based three dimensional automatic mesh generator*. Finite Elements in Analysis and Design, vol. 2, pages 297–317, 1997.
- [George 97b] P.L. George & H. Borouchaki. *Triangulation de delaunay et maillage*. 1997.
- [George 98] P.-L. George & H. Borouchaki. *Delaunay triangulation and meshing. applications to finite elements*. Hermes, Paris, 1998.
- [George 03] P.-L. George & H. Borouchaki. *Back to edge flips in 3 dimensions*. In Sandia National Laboratories, editeur, 12th International Meshing Roundtable, pages 393–402, september 2003.
- [Hulin 06] J. Hulin & E. Thiel. *Chordal Axis on Weighted Distance Transforms*. In 13th DGCI, Discrete Geometry for Computer Image, volume 4245 of *Lectures Notes in Computer Science*, pages 271–282, 2006.
- [ICNIRP 98] ICNIRP. *Guidelines for limiting exposure to time-varying electric, magnetic, and electromagnetic fields (up to 300 GHz)*. Health Physics, vol. 74, no. 4, pages 494–522, April 1998.
- [Jia 07] J. Jia, Z. Qin & J. Lu. *Stratified helix information of medial-axis-points matching for 3D model retrieval*. In MIR '07 : Proceedings of the international workshop on Workshop on multimedia information retrieval, pages 169–176, 2007.
- [Ju 07] T. Ju, M.L. Baker & W. Chiu. *Computing a family of skeletons of volumetric models for shape description*. Comput. Aided Des., vol. 39, no. 5, pages 352–360, 2007.

-
- [Kaatee 97] R. Kaatee, H. Crezee, B.P. Kanis & J.W. Lagendijk. *Spatial Temperature with a 27 MHz Current Source Interstitial Hyperthermia System*. Journal of the European Society for Therapeutic Radiology and Oncology, vol. 37, no. 1, pages 189–197, 1997.
- [Klingner 07] B.M. Klingner & J. R. Shewchuk. *Agressive Tetrahedral Mesh Improvement*. In Proceedings of the 16th International Meshing Roundtable, pages 3–23, oct 2007.
- [Kovalevsky 89] V.A. Kovalevsky. *Finite topology as applied to image analysis*. Comput. Vision Graph. Image Process., vol. 46, no. 2, pages 141–161, 1989.
- [Labelle 07] F. Labelle & J.R. Shewchuk. *Isosurface Stuffing : Fast Tetrahedral Meshes with Good Dihedral Angles*. In Special issue on Proceedings of SIGGRAPH 2007, volume 26, page 57, August 2007.
- [Liu 94] A. Liu & B. Joe. *On the shape of tetrahedra from bisection*. Math. of Computation, vol. 63, no. 207, pages 141–154, 1994.
- [Lloyd 82] S. Lloyd. *Least squares quantization in PCM*. IEEE Transactions on Information Theory, vol. 28, no. 2, pages 129–137, 1982.
- [Lo 85] S. H. Lo. *A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains*. International Journal For Numerical Methods In Engineering, vol. 21, pages 1403–1426, 1985.
- [Lorensen 87a] W. E. Lorensen & H. E. Cline. *Marching cubes : A high resolution 3D surface construction algorithm*. Computer Graphics, vol. 21, no. 4, pages 163–169, 1987.
- [Lorensen 87b] W. E. Lorensen & H. E. Cline. *Marching Cubes : A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm*. Computer Graphics, vol. 21, no. 4, pages 163–169, 1987.
- [Lorrain 02] J.-L. Lorrain & D. Raoul. *Rapport sur l'incidence éventuelle de la téléphonie mobile sur la santé, Office parlementaire d'évaluation des choix scientifiques et technologiques*. novembre 2002.
- [MacQueen 67] J.B. MacQueen. *Some Methods for Classification and Analysis of MultiVariate Observations*. In L. M. Le Cam & J. Neyman, editors, Proc. of the fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, volume 1, pages 281–297. University of California Press, 1967.
- [Mar 03] Les nouveaux développements de l'hyperthermie en cancérologie, 2003.
- [Miklos 07] B. Miklos, J. Giesen & M. Pauly. *Medial axis approximation from inner Voronoi balls : a demo of the Mesecina tool*. In SCG '07 : Proceedings of the twenty-third annual symposium on Computational geometry, pages 123–124, 2007.
- [Mitchell 00] S.A. Mitchell & S.A. Vavasis. *Quality Mesh Generation in Higher Dimensions*. SIAM J. Comput., vol. 29, no. 4, pages 1334–1370, 2000.
-

- [Owen 98] S.J. Owen. *A Survey of Unstructured Mesh Generation Technology*. In Proceedings of the Seventh International Meshing Roundtable, pages 239–267, 1998.
- [Pennes 48] H.H. Pennes. *Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm*. J Appl Physiol, vol. 85, no. 1, pages 5–34, 1948.
- [Pescatore 01] J. Pescatore. *Construction de maillages adaptatifs 3D volumiques des structures cerebrales pour le calcul des champs magnetiques et des potentiels en EEG et en MEG. Application a l'epilepsie et aux sciences cognitives*. PhD thesis, Thèse de l'ENST, Département Traitement du Signal et des Images, 2001.
- [Quadros 04] W.R. Quadros, K. Shimada & S.J. Owen. *3D discrete skeleton generation by wave propagation on PR-octree for finite element mesh sizing*. In SM '04 : Proceedings of the ninth ACM symposium on Solid modeling and applications, pages 327–332, 2004.
- [Rappaz 98] Michel Rappaz, M. Bellet & Michel Deville. *Modélisation numérique en science et génie des matériaux*. 1998.
- [Ronkainen 06] J. Ronkainen & O. Tervonen. *Cost analysis of an open low-field (0.23T) MRI unit : effect of procedure shares in combined imaging, interventional, and neurosurgical use*. Acta Radiologica, vol. 47, no. 4, pages 359–365, 2006.
- [Rose 07] J.-L. Rose, Ch. Revol-Muller, M. Almajdub, E. Chereul & Ch. Odet. *Shape Prior Integrated in an Automated 3D Region Growing Method*. In IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2007, volume 1, pages 53–56, Sept 2007.
- [Roussel 99] P. Roussel. *Microcapteur de conductivité thermique sur caisson epais de silicium poreux pour la mesure de la micro-circulation sanguine*. PhD thesis, INSA-Lyon, 1999.
- [Saito 94] T. Saito & J.I. Toriwaki. *New algorithms for Euclidean distance transformations of an n-dimensional digitised picture with applications*. Pattern Recognition, vol. 27, no. 11, pages 1551–1565, 1994.
- [Sander 82] R. Sander, J. Brinkmann & B. Kuhne. *Laboratory studies on animal and human beings exposed to 50-Hz electric and magnetic fields*. CIGRE, International Congress on Large High Voltage Electric systems, vol. 31, no. 1, 1982.
- [Schönhardt 28] E. Schönhardt. *Über die Zerlegung von Dreieckspolyedern*. Mathematisch Annalen, vol. 98, pages 309–312, 1928.
- [Shaw 91] J.A. Shaw, C.H. Durney & D.A. Christensen. *Computed-aided design of two dimensional electric type hyperthermia applicators using the finite difference time domain method*. IEEE Trans. Biomedical Engineering, vol. 38, pages 861–870, 1991.
- [Shellock 00] F.G. Shellock. *Radiofrequency energy-induced heating during MR procedures, a review*. JMRI, vol. 12, no. 11, pages 30–36, 2000.

-
- [Sherbrooke 95] E.C. Sherbrooke, N.M. Patrikalakis & E. Brisson. *Computation of the Medial Axis Transform of 3-D polyhedra*. In SMA '95 : Proceedings of the third ACM symposium on Solid modeling and applications, pages 187–200, 1995.
 - [Shewchuk 97] J. R. Shewchuk. *Adaptive Precision Floating-Point Arithmetic and Fast Robust Geometric Predicates*. Discrete and Computational Geometry, vol. 18, pages 305–363, 1997.
 - [Shewchuk 98] J.R. Shewchuk. *Tetrahedral mesh generation by Delaunay refinement*. In SCG '98 : Proceedings on Computational geometry, pages 86–95, 1998.
 - [Shewchuk 02a] J.R. Shewchuk. *Two discrete optimization algorithms for the topological improvement of tetrahedral meshes*. In Unpublished manuscript, 2002.
 - [Shewchuk 02b] J.R. Shewchuk. *What Is a Good Linear Element ? Interpolation, Conditioning, and Quality Measures*. In Eleventh International Meshing Roundtable, pages 115–126, Sept 2002.
 - [Si 05a] H. Si & K. Gartner. *Meshing piecewise linear complexes by constrained Delaunay tetrahedralizations*. In 14th Int. Meshing Roundtable., 2005.
 - [Si 05b] H. Si & k. Gartner. *Meshing piecewise linear complexes by constrained delaunay tetrahedralizations*. In in Proceedings of the 14th IMR, 2005.
 - [Siauve 04] N. Siauve, L. Nicolas, C. Voltaire, A. Nicolas & J.A. Vasconcelos. *Optimization of 3D SAR distribution in local hyperthermia*. IEEE Transactions on Magnetics, vol. 40, no. 2, pages 1264–1267, March 2004.
 - [Siauve 05] N. Siauve, M. Paulides, L. Nicolas, B. Van-Leersum, G.C. Van Rhoon, C. Voltaire & A. Nicolas. *Comparison of FDTD and FE Methods in Numerical Dosimetry for the Treatment of Cancers Tumors with Electromagnetic Fields*. In 15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields, June 2005.
 - [Siauve 06] N. Siauve, B. Lips, R. Bodiguel & C. Nicolas L. Voltaire. *3D numerical model of electromagnetic heating in hyperthermia cancer therapy*. In International conference on Electromagnetic fields, Health and Environment, EHE06, pages 27–29, April 2006.
 - [Stuchly 90] M.-A. Stuchly. *Biological effects of electromagnetic fields*. Review of Radio Science 1987-89, International Union of Radio Science, 1990.
 - [Tchon 03] K. Tchon, M. Khachan, F. Guibault & R. Camarero. *Constructing anisotropic*. In Proceedings of the 12th International Meshing Roundtable, pages 293–304, 2003.
 - [Thiele 02] J. Thiele, M.A. Golombeck & O. Dössel. *Thermal heating of human tissue induced by electromagnetic fields of magnetic resonance imaging*. Biomedizinische Technik, vol. 47, no. 2, pages 743–746, 2002.
-

- [Tournois 09] J. Tournois, C. Wormser, P. Alliez & M. Desbrun. *Interleaving Delaunay Refinement and Optimization for Practical Isotropic Tetrahedron Mesh Generation*. ACM Transactions on Graphics, vol. 28, no. 3, 2009.
- [Valette 08] S. Valette, J. M. Chassery & R. Prost. *Generic remeshing of 3D triangular meshes with metric-dependent discrete Voronoi Diagrams*. IEEE Trans Visu Comp Graph, pages 369–381, 2008.
- [Wu 05] B. Wu & S. Wang. *Automatic triangulation over three-dimensional parametric surfaces based on advancing front method*. Finite Elem. Anal. Des., vol. 41, no. 9-10, pages 892–910, 2005.
- [Yerry 83] M. Yerry & M. Shephard. *A modified-quadtrees approach to finite element mesh generation*. IEEE Computer Graphics and Applications, vol. 3, pages 39–46, 1983.
- [Zachow 07] S. Zachow, M. Zilske & H.C. Hege. *3D Reconstruction of Individual Anatomy from Medical Image Data : Segmentation and Geometry Processing*. 2007.
- [Zwick 97] U. Zwick, N. Alon & R. Yuster. *Finding and counting given length cycles*. Algorithmica, vol. 17, pages 209–223, 1997.

FOLIO ADMINISTRATIF
THÈSE SOUTENUE DEVANT L'INSTITUT NATIONAL
DES SCIENCES APPLIQUÉES DE LYON

NOM : Dardenne PRÉNOM : Julien	DATE DE SOUTENANCE : 19 novembre 2009
TITRE : Maillage 3D de structures anatomiques pour la simulation électromagnétique et thermique.	
NATURE : Doctorat ECOLE DOCTORALE : Électronique, Électrotechnique et Automatique SPÉCIALITÉ : IMAGES ET SYSTÈMES	
NUMÉRO D'ORDRE : 2009-ISAL-0083	
COTE B.I.U. LYON :	CLASSE :
RÉSUMÉ : Dans son environnement quotidien, l'homme est volontairement ou involontairement exposé à des champs électromagnétiques radiofréquences. La prédiction de l'élévation de température induite par ce rayonnement, à l'aide d'un calcul sur un modèle anatomique maillé, dépend beaucoup de la qualité de ce modèle. Les méthodes actuelles de génération de maillages volumiques utilisent des représentations surfaciques intermédiaires des données anatomiques. Nous montrons qu'il n'est pas nécessaire d'avoir une représentation surfacique pour générer un maillage volumique. Nous proposons une construction de maillages tétraédriques basée sur les diagrammes de Voronoï centroïdaux et leur dual, la triangulation de Delaunay. Cette approche, contrairement aux approches de la littérature, traite directement un volume de voxels segmentés, obtenu par IRM ou par tomographie X, sans passer par une représentation surfacique. Afin d'obtenir des maillages, non plus uniformes mais adaptés à la complexité anatomique, nous avons proposé une nouvelle méthode de capture de cette complexité à l'aide d'une approximation de l'axe médian. Une comparaison, avec trois autres méthodes de génération de maillages de la littérature, montre que notre approche construit des tétraèdres de meilleure qualité géométrique pour différents critères. De cette qualité découle une meilleure précision sur la température induite par le rayonnement électromagnétique, calculée par une méthode d'éléments finis, ainsi qu'un temps de calcul réduit. Ces résultats montrent le potentiel de notre approche discrète de type "Voronoi-Delaunay" pour la génération de maillages tétraédriques.	
MOTS-CLÉS : maillage tétraédrique, diagramme de Voronoï, triangulation de Delaunay, axe médian, largeur locale, éléments finis.	
LABORATOIRES DE RECHERCHES : CREATIS (CNRS UMR 5520, INSERM U630) et AMPERE (CNRS UMR 5005).	
DIRECTEURS DE THÈSE : Pr. Rémy Prost et Pr. Noël Burais	
PRÉSIDENT DU JURY : Frédéric Truchetet COMPOSITION DU JURY : Olivier Devillers (Rapporteur), Yves Maréchal (Rapporteur), Jean-Marc Chassery, Nicolas Siauve, Sébastien Valette, Noël Burais, Rémy Prost	