



**HAL**  
open science

# Modèles AM-FM et Approche par Équations aux Dérivées Partielles de la Décomposition Modale Empirique pour l'Analyse des Signaux et des Images

El Hadji Samba Diop

► **To cite this version:**

El Hadji Samba Diop. Modèles AM-FM et Approche par Équations aux Dérivées Partielles de la Décomposition Modale Empirique pour l'Analyse des Signaux et des Images. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Rennes 1, 2009. Français. NNT : . tel-00464849

**HAL Id: tel-00464849**

**<https://theses.hal.science/tel-00464849>**

Submitted on 18 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1**  
*sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne*

pour le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1**

*Mention : Mathématiques et applications*

**Ecole doctorale MATISSE**

présentée par

**El Hadji Samba DIOP**

préparée à l'unité de recherche  
École Navale, IRENav, EA3634 / ENSIETA,  $E^3I^2$ -EA3876

---

**Modèles AM-FM et approche par  
équations aux dérivées partielles  
de la décomposition modale  
empirique pour l'analyse des  
signaux et des images**

**Thèse soutenue à l'École Navale, Brest  
le 30 Novembre 2009**

devant le jury composé de :

**Jean-Jacques FUCHS**

Professeur, Université de Rennes 1 / examinateur

**Valérie PERRIER**

Professeur, IMAG, Grenoble / rapporteur

**Patrick FLANDRIN**

DR CNRS, ENS Lyon / rapporteur

**Radjesvarane ALEXANDRE**

Professeur, École Navale, Brest / examinateur

**Abdel-Ouahab BOUDRAA**

MCF, HdR, École Navale, Brest / encadrant

**Ali KHENCHAF**

Professeur, ENSIETA, Brest / directeur de thèse



---

# Table des matières

Table des matières	i
Liste des figures	v
Liste des tableaux	xi
Notations et sigles	xiii
<b>I Introduction</b>	<b>1</b>
I.1 Contexte et objectifs . . . . .	3
I.2 Organisation du manuscrit . . . . .	5
I.2.1 Partie I : Contributions aux formalismes théoriques de la décomposition modale empirique $1D$ et $2D$ . . . . .	5
I.2.1.1 Une approche par EDP de l'EMD $1D$ (Chapitre II) . . . . .	6
I.2.1.2 Une Formulation de l'EMD $2D$ par EDP (Chapitre III) . . . . .	7
I.2.2 Partie II : Modèles AM-FM pour l'analyse d'images . . . . .	9
I.2.2.1 Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser (Chapitre IV) . . . . .	10
I.2.2.2 Les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs pour la démodulation d'images (Chapitre V) . . . . .	12
I.3 Contributions de la thèse . . . . .	15
<b>I Contributions aux formalismes théoriques de la décomposition mo- dale empirique <math>1D</math> et <math>2D</math></b>	<b>17</b>
<b>II Une approche par équations aux dérivées partielles de la décomposition modale empirique <math>1D</math></b>	<b>19</b>



II.1	Introduction . . . . .	20
II.2	Positionnement de notre travail . . . . .	22
II.3	La Décomposition modale empirique . . . . .	24
II.3.1	Idée générale . . . . .	24
II.3.2	Définitions usuelles et remarques importantes . . . . .	24
II.3.3	Principe de l'EMD . . . . .	26
II.3.4	Algorithme EMD . . . . .	27
II.3.5	Critères d'arrêt du SP . . . . .	27
II.4	Formulation par EDP du tamisage . . . . .	30
II.4.1	Construction de suites . . . . .	30
II.4.2	Étude préliminaire . . . . .	31
II.4.2.1	Définitions des opérateurs $S_\delta$ , $I_\delta$ et $m_\delta$ . . . . .	31
II.4.2.2	Théorèmes . . . . .	32
II.4.3	Notions de <i>potential</i> $\delta - IMF$ . . . . .	37
II.4.4	Un modèle particulier pour les $p \delta - IMF$ . . . . .	40
II.4.5	Critère de moyenne nulle pour les $H p \delta - IMF$ . . . . .	41
II.4.6	Caractérisations des modes . . . . .	44
II.4.7	Quelques propriétés . . . . .	45
II.4.7.1	Linéarité . . . . .	45
II.4.7.2	Offset . . . . .	46
II.4.7.3	Translation . . . . .	47
II.4.7.4	Compression, dilatation . . . . .	47
II.4.8	Exemple . . . . .	47
II.5	Résultats numériques . . . . .	49
II.5.1	Condition de stabilité numérique . . . . .	50
II.5.2	Résultats numériques . . . . .	51
II.5.2.1	Signaux stationnaires . . . . .	51
II.5.2.2	Signaux non stationnaires . . . . .	55
II.6	Conclusion . . . . .	59
<b>III</b>	<b>Une Formulation de la décomposition modale empirique 2D par équations aux dérivées partielles</b> . . . . .	<b>65</b>
III.1	Introduction . . . . .	66
III.2	Positionnement de notre travail dans la littérature . . . . .	67

III.3 La décomposition modale empirique pour les images . . . . .	68
III.3.1 Principe de l'EMD $2D$ . . . . .	68
III.3.2 Algorithme de l'EMD $2D$ . . . . .	69
III.4 Un modèle d'EDP pour l'EMD $2D$ . . . . .	72
III.4.1 Construction de suites . . . . .	72
III.4.2 Étude préliminaire . . . . .	73
III.4.2.1 Définitions des opérateurs $\mathcal{S}_\delta$ , $\mathcal{I}_\delta$ et $\mathcal{M}_\delta$ . . . . .	73
III.4.2.2 Résultats préliminaires . . . . .	74
III.4.3 Notions de $2D$ potential $\delta - IMF$ . . . . .	76
III.4.4 Condition de moyenne nulle pour les $2D$ $p$ $\delta - IMF$ . . . . .	78
III.4.5 Formulations analytiques des modes en $2D$ . . . . .	80
III.5 Résultats numériques . . . . .	81
III.5.1 Schémas numériques et discrétisations . . . . .	81
III.5.2 Images synthétiques . . . . .	82
III.5.3 Images réelles . . . . .	87
III.6 Conclusion . . . . .	89
<b>II Modèles AM-FM pour l'analyse d'images</b>	<b>105</b>
<b>IV Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser</b>	<b>107</b>
IV.1 Introduction . . . . .	108
IV.2 Quelques notions et modélisation AM-FM d'une image . . . . .	108
IV.2.1 Notions AM et FM d'une image . . . . .	108
IV.2.2 Modèle AM-FM pour une image . . . . .	109
IV.3 Méthode par image analytique . . . . .	111
IV.3.1 Cas continu . . . . .	111
IV.3.2 Cas discret . . . . .	112
IV.4 Opérateurs d'énergie de Teager-Kaiser . . . . .	113
IV.4.1 TKEO $1D$ . . . . .	114
IV.4.2 TKEO $2D$ . . . . .	116
IV.5 Méthode par séparation d'énergie . . . . .	117
IV.5.1 Algorithme discret DESA . . . . .	117
IV.5.2 Algorithme continu ESA . . . . .	117

IV.6	Démodulation d'images réelles . . . . .	118
IV.6.1	Algorithme de démodulation . . . . .	120
IV.6.2	Résultats numériques . . . . .	123
IV.7	Conclusion . . . . .	136
<b>V</b>	<b>Les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs pour la démodulation d'images</b>	<b>139</b>
V.1	Introduction . . . . .	140
V.2	Opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs en 1D . . . . .	140
V.3	L'algorithme continu de démodulation CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm) . . . . .	141
V.4	Algorithme de démodulation d'images monocomposantes basé sur les HODEO	143
V.4.1	Algorithme DHODA (Discrete Higher Order Demodulation Algorithm)	144
V.4.2	Résultats numériques . . . . .	146
V.4.2.1	Images synthétiques . . . . .	146
V.4.2.2	Images monocomposantes réelles . . . . .	148
V.5	Algorithme de démodulation d'images réelles basé sur les HODEO 2D . . . . .	155
V.5.1	Algorithme MHODA (Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm) . . . . .	155
V.5.2	Résultats numériques . . . . .	158
V.5.2.1	Préliminaires . . . . .	158
V.5.2.2	Remarques pratiques . . . . .	158
V.5.2.3	Commentaires . . . . .	158
V.6	Conclusion . . . . .	163
	<b>Conclusion</b>	<b>171</b>
	Principales contributions . . . . .	172
	Perspectives . . . . .	173
<b>A</b>	<b>Rehaussement de contraste dans les images avec l'opérateur de Teager-Kaiser</b>	<b>177</b>
A.1	Introduction . . . . .	177
A.2	Algorithme de rehaussement de contraste . . . . .	177
A.3	Résultats numériques . . . . .	179
	<b>Annexe</b>	<b>177</b>

**Bibliographie**

187



---

# Liste des figures

I.1	Lena (a). Phase de Lena (b). Amplitude de Mandrill et phase de Lena (c). Mandrill (d). Phase de Mandrill (e). Amplitude de Lena et phase de Mandrill (f)	5
I.2	Représentation du signal . . . . .	7
I.3	Comparaisons entre IMF et IMF obtenues avec l'approche par EDP. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge : $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : premier mode obtenu avec l'EDP parabolique	8
I.4	Comparaisons entre IMF classiques et celles obtenues avec l'approche par EDP. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge : $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : second mode obtenu avec l'EDP parabolique . . . . .	9
I.5	Comparaison entre IMF obtenues avec l'EDP parabolique et l'EDP à frontières libres. En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu : premier mode obtenu avec l'EDP parabolique. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres . . . . .	10
I.6	Comparaisons entre IMF obtenues avec l'EDP parabolique et avec l'EDP à frontières libres. En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu : second mode obtenu avec l'EDP parabolique. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres . . . . .	11
I.7	Mine 1 . . . . .	13
I.8	Composantes AM de Mine 1. DESA (a). IA (b). DHODA (c) . . . . .	13
I.9	Mine 1 : Transformée de Fourier (a). Module de la fréquence (FM) . . . . .	14
I.10	Image de texture (a). Composantes dominantes : AM (b). Module FM (c) . . . . .	15
II.1	Représentation du signal $S$ . . . . .	25
II.2	Décomposition par EMD. (a) En bleu : $S(x)$ (Fig. II.1), en pointillés noirs : enveloppes supérieures et inférieures interpolées, en rouge : estimation de la moyenne locale . . . . .	25
II.3	Organigramme du pseudo-code de l'EMD (cf. Tableau II.1) . . . . .	29
II.4	Premier mode obtenu avec la formule explicite (II.134) pour $T = 0.2$ et $\delta = 0.223$	49

II.5	Représentation du signal $S$ donné par l'équation (II.148) . . . . .	52
II.6	Composantes du signal $S$ (Éq. II.148). Composante haute fréquence $S_1$ (Éq. II.149) (a). Composante basse fréquence $S_2$ (Éq. II.150) pour $f = 0.5$ (b) . . .	53
II.7	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge : $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	54
II.8	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge : $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	54
II.9	Comparaisons entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu : $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) .	55
II.10	Comparaisons entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu : $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) . . . . .	56
II.11	Représentation du signal $S$ donné par l'équation (II.151) . . . . .	56
II.12	Composantes du signal $S$ (Éq. II.151). Composante haute fréquence $S_1$ (Éq. II.152) (a). Composante basse fréquence $S_2$ (Éq. II.153) (b) . . . . .	57
II.13	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge : $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	58
II.14	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge : $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	58
II.15	Comparaisons entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu : $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) .	59
II.16	Comparaisons entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu : $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) . . . . .	60
II.17	Représentation du signal $S$ donné par l'équation (II.154) . . . . .	60
II.18	Composantes du signal $S$ (II.154). Composante haute fréquence $S_1$ (Éq. II.155) (a). Composante basse fréquence $S_2$ (Éq. II.156) (b) . . . . .	61
II.19	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge : $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	62
II.20	Comparaisons entre IMF et $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge : $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD . . . . .	62

II.21	Comparaison entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu : $\delta$ -IMF <sub>1</sub> , premier mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) .	63
II.22	Comparaisons entre $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu : $\delta$ -IMF <sub>2</sub> , second mode obtenu avec la $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75) . . . . .	64
III.1	Organigramme du pseudo-code de l'EMD 2D (cf. Tableau III.1) . . . . .	71
III.2	Image synthétique $I$ (Éq. III.57) avec $A = B = 1$ , $\rho_1 = 0.1$ , $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ , $\rho_2 = 0.5$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{12}$ . . . . .	83
III.3	Composantes de l'image $I$ (Éq. III.57). Composante haute fréquence $I_2$ (Éq. III.59) (a). Composante basse fréquence $I_1$ (Éq. III.59) (b). Modes obtenus avec la 2D $\delta$ -EMD : premier mode $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (c). deuxième mode $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . .	84
III.4	Modes empiriques obtenus avec l'EMD 2D. Première 2D IMF (a). Deuxième 2D IMF (b) . . . . .	85
III.5	Image AM-FM $J$ obtenue avec l'équation (III.57) avec $\rho_1 = 0.1$ , $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ , $\rho_2 = 0.5$ et $\theta_1 = \frac{\pi}{12}$ . . . . .	85
III.6	Composantes de l'image $J$ (Éq. III.60). Composante haute fréquence $J_2$ (Éq. III.62) (a). Composante basse fréquence $J_1$ (Éq. III.61) (b). Modes obtenus avec la 2D $\delta$ -EMD : premier mode $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (c). deuxième mode $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . .	86
III.7	Modes empiriques obtenus avec l'EMD 2D. Première 2D IMF (a). Deuxième 2D IMF (b) . . . . .	87
III.8	Yaye . . . . .	89
III.9	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF <sub>1</sub> (a). 2D $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF <sub>2</sub> (c). 2D $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . . . . .	90
III.10	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : 2D IMF <sub>3</sub> (a). 2D $\delta$ -IMF <sub>3</sub> (b). Quatrièmes modes : 2D IMF <sub>4</sub> (c). 2D $\delta$ -IMF <sub>4</sub> (d) . . . . .	91
III.11	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Résidus : BEMD (a). 2D $\delta$ -EMD (b) . . . . .	92
III.12	Cameraman . . . . .	92
III.13	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF <sub>1</sub> (a). 2D $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF <sub>2</sub> (c). 2D $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . . . . .	93
III.14	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : 2D IMF <sub>3</sub> (a). 2D $\delta$ -IMF <sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). 2D $\delta$ -EMD (d) . . . . .	94
III.15	Image de Texture . . . . .	95
III.16	Comparaison entre la BEMD et la 2D $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF <sub>1</sub> (a). 2D $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF <sub>2</sub> (c). 2D $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . . . . .	96



III.17	Comparaison entre la BEMD et la $2D$ $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : $2D$ IMF <sub>3</sub> (a). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). $2D$ $\delta$ -EMD (d) . . . . .	97
III.18	Image bathymétrique de fond marin . . . . .	98
III.19	Comparaison entre la BEMD et la $2D$ $\delta$ -EMD. Premiers modes : $2D$ IMF <sub>1</sub> (a). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : $2D$ IMF <sub>2</sub> (c). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . . . . .	99
III.20	Comparaison entre la BEMD et la $2D$ $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : $2D$ IMF <sub>3</sub> (a). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). $2D$ $\delta$ -EMD (d) . . . . .	100
III.21	Image sonar de fond marin . . . . .	101
III.22	Comparaison entre la BEMD et la $2D$ $\delta$ -EMD. Premiers modes : $2D$ IMF <sub>1</sub> (a). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : $2D$ IMF <sub>2</sub> (c). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>2</sub> (d) . . . . .	102
III.23	Comparaison entre la BEMD et la $2D$ $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : $2D$ IMF <sub>3</sub> (a). $2D$ $\delta$ -IMF <sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). $2D$ $\delta$ -EMD (d) . . . . .	103
IV.1	Lena (a). Mandrill (b) . . . . .	109
IV.2	Phase de Lena (a). Phase de Mandrill (b). Amplitude de Mandrill et phase de Lena (c). Amplitude de Lena et phase de Mandrill (d) . . . . .	110
IV.3	Système masse-ressort . . . . .	115
IV.4	Représentation $3D$ de $I$ (cf. Équation (IV.34)) (a). $I$ en niveau de gris (b) . . . . .	118
IV.5	Composantes de l'image $I$ (Équation (IV.34)). Amplitudes : $a$ réelle (a). $a$ estimée (b). Fréquences : $U$ réelle (c). $U$ estimée (d). $V$ réelle (e). $V$ estimée (f) . . . . .	119
IV.6	Diagramme de l'algorithme GGDA . . . . .	123
IV.7	Banc de filtres de Gabor . . . . .	124
IV.8	Illustration du filtrage passe-bas supplémentaire sur les composantes de l'image de la Figure IV.25. De haut en bas : 1 <sup>ère</sup> ligne : Composantes $\tilde{I}_n$ obtenues avec les filtres de Gabor. 2 <sup>ème</sup> ligne : Composantes $I_n^\sigma$ avec les filtres de Gabor plus filtrage . . . . .	124
IV.9	Image d'un mur . . . . .	125
IV.10	Image d'un autre mur . . . . .	125
IV.11	Une image de texture . . . . .	125
IV.12	Composantes dominantes de Fig. IV.9. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	127
IV.13	Composantes dominantes de Fig. IV.10. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	128
IV.14	Composantes dominantes de Fig. IV.11. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	129
IV.15	Une autre image de texture . . . . .	130
IV.16	Barbara . . . . .	130

IV.17	Composantes dominantes de Fig. IV.15. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	131
IV.18	Une plaque d'immatriculation . . . . .	131
IV.19	Composantes dominantes de Fig. IV.18. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	132
IV.20	Lena . . . . .	132
IV.21	Composantes dominantes de Fig. IV.20. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	133
IV.22	Composantes dominantes de Fig. IV.16. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	134
IV.23	Zèbre . . . . .	134
IV.24	Composantes dominantes de Fig. IV.23. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	135
IV.25	Image bathymétrique de fond marin avec ombrage . . . . .	135
IV.26	Composantes dominantes de Fig. IV.25. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	136
IV.27	Image bathymétrique de fond marin sans ombrage . . . . .	137
IV.28	Composantes dominantes de Fig. IV.27. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d). . . . .	138
V.1	Représentation 3D de $I_1$ (cf. Équation (V.43)) (a). $I_1$ en niveau de gris (b). . . . .	146
V.2	Composantes de l'image synthétique $I_1$ (Équation (V.43)). Amplitudes : $a$ réelle (a). $a$ estimée (b). Fréquences : $\omega_1$ réelle (c). $\omega_1$ estimée (d). $\omega_2$ réelle (e). $\omega_2$ estimée (f) . . . . .	147
V.3	Carré . . . . .	150
V.4	Images sonar. Mine 1 (a). Mine 2 (b). Mine 3 (c). . . . .	150
V.5	Composantes AM obtenues avec différentes méthodes de démodulation : DESA (b). IA (c). DHODA (d). . . . .	151
V.6	Segmentation du Carré avec la composante AM avec le DHODA . . . . .	151
V.7	Histogramme du Carré (a). Segmentation basée sur l'histogramme (b). . . . .	151
V.8	Composantes AM obtenues avec différentes méthodes de démodulation. De la gauche vers la droite : 1 <sup>ere</sup> colonne : DESA. 2 <sup>eme</sup> : IA. 3 <sup>eme</sup> : DHODA . . . . .	152
V.9	Segmentations des ombres de mines avec les composantes AM obtenues avec le DHODA . . . . .	153
V.10	Transformée de Fourier du Carré (Fig. V.3) . . . . .	154
V.11	Transformées de Fourier des images sonar (Fig. V.4) . . . . .	154
V.12	Module de la fréquence spatiale (FM) du Carré (Fig. V.3) . . . . .	154

V.13	Module de la fréquence spatiale (FM) des images sonar (Fig. V.4) . . . . .	155
V.14	Quelques composantes $\tilde{I}_n$ de l'image sonar (Figure V.31), obtenues avec différents filtres du banc . . . . .	159
V.15	Barbara . . . . .	160
V.16	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	160
V.17	Bâteau . . . . .	161
V.18	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	161
V.19	Texture 1 . . . . .	162
V.20	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	162
V.21	Texture 2 . . . . .	163
V.22	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	163
V.23	Lena . . . . .	164
V.24	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	164
V.25	Mandrill . . . . .	165
V.26	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	165
V.27	Texture 3 . . . . .	166
V.28	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	166
V.29	Texture 4 . . . . .	167
V.30	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	167
V.31	Image sonar de fond marin . . . . .	168
V.32	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	168
V.33	Zèbre . . . . .	169
V.34	Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b) . . . . .	169
A.1	Bâtiment (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d) . . . . .	180
A.2	Histogrammes . . . . .	180
A.3	Port (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d) . . . . .	181
A.4	Plongeur (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d) . . . . .	182
A.5	Histogrammes . . . . .	182

---

# Liste des tableaux

II.1	Pseudo-code de l'algorithme EMD . . . . .	28
III.1	Pseudo-code de l'EMD 2D . . . . .	70
III.2	Erreurs entre modes extraits avec l'EMD et la $\delta$ -EMD, et les composantes exactes des images $I$ et $J$ . . . . .	88
V.1	Erreurs d'approximation des composantes AM et FM de l'image $I_1$ , obtenues avec le DHODA et le DESA. . . . .	148
V.2	Erreurs d'approximation des composantes AM et FM de l'image $I_2$ , obtenues avec le DHODA et le DESA. . . . .	149



---

# Notations et sigles

◆ Concernant les opérateurs de Teager-Kaiser, on note par :

- $\psi_d$  Opérateur de Teager-Kaiser discret  $1D$  (cf. Définition [IV.6](#))
- $\psi$  Opérateur de Teager-Kaiser continu  $1D$  (cf. Définition [IV.7](#))
- $\phi_k$  Opérateur de Teager-Kaiser  $1D$  continu d'ordre  $k$  (cf. Définition [V.1](#))
- $\Psi_d$  Opérateur discret de Teager-Kaiser  $2D$  (cf. Définition [IV.8](#))
- $\Psi$  Opérateur continu de Teager-Kaiser  $2D$  (cf. Définition [IV.9](#))
- $\Phi_k$  Opérateur de Teager-Kaiser  $2D$  continu d'ordre  $k$  (cf. Définition [V.2](#))

◆ Soit  $h$  une fonction, on note par :

- $S_\delta h$  Opérateur sup  $1D$  (cf. Définition [II.3](#))
- $I_\delta h$  Opérateur inf  $1D$  (cf. Définition [II.4](#))
- $m_\delta h$  Opérateur *moyenne*  $1D$  (cf. Définition [II.5](#))
- $\mathcal{S}_\delta h$  Opérateur sup  $2D$  (cf. Définition [III.7](#))
- $\mathcal{I}_\delta h$  Opérateur inf  $2D$  (cf. Définition [III.8](#))
- $\mathcal{M}_\delta h$  Opérateur *moyenne*  $2D$  (cf. Définition [III.5](#))

◆ Nous utilisons les notations suivantes :

- $p$   $\delta$ -**IMF** IMF potentielle  $1D$  définie par une EDP (cf. Définition [II.6](#))
- $H$   $p$   $\delta$ -**IMF** IMF potentielle  $1D$  définie par l'équation de la chaleur (cf. Définition [II.7](#))
- $\delta^\epsilon$ -**IMF** IMF  $1D$  définie par une EDP (cf. Définition [II.8](#))
- $2D$   $p$   $\delta$ -**IMF** IMF potentielle  $2D$  définie par une EDP (cf. Définition [III.6](#))
- $2D$   $\delta^\epsilon$ -**IMF** IMF  $2D$  définie par une EDP (cf. Définition [III.7](#))

◆ Soit  $f$  une fonction. On désigne par :

$\frac{df}{dx}$	Dérivée de $f$ par rapport à $x$
$\frac{d^2f}{dx^2}$	Dérivée seconde de $f$ par rapport à $x$
$\frac{d^k f}{dx^k}$	Dérivée d'ordre $k$ de $f$ par rapport à $x$
$Df$	Gradient de $f$
$D^2f$	Hessienne de $f$

◆ On considère les opérateurs classiques suivants :

$\nabla$	Opérateur gradient
$\Delta_x$	Opérateur laplacien par rapport à la variable $x$
$\Delta_x^2$	$\Delta_x(\Delta_x)$ .

◆ Soit  $\Omega$  un ouvert borné. Soit  $E$  et  $F$ , deux espaces vectoriels. Pour  $k \in [0, +\infty]$  et  $m, p \in [1, +\infty[$ , on note par :

$\partial\Omega$	Bord de $\Omega$
$B(c, \rho)$	Boule ouverte de centre $c$ et de rayon $\rho$
$\overline{B}(c, \rho)$	Boule fermée de centre $c$ et de rayon $\rho$
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$
$\ \cdot\ $	Norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$
$\ f\ _\infty = \sup \{ f(x) , x \in \Omega\}$	Norme sup ou norme infinie de $h$ dans $\Omega$
$C^k(\Omega)$	Ensemble des fonctions $k$ continûment différentiables sur $\Omega$
$L^p(\Omega)$	Ensemble des fonctions $f$ telles que $\int_\Omega  f ^p < \infty$
$W^{m,p}(\Omega)$	Ensemble des fonctions dans $L^p(\Omega)$ dont les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre $m$ sont aussi dans $L^p(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	Ensemble des fonctions dans $W^{m,2}(\Omega)$
$\mathcal{L}(E, F)$	Ensemble des applications linéaires de $E$ dans $F$ .

◆ Nous utilisons enfin divers sigles :

<b>AM</b>	Modulation d'amplitude
<b>CHOEDA</b>	Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm
<b>DCA</b>	Dominant Component Analysis
<b>DESA</b>	Discrete Energy Separation Algorithm
<b>DFT</b>	Transformée de Fourier discrète
<b>DHODA</b>	Discrete Higher Order Demodulation Algorithm
<b>EH</b>	Égalisation d'histogramme
<b>EMD</b>	Décomposition modale empirique (Empirical Mode Decomposition)
<b>ESA</b>	Energy Separation Algorithm
<b>FM</b>	Modulation de fréquence
<b>GGDA</b>	Gabor Gauss Demodulation Algorithm
<b>HODEO</b>	Opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs
<b>IA</b>	Image Analytique
<b>IMF</b>	fonction intrinsèque (Intrinsic Mode Function)
<b>MHODA</b>	Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm
<b>QEA</b>	Quasi-Eigenfunction Approximations
<b>SP</b>	Tamisage (Sifting Process)
<b>TKEO</b>	Opérateur d'énergie de Teager-Kaiser
<b>TKIE</b>	Teager-Kaiser Image Enhancement
<b>WT</b>	Transformation en ondelettes





CHAPITRE

I

---

# Introduction



---

# Introduction

## I.1 Contexte et objectifs

**D**ans ce travail de thèse, on s'intéresse à l'étude des méthodes d'analyses non linéaires de signaux, en proposant des modèles théoriques validés par des simulations numériques. Ce travail est réparti en deux parties.

La première partie est consacrée à la décomposition modale empirique (EMD pour Empirical Mode Decomposition), qui est une méthode d'analyse de signaux relativement récente et qui suscite beaucoup d'intérêts. Elle est introduite depuis plus de dix ans par Huang et al. (1) afin de mieux analyser des séries temporelles non stationnaires et issues ou non de systèmes non linéaires. L'EMD est initialement définie juste par un algorithme et sa compréhension ne repose, en grande partie, que sur des simulations numériques intensives. L'EMD considère le signal à traiter à l'échelle de ses oscillations locales et permet alors de décomposer le signal en composantes élémentaires, communément appelées modes empiriques ou fonctions intrinsèques (IMF pour Intrinsic Mode Functions). Les IMF ont la caractéristique particulière d'être des fonctions de moyenne nulle et modulées en amplitude et en fréquence. Ce sont des fonctions AM-FM monocomposantes au sens strict du terme (voir par exemple (2 ; 3) pour de plus amples informations sur les notions de signaux monocomposants), et sont générées de la plus haute fréquence du signal vers la plus basse fréquence. Ce comportement en banc de filtres de l'EMD, confirmé par les travaux de Flandrin et Rilling (4), fait de la méthode un outil très intéressant en analyse temps-fréquence (voir par exemple (1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9)). L'étape qui permet d'extraire les IMF se déroule dans une boucle itérative de l'algorithme EMD qu'on appelle processus de tamisage (SP pour Sifting Process).

L'EMD permet alors de reconstruire le signal comme la somme de ces IMF plus un résidu qui est la tendance globale du signal. Une autre particularité de la méthode est que la décomposition est faite de manière locale et est entièrement pilotée par les données. C'est ce caractère auto adaptatif qui fait tout l'intérêt de la méthode. En effet, les IMF apparaissent dans la décomposition comme des fonctions de « bases », et pourtant, la décomposition ne repose sur aucun critère prédéfini, contrairement à une décomposition en ondelettes (WT) (10) ou les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen (2), nécessitant une ondelette mère ou un noyau.

L'EMD est appliquée avec succès dans de nombreux domaines allant du cadre scientifique

pur, à l'ingénierie (6 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18). Cependant, l'absence de cadre mathématique formel reste la principale critique de la méthode et un enjeu très important. L'EMD donne de bons résultats pour une grande famille de signaux. Par contre, comment et pourquoi marche-t-elle demeurent des questions sans réponses précises. Beaucoup de travaux de simulations ont été menées concernant le comportement de l'EMD. On cite entre autres les travaux de Flandrin et Rilling (4) et Flandrin et Goncalves (4 ; 19), qui montrent le comportement en banc de filtres dyadiques et certaines propriétés similaires à la transformée en ondelettes de l'EMD. Aussi, il y a quelques travaux relativement récents contribuant à son formalisme théorique (20 ; 21 ; 22 ; 23).

L'EMD est récemment étendue pour les images (24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28). Les algorithmes proposés en  $2D$  sont des extensions directes du cas en  $1D$ . Il y a beaucoup d'applications de l'EMD  $2D$  (voir par exemple (24 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34)). Cela étant, à notre connaissance, aucune étude théorique n'est actuellement faite.

L'objectif de la première partie de la thèse est de proposer des cadres théoriques à l'EMD  $1D$  et  $2D$ , d'apporter des justifications théoriques à beaucoup de notions relatives à l'EMD et définies de manière très intuitive ou sur la base de simulations numériques, et enfin de proposer de nouveaux algorithmes EMD  $1D$  et  $2D$ .

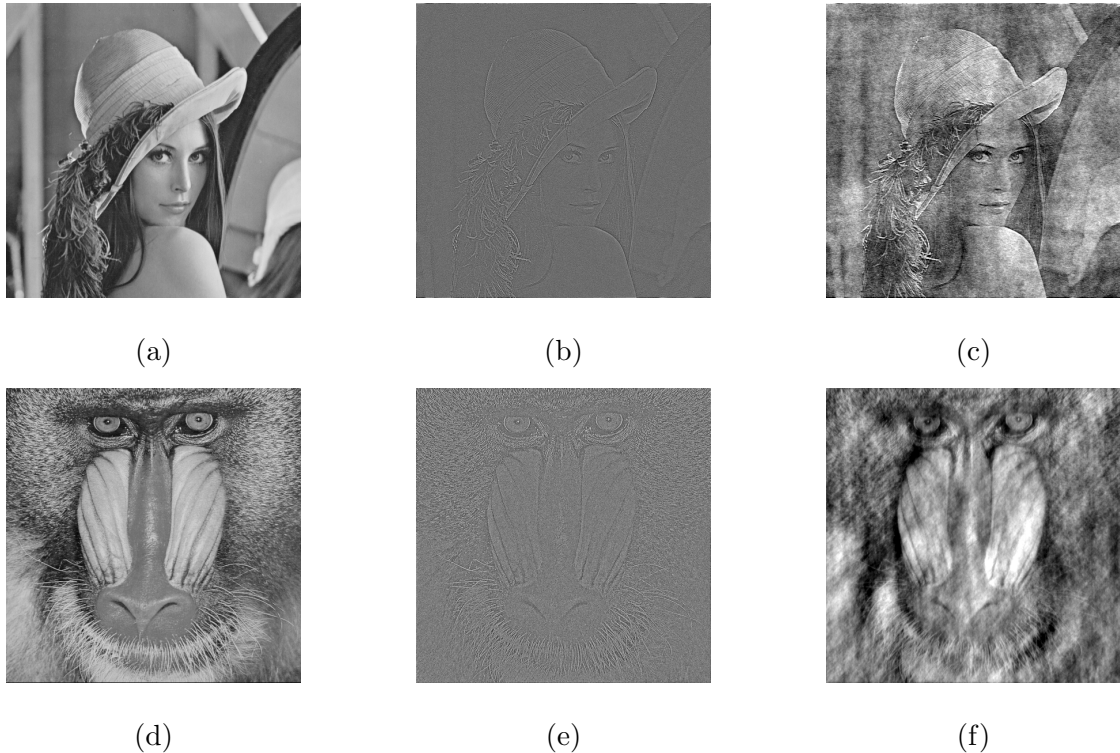
Les IMF générées par la décomposition par EMD sont des fonctions AM-FM (AM pour Amplitude Modulation et FM pour Frequency Modulation). La tamisage  $2D$ , étape à laquelle les IMF  $2D$  sont extraites, permet donc de générer des fonctions AM-FM bidimensionnelles. Dans la deuxième partie du travail de thèse, on s'est intéressé aux modèles AM-FM et à la démodulation d'images. En effet, les modèles AM-FM sont bien connus en traitement du signal et présentent beaucoup d'intérêts en analyse temps-fréquence par exemple. Ils ont initialement été conçus pour le traitement des signaux et se sont révélés très efficaces pour le traitement des signaux de la parole avec les travaux de Kaiser (35). Ils sont ensuite introduits en traitement d'images par Maragos et al. (36) et offrent des possibilités intéressantes en traitement d'images. En effet, la modélisation AM et FM a trouvé ces dernières années de nombreuses applications en traitement d'images. Comme exemples, nous citons ses applications en analyse d'images et de séquences vidéo (37 ; 38 ; 39), en classification d'images (40), en segmentation d'images (41 ; 42 ; 43), en analyse de texture (44), en imagerie médicale (45) et pour le suivi d'objets (46 ; 47).

Nous illustrons sur la Figure I.1 les notions de phase et d'amplitude d'une image. On peut y voir que l'information donnée par la phase est très pertinente en ce qui concerne les contours et autres zones inhomogènes de l'image. Quant à l'amplitude (AM), elle nous renseigne beaucoup plus sur les niveaux de gris l'image. La fréquence (composante FM) est donnée par le gradient de la phase. Plus précisément, en suivant Havlicek et al. (48), on observe que :

1. La composante **AM** renseigne sur le niveau de contraste des textures, plus exactement, sur la disparité en intensité entre les textures sombres et brillantes.
2. La partie **FM** permet de capturer l'orientation des textures locales, la granularité et les contours de l'image.

En somme, ce qu'on recherche avec les modèles AM-FM, c'est de pouvoir décomposer toute image en une composante qui regroupe les niveaux de gris des parties texturées de l'image (AM) et une composante contenant la géométrie de l'image (FM). Ce type de décomposition continue d'ailleurs d'intéresser les traiteurs d'images. Comme exemples, nous citons les

modèles de Meyer (49), de Vese et Osher (50), de Osher et al. (51), et enfin ceux de Aubert et Aujol (52) et Aujol et al. (53). Nous insistons sur le fait que ces modèles proposent une décomposition de l'image en une somme de telles composantes par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles. Dans cette deuxième partie, on s'est intéressé



**Figure 1.1:** Lena (a). Phase de Lena (b). Amplitude de Mandrill et phase de Lena (c). Mandrill (d). Phase de Mandrill (e). Amplitude de Lena et phase de Mandrill (f)

aux modèles AM-FM et à la démodulation d'images. L'objectif étant de montrer comment modéliser des images synthétiques et des images réelles et même de nature très complexe sous la forme AM-FM, les démoduler et enfin de mettre en avant leurs intérêts en analyse et en segmentation d'images.

## I.2 Organisation du manuscrit

Le manuscrit est organisé en deux parties. La Partie **I** est consacrée à l'EMD 1D et 2D, et la Partie **II**, aux modèles AM-FM.

## I.2.1 Partie I : Contributions aux formalismes théoriques de la décomposition modale empirique 1D et 2D

Cette première partie comporte les Chapitres II et III consacrés respectivement à l'EMD 1D et 2D, et détaillés ci-après :

### I.2.1.1 Une approche par EDP de l'EMD 1D (Chapitre II)

L'étape la plus importante de l'EMD est le tamisage (SP). C'est à ce stade de l'algorithme que les IMF sont extraites. La formulation de la *moyenne locale* comme présentée dans (1), fait qu'il est difficile de faire une analyse mathématique rigoureuse et de proposer un modèle théorique de l'EMD. En effet, son calcul fait intervenir les enveloppes supérieures et inférieures du signal. L'interpolation des extréma est la plus répandue des approches utilisées pour estimer ces enveloppes. Malheureusement, cela ne change en rien la modélisation explicite de ces dernières et, au contraire, elle est à la base des problèmes inhérents au tamisage (problèmes de bords, overshoots, undershoots, ...). Le tamisage est un processus itératif et par conséquent, les erreurs créées avec les interpolations vont se cumuler au fur et à mesure de l'extraction des modes. Dans ce Chapitre II, nous utilisons les filtres de rang continu, sup et inf, pour réécrire de manière équivalente la définition de la *moyenne locale*. Avec cette nouvelle formulation de la moyenne locale, nous montrons qu'on peut approcher les itérations du SP par une EDP à frontières libres.

Il existe un modèle d'EDP concernant l'EMD 1D. En effet, Deléchelle et al. (20) ont proposé des EDP pour estimer l'enveloppe moyenne. Le couple d'EDP qui y est proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial s^+}{\partial t} = -g^+ \left( \frac{\partial s_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 s^+}{\partial x^4} \\ \frac{\partial s^-}{\partial t} = -g^- \left( \frac{\partial s_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 s^-}{\partial x^4} \\ s(x, 0) = s_0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

$s_0$  étant le signal à traiter et  $g^\pm$  est une fonction positive. Typiquement, on a (20) :

$$g^\pm = \frac{1}{3} \left[ \left| \text{sign} \left( \frac{\partial s_0}{\partial x} \right) \right| \pm \text{sign} \left( \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) + 1 \right]. \quad (\text{I.2})$$

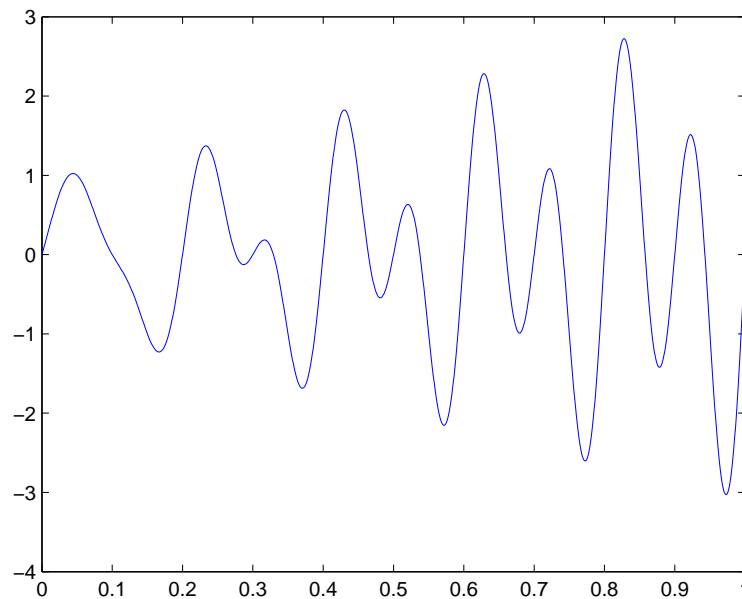
$s_\infty^+$  et  $s_\infty^-$  sont les solutions de (I.1) représentant respectivement l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure. L'enveloppe moyenne étant estimée par la moyenne des deux *i.e.*  $\frac{s_\infty^+ + s_\infty^-}{2}$ . Il n'y a cependant pas de preuve que les EDP proposées par (I.1) sont bien posées et qu'elles estiment réellement l'enveloppe moyenne. Aussi, aucun lien non plus n'est mis en évidence entre les itérations du SP et ces EDP. Leur approche est toutefois validée par des simulations.

Dans ce travail, on utilise les itérations du SP pour aboutir à une EDP à frontières libres. L'introduction des EDP dans le SP nous a permis de donner des caractérisations mathématiques des modes empiriques qui, pour rappel, ne sont définis que de manière très intuitive. Aussi, nous proposons un modèle particulier de cette EDP à frontières libres, don-

nant lieu à une EDP parabolique qui peut être formulée comme une équation de la chaleur rétrograde. Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution de cette EDP parabolique et faisons une étude numérique de l'EDP. Dans ce chapitre, nous montrons également que la condition de moyenne nulle pour une IMF peut être très finement approchée à un  $\epsilon$  près, ce qui permet de donner une justification théorique des modes empiriques.

En plus des aspects théoriques que nous développons dans ce chapitre concernant l'EMD, les modèles d'EDP que nous proposons nous libèrent en même temps des problèmes liés à l'interpolation. En effet, on n'a plus besoin de détecter les extrema du signal, ni d'estimer les enveloppes supérieures et inférieures par interpolation. Cela est très important, car cette approche par EDP permet de réduire considérablement le temps de calcul pour estimer les enveloppes, particulièrement, pour les espaces de dimension supérieure.

Enfin, nous résolvons numériquement l'EDP à frontières libres et l'EDP parabolique résultant. Dans les deux cas, les résultats numériques montrent que notre approche par EDP améliore beaucoup l'EMD classique, comme on peut le constater avec le signal de la Figure I.2. Les résultats de la décomposition sont représentés sur les Figures I.3 et I.4. Les résultats obtenus

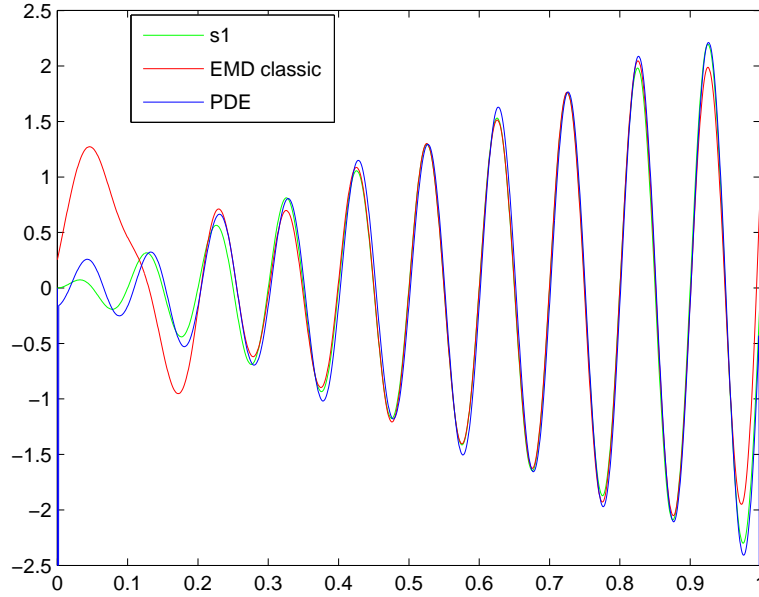


*Figure I.2:* Représentation du signal

avec l'EDP à frontières libres sont représentés sur les Figures I.5 et I.6.

Nous avons présenté les principaux résultats de cette étude dans (54 ; 55 ; 56).





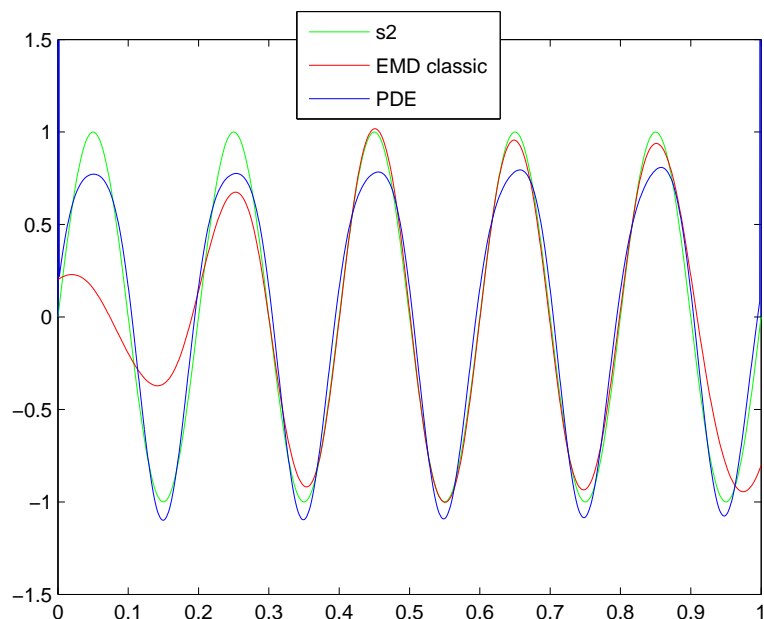
**Figure 1.3:** Comparaisons entre IMF et IMF obtenues avec l’approche par EDP. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge :  $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l’EMD classique. En bleu : premier mode obtenu avec l’EDP parabolique

### I.2.1.2 Une Formulation de l’EMD 2D par EDP (Chapitre III)

La plupart des algorithmes EMD 2D (24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 57) sont basés sur un schéma identique au 1D, à savoir la détection des extréma, l’interpolation et le calcul de l’enveloppe moyenne. Par conséquent, comme pour le cas 1D, la principale difficulté pour trouver un modèle théorique de l’EMD 2D reste le calcul de cette enveloppe moyenne. Dans les versions actuelles de l’EMD 2D, la construction des enveloppes supérieures et inférieures est très importante. Elle intervient dans l’étape clé de la méthode, le tamisage en 2D (2D SP), étape à laquelle les modes empiriques 2D (2D IMF) sont extraits.

L’EMD 2D est actuellement encore plus tributaire de l’interpolation que le cas 1D. En effet, les algorithmes 2D qu’on rencontre dans la littérature ne diffèrent les uns des autres que par les types d’interpolants utilisés pour la construction des enveloppes supérieures et inférieures (25 ; 27 ; 28).

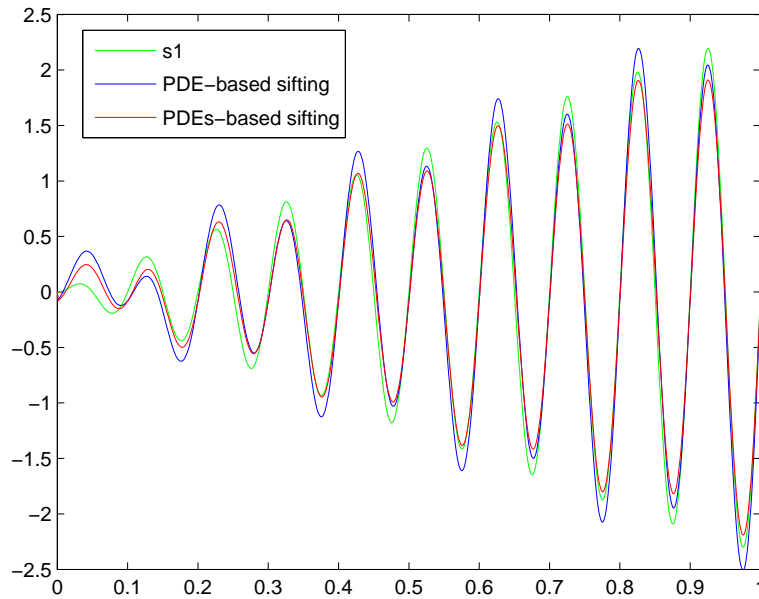
L’interpolation de surface nécessite beaucoup de temps de calcul. La complexité des algorithmes proposés (24 ; 25 ; 26 ; 58 ; 59) est de l’ordre de  $\frac{N^4}{100}$  pour une image de taille  $N^2$  (27). Le temps de calcul est un peu plus réduit avec la version 2D proposée dans (27). Comme on l’avait précédemment souligné, l’interpolation crée de l’information supplémentaire qui est une source d’erreur dans tous les cas. L’erreur devient de plus en plus importante si elle se propage à travers un processus itératif comme le 2D SP.



**Figure I.4:** Comparaisons entre IMF classiques et celles obtenues avec l'approche par EDP. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge :  $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu : second mode obtenu avec l'EDP parabolique

À notre connaissance, il n'y a pas encore de travaux théoriques concernant le formalisme ou la compréhension du SP ou de l'EMD pour les images. C'est l'objectif principal de ce Chapitre III. Pour ce faire, nous étendons l'approche que nous avons proposée dans (54 ; 55 ; 56) et développée au Chapitre II. De la même manière, nous approchons les enveloppes locales supérieures et inférieures, respectivement avec les opérateurs continus sup et inf en  $2D$ . Avec cette nouvelle formulation de la moyenne locale, nous pouvons faire du calcul différentiel sur les enveloppes, et par suite montrer que les itérations du  $2D$  SP peuvent être approchées par la résolution d'une certaine EDP. On se libère ainsi de la dépendance de l'interpolation de l'EMD  $2D$  et mieux, nous pouvons donner des justifications théoriques concernant les modes empiriques en  $2D$  et en proposer des caractérisations mathématiques. En effet, avec le modèle d'EDP que nous proposons, nous montrons, comme dans le Chapitre II, que le critère de moyenne nulle d'une  $2D$  IMF peut être approchée de façon très fine à un  $\epsilon$  près. Ces résultats sont nouveaux, et comme pour le cas  $1D$ , les IMF ne sont définies que de manière très intuitive ou bien sur la base de simulations numériques. Enfin, nous montrons que les résultats de décomposition d'images synthétiques et réelles obtenus avec cette nouvelle approche de l'EMD  $2D$  avec les EDP sont nettement meilleurs que ceux obtenus avec l'EMD  $2D$  classique.

Les principaux résultats de ce travail sont présentés dans (60 ; 61).



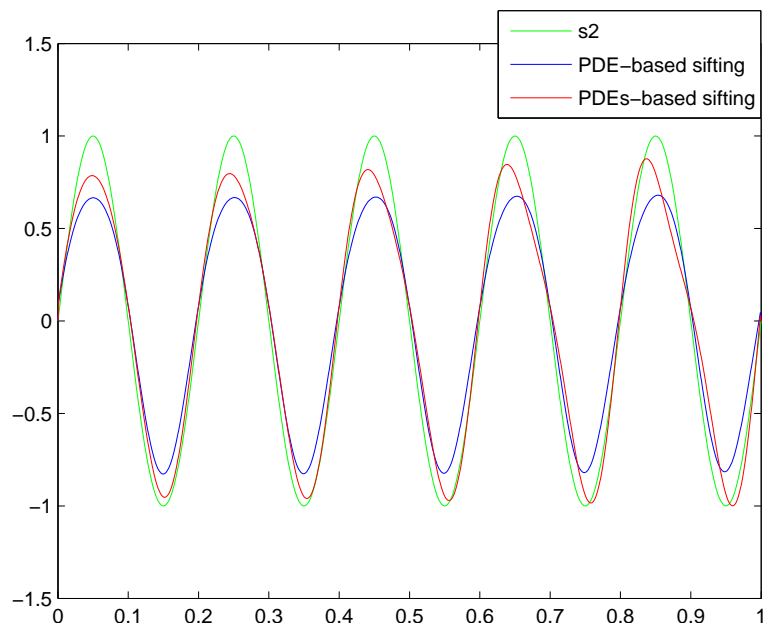
**Figure 1.5:** Comparaison entre IMF obtenues avec l'EDP parabolique et l'EDP à frontières libres. En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu : premier mode obtenu avec l'EDP parabolique. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres

## I.2.2 Partie II : Modèles AM-FM pour l'analyse d'images

L'objectif de cette seconde partie est de montrer comment modéliser des images synthétiques et des images réelles et même de nature très complexe sous la forme AM-FM, et de mettre en avant leurs intérêts en analyse et en segmentation d'images. Elle comporte les Chapitres **IV** et **V** que nous allons maintenant examiner :

### I.2.2.1 Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser (Chapitre **IV**)

Dans ce chapitre, on introduit les modèles AM-FM et les notions de démodulation d'images. Nous exposons essentiellement deux grandes méthodes de démodulation d'images : d'abord la méthode par image analytique (IA), basée sur la transformation de Hilbert en  $2D$  et introduite par Havlicek (62). La deuxième approche est initiée par Maragos et al. (63) avec l'algorithme discret, le DESA (Discrete Energy Separation Algorithm), et sa version continue, l'ESA (Energy Separation Algorithm), proposée par Maragos et Bovik (64). Le DESA comme l'ESA sont basés sur l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO), initialement introduit comme un opérateur discret par Teager (65) et Teager et Teager (66), afin de pallier à l'insuffisance d'une approche linéaire pour modéliser la parole. Le TKEO permet d'estimer efficacement l'énergie nécessaire à la création d'un signal de parole à bande étroite et pour



**Figure I.6:** Comparaisons entre IMF obtenues avec l'EDP parabolique et avec l'EDP à frontières libres. En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu : second mode obtenu avec l'EDP parabolique. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres

lequel les fréquences instantanées sont concentrées autour de la fréquence de résonance (ou formant) d'une porteuse sinusoidale (voir (65 ; 66 ; 67 ; 68 ; 69)). Il sera ensuite introduit dans la littérature en traitement du signal et développé de manière systématique par Kaiser (35 ; 70).

Le DESA et l'ESA ne sont applicables que pour des images à bande étroite, ce qui est rarement le cas des images réelles. La grande majorité des images naturelles contiennent des informations très riches, et par conséquent, une approche monocomposante s'avère insuffisante pour les modéliser. Bovik et al. (71 ; 72) ont montré qu'une approche multicomposante permet de bien traiter les images naturelles, et même de nature complexe. Récemment, Havlicek et al. (48) ont proposé une méthode de démodulation d'images réelles avec une approche multicomposante. Ils proposent alors une décomposition en sous bandes pour séparer chacune des composantes de l'image avant de leur appliquer la méthode IA ou le DESA. Cependant, l'application directe d'une méthode de démodulation monocomposante sur les parties ainsi séparées crée des artefacts sur les composantes AM et FM. Cela est en grande partie dû aux filtres de Gabor utilisés pour la décomposition en sous bandes. Pour y remédier, les auteurs proposent des filtrages et autres post-traitements, à posteriori, sur les composantes AM et FM (48). Le problème que cela pose est qu'il faut, en plus de trouver les fonctions AM et FM, faire des traitements supplémentaires sur ces composantes.

Dans ce chapitre, nous proposons de faire un filtrage passe-bas en amont du processus de démodulation. Cela compense très bien les dégradations générées par le banc de filtres de

Gabor, et on n'aura plus besoin d'appliquer des post-traitements aux composantes AM et FM de l'image.

Avec l'introduction du banc de filtres de Gabor, on se retrouve avec  $N$  composantes de l'image réelle à analyser, où  $N$  est la taille du banc de filtres. Pour de meilleures analyse et extraction des structures les plus pertinentes de l'image réelle, nous utilisons l'analyse par composante dominante (DCA). Cela consiste à choisir, par un certain critère, pour chaque pixel celui qui est le plus représentatif dans les  $N$  composantes. Ce pixel est dit *dominant*. Dans notre étude, nous le choisissons par rapport à l'énergie de Teager-Kaiser du pixel. Nous faisons ensuite la démodulation sur ces pixels dominants. L'algorithme que nous proposons est comparé à la méthode proposée dans (48).

L'autre partie de ce travail est lié à la validité théorique du calcul de l'énergie de Teager-Kaiser  $2D$  des composantes filtrées de l'image. En effet, l'utilisation du TKEO  $2D$  pour la démodulation se base sur certaines d'approximations justifiées dans (73) pour des images monocomposantes. Pour le cas multicomposant, Havlicek et al. (74) proposent une preuve avec l'approche par IA avec les QEA (Quasi-Eigenfunction Approximations). Avec l'approche par séparation d'énergie, une justification intuitive faisait état. Nous en proposons une preuve dans ce chapitre.

Nous avons présenté l'essentiel de ce travail dans (75 ; 76).

### I.2.2.2 Les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs pour la démodulation d'images (Chapitre V)

L'objectif principal de la modélisation AM-FM est de s'affranchir des limites de la transformée de Fourier afin d'obtenir une représentation capable de capturer l'information pertinente dans une image avec tout juste un nombre réduit de fonctions AM-FM quasi-sinusoïdales. L'algorithme que nous proposons dans le Chapitre IV repose sur une méthode de démodulation monocomposante, le DESA, qui donne des approximations de l'amplitude et des fréquences d'une image. Bien que les erreurs d'approximation des composantes AM et FM soient petites avec le DESA, il est possible d'avoir des erreurs encore plus faibles, et obtenir de la sorte une meilleure méthode de démodulation d'images.

Les opérateurs d'ordres supérieurs sont introduits pour les signaux  $1D$  par Maragos et Potamianos (77), constituant une généralisation de l'opérateur continu TKEO. Les auteurs (77) désignent alors ces opérateurs par Higher Order Differential Energy Operators (HODEO) et proposent alors un algorithme continu de démodulation de signaux basé sur les HODEO, ainsi que des schémas de discrétisation des HODEO. Le TKEO  $1D$  ou  $2D$  utilise des dérivées du signal (ou de l'image) jusqu'à l'ordre 2. Dans ce Chapitre V, on utilise les TKEO  $2D$  d'ordres supérieurs en généralisant l'ordre de dérivation à n'importe quel ordre, et on montre alors que les composantes AM et FM sont approchées d'une meilleure manière que le DESA. Nous allons aussi mettre en avant l'apport des ordres supérieurs dans la démodulation des images, par rapport aux méthodes de démodulation basées sur le TKEO  $2D$  classique ou la transformée de Hilbert  $2D$ . Pour ce faire, nous proposons un algorithme de démodulation d'images monocomposantes et nous l'étendons pour des images réelles.

**Algorithme de démodulation d'images monocomposantes (DHODA)** Il est important de garder à l'esprit la nature discrète des images. L'interpolation va donc jouer un rôle essentiel pour une bonne implémentation des algorithmes continus, le CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm) proposé par Boudraa et al. (78), par exemple. Les résultats de démodulation seront fortement dépendants des choix des interpolants. Nous ne nous sommes pas intéressés ici à ces aspects du problème, nous proposons plutôt un algorithme discret de démodulation d'images monocomposantes, basé sur les HODEO en  $2D$ .

On considère une image discrète  $I$  définie par :

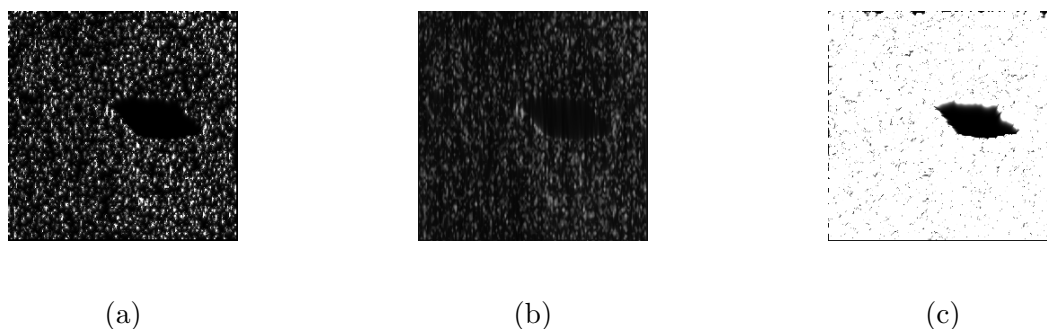
$$I(k, l) = a(k, l) \cos [k \cdot \omega_1(k, l) + l \cdot \omega_2(k, l)]. \quad (\text{I.3})$$

L'algorithme DHODA (Discrete Higher Order Demodulation Algorithm) que nous proposons estime l'amplitude  $a$ , les fréquences spatiales horizontale  $\omega_1$  et verticale  $\omega_2$  de  $I$  à partir des HODEO  $2D$ . Le DHODA est appliqué sur des images synthétiques pour lesquelles on obtient une diminution importante des erreurs d'approximations commises sur les composantes AM et FM. Les résultats obtenus sont comparés avec le DESA (36). Cette réduction quantitative des erreurs d'approximations pour les images synthétiques va se traduire comme une information supplémentaire permettant de capturer l'information pertinente dans les images monocomposantes réelles. En effet, les composantes AM permettent de segmenter, par exemple, les ombres de mines dans les images Sonar (cf. Figure I.8-(c)). Cela présente beaucoup d'intérêts pour des applications civiles et militaires. On peut remarquer que ni le DESA (cf. Figure I.8-(a)), ni l'IA (cf. Figure I.8-(b)) n'arrivent à faire ressortir cette partie importante de l'image. Il est important de préciser que le DESA et l'IA ne sont pas des méthodes de segmentation d'images. Nous voulons juste mettre en avant l'information supplémentaire donnée avec les HODEO en  $2D$ , par rapport au TKEO en  $2D$  et à la transformée de Hilbert  $2D$ . La propriété principale de la composante AM est de renseigner sur le niveau de contraste des textures, plus précisément, sur la disparité en intensité entre les textures sombres et brillantes. Cela est bien reflété par la composante AM donnée par le DHODA.



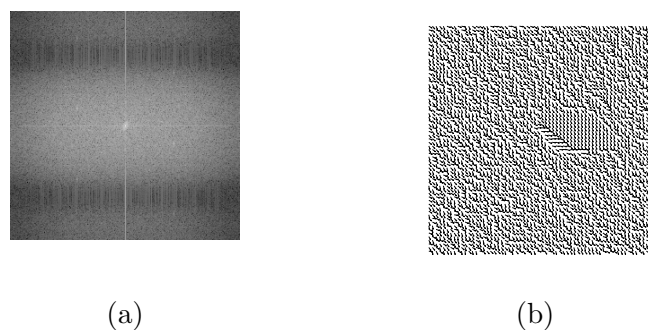
*Figure I.7:* Mine 1

Pour les composantes FM, nous utilisons une représentation sous forme de flèches. Cette représentation reflète mieux la notion de fréquence d'une image. Ainsi, pour chaque pixel, on trace une flèche dont l'origine est le pixel. La longueur de la flèche est inversement proportionnelle au module de la fréquence (composante FM en ce pixel). La flèche est orientée suivant la direction du vecteur fréquence. Pour plus de détails voir dans (62 ; 48). Par conséquent,



**Figure 1.8:** Composantes AM de Mine 1. DESA (a). IA (b). DHODA (c)

plus la flèche est courte, plus la fréquence est grande, et inversement. Les hautes fréquences représentent les transitions brusques des niveaux de gris de l'image, les contours, certaines formes de textures, du bruit, . . . Avec ce type de représentation, les notions de hautes et de basses fréquences d'une image donnée par la composante FM ont beaucoup plus de sens (cf. Figure I.9-(b)) que la transformée de Fourier discrète (DFT) (cf. Figure I.9-(a)).



**Figure 1.9:** Mine 1 : Transformée de Fourier (a). Module de la fréquence (FM)

Ces travaux ont été présentés dans (79 ; 43).

**Algorithme de démodulation d'images réelles et à bande large (MHODA)** L'algorithme DHODA présenté plus haut se limite à des images à bande étroite. Nous savons que la plupart des images réelles sont en dehors de cette classe très limitée d'images. C'est la raison pour laquelle nous proposons de l'étendre à une plus grande famille d'images réelles. On considère alors un modèle AM-FM multicomposant pour les images réelles.



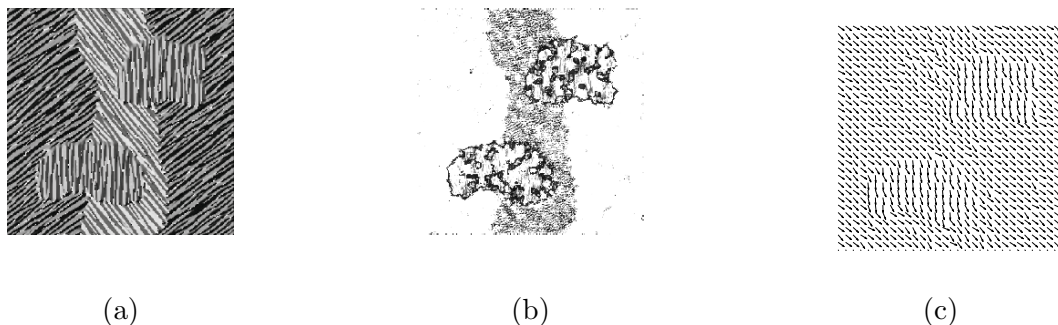
Étant donnée une image réelle  $I$  définie sur un ouvert borné  $\Omega$ , on modélise  $I$  par :

$$I(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos[\omega_{1,n}(x_1, x_2) \cdot x_1 + \omega_{2,n}(x_1, x_2) \cdot x_2] \quad (\text{I.4})$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos[\varphi_n(x_1, x_2)] = \sum_{n=1}^N I_n(x_1, x_2), \quad (\text{I.5})$$

On cherche alors à déterminer  $\forall n = 1, \dots, N$  les fonctions AM  $a_n$  et FM  $\nabla\varphi_n = [\omega_{1,n}, \omega_{2,n}] = [U_n, V_n]$ .

Les fonctions de Gabor sont bien connues pour leurs bonnes propriétés de localisations spatiales et spectrales (voir dans (80 ; 81 ; 2)). Avec un modèle multicomposant, nous séparons les différentes composantes de l'image avec un banc de filtres de Gabor. Une fois les composantes séparées, nous proposons de démoduler chaque partie monocomposante de l'image avec le DHODA. La démodulation s'achève avec une analyse par composante dominante (DCA) pour de meilleures analyse et extraction des structures les plus pertinentes de l'image réelle. L'algorithme que nous proposons, le MHODA (Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm), est illustré sur des images réelles (cf. Figure V.22).



**Figure I.10:** Image de texture (a). Composantes dominantes : AM (b). Module FM (c)

Ce travail est présenté dans (82).

### I.3 Contributions de la thèse

Ce travail de thèse a permis d'apporter de nombreux résultats nouveaux et importants. Dans la première partie, nous avons contribué au formalisme mathématique de la décomposition modale empirique (EMD) et proposé de nouveaux algorithmes EMD en  $1D$  et en  $2D$ . Comme premiers résultats, dans les algorithmes EMD  $1D$  et  $2D$  que nous avons proposés, nous ne détectons pas les extréma des signaux ou des images et nous n'estimons non plus l'enveloppe moyenne par interpolation des extréma, comme cela est classiquement fait. Cela permet de réduire considérablement le temps de calcul, surtout pour les espaces de dimension supérieure. Aussi, nous avons proposé des formulations du tamisage  $1D$  et  $2D$  dans le domaine continu avec des approches par équations aux dérivées partielles (EDP), qui,



pour rappel, sont initialement proposés en discret. Notre travail se démarque également des études existantes sur l'EMD sur de nombreux points. En effet :

- Nous proposons des formulations plus explicites des enveloppes supérieures et inférieures locales, en  $1D$  comme en  $2D$ .
- Nous proposons des formulations plus explicites de la moyenne locale, en  $1D$  comme en  $2D$ .
- Nous exploitons les itérations du tamisage  $1D$  et  $2D$  pour en tirer ensuite des EDP, dont leur résolution permet d'extraire les modes empiriques.
- Nous faisons des études théoriques et numériques des modèles par EDP proposés et proposons des caractérisations analytiques des modes en  $1D$  comme en  $2D$ .
- Pour le cas  $1D$ , nous proposons un modèle d'EDP dont la formulation peut se réécrire comme l'équation de la chaleur retrograde.
- Nous apportons des justifications théoriques aux modes empiriques en  $1D$  comme en  $2D$ , qui, pour rappel, ne sont définis que de manière intuitive ou bien sur la base de simulations numériques.
- Enfin, nous proposons de nouveaux algorithmes EMD en  $1D$  comme en  $2D$  donnant de meilleurs résultats de décomposition que l'EMD classique  $1D$  et  $2D$ .

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons montré comment modéliser des images synthétiques et des images réelles et même de nature très complexe sous la forme AM-FM, et avons mis en avant l'intérêt des modèles AM-FM en analyse et en segmentation d'images. Nous avons d'abord apporté des améliorations dans la démodulation d'images réelles, qui sont dans leur grande majorité à bande large. En effet, nous avons proposé d'inclure un filtrage passe-bas en amont de la démodulation, afin de compenser les dégradations causées par les filtres de Gabor, utilisés pour la décomposition en sous bandes des images réelles. Aussi, nous avons apporté une justification théorique du calcul de l'énergie de Teager-Kaiser des composantes de l'image réelle, obtenues par une décomposition en sous bandes.

De nombreux algorithmes de démodulation, de même que celui nous avons proposé reposent sur l'opérateur TKEO  $2D$ , qui utilise des dérivées de l'image jusqu'à l'ordre 2. Dans un second temps, nous avons poussé cet ordre de dérivation en généralisant le TKEO  $2D$  pour explorer la démodulation des images avec les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs (HODEO  $2D$ ). Cela nous a permis de mettre en évidence l'apport des HODEO  $2D$  par rapport au TKEO  $2D$  et à la transformée de Hilbert  $2D$  dans la démodulation des images, en proposant de meilleurs algorithmes de démodulation que ceux existants actuellement. Enfin, nous avons montré une application pratique pour la segmentation d'images de l'algorithme proposé, et son extension à une plus grande classe d'images réelles montre qu'une application serait possible pour la classification de certaines textures.

## Première partie

# Contributions aux formalismes théoriques de la décomposition modale empirique $1D$ et $2D$



---

# Une approche par équations aux dérivées partielles de la décomposition modale empirique $1D$

---

## Sommaire

<b>II.1 Introduction</b> . . . . .	<b>20</b>
<b>II.2 Positionnement de notre travail</b> . . . . .	<b>22</b>
<b>II.3 La Décomposition modale empirique</b> . . . . .	<b>24</b>
II.3.1 Idée générale . . . . .	24
II.3.2 Définitions usuelles et remarques importantes . . . . .	24
II.3.3 Principe de l'EMD . . . . .	26
II.3.4 Algorithme EMD . . . . .	27
II.3.5 Critères d'arrêt du SP . . . . .	27
<b>II.4 Formulation par EDP du tamisage</b> . . . . .	<b>30</b>
II.4.1 Construction de suites . . . . .	30
II.4.2 Étude préliminaire . . . . .	31
II.4.3 Notions de <i>potential <math>\delta - IMF</math></i> . . . . .	37
II.4.4 Un modèle particulier pour les <i><math>p \delta - IMF</math></i> . . . . .	40
II.4.5 Critère de moyenne nulle pour les <i><math>H p \delta - IMF</math></i> . . . . .	41
II.4.6 Caractérisations des modes . . . . .	44
II.4.7 Quelques propriétés . . . . .	45
II.4.8 Exemple . . . . .	47
<b>II.5 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>49</b>
II.5.1 Condition de stabilité numérique . . . . .	50
II.5.2 Résultats numériques . . . . .	51
<b>II.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>59</b>

---

*Le but de ce premier chapitre est de donner une approche mathématique de la décomposition modale empirique (EMD) en proposant un modèle théorique validé par des simulations numériques. Nous proposons de remplacer les itérations du tamisage par la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP). Nous faisons une étude théorique et*

numérique complète d'une EDP particulière et proposons des caractérisations mathématiques des modes empiriques générés avec cette approche par EDP. Enfin, nous proposons un nouvel algorithme EMD qui est comparé à l'EMD classique.

## II.1 Introduction

LA décomposition modale empirique (EMD pour Empirical Mode Decomposition) suscite beaucoup d'intérêts depuis une dizaine d'années. Introduite par Huang et al. (1) pour mieux analyser des séries temporelles non stationnaires et issues ou non de systèmes non linéaires, sa compréhension ne repose, en grande partie, que sur des simulations numériques intensives. L'EMD est initialement défini juste par un algorithme et permet alors de décomposer un signal en composantes élémentaires, communément appelées modes empiriques ou fonctions intrinsèques (IMF pour Intrinsic Mode Functions). Les IMF sont des fonctions de moyenne nulle et modulées en amplitude et en fréquence. Ce sont des fonctions AM-FM monocomposantes, et sont extraites dans l'étape clé de l'algorithme EMD, le processus de tamisage (SP pour Sifting Process).

L'EMD considère le signal à traiter à l'échelle de ses oscillations locales. La décomposition est faite de manière locale et est entièrement pilotée par les données. C'est ce caractère auto adaptatif de la méthode qui en fait tout son intérêt. La décomposition ne repose sur aucun critère prédéfini, contrairement à une décomposition en ondelettes (WT) (10) ou les représentations temps-fréquence de la classe de Cohen (2) qui nécessitent une ondelette mère ou un noyau. L'EMD décompose ainsi tout signal en une somme d'IMF et d'un résidu, qui, par convention, représente la tendance globale du signal. Dans cette décomposition, les IMF sont générées de la plus haute fréquence à la plus basse fréquence, permettant ainsi une analyse fréquentielle des signaux. D'ailleurs, une combinaison de l'EMD avec la transformée de Hilbert ou le TKEO (cf. Définition IV.6) en fait un puissant outil d'analyse temps-fréquence des signaux (1 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 83).

Une critique majeure de la méthode EMD est l'absence de cadre théorique formel et rigoureux. Beaucoup de questions demeurent sans réponses concernant le comportement de la méthode, quand bien même elle a permis de résoudre de nombreux problèmes dans beaucoup de domaines scientifiques. En effet, l'EMD est appliquée avec succès dans de nombreux domaines allant du cadre scientifique pur, à l'ingénierie (6 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 84). De plus, beaucoup de simulations ont été faites pour une meilleure compréhension de la méthode (4 ; 19). On notera aussi qu'il y a eu quelques travaux relativement récents concernant son formalisme mathématique (voir par exemple (20 ; 21 ; 22 ; 23)). Nous y reviendrons dans la Section II.2

L'étape la plus importante dans l'EMD est le SP. C'est à ce stade de l'algorithme que les parties oscillantes du signal, les IMF, sont extraites. La définition de la *moyenne locale* d'un signal introduite dans (1) fait qu'il est difficile de faire une analyse mathématique rigoureuse et de coller un modèle théorique sur l'EMD. Nous verrons cette notion plus en détails dans la Section II.3. En effet, son calcul fait intervenir les enveloppes supérieures et inférieures du signal. Le problème est de savoir comment les calculer explicitement d'une manière telle qu'on puisse travailler dessus dans le SP. Nous verrons dans la Section II.2 que beaucoup de

types d'interpolations ont été utilisés pour estimer ces enveloppes, mais cela ne change en rien la modélisation explicite de ces dernières. Au contraire, celles-ci créent d'autres problèmes concernant les bords du signal et autres problèmes plus connus sous overshoots, undershoots, ... Les interpolations sont à la base des problèmes numériques inhérents au SP. Aussi, il faut noter que les interpolations, quelles qu'elles soient, ajoutent des données au signal. Le tamisage est un processus itératif; par conséquent, les erreurs créées avec les interpolations vont se cumuler au fur et à mesure de l'extraction des modes. Nous le verrons dans la Section II.5 consacrée aux résultats numériques. Un autre problème relatif à l'interpolation est que, selon le type d'interpolation, l'EMD peut donner des décompositions différentes. L'EMD est donc tributaire de l'interpolation sauf dans la version proposée dans (22). D'ailleurs, la plupart des versions en  $2D$  de l'EMD ne diffèrent les unes des autres que par les types d'interpolations utilisés (25 ; 27 ; 28). Le tamisage se réduit aux choix du type d'interpolation; nous en reparlerons dans le Chapitre III.

Nous signalons au passage que la méthode de décomposition de signaux, Intrinsic Time-Scale Decomposition, proposée par Frei et Osorio (85), résout les problèmes précités sur l'EMD et donne une meilleure analyse temps-fréquence que l'EMD, la transformée de Fourier ou la WT.

Dans ce travail, nous réécrivons de manière équivalente la définition de la *moyenne locale*. Pour ce faire, nous introduisons les opérateurs  $S_\delta$  et  $I_\delta$  pour calculer localement les enveloppes supérieures et inférieures, respectivement. Le but recherché avec cette nouvelle formulation de la moyenne locale est de pouvoir utiliser du calcul différentiel, et par suite, aboutir à une EDP à frontières libres qui approche les itérations du SP. Cela nous permet en outre d'introduire les notions de  $p\delta - IMF$  et de  $H p\delta - IMF$ , et que nous avons également proposées dans (55 ; 56).

Nous montrons l'existence et l'unicité de la solution pour un cas particulier de cette EDP. Avec cette approche, nous montrons que la condition de moyenne nulle pour une IMF peut être très finement approchée à un  $\epsilon$  près. Ce qui nous conduit à l'introduction des notions de  $\delta - IMF$ , initialement présentées dans (54 ; 55 ; 56) et approchant très bien les différentes composantes des signaux. Nous pouvons ainsi donner des caractérisations analytiques et des justifications théoriques des IMF qui, pour rappel, ne sont définies que de manière très intuitive.

Cette approche par EDP nous libère totalement des problèmes liés aux interpolations. En effet, on n'a plus besoin de calculer les enveloppes supérieures et inférieures. Cela est très important, car cette approche par EDP permet en plus de réduire considérablement le temps de calcul pour estimer les enveloppes, particulièrement, pour les espaces de dimension supérieure. Les résultats numériques sont montrés aussi bien pour l'EDP à frontières libres, que pour le modèle d'EDP particulier résultant. Dans les deux cas, notre approche par EDP améliore beaucoup l'EMD classique.

**Nota II.1.** *Par EMD classique, il faudra comprendre décomposition EMD pour laquelle le tamisage est basé sur l'estimation de la moyenne locale, obtenue par interpolations des enveloppes supérieures et des enveloppes inférieures.*

## II.2 Positionnement de notre travail

Dans cette section, nous exposons d'abord quelques travaux faits sur l'EMD, afin de bien positionner notre travail. Nous aborderons aussi bien ceux apportants des contributions numériques sur la compréhension ou l'amélioration de l'EMD classique, que de ceux basés sur une étude plus théorique.

Nous citons d'abord les importantes contributions apportées avec les travaux de Flandrin et Rilling (4) et Flandrin et Goncalves (4 ; 19). Il s'agissait d'étudier le comportement de l'EMD sur des processus stochastiques pour lesquels il y avait du bruit gaussien fractionnaire. En se basant sur des simulations numériques, l'analyse spectrale et les propriétés statistiques des modes obtenus, les auteurs montrent que l'EMD a un comportement de banc de filtres dyadiques et certaines propriétés similaires à la WT. Aussi, Flandrin et Goncalves (19) montrent que l'EMD peut être un moyen pour estimer l'exposant de Hurst.

L'EMD classique présente beaucoup de problèmes, comme l'ont d'ailleurs faits remarquer beaucoup d'auteurs (86 ; 87 ; 88 ; 9). Il y a notamment ceux liés à l'interpolation des enveloppes, les undershoots, overshoots, les problèmes concernant l'interpolation aux bords du signal, le critère d'arrêt du SP, l'échantillonnage, le mixage des modes (mode mixing) ... Tous les problèmes de l'EMD proviennent du fait que les IMF doivent être des signaux AM-FM monocomposants. Malheureusement, il s'avère que pour beaucoup de signaux, les critères que doivent remplir une IMF (cf. Définition II.1) sont insuffisants pour garantir la notion de signal AM-FM monocomposant. Beaucoup de travaux ont été menés en ce sens pour résoudre ces problèmes en améliorant l'EMD classique.

Huang et al. (86 ; 89) ont proposé une alternative aux problèmes de mixage des modes et à l'intermittence. Il y a aussi le travail proposé par Deering et Kaiser (90), utilisant un masque pour le signal.

Nous citons également l'apport du travail de Peng et al. (7). L'EMD classique y est améliorée à l'aide de paquets d'ondelettes utilisés comme pré-traitement du signal. On force ainsi les IMF obtenues à être nécessairement des signaux monocomposants.

Il y a aussi les travaux présentés par Xuang et al. (91), dans lequel les auteurs proposent une amélioration de l'EMD classique en choisissant un critère d'arrêt du SP basé sur la définition de largeur de bande d'un signal (voir par exemple (2)). Avec ce critère d'arrêt (91) obtiennent des IMF à bande étroite.

Weng et Barner (92) ont proposé quant à eux une reconstruction optimale des signaux basée sur les IMF. Pour cela, les auteurs ont minimisé l'erreur de reconstruction commise par rapport au MSE.

Nous citons enfin le travail de Rilling et al. (93) dans lequel les auteurs proposent une extension de l'EMD pour des signaux complexes.

La bibliographie est cependant moins importante en ce qui concerne une étude théorique de l'EMD. Chen et al. (94) ont proposé une étude de l'EMD avec les fonctions splines. Les auteurs utilisent les formulations des splines sur certains noeuds pour écrire l'interpolation des enveloppes.

Deléchelle et al. ont proposé une approche par EDP dans (20), afin d'estimer la moyenne locale. Deux EDP d'ordre 4 sont proposées. Les solutions des EDP représentent respectivement les enveloppes supérieures et inférieures. Le couple d'EDP qui y est proposé est de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial s^+}{\partial t} = -g^+ \left( \frac{\partial s_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 s^+}{\partial x^4} \\ \frac{\partial s^-}{\partial t} = -g^- \left( \frac{\partial s_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) \frac{\partial^4 s^-}{\partial x^4} \\ s(x, 0) = s_0 \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

$s_0$  étant le signal à traiter et  $g^\pm$  est une fonction positive. Typiquement, en suivant Deléchelle et al. (20), on a :

$$g^\pm = \frac{1}{3} \left[ \left| \text{sign} \left( \frac{\partial s_0}{\partial x} \right) \right| \pm \text{sign} \left( \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) + 1 \right]. \quad (\text{II.2})$$

Les solutions de ces EDP,  $s_\infty^+$  et  $s_\infty^-$ , sont respectivement l'enveloppe supérieure et l'enveloppe inférieure. On souligne qu'une preuve que ces EDP admettent des solutions n'a pas été établie. L'enveloppe moyenne étant estimée par la moyenne des deux.

Suivant toujours Deléchelle et al., deux autres EDP du même type sont également proposées, estimant directement cette enveloppe moyenne :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = - \left| \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right| \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} \\ s(x, 0) = s_0, \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

d'une part, et :

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial t} = - \left| \text{sign} \left( \frac{\partial^2 s_0}{\partial x^2} \right) \right| \frac{\partial^4 s}{\partial x^4} \\ s(x, 0) = s_0, \end{cases} \quad (\text{II.4})$$

d'autre part. Aucune étude théorique ou numérique n'est cependant faite. Les EDP sont définies de sorte que les solutions soient les points d'inflexion du signal (20). Pour toutes ces EDP proposées dans (20), il n'y a cependant pas de preuve qu'elles sont bien posées et qu'elles estiment réellement l'enveloppe moyenne. Aussi, aucun lien non plus n'est mis en évidence entre les itérations du SP et ces EDP. Leur approche est toutefois validée par des simulations pour l'EDP (II.1).

On peut également citer le travail Meigen et Perrier (22). Les auteurs y présentent une autre approche pour calculer l'enveloppe moyenne (cf. Équation II.8), basée cette fois sur l'interpolation avec des fonctions polynomiales cubiques continûment dérivables par morceaux. Par contre, la moyenne locale est obtenue en résolvant un problème de programmation quadratique. Les contraintes du système sont basées sur la symétrie des enveloppes imposée par les auteurs. Aussi, ils imposent que le nombre de maxima des enveloppes supérieures soit égal au nombre de minima des enveloppes inférieures. Il est également à souligner qu'on n'a pas besoin de critère d'arrêt pour le SP.

Nous citons pour terminer les travaux de Sharpley et Vatchev (21) et Vatchev et Sharpley (23), qui ont proposé une étude mathématique rigoureuse des *weak-IMF* (cf. Définition II.2). En se basant sur le nombre de passages par zéros et le nombre d'extréma d'une fonction, ils proposent une caractérisation des *weak-IMF* avec les systèmes de Sturn-Liouville.



Ils montrent alors qu'une weak-IMF est solution d'une équation différentielle ordinaire. Dans (21), les auteurs ont défini la notion de *Hilbert – IMF* pour que les *weak-IMF* aient un sens physique par rapport à la transformation d'Hilbert. On notera là encore qu'aucun lien n'est mis en évidence avec les itérations du SP qui permettent d'extraire les IMF.

Les modèles d'EDP que nous proposons sont à notre connaissance nouveaux, car ils sont les seuls à utiliser explicitement les itérations du SP afin d'en déduire des modèles théoriques. Nous les avons présentés dans (54 ; 55) et dans (56) pour une étude plus approfondie. Notre approche diffère des autres méthodes proposées jusque là sur de nombreux points, à savoir :

1. Nous ne détectons pas les extréma du signal.
2. Nous ne calculons pas l'enveloppe moyenne du signal par interpolations des extréma, comme cela est classiquement fait.
3. Nous proposons des formulations plus explicites des enveloppes supérieures et inférieures locales.
4. Nous proposons une formulation plus explicite de la moyenne locale.
5. Nous exploitons les itérations du SP pour en tirer ensuite une EDP, dont la résolution permet d'extraire les modes.
6. De plus, nous faisons une étude théorique complète de notre modèle et proposons des caractérisations analytiques des modes.

## II.3 La Décomposition modale empirique

Dans cette partie, nous rappelons le principe de l'EMD et les définitions associées. Nous terminons par l'algorithme EMD et discutons du critère d'arrêt du SP.

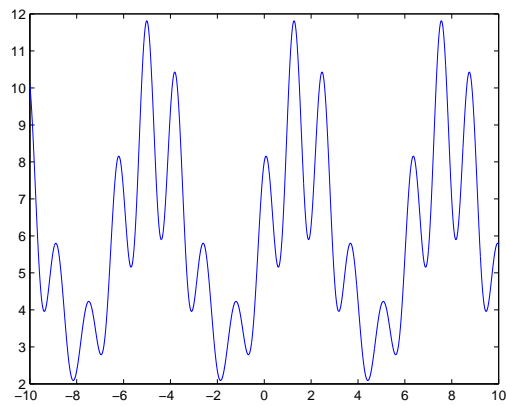
### II.3.1 Idée générale

Étant donné un signal  $S(x)$ , l'idée principale de l'EMD est de décomposer  $S(x)$  en composantes constituées d'oscillations rapides (hautes fréquences) qui s'atténuent progressivement vers les oscillations lentes (basses fréquences). Le signal  $S(x)$  est alors décomposé comme la somme des contributions hautes fréquences et basses fréquences.

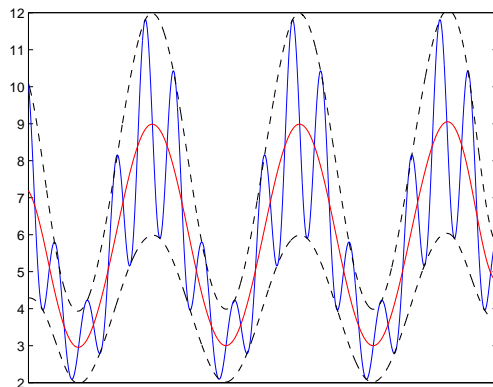
Pour illustrer la décomposition par EMD, on considère le signal  $S(x) = 2 \sin\left(\frac{20}{\pi}x\right) + 3 \sin\left(\frac{2}{\pi}x\right)$  représenté sur la Figure II.1. La décomposition de  $S(x)$  est représentée sur la Figure II.2. Les étapes permettant d'extraire ces contributions correspondent au tamisage (SP).

### II.3.2 Définitions usuelles et remarques importantes

La décomposition par EMD repose essentiellement sur l'extraction des IMF. La définition d'une IMF est cependant très intuitive et n'a pas de justification théorique. Elle s'appuie principalement sur les propriétés de signal AM-FM monocomposant :

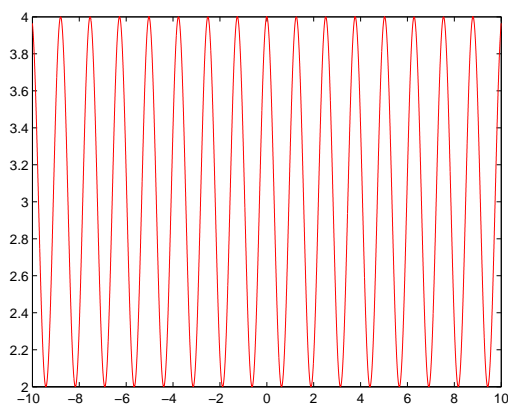


**Figure II.1:** Représentation du signal  $S$

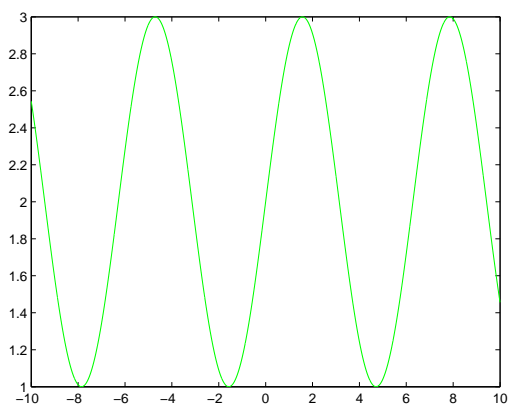


(a)

$$(a) = (b) + (c)$$



(b) Composante haute fréquence



(c) Composante basse fréquence

**Figure II.2:** Décomposition par EMD. (a) En bleu :  $S(x)$  (Fig. II.1), en pointillés noirs : enveloppes supérieures et inférieures interpolées, en rouge : estimation de la moyenne locale

**Définition II.1.** On dit qu'une fonction  $f$  est une IMF si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :

- (i) La moyenne locale (Équation II.8) de  $f$  est nulle
- (ii) Entre deux extréma consécutifs de  $f$ , il y a obligatoirement un passage par zéro de  $f$ .

**Remarque II.1.** La condition (ii) revient à dire que le nombre d'extréma de  $f$  et le nombre de passages par zéro doivent, au plus, être égaux à 1.

**Remarque II.2.** Nous ferons remarquer trois points essentiels concernant la définition d'une IMF :

1. La condition (i) est pour s'assurer que la fréquence instantanée (FI) n'inclue pas les fluctuations indésirables du signal, induites par les formes d'ondes asymétriques.
2. En suivant Huang et al. (1), la condition (ii) garantie alors le critère de bande étroite. En effet, (95) ont défini la largeur de bande d'un signal avec les moments  $m_k$  d'ordre  $k$  du spectre du signal. Le nombre de passages par zéro par unité de temps du signal est alors donné par :

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}}. \quad (\text{II.5})$$

Le nombre d'extréma du signal est calculé par :

$$N_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (\text{II.6})$$

La largeur de bande du signal, notée  $L$ , est finalement donnée par Rice (95) :

$$L = \pi \sqrt{N_1^2 - N_0^2} = \sqrt{\frac{m_4 m_0 - m_2^2}{m_2 m_0}}. \quad (\text{II.7})$$

3. Les deux conditions (i) et (ii) suffisent pour que la notion de FI ait un sens physique.

La notion de *weak-IMF* a été introduite par Sharpley et Vatchev (21), en relaxant la condition (i) de la Définition II.1. On a :

**Définition II.2.** Une fonction satisfaisant uniquement la condition (ii) de la Définition II.1 est appelée *weak-IMF*.

La notion de *weak-IMF* est bien étudiée dans (21 ; 23). En effet, les auteurs établissent un lien entre les *weak-IMF* et les systèmes de Strun-Liouville. On reviendra sur leurs travaux dans la Section II.2.

### II.3.3 Principe de l'EMD

L'EMD est initialement définie dans (1) comme étant un outil algorithmique. Étant donné un signal réel  $S(x)$ , l'EMD peut se résumer comme suit :

1. Trouver tous les extréma de  $S(x)$

2. Interpoler les maxima de  $S(x)$  (respectivement les minima de  $S(x)$ ),  $E_{max}(x)$  (respectivement  $E_{min}(x)$ )
3. Calculer la *moyenne locale* définie par :

$$m(x) = \frac{1}{2}(E_{max}(x) + E_{min}(x)) \quad (\text{II.8})$$

4. Extraire le détail  $d(x) = S(x) - m(x)$
5. Itérer le résidu  $m(x)$ .

En pratique, cette procédure est affinée avec une boucle itérant les étapes (1) jusqu'à (4), appelée tamisage. Donc, on itère sur le détail  $d(x)$  jusqu'à ce que la moyenne locale soit nulle, pour ainsi obtenir une IMF (cf. Définition II.1). Le signal  $S(x)$  est donc d'abord décomposé dans la boucle principale comme  $S(x) = d_1(x) + m_1(x)$ . Le premier résidu  $m_1(x)$  est ensuite décomposé comme  $m_1(x) = d_2(x) + m_2(x)$ , et ainsi de suite. Finalement, L'EMD décompose  $S(x)$  suivant :

$$S(x) = \sum_{k=1}^K d_k(x) + r(x), \quad (\text{II.9})$$

avec  $d_k$  représentant la  $k^{\text{ième}}$  IMF et  $r(x)$  le résidu. Par construction, le nombre d'extréma décroît progressivement d'un résidu à l'autre, garantissant que le nombre d'IMF total  $K$  est fini. Typiquement, la complexité pour arriver  $K$  IMF est  $O(\log_2 N)$  pour un signal de taille  $N$  (voir (19)).

Pour plus d'informations sur l'EMD ainsi que certaines implémentations, le lecteur pourra regarder les travaux proposés dans (1 ; 87 ; 8).

### II.3.4 Algorithme EMD

Le tamisage (SP) constitue l'étape la plus importante de l'EMD. Nous rappelons que c'est à ce stade que les IMF sont extraites. Il est important de noter qu'une condition d'arrêt est nécessaire pour arrêter le processus du tamisage (boucle  $i$ ). Une étape du SP pour le signal  $S(x)$  (cf. Figure II.1) est représentée sur la Figure II.2-(a).

Le pseudo-code est représenté sur le Tableau II.1 pour un signal discret  $S[n]$  de taille  $N$ . Un organigramme du pseudo-code est représenté sur la Figure II.3.

### II.3.5 Critères d'arrêt du SP

La condition d'arrêt est donnée avec le test sur  $SD(i)$  (standard deviation) (cf. Tableau II.1). Nous avons pris ici celle qui est donnée dans (1) pour le pseudo-code (Tableau II.1). On peut voir ce critère d'arrêt comme une mesure de l'erreur relative en norme  $L^2$  sur l'IMF $_j$ . Idéalement, on souhaiterait que cette erreur soit la plus petite possible. La valeur de  $\epsilon$  est choisie de manière empirique. Typiquement, Huang et al. (1 ; 89) ont suggéré de prendre une valeur comprise entre 0.2 et 0.3.

**Remarques II.1.** *Comme cela a été remarqué par Cexus (8), suivant les valeurs de  $\epsilon$ , on observe que :*

**Tableau II.1:** Pseudo-code de l'algorithme EMD

**Étape 1** Fixer  $\epsilon$

**Étape 2** Initialisations :  $j \leftarrow 1$  ( $j^{\text{ième}}$  IMF) et

$$r_{j-1}[n] \leftarrow S[n]$$

**Étape 3** Extraction de la  $j^{\text{ième}}$  IMF :

(a) Affectations :  $h_{j,i-1}[n] \leftarrow r_{j-1}[n]$ ,

$i \leftarrow 1$  ( $i$ , itération de la boucle de *sifting*)

(c) Calcul des enveloppes supérieures et inférieures,  $U_{j,i-1}[n]$  et

$L_{j,i-1}[n]$ , par interpolations des maxima locaux, respectivement

et des minima locaux de  $h_{j,i-1}[n]$

(d) Calcul de la moyenne local :  $m_{j,i-1}[n] = \frac{U_{j,i-1}[n] + L_{j,i-1}[n]}{2}$

(e) Mise à jour :  $h_{j,i}[n] \leftarrow h_{j,i-1}[n] - m_{j,i-1}[n]$  et  $i \leftarrow i + 1$

(f) Calcul du critère d'arrêt :  $SD(i) = \sum_{n=1}^N \frac{|h_{j,i-1}[n] - h_{j,i}[n]|^2}{|h_{j,i-1}[n]|^2}$

(g) Répétition des étapes (b) – (f) pour  $SD(i) < \epsilon$  et

affectation  $IMF_j \leftarrow h_{j,i}$

**Étape 4** Mise à jour du résidu :  $r_j[n] \leftarrow r_{j-1}[n] - IMF_j[n]$

**Étape 5** Répétition de l'étape 3 pour  $j \leftarrow j + 1$  jusqu'à obtenir

un nombre d'extréma de  $r_j[n] < 2$

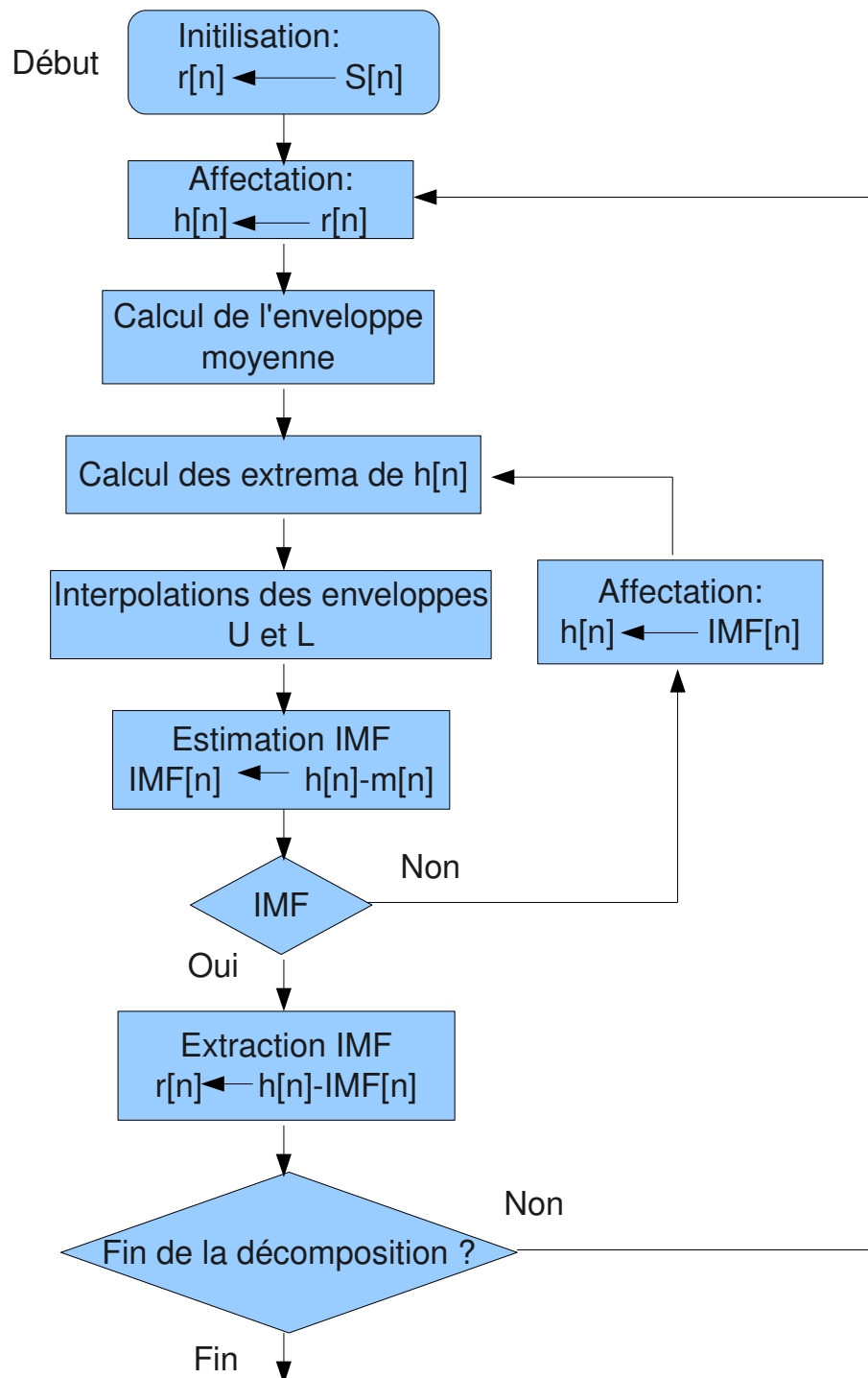


Figure II.3: Organigramme du pseudo-code de l'EMD (cf. Tableau II.1)

1. si  $\epsilon$  est trop grand, alors les modes ne sont pas bien séparés,
2. si  $\epsilon$  est très petit, alors on a une sur décomposition du signal avec des IMF à amplitude quasi constante, modulées par une unique fréquence.

Un autre critère d'arrêt est proposé dans (87). Il s'agit de la quantité :

$$\sigma(t) = \frac{|U_{j,i-1} + L_{j,i-1}|}{|U_{j,i-1} - L_{j,i-1}|}. \quad (\text{II.10})$$

Avec ce critère, il faut itérer jusqu'à obtenir  $\sigma(t) < \theta_1$  pendant  $(1 - \alpha)t$  et jusqu'à  $\sigma(t) < \theta_2$  pendant la durée restante, soit  $\alpha t$ . Les auteurs ont suggéré les valeurs suivantes pour  $\alpha$ ,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  :  $\alpha \approx 0.05$ ,  $\theta_1 \approx 0.05$  et  $\theta_2 \approx 10 \theta_1$ . Là encore, on a les mêmes remarques que celles évoquées précédemment (i.e Remarques II.1).

Dans (91), il y est proposé un critère d'arrêt totalement différent et basé sur la largeur de bande du signal. Pour plus d'information sur la notion de largeur de bande, voir (2 ; 3). Il nous semble que c'est ce critère d'arrêt qui reflète le plus l'idée de base de la décomposition par EMD. En effet, nous rappelons que les modes supposés être générés par l'EMD, doivent être des signaux AM-FM monocomposants, et donc à bande étroite (cf. point (ii) de la Définition II.1). Par conséquent, le fait de baser le critère d'arrêt là-dessus afin d'obtenir des fonctions à bande étroite, est tout à fait plausible. D'ailleurs, avec ce critère d'arrêt, la décomposition est nettement améliorée dans (91), en comparaison aux méthodes proposées dans (1 ; 87).

Nous introduisons notre modèle dans la section qui suit.

## II.4 Formulation par EDP du tamisage

Dans cette partie, nous commençons par construire une suite de fonctions représentant le SP. Nous définissons ensuite les opérateurs  $S_\delta$ ,  $I_\delta$  et  $m_\delta$  désignant respectivement les enveloppes supérieures et inférieures locales, et la moyenne locale. Grâce à une étude préliminaire dans laquelle des résultats mathématiques sont démontrés, nous lions les itérations du SP à une certaine EDP. L'existence et l'unicité des solutions de l'EDP sont également démontrées pour un cas particulier. Dans cette section, nous proposons aussi des caractérisations analytiques des modes et donnons des formulations plus explicites de leurs formes.

Nous avons présenté les principaux résultats de cette étude dans (54 ; 55 ; 56).

Dans tout ce qui va suivre, on désigne par  $S$  un signal continu,  $\Omega$  est le domaine de  $S$ . On suppose que  $\Omega$  est ouvert borné de  $\mathbb{R}$ .

### II.4.1 Construction de suites

Dans cette partie, nous construisons une suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour modéliser le SP. Nous rappelons que le processus du SP se déroule dans l'Étape 3 du Tableau II.1. La

construction des  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est basée sur les sous-étapes (d) et (e) (cf. Tableau II.1).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous notons par  $h_n^\wedge$  (respectivement  $h_n^\checkmark$ ) l'interpolée continue des maxima (respectivement des minima) de  $h_n$ .

On définit alors la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n - \frac{1}{2} (h_n^\wedge + h_n^\checkmark) \\ h_0 = S. \end{cases} \quad (\text{II.11})$$

Tout le SP est maintenant entièrement déterminé par la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ainsi définie (Équation II.11).

Notons par  $\Phi$  l'opérateur défini  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :

$$\Phi(h_n) = \frac{1}{2} (h_n^\wedge + h_n^\checkmark). \quad (\text{II.12})$$

Soit  $I_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'application identique. Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , (II.11) devient :

$$h_n = (I_d - \Phi)^n h_0. \quad (\text{II.13})$$

Désignons par  $f^n$  l'application définie pour tout  $n$  par :  $f^n := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$  et  $f^0 := I_d$ .

Posons  $\Psi = I_d - \Phi$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  (II.13) devient :

$$h_n = \Psi^n h_0. \quad (\text{II.14})$$

L'équation (II.14) montre que les IMF  $h_n$  obtenues pour un certain  $n$  (cf. Définition II.1) dépendent des interpolations utilisées pour la construction des enveloppes supérieures et inférieures ( $h_n^\wedge$  et  $h_n^\checkmark$  respectivement). L'EMD classique est donc totalement tributaire de l'interpolation. Ceci nous conduit à introduire les opérateurs  $S_\delta$ ,  $I_\delta$  et  $m_\delta$  qui calculent respectivement les enveloppes supérieures et inférieures locales, et la moyenne locale. Ces opérateurs présentent deux intérêts majeurs. D'abord, ils permettent d'éliminer la dépendance de l'EMD par rapport à l'interpolation. Ensuite, nous pourrons faire du calcul différentiel et prouverons alors que les itérations du SP pourront être approchées par la résolution de certaines EDP que nous préciserons.

## II.4.2 Étude préliminaire

Dans cette étude préliminaire, nous définissons les opérateurs  $S_\delta$ ,  $I_\delta$  et  $m_\delta$ . Nous aurons aussi besoin d'un certain nombre de résultats mathématiques que nous démontrons également.

### II.4.2.1 Définitions des opérateurs $S_\delta$ , $I_\delta$ et $m_\delta$

Soit  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction à valeurs réelles. Soit  $\delta > 0$ .

Dans cette étude, on aura besoin des opérateurs  $S_\delta$ ,  $I_\delta$  et  $m_\delta$  définis comme suit :



**Définition II.3.** Pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$ , on définit l'opérateur  $S_\delta$  de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  par :

$$S_\delta h(x) = \sup_{|y| \leq \delta} h(x+y), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{II.15})$$

**Définition II.4.** L'opérateur  $I_\delta$  est défini de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$  par :

$$I_\delta h(x) = \inf_{|y| \leq \delta} h(x+y), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{II.16})$$

Bien entendu, le sup et l'inf ci-dessus sont pris sur l'ensemble  $\{y \in \mathbb{R}, \text{ tels que } x+y \in \Omega, |y| < \delta\}$ .

**Définition II.5.** Soit l'opérateur  $m_\delta$  de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  défini pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$  par :

$$m_\delta h(x) = \frac{S_\delta h(x) + I_\delta h(x)}{2}, \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{II.17})$$

L'opérateur  $m_\delta$  ainsi défini (II.17) va remplacer la moyenne locale  $\Phi$  dans l'équation (II.13).

Les opérateurs sup et inf ont fait l'objet de nombreuses études. Voir par exemple dans (96).

Nous allons maintenant annoncer quelques résultats préliminaires dont nous nous servirons pour la suite.

#### II.4.2.2 Théorèmes

Nous utiliserons la norme usuelle  $\|\cdot\|_\infty$  définie par :

$$\|h\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |h(x)|, \quad (\text{II.18})$$

pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$ .

Un premier résultat préliminaire concerne la fonction  $S_\delta$  (cf. Définition II.3) et s'énonce comme suit :

**Théorème II.1.** Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $h'''$  soit bornée dans  $\Omega$ . Pour tout  $\delta > 0$  petit, le développement asymptotique de  $S_\delta$  est donné par :

$$S_\delta h(x) = h(x) + \sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty \quad (\text{II.19})$$

$$\forall x \in \Omega, \text{ où } F_{x,\delta}(z) = \delta z h'(x) + \frac{\delta^2}{2} z^2 h''(x).$$

De plus, on a

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)} & \text{si } |h'(x)| \leq \delta |h''(x)| \text{ et } h''(x) < 0 \\ \delta |h'(x)| + \frac{\delta^2}{2} h''(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.20})$$

**Preuve II.1.** Soit  $x \in \Omega$  et soit  $z \in \Omega$  tels que  $|z| < 1$  et  $x + \delta z \in \Omega$ . Comme  $h \in C^2(\Omega)$ , on peut écrire :

$$h(x + \delta z) = h(x) + \delta z h'(x) + \frac{\delta^2}{2} z^2 h''(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty, \quad (\text{II.21})$$

pour  $\delta$  petit.

Soit  $\epsilon > 0$ . Donc, pour  $\delta$  petit, on a :

$$-\epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty + h(x) + \delta z h'(x) + \frac{\delta^2}{2} z^2 h''(x) < h(x + \delta z) < h(x) + \delta z h'(x) + \frac{\delta^2}{2} z^2 h''(x) + \epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.22})$$

En prenant les bornes supérieures, il vient :

$$-\epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty + h(x) + \sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) \leq S_\delta h(x) \leq \sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + h(x) + \epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.23})$$

$x$  et  $\epsilon$  sont arbitrairement choisis. D'où,  $\forall x \in \Omega$ , on a :

$$S_\delta h(x) = h(x) + \sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.24})$$

Maintenant, nous allons explicitement calculer les valeurs de

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z). \quad (\text{II.25})$$

On a :

$$F_{x,\delta}(1) = \delta h'(x) + \frac{\delta^2}{2} h''(x) \quad (\text{II.26})$$

$$F_{x,\delta}(-1) = -\delta h'(x) + \frac{\delta^2}{2} h''(x). \quad (\text{II.27})$$

On considère les deux cas suivants :

- **cas 1** : Si  $h''(x) = 0$ .

Alors, on a :

$$F_{x,\delta}(z) = \delta h'(x) z. \quad (\text{II.28})$$

Ce qui entraîne alors que :

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \delta |h'(x)|. \quad (\text{II.29})$$

- **cas 2** : Si  $h''(x) \neq 0$ .

Désignons par  $F'_{x,\delta}$  la dérivée de  $F_\delta$  par rapport à  $z$ . On a alors :

$$F'_{x,\delta}(z) = \delta h'(x) + \delta^2 z h''(x). \quad (\text{II.30})$$

Il s'en suit alors que :

$$F'_{x,\delta}(z) = 0 \Leftrightarrow z = z_0 = -\frac{1}{\delta} \frac{h'(x)}{h''(x)}. \quad (\text{II.31})$$

On a :

$$F_{x,\delta}(z_0) = -\frac{1}{2} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)}, \quad (\text{II.32})$$

– Si  $|z_0| > 1$ , i.e  $|h'(x)| > \delta|h''(x)|$ . Alors :

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \max \{F_{x,\delta}(-1), F_{x,\delta}(1)\}. \quad (\text{II.33})$$

D'où :

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \delta|h'(x)| + \frac{\delta^2}{2} h''(x) \quad (\text{II.34})$$

– Si  $|z_0| \leq 1$ , i.e  $|h'(x)| \leq \delta|h''(x)|$ . Alors :

\* Si  $h''(x) > 0$ ,  $F_{x,\delta}$  est alors convexe, et par suite encore :

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \delta|h'(x)| + \frac{\delta^2}{2} h''(x) \quad (\text{II.35})$$

\* Si  $h''(x) < 0$ . Donc  $F_{x,\delta}$  est concave, et par suite :

$$\sup_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = F_{x,\delta}(z_0) = -\frac{1}{2} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)}. \quad (\text{II.36})$$

□

Le théorème suivant donne un résultat similaire pour  $I_\delta$  (cf. Définition II.4) :

**Théorème II.2.** Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $h'''$  soit bornée dans  $\Omega$ . Pour tout  $\delta > 0$  petit, le développement asymptotique de  $I_\delta$  est donné par :

$$I_\delta h(x) = h(x) + \inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty \quad (\text{II.37})$$

$\forall x \in \Omega$ , où on pose encore :  $F_{x,\delta}(z) = \delta z h'(x) + \frac{\delta^2}{2} z^2 h''(x)$ .

De plus, on a :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)} & \text{si } |h'(x)| \leq \delta|h''(x)| \text{ et } h''(x) > 0 \\ -\delta|h'(x)| + \frac{\delta^2}{2} h''(x) & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{II.38})$$

**Preuve II.2.** En se basant sur ce qui a été déjà fait dans la preuve du Théorème II.1, on montre facilement que :

$$-\epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty + h(x) + \inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) \leq I_\delta h(x) \leq \inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + h(x) + \epsilon \delta^3 \|h'''\|_\infty \quad (\text{II.39})$$

Il s'en suit que  $\forall x \in \Omega$  :

$$I_{x,\delta}h(x) = h(x) + \inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) + O(\delta^3)\|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.40})$$

On a les cas suivants :

- **cas 1'** : Si  $h''(x) = 0$ . Alors :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = -\delta|h'(x)|. \quad (\text{II.41})$$

- **cas 2'** : Si  $h''(x) \neq 0$ . Alors :

- Si  $|z_0| > 1$ . Par suite, on obtient :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = \min \{F_{x,\delta}(-1), F_{x,\delta}(1)\}. \quad (\text{II.42})$$

D'où :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = -\delta|h'(x)| + \frac{\delta^2}{2}h''(x). \quad (\text{II.43})$$

- Si  $|z_0| \leq 1$ , alors :

- \* Si  $h''(x) > 0$ .  $F_{x,\delta}$  est alors convexe, et donc :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = F_{x,\delta}(z_0) = -\frac{1}{2} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)}. \quad (\text{II.44})$$

- \* Si  $h''(x) < 0$ . Alors  $F_\delta$  est concave. D'où :

$$\inf_{|z| \leq 1} F_{x,\delta}(z) = -\delta|h'(x)| + \frac{\delta^2}{2}h''(x). \quad (\text{II.45})$$

□

Nous définissons les sous-ensembles de  $\Omega$  dépendants de  $h$  suivants :

$$\Omega_{h,1} = \{x \in \Omega \text{ tels que } h''(x) = 0\} \quad (\text{II.46})$$

$$\Omega_{h,2} = \{x \in \Omega \text{ tels que } h''(x) \neq 0 \text{ et } |h'(x)| > \delta|h''(x)|\} \quad (\text{II.47})$$

$$\Omega_{h,3} = \{x \in \Omega \text{ tels que } h''(x) \neq 0 \text{ et } |h'(x)| \leq \delta|h''(x)|\}. \quad (\text{II.48})$$

Grâce aux Théorèmes II.1 et II.2 déjà démontrés plus hauts, nous obtenons le résultat suivant pour  $m_\delta$  (cf. Définition II.5) :

**Théorème II.3.** Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $h'''$  soit bornée dans  $\Omega$ . Pour tout  $\delta > 0$  petit, le

développement asymptotique de  $m_\delta$  est donné par :

$$m_\delta h(x) = h(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty, \text{ si } x \in \Omega_{h,1} \quad (\text{II.49})$$

$$m_\delta h(x) = h(x) + \frac{\delta^2}{2} h''(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty, \text{ si } x \in \Omega_{h,2} \quad (\text{II.50})$$

$$m_\delta h(x) = h(x) - \frac{1}{4} \frac{[h'(x)]^2}{h''(x)} + \text{sign}(h''(x)) \frac{\delta}{2} |h'(x)| + \frac{\delta^2}{4} h''(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty, \text{ si } x \in \Omega_{h,3} \quad (\text{II.51})$$

**Preuve II.3.** Soit  $x \in \Omega$ . À l'aide des Théorèmes II.1 et II.2, on montre que :

- Si  $h''(x) = 0$ , alors :

$$m_\delta h(x) = h(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.52})$$

- Si  $h''(x) \neq 0$ . Alors :

- Si  $|z_0| > 1$ , alors quelle que soit la monotonie de  $h$ , on a :

$$m_\delta h(x) = h(x) + \frac{\delta^2}{2} h''(x) + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.53})$$

- Si  $|z_0| \leq 1$ , alors :

- \* Si  $h''(x) > 0$ . Alors  $F_\delta$  est convexe et par suite, on a :

$$m_\delta h(x) = h(x) + \frac{\delta}{2} |h'(x)| + \frac{\delta^2}{4} h''(x) - \frac{1}{4} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)} + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.54})$$

- \* Si  $h''(x) < 0$ .  $F_\delta$  est alors concave, et donc :

$$m_\delta h(x) = h(x) - \frac{\delta}{2} |h'(x)| + \frac{\delta^2}{4} h''(x) - \frac{1}{4} \frac{(h'(x))^2}{h''(x)} + O(\delta^3) \|h'''\|_\infty. \quad (\text{II.55})$$

□

Nous rappelons la suite  $(h_n)_n$  (cf. Équation II.13), où les  $h_n$  sont de potentielles IMF :

$$h_n = (I_d - \Phi)^n h_0.$$

Comme nous l'avons dit plus haut, l'idée principale est de remplacer  $\Phi$  dans (II.13) par  $m_\delta$ . Avec les résultats préliminaires obtenus dans ce paragraphe, nous proposons une formulation par EDP du SP. Cela nous permet ainsi d'introduire de nouvelles notions d'IMF ; ce que nous allons précisément examiner dans la partie qui va suivre.

**Nota II.2.** Le terme d'IMF « potentielle » fait ici référence à une candidate pour être une IMF au sens classique du terme. Une potentielle IMF devient alors une IMF classique si elle satisfait la Définition II.1.

### II.4.3 Notions de *potential* $\delta - IMF$

Dans cette partie, nous introduisons les concepts de *potential*  $\delta - IMF$ , que nous noterons désormais, pour simplifier, par  $p \delta - IMF$ . Pour cela, nous construisons la suite  $(\bar{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n$  par :

$$\begin{cases} \bar{h}_{n+1} = (I_d - m_\delta) \bar{h}_n \\ \bar{h}_0 = S, \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.56})$$

Nous voudrions maintenant appliquer le Théorème II.3 aux éléments  $\bar{h}_n$  de la suite (II.56). Cependant, les hypothèses faites dans le théorème sont entre autres une régularité  $C^3$ . Rigoureusement, il faudrait donc faire une régularisation après chaque itération de l'opérateur  $I_d - m_\delta$ . Si on désigne par  $\varrho*$  cette régularisation, alors le procédé correct devrait s'écrire :

$$\begin{cases} \bar{h}_{n+1} = (I_d - m_\delta) \varrho * \bar{h}_n \\ \bar{h}_0 = S, \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

Nous reviendrons sur ce point un peu plus loin.

Supposons les  $\bar{h}_n$  suffisamment régulières, alors en vertu du Théorème II.3, nous réécrivons (II.56). Ce qui donne :

– Si  $\bar{h}_n''(x) = 0$ , alors :

$$\bar{h}_{n+1}(x) = O(\delta^3) \|\bar{h}_n'''\|_\infty. \quad (\text{II.58})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) \neq 0$  et  $|\bar{h}_n'(x)| > \delta |\bar{h}_n''(x)|$ , alors :

$$\bar{h}_{n+1}(x) = -\frac{\delta^2}{2} \bar{h}_n''(x) + O(\delta^3) \|\bar{h}_n'''\|_\infty. \quad (\text{II.59})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) < 0$  et  $|\bar{h}_n'(x)| \leq \delta |\bar{h}_n''(x)|$ , alors :

$$\bar{h}_{n+1}(x) = -\frac{\delta^2}{4} \bar{h}_n''(x) + \frac{\delta}{2} |\bar{h}_n'(x)| + \frac{1}{4} \frac{[\bar{h}_n'(x)]^2}{\bar{h}_n''(x)} + O(\delta^3) \|\bar{h}_n'''\|_\infty. \quad (\text{II.60})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) > 0$  et  $|\bar{h}_n'(x)| \leq \delta \bar{h}_n''(x)$ , alors :

$$\bar{h}_{n+1}(x) = -\frac{\delta^2}{4} \bar{h}_n''(x) - \frac{\delta}{2} |\bar{h}_n'(x)| + \frac{1}{4} \frac{[\bar{h}_n'(x)]^2}{\bar{h}_n''(x)} + O(\delta^3) \|\bar{h}_n'''\|_\infty. \quad (\text{II.61})$$

Nous avons mentionné plus haut qu'il fallait une régularisation de la suite  $(\bar{h}_n)$ . Nous nous préoccupons plus des termes  $O(\delta^3)$  faisant intervenir les normes  $\|(\varrho * \bar{h}_n)'''\|_\infty$ . Pour cela, on supposera par exemple qu'après un prolongement en dehors de  $\Omega$ , que le procédé de régularisation se fait par une convolution  $\varrho(\cdot/\mu)$ , où  $\mu$  représente un paramètre petit. Il s'en suit alors que :

$$\|(\varrho(\cdot/\mu) * \bar{h}_n)'''\|_\infty \leq C \frac{1}{\mu^3} \|\bar{h}_n'''\|_\infty. \quad (\text{II.62})$$

On rappelle que les  $\bar{h}_n$  sont obtenus à la suite des itérations de l'opérateur  $I_d - m_\delta$  sur  $S$ .

Par suite, il vient :

$$\|(\varrho(\cdot/\mu) * \bar{h}_n)'''\|_\infty \leq C \frac{1}{\mu^3} \|S\|_\infty. \quad (\text{II.63})$$

Finalement, avec un certain abus d'écriture, on supposera dans les précédentes équations que :

$$O(\delta^3) \|\bar{h}_n'''\|_\infty = \frac{1}{\mu^3} O(\delta^3) \|S\|_\infty \quad (\text{II.64})$$

( $h$  dépendant du paramètre petit  $\mu$ ).

Soit  $\tau > 0$  fixé,  $\tau$  petit. On définit la fonction  $\tilde{h}$  pour tout  $x \in \Omega$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} \tilde{h} : \Omega \times \{\tau\mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, n\tau) \longmapsto \bar{h}_n(x) \end{cases} \quad (\text{II.65})$$

On considère une interpolée suffisamment régulière, que nous notons, par abus d'écriture, encore par  $\tilde{h}$ .

Avec un développement de Taylor, on obtient :

$$\bar{h}_{n+1}(x) = \tilde{h}(x, n\tau + \tau) = \tilde{h}(x, n\tau) + \tau \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) + o(\tau^2). \quad (\text{II.66})$$

Par suite, pour  $\tau = \delta^2$ , il vient alors que :

– Si  $\bar{h}_n''(x) = 0$ , alors :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) = -\frac{1}{\delta^2} \tilde{h}(x, n\tau) + O(\delta)/\mu^3. \quad (\text{II.67})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) \neq 0$  et  $|\bar{h}'_n(x)| > \delta |\bar{h}_n''(x)|$ , alors :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) = -\frac{1}{\delta^2} \tilde{h}(x, n\tau) - \frac{1}{2} \tilde{h}''(x, n\tau) + O(\delta)/\mu^3. \quad (\text{II.68})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) < 0$  et  $|\bar{h}'_n(x)| \leq \delta |\bar{h}_n''(x)|$ , alors :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) = -\frac{1}{\delta^2} \tilde{h}(x, n\tau) - \frac{1}{4} \tilde{h}''(x, n\tau) + \frac{1}{2\delta} |\tilde{h}'(x, n\tau)| + \frac{1}{4\delta^2} \frac{[\tilde{h}'(x, n\tau)]^2}{\tilde{h}''(x, n\tau)} + O(\delta)/\mu^3. \quad (\text{II.69})$$

– Si  $\bar{h}_n''(x) > 0$  et  $|\bar{h}'_n(x)| \leq \delta |\bar{h}_n''(x)|$ , alors :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) = -\frac{1}{\delta^2} \tilde{h}(x, n\tau) - \frac{1}{4} \tilde{h}''(x) - \frac{1}{2\delta} |\tilde{h}'(x, n\tau)| + \frac{1}{4\delta^2} \frac{[\tilde{h}'(x, n\tau)]^2}{\tilde{h}''(x, n\tau)} + O(\delta)/\mu^3. \quad (\text{II.70})$$

Les équations obtenues ci-dessus suggèrent donc naturellement l'introduction des sous-ensembles de  $\Omega$ , définis pour toute fonction fixée et suffisamment régulière  $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$h = h(x, t)$ , par :

$$\Omega_1(h) = \left\{ (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ tels que } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) = 0 \right\} \quad (\text{II.71})$$

$$\Omega_2(h) = \left\{ (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ tels que } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \neq 0 \text{ et } \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| > \delta \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \right\} \quad (\text{II.72})$$

$$\Omega_3(h) = \left\{ (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R} \text{ tels que } \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \neq 0 \text{ et } \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq \delta \left| \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x, t) \right| \right\} \quad (\text{II.73})$$

Ce qui nous conduit ainsi à la définition de  $p \delta - IMF$  :

**Définition II.6.** On dit qu'une fonction  $k$  est une  $p \delta - IMF$  si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} k : \quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto k(x) = h(x, t_0), \end{array} \right. \quad (\text{II.74})$$

pour un certain  $t_0 > 0$  et où  $h$  solution de l'EDP à frontières libres :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\delta^2} h = 0, \quad \text{sur } \Omega_1(h) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\delta^2} h + \frac{1}{2} h'' = 0, \quad \text{sur } \Omega_2(h) \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\delta^2} h + \frac{1}{4} h'' + \text{signe}(h'') \frac{1}{2\delta} |h'| + \frac{1}{4\delta^2} \frac{(h')^2}{h''} = 0, \quad \text{sur } \Omega_3(h) \\ h(x, 0) = S(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.75})$$

*signe* étant la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous aurons nécessairement besoin d'ajouter des conditions au niveau des bords  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ . Ces conditions dépendront donc du signal  $S$ . Si  $S = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on prendra alors des conditions de type Dirichlet. Par contre, si  $S' = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on prendra des conditions de type Neumann, ou plus généralement des conditions mixtes de type Robbin.

On remarquera qu'on peut obtenir  $h$  par :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2} t} H(x, t), \quad (\text{II.76})$$

où  $H$  est solution de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \quad \text{sur } \Omega_1(H) \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} H'' = 0, \quad \text{sur } \Omega_2(H) \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{4} H'' + \text{sign}(H'') \frac{1}{2\delta} |H'| + \frac{1}{4\delta^2} \frac{(H')^2}{H''} = 0, \quad \text{sur } \Omega_3(H) \\ H(x, 0) = S(x) \quad \forall x \in \Omega \end{array} \right. \quad (\text{II.77})$$

Dans ce qui suit, nous proposons une formulation particulière des  $p \delta - IMF$  en étudiant l'EDP



(II.75) pour un cas particulier.

#### II.4.4 Un modèle particulier pour les $p \delta - IMF$

Dans cette section, nous étudions un modèle particulier obtenu à partir de l'EDP (II.75). Plus précisément, on considère que la seconde équation est vérifiée dans tout le domaine. On montre que l'EDP qui en découle peut être formulée comme une équation de la chaleur rétrograde et admet une unique solution. Nous introduisons en conséquence les notions de *Heat  $p \delta - IMF$*  ( $H p \delta - IMF$ ) définies comme suit :

**Définition II.7.** *On dit qu'une fonction  $k$  est une  $H p \delta - IMF$  si et seulement si  $k$  est définie de la manière suivante :*

$$\begin{cases} k : & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & k(x) = h(x, t_0), \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

pour un certain  $t_0 > 0$  et où  $h$  est la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\delta^2} h + \frac{1}{2} h'' = 0, \text{ sur } \Omega \\ h(x, 0) = S(x) \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.79})$$

Nous aurons aussi besoin de conditions de bord comme on l'avait déjà évoqué un peu plus haut. On prendra des conditions de type Neumann ou Dirichlet.

Le théorème qui suit montre que l'EDP (II.79) admet une solution et que cette solution est unique :

**Théorème II.4.** *Soit  $S \in C^2(\Omega)$  à bande limitée<sup>1</sup> et associée à la décomposition en fonctions propres et en valeurs propres du Laplacien (avec des conditions de bord de type Dirichlet ou Neumann et même périodique). Alors, (II.79) admet une unique solution.*

**Preuve II.4.** *Soit  $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions propres du Laplacien et soit  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  la suite de valeurs propres associées aux  $u_j$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , avec des conditions de bord de type Dirichlet ou Neumann. Donc,  $\forall j \in \mathbb{N}$ , on a :*

$$u_j'' + \lambda_j u_j = 0 \text{ dans } \Omega \quad (\text{II.80})$$

On pourra remarquer qu'il est possible de trouver  $h$  par :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2} t} H(x, t), \quad (\text{II.81})$$

où  $H$  est la solution de l'EDP :

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} H'' = 0, \\ H(x, 0) = S(x) \forall x \in \Omega. \end{cases} \quad (\text{II.82})$$

---

<sup>1</sup>un signal à bande limitée est un signal à support fréquentiel borné

L'EDP (II.82) est l'équation de la chaleur avec un coefficient de diffusion négatif. C'est l'équation de la chaleur rétrograde.

Posons  $A_j = \int_{\Omega} u_j H dx$ . On cherche une solution de (II.82) sous la forme

$$H = \sum_j A_j u_j. \quad (\text{II.83})$$

Il s'en suit alors que :

$$\frac{\partial}{\partial t} A_j - \frac{\lambda_j}{2} A_j = 0. \quad (\text{II.84})$$

Par suite :

$$A_j = \exp\left(\frac{\lambda_j}{2} t\right) \int_{\Omega} S u_j dx \quad (\text{II.85})$$

On note par  $S_j$  les coefficients de la donnée initiale, c'est-à-dire le signal  $S$ , dans la base donnée par les fonctions propres du Laplacien. Il vient alors :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2} t} \sum_{j \in \mathbb{N}} e^{\frac{\lambda_j}{2} t} S_j u_j(x). \quad (\text{II.86})$$

De plus, on a supposé que  $S$  est à bande limitée, par conséquent, il existe un certain  $j_0 \in \mathbb{N}$  tel que :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2} t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2} t} S_j u_j(x), \quad (\text{II.87})$$

$h$  est donc bien définie.

On rappelle que la suite des valeurs propres tend vers  $\infty$ . Pour plus de détails, le lecteur peut voir par exemple les travaux de (97).

Donc, le fait d'avoir supposé  $S$  à spectre borné entraîne que la somme calculée plus haut est finie.  $\square$

Nous allons maintenant nous intéresser au critère de moyenne nulle nécessaire pour obtenir une IMF (cf. Définition II.1) en proposant une preuve théorique pour cette dernière. Nous établissons de la sorte une relation entre les IMF classiques et les  $p \delta - IMF$  introduites plus haut.

#### II.4.5 Critère de moyenne nulle pour les $H p \delta - IMF$

D'après la Définition II.1, une IMF potentielle,  $\tilde{h}_n$  pour un certain  $n$ , doit remplir la condition de moyenne locale nulle pour être une IMF. C'est donc un point très important dans l'EMD. Il n'y a cependant, à notre connaissance, pas de preuve analytique de cette condition. C'est en grande partie dû au fait qu'il n'y a pas de modélisation explicite de la moyenne locale. D'ailleurs, ce critère n'est pas tenu en considération dans (20 ; 21 ; 22 ; 23).

Nous avons vu au Paragraphe II.4.3 qu'une IMF potentielle pouvait être approchée avec une  $p \delta - IMF$  pour un certain  $t$ . Nous montrons dans cette partie que cette condition de moyenne nulle peut être très finement approchée avec les  $H p \delta - IMF$  pour une valeur

adéquate de  $t$ . Ce résultat est énoncé avec la proposition suivante :

**Proposition II.1.** *Soit  $h$  solution de l'équation (II.79) avec des conditions de bord de type Neumann ou Dirichlet et même périodique. On suppose que  $h$  est à bande limitée comme pour le résultat d'existence démontré plus haut. Alors  $\forall \epsilon > 0, \exists T > 0, T$  dépendant de  $\epsilon$ , tel que  $\forall t > T$ , on ait :*

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx < \epsilon \quad (\text{II.88})$$

**Preuve II.5.** • On fait d'abord la preuve pour des conditions de bord de type Neumann. En prenant l'intégrale de (II.79) par rapport à la variable  $x \in \Omega$  et en utilisant la formule de Green, on obtient :

$$\partial_t \int_{\Omega} h(x, t) dx + \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} h(x, t) dx = 0. \quad (\text{II.89})$$

Par suite, du fait qu'on a supposé que  $S \in L^2(\Omega)$ , on a alors :

$$\forall t, \int_{\Omega} h(x, t) dx = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \int_{\Omega} S(x) dx \leq e^{-\frac{1}{\delta^2}t} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|S\|_{L^2(\Omega)}, \quad (\text{II.90})$$

Il est à remarquer que nous n'avons pas utilisé le fait que  $S$  soit à bande limitée pour obtenir la majoration. C'est juste un argument formel. Nous utilisons maintenant la formule explicite démontrée dans le Théorème II.4 :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j u_j(x), \quad (\text{II.91})$$

où les  $u_j$  représentent les fonctions propres normalisées du Laplacien avec des conditions de bord de type Neumann sur  $\Omega = (0, L)$ . En suivant Pinchover (98), on a alors :

$$u_n(x) = \frac{1}{C_n} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n = 0, 1, \dots \quad (\text{II.92})$$

avec  $C_n$  étant une constante de normalisation. Comme  $\int_{\Omega} u_n(x) dx = 0$  sauf pour  $n = 0$ , on déduit alors que :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \int_{\Omega} S_0 u_0(x) dx. \quad (\text{II.93})$$

Dans notre cas, on a  $u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$  et  $S_0 = \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L S(x) dx$ .

D'où, on a finalement que :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \int_0^L S(x) dx. \quad (\text{II.94})$$

Ce qui achève la preuve pour le cas Neumann.

Ce que nous venons de faire n'est plus valable pour des conditions de bord de type Dirichlet. Nous considérons alors à nouveau la formule explicite (II.91) et intégrons par

rapport à  $x \in \Omega$ . En supposant toujours que  $\Omega = (0, L)$ , on a alors :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j \int_{\Omega} u_j(x) dx. \quad (\text{II.95})$$

• Pour des conditions de bord de type Dirichlet, les fonctions propres non normalisées ainsi que les valeurs propres du Laplacien sont données dans (98). On a alors :

$$v_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}, \lambda_n = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, n = 1, 2, \dots \quad (\text{II.96})$$

Si on pose  $C_n = \|v_n\|_{L^2}$ , les fonctions propres normalisées sont alors données par :

$$u_n(x) = \frac{1}{C_n} \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (\text{II.97})$$

En calculant explicitement les  $C_n$ , on trouve :

$$C_n^2 = \int_{\Omega} \sin^2 \frac{n\pi x}{L} dx = L \int_0^1 \sin^2(n\pi x) dx = L \int_0^1 \frac{1 - \cos(2n\pi x)}{2} dx = \frac{L}{2}. \quad (\text{II.98})$$

On peut alors calculer l'intégrale des  $u_n$  avec les  $C_n$  trouvés précédemment. Il s'en suit donc que :

$$\int_{\Omega} u_n(x) dx = \frac{L}{C_n} \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi} = \sqrt{2L} \frac{[1 - (-1)^n]}{n\pi}. \quad (\text{II.99})$$

On obtient finalement que :

$$\int_{\Omega} u_n(x) dx = 0 \text{ si } n \text{ est pair, } \frac{2\sqrt{2L}}{n\pi} \text{ autrement.} \quad (\text{II.100})$$

D'où :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = \frac{2\sqrt{2L}}{\pi} e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0, j \text{ impair}} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} \frac{S_j}{j}. \quad (\text{II.101})$$

En particulier, si le signal initial  $S$  n'a que des éléments pairs, alors sa moyenne est nulle. Sinon, on a une majoration grossière de sa borne supérieure, donnée par :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx \leq C \frac{2\sqrt{2L}}{\pi} e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \|S\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\frac{\lambda_{j_0}}{2}t}. \quad (\text{II.102})$$

Un choix de  $\delta$  tel que  $\delta^2 < \frac{2}{\lambda_{j_0}}$  achève la preuve du cas de Dirichlet.

• Cas périodique :

Dans ce cas, les fonctions propres sont les exponentielles complexes et les coefficients de  $S$  dans cette base sont les coefficients de Fourier. La formule explicite (II.87) devient alors :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{|i| \leq i_0} e^{\frac{i^2}{2}t} S_j e^{-ijx}. \quad (\text{II.103})$$

En prenant l'intégrale, il s'en suit alors :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h(x, t) dx &\leq \left| \int_{\Omega} h(x, t) dx \right| \leq e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{|i| \leq i_0} e^{\frac{i^2}{2}t} \frac{S_i}{i} |\Omega| \\ &\leq C' |\Omega| e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \|S\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{\frac{i_0^2}{2}t}, \end{aligned} \quad (\text{II.104})$$

$C'$  étant une constante. La preuve s'achève en prenant des valeurs de  $\delta$  telles que  $\delta < \frac{\sqrt{2}}{i_0}$   $\square$

**Remarque II.3.** La Proposition II.1 montre que si  $h$  est solution de (II.79), alors on peut choisir sa moyenne aussi petite que possible en prenant un  $t$  grand et  $\delta$  suffisamment petit.

La précédente preuve peut être adaptée à plusieurs autres types de conditions de bord. Il peut cependant être intéressant de regarder un autre type d'argument formel afin de voir là où se trouvent les problèmes.

On considère une fonction positive et régulière  $\phi^\mu = \phi^\mu(x)$  sur  $\Omega = (0, L)$ ,  $\mu$  dépendant d'un petit paramètre et  $\mu \ll L$ , telle que  $\phi^\mu = 0$  sur  $(0, \frac{\mu}{100})$ ,  $\phi^\mu = 0$  sur  $(L - \frac{\mu}{100}, L)$  et  $\phi^\mu = 1$  sur  $(\frac{\mu}{50}, L - \frac{\mu}{50})$ .

En appliquant deux fois la formule de Green, on a :

$$\partial_t \int_{\Omega} (\phi^\mu h) dx + \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} (\phi^\mu h) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\phi^\mu)'' h dx = 0. \quad (\text{II.105})$$

Par une approximation très grossière, on peut obtenir :

$$\partial_t \int_{\Omega} (\phi^\mu h) dx + \frac{1}{\delta^2} \int_{\Omega} \phi^\mu h dx \simeq 0. \quad (\text{II.106})$$

D'où :

$$\int_{\Omega} (\phi^\mu h) dx \simeq e^{-\frac{t}{\delta^2}} \int_{\Omega} \phi^\mu S(x) dx \quad (\text{II.107})$$

On obtient à nouveau la condition de moyenne nulle en évitant les bords où certains problèmes pourraient se révéler à cause de probables irrégularités de  $h$ .

Nous donnons à présent des caractérisations analytiques des IMF dans ce qui suit.

## II.4.6 Caractérisations des modes

Dans cette partie, nous donnons des définitions explicites des modes avec l'introduction de nouvelles notions que nous définissons ci-après. Nous rappelons que bien qu'elle est un sens physique (cf. Remarque II.2), la définition d'une IMF (cf. Définition II.1) est très intuitive et ne repose, à notre connaissance, sur aucun critère analytique. La définition d'une *weak*-IMF (cf. Définition II.2) l'est tout autant, cependant, les travaux proposés dans (21 ; 23) ont réellement contribué à une analyse mathématique.

Grâce à la Proposition II.1, nous pouvons introduire les caractérisations mathématiques des modes. La définition a bien un sens au vu des résultats précédents :

**Définition II.8.** On dit qu'une fonction  $\bar{h} = \bar{h}(x)$  est une  $\delta^\epsilon$ -IMF s'il existe une fonction  $h = h(x, t)$  solution de (II.79) et un  $t_0 > 0$  tels que :

$$\bar{h}(x) = h(x, t_0) \quad (\text{II.108})$$

et

$$\int_{\Omega} h(x, t_0) dx < \varepsilon. \quad (\text{II.109})$$

On définit aussi la notion de  $\delta$ -IMF et qui ressemble plus à la notion d'IMF que nous connaissons (cf. Définition II.1) :

**Définition II.9.** On dit qu'une fonction  $h$  est une  $\delta$ -IMF si et seulement si :

1.  $h$  est une solution de l'EDP (II.79)
2.  $h(\cdot, T)$  est une fonction à moyenne nulle pour une certaine valeur de  $T$ .

En pratique, on choisit la première valeur de  $t$  pour laquelle on a une moyenne très proche de 0. En effet, à cause de l'exponentielle (Équation (II.87)), on décroît très vite vers 0 et dans ce cas, on pourrait avoir des amplitudes trop faibles.

**Remarque II.4.** Les  $\delta$ -IMF sont extraites avec une erreur de l'ordre de  $o(1)$ , ce qui est relativement faible.

Une fois qu'on a extrait le premier mode,  $\delta$ -IMF<sub>1</sub>, en résolvant l'EDP (II.79), on résout à nouveau (II.79) en prenant comme condition initiale le résidu entre le signal  $S$  et  $\delta$ -IMF<sub>1</sub>. Cela permet d'extraire  $\delta$ -IMF<sub>2</sub>, et ainsi de suite. Finalement, le signal sera décomposé comme étant la somme des  $\delta$ -IMF et d'un éventuel résidu.

**Définition II.10.** On appelle  $\delta$ -EMD la décomposition pour laquelle on extrait les  $\delta$ -IMF suivant (II.79).

## II.4.7 Quelques propriétés

Dans cette partie, nous donnons quelques propriétés relatives au modèle d'EDP parabolique étudié plus haut.

### II.4.7.1 Linéarité

Considérons le signal  $S(x) = S_1(x) + S_2(x)$  défini sur  $\Omega$ . Posons :

$$S_j = S_{1,j} + S_{2,j}; \text{ avec } S_{1,j} = \int_{\Omega} S_1 u_j dx \text{ et } S_{2,j} u_j = \int_{\Omega} S_2 u_j dx, \quad (\text{II.110})$$

où  $u_j$  est la solution de  $u_j'' + \lambda_j u_j = 0$  dans  $\Omega$ . Avec la solution explicite (II.87), on a :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j u_j(x) \quad (\text{II.111})$$

$$= e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_{1,j} u_j(x) + e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_{2,j} u_j(x). \quad (\text{II.112})$$

D'où la linéarité.

#### II.4.7.2 Offset

On considère le signal  $S(x) + c$ , où  $S$  est défini sur  $\Omega$  et  $c$  est une constante dans  $\mathbb{R}$ .

On a vu dans la section II.4.5 que la solution explicite de l'EDP (II.79) est donnée par :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j u_j(x). \quad (\text{II.113})$$

Les coefficients de la donnée initiale par rapport à la base des fonctions propres du Laplacien sont donnés par :

$$S_j = \int_{\Omega} (S + c) u_j dx = \int_{\Omega} S u_j dx + c \int_{\Omega} u_j dx. \quad (\text{II.114})$$

D'où :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j u_j(x) + c e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} u_j(x) \int_{\Omega} u_j dx. \quad (\text{II.115})$$

Nous examinons maintenant cette dernière équation selon qu'on a des conditions de bord de type Neumann ou Dirichlet.

– **Cas Neumann :**

On avait par ailleurs montré à la section II.4.5 que :  $\int_{\Omega} u_n(x) dx = 0$  sauf pour  $n = 0$ .  
On obtient donc finalement que :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \frac{1}{L} \int_0^L (S(x) + c) dx. \quad (\text{II.116})$$

La première  $\delta - IMF$  est obtenue pour des valeurs adéquates de  $\delta$  and  $t$ , *i.e.* pour lesquelles l'intégrale ci-dessus est nulle (cf. Définition II.9). Ce qui entraîne alors la nullité du terme avec la constante  $c$ .

– **Cas Dirichlet :**

En se basant sur qui a été fait dans la partie II.4.5, nous pouvons alors écrire :

$$\int_{\Omega} h(x, t) = \frac{2\sqrt{2L}}{\pi} e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0, j \text{ impair}} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} \frac{S_j}{j} + \frac{2\sqrt{2L}}{\pi} e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0, j \text{ impair}} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} c \int_{\Omega} u_j dx \quad (\text{II.117})$$

$$= \frac{2\sqrt{2L}}{\pi} e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0, j \text{ impair}} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} \left( \frac{S_j}{j} + 2\sqrt{2L}c \right). \quad (\text{II.118})$$

La décomposition est donc indépendante de l'offset.

### II.4.7.3 Translation

Soit  $S(x)$  défini sur  $\Omega = [0, L]$ . On considère maintenant le signal  $S(x+a)$ , avec  $a \in \Omega$  et  $a \ll L$ . Les coefficients de  $S$  sont alors donnés par :

$$S_j = \int_{\Omega} S u_j dx = \int_a^{L+a} S(x) u_j(x-a) dx \quad (\text{II.119})$$

$$= \int_a^{L\left(1+\frac{a}{L}\right)} S(x) u_j(x-a) dx \simeq \int_{\Omega} S(x) u_j(x) dx, \quad (\text{II.120})$$

avec  $u_j$  solution de  $u_j'' + \lambda_j u_j = 0$  dans  $\Omega$ . D'où :

$$h(x, t) = e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} S_j u_j(x). \quad (\text{II.121})$$

On obtient donc la même décomposition pour une faible translation du signal.

### II.4.7.4 Compression, dilatation

Soit  $S(x)$  défini sur  $\Omega = [0, L]$ .

Considérons le signal  $S\left(\frac{x}{\alpha}\right)$  où  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ . Ses coefficients dans la base des fonctions propres sont alors donnés par :

$$S_j = \int_{\Omega} S\left(\frac{x}{\alpha}\right) u_j(x) dx = \alpha \int_0^{L/\alpha} S(x) u_j(\alpha x) dx, \quad (\text{II.122})$$

les  $u_j$  étant solution de  $u_j''(x) + \lambda_j u_j(x) = 0$  dans  $\Omega$ . D'où :

$$h(x, t) = \alpha e^{-\frac{1}{\delta^2}t} \sum_{j \leq j_0} e^{\frac{\lambda_j}{2}t} \left( \int_0^{L/\alpha} S(x) u_j(\alpha x) dx \right) u_j(x). \quad (\text{II.123})$$



### II.4.8 Exemple

Nous commençons par faire une remarque importante qui nous permettra de calculer plus simplement les modes :

**Remarque II.5.** *A supposer qu'on cherche les solutions de (II.79) sous la forme :*

$$h(x, t) = h(x)\varphi(t), \quad (\text{II.124})$$

*telle que  $h$  soit une fonction propre du laplacien associée à la valeur propre  $\lambda$  i.e  $h'' + \lambda h = 0$ , avec toujours des conditions de bords de type Dirichlet. En remplaçant  $h(x, t)$  (Équation II.124) dans (II.79), il vient :*

$$h(x) \left[ \varphi'(t) + \frac{1}{\delta^2} \varphi(t) - \frac{\lambda}{2} \varphi(t) \right] = 0. \quad (\text{II.125})$$

*En supposant que  $h$  ne soit pas la solution triviale (pas beaucoup d'intérêts) (i.e  $h \neq 0$ ), alors on a :*

$$\varphi(t) = \varphi(0) \exp \left( -\left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{\lambda}{2} \right) t \right), \quad (\text{II.126})$$

*avec  $\varphi(0) = \frac{S(x)}{h(x)}$ . D'où :*

$$h(x, t) = S(x) \exp \left( -\left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{\lambda}{2} \right) t \right), \quad (\text{II.127})$$

*où les valeurs de  $h$  non normalisées et de  $\lambda$  sont données par (98) :*

$$\begin{cases} \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}; & n = 1, 2, \dots \\ h(x) = \sin \left( \frac{n \pi x}{L} \right); & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (\text{II.128})$$

*avec  $x \in \Omega = (0, L)$ .*

*Cette dernière équation de  $h(x, t)$  montre que la valeur de  $\delta$  doit être choisie avec beaucoup de précautions.*

*Si  $S$  s'écrit sous la forme :*

$$S = \sum_n S_n, \quad (\text{II.129})$$

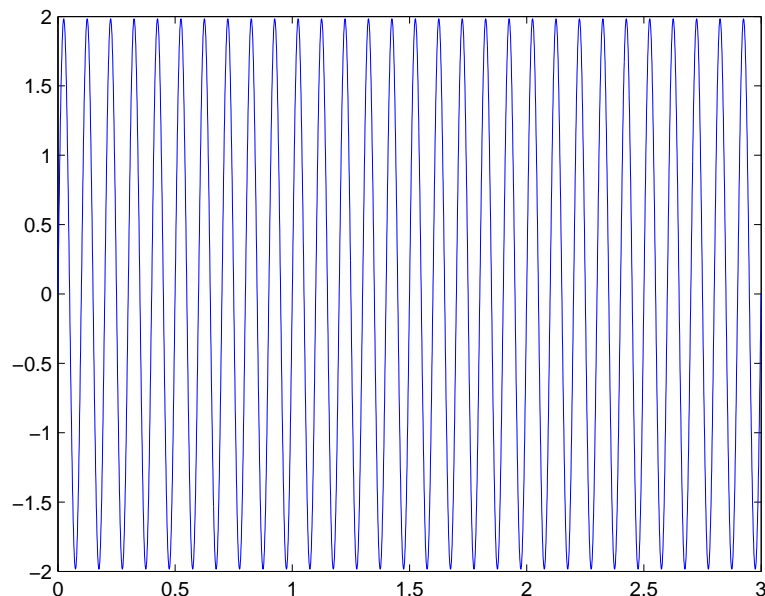
*où les  $S_n$  sont les fonction propres associées aux valeurs propres  $\lambda_n$ , alors on a :*

$$h(x, t) = \sum_n S_n(x) \exp \left( -\left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{\lambda_n}{2} \right) t \right). \quad (\text{II.130})$$

Dans l'exemple qui suit, nous allons déterminer la forme explicite de  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> :

**Exemple II.1.** *Considérons le signal  $S$  défini sur  $\Omega = [0, 3]$  par :*

$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \quad (\text{II.131})$$



**Figure II.4:** Premier mode obtenu avec la formule explicite (II.134) pour  $T = 0.2$  et  $\delta = 0.223$

$$S_1(x) = 2 \sin \left( 2\pi \cdot \frac{10}{\pi^2} x \right) \quad (\text{II.132})$$

$$S_2(x) = 3 \sin \left( 2\pi \cdot \frac{1}{\pi^2} x \right). \quad (\text{II.133})$$

Avec la Remarque II.5, on obtient grâce à l'Équation (II.87), que :

$$h(x, t) = S_1(x) \exp \left( -\left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{200}{\pi^2} \right) t \right) + S_2(x) \exp \left( -\left( \frac{1}{\delta^2} - \frac{2}{\pi^2} \right) t \right). \quad (\text{II.134})$$

$\delta$ -IMF<sub>1</sub> est donnée de manière explicite par  $h(x, T)$  (Équation II.134), en choisissant les valeurs adéquates de  $T$  et  $\delta$ . Pour cet exemple, on a numériquement trouvé les valeurs de  $t$  et  $\delta$  pour lesquelles l'intégrale de  $h$  (Éq. II.134) est nulle :  $T = 0.2$  et  $\delta = 0.223$ . Le mode est représenté sur la Figure II.4.

Nous verrons dans la section II.5 qu'on aboutit au même résultat pour l'extraction de  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> avec l'implémentation des EDP (II.75) et (II.79). La condition initiale étant le signal  $h_0$  (II.131).

Dans la partie qui suit, on s'intéresse aux résultats numériques obtenus avec la  $\delta$ -EMD. Les résultats obtenus sont comparés à l'EMD classique.

## II.5 Résultats numériques

Les EDP (II.75) et (II.79) sont résolues numériquement avec des schémas explicites. Dans cette partie, nous examinons d'abord les conditions de stabilité numérique de (II.79) avant d'examiner les résultats des implémentations.

**Remarque II.6.** *Le « vrai » modèle est l'EDP à frontières libres (II.75) dont on ne connaît pas explicitement une solution. Une résolution numérique est alors une alternative afin d'en approcher une solution. L'EDP (II.79) étant une partie de (II.75), on a alors également résolu numériquement le modèle particulier (II.79). En réalité, l'EDP (II.79) aurait pu être résolue explicitement, en utilisant simplement la formule explicite (II.87). Il aurait alors fallu calculer les coefficients  $S_j$ , en utilisant une DFT ou une transformée de Fourier à court terme, par exemple ; on aurait alors la solution exacte à l'approximation DFT près.*

### II.5.1 Condition de stabilité numérique

L'EDP (II.79) est implémentée avec un schéma explicite :

$$h^{n+1} = h^n + \Delta t \cdot F^n(h^n). \quad (\text{II.135})$$

La stabilité du schéma numérique est donnée par la proposition suivante :

**Proposition II.2.** *Le schéma explicite (II.135) est stable pour la norme  $L^2(\Omega)$  avec la condition CFL <sup>2</sup> :*

$$\Delta t \leq 2\delta^2 \leq \Delta x^2. \quad (\text{II.136})$$

**Preuve II.6.** *Grâce à l'équation (II.135), on montre que :*

$$h^{n+1}(x) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\delta^2} + \frac{\Delta t}{\Delta x^2}\right) h^n(x) - \frac{\Delta t}{2\Delta x^2} (h^n(x + \Delta x) + h^n(x - \Delta x)). \quad (\text{II.137})$$

Notons par  $\hat{h}^{n+1}$ , la transformée de Fourier (TF) de  $h^{n+1}$ .

En appliquant la TF à (II.137), on obtient  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$\hat{h}^{n+1}(k) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\delta^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k\pi\Delta x)\right) \hat{h}^n(k). \quad (\text{II.138})$$

Posons  $\forall k \in \mathbb{Z}$  :

$$A(k) = 1 - \frac{\Delta t}{\delta^2} + \frac{2\Delta t}{\Delta x^2} \sin^2(k\pi\Delta x). \quad (\text{II.139})$$

Donc  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , on a :

$$\hat{h}^n(k) = A(k) \cdot \hat{h}^0(k) \quad (\text{II.140})$$

Pour la condition CFL (II.136), il en résulte  $\forall k \in \mathbb{Z}$ , que :

$$|A(k)| \leq 1. \quad (\text{II.141})$$

---

<sup>2</sup>Acronyme de Courant, Friedrichs et Lewy, qui ont établi en 1928 une condition de stabilité des schémas numériques

En suivant Allaire (99), la condition de stabilité de Von Neumann est alors vérifiée avec les équations (II.140) et (II.141).

Avec la formule de Plancherel, on a  $\forall n$  :

$$\|h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |h^n|^2 \quad (\text{II.142})$$

$$= \sum_k |\hat{h}^n(k)|^2 \quad (\text{II.143})$$

$$\leq \sum_k |\hat{h}^0(k)|^2 = \int_{\Omega} |h^0|^2. \quad (\text{II.144})$$

D'où,  $\forall n$  :

$$\|h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|h^0\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (\text{II.145})$$

□

## II.5.2 Résultats numériques

Nous montrons dans cette partie les résultats de l'implémentation de (II.79). Le pas de temps est choisi par rapport à la condition CFL (II.136). Nous avons pris le pas de discrétisation en espace au plus égal au pas d'échantillonnage des signaux à traiter.

Afin de mieux analyser les performances de la  $\delta$ -EMD, nous la comparons à l'EMD classique. Plus précisément, nous comparons les  $\delta$ -IMF aux IMF classiques. Nous utilisons à cet effet les codes disponibles dans (100). Nous avons également implémenté l'EDP à frontières libres (II.75). Pour ce faire et afin de pouvoir calculer numériquement  $h$  dans le domaine  $\Omega_1(h)$ , nous avons utilisé la fonction  $\varphi_\epsilon$  définie par :

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq \epsilon \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II.146})$$

$$\quad (\text{II.147})$$

pour un  $\epsilon > 0$  petit.

### II.5.2.1 Signaux stationnaires

On considère d'abord le signal défini sur  $\Omega = [0, 10]$ , par :

$$S = S_1 + S_2 \quad (\text{II.148})$$

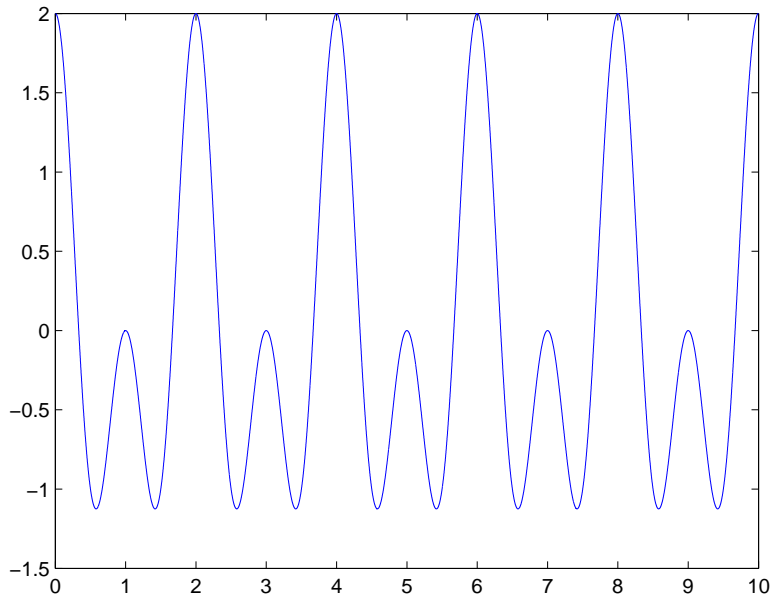
$$S_1(x) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{1}{\pi^2} x\right) \quad (\text{II.149})$$

$$S_2(x) = \cos\left(2\pi \cdot \frac{f}{\pi^2} x\right). \quad (\text{II.150})$$

Le signal est représenté sur la Figure II.5 et ses composantes sur la Figure II.6. Les deux premiers modes sont montrés sur les Figures II.7 et II.8, respectivement.

Pour ce premier exemple, les  $\delta$ -IMF sont obtenues avec des conditions de bords de type Neumann. Une première remarque concernant les résultats est que la  $\delta$ -EMD se comporte comme l'EMD classique en ce sens qu'elle sépare les composantes du signal de la plus haute fréquence vers la plus basse fréquence. Les fréquences sont bien séparées avec notre approche. Cependant, on a une faible atténuation des amplitudes des  $\delta$ -IMF par rapport aux composantes du signal et par rapport aussi aux IMF.

Nous avons également comparé les  $\delta$ -IMF aux modes obtenus en implémentant (II.75). Les résultats obtenus sont montrés sur les Figures II.9 et II.10 pour  $\epsilon = 10^{-5}$  dans (II.146). Nous avons supposé que  $h(\cdot, T)$  est de moyenne nulle pour un certain  $T$ . Comme on peut le remarquer, il n'y a pas d'atténuation et les modes coïncident presque parfaitement avec les composantes du signal. Cela s'explique par le fait que l'EDP (II.75) prend en considération les points où les dérivées première et seconde s'annulent, la concavité, la convexité, et le fait que la dérivée première soit au dessus ou en dessous de la dérivée seconde.



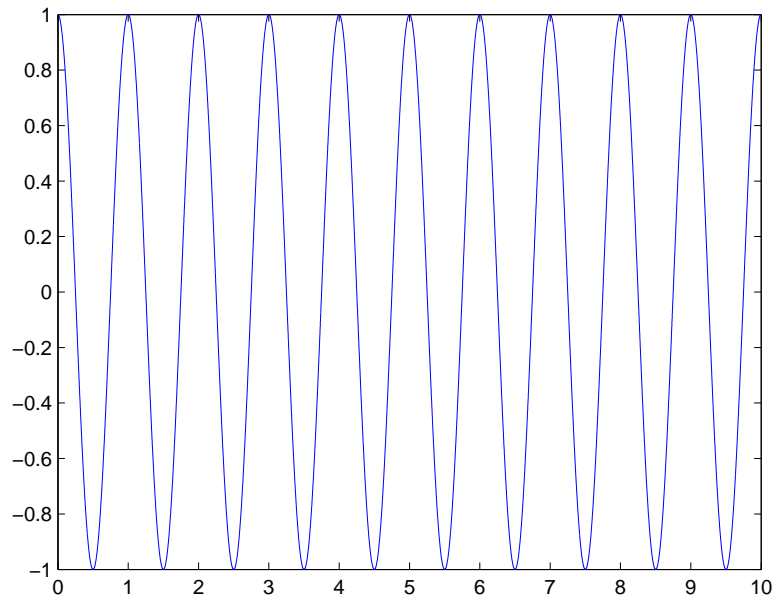
**Figure II.5:** Représentation du signal  $S$  donné par l'équation (II.148)

Le deuxième signal sur lequel on a testé cette nouvelle approche de l'EMD est défini sur  $\Omega = [0, 3]$ , par :

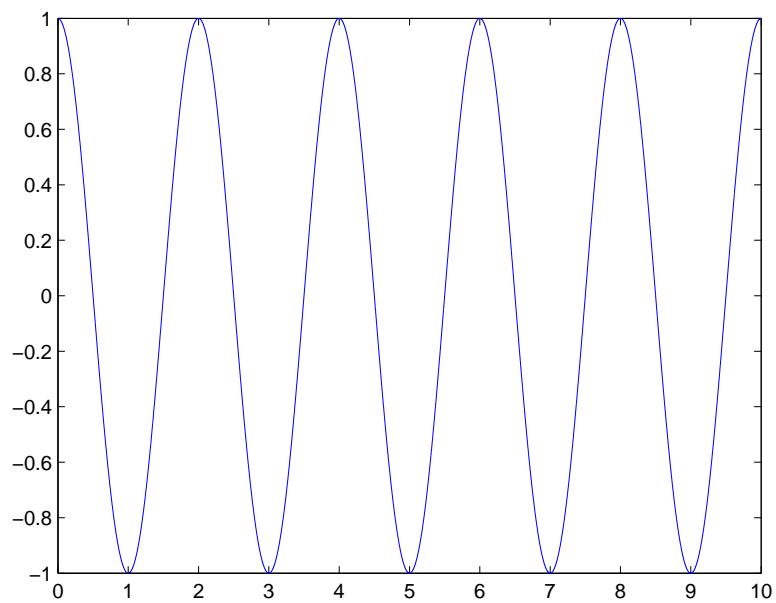
$$S(x) = S_1(x) + S_2(x) \quad (\text{II.151})$$

$$S_1(x) = 2 \sin \left( 2\pi \cdot \frac{10}{\pi^2} x \right) \quad (\text{II.152})$$

$$S_2(x) = 3 \sin \left( 2\pi \cdot \frac{1}{\pi^2} x \right). \quad (\text{II.153})$$

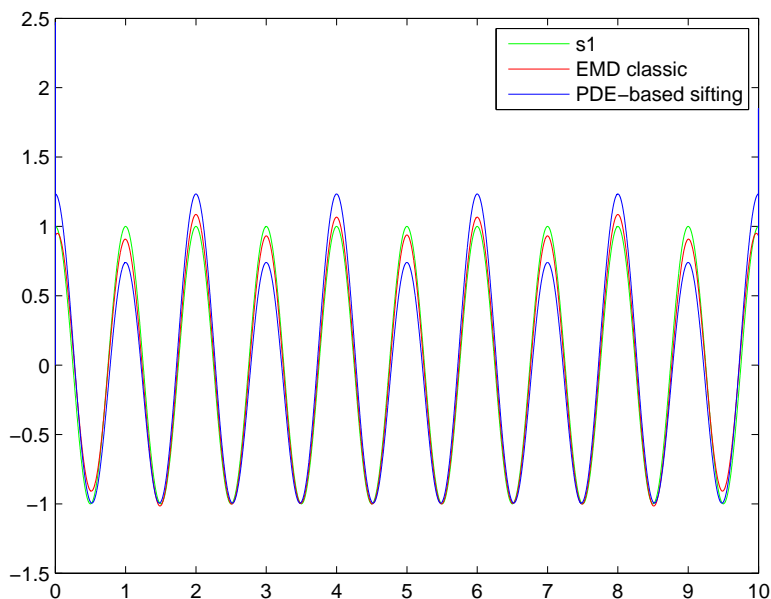


(a)

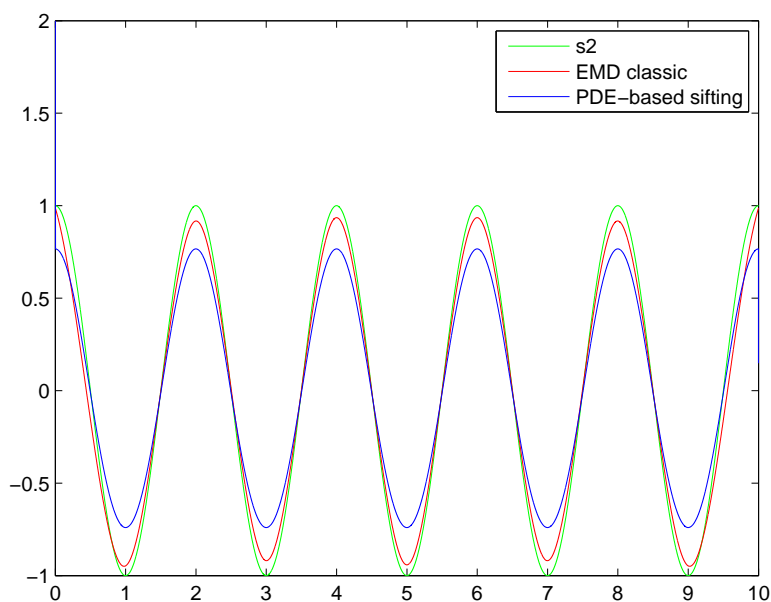


(b)

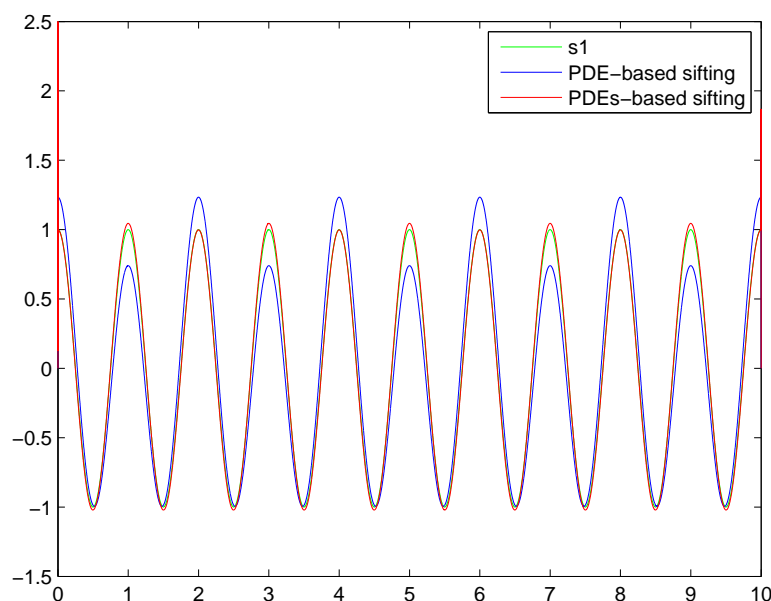
**Figure II.6:** Composantes du signal  $S$  (Éq. II.148). Composante haute fréquence  $S_1$  (Éq. II.149) (a). Composante basse fréquence  $S_2$  (Éq. II.150) pour  $f = 0.5$  (b)



**Figure II.7:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge :  $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta-IMF_1$ , premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



**Figure II.8:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge :  $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta-IMF_2$ , second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



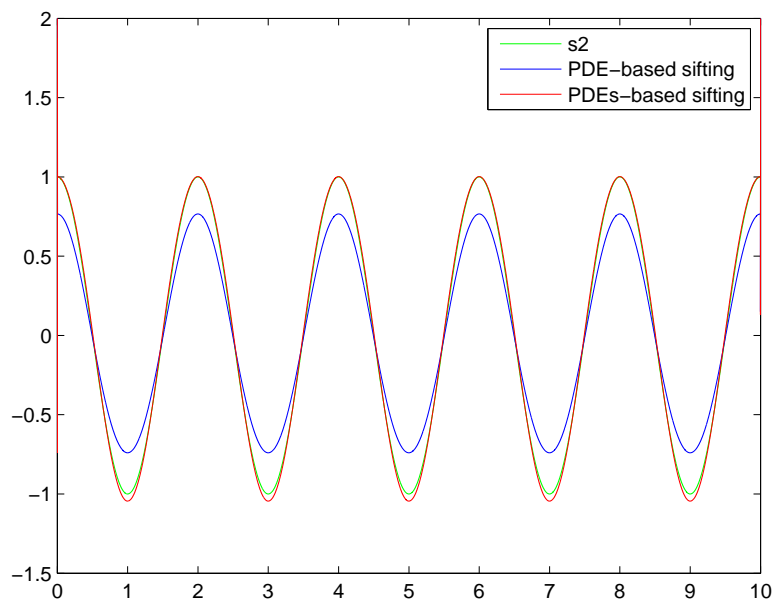
**Figure II.9:** Comparaisons entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)

Le signal et ses composantes sont montrés sur les Figures II.11 et II.12, respectivement. Les Figures II.13 et II.14 montrent les résultats de la décomposition. On s'attend à ce que les premiers et seconds modes correspondent respectivement à  $S_1$  (Équation II.152) et à  $S_2$  (Équation II.153).

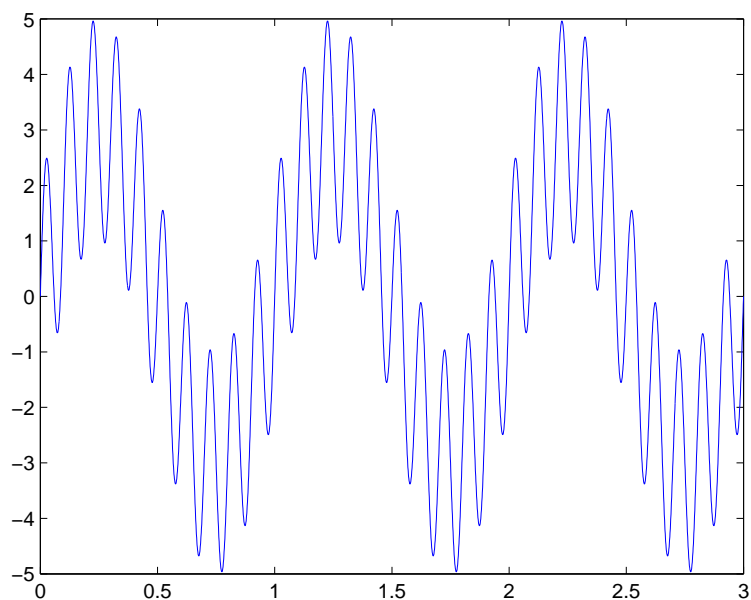
Les composantes du signal sont très bien séparées par la  $\delta$ -EMD. On peut noter que  $\delta$ - $IMF_1$  et  $\delta$ - $IMF_2$  coïncident respectivement avec  $S_1$  et  $S_2$ . Pour l'EMD classique, on remarque que l' $IMF_1$  se superpose presque pratiquement à  $S_1$  sauf aux niveaux des bords (cf. Figure II.13). Par contre, l' $IMF_2$  est totalement différente de  $S_2$  (cf. Figure II.14). Les interpolations pour le calcul des moyennes locales en sont l'explication. En effet, les données créées par les interpolations vont générer des erreurs qui s'accumulent au fur et à mesure des itérations dans le tamisage. L'erreur était petite pour l'extraction de l' $IMF_1$ . Cela s'est amplifiée pour l' $IMF_2$ , et ainsi de suite. Pour cet exemple, les  $\delta$ -IMF sont extraites avec des conditions de bords de type Dirichlet.

Nous avons aussi fait des comparaisons entre les  $\delta$ -IMF et les modes obtenus avec (II.75). Les modes obtenus par les deux modèles d'EDP sont montrés sur les Figures II.15 et II.16 pour  $\epsilon = 0.1$  dans (II.146). Il n'y a encore aucune atténuation et les modes se confondent presque avec les composantes du signal, pour les mêmes raisons expliquées précédemment.

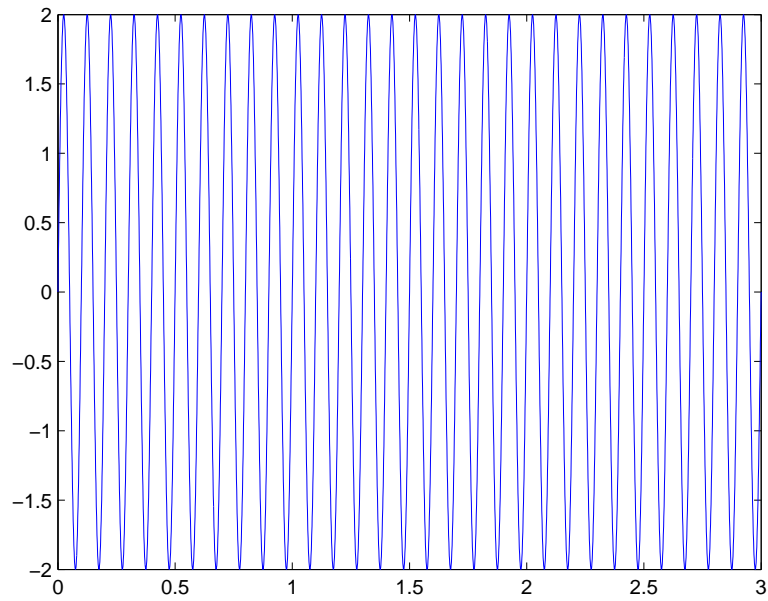




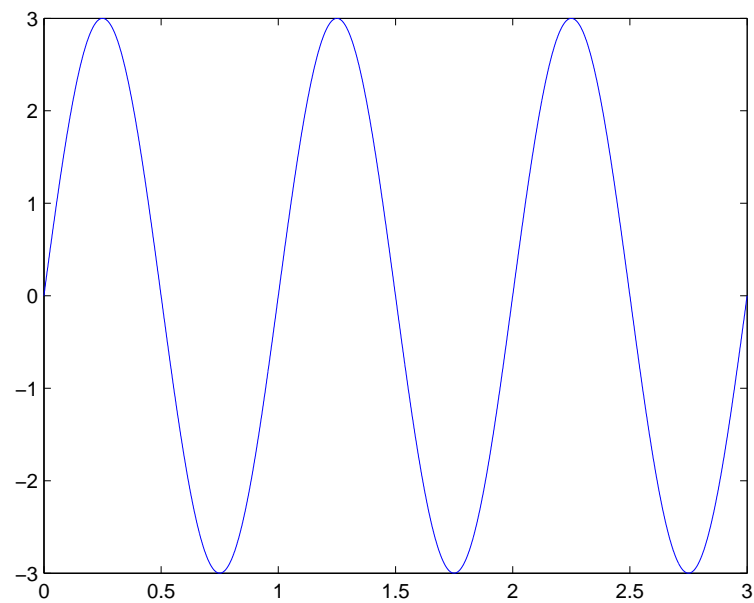
**Figure II.10:** Comparaisons entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)



**Figure II.11:** Représentation du signal  $S$  donné par l'équation (II.151)

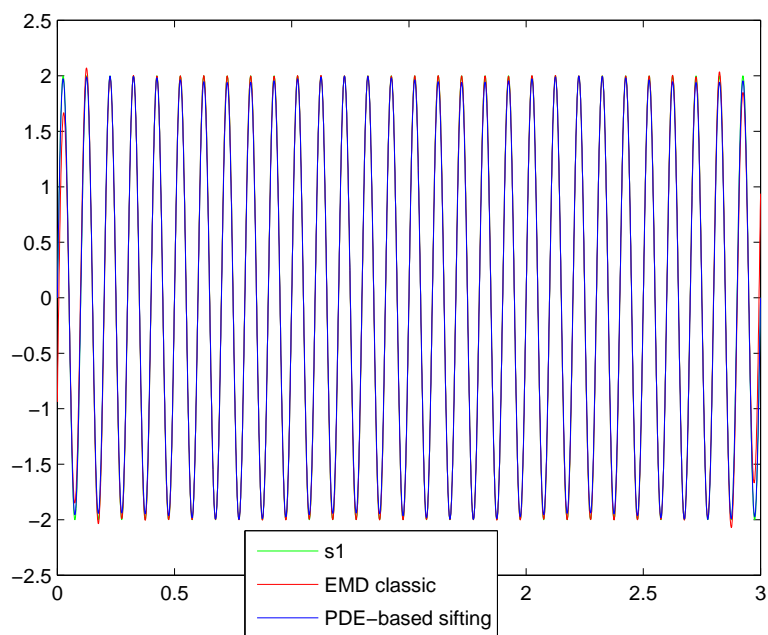


(a)

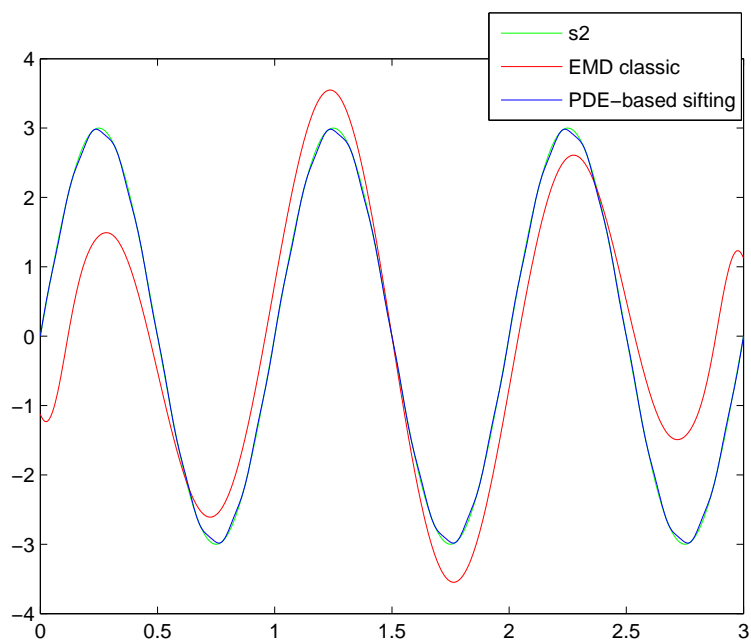


(b)

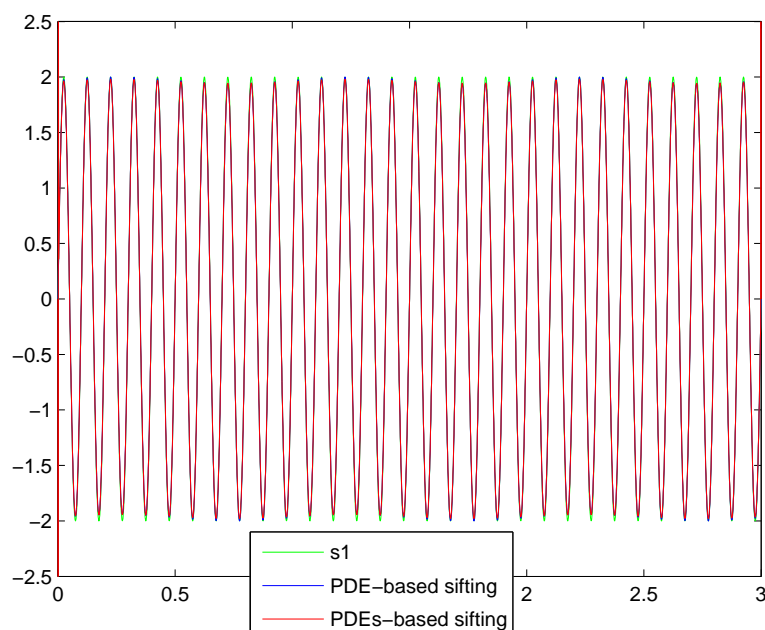
**Figure II.12:** Composantes du signal  $S$  (Éq. II.151). Composante haute fréquence  $S_1$  (Éq. II.152) (a). Composante basse fréquence  $S_2$  (Éq. II.153) (b)



**Figure II.13:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge :  $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



**Figure II.14:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge :  $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



**Figure II.15:** Comparaisons entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ -IMF<sub>1</sub>, premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)

### II.5.2.2 Signaux non stationnaires

On a également testé la  $\delta$ -EMD sur le signal défini sur  $\Omega = [0, 1]$ , par :

$$S = S_1 + S_2 \quad (\text{II.154})$$

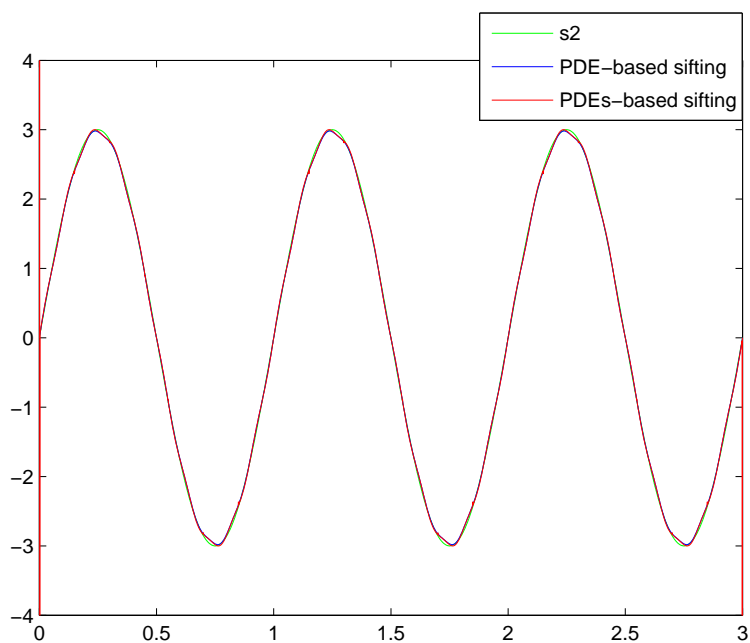
$$S_1(x) = 4 \sin\left(2\pi \cdot \frac{10}{\pi^2} x\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{0.1}{\pi^2} x\right) \quad (\text{II.155})$$

$$S_2(x) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{5}{\pi^2} x\right). \quad (\text{II.156})$$

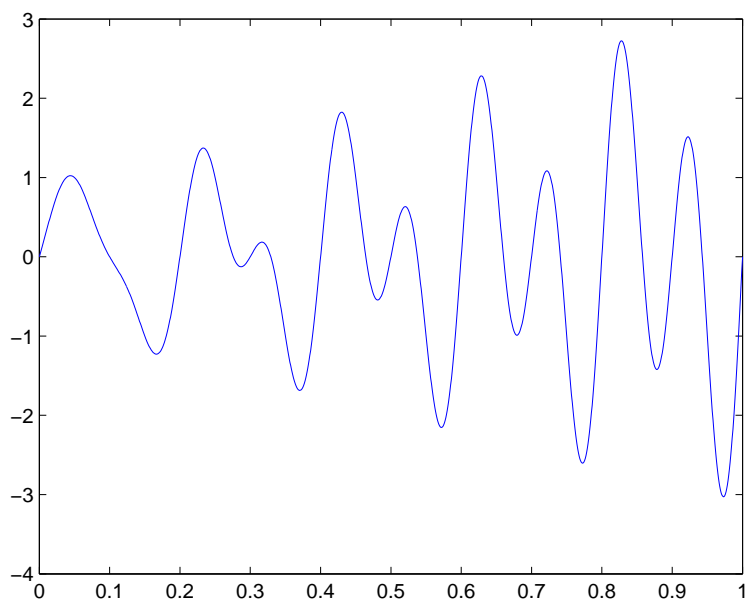
Le signal est représenté sur la Figure II.17 et ses composantes sur la Figure II.18. Malgré une légère atténuation de l'amplitude de  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (cf. Figure II.20), les Figures II.19 et II.20 illustrent clairement la pertinence et l'efficacité de cette nouvelle approche de décomposition. Pour cet exemple, les  $\delta$ -IMF sont extraites avec des conditions de bords de type Dirichlet.

Les  $\delta$ -IMF sont également comparées aux modes obtenus avec (II.75) sur les Figures II.15 et II.16 pour  $\epsilon = 10^{-3}$  dans (II.146).

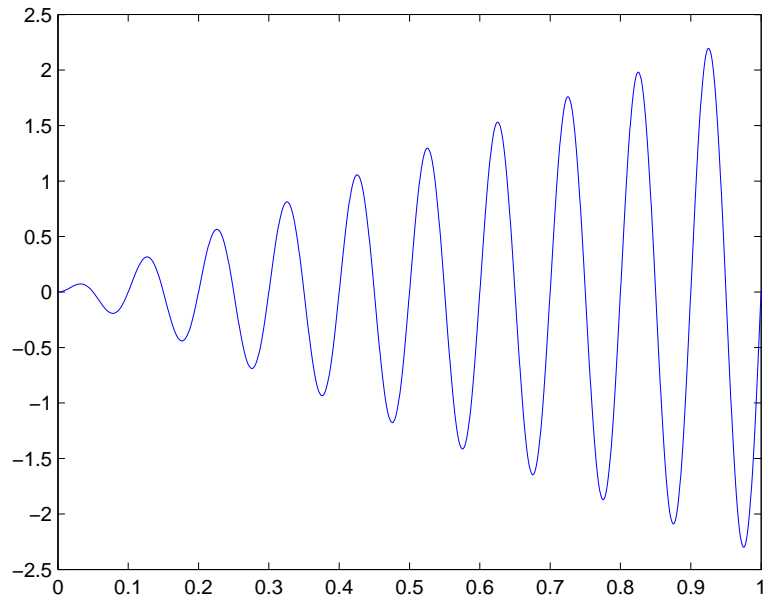
Pour ce même signal (Équation II.154), (91) ont utilisé un critère d'arrêt du SP basé sur la largeur de bande afin d'obtenir une bonne séparation des composantes par EMD.



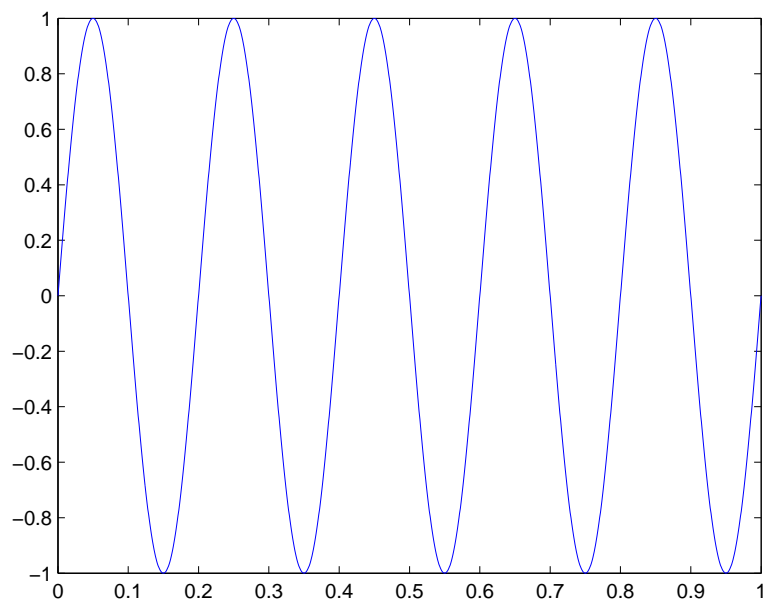
**Figure II.16:** Comparaisons entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)



**Figure II.17:** Représentation du signal  $S$  donné par l'équation (II.154)

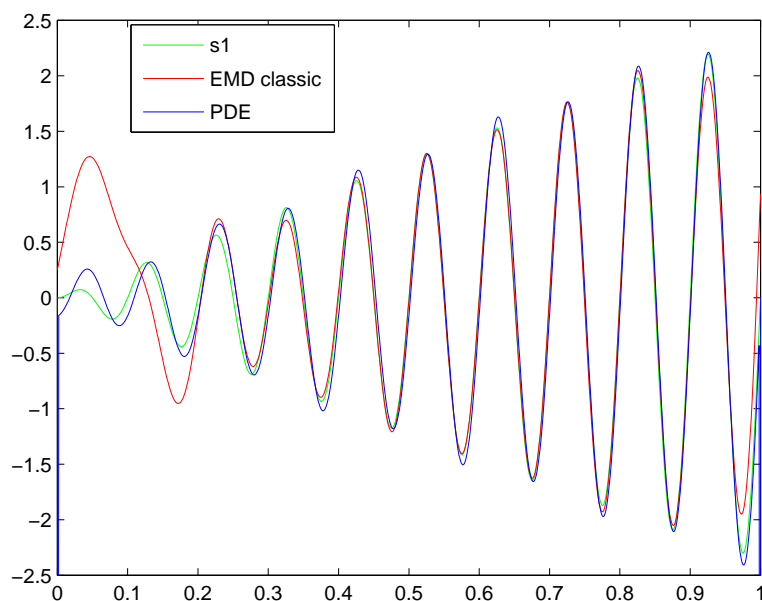


(a)

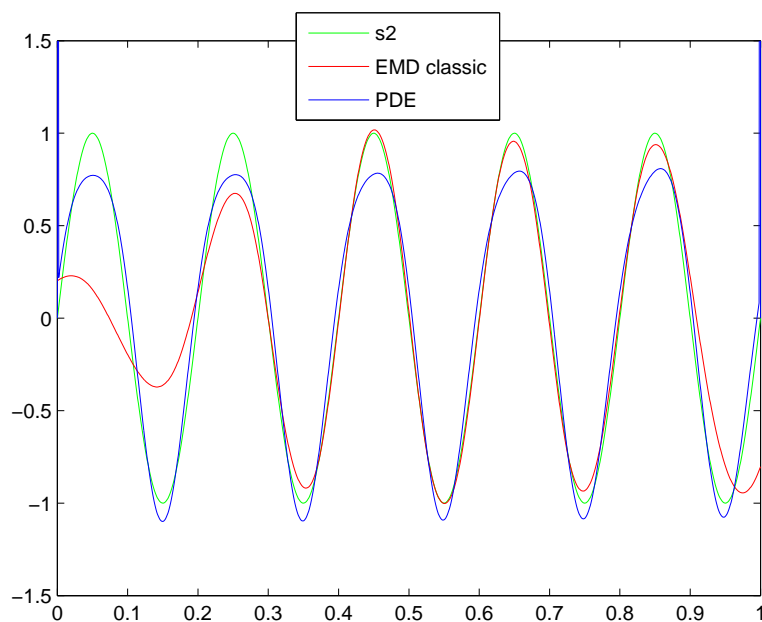


(b)

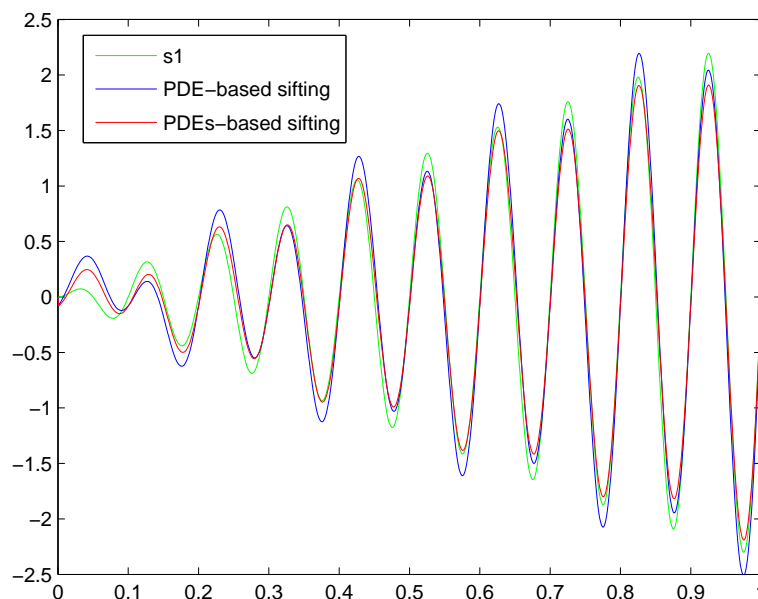
**Figure II.18:** Composantes du signal  $S$  (II.154). Composante haute fréquence  $S_1$  (Éq. II.155) (a). Composante basse fréquence  $S_2$  (Éq. II.156) (b)



**Figure II.19:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante haute fréquence exacte. En rouge :  $IMF_1$ , premier mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



**Figure II.20:** Comparaisons entre IMF et  $\delta$ -IMF. En vert : composante basse fréquence exacte. En rouge :  $IMF_2$ , second mode obtenu avec l'EMD classique. En bleu :  $\delta$ - $IMF_2$ , second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD



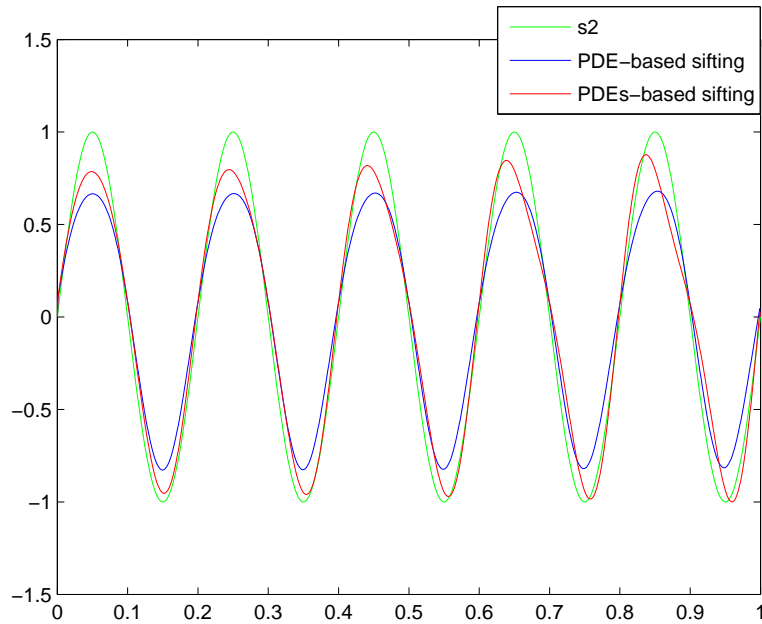
**Figure II.21:** Comparaison entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante haute fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ - $IMF_1$ , premier mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : premier mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)

## II.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons apporté un certain nombre d'éclaircissements sur des notions et points essentiels relatifs à l'EMD, et qui n'étaient entre autres introduites que de manière très intuitive. Nous avons ainsi apporté plusieurs contributions sur la compréhension et le formalisme mathématique de l'EMD, et avons proposé un nouvel algorithme de décomposition des signaux. Nous rappelons que malgré quelques travaux très récents, le manque de bases théoriques demeure une des principales limites de la méthode EMD, quand bien même elle est appliquée avec succès dans de nombreux domaines scientifiques.

Un premier résultat de cette étude découle de la modélisation de la moyenne locale et que nous avons proposée. En effet, nous avons montré que l'on pouvait approcher les itérations du SP par une EDP à frontières libres. Cela nous a permis d'introduire les notions de  $p \delta - IMF$  et de  $H p \delta - IMF$ . Nous avons montré l'existence et l'unicité de la solution pour un cas particulier de cette EDP. De plus, grâce à cette formulation faible, nous avons montré que la condition de moyenne nulle pour obtenir une IMF peut être très finement approchée à un  $\epsilon$  près par les  $H p \delta - IMF$ . On précise qu'à notre connaissance, il n'y a pas de preuve analytique de cette condition. Nous avons ainsi pu introduire les notions de  $\delta - IMF$ , approchant très bien les composantes des signaux, et par conséquent, les IMF. Nous avons de la sorte pu donner des caractérisations mathématiques des modes qui, pour rappel, ne sont définis que de manière très intuitive. Enfin, nous avons fait une étude numérique





**Figure II.22:** Comparaisons entre  $\delta$ -IMF et modes obtenus avec (II.75). En vert : composante basse fréquence exacte. En bleu :  $\delta$ -IMF<sub>2</sub>, second mode obtenu avec la  $\delta$ -EMD. En rouge : second mode obtenu avec l'EDP à frontières libres (II.75)

de l'EDP parabolique résultant de la formulation de l'EDP à frontières libres dans un cadre particulier. Les résultats numériques obtenus en implémentant les EDPs ont montré que notre approche améliore beaucoup l'EMD classique.

L'interpolation est l'une des causes des problèmes inhérents au tamisage et qu'on ne pouvait résoudre. Avec l'approche par EDP que nous avons proposé, nous avons montré qu'on peut se passer de l'interpolation des extréma pour le calcul de la moyenne locale. En effet, en aucun moment nous ne calculons les extréma, ni ne faisons une quelconque interpolation. Ce résultat est très important en termes de gain de temps de calcul pour les espaces de dimension supérieure.

Dans cette étude, nous n'avons pas trouvé un critère optimal pour le choix du paramètre  $\delta$ . En effet, nous avons proposé une majoration par la plus grande valeur propre. Également, nous avons fait l'hypothèse que  $O(\delta)\|h'''\|_\infty = 0$ . Aussi, le critère d'arrêt reste un problème lorsque le signal est à moyenne nulle.

Dans le chapitre qui suit, nous allons étendre cette approche par EDP pour les images.

---

# Une Formulation de la décomposition modale empirique $2D$ par équations aux dérivées partielles

---

## Sommaire

<b>III.1 Introduction</b> . . . . .	<b>66</b>
<b>III.2 Positionnement de notre travail dans la littérature</b> . . . . .	<b>67</b>
<b>III.3 La décomposition modale empirique pour les images</b> . . . . .	<b>68</b>
III.3.1 Principe de l'EMD $2D$ . . . . .	68
III.3.2 Algorithme de l'EMD $2D$ . . . . .	69
<b>III.4 Un modèle d'EDP pour l'EMD <math>2D</math></b> . . . . .	<b>72</b>
III.4.1 Construction de suites . . . . .	72
III.4.2 Étude préliminaire . . . . .	73
III.4.3 Notions de $2D$ potential $\delta - IMF$ . . . . .	76
III.4.4 Condition de moyenne nulle pour les $2D$ $p$ $\delta - IMF$ . . . . .	78
III.4.5 Formulations analytiques des modes en $2D$ . . . . .	80
<b>III.5 Résultats numériques</b> . . . . .	<b>81</b>
III.5.1 Schémas numériques et discrétisations . . . . .	81
III.5.2 Images synthétiques . . . . .	82
III.5.3 Images réelles . . . . .	87
<b>III.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>89</b>

---

*Dans ce chapitre, on s'intéresse au formalisme mathématique de l'EMD  $2D$ , comme nous l'avons fait au Chapitre II pour l'EMD  $1D$ . Pour ce faire, nous formulons l'expression de la moyenne locale d'une manière telle qu'on puisse faire du calcul différentiel et prouvons alors que les itérations du tamisage  $2D$  peuvent être approchées par une certaine équation aux dérivées partielles. Dès lors, nous montrons qu'un formalisme analytique des modes empiriques  $2D$  est possible et apportons également des justifications théoriques pour ces derniers.*

*Enfin, nous montrons la pertinence du modèle proposé, validée numériquement aussi bien sur des images synthétiques, que sur des images réelles.*

### III.1 Introduction

LA décomposition modale empirique (EMD) continue de susciter beaucoup d'intérêts depuis son introduction (1). Définie initialement comme un outil algorithmique pour traiter des signaux non stationnaires et issues ou non de systèmes non linéaires, son formalisme théorique a fait l'objet de nombreuses études (20 ; 21 ; 22 ; 23). L'EMD décompose ainsi les signaux en composantes élémentaires appelées modes empiriques ou fonctions intrinsèques (IMF), et sont extraites de la plus haute fréquence vers la plus basse fréquence à travers un processus itératif, le tamisage. L'EMD permet alors de reconstruire le signal comme une somme de ces IMF plus un résidu qui représente la tendance globale du signal. L'EMD a récemment été étendue en 2D (EMD 2D) dans le but de décomposer des images multicomposantes en une somme d'images empiriques AM-FM monocomposantes. Nous reviendrons, dans la deuxième partie du manuscrit, sur les modèles AM-FM pour les images et sur les aspects monocomposant et multicomposant. Comme nous le verrons également, les images réelles sont en général de nature large bande.

Les versions actuelles de l'EMD 2D sont définies comme étant des extensions basiques du 1D, et cela sans pour autant qu'une analyse mathématique de la méthode n'ait été proposée.

**Nota III.1.** *Nous nous entendons par le terme « basiques », le fait de trouver les extréma de l'image, les interpolations des maxima et minima pour calculer la moyenne locale, ... et ainsi de suite, comme pour l'EMD en 1D.*

Plusieurs versions de l'EMD 2D existent déjà (24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 57). Dans le Chapitre II, nous avons montré qu'on peut approcher les itérations du tamisage 1D (1D SP) par la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (EDP). Nous avons aussi montré l'existence et l'unicité de la solution pour un cas particulier de cette EDP, et avons aussi proposé des caractérisations des modes. À notre connaissance, aucune étude mathématique de l'EMD 2D n'est actuellement proposée. Malgré cette absence d'analyse théorique, l'EMD 2D est appliquée dans de nombreux et divers domaines du traitement d'images (24 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34).

Comme pour le cas 1D, la principale difficulté à trouver un modèle théorique à l'EMD 2D est l'estimation ou le calcul de l'enveloppe moyenne pour les images. Dans les versions actuelles de l'EMD 2D, la construction des enveloppes supérieures et inférieures est très importante, comme pour le 1D. En effet, elle intervient dans l'étape clé de la méthode, le tamisage en 2D (2D SP), étape à laquelle les modes empiriques en 2D (2D IMF) sont extraits. Il est important de noter que presque tous les algorithmes 2D proposés actuellement sont basés sur un schéma identique au cas 1D. C'est pour cette raison aussi qu'on retrouve en 2D les mêmes problèmes rencontrés dans le tamisage 1D, à savoir, les problèmes de bords liés à l'interpolation et autres plus connus sous undershoots, overshoots, ... Il est également important de faire remarquer que les algorithmes 2D qu'on rencontre dans la littérature ne diffèrent, dans la grande majorité, les uns des autres que par les types d'interpolants utilisés pour la construction des enveloppes supérieures et inférieures (voir par exemple les travaux

de Nunes et al. (25), de Damerval et al (27), ou de Xu et al. (28)). On soulignera aussi que l'interpolation de surface, sur laquelle est basée la plupart des algorithmes  $2D$ , nécessite beaucoup de temps de calcul. D'ailleurs, pour réduire justement ce temps de calcul pour la construction des enveloppes, Bhuyan et al. (57) ont récemment proposé d'utiliser des filtres de rang (order-statistics filters), à la place de l'interpolation de surface. Comme on l'avait souligné et fait remarquer sur des applications pratiques au Chapitre II, l'interpolation crée de l'information supplémentaire qui est une source d'erreur dans tous les cas, et cette erreur devient de plus en plus importante si elle se propage à travers un processus itératif comme le  $2D$  SP.

L'objectif principal du Chapitre III est de proposer un modèle théorique de l'EMD pour les images. Ce chapitre s'organise comme suit : dans la Section III.2, nous faisons une étude bibliographique de l'EMD  $2D$  dans laquelle nous positionnons notre travail. Dans la Section III.3, nous rappelons l'EMD en  $2D$ . Nous exposons le principe général de la méthode, le schéma algorithmique le plus couramment utilisé et nous rappelons quelques définitions usuelles. Notre approche de décomposition par EMD  $2D$  avec les EDP est introduite dans la Section III.4. Nous y proposons beaucoup de résultats mathématiques sur l'EMD  $2D$  et concernant aussi la validité de notre approche. Des caractérisations des modes en  $2D$  avec les EDP y sont également proposées. Nous montrons enfin les résultats de décomposition d'images avec notre modèle dans la Section III.5.

## III.2 Positionnement de notre travail dans la littérature

Il y a beaucoup plus d'applications de l'EMD  $2D$  (24 ; 29 ; 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34) que de travaux concernant le formalisme et le principe même de l'algorithme. Il y a eu néanmoins un certain nombre de travaux.

Linderhed est l'une des premières à proposer une extension en  $2D$  de l'EMD initiée par Huang et al. (1), en utilisant des interpolations avec les fonctions splines afin de construire les enveloppes supérieures et inférieures (24 ; 26).

Dans (25 ; 58 ; 59), les auteurs utilisent des fonctions à bases radiales pour l'interpolation, à la place des splines. De plus, le calcul des extréma est fait avec des opérateurs morphologiques. Cependant, la complexité des algorithmes proposés dans (24 ; 25 ; 26 ; 58 ; 59) est trop importante, même pour une image de petite taille. Elle est de l'ordre de  $\frac{N^4}{100}$  pour une image de taille  $N^2$  (27).

Nous citons aussi le travail de Damerval et al. (27), qui proposent une décomposition basée sur un maillage de surface de type Delaunay et une interpolation polynomiale cubique par morceaux. Le temps de calcul est réduit par rapport à la méthode proposée dans (24).

Une version  $2D$  de l'EMD basée sur les éléments finis et sur une interpolation par splines bicubiques est proposée dans (28).

On remarquera que presque tous les travaux cités jusque là sont basés sur une interpolation de surface.

Liu et Peng (101) ont proposé une alternative aux problèmes d'effets de bords créés par les interpolations. Les auteurs suggèrent de faire au préalable un traitement des bords de l'image avant d'appliquer leur méthode, la BEMD-2. Le pré-traitement repose sur une méthode de synthèse de texture basée sur un échantillonnage non paramétrique modifié. On remarquera toutefois que c'est le premier travail vers une résolution des problèmes de bords, et cela, malgré que l'efficacité de la méthode ne soit pas démontrée de manière quantitative, comme l'ont d'ailleurs fait remarquer les auteurs. Il faudra aussi noter que la BEMD-2 (101) nécessite un temps de calcul assez conséquent, même pour des images de petite taille. En effet, l'algorithme proposé se fait ligne par ligne. Un travail un peu similaire est d'ailleurs proposé dans (31 ; 34).

Récemment, Bhuiyan et al. (57) ont proposé une nouvelle approche différente des autres extensions en 2D de l'EMD précédemment citées. Ils utilisent, à la place de l'interpolation de surface, des filtres de rang (order-statistics filters). À l'aide de fenêtres glissantes, ils obtiennent les extréma de l'image avec les opérateurs max et min. Les enveloppes supérieures et inférieures sont enfin obtenues par moyennage des maxima et des minima, respectivement. La taille des fenêtres dépend du type d'applications ou/et des caractéristiques recherchées dans les modes.

L'idée d'utiliser ces opérateurs est proche de la notre et que nous allons présenter dans la Section III.4. Le modèle que nous proposons est nouveau, car à notre connaissance, il est le seul à utiliser une approche par EDP pour l'EMD 2D. Il diffère aussi des autres méthodes sur de nombreux aspects, à savoir :

1. Nous n'avons pas besoin de détecter les extréma de l'image.
2. Nous n'avons besoin ni de fenêtre, ni de moyennage pour l'interpolation.
3. Nous ne calculons pas l'enveloppe moyenne de l'image, ni la moyenne locale.
4. Nous utilisons les versions continues des opérateurs max et min (i.e sup et inf) pour les constructions respectives des enveloppes locales supérieures et inférieures.
5. Nous formulons différemment la moyenne locale et prouvons que les itérations du 2D SP peuvent être approchées avec une certaine EDP.
6. Enfin, nous proposons des caractérisations analytiques des modes grâce à cette EDP.

### III.3 La décomposition modale empirique pour les images

Dans cette partie, nous rappelons le principe de base de l'EMD 2D et quelques définitions. Ensuite, nous exposons l'algorithme EMD 2D avec le schéma le plus utilisé.

#### III.3.1 Principe de l'EMD 2D

Les versions 2D actuelles sont des extensions du 1D initié par Huang et al. (1). Étant donnée une image  $I(x)$  définie sur  $\Omega$ , le principe de l'EMD 2D le plus utilisé dans la littérature est le suivant :

1. Trouver les extréma de  $I(x)$

2. Interpoler les maxima de  $I(x)$  (respectivement les minima de  $I(x)$ ), notés par  $E_{max}(x)$  (respectivement  $E_{min}(x)$ )
3. Calculer la *moyenne locale*  $m$  de  $I$  par :

$$m(x) = \frac{1}{2}(E_{max}(x) + E_{min}(x)) \quad (\text{III.1})$$

4. Extraire les détails  $d(x) = I(x) - m(x)$
5. Itérer sur  $m(x)$

La notion d'IMF en  $2D$  définie dans (24 ; 25 ; 26) est calquée sur celle en  $1D$  et n'a actuellement, à notre connaissance, pas de justification théorique :

**Définition III.1.** *On dit qu'une fonction  $f$  est une  $2D$  IMF ssi les conditions suivantes sont réalisées :*

- (i) *La moyenne locale de  $f$  calculée suivant (III.1) est nulle*
- (ii)  *$f$  s'annule entre deux extréma consécutifs.*

En suivant Damerval et al. (27), on a une autre définition d'une  $2D$  IMF, définie sur la base de simulations numériques :

**Définition III.2.** *On dit qu'une fonction  $f$  est une  $2D$  IMF ssi les conditions suivantes sont réalisées :*

- (i) *La moyenne locale de  $f$  calculée suivant (III.1) est nulle*
- (ii) *Les maxima de  $f$  sont positifs et les minima de  $f$  sont négatifs*
- (iii) *Le nombre de maxima de  $f$  et le nombre de minima de  $f$  sont égaux.*

Comme pour le cas  $1D$ , la procédure est affinée avec une boucle itérant les étapes (1) jusqu'à (4), appelée tamisage  $2D$ . On itère donc sur le détail  $d(x)$  jusqu'à ce que la moyenne locale soit nulle, pour ainsi obtenir une IMF  $2D$  (cf. Définitions III.1 et III.2). Dans (27), par exemple, on s'arrête après un certain nombre d'itérations.

L'image  $I(x)$  est donc d'abord décomposée dans la boucle principale comme  $I(x) = d_1(x) + m_1(x)$ . Le premier résidu  $m_1(x)$  est ensuite décomposé comme  $m_1(x) = d_2(x) + m_2(x)$ , et ainsi de suite. Finalement,  $I$  est décomposée suivant :

$$I(x) = \sum_{k=1}^K d_k(x) + r(x), \quad (\text{III.2})$$

$\forall x \in \Omega$ , où  $d_k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$   $2D$  IMF et  $r$  un éventuel résidu.

### III.3.2 Algorithme de l'EMD $2D$

Nous décrivons dans cette partie, l'algorithme EMD en  $2D$  comme dans (24 ; 25 ; 26). Le  $2D$  SP est l'étape pendant laquelle les  $2D$  IMF sont extraites. Le pseudo-code est représenté sur le Tableau III.1 pour une image discrète  $I(k, l)$  de taille  $M \times N$ . Un organigramme du

pseudo-code est représenté sur la Figure III.1. Comme pour le cas 1D, une condition d'arrêt est nécessaire pour arrêter le processus du tamisage (boucle  $i$ ). On note cependant que dans (27), le critère d'arrêt est remplacé par le nombre d'itérations dans la boucle  $i$ .

Dans ce qui suit, nous proposons notre approche par EDP de l'EMD en 2D.

### III.4 Un modèle d'EDP pour l'EMD 2D

Dans cette partie, nous introduisons notre modèle de l'EMD 2D avec les EDP. Nous construisons d'abord une suite de fonctions pour le 2D SP. Nous aurons besoin de quelques résultats mathématiques qui seront démontrés dans une étude préliminaire.

Dans tout ce qui suit, on considère que  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , de bord  $\partial\Omega$ .

Soit  $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'interpolée continue de l'image.

#### III.4.1 Construction de suites

Avant d'introduire notre modèle d'EDP, nous commençons par construire une suite de fonctions  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . La suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est construite à partir des sous-étapes (d) et (e) (cf. Tableau III.1).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note par  $\hat{h}_n$  (respectivement  $\check{h}_n$ ) l'interpolée continue des maxima (respectivement des minima) de  $h_n$ .

On définit alors la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$\begin{cases} h_{n+1} = h_n - \frac{1}{2}(\hat{h}_n + \check{h}_n) \\ h_0 = I. \end{cases} \quad (\text{III.3})$$

Le processus du tamisage 2D est maintenant déterminé par la suite  $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Notons par  $\Phi$  l'opérateur défini  $\forall n \in \mathbb{N}$  par :

$$\Phi(h_n) = \frac{1}{2}(\hat{h}_n + \check{h}_n) \quad (\text{III.4})$$

Soit  $I_d : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  l'application identique. Alors,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , (III.3) devient :

$$h_n = (I_d - \Phi)^n h_0. \quad (\text{III.5})$$

Désignons par  $f^n$  l'application définie pour tout  $n$  par :  $f^n := \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$  et  $f^0 := I_d$ .

Posons  $\Psi = I_d - \Phi$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$  (III.5) devient :

$$h_n = \Psi^n h_0. \quad (\text{III.6})$$

**Tableau III.1:** Pseudo-code de l'EMD 2D

**Étape 1** Fixer  $\epsilon$

**Étape 2** Initialisations :  $j \leftarrow 1$  ( $j^{\text{ième}}$  2D IMF) et

$$r_{j-1}(k, l) \leftarrow I(k, l)$$

**Étape 3** Extraction du  $j^{\text{ième}}$  mode :

(a) Affectations :  $h_{j,i-1}(k, l) \leftarrow r_{j-1}(k, l)$ ,

$i \leftarrow 1$  ( $i$ , itération de la boucle de *sifting*)

(c) Calcul des enveloppes supérieures et inférieures,  $U_{j,i-1}(k, l)$  et

$L_{j,i-1}(k, l)$ , par interpolations des maxima locaux, respectivement

et des minima locaux de  $h_{j,i-1}(k, l)$

(d) Calcul de la moyenne local :  $m_{j,i-1}(k, l) = \frac{U_{j,i-1}(k, l) + L_{j,i-1}(k, l)}{2}$

(e) Mise à jour :  $h_{j,i}(k, l) \leftarrow h_{j,i-1}(k, l) - m_{j,i-1}(k, l)$  et  $i \leftarrow i + 1$

(f) Calcul du critère d'arrêt :  $SD(i) = \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^N \frac{|h_{j,i-1}(k, l) - h_{j,i}(k, l)|^2}{|h_{j,i-1}(k, l)|^2}$

(g) Répétition des étapes (b) – (f) pour  $SD(i) < \epsilon$  et

affectation  $IMF_j \leftarrow h_{j,i}$

**Étape 4** Mise à jour du résidu :  $r_j(k, l) \leftarrow r_{j-1}(k, l) - IMF_j(k, l)$

**Étape 5** Répétition de l'étape 3 pour  $j \leftarrow j + 1$  jusqu'à obtenir un nombre

d'extréma de  $r_j(k, l) < 2$



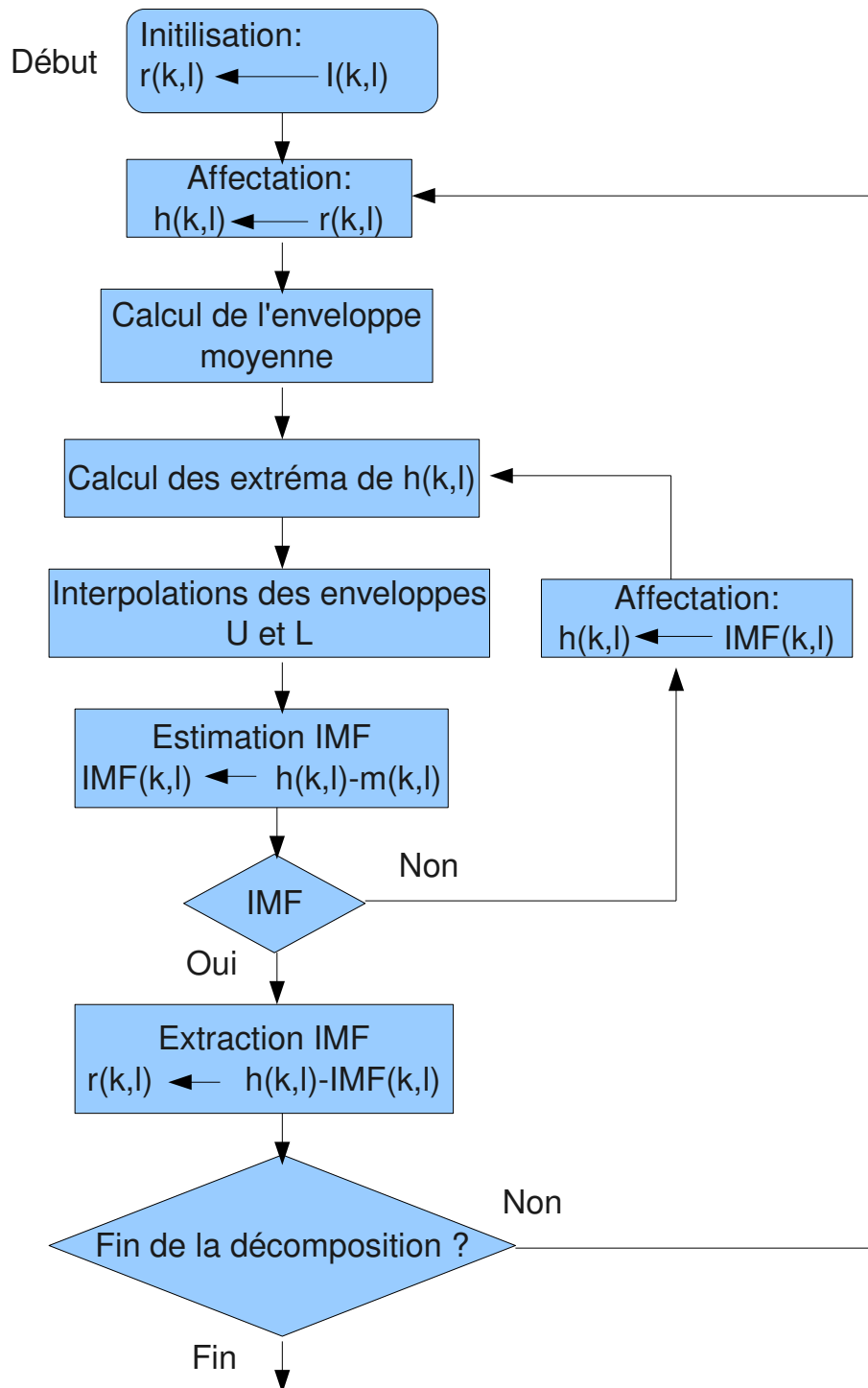


Figure III.1: Organigramme du pseudo-code de l'EMD 2D (cf. Tableau III.1)

Nous avons vu au Chapitre II que l'EMD était tributaire de l'interpolation. Nous avons le même problème pour le cas 2D. En effet, l'équation (III.6) montre que les 2D IMF  $h_n$  obtenues pour un certain  $n$  (cf. Définitions III.1 ou III.2) dépendent des interpolations utilisées pour la construction des enveloppes supérieures et inférieures ( $\hat{h}_n$  et  $\tilde{h}_n$  respectivement). D'ailleurs, les algorithmes proposés dans (25 ; 27 ; 28) ne diffèrent en grande partie que des interpolants utilisés. Pour pallier à cela, nous introduisons les opérateurs  $\mathcal{S}_\delta$ ,  $\mathcal{I}_\delta$  et  $\mathcal{M}_\delta$  pour calculer respectivement les enveloppes supérieures et inférieures locales, et la moyenne locale. Nous verrons que ces opérateurs présentent deux intérêts majeurs. Premièrement, ils permettent d'éliminer la dépendance de l'EMD 2D par rapport à l'interpolation. Ensuite, nous pourrons faire du calcul différentiel et approcher alors les itérations du SP par la résolution d'une certaine EDP. Les principaux résultats de ce travail sont aussi présentés dans (60 ; 61).

### III.4.2 Étude préliminaire

Dans cette étude préliminaire, nous aurons besoin d'introduire certaines notions et aussi de quelques résultats mathématiques.

#### III.4.2.1 Définitions des opérateurs $\mathcal{S}_\delta$ , $\mathcal{I}_\delta$ et $\mathcal{M}_\delta$

Soit  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in C^1(\Omega)$  telle que  $Dh(x) \neq 0$ .

On pose  $z_0 = \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}$ ,  $\|\cdot\|$  représente la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $\delta > 0$ .

On pose :  $\mathcal{B} = B(0, 1) \cap \overline{B}(z_0, \delta)$ , où  $B(0, 1)$  désigne la boule ouverte dans  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  centrée en 0 et de rayon 1, et  $\overline{B}(z_0, \delta)$  représente la boule fermée toujours dans  $\Omega$  de centre  $z_0$  et de rayon  $\delta$ .

On définit les opérateurs  $\mathcal{S}_\delta$ ,  $\mathcal{I}_\delta$  et  $\mathcal{M}_\delta$  comme suit :

**Définition III.3.** Pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$ , on définit l'opérateur  $\mathcal{S}_\delta$  de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  par :

$$\mathcal{S}_\delta h(x) = \sup_{z \in \mathcal{B}} h(x + \delta z), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.7})$$

**Définition III.4.**  $\mathcal{I}_\delta$  est défini de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  tel que pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$ , on ait :

$$\mathcal{I}_\delta h(x) = \inf_{z \in \mathcal{B}} h(x + \delta z), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.8})$$

Bien évidemment, le sup et l'inf ci-dessus sont pris sur l'ensemble  $\{z \in \mathcal{B}, \text{ tels que } x + \delta z \in \Omega\}$ .

**Définition III.5.** L'opérateur  $\mathcal{M}_\delta$  est défini de  $L^\infty(\Omega)$  dans  $L^\infty(\Omega)$  tel que pour toute fonction  $h \in L^\infty(\Omega)$  on ait :

$$\mathcal{M}_\delta h(x) = \frac{1}{2} (\mathcal{S}_\delta h(x) + \mathcal{I}_\delta h(x)), \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.9})$$

Les opérateurs inf et sup sont des filtres de rangs invariants par changements de contraste. Ces opérateurs ont fait l'objet de nombreuses études, notamment, dans (102 ; 103 ; 104 ; 105). Leurs approches sont plutôt basées sur la généralisation du Théorème de Mathéron, en considérant ces opérateurs comme des filtres morphologiques.

L'opérateur  $\mathcal{M}_\delta$  ainsi défini va remplacer la *moyenne locale* formulée par l'équation (III.1). Nous reviendrons sur ce point après avoir examiné les résultats mathématiques dans la section qui va suivre.

### III.4.2.2 Résultats préliminaires

Le premier résultat concerne  $\mathcal{S}_\delta$  (cf. Définition III.3) :

**Théorème III.1.** *Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $Dh(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ . Alors pour  $\delta > 0$  petit, le développement asymptotique de  $\mathcal{S}_\delta$  s'écrit :*

$$\mathcal{S}_\delta h(x) = h(x) + \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right) + o(\delta^2), \quad (\text{III.10})$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

**Preuve III.1.** *Soit  $x \in \Omega$  et soit  $z \in \mathcal{B}$ .*

*Puisque  $h \in C^3(\Omega)$ , on peut écrire :*

$$h(x + \delta z) = h(x) + \delta \prec Dh(x), z \succ + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x)(z, z) + o(\delta^2), \quad (\text{III.11})$$

pour  $\delta$  petit.  $\prec \cdot, \cdot \succ$  est le produit scalaire dans  $\mathbb{R}^2$ .

Soit  $\epsilon > 0$ . Donc pour un  $\delta$  petit, on a :

$$\begin{aligned} -\epsilon \delta^2 + h(x) + \delta \prec Dh(x), z \succ + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x)(z, z) &< h(x + \delta z) < h(x) + \\ &\delta \prec Dh(x), z \succ + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x)(z, z) + \epsilon \delta^2. \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

On pose :

$$F_{x,\delta}(z) = \delta \prec Dh(x), z \succ + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x)(z, z). \quad (\text{III.13})$$

En prenant la borne supérieure, il vient :

$$-\epsilon \delta^2 + h(x) + \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) \leq \mathcal{S}_\delta h(x) \leq \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) + h(x) + \epsilon \delta^2. \quad (\text{III.14})$$

Comme  $x$  et  $\epsilon$  sont arbitrairement choisis, alors  $\forall x \in \Omega$ , on a :

$$\mathcal{S}_\delta h(x) = h(x) + \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) + o(\delta^2). \quad (\text{III.15})$$

Dans ce qui suit, on explicite la valeur de :

$$\sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z). \quad (\text{III.16})$$

On a :

$$F_{x,\delta}(z_0) = \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} D^2h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right). \quad (\text{III.17})$$

Comme  $\|z_0\| = 1$ , on a alors :

$$F_{x,\delta}(z_0) \leq \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z). \quad (\text{III.18})$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il s'en suit alors que :

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) &\leq \delta \cdot \sup_{z \in \mathcal{B}} \langle Dh(x), z \rangle + \frac{\delta^2}{2} \cdot \sup_{z \in \mathcal{B}} \{D^2h(x)(z, z)\} \\ &\leq \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} \cdot \sup_{z \in \mathcal{B}} \{D^2h(x)(z, z)\}. \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

$D^2h(x)$  est Lipschitz, car  $D^2h(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ , qui est canoniquement isomorphe à  $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  (106). Donc, il existe une constante  $C > 0$  telle que :

$$D^2h(x)(z, z) \leq D^2h(x)(z_0, z_0) + C\|z - z_0\|^2. \quad (\text{III.20})$$

Puisque  $z \in \mathcal{B} = B(0, 1) \cap \overline{B}(z_0, \delta)$ , alors l'équation (III.19) devient :

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) &\leq \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} (D^2h(x)(z_0, z_0) + C\delta^2) \\ &\leq F_{x,\delta}(z_0) + o(\delta^2). \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

Avec les équations (III.18) et (III.21), on a :

$$\sup_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) = F_{x,\delta}(z_0) + o(\delta^2), \quad (\text{III.22})$$

Finalement, en remplaçant (III.22) dans (III.15), on a  $\forall x \in \Omega$  :

$$\mathcal{S}_\delta h(x) = h(x) + F_{x,\delta}(z_0) + o(\delta^2). \quad (\text{III.23})$$

□

Nous aurons aussi besoin d'un résultat similaire pour  $\mathcal{I}_\delta$  (cf. Définition III.4). Le résultat s'énonce comme suit :

**Théorème III.2.** Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $Dh(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ . Alors pour  $\delta > 0$  petit, le développement asymptotique de  $\mathcal{I}_\delta$  s'écrit comme suit :

$$\mathcal{I}_\delta h(x) = h(x) - \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} D^2h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right) + o(\delta^2), \quad (\text{III.24})$$

pour tout  $x \in \Omega$ .

**Preuve III.2.** *En se basant sur la preuve du Théorème III.1, on montre facilement que :*

$$\mathcal{I}_\delta h(x) = h(x) + \inf_{z \in \mathcal{B}} F_{x,\delta}(z) + o(\delta^2). \quad (\text{III.25})$$

*On change maintenant  $h$  en  $-h$  dans les équations (III.22) et (III.17), puis on utilise les propriétés entre la borne supérieure et la borne inférieure. Il vient alors :*

$$\mathcal{I}_\delta h(x) = h(x) - \delta \|Dh(x)\| + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right) + o(\delta^2). \quad (\text{III.26})$$

□

À l'aide des Théorèmes III.1 et III.2, on prouve le dernier résultat de cette étude préliminaire concernant  $\mathcal{M}_\delta$  (cf. Définition III.5). Il s'énonce comme suit :

**Théorème III.3.** *Soit  $h \in C^3(\Omega)$  telle que  $Dh(x) \neq 0, \forall x \in \Omega$ . Alors pour  $\delta > 0$  petit, le développement asymptotique de  $\mathcal{M}_\delta$  s'écrit :*

$$\mathcal{M}_\delta h(x) = h(x) + \frac{\delta^2}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right) + o(\delta^2), \quad (\text{III.27})$$

*pour tout  $x \in \Omega$ .*

**Preuve III.3.** *La preuve est immédiate en considérant les équations (III.10), (III.24) et (III.9).* □

Nous rappelons que les potentielles 2D IMF sont les éléments de la suite  $(h_n)_n$  (cf. Équation III.5) :

$$h_n = (I_d - \Phi)^n h_0.$$

Comme nous l'avions mentionné plus haut, nous allons remplacer  $\Phi$  dans (III.5) par  $\mathcal{M}_\delta$  (cf. Définition III.5). Avec les résultats préliminaires que nous venons d'établir, nous formulerons le 2D SP par une EDP.

**Nota III.2.** *Nous employons ici le terme de « potentielle » 2D IMF pour faire référence à une candidate pour être une 2D IMF au sens classique du terme. Une potentielle 2D IMF devient alors une 2D IMF classique si elle satisfait les Définitions III.1 ou III.2.*

### III.4.3 Notions de 2D potential $\delta - IMF$

Afin d'introduire la notion de 2D potential  $\delta - IMF$ , notée  $p \delta - IMF$ , on considère d'abord, comme pour le cas 1D, la suite  $(\bar{h}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} \bar{h}_{n+1} = (I_d - \mathcal{M}_\delta) \bar{h}_n \\ \bar{h}_0 = I. \end{cases} \quad (\text{III.28})$$

L'étude de cette suite et les résultats établis avec le Théorème III.3 vont nous permettre d'introduire les 2D  $p \delta - IMF$ .

Soit  $\tau > 0$ ,  $\tau$  petit. On définit maintenant  $\forall x \in \Omega$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$  la fonction  $\tilde{h}$ , par :

$$\begin{cases} \tilde{h} : \Omega \times \{\tau\mathbb{N}\} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, n\tau) \longmapsto \tilde{h}_n(x) \end{cases} \quad (\text{III.29})$$

On considère son interpolée suffisamment régulière, que nous notons, par abus d'écriture, encore par  $\tilde{h}$ .

Avec un développement de Taylor, on obtient :

$$\tilde{h}_{n+1}(x) = \tilde{h}(x, n\tau + \tau) = \tilde{h}(x, n\tau) + \tau \frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) + o(\tau^2) \quad (\text{III.30})$$

En reprenant l'équation (III.28) et grâce au Théorème III.3, on obtient :

$$\tilde{h}_{n+1}(x) = -\frac{\delta^2}{2} D^2 \tilde{h}(x) \left( \frac{D\tilde{h}(x)}{\|D\tilde{h}(x)\|}, \frac{D\tilde{h}(x)}{\|D\tilde{h}(x)\|} \right) + o(\delta^2). \quad (\text{III.31})$$

Il s'en suit alors pour  $\tau = \delta^2$ , que :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial t}(x, n\tau) = -\frac{1}{\delta^2} \tilde{h}(x, n\tau) - \frac{1}{2} D^2 \tilde{h}(x) \left( \frac{D\tilde{h}(x)}{\|D\tilde{h}(x)\|}, \frac{D\tilde{h}(x)}{\|D\tilde{h}(x)\|} \right) + o(1) \quad (\text{III.32})$$

En négligeant le reste, les équations obtenues ci-dessus suggèrent donc naturellement l'introduction, pour toute fonction suffisamment régulière  $h : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h = h(x, t)$ , telle que  $Dh \neq 0$ , de l'EDP suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\frac{1}{\delta^2} h(x, t) - \frac{1}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right). \quad (\text{III.33})$$

On applique maintenant la méthode de quasi-reversibilité (QR) de Lattès et Lions (107) à l'EDP (III.33), afin de s'assurer qu'elle est bien posée.

On rappelle qu'une EDP mal posée n'admet pas toujours de solutions. Et même si elle en admettait une, cette dernière ne dépendrait pas de la condition initiale, de manière continue. Ames et Payne (108) ont montré que l'approche QR appliquée au problème de Cauchy pour l'équation de la chaleur rétrograde donne des solutions qui dépendent continûment du paramètre de perturbation.

La méthode QR est ainsi appliquée à (III.33), afin de contraindre les hautes fréquences spatiales à décroître très rapidement. L'EDP (III.33) devient alors :

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \epsilon \Delta_x^2 h = -\frac{1}{\delta^2} h(x, t) - \frac{1}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right), \quad (\text{III.34})$$

où  $\Delta_x$  est le Laplacien par rapport à la variable  $x$ ,  $\Delta_x^2 = \Delta_x(\Delta_x)$  et  $\epsilon$  est un nombre positif petit. L'EDP (III.34) est de la forme  $\frac{\partial h}{\partial t} - \epsilon \Delta_x^2 h = F(h, Dh, D^2 h)$ , qui est une EDP bien posée dans  $H^2$  avec des conditions de bord de type Neumann d'ordre 1 et d'ordre 2, et globalement en temps (109).

**Nota III.3.**  $H^2(\Omega)$  est un espace de Sobolev. C'est l'espace des fonctions dans  $L^2(\Omega)$  telles

que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2 soient aussi dans  $L^2(\Omega)$ . Les dérivées sont prises au sens des distributions. Voir (110) pour plus de détails sur ces espaces de Sobolev.

Nous pouvons maintenant introduire la notion de  $2D$   $p$   $\delta$  -  $IMF$  comme suit :

**Définition III.6.** On dit qu'une fonction  $k$  est une  $2D$   $p$   $\delta$  -  $IMF$  si et seulement si :

$$\begin{cases} k : & \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto & k(x) = h(x, t_0), \end{cases} \quad (\text{III.35})$$

pour un certain  $t_0$  et où  $h$  représente la solution de l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{\delta^2} h + \frac{1}{2} D^2 h(x) \left( \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|}, \frac{Dh(x)}{\|Dh(x)\|} \right) - \epsilon \Delta_x^2 h = & 0 \\ h(x, 0) = & I(x), \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial h}{\partial n} = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \Delta_x h = & 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{III.36})$$

où  $n$  désigne la normale extérieure de  $\partial\Omega$ ,  $\Delta_x$  est le Laplacien par rapport à la variable  $x$ ,  $\Delta_x^2 = \Delta_x(\Delta_x)$  et  $\epsilon$  est un nombre positif petit.

Dans la partie qui suit, nous proposons une justification théorique de la condition de moyenne nulle, nécessaire pour obtenir une  $2D$   $IMF$  (cf. Définitions III.1 et III.2). Cela nous permettra d'établir un lien entre les  $2D$   $IMF$  classiques et les  $2D$   $p$   $\delta$  -  $IMF$  introduites plus haut.

#### III.4.4 Condition de moyenne nulle pour les $2D$ $p$ $\delta$ - $IMF$

Comme pour le cas  $1D$ , une  $2D$   $IMF$  doit remplir le critère de moyenne nulle (cf. Définitions III.1 et III.2). Il n'y a, à notre connaissance, pas de preuve théorique de cette condition. Nous allons voir avec le modèle d'EDP que nous proposons, qu'on peut se rapprocher très finement de cette condition. Nous formulons ce résultat avec la proposition suivante :

**Proposition III.1.** Soit  $h$  solution de l'équation (III.36). Alors  $\forall \epsilon > 0, \exists T > 0, T$  dépendant de  $\epsilon$ , tel que  $\forall t > T$ , on ait :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx < \epsilon. \quad (\text{III.37})$$

**Preuve III.4.** On pose  $H(x, t) = \exp\left(\frac{t}{\delta^2}\right) \cdot h(x, t)$ .

Alors, l'équation (III.36) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{1}{2} D^2 H(x) \left( \frac{DH(x)}{\|DH(x)\|}, \frac{DH(x)}{\|Dh(x)\|} \right) - \epsilon \Delta_x^2 H = 0 \\ H(x, 0) = I(x), \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ \frac{\partial}{\partial n} \Delta_x H = 0, \text{ sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (\text{III.38})$$

En prenant l'intégrale de (III.38), il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} H(x, t) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} D^2 H(x) \left( \frac{DH(x)}{\|DH(x)\|}, \frac{DH(x)}{\|Dh(x)\|} \right) dx - \epsilon \int_{\Omega} \Delta_x^2 H dx = 0. \quad (\text{III.39})$$

Avec la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} \Delta_x^2 H dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial n} \Delta_x H ds = 0. \quad (\text{III.40})$$

D'autre part, on a :

$$\int_{\Omega} D^2 H(x) \left( \frac{DH(x)}{\|DH(x)\|}, \frac{DH(x)}{\|Dh(x)\|} \right) dx = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_{\Omega} \partial_{i,j}^2 H \cdot \partial_i H \cdot \partial_j H \cdot \frac{1}{\|DH(x)\|^2} dx, \quad (\text{III.41})$$

avec  $x = (x_1, x_2) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$  et  $\forall i, j = 1, 2$ ,  $\partial_i H = \frac{\partial H}{\partial x_i}$ ,  $\partial_i^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i^2}$  et  $\partial_{i,j}^2 H = \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j}$ .

Comme  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on obtient alors avec la formule de Green que :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_{i,j}^2 H \cdot \partial_i H \cdot \partial_j H \cdot \frac{1}{\|DH(x)\|^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\partial_j H)^2 \cdot \partial_i^2 H \cdot \frac{1}{\|DH(x)\|^2} dx + \\ &\quad \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} (\partial_j H)^2 \cdot \partial_i H \cdot \partial_{i,k}^2 H \cdot \partial_k H \cdot \frac{1}{\|DH(x)\|^4} dx. \end{aligned} \quad (\text{III.42})$$

Par suite, comme  $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$ , (III.41) devient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D^2 H(x) \left( \frac{DH(x)}{\|DH(x)\|}, \frac{DH(x)}{\|Dh(x)\|} \right) dx &= -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta_x H dx + \int_{\Omega} \Delta_x H dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \Delta_x H dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{III.43})$$

Finalement, en remplaçant (III.40) et (III.43) dans (III.39), on aboutit à :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} H(x, t) dx = \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} \exp\left(\frac{t}{\delta^2}\right) \cdot h(x, t) dx \quad (\text{III.44})$$

$$= 0. \quad (\text{III.45})$$



Ce qui entraîne donc qu'il existe une constante  $C \in \mathbb{R}$  telle que :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx = C \cdot \exp\left(\frac{-t}{\delta^2}\right) \quad (\text{III.46})$$

$\forall t > 0$ . Soit  $\epsilon > 0$ . Donc, il existe un  $T > 0$ , dépendant de  $\epsilon$  tel que  $\forall t > T$ , on ait :

$$\int_{\Omega} h(x, t) dx < \epsilon. \quad (\text{III.47})$$

□

**Remarque III.1.** La Proposition III.1 reste aussi vraie en considérant l'EDP (III.36) avec des conditions de bord de type périodique.

**Remarque III.2.** La Proposition III.1 stipule que si  $h$  est solution de (III.36), alors on peut choisir sa moyenne aussi petite que possible. On peut alors se rapprocher de très près de 0.

Nous pouvons à présent donner des caractérisations plus explicites des modes en 2D.

### III.4.5 Formulations analytiques des modes en 2D

La définition des modes empiriques 2D était jusque là très intuitive ou basée sur des simulations (cf. Définitions III.1 et III.2). Les nouvelles notions de 2D  $p \delta - IMF$  que nous avons introduites permettent d'obtenir des caractérisations analytiques des 2D IMF.

En vertu de la Proposition III.1, les définitions suivantes ont bien un sens :

**Définition III.7.** On dit qu'une fonction  $\bar{h} = \bar{h}(x)$  est une 2D  $\delta^\epsilon$ -IMF s'il existe une fonction  $h = h(x, t)$  solution de (III.36) et un  $t_0 > 0$  tels que :

$$\bar{h}(x) = h(x, t_0) \quad (\text{III.48})$$

et

$$\int_{\Omega} h(x, t_0) dx < \epsilon. \quad (\text{III.49})$$

La définition ci-après nous rapproche de celle que nous avons vue au début (cf. Définitions III.1 et III.2) :

**Définition III.8.** On appelle 2D  $\delta$ -IMF toute fonction  $h$  satisfaisant les conditions suivantes :

- (i)  $h$  est solution de (III.36),
- (ii)  $h(\cdot, T)$  est de moyenne nulle pour une certaine valeur de  $T$ .

En pratique, on choisit la première valeur de  $t$  pour laquelle on a une moyenne très proche de 0.

**Remarque III.3.** La Proposition III.1 assure l'existence de  $T$  dans (ii) de la Définition III.8.

La première  $\delta$ -IMF, notée  $\delta$ -IMF<sub>1</sub>, est obtenue en résolvant (III.36). Pour obtenir  $\delta$ -IMF<sub>2</sub>, il faudra résoudre à nouveau (III.36), mais cette fois la condition initiale est égale à la différence entre l'image  $I$  et  $\delta$ -IMF<sub>1</sub>. Les autres modes sont obtenus suivant le même procédé.

**Définition III.9.** *On appelle par 2D  $\delta$ -EMD, la décomposition pour laquelle les modes 2D du SP sont obtenus avec l'équation (III.36).*

Dans (1), l'EMD décompose un signal en une somme de modes plus un résidu. Toutes les versions actuelles du 2D suivent aussi ce schéma (cf. Équation III.2). Nous proposons, pour les images réelles, une décomposition comme étant une combinaison linéaire des 2D  $\delta$ -IMF. Une fois qu'on obtient la première  $\delta$ -IMF, notée  $I_1$ , on trouve  $I_2$  avec comme condition initiale  $I - \alpha_1 I_1$ ,  $\alpha_1$  étant un certain paramètre positif. La  $k^{\text{ième}}$   $\delta$ -IMF,  $I_k$ , est obtenue avec comme condition initiale  $I - \sum_{p=1}^{k-1} \alpha_p I_p$ . Finalement, nous obtenons une décomposition de l'image  $I$  suivant :

$$I(x) = \sum_{k=1}^K \alpha_k I_k(x) + r(x), \quad (\text{III.50})$$

$\forall x \in \Omega$ , où  $I_k$  désigne la  $k^{\text{ième}}$  2D  $\delta$ -IMF et les  $\alpha_k$  sont des nombres réels positifs.

L'intérêt de (III.50) est que maintenant le niveau de détails dans la décomposition est contrôlé par les paramètres  $\alpha_k$ . Les  $\alpha_k$  dépendent des caractéristiques de l'image, du niveau de détail recherché, ou du type d'applications.

## III.5 Résultats numériques

Dans cette partie, nous donnons quelques discrétisations et schémas numériques, avant d'exposer les résultats numériques.

### III.5.1 Schémas numériques et discrétisations

Les résultats numériques que nous présentons sont obtenus en implémentant l'équation III.36). On a utilisé un schéma explicite :

$$h^{n+1} = h^n + \Delta t \cdot F^n(h^n). \quad (\text{III.51})$$

Nous donnons quelques schémas de discrétisation :

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{III.52})$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_{i,j} = \frac{h_{i,j+1} - h_{i,j}}{\Delta y} \quad (\text{III.53})$$

$$\left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} - h_{i,j}}{\Delta x} \quad (\text{III.54})$$

$$(\Delta_x h)_{i,j} = \frac{h_{i+1,j} + h_{i-1,j} - 2h_{i,j}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{III.55})$$

$$(\Delta_y h)_{i,j} = \frac{h_{i,j+1} + h_{i,j-1} - 2h_{i,j}}{(\Delta y)^2}. \quad (\text{III.56})$$

Nous avons utilisé d'autres schémas de discrétisations, les résultats sont sensiblement les mêmes. Pour d'autres schémas numériques relatifs aux EDP en traitement d'images, le lecteur pourra voir par exemple (111).

Nous précisons quelques remarques d'ordre pratique par rapport aux résultats obtenus. Pour éviter la division par 0 dans (III.36), on a ajouté un petit terme à  $\|Dh(x)\|$ .

### III.5.2 Images synthétiques

Pour examiner le comportement la 2D  $\delta$ -EMD, on a d'abord appliqué l'algorithme sur des images synthétiques. La première image synthétique est donnée par :

$$I = I_1 + I_2 \quad (\text{III.57})$$

$$I_1(x, y) = A \cdot \cos(2\pi\rho_1(x \cos(\theta_1) - y \sin(\theta_1))) \quad (\text{III.58})$$

$$I_2(x, y) = B \cdot \cos(2\pi\rho_2(x \cos(\theta_2) - y \sin(\theta_2))). \quad (\text{III.59})$$

avec  $\rho_1 < \rho_2$  et  $A, B > 0$ . L'image  $I$  est représentée sur la Figure III.2. Comme pour l'EMD en 1D, on s'attend à ce que la 2D  $\delta$ -EMD se comporte comme un banc de filtres qui sépare l'image en des composantes allant de la plus haute fréquence vers la plus basse fréquence. Concrètement, on voudrait que  $\delta\text{-IMF}_1$  et  $\delta\text{-IMF}_2$  coïncident respectivement avec  $I_2$  (III.59) et  $I_1$  (III.58). La décomposition de  $I$  avec notre approche est représentée sur la Figure III.3.

Nous avons comparé notre approche à l'EMD classique proposée dans (24 ; 25 ; 26 ; 59) et basée sur le calcul de l'enveloppe moyenne avec une interpolation surfacique. Les deux premières 2D IMF sont représentées sur la Figure III.4.

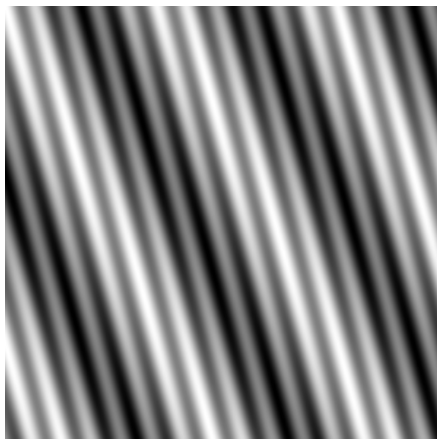
On a également appliqué la 2D  $\delta$ -EMD sur l'image  $J$  définie par :

$$J = J_1 + J_2 \quad (\text{III.60})$$

$$J_1(x, y) = \left(\sin\left(\sin\left(\frac{x}{5}\right) + \cos\left(\frac{y}{3}\right)\right)\right) \cdot \cos(2\pi\rho_1(x \cos(\theta_1) - y \sin(\theta_1))) \quad (\text{III.61})$$

$$J_2(x, y) = \left(\sin\left(\frac{x}{5}\right) + \cos\left(\frac{y}{3}\right)\right) \cdot \cos(2\pi\rho_2(x \cos(\theta_2) - y \sin(\theta_2))) \quad (\text{III.62})$$

L'image  $J$  est représentée sur la Figure III.5 et sa décomposition sur la Figure III.6. Là



**Figure III.2:** Image synthétique  $I$  (Éq. III.57) avec  $A = B = 1$ ,  $\rho_1 = 0.1$ ,  
 $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ ,  $\rho_2 = 0.5$  et  $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$

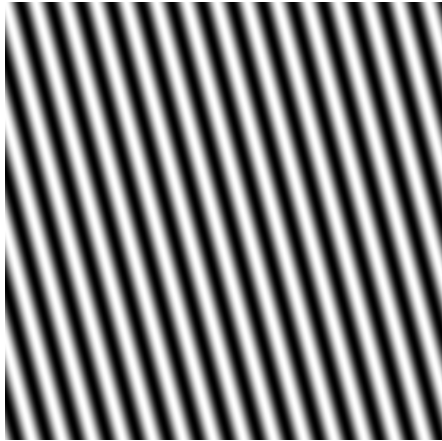
également, on s'attend à ce que  $\delta-IMF_1$  et  $\delta-IMF_2$  coïncident respectivement avec  $J_2$  (Éq. III.62) et  $J_1$  (Éq. III.61). La décomposition donnée par l'EMD classique est montrée sur la Figure III.7.

On voit bien sur les Figures (III.3) et (III.6) le bon comportement en banc de filtres de la 2D  $\delta$ -EMD. On peut remarquer quelques artefacts (pointillés noirs) sur les premières  $\delta-IMF$  (cf. Figures III.3-(c) et III.6-(c)). Cela est certainement numérique.

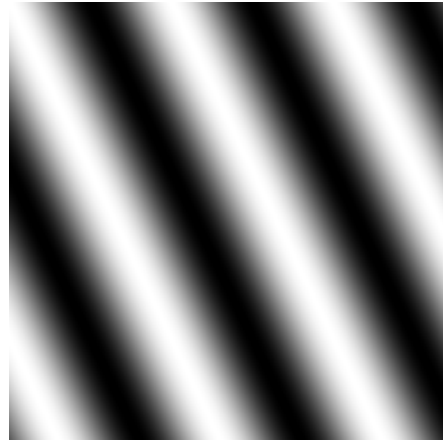
Pour les secondes  $\delta-IMF$ , on peut cependant constater la très légère différence entre les seconds modes générés avec notre approche et  $I_2$  d'une part (cf. Figures III.3-(b) et III.3-(d)), et avec  $J_2$  d'autre part (cf. Figures III.6-(b) et III.6-(d)). Cela est principalement dû à la méthode QR qui est appliquée dans l'équation (III.36). C'est comme si on avait appliqué un filtrage sur les hautes fréquences. Par conséquent, les basses fréquences sont aussi affectées à cause de l'équation (III.2). Toutefois, on a une meilleure séparation des composantes des images  $I$  et  $J$  avec notre approche en comparaison à l'EMD 2D classique, comme on peut le voir sur les Figures III.4 et III.7.

Nous allons maintenant quantifier cette faible dégradation des modes en calculant les erreurs entre les modes extraits avec la 2D  $\delta$ -EMD et les composantes exactes des images synthétiques. Les erreurs sont mesurées en norme  $L^2(\mathbb{R}^2)$  et en calculant le Mean Squared Error (MSE).

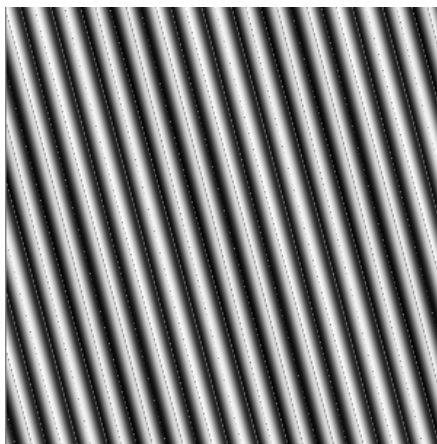
On a également utilisé une meilleure mesure de distorsion d'images, celle proposée dans (112). La mesure est une combinaison de la perte de corrélation, de la luminance et des distorsions entre les images. Wang et Bovik (112) ont montré que cette mesure donne une meilleure évaluation entre des images que le MSE et autres analyses subjectives. Les valeurs de cette mesure sont comprises entre  $-1$ , la plus petite valeur, et  $1$ , la plus grande valeur. Bien entendu, la valeur  $-1$  implique une différence totale entre les images. Et la valeur  $1$  entraîne



(a)



(b)

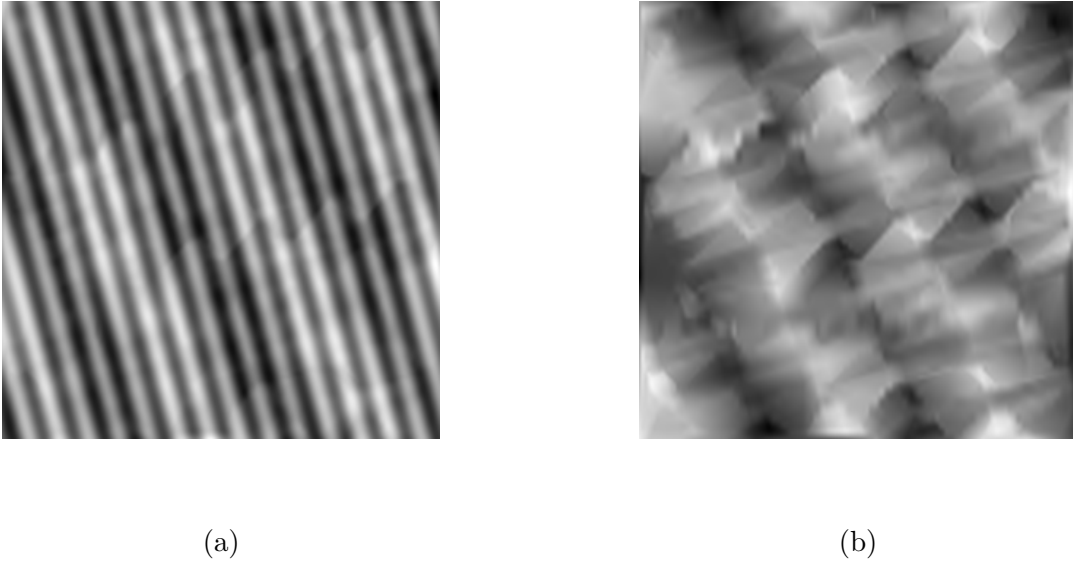


(c)

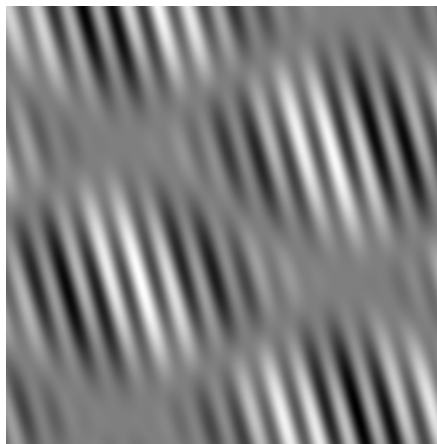


(d)

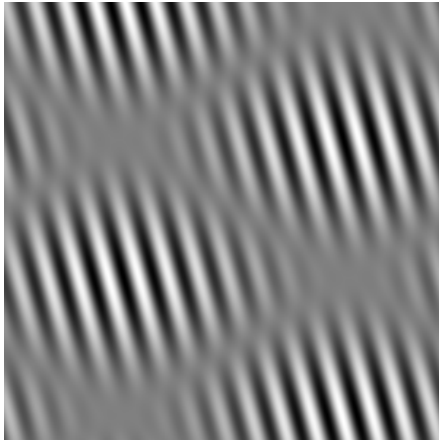
**Figure III.3:** Composantes de l'image  $I$  (Éq. III.57). Composante haute fréquence  $I_2$  (Éq. III.59) (a). Composante basse fréquence  $I_1$  (Éq. III.59) (b). Modes obtenus avec la 2D  $\delta$ -EMD : premier mode  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (c). deuxième mode  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



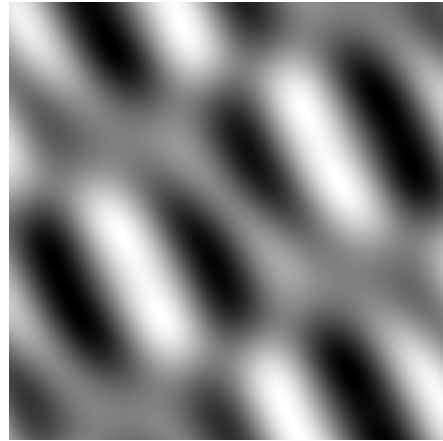
**Figure III.4:** Modes empiriques obtenus avec l'EMD 2D. Première 2D IMF (a). Deuxième 2D IMF (b)



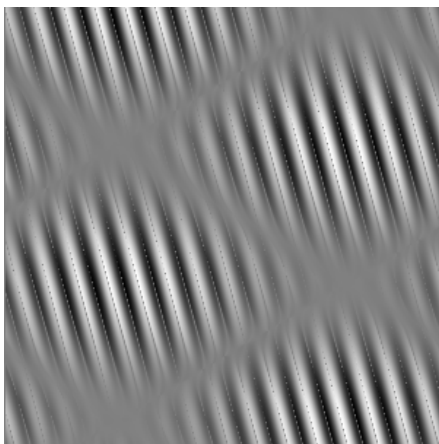
**Figure III.5:** Image AM-FM  $J$  obtenue avec l'équation (III.57) avec  $\rho_1 = 0.1$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ ,  $\rho_2 = 0.5$  et  $\theta_2 = \frac{\pi}{12}$



(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure III.6:** Composantes de l'image  $J$  (Éq. III.60). Composante haute fréquence  $J_2$  (Éq. III.62) (a). Composante basse fréquence  $J_1$  (Éq. III.61) (b). Modes obtenus avec la 2D  $\delta$ -EMD : premier mode  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (c). deuxième mode  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



**Figure III.7:** Modes empiriques obtenus avec l'EMD 2D. Première 2D IMF (a). Deuxième 2D IMF (b)

qu'il y a une correspondance et une ressemblance parfaites entre les images à comparer.

Pour une analyse plus fine des dégradations subies par les 2D  $\delta$ -IMF par rapport aux valeurs exactes des composantes des images, nous faisons le calcul de cette mesure par fenêtre de taille  $4 \times 4$ .

Soit  $Q_i$  la valeur de cette mesure dans la  $i^{\text{ieme}}$  fenêtre. Soit  $Q$  la mesure de qualité dans tout le domaine.

On calcule alors  $Q$  par :

$$Q = \frac{1}{N_w} \sum_{i=1}^{N_w} Q_i, \quad (\text{III.63})$$

où  $N_w$  est le nombre de fenêtres.

On a comparé les 2D  $\delta$ -IMF à  $I_1$  et  $I_2$  d'une part, et à  $J_1$  et  $J_2$  d'autre part. Comme le montre le Tableau III.2, les différentes erreurs commises entre les 2D  $\delta$ -IMF et les valeurs exactes sont relativement très faibles ; ce qui n'est pas du tout le cas en ce qui concerne l'EMD 2D.

### III.5.3 Images réelles

Dans cette partie, on montre les résultats obtenus avec la 2D  $\delta$ -EMD appliquée à des images réelles. Les 2D  $\delta$ -IMF sont obtenues en résolvant numériquement (III.36). Les images sont décomposées suivant (III.2) au lieu de la méthode classique (III.2). Comme on l'avait dit plus haut, la décomposition des images avec (III.50) donne plus de degrés de liberté sur



**Tableau III.2:** Erreurs entre modes extraits avec l'EMD et la  $\delta$ -EMD, et les composantes exactes des images  $I$  et  $J$

f	I		J	
	2D $\delta$ -EMD	2D EMD	2D $\delta$ -EMD	2D EMD
$MSE(f_2, \delta-IMF_1^f)$	0.0319	0.2075	0.0383	0.2134
$\ f_2 - \delta-IMF_1^f\ _{L^2(\mathbb{R}^2)}$	53.6	136.6571	58.7	138.5962
$Q(f_2, \delta-IMF_1^f)$	0.93	0.5247	0.71	0.5683
$MSE(f_1, \delta-IMF_2^f)$	0.0319	0.1814	0.0383	0.2921
$\ f_1 - \delta-IMF_2^f\ _{L^2(\mathbb{R}^2)}$	53.6	127.7726	58.7	162.1362
$Q(f_1, \delta-IMF_2^f)$	0.88	0.5042	0.73	0.3837

l'extraction du niveau des détails. Nous avons comparé notre méthode au Bidimensional EMD (BEMD) proposé dans (27).

Nous précisons quelques remarques d'ordre pratique pour le cas des images réelles. Dans (III.36), on peut remarquer l'opérateur  $\Delta_x^2$  qui implique de faire des dérivations sur l'image jusqu'à l'ordre 4. Pour éviter alors des valeurs erronées des dérivées, on a appliqué un filtrage passe-bas sur toutes les dérivées secondes.

Les résultats obtenus montrent tout d'abord que la 2D  $\delta$ -EMD se comporte comme une méthode d'analyse multi-échelle pour les images. On a vu que pour des images synthétiques (cf. Section III.5.2), le premier mode représente la plus haute fréquence. Pour des images réelles, la première 2D  $\delta$ -IMF va alors correspondre aux zones inhomogènes, à certaines textures, aux contours, ... On constate sur les résultats obtenus que les détails dans les images sont de moins en moins ressortis au fur et à mesure qu'on avance sur le rang des modes. On peut aussi noter que les premières 2D  $\delta$ -IMF (Figures III.9-(b), III.13-(b), III.16-(b), III.19-(b) et III.22-(b)) sont plus riches en information que les premières 2D IMF obtenues avec la BEMD (Figures III.9-(a), III.13-(a), III.16-(a), III.19-(a) et III.22-(a)). Aussi, contrairement aux 2D  $\delta$ -IMF, on voit que les structures les plus pertinentes des images disparaissent totalement à partir des troisièmes 2D IMF.

Les résidus sont supposés contenir la tendance globale des images. On voit sur les résultats que les résidus obtenus avec notre approche (Figures III.11-(b), III.14-(d), III.17-(d), III.20-(d) et III.23-(d)) sont beaucoup plus proches de cette notion que ceux obtenus avec la BEMD (Figures III.11-(a), III.14-(c), III.17-(c), III.20-(c) et III.23-(c)) qui ne représentent rien par rapport aux images originales (Figures III.8, III.12, III.15, III.18 et III.21).



*Figure III.8: Yaye*

### III.6 Conclusion

Différentes versions de l'EMD  $2D$  existent actuellement, sans qu'une analyse mathématique de la méthode ne soit faite. Dans ce chapitre, nous nous sommes essentiellement intéressés à cela et avons apporté des contributions théoriques importantes sur la question, validées aussi numériquement. Nous avons également proposé un nouvel algorithme EMD  $2D$ . Dans cette étude, nous avons proposé de calculer localement les enveloppes supérieures et inférieures, respectivement avec les opérateurs continus sup et inf. Nous avons alors proposé de calculer la moyenne locale  $2D$  d'une manière différente par rapport à ce qui se fait classiquement, mais équivalente dans un sens. L'intérêt majeur de cette approche étant de pouvoir faire du calcul différentiel et ainsi montrer que les itérations du  $2D$  SP peuvent être approchées par la résolution d'une certaine EDP ; ce qui constitue un premier résultat important.

Avec cette formulation par EDP, nous avons montré que la condition de moyenne nulle pour obtenir une IMF  $2D$  peut être très finement approchée à un  $\epsilon$  près avec les notions  $2D$   $p$   $\delta$  - IMF que nous avons introduites. Cela nous a permis d'apporter des justifications théoriques des modes empiriques  $2D$  et d'en donner des caractérisations analytiques. Nous insistons sur le fait que leurs définitions ne reposent que sur des critères intuitifs ou bien basés sur des simulations (cf. Définitions III.1 et III.2). Cela constitue donc une autre contribution importante de notre travail.

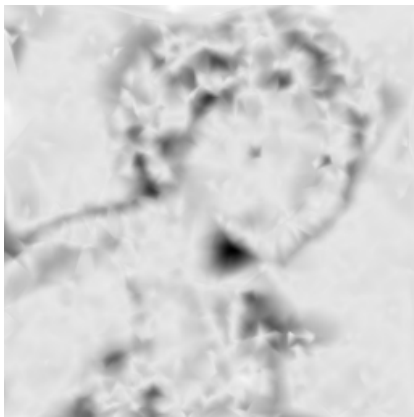
Comme nous l'avons vu à la section III.5, la résolution numérique du modèle d'EDP proposé montre que les composantes des images synthétiques sont bien modélisées par les  $2D$   $\delta$ -IMF, malgré des erreurs très faibles (cf. Tableau III.2). Également, les résultats numériques confirment bien le fait que la  $2D$   $\delta$ -EMD proposée se comporte comme un banc de filtres, et cela aussi bien pour des images synthétiques que réelles, comme pour le cas en  $1D$ , en ce sens qu'elle permet la séparation des composantes des images de la plus haute fréquence vers



(a)



(b)

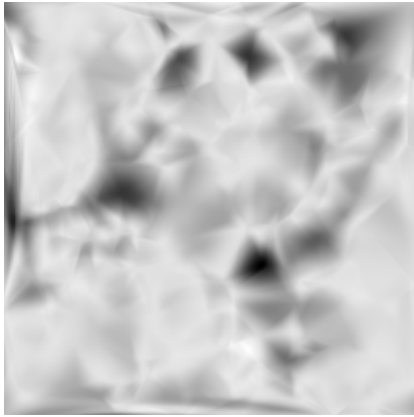


(c)

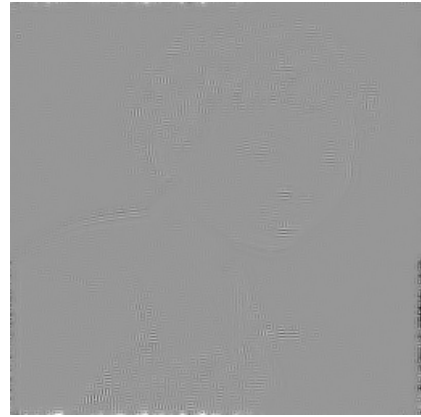


(d)

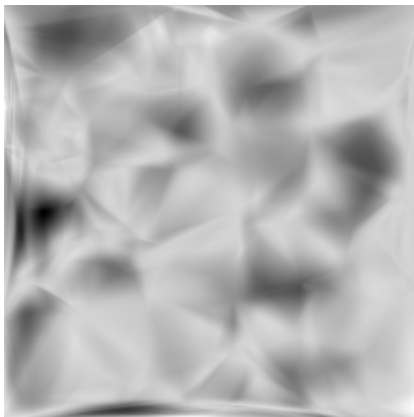
**Figure III.9:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF<sub>1</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF<sub>2</sub> (c). 2D  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



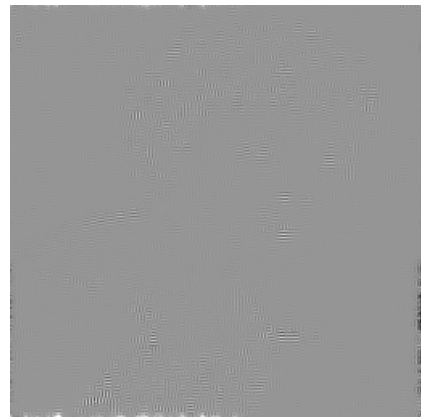
(a)



(b)

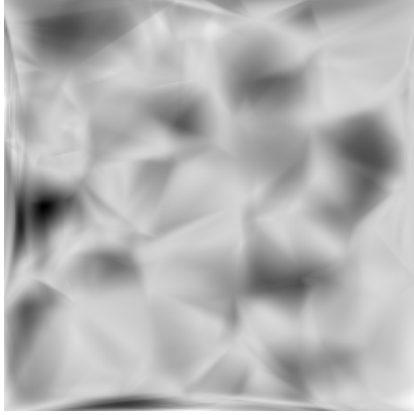


(c)



(d)

**Figure III.10:** Comparaison entre la BEMD et la  $2D$   $\delta$ -EMD. Troisièmes modes :  $2D$  IMF<sub>3</sub> (a).  $2D$   $\delta$ -IMF<sub>3</sub> (b). Quatrièmes modes :  $2D$  IMF<sub>4</sub> (c).  $2D$   $\delta$ -IMF<sub>4</sub> (d)



(a)



(b)

**Figure III.11:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Résidus :  
BEMD (a). 2D  $\delta$ -EMD (b)



**Figure III.12:** Cameraman



(a)



(b)

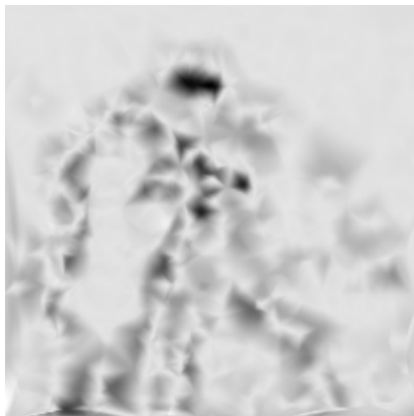


(c)

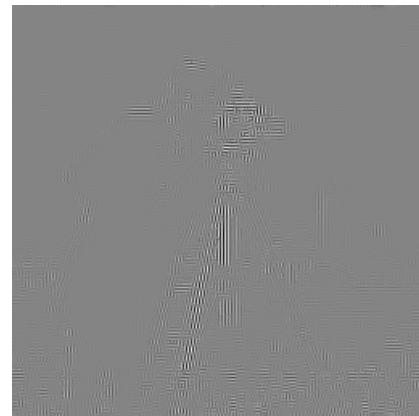


(d)

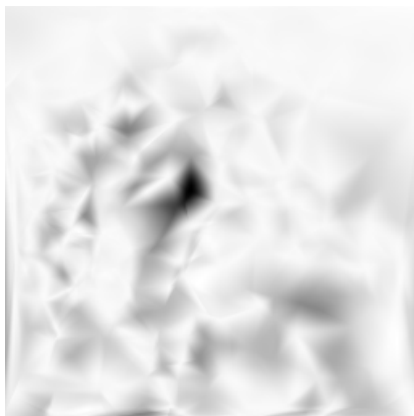
**Figure III.13:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF<sub>1</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF<sub>2</sub> (c). 2D  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



(a)



(b)

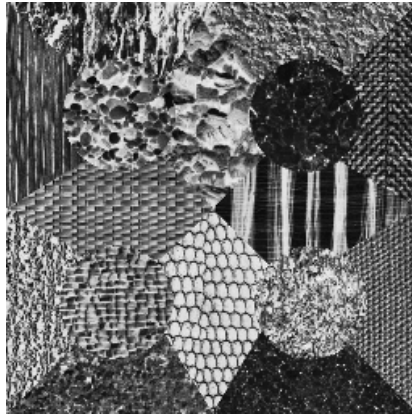


(c)



(d)

**Figure III.14:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : 2D IMF<sub>3</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). 2D  $\delta$ -EMD (d)

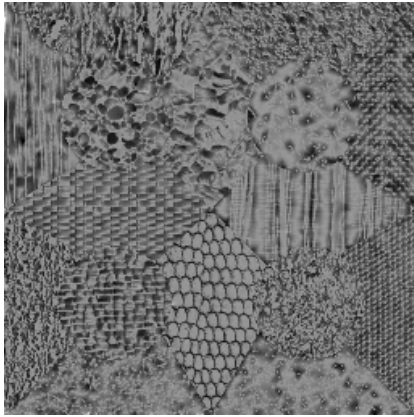


*Figure III.15:* Image de Texture

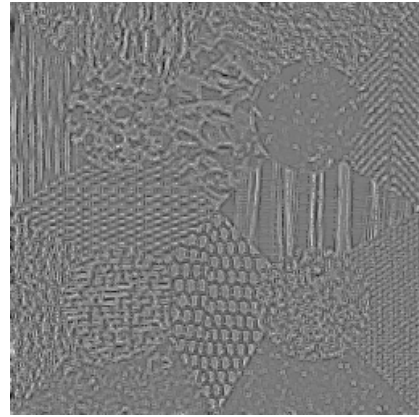
la plus basse fréquence. En plus de l'aspect théorique mis en avant dans cette étude, notre approche par EDP de l'EMD  $2D$  permet d'éliminer les problèmes d'interpolation surfacique, utilisée jusqu'ici dans la plupart des versions  $2D$  actuelles pour la construction des enveloppes supérieures et inférieures. Cela est d'autant plus important qu'il permet de réduire considérablement le temps de calcul pour estimer les enveloppes, particulièrement, pour les espaces de dimension supérieure. De plus, la  $2D$   $\delta$ -EMD améliore l'EMD  $2D$  classique et donne plus de degrés de liberté sur l'extraction du niveau de détails pour les images réelles. Dans ce travail, nous avons cependant négligé le reste dans le développement de Taylor, et le paramètre  $\delta$  est choisi empiriquement. Aussi, comme dans le cas  $1D$ , le critère d'arrêt reste un problème lorsque l'image est à moyenne nulle.

Nous avons proposé, dans cette première partie, beaucoup de résultats théoriques concernant l'EMD en  $1D$  et en  $2D$ , contribuant de la sorte au formalisme mathématique et à la compréhension de la méthode, définie initialement par un algorithme. Nous avons ainsi pu apporter des justifications théoriques aux modes empiriques  $1D$  et  $2D$ , définis intuitivement ou sur la base de simulations. Les modes empiriques générés par la décomposition par EMD sont des fonctions AM-FM. Ce type de modèle est bien connu en traitement du signal et présente beaucoup d'intérêts en analyse temps-fréquence par exemple. Il a récemment été étendu pour le cas multidimensionnel et offre des possibilités intéressantes en traitement d'images. Nous allons précisément étudier ces modèles AM-FM pour l'analyse d'images dans la deuxième partie.

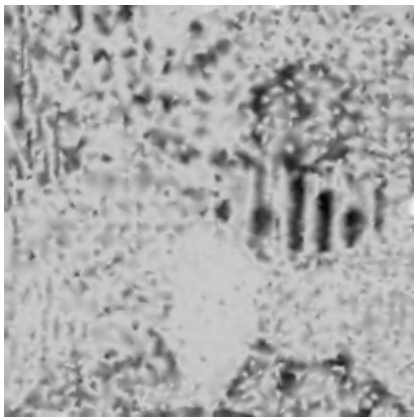




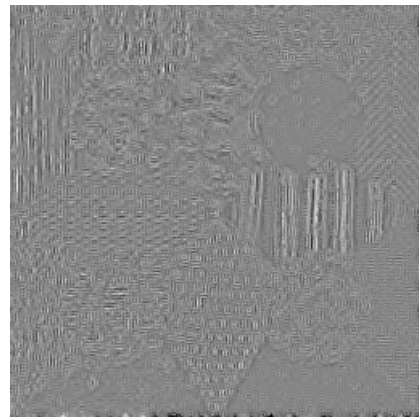
(a)



(b)

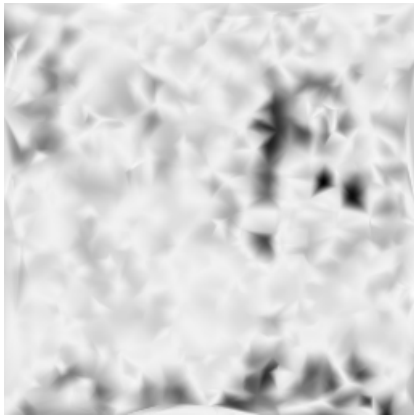


(c)

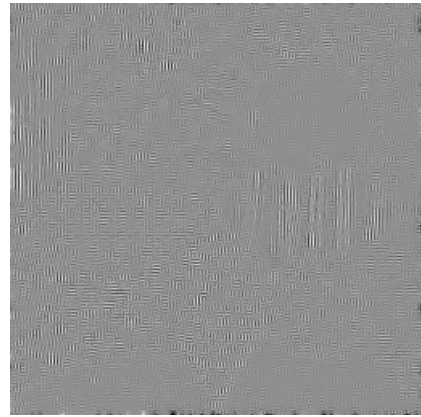


(d)

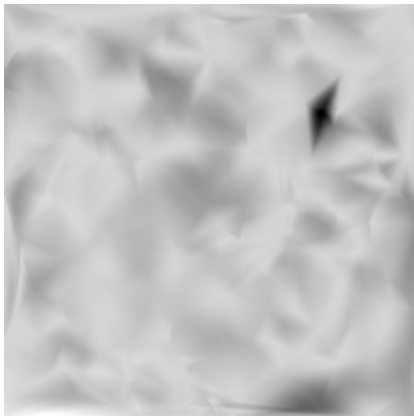
**Figure III.16:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF<sub>1</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF<sub>2</sub> (c). 2D  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



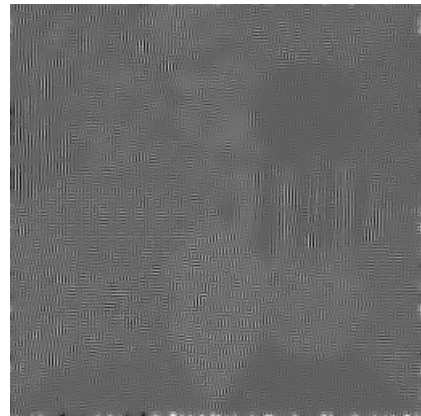
(a)



(b)

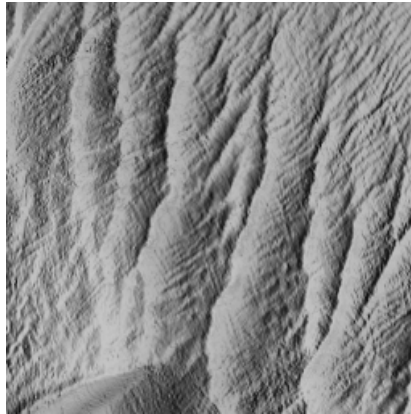


(c)

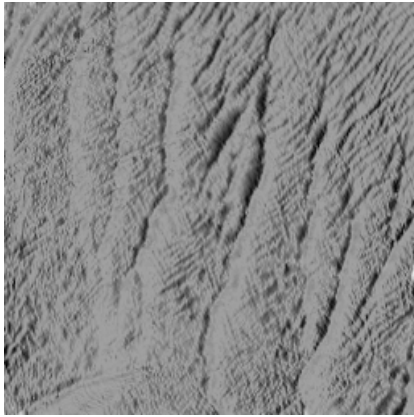


(d)

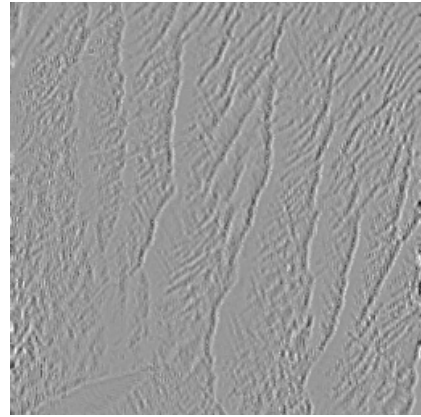
**Figure III.17:** Comparaison entre la BEMD et la  $2D \delta$ -EMD. Troisièmes modes :  $2D IMF_3$  (a).  $2D \delta$ - $IMF_3$  (b). Résidus : BEMD (c).  $2D \delta$ -EMD (d)



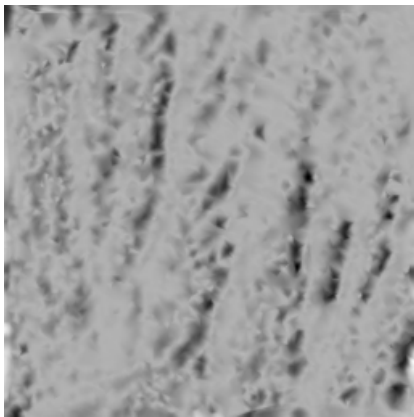
*Figure III.18:* Image bathymétrique de fond marin



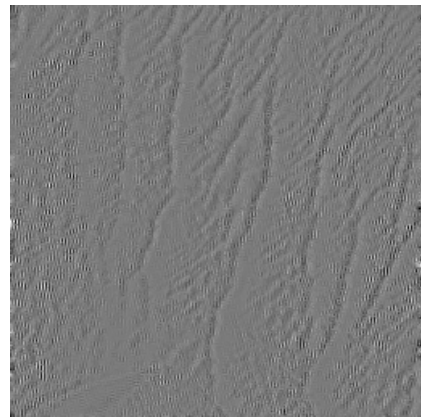
(a)



(b)

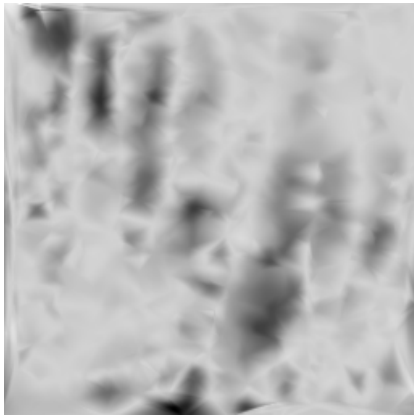


(c)

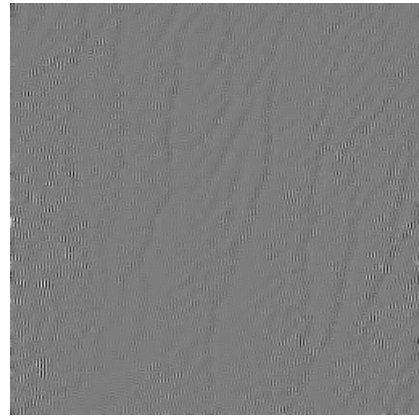


(d)

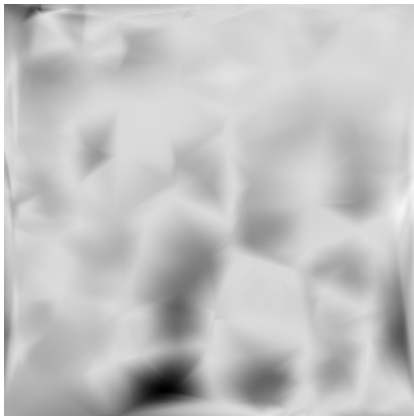
**Figure III.19:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF<sub>1</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF<sub>2</sub> (c). 2D  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



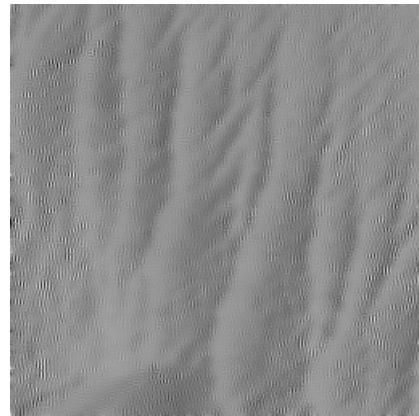
(a)



(b)

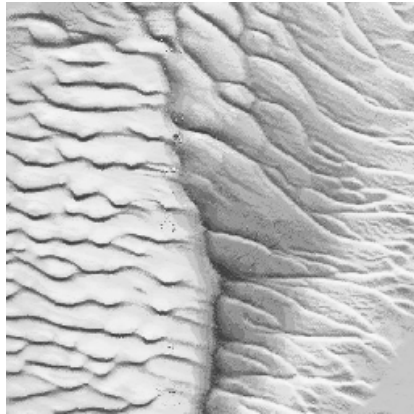


(c)

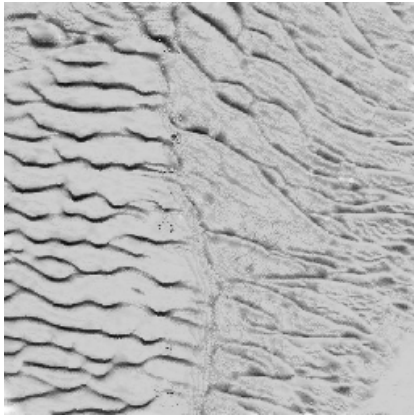


(d)

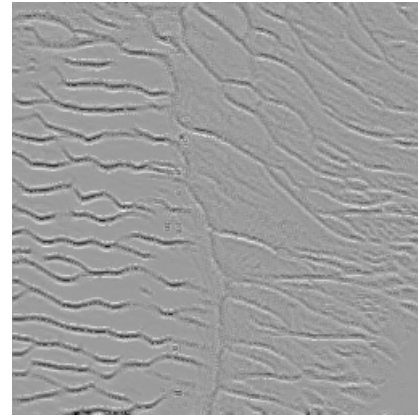
**Figure III.20:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Troisièmes modes : 2D IMF<sub>3</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>3</sub> (b). Résidus : BEMD (c). 2D  $\delta$ -EMD (d)



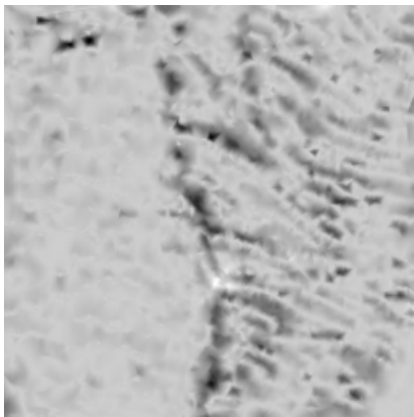
*Figure III.21:* Image sonar de fond marin



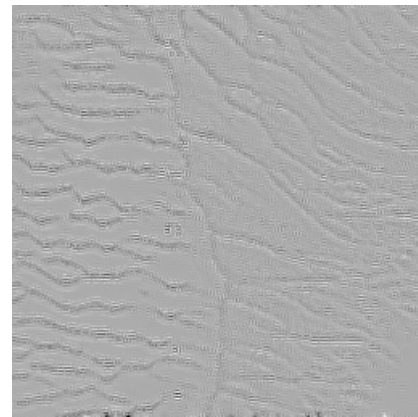
(a)



(b)

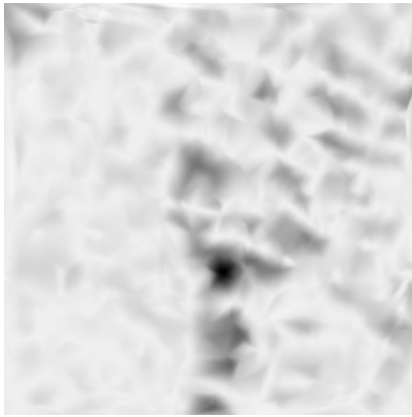


(c)

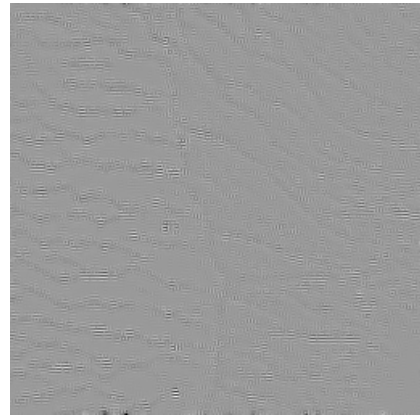


(d)

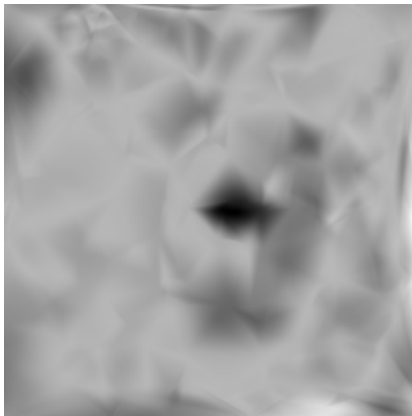
**Figure III.22:** Comparaison entre la BEMD et la 2D  $\delta$ -EMD. Premiers modes : 2D IMF<sub>1</sub> (a). 2D  $\delta$ -IMF<sub>1</sub> (b). Deuxièmes modes : 2D IMF<sub>2</sub> (c). 2D  $\delta$ -IMF<sub>2</sub> (d)



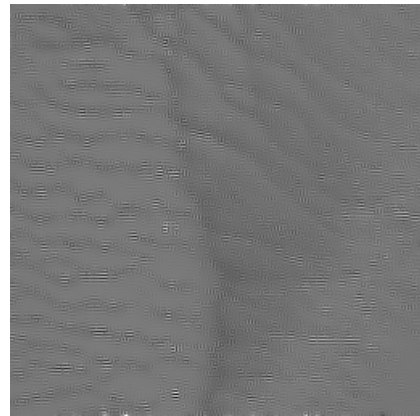
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure III.23:** Comparaison entre la BEMD et la  $2D \delta$ -EMD. Troisièmes modes :  $2D IMF_3$  (a).  $2D \delta$ - $IMF_3$  (b). Résidus : BEMD (c).  $2D \delta$ -EMD (d)





Deuxième partie

Modèles AM-FM pour l'analyse  
d'images



---

# Démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser

---

## Sommaire

<b>IV.1 Introduction</b>	108
<b>IV.2 Quelques notions et modélisation AM-FM d'une image</b>	108
IV.2.1 Notions AM et FM d'une image	108
IV.2.2 Modèle AM-FM pour une image	109
<b>IV.3 Méthode par image analytique</b>	111
IV.3.1 Cas continu	111
IV.3.2 Cas discret	112
<b>IV.4 Opérateurs d'énergie de Teager-Kaiser</b>	113
IV.4.1 TKEO 1D	114
IV.4.2 TKEO 2D	116
<b>IV.5 Méthode par séparation d'énergie</b>	117
IV.5.1 Algorithme discret DESA	117
IV.5.2 Algorithme continu ESA	117
<b>IV.6 Démodulation d'images réelles</b>	118
IV.6.1 Algorithme de démodulation	120
IV.6.2 Résultats numériques	123
<b>IV.7 Conclusion</b>	136

---

*Dans ce chapitre, nous présentons les outils nécessaires à la compréhension de la démodulation des images. Nous commençons par introduire les notions de modèles AM-FM (AM pour Amplitude Modulation et FM pour Frequency Modulation) et de démodulation pour les images. Dans un second temps, nous proposons une amélioration dans la démodulation des images réelles avec l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser 2D et apportons une justification théorique du calcul de l'énergie de Teager-Kaiser des composantes de l'image réelle, qui sont obtenues par une décomposition en sous bandes avec des filtres de Gabor.*

## IV.1 Introduction

Les modèles AM-FM ont initialement été introduits par Kaiser (35) pour le traitement du signal de la parole. Ils sont introduits en traitement d'images par Maragos et al. (36). Afin de mieux cerner la démodulation des images, nous examinons deux méthodes de démodulation d'images : nous exposons d'abord la méthode par image analytique (IA), basée sur la transformation de Hilbert en  $2D$  et introduite par Havlicek (62). La deuxième approche est initiée par Maragos et al. (63) avec l'algorithme discret, le DESA (Discrete Energy Separation Algorithm), et sa version continue, l'ESA (Energy Separation Algorithm), proposée par Maragos et Bovik (64). Le DESA comme l'ESA sont basés sur l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser (TKEO). Nous parlerons plus en détails de cet opérateur, sur lequel d'ailleurs, l'algorithme de démodulation que nous proposons est basé. Ces deux méthodes ne sont applicables que pour des images à bandes étroites, ce qui est rarement le cas pour la plupart des images réelles. Une extension est récemment proposée par Havlicek et al. (48) pour des images réelles. Nous verrons que leur approche présente certaines insuffisances auxquelles nous verrons comment y remédier.

Dans ce chapitre, nous définissons de nombreuses notions relatives à la démodulation des images. Ces notions nous serviront aussi bien pour l'algorithme que nous allons présenter, que pour le Chapitre V.

L'utilisation du TKEO pour la démodulation se base sur certaines d'approximations justifiées théoriquement dans Maragos et Bovik (73) pour des images monocomposantes. Pour le cas multicomposant, une preuve est apportée par Havlicek et al. (74) avec l'approche par IA avec les QEA (Quasi-Eigenfunction Approximations). Avec l'approche par séparation d'énergie, une justification intuitive faisait état. Nous en proposons une preuve dans ce chapitre. L'implémentation de certains algorithmes que nous présentons ici nous a amené à en proposer une amélioration significative pour la démodulation d'images réelles. Pour terminer, nous verrons comment cette modélisation AM-FM permet de faire une analyse des composantes homogènes et même complexes des structures dans les images.

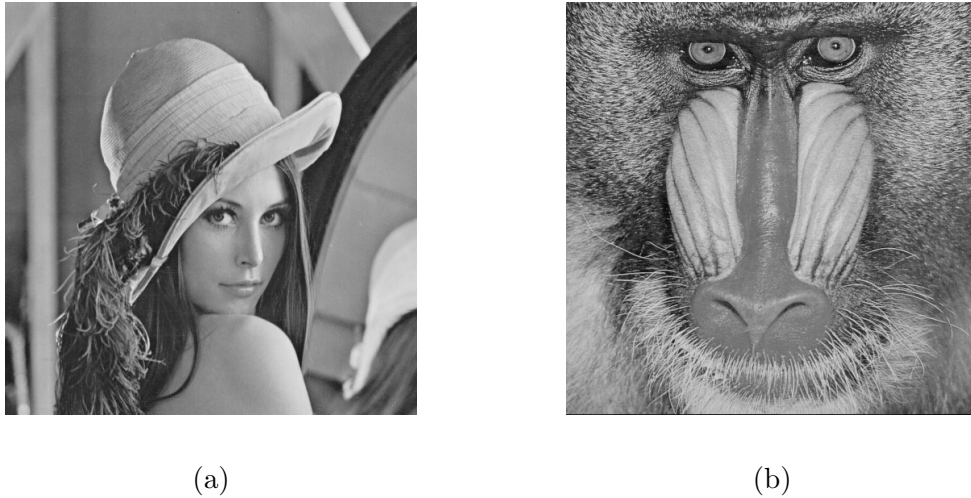
Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la Section IV.2, nous définissons les notions d'amplitude et de fréquence d'une image, et nous parlons de la modélisation AM-FM. Nous exposons l'approche de démodulation par IA en continu et en discret dans la Section IV.3. Les opérateurs TKEO sont introduits en  $1D$  et  $2D$  dans la Section IV.4. Cela nous permet de présenter les méthodes de démodulation par séparation d'énergie, le DESA et l'ESA, dans la Section IV.5. L'algorithme que nous proposons est introduit dans la Section IV.6. C'est aussi dans cette partie que nous montrons les résultats numériques obtenus avec notre approche et comparés à la méthode proposée par Havlicek et al. (48).

## IV.2 Quelques notions et modélisation AM-FM d'une image

### IV.2.1 Notions AM et FM d'une image

Nous commençons par illustrer les notions d'amplitude et de phase d'une image. Pour ce faire on utilise les images de Lena (Figure IV.1-(a)) et de Mandrill (Figure IV.1-(b)).

Pour mieux comprendre ces notions, nous allons les extraire pour chacune des images avec la



**Figure IV.1:** Lena (a). Mandrill (b)

transformée de Fourier, puis les interchanger. Comme on le voit sur la Figure IV.2, on peut noter que l'information donnée par la phase est plus pertinente en ce qui concerne les contours et autres zones inhomogènes de l'image. La fréquence est donnée par le gradient de la phase. Quant à l'amplitude, elle nous renseigne beaucoup plus sur les niveaux de gris l'image. Ce qui nous amène aux propriétés de l'amplitude instantanée (AM) et de la fréquence instantanée (FM) d'une image établies par Havlicek et al. (48), à savoir :

1. La composante **AM** renseigne sur le niveau de contraste des textures, plus précisément, sur la disparité en intensité entre les textures sombres et brillantes.
2. La partie **FM** permet de capturer l'orientation des textures locales, la granularité et les contours de l'image.

### IV.2.2 Modèle AM-FM pour une image

Étant donnée une image discrète  $I_d$ , désignons par  $I$  son interpolée continue. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , le domaine de l'image. En pratique,  $\Omega$  est un carré ou un rectangle.

**Définition IV.1.** On dit que  $I$  est une image AM-FM monocomposante si  $I$  peut se mettre sous la forme :

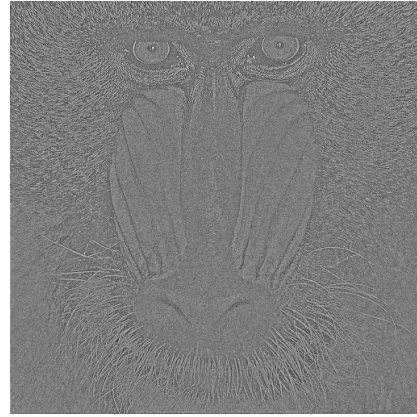
$$I(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) \cos[\varphi(x_1, x_2)], \forall (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (\text{IV.1})$$

où  $a(x_1, x_2)$  est une fonction positive à valeurs réelles et  $\varphi(x_1, x_2)$  une fonction de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ .

Dans ce cas,  $a$  est l'amplitude de  $I$  et  $\varphi$  désigne la phase de l'image  $I$ . Les fréquences spatiales de  $I$  sont données par le gradient de la phase  $\varphi$  :



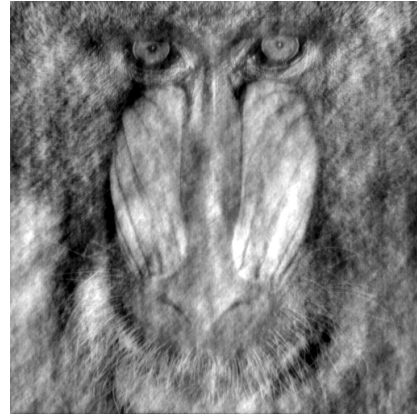
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure IV.2:** Phase de Lena (a). Phase de Mandrill (b). Amplitude de Mandrill et phase de Lena (c). Amplitude de Lena et phase de Mandrill (d)

**Définition IV.2.** Si  $I$  vérifie (IV.1), alors  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  les fonctions positives  $a(x_1, x_2)$  représente la composante (ou fonction) AM de  $I$  et  $\nabla\varphi(x_1, x_2) = [U(x_1, x_2) V(x_1, x_2)]^t$  où

$$U(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x_1, x_2) \quad (\text{IV.2})$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} \varphi(x_1, x_2) \quad (\text{IV.3})$$

représentent la composante (ou fonction) FM de  $I$ . Les fonctions  $U$  et  $V$  correspondent respectivement aux fréquences instantanées spatiales horizontale et verticale.

**Définition IV.3.** On dit qu'une image quelconque  $I$  est démodulée si on peut trouver  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  les fonctions positives  $a(x_1, x_2)$  et les fonctions  $U(x_1, x_2)$  et  $V(x_1, x_2)$  telles que (IV.1) soit vérifiée.

On voit donc bien que la question posée par la démodulation est donc un problème mal posé. En effet, étant donnée  $I$ , il existe une infinité de fonctions  $a(x_1, x_2)$ ,  $U(x_1, x_2)$  et  $V(x_1, x_2)$  vérifiant l'équation (IV.1). En général, uniquement un nombre restreint de couples de fonctions  $a(x_1, x_2)$ ,  $\varphi(x_1, x_2)$  permet une interprétation physique de l'information qu'elles véhiculent. Il y a deux approches différentes, mais équivalentes, pour résoudre ce problème : la méthode par image analytique (IA) proposé par Havlicek (62), et la méthode par séparation d'énergie, le DESA (Discrete Energy Separation Algorithm) de Maragos et al. (36) ou l'ESA (Energy Separation Algorithm) de Maragos et Bovik (64).

En somme, ce qu'on recherche avec les modèles AM-FM, c'est de pouvoir décomposer toute image en une composante qui regroupe les niveaux de gris des parties texturées de l'image (AM) et une composante contenant la géométrie de l'image (FM). Ce genre de décomposition continue d'ailleurs d'intéresser les traiteurs d'images. Comme exemples, nous citons les modèles de Meyer (49), Vese et Osher (50), Osher et al. (51), et enfin ceux de Aubert et Aujol (52) et Aujol et Aubert (53). Nous insistons sur le fait que ces modèles proposent une décomposition de l'image en une somme de telles composantes par approches variationnelles et équations aux dérivées partielles.

La modélisation AM et FM a trouvé ces dernières années de nombreuses applications en traitement d'images. Comme exemples, nous citons ses applications en analyse d'images et de séquences vidéo (37 ; 38 ; 39), en classification d'images (40), en segmentation d'images (41 ; 42 ; 43), analyse de texture avec (44), imagerie médicale avec (45) et pour le suivi d'objets (46 ; 47).

La section qui va suivre a pour objet de montrer précisément comment trouver les composantes AM et FM avec la méthode de démodulation d'images avec l'approche par IA.

### IV.3 Méthode par image analytique

La méthode de démodulation par IA est introduite dans (62 ; 48). L'IA est une extension du signal analytique initié par Gabor (80) et Ville (81). Le signal analytique sert principalement à la démodulation de signaux à bande étroite (voir (113), par exemple).

#### IV.3.1 Cas continu

Soit  $I$  une image continue définie sur  $\Omega$ . En suivant Havlicek (62), l'image analytique se définit comme suit :

**Définition IV.4.** *L'image analytique, notée  $I_a$ , associée à  $I$  est définie  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  par :*

$$I_a(x_1, x_2) = I(x_1, x_2) + j\mathcal{H}[I(x_1, x_2)] \quad (\text{IV.4})$$

où  $\mathcal{H}[I]$  est la transformée de Hilbert 2D de  $I$ .

En suivant Havlicek et al. (114 ; 115),  $\mathcal{H}$  peut être calculée par  $\mathcal{H}_1$  ou  $\mathcal{H}_2$ , définies



respectivement par rapport aux axes de coordonnées  $x_1$  ou  $x_2$ , par :

$$\mathcal{H}_1 [I(x_1, x_2)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} I(x_1 - \xi, x_2) \frac{d\xi}{\xi} \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathcal{H}_2 [I(x_1, x_2)] = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} I(x_1, x_2 - \xi) \frac{d\xi}{\xi} \quad (\text{IV.6})$$

**Propriétés IV.1.** *L'image analytique a les propriétés suivantes :*

1. elle associe à l'image  $I$ , une unique paire de fonctions AM-FM
2. le spectre de Fourier de  $I$  est redondant, car il est à symétrie hermitienne (i.e  $\hat{I}$  est entièrement déterminée soit par ses valeurs positives, soit par ses valeurs négatives). L'image analytique permet de réduire cette redondance. En effet :

$$\hat{I}_a(\omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 2\hat{I}(\omega_1, \omega_2) & \text{si } \omega_1 \text{ et } \omega_2 \text{ sont positifs} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.7})$$

3. elle ne vérifie cependant pas les équations de Cauchy-Riemann comme ce qui est le cas en une dimension.

Une fois que l'image analytique  $I_a$  est construite suivant (IV.4), on déduit alors  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  les uniques fonctions AM et FM (62) :

$$a(x_1, x_2) = |I_a(x_1, x_2)|. \quad (\text{IV.8})$$

$$\nabla\varphi(x_1, x_2) = \text{Re} \left[ \frac{\nabla I_a(x_1, x_2)}{jI_a(x_1, x_2)} \right]. \quad (\text{IV.9})$$

L'intérêt de la méthode par image analytique est qu'elle donne des valeurs exactes des signes des fréquences contrairement à la méthode par séparation d'énergie comme nous le verrons dans la Section IV.5.

### IV.3.2 Cas discret

Soit  $I_d$  une image discrète de taille  $M \times N$ .

**Définition IV.5.** *L'image analytique associée à  $I_d$  est donnée par :*

$$\tilde{I}_d(k, l) = I_d(k, l) + j\mathcal{H}_d [I_d(k, l)], \forall (k, l) \in [0, M] \times [0, N]. \quad (\text{IV.10})$$

où  $\mathcal{H}_d [I_d]$  est la transformée d'Hilbert discrète 2D de  $I_d$ .

Notons par  $\hat{I}_d$  la transformée de Fourier discrète (DFT) de  $I_d$ , alors la DFT de  $\mathcal{H}_d [I_d]$  de  $I_d$ , notée  $\hat{\mathcal{H}}_d [I_d]$ , est déterminée par (48) :

$$\hat{\mathcal{H}}_d [I_d(u, v)] = \mathcal{M}(u, v) \cdot \hat{I}_d(u, v), \quad (\text{IV.11})$$

où :

$$\mathcal{M}(u, v) = \begin{cases} -j, & u = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1 \\ +j, & u = \frac{M}{2} + 1, \frac{M}{2} + 2, \dots, M - 1 \\ -j, & u = 0, v = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ -j, & u = \frac{M}{2}, v = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ +j, & u = 0, v = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1 \\ +j, & u = \frac{M}{2}, v = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{IV.12})$$

En prenant la DFT de (IV.10) et en utilisant les équations (IV.11) et (IV.12), on peut alors calculer la DFT de l'IA  $I_a$ .  $I_a$  est alors obtenue par DFT inverse. Une fois obtenue, les composantes AM et FM sont données  $\forall (k, l) \in [0, M] \times [0, N]$  par (48) :

$$a(k, l) = |\tilde{I}_a(k, l)| \quad (\text{IV.13})$$

$$|U(k, l)| \approx \arccos \left[ \frac{\tilde{I}_a(k+1, l) + \tilde{I}_a(k-1, l)}{2\tilde{I}_a(k, l)} \right] \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{signe}(U(k, l)) \approx \text{signe} \left\{ \arcsin \left[ \frac{\tilde{I}_a(k+1, l) - \tilde{I}_a(k-1, l)}{2j\tilde{I}_a(k, l)} \right] \right\} \quad (\text{IV.15})$$

$$|V(k, l)| \approx \arccos \left[ \frac{\tilde{I}_a(k, l+1) + \tilde{I}_a(k, l-1)}{2\tilde{I}_a(k, l)} \right] \quad (\text{IV.16})$$

$$\text{signe}(U(k, l)) \approx \text{signe} \left\{ \arcsin \left[ \frac{\tilde{I}_a(k, l+1) - \tilde{I}_a(k, l-1)}{2j\tilde{I}_a(k, l)} \right] \right\}, \quad (\text{IV.17})$$

où *signe* est la fonction définie par :

$$\text{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans la section qui suit, nous introduisons les opérateurs de Teager-Kaiser en une et deux dimensions.

## IV.4 Opérateurs d'énergie de Teager-Kaiser

L'objet de cette partie est d'introduire l'opérateur TKEO en 1D, puis sa version étendue, le TKEO 2D.

#### IV.4.1 TKEO 1D

L'insuffisance d'une approche linéaire pour modéliser la parole a conduit Teager (65 ; 66 ; 67 ; 68 ; 69) à introduire un opérateur discret qui estime efficacement l'énergie nécessaire à la création du signal de parole à bande étroite et pour lequel les fréquences instantanées sont concentrées autour de la fréquence de résonance (ou formant) d'une porteuse sinusoïdale. Cet opérateur sera ensuite introduit dans la littérature en traitement du signal et développé de manière systématique par Kaiser (35 ; 70).

**Définition IV.6.** Soit  $S[n]$  un signal discret. En discret, l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser, noté  $\psi_d$ , est défini par :

$$\psi_d(S[n]) = (S[n])^2 - S[n+1] \cdot S[n-1]. \quad (\text{IV.18})$$

Considérons le signal discret suivant :

$$S[n] = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \theta), \quad (\text{IV.19})$$

avec  $A$  étant une constante réelle. En appliquant  $\psi_d$  à  $S[n]$ , on trouve :

$$\psi_d(S[n]) = A^2 \cdot \sin^2(\omega). \quad (\text{IV.20})$$

Kaiser montre alors dans (35) que :

$$\psi_d(S[n]) \approx A^2 \cdot \omega^2, \quad (\text{IV.21})$$

avec une erreur d'approximation inférieure à 11% pour  $\omega < \frac{\pi}{4}$ . Le terme *énergie* vient du fait que le membre de droite (IV.21) approxime l'énergie nécessaire pour créer le signal  $S[n]$  (Équation IV.19) (voir (35)). L'analogie se fait en considérant un système mécanique constitué d'une masse et d'un ressort (Figure IV.3). Nous le verrons après avoir défini la version continue du TKEO :

**Définition IV.7.** Soit  $S(x)$  un signal réel défini sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^2$  dans  $\mathbb{R}$ . En continu, l'opérateur d'énergie de Teager-Kaiser, noté  $\psi$ , est défini par :

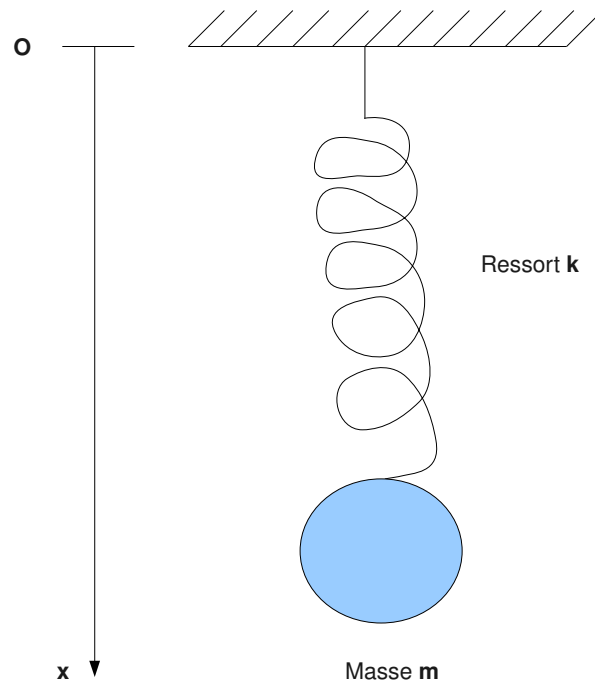
$$\psi[S(x)] = \left( \frac{dS}{dx}(x) \right)^2 - S(x) \frac{d^2S}{dx^2}(x) \quad (\text{IV.22})$$

La version continue du TKEO a été beaucoup étudiée par Kaiser (70 ; 116) et Maragos et al. (117 ; 118 ; 119).

Les versions continue et discrète du TKEO sont utilisées en analyse temps-fréquence pour estimer les amplitude et fréquence instantanées des signaux (pour plus d'information, voir (63 ; 119 ; 120 ; 121)).

Pour revenir au système masse-ressort dont a parlé plus haut, on considère le signal continu :

$$S(x) = A \cos(\omega x + \theta). \quad (\text{IV.23})$$



**Figure IV.3:** Système masse-ressort

On montre alors que :

$$\psi[S(x)] = A^2\omega^2. \quad (\text{IV.24})$$

Si on prend  $S(x)$  comme étant l'allongement du ressort, alors d'après le principe fondamental de la dynamique,  $S(x)$  est solution de l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{d^2S(x)}{dx^2} + \frac{k}{m}S(x) = 0, \quad (\text{IV.25})$$

où  $k$  est la raideur du ressort et  $m$  la masse. La solution de (IV.25) est de la forme (IV.23), où  $A$  désigne l'amplitude des oscillations,  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation propre et  $\theta$  la phase initiale. On peut alors calculer l'énergie  $E$  du système comme la somme des énergies cinétique et

potentielle, soit :

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \left( k(S(x))^2 + m \left( \frac{dS(x)}{dx} \right)^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \\ &\approx A^2 \omega^2. \end{aligned} \tag{IV.26}$$

Les équations (IV.21), (IV.24) et (IV.26) justifient donc le terme *énergie* donné à l'opérateur TKEO.

#### IV.4.2 TKEO 2D

L'extension du TKEO discret en 2D, noté  $\Psi_d$ , est faite par Yu et al. (122) pour la détection de contours dans les images :

**Définition IV.8.** *Étant donnée une image discrète  $I$  de taille  $M \times N$ . On a  $\forall(k, l) \in [0, M] \times [0, N]$  :*

$$\Psi_d[I(k, l)] = 2(I(k, l))^2 - I(k-1, l)I(k+1, l) - I(k, l-1)I(k, l+1) \tag{IV.27}$$

C'est une extension du TKEO discret pour les signaux, suivant les lignes et les colonnes. Cet opérateur discret est aussi utilisé pour le débruitage d'images dans (123) et le rehaussement de contraste (voir (124 ; 125 ; 126). Nous avons d'ailleurs présenté en Annexe A un algorithme de rehaussement de contraste basé sur le TKEO 2D, également proposé dans (127).

Étant donnée une image discrète  $I(k, l) = A \cos(\Omega_1 k + \Omega_2 l)$ , on montre que :

$$\Psi_d[I(k, l)] = A^2 (\sin^2(\Omega_1) + \sin^2(\Omega_2)). \tag{IV.28}$$

La version continue et étendue pour des signaux multidimensionnels a été introduite par (36) :

**Définition IV.9.** *Soit  $I$  l'interpolée continue d'une image discrète définie sur un ouvert borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ . On suppose que  $I$  est de classe  $C^2$  sur  $\Omega$ . Alors,  $\forall x \in \Omega$ , on a :*

$$\Psi[I(x)] = \|\nabla I(x)\|^2 - I(x)\Delta I(x), \tag{IV.29}$$

où  $\Delta$  est l'opérateur Laplacien.

Pour une image  $I(x) = a(x) \cos(\phi(x))$ , Maragos et Bovik (73) montrent que :

$$\Psi[I(x)] \approx [a(x)]^2 |\nabla \phi(x)|^2, \tag{IV.30}$$

avec une erreur d'approximation relative  $\ll 1$ .

Dans la section qui suit, nous parlons de la démodulation des images avec les opérateurs TKEO en  $2D$  ainsi définis.

## IV.5 Méthode par séparation d'énergie

Dans tout ce qui va suivre, nous confondrons, pour des raisons de commodité,  $I$  et  $I_d$ . On les distinguera par rapport à leurs arguments :  $I(x_1, x_2)$  désigne l'image continue, et  $\tilde{I}(k, l)$  l'image discrète.

Nous rappelons que l'objectif est de trouver  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  les fonctions  $a(x_1, x_2)$  (AM) et  $\nabla\varphi(x_1, x_2) = [U(x_1, x_2) V(x_1, x_2)]^t$  (FM) telles que (IV.1) soit vérifiée. Nous exposons ici deux algorithmes basés sur le TKEO  $2D$  qui résolvent ce problème. Nous parlerons d'abord de l'algorithme discret, le DESA proposé par Maragos et al. (36). Dans un second temps, nous parlerons de la version continue, l'ESA proposé par Maragos et Bovik (64).

### IV.5.1 Algorithme discret DESA

Les approximations respectives de la composante AM et des composantes horizontale et verticale FM sont données par (36) :

$$a(k, l) \approx \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k, l)]}{\sin^2(|U(k, l)|) + \sin^2(|V(k, l)|)}} \quad (\text{IV.31})$$

$$|U(k, l)| \approx \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k+1, l) - I(k-1, l)]}{4\Psi_d[I(k, l)]}} \quad (\text{IV.32})$$

$$|V(k, l)| \approx \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d[I(k, l+1) - I(k, l-1)]}{4\Psi_d[I(k, l)]}}. \quad (\text{IV.33})$$

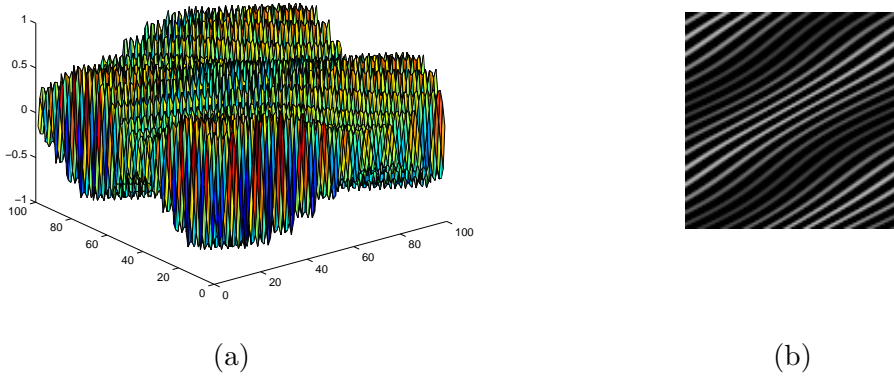
Nous illustrons sur un exemple les notions AM et FM afin de mieux les comprendre. On considère l'image synthétique  $I$  définie pour tout  $m, n = 1, \dots, 100$  par :

$$I(k, l) = 0.5 \left[ 1 + 0.5 \sin \left( \frac{\pi}{30}k + \frac{\pi}{50}l \right) \right] \sin \left[ \frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{5}l + 2 \cos \left( \frac{\pi}{30}k \right) + \cos \left( \frac{\pi}{50}l + \frac{\pi}{2} \right) \right] \quad (\text{IV.34})$$

L'image  $I$  est montrée sur la Figure IV.4. Les résultats de la démodulation sont représentés sur la Figure IV.5.

### IV.5.2 Algorithme continu ESA

En continu, Maragos et Bovik (64) montrent qu'il est possible de séparer l'énergie de l'image de ses composantes AM et FM avec l'ESA en  $2D$ . Les composantes de l'amplitude



**Figure IV.4:** Représentation 3D de  $I$  (cf. Équation (IV.34)) (a).  $I$  en niveau de gris (b)

sont alors données par :

$$a(x_1, x_2) \approx \frac{\Psi[I(x_1, x_2)]}{\sqrt{\Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_1}(x_1, x_2)\right] + \Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_2}(x_1, x_2)\right]}} \quad (\text{IV.35})$$

Les fréquences horizontales et verticales de la composante FM sont données respectivement pour  $i = 1$  et  $i = 2$  par (64) :

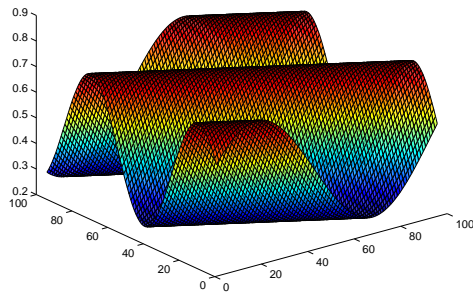
$$\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x_1, x_2)\right| \approx \sqrt{\frac{\Psi\left[\frac{\partial I}{\partial x_i}(x_1, x_2)\right]}{\Psi[I(x_1, x_2)]}}, \quad (\text{IV.36})$$

$\forall i = 1, 2$ .

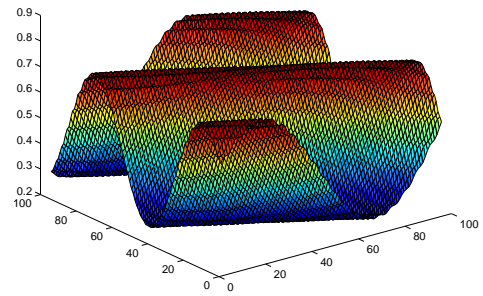
Une étude systématique de la validité des approximations des équations (IV.31-IV.36) est faite dans (64 ; 73). En somme, l'erreur d'approximation est faible en considérant que les amplitude et fréquence instantanées de l'image ne varient pas beaucoup par rapport aux porteuses ; ce qui est vérifié en pratique par beaucoup d'images monocomposantes. Les méthodes DESA et ESA supposent que les images à démoduler sont à bande étroite. Pour des images large bande, un filtrage passe-bande (filtres de Gabor, ondelettes, EMD 2D, ...) est nécessaire avant l'application de ces méthodes.

## IV.6 Démodulation d'images réelles

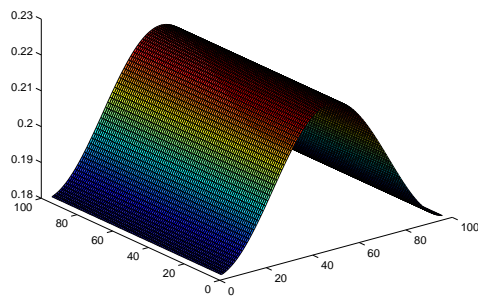
La plupart des images réelles contiennent des informations très riches. Une approche monocomposante s'avère insuffisante pour les modéliser. On sait (71 ; 72) qu'une approche multicomposante permet de bien traiter les images réelles simples et même complexes. Pour plus d'informations sur les notions de modèles monocomposant et multicomposant, le lecteur pourra consulter les travaux dans (2 ; 128 ; 129 ; 3).



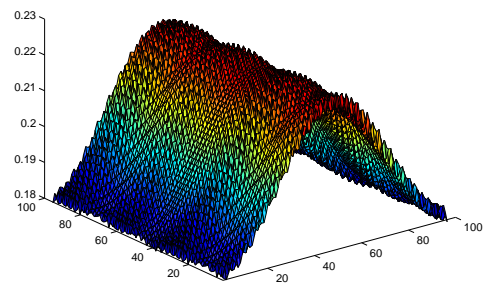
(a)



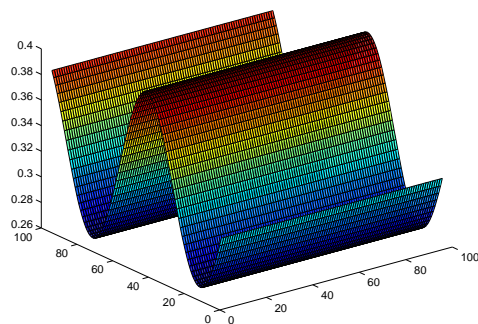
(b)



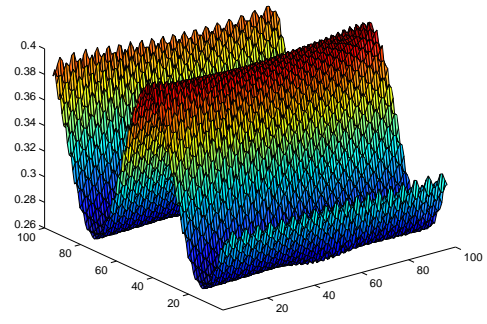
(c)



(d)



(e)



(f)

**Figure IV.5:** Composantes de l'image  $I$  (Équation (IV.34)). Amplitudes :  $a$  réelle (a).  $a$  estimée (b). Fréquences :  $U$  réelle (c).  $U$  estimée (d).  $V$  réelle (e).  $V$  estimée (f)



Récemment, Havlicek et al. (48) ont proposé une méthode de démodulation d'images réelles avec une approche multicomposante. Ils proposent alors une décomposition en sous bandes pour séparer chacune des composantes de l'image avant de leur appliquer la méthode IA ou le DESA. Nous avons d'ailleurs proposé une approche similaire dans (76) et montré qu'on obtient qualitativement de meilleurs résultats de démodulation que le DESA et la méthode IA, et que l'algorithme proposé est plus robuste au bruit. Cependant, comme nous le verrons avec les résultats numériques obtenus, l'application directe d'une méthode de démodulation monocomposante sur les parties ainsi séparées crée des artefacts sur les composantes AM et FM. Cela est en grande partie dû aux filtres de Gabor utilisés pour la décomposition en sous bandes. D'ailleurs, cela est bien mentionné dans (48). Pour y remédier, les auteurs ont proposé des filtrages et autres post-traitements, à posteriori, sur les composantes AM et FM. Le problème que cela pose est qu'il faut, en plus de trouver les fonctions AM et FM, faire des traitements supplémentaires de ces composantes. Nous proposons de faire un filtrage passe-bas en amont du processus de démodulation. Cela compense très bien les dégradations causées par le banc de filtres de Gabor. Il n'y aura plus de post-traitements à faire sur les composantes AM et FM, et ces dernières sont nettement améliorées. L'approche de la démodulation est présentée en détails, et les résultats obtenus sont comparés à la méthode proposée dans (48).

### IV.6.1 Algorithme de démodulation

Soit  $I$  une image réelle. On note par  $\Omega$  le domaine de l'image. On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné.

**Définition IV.10.** On dit que  $I$  est une image AM-FM multicomposante si  $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$  on peut mettre  $I$  sous la forme :

$$I(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos[\varphi_n(x_1, x_2)], \quad (\text{IV.37})$$

où les  $a_n$  sont des fonctions positives et les  $\varphi_n$  sont de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ .

En suivant (48), on modélise  $I$  par une approche multicomposante, à savoir :

$$I(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos[\varphi_n(x_1, x_2)] = \sum_{n=1}^N I_n(x_1, x_2)$$

**Objectif :** On cherche à déterminer, pour chaque  $n = 1, \dots, N$ , les fonctions  $a_n$  et  $\nabla\varphi_n = [U_n \ V_n]^t$  telles que (IV.37) soit vérifiée.

**Idee principale :** Séparer les  $N$  composantes  $I_n$  de  $I$ . Cela est possible avec des filtres de Gabor (voir par exemple les travaux de Bovik et al. (71 ; 72)).

Considérons un banc de filtres de Gabor bidimensionnels de réponses impulsionnelles  $\{g_n\}_{n=1, \dots, N}$  et de réponses fréquentielles notées  $\{G_n\}_{n=1, \dots, N}$ .

Désignons par  $*$  l'opérateur de convolution. Soit  $\tilde{I}_n$  la réponse du  $n^{ieme}$  filtre  $g_n$  :

$$\tilde{I}_n = I * g_n. \quad (\text{IV.38})$$

Supposons pour un pixel  $(x_1, x_2)$  donné qu'on ait :

$$\tilde{I}_n(x_1, x_2) \approx (I_n * g_n)(x_1, x_2), \quad (\text{IV.39})$$

au voisinage de ce pixel.

Soit  $g$  une gaussienne de variance  $\sigma$  et de réponse fréquentielle  $G$ .

On pose  $\forall n, I_n^\sigma = \tilde{I}_n * g$  et  $g_n^\sigma = g_n * g$ . Par suite, on a :

$$I_n^\sigma \approx (I_n * g_n) * g = I_n * (g_n * g) = I_n * g_n^\sigma. \quad (\text{IV.40})$$

On peut remarquer que  $I \in L^\infty(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$ , puisque  $I$  est bornée dans  $\Omega$ . De plus, les fonctions de Gabor et la gaussienne sont de classe  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Alors,  $\forall n = 1, \dots, N$  et  $i = 1, 2$ , on a :

$$\nabla^i (I_n * g_n^\sigma) = I_n * \nabla^i g_n^\sigma, \quad (\text{IV.41})$$

où  $\nabla^1 = \nabla$  est l'opérateur gradient et  $\nabla^2 = \Delta$  l'opérateur Laplacien.

Comme nous l'avons également démontré dans (75), toutes les dérivées s'opèrent maintenant sur les  $g_n^\sigma$ , qui sont de classe  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Cela aura comme conséquence une plus grande robustesse au bruit.

On calcule maintenant l'énergie des  $I_n^\sigma$  en leur appliquant  $\Psi$  (Équation IV.29) :

$$\Psi(I_n^\sigma) = \|\nabla I_n^\sigma\|^2 - I_n^\sigma \Delta I_n^\sigma \quad (\text{IV.42})$$

$$= \|I * \nabla g_n^\sigma\|^2 - (I * g_n^\sigma) \cdot (I * \Delta g_n^\sigma) \quad (\text{IV.43})$$

$$\approx \|I_n * \nabla g_n^\sigma\|^2 - (I_n * g_n^\sigma) \cdot (I_n * \Delta g_n^\sigma). \quad (\text{IV.44})$$

La proposition suivante nous permet de calculer, pour tout  $n$ , l'énergie des composantes  $I_n^\sigma$  (75) :

**Proposition IV.1.** Soit  $I(k, l) = A \cos[2\pi(Uk + Vl)]$ ;  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , une sinusoïde 2D pure où  $A$  est une constante. Soit  $h$  un filtre linéaire invariant par translation, de réponse fréquentielle  $H$ . Alors, l'énergie de  $I$  est donnée par :

$$\Psi_d(I * h) = \Psi_d(I) \cdot |H(U, V)|^2, \quad (\text{IV.45})$$

où  $\Psi_d$  est donnée par l'équation IV.8.

**Preuve IV.1.** Considérons  $I_1(k, l) = A \exp[2i\pi(Uk + Vl)]$ .

$h$  étant un filtre linéaire invariant par translation, donc le filtrage revient à une convolution

discrète. Posons  $g_1 = I_1 * h$ .  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , on a :

$$g_1(k, l) = \sum_p \sum_q h(p, q) I_1(k - p, l - q) \quad (\text{IV.46})$$

$$= \sum_p \sum_q h(p, q) A \exp [2i\pi(U(k - p) + V(l - q))] \quad (\text{IV.47})$$

$$= \sum_p \sum_q h(p, q) A \exp [2i\pi(U(k - p) + V(l - q))] \quad (\text{IV.48})$$

$$= A \exp [2i\pi(Uk + Vl)] \cdot \sum_p \sum_q h(p, q) \exp [-2i\pi(Up + Vq)] \quad (\text{IV.49})$$

$$= I_1(k, l) \cdot H(U, V), \quad (\text{IV.50})$$

En remarquant que  $I(k, l) = \Re[I_1(k, l)]$ , où  $\Re$  désigne la partie réelle, et en posant  $g(k, l) = I * h(k, l)$ , il vient alors  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , que :

$$g(k, l) = \Re [I_1(k, l) \cdot H(U, V)] \quad (\text{IV.51})$$

$$= I(k, l) \cdot H(U, V) \quad (\text{IV.52})$$

$$= \underbrace{A \cdot H(U, V)}_{\text{constante par rapport à } k \text{ et } l} \cdot \cos[2\pi(Uk + Vl)] \quad (\text{IV.53})$$

Il s'en suit, en tenant en compte l'équation (IV.28), que  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$\Psi_d [g(k, l)] = A^2 \cdot |H(U, V)|^2 (\sin^2(U) + \sin^2(V)) \quad (\text{IV.54})$$

$$= \Psi_d [I(k, l)] \cdot |H(U, V)|^2 \quad (\text{IV.55})$$

□

Soit maintenant une image AM-FM définie  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$  par  $I(k, l) = a(k, l) \cos(Uk + Vl)$ . On suppose que  $a$  varie très peu dans le voisinage du pixel  $(k, l)$ . On déduit grâce à la Proposition IV.1 que :

$$\Psi_d [g(k, l)] \approx \Psi_d [I(k, l)] \cdot |H(U, V)|^2 \quad (\text{IV.56})$$

Cette dernière relation nous permet de déduire  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$  l'énergie de la composante  $I_n^\sigma$  pour tout  $n$  donnée par :

$$\Psi_d [I_n^\sigma(k, l)] \approx \Psi_d [I_n(k, l)] |G_n [\nabla \varphi_n(k, l)]|^2 |G [\nabla \varphi_n(k, l)]|^2, \quad (\text{IV.57})$$

où  $\nabla \varphi_n = [U_n \ V_n]^t$ . La démodulation se fait maintenant sur chacune des composantes à bande étroite  $I_n^\sigma$ , en leur appliquant le DESA et en tenant en compte l'équation (IV.57).

Notons respectivement par  $\hat{U}_n$  et  $\hat{V}_n$ , les approximations des composantes fréquentielles horizontales et verticales de la composante FM de l'image  $I_n^\sigma$ . On a alors  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$  :

$$|\hat{U}_n(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d [(I * g_n) * g(k + 1, l) - (I * g_n) * g(k - 1, l)]}{4\Psi_d [I_n^\sigma(k, l)]}}, \quad (\text{IV.58})$$

$$|\hat{V}_n(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Psi_d[(I * g_n) * g(k, l + 1) - (I * g_n) * g(k, l - 1)]}{4\Psi_d[I_n^\sigma(k, l)]}}, \quad (\text{IV.59})$$

$\forall n = 1, \dots, N$ , où  $N$  est le nombre de filtres de Gabor.

Pour les composantes AM des  $I_n^\sigma$ , du fait que les  $I_n^\sigma$  sont modifiées à travers les filtres  $g_n$  et  $g$ , on obtient :

$$\hat{a}_n(k, l) = \frac{1}{|G_n[\hat{U}_n(k, l), \hat{V}_n(k, l)]| |G[\hat{U}_n(k, l), \hat{V}_n(k, l)]|} \sqrt{\frac{\Psi_d[I_n^\sigma(k, l)]}{\sin^2(|\hat{U}_n(k, l)|) + \sin^2(|\hat{V}_n(k, l)|)}} \quad (\text{IV.60})$$

$\forall n = 1, \dots, N$  et  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ .

On a maintenant les  $N$  composantes de l'image réelle. Pour une meilleure analyse et une meilleure extraction des structures les plus pertinentes de l'image réelle, nous utilisons une analyse par composante dominante (DCA). La DCA consiste à choisir, par un certain critère, pour chaque pixel des différentes composantes de l'image, celui qui est le plus représentatif dans les  $N$  composantes. Ce pixel est dit *dominant*. Dans notre étude, le pixel dominant est choisi par rapport à l'énergie de Teager-Kaiser du pixel. Ainsi, pour chaque pixel  $(k, l)$ , on détermine le pixel dominant  $(k, l)_D$  à travers le banc de filtres, par :

$$(k, l)_D = \arg \max_{1 \leq n \leq N} \Psi_d[(I * g_n) * g(k, l)] \quad (\text{IV.61})$$

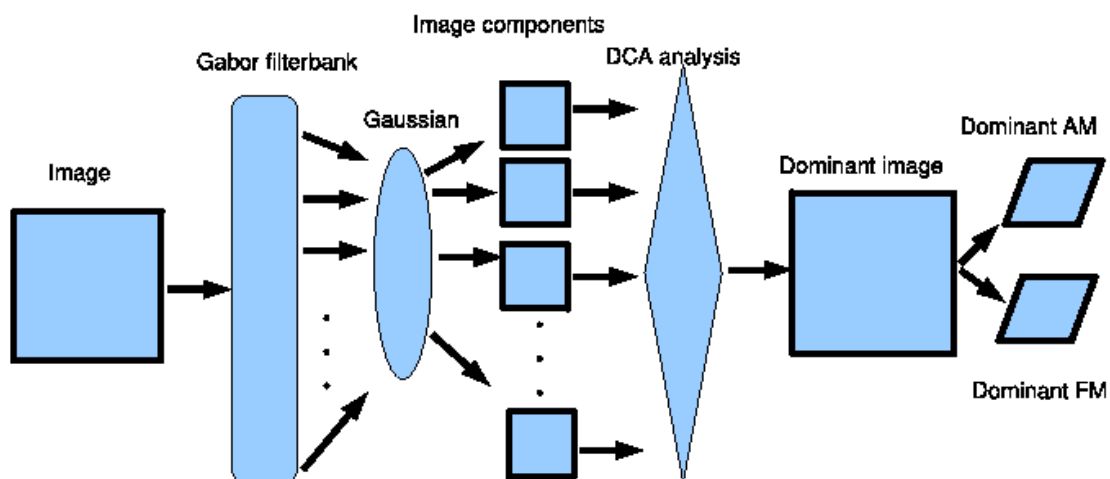
$$= \arg \max_{1 \leq n \leq N} \Psi_d[I_n^\sigma(k, l)]. \quad (\text{IV.62})$$

Finalement, l'image réelle  $I$  est analysée par ses composantes dominantes  $\hat{a}_D(k, l)$ ,  $\hat{U}_D(k, l)$  et  $\hat{V}_D(k, l)$ . La Figure IV.6 illustre le processus de la démodulation ainsi présentée. Pour simplifier, nous nous référerons à l'algorithme de démodulation donné par les équations (IV.58-IV.61), par GGDA (Gabor Gauss Demodulation Algorithm) (75).

## IV.6.2 Résultats numériques

Nous montrons dans cette partie les résultats de l'implémentation de l'algorithme GGDA. Afin d'avoir une bonne répartition fréquentielle du banc, nous avons utilisé un banc de 63 filtres de Gabor, obtenus avec différentes orientations et fréquences radiales. Les réponses fréquentielles de ce filtres sont montrées sur la Figure IV.7. L'influence du filtrage passe-bas pour corriger les artefacts créés par les filtres de Gabor est mise en évidence avec la Figure IV.8. On y montre quelques composantes  $\hat{I}_n$  et  $I_n^\sigma$  de l'image Sonar d'un fond marin (cf. Figure IV.25).

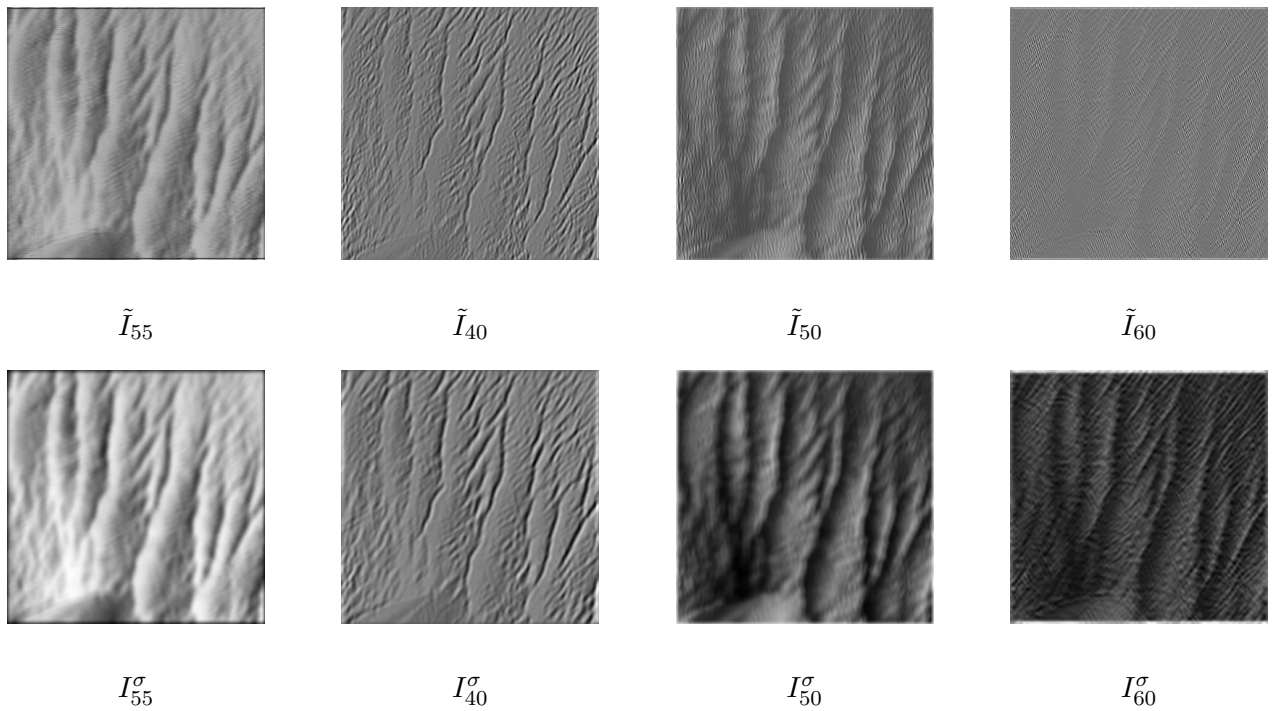
Nous avons comparé les résultats obtenus avec notre approche avec ceux obtenus avec la méthode proposée dans (48). Pour simplifier, nous désignons par G-DESA (Gabor-DESA), l'algorithme de Havlicek et al. (48). Le GGDA est appliqué sur plusieurs images de caractéristiques différentes. Sur la première image de mur (Figure IV.9), nous voyons la nette



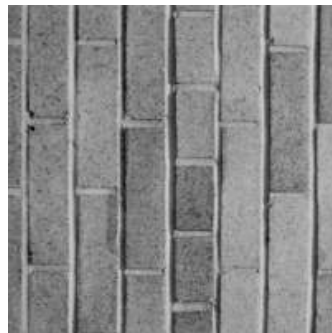
*Figure IV.6:* Diagramme de l'algorithme GGDA



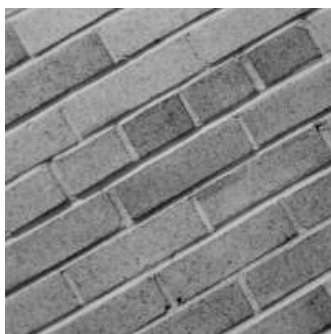
*Figure IV.7:* Banc de filtres de Gabor



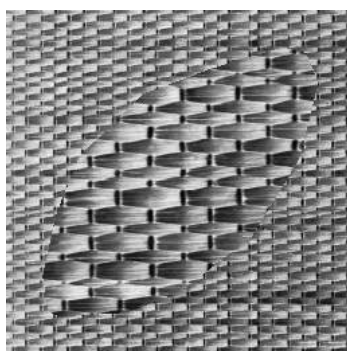
**Figure IV.8:** Illustration du filtrage passe-bas supplémentaire sur les composantes de l'image de la Figure IV.25. De haut en bas : 1<sup>ère</sup> ligne : Composantes  $\tilde{I}_n$  obtenues avec les filtres de Gabor. 2<sup>ème</sup> ligne : Composantes  $I_n^\sigma$  avec les filtres de Gabor plus filtrage



**Figure IV.9:** Image d'un mur



*Figure IV.10:* Image d'un autre mur



*Figure IV.11:* Une image de texture

amélioration des résultats de démodulation (Figure IV.12) avec le GGDA (Figures IV.12-(a)-(b)), en comparaison avec le G-DESA (Figures IV.12-(c)-(d)). En effet, les motifs et les granularités sont beaucoup plus visibles avec notre approche. Il en est de même pour l'image de la Figure IV.10 du même type, mais avec des orientations différentes.

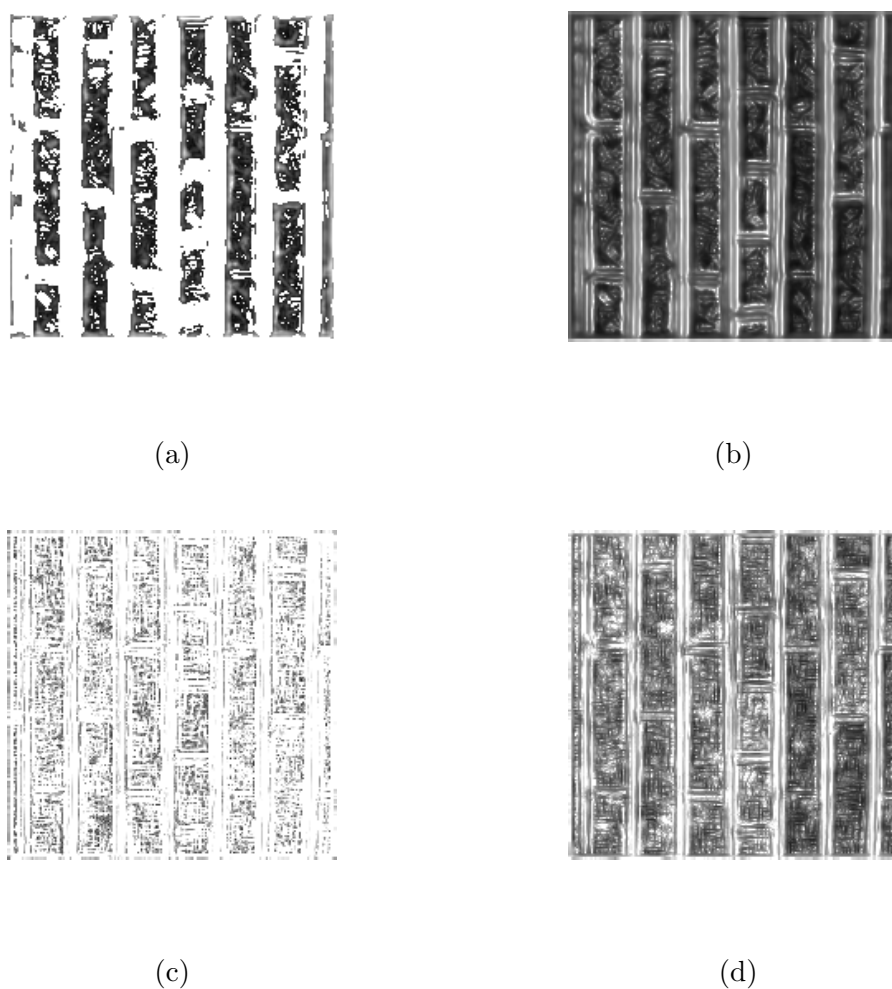
Le GGDA donne encore de meilleurs résultats de démodulation sur des images de texture (Figures IV.11 et IV.15) que le G-DESA. La texture est bien mise en évidence avec le GGDA (Figures IV.14-(a)-(b)), résultats quasiment impossibles à obtenir avec le G-DESA, à cause notamment des artefacts de bruit. De même pour l'image de texture plus complexe de la Figure IV.15. Il est à noter que bien qu'on aurait pu avoir une meilleure segmentation des parties texturées, le GGDA arrive quand même à séparer les différentes textures de l'image (Figures IV.17-(a)-(b)), et cela d'une meilleure manière que le G-DESA (Figures IV.17-(c)-(d)).

Les améliorations apportées par le GGDA se voient aussi à travers la démodulation de

l'image de la plaque d'immatriculation (Figure IV.18). En effet, on arrive à lire facilement les chiffres de la plaque d'immatriculation avec la composante dominante FM obtenue avec le GGDA ; ce qui un peu plus difficile, voire impossible, avec le G-DESA (Figure IV.19-(d)).

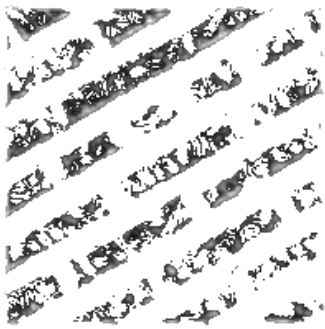
Les Figures IV.21 et IV.22 montrent clairement l'apport du GGDA comparé au G-DESA. Un autre exemple est celui du zèbre (Figure IV.23). Là encore le GGDA (Figures IV.24-(a)-(b)) fait mieux ressortir les structures les plus pertinentes de cette image, que le G-DESA (Figures IV.24-(c)-(d)). Par exemples, les rayures noires et l'herbe.

Pour terminer, on a appliqué le GGDA sur des images sonar bathymétriques de fonds marins (Figures IV.25 et IV.27). Sur les résultats de démodulation (Figures IV.26-(a)-(b) et IV.28-(a)-(b)), nous pouvons voir des crêtes, des rides, des mégarides (dunes)... ; ce qui n'est pas évident avec la G-DESA (Figures IV.26-(c)-(d) et IV.28-(c)-(d)).

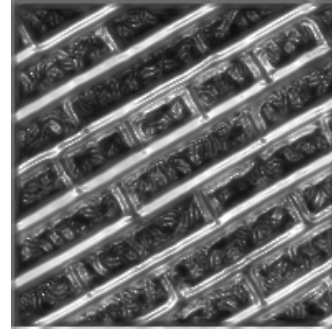


**Figure IV.12:** Composantes dominantes de Fig. IV.9. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).

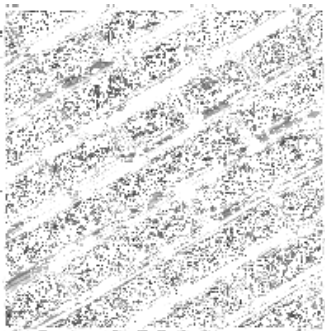




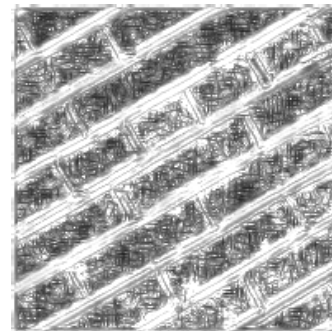
(a)



(b)

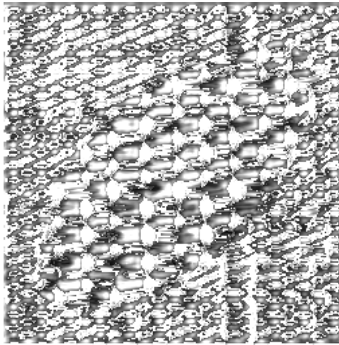


(c)

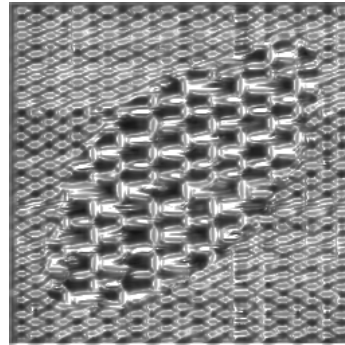


(d)

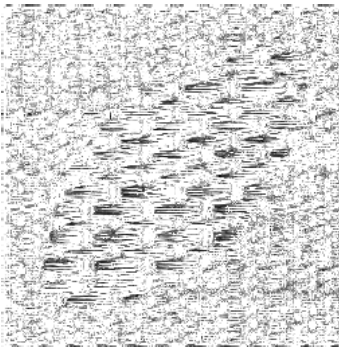
**Figure IV.13:** Composantes dominantes de Fig. IV.10. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



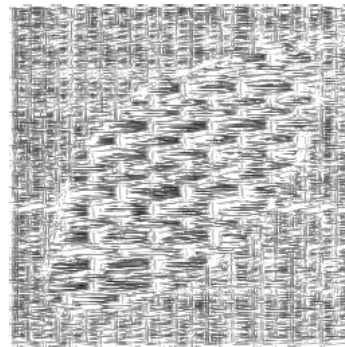
(a)



(b)

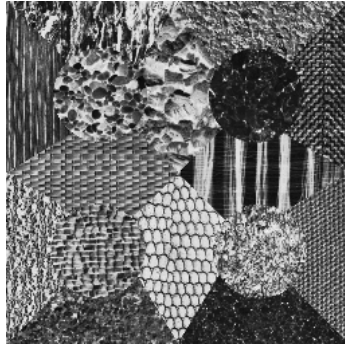


(c)



(d)

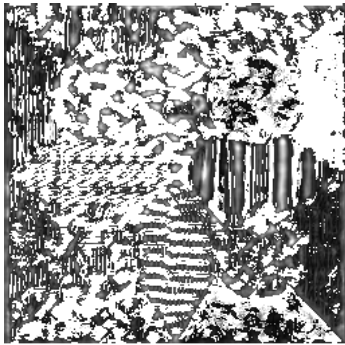
**Figure IV.14:** Composantes dominantes de Fig. IV.11. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



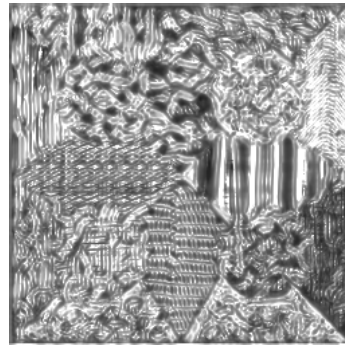
*Figure IV.15:* Une autre image de texture



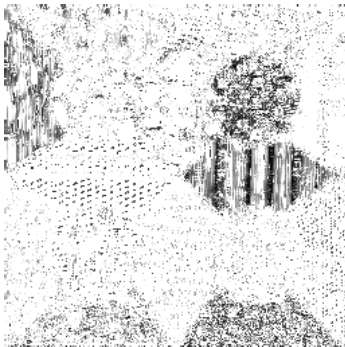
*Figure IV.16:* Barbara



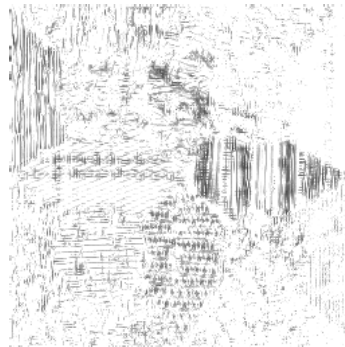
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure IV.17:** Composantes dominantes de Fig. IV.15. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



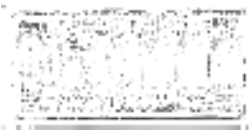
**Figure IV.18:** Une plaque d'immatriculation



(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure IV.19:** Composantes dominantes de Fig. IV.18. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



**Figure IV.20:** Lena



(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure IV.21:** Composantes dominantes de Fig. IV.20. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).





(a)



(b)



(c)

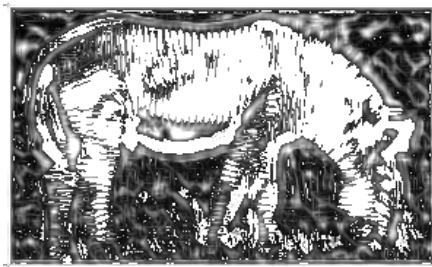


(d)

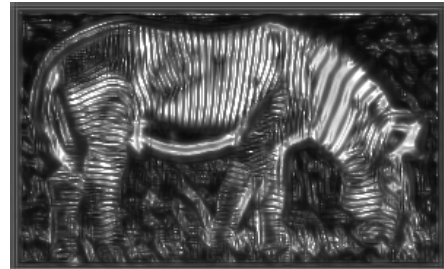
**Figure IV.22:** Composantes dominantes de Fig. IV.16. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



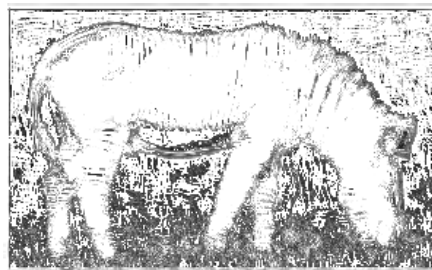
**Figure IV.23:** Zèbre



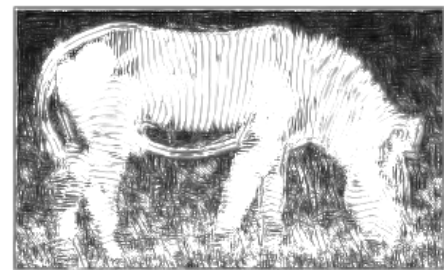
(a)



(b)



(c)



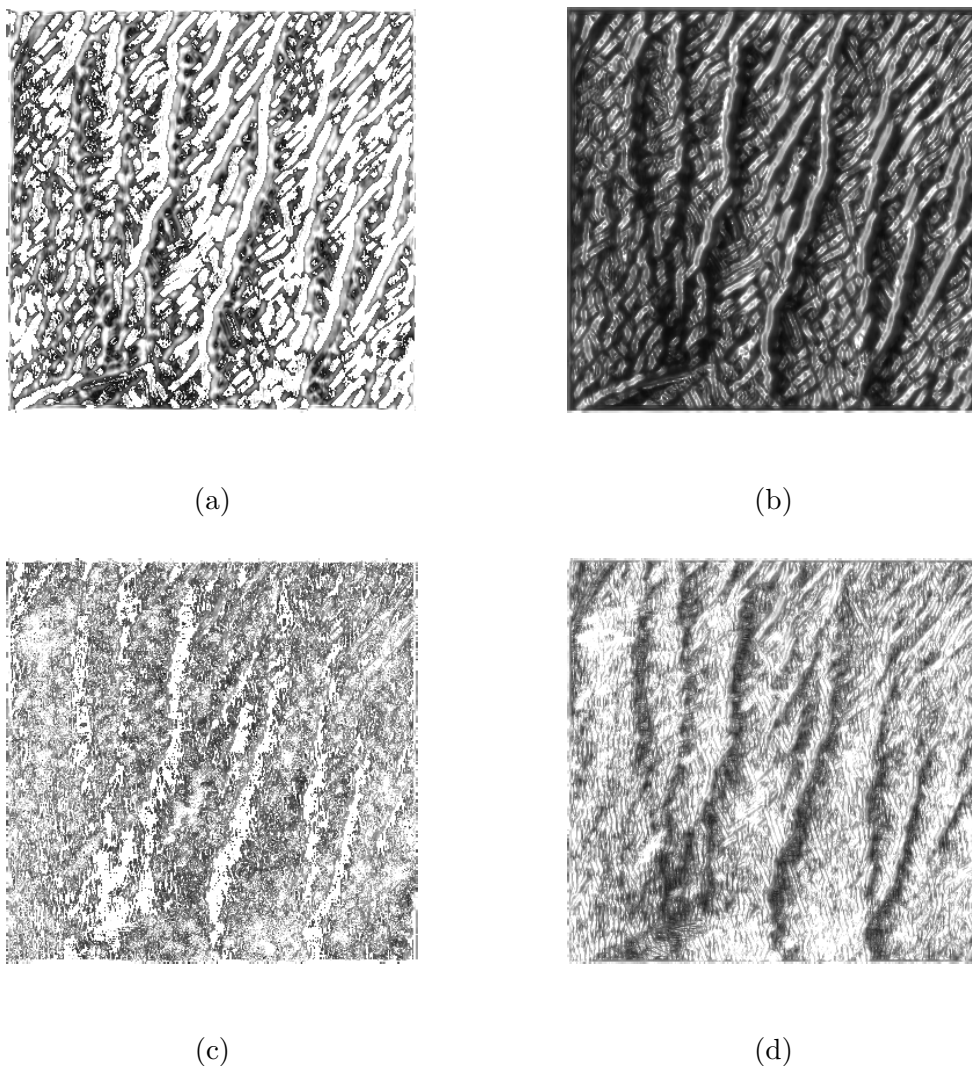
(d)

**Figure IV.24:** Composantes dominantes de Fig. IV.23. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).



**Figure IV.25:** Image bathymétrique de fond marin avec ombrage

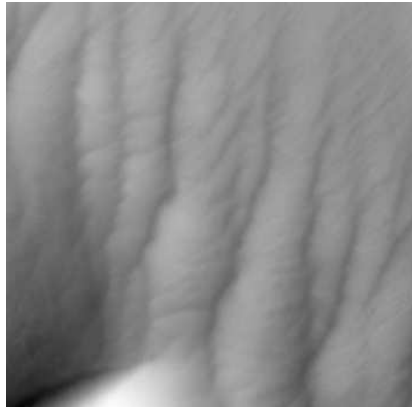




**Figure IV.26:** Composantes dominantes de Fig. IV.25. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).

## IV.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre de nombreuses notions et outils nécessaires à la compréhension des modèles AM-FM et à la démodulation des images. Aussi, nous avons présenté différentes méthodes de démodulation. Il ressort de cette étude que l'approche AM-FM multicomposante est bien adaptée aux images réelles et permet de faire une analyse des structures pertinentes dans les images. L'approche qui était utilisée jusque là consistait à séparer les composantes de l'image en sous-bandes avec les filtres de Gabor, pour ensuite leur appliquer une méthode de démodulation de type monocomposant. Comme nous l'avons vu avec les résultats numériques obtenus, cette approche présente certains inconvénients. En

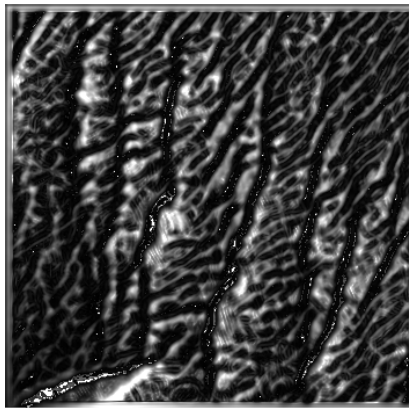


*Figure IV.27:* Image bathymétrique de fond marin sans ombrage

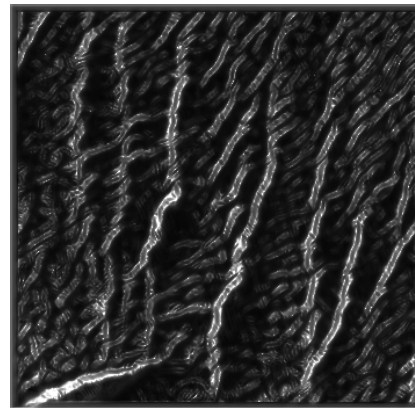
effet, il apparaît des artefacts sur les composantes AM et FM, causés en grande partie par les filtres de Gabor. Afin d'y remédier, nous avons proposé un nouvel algorithme améliorant cette approche, en incluant un filtrage passe-bas en amont de la démodulation. Cette amélioration est confirmée avec les résultats numériques obtenus, bien que cela soit basée sur des critères qualitatifs. Une meilleure analyse des images réelles est alors possible à travers les composantes dominantes AM et FM. Toutefois, il serait intéressant de quantifier cette amélioration par des mesures de qualité adaptées aux images.

Dans ce travail, nous avons également apporté une justification théorique du calcul de l'énergie de Teager-Kaiser des composantes de l'image réelle, obtenues avec une décomposition en sous bandes via un banc de filtres de Gabor. Un résultat similaire est également obtenu dans (74) avec l'approche par IA avec les QEA (Quasi-Eigenfunction Approximations).

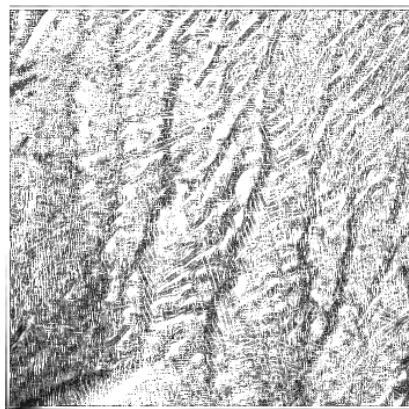
L'algorithme que nous avons proposé repose sur une méthode de démodulation mono-composante, le DESA qui donne des approximations de l'amplitude et des fréquences d'une image. Bien que les erreurs d'approximation avec le DESA soient petites, il est possible d'avoir des erreurs encore plus faibles, et obtenir de la sorte une meilleure démodulation. Le TKEO  $2D$  utilise des dérivées de l'image jusqu'à l'ordre 2. Dans le chapitre qui suit, on utilise les TKEO  $2D$  d'ordres supérieurs en augmentant l'ordre de dérivation, et on montre alors que les composantes AM et FM sont approchées d'une meilleure manière que le DESA.



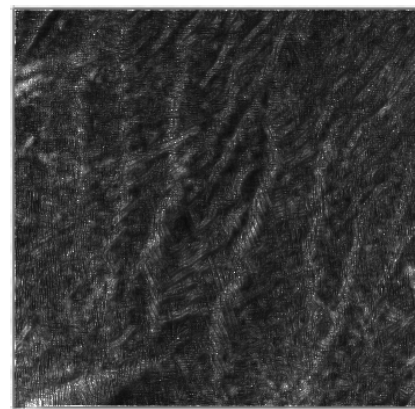
(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure IV.28:** Composantes dominantes de Fig. IV.27. Avec l'algorithme GGDA : AM (a). Module FM (b). Avec l'algorithme G-DESA : AM (c). Module FM (d).

---

# Les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs pour la démodulation d'images

---

## Sommaire

<b>V.1 Introduction</b> . . . . .	<b>140</b>
<b>V.2 Opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs en 1D</b> . . . . .	<b>140</b>
<b>V.3 L'algorithme continu de démodulation CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm)</b> . . . . .	<b>141</b>
<b>V.4 Algorithme de démodulation d'images monocomposantes basé sur les HODEO</b> . . . . .	<b>143</b>
V.4.1 Algorithme DHODA (Discrete Higher Order Demodulation Algorithm)	144
V.4.2 Résultats numériques . . . . .	146
<b>V.5 Algorithme de démodulation d'images réelles basé sur les HODEO 2D</b> . . . . .	<b>155</b>
V.5.1 Algorithme MHODA (Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm) . . . . .	155
V.5.2 Résultats numériques . . . . .	158
<b>V.6 Conclusion</b> . . . . .	<b>163</b>

---

*L'objectif principal de ce chapitre est de montrer l'apport des ordres supérieurs dans la démodulation des images monocomposantes et réelles, par rapport aux méthodes de démodulation basées sur le TKEO 2D classique ou la transformée de Hilbert 2D. Nous proposons un algorithme de démodulation d'images monocomposantes et nous l'étendons ensuite pour des images réelles. Aussi, nous quantifions les erreurs d'approximations commises sur les composantes AM et FM, et montrons que l'approche de démodulation proposée donne de meilleurs résultats que ceux obtenus avec le DESA et l'approche par image analytique.*

## V.1 Introduction

Nous avons vu dans le Chapitre IV les différentes méthodes de démodulation d'images monocomposantes : l'approche par IA de Havlicek (62) avec la transformée de Hilbert  $2D$ , le DESA de Maragos et al. (36) et l'ESA de Maragos et Bovik (64), utilisant le TKEO. Ces différentes méthodes imposent au signal, quelle que soit sa dimension, d'être à bande étroite et à amplitude localement constante. Le TKEO  $1D$  et sa version étendue en  $2D$  utilisent des dérivées du signal (ou image) jusqu'à l'ordre 2. Dans ce chapitre, nous allons voir qu'on peut généraliser le TKEO à n'importe quel ordre. Dans (130), il est montré que les TKEO d'ordres supérieurs se comportent mieux que le TKEO classique pour des images issues de l'interférométrie optique. Ce résultat est comparé avec la méthode de démodulation proposée dans (131). Dans ce chapitre, nous montrons l'apport des ordres supérieurs dans la démodulation des images. Pour ce faire, nous proposons deux algorithmes de démodulation : le premier concerne des images monocomposantes, le second est pour des images réelles. Les résultats numériques obtenus sont comparés au DESA et à l'approche IA, et montrent que notre approche donne de meilleurs résultats, aussi bien quantitativement, que qualitativement.

Le plan de ce chapitre est le suivant : nous commençons par introduire les TKEO d'ordres supérieurs en  $1D$  dans la Section V.2. Dans la Section V.3, nous exposons leur extension en  $2D$  avec l'algorithme CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm) proposé dans (78). C'est dans la Section V.4 que nous proposons l'algorithme discret de démodulation d'images monocomposantes. Les résultats numériques sont montrés aussi bien pour des images synthétiques que réelles (monocomposantes). Une application à la segmentation d'ombres de mines dans des images sonar y est aussi présentée. L'algorithme de démodulation que nous proposons est comparé au DESA et à l'IA. Nous étendons ensuite cette approche pour des images réelles dans la Section V.5. Des résultats de démodulation d'images réelles sont également montrés dans cette partie.

## V.2 Opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs en $1D$

Les opérateurs d'ordres supérieurs sont introduits pour les signaux  $1D$  par Maragos et Potamianos (77), constituant une généralisation de l'opérateur continu TKEO (cf. Définition IV.7). Les auteurs (77) désignent alors ces opérateurs par Higher Order Differential Energy Operators (HODEO) et proposent alors un algorithme continu de démodulation de signaux basé sur les HODEO, ainsi que des schémas de discrétisation des HODEO.

**Définition V.1.** Soit un signal  $S(x)$  admettant des dérivées jusqu'à l'ordre  $k$  quelconque. Le TKEO de  $S(x)$  d'ordre  $k$ , que nous notons par  $\phi_k[S]$ , est défini par (77) :

$$\phi_k [S(x)] = \frac{dS}{dx}(x) \cdot \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} [S(x)] - S(x) \cdot \frac{d^k}{dx^k} S(x) \quad (\text{V.1})$$

**Remarque V.1.** Pour  $k = 2$ , on retrouve l'opérateur TKEO (cf. Équation IV.22).

Les opérateurs d'ordres supérieurs représentent une généralisation du TKEO. On a une



relation récursive entre les ordres, suivant :

$$\phi_k [S(x)] = \frac{d}{dx} \phi_{k-1} [S(x)] - \phi_{k-2} \left[ \frac{dS}{dx}(x) \right] \quad (\text{V.2})$$

Pour une sinusoïde pure  $S(x) = A \cos(\omega x + \varphi)$ , Maragos et Potamianos (77) montrent que :

$$\phi_k [S(x)] = \begin{cases} 0 & \text{si } k = \pm 1, \pm 3, \dots \\ (-1)^{1+\frac{k}{2}} A^2 \omega^k & \text{si } k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \end{cases} \quad (\text{V.3})$$

Comme pour le DESA ou l'ESA, on considère que le signal  $S(x)$  est à bande étroite et que son amplitude ainsi que sa fréquence ne varient ni rapidement, ni beaucoup par rapport à la fréquence de la porteuse (73). L'algorithme de démodulation qui en découle repose sur la combinaison des opérateurs d'ordres 2 (i.e TKEO) et 4. Les estimations de l'amplitude et de la fréquence respectivement notées par  $\hat{A}$  et  $\hat{\omega}$  sont données par (77) :

$$\hat{\omega} = \sqrt{\frac{-\phi_4 [S(x)]}{\phi_2 [S(x)]}} \quad (\text{V.4})$$

$$|\hat{A}| = \frac{\phi_2 [S(x)]}{\sqrt{-\phi_4 [S(x)]}}. \quad (\text{V.5})$$

Dans les parties qui suivent, nous ne parlerons que de la démodulation des images.

### V.3 L'algorithme continu de démodulation CHOEDA (Continuous Higher Order Energy Demodulation Algorithm)

Une des limitations du DESA (36) ou de l'ESA (64) est que les composantes horizontale et verticale de la composante FM doivent obligatoirement être comprises entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ . Cela veut dire que les fréquences spatiales de l'image ne sont estimées, au plus, qu'au quart du plan fréquentiel d'échantillonnage. La raison principale est que le TKEO 2D proposé est juste une extension simple de l'opérateur en 1D suivant les directions verticale et horizontale. Par conséquent, toutes les autres directions, par exemple les diagonales, ne sont pas prises en compte. Cela nous amène donc à utiliser d'autres extensions du TKEO en 2D qui prennent en considération ces directions, comme celle qui est proposée dans (78).

Soit  $I$  une image définie sur  $\Omega$  et de classe  $C^2$ . L'opérateur d'ordre 2 qu'on utilise est maintenant défini par :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_1} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} \right]}_{1^{er} \text{ terme}} + \underbrace{\left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_2} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} \right]}_{2^{ieme} \text{ terme}} + 2 \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_1} \frac{\partial I}{\partial x_2} \right) - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} \right]. \quad (\text{V.6})$$

**Remarques V.1.** Il y a deux points essentiels à noter concernant l'équation (V.6) :

1. Le premier terme de cet opérateur (cf. V.6) représente le TKEO en 2D (cf. Définition

*IV.9).*

2. Le second terme de (V.6) représente la différence majeure. Il mesure l'énergie d'interaction entre les directions horizontale et verticale.

Posons  $\Lambda(I) = \frac{\partial I}{\partial x_1} + \frac{\partial I}{\partial x_2}$ . On note  $\Lambda^2(I) = \Lambda(\Lambda(I))$ .

Nous pouvons réécrire l'équation (V.6) par :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = \{\Lambda [I(x_1, x_2)]\}^2 - I(x_1, x_2) \cdot \Lambda \{\Lambda [I(x_1, x_2)]\} \quad (\text{V.7})$$

$$= \{\Lambda [I(x_1, x_2)]\}^2 - I(x_1, x_2) \cdot \Lambda^2 [I(x_1, x_2)] \quad (\text{V.8})$$

Ainsi, à l'ordre 3, on aura :

$$\Phi_3 [I(x_1, x_2)] = \Lambda [I(x_1, x_2)] \cdot \Lambda^2 [I(x_1, x_2)] - I(x_1, x_2) \cdot \Lambda^3 [I(x_1, x_2)] \quad (\text{V.9})$$

Cela nous permet d'étendre la définition à tout ordre quelconque  $k$  :

**Définition V.2.** Soit  $I$  une image de classe  $C^k$  sur  $\Omega$ . Le TKEO en 2D de  $I$  généralisé à un ordre  $k$  quelconque, noté  $\Phi_k[I]$ , est donné par :

$$\Phi_k [I(x_1, x_2)] = \Lambda [I(x_1, x_2)] \cdot \Lambda^{k-1} [I(x_1, x_2)] - I(x_1, x_2) \cdot \Lambda^k [I(x_1, x_2)] \quad (\text{V.10})$$

On considère maintenant une image AM-FM  $I$  définie par :

$$I(x_1, x_2) = a(x_1, x_2) \cos(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2). \quad (\text{V.11})$$

En lui appliquant l'opérateur  $\Phi_2$ , on a :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = [a(x_1, x_2)]^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 + \cos^2(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2) \cdot \Phi_2 [a(x_1, x_2)] \quad (\text{V.12})$$

Pour une sinusoïde 2D pure (i.e  $a(x_1, x_2) = cste$ ), on montre que :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = [a(x_1, x_2)]^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 \quad (\text{V.13})$$

Toujours pour une sinusoïde pure, en suivant Yu et al. (122), on a alors :

$$\Phi_3 [I(x_1, x_2)] = 0 \quad (\text{V.14})$$

$$\Phi_4 [I(x_1, x_2)] = -[a(x_1, x_2)]^2 (\omega_1 + \omega_2)^4 \quad (\text{V.15})$$

Ainsi, pour démoduler des images AM-FM, on fait l'hypothèse qu'elles ont des amplitudes localement constantes. De ce fait et avec les équations (V.13-V.15), on obtient une bonne estimation  $\hat{a}(x_1, x_2)$  de l'amplitude  $a(x_1, x_2)$  donnée par Boudraa et al. (78) :

$$|\hat{a}(x_1, x_2)| = \frac{\Phi_2 [I(x_1, x_2)]}{\sqrt{-\Phi_4 [I(x_1, x_2)]}} \quad (\text{V.16})$$

On montre aussi que :

$$\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) - \partial_2 I(x_1, x_2)] = [a(x_1, x_2)]^2 (\omega_1 - \omega_2)^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 \quad (\text{V.17})$$

$$\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] = [a(x_1, x_2)]^2 (\omega_1 + \omega_2)^2 (\omega_1 + \omega_2)^2, \quad (\text{V.18})$$

avec  $\partial_i I(x_1, x_2) = \frac{\partial I}{\partial x_i}(x_1, x_2)$ , pour tout  $i = 1, 2$ .

En combinant les équations (V.13), (V.17) et (V.18), on obtient :

$$1(\omega_1 - \omega_2)^2 = \frac{\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) - \partial_2 I(x_1, x_2)]}{\Phi_2 [I(x_1, x_2)]} \quad (\text{V.19})$$

$$(\omega_1 + \omega_2)^2 = \frac{\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)]}{\Phi_2 [I(x_1, x_2)]} \quad (\text{V.20})$$

Notons par  $\hat{\omega}_1$  et  $\hat{\omega}_2$  les estimations des fréquences  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . En utilisant les coordonnées polaires ( $\|\hat{\omega}\|, \hat{\theta}$ ) avec  $\hat{\omega} = (\hat{\omega}_1, \hat{\omega}_2)$ , on a :

$$\begin{cases} \hat{\omega}_1 = \|\hat{\omega}\| \cos(\hat{\theta}) \\ \hat{\omega}_2 = \|\hat{\omega}\| \sin(\hat{\theta}). \end{cases} \quad (\text{V.21})$$

On déduit finalement de (V.21), que (78) :

$$\|\hat{\omega}\| = \sqrt{\frac{\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) - \partial_2 I(x_1, x_2)] + \Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)]}{2\Phi_2 [I(x_1, x_2)]}} \quad (\text{V.22})$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{2} \text{arc sin} \left[ \frac{\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] - \Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) - \partial_2 I(x_1, x_2)]}{\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] + \Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) - \partial_2 I(x_1, x_2)]} \right] \quad (\text{V.23})$$

Les formules (V.16), (V.22) et (V.23) permettent de modéliser l'image  $I$  sous la forme AM-FM donnée par l'équation (V.11).

Dans la partie qui suit, on présente l'algorithme discret de démodulation d'images monocomposantes.

## V.4 Algorithme de démodulation d'images monocomposantes basé sur les HODEO

L'objectif principal de la modélisation AM-FM est de s'affranchir des limites de la transformée de Fourier afin d'obtenir une représentation qui soit capable de capturer l'information pertinente dans une image, avec juste un nombre réduit de fonctions AM-FM quasi-sinusoidales. Il est important de garder à l'esprit la nature discrète des images. L'interpolation va donc jouer un rôle essentiel pour une bonne implémentation des algorithmes continus, le CHOEDA par exemple. Les résultats de démodulation seront fortement dépendants des choix des interpolants. Nous ne nous sommes pas intéressés ici à ces aspects du problème, nous proposons plutôt un algorithme discret de démodulation d'images monocomposantes, basé sur les HODEO en 2D. Nous ferons ensuite la comparaison avec le DESA (36) et l'approche par IA (62).



### V.4.1 Algorithme DHODA (Discrete Higher Order Demodulation Algorithm)

L'écriture développée de l'équation (V.9) donne :

$$\begin{aligned} \Phi_3 [I(x_1, x_2)] = & [\partial_1 I(x_1, x_2) \partial_1^2 I(x_1, x_2) - I(x_1, x_2) \partial_1^3 I(x_1, x_2)] \\ & + [\partial_2 I(x_1, x_2) \partial_2^2 I(x_1, x_2) - I(x_1, x_2) \partial_2^3 I(x_1, x_2)] \\ & + [\partial_1 I(x_1, x_2) \partial_2^2 I(x_1, x_2) + 2\partial_2 I(x_1, x_2) \partial_{12}^2 I(x_1, x_2) - 3I(x_1, x_2) \partial_{122}^3 I(x_1, x_2)] \\ & + [\partial_2 I(x_1, x_2) \partial_1^2 I(x_1, x_2) + 2\partial_1 I(x_1, x_2) \partial_{12}^2 I(x_1, x_2) - 3I(x_1, x_2) \partial_{122}^3 I(x_1, x_2)], \end{aligned} \quad (V.24)$$

où pour toute fonction  $f$  quelconque de classe  $C^m(\mathbb{R}^2)$ , on pose :

$$\partial_{1^p 2^q}^m f(x_1, x_2) = \frac{\partial^m f}{\partial x_1^p \partial x_2^q}(x_1, x_2) \text{ avec } p+q = m. \text{ Cela nous permet de réécrire l'équation (V.9) de manière plus simple :}$$

$$\Phi_3 [I(x_1, x_2)] = \partial_1 \{ \Phi_2 [I(x_1, x_2)] \} + \partial_2 \{ \Phi_2 [I(x_1, x_2)] \} \quad (V.25)$$

De manière plus générale, on montre par récurrence que, pour tout  $k > 3$  on a :

$$\Phi_k [I(x_1, x_2)] = \partial_1 \{ \Phi_{k-1} [I(x_1, x_2)] \} + \partial_2 \{ \Phi_{k-1} [I(x_1, x_2)] \} - \Phi_{k-2} [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] \quad (V.26)$$

Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose :

$$I_1(k, l) = \frac{1}{2} [I(k+1, l) - I(k-1, l)], \quad (V.27)$$

$$I_2(k, l) = \frac{1}{2} [I(k, l+1) - I(k, l-1)], \quad (V.28)$$

$$I_{12}(k, l) = \frac{1}{2} [I_2(k+1, l) - I_2(k-1, l)]. \quad (V.29)$$

L'opérateur (V.6) est alors discrétisé comme suit :

$$\begin{aligned} \Phi_2^d [I(k, l)] = & \underbrace{2 [I(k, l)]^2 - I(k-1, l) I(k+1, l) - I(k, l-1) I(k, l+1)}_{1^{er} \text{ terme}} \\ & + 2 \underbrace{[I_1(k, l) I_2(k, l) - I(k, l) I_{12}(k, l)]}_{2^{ieme} \text{ terme}}, \end{aligned} \quad (V.30)$$

**Remarques V.2.** Comme pour le cas continu, on peut faire deux remarques intéressantes concernant (V.30) :

1. Le premier terme de (V.30) correspond au TKEO discret en 2D de l'image  $I$  (cf. Définition IV.8).
2. Le second terme mesure l'énergie d'interaction des pixels entre les lignes et les colonnes.

Considérons une image discrète  $I$  définie par :

$$I(k, l) = a(k, l) \cos [k \cdot \omega_1(k, l) + l \cdot \omega_2(k, l)] \quad (V.31)$$

On suppose que l'amplitude de  $I$  est localement constante. En suivant Yu et al. (122), on montre alors que :

$$\Phi_2^d [I(k, l)] \approx [a(k, l)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^2 \quad (\text{V.32})$$

$$\Phi_3^d [I(k, l)] = 0 \quad (\text{V.33})$$

$$\Phi_4^d [I(k, l)] \approx -[a(k, l)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^4 \quad (\text{V.34})$$

En suivant toujours (122), on montre aussi, sous des hypothèses tout à fait réalistes établies dans (73), les relations suivantes :

$$\Phi_2^d [I_i(k, l)] \approx [a(k, l)]^2 [\sin(\omega_i)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^2 \quad (\text{V.35})$$

$$\Phi_2^d [I_{12}(k, l)] \approx [a(k, l)]^2 [\sin(\omega_1)]^2 [\sin(\omega_2)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^2 \quad (\text{V.36})$$

$$\Phi_4^d [I_i(k, l)] \approx -[a(k, l)]^2 [\sin(\omega_i)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^4 \quad (\text{V.37})$$

$$\Phi_4^d [I_{12}(k, l)] \approx -[a(k, l)]^2 [\sin(\omega_1)]^2 [\sin(\omega_2)]^2 (\sin(\omega_1) + \sin(\omega_2))^4 \quad (\text{V.38})$$

Notons par  $\hat{a}(k, l)$ ,  $\hat{\omega}_1(k, l)$  et  $\hat{\omega}_2(k, l)$ , les estimations respectives de l'amplitude, de la fréquence horizontale et verticale de  $I$ . En combinant les équations (V.32-V.38), on obtient finalement que :

$$|\hat{a}(k, l)| = \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_1(k, l)] \cdot \Phi_2^d [I_2(k, l)]}{-\Phi_4^d [I_{12}(k, l)]}} \quad (\text{V.39})$$

$$|\hat{\omega}_1(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_{12}(k, l)]}{\Phi_2^d [I_2(k, l)]}} \quad (\text{V.40})$$

$$|\hat{\omega}_2(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_{12}(k, l)]}{\Phi_2^d [I_1(k, l)]}}. \quad (\text{V.41})$$

Avec les équations (V.26) et (V.33), on trouve :

$$\begin{aligned} \Phi_4 [I(x_1, x_2)] &= \partial_1 \{ \Phi_3 [I(x_1, x_2)] \} + \partial_2 \{ \Phi_3 [I(x_1, x_2)] \} - \Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] \\ &= -\Phi_2 [\partial_1 I(x_1, x_2) + \partial_2 I(x_1, x_2)] \end{aligned}$$

Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose :

$$I_{12}^1(k, l) = \frac{1}{2} [I_{12}(k+1, l) - I_{12}(k-1, l)],$$

$$I_{12}^2(k, l) = \frac{1}{2} [I_{12}(k, l+1) - I_{12}(k, l-1)].$$

D'où (V.39) peut finalement se réécrire :

$$|\hat{a}(k, l)| = \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_1(k, l)] \cdot \Phi_2^d [I_2(k, l)]}{\Phi_2^d [I_{12}^1(k, l) + I_{12}^2(k, l)]}}. \quad (\text{V.42})$$

Les formules (V.39-V.42) ainsi établies constituent l'algorithme DHODA (Discrete Higher Order Demodulation Algorithm), qui est également présenté dans (79 ; 43).

## V.4.2 Résultats numériques

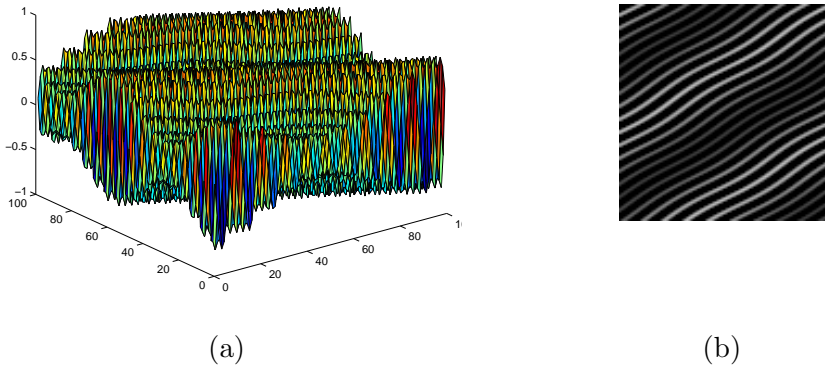
Dans cette partie, nous montrons les résultats de l'implémentation de l'algorithme DHODA. Il est appliqué sur des images synthétiques et réelles, et les résultats sont comparés au DESA et à la méthode IA.

### V.4.2.1 Images synthétiques

Soit l'image synthétique  $I_1$  définie pour tout  $m, n = 1, \dots, 100$ , par :

$$I_1(m, n) = 0.5(1 + 0.5 \cos(m \frac{\pi}{30} + n \frac{\pi}{50})) \cos(m \frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{5} + 2 \cos(m \frac{\pi}{30}) \cos(n \frac{\pi}{50} + \frac{\pi}{2})) \quad (\text{V.43})$$

L'image  $I_1$  est représentée sur la Figure V.1. Les composantes AM et FM exactes et estimées avec le DHODA sont montrées sur la Figure V.2.

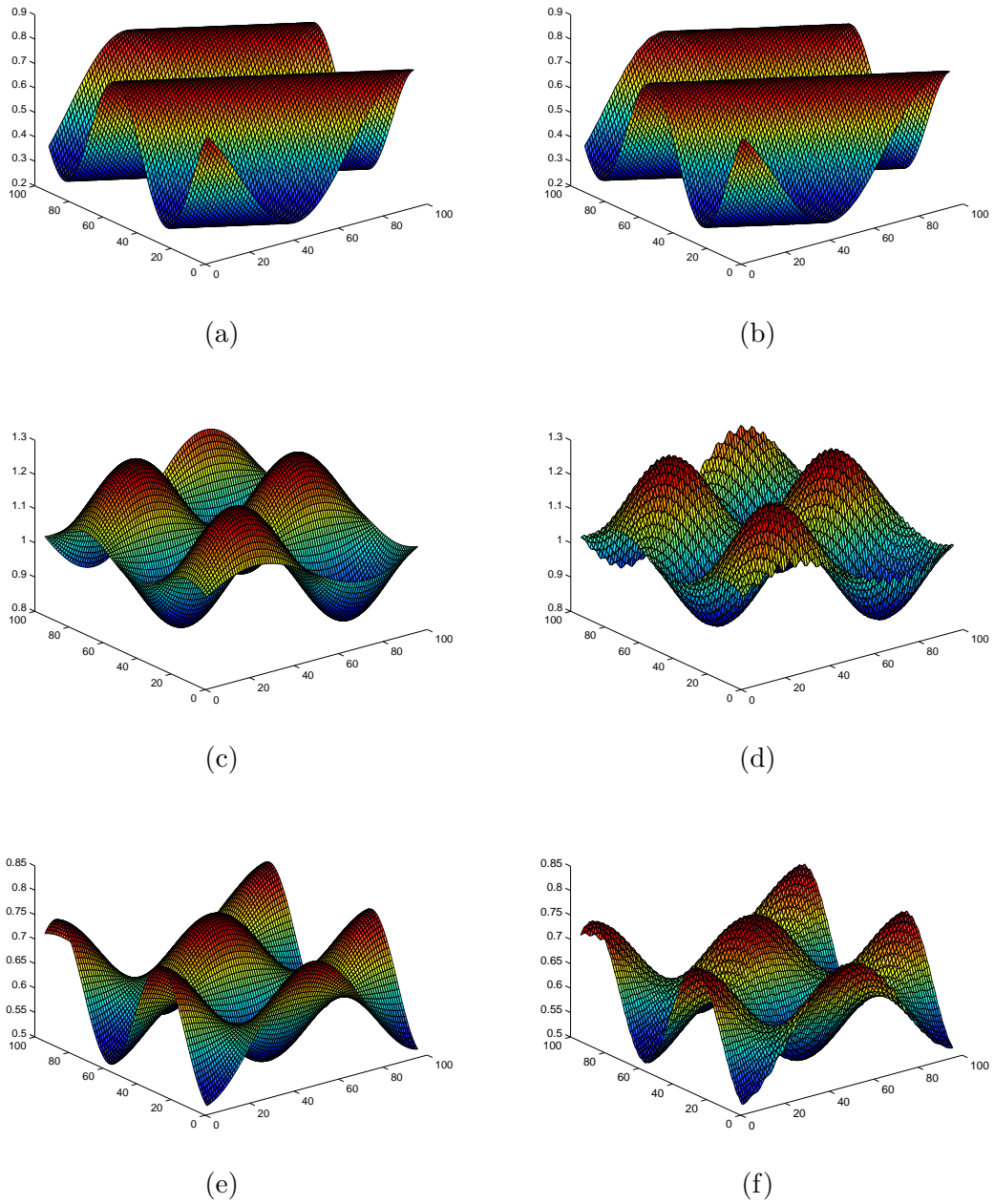


**Figure V.1:** Représentation 3D de  $I_1$  (cf. Équation (V.43)) (a).  $I_1$  en niveau de gris (b).

Pour bien évaluer les performances du DHODA, nous l'avons aussi appliqué à l'image synthétique  $I_2$  utilisée également comme image test dans (73) et définie pour tout  $m, n = 1, \dots, 100$ , par :

$$I_2(m, n) = 0.5(1 + 0.5 \sin(m \frac{\pi}{30} + n \frac{\pi}{50})) \cos(m \frac{\pi}{3} + n \frac{\pi}{5} + 2 \sin(m \frac{\pi}{30}) + \sin(n \frac{\pi}{50} + \frac{\pi}{2})) \quad (\text{V.44})$$

Nous obtenons qualitativement pour les images synthétiques  $I_1$  (Équation V.43) et  $I_2$  (V.44) les mêmes résultats de démodulation avec le DESA (36). Afin de mieux évaluer les performances du DHODA par rapport au DESA, nous calculons alors les erreurs d'approximations commises sur les composantes estimées AM et FM des images synthétiques  $I_1$  et  $I_2$ , avec les



**Figure V.2:** Composantes de l'image synthétique  $I_1$  (Équation (V.43)). Amplitudes :  $a$  réelle (a).  $a$  estimée (b). Fréquences :  $\omega_1$  réelle (c).  $\omega_1$  estimée (d).  $\omega_2$  réelle (e).  $\omega_2$  estimée (f)

**Tableau V.1:** Erreurs d'approximation des composantes AM et FM de l'image  $I_1$ , obtenues avec le DHODA et le DESA.

	$MSE(a, \hat{a})$	$\ a - \hat{a}\ _2$	$var\left(\frac{a - \hat{a}}{a}\right)$	$MSE(\omega_1, \hat{\omega}_1)$	$\ \omega_1 - \hat{\omega}_1\ _2$
DESA	0.0119	10.9278	0.0415	0.0483	21.9681
DHODA	$9.9617 \cdot 10^{-4}$	3.1562	0.0044	0.0092	9.5979

	$var\left(\frac{\omega_1 - \hat{\omega}_1}{\omega_1}\right)$	$MSE(\omega_2, \hat{\omega}_2)$	$\ \omega_2 - \hat{\omega}_2\ _2$	$var\left(\frac{\omega_2 - \hat{\omega}_2}{\omega_2}\right)$
DESA	0.0418	0.0164	12.8214	0.0387
DHODA	0.0093	0.0059	7.6501	0.0146

deux différentes méthodes de démodulation. Les erreurs sont calculées en norme  $L^2$ , en  $MSE$  (Minimum Squareds Error) et par rapport aux variances relatives. Le Tableau V.1 donne les différentes erreurs commises pour  $I_1$  et le Tableau V.2 pour celles commises pour  $I_2$ . Comme on peut le noter, les erreurs commises avec le DHODA sont beaucoup plus faibles que celles commises avec le DESA (73). La démodulation avec le DHODA donne quantitativement donc de meilleurs résultats.

Dans cette première partie des résultats numériques, nous avons montré l'apport des ordres supérieurs sur la précision de la démodulation. Cette réduction importante des erreurs d'approximations pour les images synthétiques va se traduire comme une information supplémentaire permettant de capturer les informations pertinentes (zones d'intérêts) dans les images réelles monocomposantes. C'est ce que nous allons examiner dans la partie qui suit.

#### V.4.2.2 Images monocomposantes réelles

Dans ce paragraphe, nous présentons les résultats du DHODA appliqué à des images réelles. Les résultats sont comparés au DESA et à l'approche par IA. Quelques remarques d'ordre pratique sont à préciser. Donc, en plus des conditions de bande étroite et d'amplitude localement constante, nous faisons aussi l'hypothèse de moyenne nulle pour les images. Ce qui revient en pratique à soustraire de l'image sa moyenne.

**Remarque V.2.** L'énergie pour générer le signal image (Équation (V.32)) doit être positive. Une étude concernant la positivité du TKEO est faite dans (132).

**Tableau V.2:** Erreurs d'approximation des composantes AM et FM de l'image  $I_2$ , obtenues avec le DHODA et le DESA.

	$MSE(a, \hat{a})$	$\ a - \hat{a}\ _2$	$var\left(\frac{a - \hat{a}}{a}\right)$	$MSE(\omega_1, \hat{\omega}_1)$	$\ \omega_1 - \hat{\omega}_1\ _2$
DESA	0.0129	11.3444	0.0414	0.0452	21.2644
DHODA	0.0036	6.0368	0.0125	0.0098	9.9121

	$var\left(\frac{\omega_1 - \hat{\omega}_1}{\omega_1}\right)$	$MSE(\omega_2, \hat{\omega}_2)$	$\ \omega_2 - \hat{\omega}_2\ _2$	$var\left(\frac{\omega_2 - \hat{\omega}_2}{\omega_2}\right)$
DESA	0.0418	0.0160	12.6559	0.0386
DHODA	0.0084	0.0052	7.2412	0.0132

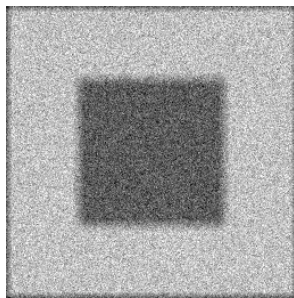
Comme il a aussi été souligné dans (73), il arrive, pour certains pixels de l'image, que l'énergie soit négative. Dans (73), les AMauteurs proposent de mettre à zéro la valeur de l'énergie du pixel pour lequel son énergie, donnée par l'équation (IV.27), est négative. Dans cette étude, nous faisons un moyennage dans le voisinage  $3 \times 3$  de chaque pixel pour lequel l'énergie de Teager-Kaiser (cf. Équation (V.30)) est négative. Cela reflète mieux l'aspect contextuel du pixel.

Nous faisons également des pré-traitement des images. Nous appliquons un filtre médian comme pré-traitement des images avant de les démoduler. Il faut noter que cela a été aussi dans (73). Bien entendu, nous le faisons aussi systématiquement pour les autres méthodes, pour ne pas biaiser les comparaisons avec les autres algorithmes de démodulation.

Avec ces considérations faites, nous appliquons le DHODA sur l'image du Carré montré sur la Figure V.3 et sur les images sonar d'ombres de mines montrées sur la Figure V.4. Nous commentons d'abord les composantes AM, et en deuxième lieu, les fonctions FM obtenues.

### - Composantes AM :

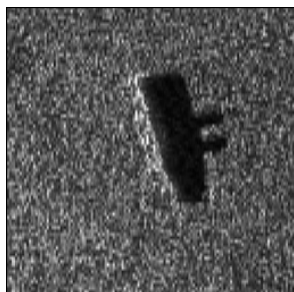
On s'intéresse ici uniquement aux composantes AM des images. On va voir qu'elles peuvent être appliquées à la segmentation d'images. En particulier, nous verrons leurs applications pour la segmentation d'ombres de mines dans des images sonar. Cela présente beaucoup d'intérêts pour des applications civiles et militaires.



*Figure V.3:* Carré



(a)



(b)



(c)

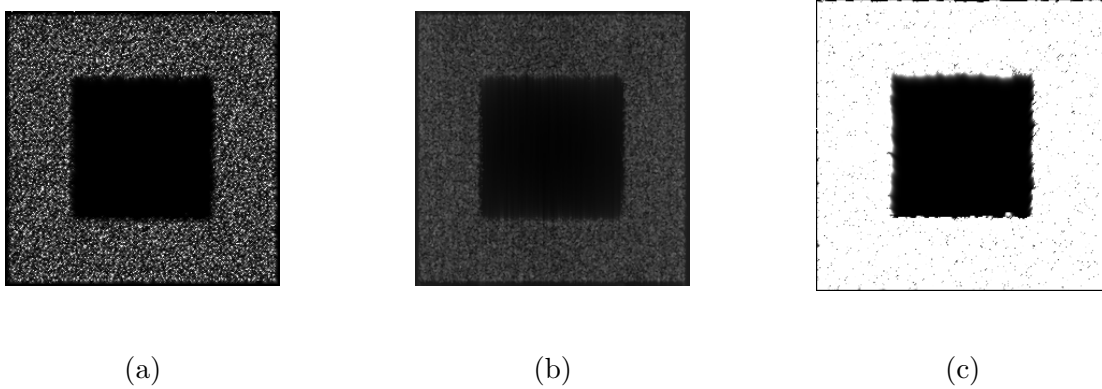
*Figure V.4:* Images sonar. Mine 1 (a). Mine 2 (b). Mine 3 (c).

Le DHODA est d'abord appliqué sur l'image du Carré (Figure V.3). La composante AM est représentée sur la Figure V.5. Comme nous pouvons le constater, le DHODA arrive à bien segmenter le carré noir avec la composante AM (Figure V.5-(c)). Ce qui n'est pas le cas pour les autres méthodes de démodulation, notamment le DESA (Figure V.5-(a)) et l'IA (Figure V.5-(b)). Il est à préciser que ni le DESA, ni l'IA sont des méthodes de segmentation d'images. Nous voulons juste mettre en avant l'information supplémentaire donnée avec les HODEO  $2D$ , par rapport au TKEO  $2D$  et à la transformée de Hilbert  $2D$ . Comme nous l'avons vu au Chapitre IV, nous savons que la propriété principale de la composante AM est sa capacité à renseigner sur le niveau de contraste des textures, plus précisément, sur la disparité en intensité entre les textures sombres et brillantes. Cela est bien reflété par la composante AM donnée par le DHODA. En se basant sur tout cela, nous pouvons dire que le DHODA donne en plus qualitativement de meilleurs résultats de démodulation. Finalement, un simple moyennage permet de parfaire la segmentation comme nous le voyons avec la Figure V.6.

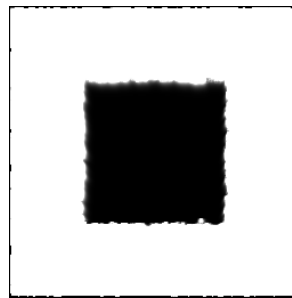
Nous avons aussi utilisé une méthode basique de segmentation basée sur le seuillage de l'histogramme. L'histogramme de l'image du carré, ainsi que la segmentation sont représentés sur la Figure V.7.

Nous appliquons maintenant le DHODA sur des images sonar d'ombres de mines (Figure

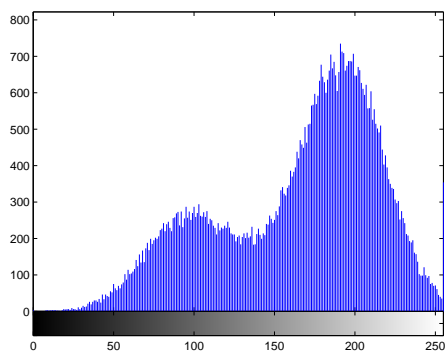




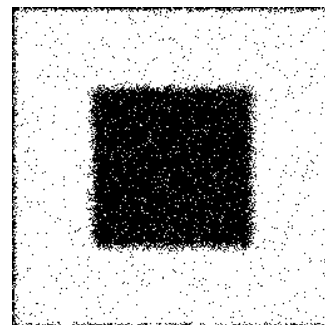
**Figure V.5:** Composantes AM obtenues avec différentes méthodes de démodulation : DESA (b). IA (c). DHODA (d).



**Figure V.6:** Segmentation du Carré avec la composante AM avec le DHODA



(a)

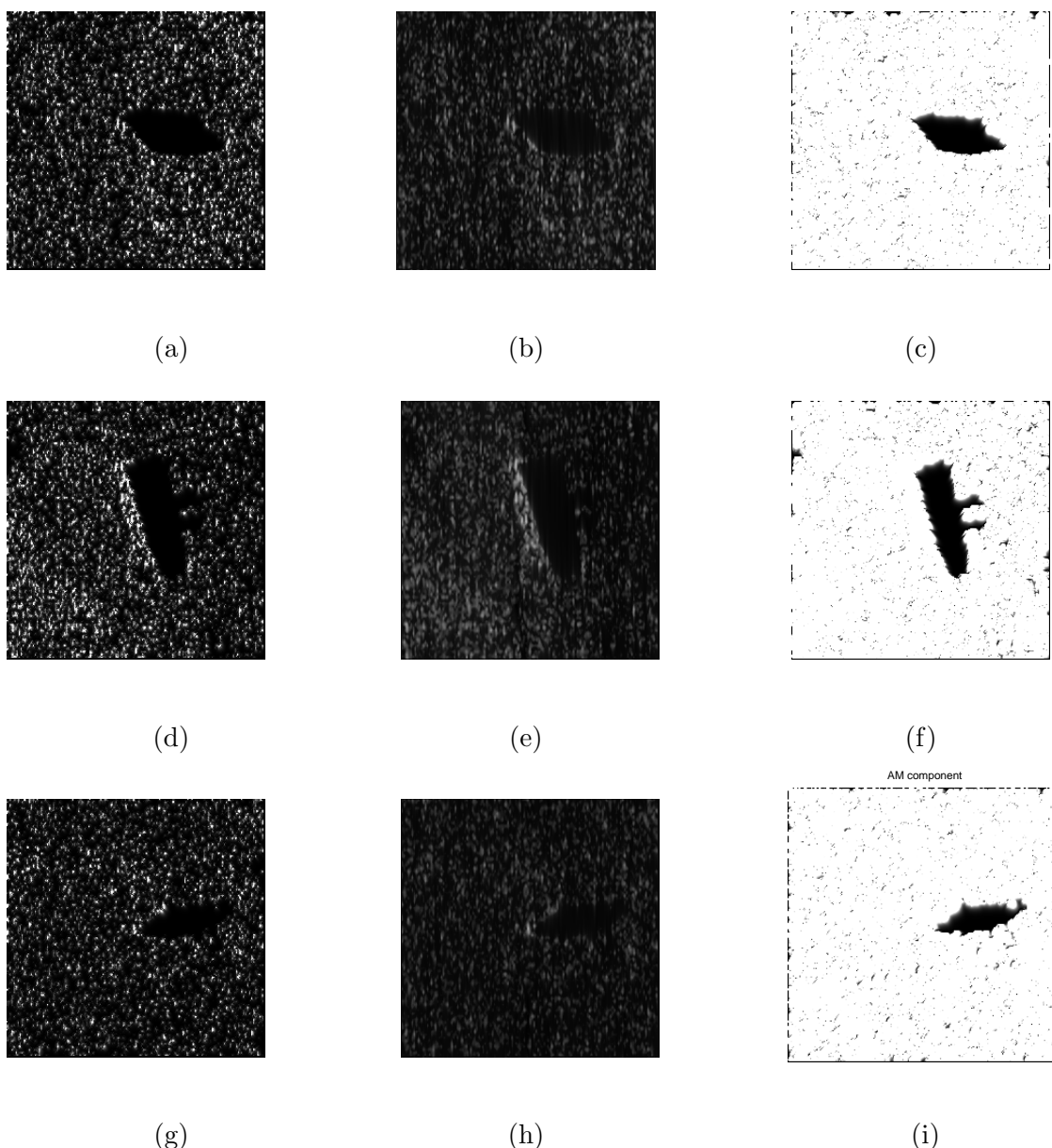


(b)

**Figure V.7:** Histogramme du Carré (a). Segmentation basée sur l'histogramme (b).



V.4) qui ont des structures un peu plus complexes. Elles se composent de trois parties : un écho, une réverbération et l'ombre de la mine. Bien entendu, la partie la plus importante reste l'ombre de la mine. Le DHODA arrive à extraire ces parties dans ces images sonar, grâce aux composantes AM (Figures V.8-(c), V.8-(f) et V.8-(i)). Comme nous l'avons précédemment fait remarquer, ni le DESA (Figures V.8-(a), V.8-(d) et V.8-(g)), ni l'IA (Figures V.8-(b), V.8-(e) et V.8-(h)) n'arrivent à faire ressortir ces parties importantes des images, même si ce n'est pas l'objectif premier de ces méthodes de démodulation. Là encore, on peut constaté



**Figure V.8:** Composantes AM obtenues avec différentes méthodes de démodulation. De la gauche vers la droite : 1<sup>ère</sup> colonne : DESA. 2<sup>ème</sup> : IA. 3<sup>ème</sup> : DHODA

l'importance des ordres supérieurs par rapport au TKEO 2D et à la transformée de Hilbert 2D. Un moyennage de fenêtre permet de parfaire les segmentations comme il apparaît sur la Figure V.9.

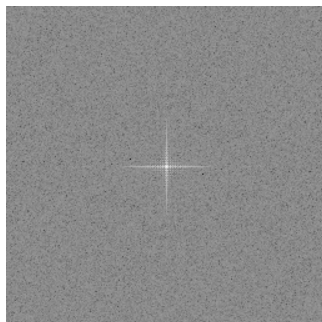


**Figure V.9:** Segmentations des ombres de mines avec les composantes AM obtenues avec le DHODA

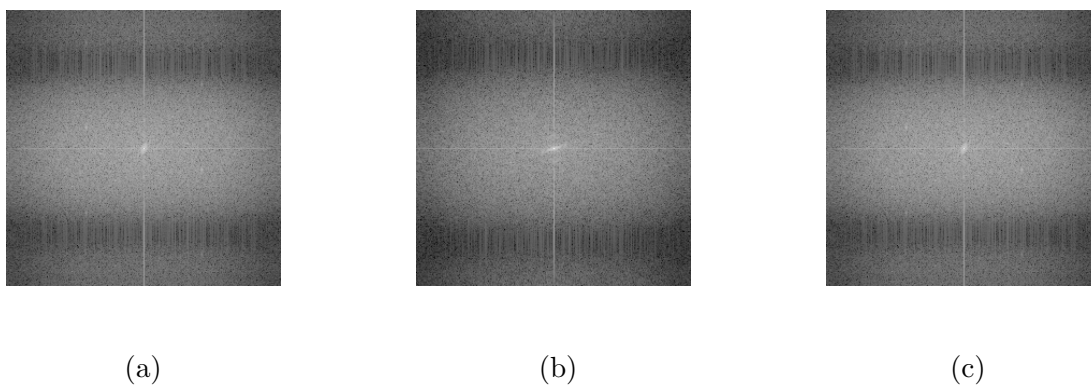
#### - Composantes FM :

Nous nous intéressons ici aux composantes FM des images du Carré (Figure V.3) et des images d'ombres de mines (Figure V.4). Pour les afficher, nous utilisons une représentation sous forme de flèches. Cette représentation reflète mieux la notion de fréquence d'une image. Ainsi, pour chaque pixel, on trace une flèche dont l'origine est le pixel. La longueur de la flèche est inversement proportionnelle au module de la fréquence (composante FM en ce pixel). La flèche est orientée suivant la direction du vecteur fréquence. (Pour plus de détails, le lecteur pourra regarder les travaux de Havlicek (62) et Havlicek et al.(48)). Par conséquent, plus la flèche est courte, plus la fréquence est grande, et inversement. Les hautes fréquences représentent les transitions brusques des niveaux de gris de l'image, les contours, certaines formes de textures, du bruit, . . . Avec ce type de représentation, les notions de hautes et de basses fréquences d'une image donnée par la composante FM ont beaucoup plus de sens que la transformée de Fourier (DFT) d'une image. Cela est bien illustré avec les DFT des images de mines (Figure V.4) représentées respectivement sur la Figure V.11, et du Carré (Figure V.3) représentée sur la Figure V.10.

La composante FM du Carré est représentée sur la Figure V.12 et celle des mines sur la Figure V.13. Nous voyons bien la cohérence entre la composante FM et les images. Par exemple, pour l'image du Carré, on a de petites flèches en dehors du carré noir. Cela traduit de hautes fréquences sur cette zone; ce qui est tout à fait logique au vu de la structure de cette partie. Par contre, nous avons des flèches de longueur assez grande à l'intérieur du carré. Ce qui est normal étant donné que c'est une zone plus tôt homogène. Ces informations sont beaucoup plus riches pour la description de l'image du Carré que la DFT (Figure V.10). Pour les images sonar, on peut faire les mêmes remarques que précédemment. Là aussi, les



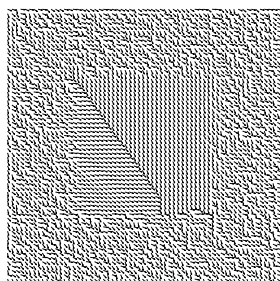
*Figure V.10:* Transformée de Fourier du Carré (Fig. V.3)



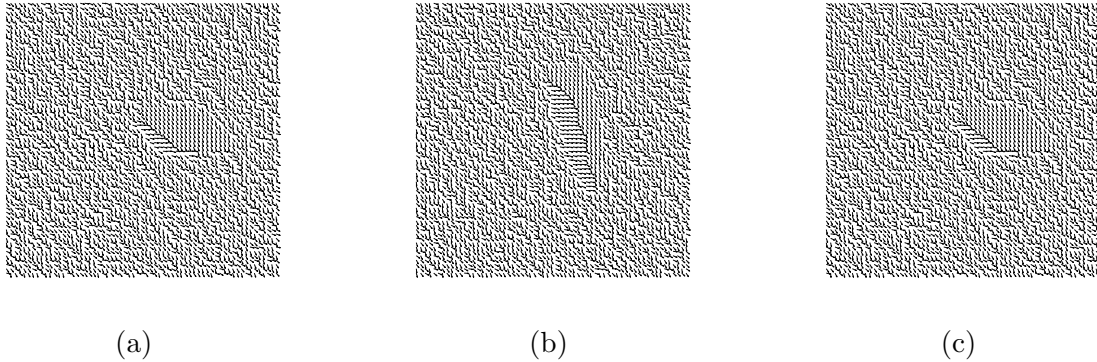
*Figure V.11:* Transformées de Fourier des images sonar (Fig. V.4)

composantes FM (Figure V.13) renseignent beaucoup plus que les DFTs (Figure V.11). On peut aussi remarquer que les DFTs ont toutes le même aspect.

Dans la partie qui suit, nous étendons notre approche de démodulation à une plus large classe d'images réelles.



*Figure V.12:* Module de la fréquence spatiale (FM) du Carré (Fig. V.3)



**Figure V.13:** Module de la fréquence spatiale (FM) des images sonar (Fig. V.4)

## V.5 Algorithme de démodulation d'images réelles basé sur les HODEO 2D

Dans cette partie, nous étudions l'apport des ordres supérieurs sur les images réelles. L'algorithme que nous avons présenté dans la Section V.4 se limite à des images à bande étroite. Cela étant, la plupart des images réelles sont plutôt large bande, et pour cette raison, nous proposons d'étendre le DHODA à une plus grande famille d'images réelles.

Notre approche est similaire à celle développée au Chapitre IV, en considérant un modèle AM-FM multicomposant pour les images réelles. Par ailleurs, on sait (71 ; 72) qu'une approche multicomposante modélise bien les images réelles même très complexes. On sait aussi que les fonctions de Gabor sont bien connues pour leurs bonnes propriétés de localisations spatiale et fréquentielle (voir par exemple (80 ; 81 ; 2)). Ainsi, avec un modèle multicomposant, nous séparons les différentes composantes de l'image avec un banc de filtres de Gabor. Dans la Section V.4, nous avons montré que la démodulation avec le DHODA donnait de meilleurs résultats que le DESA proposé dans (36) et l'IA (62) (cf. Tableaux V.1 et V.2). Une fois les composantes séparées, nous proposons de démoduler chaque partie monocomposante de l'image avec le DHODA.

### V.5.1 Algorithme MHODA (Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm)

Soit  $I$  une image réelle définie sur un ouvert borné  $\Omega$ . On considère l'approche multicomposante (cf. Définition IV.10). Pour tout  $(x_1, x_2) \in \Omega$ , on

se propose alors d'écrire  $I$  comme suit :

$$I(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos [x_1 \cdot \omega_{1,n}(x_1, x_2) + x_2 \cdot \omega_{2,n}(x_1, x_2)] \quad (\text{V.45})$$

$$= \sum_{n=1}^N a_n(x_1, x_2) \cos [\varphi_n(x_1, x_2)] = \sum_{n=1}^N I_n(x_1, x_2), \quad (\text{V.46})$$

où les  $a_n$  sont des fonctions positives et les  $\varphi_n$  sont de classe  $C^1$  dans  $\Omega$ .

On cherche alors à déterminer  $\forall n = 1, \dots, N$  les fonctions AM  $a_n$  et FM  $\nabla\varphi_n = [\omega_{1,n}, \omega_{2,n}] = [U_n, V_n]$ .

On considère le banc de filtres de Gabor  $\{g_n, n = 1, \dots, N\}$  de taille  $N$ .  
Notons par  $\{G_n, n = 1, \dots, N\}$  ses réponses fréquentielles respectives.  
Désignons par  $\tilde{I}_n$  la réponse du filtre de Gabor  $g_n$  d'ordre  $n$ . On suppose que :

$$\tilde{I}_n = (I * g_n) \approx (I_n * g_n), \quad (\text{V.47})$$

Pour mieux prendre en compte les voisinages des pixels, en particulier, les pixels diagonaux, nous calculons l'énergie de l'image  $I$  par :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_1} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1^2} \right] + \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_2} \right)^2 - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_2^2} \right] + 2 \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial x_1} \frac{\partial I}{\partial x_2} \right) - I \frac{\partial^2 I}{\partial x_1 \partial x_2} \right]. \quad (\text{V.48})$$

Avec la relation généralisée (V.10), on peut réécrire l'équation précédente par :

$$\Phi_2 [I(x_1, x_2)] = \{\Lambda [I(x_1, x_2)]\}^2 - I(x_1, x_2) \cdot \Lambda^2 [I(x_1, x_2)] \quad (\text{V.49})$$

Nous voulons maintenant calculer avec  $\Phi_2$  l'énergie de toutes les composantes  $\tilde{I}_n, \forall n = 1, \dots, N$ . On a alors :

$$\begin{aligned} \Phi_2(\tilde{I}_n) &= [\Lambda(\tilde{I}_n)]^2 - \tilde{I}_n \cdot \Lambda^2(\tilde{I}_n) \\ &= [\Lambda(I * g_n)]^2 - (I * g_n) \cdot [\Lambda^2(I * g_n)] \\ &\approx [(I_n * \Lambda(g_n))]^2 - (I_n * g_n) \cdot [I_n * \Lambda^2(g_n)]. \end{aligned} \quad (\text{V.50})$$

En vertu de la Proposition IV.1, on peut calculer  $\forall n = 1, 2, \dots, N$  l'énergie des composantes  $\tilde{I}_n$  de l'image par :

$$\Phi_2^d [\tilde{I}_n] \approx \Phi_2^d [I_n] |G_n [\nabla\varphi_n]|^2 \quad (\text{V.51})$$

Le banc de filtres de Gabor a séparé  $I$  en  $N$  parties monocomposantes  $\tilde{I}_n$ . On peut maintenant appliquer le DHODA sur chacune de ces composantes.

Pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , on pose :

$$I_1(k, l) = \frac{1}{2} [I(k+1, l) - I(k-1, l)], \quad (\text{V.52})$$

$$I_2(k, l) = \frac{1}{2} [I(k, l+1) - I(k, l-1)], \quad (\text{V.53})$$

$$I_{12}(k, l) = \frac{1}{2} [I_2(k+1, l) - I_2(k-1, l)], \quad (\text{V.54})$$

$$I_{12}^1(k, l) = \frac{1}{2} [I_{12}(k+1, l) - I_{12}(k-1, l)] \quad (\text{V.55})$$

$$I_{12}^2(k, l) = \frac{1}{2} [I_{12}(k, l+1) - I_{12}(k, l-1)]. \quad (\text{V.56})$$

Soit  $\hat{U}_n$  et  $\hat{V}_n$ , les composantes estimées respectives de la fréquence horizontale et verticale.  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , elles sont alors données  $\forall n = 1, \dots, N$  par :

$$|\hat{U}_n(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_{12} * g_n(k, l)]}{\Phi_2^d [I_2 * g_n(k, l)]}} \quad (\text{V.57})$$

$$|\hat{V}_n(k, l)| = \arcsin \sqrt{\frac{\Phi_2^d [I_{12} * g_n(k, l)]}{\Phi_2^d [I_1 * g_n(k, l)]}}. \quad (\text{V.58})$$

On note par  $\hat{a}_n$  la composante estimée de l'amplitude. Il faut tenir en compte l'énergie des  $\tilde{I}_n$  donnée par (V.51).  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$ , elle est finalement obtenue  $\forall n = 1, \dots, N$  par :

$$\hat{a}_n(k, l) = \frac{1}{|G_n[\hat{U}_n(k, l), \hat{V}_n(k, l)]|} \sqrt{\frac{[\Phi_2^d (I_1 * g_n)(k, l)] \cdot [\Phi_2^d (I_2 * g_n)(k, l)]}{\Phi_2^d [(I_{12}^1 * g_n)(k, l) + (I_{12}^2 * g_n)(k, l)]}} \quad (\text{V.59})$$

Pour une meilleure analyse et une meilleure extraction des structures pertinentes de l'image, nous appliquons une DCA afin de sélectionner les pixels dominants. Notre critère de sélection est encore basée sur l'énergie  $\Psi_2$  des pixels. On le définit  $\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2$  par :

$$\begin{aligned} (k, l)_D &= \arg \max_{1 \leq n \leq N} \Psi_2[(I * g_n)(k, l)] \\ &= \arg \max_{1 \leq n \leq N} \Psi_2[\tilde{I}_n(k, l)], \end{aligned} \quad (\text{V.60})$$

La démodulation s'achève avec le calcul des composantes dominantes  $\hat{a}_D(k, l)$ ,  $\hat{U}_D(k, l)$  et  $\hat{V}_D(k, l)$ . Les formules (V.52-V.60) constituent l'algorithme de démodulation MHODA (Multicomponent Higher Order Demodulation Algorithm), que nous avons également présenté dans (82).

## V.5.2 Résultats numériques

### V.5.2.1 Préliminaires

Les résultats sont obtenus avec le même banc de filtres de Gabor que celui illustré par la Figure IV.7. Nous avons représenté sur la Figure V.14 quelques composantes  $\tilde{I}_n$  de l'image sonar (Figure V.31-(a)).

### V.5.2.2 Remarques pratiques

Nous faisons quelques remarques d'ordre pratique concernant l'implémentation du MHODA. D'abord, pour toutes les images que nous avons traitées, nous leur avons imposé la condition de moyenne nulle. Aussi, on a remarqué que pour certains pixels, l'énergie  $\Psi_2^d$  (cf. Équation V.30) était négative. Pour palier à cela, nous faisons un moyennage dans une fenêtre  $3 \times 3$  de ce pixel.

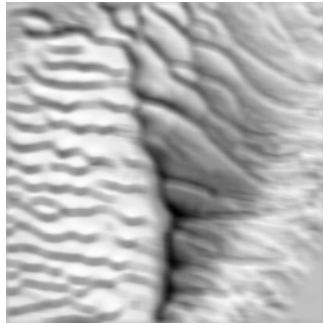
### V.5.2.3 Commentaires

Le MHODA est appliqué à plusieurs images de caractéristiques différentes. Comme on peut le voir sur les résultats, l'algorithme donne de bons résultats pour les images réelles. Les composantes AM (Figures V.16-(b), V.18-(b), V.20-(b), V.22-(b), V.24-(b), V.26-(b), V.28-(b), V.32-(b) et V.34-(b)) capturent bien les parties texturées présentes dans les images.

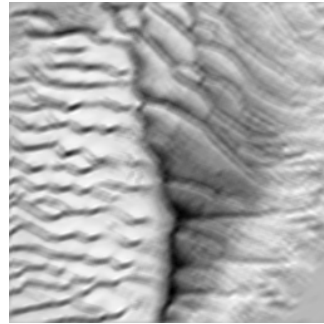
Pour les composantes FM, nous avons utilisé une représentation sous forme de flèches pour mieux mettre en évidence les notions de fréquences spatiales d'une image. Pour plus de détails sur ce type de représentation, le lecteur pourra consulter (62 ; 48).

Pour les images que nous présentons, en particulier pour celles des Figures V.20-(a), V.22-(a) et V.28-(a), on voit bien la cohérence entre les représentations des modules des composantes FM (Figures V.20-(c), V.22-(c) et V.28-(c)) et les structures des images. Nous rappelons que les longueurs des flèches sont inversement proportionnelles aux modules des composantes FM. Par conséquent, pour les zones où il y a des irrégularités comme une brusque variation du niveau de gris, des contours ou du bruit, on aura de petites flèches. Tandis que pour des zones homogènes, on aura des flèches de longueur beaucoup plus grande. Cette forme de représentation des FM peut être très utile pour une classification de texture (cf. Figures V.20-(c), V.22-(c) et V.28-(c)). Les images des Figures V.16-(a), V.18-(a), V.24-(a) et V.26-(a) ont par contre des textures beaucoup plus complexes. Les orientations des textures locales font qu'il est plus difficile de faire une classification avec le modèle proposé, comme on le voit sur les composantes FM avec les Figures V.16-(c), V.18-(c), V.24-(c) et V.26-(c).

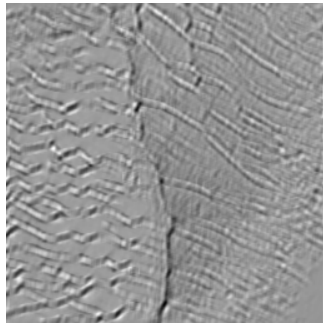




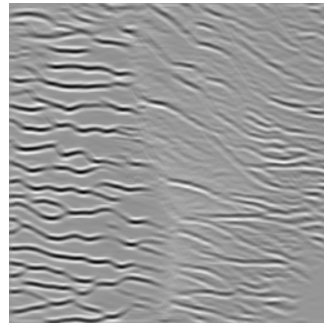
$\tilde{I}_1$



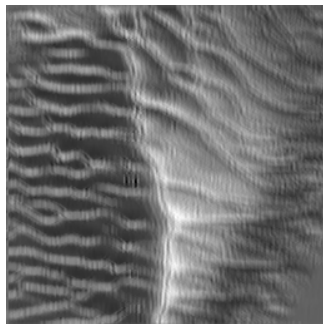
$\tilde{I}_{30}$



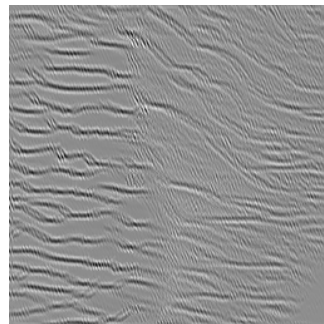
$\tilde{I}_{40}$



$\tilde{I}_{45}$



$\tilde{I}_{50}$



$\tilde{I}_{60}$

**Figure V.14:** Quelques composantes  $\tilde{I}_n$  de l'image sonar (Figure V.31), obtenues avec différents filtres du banc

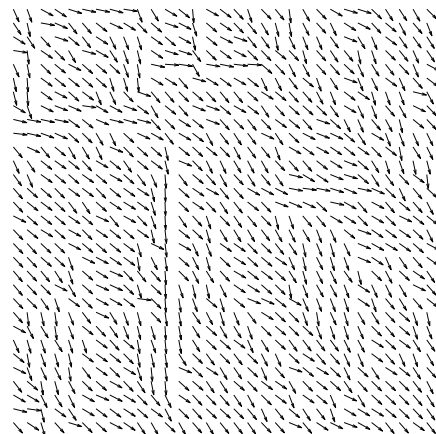




*Figure V.15:* Barbara



(a)

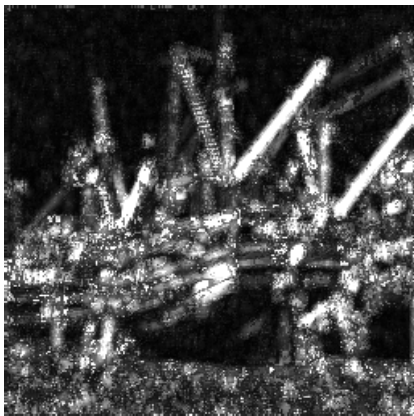


(b)

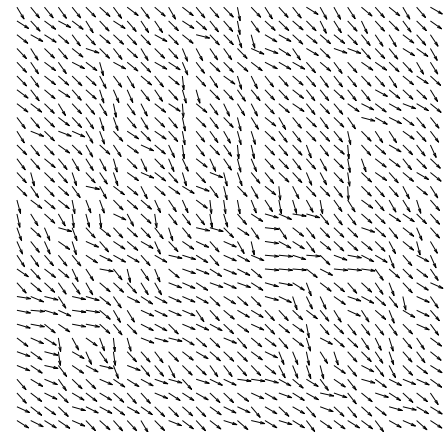
*Figure V.16:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.17:* Bateau



(a)

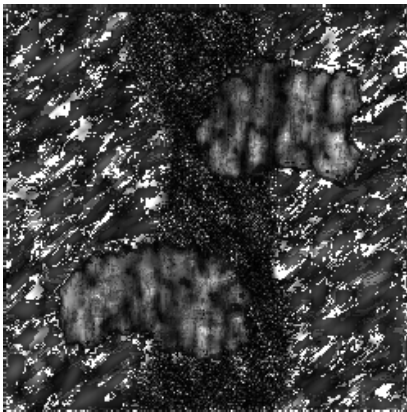


(b)

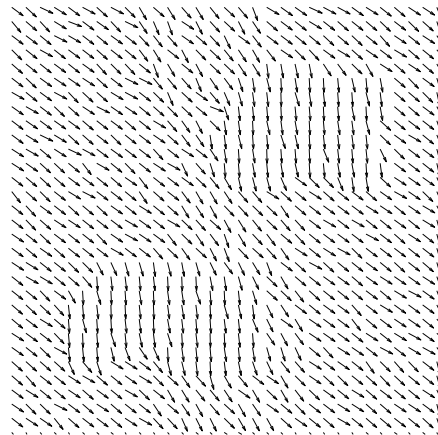
*Figure V.18:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.19:* Texture 1

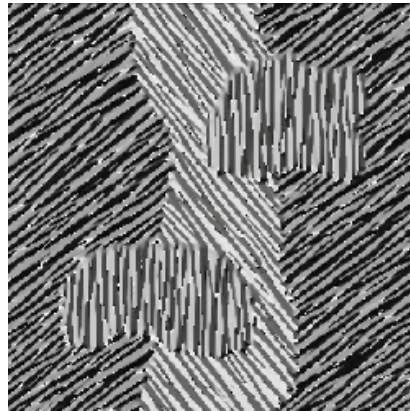


(a)



(b)

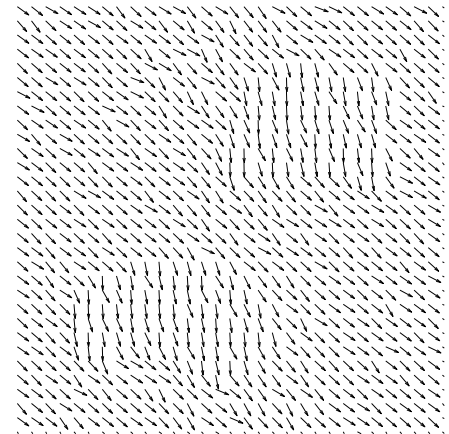
*Figure V.20:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.21:* Texture 2



(a)



(b)

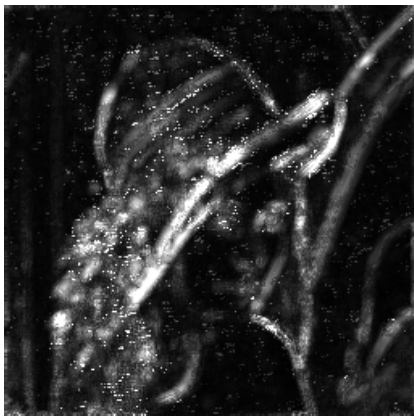
*Figure V.22:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)

## V.6 Conclusion

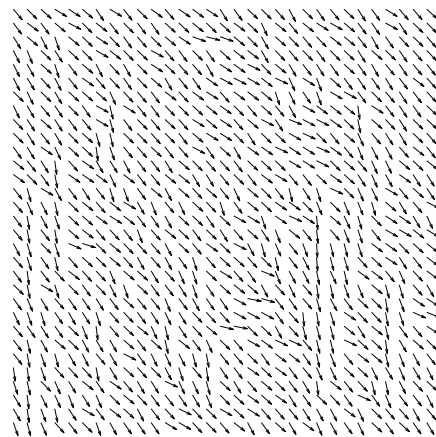
Nous avons exploré dans ce Chapitre la démodulation des images avec les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs (HODEO  $2D$ ). Nous avons présenté deux nouveaux algorithmes de démodulation : un pour des images monocomposantes, le DHODA, et un pour une plus large classes d'images réelles, le MHODA. Cette étude nous a permis de bien mettre en évidence l'apport des HODEO  $2D$  dans la démodulation des images, par rapport au TKEO



*Figure V.23:* Lena

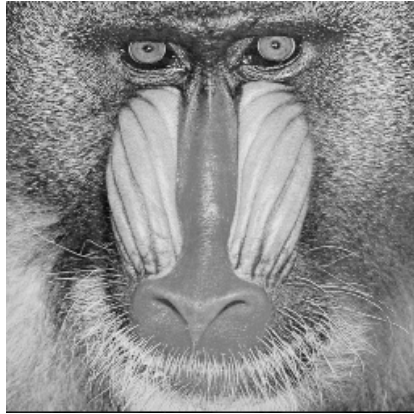


(a)

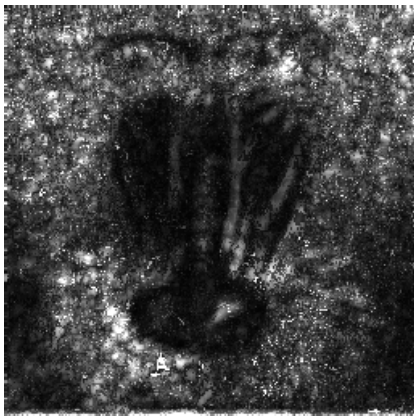


(b)

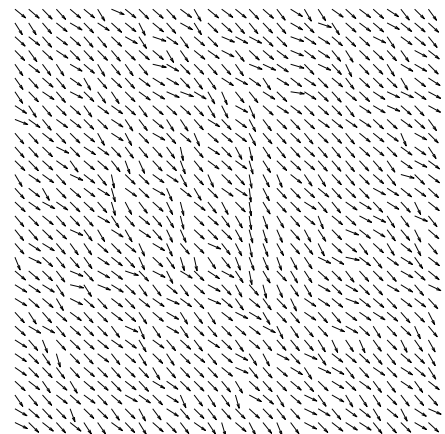
*Figure V.24:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.25:* Mandrill

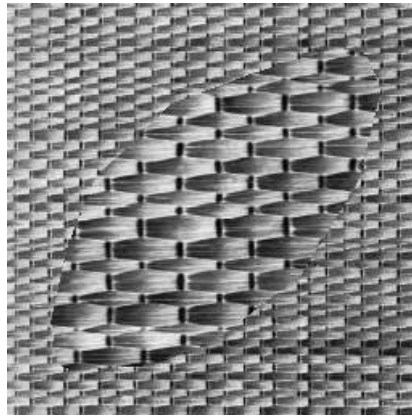


(a)

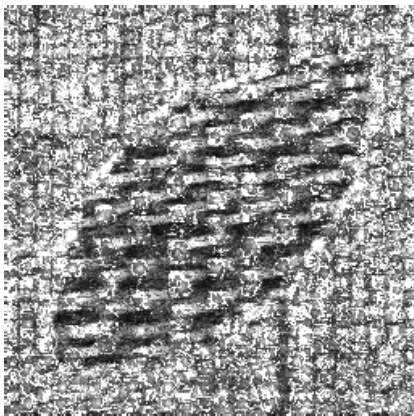


(b)

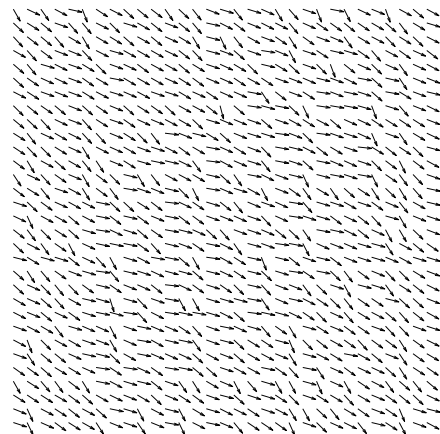
*Figure V.26:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.27:* Texture 3

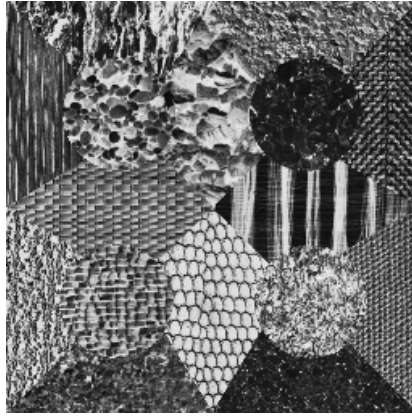


(a)

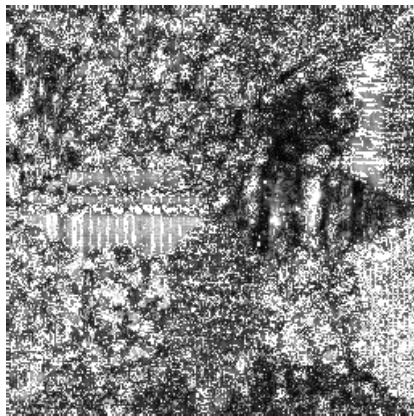


(b)

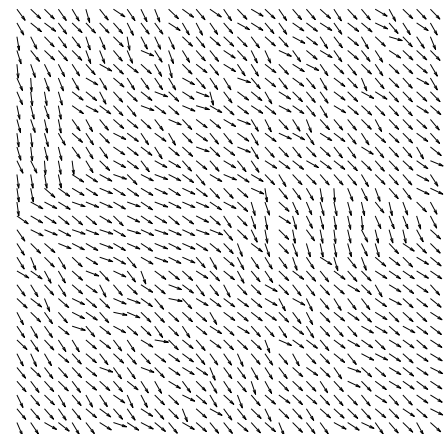
*Figure V.28:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.29:* Texture 4



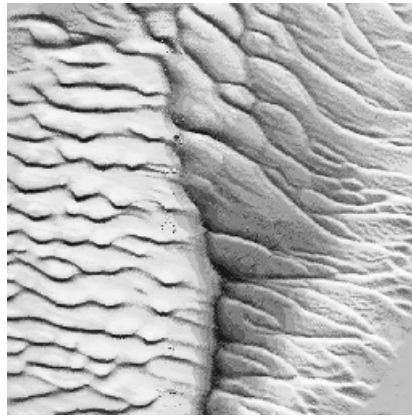
(a)



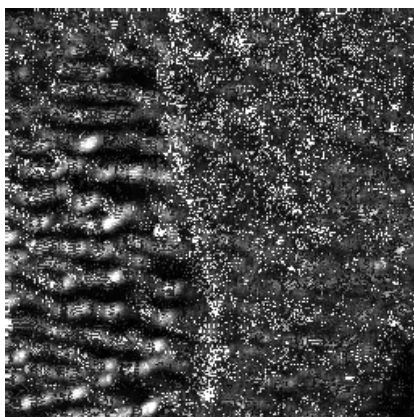
(b)

*Figure V.30:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)

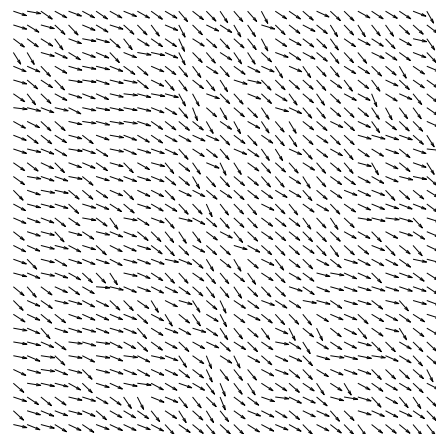




*Figure V.31:* Image sonar de fond marin



(a)

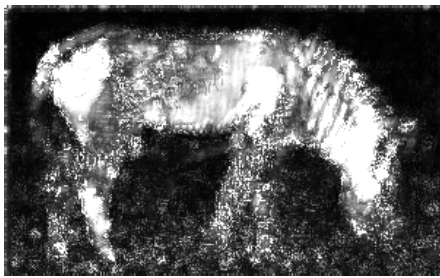


(b)

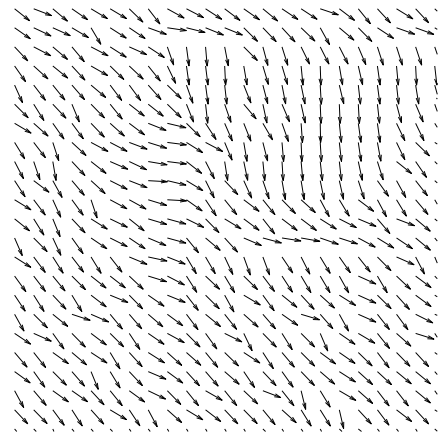
*Figure V.32:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)



*Figure V.33:* Zèbre



(a)



(b)

*Figure V.34:* Composantes dominantes : AM (a). Module FM (b)

$2D$  et à la transformée de Hilbert  $2D$ . Ainsi, comme on l'a vu avec les résultats numériques obtenus, le DHODA donne de meilleurs résultats de démodulation que le DESA (36) et l'approche par IA (62). En effet, nous avons montré, sur des images synthétiques, que le DHODA réduit de manière significative les erreurs d'approximation des amplitudes et des fréquences spatiales (cf. Tableaux V.1 et V.2). Aussi, pour les images monocomposantes que nous avons présentées, le DHODA permet de mettre en évidence l'information la plus pertinente avec les composantes AM, d'une meilleure manière que le DESA et l'IA. Nous avons aussi vu que l'algorithme proposé, le DHODA, pouvait être appliqué à la segmentation d'ombres de mines dans des images sonar. C'est une étape très importante pour des applications civiles et militaires.

Dans un deuxième temps, nous avons étendu notre approche à la démodulation d'une plus grande classe d'images réelles avec le MHODA. Nous avons vu que l'algorithme proposé pour les images réelles donne de bons résultats de démodulation. Aussi, les résultats obtenus

sont très intéressants pour la classification de certaines textures.

---

# Conclusion

Cette thèse a permis, dans un premier temps, d'apporter un certain nombre de réponses aux questions relatives à la problématique posée par la décomposition modale empirique (EMD), à savoir le manque de bases théoriques de la méthode. Avec ce travail de thèse, nous avons proposé des cadres théoriques à l'EMD  $1D$  et  $2D$ , et avons apporté des justifications théoriques à beaucoup de notions relatives à l'EMD et définies de manière très intuitive ou sur la base de simulations numériques. Pour ce faire, nous avons formulé le calcul de la moyenne locale  $1D$  et  $2D$  d'une manière telle qu'on puisse faire du calcul différentiel sur les enveloppes supérieures et inférieures locales. Cette nouvelle formulation du calcul de la moyenne locale nous a permis d'éliminer l'interpolation dans le processus du tamisage (SP)  $1D$  et  $2D$ , qui est la principale cause des problèmes de l'EMD  $1D$  et  $2D$ . Cela est d'autant plus important qu'elle permet de réduire considérablement en temps de calcul des enveloppes supérieures et inférieures, particulièrement, pour les espaces de dimension supérieure. Aussi, elle nous a permis de montrer qu'on peut approcher les itérations du tamisage  $1D$  et  $2D$  par la résolution de certaines équations aux dérivées partielles (EDP), pour lesquelles nous avons aussi montré qu'elles sont bien posées. Avec l'approche théorique proposée et basée sur les EDP, nous avons introduit de nouvelles notions telles que les  $p$   $\delta$  -  $IMF$   $1D$  et  $2D$ , les  $H$   $p$   $\delta$  -  $IMF$  et les  $\delta$  -  $IMF$   $1D$  et  $2D$ , donnant ainsi des caractérisations beaucoup plus explicites des modes empiriques  $1D$  et  $2D$ , que ceux extraits avec le SP  $1D$  et  $2D$  classiques. Nous avons aussi proposé de nouveaux algorithmes EMD  $1D$  et  $2D$ , qui améliorent les algorithmes EMD classiques  $1D$  et  $2D$ . De plus, pour le cas  $2D$ , nous avons également proposé une décomposition avec une combinaison linéaire  $\delta$  -  $IMF$   $1D$ , donnant ainsi plus de degrés de liberté sur l'extraction du niveau de détails pour les images réelles que l'EMD  $2D$  classique.

Dans un second temps, nous avons exploré la démodulation des images avec les modèles AM-FM. Cela nous a permis de montrer comment on peut modéliser des images synthétiques et des images réelles et même de nature très complexe sous la forme AM-FM, et de mettre en avant leurs intérêts en analyse et en segmentation d'images. Dans ce travail, nous avons proposé plusieurs algorithmes de démodulation d'images. Nous avons d'abord apporté une amélioration dans la démodulation des images large bande, en proposant un algorithme qui repose sur le TKEO  $2D$  et les filtres de Gabor, combinés avec un filtrage passe-bas en amont de la démodulation. Nous avons ensuite exploré la démodulation des images monocomposantes et multicomposantes avec les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs  $2D$ , en proposant des algorithmes de démodulation basés sur généralisation du TKEO  $2D$  à n'importe quel ordre de dérivation.

## Principales contributions

### La Décomposition Modale Empirique 1D et 2D

Nous avons apporté de nouveaux résultats dans cette partie, en contribuant au formalisme mathématique de l'EMD et en proposant de nouveaux algorithmes EMD en 1D et en 2D. Comme premiers résultats, dans les algorithmes EMD 1D et 2D que nous avons proposés, nous ne détectons pas les extréma des signaux ou des images et nous n'estimons non plus l'enveloppe moyenne par interpolation des extréma, comme cela est classiquement fait. Cela permet de réduire considérablement le temps de calcul, surtout pour les espaces de dimension supérieure. Aussi, nous avons proposé des formulations du tamisage 1D et 2D dans le domaine continu avec des approches par EDP, qui, pour rappel, sont initialement proposés en discret. Notre travail se démarque également des études existantes sur l'EMD sur de nombreux points. En effet :

- Nous proposons des formulations plus explicites des enveloppes supérieures et inférieures locales, en 1D comme en 2D.
- Nous proposons des formulations plus explicites de la moyenne locale, en 1D comme en 2D.
- Nous exploitons les itérations du tamisage 1D et 2D pour en tirer ensuite des EDP, dont leur résolution permet d'extraire les modes empiriques.
- Nous faisons des études théoriques et numériques des modèles par EDP et proposons des caractérisations analytiques des modes en 1D comme en 2D.
- Pour le cas 1D, nous proposons un modèle d'EDP dont la formulation peut se réécrire comme l'équation de la chaleur retrograde.
- Nous apportons des justifications théoriques aux modes empiriques en 1D comme en 2D, qui, pour rappel, ne sont définis que de manière intuitive ou bien sur la base de simulations numériques.
- Enfin, nous proposons de nouveaux algorithmes EMD en 1D comme en 2D donnant de meilleurs résultats de décomposition que l'EMD classique 1D et 2D.

### Modèles AM-FM pour l'analyse d'images

Dans cette partie, nous avons apporté des contributions en introduisant de nouveaux algorithmes. Nous avons montré comment modéliser des images synthétiques et des images réelles et même de nature très complexe sous la forme AM-FM, et avons mis en avant l'intérêt des modèles AM-FM en analyse et en segmentation d'images. Nous avons d'abord apporté des améliorations dans la démodulation d'images réelles, qui sont dans leur grande majorité à bande large. En effet, nous avons proposé d'inclure un filtrage passe-bas en amont de la démodulation, afin de compenser les dégradations générées par les filtres de Gabor, utilisés pour la décomposition en sous bandes des images réelles. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'appliquer des filtres et autres post-traitements supplémentaires, à posteriori, sur les composantes AM et FM, comme l'ont suggérés certains auteurs. Même si ces post-traitements peuvent améliorer ces dernières, cela nécessite des algorithmes supplémentaires et pourrait aussi leur enlever certaines informations. Nous avons également apporté une justification théorique du calcul de l'énergie de Teager-Kaiser des composantes de l'image réelle, obtenues

par une décomposition en sous bandes.

De nombreux algorithmes de démodulation et aussi celui nous avons proposé pour améliorer la démodulation d'images large bande, reposent sur l'opérateur de Teager-Kaiser (TKEO  $2D$ ), qui utilise des dérivées de l'image jusqu'à l'ordre 2. Nous avons également apporté des contributions en poussant l'ordre de dérivation et nous avons ainsi généralisé le TKEO  $2D$ , afin d'explorer la démodulation des images avec les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs (HODEO  $2D$ ). Cela a permis de mettre en évidence l'apport des HODEO  $2D$  par rapport au TKEO  $2D$  et à la transformée de Hilbert  $2D$  dans la démodulation des images, en proposant de meilleurs algorithmes de démodulation que ceux existants actuellement, à savoir le DESA et l'approche par image analytique avec la transformation de Hilbert  $2D$ . Enfin, nous avons montré une application pratique de l'algorithme proposé pour la segmentation d'images, et son extension à une plus grande classe d'images réelles montre qu'une application serait possible pour la classification de certaines textures.

## Perspectives

Dans le travail proposé sur la décomposition modale empirique  $1D$  et  $2D$ , nous avons négligé le reste dans le développement de Taylor, et aussi nous n'avons pas pu trouver un critère pour choisir de manière optimale le paramètre  $\delta$ . Il serait intéressant de trouver une méthode automatique du choix du paramètre  $\delta$  et d'examiner le cas où le reste de Taylor ne serait pas négligeable. Une autre limite de cette étude concerne le choix du critère d'arrêt. En effet, nous l'avons basé sur la condition de moyenne nulle, qui tombe à défaut si le signal (ou l'image) à traiter est lui-même à moyenne nulle. Une piste intéressante serait de travailler avec d'autres types de normes, la norme BV par exemple.

L'étude de l'EDP à frontières libres proposée dans le cas  $1D$  n'a pas été faite dans cette thèse, et on a également supposé qu'il existe une valeur de  $t$  pour laquelle l'intégrale (moyenne) de la solution est très petite, voire nulle. Par contre, cela est vérifié numériquement pour les signaux qu'on a eus à traiter. Comme autres perspectives, on pourrait donc également s'intéresser à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution de cette EDP à frontières libres, et ensuite étudier le problème de la moyenne nulle.

Pour le cas  $2D$ , on pourrait faire une étude de la stabilité numérique du schéma explicite proposé pour la résolution de l'EDP  $2D$ .

En ce qui concerne les modèles AM-FM, bien qu'on ait montré numériquement la réduction très significative des erreurs d'approximation des composantes AM et FM estimées avec les algorithmes qu'on a proposés, une perspective intéressante et nécessaire serait de mener une étude mathématique approfondie afin de trouver les bornes supérieures des erreurs d'approximations commises. Enfin, on pourrait développer une méthode de classification de certaines textures, basée sur les modèles AM-FM.



# Annexe





# A

---

## Rehaussement de contraste dans les images avec l'opérateur de Teager-Kaiser

*D*ans cette annexe, nous présentons un algorithme de rehaussement de contraste d'images, basé sur le TKEO  $2D$  (cf. Définitions [IV.8](#) et [IV.9](#)). Nous avons présenté ce travail dans [\(133\)](#).

### A.1 Introduction

La plupart des images réelles auxquelles nous nous confrontons dans la réalité sont faiblement contrastées. On peut citer entre autres, les images médicales, satellitaires, ou issues de microscopes, ou mêmes d'appareils photographiques tout simplement. Il est donc nécessaire de rehausser le contraste, avant de procéder à un quelconque traitement ou une analyse des images.

Il existe dans la littérature plusieurs techniques de rehaussement de contraste; la plus connue étant la méthode d'égalisation d'histogramme (EH) de Gonzalez et Woods ([134](#)). La critique majeure de cette approche est son effet global. En effet, l'égalisation se fait sur tout l'histogramme de l'image, entraînant une saturation de l'intensité du niveau de gris dans certaines parties de l'image. Pour y remédier, Pizer et al ([135](#)), Caselles et al. ([136](#)) et Stark ([137](#)) ont proposé de rendre la méthode EH plus adaptative et plus localisée. Ainsi, pour chaque pixel, une fenêtre locale est considérée et le niveau de gris du pixel est calculé par EH sur cette fenêtre. Différentes autres approches locales sont également proposées dans ([138](#) ; [139](#) ; [140](#) ; [141](#)).

## A.2 Algorithme de rehaussement de contraste

Le système visuel humain est très sensible à la notion de contours dans les images (135). Nous allons donc exploiter cette information des contours et utiliser les approches proposées par Dhawan et al. (138) et Beghdadi et Le Negrate (139), pour définir une nouvelle mesure locale de contraste.

Une mesure locale du contraste au pixel  $(k, l)$  est donnée par :

$$C(k, l) = \frac{|I(k, l) - \bar{E}(k, l)|}{|I(k, l) + \bar{E}(k, l)|}, \quad (\text{A.1})$$

où  $\bar{E}(k, l)$  est calculé sur un voisinage  $\vartheta(k, l)$  du pixel  $(k, l)$  par :

$$\bar{E}(k, l) = \frac{\sum_{(i,j) \in \vartheta(k,l)} \Psi(i, j) I(i, j)}{\sum_{(i,j) \in \vartheta(k,l)} \Psi(i, j)}. \quad (\text{A.2})$$

- Si  $\Psi$  est l'opérateur Laplacien ou le filtre de Sobel, alors (A.1) est la mesure de contraste proposée par Beghdadi et Le Negrate (139).
- Si  $\Psi$  est le module du gradient au pixel  $(k, l)$ , alors (A.2) est le seuil proposé par Kitler et al. (142).

Dans ce travail, nous prenons  $\Psi$  comme étant le TKEO 2D. Notre choix est motivé par le fait l'activité des pixels est mieux reflétée par le TKEO que le module du gradient (143 ; 144).

Nous rappelons  $\Psi_d$  (cf. Définition IV.8) défini pour tout  $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$  par :

$$\Psi_d [I(k, l)] = 2 [I(k, l)]^2 - I(k-1, l)I(k+1, l) - I(k, l-1)I(k, l+1). \quad (\text{A.3})$$

Nous considérons aussi une autre extension possible du TKEO 2D, proposée par Mitra et al. (124) :

$$\Psi_2 [I(k, l)] = 2 [I(k, l)] - I(k-1, l+1)I(k+1, l-1) - I(k-1, l-1)I(k+1, l+1). \quad (\text{A.4})$$

L'énergie du pixel  $(k, l)$  peut alors être calculée, en suivant Cheikh et al. (143), par :

$$\Psi [I(k, l)] = \max (\Psi_d [I(k, l)], \Psi_2 [I(k, l)]). \quad (\text{A.5})$$

Maintenant, pour chaque pixel  $(k, l)$ , nous déterminons le niveau de gris moyen du pixel par :

$$\bar{E}(k, l) = \frac{\sum_{(i,j) \in \vartheta(k,l)} (\Psi [I(i, j)])^\alpha \cdot I(i, j)}{\sum_{(i,j) \in \vartheta(k,l)} (\Psi [I(i, j)])^\alpha}, \quad (\text{A.6})$$

$\alpha \in [0, 1]$  étant un paramètre déterminé de manière empirique ou par optimisation d'une certaine mesure de qualité de l'image.

**Remarque A.1.** *Concernant les valeurs de  $\alpha$ , on note que :*

- *Pour des valeurs petites de  $\alpha$ , on obtient une image rehaussée lissée.*
- *En prenant des valeurs grandes de  $\alpha$ , plus de poids est alors accordé aux pixels d'énergie faible.*

Nous calculons ensuite le contraste  $C$  du pixel (cf. Équation A.1) en remplaçant par l'expression de  $\bar{E}$ , donné par l'équation (A.6).

Pour mieux prendre en compte les pixels se trouvant sur les contours de l'image, nous utilisons une fonction de contraste  $\mathcal{F}$  telle que, pour tout pixel  $(k, l)$ , on obtienne un nouveau contraste  $\tilde{C}$  en ce pixel, donné par :

$$\tilde{C}(k, l) = \mathcal{F}[C(k, l)]. \quad (\text{A.7})$$

Des exemples de fonctions de contraste sont donnés par Dhawan et al. (138) :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[C(k, l)] &= 1 - \exp(-\beta \cdot C(k, l)) \\ \mathcal{F}[C(k, l)] &= \ln(1 + \beta \cdot C(k, l)) \\ \mathcal{F}[C(k, l)] &= \tanh(\beta \cdot C(k, l)), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

avec comme valeurs optimales de  $\beta \in [2, 3]$ .

En nous basant sur (138), on trouve finalement le niveau de gris rehaussé de l'image  $I$ , noté  $I_c$ , en calculant pour chaque pixel  $(k, l)$  la quantité :

$$\begin{cases} I_c(k, l) = \bar{E}(k, l) \cdot \frac{1 - \tilde{C}(k, l)}{1 + \tilde{C}(k, l)} & \text{si } I(k, l) \leq \bar{E}(k, l) \\ I_c(k, l) = \bar{E}(k, l) \cdot \frac{1 + \tilde{C}(k, l)}{1 - \tilde{C}(k, l)} & \text{si } I(k, l) \geq \bar{E}(k, l). \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Nous désignons par TKIE (Teager-Kaiser Image Enhancement) (133), l'algorithme de rehaussement de contraste ainsi établi avec l'équation A.9.

### A.3 Résultats numériques

Nous montrons dans cette partie, les résultats obtenus avec le TKIE et que nous comparons à l'EH et à la méthode proposée par Beghdadi et Le Negrate (139) et que nous notons, pour simplifier, par BN.

Sur l'image du Bâtiment (Figure A.1-(a)), on peut bien voir l'effet global de la méthode par EH (Figure A.1-(b)). Le TKIE (Figure A.1-(c)) et le BN (Figure A.1-(d)) donnent de meilleurs résultats (qualitativement). Comme on l'avait dit plus haut, le TKIE donne plus de poids aux pixels qui se trouvent au niveau des contours et aussi sur les zones de transition assez brusque des niveaux de gris. On peut observer cela sur les résultats. En effet, les branches des arbres et le poteau de la lampe sont mieux mis en évidence. Aussi, les façades de l'immeuble sont mieux contrastées avec le TKIE. On peut voir cette redistribution des pixels de l'image

en regardant les histogrammes (Figure A.2).

L'effet global de l'EH est plus marquée (cf. Figure A.3-(b)) avec l'image du Port (Figure A.3-(a)). Là également, les résultats sont meilleurs avec le TKIE (Figure A.3-(c)) et le BN (Figure A.3-(d)). Toutefois, on peut remarquer les artéfacts avec le BN : points noirs et dégradations au niveau des bords droit et gauche de l'image.

On peut finalement observer sur l'image du Plongeur (Figure A.4-(a)) que le contraste est mieux rehaussé avec notre méthode (cf. Figure A.4-(b)). Le BN donne un niveau de contraste assez correct, mais il y a cependant beaucoup d'artéfacts sur l'image rehaussée (cf. Figure A.4-(d)). Quant à la méthode par EH, les résultats sont assez frappants comme on pouvait s'y attendre du fait de son effet global. On peut voir la redistribution des pixels de l'image en regardant les histogrammes (Figure A.5).



(a)



(b)



(c)



(d)

**Figure A.1:** Bâtiment (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d)

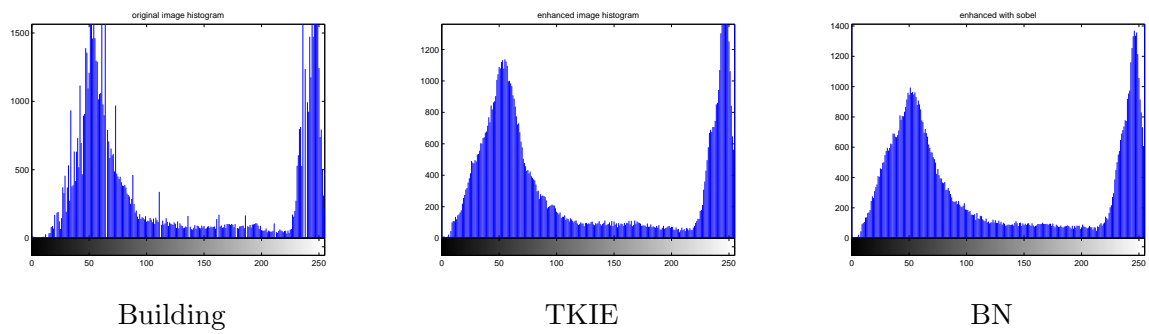


Figure A.2: Histogrammes

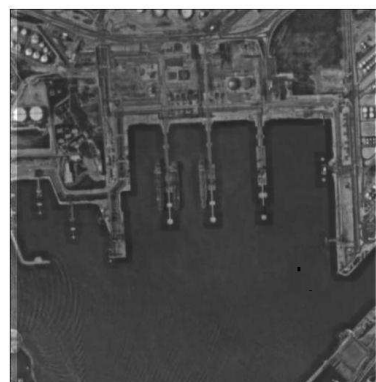


Figure A.3: Port (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d)



(a)



(b)

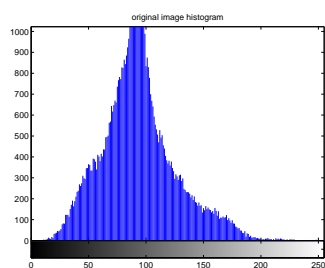


(c)

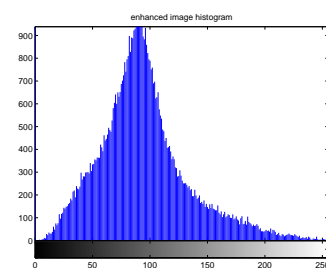


(d)

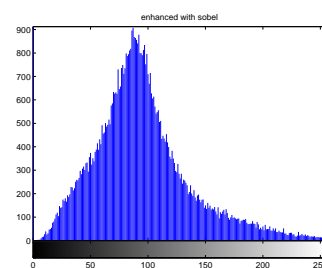
**Figure A.4:** Plongeur (a). Images rehaussées avec : EH (b). TKIE (c). BN (d)



Building



TKIE



BN

**Figure A.5:** Histogrammes







---

# Production scientifique

Cette section présente la liste des publications, communications dans des conférences et rapports de recherche, qui ont été réalisés dans le cadre du travail de thèse.

## Articles de revues

- ◇ El Hadji S. Diop, R. Alexandre et A. O. Boudraa, *Analysis of Intrinsic Mode Functions : A PDE Approach*, IEEE Signal Processing Letters. (À paraître)
- ◇ El Hadji S. Diop, A. O. Boudraa et F. Salzenstein, *Image Demodulation based on Higher Order Teager-Kaiser Energy Operators*, Elsevier, Signal, Image and Video Processing. (À paraître)
- ◇ El Hadji S. Diop, R. Alexandre et A. O. Boudraa, *A PDE Model for the 2D Empirical Mode Decomposition*, IEEE Pattern Analysis and Machine Intelligence. (Révision)
- ◇ El Hadji S. Diop et R. Alexandre, *A PDE Analysis of Intrinsic Mode Functions*, Applied and Computational Harmonic Analysis. (Révision)

## Conférences internationales

- ◇ El Hadji S. Diop, R. Alexandre and A. O. Boudraa, *A PDE model for 2D Intrinsic Mode Functions*, IEEE ICIP, pages 3961-3964, Cairo, Egypt, November 2009.
- ◇ El Hadji S. Diop and A. O. Boudraa, *Higher Order Teager-Kaiser Operators for Image Analysis : Part II - A Multicomponent Image Demodulation*, IEEE ICIP, pages 1357-1360, Cairo, Egypt, November 2009.
- ◇ El Hadji S. Diop, A. O. Boudraa and F. Salzenstein, *Higher Order Teager-Kaiser Operators for Image Analysis : Part I - A Monocomponent Image Demodulation*, IEEE ICASSP, pages 1041-1044, Taipei, Taiwan, April 2009.
- ◇ El Hadji S. Diop, R. Alexandre and A. O. Boudraa, *A PDE characterization of the Intrinsic Mode Functions*, IEEE ICASSP, pages 3429-3432, Taipei, Taiwan, April 2009.
- ◇ El Hadji S. Diop, A. O. Boudraa and A. Bouchikhi, *An Improved Image Demodulation Algorithm Based on Teager-Kaiser*, IEEE ISCCSP, pages 876-881, Malta, March 2008.
- ◇ A. O. Boudraa, El Hadji S. Diop and F. Salzenstein, *Teager-Kaiser energy operator for image contrast enhancement*, International Conference on Nonconvex Programming, 3 pages, Rouen, France, December 2007.

## Conférences nationales

- ◇ El Hadji S. Diop et A. O. Boudraa, *Démodulation d'images large bande par opérateur d'énergie*, GRETSI'09, Dijon, France, September 2009.

## Rapports de recherche

- ◇ « A PDE Analysis of Intrinsic Mode Functions », 50 pages, 19 Juin 2009.
- ◇ « A PDE characterization of 2D Intrinsic Mode Functions », 20 pages, 8 Décembre 2008.
- ◇ « On the study of the Empirical Mode Decomposition : A PDE formulation of the Intrinsic Mode Functions », 14 pages, 9 Juillet 2008.
- ◇ « A Filtered Teager-Kaiser Energy Operator-Based for Wideband Image Demodulation », 30 pages, 19 Mars 2008.
- ◇ « Image Demodulation based on Higher Teager-Kaiser Operators », 19 pages, 25 Janvier 2008.
- ◇ « Image Demodulation based On Higher Order Teager-Kaiser Operators : applications to image segmentation », 17 pages, 3 Septembre 2007.
- ◇ « Démodulation d'images multicomposantes à bande large par modèles AM-FM : Applications à des images sonar de fonds marins », 15 pages, 29 Mars 2007.

---

# Bibliographie

- [1] N. E. Huang, Z. S., S. R. Long, M. C. Wu, H. H. Shih, Q. Zheng, N.-C. Yen, C. C. Tung, and H. H. Liu, “The empirical mode decomposition and the hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis,” *The Royal Society*, vol. 454, pp. 903–995, 1998.
- [2] L. Cohen, *Time-Frequency Analysis*, E. C. Prentice Hall, Ed., NJ, 1995.
- [3] B. Boashash, *Time Frequency Signal Analysis and Processing : A Comprehensive Reference*. The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford OX5 1GB, UK : Elsevier, 2003.
- [4] P. Flandrin and G. Rilling, “Empirical mode decomposition as a filter bank,” *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 11, no. 2, pp. 112–114, February 2004.
- [5] J. Cexus and A. Boudraa, “Teager-huang analysis applied to sonar target recognition,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 1, no. 1, pp. 23–27, 2004.
- [6] R. Kažys, D. Pagodinas, and O. Tumšys, “Application of the hilbert-huang signal processing to ultrasonic nondestructive testing of composite materials,” *Ultragarsas*, vol. 50, no. 1, pp. 17–22, 2004.
- [7] Z. K. Peng, P. W. Tse, and F. L. Chu, “An improved hilbert-huang transform and its application in vibration signal analysis,” *Journal of Sound and Vibration*, vol. 286, pp. 187–205, 2005.
- [8] J. C. Cexus, “Analyse des signaux non-stationnaires par transformation de huang, opérateur de teager-kaiser, et transformation de huang-teager,” Ph.D. dissertation, Université de Rennes 1, Decembre 2005.
- [9] G. Rilling and P. Flandrin, “One or two frequencies ? the empirical mode decomposition answers,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, no. 1, pp. 85–95, 2008.
- [10] S. Mallat, *Une exploration des signaux en ondelettes*, L. E. de l’École Polytechnique, Ed., Novembre 2000.
- [11] P. J. Oonincx and J. P. Hermand, “Empirical mode decomposition of ocean acoustic data with constraint on the frequency range,” in *Proceedings of seventh European Conference on Underwater Acoustics*, Delft, The Netherlands, 5-8 July 2004.

- [12] Z. Wu and N. E. Huang, "A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method," *The Royal Society*, vol. 460, pp. 2597–1611, 2004.
- [13] H. Liang, S. L. Bressler, E. A. Buffalo, R. Desimone, and P. Fries, "Empirical mode decomposition of field potentials from macaque v4 in visual spatial attention," *Biological Cybernetics*, vol. 92, pp. 380–392, 2005.
- [14] Y.-M. Mao and P.-W. Que, "Application of hilbert-huang signal processing to ultrasonic non-destructive testing of oil pipelines," *Journal of Zhejiang University Science A*, vol. 7, no. 2, pp. 130–134, 2006.
- [15] M. K. I. Molla, A. Sumi, and M. S. Rahman, "Analysis of temperature change under global warming impact using empirical mode decomposition," *International Journal of Information Technology*, vol. 3, no. 2, pp. 131–139, 2006.
- [16] C. Cai, W. Liu, J. S. Fu, and Y. Lu, "A new approach for ground moving target indication in foliage environments," *Elsevier Signal Processing*, vol. 86, pp. 84–97, 2006.
- [17] J. Cexus and A. Boudraa, "Nonstationary signals analysis by teager-huang transform (tht)," in *EUSIPCO*, Florence, Italy, 2006, 5 pages.
- [18] S. Benramdane, J. C. Cexus, A. O. Boudraa, and J. A. Astolfi, "Time-frequency analysis of pressure fluctuations on a hydrofoil undergoing a transient pitching motion using hilbert-huang and teager-huang transforms," in *ASME PVP 2007/CREEP 8*, San Antonio, Texas, USA, July 22-26 2007.
- [19] P. Flandrin and P. Goncalves, "Empirical mode decompositions as data-driven wavelet-like expansions," *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, vol. 2, no. 4, pp. 1–20, August 2004.
- [20] E. Delechelle, J. Lemoine, and O. Niang, "Empirical mode decomposition : An analytical approach for sifting process," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 11, pp. 764–767, 2005.
- [21] R. C. Sharpley and V. Vatchev, "Analysis of the intrinsic mode functions," *Constructive Approximation*, vol. 24, pp. 17–47, 2006.
- [22] S. Meigen and V. Perrier, "A new formulation for empirical mode decomposition based on constrained optimization," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 12, pp. 932–935, 2007.
- [23] V. Vatchev and R. Sharpley, "Decomposition of functions into pairs of intrinsic mode functions," *The Royal Society London A*, vol. 464, no. 2097, pp. 2265–2280, September 2008.
- [24] A. Linderhed, "2-d empirical mode decompositions- in the spirit of image compression," in *Proceedings of SPIE , Wavelet and Independent Component Analysis Applications IXI*, vol. 4738, Florida, USA, 1-5 April 2002.

- [25] J. Nunes, Y. Bouaoune, E. Delechelle, O. Niang, and P. Bunel, "Image analysis by bidimensional empirical mode decomposition," *Elsevier Image and Vision Computing*, vol. 21, pp. 1019–1026, 2003.
- [26] A. Linderhed, "Adaptative image compression using wavelets packets and empirical mode decomposition," Ph.D. dissertation, Department of Electrical Engineering, Linköping University, Sweden, 2004.
- [27] C. Darnval, S. Meignen, and V. Perrier, "A fast algorithm for bidimensional emd," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 10, pp. 701–704, October 2005.
- [28] Y. Xu, B. Liu, J. Liu, and S. Riemenschneider, "Two-dimensional empirical mode decomposition by finite elements," *The Royal Society A*, pp. 1–17, 2006.
- [29] Z. Liu and S. Peng, "Estimation of image fractal dimension based on empirical mode decomposition," in *Advanced Concepts for Intelligence Vision Systems*, Brussels, Belgium, 2004.
- [30] Z. Liu, H. Wang, and S. Peng, "Texture segmentation using directional empirical mode decomposition," in *IEEE ICIP*, Singapore, 2004, pp. 279–282.
- [31] A. O. Boudraa, J. C. Cexus, F. Salzenstein, and A. Beghdadi, "Emd-based multibeam echosounder images segmentation," in *IEEE ISCCSP*, Morocco, 2006.
- [32] Z. Yang, L. Yang, D. Qi, and C. Y. Suen, "An emd-based recognition method for chinese fonts and styles," *Elsevier Pattern Recognition Letters*, vol. 27, pp. 1692–1701, 2006.
- [33] R. Bhagavatula and M. Savvides, "Analyzing facial images using empirical mode decomposition for illumination artifact removal and improved face recognition," in *IEEE ICASSP*, Honolulu, Hawaii, USA, April 15–20 2007, pp. 505–508.
- [34] E. H. S. Diop, A. O. Boudraa, A. Khenchaf, R. Thibaud, and T. Garlan, "Multiscale characterization of bathymetric images by empirical mode decomposition," in *Marine Sandwave and River Dune Dynamics Workshop*, Leeds, UK, April 1–3 2008.
- [35] J. F. Kaiser, "On a simple algorithm to calculate the 'energy' of a signal," in *IEEE ICASSP*, Albuquerque, NM, April April 1990, pp. 381–384.
- [36] P. Maragos, A. C. Bovik, and T. F. Quatieri, "A multidimensional energy operator for image processing," in *SPIE Symposium on Visual Communications and Image Processing*, vol. 1818, Boston, MA, November 16–18 1992, pp. 177–186.
- [37] M. S. Pattichis, C. S. Pattichis, M. Avraam, A. Bovik, and K. Kyriacou, "Am-fm texture segmentation in electron microscopic muscle imaging," *IEEE Transactions on Medical Imaging*, vol. 19, no. 12, pp. 1253–1258, December 2000.
- [38] M. S. Pattichis and A. C. Bovik, "Analyzing image structure by multidimensional frequency modulation," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 29, no. 5, pp. 753–766, May 2007.
- [39] V. Murray and M. S. Pattichis, "Am-fm demodulation methods for reconstruction, analysis and motion estimation in video signals," in *IEEE Southwest Symposium on Image Analysis and Interpretation*, Santa Fe, New Mexico, March 2008, pp. 17–20.

- [40] I. Kokkinos, G. Evangelopoulos, and P. Maragos, "Advances in texture analysis : energy dominant component & multiple hypothesis testing," in *IEEE ICIP*, Singapore, 24-27 October 2004, pp. 1509–1512.
- [41] N. Zray, J. Havlicek, S. J. Acton, and M. Pattichis, "Active contours segmentation guided by am-fm dominant component analysis," in *IEEE ICIP*, Thessaloniki, Grece, October 7-10 2001, pp. 78–81.
- [42] A. Sofou, G. Evangelopoulos, and P. Maragos, "Coupled geometric and texture pde-based segmentation," in *IEEE ICIP*, vol. II, Genova, Italy, September 2005, pp. 650–653.
- [43] E. H. S. Diop, A.-O. Boudraa, and F. Salzenstein, "Higher order teager-kaiser operators for image analysis : Part 1 - a monocomponent image demodulation." in *IEEE ICASSP*, Taipei, Taiwan, April 19-24 2009, pp. 1041–1044.
- [44] I. Kokkinos, G. Evangelopoulos, and P. Maragos, "Texture analysis and segmentation using modulation features, generative models and weighted curve evolution," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 31, no. 1, pp. 142–157, January 2009.
- [45] C. I. Christodoulou, C. S. Pattichis, V. Murray, M. S. Pattichis, and A. Nicolaides, "Am-fm representation for the characterization of carotid plaque ultrasound images," in *European Congress of the International Federation for Medical and Biological Engineering*, Antwerp, Belgium, November 23-27 2008, p. 4 pages.
- [46] C. T. Nguyen, J. P. Havlicek, and M. Yeary, "Modulation domain template tracking," in *IEEE CVPR*, Minneapolis, MN, June 17-22 2007, p. 8pages.
- [47] N. A. Mould, C. T. Nguyen, and J. P. Havlicek, "Infrared target tracking with am-fm consistency checks," in *IEEE Southwest Symposium in Image Analysis and Interpretation*, Santa Fe, New Mexico, March 24-26 2008, pp. 5–8.
- [48] J. P. Havlicek, P. C. Tay, and A. C. Bovik, *Handbook of Image and Video Processing*, 2nd ed. A. Bovik, 2005, ch. 4.4, pp. 377–395.
- [49] Y. Meyer, "Oscillating patterns in image processing and in some nonlinear evolution equations," *The Fifteenth Dean Jacquelines B. Lewis Memorial Lectures*, March 2001.
- [50] L. A. Vese and S. J. Osher, "Modeling textures with total variation minimization and oscillating patterns in image processing," *Journal of Scientific Computing*, vol. 19, pp. 553–572, 2003.
- [51] S. Osher, A. Solé, and L. Vese, "Image decomposition and restoration using total variation minimization and the  $h^{-1}$  norm," *Multiscale Modeling and Simulation : A SIAM Interdisciplinary Journal*, vol. 1, no. 3, pp. 349–370, 2003.
- [52] G. Aubert and J.-F. Aujol, "Modeling very oscillating functions. applications to image processing," *Applied Mathematics and Optimization*, vol. 51, no. 2, pp. 163–182, April 2005.

- [53] J.-F. Aujol, G. Aubert, L. Blanc-Féraud, and A. Chambolle, "Image decomposition into a bounded variation component and an oscillating component," *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, vol. 22, no. 1, pp. 71–88, January 2005.
- [54] E. H. S. Diop, R. Alexandre, and A. O. Boudraa, "A pde characterization of the intrinsic mode functions," in *IEEE ICASSP*, Taipei, Taiwan, 2009, pp. 3429–3432.
- [55] —, "Analysis of intrinsic mode functions : A pde approach," *IEEE Signal Processing Letters*, June 2009, 10 pages. Submitted.
- [56] E. H. S. Diop and R. Alexandre, "A pde analysis of intrinsic mode functions," *Applied and Computational Harmonic Analysis*, June 2009, 50 pages. In revision.
- [57] S. M. A. Bhuiyan, R. R. Adhami, and J. F. Khan, "A novel approach of fast and adaptative bidimensional empirical mode decomposition," in *IEEE ICASSP*, 2008, pp. 1313–1316.
- [58] E. Delèchelle, J. C. Nunes, and J. Lemoine, "Empirical mode decomposition synthesis of fractional processes in 1d- and 2d-space," *Elsevier Image and Vision Computing*, vol. 23, pp. 799–806, 2005.
- [59] J. Nunes, S. Guyot, and E. Delechelle, "Texture analysis based on local analysis of the bidimensional empirical mode decomposition," *Machine Vision and Applications*, vol. 16, pp. 177–188, 2005.
- [60] E. H. S. Diop, R. Alexandre, and A. O. Boudraa, "A pde model for 2d intrinsic mode functions," in *IEEE ICIP*, Cairo, Egypt, November 7-11 2009, (accepted).
- [61] —, "A pde model for the 2d empirical mode decomposition," *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, February 2009, 24 pages. In revision.
- [62] J. P. Havlicek, "Am-fm image models," Ph.D. dissertation, The University of Texas at Austin, 1996.
- [63] P. Maragos, J. F. Kaiser, and T. F. Quatieri, "On separating amplitude from frequency modulations using energy operators," in *IEEE ICASSP*, vol. II, San Francisco, CA, March 1992, pp. 1–4.
- [64] P. Maragos and A. C. Bovik, "Demodulation of images modeled by amplitude-frequency modulation using multidimensional energy separation," in *IEEE ICIP*, vol. III, Austin, TX, November 1994, pp. 421–425.
- [65] H. M. Teager, "Some observations on oral air flow during phonation," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 28, no. 5, pp. 599–601, October 1980.
- [66] H. M. Teager and S. M. Teager, "The effects of separated air flow on vocalization," in *Vocal Fold Physiology : Contemporary Research and Clinical Issues*. College-Hill Press, San Diego, CA, 1983, pp. 124–143.
- [67] —, "Active fluid dynamic voice production models or 'there is a unicorn in the garden'," in *Vocal Fold Physiology : Biomechanics, Acoustics and Phonatory Control*. Denver Center for the Performing Arts, Denver, CO, 1983, pp. 387–401.



- [68] ———, “A phenomenological model for vowel production in the vocal tract,” in *Speech Sciences : Recent Advances*. College-Hill Press, San Diego, CA, 1983, pp. 73–109.
- [69] ———, “Evidence for nonlinear sound production mechanisms in the vocal tract,” in *Speech Production and Speech Modelling*, vol. 55 of NATO Advanced Study Institute Series D. Kluwer Academic Publishers, Boston, MA, 1990, pp. 241–261.
- [70] J. F. Kaiser, “On teager’s energy algorithm and its generalization to continuous signals,” in *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, New Paltz, NY, September 1990.
- [71] A. C. Bovik, M. Clark, and W. S. Geisler, “Multichannel texture analysis using localized spatial filter,” *IEEE Transactions on PAMI*, vol. 12, no. 1, pp. 55–73, January 1990.
- [72] A. C. Bovik, N. Gopal, T. Emmoth, and A. Restrepo, “Localized measurement of emergent image frequencies gy gabor wavelets,” *IEEE Transaction on Information Theory*, vol. 38, no. 2, pp. 691–712, March 1992.
- [73] P. Maragos and A. C. Bovik, “Image demodulation using multidimensional energy separation,” *Journal of Optical Society of America A*, vol. 12, no. 9, pp. 1867–1876, September 1995.
- [74] J. P. Havlicek, D. S. Harding, and A. C. Bovik, “Multiple dimensional quasi-eigenfunction approximations and multicomponent am-fm models,” *IEEE Transactions in Image Processing*, vol. 9, no. 2, pp. 1867–1876, February 2000.
- [75] E. H. S. Diop, A.-O. Boudraa, and A. Bouchikhi, “An improved image demodulation algorithm based on teager-kaiser operator.” in *IEEE ISCCSP*, vol. 2, no. 1, March 12-14 2008, pp. 876–881.
- [76] E. H. S. Diop and A. O. Boudraa, “Démodulation d’images large bande par opérateur d’énergie,” in *GRETSI’09*, Dijon, France, September 2009.
- [77] P. Maragos and A. Potamianos, “Higher order differential energy operators,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 2, no. 8, pp. 152–154, August 1995.
- [78] A. Boudraa, F. Salzenstein, and J. Cexus, “Two-dimensional continuous higher-order energy operators,” *Optical Engineering*, pp. 7001–7010, 2005.
- [79] E. H. S. Diop, A. O. Boudraa, and F. Salzenstein, “Image demodulation based on higher order teager-kaiser energy operators,” *Transactions on Signal, Image and Video Processing*, October 2008, 20 pages. In revision.
- [80] D. Gabor, “Theory of communication,” *Institute of Electrical Engineering, Part III*, vol. 93, no. 26, pp. 429–457, November 1946.
- [81] J. A. Ville, “Théorie et applications de la notion de signal analytique,” *Cables et Transmissions*, vol. 2, pp. 61–74, 1948.
- [82] E. H. S. Diop and A. O. Boudraa, “Higher order teager-kaiser operators for image analysis : Part 2 - a multicomponent image demodulation,” in *IEEE ICIP*, Cairo, Egypt, November 7-11 2009, (accepted).

- [83] A. Bouchikhi, A. Boudraa, S. B. Ramdane, and E. H. S. Diop, "Empirical mode decomposition and some operators to estimate instantaneous frequency : A comparative study," in *IEEE ISCCSP*, Malta, 2008, pp. 608–613.
- [84] A. Boudraa and J. Cexus, "Emd-based signal filtering," *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 56, no. 6, pp. 2196–2202, 2007.
- [85] M. G. Frei and I. Osorio, "Intrinsic time-scale decomposition : time-frequency-energy analysis and real-time filtering of non-stationary signal," *Proceedings of the Royal Society A*, vol. 463, pp. 321–342, 2007.
- [86] N. H. Huang, Z. Shen, and S. Long, "A new view of nonlinear water waves : The hilbert spectrum," *Annual Review of Fluid Mechanics*, vol. 31, no. 1, pp. 417–457, 1999.
- [87] G. Rilling, P. Flandrin, and P. Goncalves, "On empirical mode decomposition and its algorithms," in *IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Grado, Italy, June 2003.
- [88] M. C. Peel, G. E. Amirthanathan, G. G. S. Pegram, T. A. McMahon, and F. H. S. Chiew, "Issues with the application of empirical mode decomposition analysis," in *International Congress on Modelling and Simulation, Modelling and Simulation Society of Australia and New Zealand*, 2005, pp. 1681–1687.
- [89] N. E. Huang, M. L. C. Wu, S. R. Long, S. S. P. Shen, W. Qu, P. Gloersen, and K. L. Fan, "A confidence limit for the empirical mode decomposition and hilbert spectral analysis," *The Royal Society of London, Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 459, no. 2037, pp. 2317–2345, 2003.
- [90] R. Deering and J. F. Kaiser, "The use of a masking signal to improve empirical mode decomposition," in *IEEE ICASSP*, Philadelphia, PA, USA, March 18-23 2005, pp. 485–488.
- [91] B. Xuan, Q. Xie, and S. Peng, "Emd sifting on bandwidth," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 8, pp. 537–540, August 2007.
- [92] B. Weng and K. E. Barner, "Optimal and bidirectional empirical mode decomposition," in *IEEE ICASSP*, Honolulu, HI, 15-20 April 2007, pp. 1501–1504.
- [93] G. Rilling, P. Flandrin, P. Goncalves, and J. M. Lilly, "Bivariate empirical mode decomposition," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 14, no. 12, pp. 936–939, 2008.
- [94] Q. Chen, N. Huang, S. Riemenschneider, and Y. Xu, "A b-spline approach for empirical mode decompositions," *Advances in Computational Mathematics*, pp. 1–25, 2004.
- [95] S. O. Rice, "Mathematical analysis of random noise," *Bell Systems Tech. J.*, vol. 23, pp. 282–332, 1944.
- [96] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.
- [97] E. DiBenedetto, *Partial Differential Equations*. Boston, USA : Birkhäuser, 1995, ch. 4, pp. 208–209.

- [98] Y. Pinchover and J. Rubinstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*. Cambridge university Press, 2005.
- [99] G. Allaire, *Numerical Analysis and Optimization*. New York, USA : Oxford University Press Inc., 2007.
- [100] P. Flandrin, March 2007. [Online]. Available : <http://perso.ens-lyon.fr/patrick.flandrin/emd.html>
- [101] Z. Liu and S. Peng, "Boundary processing of bidimensional emd using texture synthesis," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 12, no. 1, pp. 33–36, January 2005.
- [102] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, and J. M. Morel, "Axioms and fundamental equations of image processing," *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, vol. 123, no. 3, pp. 199–257, September 1993.
- [103] R. W. Brockett and P. Maragos, "Evolution equations for continuous-scale morphological filtering," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 12, pp. 3377–3386, December 1994.
- [104] F. Cao, *Geometric Curve Evolution and Image Processing*, ser. Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, February 2003, no. 1805.
- [105] F. Guichard, P. Maragos, and J. M. Morel, *Space, Structure and Randomness : Contributions in Honor of Georges Mathéron in the Fields of Geostatistics, Random Sets and Mathematical Morphology*, ser. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, 2005, pp. 369–390.
- [106] A. Avez, *calcul différentiel*. Paris : Masson, 1983.
- [107] R. Lattés and J. L. Lions, *The Method of Quasireversibility, Applications to Partial Differential Equations*. New York : American Elsevier, 1969.
- [108] K. A. Ames and L. E. Payne, "Continuous dependence on modeling for some well-posed perturbations of the backward heat equation," *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 3, pp. 51–64, 1999.
- [109] M. E. Taylor, *Partial Differential Equations III : Nonlinear Equations*, J. Marsden, L. Sirovich, and F. John, Eds. New York : Springer-Verlag, 1996, vol. 117.
- [110] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle : Théorie et applications*. Paris : Dunod, 1999.
- [111] G. Aubert and P. Kornprobst, *Mathematical Problems in Image Processing : Partial Differential Equations and the Calculus of Variations*, S. S. Antman, J. E. Marsden, and L. Sirovich, Eds. Springer, 2000.
- [112] Z. Wang and A. C. Bovik, "A universal image quality index," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 9, no. 3, pp. 81–84, March 2002.
- [113] J. P. Havlicek, D. S. Harding, and A. C. Bovik, "Multi-component signal demodulation and reconstruction using am-fm modulation models," in *IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Halkidiki, Greece, June 20–22 1995, pp. 41–45.

- [114] J. P. Havlicek, J. W. Havlicek, and A. C. Bovik, "The analytic image," in *IEEE ICIP*, Santa-Barbara, California, October 26-29 1997, pp. 446–449.
- [115] J. P. Havlicek, J. W. Havlicek, N. D. Mamuya, and A. C. Bovik, "Skewed 2d hilbert transforms and computed am-fm models," in *IEEE ICIP*, Chicago, Illinois, October 4-7 1998, pp. 602–606.
- [116] J. F. Kaiser, "Some useful properties of teager's energy operators," in *IEEE ICASSP*, vol. 3, Minneapolis, MN, April 27-30 1993, pp. 149–152.
- [117] P. Maragos, T. F. Quatieri, and J. F. Kaiser, "Detecting nonlinearities in speech using an energy operator," in *IEEE Digital Signal Processing Workshop*, New Paltz, NY, September 1990.
- [118] —, "Speech nonlinearities, modulations and energy operators," in *IEEE ICASSP*, Canada, May 1991, pp. 421–424.
- [119] P. Maragos, J. F. Kaiser, and T. F. Quatieri, "On amplitude and frequency demodulations using energy operators." *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 4, pp. 1532–1550, April 1993.
- [120] —, "Energy separation in signal modulations with application to speech analysis." *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 41, no. 10, pp. 3024–3051, October 1993.
- [121] D. Dimitriadis and P. Maragos, "A, improved energy demodulation algorithm using splines," in *IEEE ICASSP*, Salt Lake, Utah, May 2001.
- [122] T. H. Yu, S. K. Mitra, and J. F. Kaiser, "A novel nonlinear filter for image enhancement," in *SPIE/SPSE Symposium on Electronic Imaging : Science and Technology*, San Jose, CA, February 1991, pp. 303–309.
- [123] S. K. Mitra and T. H. Yu, "A new nonlinear algorithm for the removal of impulse noise from highly corrupted images," in *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, London, UK, May 1994, pp. 17–20.
- [124] S. K. Mitra, H. Li, I. S. Lin, and T. H. Yu, "A new class of nonlinear filters for image enhancement," in *IEEE ICASSP*, Canada, May 1991, pp. 2525–2528.
- [125] N. Strobel and S. K. Mitra, "Quadratic filters for image contrast enhancement," in *Proc. Annual Asilomar Conference on Signals, Systems, Computation*, Pacific Grove, CA, November 1994, pp. 208–212.
- [126] S. K. Mitra, S. Thurnhofer, M. Lightstone, and N. Strobel, "Two-dimensional teager operators and their image processing applications," in *IEEE Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing*, Greece, June 20-22 1995, pp. 959–962.
- [127] A. O. Boudraa and E. H. S. Diop, "Image contrast enhancement based on 2d teager-kaiser operator," in *IEEE ICIP*, San Diego, CA, October 2008, pp. 3180–3183.
- [128] D. Wei and A. C. Bovik, "On the instantaneous frequencies of multicomponent am-fm signals," *IEEE Signal Processing Letters*, vol. 5, pp. 84–86, 1998.

- [129] J. P. Havlicek, D. S. Harding, and A. C. Bovik, "Multicomponent multidimensional signals," *Multidimensional Systems and Signal Processing*, vol. 9, pp. 391–398, 1998.
- [130] F. Salzenstein, P. Montgomery, A. Benatmane, and A. Boudraa, "2d discrete high order energy operators for surface profiling using white light interferometry," in *IEEE International Symposium on Signal Processing and its Applications*, vol. 1, 2003, pp. 601–604.
- [131] P. J. Caber, "Interferometric profiler for rough surfaces," *Applied Optics*, no. 19, pp. 3438–3441, 1993.
- [132] A. C. Bovik and P. Maragos, "Conditions for positivity of an operator energy," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 42, no. 2, pp. 469–471, February 1994.
- [133] A. O. Boudraa, E. H. S. Diop, and F. Salzenstein, "Teager-kaiser energy operator for image contrast enhancement," in *International Conference on Nonconvex Programming : Local and Global Approaches*, Rouen, France, December 2007, p. 3.
- [134] R. C. Gonzalez and R. E. Woods, *Digital Image Processing*. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [135] S. M. Pizer, E. P. Amburn, J. D. Austin, R. Cromartie, A. Geselowitz, T. Greer, B. M. ter Haar Romeny, J. B. Zimmerman, and K. Zuiderveld, "Adaptative histogram equalization and its variations," *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 39, no. 3, pp. 355–368, September 1987.
- [136] V. Caselles, J. L. Lisani, , J. M. Morel, and G. Sapiro, "Shape preserving local histogram modification," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 8, no. 2, pp. 220–230, 1998.
- [137] J. A. Stark, "Adaptative contrast enhancement using generalization of histogram equalization," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 9, no. 5, pp. 889–906, 2000.
- [138] A. Dhawan, G. Buelloni, and R. Gordon, "Enhancement of mammographic features by optimal adaptative neighborhood image processing," *IEEE Tansactions on Medical Imaging*, vol. 5, no. 1, pp. 8–15, 1986.
- [139] A. Beghdadi and A. L. Negrate, "Contrast enhancement technique based on local detection of edges," *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 46, pp. 162–174, 1989.
- [140] L. Dash and B. Chatterji, "Adaptative contrast enhancement and de-enhancement," *Pattern Recognition*, vol. 24, no. 4, pp. 298–302, 1991.
- [141] S. Matz and R. D. Figueiredo, "A nonlienaar image contrast sharpening approach based on munshell's scale," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 15, no. 4, 2006.
- [142] J. Kitler, J. Illingworth, and J. Foglein, "Threshold selecion based on a simple image statistic," *Computer Vision, Graphics and Image Processing*, vol. 30, pp. 125–147, 1985.
- [143] F. A. Cheikh, M. Gabbouj, R. Hamila, and J. Astola, "Fuzzy weighted mean filter for color image restoration," in *IEEE NSPS*, 1996, pp. 29–32.

- [144] D. D. Vleeschauwer, F. Cheikh, R. Hamila, and M. Gabbouj, "Watershed segmentation of an image enhanced by teager energy driven diffusion," in *Proceedings of the Sixth ICIPA*, 1997, pp. 254-258.



# MODÈLES AM-FM ET APPROCHE PAR ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA DÉCOMPOSITION MODALE EMPIRIQUE POUR L'ANALYSE DES SIGNAUX ET DES IMAGES

## **RESUME:**

Le travail de thèse traite de l'analyse des signaux et des images par décomposition modale empirique (EMD) et par modèles AM-FM. Dans la première partie de cette thèse, nous apportons des cadres théoriques à l'EMD 1D et 2D. Nous approchons localement les enveloppes supérieures et inférieures, dans le processus de tamisage de l'EMD, par des opérateurs continus. Par suite, nous formulons différemment la moyenne locale et prouvons que les itérations du tamisage 1D et 2D peuvent être approchées par des équations aux dérivées partielles (EDP) bien posées. Nous apportons des justifications théoriques et proposons des caractérisations analytiques des modes empiriques 1D et 2D. Ce travail a permis d'éclaircir de nombreux points et notions relatifs à l'EMD, et définis en 1D comme en 2D, que de manière très intuitive ou sur la base de simulations numériques contrôlées. Nous apportons de la sorte des contributions théoriques à l'EMD 1D et 2D, initialement définie par un algorithme et dont la principale limite est le manque de cadre théorique. Enfin, nous proposons de nouveaux algorithmes EMD 1D et 2D, et résolvons numériquement les EDP proposées en 1D et 2D. Nous illustrons nos approches par EDP sur de nombreux signaux et images.

Dans la seconde partie, nous étudions les modèles AM-FM pour l'analyse d'images. Ces modèles se basent sur une décomposition des images en composantes regroupant les niveaux de gris des parties texturées (AM), d'une part, et une partie contenant la géométrie de l'image (FM), d'autre part. Nous proposons d'abord une amélioration de la démodulation d'images large bande. Dans un deuxième temps, nous explorons la démodulation d'images avec les opérateurs de Teager-Kaiser d'ordres supérieurs (HODEO 2D), en proposant de meilleurs algorithmes de démodulation, basés sur les HODEO 2D. Nous proposons ensuite une application à la segmentation d'images sonar et illustrons nos approches sur de nombreuses images. Les résultats sont comparés à ceux obtenus avec l'algorithme DESA (Discrete Energy Separation Algorithm) et l'approche par image analytique.

## **Mots-clés:**

Décomposition modale empirique, modes empiriques, équations aux dérivées partielles, méthode de quasi-réversibilité, analyse harmonique, opérateur Laplacien, filtres de Gabor, méthodes par séparation d'énergie, modulation d'amplitude, modulation de fréquence, opérateurs de Teager-Kaiser, transformée de Hilbert.



# A PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS - BASED APPROACH FOR THE 1D AND 2D EMPIRICAL MODE DECOMPOSITION, AND AM-FM MODELS FOR SIGNAL AND IMAGE ANALYSIS

## **ABSTRACT:**

This work is dedicated to the analysis of signals and images based on the empirical mode decomposition (EMD) and AM-FM models. In the first part of the thesis, a theoretical study of the 1D and 2D EMD is proposed. In order to achieve this, upper and lower envelopes are locally modeled with continuous operators. The local mean of envelopes is then computed in a more convenient way, such that we prove that 1D and 2D sifting iterations are well approximated by the resolutions of well posed partial differential equations (PDE). We provide theoretical justifications and carry out analytical characterizations of 1D and 2D empirical modes. This theoretical work enlightens important aspects of the EMD that were stated only in an intuitive way or based on controlled numerical simulations. In that way, we provide mathematical contributions on the method, which is originally defined just as an algorithm, and for which the main criticism remains the lack of a theoretical framework. Finally, new EMD algorithms are proposed and associated PDE are numerically solved, both in 1D and 2D. Our PDE-based approaches are illustrated with various signal and image examples.

The second part deals with AM-FM image modeling. AM-FM models decompose images into components. In one hand, we have the local texture contrast (AM). On the other, we have the image geometry (FM). We first propose some improvements in wideband image demodulation techniques. Secondly, image demodulation based on 2D higher order differential energy operators (2D HODEO) are explored and better image demodulation algorithms are introduced. A practical application to sonar images' segmentation is also proposed. Our approaches are illustrated with various images and results are compared to the DESA (Discrete Energy Separation Algorithm) and the analytical image-based approach.

## **Keywords:**

Empirical Mode Decomposition, intrinsic mode functions, partial differential equations, quasi-reversibility method, harmonic analysis, Laplacian operator, Gabor filters, energy separation methods, amplitude modulation, frequency modulation, Teager-Kaiser energy operators, Hilbert transform.