



**HAL**  
open science

## Modélisation et commande d'engins volants flexibles

Selima Bennaceur

► **To cite this version:**

Selima Bennaceur. Modélisation et commande d'engins volants flexibles. Automatique / Robotique. Université d'Evry-Val d'Essonne, 2009. Français. NNT: . tel-00465065

**HAL Id: tel-00465065**

**<https://theses.hal.science/tel-00465065>**

Submitted on 18 Mar 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse

Présentée à

**L'Université d'Evry Val d'Essonne**

Par

**Sélima BENNACEUR**

Pour obtenir le diplôme de

**Docteur de L'Université d'Evry Val d'Essonne**

Spécialité : **Mécanique Automatique**

---

## **Modélisation et Commande d'Engins Volants Flexibles**

---

Soutenance 28 Janvier 2009

Devant le jury composé de :

R. Lozano	Professeur à l'Université de Technologie de Compiègne	Rapporteur
F. Boyer	Professeur à l'École des Mines de Nantes	Rapporteur
A. Combescure	Professeur à l'INSA de Lyon	Rapporteur
E. Delangre	Professeur à l'École Polytechnique	Examineur
N. Azouz	Maître de Conférence à l'Université d'Évry	Encadreur
M. Pascal	Professeur à l'Université d'Évry	Directrice de thèse
A. Abichou	Professeur à l'École Polytechnique de Tunisie	Directeur de thèse



---

# Remerciements

---

J'exprime ma gratitude et mes sincères remerciements à Messieurs : Frédéric Boyer Professeur à l'École des mines de Nantes, Alain Combescure Professeur à l'INSA de Lyon et Rogélio LOZANO Directeur de recherche à l'Université de Technologie de Compiègne, qui m'ont fait l'honneur d'être les rapporteurs de ce mémoire.

C'est aussi un grand plaisir pour moi d'avoir parmi les membres du jury Monsieur Emmanuel Delangre, Professeur à l'École Polytechnique.

Je tiens aussi à remercier Monsieur Naoufel Azouz, Maître de conférences à l'Université d'Evry, d'avoir encadré ce travail. Je lui suis également reconnaissante pour les conseils et les encouragements qu'il m'a dispensés.

Je remercie Madame Madeleine Pascal, Professeur à l'Université d'Evry-Val d'Essonne et Monsieur Azgal Abichou Professeur à l'École Polytechnique de Tunisie pour la confiance qu'ils m'ont accordée en m'accueillant dans leur équipe ainsi que pour les conseils qu'il m'ont apportés. Je tiens aussi à les remercier de m'avoir transmis le goût de la recherche et d'avoir dirigé ce travail.

Je souhaite vivement remercier ma famille et surtout mon cher frère Hedi et mes chers parents qui m'ont soutenu tout au long de ce travail ainsi que tous les doctorants de notre laboratoire et mes amis, Chaker, Lamia, Asma, Anouar, Alexis, Kamel , Ragia, Sarra, Samia, pour avoir créé une ambiance chaleureuse et amicale, ainsi que tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à réaliser ce travail.



---

# Résumé

---

L'intérêt pour la modélisation et la commande des engins volants s'est accru de manière significative au cours de ces dernières années. La complexité et les possibilités des engins volants s'accroissent rapidement et la gamme des missions qu'elles doivent réaliser se développe. Cependant afin que les drones puissent atteindre ce potentiel, certains défis techniques doivent être surmontés, notamment l'étude et l'intégration de la flexibilité structurelle, la prise en compte des phénomènes aérodynamiques, et l'élaboration de stratégies de commandes adaptées. Le travail présenté s'inscrit dans ce cadre et porte spécifiquement sur deux types de drones :

- Les plus légers que l'air : Application à la modélisation et commande d'un dirigeable souple.
- Les plus lourds que l'air : Application à la modélisation et commande d'un quadrirotor flexible : le XSF.

Nous présentons dans un premier temps un modèle global d'engins volants flexibles autonomes. On admet que ces objets volants subissent de grands déplacements et de petites déformations élastiques. Le formalisme utilisé est basé sur l'approche de Newton-Euler, approche souvent utilisée dans le cas d'objets volants rigides. Dans cette étude nous généralisons le formalisme de corps rigides existant en y incluant l'effet de la flexibilité, sans pour autant détruire la méthodologie globale, et ce au moyen d'une technique hybride lagrangienne-eulerienne. La flexibilité apparaît dans le système dynamique global par le moyen d'un nombre réduit de degrés de liberté supplémentaires issus d'une synthèse modale. Cette technique permet de faciliter par la suite l'élaboration d'algorithmes de commande et de stabilisation.

Le phénomène des masses ajoutées est également pris en considération. Une méthode originale de traitement analytique de ce phénomène a été établie pour

un corps flexible en grands mouvements. Elle est basée sur la notion de potentiel flexible, et sur le développement de l'énergie cinétique du fluide sous l'effet d'un mouvement global du corps flexible. Cette méthode a permis de mettre en évidence le couplage rigide-flexible dans la matrice des masses ajoutées pour un traitement global d'un dirigeable flexible. On présente aussi le modèle dynamique et aérodynamique du quadrirotor flexible XSF conçu au laboratoire IBISC et destiné à un concours interuniversitaire sur les microdrones. Une technique robuste " Backstepping " est réalisée pour la stabilisation du dirigeable flexible au voisinage d'un point cible. Et une stratégie de contrôle de PID a été proposée pour la stabilisation de l'XSF. La stratégie de commande est contrainte par l'impératif d'optimisation du rapport précision/portabilité, pour que les algorithmes développés puissent être intégrés dans l'informatique embarquée de ces engins volants. Une validation numérique est présentée à la fin du rapport.

Mots clés : Méthode hybride, modélisation dynamique, masses ajoutées, engins volants flexibles, commande, stabilisation.

---

# Abstract

---

The interest of dynamic modeling and control of the autonomous flying objects increased significantly during these last years. Complexity and capability of these flying objects are expanding rapidly now, and the range of missions their designed to support is growing. In order to fulfil this requirement, it is necessary, in one hand, to introduce the effect of the structural flexibility and the aerodynamic phenomenon in the dynamic model, and in the other hand, to build a suitable strategy of command and stabilization for these flying objects. The work is registered within this framework, and relates two types of engines :

- Lighter than air vehicle : Application on the modelling and control of flexible airship.
- Heavier than air vehicle : Application on the modelling and control of flexible micro-drone.

We present a general model of autonomous flexible flying engine undergoing great overall motion and small elastic displacements. The formalism used is based on the Newton- Euler approach, which is frequently used for rigid flying objects. In this study we generalize the existing formalisms for rigid bodies, by including the effect of flexibility without destroying the total methodology. A modal synthesis is used. A hybrid method based on the energetic principles and Lagrange equations is presented. The phenomenon of the added masses is also taken into account. In order to integrate the fluid-structure interaction of a flexible airship, we develop an original analytical formulation of the problem using both the new notion of flexible flow potential, and the development of the kinetic energy of the air constrained by the motion and the vibration of the airship. This method allows to put in an obvious place the coupling "overall motion - flexibility" in the added mass matrix. We also present the dynamic and aerodynamic model of a



flexible quadrirotor called XSF, designed in the IBISC laboratory and intended for an interuniversity competition for microdrones.

A robust methodology based on the " Backstepping " control is realized to stabilize the airship around a desired position, and a PID controller is proposed to stabilise the XSF. The strategy of command is compelled by imperative to optimize the ratio precision/portability, to allow an easy insertion of the developed algorithms in the embedded electronics. A numerical validation is presented in the end of this report.

Key words : Hybrid method, dynamic modelling, added-masses, flexible flying engines, control, stabilisation.



---

# Table des matières

---

<b>Remerciements</b>	<b>1</b>
<b>Résumé</b>	<b>1</b>
<b>Table des matières</b>	<b>i</b>
<b>Table des figures</b>	<b>1</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction Générale . . . . .	3
1.2 État de l’art . . . . .	5
1.2.1 UAV plus lourds que l’air . . . . .	5
1.2.2 UAV plus légers que l’air :Dirigeables . . . . .	13
1.3 Objectifs de la thèse et présentation du mémoire . . . . .	24
<b>2 Modélisation d’un Engin Volant Flexible</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction . . . . .	27
2.2 Description Eulerienne : Engin Volant Rigide . . . . .	28
2.2.1 Cinématique . . . . .	28
2.2.2 Paramètres d’Euler . . . . .	34
2.2.3 Etude mécanique de l’engin volant . . . . .	37
2.2.4 Description Lagrangienne totale . . . . .	38
2.2.5 Equations de Lagrange . . . . .	42
2.3 Description Eulerienne d’un corps flexible . . . . .	48
2.3.1 Position d’un point arbitraire d’un engin volant flexible . . . . .	48
2.3.2 Vitesse d’un point arbitraire . . . . .	49
2.3.3 Expression de l’énergie cinétique de l’engin . . . . .	53
2.3.4 Equation de Lagrange . . . . .	55
2.3.5 Description Eulerienne . . . . .	58

2.4	Conclusion . . . . .	60
<b>3</b>	<b>Application à la Modélisation d'un Dirigeable Flexible : Interaction Fluides-Structures</b>	<b>63</b>
3.1	Introduction . . . . .	63
3.2	Equations de mouvement du dirigeable . . . . .	64
3.2.1	Dirigeable rigide . . . . .	64
3.2.2	Dirigeable Flexible . . . . .	72
3.3	Conclusion . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Stabilisation et Commande du dirigeable flexible</b>	<b>83</b>
4.1	Introduction . . . . .	83
4.2	Stabilisation asymptotique du dirigeable flexible au voisinage d'un point cible . . . . .	84
4.2.1	Description du modèle dynamique décrivant le mouvement du dirigeable flexible . . . . .	85
4.2.2	Stabilisation asymptotique du modèle d'étude au voisinage du point désiré . . . . .	92
4.3	Simulations Numériques . . . . .	102
4.3.1	Mouvement d'avancement . . . . .	103
4.3.2	Mouvement d'altitude . . . . .	104
4.3.3	Mouvement de Rotation Couplés à la déformation . . . . .	105
4.4	Conclusion . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Modélisation et Commande d'un Drone Flexible XSF</b>	<b>111</b>
5.1	Introduction . . . . .	111
5.2	Caractéristiques et configurations du drone XSF . . . . .	112
5.3	Modèle dynamique du XSF "rigide" . . . . .	114
5.3.1	Les moments Gyroscopiques . . . . .	116
5.3.2	Forces et Moments Aérodynamiques . . . . .	116
5.4	Intégration de la flexibilité dans le modèle de l'XSF . . . . .	121
5.5	Stratégie de Commande . . . . .	122
5.5.1	Linéarisation des Equations . . . . .	125
5.5.2	Construction de la Commande de l'XSF . . . . .	127
5.5.3	Calcul des Actionneurs . . . . .	129

---

5.6	Simulations Numériques . . . . .	130
5.6.1	Mouvement de Translation Horizontal . . . . .	131
5.6.2	Mouvement de Translation Vertical . . . . .	132
5.6.3	Mouvement de Roulis et de Tangage . . . . .	134
5.7	Conclusion . . . . .	137
	<b>Conclusion Générale</b>	<b>137</b>
	<b>A</b>	<b>141</b>
	<b>B</b>	<b>149</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>155</b>



---

# Table des figures

---

1.1	Système " drone "	6
1.2	Exemple de quadrirotor pour des applications hors du vent.	8
1.3	Montée d'un Quadrirotor	9
1.4	Orientation des rotors	9
1.5	Mouvement de Roulis et de Tangage	10
1.6	Quadrirotor :XSF (Version carénée)	11
1.7	Dirigeable Zeplin	14
1.8	Incendie du dirigeable allemand	15
1.9	Principe Physique du Dirigeable ( $\vec{F} = -\rho\vec{g}V$ )	17
1.10	Ellipsoïde	22
2.1	Définitions des repères	29
2.2	Lacet	31
2.3	Tangage	32
2.4	Roulis	32
2.5	Rotation autour d'un axe	35
2.6	Définition des vecteurs de position	37
2.7	Définition des vecteurs de position	49
2.8	Dirigeable+Arceau	52
3.1	Présentation des repères du dirigeable	65
3.2	Interaction air-structure	66
3.3	Dirigeable Flexible	72
3.4	Cylindre immergé dans l'air	77
4.1	Dirigeable avec deux nacelles	84
4.2	Mouvement d'avancement	103
4.3	Position et vitesse d'altitude	104
4.4	Commande du mouvement d'altitude	105

4.5	Angle de rotation et déplacement de déformation $\bar{Y}_{d2}$ . . . . .	106
4.6	Vitesse de rotation et Commande . . . . .	107
4.7	Systèmes d'erreurs . . . . .	107
4.8	Mouvement de Rotation couplé à la déformation $\bar{Y}_{d1}$ . . . . .	108
4.9	Systèmes d'erreurs . . . . .	108
5.1	Représentation du XSF (Version Carénée) . . . . .	113
5.2	Les deux repères du drone inertiel et local. . . . .	114
5.3	Description du fonctionnement d'une pale . . . . .	117
5.4	Banc de test 4 axes pour l'analyse du mouvement du XSF . . . . .	118
5.5	Pivotement des rotors 1 et 3 . . . . .	119
5.6	Vitesse linéaire Locale d'avancement . . . . .	131
5.7	Forces des moteurs . . . . .	132
5.8	Angle de Pivotement du rotor 1 . . . . .	132
5.9	Vitesse linéaire Locale de mouvement verticale . . . . .	133
5.10	Forces des Rotors du mouvement d'altitude . . . . .	133
5.11	vitesse angulaire autour de l'axe des X . . . . .	134
5.12	vitesse angulaire autour de l'axe des Y . . . . .	135
5.13	La Commande U3 . . . . .	135
5.14	La Commande U4 . . . . .	136
5.15	Forces des Rotors pour le mouvement Couplé . . . . .	136
5.16	Angles de Pivotement . . . . .	137





---

# Chapitre 1

## Introduction

---

### 1.1 Introduction Générale

Les engins volants autonomes ou semi autonomes sont des véhicules capables d'effectuer des missions en vol sans présence humaine à bord. Ils sont aussi connus sous la dénomination " Unmanned Aerial Vehicles : UAV ".

On peut distinguer deux variétés d'engins volants autonomes :

- Les plus légers que l'air : tels que les dirigeables.
- Les plus lourds que l'air : tels que les drones-avions ou les drones-hélicoptères.

L'intérêt de la modélisation et commande de ces engins volants a augmenté de manière significative au cours de ces dernières années. Le domaine d'application de ces véhicules est gigantesque. Néanmoins il subsiste un certain nombre d'obstacles qui ralentissent leur expansion. Les chercheurs et les concepteurs se sont alors penchés sur le problème de manière intensive ces deux dernières décennies pour essayer d'aplanir ces obstacles. Cela concerne aussi bien le domaine de la conception mécanique et aérodynamique que les domaines de l'automatique et de la commande.

Partant des formes simples aux plus complexes que peuvent avoir ces engins, plusieurs modèles ont été conçus et développés en industrie pour des missions qui peuvent s'avérer difficiles à réaliser. La complexité et les possibilités des UAV s'est alors accru rapidement et la gamme des missions qu'ils sont appelés à réaliser s'est développée aussi bien dans les domaines civils que militaires. Cependant afin que ces UAV puissent atteindre ce potentiel, certains défis techniques doivent être surmontés. Un point important parmi

ces défis est la flexibilité structurelle. L'intégration de la flexibilité dans l'analyse dynamique est très importante pour une modélisation fine de ces engins. Cependant elle est encore à un stade embryonnaire et commence à peine à émerger.

Prenons l'exemple des dirigeables, la quasi-totalité des études préalables portent sur l'hypothèse de rigidité de ces engins [FOS96], [BH00], [Hyg03]. Les effets de flexibilité sont parfois modélisés comme une perturbation.

Notons que la prise en compte de la flexibilité structurelle dans les systèmes mécaniques a connu un essor notable en robotique classique [SIM87], [B96]. Cependant pour les robots volants ou UAV on continue encore à privilégier l'hypothèse des corps rigides pour des raisons de simplicité, mais surtout car il est possible d'appliquer aisément des lois de commande et de stabilisation efficaces pour ces modèles " rigides " et construire ainsi des algorithmes rapides pouvant fonctionner en temps réel sur ces engins volants.

Néanmoins la tendance actuelle est la construction d'UAV légers ou comportant des éléments élancés : négliger la déformation dans ce cas conduirait à un modèle mathématique peu représentatif du système réel. Il est donc nécessaire d'élaborer un modèle adéquat qui tient compte de la flexibilité de ces engins, tout en préservant la simplicité des modèles " rigides ".

Nous essayons par cette étude de contribuer à l'étude de la flexibilité des engins volants en représentant l'effet de la flexibilité par des degrés de liberté supplémentaires non commandés. La déformation de l'engin volant souple n'est pas considérée comme une perturbation mais plutôt comme agissant sur son mouvement. L'impératif de légèreté des modèles développés est très important dans cette démarche. Ceci permettrait de développer des algorithmes de commande et de stabilisation adaptés pour être implantés sur l'informatique embarquée des engins volants, souvent de capacité et de taille réduite.

Deux applications ont été étudiées pour valider ce modèle. Un UAV plus léger que l'air : un dirigeable ; et un autre " plus lourd que l'air " : un drone quadricoptère. Chaque type d'UAV possède ses propres spécificités, complexités et points d'ombre. Nous essaierons de lever le voile sur ces points et contribuer à une meilleure compréhension des phénomènes inhérents.

Un autre point qui freinait la prise en compte de la flexibilité pour les engins volants " plus légers que l'air ", est la prise en compte du couplage au niveau des masses ajoutées entre la contribution de mouvement d'ensemble et la déformation. Les études existantes concernaient exclusivement des simulations par des logiciels d'éléments finis. Ce procédé nécessite des temps de calcul très longs et inadaptés pour du temps réel.

Nous avons cherché à travers ce travail à élaborer une méthode analytique pour le traitement de ce problème, moyennant quelques hypothèses, afin de prouver la faisabilité de la démarche, ainsi que la compatibilité du modèle mathématique établi avec le calcul en temps réel.

Pour l'élaboration des commandes de contrôle et stabilisation de ces modèles, nous avons été guidé par la recherche du meilleur compromis précision/portabilité. Nous avons pour cela développé, dans un premier temps, un algorithme de commande qui stabilise localement et asymptotiquement le dirigeable au voisinage d'un point cible, en utilisant la technique du Backstepping. Cette technique robuste nous a permis d'atténuer les vibrations de l'engin volant flexible à travers les commandes du mouvement rigide. Dans un deuxième temps, nous avons adopté une technique basée sur la méthode des petites perturbations. Le modèle que nous obtenons est fortement non-linéaire, nous utiliserons pour stabiliser l'engin, une méthodologie basée sur la linéarisation et nous proposons un contrôleur PID pour le stabiliser.

## 1.2 État de l'art

On présentera ci-après les définitions nécessaires pour bien situer les engins volants autonomes (UAV) ainsi que les principales études les concernant ayant fait l'objet de publications. Nous différencions pour cela par les UAV plus lourds que l'air de ceux qui sont plus légers.

### 1.2.1 UAV plus lourds que l'air

Les UAV plus lourds que l'air sont souvent appelés drones. D'origine anglaise, le mot "drone", qui signifie "bourdon", ou "bourdonnement", est communément employé en Français en référence au bruit que font certains d'entre eux en volant !

Le drone n'est en fait qu'un des éléments d'un système, conçu et défini pour assurer une ou plusieurs missions. C'est la raison pour laquelle les spécialistes parlent de "systèmes de drones".

On distingue ainsi deux catégories de drones : ceux qui requièrent effectivement l'assistance d'un pilote au sol, par exemple pour les phases de décollage et d'atterrissage, et ceux qui sont entièrement autonomes.

Cette autonomie de pilotage peut s'étendre à la prise de décision opérationnelle pour réagir face à tout événement aléatoire en cours de mission ; elle constitue la deuxième caractéristique essentielle des drones.

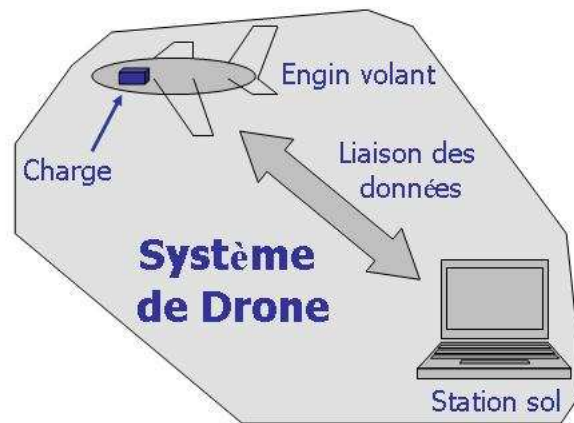


FIGURE 1.1: Système " drone "

Les drones ont été utilisés ces dernières décennies pour des applications nombreuses et variées. Ils sont très largement utilisés dans le domaine militaire pour la reconnaissance, le renseignement, et comme relais de communication. Mais sont aussi utilisés dans le domaine civil pour l'inspection d'ouvrages d'art, la surveillance du littoral ou pour donner des informations précises sur les dépôts de feu ou de l'étendue des dégâts lors de catastrophes naturelles.

Notre laboratoire IBISC est parmi les premiers en France à avoir investi le domaine des engins volants autonomes. En effet, l'équipe VASCO s'est lancée depuis dix ans dans ce domaine, dans un premier temps avec le laboratoire HEUDIASYC (Compiègne) dans le cadre de la modélisation dynamique et le pilotage automatique d'engins volants à voilures tournantes (hélicoptères et X4-Flyer), puis avec le laboratoire LAAS (Toulouse) et l'Ecole Polytechnique de Tunisie dans la modélisation fine d'engins volants.

Notre équipe participe à un concours lancé par l'ONERA et la DGA sur les drones miniatures, avec un projet qui a été retenu par la commission du concours. Ce projet intitulé XSF est un drone quadrirotors de faible dimension.

Les quadrirotors sont actuellement étudiés de manière intensive par différents laboratoires de part le monde, pour les particularités intéressantes qui les caractérisent et sont appelés à un avenir très prometteur.

Voyons d'abord comment est venue l'idée d'un hélicoptère à quatre hélices. Le premier quadrirotor remonte à 1921. En effet, le corps de l'armée de l'air Américaine a attribué un contrat au Dr. DE BOTHEZAT pour développer une machine à décollage vertical. Ce dernier ont mis sur pied une machine volante de 1678 kg dont le fuselage est conçu sous forme de X. Chaque bras du fuselage était de 9m de longueur tenant à son extrémité un rotor de diamètre environ 8m.

Cependant, bien que De Bothezat ait démontré qu'il était théoriquement possible à son hélicoptère de voler et qu'il était théoriquement bien stable, ce quadricoptère n'a pas pu réaliser les performances escomptées ; par exemple on lui demandait de voler à une altitude de 100m alors que, pour cause de surpoids, l'altitude maximale qu'il a pu atteindre était juste de 5m. Ainsi, suite à sa complexité mécanique et son manque de puissance, cet hélicoptère à quatre rotors n'a pas pu satisfaire son cahier des charges, et est rentré aux oubliettes.

Mais cette configuration est revenue à la mode lors de ces deux dernières décennies, en raison des avancées spectaculaires en électronique et automatique. Les chercheurs se sont inspirés de ce géant quadrirotor et ont développé des drones lui ressemblant.

#### **-Présentation :**

Un quadrirotor est un appareil volant comportant 4 rotors pour sa sustentation. Les 4 rotors sont généralement placés aux extrémités d'une croix. On peut aussi placer les rotors aux extrémités d'une structure en forme de X, mais le principe de base consiste

à placer les 4 rotors aux 4 coins d'un carré, sur un même plan horizontal.



FIGURE 1.2: Exemple de quadrirotor pour des applications hors du vent.

Un Quadrirotor peut être très manoeuvrable, il a le potentiel de planer et décoller, voler et atterrir dans des emplacements limités et peut avoir des mécanismes simples de commande [AOM02]. Il est mécaniquement simple et est contrôlable en changeant seulement la vitesse de rotation des quatre moteurs. Et puisque le mouvement du lacet est contrôlé en changeant seulement la vitesse des moteurs, le rotor de queue n'est pas nécessaire pour commander le mouvement de lacet et toute la poussée peut être fournie pour le décollage.

Un Quadrirotor peut également voler sans crainte pour l'entourage contrairement aux autres configurations conventionnelles d'hélicoptères qui disposent d'un grand rotor [McK04].

La dynamique de l'engin est bonne notamment en ce qui concerne le savoir-faire. Néanmoins, la modélisation dynamique du Quadrirotor peut s'avérer être une tâche délicate.

#### **-Principe du mouvement d'un quadrirotor :**

A l'inverse des hélicoptères où le pas variable est plus répandu, le quadrirotor se prête mieux au pas fixe : les moteurs électriques procurent de nos jours toute la puissance souhaitée et les hélices restent petites et légères par rapport à la taille de l'appareil, ce qui lui procure une bonne réactivité. Mais il n'est pas impossible d'imaginer un gros quadrirotor équipé d'un unique moteur thermique et de 4 hélices à pas variable. Toutefois, nous allons nous focaliser ici sur le modèle à pas fixe, 2 hélices rotatives et 2 hélices contrarotatives.

Voici comment se contrôle ce type de quadrirotor :

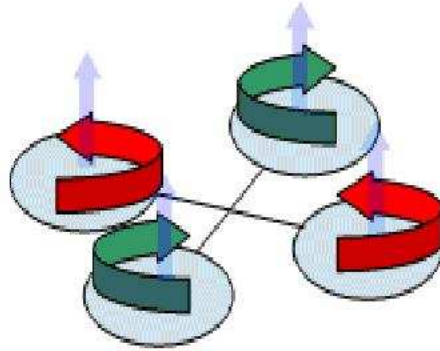


FIGURE 1.3: Montée d'un Quadrirotor

- La montée s'obtient en augmentant le régime des quatre rotors.
- La descente s'obtient en diminuant le régime des rotors. La descente est toujours plus délicate car le compromis entre la demande du pilote de descendre et le maintien de la stabilité de l'appareil est plus difficile à obtenir.

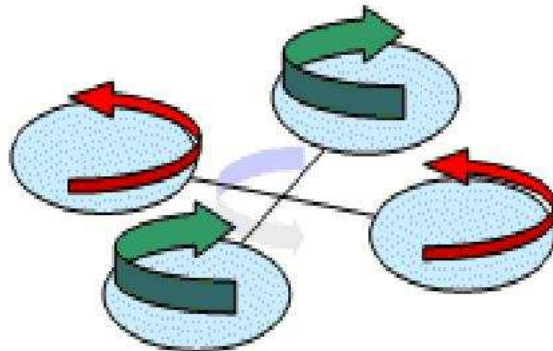


FIGURE 1.4: Orientation des rotors

- Un virage à gauche sur l'axe de lacet se fait en augmentant la vitesse du couple



d'hélice rotatif, et en diminuant la vitesse du couple contrarotatif.

- Le roulis et le tangage s'obtiennent en augmentant la vitesse d'une hélice, tout en diminuant la vitesse de l'autre hélice du même couple.

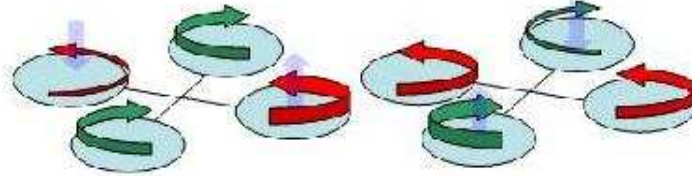


FIGURE 1.5: Mouvement de Roulis et de Tangage

#### **-Drone XSF :**

Comme illustration des drones quadrirotors nous présentons ci-après le drone XSF développé au laboratoire IBISC.

Le XSF est un quadrirotor fabriqué sous forme de croix en fibre de carbone, d'envergure 70 cm, de masse environ 2kg.

Au centre de la croix se trouve un cylindre central contenant :

- Une centrale inertielle
- Une batterie
- Des capteurs Ultrason
- Une station de base

Pour compenser les anti-couples des hélices entre elles et assurer la stabilité du drone en lacet, les rotors 1 et 3 tournent dans le même sens qui est en même temps le sens contraire de rotation des rotors 2 et 4.

De plus, pour avoir une plus grande maniabilité de mouvement, ce drone a la possibilité

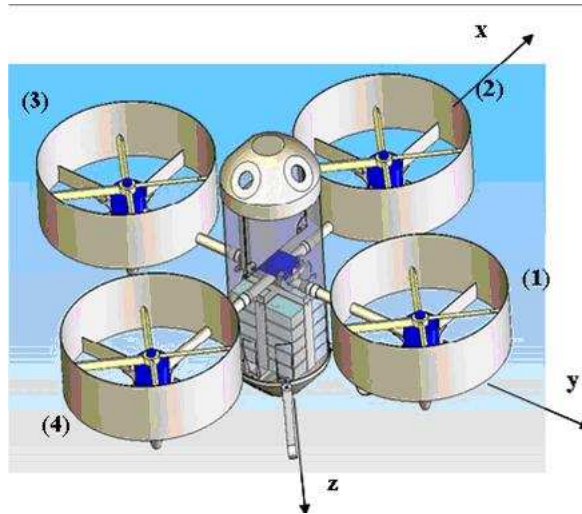


FIGURE 1.6: Quadrirotor :XSF (Version carénée)

de faire pivoter les axes portant les rotors 1 et 3 autour de l'axe de tangage. Ce pivotement lui permet soit de faire un mouvement rectiligne horizontal soit un mouvement de rotation autour de l'axe de lacet, soit la combinaison de ces deux mouvements, il s'agit donc d'un virage [ABDP07].

Cette option de pivotement des rotors renforce aussi la stabilité du drone face aux rafales du vent possibles. En effet, lors de son mouvement horizontal, le drone garde son attitude stable (position horizontale), ainsi sa résistance face aux rafales de vent est plus importante que celle du drone quadri-rotor classique.

Plusieurs travaux, consacrés à la conception de ce type de modèle et de différentes commandes, ont été publiés. Dans la littérature, pour aborder la modélisation de ces engins volants, de nombreux travaux se sont inspirés de la dynamique d'un corps rigide correspondant au fuselage auquel se rajoutent les forces aérodynamiques générées par les rotors [CDL04], [MEG06], [CHI01], [ER59], [BAA06a].

Cette idée a été adoptée afin de pouvoir contourner la question de flexibilité de la machine. Certaines propositions de modélisation du drone sont présentées dans la littérature telles celles basées sur le formalisme de Newton [HMLO02], [CHI01], [AB08], liées principalement au repère local, et celles basées sur le formalisme d'Euler- Lagrange [CDL04] liées au repère global supposé fixe. En se basant sur le formalisme de

Newton Euler, T.Hamel et al [HML02], ont établi la modélisation dynamique d'un quadrirotor prenant en compte la dynamique de moteurs et les effets aérodynamique et gyroscopiques des rotors.

D'autres ont considéré le drone comme un Multi-corps à composantes flexibles en intégrant le phénomène d'aéroélasticité [MA06]. Dans ce travail, [MA06] présente le modèle dynamique complet d'un Hélicoptère flexible à quatre rotors ou drone Hélicoptère. Il établit la dynamique du système mécanique en utilisant une approche Lagrangienne du mouvement basée sur la méthode des coordonnées généralisées relatives. Une analyse du comportement vibratoire des hélices est faite en considérant le phénomène de couplage aéroélastique.

Concernant la commande du drone, certains présentent des lois de commande basées sur le système linéarisé des drones, alors que d'autres traitent le modèle en entier.

T.Hamel et al [HML02] proposent aussi une nouvelle stratégie de commande pour la stabilisation des conditions de vol quasi-stationnaires. L'approche adoptée implique la séparation de la dynamique du corps rigide central à celle des moteurs. Dans cette approche, T.Hamel et al développent une commande séparative basée sur les fonctions de Lyapunov, et arrivent à borner les erreurs de perturbations afin de stabiliser le système complet. En considérant une linéarisation du modèle dynamique de leur quadrirotor [PMHR02], P.Pound et Al présentent la conception, la fabrication et la modélisation dynamique d'un quadrirotor. Ils proposent, aussi, une stratégie de commande pour le mouvement de décollage vertical du quadrirotor "X4 flyer". Sans servo-moteurs de commande ou de pièces mobiles autres que les rotors, la complexité de la mécanique du dispositif est réduite au minimum. Un tel système a pour but de modifier la réponse dynamique du système de manière à le rendre plus facile à piloter. La réponse dynamique du système doit être modifiée pour se conformer à la dynamique VTOL d'un avion. Néanmoins, il n'est pas nécessaire de stabiliser le système de contrôle, de façon autonome, et de prendre en compte la dynamique d'altitude.

Lozano et al [PCD05] ont synthétisé et établi différentes études concernant la modélisation et commande d'engins volants tels que les hélicoptères dans toutes leurs configurations pour leur adaptabilité et leur manoeuvrabilité, les dirigeables et les quadrirotors. Une méthode de stabilisation et de poursuite de trajectoire basée sur la notion de platitude était conçu dans [BAA06a]. Cette méthode a été appliquée sur le système linéarisé du quadrirotor classique X4. Elle a assuré la poursuite du drone vers une trajectoire

planifiée.

Une configuration d'un quadri-rotors nommé " OS4 " est présentée dans [BNS04].

Bouabdallah et al. [BNS04] présentent les résultats des deux modèles à base de techniques de contrôle appliquées à une autonomie de quatre micro-rotor d'hélicoptère appelé Quadrirotor. Une approche classique (PID) a été appliquée pour une dynamique simplifiée et une technique moderne (LQ) pour un modèle plus complet. Cette commande présentée arrive à stabiliser le modèle entier, néanmoins elle est assez sensible aux perturbations pouvant affecter le drone. Dans [CH06], Chen et Huzmezan ont obtenu un modèle linéarisé qui a été synthétisé pour un contrôleur  $H_\infty$ . Ils ont testé leur algorithme sur une plateforme pivotant librement.

En utilisant deux méthodes d'approches différentes, dans [MEG06], K.Zamaleche a étudié la stabilité pour deux quadrirotors différents, (X4 et XSF). En premier, il a combiné la technique de backstepping à l'approche de Lyapunov. En second, une commande basée sur la théorie de la logique floue a été élaborée pour le modèle Lagrangien du drone XSF de notre Laboratoire.

Dans notre travail, on a établi une stratégie de stabilisation que l'on peut présenter ainsi. Vu que le modèle est Eulerien, et que les paramètres cinématiques et dynamiques sont exprimés dans le repère local, on a utilisé la méthode des petites [DEG01] perturbations pour linéariser le modèle. La méthode développée fournit un outil de stabilisation efficace, qui présente l'avantage de s'implanter aisément dans un micro-contrôleur embarqué. L'algorithme de stabilisation de l'XSF a été testé dans différents cas de mouvements perturbés et plus précisément dans le mouvement de roulis et de tangage. Les résultats obtenus sont satisfaisants et prouvent l'efficacité de la démarche.

## 1.2.2 UAV plus légers que l'air :Dirigeables

### 1.2.2.1 Introduction

Les ballons dirigeables ont été les premiers aéronefs de l'humanité. Ils ont réalisé avant tous les autres types d'aéronefs un grand nombre des exploits de l'aéronautique civile et militaire :

- vol, vol motorisé avec retour au point de départ, traversée océanique, tour du



FIGURE 1.7: Dirigeable Zeplin

monde, bombardement, dépose de soldats dans un pays ennemi, photographies et observations aériennes...

Ces exploits ont été possibles car il n'y a pas de puissance minimale à embarquer pour leur vol. Les qualités requises pour l'éventuel moteur d'aérostat sont donc moins critiques, comparées avec celles des aéronefs "plus lourds que l'air".

Comme leurs aspects fantasmagiques continuent d'alimenter des discussions, voyons ce qu'il en est des ballons et dirigeables, et ce qu'il en sera dans l'avenir.

### 1.2.2.2 Historique des dirigeables

Les premiers essais, en 1783 menèrent à une conception moderne du dirigeable par le général **Meusnier** dont le ballon était de forme ellipsoïdale muni d'un gouvernail, mais à l'époque aucun moteur n'existait.

En 1900, on enregistre le premier vol du dirigeable allemand (rigide) "Zeppelin LZ1" (Figure 1.7). Avec l'apparition des dirigeables rigides Zeppelin, plusieurs problèmes sont correctement posés puis résolus, notamment :

- la tenue mécanique de l'enveloppe, dissociée de la tenue du gaz .

- l'adaptation d'une propulsion convenable pour des engins aériens : on ne bricole plus avec ce qu'on a sur l'étagère, mais on conçoit des propulseurs pour la mission.

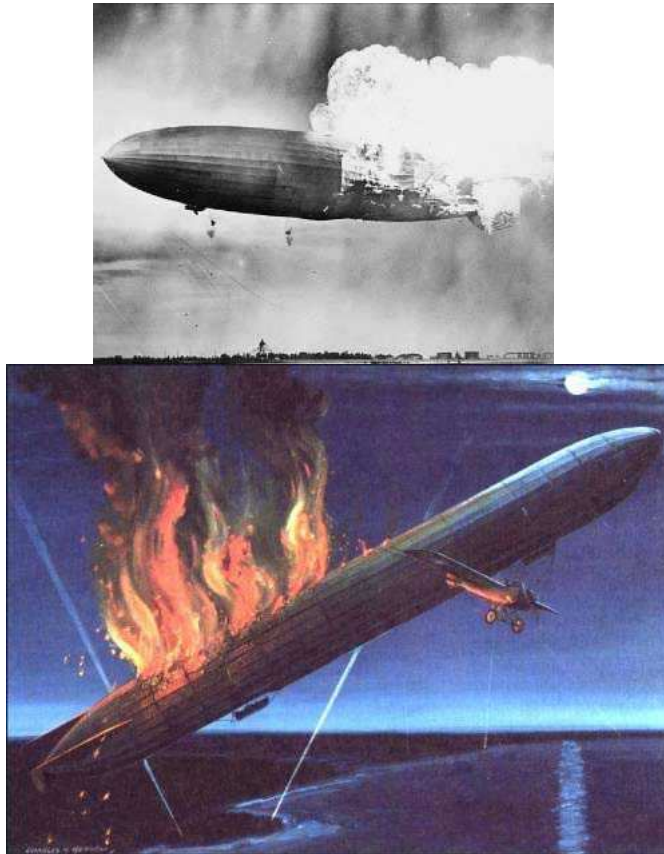


FIGURE 1.8: Incendie du dirigeable allemand

Cependant, en mai 1937 il y a eu l'échec spectaculaire du dirigeable Heidelberg inventé par le comte **VonZeppelin** et qui a causé la mort de 36 personnes (voir figure 1.8).

Il aura fallu plus de soixante ans au ballon dirigeable pour effacer dans les mémoires la catastrophe de Heidenburg.

Actuellement, ces premiers échecs d'exploitation semblent être oubliés et dépassés, pour preuve l'avancement intensif des recherches en aéronautique et en robotique qui envahissent actuellement ce domaine.

Un nouvel avenir est ouvert pour l'utilisation des dirigeables dans des applications

civiles, et surtout écologiques. En effet, le dirigeable renaît de ces cendres après la création de plusieurs prototypes qui sont plus efficaces et plus surs.

Le dirigeable est aussi un mode de transport qui possède une grande capacité de déplacer de très lourdes charges avec un minimum de risque de défaillances mécaniques et qui sont moins critiques que pour un avion par exemple.

Un tel dirigeable pourrait apparemment servir à transporter directement certaines charges encombrantes. Il pourrait transporter ces charges dans des lieux autrement difficiles d'accès. Il remplacerait à lui tout seul l'avion et l'hélicoptère pour un coût moindre, et il s'intégrerait bien dans un cadre de développement durable et de respect de l'environnement.

De nouveaux projets de dirigeables ont vu le jour, plus grands, plus performants et plus flexibles. Le projet allemand "Cargolifter" en est une belle illustration.

Dans ce travail, on s'est focalisé sur l'étude des dirigeables flexibles, qui symboliseraient très probablement l'avenir des dirigeables, afin de les perfectionner en vue d'une exploitation dans des domaines diverses tels que (transport de marchandises, surveillance, affiches publicitaires...)

### 1.2.2.3 Principe Physique

Un dirigeable est fondamentalement une montgolfière dotée d'un système de propulsion. Pour améliorer ses performances, la forme de la montgolfière est considérablement modifiée. Le principal changement consiste à donner à l'enveloppe, appelée également carène, une forme aérodynamique proche d'une forme ellipsoïdale.

Tous les ballons utilisent le THÉORÈME D'ARCHIMÈDE appliqué dans l'air : "Tout corps immergé dans un fluide subit une force opposée au poids du fluide déplacé". On nomme cette force "portance aérostatique" :(voir figure 1.9).

On note :

- $\bar{F}$  : Poussée d'Archimède
- $M$  : masse du ballon
- $G$  : centre de gravité, point d'application du poids  $M.g$  du ballon
- $A$  : centre de la poussée d'Archimède
- $\bar{g}$  : accélération due à la gravité (dirigée vers le bas) [m/s<sup>2</sup>]

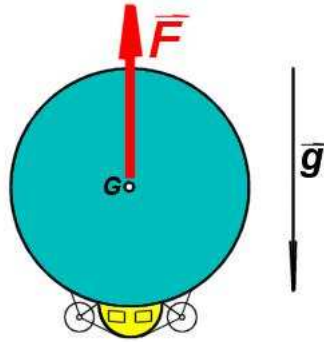


FIGURE 1.9: Principe Physique du Dirigeable (  $\bar{F} = -\rho\bar{g}V$  )

Si la portance dépasse le poids du dirigeable, le ballon dirigeable monte pour atteindre l'altitude d'équilibre, et inversement. L'altitude d'équilibre est celle pour laquelle la masse volumique de l'air réalise l'équation d'équilibre. La masse volumique de l'air (et par voie de conséquence la portance) décroît en effet avec l'altitude.

#### 1.2.2.4 État de l'art

Plusieurs projets ambitieux sont actuellement en cours afin de développer des plateformes dirigeables capables d'opérer en différents milieux notamment en stratosphère, leur objectif est d'embarquer des équipements de communication ou d'observation météorologique.

Dans la plupart des applications existantes à ce jour, les dirigeables sont pilotés soit par un pilote à bord soit par un opérateur humain via une liaison radio. En vue de donner une autonomie à cette plateforme, il est nécessaire d'automatiser les fonctions de pilotage et de planification de tâches qui sont généralement basées sur la connaissance à priori du modèle dynamique du dirigeable. Des travaux ont porté sur la réalisation d'un modèle dynamique rigide [Hyg03], [KG99], qui s'est enrichi au fil des années pour prendre en compte le vent [APR<sup>+</sup>01]. Les premiers travaux ont concerné principalement la recherche d'un modèle dynamique incluant notamment les principaux effets



aérodynamiques pour les différents modes de vol et tenant compte du type d'actionnement [BH00]. Selon le mode de propulsion, les modèles proposés, ont des propriétés différentes qui correspondent à des systèmes sous-actionnés. Ces travaux se sont aussi portés sur la planification et génération de trajectoires d'un dirigeable rigide [HB03]. En considérant l'hypothèse de rigidité de la carène, des modèles dynamiques qui intègrent les phénomènes mécaniques et aérodynamiques ont été établis dans beaucoup de travaux notamment [Hyg03], [BH00].

Dans le cadre d'un programme de développement de dirigeable gros porteur, certaines études sur le comportement d'un écoulement non visqueux couplé à celui d'une structure flexible d'un dirigeable ont été établies. Pour mener cette étude, Koobus et al. [OEKA05] ont opté pour un outil non linéaire qui modélise d'une part, les équations d'Euler instationnaires pour la partie fluide (l'air) et, d'autre part, les équations élastodynamiques classiques qui gouvernent les déformations de la structure. Les équations associées à la structure sont discrétisées par la méthode des éléments finis dans une formulation lagrangienne. Dans cette étude, Koobus et al. ont réalisé une série de calculs d'écoulements non visqueux afin d'évaluer avec précision les coefficients aérodynamiques globaux. Ils comparent en premier lieu les influences de différents raidisseurs ajoutés à la structure initiale, dans le cas d'écoulements à incidence 0 ou 20°. Ensuite, ils étudient l'influence de la dissipation numérique ainsi que celle du préconditionnement bas Mach. Ils observent - comme prévu - l'effet stabilisateur des raidisseurs, et essentiellement celui des raidisseurs longitudinaux. Ils évaluent également l'impact positif du préconditionnement bas Mach sur les résultats, ainsi que celui de la diminution de la dissipation numérique.

Par ailleurs, afin de vérifier l'hypothèse de rigidité de la carène, nous nous sommes intéressés à l'étude des phénomènes de flexibilité introduits par le tissu de cette dernière [ABL02], [BAA06b].

Si les dirigeables comme bon nombre d'engins volants ont donc été depuis longtemps considérés comme des corps rigides, néanmoins, dans la littérature, plusieurs approches ont été proposées afin d'étudier les problèmes des corps flexibles dans l'espace, [PAS91], [SHA88], [CN02], [BQM03], [SCS06], [SIM87]. Les approches peuvent être classifiées dans deux groupes :

- Le premier groupe emploie la description de Newton-Euler [SHA88], [GOL01]. Cette méthode est intéressante eu égard au temps de calcul, cependant il n'est pas facile

de l'appliquer dans le cas du corps flexible, sans procéder à des profondes transformations dans le formalisme destiné à l'étude des corps rigides [B96]. Nous nous sommes attachés particulièrement à réaliser ces transformations dans le second chapitre de ce rapport, en mettant l'accent sur la légèreté du formalisme afin qu'on puisse toujours s'y appuyer dans l'étude de la stabilité et la commande des engins volants souples.

Dans une étude intéressante de Boyer et Khalil [BK99] une approche a permis d'étendre les algorithmes arborescents "rigides" de Neton-Euler au cas des manipulateurs flexibles. On notera dans ce cas une nette diminution des opérations de calcul. Cependant ces algorithmes présentent généralement une grande sensibilité numérique.

-Le deuxième principal groupe d'études des corps flexibles utilise la méthode lagrangienne, qui consiste à définir le mouvement relativement à une configuration fixe de référence. Mais ce procédé mène également à des relations complexes lors de la description des déformations et des contraintes dans le corps flexible. Une Méthode Lagrangienne actualisée (U.L.M.) a été proposée par BATHE et al. [Ba75] et développée pour les corps déformables qui subissent de grands déplacements de translation et de rotation. La résolution du problème dynamique est incrémentale. La configuration et le mouvement du corps sont identifiés en utilisant une configuration de référence mobile représentant la position du corps déformable dans le pas précédent. Azouz et Al [ABL02] proposent comme configuration de référence, une configuration rigide du dirigeable qui suit le mouvement du corps sans coïncider avec lui. Cependant l'inconvénient de cette approche est le temps de calcul qui paraît important. Le modèle dynamique obtenu sera difficile à commander.

D'un autre côté, le domaine de recherche concernant la commande des dirigeables sous-actionnés est potentiellement intéressant. Dans une étude récente, une classe de systèmes autonomes sous-actionnés a été étudié par Beji, Abichou et Bestaoui [BAB04]. Dans ce travail, Beji et al. établirent une loi feedback en temps-variables. La loi de commande est déterminée par la théorie de l'homogénéisation. Ils ont aussi établi la stabilisation asymptotique de la position et de l'orientation du dirigeable en utilisant uniquement les trois entrées de commandes disponibles. Par ailleurs, Morin et Samson [MS95] ont été appliqué avec succès les approximations homogènes et le contrôle par retour d'état à des systèmes sans dérive. Les auteurs ont présenté un retour d'état continu et instationnaire qui stabilise asymptotiquement un satellite sous actionné.

Pettersen et Egeland [PE96] ont prouvé qu'une large classe de véhicules sous-actionnés ne peuvent pas être stabilisée par un retour d'état continu ni par un retour d'état discontinu. Ils ont considérés un système avec dérive (bateau) comme modèle d'étude et ils ont montré qu'une loi de retour d'état continue, périodique et instationnaire peut le stabiliser. Certains auteurs ont traité avec succès la commande globale d'un avion flexible [Tuz01], cependant les travaux qui traitent ce problème de couplage pour les dirigeables flexibles sont quasiment inexistantes.

### 1.2.2.5 Interaction-Air-Structure

Les engins volants plus légers que l'air (dirigeables) sont également régis par des phénomènes aérodynamiques qu'il est important de modéliser. La base pour analyser le mouvement d'un corps rigide dans un fluide parfait a été établie au 19ème siècle et décrite par Lamb [LAM45]. Dans son travail, Lamb a considéré le cas du déplacement simple dans une grande masse infinie de fluide, où le mouvement de ce dernier est entièrement dû au mouvement du solide. Le mouvement sera considéré irrotationnel. Il montre que l'énergie cinétique du fluide peut être exprimée comme une forme quadratique des six vitesses de translation et de rotation du véhicule. Les dérivations données par Lamb seront utilisées dans la description du dirigeable dans un milieu uniforme stationnaire. Les termes provenant de l'accélération ou (masses ajoutées) viennent du fait que le fluide considéré parfait est accéléré. Quand un ellipsoïde se déplace dans un fluide non visqueux incompressible et infini de sorte que le flux extérieur soit partout irrotationnel et continu, l'énergie cinétique du fluide produit un effet équivalent à une augmentation importante de la masse et des moments de l'inertie du corps [KG99]. Dans ce travail, l'analyse de l'interaction fluide-structure est intégrée d'une manière innovatrice dans le modèle Eulerien. On a pour cela utilisé une approche énergétique pour intégrer l'effet du fluide dans notre formalisme Eulerien.

#### **-Explication du Phénomène des masses ajoutées : Dirigeables Rigides :**

Le mouvement du dirigeable déplace un certain volume d'air préalablement en état stationnaire. Pour permettre au véhicule de passer à travers le fluide, le fluide doit se déplacer autour du dirigeable pour lui libérer le passage. Le fluide acquière ainsi une énergie cinétique.

Ce phénomène est appelé dans la littérature, phénomène de masses ajoutées ou virtuelles [LAM45], [FOS96] et [BH00].

On considère par exemple un corps ayant un volume important et de masse  $m$ , qui se déplace dans l'air suivant l'axe  $x$  avec une vitesse  $u$ . L'air opposant son inertie provoque une force résistive instationnaire  $-\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}}\dot{\mathbf{u}}$  avec  $\mathbf{X}$  l'ensemble des forces extérieures appliquées sur le dirigeable, et  $\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \dot{\mathbf{u}}}$  la dérivée de ces forces par rapport à l'accélération  $\dot{\mathbf{u}}$  ( $\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}} > 0$ ).

Par conséquent l'équation de la dynamique suivant cette direction sera sous la forme :

$$m\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{X} \quad (1.1)$$

On peut dire donc qu'en présence du fluide, la dynamique du dirigeable suivant l'axe  $x$  correspond à celle d'un corps de masse  $m + \mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}}$ , par suite l'équation dynamique de l'ensemble dirigeable-air prend la forme :

$$(m + \mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}})\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{X} \quad (1.2)$$

à partir de l'équation 1.2, il résulte que, le corps voit sa masse augmenter par la quantité  $\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}}$ .

Cette quantité est identifiée comme une masse supplémentaire appelée masse ajoutée ou encore masse virtuelle. Elle est proportionnelle à la masse volumique  $\rho$  du fluide. Le coefficient de proportionnalité étant un volume de référence  $V$  multiplié par un coefficient de masse ajoutée  $k$ .

$$\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}} = k \cdot \rho \cdot V \quad (1.3)$$

Par exemple, pour un ellipsoïde parfait se déplaçant selon un axe parallèle à son grand axe (1.10), dans un fluide parfait de masse volumique  $\rho$ , le coefficient  $k$  peut s'exprimer ainsi [FOS96] :  $\mathbf{X}_{\dot{\mathbf{u}}} = \underbrace{\frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0}}_k \cdot \rho \cdot V = \frac{\alpha_0}{2 - \alpha_0} \cdot \rho \frac{4}{3} \pi a b^2$

et si l'on introduit l'excentricité  $e = 1 - (\frac{b}{a})^2$ , on a  $\alpha_0 = \frac{2(1-e^2)}{e^3} (\frac{1}{2} \text{Ln}(\frac{1+e}{1-e}) - e)$

D'une manière plus générale, dans le cas d'un ellipsoïde rigide se déplaçant dans un liquide, l'équation 1.1 prend la forme suivante :

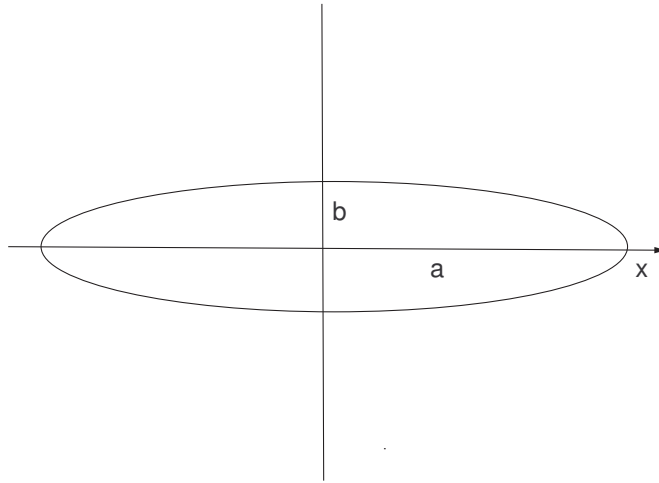


FIGURE 1.10: Ellipsoïde

$$(M_E + M_a)\dot{\nu} = \mathbf{F} \quad (1.4)$$

Où  $M_E$  est la matrice de masse de l'ellipsoïde,  $\dot{\nu}$  la matrice colonne des accélérations et  $\mathbf{F}$  l'ensemble des forces appliquées au corps mobile.

Les masses ajoutées sont représentées par  $M_a$  est une matrice de dimension 6x6. Cette matrice a été calculée dans la littérature [LAM45]. En effet, la matrice des masses ajoutées peut être exprimée sous la forme :

$$M_a = \begin{pmatrix} A & C' & B' & F & F' & F'' \\ & B & A' & G & G' & G'' \\ & & C & H & H' & H'' \\ Sym & & & P & R' & Q' \\ & & & & Q & P' \\ & & & & & R \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

La matrice représentée dans 1.5 n'est pas symétrique dans le cas général. Néanmoins, sa symétrie est admise dans le cas d'un corps totalement immergé dans un fluide [FOS96].

**Phénomène des masses ajoutées dans le cas de dirigeables Flexibles :**

L'étude de la masse ajoutée due au mouvement d'un corps déformable en grands déplacement dans un fluide est encore dans un stade embryonnaire et s'appuie souvent sur des codes de calcul numérique. En littérature, on peut répertorier deux groupes :

- Le premier groupe qui traite l'impact du mouvement en grands déplacements sur le fluide [FOS96], [Hyg03], [LAM45] ; dans ces études la matrice de masse ajoutée est calculée à partir des équations de Kirshoff et de l'expression de l'énergie cinétique du fluide. Ce travail est inspiré de l'étude des sous-marins.

- Le deuxième groupe traite l'impact des petites vibrations autour d'une position d'équilibre sur le mouvement du fluide. Ce travail a été traité par plusieurs méthodes. Ohayon et al. [HM95], par exemple, a utilisé la méthode de sous-structuration. Il a ainsi défini une matrice de couplage entre le fluide et la structure. La matrice de masse ajoutée a été calculée à partir de cette matrice de couplage.

La plupart des études utilisent la méthode des éléments finis [UE06], [Pao04], [YTL03], [SBL06], [JM06]. J. F. Sigrist [SBL06] présente une analyse modale d'une structure industrielle couplée avec un fluide, en utilisant les techniques numériques de calculs couplés fluide/structure. Compte tenu de la nature axisymétrique de la géométrie de la structure étudiée et de la nature non axisymétrique des équations de couplage, la modélisation du problème est réalisée au moyen d'éléments finis axisymétriques développés en série de Fourier. Un code de calcul fût développé pour permettre l'analyse modale de la structure.

Certains auteurs se sont focalisé sur la vibration de structures non-mobiles dans un fluide aux caractéristiques les plus diverses tel que De Langre [Lan02]. Une méthodologie intéressante basée sur des modèles numériques a été développé par Combescure [AC80]. Quelques études sur des bateaux flexibles commencent à traiter le problème analytiquement sous des conditions particulières de houles sinusoïdales [FC06], [WM05].

L'originalité de notre travail est l'étude analytique des phénomènes des masses ajoutées pour un corps immergé flexible en grands déplacement et petites déformations, incluant la prise en compte du couplage entre ces deux mouvements. Afin de mieux prendre en considération la dépendance entre les forces aérodynamiques et l'élasticité structurelle,

la vitesse locale sur le véhicule déformé est utilisée dans le calcul des forces aérodynamiques.

## 1.3 Objectifs de la thèse et présentation du mémoire

Cette thèse s'inscrit dans une suite logique de travaux réalisés au laboratoire IBISC concernant les engins volants autonomes. Elle concerne la modélisation et commande de ces engins tenant compte de leur flexibilités structurelles. L'intégration de la flexibilité structurelle représente une percée majeure dans la modélisation globale de ces engins maniables. Elle soulève en même temps un bon nombre de problèmes nouveaux dont nous essaierons de résoudre une partie au cours de ce travail de thèse. Nous serons guidé dans cette démarche par l'impératif d'optimisation du rapport précision/probabilité. Il est en effet important d'avoir un modèle dynamique qui allie la précision à la légèreté pour qu'on puisse y intégrer des lois de commande et de stabilisation compatibles avec le temps réel.

Certains problèmes, tels que la modélisation dynamique, sont communs à différents types d'engins volants flexibles d'autres sont plus spécifiques, comme l'aérodynamique et la stabilisation, et nous distinguerons dans notre étude :

- Les plus légers que l'air : avec comme illustration le dirigeable flexible.
- Les plus lourds que l'air, avec comme illustration un drone quadricoptère.

Pour mener à bien cette étude, ce rapport sera structuré comme suit :

### Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle dynamique d'un engin volant à composants flexibles. Le modèle utilisé à cet effet est le modèle Eulérien. Pour cela, dans une première approche, on considère un engin volant rigide afin d'établir le parallèle entre les descriptions Eulerienne et Lagrangienne. On se propose, par la suite, d'étendre cette technique aux corps déformables, sans pour autant détruire le formalisme général obtenu pour les corps rigides. Et grâce à un certain nombre de transformations, on établit un modèle dynamique hybride dédié aux corps volants flexibles.

### Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'expliciter le modèle dynamique et aérodynamique d'un dirigeable flexible. On présente de manière analytique le phénomène aérodynamique qui agit sur le dirigeable flexible et en particulier sur son enveloppe. On introduit le phénomène de masses ajoutées. L'effet de la flexibilité structurelle de l'enveloppe de l'engin se manifeste dans l'expression de l'énergie cinétique du fluide. A partir de l'expression énergétique de l'air, et à travers l'introduction de la notion de potentiel flexible de fluide (PFF), nous déterminons de manière analytique l'interaction de ce dirigeable avec l'air environnant.

### Chapitre 4

Ce chapitre propose l'élaboration d'une stratégie de commande et de stabilisation du dirigeable flexible dont le modèle a été défini dans le chapitre précédent. On entame la stabilisation asymptotique de la plateforme au voisinage d'un point cible, en utilisant la technique du " Backstepping ", ainsi on expose une loi de commande qui assure l'atténuation des vibrations du dirigeable flexible à travers les commandes du mouvement rigide.

### Chapitre 5

Dans ce chapitre, une deuxième application du modèle eulérien est établie. On présente, dans une première partie, la modélisation du drone hélicoptère quadri-rotor XSF flexible. Cette modélisation est établie en prenant en considération les forces aérodynamiques et les termes gyroscopiques. Dans une deuxième partie, on génère un algorithme de commande permettant de stabiliser l'engin au voisinage d'un point cible. Nous avons adopté pour cela une technique basée sur la méthode des petites perturbations.





---

# Chapitre 2

## Modélisation d'un Engin Volant Flexible

---

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons le modèle dynamique d'un engin volant à composants flexibles. Ces engins volants ont souvent été assimilés à des corps rigides. Cette hypothèse permet de les modéliser de manière simplifiée par la méthode de Newton-Euler [DEG01], [SHA88], [B96]. Ceci a l'avantage de faciliter la mise en oeuvre d'algorithmes de contrôle, de stabilisation ou de génération de trajectoires qui leurs sont dédiés.

On se propose à travers ce chapitre d'étendre la technique de Newton-Euler aux corps déformables, sans pour autant détruire le formalisme général obtenu pour les corps rigides. Cependant, ceci nécessite au préalable une reformulation globale du comportement dynamique d'une structure flexible dans l'espace par une description Lagrangienne, puis l'application d'un certain nombre de transformations et la mise en oeuvre d'une synthèse modale. On réintroduit par la suite des paramètres Euleriens du mouvement pour élaborer ainsi un système dynamique hybride présenté comme une extension du modèle Eulerien dédié aux corps rigides.

L'algorithme développé doit répondre à l'impératif d'optimisation du rapport précision/adaptabilité. Nous avons en effet cherché à intégrer la flexibilité des composants du système, et le couplage inertiel entre la déformation et le mouvement d'ensemble, tout en respectant les contraintes d'adaptabilité en vue d'une application aisée des lois de commande ou de stabilisation.

Dans un esprit de clarification de la démarche, on définira l'algorithme d'abord sur un engin volant rigide avant de l'étendre aux corps flexibles.

## 2.2 Description Eulerienne : Engin Volant Rigide

### 2.2.1 Cinématique

On présente dans un premier temps la description Lagrangienne totale d'un corps dans l'espace ; c'est à dire l'analyse du mouvement par rapport à une référence fixe liée au repère global.

On choisit un repère fixe lié à la terre  $R_0=(O, X_0, Y_0, Z_0)$  ; l'origine du repère peut être choisie d'une manière arbitraire comme par exemple la position initiale sur Terre de l'engin. Ses axes sont choisis comme suit (voir figure 2.1).

◇  $X_0$  : dirigé vers le nord

◇  $Y_0$  : dirigé vers l'Est

◇  $Z_0$  : dirigé vers le bas

On définit aussi un deuxième repère, appelé repère mobile  $R_m=(G, X_m, Y_m, Z_m)$  fixé au centre de gravité de l'engin G ; ses axes sont les principaux axes inertiels, choisis de la manière suivante :

◇  $X_m$  l'axe longitudinal .

◇  $Y_m$  l'axe transversal.

◇  $Z_m$  l'axe normal à  $(X_m, Y_m)$ .

-Un troisième repère intermédiaire parallèle au repère fixe mais lié à l'engin et d'origine G :  $R_a=(G, X_a, Y_a, Z_a)$

Le mouvement de l'engin est décrit par les paramètres suivants :

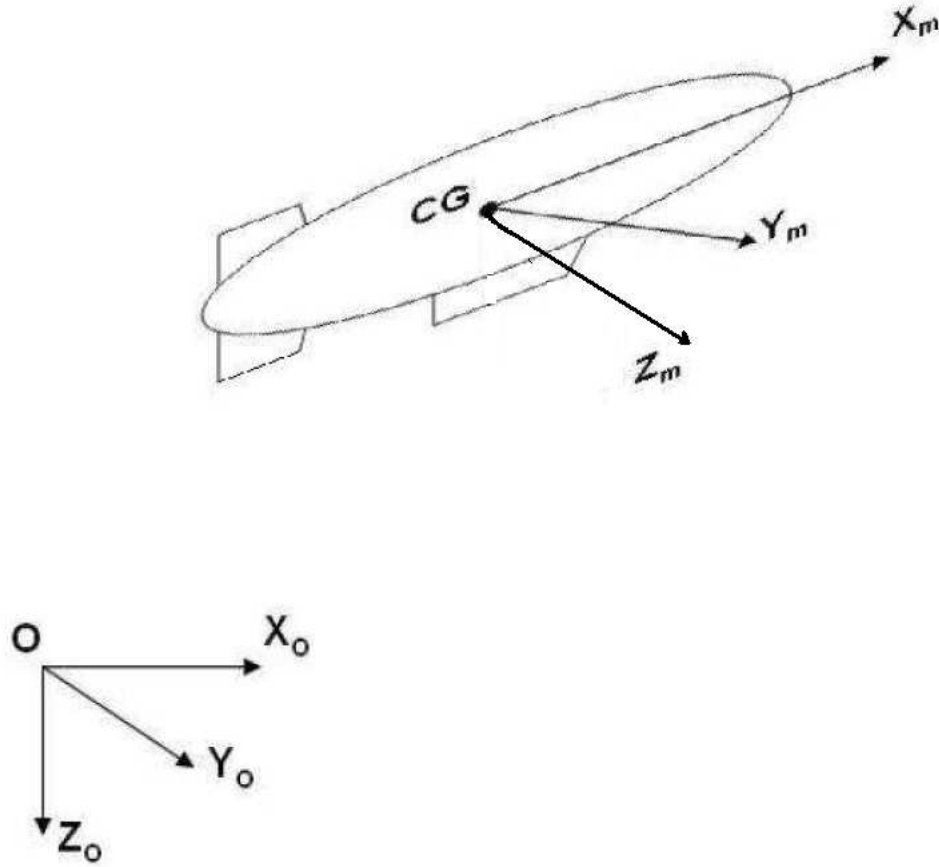


FIGURE 2.1: Définitions des repères

$\eta_1 = [x_0, y_0, z_0]^T$  : matrice colonne position du repère mobile exprimé dans le repère fixe  $R_0$

$\eta_2 = [\phi, \theta, \psi]^T$  : matrice colonne d'orientation du repère mobile exprimé dans le repère fixe  $R_0$  donné par les angles d'Euler.

$\eta = [\eta_1, \eta_2]^T$  matrice colonne attitude par rapport à  $R_0$ .

$\dot{\eta}$  : matrice colonne vitesse par rapport à  $R_0$  exprimé dans  $R_0$ .

$\ddot{\eta}$  : matrice colonne accélération par rapport à  $R_0$  exprimé dans  $R_0$ .

$\nu_1 = [u, v, w]^T$  : matrice colonne vitesse local de translation par rapport à  $R_0$  exprimé dans  $R_m$ .

$\nu_2 = [p, q, r]^T$  : matrice colonne vitesse local de rotation par rapport à  $R_0$  exprimé dans  $R_m$ .

$\nu = [\nu_1, \nu_2]^T$  : matrice colonne vitesse local.

$\tau_1$  : matrice colonne des forces généralisées agissant sur le véhicule.

$\tau_2$  : matrice colonne des moments généralisés agissant sur le véhicule.

$\tau = [\tau_1, \tau_2]$  : forces et moments généralisés agissant sur le véhicule.

### 2.2.1.1 Définitions des matrices de passage

Généralement, une paramétrisation en lacet, tangage et roulis est utilisée pour décrire la position et l'orientation de l'engin dans le repère inertiel  $R_0$ .

La configuration de l'engin est décrite au moyen de trois rotations élémentaires définies par trois angles d'orientation à savoir le lacet  $\psi$ , le tangage  $\theta$  et le roulis  $\phi$  :

$$B(X_o, Y_o, Z_o) \xrightarrow{H_\psi} B(U, Z_1, Z_o) \xrightarrow{H_\theta} B(X_m, Z_1, W) \xrightarrow{H_\phi} B(X_m, Y_m, Z_m) \quad (2.1)$$

Où  $B(X_o, Y_o, Z_o)$  est la base du repère global  $R_o$ ,  $B(X_m, Y_m, Z_m)$  la base du repère local  $R_m$ ,  $B(U, Z_1, Z_o)$  et  $B(X_m, Z_1, W)$  sont les bases intermédiaires et  $H_\psi$ ,  $H_\theta$  et  $H_\phi$  les matrices de rotation orthogonales.

La première rotation d'angle de lacet  $\psi$ , est comptée positivement dans le sens direct par rapport à  $Z_o$  (voir figure 2.2). Elle est représentée par  $H_\psi$  la matrice de passage

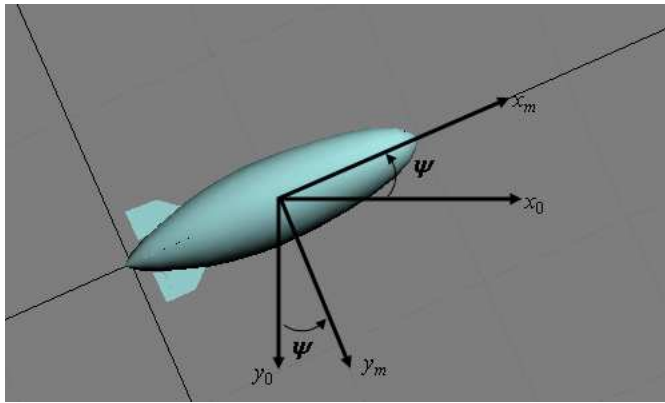


FIGURE 2.2: Lacet

entre les bases  $B(X_o, Y_o, Z_o)$  et  $B(U, Z_1, Z_o)$ .

La deuxième rotation d'angle  $\theta$  décrit le tangage autour de l'axe  $Z_1$  (voir figure 2.3) et donne la matrice de passage  $H_\theta$  entre les bases  $B(U, Z_1, Z_o)$  et  $B(X_m, Z_1, W)$  donnée par :

$$H_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \text{ dans la base } (U, Z_1, Z_o)$$

La troisième rotation d'angle de roulis  $\phi$  s'effectue autour de l'axe  $X_m$  de la nouvelle base (voir fig 2.4) donnée par :

$$H_\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \text{ dans la base } (X_m, Z_1, W)$$

La matrice de rotation qui décrit la transformation entre le repère global  $R_0$  et le repère local  $R_m$  est donnée par :

$$J_1(\eta_2) = H_\psi H_\theta H_\phi$$

par conséquent :

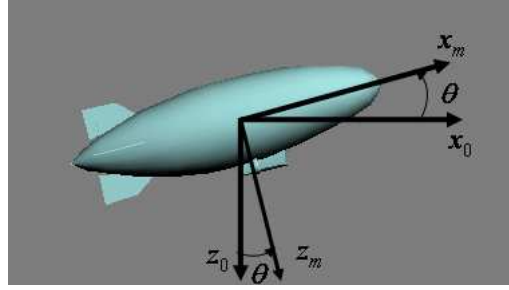


FIGURE 2.3: Tangage

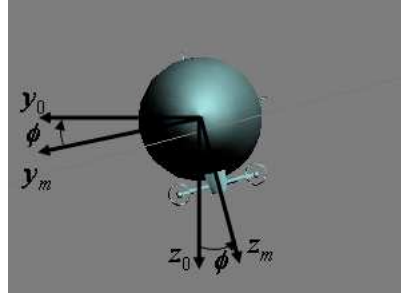


FIGURE 2.4: Roulis

$$J_1(\eta_2) = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \theta & -\sin \psi \cos \phi + \sin \phi \cos \psi \sin \theta & \sin \phi \sin \psi + \sin \theta \cos \psi \cos \phi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \psi \cos \phi + \sin \theta \sin \psi \sin \phi & -\cos \psi \sin \phi + \cos \phi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

telle que  $J_1(\eta_2)^T J_1(\eta_2) = J_1(\eta_2) J_1(\eta_2)^T = Id_3$

### 2.2.1.2 Transformation des vitesses de translation et de rotation

A l'aide de la matrice de passage de changement de base  $J_1(\eta_2)$ , la transformation des composantes des vitesses de translation, par rapport à  $R_0$  est donnée par :

$$\dot{\eta}_1 = J_1(\eta_2) \nu_1 \quad (2.3)$$

Partant de la relation (2.1) la vitesse locale de rotation peut être exprimée ainsi :

$$\nu_2 = \dot{\psi} \mathbf{Z}_0 + \dot{\theta} \mathbf{Z}_1 + \dot{\phi} \mathbf{X}_m \quad (2.4)$$

On peut alors exprimer le vecteur vitesse de rotation dans la base du repère mobile  $B(X_m, Y_m, Z_m)$  ainsi :

$$\nu_2 = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta \\ \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

d'où :

$$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

On désigne par  $J_2(\eta_2)$  la matrice de passage reliant les composantes des vitesses de rotation dans le repère global à celles relatives au repère local.

Soit :

$$J_2(\eta_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$



D'où la deuxième relation cinématique :

$$\dot{\eta}_2 = J_2(\eta_2)\nu_2 \quad (2.8)$$

### Remarque 2.1

On remarque que la paramétrisation par les angles d'Euler fait apparaître une singularité en  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

On retrouve ainsi l'expression cinématique de l'engin volant qui peut s'exprimer comme suit :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3*3} \\ 0_{3*3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix}}_{J(\eta_2)} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

## 2.2.2 Paramètres d'Euler

Afin d'éviter la singularité de l'angle de tangage, on utilisera par la suite la méthode des paramètres d'Euler. Cette technique peut être présentée ainsi : Toute rotation finie dans l'espace peut être exprimée comme une rotation d'angle  $\beta$  autour d'un axe de rotation  $Z$ .

Quatre paramètres définissent ainsi la rotation : les composantes  $Z_x, Z_y, Z_z$ , de l'axe  $Z$  et l'angle  $\beta$  de la rotation autour de cet axe (voir figure 2.5) avec  $|Z| = \sqrt{Z_x^2 + Z_y^2 + Z_z^2} = 1$ ;  $\beta \in [0, \pi]$

Par suite, la matrice de rotation  $J_1(\eta_2)$  peut être exprimée comme suit :  $J_1 = [I_3 + \tilde{Z} \cdot \sin\beta + 2\tilde{Z}^2 \sin^2\frac{\beta}{2}]$  où  $\tilde{Z}$  est la matrice du pré-produit vectoriel associé au vecteur  $Z$ .

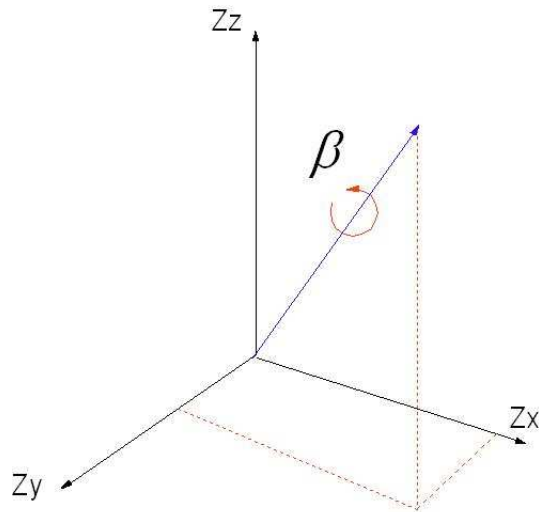


FIGURE 2.5: Rotation autour d'un axe

Les paramètres d'Euler peuvent être définis comme suit :

$$\begin{cases} q_0 = \cos\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ q_1 = Z_x \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ q_2 = Z_y \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \\ q_3 = Z_z \sin\left(\frac{\beta}{2}\right) \end{cases}$$

ces paramètres satisfont la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^3 q_k^2 = q^T q = 1 \text{ avec } q = [q_0 \quad q_1 \quad q_2 \quad q_3]^T$$

Ainsi la matrice de rotation  $J_1(\eta_2)$  peut être exprimée en fonction des paramètres d'Euler sous cette forme [SHA88], [SHA81] :

$$J_{1Q} = \begin{pmatrix} 1 - 2(q_2^2 + q_3^2) & 2(q_1q_2 - q_0q_3) & 2(q_0q_2 + q_1q_3) \\ 2(q_1q_2 + q_0q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_3^2) & 2(q_2q_3 - q_0q_1) \\ 2(q_1q_3 - q_0q_2) & 2(q_0q_1 + q_2q_3) & 1 - 2(q_1^2 + q_2^2) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

la relation entre les paramètres d'Euler et les angles d'Euler est donnée par cette expression :

$$q = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} - \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} + \sin\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} \\ \cos\frac{\phi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\psi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\psi}{2} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

et inversement pour les angles d'Euler on aura :

$$\begin{cases} \phi = \arctang\left(\frac{2(q_0q_1 + q_2q_3)}{1 - 2(q_1^2 + q_2^2)}\right) \\ \theta = \arcsin(2(q_0q_2 - q_3q_1)) \\ \psi = \arctang\left(\frac{2(q_0q_3 + q_1q_2)}{1 - 2(q_1^2 + q_3^2)}\right) \end{cases} \quad (2.12)$$

D'un autre côté, en utilisant les paramètres d'Euler, la matrice  $J_2(\eta_2)$  sera remplacée par une matrice rectangulaire définie ainsi :

$$J_{2Q} = 2 \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

La transformation des vitesses de rotation sera alors donnée par cette expression :

$$\nu_2 = J_{2Q}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.14)$$

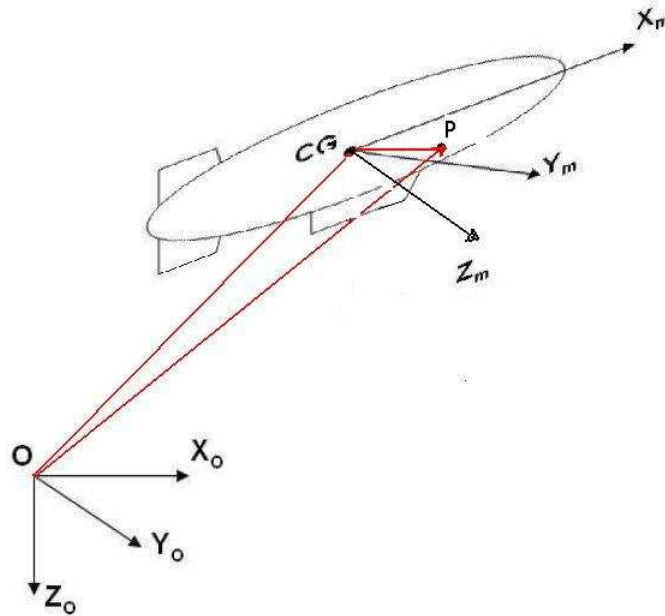


FIGURE 2.6: Définition des vecteurs de position

### 2.2.3 Etude mécanique de l'engin volant

Pour une meilleure clarté du formalisme développé pour le corps flexible, on développe au préalable l'analyse d'un engin volant rigide.

On considère un engin, supposé rigide, de masse  $m$ , auquel nous associons un repère fixe lié à la terre  $R_0=(O, X_0, Y_0, Z_0)$  et un repère mobile  $R_m=(G, X_m, Y_m, Z_m)$ ; notons  $G$  le centre de gravité de l'engin.

Le mouvement de l'engin sera décrit tout d'abord par rapport au repère fixe  $R_0$  puis par rapport au repère mobile  $R_m$ .

## 2.2.4 Description Lagrangienne totale

### 2.2.4.1 Position d'un point arbitraire de l'engin volant

La position d'un point  $p$  arbitraire de l'engin, exprimée dans le repère global, est donnée par la relation vectorielle suivante (voir figure 2.6) :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OG} + \mathbf{GP} \quad (2.15)$$

ou encore :

$$\mathbf{r} = \eta_1 + J_{1Q}\mathbf{u}_o \quad (2.16)$$

où  $\mathbf{u}_o$  est le vecteur position locale du point P et  $J_{1Q}$  est la matrice de rotation entre le repère local et le repère global.

#### Remarque 2.2

Tant que l'hypothèse du corps rigide implique que la distance entre deux points arbitraire du corps reste constante, on peut conclure que la longueur du vecteur  $\mathbf{u}_o$  reste constante et par suite ses composantes sont constantes par rapport au repère local.

### 2.2.4.2 Vitesse d'un point arbitraire P de l'engin volant

En dérivant l'équation 2.15 on retrouve l'expression suivante de la vitesse :

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\eta}_1 + \frac{d(J_{1Q}\mathbf{u}_o)}{dt} \quad (2.17)$$

d'où :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\eta}_1 + \dot{J}_{1Q}u_o + J_{1Q} \underbrace{\dot{\mathbf{u}}_o}_0 \quad (2.18)$$

on aura donc :

$$\dot{r} = \dot{\eta}_1 + \dot{J}_{1Q}u_o \quad (2.19)$$

après calculs, on aura (voir Annexe A (A.5)) :

$$\dot{J}_{1Q}\mathbf{u}_o = J_{1Q}(\nu_2 \wedge u_o) = -J_{1Q}(u_o \wedge \nu_2) = -J_{1Q}\tilde{\mathbf{u}}_o\nu_2 = -J_{1Q}\tilde{u}_o J_2 \dot{\mathbf{q}}$$

avec :

$$\tilde{u}_o = \begin{pmatrix} 0 & u_{o3} & -u_{o2} \\ -u_{o3} & 0 & u_{o1} \\ u_{o2} & -u_{o1} & 0 \end{pmatrix}$$

la matrice antisymétrique du pré-produit vectoriel associée à  $u_o$ .

Le vecteur vitesse s'écrira par la suite ainsi :

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\eta}_1 - J_{1Q}\tilde{u}_o J_{2Q}\dot{\mathbf{q}} \quad (2.20)$$

dans une forme plus compacte on aura :

$$\dot{\mathbf{r}} = \underbrace{[I_3 \quad -J_{1Q}\tilde{u}_o J_{2Q}]}_C \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

ou encore :

$$\dot{\mathbf{r}} = C\dot{\eta} \quad (2.22)$$

avec  $\dot{\eta} = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$  et  $I_3$  la matrice identité.

### 2.2.4.3 Expression de l'énergie cinétique d'un point arbitraire P

L'énergie cinétique de l'engin volant rigide est donnée par cette expression générale :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV \quad (2.23)$$

où :

$\rho$  : la densité volumique.

$V$  : le volume du corps.

$\dot{\mathbf{r}}$  : le vecteur vitesse globale d'un point arbitraire P de l'engin.

En remplaçant la vitesse par son expression dans 2.23, l'énergie cinétique prend la forme suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \int_V \rho (C\dot{\mathbf{r}})^T C\dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T C^T C\dot{\mathbf{r}} dV \quad (2.24)$$

Comme le vecteur des vitesses généralisés  $\dot{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{pmatrix}$  est supposé indépendant de la position et la densité volumique, l'énergie cinétique prend, alors, la forme suivante :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T \left[ \int_V \rho C^T C dV \right] \dot{\mathbf{r}} \quad (2.25)$$

sous une forme plus compacte :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}^T M \dot{\mathbf{r}} \quad (2.26)$$

où M est reconnue comme étant la matrice de masse symétrique et définie comme suit :

$$M = \int_V \rho C^T C dV \quad (2.27)$$

dans une forme plus symbolique la matrice de masse s'écrira :

$$M = \begin{pmatrix} m_{TT} & m_{TR} \\ m_{TR} & m_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.28)$$

où :

$$m_{TT} = \int_V \rho I dV \quad (2.29)$$

est la sous matrice du couplage du mouvement Translation-Translation.

$$m_{TR} = \int_V \rho (-J_{1Q} \tilde{u}_o J_{2Q}) dV = m_{RT} \quad (2.30)$$

est la sous matrice du couplage Translation-Rotation.

et :

$$m_{RR} = \int_V \rho (-J_{1Q} \tilde{u}_o J_{2Q})^T (-J_{1Q} \tilde{u}_o J_{2Q}) dV \quad (2.31)$$

est la sous matrice du couplage Rotation-Rotation.

Le terme  $m_{TT}$ , décrivant le mouvement de translation est invariant par rapport au temps ; alors que les autres sous-blocs de la matrice dépendent des coordonnées généralisées de l'engin. Par conséquent, ces derniers sont fonctions implicites du temps.

### Remarque2.3

En faisant coïncider le centre de gravité de l'engin et le centre du repère mobile on peut considérer dans ce cas que les deux sous-matrices extra-diagonales de M sont



nulles ( $m_{TR}$ ).

D'où la forme simplifiée de M :

$$M = \begin{pmatrix} m_{TT} & 0_{3 \times 4} \\ 0_{4 \times 3} & m_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Et celle de l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2} \dot{\eta}_1^T m_{TT} \dot{\eta}_1 + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T m_{RR} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.33)$$

### 2.2.5 Equations de Lagrange

Comme on est dans une approche Lagrangienne totale et on utilise les coordonnées généralisées du système, on peut appliquer l'équation de Lagrange à l'énergie cinétique donnée par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} \right) - \frac{\partial E_c}{\partial \eta} = \tau^T \quad (2.34)$$

avec  $\tau$  : la matrice colonne des forces et des moments extérieurs généralisés.

Tout d'abord évaluons le premier terme  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} \right)$ ; d'après l'équation 2.31 on aura :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1^T m_{TT} & \dot{\mathbf{q}}^T m_{RR} \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

en dérivant totalement par rapport au temps on aura :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}}\right) = \left( \ddot{\eta}_1^T m_{TT} \quad (\ddot{q}^T m_{RR} + \dot{q}^T \dot{m}_{RR}) \right) \quad (2.36)$$

Et on pourra vérifier (Annexe A (A.3 et A.4)) les deux relations suivantes :

$$\dot{J}_{2Q} \dot{\mathbf{q}} = 0 \quad (2.37)$$

$$\dot{J}_{2Q} \mathbf{q} = -J_{2Q} \dot{\mathbf{q}} \quad (2.38)$$

D'autre part, l'inertie  $m_{RR}$  est exprimée dans le repère fixe  $R_0$ . Si on désigne par  $I_{RR}$  la matrice d'inertie dans le repère mobile  $R_m$ , et qui est constante, on aura la relation suivante :

$$m_{RR} = (J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} \quad (2.39)$$

En utilisant les équations 2.32, 2.35 et 2.36 et en remplaçant  $m_{RR}$  par son expression 2.37 on aura :

$$\dot{\mathbf{q}}^T \widehat{\dot{m}_{RR}} = \nu_2^T I_{RR} \dot{J}_{2Q} \quad (2.40)$$

en substituant l'équation précédente dans l'équation 2.33 on aura :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_c}{\partial \dot{\eta}} \right) = \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1^T m_{TT} & (\ddot{\mathbf{q}}^T m_{RR} + \nu_2^T I_{RR} \dot{J}_{2Q}) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Le deuxième terme de l'équation de Lagrange, exprimant la dérivée de l'énergie cinétique par rapport au vecteur coordonnées généralisées est :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{q}^T m_{RR} \dot{q}) = \begin{pmatrix} 0_3^T & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} (\dot{\mathbf{q}}^T m_{RR} \dot{q}) \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

où  $0_3^T$  est le vecteur nul à trois dimensions.

En utilisant l'équation 2.37 on a :

$$\frac{\partial E_c}{\partial \eta} = \begin{pmatrix} 0_3^T & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} [\dot{q}^T (J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} \dot{q}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_3^T & -\nu_2^T I_{RR} \dot{J}_{2Q} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

En reportant les précédents résultats dans l'équation 2.32 :

$$\begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1^T m_{TT} & (\ddot{\mathbf{q}}^T m_{RR} + 2\nu_2^T I_{RR} \dot{J}_{2Q}) \end{pmatrix} = [\tau_1^T \tau_2^T]^T \quad (2.44)$$

L'équation 5.6 peut être écrite comme deux équations matricielles découplées ; la première équation matricielle est associée à la translation du corps et la deuxième à la rotation d'où :

$$m_{TT} \ddot{\eta}_1 = \tau_1 \quad (2.45)$$

$$m_{RR} \ddot{\mathbf{q}} = \tau_2 - 2\dot{J}_{2Q}^T I_{RR} \nu_2 \quad (2.46)$$

ou sous forme compacte :

$$M\ddot{\bar{\eta}} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 - 2\dot{J}_{2Q}^T I_{RR}\nu_2 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

$$\text{avec } \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ q \end{pmatrix}$$

### 2.2.5.1 Description Eulerienne

Dans cette partie, on va définir le mouvement de l'engin volant rigide, à partir des variables Euleriennes, pour présenter à la fin la corrélation entre le paramétrage Lagrangien et Eulerien.

Tout d'abord exprimons  $\ddot{\eta}_1$  dans le repère mobile  $R_m$ ; on sait que  $\eta_1 = \mathbf{OG}$  (voir figure 2.5). On a pu démontrer qu'en considérant le centre de gravité du repère G différent du centre du repère fixe, on a :

$$\frac{d^2\mathbf{OG}}{dt^2}|_{R_0} = \frac{d\mathbf{OG}}{dt}|_{R_m} + J_{1Q}\nu_2 \wedge \frac{d\mathbf{OG}}{dt}|_{R_0} \quad (2.48)$$

Par conséquent :  $\ddot{\eta}_1 = J_{1Q}\dot{\nu}_1 + J_{1Q}\nu_2 \wedge \nu_1$ .

Pour le passage Eulerien, tout d'abord considérons l'équation 2.46

$$\tau_2 - 2(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR}\nu_2 = \underbrace{(J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q}}_{m_{RR}} \ddot{\mathbf{q}}$$

en multipliant les deux termes de l'équation ci-dessus par  $J_{2Q}$  on aura :

$$J_{2Q}\tau_2 - 2J_{2Q}(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR}\nu_2 = J_{2Q}(J_{2Q})^T I_{RR}J_{2Q}\ddot{\mathbf{q}} \quad (2.49)$$

On démontre que le premier terme du second membre (voir Annexe A (A.1)) :

$$J_{2Q}(J_{2Q})^T = 4I_d \quad (2.50)$$

par conséquent :

$$4I_{RR}J_{2Q}\ddot{\mathbf{q}} = J_{2Q}\tau_2 - 2J_{2Q}\dot{J}_{2Q}^T I_{RR}\nu_2 \quad (2.51)$$

D'autre part, en dérivant l'équation 2.14 et en utilisant l'égalité 2.38 on aura :

$$\dot{\nu}_2 = J_{2Q}\ddot{\mathbf{q}} \quad (2.52)$$

De plus (voir Annexe A (A.2)) :

$$2J_{2Q}\dot{J}_{2Q}^T I_{RR}\nu_2 = 4\tilde{\nu}_2 I_{RR}\nu_2 = 4\nu_2 \wedge I_{RR}\nu_2 \quad (2.53)$$

avec  $\tilde{\nu}_2$  est la matrice du préproduit vectoriel associé à  $\nu_2$ .

En remplaçant les équations 2.46, 2.48 et 2.50 dans l'expression du mouvement de rotation on obtient :

$$I_{RR}\dot{\nu}_2 = Z_R - \nu_2 \wedge (I_{RR}\nu_2) \quad (2.54)$$

Le vecteur  $\mathbf{Z}_R$  représente la somme des moments appliqués sur l'engin rigide ; et il est donné par :

$$\mathbf{Z}_R = \frac{1}{4} J_{2Q}^{-1} \tau_2 \quad (2.55)$$

### 2.2.5.2 Equation matricielle de Newton-Euler

Comme synthèse de l'étude précédente, on voit que le mouvement est gouverné par six équations différentielles, pouvant être écrites par les deux équations matricielles suivantes :

$$m_{TT} \dot{\nu}_1 = J_{1Q}^T \tau_1 - m_{TT} \nu_2 \wedge \nu_1 \quad (2.56)$$

$$I_{RR} \dot{\nu}_2 = \mathbf{Z}_R - \nu_2 \wedge (I_{RR} \nu_2) \quad (2.57)$$

on retrouve le système classique suivant :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 \\ 0 & I_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1Q}^T \tau_1 - m_{TT} \nu_2 \wedge \nu_1 \\ \mathbf{Z}_R - \nu_2 \wedge (I_{RR} \nu_2) \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

d'où :

$$M_E \dot{\nu} = \bar{\tau} + \mathbf{Q}_{\nu E} \quad (2.59)$$

$M_E$  : matrice de masse relative à la description Eulerienne.

$\bar{\tau}$  le vecteur des forces et moments généralisés.

$\mathbf{Q}_{vE}$  le vecteur des termes gyroscopiques et de coriolis.

On a ainsi défini le parallèle entre une description Lagrangienne 2.44 et une description Eulerienne 2.56 d'un engin volant rigide. Ce parallèle nous aidera à mieux comprendre l'intégration de la flexibilité du corps dans un modèle Eulerien.

## 2.3 Description Eulerienne d'un corps flexible

Pour le cas flexible, l'analyse du mouvement sera comparable au cas de l'engin volant rigide, moyennant le rajout de d.d.l supplémentaires. En effet la flexibilité du corps sera représentée par des modes de déformation, issues de la décomposition de Rayleigh-Ritz [SHA88], [CN02], [PAS91], [B96]. La représentation de la flexibilité ne peut être définie de manière adéquate directement sur le modèle Eulerien, on a donc décidé de l'exprimer au travers d'une description Lagrangienne et de l'inclure par la suite dans le modèle Eulerien grâce au parallèle établi en 2.2.

### 2.3.1 Position d'un point arbitraire d'un engin volant flexible

La position d'un point du solide est donnée par (voir figure 2.6) :

$$\mathbf{OP}' = \mathbf{OG} + \mathbf{GP} + \mathbf{PP}' \quad (2.60)$$

sachant que  $P'$  est un point de la configuration déformée ; comme dans le cas rigide on va commencer par une description Lagrangienne totale, par conséquent tous les paramètres dynamiques seront exprimés dans le repère fixe  $R_o$ .

D'où :

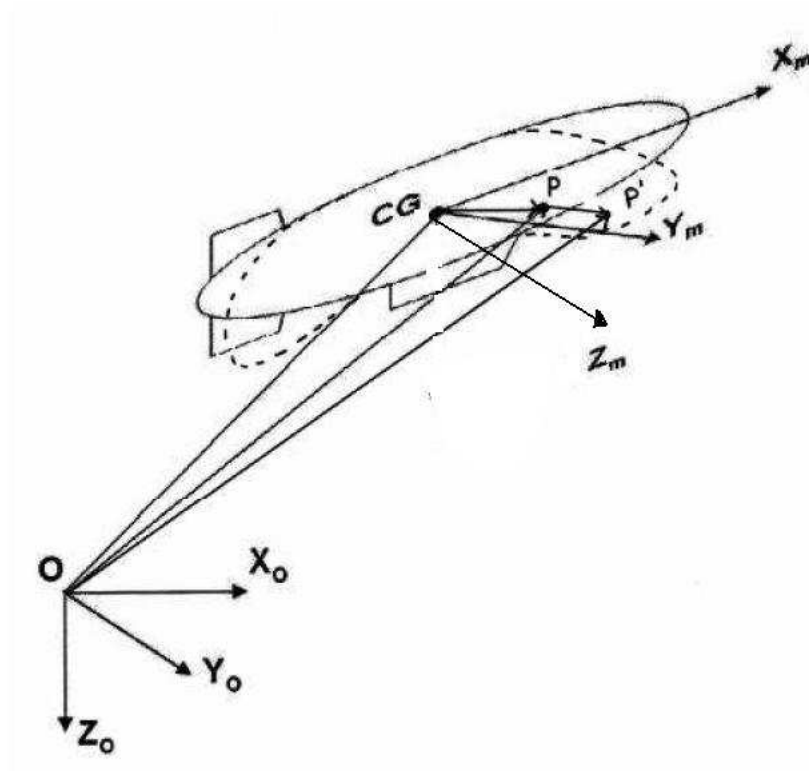


FIGURE 2.7: Définition des vecteurs de position

$$r = \eta_1 + J_{1Q} \underbrace{(u_o + u_d)}_U \quad (2.61)$$

d'où :

$$r = \eta_1 + J_{1Q}U \quad (2.62)$$

avec  $J_{1Q}$  est la matrice de rotation entre le repère fixe et le repère mobile.

### 2.3.2 Vitesse d'un point arbitraire

La vitesse d'un point arbitraire P' de l'engin volant flexible est obtenue en dérivant la relation 2.62 totalement par rapport au temps on aura :



$$\dot{r} = \dot{\eta}_1 + \frac{d(J_{1Q}U)}{dt} \quad (2.63)$$

soit :

$$\dot{q} = \dot{\eta}_1 + \dot{J}_{1Q}U + J_{1Q}\dot{U} = \dot{\eta}_1 + \dot{J}_{1Q}U + J_{1Q}(\underbrace{\dot{u}_o}_0 + \dot{u}_d) \quad (2.64)$$

L'expression de la vitesse sera :

$$\dot{r} = \dot{\eta}_1 + \dot{J}_{1Q}U + J_{1Q}\dot{u}_d \quad (2.65)$$

Sachant que (voir Annexe A) :

$$\dot{J}_{1Q}U = J_{1Q}(\tilde{\nu}_2 U) = -J_{1Q}(U \wedge \nu_2) = -J_{1Q}\tilde{U}\nu_2 = -J_{1Q}\tilde{U}J_{2Q}\dot{q}$$

par conséquent la vitesse d'un point de l'engin sera :

$$\dot{r} = \dot{\eta}_1 - J_{1Q}\tilde{U}J_{2Q}\dot{q} + J_{1Q}\dot{u}_d \quad (2.66)$$

Le déplacement dû à la déformation  $\mathbf{u}_d = \mathbf{u}_d(s, t)$  est fonction de l'espace (s) et du temps (t). On utilisera une analyse modale pour le définir. L'analyse modale consiste à déterminer les caractéristiques vibratoires, fréquences  $\lambda_i$  et les formes  $\vec{\mathbf{X}}_i$  des modes propres de vibration obtenus en imposant certaines conditions aux limites au niveau de l'arceau central du dirigeable. Cet arceau est supposé indéformable. La base des  $\mathbf{X}(\vec{\mathbf{s}})_i$  permet de décomposer les mouvements flexibles du dirigeable et d'introduire les amplitudes modales associées. On remarque que la solution ne vérifie évidemment pas à priori

les mêmes conditions aux limites que les modes : aussi, en toute rigueur elle ne peut être représentée sur cette base de modes propres. Cependant par approximation [PAS91] on peut utiliser un nombre limité de ces modes représentant une bonne proportion de sa base modale. Pour une meilleure précision de la solution, l'effet statique des modes négligés peut être introduit au niveau de l'arceau [Gib88].

Dans notre cas on a utilisé des modes "encastré-libre". L'encastrement se situe au niveau de l'arceau central. Le déplacement dû à la déformation s'écrira alors ainsi :

$$\mathbf{u}_d(s, t) = \sum_{i=1}^n Y_d^i(t) \mathbf{X}_i(s) \quad (2.67)$$

où n représente le nombre de modes de déformations choisis. Notre choix sera de deux modes de déformation (n=2) dans toute la suite.

$\mathbf{X}^i$  représente le  $i^{me}$  mode propre du solide

$Y_d^i$  est l'amplitude modale associée

cette écriture peut être condensée de la manière suivante :

$$u_d = S \overline{Y}_d \quad (2.68)$$

où S représente les deux modes retenus et  $\overline{Y}_d$  la matrice colonne formée par les différents  $Y_d^i$ .

On désigne par :

$$\overline{\eta} = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ q \\ \overline{Y}_d \end{pmatrix} \text{ la position d'un point arbitraire de l'engin volant flexible.}$$

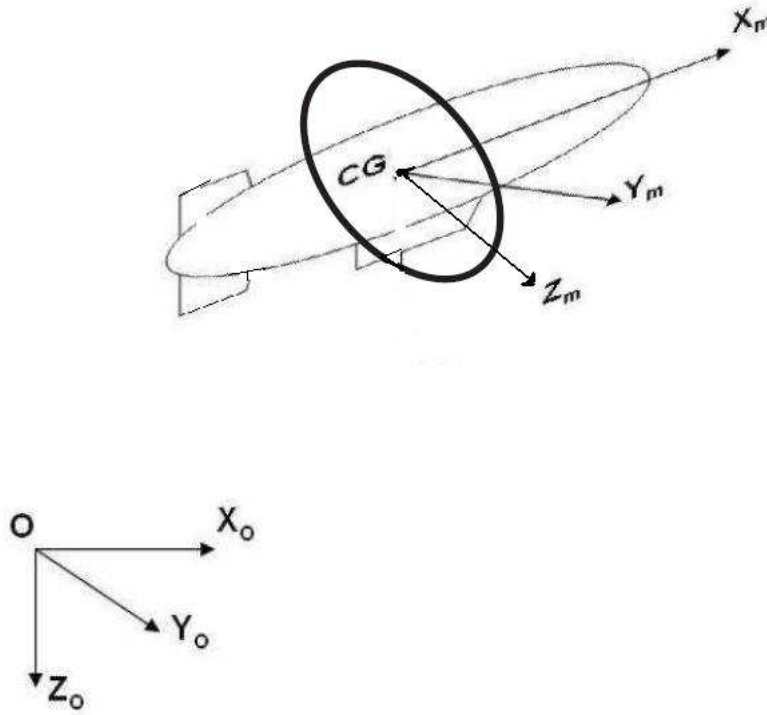


FIGURE 2.8: Dirigeable+Arceau

Les modes de déformation  $S$  étant constants par rapport au temps, on peut donc déduire de la relation 2.65 que :

$$\dot{u}_d = S\dot{\bar{Y}}_d \quad (2.69)$$

d'où la vitesse d'un point du solide :

$$\dot{r} = \dot{\eta}_1 - J_{1Q}\tilde{U}J_{2Q}\dot{q} + J_{1Q}S\dot{\bar{Y}}_d \quad (2.70)$$

en utilisant une forme plus condensée comme pour le cas rigide on aura :

$$\dot{r} = \underbrace{[I - J_{1Q} \tilde{U} J_{2Q}^{-1} J_{1Q} S]}_C \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{q} \\ \dot{\bar{Y}}_d \end{pmatrix} \quad (2.71)$$

avec I :la matrice identité.

et  $\dot{\bar{\eta}} = \begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{q} \\ \dot{\bar{Y}}_d \end{pmatrix}$  le vecteur vitesse totale d'un point arbitraire de l'engin volant flexible.

D'où l'expression compacte de la vitesse :

$$\dot{r} = C \dot{\bar{\eta}} \quad (2.72)$$

La forme de la vitesse retrouvée dans la relation précédente sera utilisée pour le développement de l'énergie cinétique du corps déformable.

### 2.3.3 Expression de l'énergie cinétique de l'engin

L'énergie cinétique de l'engin volant flexible peut être définie ainsi :

$$E_{cd} = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{r}^T \dot{r} dV \quad (2.73)$$

où  $\dot{r}$  est le vecteur vitesse globale d'un point arbitraire P' d'un engin volant.

En utilisant l'expression du vecteur vitesse de l'équation 2.69, l'énergie cinétique s'exprime comme suit :

$$E_{cd} = \frac{1}{2} \int_V \rho (C\dot{\eta})^T C\dot{\eta} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\eta}^T C^T C\dot{\eta} dV \quad (2.74)$$

dans une forme plus compacte :

$$E_{cd} = \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \quad (2.75)$$

où  $M$  est reconnue comme étant la matrice de masse symétrique et est définie comme suit :

$$M = \begin{pmatrix} m_{TT} & m_{TR} & m_{TD} \\ m_{TR}^T & m_{RR} & m_{RD} \\ m_{TD}^T & m_{RD} & m_{DD} \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

dont les sous matrices sont :

$m_{TT} = \int_V \rho I dV$	$m_{TR} = - \int_V \rho J_{1Q} \tilde{U} J_{2Q} dV$
$m_{TD} = J_{1Q} \int_V \rho S dV$	$m_{RR} = \int_V \rho (J_{2Q})^T \tilde{U}^T \tilde{U} (J_{2Q}) dV$
$m_{RD} = \int_V \rho (J_{2Q})^T \tilde{U}^T J_{1Q} S dV$	$m_{DD} = \int_V \rho S^T S dV$

Il est clair que les deux sous-matrices  $m_{TT}$  et  $m_{DD}$  associées respectivement à la translation et aux coordonnées élastiques sont constantes. Les autres matrices dépendent des coordonnées généralisées du système, et en conséquence elles sont fonctions implicites du temps.

### Remarque 2.3

En faisant coïncider le centre de gravité de l'engin et le centre du repère mobile, et en supposant que la position de ce dernier ne varie quasiment pas dans le repère local en présence des petites déformations, on peut considérer dans ce cas que les deux sous-matrices sur la diagonale de  $M$  sont nulles ( $m_{TR}$ ).

Par conséquent la matrice de masse sera :

$$M = \begin{pmatrix} m_{TT} & 0 & m_{TD}^T \\ 0 & m_{RR} & m_{RD} \\ m_{TD}^T & m_{RD}^T & m_{DD} \end{pmatrix} \quad (2.77)$$

en remplaçant  $M$  par la relation 2.74, l'énergie cinétique sera :

$$E_{cd} = \frac{1}{2}(\dot{\eta}_1^T m_{TT} \dot{\eta}_1 + 2\dot{\eta}_1^T m_{TD} \dot{\bar{Y}}_d + \dot{q}^T m_{RR} \dot{q} + 2\dot{q}^T m_{RD} \dot{\bar{Y}}_d + \dot{\bar{Y}}_d^T m_{DD} \dot{\bar{Y}}_d) \quad (2.78)$$

### 2.3.4 Equation de Lagrange

Similairement aux développements réalisés dans le cas rigide, on utilisera les équations de Lagrange, que l'on applique à l'énergie cinétique, du solide comme suit :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \dot{\eta}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \eta} \right)^T = \tau' \quad (2.79)$$

et le vecteur  $\tau'$  est donné par

$$\tau' = -K\bar{\eta} + \tau \quad (2.80)$$

$\tau$  est la matrice colonne des forces et moments extérieurs généralisés. Elle est donnée par :

$$\tau = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et  $K$  est la matrice de raideur, donnée par :

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{DD} \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

En utilisant l'écriture de l'énergie cinétique de l'équation 2.75 on aura :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \dot{\eta}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \eta} \right)^T = M\ddot{\eta} + \dot{M}\dot{\eta} - \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) \right]^T \quad (2.82)$$

posons la quantité  $-\dot{M}\dot{\eta} + \left[ \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) \right]^T = Q_v$  avec  $Q_v$  est le vecteur vitesse quadratique qui résulte de la dérivation de l'énergie cinétique par rapport au temps et par rapport aux coordonnées généralisées du corps.

Ce terme contient les forces gyroscopiques et de Coriolis.

La relation 2.79 devient :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \dot{\eta}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_{cd}}{\partial \eta} \right)^T = M\ddot{\eta} - Q_v \quad (2.83)$$

L'équation dynamique du mouvement est donnée sous une forme compacte ainsi :

$$M\ddot{\bar{\eta}} + K\bar{\eta} = \tau + Q_v \quad (2.84)$$

ou sous forme développée comme suit :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 & m_{TD} \\ 0 & m_{RR} & m_{RD} \\ m_{TD}^T & m_{RD}^T & m_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\bar{\eta}}_1 \\ \ddot{\bar{q}} \\ \ddot{\bar{Y}}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\eta}_1 \\ \bar{q} \\ \bar{Y}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_{vT} \\ Q_{vq} \\ Q_{vd} \end{pmatrix} \quad (2.85)$$

d'où

$$M\ddot{\bar{\eta}} = \tau - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{DD}\bar{Y}_d \end{pmatrix} + Q_v \quad (2.86)$$

où  $Q_v$  peut être exprimé sous forme développée ainsi (voir Annexe A) :

$$Q_{vT} = -\dot{\eta}_2 J_{1Q\eta_2} \bar{S} \quad (2.87)$$

$$Q_{vq} = -2(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 - (\dot{J}_{2Q})^T I_{RD} \dot{\bar{Y}}_d \quad (2.88)$$

$$Q_{vd} = -(\dot{J}_{2Q} I_{TD})^T \dot{\eta}_1 + I_{RD}^T \dot{J}_{2Q} \dot{q} \quad (2.89)$$



### 2.3.5 Description Eulerienne

#### Remarque 2.4

On établit ici le parallèle avec la description Eulerienne en mettant en évidence l'effet de la flexibilité et le couplage existant avec le mouvement d'ensemble.

Partant de l'équation 2.82, et en remplaçant  $Q_{vT}$  par son expression on a :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & m_{RR} & m_{RD} \\ 0 & m_{RD}^T & m_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{q} \\ \ddot{\bar{Y}}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ -K_{dd}\bar{Y}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2(J_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 - (J_{2Q})^T I_{RD} \dot{\bar{Y}}_d \\ I_{RD}^T J_{2Q} \dot{q} \end{pmatrix} \quad (2.90)$$

La transformation de cette équation par l'introduction de paramètres Euleriens donne :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & (J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} & (J_{2Q})^T I_{RD} \\ 0 & I_{RD}^T J_{2Q} & m_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{q} \\ \ddot{\bar{Y}}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ -K_{dd}\bar{Y}_d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2(J_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 - (J_{2Q})^T I_{RD} \dot{\bar{Y}}_d \\ I_{RD}^T J_{2Q} \dot{q} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

On obtient ainsi les trois équations suivantes :

- pour la translation :

$$m_{TT}\ddot{\eta}_1 = \tau_1 \quad (2.92)$$

- pour la rotation :

$$(J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} \ddot{q} = \tau_2 - 2(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 - (\dot{J}_{2Q})^T I_{RD} \dot{\overline{Y}}_d - (J_{2Q})^T I_{RD} \ddot{\overline{Y}}_d \quad (2.93)$$

- pour la déformation :

$$m_{DD} \ddot{\overline{Y}}_d = -K_{dd} \overline{Y}_d + I_{RD}^T J_{2Q} \dot{q} - I_{RD}^T J_{2Q} \ddot{q} \quad (2.94)$$

### Remarque 2.5

On pose  $I_{TT} = m_{TT}$  et  $I_{DD} = m_{DD}$

La transformation de ces relations par le biais des variables euleriennes nous permet d'établir les équations suivantes :

L'équation 2.92 se transforme ainsi

$$I_{TT} \dot{\nu}_1 = J_{1Q}^T \tau_1 - I_{TT} (\nu_2 \wedge \nu_1) \quad (2.95)$$

• En ce qui concerne les variables d'orientation. Afin d'utiliser les variables euleriennes, on utilise les matrices de rotation entre les deux repères.

On obtient l'expression suivante (voir Annexe A) :

$$I_{RR} \dot{\nu}_2 = \frac{1}{4} J_{2Q} \tau_2 - \nu_2 \wedge (I_{RR} \nu_2) - \nu_2 \wedge (I_{RD} \dot{\overline{Y}}_d) - I_{RD} \ddot{\overline{Y}}_d \quad (2.96)$$

- Pour la déformation on a :

$$I_{DD}\ddot{\overline{Y}}_d = -K_{dd}\overline{Y}_d + I_{RD}^T J_{2Q}\dot{q} - I_{RD}^T J_{2Q}\ddot{q} \quad (2.97)$$

On remarque que la flexibilité est définie en fonction de la vitesse de rotation du corps rigide. Ceci met en évidence le couplage inertiel entre le mouvement de corps rigide et la déformation.

L'écriture matricielle de ces équations donne :

$$\begin{pmatrix} I_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & I_{RR} & I_{RD} \\ 0 & I_{RD}^T & I_{DD} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \ddot{\overline{Y}}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \frac{1}{4}J_{2Q}\tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -I_{TT}(q \wedge \nu_1) \\ -\nu_2 \wedge (I_{RR}\nu_2) - \nu_2 \wedge (I_{RD}\dot{\overline{Y}}_d) \\ -K_{dd}\overline{Y}_d + I_{RD}^T J_{2Q}\dot{q} \end{pmatrix} \quad (2.98)$$

On obtient ainsi un système dynamique analogue aux équations de Newton-Euler régissant les corps rigides. Cette technique nous a permis d'intégrer les termes de flexibilité dans le modèle dynamique Eulerien, pour obtenir ainsi un système dynamique au nombre de d.d.l relativement réduit pouvant être aisément utilisé pour la commande ou la stabilisation.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, on a décrit le comportement dynamique d'un engin volant flexible par une méthode eulerienne comme une extension de l'algorithme de Newton-Euler appliqué aux corps rigides.

La méthodologie utilisée repose sur le parallèle réalisé entre une description Lagrangienne totale, souvent utilisée pour décrire les corps flexibles dans l'espace, et une description Eulerienne.

L'exploitation des possibilités offertes par les paramètres d'Euler pour décrire les rotations des corps dans l'espace a largement facilité la tâche. La richesse de la modélisation

adoptée a notamment permis de faire intervenir le comportement flexible d'un engin volant de manière aisée avec un minimum de degrés de liberté (8 en tout), tout en faisant apparaître le couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et la déformation du corps.

L'impératif de sauvegarde de la légèreté et la portabilité de l'algorithme Eulerien a été respecté. Le traitement numérique des équations a été pour sa part facilité par la bonne adaptation du conditionnement des systèmes d'équations induit par la méthode.



---

# Chapitre 3

## Application à la Modélisation d'un Dirigeable Flexible : Interaction Fluides-Structures

---

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous proposons d'expliciter le modèle dynamique et aérodynamique d'un dirigeable flexible pour nous pencher par la suite sur l'interaction de celui-ci avec l'air environnant.

En nous restreignons au cas des petites déformations, nous avons tout d'abord, au travers d'un bref rappel, précisé les équations du mouvement d'un dirigeable flexible dans l'espace.

Dans une deuxième partie, nous présentons de manière analytique un phénomène aérodynamique qui agit sur le dirigeable et en particulier sur son enveloppe, et connu sous le nom de phénomène de masses ajoutées. Les fluides en écoulement, au contact des structures, induisent des grandeurs ajoutées. L'effet de ces fluides est de rajouter de la masse, et éventuellement de l'amortissement. Le comportement des structures telles que le dirigeable est influencé par cette interaction fluide-structure, aussi bien dans le cas rigide que dans le cas flexible.

Le phénomène de la masses ajoutées est mis en évidence essentiellement lorsque la masse spécifique d'un corps est proche du celle du fluide dans lequel il se meut. Dans

la plupart des applications en robotique, notamment les engins volants (avions, hélicoptères...); cette masse est assez petite devant celle de ces engins, ce qui permet de la négliger.

En revanche, la carène du dirigeable est gonflée par un gaz plus léger que l'air, en l'occurrence l'hélium ceci induit que la masse du dirigeable est comparable avec celle de la masse du fluide déplacé.

Dans le cas des mouvements de déformation, l'effet inertiel est sans doute le plus immédiatement sensible.

Il correspond simplement au fait que le mouvement de vibration de la carène entraîne une certaine masse du fluide, ce qui augmente l'énergie cinétique du système couplé fluide-structure.

Aucune étude analytique n'a traité le problème des masses ajoutées issues du mouvement d'un corps déformable en grands déplacements dans l'espace. L'originalité de ce travail consiste donc à élaborer un modèle analytique permettant de définir les masses ajoutées d'un corps massif en grands déplacements et petites déformations dans l'espace. La méthode se base sur la définition de l'énergie du fluide et le calcul du potentiel flexible des vitesses du fluide sous l'effet du mouvement d'ensemble ainsi que la déformation du dirigeable.

## 3.2 Equations de mouvement du dirigeable

### 3.2.1 Dirigeable rigide

Nous appliquons ici la méthodologie Eulerienne présentée dans le chapitre précédent. Les équations de mouvement du dirigeable rigide peuvent être exprimées d'une manière compacte sous la forme suivante :

$$M_E \dot{\nu} = \tau + \mathbf{Q}_v \quad (3.1)$$

où

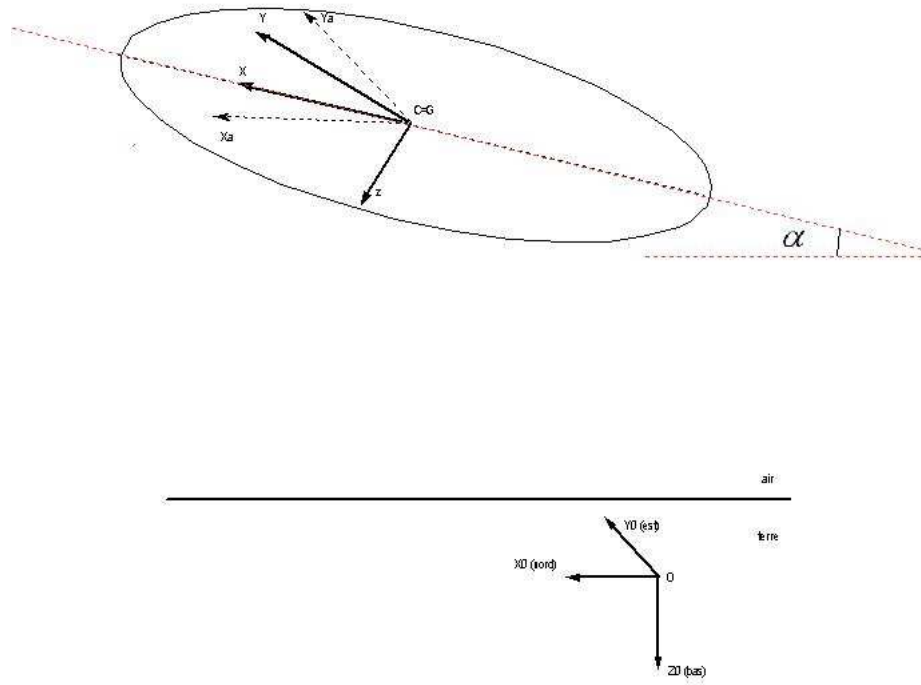


FIGURE 3.1: Présentation des repères du dirigeable

-  $M_E = \begin{pmatrix} mI_3 & 0 \\ 0 & I_{RR} \end{pmatrix}$ , la matrice de masse, symétrique définie positive du dirigeable rigide.

-  $\tau$ , est le vecteur des forces et moments extérieurs qui s'appliquent sur le dirigeable, et que nous détaillons dans la sous-section suivante.

-  $Q_v$ , est le vecteur de Coriolis et de forces centrifuges s'exerçant sur le véhicule.

$$- \nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$$

En conséquence, la symétrie par rapport au plan (XZ) conduit aux simplifications suivantes :



$$I_{RR} = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & I_{zx} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

où  $I_{RR}$  est la matrice d'inertie du dirigeable.

### 3.2.1.1 Synthèse des Efforts Appliqués sur le dirigeable

Le dirigeable présenté ci-dessus est soumis aux hypothèses suivantes :

- Le dirigeable est supposé de masse constante. L'appareil étant à motorisation électrique cela ne pose pas de problème. Par contre si on envisage la présence de ballonets au sein même du dirigeable, le mouvement d'air dans ces ballonnets modifie la répartition de la masse de l'appareil. Notons aussi que l'hélium contenu dans l'enveloppe est soumis à la loi de la thermodynamique.
- Les masses ajoutées à l'intérieur de l'enveloppe, induites par les mouvements d'hélium, sont négligées.
- Le centre de la poussée d'Archimède est supposé confondu avec le centre volumique de l'enveloppe.
- L'air est supposé être au repos. Les parties d'air perturbées par le dirigeable ne concernent que les zones avoisinantes au dirigeable.

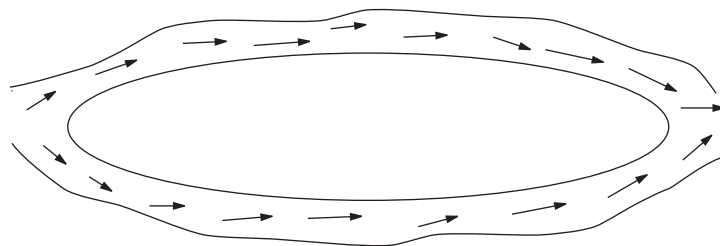


FIGURE 3.2: Interaction air-structure

L'effet d'une rafale de vent peut être inclus au modèle comme une perturbation. Par suite, une première synthèse du modèle dynamique du dirigeable peut être donnée en regroupant tous les efforts et moments :

- $\tau_a$  : le vecteur des forces et moments aérodynamiques (portance et traînée).
- $\tau_{prop}$  : le vecteur des forces et moments des actionneurs ou de propulsion.
- $\tau_g$  le vecteur force de la gravité du dirigeable.

### 3.2.1.2 Hypothèses sur le fluide : l'air avoisinant le dirigeable

Nous présentons ici l'influence de l'air ambiant sur le comportement général du mouvement du dirigeable. Nous considérons un modèle dynamique simple de l'action de l'air sur un corps.

Le corps est immergé dans un fluide parfait (l'air). On admettra les hypothèses suivantes :

- L'air est considéré comme un fluide incompressible, sa masse volumique  $\rho_{air} = C^{te}$ .
- Il obéit à l'équation de Laplace :

$$\Delta\phi = 0 \quad \text{dans tout le domaine du fluide.} \quad (3.3)$$

où  $\phi$  est le potentiel des vitesses du fluide.

- l'écoulement est irrotationnel ; par conséquent :

$$\nabla \wedge \mathbf{u}_f = 0 \quad (3.4)$$

La vitesse de l'air environnant est exprimée en fonction du potentiel des vitesses par :

$$\mathbf{u}_f = \nabla\phi \quad (3.5)$$

En utilisant les conditions aux limites, de glissement sur S surface extérieure du corps, on retrouve la relation :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{u}_n \quad \text{sur } S \quad (3.6)$$

où S est la carène ou la surface d'interaction, et  $\mathbf{n}$  étant le vecteur normal extérieur à S,

$$\phi(y, z) \longrightarrow 0 \quad \text{quand } y \longrightarrow \infty \quad \text{ou quand } z \longrightarrow \infty \quad (3.7)$$

### 3.2.1.3 Énergie Cinétique de l'air mis en mouvement

Considérons un dirigeable rigide en mouvement quelconque, comprenant des translations et des rotations, et dont le vecteur vitesse local est  $\nu = (u, v, w, p, q, r)^T$ .

$$E_a = \frac{1}{2} \nu^T M_a \nu = -\rho \int \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.8)$$

Afin de calculer l'énergie cinétique du fluide et d'en extraire les termes de la matrice de masse ajoutée, on doit déterminer le potentiel des vitesses du fluide en mouvement.

### 3.2.1.4 Calcul du potentiel

Dans la suite de l'étude de ce problème, il convient de suivre le modèle Eulerien introduit au Chapitre 2. Si le mouvement du dirigeable à un instant t est défini par les vitesses angulaires (p,q,r) et les vitesses de translation (u,v,w), on peut écrire le potentiel des vitesses du fluide pour un mouvement de corps rigide ainsi [LAM45] :

$$\phi = \phi_{rig} = u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3 \quad (3.9)$$

On note  $\phi_{rig}$  le potentiel des vitesses du mouvement rigide.

où  $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \chi_1, \chi_2$  et  $\chi_3$  apparaissent comme fonctions de  $x, y, z$  déterminées exclusivement à partir de la géométrie du solide.

$l, m$  et  $k$  indiquent les cosinus directeurs de la normale sortante vers le fluide en tout point de la surface d'interaction  $S$ .

Les conditions aux limites sur la surface d'interaction  $S$  sont :

$$\frac{\delta\phi}{\delta\mathbf{n}} = l(u + qz - ry) + m(v + rx - pz) + k(w + py - qx) \quad (3.10)$$

Par conséquent en substituant l'équation 3.9 dans l'équation 3.8 on retrouve :

$$\frac{\partial\phi_1}{\partial\mathbf{n}} = l; \frac{\partial\phi_2}{\partial\mathbf{n}} = m; \frac{\partial\phi_3}{\partial\mathbf{n}} = k$$

$$\text{et } \frac{\chi_1}{\partial\mathbf{n}} = ky - mz; \frac{\chi_2}{\partial\mathbf{n}} = lz - kx; \frac{\chi_3}{\partial\mathbf{n}} = mx - ly$$

L'énergie cinétique de l'air en mouvement peut être écrite ainsi :

$$\begin{aligned} 2E_a = & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 \\ & + Qq^2 + Rr^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv \\ & + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + 2p(Fu + Gv + Hw) \\ & + 2q(F'u + G'v + H'w) + 2r(F''u + G''v + H''w) \end{aligned} \quad (3.11)$$

Par identification, la matrice des masses ajoutées sera alors :

$$M_a = \begin{pmatrix} A & C' & B' & F & F' & F'' \\ & B & A' & G & G' & G'' \\ & & C & H & H' & H'' \\ Sym & & & P & R' & Q' \\ & & & & Q & P' \\ & & & & & R \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

et en identifiant l'expression 3.11 par l'expression de l'énergie cinétique du fluide 3.8 on retrouve (voir Annexe B) les termes de  $M_a$  :

$$\begin{aligned} A &= -\rho \int \int_s \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds = \rho \int \int_s \phi_1 l ds \\ B &= -\rho \int \int_s \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ds = \rho \int \int_s \phi_2 m ds \\ C &= -\rho \int \int_s \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} ds = \rho \int \int_s \phi_3 n ds \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} A' &= -\frac{1}{2} \rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} + \phi_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\ B' &= -\frac{1}{2} \rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} + \phi_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\ C' &= -\frac{1}{2} \rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} + \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \end{aligned} \quad (3.14)$$

sont les termes de couplage Translation-Translation :

$$\begin{aligned}
F' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\
G' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\
H' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial n}) ds \\
F &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\
G &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\
H &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial n}) ds \\
F'' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\
G'' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\
H'' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial n}) ds
\end{aligned} \tag{3.15}$$

les termes de couplage Translation-Rotation :

$$\begin{aligned}
P &= -\rho \int \int_s \chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} ds \\
Q &= -\rho \int \int_s \chi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} ds \\
R &= -\rho \int \int_s \chi_3 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} ds \\
P' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_2 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \chi_2}{\partial n}) ds \\
Q' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \chi_1}{\partial n}) ds \\
R' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial n}) ds
\end{aligned} \tag{3.16}$$

les termes de couplage rotation-rotation.

Les éléments P, Q et R sont homogènes à une inertie. L'expérience a démontré que les

termes extra-diagonaux sont très faibles par rapport à la diagonale. On supposera par la suite qu'ils sont nuls.

### 3.2.2 Dirigeable Flexible

Le dirigeable souple ou flexible constitue, à l'heure actuelle, la forme la plus courante. Il s'agit généralement d'un gros ballon à gaz dont la forme est maintenue par la surpression interne. Les seules parties solides du dirigeable souple sont la cabine des passagers et l'empennage. Tous les dirigeables actuellement utilisés pour la publicité et les annonces commerciales sont de type souple.

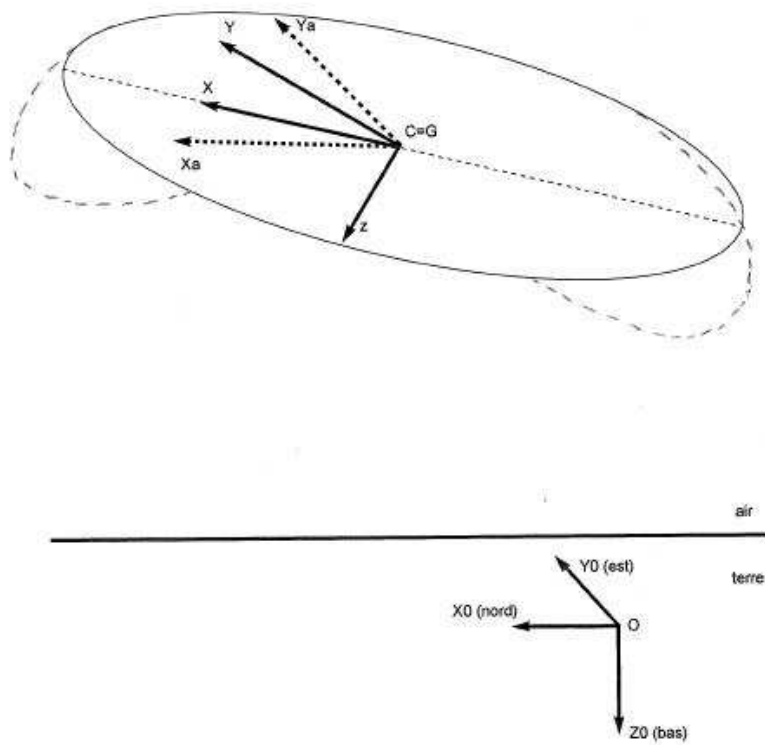


FIGURE 3.3: Dirigeable Flexible

De point de vue structure, l'analyse du mouvement d'un dirigeable flexible sera comparable au cas du dirigeable rigide (voir Chapitre 2), mais avec un nombre de d.d.l plus important. En effet la flexibilité du corps sera représentée par des modes de déformation issues d'une synthèse modale.

Dans notre cas, par exemple, on aura au total 8 degrés de liberté (les 6 degrés de liberté du mouvement rigide plus les deux degrés de liberté dus à la déformation). On est dans le cas des petites déformations. Le centre de gravité reste quasiment invariant ainsi que les axes du repère local au dirigeable.

On suppose qu'on a un arceau qui entoure la partie centrale du dirigeable par conséquent ses extrémités subissent des déformations alors que sa partie centrale est considérée rigide.

En appliquant la même méthodologie que le chapitre précédent pour le cas d'un engin volant flexible, on retrouve l'équation du dirigeable flexible sous sa forme compacte :

$$M_{E'} \dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\tau}' + \mathbf{Q}_{G'} \quad (3.17)$$

$$\text{où } M_{E'} = \begin{pmatrix} I_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & I_{RR} & I_{RD} \\ 0 & I_{RD}^T & I_{DD} \end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{\tau}' = \begin{pmatrix} J_{1Q}^T \tau_1 \\ \frac{1}{4} J_{2Q} \tau_2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'après le Chapitre 2.}$$

Si on considère le cas d'un dirigeable flexible, on a le couplage entre les grands déplacements et les petites déformations. De ce fait, on considérera un écoulement permanent, autour duquel on explicitera l'énergie cinétique du fluide ainsi que le potentiel des vitesses du fluide afin d'obtenir la matrice de masse ajoutée rigide et flexible.

Le potentiel des vitesses du fluide sera défini comme la somme de deux potentiels comme suit :

$$\phi = \phi_{rig} + \phi_{flex} \quad (3.18)$$

Par analogie à la décomposition utilisée dans l'équation 3.9 pour le cas d'un potentiel de fluide issu du mouvement d'un corps rigide, on établit une relation permettant d'exprimer le potentiel flexible en fonction de la vitesse modale  $\dot{\bar{Y}}_d$  et des fonctions spatiales  $\phi_s$ , tels que :



$$\phi_{flex} = \sum_j \phi_{sj}(s) \dot{Y}_{dj}(t) \quad (3.19)$$

La prise en compte du mouvement de flexibilité du dirigeable ainsi que son influence sur le mouvement du fluide environnant, nous permet d'exprimer l'énergie cinétique du fluide ainsi :

$$\begin{aligned} 2E_a = & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 \\ & + Qq^2 + Rr^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv \\ & + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + 2p(Fu + Gv + Hw) \\ & + 2q(F'u + G'v + H'w) + 2r(F''u + G''v + H''w) \\ & + D_1 \dot{Y}_{d1}^2 + 2Su \dot{Y}_{d1} \\ & + 2Vv \dot{Y}_{d1} + 2Ww \dot{Y}_{d1} + 2Uq \dot{Y}_{d1} + 2Lp \dot{Y}_{d1} \\ & + 2Kr \dot{Y}_{d1} + D_2 \dot{Y}_{d2}^2 + 2S'u \dot{Y}_{d2} + 2V'v \dot{Y}_{d2} \\ & + 2W'w \dot{Y}_{d2} + 2U'q \dot{Y}_{d2} \\ & + 2L'p \dot{Y}_{d2} + 2K'r \dot{Y}_{d2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

les deux derniers termes du potentiel global sont les potentiels des vitesses du mouvement de vibration du dirigeable dans le fluide.

D'où l'apparition de nouveaux termes dans la matrice de masse ajoutée dus à la prise en compte de la flexibilité :

$$\begin{aligned}
S' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\
S &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \phi_1}{\partial n}) ds \\
V &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\
V' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \phi_2}{\partial n}) ds \\
W &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \phi_3}{\partial n}) ds \\
W' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \phi_3}{\partial n}) ds \\
U &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \chi_1}{\partial n}) ds \\
U' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_2 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \chi_2}{\partial n}) ds \\
L &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \chi_1}{\partial n}) ds \\
L' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \chi_1}{\partial n}) ds \\
K &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_3 \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial n} + \phi_{s1} \frac{\partial \chi_3}{\partial n}) ds \\
K' &= -\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_3 \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial n} + \phi_{s2} \frac{\partial \chi_3}{\partial n}) ds
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Ces termes représentent les termes de couplage entre le mouvement rigide et flexible.

La matrice de masse ajoutée s'écrira alors ainsi :

$$M_a = \begin{pmatrix} & & & & & & S & S' \\ & & & & & & V & V' \\ & & & & & & W & W' \\ & & & & & & U & U' \\ & & & & & & L & L' \\ & & & & & & K & K' \\ S & V & W & U & L & K & D_1 & 0 \\ S' & V' & W' & U' & L' & K' & 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Les termes extradiagonaux sont faibles par rapport à ceux de la diagonale.

Deux termes diagonaux de masses ajoutées représentant le couplage flexible-flexible apparaissent dans la matrice des masses ajoutées  $M_a$  :

$$D_1 = -\rho_{air} \int \int_s \phi_{s1} \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial \mathbf{n}} dS \quad (3.23)$$

$$D_2 = -\rho_{air} \int \int_s \phi_{s2} \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial \mathbf{n}} dS$$

Nous nous focalisons sur l'étude à la mise en évidence de ces deux termes.

### 3.2.2.1 Calcul du potentiel du mouvement Flexible

Similairement au cas rigide et afin de calculer les termes  $D_1$  et  $D_2$  on doit calculer de manière analytique le potentiel des vitesses du mouvement flexible. Et vu la complexité de la forme de l'engin on assimile comme première approximation le dirigeable à un cylindre de hauteur  $H$  et de diamètre  $D$  (figure 3.4). Il s'agit d'analyser l'effet inertiel du fluide sur les modes vibratoires de la coque.

Le problème est tridimensionnel. Toutefois les effets visqueux étant négligés, le couplage fluide-structure ne fait intervenir que le déplacement radial de la carène.

Le déplacement sera noté  $W(x)\cos n\theta$  avec  $n \in N$ .

Une section droite de la carène ne subira sous l'effet de la déformation d'ensemble qu'une simple rotation et une translation; par suite  $n = 1$  et le développement radial sera  $W(x)\cos\theta$ .

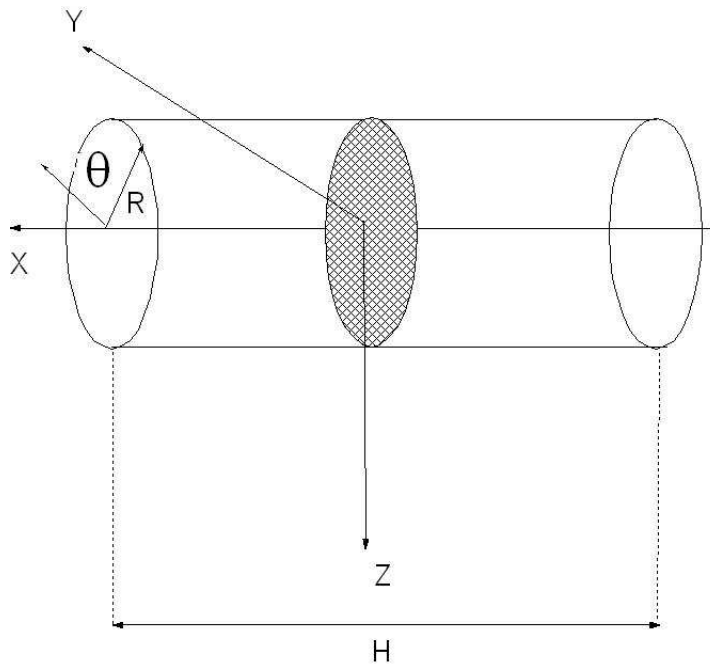


FIGURE 3.4: Cylindre immergé dans l'air

d'après l'équation 3.3 et en utilisant les coordonnées cylindriques, la composante spatiale du potentiel flexible  $\phi_{flex}(r, \theta, x)$  obéira à ce système d'équations :

\* Equation de Laplace qui est donnée par :

$$\Delta\phi_s = \frac{\partial^2\phi_s}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi_s}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi_s}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi_s}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans le domaine fluide.} \quad (3.24)$$

\* et les deux conditions aux limites du cylindre ( $r=R$ ) et  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi_s}{\partial r} \Big|_R &= W \cos\theta \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \phi_s(r) &= 0 \end{aligned} \quad (3.25)$$

où  $R$  est le rayon du cylindre.

La partie centrale du cylindre flexible ne se déforme pas vu la présence de l'arceau. La condition au limite au milieu ( $x=0$ ) sera alors :

$$\phi_s(x=0) = 0 \quad (3.26)$$

L'autre condition aux limites :

$$\frac{\partial^3 \phi_s}{\partial x^3} \left( x = \frac{H}{2} \right) = 0 \quad (3.27)$$

Dans la suite, on se propose d'effectuer une résolution analytique du système d'équations défini précédemment (3.25,3.26,3.27) afin de chercher une solution acceptable de  $\phi_s(r, \theta, x)$ .

La résolution sera établie en utilisant la méthode des séparation de variables.

$$\phi_s = A(r)B(\theta)C(x) \quad (3.28)$$

En reportant l'expression 3.28 dans le Laplacien et en divisant le résultat par ABC, on obtient le problème à variables séparées :

$$\frac{\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2}}{A(r)} + \frac{1}{r} \frac{\partial A(r)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B(\theta)}{\partial \theta^2} + \frac{\frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2}}{C(x)} = 0 \quad (3.29)$$

Afin de résoudre cette équation on procède par étapes :

\* En multipliant l'équation 3.29 par C(x), celle-ci se transforme sous la forme suivante :

$$K^2 C(x) + \frac{\partial^2 C(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (3.30)$$

avec K est une constante positive.

La solution de cette équation est donnée par l'expression suivante :

$$C(x) = \sin(Kx) \quad (3.31)$$

Or d'après la condition aux limites  $\frac{\partial^3 \phi_s}{\partial x^3}(x = \frac{H}{2}) = 0$  on retrouve  $K_j = \frac{\pi(2j+1)}{H}$  avec  $j \in \mathbb{N}$ .

On appelle  $K_j$  les différentes valeurs de la constante  $K$  qui satisfont l'équation 3.31. Les différentes valeurs de  $C(x)$  pour chaque  $j$  sont notées  $C_j(x)$  tels que :

$$C_j(x) = \sin(K_j x) \quad (3.32)$$

\* En utilisant la condition aux limites quand ( $r=R$ ), la fonction  $B(\theta)$  est nécessairement sous la forme :

$$B(\theta) = \cos\theta \quad (3.33)$$

\*En remplaçant  $C(x)$  et  $B(\theta)$  par leurs expressions dans 3.29, on retrouve l'équation radiale :

$$\frac{\partial^2 A(r)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A(r)}{\partial r} - (K_j^2 + \frac{1}{r^2})A(r) = 0 \quad (3.34)$$

L'équation 3.34 a la forme de l'équation de Bessel modifiée ; la solution physiquement acceptable de  $A(r)$  au regard de 3.25 est la fonction modifiée de Bessel de second espèce d'ordre 1, voir [ANG70] :

$$A_j(r) = \mathbb{K}_1(K_j r) \quad (3.35)$$

où  $\mathbb{K}_1$  est la fonction de Bessel modifiée de second espèce d'ordre 1.

Le potentiel fluctuant  $\phi_s$  qui vérifie les conditions aux limites homogènes du problème peut donc s'écrire sous la forme d'une série, comme suit :

$$\phi_s(r, \theta, x) = \sum_j a_j \mathbb{K}_1(K_j r) \cos(\theta) \sin(K_j x) \quad (3.36)$$

Par suite, il est possible de développer le déplacement radial  $W(x)$  en série de Fourier sur l'intervalle  $[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}]$  en prenant  $\sin(K_p x)$  ( $p$  entier) comme fonctions de base :

$$W(x) = \sum_{p=1}^2 \beta_p \sin(K_p x) \quad (3.37)$$

On vérifie aisément que ces fonctions sont orthogonales sur l'intervalle  $[-\frac{H}{2}, \frac{H}{2}]$  :

$$\begin{cases} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sin(K_p x) \sin(K_j x) = 0 & \text{si } p \neq j \\ \frac{H}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir  $\beta_j = \frac{1}{2}$  (voir Annexe B). En partant de l'équation 3.36, la condition aux limites 3.25 s'écrira ainsi :

$$\frac{\partial \phi_s}{\partial r} \Big|_{r=R} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \sum_j a_j \mathbb{K}_1(K_j r) \cos(\theta) \sin(K_j x) \right] = W \cos \theta \quad (3.38)$$

En remplaçant  $W$  par son expression 3.37 et en identifiant les termes, on obtient les coefficients  $a_j$  tels que :

$$a_j = \frac{1}{\frac{d\mathbb{K}_1(K_j R)}{2dr} K_j} = \frac{H}{\pi(2j+1) \frac{d\mathbb{K}_1(K_j R)}{dr}} \quad (3.39)$$

Ce qui nous permet d'avoir l'expression explicite de  $\phi_s$

$$\phi_s(r, \theta, x) = \sum_j \frac{H\mathbb{K}_1(K_j r) \sin(K_j x) \cos\theta}{2\pi(2j+1) \frac{d\mathbb{K}_1(K_j R)}{dr}} \quad (3.40)$$

D'après l'expression établie dans 3.41 le potentiel flexible  $\phi_{flex}$  prend la forme :

$$\phi_{flex} = \phi_{s1}(s) \dot{\bar{Y}}_{d1}(t) + \phi_{s2}(s) \dot{\bar{Y}}_{d2}(t) \quad (3.41)$$

Si on choisit les deux premiers modes de déformation pour décrire la flexibilité du corps on aura :

$$\phi_{s1}(s)(r, \theta, x) = \frac{H \sin(K_1 x) \cos\theta \mathbb{K}_1(K_1 r)}{6\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr}} \quad (3.42)$$

et :

$$\phi_{s2}(s)(r, \theta, x) = \frac{H \sin(K_2 x) \cos\theta \mathbb{K}_1(K_2 r)}{10\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr}} \quad (3.43)$$

-Ainsi on retrouve le premier terme de la masse ajoutée (voir Annexe B) :

$$D_1 = m_{dd1} = -\rho_{air} \frac{H^3 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_1}{18\pi \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)} \quad (3.44)$$

et pour le second mode :

$$D_2 = m_{dd2} = -\rho_{air} \frac{H^3 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_2}{50\pi \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)} \quad (3.45)$$

avec  $K_1 = 3\pi/H$  et  $K_2 = 5\pi/H$ .

Par suite la matrice  $M_a$  sera sous une forme diagonale en blocs.



$$M_a = \begin{pmatrix} M_{arr} & M_{ard} \\ M_{ard} & M_{add} \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

Finalement on arrive au modèle complet :

$$M'\dot{\nu} = \underline{\tau} + Q_G \quad (3.47)$$

où  $M' = M_{E'} + M_a$  ; Il faut cependant souligner qu'en toute rigueur, il faudrait aussi tenir compte des termes d'amortissements ajoutés, et le couplage mouvement rigide-déformation qui en découle. Ce volet sera abordé dans les perspectives.

Les forces non conservatives se déterminent ainsi :  $\tau_{nc} = B_\nu \nu$  où  $B_\nu$  est la matrice d'amortissement.

$\tau = \tau_c + \tau_{nc}$  : représente l'ensemble des forces conservatives et non conservatives.

### 3.3 Conclusion

Dans ce chapitre on a pu expliciter le couplage entre les grands déplacements et les petites déformations d'un dirigeable flexible. Le point fort de ce travail réside dans l'identification du couplage aérodynamique, à travers des masses ajoutées, entre la contribution du mouvement d'ensemble et celle de la vibration du dirigeable dans l'air. En explicitant la définition de l'énergie cinétique du fluide entourant le dirigeable, et après avoir mis en évidence les potentiels de vitesses rigides et flexibles, nous avons établi grâce à des méthodes expertes, un algorithme pour l'obtention de ces contributions.

Cette méthode analytique nous a permis d'aboutir aux expressions des masses ajoutées explicitement. Ceci nous a aussi permis de définir à la fin, une matrice globale de masses ajoutées intégrant la contribution du mouvement d'ensemble, celle des vibrations du dirigeable flexible dans l'air, ainsi que le couplage entre ces deux mouvements. Dans notre analyse, nous avons privilégié une étude analytique intégrale de ce phénomène sous certaines hypothèses.

---

# Chapitre 4

## Stabilisation et Commande du dirigeable flexible

---

### 4.1 Introduction

On se propose au cours de ce chapitre d'élaborer une stratégie de commande et de stabilisation du dirigeable flexible dont le modèle a été défini dans le chapitre précédent. Très souvent dans la littérature [BA05], [Hyg03], [SAL06], [BAB04], la flexibilité structurelle des engins volants est considérée par les automaticiens comme étant une perturbation. Cette hypothèse permet une nette simplification des calculs, et permettrait de se focaliser exclusivement sur le mouvement d'ensemble du dirigeable. Cependant cette approximation occulte le couplage entre le mouvement d'ensemble et la déformation ce qui amènerait des dérives plus ou moins importantes par rapport au mouvement réel de l'engin flexible. Certains auteurs ont traité avec succès la commande globale d'un avion flexible [Tuz01]. Notons néanmoins que les travaux qui traitent ce problème de couplage pour les dirigeables sont quasiment inexistantes. On prouvera à travers ce chapitre que ce modèle complet est relativement simple à stabiliser malgré les degrés de liberté supplémentaires dus à la flexibilité. On proposera pour cela un algorithme de commande qui stabilise localement et asymptotiquement le dirigeable flexible, en utilisant la technique du Backstepping.

## 4.2 Stabilisation asymptotique du dirigeable flexible au voisinage d'un point cible

Le dirigeable flexible étudié est régi par seize variables d'état. Du point de vue commande ceci conduit à des lois de contrôle complexes conduisant à des programmes informatiques assez lourds et inadaptés pour le temps réel ; contrairement à ce que l'on observe dans l'étude des engins volants rigides.

Nous essayons à travers cette étude de passer outre cette difficulté et de s'appuyer sur des techniques de découplage [Hyg03], [BA05], utilisées sur des dirigeables rigides et qui permettent de simplifier substantiellement la commande.

Ces techniques se basent sur le découplage entre le mode de vol latéral et le mode de vol longitudinal. Ce qui, pour le cas de l'engin rigide, conduit à deux sous systèmes de dimension 6.

Dans le cadre de notre étude, nous considérons que le dirigeable possède deux nacelles (en haut et en bas de l'arceau), où on place dans chacune d'elle deux rotors orientables. La technique des rotors orientables est une technique en vogue pour les dirigeables du 21<sup>me</sup> siècle. Elle leur confère une plus grande maniabilité.

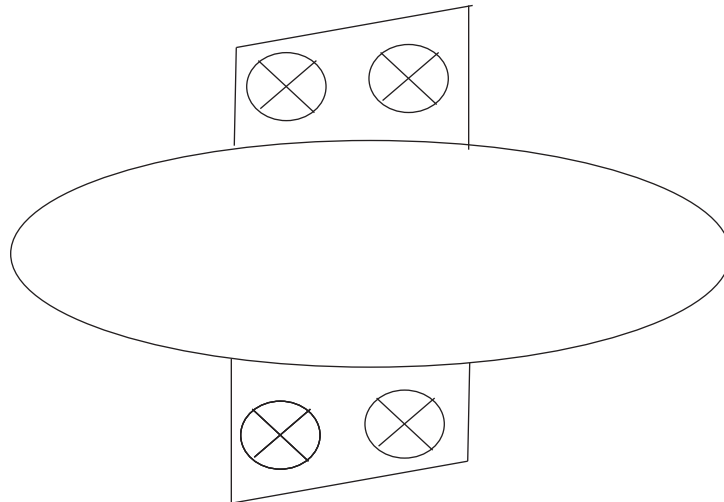


FIGURE 4.1: Dirigeable avec deux nacelles

Dans le dirigeable étudié, ces termes permettent un actionnement total de l'engin. Le modèle dynamique du dirigeable nous permet d'en extraire six sous-systèmes qui

correspondent respectivement à la dynamique de chaque mouvement :

- la dynamique du mouvement de translation du dirigeable qui fait l'objet de trois sous-systèmes déconnectés et n'ayant pas par hypothèse de couplage avec la déformation.

Le mouvement est décrit par les composantes de déferlement  $u$ , de balancement  $v$  et de la poussée  $w$  qui, rappelons le, correspondent à la vitesse en paramètres Euleriens. On choisira par la suite les états définissant la position et la vitesse  $\eta_1 = [x, y, z]^T$  et  $\nu_1 = [u, v, w]^T$ .

- la dynamique du mouvement de rotation couplée aux amplitudes modales de déformation du premier et second mode de déformation  $\bar{Y}_{d1}$  et  $\bar{Y}_{d2}$ .

Les vibrations du dirigeable seront atténuées à travers la commande du mouvement rigide de l'engin.

On se focalisera dans la suite à l'étude de la stabilisation du dirigeable au voisinage d'un point désiré.

On présentera notamment, l'algorithme de commande permettant au dirigeable d'atteindre une position désirée avec une vitesse nulle.

L'obtention de la loi de commande stabilisante et la synthèse des différentes étapes qui amènent à déterminer explicitement son expression, seront établies afin de stabiliser asymptotiquement l'engin volant au voisinage d'un point désiré.

### 4.2.1 Description du modèle dynamique décrivant le mouvement du dirigeable flexible

D'après les hypothèses et les résultats établis dans le chapitre précédent on retrouve la forme compacte du modèle flexible complet :

$$M_{E'} \dot{\tilde{v}} = \underline{\mathcal{I}} + Q'_G \quad (4.1)$$

où  $M_{E'}$  est la matrice masse du système (voir Chapitre 3).

Afin de stabiliser le système et comme la matrice de masse  $M_{E'}$  est inversible, on réécrit le modèle comme suit :

$$\dot{\tilde{v}} = M_{E'}^{-1} (\underline{\mathcal{I}} + Q'_G) \quad (4.2)$$

et l'équation cinématique :

$$\dot{\eta} = J(\eta_2)\nu \quad (4.3)$$

dans une forme plus développée l'équation 4.2 s'écrira :

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \\ \ddot{\bar{Y}}_{d1} \\ \ddot{\bar{Y}}_{d2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m + m_{ad1}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m + m_{ad2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m + m_{ad3}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_4 & 0 & 0 & L_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_7 & L_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_{10} & L_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_{12} & 0 & 0 & L_{13} \end{pmatrix} \cdot Z \quad (4.4)$$

$$\text{avec } Z = \begin{pmatrix} \tau_{1x} \\ \tau_{1y} \\ \tau_{1z} \\ \tau_{2x} \\ \tau_{2y} \\ \tau_{3z} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m(rv - qw) + X_u u \\ m(pw - ru) + Y_v v \\ m(qu - pv) + Z_w w \\ rqI_y - qrI_z - q\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD2} - r\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD1} + L_p p \\ rpI_z - rpI_x + p\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD2} + M_q q \\ qpI_x - qpI_y - p\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD1} + N_r r \\ -K_{dd1}\bar{Y}_{d1} \\ -K_{dd2}\bar{Y}_{d2} \end{pmatrix}$$

avec  $Q'_G = Q_G + B_\nu \bar{\nu}$  (voir Chapitre 3 3.47).

Dans le tableau suivant on donne l'expression des  $L_i$  qui figurent dans l'inverse de la matrice masse de  $(M_E)^{-1}$  :

$L_1 = \frac{I_{DD_2} + m_{adf2}}{I_{DD_2}I_y + I_y m_{adf2} + m_{adf2}m_{ad1} + I_{RD_1}^2}$
$L_4 = \frac{I_{DD_2} + m_{adf2}}{I_{DD_2}I_y + I_y m_{adf2} + m_{adf2}m_{ad1} + I_{RD_1}^2}$
$L_5 = \frac{I_{RD_1}}{I_{DD_2}I_y + I_y m_{adf2} + I_{RD_1}^2}$
$L_7 = \frac{I_{DD_1} + m_{adf2}}{I_{DD_1}m_{ad5} + I_z m_{adf1} + m_{ad5}m_{adf1} + I_{RD_1}^2}$
$L_{10} = L_8 = \frac{I_{RD_2}}{I_{DD_1}m_{ad5} + I_z m_{adf1} + m_{ad5}m_{adf1} + I_{RD_2}^2}$
$L_{11} = \frac{I_z + m_{ad5}}{I_{DD_1}m_{ad5} + I_z m_{adf1} + m_{ad5}m_{adf1} + I_{RD_2}^2}$
$L_{12} = \frac{I_{RD_1}}{I_{DD_1}m_{ad5} + I_z m_{adf1} + m_{ad5}m_{adf1} + I_{RD_2}^2}$
$L_{13} = \frac{I_y}{I_{DD_2}I_y + I_y m_{adf2} + I_{RD_1}^2}$

Le modèle dynamique sous-actionné décrivant le mouvement du dirigeable flexible est régit par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \dot{u} = \frac{1}{m + m_{ad1}}(\psi_1 + m(rv - qw)) \\
 \dot{v} = \frac{1}{m + m_{ad2}}(\psi_2 + m(pw - ru)) \\
 \dot{w} = \frac{1}{m + m_{ad3}}(\psi_3 + m(qu - pv)) \\
 \dot{p} = L_1(\psi_3 + rq(I_y - I_z) - q\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD_2} - r\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD_1}) \\
 \dot{q} = L_4(\psi_5 + rp(I_z - I_x) + p\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD_2}) + L_5\psi_8 \\
 \dot{r} = L_7(\psi_6 + qp(I_x - I_y) - p\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD_1}) + L_8\psi_7 \\
 \ddot{\bar{Y}}_{d1} = L_{10}\psi_6 + L_{11}\psi_7 \\
 \ddot{\bar{Y}}_{d2} = L_{12}\psi_5 + L_{13}\psi_8
 \end{array} \right. \quad (4.5)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_0 = \cos\psi\cos\theta u + (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi)v + (\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi)w \\ \dot{y}_0 = \sin\psi\sin\theta u + (\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi)v + (-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi)w \\ \dot{z}_0 = -\sin\theta u + (\sin\phi\cos\theta)v + (\cos\theta\cos\phi)w \\ \dot{\phi} = p + \sin\phi\tan\theta q + \cos\phi\tan\theta r \\ \dot{\theta} = \cos\phi q - \sin\phi r \\ \dot{\psi} = \frac{\sin\phi}{\cos\theta}q + \frac{\cos\phi}{\cos\theta}r \end{cases} \quad (4.6)$$

où les variables  $\psi_i$  sont définis comme étant :

$$\psi_1 = \tau_{1x} + X_u u; \psi_2 = \tau_{1y} + Y_v v; \psi_3 = \tau_{1z} + Z_w w;$$

$$\psi_4 = \tau_{2x} + L_p p; \psi_5 = \tau_{2y} + M_q q; \psi_6 = \tau_{2z} + N_r r;$$

$$\psi_7 = -K_{dd1}\overline{Y_{d1}}; \psi_8 = -K_{dd2}\overline{Y_{d2}};$$

Le problème de base est de stabiliser asymptotiquement et localement le système 4.6 au voisinage d'un point désiré  $(x_d, 0, z_d, 0, 0, 0, \overline{Y}_{d1} = 0, \overline{Y}_{d2} = 0)$ .

Les forces et les moments de chaque mouvement sont déconnectés grâce aux deux nacelles munies de rotors orientables dont dispose le dirigeable.

En posant les erreurs  $\xi_1 = x - x_d$  et  $\xi_2 = z - z_d$ , on pourra alors subdiviser le système dynamique en un ensemble de six systèmes comme suit :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{m + m_{ad1}}(\psi_1 + m(rv - qw)) \\ \dot{\xi}_1 = \cos\psi\cos\theta u + (-\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\sin\phi)v \\ \quad + (\sin\psi\sin\phi + \cos\psi\sin\theta\cos\phi)w \end{cases} \quad (4.7)$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m + m_{ad2}}(\psi_2 + m(pw - ru)) \\ \dot{y} = \sin\psi\sin\theta u + (\cos\psi\cos\phi + \sin\psi\sin\theta\sin\phi)v \\ \quad + (-\cos\psi\sin\phi + \sin\psi\sin\theta\cos\phi)w \end{cases} \quad (4.8)$$

$$\begin{cases} \dot{w} = \frac{1}{m + m_{ad3}}(\psi_3 + m(qu - pv)) \\ \dot{\xi}_2 = -\sin\theta u + (\sin\phi\cos\theta)v + (\cos\theta\cos\phi)w \end{cases} \quad (4.9)$$

Ces trois derniers systèmes décrivent le mouvement de translation du dirigeable et sont complètement déconnectés de la déformation.

$$\begin{cases} \dot{p} = L_1(\psi_3 + rq(I_y - I_z) - q\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD_2} - r\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD_1}) \\ \dot{\phi} = p + \sin\phi\tan\theta q + \cos\phi\tan\theta r \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\begin{cases} \dot{q} = L_4(\psi_5 + rp(I_z - I_x) + p\dot{\bar{Y}}_{d1}I_{RD_2}) + L_5\psi_8 \\ \ddot{\bar{Y}}_{d2} = L_{12}\psi_5 + L_{13}\psi_8 \\ \dot{\theta} = \cos\phi q - \sin\phi r \\ \dot{\bar{Y}}_{d2} = \dot{Y}_{d2} \end{cases} \quad (4.11)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = L_7(\psi_6 + qp(I_x - I_y) - p\dot{\bar{Y}}_{d2}I_{RD_1}) + L_8\psi_7 \\ \dot{\psi} = \frac{\sin\phi}{\cos\theta}q + \frac{\cos\phi}{\cos\theta}r \\ \ddot{\bar{Y}}_{d1} = L_{10}\psi_6 + L_{11}\psi_7 \\ \dot{\bar{Y}}_{d1} = \dot{Y}_{d1} \end{cases} \quad (4.12)$$

On distingue ici deux sous systèmes décrivant le couplage 4.11 et 4.12 entre les mouvements rigides de lacet et de tangage du dirigeable avec les mouvements flexibles du premier et second mode.

Par conséquent on peut bien voir que les vibrations élastiques de l'engin sont atténuées ou même contrôlées à travers la commande du mouvement de rotation.

Le but de notre travail étant la stabilisation locale du dirigeable au voisinage d'un point désiré, on propose ici, une linéarisation du système d'erreurs au voisinage de zéro. On énoncera les définitions suivantes :

**Définition 1** *On appelle système linéarisé tangent, ou encore approximation au premier ordre, du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$  au voisinage d'un point d'équilibre  $x_e$  le système linéaire*



$$\dot{x} = Ax \tag{4.13}$$

où  $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_e)$  est l'application linéaire tangente de  $f$  au point  $x_e$

Les systèmes linéaires présentent une classe particulière de systèmes dynamiques, on commence à voir dans quelle mesure le système approché " linéarisé tangent" ressemble au système original au voisinage d'un point d'équilibre. Mathématiquement, on va examiner l'équivalence topologique, d'un système dynamique non linéaire  $\dot{x} = f(x)$  et de son linéarisé tangent au voisinage d'un point d'équilibre.

Pour cela il existe un résultat essentiel dû à Grobman et Hartman [ANL94] que l'on énoncera ci-après.

**Définition 2** *Un point d'équilibre d'un système dynamique tel que l'application linéaire tangente en ce point n'a pas de valeur propre à partie réelle nulle est dit point hyperbolique.*

**Théorème 1 (Grobman et Hartman) :**

*Un système dynamique non linéaire  $\dot{x} = f(x)$ , est topologiquement équivalent à son linéarisé tangent (4.13) au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique.*

Il en découle que, le comportement d'un système dynamique non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre est connu à partir de son linéarisé tangent. On peut donc, considérer que le système non linéaire représente une perturbation de son linéarisé tangent. Plus précisément on a le théorème de perturbation suivant, qui est un corollaire du Théorème 1.

**Théorème 2 (Théorème de perturbation) :**

*Soit  $x_e$  un point d'équilibre du système dynamique  $\dot{x} = f(x)$ .*

1. *Si  $x_e$  est asymptotiquement stable pour le linéarisé 4.13 alors il l'est aussi pour le système original  $\dot{x} = f(x)$ .*

2. *Si  $x_e$  est instable pour le linéarisé 4.13 alors il l'est pour le système original  $\dot{x} = f(x)$ .*

Afin de réduire la complexité des systèmes d'erreurs (4.7...4.12) et par le procédé du théorème de perturbation on va limiter l'étude au linéarisé tangent au voisinage d'un point d'équilibre  $0_{R^8}$ . Par suite, le linéarisé tangent du dynamique du dirigeable au voisinage du point  $0_{R^8}$  sera :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{1}{m + m_{ad1}} \psi_1 \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{1}{m + m_{ad2}} \psi_2 \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \dot{w} = \frac{1}{m + m_{ad3}} \psi_3 \\ \dot{\xi}_2 = w \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \dot{p} = L_1 \psi_3 \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad (4.17)$$

Et pour les deux sous-systèmes décrivant le couplage entre le mouvement rigide de rotation et les petites vibrations du dirigeable :

$$\begin{cases} \dot{q} = L_4 \psi_5 + L_5 \psi_8 \\ \ddot{Y}_{d2} = L_{12} \psi_5 + L_{13} \psi_8 \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{\bar{Y}}_{d2} = \dot{Y}_{d2} \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \dot{r} = L_7 \psi_6 + L_8 \psi_7 \\ \ddot{Y}_{d1} = L_{10} \psi_6 + L_{11} \psi_7 \\ \dot{\psi} = r \\ \dot{\bar{Y}}_{d1} = \dot{Y}_{d1} \end{cases} \quad (4.19)$$

L'objet de cette étude est basé sur l'approximation du modèle (4.14..4.19) au voisinage du point désiré. Donc pour établir explicitement les différentes expressions des lois de commande, on se base sur le modèle linéarisé.

Le problème revient à construire pour chaque sous système une loi de commande qui le stabilise asymptotiquement au voisinage respectivement du point  $0_{R^6}$

## 4.2.2 Stabilisation asymptotique du modèle d'étude au voisinage du point désiré

Dans cette section, on va développer les lois de commande qui stabilisent asymptotiquement le linéarisé tangent de notre modèle dynamique.

Il est clair que le système (4.14..4.19) a pu être décomposé en six sous systèmes qui sont complètement déconnectés en terme de leurs variables.

### 4.2.2.1 Stabilisation du mouvement de translation suivant XX, YY et ZZ

Commençons par stabiliser le premier sous-système rigide 4.14.

On peut réécrire ce dernier sous cette forme :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{X_u}{m + m_{ad1}} \dot{\xi}_1 + \underbrace{\frac{1}{m + m_{ad1}}}_{\tau_{12}} \tau_{1x} \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \quad (4.20)$$

Pour commencer, nous remarquons que la dynamique de la variable  $\xi_1$  est une dynamique autonome du reste du système.

La construction de la commande se fait en deux étapes : la première étape consiste à étudier la commandabilité, c'est à dire ; peut-on trouver une commande permettant de passer d'un état à un autre pour un temps fixé ou arbitraire.

La deuxième étape consiste à construire la commande.

**1<sup>re</sup> étape** : Etude de la commandabilité

Avant de commencer la construction de la commande stabilisante, on va étudier la commandabilité du sous-système en question.

Dans le cas des systèmes linéaires stationnaires, il existe une caractérisation algébrique de la commandabilité, due à Kalman, et dite critère de commandabilité de Kalman, [ANL94], [COR99] :

**Théorème 3** *On dit que le système linéaire*

$$\dot{x} = f(x, u) = Ax + Bu \quad (4.21)$$

avec  $A$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $B$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^m$  dans  $\mathbb{R}^n$  est commandable si et seulement si la matrice de commandabilité

$$C = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B) \quad (4.22)$$

est de rang  $n$ . On dit que la paire  $(A, B)$  est commandable.

Ce sous-système prend la forme  $\dot{x} = Ax + B(\tau_{12})^t$  avec  $A$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $x = [u \quad \xi_1]^t$  d'expression :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{X_u}{m + m_{ad1}} & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

et  $B$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$ , de la forme :

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En calculant le rang de la matrice de commandabilité  $C$  qui est définie par :

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 1 & \frac{X_u}{m + m_{ad1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

on trouve qu'il est égal à 2 (nombre de variables d'états) ce qui implique d'après **Kalman**, que le modèle d'étude est commandable à l'aide d'un retour d'état continue stationnaire.

**2<sup>me</sup> étape** : Construction de la commande.

L'idée est la suivante : en désirant atteindre une position de référence  $x_d$ . On pose  $\tau_1''$  comme une commande virtuelle intermédiaire, et on détermine sa valeur qui garantit

la convergence de  $x$  vers la position à atteindre  $x_d$ , autrement dit la convergence de  $\xi_1$  vers 0. Puis on retrouve la valeur de la commande  $\tau_{1x}$ .

Afin de mettre ce sous-système 4.20 sous forme de cascade, on pose comme nouvelle commande  $\tau_1' = \frac{X_u}{m + m_{ad1}} \dot{\xi}_1 + \underbrace{\frac{1}{m + m_{ad1}} \tau_{1x}}_{\tau_{12}}$

sous cette condition 4.36 ce sous-système prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{u} = \tau_1' \\ \dot{\xi}_1 = u \end{cases} \quad (4.23)$$

on obtient le système réduit ci-dessous, qui est obtenu en prenant  $\tau_1''$  comme commande virtuelle :

$$\dot{\xi}_1 = \tau_1'' \quad (4.24)$$

En Choissant comme expression d'entrée virtuelle :  $\tau_1'' = -k_1 \xi_1$  ; avec  $k_1$  un gain strictement positif.

Avant de commencer la preuve, on va énoncer la définition de la fonction de Lyapunov, ainsi que le théorème de la stabilité et de la stabilité asymptotique des systèmes non linéaire en utilisant la fonction de Lyapunov.

**Définition 3** [H.K92] : Soit  $x = 0$  un point d'équilibre du système  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ . Une fonction différentiable  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$  est appelée une fonction de Lyapunov si elle satisfait :

- \*  $V(0) = 0$ ;
- \*  $V(x) > 0$  pour  $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ ;
- \*  $\dot{V}(x) \leq 0$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Théorème 4** Posant  $x = 0$  un point d'équilibre du système  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x(0) = x_0$ . S'il existe une fonction de Lyapunov  $V(x)$ , alors l'origine  $x = 0$  est stable. Si de plus  $\dot{V}(x) < 0$  dans  $\mathbb{R}^n - \{0\}$ , alors  $x = 0$  est asymptotiquement stable.

**Preuve 1** :

Soit  $V$  la fonction de Lyapunov candidate définie positive, d'expression :

$$V(u, \xi_1) = \frac{1}{2} \xi_1^2 > 0$$

La dérivée de  $V$  est  $\dot{V}(\xi_1) = -k_1 \xi_1^2$  définie négative, pour  $k_1 > 0$ .

Ce choix garantit la stabilisation asymptotique du système 4.14 au voisinage de 0. Il en résulte que le sous système (4.20) est asymptotiquement stable au voisinage du point (0,0) et

$$\tau_1' = -k_2(u + k_1\xi_1);$$

avec  $k_2$  un gain strictement positif et assez grand.

l'expression de la commande  $\tau_{1x}$  sera ainsi :

$$\tau_{1x} = -k_2(m + m_{ad1})(u + k_1\xi_1) - X_u u \quad (4.25)$$

En remplaçant  $\xi_1$  par son expression, on aura :

$$\tau_{1x} = -k_2(m + m_{ad1})(u + k_1(x - x_d)) - X_u u \quad (4.26)$$

$k_1$  et  $k_2$  sont des gains de stabilité, et sont positifs.

#### 4.2.2.2 Choix des Gains

Dans ce paragraphe, on essaiera de déterminer le domaine du gain  $k_2$  qui assure la stabilité asymptotique du sous-système 4.14.

En remplaçant  $\tau_1'$  par son expression 4.20 on aura :

$$\dot{u} = -k_2(u + k_1\xi_1)\dot{\xi}_1 = u \quad (4.27)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{\xi}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_2 & -k_2k_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ \xi_1 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

#### **Proposition 1** [ANL94]

*Une matrice carrée A de dimension 2 est asymptotiquement stable si et seulement si :*

$$Tr(A) < 0 \text{ et } D\acute{e}t(A) > 0$$

Donc pour que 4.28 soit asymptotiquement stable au voisinage de (0,0), il faut que le syst\eme ci-dessous soit v\erifi\e :  $-k_2 < 0$  ;  $k_2k_1 > 0$ .

Ce qui implique qu'il faut choisir  $k_1$  et  $k_2$  strictement positifs. L'\etude de la commandabilit\e ainsi que la construction de la commande sera la m\eme pour les syst\emes non coupl\es \a la d\eformation.

Pour le deuxi\eme sous syst\eme du mouvement lat\eral :

$$\begin{cases} \dot{v} = \frac{Y_v}{m + m_{ad2}} \dot{v} + \frac{1}{m + m_{ad2}} \tau_{2x} \\ \dot{y} = v \end{cases} \quad (4.29)$$

la commande qui stabilise ce sous syst\eme est donn\ee par :

$$\tau_{1y} = -k_4(m + m_{ad2})(v + k_3y) - Y_v v \quad (4.30)$$

Le choix ( $k_4$  et  $k_3$ ) des gains sera pareil que pour le premier sous-syst\eme

Le mouvement d'altitude du dirigeable flexible est d\ecrit par cette \equence :

$$\begin{cases} \dot{w} = \frac{Z_w}{m + m_{ad3}} \dot{\xi}_2 + \frac{1}{m + m_{ad3}} \tau_{3x} \\ \dot{\xi}_2 = w \end{cases} \quad (4.31)$$

la commande du sous syst\eme d'altitude est donn\ee par l'expression suivante :

$$\tau_{1z} = -k_5(m + m_{ad3})(w + k_6(z - z_d)) - Z_w w \quad (4.32)$$

Le choix des gains sera similaire \a celui du le premier syst\eme.

#### 4.2.2.3 Stabilisation du sous syst\eme du mouvement de Roulis

Le sous syst\eme de Roulis est d\ecrit par son lin\earis\e suivant :

$$\begin{cases} \dot{p} = L_1(\tau_{2x} + L_p p) \\ \dot{\phi} = p \end{cases} \quad (4.33)$$

la commande stabilisante de ce sous système sera :

$$\tau_{2x} = -k_7 m(p + k_8(\phi - \phi_d)) - L_p p \quad (4.34)$$

$k_7$  et  $k_8$  sont les gains de stabilité et sont strictement positifs.

Les quatres sous-systèmes du mouvement de translation et du mouvement de roulis qu'on a stabilisé dans la partie précédente sont déconnectés et n'ont aucun couplage avec la déformation. Le point fort de ce modèle flexible est ce couplage. On verra dans la suite, qu'on arrive à contrôler ou plus exactement à atténuer les vibrations à travers les variables d'états du mouvement rigide.

#### 4.2.2.4 Stabilisation des systèmes couplés à la déformation

Commençons tout d'abord par le premier sous-système qui sera défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = L_4 \tau_{2y} + L_4 M_q q - L_5 K_{dd2} \bar{Y}_{2d} \\ \dot{\bar{Y}}_{2d} = \dot{\bar{Y}}_{2d} \\ \ddot{\bar{Y}}_{2d} = L_{12} \tau_{2y} + L_{12} M_q \dot{\theta} - L_{13} K_{dd2} \bar{Y}_{2d} \end{cases} \quad (4.35)$$

Ce sous-système prend la forme  $\dot{x} = Ax + B\tau_{2y}$  avec  $A$  est une application linéaire de  $\mathbb{I}\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{I}\mathbb{R}^4$  et  $x = (\theta \quad q \quad \bar{Y}_{2d} \quad \dot{\bar{Y}}_{2d})^T$  d'expression :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & L_4 M_q & -L_5 K_{dd2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & L_{12} M_q & -L_{13} K_{dd2} & 0 \end{bmatrix}$$



et  $B$  une application linéaire de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}$ , de la forme :

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ L_4 \\ L_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

En calculant le rang de la matrice de commandabilité  $C$  qui est définie par :

$$C = [B, AB, A^2B, A^3B]$$

on trouve qu'il est égal à 4 ce qui implique d'après **Kalman**, que le modèle d'étude est commandable à l'aide d'un retour d'état continue stationnaire.

La seconde étape consiste à construire la commande. Mais avant d'entamer cette partie on fait appel au **Théorème du backstepping** [COR99], qui est appliqué à une classe de systèmes contrôlés, admettant la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \tag{4.36}$$

où l'état est  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n$  et le contrôle  $u \in \mathbb{R}^m$ , et qui correspond au théorème suivant :

**Théorème 5** *Soit  $f_1$  de classe  $C^1$  et le système contrôlé*

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, v) \tag{4.37}$$

*est globalement asymptotiquement stable par des lois de commande stationnaires de classe  $C^1$ , où  $x_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$  et le contrôle  $v \in \mathbb{R}^m$ . Alors, le système contrôlé (4.36) est globalement asymptotiquement stable par des lois de commande continues stationnaires*

La structure de notre système ainsi dégagée suggère l'utilisation de techniques inspirées du backstepping pour calculer la commande de manière recursive.

Afin, de mettre le système 4.35 en cascade, on propose un changement de variable, qui est un difféomorphisme global :

$$\begin{pmatrix} \theta \\ q \\ Y_1 \\ \dot{Y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{L_{12}}{L_4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{L_{12}}{L_4} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ q \\ \bar{Y}_{d2} \\ \dot{\bar{Y}}_{d2} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Par suite le système prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = q \\ \dot{q} = L_4\psi_5 - L_5K_{dd2}Y_1 - \frac{L_{12}}{L_4}L_5K_{dd2}\theta \\ \dot{Y}_1 = \dot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_1 = (-L_{13}K_{dd2} - \frac{L_{12}}{L_4}L_5K_{dd2})Y_1 - (\frac{L_{12}L_{13}}{L_4} - \frac{L_{12}^2}{L_4^2}L_5K_{dd2})\theta \end{cases} \quad (4.39)$$

Afin de mieux visualiser le système en cascade, on considère la commande  $\psi'_5$  définie par  $\psi'_5 = L_4\psi_5 - L_5K_{dd2}Y_1 - \frac{L_{12}}{L_4}L_5K_{dd2}\theta$

$$\begin{cases} \dot{q} = \psi'_5 \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{Y}_1 = \dot{Y}_1 \\ \ddot{Y}_1 = \alpha Y_1 + \beta \theta \end{cases} \quad (4.40)$$

ou  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes, d'expressions  $\alpha = (-L_{13}K_{dd2} - \frac{L_{12}}{L_4}L_5K_{dd2})$  et  $\beta = \frac{-L_{13}L_{12}}{L_4} + \frac{L_{12}^2L_5K_{dd2}}{L_4^2}$

afin d'améliorer l'écriture de ce système on pose :  $Y_2 = \dot{Y}_1$  le système deviendra alors :

$$\begin{cases} \dot{q} = \psi'_5 \\ \dot{\theta} = q \\ \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_1 = \alpha Y_1 + \beta \theta \end{cases} \quad (4.41)$$

En appliquant la technique du Backstepping, on obtient le système réduit ci-dessous qui est obtenu, en prenant  $v$  comme première commande virtuelle :

$$\begin{cases} \dot{\theta} = v \\ \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_1 = \alpha Y_1 - \beta \theta \end{cases} \quad (4.42)$$

avec  $\psi'_5 = -k_{10}(q - v)$  ; ou  $k_{10}$  est un gain strictement positif assez grand.

En appliquant une deuxième fois la technique du backstepping, on obtient le système réduit ci-dessous qui est obtenu, en prenant  $v_1$  comme deuxième commande virtuelle :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = \alpha Y_1 + \beta v_1 \end{cases} \quad (4.43)$$

avec  $v = -k_{11}(\theta - v_1)$  où  $k_{11} > 0$  assez grand.

En appliquant un autre backstepping, on obtient un nouveau système ci-dessous, en prenant  $v_2$  comme troisième commande virtuelle :

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = Y_2 \\ \dot{Y}_2 = v_2 \end{cases} \quad (4.44)$$

avec  $v_2 = \alpha Y_1 + \beta v_1$  ; en appliquant la technique du backstepping, on obtient le système réduit ci-dessous, formé d'une seule équation qui est obtenue, en prenant  $v_3$

comme quatrième commande virtuelle :

$$\dot{Y}_1 = v_3 \quad (4.45)$$

avec  $v_2 = -k_{12}(Y_2 - v_3)$  et  $k_{12}$  assez grand.

Finalement on a une équivalence entre la stabilisation asymptotique du sous-système 4.45 et celle de 4.18. Par conséquent on va restreindre l'étude à stabiliser asymptotiquement au voisinage de zéro le système 4.45.

On choisit comme expression de  $v_3$  ;  $v_3 = -k_{13}Y_1$  ; avec  $k_{13} > 0$ .

**Preuve 2** : Soit  $V$  la fonction de Lyapunov candidate définie positive, d'expression :  $V = \frac{1}{2}Y_1^2 > 0$ . La dérivée de  $V$  est  $\dot{V} = -k_{13}Y_1^2$  définie négative, pour  $k_{13} > 0$ .

Ce choix garantit la stabilisation asymptotique du système 4.45 au voisinage de zéro. Par conséquent 4.18 est asymptotiquement stable au voisinage du point désiré  $0_{\mathbb{R}^4}$ .

Afin d'obtenir l'expression explicite de la commande  $\tau_{2y}$ , on introduit l'expression de  $v_4$  dans  $v_3$  et celle de  $v_3$  dans  $v_2$  et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on obtient l'expression de la commande comme suit :

$$\tau_{2y} = \theta \left( \frac{k_{10}k_{11}L_4\beta - L_{12}k_{10}k_{11}k_{12}k_{13} - L_{12}k_{10}k_{11}\alpha}{L_4^2\beta} \right) + q \left( \frac{-L_4M_q - k_{10}}{L_4} \right) + \quad (4.46)$$

$$\bar{Y}_{d2} \left( \frac{L_5K_{dd2}\beta + k_{10}k_{11}k_{12}k_{13} + k_{10}k_{11}\alpha}{L_4\beta} \right) + \left( \frac{k_{10}k_{11}k_{12}}{L_4\beta} \right) \dot{\bar{Y}}_{d2} - \left( \frac{k_{10}k_{11}k_{12}}{L_4^2\beta} \right) \dot{\theta}$$

Afin de stabiliser le système 4.12 on procède de la même manière.

On pose  $Y_3 = \bar{Y}_{d1} - \frac{L_{10}}{L_7}\psi$  et  $\dot{Y}_3 = Y_4$ , après avoir étudié la commandabilité du système on retrouve le contrôle :

$$\tau_{2z} = \psi \left( \frac{k'_{10}k'_{11}L_7\beta' - L_{10}k'_{10}k'_{11}k'_{12}k'_{13} - L_{10}k'_{10}k'_{11}\alpha'}{L_7^2\beta'} \right) + r \left( \frac{-L_7N_r - k'_{10}}{L_7} \right) + \quad (4.47)$$

$$\bar{Y}_{d1} \left( \frac{L_8K_{dd1}\beta' + k'_{10}k'_{11}k'_{12}k'_{13} + k'_{10}k'_{11}\alpha'}{L_7\beta'} \right) + \left( \frac{k'_{10}k'_{11}k'_{12}}{L_7\beta'} \right) \dot{\bar{Y}}_{d1} - \left( \frac{k'_{10}k'_{11}k'_{12}}{L_7^2\beta'} \right) \dot{\psi}$$

avec  $k'_{10}, k'_{11}, k'_{12}, k'_{13}$  les gains choisis.

La fonction de Lyapunov comme suit  $V = \frac{1}{2}Y_3^2 > 0$ .

Et les constantes  $\alpha' = (-L_{11}K_{dd1} - \frac{L_{10}}{L_7}L_8K_{dd1})$  et  $\beta' = \frac{-L_{11}L_{10}}{L_7} + \frac{L_{10}^2L_8K_{dd1}}{L_7^2}$ .

A la fin on intègre les contrôles trouvés dans le modèle complet afin de stabiliser tout le système.

### 4.3 Simulations Numériques

Dans cette partie, nous présentons des simulations numériques confirmant la convergence du dirigeable vers le point cible au moyen des commandes développées. Les caractéristiques du dirigeable seront données dans ce tableau :

Longueur du dirigeable	6 m
Diamètre du dirigeable	1.4 m
Volume du dirigeable	7.6 m <sup>3</sup>
Masse totale du dirigeable	5.8 Kg
Densité de l'air	1.3 g/m <sup>3</sup>
Densité de l'hélium	0.3 g/m <sup>3</sup>
Accélération de la pesanteur	9.81 N/Kg

-Les coefficients aérodynamiques :

$$X_u=Y_v=Z_w=L_p=N_r=M_q=-10.$$

- les termes inertiels :

$$m+m_{ad4}=1.675, m+m_{ad5}=53.8618, m+m_{ad3}=m+m_{ad2}=19.6928, m+m_{ad1}=7.1892, \\ L_1=0.597, L_4=0.0215, L_5=L_{12}=0.1340, \\ L_7=0.0186, L_8=L_{10}=-0.0046, L_{11}=-0.4763, L_{13}=6.1657.$$

- les gains :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_{10} = k_{11} = k'_{10} = k'_{11} = 10, k_{12} = k'_{12} = 4, k_{13} = k'_{13} = 2$$

Les simulations ont été effectuées en utilisant Matlab. Les commandes obtenues pour le dirigeable flexible sont des lois polynomiales stationnaires de degré un. Le mouvement correspondant est représenté par une phase d'accélération puis une phase de décélération. Le mouvement est continu en position et en vitesse.

### 4.3.1 Mouvement d'avancement

La courbe 4.2 représente le comportement du dirigeable selon l'axe des X afin d'atteindre une position désirée  $x_d$  ainsi que le comportement de la vitesse linéaire  $u$  associé et la commande qui le stabilise.

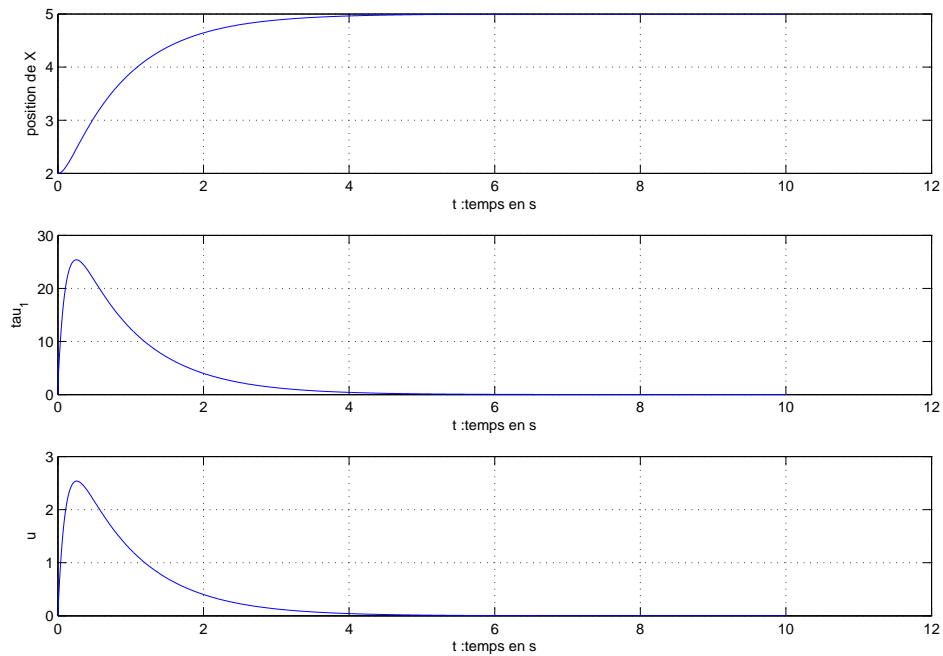


FIGURE 4.2: Mouvement d'avancement

Il est clair, dans la figure 4.2, que le dirigeable suit la commande assez rapidement en moins de 3 secondes. Sachant qu'il part d'une position initiale  $x = 2m$  et atteint  $x_d = 5m$ .

### 4.3.2 Mouvement d'altitude

La courbe 4.3 représente le comportement du mouvement d'altitude du dirigeable afin d'atteindre une altitude désirée  $z_d = 5m$  ainsi que le comportement de la vitesse linéaire  $w$  associée et la commande qui le stabilise.

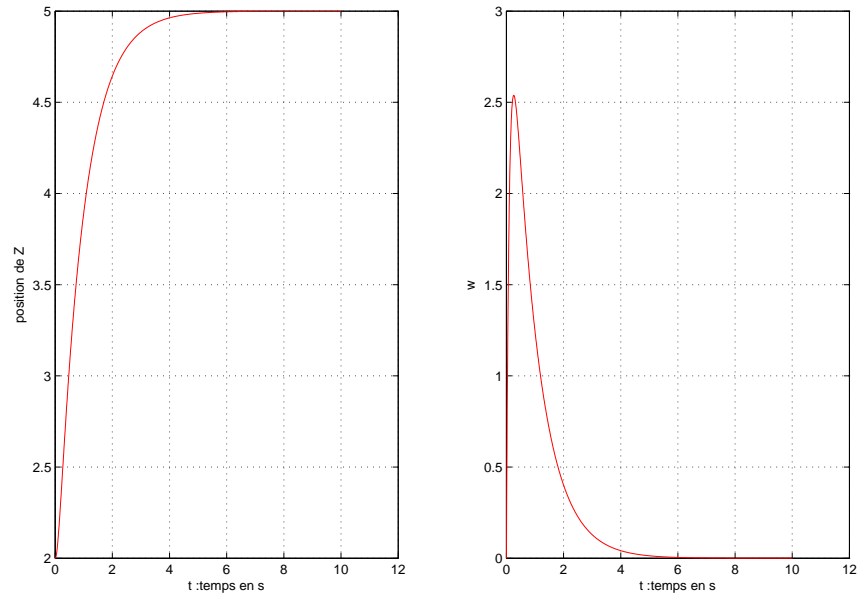


FIGURE 4.3: Position et vitesse d'altitude

Il est clair, dans la figure 4.4, que la commande du mouvement suivant l'axe des  $Z$  assure bien la stabilisation du dirigeable autour de l'altitude désirée dans moins de 3 secondes.

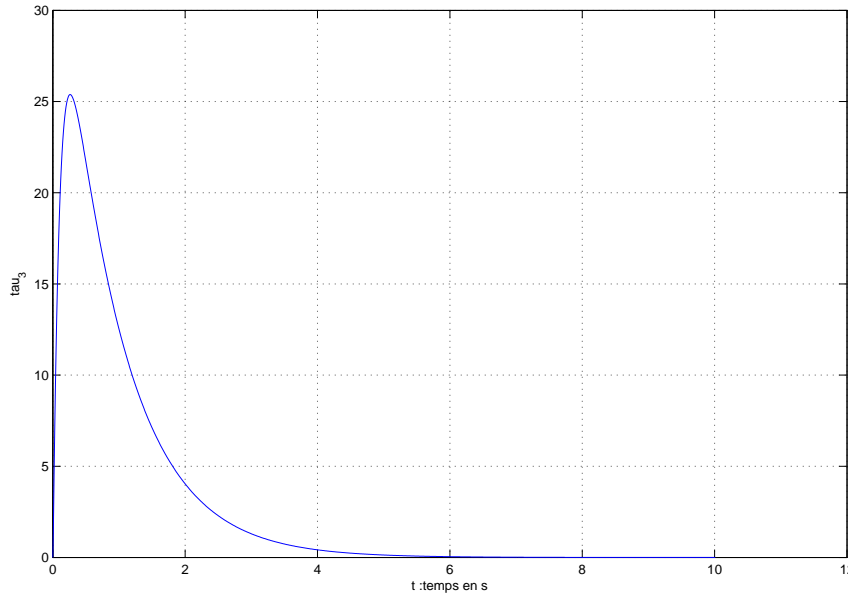


FIGURE 4.4: Commande du mouvement d'altitude

### 4.3.3 Mouvement de Rotation Couplés à la déformation

Dans cette partie nous présentons le comportement du mouvement de tangage couplé à la déformation élastique du deuxième mode  $\bar{Y}_{d2}$ .

Nous remarquons que le vecteur commande élaboré dans cette partie (figure 4.6), accomplit sa tâche de convergence, néanmoins il génère certaines oscillations. En effet, nous constatons qu'au cours de leur convergence vers zéro, les variables d'état comme l'orientation  $\theta$  et le déplacement modal de déformation (voir figure 4.5)  $\bar{Y}_{d2}$  (qui part d'une valeur initiale  $\bar{Y}_{d2} = 0.1m$ ) ont un comportement fortement oscillatoire dû à la présence de la déformation dans le système. Mais la commande arrive, à l'issue d'une phase transitoire, à stabiliser le système et à atténuer ses vibrations. Ce qui prouve bien l'impact de la flexibilité structurelle sur le mouvement rigide du dirigeable. Ceci est bien mis en évidence, à partir de l'illustration de l'évolution du système d'erreurs dans la figure 4.7.

Dans les figures 4.8, on présente le comportement du dirigeable dans son mouvement de lacet autour de l'axe  $z$  couplé à la déformation élastique du premier mode  $\bar{Y}_{d1}$  afin d'atteindre une orientation désirée  $\psi_d = 0$  ainsi que le comportement de la vitesse  $r$  associée et la commande  $\tau_6$  qui le stabilise. Nous partons de la même condition initiale



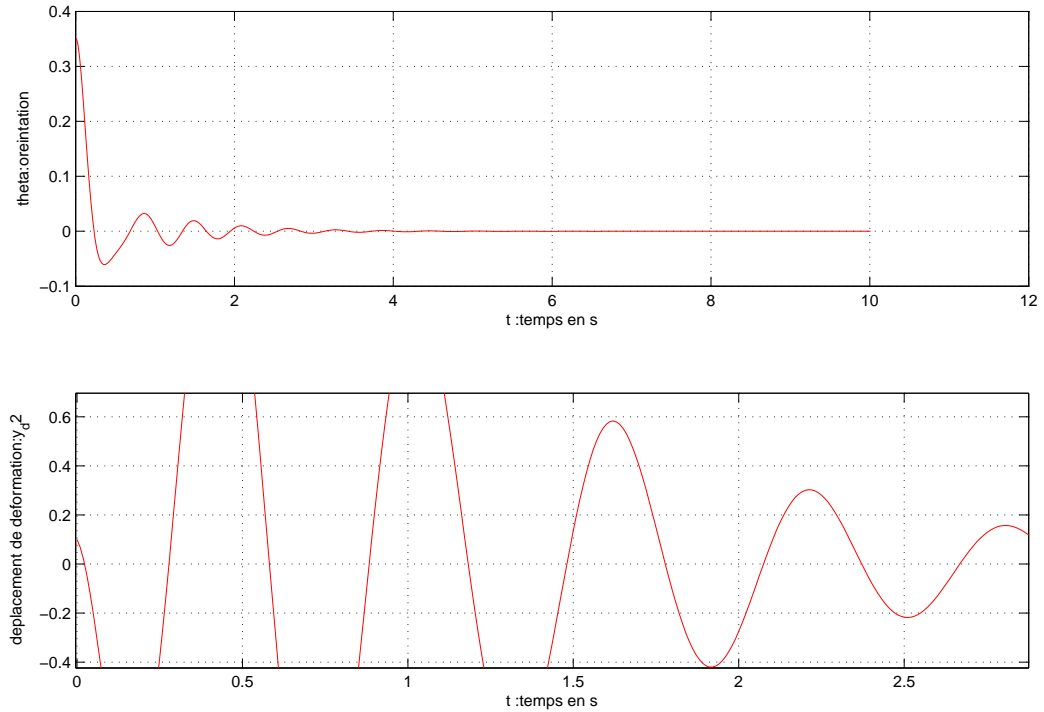


FIGURE 4.5: Angle de rotation et déplacement de déformation  $\bar{Y}_{d2}$

pour le déplacement de déformation  $\bar{Y}_{d1} = 0.1m$ .

En présence de telles vibrations (pour le mouvement de lacet), plus ou moins atténuées par rapport au mouvement de tangage, la commande  $\tau_6$  arrive "à résister" et à faire converger le dirigeable vers l'orientation désirée  $\psi_d = 0$ .

Néanmoins, cette convergence est assurée par des commandes oscillantes. Ainsi nous concluons que la déformation élastique perturbe l'angle de tangage beaucoup plus que l'angle de lacet mais cela n'occulte pas le fait que la flexibilité influe sur le comportement du mouvement rigide.

Ce test numérique nous prouve la robustesse des commandes trouvées. Ce qui nous incite à réaliser des expériences pratiques afin de prouver réellement l'impact de la flexibilité.

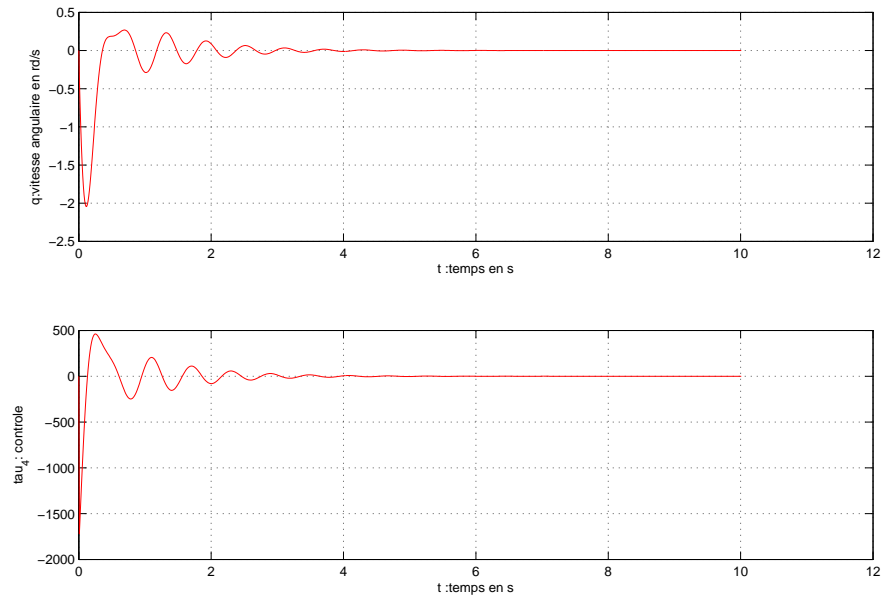


FIGURE 4.6: Vitesse de rotation et Commande

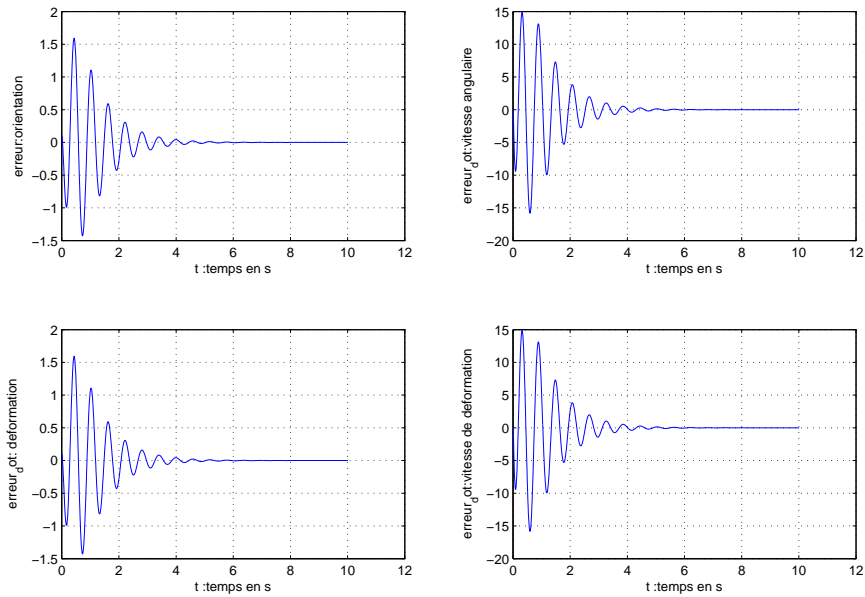


FIGURE 4.7: Systèmes d'erreurs

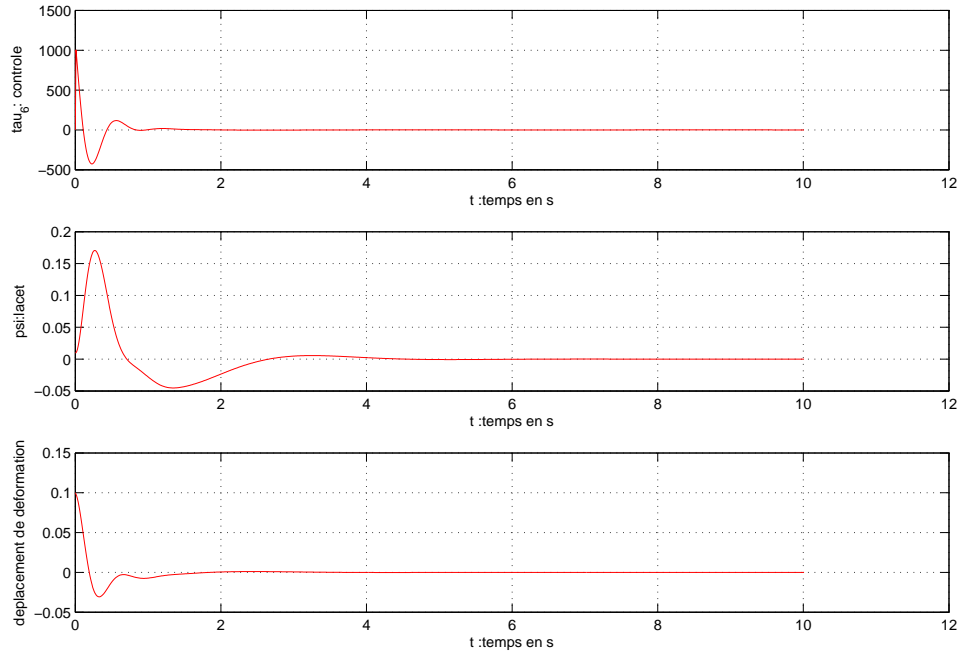


FIGURE 4.8: Mouvement de Rotation couplé à la déformation  $\bar{Y}_{d1}$

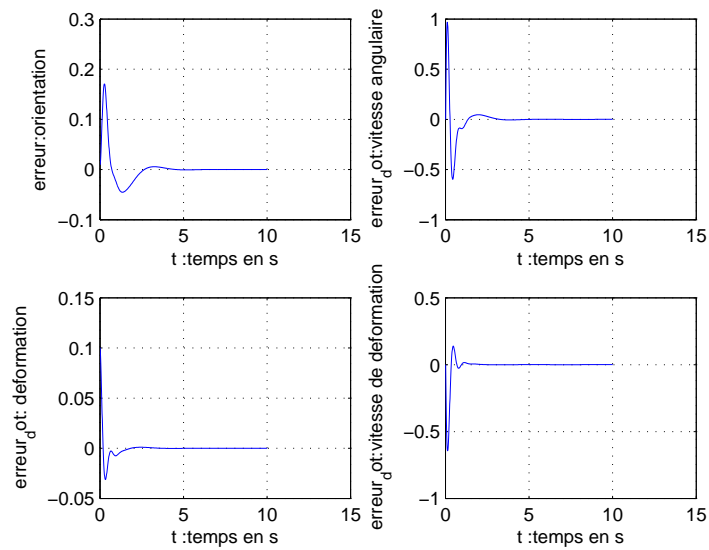


FIGURE 4.9: Systèmes d'erreurs

## 4.4 Conclusion

Dans ce chapitre on s'est intéressé à l'étude de la stabilisation asymptotique du dirigeable flexible au voisinage d'un point donné. On a proposé un algorithme de commande qui stabilise localement et asymptotiquement le dirigeable au voisinage d'un point cible, en utilisant la technique du backstepping. Bien que les déformations élastiques aient été considérées comme des degrés de liberté non commandés, les commandes trouvées ont assuré l'atténuation des vibrations élastiques du dirigeable flexible à travers celles du mouvement rigide. On a prouvé, par des tests numériques l'impact de flexibilité structurelle sur le mouvement d'ensemble ainsi que la robustesse de la commande.



---

# Chapitre 5

## Modélisation et Commande d'un Drone Flexible XSF

---

### 5.1 Introduction

Dans ce chapitre on mettra en évidence une autre application de la modélisation d'engins volants flexibles autonomes.

Précisément on se propose d'établir le modèle mathématique de la dynamique d'un drone hélicoptère flexible à quatre hélices. Similairement à tous les engins volants flexibles, le modèle complet de la dynamique d'un tel drone est relativement difficile à établir et nécessite une étude mécanique et aérodynamique assez poussée. Pour réaliser cette tâche on s'appuiera notamment sur le modèle Eulerien établi dans le Chapitre 2. Cette étude se base sur l'hypothèse de flexibilité de certains éléments de l'engin ainsi que des couplages entre plusieurs phénomènes, à savoir la dynamique du fuselage, les dynamiques des moteurs, les effets aérodynamiques et les effets gyroscopiques.

Nous commençons par présenter, tout d'abord, la dynamique eulerienne pour un drone rigide capable de vol d'avancement rapide et de vol stationnaire ou quasi-stationnaire.

Un tel modèle peut être établi dans un repère local lié au drone.

Nous évoquons le modèle eulerien qui sera traité de point de vue commande en stabilisation et en poursuite. Beaucoup d'auteurs se sont inspirés de la dynamique d'un corps rigide associé au fuselage pour aborder la modélisation. Nous citons dans ce sens les travaux de Guenard et Hamel [NTE06] sur les hélicoptères ainsi que ceux de Lozano Castello [CDL04], Beji et Azouz [BAA06a] concernant les quadrirotors.

Ces études ont toutes été réalisées moyennant l'usage d'une description Lagrangienne des corps volants rigides. Cette description conduit à des lois de commande relativement aisées à expliciter, mais la mise en oeuvre pratique de ces lois est peu évidente car les instruments et les capteurs embarqués ne délivrent que des données locales comparables avec les variables Euleriennes. Ceci pourrait être préjudiciable pour le suivi de la commande, si on sait que ce type d'engins est très sensible aux perturbations extérieures et que les paramètres dynamiques calculés dans la station sol peuvent différer des paramètres réels de l'engin.

Le drone XSF qu'on étudie ici a été conçu et fabriqué au laboratoire IBISC. Il diffère des autres quadricoptères par ses deux rotors directionnels qui lui permettent entre autre un mouvement de translation sans basculement de l'assiette. Nous présentons dans un premier temps, sa modélisation dynamique et aérodynamique par une méthodologie Eulerienne.

La seconde partie de l'étude, concerne la commande et la stabilisation de ce drone. Pour cela nous avons adopté une technique basée sur la méthode des petites perturbations. Le modèle que nous obtenons est fortement non-linéaire, nous utiliserons pour stabiliser l'engin, une méthodologie basée sur la linéarisation et le PID.

## 5.2 Caractéristiques et configurations du drone XSF

Le drone XSF (X4 Super Flyer) est un quadricoptère de  $68 \times 68$  cm de dimension globale, de masse 2kg capable d'emporter une petite charge utile avec une durée d'autonomie en vol de 20 min maximum. Il est conçu en forme de croix et réalisé en fibre de carbone. Chaque bout de la croix dispose d'un rotor comprenant un moteur électrique brushless et une hélice bipale. Au milieu se trouve un cylindre central contenant l'électronique embarquée, les caméras et les batteries. Le drone doit être autonome pouvant réaliser certains modes de vol, notamment l'atterrissage, le décollage ainsi que le vol stationnaire ou de translation.

Le mode opératoire de l'XSF est le suivant : les rotors 1 et 3 (voir figure 5.1) tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, alors que les rotors 2 et 4 tournent dans le sens contraire pour garantir l'équilibre en lacet.

La particularité de l'XSF comparé aux quadricoptères existants est le pivotement des rotors 1 et 3 autour de l'axe de leurs supports. Ce pivotement a pour finalité de permettre

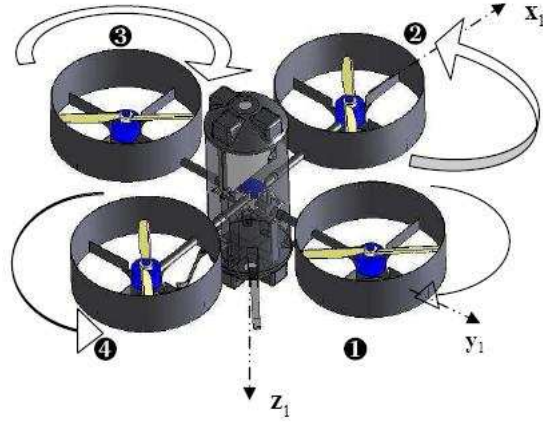


FIGURE 5.1: Représentation du XSF (Version Carénée)

l'avancement horizontal sans avoir à incliner l'assiette. Cette caractéristique est importante dans le cadre d'exercices de vol en extérieur. Le pivotement des rotors permet aussi d'exécuter le mouvement de lacet ainsi que les virages.

Les différents repères utilisés pour la modélisation du drone sont le repère local et le repère inertiel (global). Le repère local (figure 5.2)  $\mathfrak{R}_G = \{G, E_1^g, E_2^g, E_3^g\}$  est attaché au centre de masse  $G$  du véhicule. Le centre de masse est situé dans l'intersection des deux barres. Chaque barre porte deux moteurs. Les équipements, comme par exemple les capteurs, les cartes des contrôleurs, *etc* . . . , sont placées proches du centre de masse  $G$ . Le repère inertiel (figure 5.2) est défini par  $\mathfrak{R}_O = \{O, E_x, E_y, E_z\}$  tel que la direction verticale  $z$  est dirigée vers le bas. Considérons le vecteur  $\eta_1 = (x, y, z)^T$  représentant la position du centre de masse du véhicule dans le repère inertiel. Pour définir l'orientation au cours du temps du repère drone par rapport au repère inertiel, on utilise les angles d'Euler  $\eta_2 = (\theta, \phi, \psi)^T$  qui représentent respectivement le tangage, le roulis et le lacet.

L'équation cinématique est donnée par :

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta}_1 \\ \dot{\eta}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(\eta_2) & 0_{3 \times 3} \\ 0_{3 \times 3} & J_2(\eta_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$



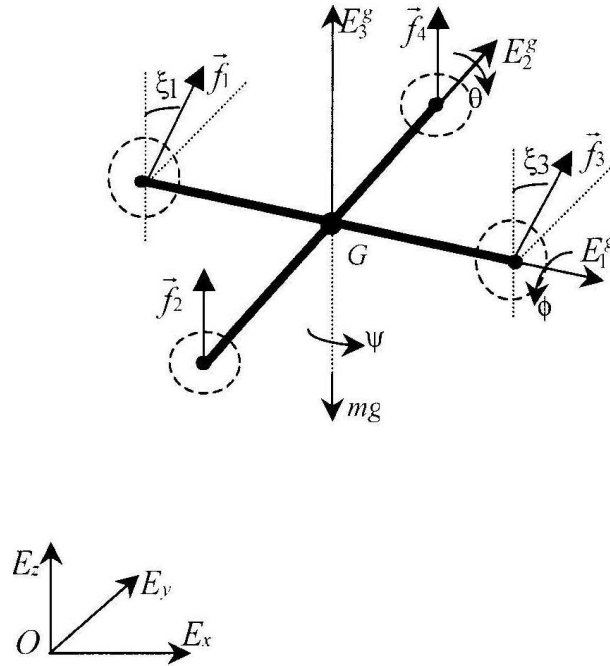


FIGURE 5.2: Les deux repères du drone inertiel et local.

### 5.3 Modèle dynamique du XSF "rigide"

Le drone XSF est modélisé en première approximation comme un solide indéformable.

Pour cela on adoptera le modèle compact suivant (chapitre 2 équation 2.58) :

$$\begin{pmatrix} m_{TT} & 0 \\ 0 & I_{RR} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\nu}_1 \\ \dot{\nu}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{1Q}^T \tau_1 - m_{TT} \eta_2 \wedge \nu_1 \\ Z_R - \nu_2 \wedge (I_{RR}) \nu_2 \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

avec  $\tau_1$  et  $Z_R$  les forces et moments extérieurs.

Sous une forme plus développée et sachant que les matrices de rotations entre les deux repères sont identiques à celle du dirigeable, et en posant  $\nu = (u \ v \ w)^T$ , on retrouve les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
m(\dot{u} + qw - rv) &= X - mgsin\theta \\
m(\dot{v} + ru - pw) &= Y + mgsin\phi cos\theta \\
m(\dot{w} + pv - qu) &= Z + mgcos\phi cos\theta
\end{aligned} \tag{5.3}$$

où X,Y,et Z sont les forces appliquées au drone.

On a aussi pour la partie rotation :

$$\begin{aligned}
I_{xx}\dot{p} + I_{xy}(\dot{q} - pr) + I_{xz}(\dot{r} + pq) + I_{yz}(q^2 - r^2) + (I_{zz} - I_{yy})rq &= L \\
I_{yy}\dot{q} + I_{xy}(\dot{p} - qr) + I_{yz}(\dot{r} - pq) + I_{xz}(r^2 - p^2) + (I_{xx} - I_{zz})pr &= M \\
I_{zz}\dot{r} + I_{yz}(\dot{p} - qr) + I_{xy}(\dot{q} + pr) + I_{xz}(p^2 - q^2) + (I_{yy} - I_{xx})pq &= N
\end{aligned} \tag{5.4}$$

avec L, M, et N les moments appliquées.

En tenant compte du fait que les plans X-Z et Y-Z sont des plans de symétries de l'XSF, on peut dire que les termes d'inertie  $I_{xy}$ ,  $I_{xz}$  et  $I_{zy}$  sont nuls.

Par conséquent le système est simplifié sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
I_{xx}\dot{p} &= L - (I_{zz} - I_{yy})rq \\
I_{yy}\dot{q} &= M - (I_{xx} - I_{zz})pr \\
I_{zz}\dot{r} &= N - (I_{yy} - I_{xx})pq
\end{aligned} \tag{5.5}$$

### 5.3.1 Les moments Gyroscopiques

La rotation des éléments tournant des moteurs brushless crée des effets gyroscopiques qui seront couplés aux rotations du XSF selon la procédure décrite ci-après. On considère  $I_R\omega_i$  le moment cinétique du rotor  $i$ , de composantes  $(h_x^i, h_y^i, h_z^i)^T$ , où  $w_i$  est la vitesse de rotation du rotor  $i$ . En injectant ces effets dans le modèle dynamique on aura :

$$\begin{aligned}
I_{xx}\dot{p} &= L - (I_{zz} - I_{yy})rq - q \sum_{i=1}^4 h_z^i + r \sum_{i=1}^4 h_y^i \\
I_{yy}\dot{q} &= M - (I_{xx} - I_{zz})pr - r \sum_{i=1}^4 h_x^i + p \sum_{i=1}^4 h_z^i \\
I_{zz}\dot{r} &= N - (I_{yy} - I_{xx})pq - p \sum_{i=1}^4 h_y^i + q \sum_{i=1}^4 h_x^i
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Où  $I_R$  désigne le moment d'inertie en rotation d'un moteur.

Ces effets peuvent être sensibles particulièrement lors du pivotement des rotors ou lors d'une turbulence du XSF en roulis.

### 5.3.2 Forces et Moments Aérodynamiques

On essaiera à présent de définir les caractéristiques des forces et couples aérodynamiques issue des pales. La pale se comporte comme une aile tournante. Chaque élément

de la pale  $dr$  est en contact avec le flux d'air avec une vitesse linéaire  $V_R$  et selon un angle d'attaque  $\alpha$ . Dans le plan du propulseur, la pale est définie par sa longueur  $R$  et le rayon du noyau  $R_o$ .

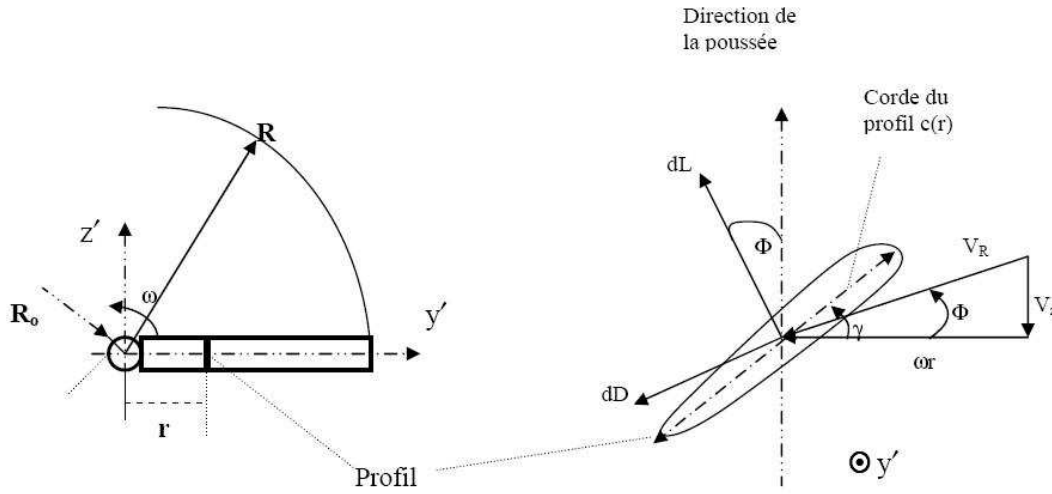


FIGURE 5.3: Description du fonctionnement d'une pale

On appelle profil, la section de pale par un plan normal à l'axe de pale  $Oy'$ .

Chaque section de pale de largeur élémentaire  $dr$  (voir 5.3) en contact avec l'air crée une force de portance élémentaire  $dL$  et une force de traînée élémentaire  $dD$  telles que :

$$\begin{aligned} dL &= \frac{1}{2} \rho C_L V_R^2 dS \\ dD &= \frac{1}{2} \rho C_D V_R^2 dS \end{aligned} \quad (5.7)$$

où  $\rho$  désigne la masse volumique de l'air,  $C_L$  et  $C_D$  désignent des coefficients adimensionnels de portance et de traînée caractérisant le profil et dépendant principalement de l'angle d'attaque  $\alpha$  du profil considéré ( $\alpha = \gamma - \Phi$ ). Compte tenu du vrillage de la pale, et de la dépendance de la vitesse tangentielle  $V_R = w.r$  avec la position du profil vis à vis de l'axe de rotation, cet angle  $\alpha$  ne sera pas constant tout au long de l'axe  $Oy'$  ( $\alpha = \alpha(r)$ ), les coefficients  $C_L$  et  $C_D$  seront donc des fonctions de  $r$ .

En désignant par  $C$  la corde du profil, et en supposant que l'hélice a  $B$  pales, la force de poussée de l'hélice du rotor  $i$  sera :

$$\begin{aligned} f_i &= \frac{B}{2} \rho \int_{R_0}^R V_R^2 c(r) C_L(r) dr \\ &= \frac{B}{2} \rho \omega_i^2 \int_{R_0}^R r^2 c(r) C_L(r) dr \end{aligned} \quad (5.8)$$

ou tout simplement,

$$f_i = K_T \omega_i^2 \quad (5.9)$$

Le calcul du coefficient de poussée  $k_T$  est souvent complexe [AB08]. Il est ainsi essentiel d'élaborer un processus expérimental, qui permet de déterminer avec précision le coefficient  $K_T$  aussi bien que les limites de la validité de la relation.

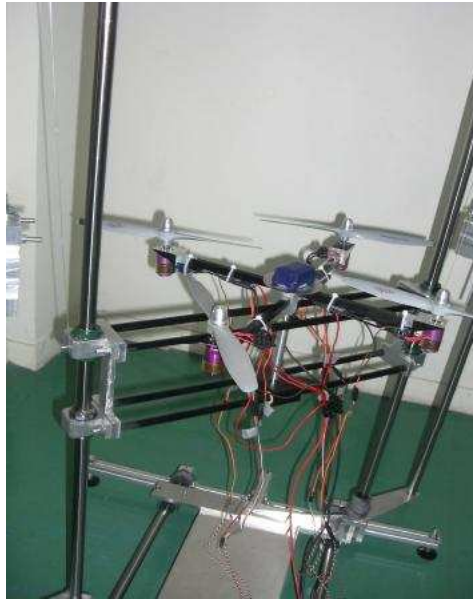


FIGURE 5.4: Banc de test 4 axes pour l'analyse du mouvement du XSF

Le couple résistant, dû à la traînée, est défini similairement comme suit :

$$\begin{aligned}
 M_{Di} &= \frac{B}{2} \rho \int_{R_0}^R V_R^2 c(r) C_D(r) r dr \\
 &= \frac{B}{2} \rho \omega_i^2 \int_{R_0}^R c(r) C_D(r) r^3 dr
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

ou tout simplement,

$$M_{Di} = K_M \omega_i^2 \tag{5.11}$$

La compensation de ce couple au niveau du centre de gravité G se réalise grâce à la contre rotation des rotors 1-3 et 2-4.

Avec  $K_M$  : constante à déterminer expérimentalement.

Comme précisé préalablement, afin de permettre le déplacement horizontal du drone sans incliner l'ensemble, nous avons doté les supports des moteurs 1 et 3 de deux degrés de libertés supplémentaires  $\xi_1$  et  $\xi_3$ . Il s'agit de la rotation autour de l'axe  $E_1^g$  (voir figure 5.5). Les deux supports des moteurs peuvent, soit pivoter dans le même sens pour créer une composante horizontale susceptible de propulser le XSF en translation, soit pivoter en sens inverse pour créer un lacet sans translation. Les angles  $\xi_1$  et  $\xi_3$  sont limités en butée à  $20^\circ$ . Cependant des angles intermédiaires entre 0 et  $20^\circ$  sont permis pour créer le mouvement de virage (mouvement couplé déplacement horizontal-lacet). Ce mouvement de pivotement est généré par deux servo-moteurs. Il est supposé se faire à faible vitesse de rotation.

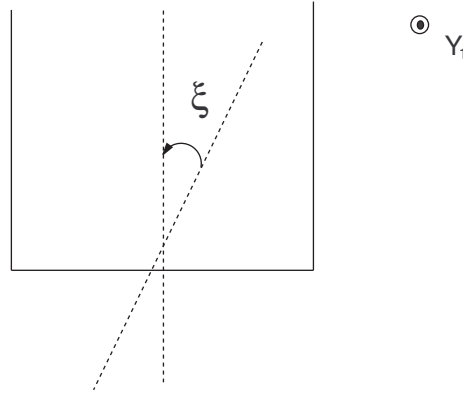


FIGURE 5.5: Pivotement des rotors 1 et 3

On désignera par E le point d'intersections des quatres supports, on note  $(\|\vec{EG}\|) = u_G$ .

On suppose que les forces  $F_1$  et  $F_3$  sont appliquées aux supports 1 et 3.

### 5.3.2.1 Modèle Complet

L'intégration des équations 5.9 et 5.11 nous permet d'écrire le modèle complet de l'XSF ainsi :

Pour le mouvement de translation :

$$\begin{cases} m\dot{u} = m(-qw + rv - g\sin\theta) - K_T(\omega_1^2 \sin\xi_1 + \omega_3^2 \sin\xi_3) \\ m\dot{v} = m(-ru + pw + g\sin\phi\cos\theta) \\ m\dot{w} = -K_T(\omega_1^2 \cos\xi_1 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos\xi_3 + \omega_4^2) + m(-pv + qu + g\cos\phi\cos\theta) \end{cases} \quad (5.12)$$

et pour le mouvement de rotation :

$$\begin{cases} I_{xx}\dot{p} = -l_b K_T(\omega_1^2 \cos\xi_1 - \omega_3^2 \cos\xi_3) - (I_{zz} - I_{yy})rq - qI_R(\omega_1 \cos\xi_1 + \omega_2 + \omega_3 \cos\xi_3 + \omega_4) \\ I_{yy}\dot{q} = l_b K_T(\omega_2^2 - \omega_4^2) - (I_{xx} - I_{zz})rp + K_M(-\omega_1^2 \sin\xi_1 + \omega_3^2 \sin\xi_3) \\ -rI_R(\omega_1 \sin\xi_1 + \omega_3 \sin\xi_3) + u_G K_T(\omega_1^2 \sin\xi_1 + \omega_3^2 \sin\xi_3) + pI_R(\omega_1^2 \cos\xi_1 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos\xi_3 + \omega_4^2) \\ I_{zz}\dot{r} = -l_b K_T(\omega_1^2 \sin\xi_1 - \omega_3^2 \sin\xi_3) - (I_{yy} - I_{xx})pq + qI_R(\omega_1 \sin\xi_1 + \omega_3 \sin\xi_3) \\ + K_M(-\omega_1^2 \cos\xi_1 - \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos\xi_3 + \omega_4^2) \end{cases} \quad (5.13)$$

ou sous forme compacte :

$$M_E \dot{\nu} = \bar{\mathbf{Z}} + Q_G \quad (5.14)$$

où  $\mathbf{Z}$  représente les forces extérieures appliqués ("voir [AB08]")

$$\bar{\mathbf{Z}} = \begin{pmatrix} -K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 + \omega_3^2 \sin \xi_3) \\ 0 \\ -K_T(\omega_1^2 \cos \xi_1 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos \xi_3 + \omega_4^2) \\ -l_b K_T(\omega_1^2 \cos \xi_1 - \omega_3^2 \cos \xi_3) - q I_R(\omega_1 \cos \xi_1 + \omega_2 + \omega_3 \cos \xi_3 + \omega_4) \\ l_b K_T(\omega_2^2 - \omega_4^2) + K_M(-\omega_1^2 \sin \xi_1 + \omega_3^2 \sin \xi_3) \\ -r I_R(\omega_1 \sin \xi_1 + \omega_3 \sin \xi_3) + u_G K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 + \omega_3^2 \sin \xi_3) + p I_R(\omega_1^2 \cos \xi_1 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos \xi_3 + \omega_4^2) \\ -l_b K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 - \omega_3^2 \sin \xi_3) + q I_R(\omega_1 \sin \xi_1 + \omega_3 \sin \xi_3) \\ + K_M(-\omega_1^2 \cos \xi_1 - \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos \xi_3 + \omega_4^2) \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

et  $Q_v$  représente les effets gyroscopiques :

$$\mathbf{Q}_v = \begin{pmatrix} m(-qw + rv - g \sin \theta) \\ m(-ru + pw + g \sin \phi \cos \theta) \\ m(-pv + qu + g \cos \phi \cos \theta) \\ -(I_{zz} - I_{yy})rq \\ -(I_{xx} - I_{zz})rp \\ -(I_{yy} - I_{xx})pq \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

Nous avons ainsi explicité le modèle dynamique Eulerien su drone XSF supposé rigide comme première approche.

## 5.4 Intégration de la flexibilité dans le modèle de l'XSF

Conformément à la démarche développée au Chapitre 2, la prise en compte de la flexibilité peut être introduite au modèle Eulerien au travers d'un nombre représentatif de modes de déformations.

Le déplacement dû à la déformation  $u_d$  sera séparé en deux fonctions de variables :



-  $Y_d(t)$  : les amplitudes modales dépendant du temps.

-  $S(s)$  : les matrices des modes propres de la croix flexible dépendants de l'espace.

d'où :

$$u_d = S(s)Y_d(t).$$

Par conséquent le modèle complet sera :

$$M_d \dot{\nu}_d = \bar{\tau} + Q_v \quad (5.17)$$

$$\text{avec } \nu_d = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \bar{Y}_d \end{pmatrix}$$

la matrice de masse du XSF flexible sera donnée, d'après le Chapitre 2, ainsi :

$$M = \begin{pmatrix} m_{TT} & 0 & 0 \\ 0 & m_{RR} & m_{RD} \\ 0 & m_{RD} & m_{DD} \end{pmatrix} \quad (5.18)$$

Dans cette partie on n'a pas considéré la flexibilité des pales. Ce phénomène peut être adjoint au modèle en y intégrant l'aéroélasticité.

## 5.5 Stratégie de Commande

Notre objectif à travers cette partie est d'établir une stratégie de commande pour l'XSF, qui s'appuie sur le modèle eulerien précisément.

Le calcul du vecteur développé de commande doit être peu coûteux en temps de calcul, condition sûre qu'on a pour que cette commande puisse être implantée sur le micro-contrôleur embarqué.

Rappelons au passage que le micro-contrôleur agit sur la tension de courant délivrée aux moteurs pour varier leurs vitesses et par la même les forces de poussée de l'hélice

correspondante, à titre d'exemple un différentiel de tension entre les moteurs 1 et 3 créera du roulis.

Le micro-contrôleur commandera aussi deux servomoteurs destinés à assurer l'orientation des rotors 1 et 3.

Bien qu'il dispose de six forces d'entrées (quatre forces du aux quatre rotors et de actionneurs dus aux pivotement des deux rotors 1 et 3), la dynamique du véhicule est sous-actionnée. Ce système est très maniable et très sensible aux conditions extérieurs. Ceci nous impose de développer une commande robuste afin de simplifier les expressions on utilise quelques notations intermédiaires. Les fondements de la stratégie de commande proposée reposent sur les techniques de linéarisation, ainsi que sur la méthode de PID.

Nous présentons ci-joint la démarche suivie :

$$\begin{aligned}
 U_1 &= -K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 + \omega_3^2 \sin \xi_3) \\
 U_2 &= -K_T(\omega_1^2 \cos \xi_1 + \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos \xi_3 + \omega_4^2) \\
 U_3 &= -l_b K_T(\omega_1^2 \cos \xi_1 - \omega_3^2 \cos \xi_3) \\
 U_4 &= l_b K_T(\omega_2^2 - \omega_4^2) + U_G K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 + \omega_3^2 \sin \xi_3) \\
 U_5 &= -l_b K_T(\omega_1^2 \sin \xi_1 - \omega_3^2 \sin \xi_3) \\
 U_6 &= K_M(-\omega_1^2 \cos \xi_1 - \omega_2^2 + \omega_3^2 \cos \xi_3 + \omega_4^2)
 \end{aligned} \tag{5.19}$$

$U_G$  la distance entre le centre de gravité et l'intersection des deux barres.  
avec  $\xi_1$  et  $\xi_3$  les deux angles de pivotement du rotor 1 et 3 respectivement.  
On note  $f_1 = K_T \omega_1^2$ ;  $f_2 = K_T \omega_2^2$ ;  $f_3 = K_T \omega_3^2$  et  $f_4 = K_T \omega_4^2$ .  
les équations prennent par la suite la forme suivante :

$$\begin{aligned}
U_1 &= -f_1 \sin \xi_1 - f_3 \sin \xi_3 \\
U_2 &= -f_1 \cos \xi_1 - f_2 - f_3 \cos \xi_3 - f_4 \\
U_3 &= l_b f_1 \cos \xi_1 - l_b f_3 \cos \xi_3 - \frac{K_M}{K_T} f_1 \sin \xi_1 - \frac{K_M}{K_T} f_3 \sin \xi_3 \\
U_4 &= l_b (f_2 - f_4) + U_G (f_1 \sin \xi_1 + f_3 \sin \xi_3) \\
U_5 &= l_b (f_1 \sin \xi_1 - f_3 \sin \xi_3) \\
U_6 &= \frac{K_M}{K_T} (-f_1 \cos \xi_1 + f_2 - f_3 \cos \xi_3 + f_4)
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Pour éviter d'inverser des matrices rectangulaires, on a dissocié les deux actionneurs créant le lacet  $U_5$  (dû à l'inclinaison inverse des rotors) et  $U_6$  (dû à l'anti-couple des hélices)

## Remarque

Comme le montre le système équivalent, on a six entrées de contrôle.

On pose  $U = (U_1 \ U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6)^T$

D'un autre côté, le vecteur d'accionnement d'entrée est composé de six actionneurs, donnés par :

$$F = (f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ \sin \xi_1 \ \sin \xi_3)^T$$

On obtient ainsi la relation :

$$U = A.F \tag{5.21}$$

où A est la matrice de transformation :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1^{n-1} & -f_3^{n-1} \\ -(1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & -1 & -(1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & -1 & 0 & 0 \\ -l_b(1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & 0 & l_b(1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{-K_M}{K_T} f_1^{n-1} & \frac{K_M}{K_T} f_3^{n-1} \\ 0 & l_b & 0 & -l_b & U_G f_1^{n-1} & U_G f_3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_b f_1^{n-1} & -l_b f_3^{n-1} \\ \frac{-K_M}{K_T} (1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & \frac{K_M}{K_T} & \frac{-K_M}{K_T} (1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & \frac{K_M}{K_T} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

On constate que ce système d'équations est fortement non linéaire (l'entier n désignera le pas de temps dans l'algorithme numérique avec lequel on calculera A par la suite).

On établira par la suite une méthodologie pour le résoudre afin d'explicitier les actionneurs.

On présente la résolution de l'équation numérique plus tard.

### 5.5.1 Linéarisation des Equations

On considérera dans cette section, que les mouvements du XSF sont de faible amplitude autour d'un état d'équilibre (cette configuration est la plus critique et la plus intéressante dans l'étude de la stabilité du quadrirotor).

Dans ces conditions, les équations du mouvement peuvent se linéariser. l'expérience a montré que cette théorie simplifiée donne de bons résultats, notamment pour l'analyse de la stabilité des états d'équilibre et de la réponse aux commandes. Dans un premier temps, on décompose le mouvement entre l'état d'équilibre de référence et les écarts par rapport à cet état [DEG01] et [H.K92].

L'idée est de stabiliser l'XSF autour d'une position d'équilibre qui est définie comme suit :

$$u_d = v_d = w_d = p_d = q_d = r_d = \theta_d = \phi_d = 0 \quad (5.23)$$

la référence d désigne les paramètres désirés. Dans ces conditions, en négligeant les termes quadratiques dans les écarts et en linéarisant les expressions trigonométriques [ANL94], [E.D98], les équations dynamiques deviennent :

$$m\Delta\dot{u} = -mg\Delta\theta + U_1$$

$$m\Delta\dot{v} = -mg\Delta\phi$$

$$m\Delta\dot{w} = -mg + U_2$$

$$I_{xx}\Delta\dot{p} = U_3$$

$$I_{yy}\Delta\dot{q} = U_4 \tag{5.24}$$

$$I_{zz}\Delta\dot{r} = U_5 + U_6$$

$$\dot{\phi} = \Delta p$$

$$\dot{\theta} = \Delta q$$

$$\dot{\psi} = \Delta r$$

La méthode utilisée par l'obtention du système 5.24 est dite méthode des petites perturbations. Elle permet de linéariser les équations du mouvement de faibles amplitudes autour d'un point d'équilibre [DEG01].

en utilisant les conditions des paramètres désirés 5.23, on définit le système d'erreurs suivant :

$$\Delta u = u \quad \Delta v = v \quad \Delta w = w \quad \Delta p = p \quad \Delta q = q \quad \Delta r = r$$

et pour les vitesses :

$$\Delta\dot{u} = \dot{u}; \quad \Delta\dot{v} = \dot{v}; \quad \Delta\dot{w} = \dot{w} \quad \Delta\dot{p} = p \quad \Delta\dot{q} = q \quad \Delta\dot{r} = \dot{r}$$

La partie cinématique sera donnée par :  $\Delta p = \dot{\phi}$   $\Delta q = \dot{\theta}$   $\Delta r = \dot{\psi}$

### 5.5.2 Construction de la Commande de l'XSF

Dans ce travail, nous avons développé un procédé original basé sur un modèle dynamique Eulerien. Les variables Euleriennes sont plus réalistes, car elle correspondent aux données fournies par les capteurs embarqués. Nous soulignons que certains degrés de liberté telles que le roulis et le tangage sont particulièrement critiques pour la stabilisation du quadrirotor. Une simple rafale de vent peut déstabiliser le drone et conduit à son écrasement. Par conséquent il est important de stabiliser ces deux degrés de liberté. Dans cette partie toutes les commandes sont déconnectées. Les différents mouvement de translation et de rotation sont stabilisés par des commandes linéaires qu'on décrira par la suite dans les tableaux(tab1-3).

Prenons l'exemple du mouvement de translation suivant l'axe X de l'équation 5.24 :

$$m\Delta\dot{u} = m\dot{u} = -mg\Delta\theta + U_1 \quad (5.25)$$

En suite on tire l'expression de la commande :

$$U_1 = m\dot{u} + mg\Delta\theta \quad (5.26)$$

on choisit le gain  $k_1 > 0$  ; on pose :

$$\dot{u} = -k_1(u - u_d) \quad (5.27)$$

on retrouve l'expression de la commande :

$$U_1 = -mk_1(u - u_d) + m(\dot{u} + g\Delta\theta) \quad (5.28)$$

Pour les mouvements de translation (avancement et altitude) on a stabilisé le mouvement en variables euleriennes (en vitesse) (voir 5.5.2).

Prenons l'exemple du mouvement de rotation autour de l'axe des X, d'après l'équation 5.24 :

$$\dot{p} = \frac{1}{I_{xx}}U_3 \quad (5.29)$$

Pour des gains strictement positifs et assez grands  $k_3$  et  $k_4$ , on pose :

$$\dot{p} = -k_3(p - p_d) - k_4(\phi - \phi_d) \quad (5.30)$$

Par la suite l'expression de la commande sera :

$$U_3 = -I_{xx}(k_3(p - p_d) + k_4(\phi - \phi_d)) \quad (5.31)$$

On a stabilisé le mouvement de rotation en vitesse et en orientation. Ainsi on résume la stratégie de commande adaptée dans les tableaux suivants. Pour la relation entre l'accélération et la commande on aura :

Translation XX	$m\dot{u} = -mg(\theta - \theta_d) + U_1$
Altitude	$m\dot{w} = mg + U_2$
Roulis	$\dot{p} = \frac{1}{I_{xx}}U_3$
Tangage	$\dot{q} = \frac{1}{I_{yy}}U_4$
Lacet	$\dot{r} = \frac{1}{I_{zz}}(U_5 + U_6)$

Pout la relation entre la commande et la vitesse :

Translation XX	$U_1 = -mk_1(u - u_d) + mg(\theta - \theta_d)$
Altitude	$U_2 = -mk_2(w - w_d) - mg$
Roulis	$U_3 = -I_{xx}(k_3(p - p_d) + k_4(\phi - \phi_d))$
Tangage	$U_4 = -I_{yy}(k_5(q - q_d) + k_6(\theta - \theta_d))$
Lacet	$U_5 = -I_{zz}k_7(r - r_d) \quad \text{et} \quad U_6 = -I_{zz}k_8(\psi - \psi_d)$

Et pour les expressions des différentes accélérations, on aura :

Translation XX	$\dot{u} = -k_1(u - u_d)$
Altitude	$\dot{w} = -k_2(w - w_d)$
Roulis	$\dot{p} = -k_3(p - p_d) - k_4(\phi - \phi_d)$
Tangage	$\dot{q} = -k_5(q - q_d) - k_6(\theta - \theta_d)$
Lacet	$\dot{r} = -k_7(r - r_d) - k_8(\psi - \psi_d)$

En intégrant les expressions de commandes suivantes dans le modèle dynamique on retrouve le modèle complet :

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= -k_1(u - u_d) + g(\theta - \theta_d) - g\sin\theta - (qw - rv) \\
\dot{w} &= -k_2(w - w_d) - g + g\cos\phi\cos\theta - (pv - qu) \\
\dot{p} &= -k_3(p - p_d) - k_4(\phi - \phi_d) - \frac{(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}}rq - q\frac{I_R}{I_{xx}}(\omega_1\cos\xi_1 + \omega_2 + \omega_3\cos\xi_3 + \omega_4) \\
\dot{q} &= -k_5(q - q_d) - k_6(\theta - \theta_d) - \frac{(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}rp - r\frac{I_R}{I_{yy}}(\omega_1\sin\xi_1 + \omega_3\sin\xi_3) \\
&+ p\frac{I_R}{I_{yy}}(\omega_1\cos\xi_1 + \omega_2 + \omega_3\cos\xi_3 + \omega_4) \\
\dot{r} &= -k_7(r - r_d) - k_8(\psi - \psi_d) - \frac{(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}}qp + q\frac{I_R}{I_{zz}}(\omega_1\sin\xi_1 + \omega_3\sin\xi_3)
\end{aligned} \tag{5.32}$$

On a pu ainsi, en utilisant cette stratégie de commande, stabilisé le modèle eulerien en  $u$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\phi$ ,  $q$ ,  $\theta$ ,  $r$  et  $\psi$ .

Un important point important dans notre étude est la résolution de l'équation  $U = AF$  à partir des commandes établies.

Des idées de stabilisation d'un quadritor par des commandes plus robustes ("Backstepping") ont été développées par HAMEL [HMLO02] ou par ALTUG [ALT03]; mais ceux-ci se sont basés sur des modèles lagrangiennes. Dans ce travail, on a utilisé un modèle peu étudié en littérature (eulerien), l'avantage de ce modèle c'est qu'il est plus réaliste et nous évite moins d'erreurs.

### 5.5.3 Calcul des Actionneurs

On s'attache dans cette partie à expliciter les actionneurs qui agissent sur le drone. Il s'agit des quatres forces  $f_i$  développées par les hélices ainsi que les angles  $\xi_1$  et  $\xi_3$  qui



définissent l'orientation des rotors 1 et 3.

Dans l'expression de commande, il est clair que le système est non linéaire. Afin de calculer la matrice colonne des actionneurs, on construit une matrice qui permet la connection entre les actionneurs et les commandes. Cette matrice est calculée numériquement et elle est actualisée à chaque pas de temps.

La matrice est donnée par exemple à l'instant  $t^{n-1}$  ainsi :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -f_1^{n-1} & -f_3^{n-1} \\ -(1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & -1 & -(1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & -1 & 0 & 0 \\ -l_b(1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & 0 & l_b(1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & 0 & \frac{-K_M}{K_T} f_1^{n-1} & \frac{K_M}{K_T} f_3^{n-1} \\ 0 & l_b & 0 & -l_b & U_G f_1^{n-1} & U_G f_3^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -l_b f_1^{n-1} & -l_b f_3^{n-1} \\ \frac{-K_M}{K_T} (1 - (\sin^2 \xi_1)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & \frac{K_M}{K_T} & \frac{-K_M}{K_T} (1 - (\sin^2 \xi_3)^{n-1})^{\frac{1}{2}} & \frac{K_M}{K_T} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \sin \xi_1 \\ \sin \xi_3 \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

Par conséquent, en inversant cette matrice à chaque pas de temps on retrouve les actionneurs donnés par :

$$A^{-1}U = F \quad (5.34)$$

l'algorithme précédent est programmé numériquement en Matlab en différences finis. A chaque pas de temps  $[t^n \ t^{n+1}]$ , et comme le pas de calcul est assez petit on réactualise les forces et les angles de pivotement dans la matrice A qui sont définis par :  $f_i^{n-1} = f_i^n$ ;  $i = 1, 3$  et  $\sin \xi_j^{n-1} = \sin \xi_j^n$ ;  $j = 1, 3$

Le point fort de ce travail est le développement d'un algorithme numérique 5.33, très robuste, reliant les six actionneurs du drone aux commandes obtenues. La robustesse de cette méthode sera prouvée par quelques tests numériques dans le paragraphe suivant.

## 5.6 Simulations Numériques

Pour démontrer l'utilité de la procédure proposée précédemment, nous stabilisons le système dans différentes configurations. Le système est plus réaliste. Notre préoccupation est de connaître la force maximale qui peut être produite par un rotor (ce

qui signifie implicitement la saturation des moteurs), et l'angle maximal de pivotement des rotors orientés. Nous montrons ci-dessous l'efficacité de l'algorithme au regard de différents types de perturbations, introduites comme conditions initiales.

Les gains choisis sont identiques :

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = k_6 = k_7 = k_8 = 10$$

### 5.6.1 Mouvement de Translation Horizontal

Dans la figure 5.6 on confère au drone une vitesse linéaire initiale  $u = 3m/s$ . On remarque que la vitesse arrive à se stabiliser au voisinage de 0 au bout de 3 secondes. Dans les figures 5.7 les forces des moteurs ne dépassent pas leurs valeurs maximales 7N. Les angles de pivotement, dans la figure 5.8, sont égaux et arrivent à se stabiliser au voisinage de 0 ; et ne dépassent pas leurs valeurs maximales de 0.35 rd ce qui prouve la robustesse de la commande.

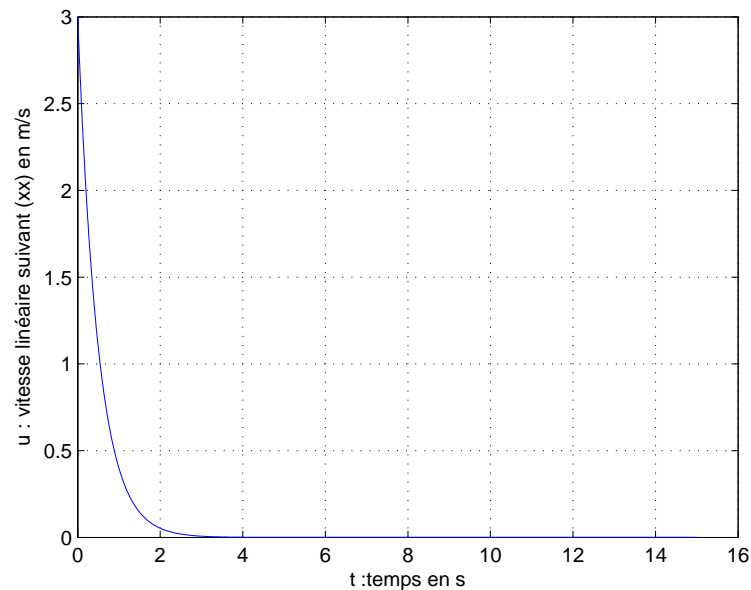


FIGURE 5.6: Vitesse linéaire Locale d'avancement

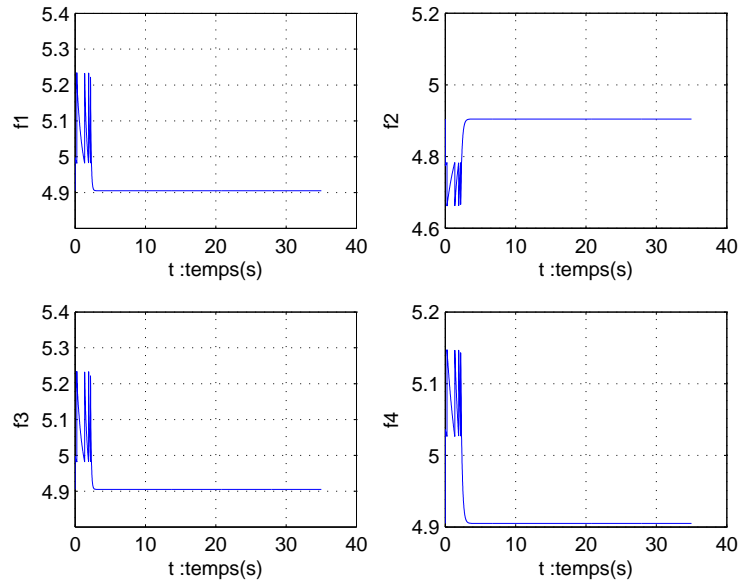


FIGURE 5.7: Forces des moteurs

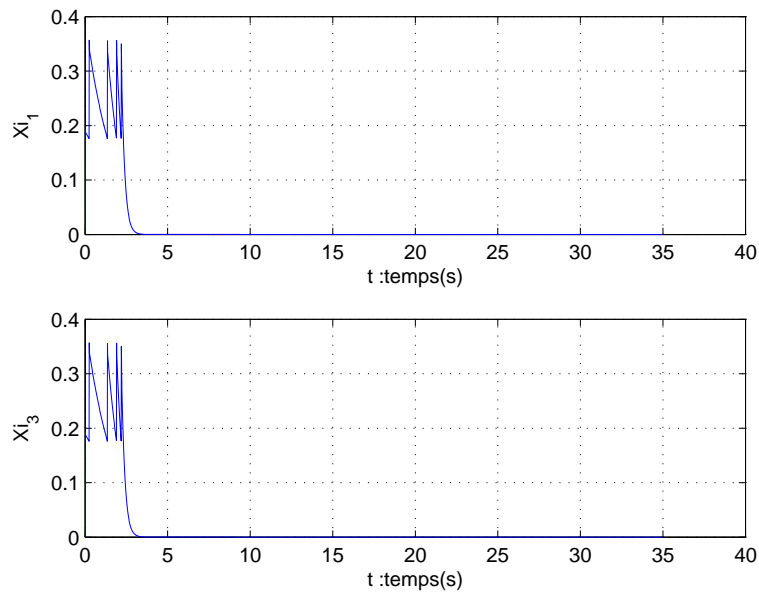


FIGURE 5.8: Angle de Pivotement du rotor 1

### 5.6.2 Mouvement de Translation Verticale

Afin que le drone XSF suit la commande, dans la figure 5.9, il est clair que la vitesse du mouvement verticale atteint la vitesse désirée rapidement en 3 secondes. Dans

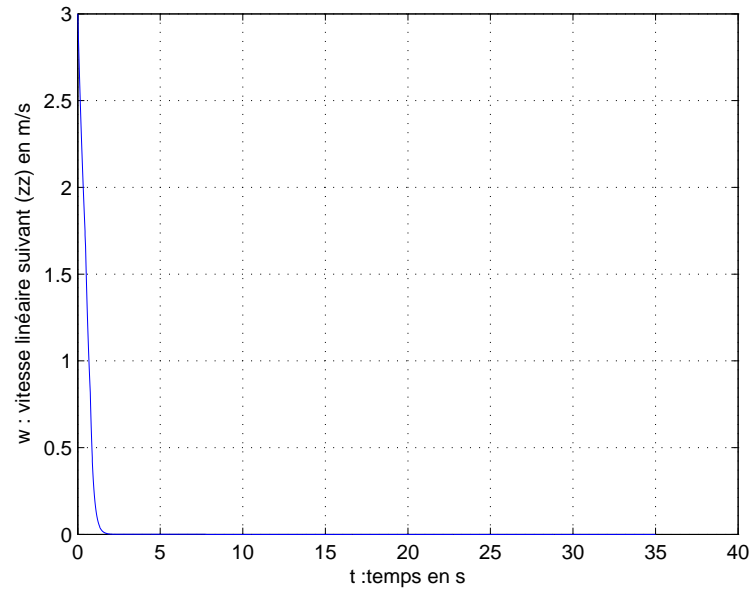


FIGURE 5.9: Vitesse linéaire Locale de mouvement verticale

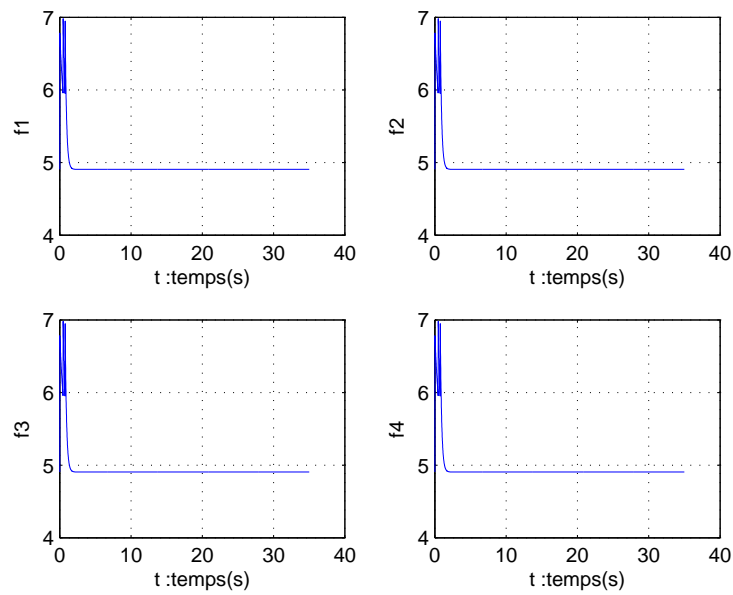


FIGURE 5.10: Forces des Rotors du mouvement d'altitude

la figure 5.10, on constate que les actionneurs des 4 rotors, passent par une phase transitoire. Par suite, ils atteignent une valeur maximale de 7N sans la dépasser, ce qui prouve la robustesse de la commande.

### 5.6.3 Mouvement de Roulis et de Tangage

On introduit dans cette simulation, un mouvement couplé entre le Roulis et le Tangage. Ces mouvements sont les plus critiques à stabiliser. Par suite il est nécessaire de tester la robustesse des commandes obtenues. Ces résultats seront présentés dans les figures suivantes :

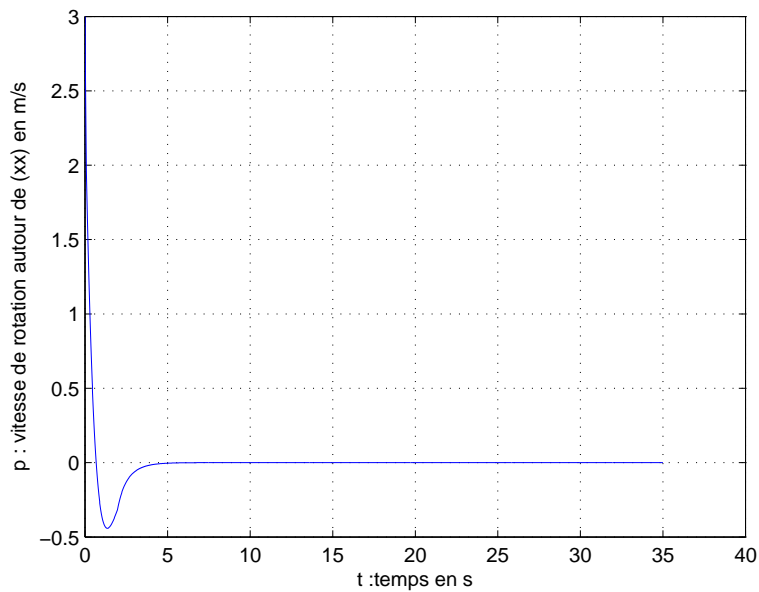


FIGURE 5.11: vitesse angulaire autour de l'axe des X

Nous constatons, dans les figures 5.11 et 5.12, que le drone XSF parvient à atteindre sa vitesse désirée en tangage et en roulis. Et cela partant d'une vitesse égale à 3m/s. De plus, on constate la convergence rapide des deux commandes (figures 5.13 et 5.14) vers zéro.

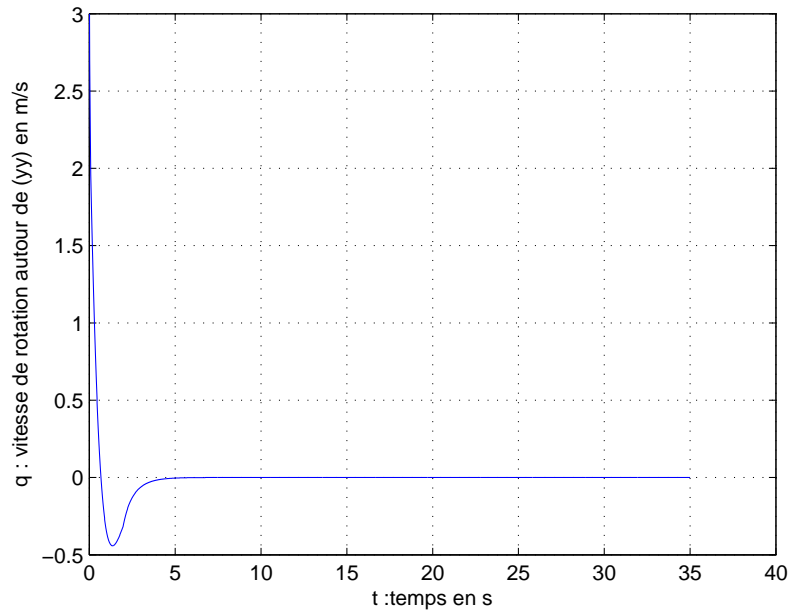
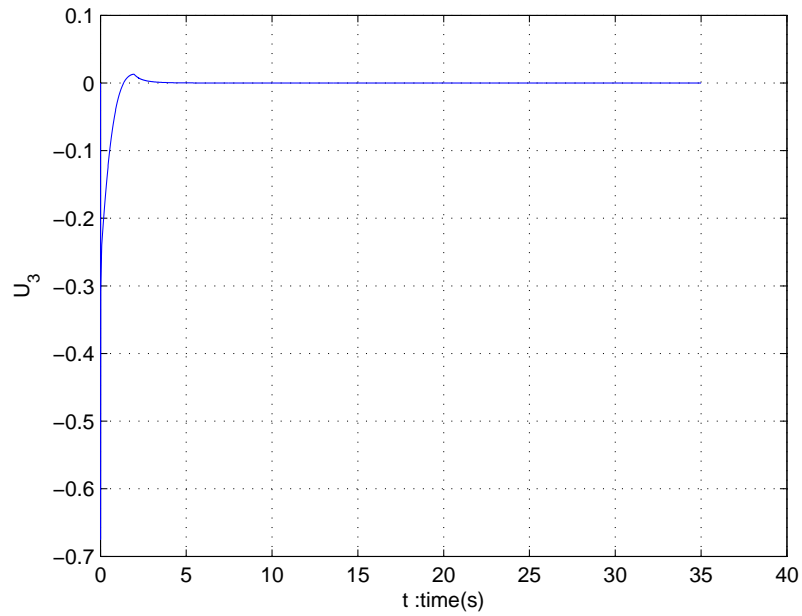


FIGURE 5.12: vitesse angulaire autour de l'axe des Y

FIGURE 5.13: La Commande  $U_3$

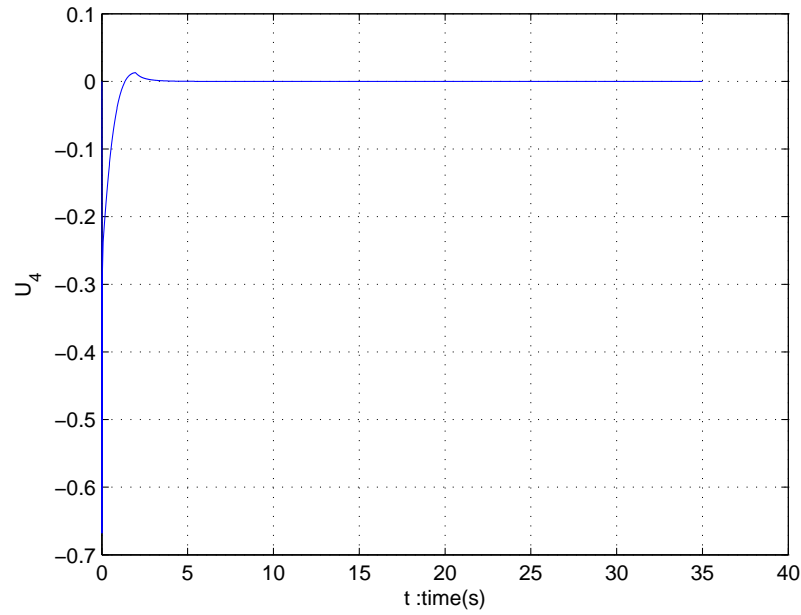


FIGURE 5.14: La Commande U4

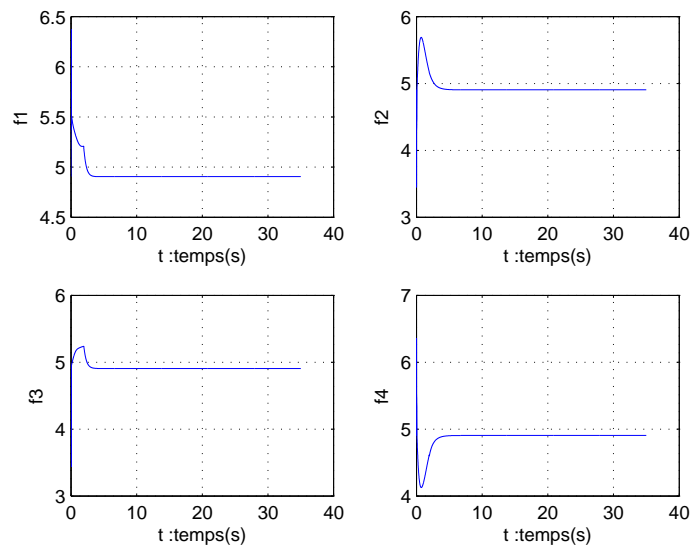


FIGURE 5.15: Forces des Rotors pour le mouvement Couplé

Les forces, dans la figure 5.15, du mouvement couplé parviennent à se stabiliser à 7N et ne la dépasse pas ce qui prouve la robustesse des commandes. Nous remarquons, dans 5.16 que les deux angles de pivotement passent par une phase transitoire, entre 0

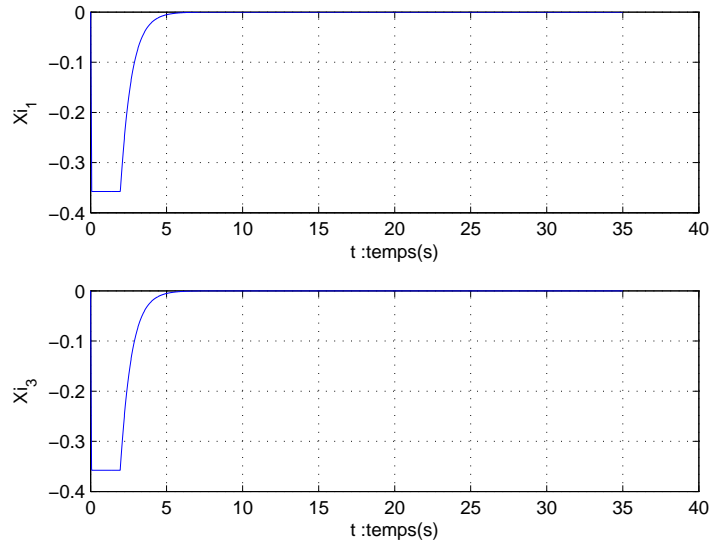


FIGURE 5.16: Angles de Pivotement

et 5 secondes. Ce qui prouve qu'ils passent par une phase de saturation, et grâce à la robustesse des commandes et à la stabilité numérique établie, ils arrivent à se stabiliser.

## 5.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté dans une première partie le modèle dynamique de l'XSF. Le modèle dynamique est exprimé en fonction des variables Euleriennes et prend en compte les effets gyroscopiques et aérodynamiques des rotors. Une extension du modèle rigide pour un modèle flexible a été établie. Une stratégie de stabilisation est présentée dans la deuxième partie. Partant du fait que la description est Eulerienne et les paramètres cinématiques et dynamiques sont exprimés dans le repère local, on utilise la méthode des petites perturbations pour linéariser le modèle. La méthode développée fournit un outil de stabilisation efficace, qui présente l'avantage de s'implanter aisément dans un micro-contrôleur embarqué. L'algorithme de stabilisation de l'XSF a été testé dans différents cas de mouvements perturbés et plus précisément dans le mouvement de roulis et de tangage. Les résultats obtenus sont satisfaisants et prouvent l'efficacité de la démarche.





---

# Conclusion Générale

---

Cette étude se place dans le domaine de la modélisation et commande des véhicules aériens autonomes sous-actionnés et flexibles.

Dans un premier temps, on a présenté la modélisation des engins volants flexibles. Nous avons pour cela établi un modèle général basé sur une description hybride lagrangienne - eulérienne d'un corps volant peu déformable. L'impératif d'optimisation du rapport précision /portabilité a été respecté. La richesse de la modélisation adoptée a notamment permis de faire intervenir le comportement d'un engin volant flexible de manière aisée avec un nombre de degrés de liberté restreint, tout en faisant apparaître le couplage inertiel entre le mouvement d'ensemble et la déformation du corps. La méthodologie adoptée a ainsi permis d'obtenir des résultats satisfaisants avec un temps de calcul réduit.

Le modèle mis en place a été appliqué, comme première validation, sur un dirigeable flexible. L'étude dynamique du dirigeable a mis à jour un problème peu connu concernant la détermination des masses ajoutées d'un corps flexible en grands déplacements dans l'espace. Grâce à un procédé original et moyennant certaines hypothèses, nous avons résolu analytiquement ce problème. Ceci a permis d'intégrer les masses ajoutées dans le modèle global sans risquer de l'alourdir, et autorise ainsi l'application de lois de commande et de stabilisation au modèle global du dirigeable flexible. L'approche doit néanmoins être testée sur des prototypes volants pour définir les limites de validité de nos hypothèses.

Pour le contrôle du dirigeable, on a proposé un algorithme de commande qui stabilise localement et asymptotiquement le dirigeable flexible et atténue ses vibrations au voisinage d'un point cible, en utilisant le backstepping. On a prouvé, par des tests numériques l'impact de flexibilité structurelle sur le mouvement d'ensemble ainsi que la

robustesse de la commande.

Comme seconde validation du modèle dynamique, nous avons choisi un engin volant flexible " plus lourd que l'air ", représenté par un drone quadricoptère à composants flexibles, développé au laboratoire IBISC dans le cadre d'un concours sur les micro-drones. Après l'introduction des spécificités aérodynamiques de l'engin dans le modèle global nous avons établi sa stabilisation autour d'un point cible en utilisant la méthode des petites perturbations et un contrôleur PID. Cet engin instable et très maniable par conception doit suivre des commandes robustes. Malgré les fortes nonlinéarités du modèle, on a pu extraire les actionneurs du drone à travers les commandes obtenues. Les résultats numériques sont satisfaisant et nous incitent à faire des tests pratiques en vol de cet engin afin de valider les lois de commande appliquées ou d'en proposer d'autres qui soient plus robustes.

Il est clair que ce travail ouvre plus de problèmes qu'il n'en résout. Nombreux points devraient être approfondis dans le domaine de la modélisation et commandes des engins volants flexibles afin que ceux-ci soient mieux guidés et qu'ils accomplissent au mieux les tâches qui leur incombent. Si la recherche sur la modélisation des drones-avions flexibles est bien lancée, il n'est pas de même pour d'autres types d'engins volants appelés à se développer de manière intensive au cours des prochaines années. Nous avons entrouvert une porte à travers ce modeste travail. D'autres études sur ces UAV ne manqueront pas de suivre ce chemin.

---

# Annexe A

---

Dans cette Annexe nous présentons le calcul des termes du développement du modèle Eulerien du Chapitre 2.

Tout d'abord revenons à l'équation 2.50 du chapitre 2 on aura :

$$\begin{aligned}
 J_{2Q} J_{2Q}^T &= 4 \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & -q_3 & -q_2 \\ q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^3 q_k^2 = 1 & -q_1 q_2 - q_0 q_3 + q_0 q_3 + q_1 q_2 & -q_1 q_3 + q_0 q_2 + q_1 q_3 - q_0 q_2 \\ -q_1 q_2 - q_0 q_3 + q_0 q_3 + q_1 q_2 & \sum_{k=0}^3 q_k^2 = 1 & q_2 q_3 - q_2 q_3 + q_0 q_1 - q_0 q_1 \\ -q_1 q_3 + q_0 q_2 + q_1 q_3 - q_0 q_2 & q_2 q_3 - q_2 q_3 + q_0 q_1 - q_0 q_1 & \sum_{k=0}^3 q_k^2 = 1 \end{pmatrix} \\
 &= 4I_3
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Pour le calcul de l'équation 2.53 du Chapitre 2 on aura :

$$\begin{aligned}
2J_{2Q}J_{2Q}^T &= 4 \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 & -\dot{q}_2 & -\dot{q}_3 \\ \dot{q}_0 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 & \dot{q}_0 & -\dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 & \dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \sum_{k=0}^3 q_k \dot{q}_k = 0 & \underbrace{-q_3 \dot{q}_0 + q_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 q_1 + \dot{q}_3 q_0}_{\nu_3} & \underbrace{q_2 \dot{q}_0 - q_3 \dot{q}_1 - q_0 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3}_{-\nu_2} \\ \underbrace{-(-q_3 \dot{q}_0 + q_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 q_1 + \dot{q}_3 q_0)}_{\nu_3} & 2 \sum_{k=0}^3 q_k \dot{q}_k = 0 & \underbrace{-q_1 \dot{q}_0 + q_0 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3}_{\nu_1} \\ \underbrace{-(q_2 \dot{q}_0 - q_3 \dot{q}_1 - q_0 \dot{q}_2 + q_1 \dot{q}_3)}_{\nu_2} & \underbrace{-(-q_1 \dot{q}_0 + q_0 \dot{q}_2 - q_3 \dot{q}_2 + q_2 \dot{q}_3)}_{\nu_1} & 2 \sum_{k=0}^3 q_k \dot{q}_k = 0 \end{pmatrix} \\
&= 4\tilde{\nu}_2
\end{aligned} \tag{A.2}$$

Pour le calcul de l'équation 2.73 et 2.38 du Chapitre 2 on aura :

$$\begin{aligned}
J_{2Q}\dot{q} &= 2 \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 & \dot{q}_0 & \dot{q}_3 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_2 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_0 & \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_0 \\ \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 \dot{q}_0 + \dot{q}_1 \dot{q}_0 - \dot{q}_3 \dot{q}_2 + \dot{q}_2 \dot{q}_3 = 0 \\ -\dot{q}_2 \dot{q}_0 + \dot{q}_0 \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \dot{q}_1 + \dot{q}_1 \dot{q}_3 = 0 \\ -\dot{q}_3 \dot{q}_0 + \dot{q}_0 \dot{q}_3 - \dot{q}_2 \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \dot{q}_1 = 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
\dot{J}_{2Q}q &= 2 \begin{pmatrix} -\dot{q}_1 & \dot{q}_0 & \dot{q}_3 & -\dot{q}_2 \\ -\dot{q}_2 & -\dot{q}_3 & \dot{q}_0 & \dot{q}_1 \\ -\dot{q}_3 & \dot{q}_2 & -\dot{q}_1 & \dot{q}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \\
&= \\
&\begin{pmatrix} -\dot{q}_1 q_0 + q_1 \dot{q}_0 - \dot{q}_3 q_2 + q_2 \dot{q}_3 \\ -\dot{q}_2 q_0 + \dot{q}_3 q_1 + \dot{q}_0 q_2 - \dot{q}_1 q_3 \\ -\dot{q}_3 q_0 - \dot{q}_0 q_1 - \dot{q}_1 q_2 + \dot{q}_0 q_3 \end{pmatrix} \tag{A.4} \\
&= \\
&- J_{2Q} \dot{q} = -2 \begin{pmatrix} \dot{q}_1 q_0 - q_1 \dot{q}_0 - \dot{q}_3 q_2 + \dot{q}_2 q_3 \\ \dot{q}_2 q_0 - \dot{q}_3 q_1 - \dot{q}_0 q_2 + \dot{q}_1 q_3 \\ \dot{q}_3 q_0 + \dot{q}_0 q_1 + \dot{q}_1 q_2 - \dot{q}_0 q_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pour le calcul de cette équation du Chapitre 2 on aura :

$$J_{1Q} = G_1 G_2^T = \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} J_{2Q}^T \tag{A.5}$$

Par suite :

$\dot{J}_{1Q} = \dot{G}_1 G_2^T + G_1 \dot{G}_2^T$  or par un simple calcul on aura  $\dot{G}_1 G_2^T = G_1 \dot{G}_2^T$  donc :

$$\dot{J}_{1Q} = 2G_1 \dot{G}_2^T \tag{A.6}$$

Par conséquent :

$$\dot{J}_{1Q} \mathbf{u}_o = 2J_{1Q} J_{1Q}^T G_1 \dot{G}_2^T \mathbf{u}_o = 2J_{1Q} G_2 (G_1^T G_1) \dot{G}_2^T \mathbf{u}_o$$

On calcule le terme

$$\begin{aligned}
G_1^T G_1 &= \begin{pmatrix} -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & q_0 & q_1 \\ q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 & -q_1 q_0 & -q_0 q_2 & -q_0 q_3 \\ -q_1 q_0 & q_0^2 + q_2^2 + q_3^2 & -q_1 q_2 & -q_1 q_3 \\ -q_2 q_0 & -q_2 q_1 & q_0^2 + q_1^2 + q_3^2 & -q_3 q_2 \\ -q_3 q_0 & -q_3 q_1 & -q_3 q_2 & q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 \end{pmatrix} = (I_4 - qq^T)
\end{aligned}$$

par suite on aura :

$$2J_{1Q}G_2(G_1^T G_1)\dot{G}_2^T \mathbf{u}_o = 2J_{1Q}G_2(I_4 - qq^T)\dot{G}_2^T \mathbf{u}_o \text{ et comme :}$$

$G_2 q = 0$  par suite on retrouve l'expression :  $\dot{J}_{1Q} \mathbf{u}_o = 2J_{1Q}G_2\dot{G}_2^T \mathbf{u}_o$  et on sait que :  
s'une part :

$$\begin{aligned}
G_2 &= \frac{1}{2}J_{2Q} \text{ donc } G_2\dot{G}_2^T = \frac{1}{4}J_{2Q}\dot{J}_{2Q}^T = \tilde{\nu}_2 \text{ d'où :} \\
\dot{J}_{1Q} \mathbf{u}_o &= J_{1Q}\tilde{\nu}_2 \mathbf{u}_o = J_{1Q}(\nu_2 \wedge \mathbf{u}_o) = -J_{1Q}(\mathbf{u}_o \wedge \nu_2).
\end{aligned}$$

#### Remarque2.4

Se basant sur le fait que cette analyse est destinée aux engins volants soumis à de petites déformations , donc on va garder les mêmes hypothèses que pour le cas rigide, par conséquent les termes inertiels exprimés dans le repère mobile sont invariants.

#### Notations

on note  $I_{RR}$  définie par  $m_{RR} = (J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q}$  : la matrice d'inertie de rotation du corps flexible :'(a)'

$I_{RD}$  défini par  $m_{RD} = (J_2)^T I_{RD}$  terme de couplage inertiel rotation-déformation :'(b)'

$I_{TD}$  défini par  $m_{TD} = J_{1Q}I_{TD}$  terme de couplage inertiel rotation-déformation : '(c)'

Comme on l'a signalé au début on va supposer que  $I_{TD}$ ,  $I_{RD}$  et  $I_{RR}$  sont constantes par rapport au temps vu les petites déformations.

Évaluons tout d'abord les composantes de  $Q_v$  :

◇ pour la première composante on a :

$$Q_{vT} = -m_{TD}\dot{\bar{Y}}_d + \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial \eta_1} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) \right]^T}_0 = -m_{TD}\dot{\bar{Y}}_d \quad (\text{A.7})$$

Il est clair que  $\frac{\partial}{\partial \eta_1} \left[ \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) \right]^T$  ne dépend pas de  $\eta_1$ .

on a :  $m_{TD} = \dot{q} J_{1Q} \bar{S}$  avec  $\bar{S} = \int_V \rho S dV$  où  $J_{1Q}$  est la dérivée partielle de  $J_{1Q}$  par rapport à  $q$  d'où :

$$Q_{vT} = -\eta_2 J_{1Q\eta_2} \bar{S} \quad (\text{A.8})$$

◇ pour le deuxième terme  $Q_{vq}$  on a

$$Q_{vq} = -m_{RR}\dot{q} - m_{RD}\dot{\bar{Y}}_d + \left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) \right]^T \quad (\text{A.9})$$

tout d'abord :

$$-m_{RR}\dot{q} = -\overbrace{(J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q}}^{\dot{\quad}} \dot{q} \quad (\text{A.10})$$

avec  $I_{RR}$  la matrice d'inertie en rotation exprimée dans le repère mobile  $R_m$ .



on aura :

$$\overbrace{(J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} \dot{q}} = (\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 \quad (\text{A.11})$$

puis pour le terme  $-m_{RD} \dot{\bar{Y}}_d$ , en utilisant (b) et la Remarque 2.4 on aura :

$$-m_{RD} \dot{\bar{Y}}_d = -(\dot{J}_{2Q})^T I_{RD} \dot{\bar{Y}}_d \quad (\text{A.12})$$

pour le terme :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T m_{RR} \dot{q}) \quad (\text{A.13})$$

en utilisant l'expression (a) on aura :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\dot{q}^T (J_{2Q}(q))^T I_{RR} J_{2Q}(q) \dot{q}) \quad (\text{A.14})$$

Par suite on retrouve :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\bar{\eta}}^T M \dot{\bar{\eta}} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q} (\eta_2^T (\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \dot{J}_{2Q} q) \quad (\text{A.15})$$

d'où :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) = q^T (J_{2Q})^T I_{RR} \dot{J}_{2Q} \quad (\text{A.16})$$

ou encore :

$$\frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) = -\nu_2^T I_{RR} \dot{J}_{2Q}(q) \quad (\text{A.17})$$

d'où :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) \right]^T = -(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 \quad (\text{A.18})$$

par conséquent :

$$Q_{vq} = -2(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 - (\dot{J}_{2Q})^T I_{RD} \dot{Y}_d \quad (\text{A.19})$$

◇ pour la troisième composante on a :

$$Q_{vd} = -m_{TD}^T \dot{T} + m_{RD}^T \dot{q} + \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial Y_d} \left( \frac{1}{2} \dot{\eta}^T M \dot{\eta} \right) \right]^T}_0 \quad (\text{A.20})$$

d'après la remarque 2.4 , par conséquent en utilisant les relations (a) et (b) on aura :

$$Q_{vd} = -m_{TD}^T \dot{T} + m_{RD}^T \dot{q} = -(\dot{J}_{2Q} I_{TD})^T \eta_1 + I_{RD}^T \dot{J}_{2Q} \dot{q} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned}
J_{2Q}(J_{2Q})^T I_{RR} J_{2Q} \ddot{\eta}_2 &= J_{2Q} \tau_2 \\
&- 2J_{2Q}(\dot{J}_{2Q})^T I_{RR} \nu_2 \\
&- J_{2Q}(\dot{J}_{2Q})^T(q) I_{RD} \dot{\ddot{Y}}_d \\
&- J_{2Q}(J_{2Q})^T I_{RD} \ddot{\ddot{Y}}_d
\end{aligned} \tag{A.22}$$

et d'après A.2 et A.1 on sait que :

$$\begin{aligned}
J_{2Q}(J_{2Q})^T &= 4I_d \\
2J_{2Q}(\dot{J}_{2Q})^T &= 4\tilde{\nu}_2
\end{aligned}$$

d'où on retrouve :

$$4I_{RR} J_{2Q} \dot{\nu}_2 = J_{2Q} \tau_2 - 4\tilde{\nu}_2 I_{RR} \nu_2 - 4\tilde{\nu}_2 I_{RD} \ddot{\ddot{Y}}_d - 4I_{RD} \ddot{\ddot{Y}}_d \tag{A.23}$$

ou encore :

$$I_{RR} J_{2Q} \ddot{q} = \frac{1}{4} J_{2Q} \tau_2 - \nu_2 \wedge (I_{RR} \nu_2) - \nu_2 \wedge (I_{RD} \dot{\ddot{Y}}_d) - I_{RD} \ddot{\ddot{Y}}_d \tag{A.24}$$

---

# Annexe B

---

Dans cette Annexe on présente le calcul des différents termes du Chapitre 3. On a l'expression du potentiel rigide est donné par :

$$\phi = \phi_{rig} = u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3 \quad (\text{B.1})$$

et l'énergie cinétique est :

$$\begin{aligned} 2E_a = & Au^2 + Bv^2 + Cw^2 + Pp^2 \\ & + Qq^2 + Rr^2 + 2A'vw + 2B'wu + 2C'uv \\ & + 2P'qr + 2Q'rp + 2R'pq + 2p(Fu + Gv + Hw) \\ & + 2q(F'u + G'v + H'w) + 2r(F''u + G''v + H''w) \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

en remplaçant cette expression dans l'énergie cinétique on aura :

$$\begin{aligned}
& -\rho \int \int_s \phi \frac{\delta \phi}{\delta \mathbf{n}} ds \\
& = \\
& -\rho \int \int_s (u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3) \frac{\delta(u\phi_1 + v\phi_2 + w\phi_3 + p\chi_1 + q\chi_2 + r\chi_3)}{\delta \mathbf{n}} ds \\
& = \\
& -\rho \int \int_s \phi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} u^2 ds - \rho \int \int_s \phi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} v^2 ds - \rho \int \int_s \phi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} w^2 ds - \rho \int \int_s \chi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} p^2 ds \\
& -\rho \int \int_s \chi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} q^2 ds - \rho \int \int_s \chi_3 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} r^2 ds - 2\left(\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} + \phi_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial n})\right) v w ds + \\
& 2\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial n} + \phi_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial n})\right) w u ds + 2\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} + \phi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n})\right) u v ds \\
& + 2\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_2 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \chi_2}{\partial n})\right) q r ds + 2\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \chi_1}{\partial n})\right) r p ds \\
& + 2\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial n})\right) p q ds + 2p\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_1}{\partial n})\right) u ds \\
& + \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n})\right) v ds + \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_1}{\partial n} + \chi_1 \frac{\partial \phi_3}{\partial n})\right) w ds + \\
& 2q\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n})\right) u ds + \\
& \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_2}{\partial n})\right) v ds + \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_2}{\partial n} + \chi_2 \frac{\partial \phi_3}{\partial n})\right) w ds \\
& + 2r\left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_1 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_1}{\partial n})\right) u ds \\
& + \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_2 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_2}{\partial n})\right) v ds + \left(-\frac{1}{2}\rho \int \int_s (\phi_3 \frac{\partial \chi_3}{\partial n} + \chi_3 \frac{\partial \phi_3}{\partial n})\right) w ds
\end{aligned} \tag{B.3}$$

en identifiant l'expression de l'énergie cinétique B.2 on retrouve les termes de la matrice de masse ajoutée.

Pour le calcul du coefficient de fourier on a :

$$\beta_j = \frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sin(K_p x) \sin\left(\frac{2\pi j x}{H}\right) dx \quad (\text{B.4})$$

Si  $j = p$  alors  $\frac{1}{H} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sin(K_p x) \sin\left(\frac{2\pi j x}{H}\right) dt = \frac{H}{2}$

et 0 sinon.

Par suite  $\beta_j = \frac{1}{2}$ .

On présente dans cette partie le calcul du premier terme de la masse ajoutée du au premier mode de déformation  $Y_{d1}$  :

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\rho_{air} \int \int_s \phi_{s1} \frac{\partial \phi_{s1}}{\partial \mathbf{n}} dS \\
&= -\rho_{air} \int \int_s \left( \frac{H \sin(K_1 x) \cos \theta \mathbb{K}_1(K_1 r)}{6\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr}} \right) \frac{\partial \left( \frac{H \sin(K_1 x) \cos \theta \mathbb{K}_1(K_1 r)}{6\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr}} \right)}{\partial r} \\
&= -\rho_{air} \int \int_s \frac{H^2 \sin^2(K_1 x) \cos^2 \theta \mathbb{K}_1(K_1 r) K_1}{36\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)^2} \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_1}{36\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)} \int_{2\pi}^0 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sin^2(K_1 x) \cos^2 \theta dx d\theta \tag{B.5} \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_1}{36\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{2\pi}^0 \left( \frac{1 - \cos(2K_1 x)}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) dx d\theta \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_1}{36\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)} 2\pi H \\
&= -\rho_{air} \frac{H^3 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_1}{18\pi \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_1 R)}{dr} \right)}
\end{aligned}$$

On présente le calcul du deuxième terme de la masse ajoutée du au deuxième mode de déformation  $Y_{d2}$  :

$$\begin{aligned}
D_2 &= -\rho_{air} \int \int_s \phi_{s2} \frac{\partial \phi_{s2}}{\partial \mathbf{n}} dS \\
&= -\rho_{air} \int \int_s \left( \frac{H \sin(K_2 x) \cos \theta \mathbb{K}_1(K_2 r)}{10\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr}} \right) \frac{\partial \left( \frac{H \sin(K_2 x) \cos \theta \mathbb{K}_1(K_2 r)}{10\pi \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr}} \right)}{\partial r} \\
&= -\rho_{air} \int \int_s \frac{H^2 \sin^2(K_2 x) \cos^2 \theta \mathbb{K}_1(K_1 r) K_2 \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr}}{100\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)^2} \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_2 R) K_1}{100\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)} \int_{2\pi}^0 \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \sin^2(K_2 x) \cos^2 \theta dx d\theta \tag{B.6} \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_2 R) K_1}{100\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)} \int_{-\frac{H}{2}}^{\frac{H}{2}} \int_{2\pi}^0 \left( \frac{1 - \cos(2K_2 x)}{2} \right) \left( \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right) dx d\theta \\
&= -\rho_{air} \frac{H^2 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_2}{100\pi^2 \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)} 2\pi H \\
&= -\rho_{air} \frac{H^3 \mathbb{K}_1(K_1 R) K_2}{50\pi \left( \frac{d\mathbb{K}_1(K_2 R)}{dr} \right)}
\end{aligned}$$





---

# Bibliographie

---

- [AB08] N. Azouz and S. Bennaceur. Modeling and stabilization of a mini quadrotor helicopter,. *Int. Rev. of Eng. And Aerospace, Vol.8*, August 2008.
- [ABDP07] N. Azouz, K. Benzermene, G. Damm, and G. Pradel. Modelling and ddevelopment of a 4 rotors helicopter uav.,. *In 6th IFAC Symposium on intelligent Autonomous Vehicles*,, 2007.,
- [ABL02] N. Azouz, Y. Bestaoui, and O. Lemaître. Dynamic analysis of airships with small deformations. *3rd IEEE Workshop on Robot Motion and Control, Bukowy Dworek*, Novembre 2002.
- [AC80] R. GIBERT A. COMBESCURE. Fluid structure interaction/a general method used in the ceasemt computer programs. *COMPUTERS STRUCTURES, Vol.12.*, p. 471 - 474., 1980.
- [ALT03] E. ALTUG. Vision based control of unmanned aerial vehicles with applications to an autonomous four rotor helicopter, quadrotor.,. *Ph.D. dissertation, faculties of the university of Pennsylvania.*, 2003.
- [ANG70] A. ANGOT. Compléments de mathématiques. *Masson et Cie*, 1970.
- [ANL94] B. Andrea-Novel and M.Cohen D Lara. Commandes linéaires des systèmes dynamiques.,. *Masson.Paris.*, 1994.
- [AOM02] E. Altug, J.P. Ostrowski, and R. Mahony. Control of a quadrotor helicopter using visual feedback.,. *In Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*,, 2002.,
- [APR<sup>+</sup>01] J.R. Azinheira, E. DE Paiva, J. Ramos, S.S. Bueno, M. Bergerman, and S. B. V. Gomes. Extended dynamic model for aurora robotic airship. *In 14th AIAA Lighter-Than-Air Conference and Exhibition, Akron, Ohio (USA)*,, July 2001.,
- [B96] F. Boyer and Ph. Coiffet . Generalization of newton- euler model for flexible manipulators.,. *Int. Jour. For Robotics Research 17(3)*, pp. 282- 293.,, 1996.,
- [Ba75] K. J. Bathe and al. Finite elements for large deformation dynamic analysis.,. *INT.Jour. For Num. Meth In Eng.*, Vol 9, pp.353-386., 1975.,
- [BA05] L. Beji and A.Abichou. Stabilization of trim trajectories of a blimp in ascent and descent flight conditions.,. *International Journal of Control, vol. 78, N 10*, 706-719., 2005.

- [BAA06a] L. Beji, A. Abichou, and N. Azouz. Modelling, motion planning and control of the drones with revolving airfoils : an outline of the xsf., *Robot Motion and Control Recent Developments Series : Lecture Notes in Control and Information Sciences , Vol. 335 Kozlowski, Krzysztof (Ed.), ISBN : 1-84628- 404-X.*, 2006.
- [BAA06b] S. Bennaceur, N. Azouz, and A. Abichou. An efficient modeling of flexible blimps : Eulerian approach. *Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference. AIAA- 2006-6621*,, August 2006,.
- [BAB04] L. Beji, A. Abichou, and Y. Bestaoui. Position and attitude control of an underactuated autonomous airship., *International journal of differential equations and applications*,vol. 8, N 3, 231-255., 2004.
- [BH00] Y. Bestaoui and T. Hamel. Dynamic modelling of small autonomous blimps., *Proc. of Conference on Methods and Models in Automation and Robotics (MMAR00)*, Miedzydroje, Poland, pp. 579-584,, 2000,.
- [BK99] F. Boyer and W. Khalil. Kinematic model of a mult-beam structure undergoing large elastic displacements and rotations, part two ; kinematic model of an open chain. *Journal of Mechanism and Machine Theory*, 34 :223-242., 1999.
- [BNS04] S .Bouabdallah, A. Noth, and R. Siegwart. Pid vs lq control techniques applied to an indoor micro quadrator., *In Proceedings of IEEE/RSJ International Conference On Robotics and Automation*,, September 2004,.
- [BQM03] M. Bianchin, G. Quaranta, and P. Mantegazza. State space reduced order models for static aeroelasticity and flight mechanics of flexible aircrafts., *17th national conference AIDAA,Italy*,, 2003,.
- [CDL04] P. Castillo, A. Dzul, and R. Lozano. Real-time stabilization and tracking of a four rotor mini-rotorcraft., *IEEE Transactions on Control Systems Technology, Regular paper, Vol.12, Issue 4, pp. 510-516.*, 2004.
- [CH06] M .Chen and M. Huzmezan. A simulation and  $h_{\infty}$  loop shaping of a quadrator uav., *In Proceedings of 14<sup>th</sup>. IASTED International Conference On Modelling and Simulation*,, 2006,.
- [CHI01] A. CHIRETTE. Contribution à la commande et à la modélisation des hélicoptères., *Thèse de Doctorat, Université d'Evry*,, December 2001,.
- [CN02] A. Calise and K. Nakwan. Adaptive compensation for flexible dynamics., *AIAA Guidance, navigation and control conference. Monterey, Canada*,, 2002,.
- [COR99] J-M. CORON. On the stabilization of some nonlinear control systems : results, tools, and applications., *Kluwer Academic Publishers, Hollande, 307-367, NATO advanced Study Institute, Nonlinear analysis, differential equations, and control, eds F.H. Clarke et R.J. Stern.*,, 1999,.
- [DEG01] G. DEGREZ. Performance et stabilité des avions., *Universite libre de Bruxelles*,, 2001.

- [E.D98] E.D.Sontag. Mathematical control theory, deterministic finite dimensional systems. *Second Edition, Springer-Verlag.*, 1998.
- [ER59] B. Etkin and L. D. Reid. Dynamics of flight., *Inc, Newyork, ISBN 0-471-034185.*, 1959,.
- [FC06] M. C. Fang and G. R. Chen. On the nonlinear hydrodynamic forces for a ship advancing in waves. *Journal of Ocean Engineering*, 33() :2119–2134, March 2006.
- [FOS96] T. FOSSEN. Guidance and control of ocean vehicles., *J. Wiley press, Chichester.*, 1996,.
- [Gib88] R. J. Gibert. Vibrations des structures. interactions avec les fluides., *fluides,( Ed. Eyrolles, Paris) pp 137-140.*, 1988,.
- [GOL01] GOLDESTINE. Classical mechanics. *Ed. Addison Wesley Publishing Company ; Boston, 3rd edition.*, 2001.
- [HB03] S. Hima and Y. Bestaoui. Time-optimal path planning for lateral navigation of an autonomous airship. *In AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit. Austin (TX), USA.*, August 2003,.
- [H.K92] H.K.Khalil. Non linear systems., *Michigan State University*, 1992.
- [HM95] J. Henri, P. Morand, and Roger Ohayon . Fluid-structure interaction : Applied numerical methods., *Edition Masson. Paris.*, 1995,.
- [HML002] T. Hamel, R. Mahony, R. Lozano, and J.P. Ostrowski. Dynamic modelling and configuration stabilization for an x4- flyer., *in IFAC 15th Wold Congress Automatic Control.*, 2002.
- [Hyg03] E. Hygounenc. Modélisation et commande d'un dirigeable pour le vol autonome., *Thèse,, l'Université Paul Sabatier de Toulouse.*, Octobre 2003.
- [JM06] R. L. Taylor J. Makerle. Fluid-structure interaction problems, finite element approach and boundry elements approches. , *Finite Element Anal. Design* 31,231-240,, June 2006,.
- [KG99] G.A Khoury and J.D Gillet. Airship technology., *Cambridge Univ. Press.*, 1999,.
- [LAM45] H. LAMB. On the motion of solids through a liquid. hydrodynamics., *Dover, New York, (6th edition).*, 1945,.
- [Lan02] E. De Langre. Absolutely unstable waves in inviscid hydroelastic systems. *Journal of Sound and Vibration*, 256/2 :299-317., 2002.
- [MA06] A. Mouhinguou and N. Azouz. Dynamical analysis of a flexible multibody systems : Lagrangian approach., *In Proceedings ASME 8th Biennial Conference on Engineering Systems Design and Analysis.*, July 2006,.
- [McK04] P. McKerrow. Modelling the draganflyer four-rotor helicopter., *Proceedings of the 2004 IEEE Conference on Robotics and Automation.*, 2004,.

- [MEG06] K. MEGUENNI. Commande d'un système sous-actionné : application à un drone à quatre hélices.,. *Thèse de Doctorat, Université d'Evry*,, December 2006.,
- [MS95] P. Morin and C. Samson. Time varying exponential stabilization of the attitude of a rigid spacecraft with two controls. *Institiut National de Recherche en Informatique et en Automatique, Rapport de Recherche N 2493, Février*,, 1995.
- [NTE06] N.Guenard, T.Hamel, and L. Eck. Control law for the teleoperation for an uav known as an x4-flyer.,. *IROS. CHINA*,, 2006.
- [OEKA05] K.El Omari, E.Schall, B. Koobus, and A.Dervieux. Aeroelastic coupling between a low mach inviscid flow and a flexible generic airship. *Rapport de recherche de l'INRIA - Sophia Antipolis , Equipe : SMASH, INRIA* ,, Janvier 2005.,
- [Pao04] M.P. Paouidoussis. Fluid-structure interactions : Slender structures and axial flow.,. *Vol. II, Elsevier, The Netherlands*,, 2004.,
- [PAS91] M. PASCAL. Vibrations analysis of flexible multibody systems. *IDynamics and Stability of Systems, 6(3) :217-234*,, 1991.,
- [PCD05] R. Lozano P. Castillo and A.E Dzul. Modelling and control of mini-flying machines. *Springer, Berlin*, 2005.,
- [PE96] K. Y. Pettersen and O. Egeland. Exponential stabilization of an underactuated surface vessel. *in Proc. 35th IEEE Conference on Decision and Control, Kobe, Japan, Dec., 967-971*,, 1996.
- [PMHR02] P.Pound, R. Mahony, P. Hynes, and J. Roberts. Design of a four rotor aerial robot.,. *In Proceedings of the Australain Conference on Robotics and Automation*,, November 2002.,
- [SAL06] S. Samaali, A.Abichou, and L.Beji. Longitudinal and horizontal stabilization of unmanned blimp.,. *In ternational Journal of Vehicle Autonomous Systems, Vol, N, pp.*, 2006.
- [SBL06] J. F. Sigrist, D. Broc, and C. Lainé. Dynamic analysis of a nuclear reactor with fluid-structure interaction.,. *ScienceDirect, Nuclear Engineering and Design*,, June 2006.,
- [SCS06] W. Schiehlen, N. Cuse, and R. Seifried. Multibody dynamics in computational mechanics and engineering applications.,. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Volume 195, Issues 41-43, 15,pp. 5509-5522*,, 2006.,
- [SHA81] A. SHABANA. Dynamics of multibody systems.,. *Willey and Sons, New York*,, 1981.,
- [SHA88] A. SHABANA. Dynamics of multibody systems.,. *Edition Springer-Verlag*,, 1988.,
- [SIM87] J. SIMO. The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible aircrafts.,. *Journal of Sound and Vibration, 119, pp. 487-508*,, 1987.,
- [Tuz01] I. Tuzc. Dynamics and control of flexible aircraft.,. *PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University*,, 2001.

- [UE06] B. Ugurlu and A. Ergin. A hydroelasticity method for vibrating structures containing and/or submerged in flowing fluid. *Journal of Sound and Vibration*, 2006,.
- [WM05] M. Wu and Torgeir Moan. Efficient calculation of wave-induced ship responses considering structural dynamic effects. *Journal of Applied Ocean Research*, (27) :81–96, October 2005.
- [YTL03] Y. Yadykin, V. Tenetov, and D. Levin. The added mass of a flexible plate oscillating in a fluid,. *Journal of Fluids and Structures*, 2003,.