



HAL
open science

Etude de convergences de séries aléatoires échantillonnées, mesures de Markov quasi-Bernoulli ou quasi-Bernoulli faible et temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeants

Thomas Langlet

► **To cite this version:**

Thomas Langlet. Etude de convergences de séries aléatoires échantillonnées, mesures de Markov quasi-Bernoulli ou quasi-Bernoulli faible et temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeants. Mathématiques [math]. Université de Picardie Jules Verne, 2009. Français. NNT : . tel-00465854

HAL Id: tel-00465854

<https://theses.hal.science/tel-00465854>

Submitted on 22 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ DE PICARDIE JULES VERNE

UFR DES SCIENCES

Laboratoire Amiénois de Mathématiques Fondamentales
et Appliquées, CNRS UMR 6140

THÈSE

en vue de l'obtention du

GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE
PICARDIE JULES VERNE

Discipline : Mathématiques

**Etude de convergences de séries aléatoires
échantillonnées, mesures de Markov
quasi-Bernoulli ou quasi-Bernoulli faible et temps
de retour uniforme dans les systèmes
exponentiellement mélangeants.**

présentée et soutenue publiquement par

Thomas Langlet

devant le jury composé de

Thierry de la Rue	Rapporteur
Fabien Durand	Examineur
Ai Hua Fan	Directeur de thèse
Olivier Goubet	Examineur
Yanick Heurteaux	Président
Benoît Saussol	Rapporteur
Dominique Schneider	Directeur de thèse

Remerciements

En premier lieu, je tiens à remercier Ai Hua Fan et Dominique Schneider pour avoir encadré cette thèse et ainsi m'avoir accompagné dans la recherche. Merci en particulier à Ai Hua pour ses discussions toujours très passionnantes et instructives. Ce sont, en partie ses cours qui m'ont donné envie d'améliorer mes connaissances dans le domaine. Merci à Dominique, pour sa patience, sa disponibilité, ses conseils et son soutien.

Thierry de la Rue et Benoît Saussol m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche ingrate de rapporter cette thèse. Je remercie Thierry pour sa disponibilité et pour ses remarques constructives. Benoît Saussol a été un de mes premiers enseignants à l'université : il m'a fait découvrir les joies de la topologie. Un peu plus tard, en master 2, il m'a montré comment faire de la pâte à pain ou comment se reconvertir boulanger quand on fait de la théorie ergodique. Je remercie également Fabien Durand, Olivier Goubet et Yannick Heurteaux de s'être joint à mon jury de thèse.

Je garderais un excellent souvenir de ces quatre années passées au sein du LAMFA. J'en remercie tous ses membres tant les chercheurs que les secrétaires ou le responsable informatique.

Je ne pourrais évidemment pas clôturer ces remerciements en oubliant de remercier toutes les personnes qui m'ont supporté pendant cette thèse. Je pense ici à mes collègues et amis thésards : Emilien, Stéphanie, Guillaume, Benoît, Jean-Baptiste, Lingmin, Bing, Nadir... Ils ont tous contribué à la bonne humeur dans les bureaux doctorants, aux moments de détente, aux parties de desk volley, aux séminaires doctorants ...

Un dernier remerciement pour une bretonne à qui je tiens, qui a su me remotiver et m'encourager dans les périodes creuses.

Résumé

Dans la première partie de cette thèse, on s'intéresse à la convergence de certaines séries aléatoires. On détermine des conditions suffisantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ et sur les variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$, afin que pour presque tout $\omega \in \Omega$, on ait la convergence uniforme ou pour presque tout x de la série $\sum_{k \geq 1} a_k f(x \cdot (X_1 + \dots + X_k)(\omega))$ pour une certaine classe de fonctions f . On trouve, aussi, des conditions suffisantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ et sur les variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$, afin que pour presque tout $\omega \in \Omega$, on ait la convergence dans $L^2(\mu)$ ou μ -presque partout de la série $\sum_{k \geq 1} a_k T^{(X_1 + \dots + X_k)(\omega)}(g)(x)$ pour certaines classes de fonctions $g \in L^2(\mu)$ et de flot $\{T^t, t \in G\}$ d'opérateurs de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$ (où G est un semi-groupe de \mathbb{R}).

La deuxième partie porte sur des propriétés de mesures : quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible. On trouve notamment des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une mesure de Markov inhomogène soit quasi-Bernoulli ou quasi-Bernoulli faible. On caractérise à l'aide de ces conditions les mesures de Bernoulli qui sont quasi-Bernoulli ou quasi-Bernoulli faible. On prouve que si une mesure de Bernoulli n'ayant que des probabilités non nulles est quasi-Bernoulli faible alors elle est quasi-Bernoulli.

La dernière partie est consacrée à l'étude du problème du temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeant. Il s'agit d'avoir un recouvrement aléatoire de l'espace engendré par un processus exponentiellement mélangeant. Etant donné un recouvrement aléatoire, on obtient une estimation du nombre de recouvrements en fonction de la dimension maximale locale de la mesure.

Mots clés : séries aléatoires, transformée ergodique de Hilbert, mesures quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible, temps de retour uniforme, système exponentiellement mélangeant

Abstract

In the first part of this thesis, we study the convergence of two different random series. We give some sufficient conditions on the sequence $(a_k)_{k \geq 1}$, on the random independent variables $(X_k)_{k \geq 1}$, such that for almost every ω , to have the uniform convergence or almost everywhere convergence of $\sum_{k \geq 1} a_k f(x \cdot (X_1 + \cdots + X_k)(\omega))$ for a certain class of functions f . We also find some sufficient conditions on $(a_k)_{k \geq 1}$ and on the random independent variables $(X_k)_{k \geq 1}$ to have a certain class of function $g \in L^2(\mu)$ and a certain class of operator $\{T^t, t \in G\}$ such that the series $\sum_{k \geq 1} a_k T^{(X_1 + \cdots + X_k)(\omega)}(g)(x)$ converge in $L^2(\mu)$ or for μ -almost every x .

In the second part, we prove some necessary and sufficient condition for an inhomogeneous Markov measure to be a quasi-Bernoulli measure or a weak quasi-Bernoulli measure. We apply this condition on the Bernoulli measure. We proved that a Bernoulli measure which only has some non-negative probability is a weak quasi-Bernoulli measure, then it is a quasi-Bernoulli measure.

The last part is devoted to the study of a uniform hitting problem in an exponentially mixing dynamical system. This is a random covering problem driven by an exponentially mixing stationary process. For such a covering, among others, we obtain a satisfactory estimation on the covering numbers.
Keywords : random series, ergodic Hilbert transform, quasi-Bernoulli measure, weak quasi-Bernoulli measure, uniform return times, exponentially mixing dynamical system.

Table des matières

Introduction	11
1 Séries de fonctions le long de marches aléatoires	37
1.1 Introduction et résultats principaux	37
1.2 Ordres de grandeur de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega))$	41
1.2.1 Cas où ϕ_{X_1} vérifie (1.2)	41
1.2.2 Cas discret et ϕ_{X_1} vérifie (1.3) ou (1.4)	43
1.3 Démonstrations des Théorèmes 1.2, 1.4 et 1.5	43
1.3.1 Partie commune des différents cas	44
1.3.2 Majoration de $I_{1,2}$	45
1.3.3 Majoration de l'intégrale I_2	48
1.4 Preuve de la convergence de $\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k(\omega))$	50
1.4.1 Majoration uniforme dans le cas discret	50
1.4.2 Convergence de la série	51
1.5 Cas où la marche aléatoire est non homogène dans le temps	53
1.6 Les cas transient et récurrent	56
1.7 Le théorème de Sprindžuk	59
2 Séries avec poids de transformations échantillonnées	60
2.1 Introduction	60
2.2 Preliminary facts	69
2.2.1 Spectral lemma	69
2.2.2 Trigonometric polynomial estimates	70
2.3 Proof of our trigonometric polynomial estimates	71
2.3.1 Proof of Theorem 2.13	71
2.3.2 Proof of Theorem 2.15	77
2.4 Proof of L^2 and a.e. convergence	78
2.4.1 L^2 convergence	78
2.4.2 Almost everywhere convergence	80

2.4.3	Almost everywhere convergence in the non homogeneous case	85
2.5	Ergodic Hilbert Transform	87
2.5.1	Spectral regularization	88
2.5.2	EHT almost everywhere convergence	92
3	Mesures quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible	100
3.1	Mesure quasi-Bernoulli	101
3.1.1	Le cas général	101
3.1.2	Mesure de Markov inhomogène	103
3.1.3	Mesure de Bernoulli	104
3.1.4	Mesure de Riesz	106
3.2	Mesure quasi-Bernoulli faible	107
3.2.1	Mesure de Markov inhomogène	109
3.2.2	Mesure de Bernoulli	111
3.2.3	Mesure de Riesz	112
4	Temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeant	114
4.1	Introduction	114
4.2	Probabilistic setting	116
4.3	On exponentially mixing property	118
4.4	Weighted Borel-Cantelli lemma	119
4.5	Fundamental inequalities	121
4.5.1	Basic inequalities	121
4.6	Proofs of Theorems	126
4.6.1	Proof of Theorem 4.2	126
4.6.2	Proof of Theorem 4.3	127
4.6.3	Proof of Theorem 4.1	127
4.7	Gibbs measures on subshifts of finite type	128
	Bibliographie	130

Introduction

Plan général

Cette thèse est divisée en trois parties indépendantes. Dans la première partie, on considère deux familles de séries aléatoires :

$$\sum_{k \geq 1} a_k f(x \cdot (X_1 + \cdots + X_k)),$$
$$\sum_{k \geq 1} a_k T^{X_1 + \cdots + X_k}(g)(x)$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres complexes, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue 1-périodique, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de carré intégrable définie sur un espace mesuré (E, \mathcal{A}, μ) , $\{T^t, t \in G\}$ un flot discret ou continu d'opérateurs de $L^2(\mu)$ dans $L^2(\mu)$ (où G est un semi-groupe de \mathbb{R}) et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. On détermine des conditions suffisantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ et sur les lois des X_k ($k \geq 1$), afin que pour presque tout $\omega \in \Omega$, on ait la convergence uniforme ou μ -presque partout de la série $\sum_{k \geq 1} a_k f(x \cdot (X_1 + \cdots + X_k)(\omega))$ pour une certaine classe de fonctions f . De même, on trouve des conditions suffisantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ et sur les lois des X_k ($k \geq 1$), afin que pour presque tout $\omega \in \Omega$, on ait la convergence $L^2(\mu)$ ou μ -presque partout de la série $\sum_{k \geq 1} a_k T^{(X_1 + \cdots + X_k)(\omega)}(g)(x)$ pour une certaine classe de fonctions g . On traitera deux situations qui nécessitent des techniques différentes : $(X_k)_{k \geq 1}$ identiquement distribuées engendrant une marche aléatoire homogène et un cas où les suites de variables aléatoires ne sont pas identiquement distribuées fournissant ainsi une marche aléatoire inhomogène.

La deuxième partie porte sur des propriétés de mesures : quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible. On trouve notamment des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une mesure de Markov inhomogène soit quasi-Bernoulli

ou quasi-Bernoulli faible. Soit $\lambda \in \mathbb{N}^*$, notons μ la mesure de Bernoulli inhomogène définie sur $\{1, \dots, \lambda\}^{\mathbb{N}^*}$ et $p_n(\epsilon)$ la mesure de l'ensemble des mots ayant ϵ en $n^{\text{ième}}$ lettre, pour tout $1 \leq \epsilon \leq \lambda$. On démontre le Corollaire 3.7 : si μ est une mesure quasi-Bernoulli alors il existe une mesure de probabilité $(p(\epsilon))_{1 \leq \epsilon \leq \lambda}$ sur $\{1, \dots, \lambda\}$ telle que $(p_n(\epsilon) - p(\epsilon))_{n \geq 1} \in l^1$, pour tout $1 \leq \epsilon \leq \lambda$. On démontre aussi que si une mesure de Bernoulli n'ayant que des probabilités non nulles est quasi-Bernoulli faible alors elle est quasi-Bernoulli.

La dernière partie est consacrée à l'étude du problème du temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeant. Il s'agit d'avoir un recouvrement aléatoire de l'espace engendré par un processus exponentiellement mélangeant. Etant donné un recouvrement aléatoire, on obtient une estimation du nombre de recouvrements en fonction de la dimension maximale locale de la mesure. Cette estimation généralise un résultat de Fan, Schmeling et Troubetzkoy [30] pour l'application doublante sur l'intervalle unité.

Dans la suite, on développe ce plan et on énonce nos résultats principaux.

Les chapitres 1 et 2 proviennent notamment de ma collaboration avec Dominique Schneider. L'article correspondant au chapitre 1 a été soumis au bulletin de la SMF. Le chapitre 4 a été coécrit avec Ai Hua Fan et Bing Li, il a été accepté au proceedings de Fractals and related fields.

Séries aléatoires

Considérons une suite de variables aléatoires $(Y_k)_{k \geq 1}$ définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, à valeurs dans un espace de Banach \mathbb{B} . L'espace \mathbb{B} peut être, par exemple, le corps des nombres complexes \mathbb{C} , l'espace $C(\mathbb{T})$ des fonctions 1-périodiques, continues sur les réels à valeurs complexes ou encore l'ensemble des fonctions de carré intégrable. Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes, on voudrait étudier la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 1} a_k Y_k. \quad (1)$$

Soit ξ une fonction positive définie sur \mathbb{Z} . Désignons par $A_0(\mathbb{T}, \xi)$ l'ensemble des fonctions de $C(\mathbb{T})$ telles que

$$\hat{f}(0) = 0 \text{ et } |||f||| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(j)| \xi(j) < +\infty$$

où $\hat{f}(j)$ désigne le $j^{\text{ième}}$ coefficient de Fourier de f . Dans la première partie de cette thèse, on s'intéresse au cas particulier $\mathbb{B} = A_0(\mathbb{T}, \xi)$. Soient $f \in A_0(\mathbb{T}, \xi)$ et $(S_k)_{k \geq 1}$ une marche aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on considère

$$Y_k(\omega) : x \mapsto f(xS_k(\omega)).$$

On cherche des conditions sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$, sur la fonction ξ et sur la marche aléatoire pour que pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour toute fonction f appartenant à $A_0(\mathbb{T}, \xi)$, la série

$$\sum_{k \geq 1} a_k f(xS_k(\omega))$$

converge uniformément en x ou pour Lebesgue-presque tout x .

Maintenant, rappelons quelques exemples de séries de la forme (1), déjà étudiés dans la littérature. Le premier exemple de telles séries aléatoires correspond à une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $Y_k = \pm 1$ (équiprobable) et $a_k = \lambda^k$ ($\lambda \in]0, 1[$). Notons ν_λ la mesure image de $\sum_{k \geq 1} Y_k \lambda^k$. Cette mesure, appelée convolution de Bernoulli, a été étudiée en premier par Erdős dans [24, 25]. Il montre que si λ est l'inverse d'un nombre de Pisot (voir [8] pour une définition), alors la mesure ν_λ est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue. Solomyak a prouvé dans [85] que pour presque tout $\lambda \in]1/2, 1[$, ν_λ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et a une densité L^2 .

Paley et Zygmund [72] ont étudié des séries trigonométriques, qui sont de la forme (1) avec $Y_k(\omega) = \epsilon_k(\omega)e^{ikx}$ ou $Y_k(\omega) = e^{ikx+2i\pi\phi_k(\omega)}$ où $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$ et $(\phi_k)_{k \geq 1}$ sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, ϵ_k valant ± 1 de façon équiprobable ($k \geq 1$) et $(\phi_k)_{k \geq 1}$ étant équirépartie dans $[0, 1]$. Ils ont prouvé notamment que ces séries trigonométriques aléatoires représentent des fonctions de L^p avec une probabilité (soit 0, soit 1) indépendante de p ($1 \leq p < +\infty$). Ils ont aussi donné des conditions nécessaires ou suffisantes (améliorées plus tard par Salem et Zygmund [78]) pour que ces séries représentent des fonctions bornées. Kahane [49] a étudié différentes propriétés, d'un autre cas particulier de (1) : la série $\sum_{k \geq 1} R_k \cos(kx + \phi_k)$ où $(R_k)_{k \geq 1}$ et $(\phi_k)_{k \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres, respectivement strictement positives et équiréparties sur $[0, 2\pi]$. Il a déterminé des conditions suffisantes portant sur la loi de $(R_k)_{k \geq 1}$, pour que la série aléatoire converge uniformément, pour que la série représente une fonction continue ou lipschitzienne. Un autre exemple est celui étudié par Fan et Schneider dans [31] : $a_k = 1$ pour tout $k \geq 1$ et $Y_k(\omega) = X_k(\omega)f(\lambda_k x)$ où $f \in A_0(\mathbb{T}, 1)$ (c'est-à-dire f est une

fonction 1-périodique dont la série de Fourier est absolument convergente), $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires complexes centrées indépendantes, de carré intégrable et $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs. Il a été démontré dans [31] que, si $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables indépendantes et identiquement distribuées appartenant à $L^3(\mathbb{P})$ alors

$$\int_{\Omega} \sup_{N \geq 1} \sup_{x \in [0, 2\pi]} \left| \frac{\sum_{k=1}^N X_k f(\lambda_k x)}{\sqrt{\sigma_N^2 \log \lambda_N}} \right| d\mathbb{P} < +\infty$$

où $\sigma_N^2 = \sum_{k=1}^N \mathbb{E}|X_k|^2$. Ce résultat a été généralisé par Cohen et Cuny dans [17].

Mentionnons un dernier exemple de série de la forme (1) qui a été étudié par Gaposhkin [41], où $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres positifs et $Y_k = \sum_{i=1}^k X_i$ où $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et symétriques. Il a prouvé que si $\sum_{k \geq 1} a_k < +\infty$ alors la série $\sum_{k \geq 1} a_k \sum_{i \geq k} X_i$ converge presque partout si et seulement si $\sum_{k \geq 1} \sum_{i \geq k} a_i X_k$ converge presque partout. Si les variables $(X_k)_{k \geq 1}$ sont de plus identiquement distribuées et à valeurs dans un espace de Hilbert, Deo [20] a montré que la série $\sum_{k \geq 1} Y_k/k^\beta$ diverge presque partout si $0 \leq \beta \leq 3/2$ et qu'elle converge presque partout si $\beta > 3/2$ et $\mathbb{E}\|X_1\|^2 < +\infty$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme hilbertienne.

Revenons maintenant à la série aléatoire étudiée dans la première partie de cette thèse. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes, f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs complexes et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées. Notons $(S_k)_{k \geq 1}$ la marche aléatoire engendrée par la suite de variables $(X_k)_{k \geq 1}$:

$$S_k = X_1 + \dots + X_k, \quad k \geq 1.$$

On s'intéresse à la série

$$\sum_{k \geq 1} a_k f(x S_k(\omega)). \quad (2)$$

On aimerait savoir sous quelles conditions portant sur $(a_k)_{k \geq 1}$, sur $(X_k)_{k \geq 1}$, pour quelle classe de fonctions f appartenant à $A_0(\mathbb{T}, \xi)$, on a pour \mathbb{P} -presque tout ω , la convergence uniforme en x ou pour Lebesgue-presque tout x de la série (2) pour toute fonction f dans l'ensemble de classe de fonctions.

On traitera trois situations distinctes : le premier cas (3) qu'on appellera non-arithmétique "continu", concerne la situation où la fonction caractéristique de X_1 est non-périodique et la limite supérieure du module de

la fonction caractéristique est strictement inférieure à 1. Le deuxième cas (4), appelé arithmétique, est quand X_1 prend des valeurs dans une progression arithmétique. Pour le dernier cas (5), appelé non-arithmétique "discret" les variables aléatoires sont discrètes et prennent au moins deux valeurs rationnelles et au moins une irrationnelle. Décrivons précisément nos hypothèses. Soient $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires non nulles, indépendantes et identiquement distribuées définies sur cet espace. On suppose que X_1 vérifie une des 3 conditions suivantes :

$$\forall t \neq 0, |\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})| < 1 \text{ et } \limsup_{|t| \rightarrow +\infty} |\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})| < 1, \quad (3)$$

$$\exists (a, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^*, \quad X_1(\Omega) \subset a + \lambda\mathbb{Z}, \quad (4)$$

$$X_1 \text{ est discret, } \#(X_1(\Omega) \cap \mathbb{Q}^*) \geq 2 \text{ et } \#(X_1(\Omega) \cap \mathcal{I}) \geq 1 \quad (5)$$

où $\#$ représente le cardinal et \mathcal{I} est un ensemble presque partout égal à \mathbb{R} qui contient les irrationnels algébriques. Pour le définir, on introduit la notion de type diophantien d'un nombre irrationnel. Un irrationnel x est dit de type diophantien η si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(x, \epsilon) > 0$ telle que pour tout $h \in \mathbb{N}^*$,

$$[hx] \geq \frac{C(x, \epsilon)}{h^{\eta+\epsilon}}$$

où $[\cdot]$ est la distance au plus proche entier. Le théorème de Sprindžuk (voir [5]) nous donne le résultat suivant : Lebesgue presque tout $x \in \mathbb{R}$ est de type diophantien 1. Le théorème de Thue-Siegel-Roth donne des exemple d'irrationnels de type 1 : les irrationnels algébriques sont de type 1. L'ensemble \mathcal{I} est l'ensemble des irrationnels de type 1

Il est à remarquer que $|\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})| = 1$ pour un $t \neq 0$ si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour presque tout ω , $X_1(\omega) \subset \frac{1}{t}(a + \mathbb{Z})$. Cela est équivalent au fait que $u \mapsto |\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 u})|$ est t -périodique. La condition non-arithmétique "continu" est trivialement satisfaite si X_1 est une variable aléatoire absolument continue et intégrable. Les conditions (3), (4) et (5) ne regroupent pas toutes les variables aléatoires : une variable aléatoire telle que $X_1(\Omega) \subset \sqrt{2} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ ne vérifie aucune des trois hypothèses. On ne sait traiter que ces trois cas.

On aura besoin des conditions suivantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$:

$$\exists \gamma \in]0, 1[, \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \geq 2} \sqrt{k^{-1-\gamma} \sum_{i \geq k} |a_i|^2} < +\infty, \\ \sum_{k \geq 2} k^{(\gamma-2)/4} \sqrt{\log(k)} \left(\sum_{i \geq k} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty. \end{array} \right. \quad (6)$$

Si $a_k = O(\frac{1}{k^\beta})$ avec $\beta > \frac{5}{6}$, alors la suite vérifie les deux conditions précédentes.

Soit $f \in C(\mathbb{T})$. Notons $\hat{f}(j) = \int_0^1 f(t)e^{-2i\pi jt} dt$. Soit ξ une fonction définie sur \mathbb{Z} à valeurs réelles positives, on rappelle que l'espace $A_0(\mathbb{T}, \xi)$ désigne l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{T})$ telles que

$$\hat{f}(0) = 0 \text{ et } |||f||| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(j)| \xi(j) < +\infty.$$

Notons, s'il y a convergence,

$$F(x, \omega) = \sum_{k \geq 1} a_k f(x S_k(\omega)).$$

Sous ces hypothèses, on obtient le résultat principal suivant :

Théorème 1. (*Théorème 1.1*) *Supposons que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ soit décroissante en module et vérifie l'hypothèse (6) et $X_1 \in L^\rho(\mathbb{P})$ pour un $\rho > 0$.*

- *Supposons que X_1 vérifie (3). Pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|\cdot| + 2)})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur tous les compacts de \mathbb{R}^* .*
- *Supposons que X_1 vérifie (4). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge presque partout sur \mathbb{R} . Quand f est un polynôme trigonométrique, $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{\lambda n \deg(f)!} \mathbb{Z}$ où n est un entier non nul dépendant de X_1 .*
- *Supposons que X_1 vérifie (5). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge presque partout sur \mathbb{R} . Quand f est un polynôme trigonométrique, $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur les compacts de \mathbb{R}^* .*

On a aussi étudié un cas de marche aléatoire inhomogène. La loi des incréments de la marche aléatoire dépend d'un système dynamique uniquement ergodique. Soit E un espace métrique compact et T une application continue uniquement ergodique agissant sur E . Soit g une fonction continue de E à valeurs dans $]0, 1[$. Pour tout $y \in E$, on définit la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = g(T^k y) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1), \quad k \geq 1. \quad (7)$$

On obtient, à l'instar du théorème précédent, le résultat suivant :

Théorème 2. (*Théorème 1.11*) *Supposons que la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ soit décroissante en module et vérifie l'hypothèse (6). Soit $y \in E$, supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifie (7). Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω et pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, $F(\cdot, \omega)$ converge presque partout sur \mathbb{R} .*

La méthode utilisée pour démontrer que la série (2) converge quand $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifient (3), (4) et (5) (théorèmes 1 et 9) est standard. On prouve que la série

$$\sum_{i \geq 1} \left| \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} a_k f(xS_k) \right|$$

converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R} ne contenant pas 0 dans le cas (3) et presque partout pour les deux autres cas (4) et (5). Les oscillations

$$\max_{2^{i+1} \leq l \leq 2^{i+1}} \left| \sum_{k=2^i+1}^l a_k f(xS_k) \right|$$

tendent vers 0 quand i tend vers l'infini. Pour avoir une classe de fonctions la plus large possible, on souhaite majorer l'estimation de $\sum_{k=m}^n a_k f(xS_k)$ par le produit entre la norme de f (notée $\|f\|$), et un terme indépendant de f . Pour cela, on développe f en série de Fourier :

$$\left| \sum_{k=m}^n a_k f(xS_k) \right| \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(l)| \left| \sum_{k=m}^n a_k e^{2i\pi l \alpha S_k(\omega)} \right|$$

et on cherche à majorer $\left| \sum_{k=m}^n a_k e^{2i\pi l \alpha S_k(\omega)} \right|$ par le produit entre un terme $\xi(l)$ dépendant de l et un terme indépendant de l .

Pour majorer $\left| \sum_{k=m}^n a_k e^{2i\pi l \alpha S_k(\omega)} \right|$, on commence par utiliser l'inégalité de Van der Corput (Théorème 1.7), puis on cherche des majorants de

$$\sum_{h=1}^H |\mathbb{E} e^{2i\pi l x X_1}|^h \quad (8)$$

et

$$\sum_{k=m}^n a_{k+h} \overline{a_k} \left(e^{2i\pi l x (S_{k+h}(\omega) - S_k(\omega))} - \mathbb{E} e^{2i\pi l x (S_{k+h} - S_k)} \right). \quad (9)$$

On souhaite majorer (8) efficacement, c'est-à-dire obtenir un majorant inférieur à H . Si on majore (8) par H , notre résultat ne serait pas efficace. En effet il nous donnerait le critère de convergence suivant : si $\beta > 1$ alors la série $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^\beta} e^{2i\pi x S_k}$ converge, ce qui est trivial. On cherche donc à différencier les cas où $x \mapsto |\mathbb{E} e^{2i\pi l x X_1}|$ peut être égal à 1 des autres. Si X_1 vérifie l'hypothèse non-arithmétique "continu", alors $|\mathbb{E} e^{2i\pi l x X_1}| < 1$ pour tout $x \neq 0$ et tout $l \in \mathbb{Z}^*$. Si X_1 est arithmétique, $x \mapsto |\mathbb{E} e^{2i\pi l x X_1}|$ est une fonction périodique.

On est amené à gérer des phénomènes d'uniforme distribution : on veut éviter les points $y \in \{lx, l \in \mathbb{Z}^*, x \in \mathbb{R}\}$ pour lesquels $|\mathbb{E}e^{2i\pi y X_1}| = 1$. On arrive à l'aide du théorème de Sprindžuk à donner une majoration de $\sum_{h=1}^H |\mathbb{E}e^{2i\pi lx X_1}|^h$ pour presque tout x et pour tout $l \in \mathbb{Z}^*$. Le cas où X_1 est non-arithmétique "discret" est traité de façon similaire.

Pour majorer (9), on se heurte à la dépendance des variables aléatoires $(S_{k+h} - S_k)_{k \geq 1}$. On partitionne alors l'ensemble des entiers de m à n en sous-ensembles, inclus dans des progressions arithmétiques de raison h , sur lesquels les variables aléatoires $(S_{k+h} - S_k)_{m \leq k \leq n}$ sont indépendantes. On utilise ensuite un théorème de Cohen et Cuny [17] pour obtenir une majoration de (9) uniforme en x .

Séries ergodiques aléatoires

Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace de probabilité et D un semi-groupe inclus dans \mathbb{R} . Soient $\{T^t, t \in D\}$ un flot agissant sur E tel que pour tout $t \in D$, T^t est un opérateur sur $L^2(\mu)$ (on précisera dans la suite ce point de définition). Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(Y_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs réelles définie sur cet espace. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes et f une fonction appartenant à $L^2(\mu)$ à valeurs réelles. On se propose dans ce chapitre d'étudier la convergence $L^2(\mu)$ ou presque partout de séries du type

$$\sum_{k \geq 1} a_k T^{Y_k}(f). \quad (10)$$

Ceci constitue l'objet du deuxième chapitre de cette thèse. En effet, on considère un cas particulier de la série (10) : des séries ergodiques échantillonnées par une marche aléatoire : $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une marche aléatoire à valeurs dans D qui est égal à l'un des ensembles \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R}^+ ou \mathbb{R} . Pour tout $t \in D$, T^t est soit une contraction sur $L^2(\mu)$ (si D est égal à \mathbb{N} ou \mathbb{R}^+), soit un opérateur unitaire sur $L^2(\mu)$ (si D est égal à \mathbb{Z} ou \mathbb{R}).

Avant de détailler nos résultats, on donne une rapide présentation de résultats existants dans ce domaine. Commençons par un cas dit "déterministe" : on dit que la suite d'entiers $(u_k)_{k \geq 1}$ est une bonne suite universelle presque partout si pour tout système dynamique (E, \mathcal{A}, μ, T) (un espace de probabilité muni d'une application T mesurable invariante par la mesure), pour tout $f \in L^2(\mu)$, la moyenne $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f \circ T^{u_k}$ converge μ -presque partout. Bourgain dans [10] a donné des exemples de bonne suite universelle presque partout : toute suite polynomiale de degré supérieur ou égal à 2 à coefficients entiers (le coefficient du terme du plus haut degré étant positif)

est une bonne suite universelle presque partout. Un autre résultat important est celui de Wierdl dans [93] qui a montré que la suite croissante des nombres premiers est une bonne suite universelle presque partout. Un autre exemple de bonne suite universelle est celui des temps de retours. Dans [13], les auteurs prouvent qu'étant donné un système dynamique (X, \mathcal{A}, μ, T) ergodique (un système dynamique est dit ergodique si pour tout $A \in \mathcal{A}$ avec $A = T^{-1}A$, $\mu(A) = 0$ ou 1) et $A \in \mathcal{A}$ de mesure strictement positive, pour tout $x \in X$, notons $\Lambda_x = \{n \in \mathbb{N}, T^n x \in A\}$. La moyenne $\frac{1}{n} \sum_{k=1, k \in \Lambda_x}^n g \circ S^k$ converge ν -presque partout pour tout système dynamique (Y, \mathcal{C}, ν, S) préservant la mesure et pour toute fonction $g \in L^1(\nu)$.

A partir d'une bonne suite universelle presque partout, on peut en obtenir d'autre, c'est ce que nous énonce le théorème suivant de Guillotin-Plantard et Schneider [43] : si une suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est une bonne suite universelle presque partout, et $(\theta_k)_{k \geq 1}$ une suite croissante d'entiers telle que $\theta_k = O(k^\epsilon)$, pour un certain $\epsilon \in]0, 1[$. Alors la suite $(u_{k+\theta_k})_{k \geq 1}$ est aussi une bonne suite universelle presque partout. Lesigne [60] a amélioré ce théorème en prouvant qu'il suffit d'avoir la condition $\theta_k = o(k)$. On peut aussi consulter [47, 61] pour d'autres résultats.

Un moyen de généraliser ce problème est de remplacer les suites déterministes de bonnes suites universelles presque partout, par des suites de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et d'étudier si pour \mathbb{P} -presque tout ω , $(X_k(\omega))_{k \geq 1}$ est une bonne suite universelle presque partout. On peut notamment citer les travaux de Durand et Schneider [23] qui construisent des exemples de variables aléatoires qui sont des bonnes suites universelles presque partout. Etant donnée une bonne suite universelle presque partout : $(u_k)_{k \geq 1}$ vérifiant $u_k = O(2^{k^\beta})$ (avec $0 < \beta < 1$), alors pour \mathbb{P} -presque tout ω , $(X_k(\omega)u_k + Y_k(\omega))_{k \geq 1}$ est une bonne suite universelle presque partout si les variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}, (Y_k)_{k \geq 1}$ sont à valeurs dans \mathbb{N} , indépendantes, identiquement distribuées et intégrables. Dans [57], Lacey, Petersen, Wierdl, Rudolph prouvent, en particulier, que pour toutes suites de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{Z} , d'espérance non nulle, de carré intégrable ; la marche aléatoire définie par $(X_k)_{k \geq 1}$ est pour presque tout ω , une bonne suite universelle presque partout. Pour d'autres résultats sur cette thématique, on peut consulter [42, 43, 59].

Dans ce chapitre, on étudie les séries ergodiques aléatoires suivantes :

$$\sum_{k \geq 1} a_k T^{S_k}(f) \tag{11}$$

où $(a_k)_{k \geq 1}$ est une suite de nombres complexes, f une fonction de carré

intégrable définie sur un espace de probabilité (E, \mathcal{A}, μ) . La suite $(S_k)_{k \geq 1}$ est une marche aléatoire définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ à partir d'une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$:

$$S_k = X_1 + \cdots + X_k, \quad k \geq 1.$$

On traite trois cas

(I) $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne non nulle et de carré intégrable vérifiant

$$\text{pour tout } t \neq 0, \quad |\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})| < 1 \text{ et } \liminf_{|t| \rightarrow +\infty} |1 - \mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})| > 0,$$

(II) $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs entières indépendantes, identiquement distribuées, de moyenne non nulle et de carré intégrable vérifiant

$$\mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t}) = 1 \Leftrightarrow t = 0.$$

(III) $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\{-1, +1\}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Soit E un espace métrique compact et $g : E \rightarrow]0, 1[$ une fonction continue, $\tau : E \rightarrow E$ une transformation uniquement ergodique. Pour tout $k \geq 1$, la loi de X_k est donnée par

$$\mathbb{P}(X_k = +1) = g(\tau^k y) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1) \text{ où } y \in E \text{ est fixé.}$$

Dans le cas (III), la chaîne de Markov $(S_k)_{k \geq 1}$ définie par $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ ($k \geq 1$) est inhomogène. Notons G le groupe \mathbb{Z} ou \mathbb{R} et S le semi-groupe \mathbb{N} ou \mathbb{R}^+ . On dit que $\{T^t, t \in G\}$ est un opérateur unitaire si c'est un flot, c'est-à-dire

$$T^0 = id, \quad T^{s+t} = T^s \circ T^t \text{ pour tous } s, t \in G,$$

si pour tout $t \in G$, l'adjoint de T^t est T^{-t} dans $L^2(\mu)$ et si

$$\text{pour tous } f, g \in L^2(\mu), \quad s \mapsto \langle T^s f, g \rangle \text{ est une application continue.}$$

On dit que $\{T^t, t \in S\}$ est une contraction c'est-à-dire un semi-flot :

$$T^0 = id, \quad T^{s+t} = T^s \circ T^t \text{ pour tous } s, t \in S,$$

si pour tous $t \in S$, $f \in L^2(\mu)$, $\int_E |T^t f|^2 d\mu \leq \int_E |f|^2 d\mu$ et si

$$\text{pour tous } f, g \in L^2(\mu), \quad s \mapsto \langle T^s f, g \rangle \text{ est une application continue.}$$

La condition de continuité est triviale pour $G = \mathbb{Z}$ et $S = \mathbb{N}$. Soit $\{T^t, t \in G\}$ un flot agissant sur E (respectivement $\{T^t, t \in S\}$ un semi-flot agissant sur E) tel que pour tout $t \in G$ (respectivement $t \in S$) T^t agit sur E et préserve la mesure sur E c'est-à-dire pour tout $t \in G$ (respectivement $t \in S$), pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\mu((T^t)^{-1}(A)) = \mu(A)$. Alors $\{T^t, t \in G\}$ induit une contraction sur $L^2(\mu)$ en posant pour tout $t \in G$ (respectivement $t \in S$), $T^t f = f \circ T^t$. $(E, \mathcal{A}, \mu, \{T^t, t \in G\})$ (respectivement $(E, \mathcal{A}, \mu, \{T^t, t \in S\})$) est alors appelé un système dynamique.

Etant donnée une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$, on utilisera la notation suivante : T est une contraction (ou un opérateur unitaire) sur $L^2(\mu)$, pour dire que si pour tous $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset G$, alors $\{T^t, t \in G\}$ est un opérateur unitaire sur $L^2(\mu)$ et si pour tous $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset S$, alors $\{T^t, t \in S\}$ est une contraction sur $L^2(\mu)$.

Le lemme spectral permet de comparer la norme L^2 d'une somme de contraction à une norme L^2 d'un polynôme trigonométrique par rapport à une nouvelle mesure. On énonce le théorème pour l'espace de Hilbert $L^2(\mu)$, mais il est vrai sur tout espace de Hilbert.

Lemme 3 (Lemme 2.11). *Soit $\{V_s, s \in S\}$ une contraction sur $L^2(\mu)$. Pour tout $h \in L^2(\mu)$, il existe une mesure μ_h , appelée mesure spectrale de V au point h telle que pour tous nombres complexes a_1, \dots, a_n , pour tous éléments s_1, \dots, s_n de S , on a*

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k V_{s_k}(h) \right\|^2 \leq \int_H \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{2i\pi\theta s_k} \right|^2 d\mu_h(\theta)$$

où H est le groupe dual de S : $H = \mathbb{R}$ si $S = \mathbb{R}^+$ et $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sinon.

Pour démontrer ce lemme, on commence par prouver le cas particulier où les opérateurs $\{U_t, t \in G\}$ sont des opérateurs unitaires sur $L^2(\mu)$ (c'est le théorème de Stone voir [74] chapitre 10). Pour les opérateurs unitaires, on a unicité de la mesure spectrale et le groupe dual H de G est égal à $H = \mathbb{R}$ si $G = \mathbb{R}$ et $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ sinon. Ce résultat s'étend aux contractions par le théorème de dilation [74] (théorème principal de l'appendice) car toute contraction $\{V_s, s \in S\}$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} est égal à la projection orthogonale sur \mathcal{H} d'un opérateur unitaire $\{U_t, t \in G\}$ défini sur un espace de Hilbert \mathcal{H}' contenant \mathcal{H} . Dans le cas $S = \mathbb{N}$, Krengel ([56] paragraphe 2.3) a montré qu'il existe une unique mesure spectrale. Mais quand $S = \mathbb{R}^+$, on n'a pas nécessairement unicité d'une mesure spectrale.

Les résultats obtenus sur la série (11), proviennent de majoration de polynômes trigonométriques. Avant d'énoncer cette majoration, on définit

une classe de suites de nombres complexes. Soient $e_1, e_2 \geq 0$, notons $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ l'ensemble des suites $(a_k)_{k \geq 1}$ telles que

$$(|a_k|)_{k \geq 1} \searrow \text{ et } \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} \right| = O(n^{e_1} \log^{e_2} n). \quad (12)$$

Remarquons que pour tout $\delta > 0$, la suite $(\frac{1}{k^\delta})_{k \geq 1}$ appartient à $\mathcal{U}(0, 1)$ et pour tous $\alpha \in]0, 1[$ et $\sigma > 0$, la suite $(\frac{\exp(2i\pi k^\alpha)}{k^\sigma})_{k \geq 1}$, appartient à $\mathcal{U}(\alpha, 0)$.

Théorème 4. (Théorème 2.13) *On suppose que $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifie (I) ou (II). Soient $e_1, e_2 \geq 0$ et $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$. Il existe une variable aléatoire C positive \mathbb{P} -presque sûrement finie telle que pour presque tout ω , pour tout réel θ et tous entiers $n > m \geq 2$, on ait :*

$$\left| \sum_{k=m+1}^n a_k (e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} - \mathbb{E} e^{2i\pi\theta S_k}) \right| \leq C(\omega) (\log(|\theta| + 2))^{\frac{1}{4}} (\log n)^{1 + \frac{e_2}{2}} n^{\frac{19}{28} + \frac{e_1}{2}} \left(\sum_{k=m}^n |a_k|^4 \right)^{\frac{1}{4}}$$

où $S_k = X_1 + \dots + X_k$, pour tout $k \geq 1$.

Dans le cas où pour tout $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}$, on obtient une majoration du polynôme trigonométrique $\sum_{k=m+1}^n a_k (e^{2i\pi\theta S_k} - \mathbb{E}(e^{2i\pi\theta S_k}))$ avec un ordre de grandeur sur le paramètre θ . Dans le cas où pour tout $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{Z}$, on obtient une majoration plus précise : on peut majorer le polynôme trigonométrique indépendamment de θ , $\log(|\theta| + 2)$ est remplacé par une constante. Les techniques utilisées pour démontrer ce théorème sont exposées dans le premier chapitre de cette thèse.

A l'aide du théorème précédent et du lemme spectral (Lemme 3), on obtient le résultat suivant qui donne des conditions suffisantes assurant la convergence dans $L^2(\mu)$ de

$$\sum_{k \geq 1} a_k [T^{S_k}(f) - \mathbb{E} T^{S_k}(f)]. \quad (13)$$

Théorème 5. (Théorème 2.3) *Supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfasse la condition (I). Soit une suite $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ avec $e_1, e_2 \geq 0$ telle que*

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^\tau}\right), \quad \tau > \frac{39}{42} + \frac{e_1}{2}.$$

Pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour toutes contractions T (ou opérateurs unitaires) sur $L^2(\mu)$, pour toute $f \in L^2(\mu)$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty \quad (14)$$

(où μ_f est une mesure spectrale de f), la série (13) converge dans $L^2(\mu)$.

Si $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifie **(II)**, le résultat du théorème reste vrai pour tout $f \in L^2(\mu)$ sans la condition spectrale (14).

Le théorème précédent se démontre en utilisant le théorème suivant portant sur la convergence L^p d'une série de variables aléatoires.

Théorème 6. Soit $1 < p < +\infty$ et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires appartenant à $L^p(\mathbb{P})$. Soit $(\alpha_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres positifs et $(A_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels croissante non bornée avec $A_1 \geq 1$. Supposons qu'il existe $q > 0$ tel que pour tous $n > m \geq 0$,

$$\int \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p d\mathbb{P} \leq A_n \left(\sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right)^q. \quad (15)$$

Alors

$$\sum_{k \geq 1} X_k \text{ converge dans } L^p(\mathbb{P})$$

si la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(\sum_{\{k: A_k \geq \log_2(n)\}} \alpha_k)^{q/p}}{n(\log n)^{1-1/p}}$ converge.

Pour $q = 1$, la conclusion du théorème reste vrai si $(A_k)_{k \geq 1}$ est bornée et $\sum_{n \geq 1} \alpha_n \log^2(n) < +\infty$. Dans le cas où $q \geq 1$, la relation (15) permet aussi de conclure quant à la convergence μ -presque partout, via un théorème de Móricz [66], c'est une partie du travail de Cohen et Cuny [19]. Mais dans notre situation : $p = 2$ et $q = \frac{1}{2}$, on ne peut plus utiliser le théorème de Móricz pour obtenir la convergence \mathbb{P} -presque partout.

La convergence presque partout de (13) est plus délicate, on obtient des conditions suffisantes de convergence presque partout pour une classe plus restreinte d'opérateurs. Soit $S = \mathbb{N}$ ou \mathbb{R}^+ , on dira que $\{T^t, t \in S\}$ est un opérateur de Dunford-Schwartz si c'est un semi-flot, c'est-à-dire

$$T^0 = id, \quad T^{s+t} = T^s \circ T^t \text{ pour tous } s, t \in S,$$

si pour tous $t \in S$, $f \in L^1(\mu)$, $\int_E |T^t f| d\mu \leq \int_E |f| d\mu$, pour tout $g \in L^\infty(\mu)$, $\|T^t g\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ et si

pour tous $f, g \in L^2(\mu)$, $s \mapsto \langle T^s f, g \rangle$ est une application continue.

Un opérateur de Dunford-Schwartz est aussi une contraction sur $L^p(\mu)$ ($1 < p < +\infty$). Par abus de langage, on dira que T un opérateur de Dunford-Schwartz en lieu et place de $\{T^t, t \in S\}$ est un opérateur de Dunford-Schwartz. Pour plus de détails sur ces opérateurs, on peut consulter [56] paragraphe 1.6.

Examinons maintenant la convergence presque partout de la série (13).

Théorème 7. (Théorème 2.5) *Supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfasse à la condition (I). Soit une suite $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ avec $e_1, e_2 \geq 0$ telle que*

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^\tau}\right), \quad \tau > \frac{41}{42} + \frac{e_1}{6}.$$

Pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour tout opérateur T de Dunford-Schwartz, pour toute fonction $f \in L^2(\mu)$ avec

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

(où μ_f est une mesure spectrale de f) alors la série (13) converge μ -presque partout.

Ce théorème donne une condition plus contraignante sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$. Ceci est du au contrôle d'oscillations qui est plus compliqué à mettre en œuvre que dans le cas $L^2(\mu)$. Pour $\tau = 1$, les conclusions du théorème restent vraies si T est une contraction positive (ou un opérateur unitaire positif) à la place de prendre un opérateur de Dunford-Schwartz.

Pour étudier la convergence sur des séries ergodiques du type (11) dans le cas (III) (c'est le cas où la chaîne de Markov est inhomogène), on a besoin d'une majoration d'un autre polynôme trigonométrique.

Théorème 8. (Théorème 2.15) *Soit $y \in E$, supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifie le cas (III). Soit $0 < \gamma < 1$, il existe une variable aléatoire C positive \mathbb{P} -presque sûrement finie, telle que pour presque tout ω , pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout entier $n \geq 2$, on ait :*

$$\sup_{\theta \in F} \left| \sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} \right| \leq C(\omega) \left(n^{3/4+\gamma/4} \sqrt{\log n} + n^{1-\gamma/2} \frac{1}{\epsilon} \right)$$

où $F = [\epsilon, 1/2 - \epsilon] \cup [1/2 + \epsilon, 1 - \epsilon]$.

On en déduit alors le théorème suivant à l'aide du lemme spectral :

Théorème 9. (Théorème 2.9) Soit $y \in E$, supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ vérifie le cas **(III)**. Pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour toute $f \in L^2(\mu)$ telle que

$$\int_{-1/2}^{1/2} \log \left| \frac{1}{\theta(\theta^2 - \frac{1}{4})} \right| d\mu_f(\theta) < +\infty \quad (16)$$

(où μ_f est la mesure spectrale de f) et pour toute contraction positive T (ou un opérateur positif unitaire) sur $L^2(\mu)$, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f) = 0 \text{ } \mu\text{-presque partout.}$$

Ce résultat généralise un théorème de Guillotin-Plantard et Schneider [42] qui se place dans le cadre d'une rotation irrationnelle sur le tore de dimension supérieure ou égale à 1. Les auteurs de [42] ont aussi prouvé que pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour n'importe quel système dynamique préservant la mesure (E, \mathcal{A}, μ, T) il existe toujours une fonction $g \in L^1(\mu)$ telle que $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(T^{S_k})$ diverge μ -presque partout. On a maintenant une condition suffisante pour la convergence μ -presque partout.

On étudie aussi, dans le deuxième chapitre de cette thèse, la transformée ergodique de Hilbert qui est une série ergodique aléatoire particulière. Soient T un opérateur sur $L^2(\mu)$ et $f \in L^2(\mu)$. La transformée ergodique de Hilbert de f associée à T est la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^k(f)}{k}.$$

Elle a été en premier étudiée par Izumi dans [46] (dans le cas particulier d'une application T préservant la mesure) qui a donné un critère pour que la série converge presque partout. Halmos [44] a montré qu'en général, les conditions d'Izumi ne sont pas satisfaites en prouvant que si μ est non-atomique, alors il existe toujours une fonction $f \in L^2(\mu)$ centrée dont la transformée ergodique de Hilbert ne converge pas pour la norme $L^2(\mu)$. Gaposhkin dans [40] a étudié la convergence presque sûre de la transformée ergodique de Hilbert associée à un opérateur unitaire U de $L^2(\mu)$, il a obtenu le résultat suivant. Soit $f \in L^2(\mu)$ telle que

$$\int_{|\theta| < e^{-e}} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \log \log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 d\mu_f < +\infty \quad (17)$$

où μ_f est la mesure spectrale de f , alors $\sum_{n \geq 1} \frac{U^n f}{n}$ converge μ -presque partout et pour la norme $L^2(\mu)$.

Dans cette thèse, on étudie la transformée ergodique de Hilbert échantillonnée. Précisons ce point : on cherche des conditions sur la marche aléatoire $(S_k)_{k \geq 1}$, pour que pour \mathbb{P} -presque tout ω , on ait la convergence μ -presque partout de la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k}(f)}{k} \quad (18)$$

pour toute contraction T ou pour tout opérateur unitaire T et pour une certaine classe de fonctions f . On ne se limite pas au cas où T est un flot discret, on étudie aussi la transformée ergodique de Hilbert échantillonnée dans le cas où T est défini à partir d'un flot continu. On trouve une condition portant sur la mesure spectrale de f pour que la série (18) converge. Cette condition ressemble à celle obtenue par Gaposhkin (17).

Théorème 10. (*Théorème 2.8*) *Supposons que $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfasse à la condition (I) et que $\limsup_x |\mathbb{E}e^{2i\pi X_1 x}| < 1$. Pour \mathbb{P} -presque tout ω , pour toute contraction positive T (ou tout opérateur positif unitaire sur $L^2(\mu)$) ou un opérateur de Dunford-Schwartz, pour toute fonction $f \in L^2(\mu)$ telle qu'il existe $\epsilon > 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

(où μ_f est une mesure spectrale de f), alors la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k(\omega)}(f)}{k}$$

converge μ -presque partout et dans $L^2(\mu)$.

Les conclusions de ce théorème restent vraies si $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfait (II). La condition spectrale devient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty.$$

Pour prouver que la série (18) converge μ -presque partout, on commence par utiliser le Théorème 7 pour obtenir la convergence presque partout de $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (T^{S_k}(f) - (\mathbb{E}T^{X_1})^k(f))$. Il suffit alors de prouver que la série

$$\sum_{k \geq 1} \frac{(\mathbb{E}T^{X_1})^k(f)}{k} \quad (19)$$

converge presque partout. Notons \tilde{T} l'opérateur discret $\mathbb{E}(T^{X_1})$ et

$$A_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{T}^j(f), \quad k \geq 1.$$

Pour prouver la convergence de la série (19), il suffit de montrer que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k(f) & \text{ existe } \mu\text{-presque partout et} \\ \sum_{k \geq 1} \frac{A_k(f)}{k+1} & \text{ converge } \mu\text{-presque partout.} \end{aligned}$$

Pour montrer que $(A_k(f))_{k \geq 1}$ converge μ -presque partout, il suffit de prouver que $\sum_{k \geq 1} (A_k(f) - A_{k-1}(f))$ existe μ -presque partout. Pour étudier la différence entre $A_k(f)$ et $A_{k-1}(f)$, on aimerait utiliser la méthode de régularisation spectrale de Lifshits et Weber [63]. Commençons par utiliser le lemme spectral pour obtenir l'inégalité suivante : pour tout $n \geq m$,

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |W_n(\theta) - W_m(\theta)|^2 d\mu_f(\theta).$$

Lifshits et Weber construisent explicitement une nouvelle mesure ν à partir d'une mesure spectrale de \tilde{T} au point f , ils obtiennent alors une majoration de l'intégrale précédente : pour tout $n \geq m$,

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq 2\nu \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right] \right)$$

où $W_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\theta}$. Cette inégalité nous permet de montrer que $(A_k(f))_{k \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mu)$ puis qu'elle converge μ -presque partout avec le Théorème 6 pour $q = 1$ et $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée. Cependant, on obtient ainsi un critère de convergence sur la mesure spectrale de \tilde{T} et on veut un critère de convergence sur une mesure spectrale de T . On ne connaît pas de lien entre les mesures spectrales des deux opérateurs T et \tilde{T} , elles peuvent ne pas avoir le même support (par exemple si $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ est un opérateur unitaire).

Notre méthode permet d'étendre les résultats de Lifshits et Weber à une nouvelle classe d'opérateurs. Soit $V_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi\theta X_1}$ ($n \geq 1$), on construit une mesure ν_1 (construite suivant le même procédé que Lifshits et

Weber) et une mesure ν_2 de support $\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]$ telles que

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq 2\nu_1 \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right] \right) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 d\nu_2(\theta), \quad \text{pour tout } m \leq n.$$

La mesure ν_2 est la mesure spectrale de T au point f , restreinte à $\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]$. De part la construction de ν_1 et ν_2 , on détermine une condition suffisante sur la mesure spectrale de T au point f pour que $(A_k(f))_{k \geq 1}$ converge μ -presque partout.

La convergence de $\sum_{k \geq 1} \frac{A_k(f)}{k+1}$ se traite avec les outils précédents.

Mesures quasi-Bernoulli

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de deux propriétés de mesures : quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible. Soient $\lambda \geq 2$ un entier et $\mathcal{A} = \{1, \dots, \lambda\}$. Une mesure de probabilité sur l'espace produit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ est dite quasi-Bernoulli si pour tous cylindres I et J , on a

$$\frac{1}{C} \nu(I)\nu(J) \leq \nu(IJ) \leq C\nu(I)\nu(J) \quad (20)$$

où C est une constante indépendante de I et J . Rappelons qu'un cylindre de taille n est un ensemble de la forme

$$[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n] = \left\{ (\omega_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}, \omega_i = \epsilon_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \right\},$$

et que si $I = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ et $J = [\eta_1, \dots, \eta_m]$, IJ désigne le cylindre $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \eta_1, \dots, \eta_m]$. On note \mathcal{F}_n l'ensemble des cylindres de taille n . On définit l'application décalage sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ par $\sigma\omega = (\omega_{n+1})_{n \geq 1}$ pour tout $\omega = (\omega_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$.

Pour une mesure m définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, on peut étudier pour tout $\alpha > 0$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble (noté \dim , voir [26] pour une définition)

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(m(I_n(x)))}{-n \log \lambda} = \alpha \right\}$$

où $I_n(x)$ est le cylindre de taille n contenant x . L'ensemble des valeurs α pour lesquelles E_α est non vide est appelé domaine de spectre de m . Rappelons que la transformée de Legendre d'une fonction réelle f est définie par

$$f^*(\alpha) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (\alpha x + f(x)).$$

On dit qu'une mesure m satisfait le formalisme multifractal si son domaine de spectre est un intervalle et si

$$\dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha > 0$$

où Dim est la dimension de packing (voir [89] pour une définition), τ^* est la transformée de Legendre de la fonction τ appelée spectre L^q et définie par

$$\tau(q) = \limsup \frac{1}{n \log \lambda} \log \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \right), \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}.$$

Brown, Michon et Peyrière [14] ont introduit la notion de mesure quasi-Bernoulli dans le but d'établir le formalisme multifractal. Ceci a été réalisé car Heurteaux [45] a pu montrer que le spectre L^q d'une mesure quasi-Bernoulli est dérivable et que cette mesure satisfait le formalisme multifractal :

$$\dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in] -\tau'(+\infty), -\tau'(-\infty)[.$$

Fan et Zhang [32] ont caractérisé les mesures quasi-Bernoulli parmi les produits de Riesz sur l'anneau des entiers p -adique \mathbb{Z}_p .

On va caractériser dans la troisième partie de cette thèse les mesures quasi-Bernoulli parmi les mesures de Markov inhomogènes. Soient $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ une mesure de probabilité sur \mathcal{A} dite probabilité initiale, $P_k = (p_k(\epsilon, \eta))_{\epsilon, \eta \in \mathcal{A}}$ (pour tout $k \geq 1$) une suite de matrices de transition sur \mathcal{A} . La mesure de Markov (inhomogène) μ associée à π et $(P_k)_{k \geq 1}$ est définie par

$$\mu([\epsilon_1 \dots \epsilon_n]) = p_0(\epsilon_1) p_1(\epsilon_1, \epsilon_2) \dots p_{n-1}(\epsilon_{n-1}, \epsilon_n),$$

pour tout cylindre $[\epsilon_1 \dots \epsilon_n]$.

Théorème 11. (*Théorème 3.5*) *Soit μ la mesure de Markov associée à une probabilité initiale $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ et à une suite de matrices de transition $P_k = (p_k(\epsilon, \eta))_{\epsilon, \eta \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$. On suppose que le support de μ est égal à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Alors μ est quasi-Bernoulli si et seulement si*

$$\exists \delta > 0, \quad \delta \leq p_i(\epsilon, \eta) \leq 1 - \delta, \quad (\forall \epsilon, \eta \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1),$$

$$\sup_{\epsilon \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} \sup_{n \geq 1, p \geq 2} \left| \sum_{i=2}^p \log \left(\frac{p_{i+n}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})}{p_i(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})} \right) \right| < +\infty.$$

En se basant sur ce théorème, on peut donner une condition nécessaire et suffisante plus explicite pour qu'une mesure de Bernoulli ou qu'une mesure de Riesz soit quasi-Bernoulli. Soit $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ ($k \geq 1$) une suite de mesure de probabilité sur \mathcal{A} , la mesure de Bernoulli μ définie par $(P_k)_{k \geq 1}$ est donnée par : pour tout $n \geq 1$, pour tout $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]) = \prod_{j=1}^n p_j(\epsilon_j).$$

Corollaire 12. (Corollaire 3.7) Soit μ la mesure de Bernoulli associée à la suite de probabilité $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ ($k \geq 1$) sur \mathcal{A} . On suppose de plus que le support de μ est égal à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. La mesure μ est quasi-Bernoulli si et seulement si

$$\exists \delta > 0, \quad \delta \leq p_i(\epsilon) \leq 1 - \delta, \quad (\forall \epsilon \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1)$$

et qu'il existe une mesure de probabilité $(p(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ sur \mathcal{A} tel que pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, $p(\epsilon) \in [\delta, 1 - \delta]$ tel que

$$\max_{\epsilon \in \mathcal{A}} \sum_{j \geq 1} |p_j(\epsilon) - p(\epsilon)| < +\infty.$$

La convergence de $p_n(\epsilon)$ provient du fait que le rapport $\frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}])}$ est indépendant de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}$.

Soient $\overline{\mathbb{D}}$ l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 et $\{a_k, k \geq 1\} \subset \overline{\mathbb{D}}$. La mesure de Riesz μ associée à la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ est définie par

$$\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]) = \lambda^{-n} \prod_{j=1}^n \left(1 + \operatorname{Re}(a_j e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \epsilon_j})\right)$$

pour $n \geq 1$, $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathcal{A}$ et où Re désigne la partie réelle. Les mesures de Riesz sont des mesures de Bernoulli.

Pour la classe des mesures de Riesz, le critère de quasi-Bernoulli est uniquement portée par la suite $(a_k)_{k \geq 1}$.

Corollaire 13. (Corollaire 3.9) Soit μ la mesure de Riesz définie par la suite $(a_k)_{k \geq 1} \in \overline{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}^*}$. On suppose de plus que la mesure μ de Riesz est de support plein. La mesure μ est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $j \geq 1$, $a_j \in \overline{\mathbb{D}}(\delta)$ et il existe $a \in \overline{\mathbb{D}}(\delta)$, tel que

$$\sum_{j \geq 1} |a_j - a| < +\infty$$

où $\overline{\mathbb{D}}(\delta) = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{\epsilon=1}^{\lambda} B(e^{i\pi - \frac{2i\pi}{\lambda} \epsilon}, \delta)$.

Ce dernier corollaire est à mettre en relation avec le résultat de Fan et Zhang [32] qui caractérise les mesures quasi-Bernoulli parmi les produits de Riesz sur l'anneau des entiers p -adique \mathbb{Z}_p . Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres appartenant à $\overline{\mathbb{D}}$. La mesure appelée produit de Riesz sur \mathbb{Z}_p ,

$$\mu = \prod_{n \geq 1} (1 + \mathbf{Re}(a_n \gamma_n(x))) \quad (21)$$

est bien définie, où γ_n est une suite dissociée de caractères. Sous l'hypothèse $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq 1$, Fan et Zhang ont montré que la mesure de Riesz μ définie par (21) est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe un nombre complexe a , tel que

$$|a| < 1, \quad \sum_{k \geq 1} |a_k - a| < +\infty.$$

Le cas des produits de Riesz sur \mathbb{Z}_p est plus délicat. On ne sait pas comment supprimer la condition supplémentaire que $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq 1$. Contrairement à notre cas, pour la mesure de Riesz μ sur \mathbb{Z}_p , le rapport

$$\frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n])}$$

n'est pas indépendant de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$.

Certaines mesures portées par les ensembles invariants des systèmes itératifs ne sont pas quasi-Bernoulli, mais vérifient des propriétés proches [65, 71, 90]. Ces mesures ont motivé Testud [86] à introduire une notion plus générale que celle de quasi-Bernoullicité introduite par Brown, Michon et Peyrière. Une mesure de probabilité ν est quasi-Bernoulli au sens faible s'il existe une constante $C > 0$, six entiers naturels $r_1 \leq r_2, p_1 \leq p_2, s_1 \leq s_2$ tels que pour tous entiers naturels n, p , on ait pour tous $I \in \mathcal{F}_n, J \in \mathcal{F}_p$,

$$\frac{1}{C} \nu(I) \sum_{l=r_1}^{r_2} \nu(\sigma^{-l} J) \leq \sum_{k=p_1}^{p_2} \nu(I \cap \sigma^{-n-k} J) \leq C \nu(I) \sum_{h=s_1}^{s_2} \nu(\sigma^{-h} J).$$

Une telle mesure admet un spectre L^q qui est dérivable sur \mathbb{R}^+ et elle vérifie partiellement le formalisme multifractal au sens suivant :

$$\dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in]-\tau'(+\infty), -\tau'_d(0)[.$$

Une classe de mesures quasi-Bernoulli au sens faible a été étudiée (Théorème 2.2 de [86]). Soit l un entier naturel supérieur ou égal à 2, considérons N

similitudes $S_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de rapport de contraction respectif $l^{-\alpha_i}$ ou $-l^{-\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et dont les images sont des réunions d'intervalles l -adiques. On suppose de plus que $[0, 1] = \cup_i S_i([0, 1])$. Si μ est l'unique mesure de probabilité vérifiant :

$$\mu = \sum_{i=1}^N p_i \mu \circ S_i^{-1},$$

alors μ est quasi-Bernoulli faible.

Soient p, q, n trois entiers avec $p \leq q$ (q valant éventuellement $+\infty$) et ν une mesure de probabilité sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, on définit la mesure $\nu_{p,q}^n$ sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ par

$$\nu_{p,q}^n(J) = \sum_{k=p}^q \nu(\sigma^{-n-k} J)$$

pour tout cylindre J . La mesure $\nu_{p,q}^n$ n'est pas une probabilité en général. Soient μ, ν deux mesures, on note $\nu \ll \mu$ si ν est absolument continue par rapport à μ . Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\epsilon, \eta \in \mathcal{A}$, on définit $q_n^{n+k}(\eta, \epsilon)$ par le rapport

$$q_n^{n+k}(\eta, \epsilon) = \begin{cases} \frac{\mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}[\epsilon])}{\mu(\sigma^{-n+1}[\eta])} & \text{si } \mu(\sigma^{-n+1}[\eta]) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Parmi les mesures de Markov, on caractérise celles qui sont quasi-Bernoulli faibles.

Théorème 14. (Théorème 3.10) *Soit μ la mesure de Markov associée à une probabilité initiale $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ et à une suite de matrices de transition $P_k = (p_k(\epsilon, \eta))_{\epsilon, \eta \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$. Alors μ est quasi-Bernoulli faible si et seulement si*

1. *il existe des entiers naturels $r_1 \leq r_2$, $p_1 \leq p_2$, $s_1 \leq s_2$ tels que pour tout $n \geq 0$,*

$$\mu_{r_1, r_2} \ll \mu_{p_1, p_2}^n \ll \mu_{s_1, s_2} \quad \text{et} \quad (22)$$

pour tout $\eta, \epsilon \in \mathcal{A}$ avec $\mu_{r_1, r_2}([\epsilon]) > 0$, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}[\epsilon]) = 0 \Rightarrow \mu(\sigma^{-n+1}[\eta]) = 0. \quad (23)$$

2. *il existe une constante $C > 0$ tel que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$ avec $\mu_{r_1, r_2}(J) > 0$, pour tout $\eta \in \mathcal{A}$, avec $\mu^{n-1}([\eta]) > 0$ il existe k entier dans $[p_1, p_2]$, tel que $\mu^{n+k}(J) > 0$ et pour tout l entier dans $[r_1, r_2]$ vérifiant $\mu^l(J) > 0$ on ait*

$$-C \leq \sum_{j=1}^{p-1} \log \frac{p_{j+n+k}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})}{p_{j+l}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})} + \log q_n^{n+k}(\eta, \epsilon_1) \quad (24)$$

et pour tous $n, p \in \mathbb{N}^$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$, pour tout $\eta \in \mathcal{A}$, avec $\sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}J) > 0$, il existe h entier dans $[s_1, s_2]$ avec $\mu^h(J) > 0$, tel que pour tout k' entier dans $[p_1, p_2]$ vérifiant $\mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k'}J) > 0$ on ait*

$$\sum_{j=1}^{p-1} \log \frac{p_{j+n+k'}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})}{p_{j+h}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})} + \log q_n^{n+k'}(\eta, \epsilon_1) \leq C. \quad (25)$$

On énonce dans le chapitre 3, le corollaire pour les mesures de Bernoulli qui vérifient la propriété quasi-Bernoulli faible. Donnons un cas particulier de ce corollaire.

Corollaire 15. *(Corollaire 3.13) Soit μ la mesure de Bernoulli définie par $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$ une suite de mesure de probabilité sur \mathcal{A} vérifiant pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, pour tout $k \geq 1$ $p_k(\epsilon) > 0$. Si la mesure μ est quasi-Bernoulli faible, alors elle est quasi-Bernoulli.*

Temps de retour uniforme

Le dernier chapitre est consacré à l'étude de temps de retour uniforme. Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ un système métrique préservant la mesure, c'est-à-dire (X, d) est un espace métrique muni d'une tribu \mathcal{B} contenant les boréliens et (X, \mathcal{B}, μ, T) est un système préservant la mesure. Si, de plus, (X, d) a une base dénombrable, alors le théorème de Poincaré [38] implique que pour μ -presque tout x ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, x) = 0. \quad (26)$$

Si de plus μ est ergodique, alors pour tout $y \in X$, pour μ -presque tout $x \in X$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} d(T^n x, y) = 0. \quad (27)$$

Boshernitzan [12] a amélioré (26) : s'il existe $\alpha > 0$ tel que la mesure de Hausdorff d'ordre α (notée H_α), est σ -finie sur X . Alors pour μ -presque tout $x \in X$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1/\alpha} d(T^n x, x) < +\infty.$$

De plus, si $H_\alpha(X) = 0$, alors pour μ -presque tout $x \in X$, $\liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1/\alpha} d(T^n x, x) = 0$.

Il y a d'autres travaux sur la récurrence quantitative, parfois appelée lemme de Borel-Cantelli dynamique ou problème de cible rétrécissante, on peut consulter [1, 7, 11, 39, 67, 79]. Dans le dernier chapitre de cette thèse, on prouve un résultat quantitatif de (27) pour tous les $y \in X$ simultanément.

On se demande sous quelle condition on peut avoir l'existence de $\alpha > 0$ tel que pour μ -presque tout x ,

$$\forall y \in X, \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} n^{1/\alpha} d(T^n x, y) < +\infty.$$

Avant d'énoncer le théorème, on introduit deux quantités provenant des dimensions locales de la mesure :

$$\alpha^* = \sup_{x \in X} \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r} \quad \text{et} \quad \alpha_{\max} = \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in X} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$$

où $B(x, r)$ la boule de centre x et de rayon r . On remarque que $\alpha^* \leq \alpha_{\max}$. On dit qu'un espace de probabilité $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ préservant la mesure est exponentiellement mélangeant s'il existe $c > 0$ et $0 < \gamma < 1$ tel que

$$|\mu(E|T^{-n}F) - \mu(E)| \leq c\gamma^n, \quad \text{pour tout } n \geq 1,$$

pour toute boule E et pour tout ensemble $F \in \mathcal{B}$ (où $\mu(E|F) = \mu(E \cap F)/\mu(F)$). On obtient le résultat suivant

Théorème 16. (*Theorem 4.1*) *Soit $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ un espace métrique probabilisé préservant la mesure. Supposons que le système soit de plus exponentiellement mélangeant et $\alpha_{\max} < +\infty$. Si $\tau < 1/\alpha_{\max}$ alors pour μ -presque tout $x \in X$, on a*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\tau d(T^n x, y) = 0, \quad \text{pour tout } y \in X. \quad (28)$$

Si $\tau > 1/\alpha^*$, alors il existe $y \in X$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\tau d(T^n x, y) = \infty \quad (\text{p. t. } x \in X).$$

Le Théorème 16 a été prouvé par Fan, Schmeling, Troubetzkoy [30] pour les fonctions doublantes sur le tore et pour une mesure de Gibbs associée à un potentiel h"olderien. La m"ethode utilis"ee ici est diff"erente de celle employ"ee dans [30], mais elle est applicable à un grand nombre de syst"emes dynamiques tel que les β -d"ecalage sur les r"eels, les syst"emes de fraction continue, les sous-d"ecalages de type fini avec mesures de Gibbs.

La difficult"e du th"eor"eme pr"ec"edent se trouve dans l'uniformit"e en y de (28). La seconde assertion est une application d'un lemme de Borel-Cantelli dynamique. L'application du lemme de Borel-Cantelli et de l'utilisation du th"eor"eme de Fubini prouvent la \liminf dans (28) est finie pour presque tout y , l'uniformit"e est loin d'ˆetre "evidente.

Le Th"eor"eme 16 se d"emontre à partir d'un th"eor"eme plus g"en"eral. Avant de l'ˆenoncer on donne quelques d"efinitions. Soit $(\xi_n)_{n \geq 0}$ un processus stationnaire d"efini sur un espace de probabilit"e $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, prenant ses valeurs dans un espace m"etricue (X, d) . Soit μ la probabilit"e initiale d"efinie sur les bor"eliens de X par

$$\mu(B) = \mathbb{P}(\xi_0 \in B),$$

pour tout bor"elien B de X . On suppose toujours que le support de la mesure μ est X . Pour $n \geq 1$, notons \mathcal{A}^n pour la sous- σ -alg"ebre g"en"er"ee par $(\xi_{n+j})_{j \geq 0}$. On dit que le processus $(\xi_n)_{n \geq 1}$ est *exponentiellement m"elangeant* s'il existe deux constantes $c > 0$ et $0 < \gamma < 1$ telles que

$$|\mathbb{P}(\xi_0 \in E|D) - \mathbb{P}(\xi_0 \in E)| \leq c\gamma^n, \quad \text{pour tout } n \geq 1$$

pour toute boule E de X et pour tout $D \in \mathcal{A}^n$. On suppose que μ v"erifie l'hypoth"ese :

$$\varphi_1(r) \leq \mu(B(x, r)) \leq \varphi_2(r) \quad (\forall x \in X, \forall r > 0) \quad (29)$$

o"u φ_1 et φ_2 sont deux fonctions strictement croissantes satisfaisant $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_i(r) = 0$ et $\varphi_i(2r) \leq K\varphi_i(r)$ pour $i = 1, 2$; $K > 0$ et $r > 0$.

Th"eor"eme 17. (*Theorem 4.2*) *Supposons que $(\xi_n)_{n \geq 1}$ soit un processus stationnaire, exponentiellement m"elangeant dont la probabilit"e initiale v"erifie (29). Soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement d"ecroissante de nombres positifs avec*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{n\varphi_1(r_n)} = 0.$$

Alors on a

$$\text{pour presque tout } \omega \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\min_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n(\omega))}{\sum_{n=1}^N \varphi_1(r_n)} > 0$$

et

$$\text{pour presque tout } \omega \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n(\omega))}{\sum_{n=1}^N \varphi_2(r_n)} < +\infty$$

où χ_E est la fonction indicatrice de E .

Le Théorème 16 est une conséquence de ce théorème appliqué à $\varphi_1(r) \geq Ar^s$ et $r_n = B/n^\tau$ où $A, B > 0$ sont des constantes et $\tau s < 1$.

Le théorème précédent permet de montrer que pour \mathbb{P} -presque tout ω , il existe deux constantes $C, C' > 0$, telles que pour tout $y \in X$, les N premières boules $B(\xi_n, r_n)$ recouvrent y au moins $C \sum_{n=1}^N \varphi_1(r_n)$ fois y et au plus $C' \sum_{n=1}^N \varphi_2(r_n)$ fois. Quand la probabilité initiale μ satisfait (29) avec $\varphi_1 = \varphi_2$, alors le nombre de recouvrement pour tous les y est du même ordre que $\sum_{n=1}^N \varphi_1(n)$.

On peut aussi exprimer le Théorème 17 d'une façon différente. Considérons une suite divergente de termes positifs $\sum_{n \geq 1} a_n$. Soit Λ un sous-ensemble d'entiers naturels. On dit que Λ est (a_n) -rare si

$$\sum_{n \in \Lambda} a_n < +\infty.$$

Sinon, on dit que Λ est (a_n) -dense. Exprimons notre résultat en fonction de l' (a_n) -densité d'un ensemble aléatoire :

$$\Lambda_\omega(y) = \{n \in \mathbb{N}, \xi_n(\omega) \in B(y, r_n)\}.$$

Théorème 18. (Theorem 4.3) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante d'entiers positifs et $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels. Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n) < +\infty \Rightarrow \omega \text{ p.p. } \max_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega(y)} a_n < +\infty.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n) = +\infty \Rightarrow \omega \text{ p.p. } \max_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega(y)} a_n = +\infty.$$

Chapitre 1

Séries de fonctions le long de marches aléatoires

1.1 Introduction et résultats principaux

Considérons $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes définies sur cet espace et une suite $(a_k)_{k \geq 1}$ de nombres complexes décroissante en module. On se demande sous quelles conditions suffisantes, pour presque tout $\omega \in \Omega$ on a la convergence uniforme ou pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$ de

$$\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha \cdot (X_1(\omega) + \cdots + X_k(\omega)))$$

pour toute fonction f continue, 1-périodique, définie sur les réels et à valeurs dans \mathbb{C} .

Parmis les premiers à étudier les séries aléatoires Paley et Zygmund [72] ont étudié les séries trigonométriques de la forme $\sum_{k \geq 1} \epsilon_k(\omega) e^{ikt}$ et $\sum_{k \geq 1} a_k e^{ikt + 2\pi\phi_k(\omega)}$. Les auteurs prouvent notamment que ces séries représentent des fonctions de L^p avec une probabilité (soit 0, soit 1) indépendante de p , si $1 \leq p < +\infty$. Ils ont donné des conditions nécessaires et suffisantes (améliorées plus tard par Salem et Zygmund [78]) pour que ces deux séries représentent des fonctions bornées. Kahane [49] étudie différentes propriétés de la série $\sum_{k \geq 1} R_k \cos(nt + \phi_n)$ où $(R_k)_{k \geq 1}$ et $(\phi_k)_{k \geq 1}$ sont des variables aléatoires indépendantes les unes des autres, respectivement strictement positives et équiréparties sur $[0, 2\pi]$. Il trouve des conditions suffisantes portant sur la loi de $(R_k)_{k \geq 1}$, pour que la série aléatoire converge uniformément, soit continue, ou encore soit lipschitzienne...

Donnons maintenant des exemples de séries dont les variables aléatoires ne sont plus identiquement distribuées. Dans [31], Fan et Schneider estiment l'ordre de grandeur uniforme de série aléatoire de la forme $\sum_{k \geq 1} X_k f(n_k \alpha)$ où $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, complexes et centrées; $(n_k)_{k \geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers positifs et f une fonction 1-périodique dont les coefficients de Fourier sont sommables. Dans [88], Tian et Ren prouvent que la série $\sum_{k \geq 1} X_k e^{-\lambda_k z}$ prend presque-sûrement toutes les valeurs complexes dans un voisinage de z , où $z \in \mathbb{C}$, $(X_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et $(\lambda_k)_{k \geq 1}$ une suite croissante de réels positifs. On peut encore citer, plus récemment, Cohen et Cuny [17] sur des séries aléatoires pondérées par des poids aléatoires. Ils généralisent notamment le résultat de [31].

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux séries aléatoires dont l'aléa n'est ni identiquement distribué, ni indépendant : on étudie la convergence d'une série de Fourier dont la phase dépend d'une marche aléatoire. On détermine un critère de convergence sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ pour que la série : $\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k)$ converge (où f est une fonction 1-périodique donc les coefficients de Fourier sont plus que sommables et $(S_k)_{k \geq 1}$ est une marche aléatoire). Pour démontrer ce critère, on passe par des majorations en norme L^p et uniforme de polynômes trigonométriques.

Enonçons maintenant nos hypothèses, avant de donner nos résultats de convergence sur la série aléatoire $\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k)$. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, on définit une suite de variables aléatoires réelles $(X_n)_{n \geq 1}$ non nulles, indépendantes et identiquement distribuées vérifiant la condition de moment :

$$\exists \rho > 0, \mathbb{E}|X_1|^\rho < +\infty. \quad (1.1)$$

On définit une marche aléatoire associée à ces variables

$$S_n = X_1 + \dots + X_n, \quad \text{pour tous } n \geq 1.$$

Soient ξ une fonction positive définie sur \mathbb{Z} et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue 1-périodique (c'est à dire appartenant à $C(\mathbb{T})$) telle que

$$\|f\| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(j)| \xi(j) < +\infty$$

où $\hat{f}(j) = \int_0^1 f(t) e^{2i\pi jt} dt$. Notons $A_0(\mathbb{T}, \xi)$ l'ensemble des fonctions $f \in C(\mathbb{T})$ telles que $\|f\| < +\infty$ et $\hat{f}(0) = 0$. Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes décroissante en module. On s'intéresse à la convergence de la

série aléatoire suivante :

$$F(\alpha, \omega) = \sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k(\omega)),$$

pour une classe de fonction f fixée, on montre que pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout fonction f dans la classe de fonction, la série F converge.

Notons $\phi_{X_1}(t) = \mathbb{E}(e^{2i\pi X_1 t})$ la fonction caractéristique de X_1 . On sait traiter trois cas : pour le premier cas, ϕ_{X_1} vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, |\phi_{X_1}(t)| < 1 \text{ et } \limsup_{|t| \rightarrow +\infty} |\phi_{X_1}(t)| < 1. \quad (1.2)$$

Un exemple de variable aléatoire satisfaisant ces deux conditions est une variable dont la loi est celle d'une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et dont la densité est intégrable par rapport à cette mesure.

Le deuxième cas est quand X_1 prend ses valeurs dans une progression arithmétique, c'est-à-dire

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{Q}^*, \quad X_1(\Omega) \subset a + \lambda\mathbb{Z}. \quad (1.3)$$

La variable X_1 vérifie cette condition si et seulement si ϕ_{X_1} est $\frac{1}{\lambda}$ -périodique.

Pour le dernier cas, X_1 est discret et vérifie

$$\#X_1(\Omega) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \geq 2 \text{ et } \#X_1(\Omega) \cap \mathcal{I} \geq 1 \quad (1.4)$$

où $\#$ désigne le cardinal de l'ensemble et \mathcal{I} (qu'on précise dans la partie 1.7) est un ensemble presque partout égal à \mathbb{Q}^c qui contient les irrationnels algébriques.

Ces conditions ne regroupent pas toutes les variables aléatoires : une variable aléatoire telle que $X_1(\Omega) \subset \sqrt{2} + \sqrt{3}\mathbb{Z}$ ne vérifie aucune des hypothèses. En effet $|\mathbb{E}(e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{3}} X_1})| = 1$, $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et $(\sqrt{2} + \sqrt{3}\mathbb{Z}) \cap \mathbb{Q} = \emptyset$.

On fera les hypothèses suivantes sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$

$$\sum_{n \geq 2} \sqrt{n^{-1-\gamma} \sum_{i \geq n} |a_i|^2} < +\infty, \quad (1.5)$$

$$\exists \gamma \in]0, 1[,$$

$$\sum_{n \geq 2} n^{(\gamma-2)/4} \sqrt{\ln(n)} \left(\sum_{i \geq n} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty. \quad (1.6)$$

Si $a_k = O\left(\frac{1}{k^\beta}\right)$ avec $\beta > \frac{5}{6}$, alors la suite vérifie les deux conditions (1.5) et (1.6).

Sous ces hypothèses, on obtient le résultat principal suivant :

Théorème 1.1. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite décroissante en module et vérifie les hypothèses (1.5) et (1.6) et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que X_1 vérifie la condition (1.1).

- Supposons que X_1 vérifie (1.2). Pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|\cdot| + 2)})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur tous les compacts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Supposons que X_1 vérifie (1.3). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge presque partout sur \mathbb{R} . Quand f est un polynôme trigonométrique, $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus \frac{1}{\lambda n \deg(f)!} \mathbb{Z}$ où n est un entier dépendant uniquement de X_1 .
- Supposons que X_1 soit discret et vérifie (1.4). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, la série $F(\cdot, \omega)$ converge presque-partout sur \mathbb{R} . Quand f est un polynôme trigonométrique, $F(\cdot, \omega)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $a_k = O\left(\frac{1}{k^\beta}\right)$, on ne connaît pas les valeurs de β en dessous desquelles la série F ne converge pas uniformément dans le cas (1.2), et ne converge pas presque partout dans les cas (1.3) et (1.4).

Le Théorème 1.1 est une application des Théorèmes 1.2, 1.4, 1.5, présentés ci-après, où on obtient des majorations de la norme L^2 en α par rapport à une mesure de probabilité quelconque d'un polynôme trigonométrique afin d'en déduire une majoration de la norme infinie de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2i\pi\alpha S_k(\omega)}$, en fonction des sommes $\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2$ et $\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4$. Ceci nous permet d'en déduire des conditions suffisantes de convergence de la série F à partir de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$. On pourra ainsi déterminer des valeurs de γ pour lesquelles la fonction $\alpha \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\gamma} e^{2i\pi\alpha S_n}$ est continue.

Pour estimer le polynôme trigonométrique, on utilise l'inégalité de Van der Corput (Théorème 1.7). Elle permet de majorer une somme de termes appartenant à un espace de Hilbert plus finement qu'en majorant par la somme des normes, elle fait de plus apparaître des corrélations. On majore la première somme suivant les hypothèses (1.2), (1.3), (1.4) prises sur X_1 . On utilise, ensuite, un théorème de Cohen et Cuny [19] afin de réussir à majorer la seconde somme. Une autre méthode possible pour réussir à majorer ce terme serait d'utiliser un procédé de randomisation gaussienne afin de relier des estimations intégrales à des comportements asymptotiques de processus gaussiens, puis se servir de résultats de Fernique [36, 34] concernant l'étude des fonctions aléatoires gaussiennes. Cette méthode est moins précise : on peut seulement prouver que si $\beta > 7/8$ alors F converge, contre $5/6$ avec

[19].

Ces deux méthodes se généralisent très bien en dimension supérieure (le Théorème 1.9 dans [19] de Cohen et Cuny est énoncé en dimension d et le lemme de Slépian dans [35] permet de passer de la dimension d à la dimension 1). La suite de variables aléatoires étant à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}^*$, on peut alors étudier la convergence de la série $\sum_{k \geq 1} a_k f(\langle \alpha, S_k \rangle)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$ ($\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire sur \mathbb{R}^d).

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on donne des estimations de la somme partielle $\sum_{k=M}^N a_k f(\alpha S_k)$, pour α non nul. Dans la partie trois, on prouve les Théorèmes 1.2, 1.4, 1.5 de majorations des sommes partielles. Dans la quatrième partie, on démontre le Théorème 1.1. Une variante est considérée dans l'avant-dernière partie : on y établit une majoration de $\sum_{k=M}^N a_k f(\alpha S_k(\omega))$, où $(X_k)_{k \geq 1}$ n'est plus identiquement distribuée. Cette suite est stationnaire et définie par un système dynamique qu'on suppose uniquement ergodique. Plus précisément, notons E un espace compact métrisable, $T : E \rightarrow E$ une application continue et g une fonction continue de E dans $]0, 1[$. On définit, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$ de la façon suivante : soit $x \in E$, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = g(T^k x) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1).$$

On obtient alors une condition suffisante de continuité sur F semblable au Théorème 1.1. Dans l'avant-dernière partie, on énonce des majorations qui permettent de savoir, uniformément en α , avec quelle rapidité la somme partielle de la série converge vers son espérance. Dans cette situation, la récurrence ou la transience de la marche aléatoire est cruciale. Pour finir, on énonce le théorème de Sprindžuk qui nous sert à définir \mathcal{I} dans l'hypothèse (1.4).

1.2 Ordres de grandeur de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega))$

On énonce les estimations des sommes partielles dans les différents cas.

1.2.1 Cas où ϕ_{X_1} vérifie (1.2)

On commence par majorer la norme L^2 de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega))$, qu'on notera F_M^N dans la suite, ce qui permet de déterminer une estimation de l'ordre de grandeur d'un polynôme trigonométrique le long de la marche aléatoire $(S_k)_{k \geq 1}$ dans le cas où f est une exponentielle complexe.

Théorème 1.2. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes décroissante en module et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que X_1 vérifie la condition (1.1). Pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|\cdot| + 2)})$ de norme 1, pour $R > \eta > 0$, pour tout $N, M, H \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N - M > H$, pour toute mesure ν de probabilité sur $[-R, R]$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \int_{-R}^R \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 d\nu(\alpha) \\ & \leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \left(\frac{N - M - H}{N - M} + \frac{1}{\inf_{|x| > \eta} 1 - |\phi_{X_1}(x)|^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(H + 1)^2}{N - M} + (H + 1)\nu([- \eta, \eta]) \right) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \\ & \quad + K(N - M + H)\sqrt{H} \log(N) \sqrt{\log(R + 2)} \left(\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Remarque 1.3. La constante K dépend de ω et de la norme infinie de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$.

On applique ce théorème à la mesure de Dirac δ_α avec α non nul. Comme l'estimation ci-dessus est indépendante de α , on a

Théorème 1.4. Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes décroissante en module et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que X_1 vérifie la condition (1.1). Pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, \sqrt{\log(|\cdot| + 2)})$ de norme 1, pour $R > \eta > 0$, pour tout $N, M, H \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $N - M > H$, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\begin{aligned} & \sup_{R > |\alpha| > \eta} \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 \\ & \leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \left(\frac{N - M - H}{N - M} + \frac{1}{\inf_{|x| > \eta} 1 - |\phi_{X_1}(x)|^2} \right. \\ & \quad \left. + \frac{(H + 1)^2}{N - M} \right) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 + K(N - M + H)\sqrt{H} \log(N) \sqrt{\log(R + 2)} \left(\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

1.2.2 Cas discret et ϕ_{X_1} vérifie (1.3) ou (1.4)

Dans le cas (1.3), $|\phi_{X_1}|$ est $\frac{1}{\lambda}$ -périodique. Dans le dernier cas (1.4), $|\phi_{X_1}|$ est apériodique. En effet, si $|\phi_{X_1}|$ était périodique, alors il existerait un α non nul tel que $1 - |\phi_{X_1}|^2(\alpha) = 0$. Or $1 - |\phi_{X_1}|^2(\alpha)$ est égal à 0 si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \alpha \in \mathbb{Z}$ (où $(x_n)_{n \geq 0}$ sont les valeurs prises par X_1). Ceci signifie que α doit être à la fois rationnel et irrationnel.

On rappelle que dans le cas discret, la fonction ξ est définie par $\xi(j) = |j|^{1+\epsilon}$.

Théorème 1.5. *Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes décroissante en module et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que X_1 vérifie la condition (1.1). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$ de norme 1, pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 \\ & \leq K \left[\frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \left(1 + \frac{N-M-H}{N-M} + \frac{(H+1)^2}{N-M} \right) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \right. \\ & \quad \left. + K(N-M+H)\sqrt{H} \log(N) \sqrt{\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4} \right] \end{aligned}$$

Remarque 1.6. *La constante K dépend de ω , de α , de ϵ et de la norme infinie de la suite $(a_k)_{k \geq 1}$.*

1.3 Démonstrations des Théorèmes 1.2, 1.4 et 1.5

On commence par se ramener à un cas plus simple, le cas où f est la fonction : $\alpha \mapsto e^{2i\pi l \alpha}$. En utilisant le développement de f en série de Fourier, puis l'inégalité triangulaire dans $L^2(\nu)$, on obtient :

$$\left(\int_{-R}^R |F_M^N(\alpha)|^2 d\nu(\alpha) \right)^{1/2} \leq \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(l)| \left(\int_{-R}^R \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2i\pi l \alpha S_k(\omega)} \right|^2 d\nu(\alpha) \right)^{1/2}.$$

Pour majorer le terme de droite de l'inégalité précédente, on majore la norme L^2 de la somme partielle par le produit de $\xi(l)$ (intervenant dans la norme de f) et d'un terme indépendant de l .

La première étape de la preuve du Théorème 1.2 consiste à utiliser l'inégalité de Van der Corput afin d'obtenir une corrélation des $(a_k)_{k \geq 1}$.

1.3.1 Partie commune des différents cas

On rappelle l'inégalité de Van der Corput.

Théorème 1.7 (Inégalité de Van der Corput). *Soient M, N deux entiers vérifiant $M < N$. Soient $(u_n)_{M \leq n \leq N}$ une famille finie de $N - M + 1$ éléments d'un espace de Hilbert qui est muni du produit hilbertien noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme $\| \cdot \|$. Si H est un entier tel que $H < N - M$, on a :*

$$\left\| \sum_{k=M}^{N-1} u_k \right\|^2 \leq \frac{N - M + H}{H + 1} \sum_{k=M}^{N-1} \|u_k\|^2 + 2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H (H + 1 - h) \left| \sum_{k=M}^{N-h-1} \langle u_{k+h}, u_k \rangle \right|.$$

On l'applique sur l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[-R, R]$ par rapport à la mesure ν avec la norme associée $\| \cdot \|_{2,\nu}$ et à la suite $(a_k e^{2i\pi\alpha S_k})_{k \geq 1}$ ce qui donne :

$$\left\| \sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2i\pi\alpha S_k} \right\|_{2,\nu}^2 \leq \frac{N - M + H}{H + 1} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 + I$$

où

$$I = 2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H (H + 1 - h) \left| \sum_{k=M}^{N-h-1} a_{k+h} \overline{a_k} \int_{-R}^R e^{2i\pi\alpha S_k^h} d\nu(\alpha) \right| \text{ et}$$

$$S_k^h = X_{k+1} + \dots + X_{k+h}.$$

On majore I par $I_1 + I_2$ (à partir de $e^{2i\pi\alpha S_k^h} = \phi_{S_k^h}(l\alpha) + (e^{2i\pi\alpha S_k^h} - \phi_{S_k^h}(l\alpha))$) :

$$I_1 = 2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H (H + 1 - h) \sum_{k=M}^{N-h-1} \left| a_{k+h} \overline{a_k} \int_{-R}^R \phi_{S_k^h}(l\alpha) d\nu(\alpha) \right| \text{ et}$$

$$I_2 = 2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H (H + 1 - h) \sum_{k=M}^{N-h-1} \left| a_{k+h} \overline{a_k} \int_{-R}^R e^{2i\pi\alpha S_k^h} - \phi_{S_k^h}(l\alpha) d\nu(\alpha) \right|.$$

On majore I_1 , en utilisant la propriété d'indépendance et d'équirépartition des $(X_k)_{k \geq 1}$ ($\phi_{S_k^h} = \phi_{X_1}^h$), on a alors $I_1 \leq I_{1,1} + I_{1,2}$ où

$$I_{1,1} = 2 \frac{N - M + H}{H + 1} \sum_{h=1}^H \frac{H + 1 - h}{N - M - h} \int_{-R}^R |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| d\nu(\alpha) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2$$

et

$$I_{1,2} = 2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H \frac{(H + 1 - h)(N - M)}{N - M - h} \int_{-R}^R |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| d\nu(\alpha) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2.$$

On majore trivialement ϕ_{X_1} par 1 pour obtenir

$$I_{1,1} \leq 2 \frac{H(N - M + H)}{N - M - H} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2.$$

La majoration de $I_{1,2}$ se traite de différentes façons suivant la nature de X_1 .

1.3.2 Majoration de $I_{1,2}$

Cas où ϕ_{X_1} vérifie (1.2)

Fixons $\eta > 0$. Pour majorer $|I_{1,2}|$, on partitionne l'ensemble $[-R, R]$ en deux ensembles : $Q_1 = [-\eta, \eta]$ et $Q_2 = [-R, R] \setminus Q_1$, on en déduit que

$$\begin{aligned} |I_{1,2}| &\leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{N - M - H} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \nu(Q_1) \\ &+ 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \int_{Q_2} \sum_{h=1}^H |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| d\nu(\alpha). \end{aligned}$$

Comme ϕ_{X_1} satisfait (1.2), on a (après avoir multiplié par $\frac{2}{1+|\phi_{X_1}(x)|}$) pour tout $\alpha \in Q_2$,

$$\sum_{h=1}^H |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| \leq \frac{2}{\inf_{|x|>\eta} (1 - |\phi_{X_1}(x)|^2)}.$$

On obtient ainsi une majoration de $I_{1,2}$:

$$\begin{aligned} I_{1,2} &\leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \times \\ &\left((H + 1)\nu([- \eta, \eta]) + \frac{1}{\inf_{|x|>\eta} (1 - |\phi_{X_1}(x)|^2)} \right) \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Pour les autres cas, on n'a pas le même type de contrôle uniforme sur ϕ_{X_1} , on utilise à la place un argument de répartition diophantienne des réels.

Cas discret et $|\phi_{X_1}|$ périodique

Définition 1.8. Soit Y une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, on définit la symétrisée de Y comme la variable aléatoire définie sur le même espace de probabilité par la différence entre Y et une variable aléatoire indépendante, de même loi que Y .

Majorons $I_{1,2}$ avec ν la mesure de Dirac en un point α non nul.

$$I_{1,2} \leq 2 \frac{(N-M+H)(N-M)}{(H+1)(N-M-H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \sum_{h=1}^H \left| \phi_{X_1}^h(l\alpha) \right|.$$

Comme X_1 est discret, on note $\{x_n, n \geq 0\}$ l'ensemble des valeurs non nulles prises, avec les probabilités strictement positives $\{p_n, n \geq 0\}$, par la symétrisée de X_1 . On a alors

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 = \sum_{n \geq 0} p_n \sin^2(\pi \alpha x_n) \geq p_0 \sin^2(\pi \alpha x_0).$$

Pour tout $\alpha \in \left[-\frac{1}{2x_0}, \frac{1}{2x_0}\right]$, on a :

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq p_0 x_0^2 \alpha^2.$$

Notons par $[\cdot]$ la distance au plus proche entier. On a pour tout $\alpha \in \left[-\frac{1}{2x_0}, \frac{1}{2x_0}\right]$,

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq p_0 [\alpha x_0]^2.$$

Comme $\alpha \mapsto \sin^2(\pi \alpha x_0)$ est $\frac{1}{x_0}$ -périodique, on en déduit : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$1 - |\phi_{X_1}(\alpha)|^2 \geq p_0 [\alpha x_0]^2.$$

On obtient en utilisant cette inégalité : pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{x_0}\mathbb{Q}$, pour tout $l \in \mathbb{Z}^*$,

$$\sum_{h=1}^H \left| \phi_{X_1}^h(l\alpha) \right| \leq \frac{2}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2} \leq \frac{4}{p_0 [l\alpha x_0]^2}. \quad (1.8)$$

On prouve ainsi, en se servant du théorème de Sprindžuk (voir chapitre 1.7, que pour presque tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une constante $C(\alpha, \epsilon) > 0$, telle que

$$\sum_{h=1}^H |\phi_{X_1}^h(l\alpha)| \leq C(\alpha, \epsilon, X_1) l^{2+2\epsilon}.$$

En utilisant cette inégalité, on peut en déduire une majoration de $I_{1,2}$ (voir (1.7) pour sa définition) qui est la suivante :

$$I_{1,2} \leq C(\alpha, \epsilon, X_1) \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 l^{2+2\epsilon}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\epsilon/2$ au lieu de ϵ . On a réussi à majorer $I_{1,2}$ par le produit d'un terme indépendant l et de $l^{2+\epsilon}$ qui figure dans la norme de f .

Dans le cas où f est un polynôme trigonométrique, on obtient le même résultat pour tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{n\lambda \deg(f)!} \mathbb{Z}$. Dans le cas où f est un polynôme trigonométrique, on note $\mathcal{Z} = \frac{1}{n\lambda \deg(f)!} \mathbb{Z}$, où $n\lambda$ est une valeur non nulle prise avec une probabilité non nulle par la symétrisée de X_1 . En effet, l'inégalité (1.8) est vérifiée pour tout $-\deg(f) \leq l \leq \deg(f)$ et tout $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $[l\alpha x_0] \neq 0$, c'est-à-dire pour tout $\alpha \notin \frac{1}{lx_0} \mathbb{Z}$.

Cas discret et $|\phi_{X_1}|$ apériodique

La majoration de $I_{1,2}$ (voir (1.7) pour sa définition) dans le cas apériodique est très similaire au cas précédent. On rappelle que d'après (1.4), il existe $x_0 \in \mathbb{Q}$ et $x_1 \in \mathcal{I}$ deux valeurs non nulles prises par la symétrisée de X_1 (voir définition 1.8) avec des probabilités non nulles, respectivement p_0, p_1 . On donne une majoration pour tout $\alpha \in \mathcal{I}$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$. Comme \mathcal{I} est presque partout égal à \mathbb{R} , on obtient une majoration presque partout en α . Rappelons aussi que \mathcal{I} est défini dans la dernière partie de ce chapitre.

On minore $1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2$ par $\sum_{n \geq 0} p_n [x_n l \alpha]^2$. Si α est rationnel ($\alpha = \frac{p}{q}$ avec p et q premiers entre eux et q positif), on minore la somme par $p_1 [x_1 l \frac{p}{q}]^2$. Comme x_1 appartient à \mathcal{I} (voir la dernière partie), $\frac{x_1}{q}$ est de type 1 donc appartient à \mathcal{I} . On applique le théorème de Sprindžuk (Théorème 1.17) : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe $C(\alpha, \epsilon, X_1) > 0$ tel que

$$\sum_{n \geq 0} p_n \sin^2(\pi y_n l \alpha) \geq p_1 \frac{C(\alpha, \epsilon, X_1)}{l^{1+\epsilon}}.$$

Si $\alpha \in \mathcal{I}$, on minore la somme par $p_0 [x_0 l \alpha]^2$. Par le théorème de Sprindžuk, il existe une constante $C(\alpha, \epsilon, X_1) > 0$ telle que

$$\sum_{n \geq 0} p_n \sin^2(\pi y_n l \alpha) \geq p_0 \frac{C(\alpha, \epsilon, X_1)}{l^{1+\epsilon}}.$$

On en déduit donc que pour Lebesgue presque tout α réel,

$$1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 \geq \frac{C(\alpha, \epsilon, X_1)}{l^{1+\epsilon}},$$

ce qui nous permet de trouver une majoration de $I_{1,2}$ presque partout en α :

$$I_{1,2} \leq C(\alpha, \epsilon, X_1) \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 l^{2+2\epsilon}.$$

Pour conclure, il suffit de prendre $\epsilon/2$ au lieu de ϵ . On a réussi à majorer $I_{1,2}$ par le produit d'un terme indépendant l et de $l^{2+\epsilon}$ qui figure dans la norme de f .

1.3.3 Majoration de l'intégrale I_2

Il ne reste plus qu'à majorer I_2 , on rappelle ci-dessous la valeur de cette intégrale :

$$2 \frac{N - M + H}{(H + 1)^2} \sum_{h=1}^H (H + 1 - h) \left| \sum_{k=M}^{N-h-1} \int_{-R}^R a_{k+h} \overline{a_k} (e^{2i\pi l \alpha S_k^h} - \phi_{S_k^h}(l\alpha)) d\nu(\alpha) \right|.$$

On commence par partitionner l'ensemble des entiers de M à $N - h - 1$ en sous-ensembles. On partitionne $\{k \in \mathbb{N}, M \leq k \leq N - h - 1\}$ en $\bigcup_{0 \leq r \leq h-1} I_r^h$, où $I_r^h = [M, N - h - 1] \cap \{r + hq, q \in \mathbb{N}\}$. Ainsi pour $i, j \in I_r^h$, avec $i \neq j$, S_i^h et S_j^h sont indépendants. I_2 est alors majorée par :

$$2 \frac{N - M + H}{H + 1} \sum_{h=1}^H \sum_{r=0}^{h-1} \sup_{N > M \geq 1} \sup_{l \in \mathbb{Z}^*} \sup_{R \geq 1} \max_{\alpha \in [-R, R]} \left| \sum_{k \in I_r^h} a_{k+h} \overline{a_k} (e^{2i\pi l \alpha S_k^h} - \mathbb{E} e^{2i\pi l \alpha S_k^h}) \right|.$$

On note Q^2 à la place de $\log(1 + R|l|) \log(1 + HN^\rho) \sum_{k \in I_r^h} |a_k|^4$ et $U_{h,r}^2$ pour

$$\sup_{N > M > 1} \sup_{l, R} \frac{\max_{|\alpha| \leq R} \left| \sum_{k \in I_r^h} a_{k+h} \overline{a_k} (e^{2i\pi l \alpha S_k^h} - \mathbb{E} e^{2i\pi l \alpha S_k^h}) \right|^2}{Q^2}.$$

On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour majorer $\frac{N-M+H}{H+1} \sum_{h=1}^H \sum_{r=0}^{h-1} U_{h,r} Q$ par

$$\frac{N-M+H}{H+1} \sum_{h=1}^H \left(\sum_{r=0}^{h-1} U_{h,r}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=M}^{N-h-1} |a_k|^4 \right)^{1/2} \sqrt{\log(1+R|l|) \log(1+HN^\rho)}. \quad (1.9)$$

Pour finir de majorer I_2 , montrons que

$$\sup_{h \geq 1} \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} U_{h,r}^2}{h} \right)^{1/2} < +\infty.$$

Pour cela, on va utiliser un théorème de Cohen et Cuny [19] :

Théorème 1.9. *Soit $(\theta_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans \mathbb{R}^d (on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire sur \mathbb{R}^d). Soit ϕ une fonction positive, croissante sur \mathbb{R}^+ , telle qu'il existe un $\eta > 0$, $\phi(x) \geq x^\eta$ (pour tout $x \geq 0$). Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|\theta_n| > \phi(n)^\delta) < +\infty$. Soit $(b_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres complexes. Alors il existe deux constantes universelles $\epsilon > 0$ et $C > 0$ telles que*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{N > M > 1} \sup_{T \geq 1} \exp \left\{ \epsilon \frac{\max_{|t| \leq T} \left| \sum_{k=M}^{N-1} b_k (e^{2i\pi(\theta_k, t)} - \mathbb{E} e^{2i\pi(\theta_k, t)}) \right|^2}{\log(1+T) \log(1+\phi(N)) \sum_{k=M+1}^N |b_k|^2} \right\} \right] < C. \quad (1.10)$$

Fixons h un entier et $0 \leq r \leq h-1$. On applique ce théorème avec pour tout $k \geq 2$,

$$b_k = \begin{cases} a_{k+h} \overline{a_k} & \text{si } k \in I_r^h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\theta_k = \begin{cases} S_k^h & \text{si } k \in I_r^h \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Soit ϕ la fonction définie par $\phi(n) = hn^\rho$. Par l'indépendance et l'équidistribution des $(X_k)_{k \geq 1}$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq h+1} \mathbb{P}(|\theta_n| > \phi(n)) &= \sum_{n \in I_r^h} \mathbb{P}(|\theta_n| > \phi(n)) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_1 + \dots + X_{h+1}| > \phi(n)) \\ &\leq h \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(|X_1| > n^\rho). \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (1.1), la somme $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(\theta_n > \phi(n))$ est finie. Le Théorème 1.9 nous donne l'existence d'une constante C universelle indépendante de $(\theta_n)_{n \geq 1}$ telles que

$$\sup_{h,r} \mathbb{E} \left[\sup_{N > M > 1} \sup_{l,R} \frac{\max_{|\alpha| \leq R} \left| \sum_{k \in I_r^h} a_{k+h} a_k \overline{a_k} (e^{2i\pi l \alpha S_k^h} - \mathbb{E} e^{2i\pi l \alpha S_k^h}) \right|^2}{\log(1 + R|l|) \log(1 + \phi(N)) \sum_{k \in I_r^h} |a_k|^4} \right] < C$$

ou encore

$$\sup_{h,r} \mathbb{E} U_{h,r}^2 < C. \quad (1.11)$$

On majore alors (1.9) par

$$2N\sqrt{H} \sqrt{\log(1 + R|l|) \log(1 + HN^\rho)} \left(\sum_{k=M}^N |a_k|^4 \right)^{1/2} \sup_{H \geq 1} \frac{1}{H+1} \sum_{h=1}^H \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} U_{h,r}^2}{h} \right)^{1/2}.$$

On applique ensuite (1.11) pour en déduire que

$$\sup_{H \geq 1} \frac{1}{H+1} \sum_{h=1}^H \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} U_{h,r}^2}{h} \right)^{1/2}$$

est une variable aléatoire presque-sûrement finie (notons la K), ce qui nous donne

$$I_2 \leq 2KNH^{1/2} \sqrt{\log(1 + |l|) \log(1 + R) \log(1 + HN^\rho)} \left(\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4 \right)^{1/2}.$$

1.4 Preuve de la convergence de $\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k(\omega))$

1.4.1 Majoration uniforme dans le cas discret

Pour réussir à montrer la convergence uniforme de la série $\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k)$ quand f un polynôme trigonométrique, il suffit d'obtenir une majoration uniforme en α de la somme partielle $\sum_{k=M}^N a_k e^{2i\pi \alpha S_k}$. On donne, dans la suite, une majoration de $I_{1,2}$ indépendante de α .

On rappelle la majoration de $I_{1,2}$:

$$I_{1,2} \leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 \sum_{h=1}^H |\phi_{X_1}(l\alpha)|^h.$$

On commence par étudier la convergence uniforme dans le cas (1.3). Soit Γ un compact ne contenant pas de point de $\frac{\mathbb{Z}}{n\lambda \deg(f)!}$ (qui sont les valeurs pour lesquelles, $1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|$ sont nulles voir partie 1.3.2). Comme ϕ_{X_1} est continue sur Γ , on a $\sup_{\alpha \in \Gamma} \frac{1}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|} < +\infty$ et

$$I_{1,2} \leq 2 \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sup_{\alpha \in \Gamma} \frac{1}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2.$$

On a obtenu une majoration de $I_{1,2}$ indépendante de α .

Pour le cas (1.4), $1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2 = \sum_{n \geq 0} p_n \sin^2(\pi y_n l\alpha)$ est nul si et seulement si pour tout $n \geq 0$, $y_n l\alpha \in \mathbb{Z}$, c'est à dire si $\alpha \in \bigcap_{n \geq 0} \frac{1}{ly_n} \mathbb{Z}$. Comme X_1 prend une valeur rationnelle non nulle et une valeur irrationnelle, on en déduit que $1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2$ n'est nul qu'en $\alpha = 0$. Soit Γ un compact de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, on obtient donc l'inégalité suivante :

$$I_{1,2} \leq \frac{(N - M + H)(N - M)}{(H + 1)(N - M - H)} \sup_{\alpha \in \Gamma} \frac{1}{1 - |\phi_{X_1}(l\alpha)|^2} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2.$$

1.4.2 Convergence de la série

La démonstration de la convergence de la série se fait de la même manière pour les trois cas (1.2), (1.3) et (1.4). Pour montrer que la série converge, on montre que

$$\sum_{k=1}^{2^N - 1} a_k f(\alpha S_k) \text{ converge et}$$

que les oscillations

$$\sup_{2^N \leq j \leq 2^{N+1} - 1} \left| \sum_{k=2^N}^j a_k f(\alpha S_k) \right|$$

tendent vers 0 quand N tend vers l'infini.

Dans le cas (1.2), on va montrer qu'étant donné Γ un compact de \mathbb{R} ne contenant pas 0,

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma} \left| \sum_{j=2^k}^{2^{k+1} - 1} a_j f(\alpha S_j) \right| < +\infty \text{ et} \quad (1.12)$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma} \sup_{2^N \leq j < 2^{N+1}} \left| \sum_{k=2^N}^j a_k f(\alpha S_k) \right| = 0. \quad (1.13)$$

Dans le cas discret, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left| \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} a_j f(\alpha S_j) \right| < +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{2^N+1 \leq j < 2^{N+1}} \left| \sum_{k=2^N+1}^j a_k f(\alpha S_k) \right| = 0.$$

Pour se faire, on va utiliser les majorations obtenues dans les Théorèmes 1.4, 1.5 et celles de la convergence uniforme des polynômes trigonométriques dans le cas discret. On obtiendra finalement des conditions sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ pour que la série converge.

On détermine les conditions dans le cas (1.2). Dans le cas discret, les majorations obtenues dans les Théorèmes 1.4 et 1.5 ne diffèrent que d'un terme qui disparaît quand on prend α non nul. On applique le Théorème 1.4 avec $M = 2^k$ et $N = 2^{k+1}$, pour que (1.12) soit vrai, il suffit d'avoir :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{2^k}{H_k} \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} |a_i|^2} < +\infty, \quad (1.14)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{H_k \sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} |a_i|^2} < +\infty, \quad (1.15)$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} H_k^{1/4} \sqrt{2^k k} \left(\sum_{i=2^k}^{2^{k+1}-1} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty. \quad (1.16)$$

On choisit de prendre $H_k = 2^{k\gamma}$ où $\gamma \in]0, 1[$, (1.14) et (1.15) sont alors symétrique. Pour que la suite $(\sum_{k=1}^{2^n} a_k f(\alpha S_k))_{n \geq 1}$ converge, il suffit donc d'avoir :

$$\sum_{n \geq 2} \sqrt{n^{-1-\gamma} \sum_{i \geq n} |a_i|^2} < +\infty$$

et

$$\sum_{n \geq 2} n^{(\gamma-2)/4} \sqrt{\ln(n)} \left(\sum_{i \geq n} |a_i|^4 \right)^{1/4} < +\infty.$$

Ces deux conditions sont vraies car on a supposé que $(a_k)_{k \geq 1}$ vérifie (1.5) et (1.6).

Il reste maintenant à montrer que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sup_{\alpha \in \Gamma} \sup_{2^N \leq j < 2^{N+1}-1} \left| \sum_{k=2^N+1}^j a_k e^{2i\pi S_k} \right| = 0.$$

Pour $j = 2^N + 1$ ou $j = 2^N + 2$, la somme ne contient qu'au maximum, deux termes qui convergent vers 0 quand N tend vers $+\infty$ car $(a_k)_{k \geq 1}$ tend vers 0 (à cause de (1.5)). Si j est maintenant différent de ces deux valeurs, on utilise les Théorèmes 1.2, 1.5 avec $M = 2^N$, $H = (j - 2^N)^\gamma$ ($0 < \gamma < 1$). Par simple étude de fonction, on montre que $x \mapsto \frac{x+x^\gamma}{x-x^\gamma}$ est borné pour $x \geq 2$, il suffit alors de remarquer que :

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left((j - 2^N)^{1-\gamma} + (j - 2^N)^\gamma \right) \sum_{k=2^N}^{j-1} |a_k|^2} + \sqrt{(j - 2^N)^{1+\frac{\gamma}{2}} \log(j) \left(\sum_{k=2^N}^{j-1} |a_k|^4 \right)^{1/2}} \\ & \leq \sqrt{2^{N(1-\gamma)} \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} |a_k|^2} + \sqrt{2^{N\gamma} \sum_{k=2^N}^{2^{N+1}-1} |a_k|^2} + \sqrt{2^{N(1+\frac{\gamma}{2})} \log(j) \left(\sum_{k=2^N}^{j-1} |a_k|^4 \right)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Les trois derniers termes de l'inégalité précédente sont les termes généraux des séries convergentes (1.14), (1.15), (1.16).

Soit $a_k = O(\frac{1}{k^\delta})$, avec $\delta < 1$. En comparant séries et intégrales et en majorant, on obtient des conditions suffisantes, les conditions sur δ sont alors les suivantes :

$$\begin{aligned} \delta &> 1 - \frac{\gamma}{2} \\ \delta &> \frac{1 + \gamma}{2} \\ \delta &> \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{4}, \end{aligned}$$

ce qui donne après calcul que δ doit être supérieur strictement à $\frac{5}{6}$.

1.5 Cas où la marche aléatoire est non homogène dans le temps

On s'intéresse, dans cette section, à un cas où la marche aléatoire, à valeurs dans \mathbb{Z} , est non homogène dans le temps. On donne une majoration de polynôme trigonométrique et une condition suffisante pour que

$\sum_{k \geq 1} a_k f(\alpha S_k)$ converge. Soit E un compact métrisable, $T : E \rightarrow E$ une application continue. Supposons que T soit uniquement ergodique, c'est-à-dire qu'il existe une unique mesure ν invariante telle que pour toute application continue $f : E \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\sup_{x \in E} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^k x) - \int_E f d\nu \right| \rightarrow 0.$$

Pour plus de détails sur l'unique ergodicité, on peut consulter [91]. Un exemple de système dynamique uniquement ergodique (tiré de [42]) est le suivant : notons \mathbb{T}^1 le tore, $\beta(\mathbb{T}^1)$ sa tribu, λ la mesure de Lebesgue sur le tore. Soit T_α une rotation sur cet espace d'angle α , irrationnel.

Soit g une fonction continue de E dans $]0, 1[$. Fixons $y \in E$. On définit, sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P})$, une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \geq 1}$ telle que pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = g(T^k y) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1). \quad (1.17)$$

Théorème 1.10. *Soient $y \in E$ et T une application continue uniquement ergodique définie sur un compact métrisable. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ la suite de variables aléatoires indépendantes définie par (1.17). Pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω , pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$ de norme 1, pour Lebesgue presque tout $\alpha \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, il existe une constante $K > 0$ telle que*

$$\left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k f(\alpha S_k(\omega)) \right|^2 \leq K \left[\frac{N-M+H}{H+1} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2 + (N-M+H) \sqrt{H} \log(N) \sqrt{\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4} \right]$$

où le K est une constante dépendant uniquement de g et $S_k = X_1 + \dots + X_k$ pour tout $k \geq 1$.

La différence par rapport à la démonstration du Théorème 1.2 se trouve dans la majoration de I_1 . On rappelle que I_1 vaut :

$$2 \frac{N-M+H}{(H+1)^2} \sum_{h=1}^H (H+1-h) \sum_{k=M}^{N-h-1} \left| a_{k+h} \bar{a}_k \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \phi_{S_k^h}(l\alpha) d\nu(\alpha) \right|$$

où la mesure ν est la mesure de Dirac en un point non nul. Notons Δ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\Delta : x \mapsto 4x(1-x)$, cette fonction est surjective.

Par l'indépendance des $(X_k)_{k \geq 1}$, on a $\phi_{S_k^h}(l\alpha) = \prod_{i=0}^h \phi_{X_{k+i}}(l\alpha)$. Comme $|\phi_{X_{k+i}}(l\alpha)|^2$ est égal à $(1 - \Delta(p_{k+i}) \sin^2(2\pi l\alpha))$ (où $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$), on en déduit que pour presque tout α ,

$$\left| \phi_{S_k^h}(l\alpha) \right|^2 = \exp \left[\sum_{i=k}^{k+h} \log \left(1 - \Delta(p_i) \sin^2(2\pi l\alpha) \right) \right].$$

On fait apparaître dans l'exponentielle précédente :

$$(h+1) \int_E \log \left(1 - \Delta(g(y)) \sin^2(2\pi l\alpha) \right) d\mu(y),$$

en l'ajoutant et le retranchant, puis on utilise l'hypothèse d'unique ergodicité :

$$\left| \sum_{i=0}^h \log(1 - \Delta(g(T^{i+k}x))^2 \sin^2(2\pi l\alpha)) - (h+1) \int_E \log \left(1 - \Delta(g(y)) \sin^2(2\pi l\alpha) \right) d\mu(y) \right| = o(h),$$

de plus le o ne dépend pas de k car la convergence est uniforme. On en déduit qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

$$\left| \phi_{S_k^h}(l\alpha) \right|^2 \leq K \exp \left(- (h+1) \sin^2(2\pi l\alpha) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right).$$

Puis en faisant la somme, on trouve pour presque tout α :

$$\sum_{h=1}^H (H+1-h) \left| \phi_{S_k^h}(l\alpha) \right| \leq 8H \left[1 - \exp \left(- \frac{1}{2} \sin^2(2\pi l\alpha) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right) \right]^{-1}.$$

Notons $[\cdot]$ la distance au plus proche entier. La fonction $\sin^2(2\pi \cdot)$ est 1-périodique, on a alors l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} & \left[1 - \exp \left(- \sin^2(2\pi l\alpha) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right) \right]^{-1} \\ &= \left[1 - \exp \left(- \sin^2(\pi [2l\alpha]) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right) \right]^{-1}. \end{aligned}$$

Comme E est un compact métrisable et g est une application continue de E dans $]0, 1[$, l'intégrale $\int_E \Delta(g(y))d\mu(y)$ est non nulle. Comme

$$\left[1 - \sin^2(t) \exp \left(- \int_E \Delta(g(y))d\mu(y) \right) \right]^{-1} \sim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2 \int_E \Delta(g(y))d\mu(y)},$$

on en déduit que

$$\left[1 - \sin^2(2\pi l\alpha) \exp \left(- \int_E \Delta(g(y))d\mu(y) \right) \right]^{-1} \leq \frac{K}{[l\alpha]^2},$$

où K est une constante dépendante de g . D'après le théorème de Sprindžuk, pour presque tout α , on a pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(\alpha, \epsilon) > 0$ telle que

$$[l\alpha] \geq \frac{C(\alpha, \epsilon)}{l^{1+\epsilon}}.$$

On en déduit donc que α -presque-partout suivant la mesure de Lebesgue :

$$\sum_{h=1}^H (H+1-h) \phi_{S_k^h}(l\alpha) \leq C^{-1}(\alpha, \epsilon) H |l|^{2+2\epsilon}.$$

Ce qui permet de majorer I_1 par

$$2|l|^{2+2\epsilon} \frac{N-M+H}{H+1} \sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2.$$

Avec le système dynamique uniquement ergodique et les variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$ définies préalablement, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.11. *Soient E un compact métrisable, $y \in E$, T une application continue uniquement ergodique définie sur E , $(X_k)_{k \geq 1}$ la suite de variables aléatoires indépendantes définie par (1.17), $\beta > 5/6$, et la suite $(a_k)_{k \geq 1}$ vérifiant $a_k = O\left(\frac{1}{k^\beta}\right)$.*

Alors pour tout $\epsilon > 0$, pour presque tout ω et pour tout $f \in A_0(\mathbb{T}, |\cdot|^{1+\epsilon})$, $F(\cdot, \omega)$ converge presque partout sur \mathbb{R} .

1.6 Les cas transient et récurrent

On dit que la marche aléatoire $(S_k)_{k \geq 1}$ est transiente si $\mathbb{E}(S_{k+1} - S_k) \neq 0$ (pour tout $k \geq 1$) et récurrente sinon.

Définition 1.12. Soient $e_1 \geq 0$ et $e_2 \geq 0$. On note par $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ l'ensemble de toutes les suites $(a_k)_{k \geq 1}$ tel que

$$(|a_k|)_{k \geq 1} \text{ est décroissante et } \sum_{k=1}^m \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{a_{k+1}} \right| = O(m^{e_1} \log^{e_2}(m)).$$

Pour tous $\delta > 0$ et $0 < \alpha < 1$, $(\frac{1}{k^\delta})_{k \geq 1}$ et $(\frac{e^{2i\pi k^\alpha}}{k^\delta})_{k \geq 1}$ appartiennent à $\mathcal{U}(0, 1)$.

Rappelons les différentes hypothèses prise sur la suite de variables aléatoires $(X_k)_{k \geq 1}$. La variable aléatoire X_1 vérifie (1.2) si

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, |\phi_{X_1}(t)| < 1 \text{ et } \limsup_{|t| \rightarrow +\infty} |\phi_{X_1}(t)| < 1.$$

Le deuxième cas est quand la variable aléatoire X_1 vérifie (1.3), c'est-à-dire

$$\exists a \in \mathbb{R}, \exists \lambda \in \mathbb{Q}^*, \quad X_1(\Omega) \subset a + \lambda\mathbb{Z}.$$

Pour le dernier cas, X_1 est discret et l'inéquation (1.4) :

$$\#X_1(\Omega) \cap (\mathbb{Q} \setminus \{0\}) \geq 2 \text{ et } \#X_1(\Omega) \cap \mathcal{I} \geq 1.$$

où $\#$ désigne le cardinal de l'ensemble et \mathcal{I} (qu'on précise dans la partie 1.7) est un ensemble presque partout égal à \mathbb{Q}^c qui contient les irrationnels algébriques.

Dans le théorème suivant, on donne une estimation uniforme de l'ordre de grandeur de la somme partielle centrée qui dépend de la transience ou de la récurrence.

Théorème 1.13. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telle que $\mathbb{E}X_1^2 < +\infty$.

- soit la variable aléatoire X_1 vérifie (1.2),
- soit la variable aléatoire X_1 vérifie (1.3) ou (1.4), prend la valeur non nulle x_0 avec une probabilité non nulle.

Soient $e_1, e_2 \geq 0$ et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite appartenant à $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ alors pour presque tout ω , il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $1 > \beta > 1/2$,

pour tout $1 > \gamma > 0$, pour tout entier $N > M \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} & \sup_{n^{-\beta} \leq |\alpha| \leq R} \left| \sum_{k=M}^{N-1} a_k (e^{2i\pi\alpha S_k} - \mathbb{E}(e^{2i\pi\alpha S_k})) \right| \\ & \leq C(\omega) \log^{1+e_2}(N) N^{1/2-\gamma/2+\sigma+e_1/2} \sqrt{\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^2} \\ & \quad + C(\omega) \log(R+2)^{1/4} \log(N) N^{1/2+\gamma/4} \left(\sum_{k=M}^{N-1} |a_k|^4 \right)^{1/4}. \end{aligned}$$

σ est égal à $\beta/2$ si la marche est transiente, et β sinon, $R = \frac{1}{2x_0}$ si la variable aléatoire vérifie (1.3) ou (1.4) et $R > 0$ sinon.

Remarque 1.14. Pour tenir compte de la transience ou la récurrence de la marche aléatoire, on est contraint (par rapport aux cas traités dans la deuxième partie) de prendre des hypothèses supplémentaires sur la suite $(a_k)_{k \geq 1}$.

On ne peut pas donner de majoration uniforme en α de $\sum_{k=M}^{N-1} a_k e^{2i\pi\alpha S_k}$ pour une fonction f appartenant à $C(\mathbb{T})$, car il faudrait pouvoir minorer $|1 - \phi_{X_1}(l\alpha)|$ pour tout $l \in \mathbb{Z}$ ce qui n'est pas possible avec les seules hypothèses de transience et de récurrence. En effet pour minorer, il faudrait gérer des problèmes d'uniforme distribution; c'est-à-dire majorer uniformément $\frac{1}{|1 - \phi_{X_1}(l\alpha)|}$. Pour se faire, on étudie la vitesse de convergence de $\phi_{X_1}(l\alpha)$ vers 1 pour $l\alpha$ proches d'entiers; cette vitesse de convergence dépend, notamment, du type diophantien des α (voir la partie 1.7). En effet, deux α très proches l'un de l'autre n'entraînent pas que les $\phi_{X_1}(l\alpha)$ soient proches.

On a développé une méthode différente qui consiste à majorer la différence entre la somme partielle et son espérance, pour les α petits et pour les α suffisamment loin de zéro. Pour les petites valeurs de α , on utilise la loi du logarithme itéré. Pour les grandes valeurs on réutilise l'inégalité de Van der Corput (Théorème 1.7) pour poursuivre par les méthodes introduites dans la partie 1.3. La démonstration complète fait partie du prochain chapitre.

En utilisant le théorème précédent et par une simple optimisation, on obtient une classe de suite $(a_k)_{k \geq 1}$ pour lesquelles la série converge vers son espérance.

Théorème 1.15. Soient $e_1, e_2 \geq 0$ et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite appartenant à $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ tel qu'il existe $\delta > 0$ vérifiant $a_k = O(\frac{1}{k^\delta})$. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite

de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées vérifiant (1.2). Si la marche aléatoire définie par la suite $S_k = X_1 + \dots + X_k$ est transiente alors pour tout $\delta > \frac{19}{22} + \frac{\epsilon_1}{11}$, pour presque tout ω ,

$$\sum_{k \geq 1} a_k \left(e^{2i\pi\alpha S_k(\omega)} - \mathbb{E}(e^{2i\pi\alpha S_k}) \right)$$

converge uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^* .

Remarque 1.16. – Si X_1 vérifie (1.3), (1.4), les conclusions du théorème restent vraies avec une convergence uniforme sur tous les compacts de $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[\setminus \{0\}$.
– Dans le cas où la marche aléatoire est récurrente, notre méthode est inefficace : on obtient dans la convergence pour tout $\delta > 1 + \frac{\epsilon_1}{8}$.

1.7 Le théorème de Sprindžuk

Introduisons tout d’abord la définition du type diophantien d’un nombre irrationnel. Un irrationnel x est dit de type diophantien η si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une constante $C(x, \epsilon)$ telle que pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$[hx] \geq \frac{C(x, \epsilon)}{h^{\eta+\epsilon}}$$

où $[\cdot]$ est la distance au plus proche entier. Le théorème de Sprindžuk (voir [5] pour plus de détails) nous donne le résultat suivant :

Théorème 1.17. *Presque tout $x \in \mathbb{R}$ est de type diophantien 1.*

Thue, Siegel et Roth [4] ont prouvé que les irrationnels algébriques sont de type diophantien 1

L’ensemble des réels de type 1, noté \mathcal{I} , est presque partout égal à \mathbb{R} . Pour tout entier $k \geq 1$, on a $\mathcal{I} = \frac{1}{k}\mathcal{I} = k\mathcal{I}$.

Chapitre 2

Séries avec poids de transformations échantillonnées

2.1 Introduction

In this article we study some random ergodic series. Let $(a_k)_{k \geq 1}$ be a sequence of complex numbers, $(X_k)_{k \geq 1}$ be a sequence of independent random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Let f be a square integrable function defined on the probability space (E, \mathcal{A}, μ) , and $\{T^t, t \in G\}$ be a flow, where G is a semi-group included in \mathbb{R} and for each t , $T^t : L^2(\mu) \rightarrow L^2(\mu)$ be a transformation on $L^2(\mu)$. We want to know the asymptotic behavior of the series

$$\sum_{k \geq 1} a_k T^{S_k(\omega)}(f)(x) \tag{2.1}$$

where $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ($k \geq 1$) is the random walk defined by $(X_k)_{k \geq 1}$. We determine conditions on $(a_k)_{k \geq 1}$, on the distribution of $(X_k)_{k \geq 1}$ such that for \mathbb{P} -almost all $\omega \in \Omega$, for a class of functions $f \in L^2(\mu)$, the previous series converges in $L^2(\mu)$ or μ -almost everywhere. We examine in more details, the case where $a_k = \frac{1}{k}$. The series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k}(f)}{k}$$

is called the sampled ergodic Hilbert transform. Remark that we study a case where the random variables X_k ($k \geq 1$) are not identically distributed.

We also find some sufficient conditions to obtain the $L^2(\mu)$ and μ -almost everywhere convergence of $\sum_{k=1}^n a_k(T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k(\omega)}](f))$. The principal difficulty is to obtain convergence results for \mathbb{P} -almost all ω regardless of f and T .

Lacey and al ([57]) proved that if $\{T^t, t \in \mathbb{R}\}$ is a flow (i.e., $\forall s, t \in \mathbb{R}$, T^t is a bijective measure preserving transformation, $T^{s+t} = T^s \circ T^t$, and $T^0 = id$) and the random walk $(S_k)_{k \geq 1}$ is stationary integrable and ergodic then for \mathbb{P} -almost every (a.e. for short) ω , for every measure preserving flow $(T^t)_{-\infty < t < +\infty}$ on a measure space (E, \mathcal{A}, μ) , $p \geq 1$ and $f \in L^p(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^{S_k(\omega)}x) \text{ exists in } L^p.$$

Let $(X_k)_{k \geq 1}$ be a sequence of independent identically distributed square integrable random variables with values in \mathbb{Z} and $S_k = X_1 + \dots + X_k$ ($k \geq 1$) then for a.e. ω , for every measure preserving transformation T on a measure space (E, \mathcal{A}, μ) , $p > 1$ and for all $f \in L^p(\mu)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(T^{S_k(\omega)}x) \text{ exists } \mu - \text{ a.e.}$$

if and only if the random walk is transient.

In this paper, we examine some general series :

$$\sum_{k \geq 1} a_k T^{S_k}(f)$$

and we want to find assumptions for convergence of the series and the hypothesis of the difference between the series and its expectation. It is interesting to study this series because, if the series $\sum_{k \geq 1} a_k T^{S_k}(f)$ converges, then by Kronecker's lemma, we obtain the convergence of $a_n \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f)$ to 0 when n goes to $+\infty$.

In [42], Guillotin-Plantard and the second author studied a particular case of non homogeneous Markov chains $(S_k)_{k \geq 1}$ with values in \mathbb{Z} . They take τ the rotation on the d -dimensional torus associated with an irrational vector (the coordinate of α are linearly independent over \mathbb{Q}). It's proved that for every dynamical system (E, \mathcal{A}, T, μ) , for every $g \in L^2(\mu)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g \circ T^{S_k}$ exists in $L^2(\mu)$. In the present paper, we give upper bound of the trigonometric polynomial $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k}$ (Theorem 2.15). We treat some cases where the trigonometric polynomial is not periodic, we have to give upper bound which control θ . By which, we find a spectral condition

(that mean a condition on a specific measure) to ensure the convergence of the ergodic mean $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f)(x)$ for μ -almost every x (see Theorem 2.9). We give an application when T is uniquely ergodic which generalizes [42].

We also work on a particular ergodic series : the ergodic Hilbert transform (EHT for short) which was first studied by Izumi in [46]. Let T be a probability preserving transformation on (E, \mathcal{A}, μ) and $f \in L^2(\mu)$, he raised the question of the μ -almost-sure convergence of the ergodic Hilbert transform $\sum_{k \geq 1} \frac{T^k f}{k}$. Halmos ([44]) proved that Izumi's conditions are in general not satisfied and showed that on any atomic space there always exists a $f \in L^2(\mu)$ with zero mean such that the EHT fails to converge in $L^2(\mu)$ norm. Gaposhkin ([40]) studied the μ -almost surely convergence of the EHT associated to T , a measure preserving transformation on $L^2(\mu)$. He obtained the following result : let (E, \mathcal{A}, μ) be a probability space and T be a bijection measure preserving transformation on $L^2(\mu)$ with T^{-1} also a measurable preserving transformation, let $f \in L^2(\mu)$ such that

$$\int_{|\theta| < e^{-e}} \log^2 \frac{1}{|\theta|} \left(\log \log \log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 d\mu_f < +\infty.$$

Then $\sum_{k \geq 1} \frac{T^k f}{k}$ converges μ -almost surely and in $L^2(\mu)$ -norm. Assani and Lin in [3] found that if $1 < p < +\infty$, and T is a positive contraction, then for all $f \in L^p(\mu)$, there exists $C > 0$ such that for all $n > 0$,

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k f \right\|_p \leq \frac{C}{\log^{1+\alpha}(1+n)},$$

which implies the EHT converges μ -almost surely and in $L^p(\mu)$ -norm. Cuny proved in [18], the following fact. Let $1 < p < +\infty$, (E, \mathcal{A}, μ) a σ -finite measure space and T be a transformation induced on $L^p(\mu)$ ($1 < p < +\infty$) by a Dunford-Schwartz operator (a contraction of $L^1(\mu)$ which contracts also the $L^\infty(\mu)$ -norm), or a positive contraction of $L^p(\mu)$. Let $f \in L^p(\mu)$ such that $\sum_{k \geq 1} \frac{f \circ T^k}{k}$ converges in $L^p(\mu)$. Then Cuny showed that

$$\sum_{k \geq 1} \frac{f \circ T^k}{k}$$

converges μ -a.e.

Here we study a sampled ergodic Hilbert transform. Does the series $\sum_{k \geq 1} \frac{f \circ T^{S_k}}{k}$ converge a.e.? We want to know if we can have the same hypothesis for a.e. convergence like Gaposhkin in [40]. We obtain a sufficient condition on f of the μ -almost everywhere convergence.

Before giving some results, just precise all our assumptions. We suppose that $(X_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and satisfies one of the conditions below.

- (I) $(X_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables with non zero mean, square integrable, taking values in \mathbb{R} such that

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi x X_1}| > 0, \quad \liminf_{|x| \rightarrow +\infty} |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi x X_1}| > 0.$$

- (II) $(X_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of independent and identically distributed random variables with non zero mean, square integrable, taking values in \mathbb{Z} and $(S_k)_{k \geq 1}$ is strongly aperiodic in the sense of Spitzer [84], i.e. for every $x \in \mathbb{Z}$, the subgroup generated by the set

$$\{y \in \mathbb{Z} : y = x + z, \text{ where } \mathbb{P}(X_1 = z) > 0\}$$

is \mathbb{Z} itself (a consequence of this definition is that $\mathbb{E}e^{2i\pi x X_1} = 1$ if and only if $x = 0$).

- (III) $(X_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of independent random variables taking values in $\{-1, 1\}$. Let E be a metric compact space, $g : E \rightarrow (0, 1)$ be a continuous function and $\tau : E \rightarrow E$ be a uniquely ergodic transformation : there exists a unique invariant measure ν on E such that for all continuous function $h : E \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h(\tau^k x) - \int_E h d\nu \right| = 0.$$

For more details, see the Walters' book [91]. For every $k \geq 1$, the law of the random variable X_k is given by

$$\mathbb{P}(X_k = +1) = g(\tau^k y) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1) \text{ where } y \in E \text{ is fixed.}$$

Let G be either the group \mathbb{Z} or \mathbb{R} and S be either \mathbb{N} or \mathbb{R}^+ . We say that $\{T^t, t \in G\}$ is an unitary operator if

$$T^0 = id, \quad T^{s+t} = T^s \circ T^t \quad \forall s, t \in G$$

and for all $t \in G$, the adjoint of T^t is T^{-t} and

$$s \mapsto \langle T^s f, g \rangle \text{ is a continuous function for every } f, g \in L^2(\mu).$$

We say that $\{T^t, t \in S\}$ is a contraction of $L^2(\mu)$ if

$$T^0 = id, \quad T^{s+t} = T^s \circ T^t \quad \forall s, t \in S,$$

for all $t \in S$, for all $f \in L^2(\mu)$, $\int_E |T^t f|^2 d\mu \leq \int_E |f|^2 d\mu$ and

$$s \mapsto \langle T^s f, g \rangle \text{ is a continuous function for every } f, g \in L^2(\mu).$$

Recall that an operator on $L^2(\mu)$ is a Dunford-Schwartz operator if it is a contraction of $L^1(\mu)$ which also contract the function in $L^1(\mu) \cap L^\infty(\mu)$. A Dunford-Schwartz operator is also a contraction of $L^p(\mu)$ ($1 < p < +\infty$), for more details on this operators see [56] paragraph 1.6. Remark that if $G = \mathbb{Z}$ or $S = \mathbb{N}$, the continuity assumption is trivial. Let $\{T^t, t \in G\}$ be a flow on E (respectively $\{T^t, t \in S\}$ a semi-flow on E) such that for all $t \in G$ (respectively $t \in S$) $T^t : E \rightarrow E$ and preserves the measure μ , then $\{T^t, t \in G\}$ induce a contraction of $L^2(\mu)$ by $T^t f = f \circ T^t$, for all $t \in G$ (respectively $t \in S$). $(E, \mathcal{A}, \mu, \{T^t, t \in G\})$ (respectively $(E, \mathcal{A}, \mu, \{T^t, t \in S\})$) is a dynamical system.

Given a sequence of random variables $(X_k)_{k \geq 1}$, when we write T be a contraction (or an unitary operator), this means that if for all $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}$, $\{T^t, t \in G\}$ is an unitary operator of $L^2(\mu)$ and if for all $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, $\{T^t, t \in S\}$ is a contraction of $L^2(\mu)$. In a similar way, when we say that T is a Dunford-Schwartz operator, we say that $\{T^t, t \in S\}$ is a Dunford-Schwartz operator of $L^2(\mu)$.

We define now a class of \mathbb{C} -valued sequences as follows :

Definition 2.1. Let $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ be the set of all sequences $(a_k)_{k \geq 1}$ depending on two parameters $e_1 \geq 0$ and $e_2 \geq 0$ such that

$$(|a_k|)_{k \geq 1} \text{ is non increasing and } \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} \right| = O(n^{e_1} \log^{e_2} n).$$

Remark 2.2. 1. The set $\mathcal{U}(0, 0)$ contains the constant sequence.

2. In the case when $a_k := f(k)$ where f is defined on \mathbb{R}^+ with values in \mathbb{C} such that $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$, $|f'|$ is non increasing and $|f'|/|f|$ is monotone, we have. If

$$\int_2^n \frac{|f'(t)|}{|f(t)|} dt = O(n^{e_1} \log^{e_2} n)$$

then $(a_k)_{k \geq 1}$ belongs to $\mathcal{U}(e_1, e_2)$. In particular, when f and f' have constant signs then $(a_k)_{k \geq 1}$ belongs to $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ with e_1 and e_2 such that

$$|\log |f(n)|| = O(n^{e_1} \log^{e_2} n).$$

Example. For any $\delta > 0$ and $\sigma > 0$, $(1/k^\delta)_{k \geq 1}$ and $(\frac{\exp(2i\pi k^\alpha)}{k^\sigma})_{k \geq 1}$ belong to $\mathcal{U}(0, 1)$.

The following theorem is the $L^2(\mu)$ convergence of $\sum_{k \geq 1} a_k(T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f))$. Recall that when we write T be a contraction (or an unitary operator), this means that if for all $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}$, T is a unitary operator and if for all $k \geq 1$, $X_k(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$, T is a contraction.

Theorem 2.3. Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the condition **(I)**. Let $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1, e_2 \geq 0$ such that

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^\tau}\right), \quad \tau > \frac{13}{14} + \frac{e_1}{2}.$$

Then for \mathbb{P} -almost every ω , for all contraction T (or an unitary operator) of $L^2(\mu)$, the series

$$\sum_{k \geq 1} a_k(T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f)) \text{ converges on } L^2(\mu)$$

for all $f \in L^2(\mu)$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

where μ_f is the spectral measure of f .

Remark 2.4. – If $(X_k)_{k \geq 1}$ verifies **(II)**, the conclusion of this theorem is true for all $f \in L^2(\mu)$ (with no spectral condition).

– This theorem is based on the theorems : the spectral inequality 2.11, Theorem 2.13 and finally Theorem 2.26. To prove the convergence of this series, we use a classical technics. We begin to prove that $\sum_{k=1}^{2^n} a_k(T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f))$ converges when n tends to $+\infty$. Then we prove that the oscillations

$\sup_{2^{2n} \leq l < 2^{2n+1} - 1} \left| \sum_{k=2^n}^l a_k(T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f)) \right|$ go to 0 when n goes to infinity.

Now, we give a theorem to obtain the μ -almost everywhere convergence of $\sum_{k \geq 1} a_k(T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f))$.

Theorem 2.5. Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the condition **(I)**. Let $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1, e_2 \geq 0$ with $e_1 < \frac{1}{28}$ such that

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^\tau}\right), \quad \tau > \frac{41}{42} + \frac{e_1}{6}.$$

For \mathbb{P} -almost every ω , for all Dunford-Schwartz operator T and $f \in L^2(\mathbb{P})$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

(where μ_f is the spectral measure of f), the series

$$\sum_{k \geq 1} a_k (T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f)) \text{ converges } \mu\text{-a.e.}$$

Remark 2.6. – If $\frac{1}{28} \leq e_1 < \frac{1}{21}$, then the conclusion of the theorem is always true with $\tau > \frac{13}{14} + \frac{3e_1}{2}$.

- If $(X_k)_{k \geq 1}$ verifies **(II)**, the theorem is true for all $f \in L^2(\mu)$ (with no spectral condition). The previous remark is also true in this case.
- This theorem is more difficult to prove than Theorem 2.3, because : we can't direct use Theorem 2.26. Theorem 2.26 proves that we just have a μ -almost everywhere convergence on a particular index of the series. Therefore we want to obtain a control on the oscillations. The new method of control introduces the Dunford-Schwartz operator and a bigger τ .

Theorem 2.5 is very useful when we know that $\sum_{k \geq 1} a_k \mathbb{E}[T^{S_k}](f)$ converges. An consequence of Akcoglu's ergodic theorem (Theorem 2.6 p 190 in [56]) is the following. Let λ be the Lebesgue measure on $[0, 1)$, and for every $t \in \mathbb{R}$ define the rotation $T^t : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ by $T^t(x) = x + t$ modulo 1. For any $f \in L^2([0, 1), \lambda)$, we write its Fourier expansion $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{2i\pi nx}$. We have :

Theorem 2.7. Suppose that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(I)** with the uniform law on $[0, 1]$. Then for \mathbb{P} -almost all ω , for any $f \in L^2([0, 1), \lambda)$ such that $\sum_{n \geq 2} |\hat{f}(n)|^2 \sqrt{\log n} < +\infty$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k(\omega)}(f) \text{ converges } \lambda - \text{a.e.}$$

In this case, we calculate the spectral measure (this give our condition $\sum_{n \geq 2} |\hat{f}(n)|^2 \sqrt{\log n} < +\infty$).

When $a_k = \frac{1}{k}$, we obtain the following result.

Theorem 2.8. Assume that that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(I)** and $\limsup_x |\mathbb{E} e^{2i\pi X_1 x}| < 1$. Then for \mathbb{P} -almost every $\omega \in \Omega$, for all Dunford-Schwartz operator or positive contraction (or unitary positive operator) T of

$L^2(\mu)$, any $f \in L^2(\mu)$ such that there exists $\epsilon > 0$ with

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty,$$

the series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k}(f)}{k} \text{ converges } \mu\text{-a.e. and on } L^2(\mu).$$

Remarks that the conclusion of Theorem 2.8 is also true when $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(II)**. In this case, we do not need the hypothesis $\limsup_x |\mathbb{E} e^{2i\pi X_1 x}| < 1$ and the spectral condition become

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \log^2 \frac{1}{|\theta|} \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty.$$

To prove this theorem, we use Theorem 2.5 and we show that $\sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}[T^{S_k}](f)}{k}$ converges μ -almost everywhere. Denote by \tilde{T} the discrete operator $\mathbb{E}(T^{X_1})$

$$A_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(T^{X_1}))^k(f), \quad k \geq 1.$$

To prove the μ -almost everywhere of $\sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}[T^{S_k}](f)}{k}$, it is sufficient to prove that

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} A_k(f) \text{ exists } \mu\text{-almost everywhere}$$

and

$$\sum_{k \geq 1} \frac{A_k(f)}{k+1} \text{ converges } \mu\text{-a.e.}$$

To show that $(A_k(f))_{k \geq 1}$ converges, we prove that $\sum_{k \geq 1} (A_k(f) - A_{k-1}(f))$ exists μ -almost everywhere. To study this difference, we would like to use the spectral regularization method of Lifshits and Weber [63]. Let $W_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\theta}$. With the spectral lemma, we obtain for all $n \geq m$,

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq \int_{\mathbb{R}} |W_n(\theta) - W_m(\theta)|^2 d\mu_f(\theta).$$

Lifshits and Weber construct a measure with the spectral measure of \tilde{T} at point f and they obtain the following inequality for all $n \geq m$,

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq 2\nu \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right] \right).$$

By use of Theorem 2.26 (when $q = 1$), we can obtain a criteria to have the μ -almost everywhere convergence of $(A_k(f))_{k \geq 1}$. But we obtain a criteria on the spectral measure of \tilde{T} and we don't know any relation between the spectral measure of \tilde{T} and the spectral measure of T . Remarks that the two operators can have some different supports. If T is a flow, its spectral measure is defined on \mathbb{R} , but the spectral measure of $\mathbb{E}(T^{X_1})$ is defined on $[-1/2, 1/2]$.

Our method extends the results of Lifshits and Weber to a new class of operators. Let $V_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} e^{2i\pi\theta X_1}$ ($n \geq 1$), we construct a measure ν_1 (build like Lifshits et Weber) and a measure ν_2 of support $\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]$ such

$$\int_E |A_n(f) - A_m(f)|^2 d\mu \leq 2\nu_1 \left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m} \right] \right) + \int_{\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]} |V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 d\nu_2(\theta), \quad \text{for all } m \leq n.$$

By the definition of the two measures ν_1, ν_2 , we obtain a sufficient condition on the spectral measure of T at point f to have the μ -almost everywhere convergence of $(A_k(f))_{k \geq 1}$.

The μ -almost everywhere convergence of $\sum_{k \geq 1} \frac{A_k(f)}{k+1}$ is proved with the previous tools.

In the case where the random walk is non homogeneous, we prove that the random mean converges to 0. This result generalizes a theorem of Guillotin-Plantard and Schneider [42].

Theorem 2.9. *Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(III)**. For \mathbb{P} -almost every ω , for all positive contraction T (or positive unitary operator) of L^2 and $f \in L^2(\mu)$ (denote by μ_f the spectral measure of f) with*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \log \left| \frac{1}{\theta(\theta^2 - \frac{1}{4})} \right| d\mu_f(\theta) < +\infty,$$

we have :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k(\omega)}(f) = 0 \quad \mu\text{-almost everywhere.}$$

The paper is organized as follows. In the section 2, we give the spectral lemma (Lemma 2.11), some useful upper bounds of trigonometric polynomials and a theorem on L^p convergence. In section 3, we prove the polynomials estimations. In section 4, we prove the L^2 convergence and the

μ -almost everywhere convergence. The last section of this paper is devoted to the ergodic Hilbert transform and the specific results.

2.2 Preliminary facts

We give in this section the spectral lemma (Lemma 2.11), which permits to compare $\sum_{k=1}^n a_k T^k$ with a trigonometric polynomials and our estimation of trigonometric polynomials.

2.2.1 Spectral lemma

Let G be the group \mathbb{Z} or \mathbb{R} and H be $[-1/2, 1/2)$ or \mathbb{R} (the dual group of G). Let S be either semigroup \mathbb{N} or \mathbb{R}^+ .

A representation of \mathbb{R}^+ is a semi-flow and a representation of \mathbb{N} is generated by a measure preserving transformation.

Now, by a classical generalization of Stone's Theorem (see Riesz and Nagy [74]) and the dilation theorem of Nagy and Foias [37], we know that a unitary operator admits a spectral representation : for any $h \in \mathcal{H}$, there exists a positive finite measure μ_h on H (H is the dual group of G), such that, for every $g \in G$,

$$\langle U_g(h), h \rangle = \int_H e^{2i\pi g\theta} d\mu_h(\theta).$$

The conclusion of this theorem is also true with two commuting contractions, but not necessarily with three contractions.

Proposition 2.10. *Let $\{V_s, s \in S\}$ be a representation of S by contractions on \mathcal{H} . There exists a Hilbert space $\mathcal{H}' \supset \mathcal{H}$ and $\{U_g, g \in G\}$ some unitary operators on \mathcal{H}' , such that, if P denotes the orthogonal projection from \mathcal{H}' onto \mathcal{H} , then $V_s h = P U_s h$ for any $s \in S$ and $h \in \mathcal{H}$.*

From this and the dilation theorem, we deduce this lemma :

Lemma 2.11 (Spectral Inequality). *Let $\{V_s, s \in S\}$ be some contractions on a Hilbert space \mathcal{H} . For any $h \in \mathcal{H}$ denote by μ_h the spectral measure define on the dual group of S (denote by H) of V at point h . Let a_1, \dots, a_n be any complex numbers and let s_1, \dots, s_n be any elements of S . Then we have*

$$\left\| \sum_{k=1}^n a_k V_{s_k}(h) \right\|^2 \leq \int_H \left| \sum_{k=1}^n a_k e^{2i\pi\theta s_k} \right|^2 d\mu_h(\theta). \quad (2.2)$$

Remark 2.12. In general, we say that μ_h is the spectral measure of h . In the discreet case : $S = \mathbb{N}$ or $G = \mathbb{Z}$, the spectral measure is unique (see paragraph 2.3 in [56]). But in the case where $S = \mathbb{R}^+$, we can have many spectral measures.

2.2.2 Trigonometric polynomial estimates

Recall that the class of sequence $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ is defined in Definition 2.1.

Theorem 2.13. Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the case **(I)**. Let $(a_k)_{k \geq 1}$ be a sequence which belongs to $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1, e_2 \geq 0$. Then there exists a non negative random variable C with $\mathbb{P}(\omega : C(\omega) < \infty) = 1$ such that for \mathbb{P} -almost everywhere ω , for every real θ and every integers $n > m \geq 2$, we have

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k \left[e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} - \mathbb{E} e^{2i\pi\theta S_k} \right] \right| \leq C(\omega) \log(|\theta| + 2)^{1/4} \log(n)^{1 + \frac{e_2}{2}}$$

$$n^{\frac{19}{28} + \frac{e_1}{2}} \left(\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^4 \right)^{1/4}.$$

Remark 2.14. In the case **(II)**, the conclusion of the theorem is true and $\log(|\theta| + 2)$ can be replaced by the constant $\log(3)$.

This theorem is an estimation of the difference between a random trigonometric polynomial and its expectation. The upper bound is obtained by applying the Van der Corput inequality. We decompose the interval $] -R, R[$ into two subsets $] -n^{-\beta}, n^{-\beta}[$ and $] -R, R[\setminus] -n^{-\beta}, n^{-\beta}[$ and we choose the best $\beta > 0$.

In the case **(III)**, we just give the estimation of $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k(\omega)}$.

Theorem 2.15. Let $y \in E$, assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the case **(III)**. Let $0 < \gamma < 1$. There exists a non negative random variable C with $\mathbb{P}(\omega : C(\omega) < \infty) = 1$ such that for \mathbb{P} -almost everywhere ω , for all $\epsilon > 0$, $F = [\epsilon, 1/2 - \epsilon] \cup [1/2 + \epsilon, 1 - \epsilon]$ and for all integer $n \geq 2$, we have

$$\sup_{\theta \in F} \left| \sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} \right| \leq C(\omega) (n^{3/4 + \gamma/4} \sqrt{\log(n)} + n^{1 - \gamma/2} \frac{1}{\epsilon}).$$

Remark 2.16. Since $\epsilon^{-1} \rightarrow +\infty$ when ϵ goes to 0, we need an other upper bound for the small θ which is more precise. Moreover the upper bound of the previous theorem does not depend on y which is used to define the law of X_1 .

The upper bound, in the non homogeneous case, of $|\sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k}|$ is also, in part, due to Van der Corput inequality. In this case the characteristic function of $(S_k)_{k \geq 1}$ is different : it is not the characteristic function of X_1 to the power k , due to the non homogeneous random walk. This special feature forces us to give an upper bounds on a space strictly included in $(0, 1)$.

2.3 Proof of our trigonometric polynomial estimates

2.3.1 Proof of Theorem 2.13

The proof consists of two theorems. We give two uniform (on θ) upper bound of the difference of the series $\sum_{k=m}^n a_k e^{2i\pi\theta S_k}$ and its expectation. First we deal with θ near from 0 and then the θ greater than some constant (see Theorem 2.24).

Theorem 2.17. *Let $(S_k)_{k \geq 1}$ be a \mathbb{R} -valued random walk defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ such that for every $k \geq 1$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ where $(X_k)_{k \geq 1}$ are some i.i.d real random variables and $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$. Let $(a_k)_{k \geq 1}$ be a complex sequence. Then there exists a non negative random variable C with $\mathbb{P}(\omega : C(\omega) < +\infty) = 1$ such that for \mathbb{P} -almost every ω , for every $\beta > 0$, and every integer $2 \leq m < n$ we have :*

$$\sup_{|\theta| \leq n^{-\beta}} \left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k (e^{2i\pi\theta S_k} - \mathbb{E} e^{2i\pi\theta S_k}) \right| \leq 2C(\omega) n^{1-\beta} \sqrt{\log(\log n) \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2}.$$

Proof. For every θ such that $|\theta| \leq n^{-\beta}$, we have

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k (e^{2i\pi\theta S_k} - \mathbb{E} e^{2i\pi\theta S_k}) \right|^2 &\leq \left(\sum_{k=m}^{n-1} |e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} - \phi(\theta)^k|^2 \right) \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \\ &\leq 4 \left(\sum_{k=m}^{n-1} |e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} - e^{2i\pi k\theta\nu}|^2 + \sum_{k=m}^{n-1} |e^{2i\pi k\theta\nu} - \phi(\theta)^k|^2 \right) \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2, \end{aligned}$$

where ν stands for $\mathbb{E}X_1$, and ϕ is the characteristic function of X_1 .

From the iterated logarithm law, there exists Ω_1 with measure equal to 1 such that for every $\omega \in \Omega_1$, there exists a constant $C(\omega) > 0$, for every $m \leq k \leq n-1$, we have

$$|S_k(\omega) - k\nu| \leq C(\omega)(k \log(\log k))^{1/2}.$$

Thus, if $|\theta| \leq n^{-\beta}$, then for every $m \leq k \leq n-1$,

$$|e^{2i\pi\theta S_k(\omega)} - e^{2i\pi k\theta\nu}| \leq 2\pi|\theta||S_k(\omega) - k\nu| \leq 2\pi C(\omega)n^{-\beta+1/2}\sqrt{\log(\log n)}.$$

The function ϕ is twice continuously differentiable since X_1 admits finite second order moment. Then for every θ small,

$$\phi(\theta) = 1 + 2i\pi\nu\theta + O(\theta^2) \text{ and } e^{2i\pi\nu\theta} = 1 + 2i\pi\nu\theta + O(\theta^2).$$

Hence

$$|e^{2i\pi k\theta\nu} - \phi(\theta)^k| \leq Cn|\theta|^2 = O(n^{1-2\beta})$$

since $|\theta| \leq n^{-\beta}$. \square

The conclusion of the theorem is not necessarily true in the case where $(X_k)_{k \geq 1}$ are not identically distributed. We can not apply the iterated logarithm law, and the characteristic function S_k is not a power of ϕ_{X_1} .

Theorem 2.18. *Let $(S_k)_{k \geq 1}$ be a \mathbb{R} -valued random walk defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ such that for every $k \geq 1$, $S_k = X_1 + \dots + X_k$ where $(X_k)_{k \geq 1}$ are some i.i.d. random variables. Moreover assume $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$. Let $(a_k)_{k \geq 1}$ be a sequence in $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1, e_2 \geq 0$.*

Then there exists a non negative random variable C with $\mathbb{P}(\omega : C(\omega) < +\infty) = 1$ such that for \mathbb{P} -almost every ω , for every $R \geq \frac{1}{2} > \eta > 0$, all integer n, m with $m < n$ and any H with $H < n - m$ we have :

$$\begin{aligned} \sup_{R \geq |\theta| > \eta} \left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 &\leq C_0 \frac{n-m+H}{H+1} \frac{n^{e_1} \log(n)^{e_2}}{\inf_{R \geq |x| > \eta} |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi x X_1}|} \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \\ &+ C(\omega)(n-m+H)H^{1/2} \log(n) \sqrt{\log(R+2)} \sqrt{\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^4} \end{aligned}$$

where C_0 is an absolute constant depending only on the sequence $(a_k)_{k \geq 1}$.

Remark 2.19. 1. *Assume that $(S_k)_{k \geq 1}$ is \mathbb{Z} -valued. We choose $R = 1/2$, because ϕ is a periodic function. If $(S_k)_{k \geq 1}$ is transient ($\mathbb{E}X_1 \neq 0$) and $X_1 \in L^1(\mathbb{P})$, then there exists a constant $C_1 > 0$ such that*

$$C_1 \inf_{1/2 \geq |\theta| > \eta} \left| \frac{1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}}{\theta} \right| > 1.$$

If $(S_k)_{k \geq 1}$ is recurrent ($\mathbb{E}X_1 = 0$), and $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$ then there exists a constant $C_2 > 0$ such that

$$C_2 \inf_{1/2 \geq |\theta| > \eta} \left| \frac{1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}}{\theta^2} \right| > 1.$$

2. Assume that $(S_k)_{k \geq 1}$ is \mathbb{R} -valued and $\liminf_{|\theta| \rightarrow +\infty} |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}| > 0$, then

$$\inf_{R \geq |\theta| > \eta} |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}| \geq \inf_{|\theta| > \eta} |1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}| > 0.$$

3. If we drop the condition that $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$, for some $e_1 \geq 0$ and $e_2 \geq 0$. We just assume that $(|a_k|)_{k \geq 1}$ is non increasing, then the expression $|1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}|$ in the conclusion can be replaced by $1 - |\mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}|$ with $e_1 = 0$ and $e_2 = 0$.

Recall a well-know inequality : the Van der Corput's lemma.

Lemma 2.20 (Van der Corput). *Let m and n be integers such that $m < n$. Let $(u_k)_{m \leq k < n}$ be a finite sequence which takes values in \mathbb{C} . Let H be a integer such that $H < n - m$. Then*

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} u_k \right|^2 \leq \frac{n-m+H}{H+1} \sum_{k=m}^{n-1} |u_k|^2 + 2 \frac{n-m+H}{(H+1)^2} \left| \sum_{h=1}^H (H+1-h) \sum_{k=m}^{n-h-1} u_{k+h} \cdot \overline{u_k} \right|.$$

We'll use an other lemma which is proved by Abel's transformation.

Lemma 2.21. *Let q be a complex number with $|q| < 1$, $H \geq 2$ an integer and $(c_h)_{h \geq 1}$ any sequence of complex numbers. We have*

$$\left| \sum_{h=1}^H (H+1-h) q^h c_h \right| \leq \frac{1}{|1-q|} \left(\sum_{h=2}^{H-1} ((H+1-h)|c_h - c_{h-1}| + |c_{h-1}|) + H|c_1| + |c_H| \right).$$

The key of our proof of Theorem 2.18 is the following lemma.

Lemma 2.22. *Let $m, n \in \mathbb{N}$ with $n \geq m + 3$. Let I_r^h be $[M, N - h - 1] \cap \{r + hq, q \in \mathbb{N}\}$. Assume $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$. Let $(a_k)_{k \geq 1}$ be a complex valued non increasing sequence. Let $H \in \mathbb{N}^*$ with $H < n - m$. For fixed $1 \leq h \leq H$ and fixed $R \geq \frac{1}{2}$ denote by*

$$Q_h = \log(h+2) \log(n+2) \log(R+2) \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^4.$$

Let $K_{r,h}$ be the random variable

$$\sup_{R \geq 1/2} \sup_{m \geq 3} \sup_{n > m+h} Q_h^{-1} \sup_{|\theta| \leq R} \left| \sum_{k=m}^{n-h-1} a_{k+h} \cdot \overline{a_k} (e^{2i\pi\theta S_k^h(\omega)} - \phi^h(\theta)) \chi_{I_r^h}(k) \right|^2,$$

where χ_A is the characteristic function of the set A . We have

$$\sup_{h \geq 1} \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} K_{r,h}}{h} \right)^{1/2} < +\infty.$$

Proof. The proof is based on Cohen and Cuny's theorem.

Theorem 2.23 ([19]). *Let $(\theta_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of independent random variables, defined on $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, with values in \mathbb{R} . Let ϕ be some positive non decreasing function on \mathbb{R}^+ , satisfying that there exists $\eta > 0$, such that $\phi(x) \geq x^\eta$ for every $x \geq 0$. Assume that there exists $\delta > 0$, such that $\sum_{n \geq 1} P(|\theta_n| > \phi(n)^\delta) < +\infty$. Let $(b_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of complex numbers. Then there exist universal constants $\epsilon > 0$ and $C > 0$, such that*

$$\mathbb{E} \left[\sup_{N > M > 1} \sup_{T \geq 1} \exp \left\{ \epsilon \frac{\max_{|t| \leq T} \left| \sum_{k=M+1}^N b_k (e^{2i\pi(\theta_k, t)} - \mathbb{E} e^{2i\pi(\theta_k, t)}) \right|^2}{\log(1+T) \log(1+\phi(N)) \sum_{k=M+1}^N |b_k|^2} \right\} \right] \leq C.$$

Fix two integers h and r with $0 \leq r \leq h-1$. We apply Theorem 2.23 to $M \leq k \leq N-h-1$,

$$b_k = \begin{cases} a_{k+h} \overline{a_k} & \text{if } k \in I_r^h \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

and

$$\theta_k = \begin{cases} S_k^h & \text{if } k \in I_r^h \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

Let ϕ be the function defined by $\phi(n) = hn^2$. We have

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq h+1} \mathbb{P}(\theta_n > \phi(n)) &= \sum_{n \in I_r^h} \mathbb{P}(\theta_n > \phi(n)) \\ &\leq \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{h+1} > \phi(n)) \leq h \sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 > n^2). \end{aligned}$$

Since $X_1 \in L^2(\mathbb{P})$, $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_1 > n^2)$ is finite. Theorem 2.23 gives two universal constants C and ϵ such that $\mathbb{E} K_{h,r} < +\infty$, since C is independent of r and h , we obtain

$$\sup_{h \geq 1} \mathbb{E} \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} K_{r,h}}{h} \right)^{1/2} < +\infty.$$

□

Proof.[Proof of Theorem 2.18] Take $u_k = a_k e^{2i\pi\theta S_k}$. We obtain the following inequality

$$\left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 \leq \frac{n-m+H}{H+1} \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 + I_1 + I_2$$

where

$$I_1 = 2 \frac{n-m+H}{(H+1)^2} \left| \sum_{h=1}^H (H+1-h) \phi^h(\theta) \sum_{k=m}^{n-h-1} a_{k+h} \cdot \bar{a}_k \right| \quad (2.3)$$

and

$$I_2 = 2 \frac{n-m+H}{(H+1)^2} \left| \sum_{h=1}^H (H+1-h) \sum_{k=m}^{n-h-1} a_{k+h} \cdot \bar{a}_k (e^{2i\pi\theta S_k^h} - \phi^h(\theta)) \right|,$$

Applying lemma 2.21 to $q = \phi(\theta)$, $c_h = \sum_{k=m}^{n-h-1} a_{k+h} \cdot \bar{a}_k$ for fixed n and m ($n-m \geq 3$) and $H < n-m$, we obtain

$$I_1 \leq 2 \left[\frac{n-m-H}{(H+1)^2 |1-\phi(\theta)|} \sum_{h=2}^{H-1} (H-h+1) |c_h - c_{h-1}| + \frac{2(n-m-H)}{H|1-\phi(\theta)|} \sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \right]$$

Furthermore, by exchanging the summation symbols and using the non increasing property of $(a_k)_{k \geq 1}$, we have

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(H+1)^2} \sum_{h=2}^{H-1} (H-h+1) |c_h - c_{h-1}| \\ & \leq \frac{1}{H+1} \left[\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \sum_{h=2}^{2n} \frac{|a_h - a_{h-1}|}{|a_{h-1}|} + \sum_{h=1}^H |a_{n-h}|^2 \right]. \end{aligned}$$

Finally since $(a_k)_{k \geq 1}$ belongs to $\mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1 \geq 0$ and $e_2 \geq 0$, there exists a constant $C > 0$ such that

$$I_1 \leq C \left(\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \right) \left(\frac{(n-m+H)n^{e_1} \log(n)^{e_2}}{(H+1)|1-\phi(\theta)|} \right). \quad (2.4)$$

Now we come back to I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2 \frac{n-m+H}{H+1} \sum_{h=1}^H \sqrt{Q_h} \left(\sum_{r=0}^{h-1} K_{r,h}(\omega) \right)^{1/2} \\ &\leq 2 \sqrt{Q_H} \frac{n-m+H}{H+1} \sum_{h=1}^H \left(\sum_{r=0}^{h-1} K_{r,h}(\omega) \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Then by Kronecker's lemma, we have

$$C(\omega) := \sup_{H \geq 1} \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \left(\frac{\sum_{r=0}^{h-1} K_{r,h}(\omega)}{h} \right)^{1/2} < +\infty \mathbb{P}\text{- a.s.}$$

Hence

$$I_2 \leq 2C(\omega)(n-m+H)H^{1/2} \log(n) \sqrt{\log(R+2)} \sqrt{\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^4}.$$

□

With this theorem, we obtain for $H = N^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, the following theorem.

Theorem 2.24. *Assume that the random walk $(S_k)_{k \geq 1}$ is transient ($\mathbb{E}X_1 \neq 0$) and $X_1 \in L^2(\Omega)$. Take $R = 1/2$, if $(S_k)_{k \geq 1}$ is \mathbb{Z} -valued, and $R > 1/2$ otherwise. Then there exist a constant C_1 depending only on $(a_k)_{k \geq 1}$ and a non negative random variable C with $\mathbb{P}(\omega : C(\omega) < +\infty) = 1$ such that for \mathbb{P} -almost every ω , for every $R \geq \frac{1}{2}$, for every $\gamma \in (0, 1)$ and all integers n, m with $n > m \geq 2$, we have*

$$\begin{aligned} \sup_{R \geq |\theta| > n^{-\beta}} \left| \sum_{k=m}^{n-1} a_k \left[e^{2i\pi\theta S_k} - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta S_k} \right] \right| &\leq \\ C_1 \log^{e_2/2}(n) \left(n^{1/2-\gamma/2+\beta/2+e_1/2} \right) &\left(\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^2 \right)^{1/2} \\ + C(\omega) \log(R+2)^{1/4} \log(n) n^{1/2+\frac{\gamma}{4}} &\left(\sum_{k=m}^{n-1} |a_k|^4 \right)^{1/4}. \quad (2.5) \end{aligned}$$

Remark 2.25. *A simple computation gives us the minimum is obtained when $\gamma = 5/7$ and $\beta = 4/7$.*

The proof of Theorem 2.18 gives an upper bound of $\sum_{k=m}^{n-1} a_k \mathbb{E}e^{2i\pi\theta S_k}$. Then we apply the triangular inequality and Theorem 2.18.

2.3.2 Proof of Theorem 2.15

Recall that $(X_k)_{k \geq 1}$ is a sequence of independent random variables taking values in $\{-1, 1\}$. Let E be a metric compact space, $g : E \rightarrow (0, 1)$ be a continuous function and $\tau : E \rightarrow E$ be a uniquely ergodic transformation. For every $k \geq 1$, the law of the random variable X_k is given by

$$\mathbb{P}(X_k = +1) = g(\tau^k y) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1) \text{ where } y \in E \text{ is fixed.}$$

The proof of Theorem 2.15 is similar to that Theorem 2.18 except a term. Proof.[Proof of Theorem 2.15] Let $\epsilon \in (0, 1/4)$ and $F = [-1/2 + \epsilon, -\epsilon] \cup [\epsilon, 1/2 - \epsilon]$. In order to obtain an upper bound of our supremum, we follow the proof of Theorem 2.18 with $a_k = 1$. The only modification is on the term I_1 ((2.3) for the definition) because we just need the independence of X_n for the upper bound of I_2 . In this case, I_1 do not necessarily have a geometric term, because the random variable X_k is not identically distributed. The new I_1 is the following :

$$I_1 = 2 \frac{n-H}{(H+1)^2} \left| \sum_{h=1}^H (H+1-h) \sum_{k=1}^{n-h-1} \prod_{j=1}^h \phi_{X_{j+k}}(\theta) \right|.$$

Define Δ by : $\Delta : x \mapsto 4x(1-x)$. Remarks that $\Delta([0, 1]) \subset [0, 1]$. The trigonometric formula implies that $|\phi_{X_{j+k}}(\theta)|^2$ is equal to $(1 - \Delta(p_{j+k}) \sin^2(2\pi\theta))$ (where $p_k = \mathbb{P}(X_k = 1)$). We obtain for all θ ,

$$\left| \prod_{j=1}^h \phi_{X_{j+k}}(\theta) \right|^2 = \exp \left[\sum_{i=k}^{k+h} \log \left(1 - \Delta(p_i) \sin^2(2\pi\theta) \right) \right].$$

The unique ergodicity gives :

$$\left| \sum_{i=0}^h \log(1 - \Delta(g(T^{i+k}y))^2 \sin^2(2\pi\theta)) - (h+1) \int_E \log \left(1 - \Delta(g(y)) \sin^2(2\pi\theta) \right) d\mu(y) \right| = o(h). \quad (2.6)$$

Furthermore o is independent of k because of the uniform convergence property. Therefore, there exists a constant $\Upsilon > 0$ such that

$$\left| \prod_{j=1}^h \phi_{X_{j+k}}(\theta) \right|^2 \leq \Upsilon \exp \left(- (h+1) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \sin^2(2\pi\theta) \right).$$

Consequently, we obtain for almost every θ :

$$\begin{aligned} & \sum_{h=1}^H (H+1-h) \sum_{k=1}^{n-h-1} \left| \prod_{j=1}^h \phi_{X_{j+k}}(\theta) \right| \\ & \leq 8nH\Upsilon \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{2} \sin^2(2\pi\theta) \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Recall that $g(E) \subset (0, 1)$, so $\int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) > 0$. Notice that the function $\theta \mapsto \left(\frac{1}{2} \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \right)^{-1} \left[1 - \exp \left(-\frac{1}{2} \int_E \Delta(g(y)) d\mu(y) \sin^2(2\pi\theta) \right) \right]$ is a continuous function on E which is equivalent to $(2\pi\theta)^2$ when $\theta \rightarrow 0$, to $4\pi^2(\theta + 1/2)^2$ when $\theta \rightarrow -1/2$ and to $4\pi^2((\theta - 1/2))^2$ when $\theta \rightarrow 1/2$. Then for $H = N^\gamma$ ($0 < \gamma < 1$), there exists a constant $C > 0$ (dependent of ω) such that

$$\sup_{\theta \in F} \left| \sum_{k=1}^n e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 \leq C(n^{3/2+\gamma/2} \log(n) + n^{2-\gamma}\epsilon^{-2}).$$

□

2.4 Proof of L^2 and a.e. convergence

2.4.1 L^2 convergence

The following theorem is very useful. It permits us to obtain a deterministic criterion for convergence of a random series. We will use it in the proof of Theorem 2.3.

Theorem 2.26. *Let $1 < p < +\infty$ and $(X_k)_{k \geq 1}$ be some random variables defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ and belong to $L^p(\mathbb{P})$. Let $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of non negative numbers and $(A_n)_{n \geq 1}$ be an unbounded non decreasing sequence with $A_1 \geq 1$. Assume that there exists $q > 0$ such that for every $n > m \geq 0$,*

$$\int \left| \sum_{k=m+1}^n X_k \right|^p d\mathbb{P} \leq A_n \left(\sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right)^q. \quad (2.8)$$

Then the series

$$\sum_{k \geq 1} X_k \text{ converges in sense of } L^p(\mathbb{P})$$

if the series $\sum_{n \geq 2} \frac{(\sum_{\{k: A_k \geq \log_2(n)\}} \alpha_k)^{q/p}}{n(\log n)^{1-1/p}}$ converges.

When $q \geq 1$, this theorem is a consequence of a theorem of Cohen and Cuny [19] and a theorem of Móricz [66]. In the case where $q \geq 1$, this theorem gives also the μ -almost everywhere convergence with $\log(n)$ in the right member of (2.8). If $q = 1$ and if we beside assume that $(A_n)_{n \geq 1}$ is bounded and $\sum_{n \geq 1} \alpha_n(\log n)2 < +\infty$, then $\sum_{n \geq 1} X_n$ converges \mathbb{P} -almost everywhere.

But we want to apply Theorem 2.26 with $p = 2$ and $q = \frac{1}{2}$, so the inequality (2.8) is inefficient (see [66]), therefore the almost everywhere convergence will be more difficult.

The proof of Theorem 2.26 is based on the proof of Theorem 3.1 in [19]. Proof. Define two sequences $(N_n)_{n \geq 1}$ and $(l_n)_{n \geq 1}$ by induction. Let $N_1 = l_1 = 0$. Let l_{n+1} be the integer such that $2^{l_{n+1}} \leq A_{N_{n+1}} < 2^{l_{n+1}+1}$. Then define $N_{n+1} = \max\{m \geq N_n + 1 : 2^{l_{n+1}} \leq A_m < 2^{l_{n+1}+1}\}$. Clearly, $(N_n)_{n \geq 1}$ is not a bounded sequence by the unboundness and non decreasingness of $(A_n)_{n \geq 1}$. Moreover, $(N_n)_{n \geq 1}$ is increasing. Now, for every $n \geq 1$ we have

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{k=N_{n+1}}^{N_{n+1}} X_k \right|^p d\mathbb{P} \right)^{1/p} &\leq (A_{N_{n+1}})^{1/p} \left(\sum_{k=N_{n+1}}^{N_{n+1}} \alpha_k \right)^{q/p} \\ &\leq 2^{\frac{l_{n+1}+1}{2}} \left(\sum_{2^{l_{n+1}} \leq A_k < 2^{l_{n+1}+1}} \alpha_k \right)^{q/p}. \end{aligned}$$

Hence

$$\sum_{n \geq 1} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{k=N_{n+1}}^{N_{n+1}} X_k \right|^p d\mathbb{P} \right)^{1/p} \leq 2 \sum_{n \geq 1} 2^{n/p} \left(\sum_{2^n \leq A_k < 2^{n+1}} \alpha_k \right)^{p/q}.$$

The last series are smaller than $\sum_{n \geq 2} \frac{(\sum_{\{k: A_k \geq \log_2(n)\}} \alpha_k)^{q/p}}{n(\log n)^{1-1/p}}$. Then $(\sum_{k=1}^{N_n} X_k)_{n \geq 1}$ converges in $L^p(\mathbb{P})$. Now we prove that the oscillation goes to 0 when n goes to $+\infty$, that mean :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{N_n < l \leq N_{n+1}} \left(\int_{\Omega} \left| \sum_{k=N_{n+1}}^l X_k \right|^p d\mathbb{P} \right)^{1/p} = 0.$$

In fact, we have

$$\begin{aligned}
\sup_{N_n < l \leq N_{n+1}} \left(\int \left| \sum_{k=N_n+1}^l X_k \right|^p d\mathbb{P} \right)^{1/p} &\leq A_l^{1/p} \left(\sum_{k=N_n+1}^l \alpha_k \right)^{q/p} \\
&\leq A_{N_{n+1}} \left(\sum_{k=N_n+1}^{N_{n+1}} \alpha_k \right)^{q/p} \\
&\leq 2^{\frac{l_{n+1}+1}{2}} \left(\sum_{2^{l_{n+1}} \leq A_k \leq 2^{l_{n+1}+1}} \alpha_k \right)^{q/p}.
\end{aligned}$$

The limit of the last term is 0 since it is the general term of a convergent series.

□

Now, to prove Theorem 2.3, we apply the two Theorems 2.13 and 2.26.

2.4.2 Almost everywhere convergence

The μ -almost everywhere convergence is based on the following spectral inequality.

Lemma 2.27. *Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the condition (I). Let $\{T^t, t \in G\}$ be a contraction (or an unitary operator) of $L^2(\mu)$, for all $f \in L^2(\mu)$, there exists a spectral μ_f measure define on the dual group H of G such that for all $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ (for some $e_1, e_2 \geq 0$), for all $n > m \geq 1$ we have*

$$\begin{aligned}
\int_E \left| \sum_{k=m+1}^n a_k (T^{S_k}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f)) \right|^2 d\mu \\
\leq \int_H \left| \sum_{k=m+1}^n a_k (e^{2i\pi\theta S_k} - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta S_k}) \right|^2 d\mu_f(\theta).
\end{aligned}$$

We begin to prove it with T a unitary operator and extend it to contraction with the property 2.10.

Using this lemma and Theorem 2.13, we prove Theorem 2.5, recall it before the proof.

Theorem 2.28 (Theorem 2.5). *Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the condition (I). Let $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$ for some $e_1, e_2 \geq 0$ with $e_1 < \frac{1}{28}$ such that*

$$a_k = O\left(\frac{1}{k^\tau}\right), \quad \tau > \frac{41}{42} + \frac{e_1}{6}.$$

For \mathbb{P} -almost every ω , for all Dunford-Schwartz operator T and $f \in L^2(\mathbb{P})$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

(where μ_f is the spectral measure of f), the series

$$\sum_{k \geq 1} a_k (T^{S_k(\omega)}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f)) \text{ converges } \mu\text{-a.e.}$$

Remark 2.29. – If $\frac{1}{28} \leq e_1 < \frac{1}{21}$, then the conclusion of the theorem are always true with $\tau > \frac{13}{14} + \frac{3e_1}{2}$.

– If $(X_k)_{k \geq 1}$ verifies **(II)**, the theorem is true for all $f \in L^2(\mu)$ (with no spectral condition). The previous remarks is also true in this case.

Corollary 2.30. Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies the condition **(I)**. For \mathbb{P} -almost every ω , for all Dunford-Schwartz operator T and $f \in L^2(\mathbb{P})$ such that

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} d\mu_f(\theta) < +\infty$$

(where μ_f is the spectral measure of f), then

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k(\omega)}(f) \text{ converges } \mu\text{-a.e.}$$

Now, we give the proof of Theorem 2.5.

Proof. We apply Theorem 2.3, to prove that $(\sum_{k=1}^n a_k [T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f)])_{n \geq 1}$ converges in $L^2(\mu)$. Then there exists a sub-sequence $(N_n)_{n \geq 1}$ such that $\sum_{k=1}^{N_n} a_k [T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f)]$ converges μ -almost everywhere. It suffices to show that the oscillation :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{N_n < l \leq N_{n+1}} \left| \sum_{k=N_n+1}^l a_k (T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f)) \right| = 0 \text{ a.e.}$$

By applying Abel's summation method, we obtain with $T_k(f) = T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f)$ that

$$\max_{N_n+1 \leq l \leq N_{n+1}} \left| \sum_{j=N_n+1}^l a_j T_j(f) \right| \leq \sum_{j=N_n+1}^{N_{n+1}+1} |a_{j+1} - a_j| \left| \sum_{k=1}^j T_k(f) \right| \quad (2.9)$$

$$+ \max_{N_n < l \leq N_{n+1}} \left(|a_l| \left| \sum_{k=1}^l T_k(f) \right| \right) \quad (2.10)$$

By integrating the right member of (2.9), and using the Cauchy-Schwarz inequality, we have

$$\int (2.9) d\mu \leq \sum_{j=N_n+1}^{N_{n+1}} |a_{j+1} - a_j| \left(\int_E \left| \sum_{q=N_n+1}^j T_k(f) \right|^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

By the spectral lemma, Lemma 2.11, and Theorem 2.13, we deduce :

$$\int (2.9) d\mu \leq \sum_{j=N_n+1}^{N_{n+1}} |a_{j+1} - a_j| j^{13/14+e_1/2} \log(j)^{1+e_2/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(|\theta| + 2)} d\mu_f \right)^{1/2}.$$

Then $\sum_{n \geq 1} \int (2.9) d\mu < +\infty$ if

$$\sum_{k \geq 1} |a_{k+1} - a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} < +\infty.$$

Using the Abel transformation, we have

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} \\ & \leq |a_n| n^{13/14+e_1/2} \log(n)^{1+e_2/2} \sum_{k=1}^n \left| \frac{a_{k+1} - a_k}{a_k} \right| \\ & + \sum_{k=1}^n \left(|a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} - |a_{k+1}| (k+1)^{13/14+e_1/2} \log(k+1)^{1+e_2/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \sum_{j=1}^k \left| \frac{a_{j+1} - a_j}{a_j} \right|. \end{aligned}$$

Like $(a_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{U}(e_1, e_2)$, there exists a constant $K > 0$ such that

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |a_{k+1} - a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} \\ & \leq K \left(|a_n| n^{13/14+3e_1/2} (\log n)^{e_2} \right. \\ & + \sum_{k=1}^n \left(|a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} - |a_{k+1}| (k+1)^{13/14+e_1/2} \log(k+1)^{1+e_2/2} \right) \\ & \qquad \qquad \qquad \left. k^{e_1} (\log k)^{e_2} \right). \end{aligned}$$

Remark that

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^n \left(|a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} \right. \\
& \quad \left. - |a_{k+1}| (k+1)^{13/14+e_1/2} \log(k+1)^{1+e_2/2} \right) k^{e_1} (\log k)^{e_2} \\
& \leq \sum_{k=1}^{n+1} |a_k| k^{13/14+e_1/2} \log(k)^{1+e_2/2} \\
& \quad (k^{e_1} (\log k)^{e_2} - (k+1)^{e_1} (\log(k+1))^{e_2}) < +\infty
\end{aligned}$$

because $a_k = O(k^{-\tau})$ and $\tau > \frac{41}{42} + \frac{e_1}{6} > \frac{13}{14} + \frac{3e_1}{2}$ ($e_1 < \frac{1}{28}$). Therefore $\sum_{n \geq 1} \int (2.9) d\mu < +\infty$ and $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2.9)$ is equal to 0 μ -a.e. To prove that $\lim_n (2.10) = 0$ μ -a.e., it suffices to prove that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n| \left| \sum_{k=1}^n T_k(f) \right| = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

Let $\gamma > \frac{21}{1-7e_1} > 0$, $n > 0$ and N the unique integer such that $\lfloor N^\gamma \rfloor \leq n < \lfloor (N+1)^\gamma \rfloor$ where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the integer part. Recall that $(|a_n|)_{n \geq 1}$ is non increasing, then

$$\left| a_n \sum_{k=1}^n T_k(f) \right| \leq |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \left| \sum_{k=1}^{\lfloor N^\gamma \rfloor} T_k(f) \right| + |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor+1}^{\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor} |T_k(f)|. \quad (2.11)$$

Remarks that

$$a_{\lfloor N^\gamma \rfloor} N^{\gamma(\frac{13}{14} + \frac{e_1}{2})} = O(N^{\gamma(-\tau + \frac{13}{14} + \frac{e_1}{2})}),$$

$\tau > \frac{41}{42} + \frac{e_1}{6}$ and $\gamma(-\tau + \frac{13}{14} + \frac{e_1}{2}) < -1$. So the right first term of (2.11) tends to zero, because of

$$\begin{aligned}
& \sum_{N \geq 1} |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \left(\int \left| \sum_{k=1}^{\lfloor N^\gamma \rfloor} T_k(f) \right|^2 d\mu \right)^{1/2} \\
& \leq \gamma \left(\int \sqrt{\log(|\theta| + 2)} d\mu_f \right)^{1/2} \sum_{N \geq 1} a_{\lfloor N^\gamma \rfloor} \log(N)^{1 + \frac{e_2}{2}} N^{\gamma(\frac{13}{14} + \frac{e_1}{2})} < +\infty.
\end{aligned}$$

Without loss of generality, we can assume f is positive. Set $f = f_1 + f_2$ where $f_1 = f\chi_{f \leq \sqrt{N}}$ and $f_2 = f\chi_{f > \sqrt{N}}$. As $\frac{1}{2}T_k$ is a L^∞ contraction, we have

$$\begin{aligned} |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor}^{\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor} |T_k(f_1)| &\leq 2|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor+1}^{(N+1)^\gamma} \sqrt{N} \\ &\leq 2C|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1}\sqrt{N} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

because of the definition of γ and where C is such that $\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor - \lfloor N^\gamma \rfloor \leq CN^{\gamma-1}$ for all $N \in \mathbb{N}$. Now consider f_2 . In order to prove that for μ -a.e. x ,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor+1}^{\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor} |T_k(f_2)(x)| = 0,$$

it is enough to prove that

$$\int_E |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor+1}^{\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor} |T_k(f_2)| d\mu$$

is the general term of a convergent series. By using the fact that T is a $L^1(\mu)$ contraction (it is a Dunford Schwartz operator),

$$\int_E |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}| \sum_{k=\lfloor N^\gamma \rfloor+1}^{\lfloor (N+1)^\gamma \rfloor} |T_k(f_2)| d\mu \leq 2C|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1} \int_E f_2 d\mu.$$

The Cauchy-Schwarz inequality gives

$$\begin{aligned} \sum_{N \geq 1} |a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1} \int_E f_2 d\mu &\leq \left(\sum_{N \geq 1} (|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \geq 1} \left(\int_E f\chi_{f^2 > N} d\mu \right)^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_E |f|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\sum_{N \geq 1} (|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1})^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{N \geq 1} (\mu\{f^2 > N\})^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

The series $\sum_{N \geq 1} (|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1})^2$ is convergent because $(|a_{\lfloor N^\gamma \rfloor}|N^{\gamma-1})^2 = O(N^{2\gamma(-\tau+1)-2})$ and $2\gamma(-\tau+2) - 2 < -1$. The last series converges as

$f \in L^2(\mu)$. \square

Idea of the the proof of Corollary 2.30 In the above proof, we show that

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n T_k(f) \right| = 0 \text{ } \mu\text{-a.e.}$$

(recall that $T_k(f) = T^{S_k}(f) - \mathbb{E}T^{S_k}(f)$). Like T is a positive contraction (or a positive unitary operator) of $L^2(\mu)$, for all $\rho > 1$, $(\frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} \mathbb{E}(T^{S_k})(f))_{n \geq 1}$ converges to L by the Ackoglu's theorem ([56], Theorem 2.6 p190). Applying Lemma 2.31, we obtain the μ -almost everywhere convergence of

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(T^{S_k})(f),$$

and this convergence is independent from ρ . Thus $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f)$ converges μ -almost everywhere.

2.4.3 Almost everywhere convergence in the non homogeneous case

In this subsection, we give the proof of the Theorem 2.9 . We will prove that $\frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} T^{S_k}(f)$ converges when n tends to $+\infty$ (where $\lfloor \cdot \rfloor$ design the integer part). Then we conclude using a lemma.

Proof. Let $\rho > 1$. Denote by $\lfloor \cdot \rfloor$ the integer part. Prove that

$$\sum_{n \geq 2} \int_E \left| \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} f \circ T^{S_k} \right|^2 d\mu < +\infty.$$

In fact, by the spectral inequality, the above series is bounded by

$$\sum_{n \geq 1} \int_0^1 \left| \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta).$$

We use Chasles's relation. Let $\beta > 0$ (which will be precised), we integrate (for n greater enough) on $[-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} + \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}]$, $[-\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}]$, $[\frac{1}{2} - \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, \frac{1}{2}]$ and

$$F = \left[-\frac{1}{2} + \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, -\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta} \right] \cup \left[\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, \frac{1}{2} - \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta} \right].$$

We have

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} \int_{-\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}}^{\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}} \left| \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta) &\leq \sum_{n \geq 2} \mu_f\left([-\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}]\right) \\
&\leq \sum_{n \geq 1} k\mu_f\left([-\lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}, -\lfloor \rho^{n+1} \rfloor^{-\beta})\right) \\
&\quad + \sum_{n \geq 1} k\mu_f\left((\lfloor \rho^{n+1} \rfloor^{-\beta}, \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}]\right) \\
&\leq \frac{2}{\beta} \int_{-\lfloor \rho \rfloor^{-\beta}}^{\lfloor \rho \rfloor^{-\beta}} \log_\rho \left(\frac{1}{|\theta|} \right) d\mu_f(\theta).
\end{aligned}$$

In the same way, we have

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} \int_{1/2 - \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}}^{1/2} \left| \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta) \\
\leq \frac{2}{\beta} \int_{1/2 - \lfloor \rho \rfloor^{-\beta}}^{1/2} \log_\rho \left(\frac{1}{|\theta - 1/2|} \right) d\mu_f(\theta)
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 2} \int_{-1/2}^{-1/2 + \lfloor \rho^n \rfloor^{-\beta}} \left| \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor} \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta) \\
\leq \frac{2}{\beta} \int_{-1/2}^{-1/2 + \lfloor \rho \rfloor^{-\beta}} \log_\rho \left(\frac{1}{|\theta + 1/2|} \right) d\mu_f(\theta).
\end{aligned}$$

Now we integrate on the set F . By Theorem 2.15, we obtain :

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor^2} \int_F \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta) \leq \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{H} + \sqrt{\frac{H}{\lfloor \rho^n \rfloor}} + \frac{\lfloor \rho^n \rfloor^\beta}{H} \right).$$

Choose $H = \lfloor \rho^n \rfloor^\gamma$ with $0 < \gamma < 1$, and $\beta > 0$ such that $2\beta - \gamma < 0$, then

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\lfloor \rho^n \rfloor^2} \int_F \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \rho^n \rfloor} e^{2i\pi\theta S_k} \right|^2 d\mu_f(\theta) \leq \sum_{n \geq 2} \left(\lfloor \rho^n \rfloor^{-\gamma} + \lfloor \rho^n \rfloor^{\gamma/2-1} + \lfloor \rho^n \rfloor^{2\beta-\gamma} \right),$$

where the previous sum is finite. Let us define a set $\mathcal{N}_\rho = \{\lfloor \rho^n \rfloor, k \in \mathbb{N}\}$. We have proved that for all $\rho > 1$, for μ -almost every x ,

$$\lim_{n \in \mathcal{N}_\rho, n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f)(x) \right| = 0.$$

Let us give the following lemma (for a proof see Lemma 1.5 p. 17 of [76]).

Lemma 2.31. *Let $(f_n)_{n \geq 1}$ be a sequence of measurable non negative functions defined on a probability space (X, τ, μ) . Assume that for all fixed $\rho > 1$,*

$$\mu \left\{ x \in X : \lim_{n \in \mathcal{N}_\rho \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x) \text{ exists} \right\} = 1.$$

Then for all $\rho > 1$, the limits are the same, which is denoted by L . Furthermore, we have

$$\mu \left\{ x \in X : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_k(x) = L(x) \right\} = 1.$$

Applying this lemma, we obtain that for every non negative function, for μ -almost every x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^{S_k}(f)(x) \right| = 0. \quad (2.12)$$

□

2.5 Ergodic Hilbert Transform

In this section, we study the μ -almost everywhere convergence of

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k}(f)}{k}$$

for all $f \in L^2(\mu)$. We will prove the following theorem

Theorem 2.32 (Theorem 2.8). *Assume that that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(I)** and $\limsup_x |\mathbb{E} e^{2i\pi X_1 x}| < 1$. Then for \mathbb{P} -almost every $\omega \in \Omega$, for all Dunford-Schwartz operator or positive contraction (or positive unitary operator) T of $L^2(\mu)$, any $f \in L^2(\mu)$ such that there exists $\epsilon > 0$ with*

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{\log(2 + |\theta|)} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty,$$

then the series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{T^{S_k}(f)}{k} \text{ converges } \mu\text{-a.e and on } L^2(\mu)$$

Remark that the conclusion of Theorem 2.32 is also true when $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(II)**. In this case, we do not need the hypothesis $\limsup_x |\mathbb{E}e^{2i\pi X_1 x}| < 1$ and the spectral condition becomes

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty.$$

Theorem 2.5 gives to us a sufficient condition to obtain the μ -almost everywhere convergence of

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (T^{S_k}(f) - \mathbb{E}(T^{S_k})(f)).$$

Therefore we study the μ -almost everywhere convergence of

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\mathbb{E}(T^{S_k})(f)}{k}. \tag{2.13}$$

2.5.1 Spectral regularization

We describe in this subsection a method which permits to give a criterion for almost everywhere convergence of the series (2.13). Our method generalizes the method of the spectral regularization due to Lifshits and Weber [63]. Start with recall their method. Let T be a contraction of $L^2(\mu)$, define for all $f \in L^2(\mu)$, for all $n \geq 1$,

$$B_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n T^k(f),$$

$$W_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\theta}.$$

The spectral lemma gives that for all $n \geq m$

$$\|B_m(f) - B_n(f)\|_{2,\mu}^2 \leq \|W_m - W_n\|_{2,\mu_f}^2 \tag{2.14}$$

where μ_f is the spectral measure of T on point f . The authors of [63] regularize the measure μ_f in a new finite measure $\widehat{\mu}_f$ such that we have for all $n \geq m$,

$$\|B_m(f) - B_n(f)\|_{2,\mu}^2 \leq 2\widehat{\mu}_f\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]\right).$$

The support of the measure $\widehat{\mu}_f$ is $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, the measure is defined by the Lebesgue density of the function

$$x \mapsto \int_{-1/2}^{1/2} (|x|^{-3}\theta^2 \chi_{|\theta| < |x|}(\theta, x) + |\theta|^{-1} \chi_{|x| < |\theta| \leq 1/2}(\theta, x)) d\mu_f(\theta) \quad (2.15)$$

and the measure $\widehat{\mu}_f$ is finite.

If we use their method to prove the almost everywhere convergence of the series (2.13), we will obtain a condition on the operator $\mathbb{E}(T^{X_1})$ but not on the operator T , because we don't know if there exists a relation between their spectral measures. Remarks that the two operators can have some different supports. If T is a flow, its spectral measure is defined on \mathbb{R} , but the spectral measure of $\mathbb{E}(T^{X_1})$ is defined on $[-1/2, 1/2]$.

We generalize the method of Lifshits and Weber to a new class of operator. Their method works for all contractions on a Hilbert space, we extend it on the operators $(\mathbb{E}(T^{X_1+\dots+X_k}))_{k \geq 1}$ with $\{T^t, t \in S\}$ a Dunford-Schwartz operator or $\{T^t, t \in S\}$ a positive contraction (or positive unitary operator) and $(X_k)_{k \geq 1}$ be a random variable which verifies either **(I)** or **(II)** ($\{T^t, t \in S\}$ may be a continuous flow).

Now we expose our method. Let $\phi(\theta) = \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}$,

$$V_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \phi^j(\theta)$$

and

$$A_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\mathbb{E}(T^{X_1}))^k (f).$$

By the spectral lemma (Lemma 2.11), it is natural to give an approach based on a precise estimation of the following kernels : for all $m \geq n$

$$\|A_m(f) - A_n(f)\|_{2,\mu}^2 \leq \|V_m - V_n\|_{2,\mu_f}^2 \quad (2.16)$$

where μ_f is the spectral measure of T at the point f on $[-1/2, 1/2]$ (if $\{T^t, t \in D\}$ is a flow with D equal to \mathbb{N} or \mathbb{Z}) and on \mathbb{R} if $\{T^t, t \in D\}$ is a flow with D equal to \mathbb{R}^+ or \mathbb{R} . Now, we study some properties of V_n which will be used to obtain an upper bound of (2.16).

Lemma 2.33. *There exists a constant $C > 0$, such that for every $\theta \in [-1/2, 1/2)$ the following inequalities hold.*

1. For all $n \geq 1$, $|V_n(\theta)| \leq \min(1, 1/(n\pi|\theta|))$,
2. For all $n \geq m \geq 1$, $|V_n(\theta) - V_m(\theta)| \leq (n - m)/n$,
3. For all $n \geq m \geq 1$, $|V_n(\theta) - V_m(\theta)| \leq (n - m)|\theta|$.

Proof. 1. and 2. are trivial. To prove 3. denote for all $\theta \in \mathbb{R}$, $\psi(\theta) = -i \log \phi(\theta)$ where the determination of the logarithm is taken in $[-\pi, \pi)$.

Now, for every real number $x \geq 1$ set

$$V_x(\theta) = \frac{e^{ix\psi(\theta)} - 1}{x(\phi(\theta) - 1)}.$$

Using a limited development, we have

$$\psi(\theta) = \theta(\mathbb{E}X_1) + i\theta^2 \text{Var}(X_1)/2 + O(|\theta|^3).$$

Then there exists an absolute constant $C > 0$ such that if $|x\theta| \leq \pi$ and $|\theta| \leq 1/2$,

$$\left| \frac{\partial}{\partial x} V_x(\theta) \right| \leq C|\theta|.$$

Hence 3. immediately follows. \square

Let ν_1 be the spectral measure μ_f of T at the point f restricted to $[-1/2, 1/2)$ and $\nu_2 = \mu_f - \nu_1$, so we have $\mu_f = \nu_1 + \nu_2$. We will apply the method of [63] to ν_1 . Remarks that if $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(II)**, then $\nu_2 = 0$. Let

$$\Gamma(\theta, x) = |x|^{-3}\theta^2 \chi_{|\theta| < |x|}(\theta, x) + |\theta|^{-1} \chi_{|x| < |\theta| \leq 1/2}(\theta, x)$$

where χ is the indicator function. For the finite measure ν_1 on $[-1/2, 1/2)$ define a measure $\hat{\nu}_1$ by the Lebesgue density $\hat{\Gamma}$ on $[-1/2, 1/2)$: for all $|x| < 1/2$,

$$\hat{\Gamma}(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \Gamma(\theta, x) d\mu(\theta) = \int_{|\theta| < |x|} |x|^{-3}\theta^2 d\nu_1(\theta) + \int_{|x| < |\theta| \leq 1/2} |\theta|^{-1} d\nu_1(\theta).$$

Remark that for all $A \subset [-1/2, 0]$, $\hat{\nu}_1(A) = \hat{\nu}_1(\{x, -x \in A\})$.

Lemma 2.34. *Let $a, b \in [0, 1)$ and $a < b$. Let*

$$Q(a, b, \theta) = \begin{cases} \frac{b-a}{2a^2b^2} \theta^2 & \text{if } |\theta| < a \\ \frac{b-a}{2b} & \text{if } |\theta| \in [a, b] \\ \frac{b-a}{|\theta|} & \text{else.} \end{cases}$$

Then

$$\widehat{\nu}_1([a, b]) \geq \int_{-1/2}^{1/2} Q(a, b, \theta) d\nu_1(\theta).$$

Proof. By Fubini's theorem, we obtain

$$\widehat{\nu}_1([a, b]) = \int_{-1/2}^{1/2} \int_a^b \Gamma(\theta, x) dx d\mu(\theta).$$

For $|\theta| < a$, it follows that

$$\int_a^b \Gamma(\theta, x) dx = \int_a^b |x|^{-3} \theta^2 dx = \frac{b^2 - a^2}{2a^2 b^2} \theta^2 \geq \frac{b - a}{2a^2 b^2} \theta^2.$$

For $|\theta| \in [a, b]$, we have

$$\int_a^b \Gamma(\theta, x) dx = \int_a^{|\theta|} \theta^{-1} dx + \int_{|\theta|}^b x^{-3} \theta^2 dx = \frac{3}{2} - \left(\frac{a}{|\theta|} + \frac{\theta^2}{2b^2} \right).$$

On the interval $[a, b]$, the function $\theta \rightarrow \frac{a}{|\theta|} + \frac{\theta^2}{2b^2}$ reaches its maximum in $\theta = a$. This maximum is greater than $\frac{b-a}{2b}$. For $|\theta| \in [b, 1/2]$, we have

$$\int_a^b \Gamma(\theta, x) dx = \int_a^b \theta^{-1} dx = \frac{b - a}{|\theta|}.$$

□

Lemma 2.35. *Let m, n be two integers with $n > m$. Then for all $\theta \in [-1/2, 1/2)$, we have*

$$|V_n(\theta) - V_m(\theta)|^2 \leq Q\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}, \theta\right).$$

For the proof, we apply Lemma 2.33. The next proposition is an immediate consequence of Lemma 2.35 and Lemma 2.34.

Proposition 2.36. *There exists an absolute constant $C > 0$ such that for all integers $n > m$*

$$\|V_m - V_n\|_{2, \nu_1}^2 \leq C \widehat{\nu}_1\left(\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right]\right).$$

Corollary 2.37. *If $\nu_1(\{0\}) = 0$ then for all $m \geq 1$,*

$$\|V_m\|_{2, \nu_1}^2 \leq C \widehat{\nu}_1\left(\left[0, \frac{1}{m}\right]\right).$$

2.5.2 EHT almost everywhere convergence

Now we treat the μ -almost sure convergence of the EHT sampled by a transient random walk. We define $\tilde{T} = \mathbb{E}[T^{X_1}]$, therefore for every $f \in L^2(\mu)$, $\tilde{T}f = \mathbb{E}[T^{X_1}](f)$ and for every integer $k \geq 1$, $\tilde{T}^k = \mathbb{E}[T^{S_k}]$: for all $f \in L^2(\mu)$ $\tilde{T}^k f = \mathbb{E}[T^{S_k}](f) = \mathbb{E}[T^{X_1}] \circ \dots \circ \mathbb{E}[T^{X_k}](f)$. Theorem 2.3 gives a condition on the spectral measure of f to ensure convergence of $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} (T^{S_k}(f) - \mathbb{E}[T^{S_k}](f))$. Therefore if we have a condition for the convergence of $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} \mathbb{E}[T^{S_k}](f)$, then we have on the convergence of the EHT. The following theorem gives a condition on the spectral measure to obtain μ -almost sure convergence of the series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\tilde{T}^k(f)}{k}.$$

Theorem 2.38. *Assume that $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(I)** and $\limsup_x |\mathbb{E}e^{2i\pi X_1 x}| < 1$. For \mathbb{P} -almost every $\omega \in \Omega$, for all Dunford-Schwartz operator or any positive contraction (or any positive unitary operator) T of $L^2(\mu)$ and any $f \in L^2(\mu)$, such that there exists $\epsilon > 0$ with*

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty \quad (2.17)$$

where μ_f is the spectral measure of f . Then the series

$$\sum_{k \geq 1} \frac{\tilde{T}^k(f)}{k}$$

converges.

Remark that Theorem 2.38 is also true when $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(II)**. In this case, we do not need the hypothesis $\limsup_x |\mathbb{E}e^{2i\pi X_1 x}| < 1$. The spectral condition is independent of the random walk. Similar Gaposhkin [40], we can ask if $\int_{\mathbb{R}} \log^2 \frac{1}{|\theta|} d\mu_f(\theta) < +\infty$, then the $L^2(\mu)$ convergence of $\sum_{k \geq 1} \frac{T^k(f)}{k}$ implies its μ -a.e. convergence.

Cohen and Lin, ([16]) studied another random ergodic Hilbert transform. Let $(n_k)_{k \geq 1}$ be a strictly increasing sequence of positive integers with $n_k \leq ck^r$ for some $r \geq 1$. Let T be a contraction of L^2 and $f \in L^2$. Take b_k some independent random coefficients (Theorem 13 for more details). The authors of [16] obtain the almost everywhere convergence of $\sum_{k \geq 1} \frac{b_k T^{n_k}(f)}{k^\gamma}$ for $\gamma > 3/4$.

The rest of this subsection is devoted to the proof of Theorem 2.38. We want to prove that

$$\sum_{j=1}^k \frac{\tilde{T}^j(f)}{j} \quad (2.18)$$

converges a.e. Denote by

$$A_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{T}^j(f),$$

Notice that for every integer $k \geq 1$,

$$\frac{\tilde{T}^{k+1}(f)}{k+1} = A_{k+1}(f) - A_k(f) + \frac{A_k(f)}{k+1}.$$

Then the series (2.18) converges if the two following conditions are satisfied

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} A_{N+1}(f) \text{ exists } -\mu \text{ a.e.} \quad (2.19)$$

and

$$\sum_{k \geq 1} \frac{A_k(f)}{k+1} \text{ exists } -\mu \text{ a.e.} \quad (2.20)$$

The following property gives to us the convergence of (2.19). To prove it, we use our method of regularization and the inequalities of the subsection 2.5.1.

Proposition 2.39. *Assume that X_1 satisfies (I) and $\limsup_x |\mathbb{E}e^{2i\pi X_1 x}| < 1$ or (II). For any contraction (or any unitary operator) T of $L^2(\mu)$, we define \tilde{T} as $\mathbb{E}T^{X_1}$.*

1. *If the operator \tilde{T} is a Dunford-Schwartz operator or a positive contraction (or any positive unitary operator), for all $f \in L^2(\mu)$ then $A_n(f)$ converges μ -a.e.*
2. *If \tilde{T} is a contraction, for all $f \in L^2(\mu)$, such that*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \log^2 \left(\frac{1}{|\theta|} \right) d\mu_f(\theta) < +\infty,$$

where μ_f is the spectral measure of T at point f , then $A_n(f)$ converges μ -a.e.

We will use the following theorem of Móricz [66]

Lemma 2.40. *Let $(Y_j)_{j \geq 1}$ be a sequence of non necessary dependent random variables define on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Let $S(n_1, n_2) = \sum_{n_1 < j \leq n_2} Y_j$. Assume that there exists a sequence of non-negative real numbers $g(n_1, n_2)$ such that both of the following conditions are hold*

1. *there exists $p \geq 1$ such that for all integers $n_1 < n_2$*

$$\mathbb{E}|S(n_1, n_2)|^p \leq g(n_1, n_2),$$

2. *if $1 < n_1 < n_2 < n_3$ then*

$$g(n_1, n_2) + g(n_2, n_3) \leq g(n_1, n_3).$$

Hence we have for all integers $n_1 < n_2$,

$$\mathbb{E} \max_{n_1 < j \leq n_2} |S(n_1, j)|^p \leq (\log_2 2(n_2 - n_1))^p g(n_1, n_2)$$

Proof. 1.If T is a positive contraction or a Dunford-Schwartz operator, $\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k T^j(f)$ converges μ -a.e (in virtue of Ackoglu's theorem (see [56], Theorem 2.6 p190).

2.In the general case, we make two steps : the first is using of kernel method, for the second we prove the convergence of a series μ -a.e. Denote by Y_k , the following difference : $A_k(f) - A_{k-1}(f)$, for all $k \geq 1$. Using (2.16) and Proposition 2.36, we obtain for all $i \geq 1$,

$$\begin{aligned} \int_E \left| \sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} Y_k \right|^2 d\mu \\ \leq C \widehat{\nu}_1((2^{-i-1}, 2^{-i}]) + \int_{|\theta| > 1/2} |V_{2^i+1}(\theta) - V_{2^{i+1}}(\theta)|^2 d\nu_2(\theta). \end{aligned}$$

Remark that if $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(II)**, then $\nu_2 = 0$.

We give an upper bound of the previous integral when $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies

(I) and $\limsup_{\theta} |\phi_{X_1}(\theta)| < 1$.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_{|\theta|>1/2} |V_{2^{i+1}}(\theta) - V_{2^i}(\theta)|^2 d\nu_2(\theta) \\
& \leq \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} \right)^2 \int_{|\theta|>1/2} \left| \sum_{j=1}^{2^{i+1}} \phi_{X_1}^j(\theta) \right|^2 d\nu_2(\theta) \\
& \quad + \frac{1}{2^{2i+2}} \int_{|\theta|>1/2} \left| \sum_{j=2^{i+1}}^{2^{i+1}} \phi_{X_1}^j(\theta) \right|^2 d\nu_2(\theta) \\
& \leq 2 \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} \right)^2 \int_{|\theta|>1/2} \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sup_{|\theta|>1/2} |\phi_{X_1}(\theta)| \right)^j \right)^2 d\nu_2(\theta) \\
& \leq 2 \left(\frac{1}{2^i} - \frac{1}{2^{i+1}} \right)^2 \left[\int_E |f|^2 d\mu \cdot \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sup_{|\theta|>1/2} |\phi_{X_1}(\theta)| \right)^j \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

Denote by K the constant $\int_E |f|^2 d\mu \left(\sum_{j \geq 0} \left(\sup_{|\theta|>1/2} |\phi_{X_1}(\theta)| \right)^j \right)^2$. Remark that $\sup_{|\theta| \geq 1/2} |\phi_{X_1}(\theta)| < 1$ since $\limsup_{\theta} |\phi_{X_1}(\theta)| < 1$ and $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies (I).

Applying Lemma 2.40 with

$$S(n_1, n_2) = \sum_{k=n_1}^{n_2} Y_k$$

and

$$g(n_1, n_2) = 2\widehat{\nu}_1 \left(\left(\frac{1}{n_2}, \frac{1}{n_1} \right) \right) + 2K \left(\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} \right)^2,$$

we have

$$\begin{aligned}
& \int_E \max_{2^i < l \leq 2^{i+1}} \left| \sum_{k=2^{i+1}}^{2^{i+1}} Y_k \right|^2 d\mu \\
& \leq 2(i+1)^2 (\widehat{\nu}_1((2^{i-1}, 2^i)) + 2^{-2i-1}K).
\end{aligned}$$

If

$$\sum_{i \geq 1} (i+1)^2 (\widehat{\nu}_1(2^{-i-1}, 2^{-i})) < +\infty, \quad (2.21)$$

then $\sum_{i \geq 1} Y_i$ converges μ -a.e, because

$$\sum_{i \geq 1} \int_E \max_{2^i < l \leq 2^{i+1}} \left| \sum_{k=2^i+1}^l Y_k \right| d\mu < +\infty.$$

Remark that (2.21) is the integral of the square of the function \log_2 on $(-1/2, 1/2)$. Thus we have

$$\sum_{i \geq 1} (i+1)^2 (\widehat{\nu}_1(2^{-i-1}, 2^{-i})) < +\infty$$

because of $\int_{-1/2}^{1/2} \log_2^2 \left(\frac{1}{|\theta|} \right) d\mu_f(\theta) < +\infty$. Then (2.21) is true. \square

With all these preliminaries, we can prove Theorem 2.8 :

Proof. Property 2.39 gives a condition to have (2.19).

Now we show that we have (2.20). First, we prove that $\sum_{k=1}^n \frac{\tilde{T}^k(f)}{k}$ is a Cauchy sequence in L^2 along a particular partial index (we prove that $(\sum_{k=1}^{2^n} \frac{\tilde{T}^k(f)}{k})$ is a Cauchy sequence). Second we show that the difference of the series on the partial index and the series goes to zero when n goes to infinity. Hence we will prove the convergence along the full index. Recall that

$$A_k(f) = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \tilde{T}^j(f).$$

Let $r \geq 1$ and n be two integers, we have for all $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=n}^{n+r-1} \left(\sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{A_k(f)}{k} \right) \right|^2 \\ & \leq \left(\sum_{j=n}^{n+r-1} \frac{1}{\sqrt{j(\log j)^{1+\epsilon}}} \sqrt{j(\log j)^{1+\epsilon}} \left| \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{A_k(f)}{k} \right| \right)^2 \\ & \leq \left(\sum_{j \geq n} \frac{1}{j(\log j)^{1+\epsilon}} \right) \sum_{j \geq 1} j(\log j)^{1+\epsilon} \left| \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{A_k(f)}{k} \right|^2. \end{aligned}$$

Since $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \geq n} \frac{1}{j(\log j)^{1+\epsilon}} = 0$, it suffices to prove

$$\sum_{j \geq 1} j(\log j)^{1+\epsilon} \int \left| \sum_{k=2^j+1}^{2^{j+1}} \frac{A_k(f)}{k} \right|^2 d\mu < +\infty.$$

In virtue of Cauchy-Schwarz's inequality and the spectral lemma (Lemma 2.11), we have

$$\int \left| \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{A_k(f)}{k} \right|^2 d\mu \leq \frac{1}{2^j} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int |A_k(f)|^2 d\mu \leq \frac{1}{2^j} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int_{-1/2}^{1/2} |V_k(\theta)|^2 d\mu_f.$$

Therefore, it suffices to show that

$$\sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} 2^{-j} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int_{-1/2}^{1/2} |V_k(\theta)|^2 d\mu_f < +\infty. \quad (2.22)$$

Since the support of ν_1, ν_2 are disjoint, it suffices to prove that

$$\sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} 2^{-j} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int_{-1/2}^{1/2} |V_k(\theta)|^2 d\nu_1 < +\infty \quad (2.23)$$

and

$$\sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} 2^{-j} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int_{\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]} |V_k(\theta)|^2 d\nu_2 < +\infty. \quad (2.24)$$

The Corollary 2.37 implies that (2.23) and (2.24) are true if we can prove them for a fixed $\epsilon > 0$. The sum (2.23) is finite if

$$\begin{aligned} & \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{1}{k} \widehat{\nu}_1 \left(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] \right) \\ & \leq \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} \widehat{\nu}_1 \left(\left[-\frac{1}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right] \right) \\ & \leq \sum_{j \geq 2} j^2 (\log j)^{1+\epsilon} \widehat{\nu}_1 \left(\left[-\frac{1}{2^j}, -\frac{1}{2^{j+1}} \right] \cup \left[\frac{1}{2^{j+1}}, \frac{1}{2^j} \right] \right) \\ & \leq \frac{1}{\log^2(2) (\log \log 2)^{1+\epsilon}} \int_{-1/2}^{1/2} \log^2 \left| \frac{1}{\theta} \right| \left(\log \log \frac{1}{|\theta|} \right)^{1+\epsilon} d\widehat{\nu}_1(\theta) \end{aligned}$$

Therefore, (2.23) holds if

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left(\log \frac{1}{|\theta|} \right)^2 \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\widehat{\nu}_1(\theta) < +\infty.$$

Now, we study (2.24) when $(X_k)_{k \geq 1}$ satisfies **(I)** (else $\nu_2 = 0$). Since the support of this measure is $\mathbb{R} \setminus [-1/2, 1/2]$, with the hypothesis we obtain

$$\begin{aligned}
& \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \int_{|\theta| \geq 1/2} |V_k(\theta)|^2 d\nu_2(\theta) \\
&= \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} \int_{|\theta| \geq 1/2} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} |V_k(\theta)|^2 d\nu_2(\theta) \\
&\leq \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} 2^{-j} \int_{|\theta| \geq 1/2} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{1}{k^2} \frac{4}{|1 - \mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}|^2} d\nu_2(\theta) \\
&\leq \sum_{j \geq 2} j(\log j)^{1+\epsilon} 2^{-j} \mathcal{K}
\end{aligned}$$

where \mathcal{K} is equal to $(1 - \limsup |\mathbb{E}e^{2i\pi\theta X_1}|)^{-2}$.

Second, we prove that the oscillation of the series goes to zero μ -almost everywhere. Using Cauchy-Schwarz's inequality, we have for all $n \geq m > 2$,

$$\int \sup_{m \leq j \leq n} \left| \sum_{k=m}^j \frac{A_k(f)}{k} \right|^2 d\mu \leq \log \left(\frac{\log n}{\log m} \right) \sum_{k=m}^n \frac{\log k}{k} \int |A_k(f)|^2 d\mu.$$

Now the spectral lemma, Lemma 2.11, and Corollary 2.37 deduce

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^m \frac{\log k}{k} \int |A_k(f)|^2 d\mu &\leq C \sum_{k=n}^m \frac{\log k}{k} \widehat{\nu}_1 \left(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] \right) \\
&\quad + \sum_{k=n}^m \frac{\log k}{k} \int_{|\theta| \geq 1/2} |V_k(\theta)|^2 d\nu_2(\theta).
\end{aligned}$$

Notice that

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{k=2^{j+1}}^{2^{j+1}} \frac{\log k}{k} \widehat{\nu}_1 \left(\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] \right) \leq C \int_{-1/2}^{1/2} \log^2 \left(\frac{1}{|\theta|} \right) d\widehat{\nu}_1(\theta).$$

Furthermore, for all $k \geq 2$, by the definition of V_k ,

$$\int_{|\theta| \geq 1/2} |V_k(\theta)|^2 d\nu_2(\theta) \leq C \frac{1}{k^2}.$$

Finally, we have proved that $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \tilde{T}^k(f)$ is a Cauchy sequence of $L^2(\mu)$ if

$$\int_{-1/2}^{1/2} \log^2 \frac{1}{|\theta|} \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\widehat{\nu}_1(\theta) < +\infty.$$

This integral is finite because of (2.17) :

$$\int_{\mathbb{R}} \log^2 \frac{1}{|\theta|} \left(\log \left| \log \frac{1}{|\theta|} \right| \right)^{1+\epsilon} d\mu_f(\theta) < +\infty,$$

it is just a calculus by using the definition of Q . \square

Chapitre 3

Mesures quasi-Bernoulli et quasi-Bernoulli faible

Soient $\lambda \geq 2$ un entier et $\mathcal{A} = \{1, \dots, \lambda\}$. Une mesure de probabilité sur l'espace produit $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ est dite quasi-Bernoulli si pour tous cylindres I et J , on a

$$\frac{1}{C}\nu(I)\nu(J) \leq \nu(IJ) \leq C\nu(I)\nu(J) \quad (3.1)$$

où C est une constante indépendante de I et J . Rappelons qu'un cylindre de taille n est un ensemble de la forme

$$[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n] = \left\{ (\omega_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}, \omega_i = \epsilon_i \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n \right\},$$

et que si $I = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ et $J = [\eta_1, \dots, \eta_m]$, IJ désigne le cylindre $[\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \eta_1, \dots, \eta_m]$. On note \mathcal{F}_n l'ensemble des cylindres de taille n .

Pour une mesure m définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, on peut étudier pour tout $\alpha > 0$, la dimension de Hausdorff de l'ensemble

$$E_\alpha = \left\{ x \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log(m(I_n(x)))}{-n \log \lambda} = \alpha \right\}$$

où $I_n(x)$ est le cylindre de taille n contenant x . L'ensemble des valeurs α pour lesquelles E_α est non vide est appelé domaine de spectre de m . Rappelons que la transformée de Legendre d'une fonction réelle f est définie par

$$f^*(\alpha) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (\alpha x + f(x)).$$

On dit qu'une mesure m satisfait le formalisme multifractal si son domaine de spectre est un intervalle et si

$$\dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha), \quad \forall \alpha > 0$$

où \dim est la dimension de Hausdorff, Dim la dimension de packing et τ^* est la transformée de Legendre de la fonction τ , appelée spectre L^q , définie par

$$\tau(q) = \limsup_n \frac{1}{n \log \lambda} \log \left(\sum_{I \in \mathcal{F}_n} m(I)^q \right), \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Brown, Michon et Peyrière [14] ont introduit la notion de mesure quasi-Bernoulli dans le but d'établir le formalisme multifractal. Ceci a été réalisé car Heurteaux [45] a pu montrer que le spectre L^q d'une mesure quasi-Bernoulli est dérivable et que cette mesure satisfait le formalisme multifractal :

$$\dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha), \quad \text{pour tout } \alpha \in] - \tau'(+\infty), -\tau'(-\infty)[.$$

Fan et Zhang [32] ont caractérisé les mesures quasi-Bernoulli parmi les produits de Riesz sur l'anneau des entiers p -adique \mathbb{Z}_p .

On va caractériser dans la troisième partie de cette thèse les mesures quasi-Bernoulli parmi les mesures de Markov inhomogènes. Soit $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ une mesure de probabilité sur \mathcal{A} dite probabilité initiale. Soit $P_k = (p_k(i, j))_{i, j \in \mathcal{A}}$ (pour $k \geq 1$) une suite de matrices de transition sur \mathcal{A} . La mesure de Markov (inhomogène) μ associée à π et $(P_k)_{k \geq 1}$ est définie par

$$\mu([\epsilon_1 \dots \epsilon_n]) = p_0(\epsilon_1) p_1(\epsilon_1, \epsilon_2) \dots p_{n-1}(\epsilon_{n-1}, \epsilon_n)$$

pour tout cylindre $[\epsilon_1 \dots \epsilon_n]$. On démontre le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Soit μ la mesure de Markov associée à une probabilité initiale $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ et à une suite de matrices de transition $P_k = (p_k(i, j))_{i, j \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$. On suppose de plus que μ est de support plein. Alors μ est quasi-Bernoulli si et seulement si*

$$\exists \delta > 0, \quad \delta \leq p_i(\epsilon, \eta) \leq 1 - \delta, \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1,$$

$$\sup_{\epsilon \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} \sup_{n \geq 1, p \geq 2} \left| \sum_{i=1}^p \log \left(\frac{p_{i+n}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})}{p_i(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})} \right) \right| < +\infty.$$

3.1 Mesure quasi-Bernoulli

3.1.1 Le cas général

On commence par énoncer une propriété sur le support (noté *supp*) d'une mesure quasi-Bernoulli.

Proposition 3.2. *Soit μ une mesure sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Si la mesure μ est quasi-Bernoulli alors*

$$\text{supp}(\mu) = \{\epsilon \in \mathcal{A}, \mu([\epsilon]) \neq 0\}^{\mathbb{N}^*},$$

La démonstration de cette propriété est une simple application de la définition de mesure quasi-Bernoulli.

On peut exprimer de façon différente le support, à l'aide de la fonction décalage qui est définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ par $\sigma\omega = (\omega_{i+1})_{i \geq 1}$ pour tout $\omega = (\omega_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$.

Corollaire 3.3. *Soit μ une mesure quasi-Bernoulli sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$. Pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$ tel qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ avec $\mu(\sigma^{-m}[\epsilon]) = 0$, alors on a*

$$\mu(\sigma^{-n}[\epsilon]) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pour un souci de simplification, on supposera dans le reste de cette partie, que les mesures sont de support égal à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$.

On définit une application sur les cylindres de mesure non nulle et de taille fixée. Soit $n \geq 1$, on définit T_n par

$$T_n(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}])}$$

où par convention, le cylindre vide est égal à $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$.

Proposition 3.4. *La mesure μ de support plein est quasi-Bernoulli si et seulement si*

$$\exists C > 0, \quad \frac{1}{C} \leq \prod_{i=1}^p \frac{T_{n+i}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+i})}{T_i(\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+i})} \leq C, \quad (3.2)$$

pour tous entiers $n, p \geq 1$, pour tous $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+p} \in \mathcal{A}$.

Démonstration de la proposition. La preuve dépend du fait suivant. Soit $I = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]$ et $J = [\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+p}]$, on a

$$\begin{aligned} \frac{\mu(IJ)}{\mu(I)\mu(J)} &= \frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+p}])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n])\mu([\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+p}])} \\ &= T_{n+1}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}) \frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+p}])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}])\mu([\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+p}])} \\ &= \prod_{i=1}^p T_{n+i}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+i}) \frac{1}{\mu([\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+p}])} \\ &= \prod_{i=1}^p \frac{T_{n+i}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+i})}{T_i(\epsilon_{n+1}, \dots, \epsilon_{n+i})}. \end{aligned}$$

□

On se sert de cette proposition pour donner, pour les mesures de Markov, une condition simple pour que la mesure soit quasi-Bernoulli. On applique ensuite cette condition aux mesures de Bernoulli et de Riesz.

3.1.2 Mesure de Markov inhomogène

Théorème 3.5. *Soit μ la mesure de Markov associée à une probabilité initiale $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ et à une suite de matrices de transition $P_k = (p_k(i, j))_{i, j \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$. On suppose de plus que μ est de support plein. Alors μ est quasi-Bernoulli si et seulement si*

$$\exists \delta > 0, \quad \delta \leq p_i(\epsilon, \eta) \leq 1 - \delta, \quad \forall \epsilon, \eta \in \mathcal{A}, \forall i \geq 1, \quad (3.3)$$

$$\sup_{\epsilon \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} \sup_{n \geq 1, p \geq 2} \left| \sum_{i=1}^p \log \left(\frac{p_{i+n}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})}{p_i(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})} \right) \right| < +\infty. \quad (3.4)$$

Démonstration. On a juste à prouver que les conditions (3.3) et (3.4) sont équivalentes à (3.2). Prenons $p = 1$ dans l'inéquation (3.2), on obtient : pour tout $\epsilon, \eta \in \mathcal{A}$, pour tout $i \geq 1$,

$$0 < \frac{1}{C} \inf_{\rho \in \mathcal{A}} p_0(\rho) \leq \frac{p_0(\eta)}{C} \leq p_i(\epsilon, \eta).$$

Soit $\epsilon, \eta \in \mathcal{A}$, on ne peut pas avoir $\lim_{i \rightarrow +\infty} p_i(\epsilon, \eta) = 1$. Sinon, pour tout $\rho \neq \eta$, $\lim_{i \rightarrow +\infty} p_i(\epsilon, \eta) = 0$ et on a $\mu([\rho]) = 0$ par la quasi-Bernoullicité de la mesure. Ceci n'est pas possible car le support de la mesure est plein. La probabilité de transition $p_i(\epsilon, \eta)$ est donc majoré uniformément en i par un réel strictement inférieur à 1, \mathcal{A} étant fini, la borne est uniforme pour ϵ et η . On déduit l'équation (3.4) de l'application de (3.2) avec $p \geq 2$ et de l'utilisation de (3.3).

La réciproque est triviale. □

La preuve du théorème est immédiate à partir de la proposition 3.4.

Remarque 3.6. *La condition (3.4) n'est pas équivalente à la condition :*

$$\sup_{\epsilon \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} \sup_{n \geq 2, p \geq 1} \left| \sum_{i=1}^p \left(\frac{p_{i+n}(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})}{p_i(\epsilon_i, \epsilon_{i+1})} - 1 \right) \right| < +\infty.$$

Soient $\lambda = 2$, $p_0(1) = p_1(1, 1) = \frac{1}{2}$ et pour tout $i \geq 2$,

$$p_i(1, 1) = \frac{1}{2} \exp \left[-1 + \sum_{j=2}^i (-1)^j \left(\frac{1}{\sqrt{j}} + \frac{1}{\sqrt{j-1}} \right) \right].$$

Le logarithme de $p_{i+n}(1, 1)/p_i(1, 1)$ est égal à $\frac{(-1)^{i+n}}{\sqrt{i+n}} + \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}}$, la condition (3.4) est donc vérifiée, mais pas la condition précédente. En effet, un développement limité nous montre que

$$\frac{p_{i+n}(1, 1)}{p_i(1, 1)} - 1 = \frac{(-1)^{i+n}}{\sqrt{i+n}} - \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}} + \frac{1}{2(i+n)} + \frac{1}{2i} + O\left(\frac{1}{i\sqrt{i}}\right).$$

3.1.3 Mesure de Bernoulli

Appliquons le Théorème 3.5 aux cas particuliers des mesures de Bernoulli. Soit $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ une suite de mesure de probabilité sur \mathcal{A} , pour tout $k \geq 1$. La mesure de Bernoulli définie par $(P_k)_{k \geq 1}$ est donné par : pour tout $n \geq 1$, pour tout $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathcal{A}$,

$$\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]) = \prod_{j=1}^n p_j(\epsilon_j).$$

Les mesures de Bernoulli sont des mesures de Markov particulières, en effet pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\epsilon, \eta \in \mathcal{A}$, $p_j(\epsilon, \eta)$ ne dépend pas de η .

Corollaire 3.7. *Soit $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ une suite de mesure de probabilité sur \mathcal{A} , pour tout $k \geq 1$. Notons μ la mesure de Bernoulli définie par la suite de probabilité $(P_k)_{k \geq 1}$, supposons la, de plus, de support plein. La mesure μ est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe $\delta \in]0, 1/2]$ tel que pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, pour tout $j \geq 1$,*

$$\delta \leq p_j(\epsilon) \leq 1 - \delta \tag{3.5}$$

et qu'il existe une mesure de probabilité $(p(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ sur \mathcal{A} tel que pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, $p(\epsilon) \in [\delta, 1 - \delta]$ tel que

$$\max_{\epsilon \in \mathcal{A}} \sum_{j \geq 1} |p_j(\epsilon) - p(\epsilon)| < +\infty. \tag{3.6}$$

Avant de commencer la preuve du corollaire, on énonce le lemme suivant qui se démontre par l'inégalité des accroissements finis.

Lemme 3.8. *Soit $a, b > 0$, on a*

$$\frac{|a - b|}{\max(a, b)} \leq \left| \log \left(\frac{a}{b} \right) \right| \leq \frac{|a - b|}{\min(a, b)}.$$

Preuve du corollaire 3.7. Il suffit de montrer que la condition (3.4) est équivalente à (3.6). Fixons $n, p \geq 0$. Distinguons deux cas.

Premier cas : soit $(\epsilon_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ tel que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $p_{i+n}(\epsilon_i) \geq p_i(\epsilon_i)$ (un tel $(\epsilon_i)_{i \geq 1}$ existe car sinon pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, $p_{i+n}(\epsilon) < p_i(\epsilon)$ et $1 = \sum_{\epsilon \in \mathcal{A}} p_{i+n}(\epsilon) = \sum_{\epsilon \in \mathcal{A}} p_i(\epsilon)$). Appliquons le lemme 3.8 et (3.5) :

$$0 \leq \sum_{i=1}^p (p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i)) \leq (1 - \delta) \sum_{i=1}^p \log \left(\frac{p_{i+n}(\epsilon_i)}{p_i(\epsilon_i)} \right).$$

On en déduit par le Théorème 3.5 que $\sum_{i=1}^p (p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i))$ est finie indépendamment de $n, p, (\epsilon_i)_{i \geq 1}$.

Second cas : prenons maintenant $(\epsilon_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ quelconque. Notons

$$I^+ = \{1 \leq i \leq p, \quad p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i) \geq 0\},$$

et I^- , les entiers compris entre 1 et p qui ne sont pas dans I^+ . Soit $(\eta_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ définie de la façon suivante : pour tout $i \in I^+$, $\eta_i = \epsilon_i$. Pour tout $i \in I^-$, on choisit η_i de la façon suivante : il existe $\eta_i \in \mathcal{A}$ tel que $p_{i+n}(\eta_i) \geq p_i(\eta_i) > 0$ (de tel η existe, car sinon pour tout $\eta \in \mathcal{A}$, $p_{i+n}(\eta) < p_i(\eta)$ et $1 = \sum_{\eta \in \mathcal{A}} p_{i+n}(\eta) = \sum_{\eta \in \mathcal{A}} p_i(\eta)$). On a alors la majoration suivante :

$$0 \leq \sum_{i \in I^+} (p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i)) \leq \sum_{i=1}^p (p_{i+n}(\eta_i) - p_i(\eta_i)),$$

on s'est ramené au premier cas.

On en déduit que $\sum_{i \in I^+} (p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i))$ est borné indépendamment de $n, p, (\epsilon_i)_{i \geq 1}$, par la même méthode que $\sum_{i \in I^-} (p_{i+n}(\epsilon_i) - p_i(\epsilon_i))$ est minoré indépendamment de $n, p, (\epsilon_i)_{i \geq 1}$. On a donc

$$\max_{\epsilon \in \mathcal{A}} \sup_{n \geq 1} \sum_{i \geq 1} |p_{i+n}(\epsilon) - p_i(\epsilon)| < +\infty. \quad (3.7)$$

On déduit de la condition précédente que pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, la suite $(p_i(\epsilon))_{i \geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $[\delta, 1 - \delta]$, ce qui en passant à la limite dans la condition (3.7) donne les conditions nécessaires énoncées dans le corollaire.

Pour prouver la suffisance de la condition, on applique le lemme 3.8. \square

3.1.4 Mesure de Riesz

On suppose dans cette partie $\lambda \geq 3$ (pour le cas $\lambda = 2$, on ne peut rien dire de plus précis que dans le cas de mesure de Bernoulli). On définit la fonction argument, noté \arg , comme la bijection de \mathbb{C} sur $] - \pi, \pi]$, $\overline{\mathbb{D}}$ est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Re}(z)$ désignera la partie réelle de z .

Soit μ la mesure de Riesz définie à partir de la suite $(a_i)_{i \geq 1} \in \overline{\mathbb{D}}^{\mathbb{N}^*}$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \mathcal{A}$, on a

$$\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n]) = \lambda^{-n} \prod_{j=1}^n \left(1 + \mathbf{Re}(a_j e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \epsilon_j})\right). \quad (3.8)$$

On déduit du corollaire 3.7 le résultat suivant :

Corollaire 3.9. *Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes de module inférieur ou égal à 1 et μ la mesure de Riesz définie par la suite $(a_k)_{k \geq 1}$. On suppose de plus que la mesure μ est de support plein. La mesure μ est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe $\delta > 0$, tel que pour tout $j \geq 1$, $a_j \in \overline{\mathbb{D}}(\delta)$ et il existe $a \in \overline{\mathbb{D}}(\delta)$, tel que*

$$\sum_{j \geq 1} |a_j - a| < +\infty$$

où $\overline{\mathbb{D}}(\delta) = \overline{\mathbb{D}} \setminus \cup_{\epsilon=1}^{\lambda} B(e^{i\pi - \frac{2i\pi}{\lambda} \epsilon}, \delta)$

Ce dernier corollaire est à mettre en relation avec le résultat de Fan et Zhang [32] qui caractérise les mesures quasi-Bernoulli parmi les produits de Riesz sur l'anneau des entiers p -adique \mathbb{Z}_p . Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres appartenant à $\overline{\mathbb{D}}$. La mesure appelée produit de Riesz sur \mathbb{Z}_p ,

$$\mu = \prod_{n \geq 1} (1 + \mathbf{Re}(a_n \gamma_n(x))) \quad (3.9)$$

est bien définie, où γ_n est une suite dissociée de caractères. Sous l'hypothèse $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq 1$, Fan et Zhang ont montré que la mesure de Riesz μ définie par (3.9) est quasi-Bernoulli si et seulement s'il existe un nombre complexe a , tel que

$$|a| < 1, \quad \sum_{k \geq 1} |a_k - a| < +\infty.$$

Le cas des produits de Riesz sur \mathbb{Z}_p est plus délicat. On ne sait pas comment supprimer la condition supplémentaire que $|a_k| < 1$ pour tout $k \geq 1$. Contrairement à notre cas, pour la mesure de Riesz μ sur \mathbb{Z}_p , le rapport

$$\frac{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+1}])}{\mu([\epsilon_1, \dots, \epsilon_n])}$$

n'est pas indépendant de $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$.

Démonstration. De la condition (3.5) du Théorème 3.7, on déduit que pour tous $j \geq 1$, pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, $\mathbf{Re}(a_j e^{\frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon}) > \lambda\delta - 1 > -1$. Il existe alors une constante indépendante de j et de ϵ telle que a_j ne soit pas dans la boule de centre $e^{i\pi - \frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon}$ et de rayon $\lambda\delta$; on note encore la constante δ . Tous les a_j appartiennent donc à $\overline{\mathbb{D}}(\delta)$. La condition (3.6) du corollaire 3.7 donne dans ce cadre particulier : cette mesure est quasi-Bernoulli si et seulement si

$$\sup_{(\epsilon_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}} \sup_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} |\mathbf{Re}((a_{j+n} - a_j) e^{\frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon_j})| < +\infty. \quad (3.10)$$

Simplifions la série (3.10), pour cela on va minorer uniformément en $\epsilon \in \mathcal{A}$, la quantité $\left| \cos\left(\arg((a_{j+n} - a_j) e^{\frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon})\right) \right|$, on note $[\cdot]$ pour la partie entière.

- Si λ est pair, il existe $k \in [\lfloor \frac{1-\lambda}{2} \rfloor, \lfloor \frac{\lambda-1}{2} \rfloor + 1] \cap \mathbb{N}$, $\arg(a_{j+n} - a_j) \in [\frac{\pi}{\lambda}(2k-1), \frac{\pi}{\lambda}(2k+1)[$. Puis on choisit $\epsilon_j = \frac{\lambda}{2} - k \in \mathcal{A}$.
- Si λ est impair, il existe $k \in [\lfloor \frac{-\lambda}{2} \rfloor, \lfloor \frac{\lambda}{2} \rfloor + 1] \cap \mathbb{N}$, $\arg(a_{j+n} - a_j) \in [\frac{2\pi}{\lambda}k, \frac{2\pi}{\lambda}(k+1)[$. Puis on choisit $\epsilon_j = \frac{\lambda-1}{2} - k \in \mathcal{A}$.

On obtient $\left| \cos\left(\arg((a_{j+n} - a_j) e^{\frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon})\right) \right| \geq \cos(\pi/\lambda)$. On en déduit alors de (3.10) que :

$$\sup_{n \geq 1} \sum_{j \geq 1} |(a_{j+n} - a_j) \cos(\frac{\pi}{\lambda})| < +\infty.$$

Comme $\overline{\mathbb{D}}(\delta)$ est un fermé, on en déduit l'existence de $a \in \overline{\mathbb{D}}(\delta)$ tel que $\sum_{j \geq 1} |a_j - a| < +\infty$. La réciproque est immédiate à l'aide du corollaire 3.7. \square

3.2 Mesure quasi-Bernoulli faible

Certaines mesures portées par les ensembles invariants des systèmes itératifs ne sont pas quasi-Bernoulli, mais vérifient des propriétés proches

[65, 71, 90]. Ces mesures ont motivé Testud [86] à introduire une notion plus générale que celle de quasi-Bernoullicité introduite par Brown, Michon et Peyrière. Une mesure μ est quasi-Bernoulli au sens faible s'il existe une constante $C > 0$, six entiers naturels $r_1 \leq r_2, p_1 \leq p_2, s_1 \leq s_2$ tels que pour tous entiers naturels n, p , on ait pour tous $I \in \mathcal{F}_n, J \in \mathcal{F}_p$,

$$\frac{1}{C} \nu(I) \sum_{l=r_1}^{r_2} \nu(\sigma^{-l} J) \leq \sum_{k=p_1}^{p_2} \nu(I \cap \sigma^{-n-k} J) \leq C \nu(I) \sum_{h=s_1}^{s_2} \nu(\sigma^{-h} J). \quad (3.11)$$

Une telle mesure a un spectre L^q qui est dérivable sur \mathbb{R}^+ et elle vérifie le formalisme multifractal au sens suivant :

$$\forall \alpha \in] -\tau'(+\infty), -\tau'_d(0)[, \quad \dim(E_\alpha) = \text{Dim}(E_\alpha) = \tau^*(\alpha).$$

Les mesures quasi-Bernoulli sont trivialement des mesures quasi-Bernoulli faible. Une large classe de mesure quasi-Bernoulli faible est donné par le Théorème 2.2 de [86] : considérons N similitudes $S_i : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ de rapport de contraction respectif $\pm l^{-\alpha_i}$ où $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$ et dont les images sont des réunions d'éléments de \mathcal{F}_l (où \mathcal{F}_l est l'ensemble des cylindres de taille l). On suppose de plus que $[0, 1] = \cup_{1 \leq i \leq N} S_i([0, 1])$. Alors l'unique mesure de probabilité μ vérifiant :

$$\mu = \sum_{i=1}^N p_i \mu \circ S_i^{-1},$$

est quasi-Bernoulli faible.

Donnons quelques définitions, avant d'étudier les mesures de Markov inhomogènes qui sont quasi-Bernoulli faible. Soient p, q, n trois entiers avec $p \leq q$ (q valant éventuellement $+\infty$) et ν une mesure sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, on définit la mesure $\nu_{p,q}^n$ définie sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ par

$$\nu_{p,q}^n(J) = \sum_{k=p}^q \nu(\sigma^{-n-k} J)$$

pour tout cylindre J , $\nu_{p,q}$ (respectivement ν^n) désignera la mesure $\nu_{p,q}^0$ (respectivement $\nu_{0,0}^n$). Soit μ et ν deux mesures définies sur $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$, on note $\mu \ll \nu$ à la place d'écrire μ est absolument continue par rapport à ν . Pour tous $n, k \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\epsilon, \eta \in \mathcal{A}$, on définit $q_n^{n+k}(\eta, \epsilon)$ par

$$q_n^{n+k}(\eta, \epsilon) = \begin{cases} \frac{\mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}[\epsilon])}{\mu(\sigma^{-n+1}[\eta])} & \text{si } \mu(\sigma^{-n+1}[\eta]) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3.2.1 Mesure de Markov inhomogène

Théorème 3.10. *Soit μ la mesure de Markov associée à une probabilité initiale $\pi = (p_0(1), \dots, p_0(\lambda))$ et à une suite de matrices de transition $P_k = (p_k(\epsilon, \eta))_{\epsilon, \eta \in \mathcal{A}}$, $k \geq 1$. Alors μ est quasi-Bernoulli faible si et seulement si*

1. *il existe des entiers naturels $r_1 \leq r_2$, $p_1 \leq p_2$, $s_1 \leq s_2$ tels que pour tout $n \geq 0$,*

$$\mu_{r_1, r_2} \ll \mu_{p_1, p_2}^n \ll \mu_{s_1, s_2} \quad (3.12)$$

pour tout $\eta, \epsilon \in \mathcal{A}$ avec $\mu_{r_1, r_2}([\epsilon]) > 0$, pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}[\epsilon]) = 0 \Rightarrow \mu(\sigma^{-n+1}[\eta]) = 0. \quad (3.13)$$

2. *il existe une constante $C > 0$ tel que pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$ avec $\mu_{r_1, r_2}(J) > 0$, pour tout $\eta \in \mathcal{A}$, avec $\mu^{n-1}([\eta]) > 0$ il existe k entier dans $[p_1, p_2]$, tel que $\mu^{n+k}(J) > 0$ et pour tout l entier dans $[r_1, r_2]$ vérifiant $\mu^l(J) > 0$ on ait*

$$-C \leq \sum_{j=1}^{p-1} \log \frac{p_{j+n+k}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})}{p_{j+l}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})} + \log q_n^{n+k}(\eta, \epsilon_1) \quad (3.14)$$

et pour tous $n, p \in \mathbb{N}^$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_j] \in \mathcal{F}_p$, pour tout $\eta \in \mathcal{A}$, avec $\sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k}J) > 0$, il existe h entier dans $[s_1, s_2]$ avec $\mu^h(J) > 0$, tel que pour tout k' entier dans $[p_1, p_2]$ vérifiant $\mu(\sigma^{-n+1}[\eta] \cap \sigma^{-n-k'}J) > 0$ on ait*

$$\sum_{j=1}^{p-1} \log \frac{p_{j+n+k'}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})}{p_{j+h}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1})} + \log q_n^{n+k'}(\eta, \epsilon_1) \leq C. \quad (3.15)$$

On énonce deux lemmes qui serviront à la démonstration du théorème précédent.

Lemme 3.11. *Soient $n \geq 1$ et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ n nombres strictement positifs.*

- *S'il existe une constante $C > 0$ telle que $0 < \sum_{i=1}^n u_i \leq C$ alors pour tout $1 \leq i \leq n$, $0 < u_i \leq C$.*
- *S'il existe une constante $C > 0$ telle que $C \leq \sum_{i=1}^n u_i$ alors il existe $1 \leq i \leq n$, $\frac{C}{n} \leq u_i$.*

Lemme 3.12. *Soient $n \geq 1$ et $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ n nombres strictement positifs.*

- S'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tous $1 \leq i \leq n$, $u_i \leq C$ alors $\sum_{i=1}^n u_i \leq nC$.
- S'il existe une constante $C > 0$ telle qu'il existe $1 \leq i \leq n$, $C \leq u_i$ alors $C \leq \sum_{i=1}^n u_i$.

Preuve du Théorème 3.10. Commençons par montrer que la condition est nécessaire. On remarque qu'en sommant sur tous les $I \in \mathcal{F}_n$ dans (3.11), on obtient la condition (3.12). On a de même (3.13) en sommant sur tous les $I \in \mathcal{F}_{n-1}$.

Remarquons que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $I = [\eta_1, \dots, \eta_n] \in \mathcal{F}_n$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$,

$$\sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(I \cap \sigma^{-n-k} J) = \sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(I) q_n^{n+k}(\eta_n, \epsilon_1) \prod_{j=1}^{p-1} p_{j+n+k}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1}).$$

Il suffit alors d'utiliser le Lemme 3.11 pour conclure que les conditions (3.14) et (3.15) sont nécessaires.

Montrons maintenant que les conditions sont suffisantes. Il suffit de vérifier que la mesure est quasi-Bernoulli faible (voir l'inéquation (3.11)) pour tout cylindre I de mesure nulle. Si $\mu_{s_1, s_2}(J) = 0$ alors l'inégalité (3.11) est triviale.

Supposons $\mu_{r_1, r_2}(J) > 0$. On a alors par (3.14) :

$$\prod_{j=1}^{p-1} p_{j+l}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1}) \leq C q_n^{n+k}(\eta_n, \epsilon_1) \prod_{j=1}^{p-1} p_{j+n+k}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1}).$$

Comme $\mu_{r_1, r_2}(J) > 0$, on a

$$\mu(\sigma^{-l} \epsilon_1) > \min\{\mu(\sigma^{-j} \eta), r_1 \leq j \leq r_2, \eta \in \mathcal{A} \text{ avec } \mu(\sigma^{-l} \eta) > 0\}.$$

Notons δ , ce minimum indépendant de J . On en déduit alors l'inégalité suivante

$$\mu(\sigma^{-l} J) \leq \delta C q_n^{n+k}(\eta_n, \epsilon_1) \prod_{j=1}^{p-1} p_{j+n+k}(\epsilon_j, \epsilon_{j+1}).$$

En multipliant par $\mu(I)$ l'inégalité précédente et en utilisant le Lemme 3.12, on obtient

$$\mu(I) \mu_{r_1, r_2}(J) \leq C \sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(I \cap \sigma^{-n-k} J).$$

Si $\mu_{r_1, r_2}(J)$ est nulle, l'inégalité est triviale.

L'autre inégalité de (3.11) se démontre de la même manière. □

3.2.2 Mesure de Bernoulli

Comme dans le cadre quasi-Bernoulli, on obtient un critère plus précis avec les mesures de Bernoulli. On déduit du Théorème 3.10, le corollaire suivant :

Corollaire 3.13. *Soit $P_k = (p_k(\epsilon))_{\epsilon \in \mathcal{A}}$ (pour tout $k \geq 1$) une suite de mesure de probabilité sur \mathcal{A} de support plein. Notons μ la mesure de Bernoulli définie par cette suite. Alors la mesure μ est quasi-Bernoulli faible si et seulement si elle est quasi-Bernoulli.*

Démonstration. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n(\epsilon) \in [\delta, 1]. \quad (3.16)$$

Si on suppose qu'il existe deux suites $(\epsilon_m)_{m \geq 1} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ et $(i_m)_{m \geq 1} \in \mathbb{N}^*$ telles que $p_{i_m}(\epsilon_m) \rightarrow 0$ quand m tend vers l'infini. Comme \mathcal{A} est fini, on peut extraire une sous-suite constante de $(\epsilon_m)_{m \geq 1}$, valant ϵ et une sous-suite de $(i_m)_{m \geq 1}$ (encore notée $(i_m)_{m \geq 1}$) tel que $p_{i_m}(\epsilon) \rightarrow 0$ quand m tend vers l'infini. Considérons alors le cylindre $J = [\epsilon, \dots, \epsilon] \in \mathcal{F}_{p_2 - p_1 + 1}$. En faisant tendre m vers l'infini, on en déduit que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=p_1}^{p_2} \mu(\sigma^{-k-i_m+p_1+1} J) = 0.$$

Comme la mesure est quasi-Bernoulli faible, on en déduit que $\mu_{r_1, r_2}(J)$ est nul. Ce qui est impossible car le support de la mesure est $\mathcal{A}^{\mathbb{N}^*}$ tout entier.

Remarquons aussi que, quitte à prendre un δ plus petit, pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n(\epsilon) \leq 1 - \delta$. Sinon il existe $\epsilon \in \mathcal{A}$ et une suite $(i_m)_{m \geq 1}$ d'entiers tels que $p_{i_m}(\epsilon) \rightarrow 1$ quand m tend vers l'infini. Par conséquent, pour tout $\eta \neq \epsilon$, $p_{i_m}(\eta) \rightarrow 0$ quand m tend vers l'infini, ce qui est encore impossible car le support de la mesure est plein. Il existe donc $0 < \delta < 1$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$,

$$p_n(\epsilon) \in [\delta, 1 - \delta]. \quad (3.17)$$

Comme les mesures $\mu_{r_1, r_2}, \mu_{p_1, p_2}^n$ sont de supports pleins, il existe d'après le Théorème 3.10 une constante $C > 0$ telle que pour tout $n, p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$, il existe k entier dans $[p_1, p_2]$ et pour tout entier l dans $[r_1, r_2]$, il existe h entier dans $[s_1, s_2]$, pour tout k' entier dans $[p_1, p_2]$

$$\sum_{j=1}^p \log \frac{p_{j+n+k'}(\epsilon_j)}{p_{j+h}(\epsilon_j)} \leq C, \quad (3.18)$$

$$-C \leq \sum_{j=1}^p \log \frac{p_{j+n+k}(\epsilon_j)}{p_{j+l}(\epsilon_j)}, \quad (3.19)$$

où les termes $q_n^{n+k}(\epsilon_1)$ et $q_n^{n+k'}(\epsilon_1)$ ont été encadrés indépendamment de n, k, k' et ϵ_1 à l'aide de (3.17). En réutilisant (3.17), on en déduit que pour tout $i, n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $\epsilon \in \mathcal{A}$,

$$\delta \leq \frac{p_{i+n}(\epsilon)}{p_i(\epsilon)} \leq \frac{1}{\delta}.$$

En utilisant cette nouvelle inégalité et par changement d'indice, on obtient : pour tout $n \geq \max(r_2, s_2)$, l'inégalité (3.18) est équivalente à

$$\sum_{j=1}^p \log \frac{p_{j+n+k'}(\epsilon_j)}{p_j(\epsilon_j)} \leq C.$$

De même l'inégalité (3.19) est équivalente à

$$-C \leq \sum_{j=1}^p \log \frac{p_{j+n+k}(\epsilon_j)}{p_j(\epsilon_j)}.$$

En prenant $k' = k$, on obtient finalement l'existence d'une constante $C > 0$, telle que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $J = [\epsilon_1, \dots, \epsilon_p] \in \mathcal{F}_p$, pour tout $n \geq p_2 + \max(r_2, s_2)$,

$$\left| \sum_{j=1}^p \log \frac{p_{j+n+k}(\epsilon_j)}{p_j(\epsilon_j)} \right| < C. \quad (3.20)$$

De l'inéquation (3.20) et l'équation (3.17), on en déduit d'après la démonstration du Corollaire 3.7 que la mesure est quasi-Bernoulli. \square

3.2.3 Mesure de Riesz

On suppose que $\lambda \geq 3$. On obtient une condition pour que les mesures de Riesz soit quasi-Bernoulli faible à l'aide du théorème précédent.

Corollaire 3.14. *Soient $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres complexes appartenant à $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{e^{i\pi - \frac{2i\pi}{\lambda}\epsilon}, \epsilon \in \mathcal{A}\}$ et μ la mesure de Riesz définie par la suite $(a_k)_{k \geq 1}$. La mesure μ est quasi-Bernoulli faible si et seulement si elle est quasi-Bernoulli.*

Bibliographie

- [1] G. Brown, G. Michon, J. Peyrière, On the multifractal analysis of measures, *J. Statist. Phys.* 66 (1992), no. 3-4, 775–790.
- [2] K. Falconer, Fractal geometry. Mathematical foundations and applications. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2003. xxviii+
- [3] A. Fan, Aihua, X. Y. Zhang, Riesz products on the ring of p -adic integers. (English, French summary) *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* 344 (2007), no. 7, 425–430.
- [4] Y. Heurteaux, Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures. (French) [Estimates of the lower and upper dimensions of measures] *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 34 (1998), no. 3, 309–338.
- [5] B. Testud, Mesures quasi-Bernoulli au sens faible : résultats et exemples. (French) [Weak quasi-Bernoulli measures : results and examples] *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* 42 (2006), no. 1, 1–35.

Chapitre 4

Temps de retour uniforme dans les systèmes exponentiellement mélangeant

4.1 Introduction

Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ be a metric measure preserving system (m.m.p.s.), by which we mean that (X, d) is a metric space, \mathcal{B} is a σ -field containing the Borel σ -field of X and (X, \mathcal{B}, μ, T) is a measure preserving system with $\mu(X)$ finite. Under the assumption that (X, d) has a countable base, Poincaré recurrence theorem implies that μ -almost all $x \in X$ is recurrent in the sense

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, x) = 0 \quad (4.1)$$

(for example, see [38]). If, furthermore, μ is ergodic, then μ -almost all $x \in X$ hit every fixed point $y \in X$ in the sense

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} d(T^n x, y) = 0. \quad (4.2)$$

In 1993, Boshernitzan ([12]) obtained the following quantitative improvement of the above recurrence (4.1) : Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ be an m.m.p.s. Assume that, for some $\alpha > 0$, the Hausdorff α -measure H_α is σ -finite on X . Then for μ -almost all $x \in X$, we have

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\alpha}} d(T^n x, x) < \infty. \quad (4.3)$$

If, moreover, $H_\alpha(X) = 0$, then for μ -almost all $x \in X$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{\alpha}} d(T^n x, x) = 0.$$

There were some subsequent works on the quantitative recurrence, sometimes referred to as dynamical Borel-Cantelli lemma or shrinking target problem (see, for example, [1, 7, 11, 15, 39, 54, 64, 67, 79]). In the present work, we would like to quantify the hitting property (4.2) for all y simultaneously. Let us first introduce some notation before stating our results. Define the local lower and upper dimensions of μ at $x \in X$ as follows

$$\underline{\alpha}(x) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}, \quad \bar{\alpha}(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}$$

where $B(x, r)$ denotes the ball centered at x of radius r . Let

$$\alpha^* = \sup_{x \in X} \underline{\alpha}(x) \quad \text{and} \quad \alpha_{\max} = \limsup_{r \rightarrow 0} \sup_{x \in X} \frac{\log \mu(B(x, r))}{\log r}.$$

It is evident that $\alpha^* \leq \alpha_{\max}$ so that $\frac{1}{\alpha_{\max}} \leq \frac{1}{\alpha^*}$.

We say that an m.m.p.s. $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ is *exponentially mixing* if there exist two constants $c > 0$ and $0 < \gamma < 1$ such that

$$|\mu(E|T^{-n}F) - \mu(E)| \leq c\gamma^n \quad (\forall n \geq 1) \quad (4.4)$$

holds for any ball E and any measurable set $F \in \mathcal{B}$ with $\mu(F) > 0$. Here $\mu(A|B)$ denotes the conditional probability $\frac{\mu(A \cap B)}{\mu(B)}$. Sometimes we say μ is exponentially mixing.

Theorem 4.1. *Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ be an m.m.p.s. Suppose that the system is exponentially mixing and $\alpha_{\max} < \infty$. If $\tau < 1/\alpha_{\max}$, then for μ -almost all $x \in X$, we have*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} n^\tau d(T^n x, y) = 0 \quad (\forall y \in X). \quad (4.5)$$

If $\tau > 1/\alpha^$, then there exists $y \in X$ such that*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^\tau d(T^n x, y) = \infty \quad (\text{a. e. } x \in X). \quad (4.6)$$

Theorem 4.1 was proved, among others, in [30] for the doubling map $Tx = 2x \pmod{1}$ on the interval $[0, 1)$ and for Gibbs measures μ associated to Hölder potentials. The method presented in the present paper, inspired

from [28], is different from that in [30] and is applicable to a large class of dynamical systems. The following are some systems to which Theorem 4.1 applies. Philipp [69] showed that for the β -shift $T_\beta x = \beta x \pmod{1}$ on the interval $[0, 1)$, the Parry measure is exponentially mixing and that for the Gauss map $Sx = \{\frac{1}{x}\} \pmod{1}$ on the interval $[0, 1)$, the Gauss measure is exponentially mixing. Pommerenke [70] showed that for the boundary map of an inner function in the unit disk, the invariant harmonic measure is exponentially mixing. In all these cases, we have $\alpha^* = \alpha_{\max} = 1$.

The crucial point of Theorem 4.1 is the first assertion (4.5) on the uniformity on y . The second assertion of Theorem 4.1 is just a consequence of the so-called dynamical Borel-Cantelli lemma (see Proposition 4.6). Although the Borel-Cantelli lemma together with a Fubini argument shows that the \liminf in (4.5) is finite for almost all y , the uniformity is far from evident.

Theorem 4.1 will be proved as a consequence of Theorem 4.2, which is valid in a probabilistic setting. This probabilistic setting will be described in Section 2. In Section 3, we will discuss the exponential mixing property which will be first used to prove a weighted Borel-Cantelli lemma in Section 4. Sections 5 and 6 are devoted to the proof of the main result (Theorem 2.1). In the last section 7, we will give an application to the subshifts of finite type.

4.2 Probabilistic setting

Let $(\xi_n)_{n \geq 0}$ be a stationary process defined on a probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, taking values in a metric space (X, d) . Let μ be the initial probability measure defined by

$$\mu(B) = \mathbb{P}(\xi_0 \in B)$$

for any Borel set B in X . We always assume that X is the support of μ .

For $n \geq 1$, let \mathcal{A}^n be the sub- σ -field generated by $(\xi_{n+j})_{j \geq 0}$. We say that the process (ξ_n) is *exponentially mixing* if there exist two constants $c > 0$ and $0 < \gamma < 1$ such that

$$|\mathbb{P}(\xi_0 \in E|D) - \mathbb{P}(\xi_0 \in E)| \leq c\gamma^n \tag{4.7}$$

holds for any $n \geq 1$, for any ball E in X and any $D \in \mathcal{A}^n$.

An independent and identically distributed (i.i.d. for short) sequence (ξ_n) is exponentially mixing. If $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ is an exponentially mixing m.m.p.s., then the process (ξ_n) defined by

$$\xi_n(x) = T^n x$$

is an exponentially mixing process defined on the probability space (X, \mathcal{B}, μ) taking values in X .

Let us go back to a general stationary process (ξ_n) . We always make the following assumptions on the initial probability measure μ :

$$\varphi_1(r) \leq \mu(B(x, r)) \leq \varphi_2(r) \quad (\forall x \in X, \forall r > 0) \quad (4.8)$$

holds for two increasing functions φ_1 and φ_2 satisfying $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi_i(r) = 0$ and $\varphi_i(2r) \leq K\varphi_i(r)$ for $i = 1, 2$ ($\exists K > 0, \forall r > 0$). For a sequence of positive number $\{r_n\}$, we will also need the following condition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{n\varphi_1(r_n)} = 0. \quad (4.9)$$

We will use χ_E to denote the indicator function of a set E .

Theorem 4.2. *Let (ξ_n) be an exponentially mixing stationary process whose initial probability satisfies the assumption (4.8). Let (r_n) be a decreasing sequence of positive numbers satisfying (4.9). Then*

$$\text{a.s.} \quad \liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\min_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n(\omega))}{\sum_{n=1}^N \varphi_1(r_n)} > 0. \quad (4.10)$$

$$\text{a.s.} \quad \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{\max_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n(\omega))}{\sum_{n=1}^N \varphi_2(r_n)} < +\infty. \quad (4.11)$$

Assume $\varphi_1(r) \geq Ar^s$ and $r_n = B/n^\tau$ ($A > 0, B > 0$ being constant). If $\tau s < 1$, we can apply Theorem 4.2 and we get Theorem 4.1.

There is another way to state the above result. Consider a divergent series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ of positive terms. Let Λ be a subset of natural numbers. We say Λ is (a_n) -rare if

$$\sum_{n \in \Lambda} a_n < +\infty.$$

Otherwise, we say Λ is (a_n) -dense. We are interested in (a_n) -density of the random set

$$\Lambda_\omega(y) = \{n \in \mathbb{N} : \xi_n(\omega) \in B(y, r_n)\}. \quad (4.12)$$

Theorem 4.3. *Let $\{a_n\}$ be a decreasing non-negative sequence and (r_n) be a decreasing sequence of positive numbers with (4.9). We have*

(i)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n) < +\infty \quad \Rightarrow \quad \text{a.s.} \quad \max_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega(y)} a_n < +\infty.$$

(ii)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_1(r_n) = +\infty \Rightarrow \text{a.s.} \min_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega(y)} a_n = +\infty.$$

When (ξ_n) is an i.i.d. sequence of random variables uniformly distributed on the circle $\mathbb{T} := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, the problem we study here was initiated by Dvoretzky in 1956. The question was under what condition we have

$$\text{a.s.} \quad \mathbb{T} = \limsup_{n \rightarrow \infty} B(\xi_n, r_n).$$

In 1972, L. Shepp ([81]) gave a complete solution by finding a necessary and sufficient condition

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{2(r_1 + \dots + r_n)} = \infty.$$

See ([6, 27, 28, 52, 48, 50]) for more information on further development of the subject.

4.3 On exponentially mixing property

We shall use the exponentially mixing property in the following form.

Proposition 4.4. *Let $(\xi_n)_{n \geq 0}$ be an exponentially mixing stationary process with initial probability measure μ , taking values in a metric space X . Let $n \geq 1$ be an integer and B_i ($1 \leq i \leq n$) balls in X . Consider $g_i(x) = a_i \chi_{B_i}(x) + b_i$ with $a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Then for any integer $d \geq 1$, we have*

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n g_i(\xi_{(i-1)d}) = \left[\prod_{i=1}^n \int g_i(x) d\mu(x) \right] \left[\prod_{i=1}^{n-1} \left(1 + \frac{O(a_i \gamma^d)}{\int g_i(x) d\mu(x)} \right) \right]$$

where $0 < \gamma < 1$ and the constants involved in O are absolute constants.

Proof. The mixing property (4.7) may be stated as

$$\mathbb{P}(\{\xi_0 \in E\} \cap D) = \mathbb{P}(\{\xi_0 \in E\})\mathbb{P}(D) + O(\gamma^d)\mathbb{P}(D)$$

where E is a ball in X and $D \in \mathcal{A}^d$. In other words,

$$\mathbb{E}(\chi_E(\xi_0)h) = \left(\int \chi_E(x) d\mu(x) + O(\gamma^d) \right) \mathbb{E}(h),$$

where h is the characteristic function of D and $\mu = \mathbb{P} \circ \xi_0^{-1}$. This equality is actually valid for any bounded or non-negative \mathcal{A}^d -measurable variable h . Then, by the linearity of integral, for any function of the form $g = a\chi_E + b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) we get

$$\mathbb{E}(g(\xi_0)h) = \left(\int g(x)d\mu(x) + O(a\gamma^d) \right) \mathbb{E}(h). \quad (4.13)$$

Apply the equation (4.13) to $g = g_1$ and $h(\omega) := \prod_{i=2}^n g_i(\xi_{(i-1)d}(\omega))$, which is \mathcal{A}^d -measurable. Using the stationarity of the process, we get

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^n g_i(\xi_{(i-1)d}) = \left(\int g_1(x)d\mu(x) + O(a_1\gamma^d) \right) \mathbb{E} \prod_{i=1}^{n-1} g_{i+1}(\xi_{(i-1)d}).$$

In this way, by induction on n , we get the result. \square

Proposition 4.5. *Let $(X, \mathcal{B}, \mu, T, d)$ be a m.m.p.s.*

(i) *The system is exponentially mixing if there exist $0 < \delta < 1$ and an integer $w \geq 1$ such that for any $n \geq 1$, any ball E and any measurable set F , we have*

$$\mu(E \cap T^{-wn}F) = (\mu(E) + O(\delta^n))\mu(F).$$

(ii) *If the system is exponentially mixing, so is the process $(T^n x)_{n \geq 0}$.*

Proof. For any integer $n \geq 1$ write $n = wq + i$ (i, q integers and $0 \leq i < w$). Then

$$\mu(E \cap T^{-n}F) = \mu(E)\mu(F) + \mu(F)O(\delta^q) = \mu(E)\mu(F) + \mu(F)O(\gamma^n),$$

where $\gamma = \delta^{\frac{1}{2w}}$. This proves (i).

The exponential mixing property of the process $\xi_n = T^n x$ is stated as

$$\mu(E \cap D) = \mu(E)\mu(D) + O(\gamma^n)\mu(D)$$

where E is a ball in X and $D \in \mathcal{A}^n$. It suffices to notice that $\mathcal{A}^n = T^{-n}\mathcal{B}$. \square

4.4 Weighted Borel-Cantelli lemma

The following is a weighted Borel-Cantelli Lemma.

Proposition 4.6. *Suppose that $(\xi_n)_{n \geq 0}$ is an exponentially mixing stationary process. Let (r_n) be a decreasing sequence and (a_n) be a non-negative bounded sequence. For any point $y \in X$,*

- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(B(y, r_n)) < +\infty \Rightarrow$ a.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n) < +\infty.$
- (ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(B(y, r_n)) = +\infty \Rightarrow$ a.s. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n) = +\infty.$

Proof. The conclusion (i) follows immediately from

$$\mathbb{E} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(B(y, r_n)) < +\infty.$$

Let $Z_N = \sum_{n=1}^N a_n \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n)$. Then

$$\mathbb{E}(Z_N^2) = \sum_{n=1}^N a_n^2 \mu(B(y, r_n)) + 2 \sum_{1 \leq m < n \leq N} a_m a_n \mathbb{E}(\chi_{B(y, r_m)}(\xi_m) \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n)). \quad (4.14)$$

By Proposition 4.4, we have

$$\mathbb{E}(\chi_{B(y, r_m)}(\xi_m) \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n)) = \mu(B(y, r_m)) \mu(B(y, r_n)) + O(\gamma^{n-m}) \mu(B(y, r_n)). \quad (4.15)$$

Assume that the sequence (a_n) is bounded by M and the sequence $(\sum_{m=1}^{n-1} a_m O(\gamma^{n-m}))$ is bounded by M' . Combining (4.14) and (4.15) give

$$\mathbb{E}(Z_N^2) = I + II + III,$$

where

$$\begin{aligned} I &= \sum_{n=1}^N a_n^2 \mu(B(y, r_n)) \leq M \mathbb{E}(Z_N) \\ II &= 2 \sum_{1 \leq m < n \leq N} a_m a_n \mu(B(y, r_m)) \mu(B(y, r_n)) \leq \mathbb{E}(Z_N)^2 \\ III &= 2 \sum_{1 \leq m < n \leq N} a_m a_n O(\gamma^{n-m}) \mu(B(y, r_n)) \leq 2M' \mathbb{E}(Z_N). \end{aligned}$$

So, $\mathbb{E}(Z_N^2) \leq (M + 2M') \mathbb{E}(Z_N) + \mathbb{E}(Z_N)^2$. Then, using Paley-Zygmund inequality, for any $\lambda > 0$, we obtain

$$\mu \{ Z_N > \lambda \mathbb{E}(Z_N) \} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(Z_N)^2}{\mathbb{E}(Z_N^2)} \geq (1 - \lambda)^2 \frac{\mathbb{E}(Z_N)}{M + 2M' + \mathbb{E}(Z_N)}.$$

Let $N \rightarrow +\infty$ and $\lambda \rightarrow 0$, we get (ii). \square

4.5 Fundamental inequalities

4.5.1 Basic inequalities

For two positive integers $p \leq q$, define the truncated sum

$$S_{p,q}(\omega, y) = \sum_{n=p}^q \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n(\omega))$$

and its maximal and minimal values on y

$$S_{p,q}^M(\omega) = \max_{y \in X} S_{p,q}(\omega, y), \quad S_{p,q}^m(\omega) = \min_{y \in X} S_{p,q}(\omega, y).$$

Let $0 < \beta < 1 < \alpha$. Define

$$\bar{S}_{p,q}(\omega, y) = \sum_{n=p}^q \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n(\omega)), \quad \underline{S}_{p,q}(\omega, y) = \sum_{n=p}^q \chi_{B(y, \beta r_n)}(\xi_n(\omega)).$$

We will often write $S(\omega, y), S^M(\omega), S^m(\omega), \bar{S}(\omega, y), \underline{S}(\omega, y)$ instead of $S_{p,q}(\omega, y), S_{p,q}^M(\omega), S_{p,q}^m(\omega), \bar{S}_{p,q}(\omega, y), \underline{S}_{p,q}(\omega, y)$.

One key point to prove Theorem 4.2 is the following lemma. Its proof is inspired from [28].

Lemma 4.7. *For any fixed $\omega \in \Omega$ and any integers $p \leq q$, we have*

$$\mu \{y \in X : \bar{S}_{p,q}(\omega, y) \geq S^M(\omega)\} \geq \varphi_1((\alpha - 1)r_q) \quad (4.16)$$

$$\mu \{y \in X : \underline{S}_{p,q}(\omega, y) \leq S^m(\omega)\} \geq \varphi_1((1 - \beta)r_q). \quad (4.17)$$

Proof. Let y_0 be a maximal point such that $S(\omega, y_0) = S^M(\omega)$. Then there are $S^M(\omega)$ integers n in the interval $[p, q]$ such that $y_0 \in B(\xi_n, r_n)$. Thus, for such an n , $y \in B(y_0, (\alpha - 1)r_q)$ implies $y \in B(\xi_n, \alpha r_n)$ just by the triangular inequality :

$$d(y, \xi_n) \leq d(y, y_0) + d(y_0, \xi_n) < (\alpha - 1)r_n + r_n = \alpha r_n.$$

In other words, $\bar{S}(\omega, y) \geq S^M(\omega)$ for $y \in B(y_0, (\alpha - 1)r_q)$. Then

$$B(y_0, (\alpha - 1)r_q) \subset \{y \in X : \bar{S}(\omega, y) \geq S^M(\omega)\},$$

so we have proved (4.16). Similarly, we prove (4.17) by showing

$$B(y'_0, (1 - \beta)r_q) \subset \{y \in X : \underline{S}(\omega, y) \leq S^m(\omega)\},$$

where y'_0 is a minimal point such that $S(\omega, y'_0) = S^m(\omega)$. \square

Lemma 4.8. *There exist the positive constants M, B_1, B_2 such that for any $y \in X$ and any integers $p \leq q$,*

$$\mathbb{E} \exp \left\{ (\log q)^{-1} \overline{S}_{p,q}(\omega, y) \right\} \leq M \exp \left\{ B_1 (\log q)^{-1} \sum_{n=p}^q \varphi_2(r_n) \right\} \quad (4.18)$$

and

$$\mathbb{E} \exp \left\{ -(\log q)^{-1} \underline{S}_{p,q}(\omega, y) \right\} \leq M \exp \left\{ -B_2 (\log q)^{-1} \sum_{n=p}^q \varphi_1(r_n) \right\}. \quad (4.19)$$

Proof. Let $F = \sum_{n=p}^q \varphi_1(r_n)$ and $G = \sum_{n=p}^q \varphi_2(r_n)$. Let $\lambda > 0$ be a real number which will be chosen later. Write

$$\exp\{\lambda \overline{S}(\omega, y)\} = \prod_{n=p}^q \left[(e^\lambda - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1 \right].$$

Let $d \geq 1$ be an integer, which will be determined later. We divide the integers between p and q into

$$\Lambda_i = \{p \leq n \leq q : n \equiv i \pmod{d}\} \quad (0 \leq i \leq d-1).$$

Notice that

$$[(e^\lambda - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1]^d = (e^{d\lambda} - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1.$$

Applying Hölder's inequality to $\mathbb{E} \prod_{i=0}^{d-1} \prod_{n \in \Lambda_i} [(e^\lambda - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1]$, we get

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda \overline{S}(\omega, y)\} \leq \prod_{i=0}^{d-1} \left[\mathbb{E} \prod_{n \in \Lambda_i} [(e^{d\lambda} - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1] \right]^{\frac{1}{d}}.$$

Now choose $\lambda = (\log q)^{-1}$ and $d = [k_0 \log q]$ with $k_0 > 1$ large enough such that $e\gamma^{k_0} < 1$, where $[x]$ is the integer part of x . Applying Proposition 4.4 to each expectation in the above expression, we obtain

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \prod_{n \in \Lambda_i} [(e^{d\lambda} - 1) \chi_{B(y, \alpha r_n)}(\xi_n) + 1] &= \prod_{n \in \Lambda_i} [C(d\lambda) \mu(B(y, \alpha r_n)) + 1] \\ &\quad \prod_{n \in \Lambda_i} \left(1 + \frac{O(\gamma^d)}{C(d\lambda) \mu(B(y, \alpha r_n)) + 1} \right) \end{aligned}$$

where $0 < C(d\lambda) = e^{d\lambda} - 1 \leq e^{k_0} - 1 := C(k_0)$. So

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda \bar{S}(\omega, y)\} \leq M_{p,q} \left[\prod_{n=p}^q [C(k_0)\mu(B(y, \alpha r_n)) + 1] \right]^{\frac{1}{d}}, \quad (4.20)$$

where

$$M_{p,q} = \left[\prod_{n=p}^q \left(1 + \frac{O(\gamma^d)}{C(d\lambda)\mu(B(y, \alpha r_n)) + 1} \right) \right]^{\frac{1}{d}} \leq \left[\prod_{n=p}^q (1 + C\gamma^d) \right]^{\frac{1}{d}},$$

where C is the constant involved by O . Then $M_{p,q}$ is bounded by a constant M independent of p and q . Since $\mu(B(y, \alpha r_n)) \leq \varphi_2(\alpha r_n) \leq K_\alpha \varphi_2(r_n)$ from some constant K_α , from (4.20) we get

$$\mathbb{E} \exp\{\lambda \bar{S}(\omega, y)\} \leq M \exp \left\{ \frac{C(k_0)K_\alpha}{d} G \right\}.$$

Thus we have proved (4.18) with $B_1 = \frac{C(k_0)K_\alpha}{k_0-1}$. Similarly, we write

$$\mathbb{E} \exp\{-\lambda \underline{S}(\omega, y)\} = \mathbb{E} \prod_{n=p}^q \left[(e^{-\lambda} - 1) \chi_{B(y, \beta r_n)}(\xi_n) + 1 \right].$$

Using similar skills to treat $\exp\{-\lambda \bar{S}(\omega, y)\}$, we can obtain

$$\mathbb{E} \exp\{-\lambda \underline{S}(\omega, y)\} \leq M'_{p,q} \exp \left\{ \frac{e^{-d\lambda} - 1}{d} \sum_{n=p}^q \mu(B(y, \beta r_n)) \right\},$$

where

$$M'_{p,q} = \exp \left\{ \frac{q-p}{d} O((e^{-d\lambda} - 1)\gamma^d) \right\}.$$

We now choose $\lambda = (\log q)^{-1}$ and $d = \lfloor a\lambda^{-1} \rfloor$ with $a > 0$ small enough such that $(1 - e^{-a})/a > 0$. It is true that $M'_{p,q} \leq 1$. Since $\mu(B(y, \beta r_n)) \geq \varphi_1(\beta r_n) \geq K_\beta \varphi_1(r_n)$, then

$$\mathbb{E} \exp\{-\lambda \underline{S}(\omega, y)\} \leq M \exp \left\{ \frac{e^{-d\lambda} - 1}{d} K_\beta F \right\}. \quad (4.21)$$

Note that $e^{-d\lambda} - 1 < 0$. Thus (4.19) is proved with $B_2 = (1 - e^{-a})K_\beta/a$. \square

Proposition 4.9. *Suppose that there exists a constant $C_1 > 0$ such that*

$$\sum_{n=p}^q \varphi_2(r_n) \geq C_1 \log q \max \{-\log \varphi_1(r_q), \log q\}. \quad (4.22)$$

Then there exist absolute constants $C > 0, M_0 > 0$ and $C_0 > 1$ such that

$$\mathbb{P} \left\{ \omega : S^M(\omega) \geq C \sum_{n=p}^q \varphi_2(r_n) \right\} < M_0 q^{-C_0}.$$

Proof. Let $G = \sum_{n=p}^q \varphi_2(r_n)$. For any $\lambda > 0$, by Markov's inequality, we have

$$\mathbb{P} \{ \omega : S^M(\omega) \geq CG \} \leq \exp \{-\lambda CG\} \mathbb{E}(e^{\lambda S^M(\omega)}). \quad (4.23)$$

We are thus led to estimate the Laplace transform of $S^M(\omega)$. Fixing ω and using Markov's inequality with respect to y , we get

$$\mu \{ y \in X : \bar{S}(\omega, y) \geq S^M(\omega) \} \leq \frac{\int e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{e^{\lambda S^M(\omega)}}.$$

Combining the inequality (4.16) in Lemma 4.7, we get

$$e^{\lambda S^M(\omega)} \leq \frac{\int e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{\varphi_1((\alpha - 1)r_q)} \leq \frac{\int e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{K_\alpha \varphi_1(r_q)}$$

for $\varphi_1((\alpha - 1)r_q) \geq K_\alpha \varphi_1(r_q)$. Then

$$\mathbb{E} e^{\lambda S^M(\omega)} \leq \frac{\mathbb{E} \int e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{K_\alpha \varphi_1(r_q)}. \quad (4.24)$$

The Laplace transform of $\bar{S}(\omega, y)$ with respect to the product measure $\mathbb{P} \times \mu$ is easier to estimate. In fact, when $\lambda = (\log q)^{-1}$, by Fubini's theorem and the inequality (4.18), we have

$$\mathbb{E} \int e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y) = \int \mathbb{E} e^{\lambda \bar{S}(\omega, y)} d\mu(y) \leq M \exp \left\{ B_1 (\log q)^{-1} G \right\}.$$

Combining (4.24) and (4.23), we obtain

$$\mathbb{P} \{ \omega : S^M(\omega) \geq CG \} \leq MK_\alpha^{-1} \cdot \exp \left\{ (B_1 - C) (\log q)^{-1} G - \log \varphi_1(r_q) \right\}.$$

Using the assumption (4.22), we can choose $C > 0$ (independent of p, q) large enough such that $-C_0 = (B_1 - C + C_1^{-1})C_1 < -1$. Let $M_0 = MK_\alpha^{-1}$, we have

$$\mathbb{P} \{ \omega : S^M(\omega) \geq CG \} \leq MK_\alpha^{-1} \cdot \exp \left\{ (B_1 - C + C_1^{-1}) (\log q)^{-1} G \right\} \leq \frac{M_0}{q^{C_0}}.$$

□

Proposition 4.10. *Suppose there exists a constant $C_2 > 0$ such that $C_2 > 2B_2^{-1}$ and*

$$\sum_{n=p}^q \varphi_1(r_n) \geq C_2 \log q \max \{ -\log \varphi_1(r_q), \log q \}. \quad (4.25)$$

Then there exist absolute constants $C' > 0$, $K_\beta > 0$ and $C_0 > 1$ such that

$$\mathbb{P} \left\{ \omega : S^m(\omega) \leq C' \sum_{n=p}^q \varphi_1(r_n) \right\} < K_\beta^{-1} q^{-C_0}. \quad (4.26)$$

Remark that the condition (4.25) implies the condition (4.22) since $\varphi_2 \geq \varphi_1$. Proof. Let $F = \sum_{n=p}^q \varphi_1(r_n)$. For $\lambda > 0$, by Markov inequality, we have

$$\mathbb{P} \{ S^m(\omega) \leq C' F \} \leq \exp(\lambda C' F) \mathbb{E}(e^{-\lambda S^m(\omega)}). \quad (4.27)$$

By Markov's inequality and the inequality (4.17) in Lemma 4.7, we obtain

$$e^{-\lambda S^m(\omega)} \leq \frac{\int e^{-\lambda \underline{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{\varphi_1((1-\beta)r_q)} \leq \frac{\int e^{-\lambda \underline{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{K_\beta \varphi_1(r_q)}$$

for $\varphi_1((1-\beta)r_q) \geq K_\beta \varphi_1(r_q)$. Integrating with respect to ω , we get

$$\mathbb{E}(e^{-\lambda S^m(\omega)}) \leq \frac{\mathbb{E} \int e^{-\lambda \underline{S}(\omega, y)} d\mu(y)}{K_\beta \varphi_1(r_q)}. \quad (4.28)$$

Choose $\lambda = (\log q)^{-1}$. Combining Fubini's theorem, the inequalities (4.27), (4.28) and (4.19), we obtain

$$\mathbb{P} \{ S^m(\omega) \leq C' F \} \leq K_\beta^{-1} \exp \left\{ (-B_2 + C') (\log q)^{-1} F - \log \varphi_1(r_q) \right\}.$$

By the condition (4.25), we can choose $C' > 0$ such that $C_0 := (B_2 - C_2^{-1} - C')C_2 > 1$, we have

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \{ S^m(\omega) \leq C' F \} &\leq K_\beta^{-1} \exp \left\{ -(B_2 - C' - C_2^{-1})(\log q)^{-1} F \right\} \\ &\leq K_\beta^{-1} e^{-C_0 \log q} = K_\beta^{-1} q^{-C_0}. \end{aligned}$$

□

4.6 Proofs of Theorems

Let $m > 1$ be an integer. Let $N_j = m^j$. We write $S_j^M(\omega)$ and $S_j^m(\omega)$ instead of $S_{N_j, N_{j+1}}^M(\omega)$ and $S_{N_j, N_{j+1}}^m(\omega)$.

4.6.1 Proof of Theorem 4.2

First we notice that, by the monotonicity of φ_2 and of r_n ,

$$\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n) \geq (N_{j+1} - N_j) \varphi_2(r_{N_{j+1}}) \geq (1 - m^{-1}) N_{j+1} \varphi_1(r_{N_{j+1}}).$$

Hence the condition (4.9) implies that for large j we have

$$\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n) \geq (\log N_{j+1})^2, \quad -\log \varphi_1(r_{N_{j+1}}) \leq \log N_{j+1}$$

which imply the inequality (4.22) with $p = N_j + 1$ and $q = N_{j+1}$ when j is large enough. By Proposition 4.9 and Borel-Cantelli Lemma, we get $\omega \in \Omega$, $S_j^M(\omega) \leq C \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n)$ almost surely for some $0 < C(\omega) < \infty$. Let $N \geq 1$. Assume that $N_k \leq N < N_{k+1}$. Then we have

$$\begin{aligned} \max_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\xi_n) &\leq \sum_{j=0}^k S_j^M \leq C \sum_{j=0}^k \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n) \\ &= C \left(\sum_{n=1}^{N_k} \varphi_2(r_n) + \sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \varphi_2(r_n) \right). \end{aligned}$$

Since $N_{k+1} - N_k = (m - 1)m^k$,

$$\sum_{N_k+1}^{N_{k+1}} \varphi_2(r_n) \leq (m - 1)m^k \varphi_2(r_{N_{k+1}}) \leq (m - 1) \sum_{n=1}^{N_k} \varphi_2(r_n).$$

We have thus proved (4.11).

The condition (4.9) also implies the inequality (4.25) with $p = N_j + 1$ and $q = N_{j+1}$ when j is large enough. So, we can use Proposition 4.10 to prove (4.10). \square

4.6.2 Proof of Theorem 4.3

By Proposition 4.9, we know for almost all $\omega \in \Omega$, $S^M \leq C \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n)$ when j is large enough, where C is a constant. Since $\{a_n\}$ is decreasing, then

$$\max_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega} a_n \leq \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} S^M \leq C \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_j} \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n). \quad (4.29)$$

For $\#([N_j + 1, N_{j+1}] \cap \mathbb{N}) = m^j(m - 1)$, where $\#$ is the cardinality of a set, note that $\{\varphi_2(r_n)\}$ is decreasing, we have

$$\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_2(r_n) \leq (N_{j+1} - N_j) \varphi_2(r_{N_j}) \leq m \sum_{N_{j-1}+1}^{N_j} \varphi_2(r_n). \quad (4.30)$$

Combining (4.29) and (4.30), by the increasing of $\{a_n\}$, we obtain

$$\max_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega} a_n \leq m \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n).$$

Thus we can obtain the result (i) for the convergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n)$.

Similarly, combining Proposition 4.10, we know for almost all $\omega \in \Omega$, $S^m \geq C' \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_1(r_n)$ when j is large enough, where C' is a constant. Since $\{a_n\}$ is decreasing, then

$$\min_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega} a_n \geq \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_{j+1}} S^m \geq C' \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_{j+1}} \sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_1(r_n).$$

Note that $\sum_{N_j+1}^{N_{j+1}} \varphi_1(r_n) \geq 1/m \sum_{N_{j+1}+1}^{N_{j+2}} \varphi_1(r_n)$, so

$$\min_{y \in X} \sum_{n \in \Lambda_\omega} a_n \geq \sum_{j=0}^{\infty} a_{N_{j+1}} \frac{1}{m} \sum_{N_{j+1}+1}^{N_{j+2}} \varphi_1(r_n) \geq \frac{1}{m} \sum_{N_1+1}^{\infty} a_n \varphi_2(r_n).$$

Thus we can obtain the result (ii) for the divergence of $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_1(r_n)$. \square

4.6.3 Proof of Theorem 4.1

The second assertion can be obtained by applying Proposition 4.6 to a point y with $\underline{\alpha}(y)\tau > 1$, $r_n = bn^{-\tau}$ with $b \gg 1$ and $a_n = 1$. Let us prove the first assertion. By the definition of α_{\max} , we have $\mu(B(x, r)) \geq r^{\alpha_{\max} + \epsilon}$ for any $x \in X$, any $0 < \epsilon < 1/\tau - \alpha_{\max}$ and small r . We take $\varphi_1(r) = r^{\alpha_{\max} + \epsilon}$ and $r_n = 1/n^\tau$. Then it is easy to check the condition (4.9) and the divergence of the series $\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_1(r_n)$. The result follows from Theorem 4.2. \square

4.7 Gibbs measures on subshifts of finite type

Let $m \geq 2$ be an integer and A be an $m \times m$ matrix of 0's and 1's. Denote

$$\Sigma_A = \left\{ x \in \{0, 1, \dots, m-1\}^{\mathbb{N}} : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \right\}$$

and define $\sigma : \Sigma_A \rightarrow \Sigma_A$ by $\sigma(x)_i = x_{i+1}$. Suppose A be primitive. Then Σ_A is topology mixing. For $y = (y_i)_{i \geq 0} \in \Sigma_A$, let $C_n(y) := [y_0, y_1, \dots, y_{n-1}]$ denote the cylinder containing y of $n := |C_n(y)|$. Let $d(x, y)$ be the distance of $x, y \in \Sigma_A$ defined by $d(x, y) = 1/m^{n-1}$, where n is the least integer such that $x_n \neq y_n$. Let $\phi : \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}$ be a α -Hölder potential, i.e.

$$[\phi]_\alpha := \sup_{x, y \in \Sigma_A} \frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{d(x, y)^\alpha} < +\infty.$$

The transfer operator associated to ϕ is defined as follows

$$L_\phi f(x) = \sum_{\sigma y = x} e^{\phi(y)} f(y).$$

We define the norm $\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + [f]_\alpha$ on the space of α -Hölder continuous functions \mathcal{H}_α . The well known Ruelle theorem ([77]) asserts that the spectral radius $\lambda > 0$ of $L_\phi : \mathcal{H}_\alpha \rightarrow \mathcal{H}_\alpha$ is an eigenvalue with an strictly positive eigenfunction h and there is a probability eigenmeasure π for the adjoint operator L_ϕ^* , i.e. $L_\phi^* \pi = \lambda \pi$.

Choose h such that $\int h d\nu = 1$. Let $P(\phi) = \log \lambda$ (called the pressure of ϕ). The measure $\mu := h\nu$ is called the Gibbs measure associated to ϕ . The function $\phi + (\log h \circ - \log h) - P(\phi)$ is the normalization of ϕ . We note again this normalization ϕ , we have $\lambda = 1$, $P(\phi) = 0$ and $h = 1$. The Gibbs measure has the Gibbs property : there exists a constant $\gamma > 1$ such that

$$\frac{1}{\gamma} e^{S_n \phi(x)} \leq \mu(C_n(x)) \leq \gamma e^{S_n \phi(x)}$$

holds for all $x \in \Sigma_A$ and all $n \geq 1$ where $S_n f(y) := \sum_{j=0}^{n-1} f(\sigma^j y)$. Denote

$$e_{\min} = \min_{\nu \in M(\Sigma_A, \sigma)} \int -\phi d\nu \quad \text{and} \quad e_{\max} = \max_{\nu \in M(\Sigma_A, \sigma)} \int -\phi d\nu$$

where $M(\Sigma_A, \sigma)$ is the set of invariant measures over Σ_A , the minimum and maximum exists by the weak-* compactness of $M(\Sigma_A, \sigma)$. Note that $e_{\min} > 0$.

Proposition 4.11. *For any $0 < \delta < e_{\min}$, there exists $N(\delta) > 0$, such that for any cylinder C_n ($n \geq N(\delta)$)*

$$\gamma^{-1}e^{-n(e_{\max}+\delta)} \leq \mu(C_n) \leq \gamma e^{-n(e_{\min}-\delta)}. \quad (4.31)$$

Proof. Firstly, we prove

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{x \in \Sigma_A} \left(-\frac{S_n \phi(x)}{n} \right) \geq e_{\min}. \quad (4.32)$$

In fact, for any $\epsilon > 0$, we have $\liminf_{n \rightarrow \infty} \min_{x \in \Sigma_A} \left(-\frac{S_n \phi(x)}{n} \right) \geq e_{\min} - \epsilon$. Otherwise, there exist infinitely times n, x_n such that $-\frac{S_n \phi(x_n)}{n} < e_{\min} - \epsilon$. Consider the measures $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^j x_n}$. Let μ_∞ be the limit of some subsequence $\{\mu_{n_i}\}$. Since

$$\int -\phi d\mu_{n_i} = \frac{1}{n_i} \sum_{j=0}^{n_i-1} -\phi(T^j x_{n_i}) = -\frac{S_{n_i} \phi(x_{n_i})}{n_i} < e_{\min} - \epsilon,$$

we get $\int -\phi d\mu_\infty \leq e_{\min} - \epsilon$, which contradicts with the definition of e_{\min} . Letting $\epsilon \rightarrow 0^+$, we obtain (4.32). Therefore, for any $0 < \delta < e_{\min}$, when n is large enough, $-\frac{S_n \phi(x)}{n} \geq e_{\min} - \delta$ for all $x \in \Sigma_A$. For any cylinder C_n , using the Gibbs property, when n is large enough, for any $x \in C_n$,

$$\mu(C_n) \leq \gamma e^{S_n \phi(x)} \leq \gamma e^{-n(e_{\min}-\delta)}.$$

Similarly, we can prove $\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in \Sigma_A} \left(-\frac{S_n \phi(x)}{n} \right) \leq e_{\max}$. Then using the Gibbs property, we obtain $\mu(C_n(x)) \geq \gamma^{-1} e^{-n(e_{\max}+\delta)}$. \square

Proposition 4.12. *The system (Σ_A, σ, μ) is exponentially mixing, i.e. there exists $0 < \delta < 1$ such that for any cylinder E and measurable set F we have*

$$\mu(E \cap T^{-n} F) = \mu(E)\mu(F) + \mu(F)O(\delta^n)$$

for all $n \geq 1$, where the constant involved by the O is absolute.

Proof. For any $f \in L^1(\Sigma_A, \mu)$ and $g \in \mathcal{H}_\alpha$,

$$\left| \int f \circ \sigma^n g d\mu \right| \leq \mathbb{E}(|f|)\theta^n \|g\|_\alpha, \quad (4.33)$$

where $0 < \theta < 1$ is a constant (see for example [29]). First consider the case $E = C_n$ (C_n being an n -cylinder). Let $f = \chi_F$ and $g = \chi_{C_n} - \mu(C_n)$. Apply (4.33) to f, g , we obtain

$$|\mu(C_n \cap \sigma^{-\omega n} F) - \mu(C_n)\mu(F)| \leq \mu(F)\theta^{\omega n} (\|\chi_{C_n} - \mu(C_n)\|_\infty + [\chi_{C_n}]_\alpha).$$

We choose large enough ω such that $\delta_0 := \theta^\omega m^\alpha < \frac{1}{m}$. Since $\|\chi_{C_n} - \mu(C_n)\|_\infty \leq 1$ and $[\chi_{C_n}]_\alpha \leq m^{n\alpha}$, for any $n \geq 0$ we have

$$|\mu(C_n \cap \sigma^{-\omega n} F) - \mu(C_n)\mu(F)| \leq 2\mu(F)\delta_0^n. \quad (4.34)$$

For an arbitrary cylinder E , we distinguish two cases.

Case 1. There exists a cylinder C_n such that $E \subset C_n$. By Proposition 4.11, we have $\mu(E) \leq \mu(C_n) \leq \gamma\delta_1^n$, where δ_1 is a constant involved in (4.31). So

$$\begin{aligned} |\mu(E \cap T^{-\omega n} F) - \mu(E)\mu(F)| &\leq |\mu(C_n \cap T^{-\omega n} F) - \mu(C_n)\mu(F)| \\ &\quad + \mu(C_n)\mu(F) + \mu(E)\mu(F) \\ &\leq (2\delta_0^n + 2\gamma\delta_1^n)\mu(F). \end{aligned}$$

Case 2. E is union of at most m^n n -cylinders $C_n^{(i)}$. Then

$$\begin{aligned} |\mu(E \cap \sigma^{-\omega n} F) - \mu(E)\mu(F)| &\leq \sum_i |\mu(C_n^{(i)} \cap \sigma^{-\omega n} F) - \mu(C_n^{(i)})\mu(F)| \\ &\leq 2\mu(F)(m\delta_0)^n. \end{aligned}$$

Let $\delta = \max\{\delta_1, m\delta_0\}$. We conclude that (\sum_A, σ, μ) is exponentially mixing by Proposition 4.5. \square

Let

$$D^- = (\log m)^{-1}(e_{\min} - \delta) \quad \text{and} \quad D^+ = (\log m)^{-1}(e_{\max} + \delta),$$

where $0 < \delta < e_{\min}$ is an arbitrary number. Take $\varphi_1(r) = \gamma^{-1}r^{D^+}$, $\varphi_2(r) = \gamma r^{D^-}$. Combining Proposition 4.11, Proposition 4.12, we can apply Theorem 4.2 to obtain

Theorem 4.13. *If $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n^{-D^+} \log^2 n/n = 0$, then for μ -almost all $x \in \Sigma_A$, there exist $0 < A(x), B(x) < \infty$, such that*

$$A(x) \sum_{n=1}^N r_n^{D^+} \leq \min_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\sigma^n x) \leq \max_{y \in X} \sum_{n=1}^N \chi_{B(y, r_n)}(\sigma^n x) \leq B(x) \sum_{n=1}^N r_n^{D^-},$$

when N is large enough.

For the Bernoulli measure with the probability vector $(p, 1-p)$ ($0 < p \leq \frac{1}{2}$), we can choose $\varphi_1(r) = r^{-\log p}$ and $\varphi_2(r) = r^{-\log(1-p)}$. Notice that $\alpha_{\max} = \alpha^* = -\log(1-p)/\log 2$.

Bibliographie

- [1] V. Afraimovich, J.R. Chazottes, B. Saussol, *Pointwise dimensions for Poincaré recurrences associated with maps and special flows*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **9**, No.2, (2003), 263-280.
- [2] I. Assani, *A weighted pointwise ergodic theorem*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **34**, No.1, (1998), 139-150.
- [3] I. Assani, M. Lin, *On the one-sided ergodic Hilbert transform*, Contemp. Math., **430**, (2007), 21-39.
- [4] A. Baker, *A concise introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, (1984).
- [5] A. Baker, *Transcendental number theory. Second edition.*, Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, (1990).
- [6] J. Barral, A.H. Fan, *Covering numbers of different points in Duoretzky covering*, Bull. Sci. Math., **129**, No.4, (2005), 275-317.
- [7] L. Barreira, B. Saussol, *Hausdorff dimension of measures via Poincaré recurrence*, Comm. Math. Phys., **219**, No.2, (2001), 443-463.
- [8] M.-J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delefosse, J.-P. Schreiber, *Pisot and Salem numbers. With a preface by David W. Boyd.*, Birkhäuser Verlag, (1992).
- [9] P. Billard, *Séries de Fourier aléatoirement bornées, continues, uniformément convergentes.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3), **82**, (1965), 131-179.
- [10] J. Bourgain, *On the pointwise ergodic theorem on L^p for arithmetic sets*, Israel J. Math., **61**, No.1, (1988), 73-84.
- [11] C. Bonanno, S. Galatolo, S. Isola, *Recurrence and algorithmic information*, Nonlinearity, **17**, No.3, (2004), 1057-1074.
- [12] M. Boshernitzan, *Quantitative recurrence results*, Invent. Math., **113**, No.3, (1993), 617-631.

- [13] J. Bourgain, H. Furstenberg, Y. Katznelson, D. Ornstein, *Appendix on return-time sequences*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No.69, (1989), 42-45.
- [14] G. Brown, G. Michon, J. Peyrière,, *On the multifractal analysis of measures*, J. Statist. Phys., **66**, No.3-4, (1992), 775-790.
- [15] N. Chernov, D. Kleinbock, *Dynamical Borel-Cantelli lemmas for Gibbs measures*, Israel J. Math., **122**, (2001), 1-27.
- [16] G. Cohen, M. Lin, *Laws of large numbers with rates and the one-sided ergodic Hilbert transform*, Illinois J. Math. I, **47**, No.4, (2003), 997-1031.
- [17] G. Cohen, C. Cuny, *On random almost periodic trigonometric polynomials and applications to ergodic theory*, Ann. Probab., **34**, No.1, (2006), 39-79.
- [18] C. Cuny, *On the a.s. convergence of the one-sided ergodic Hilbert transform*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, EPublished online by Cambridge University Press 03 Feb 2009.
- [19] G. Cohen et C. Cuny, *On random almost periodic series and random ergodic theory*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **26**, No.3, (2006), 683-709.
- [20] C.M. Deo, *On a random series in a Hilbert space*, Canad. J. Statist., **6**, No.1, (1978), 91-94.
- [21] A. Dvoretzky, *On covering a circle by randomly placed arcs*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **42**, (1956), 199-203.
- [22] M. Drmota et R.F. Tichy, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, **161**,(1997).
- [23] S. Durand, D. Schneider, *Random ergodic theorems and regularizing random weights*, rgodic Theory Dynam. Systems, **23**, No.4, (2003), 1059-1092.
- [24] P. Erdős, *On a family of symmetric Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math., **61**, (1939), 974-976.
- [25] P. Erdős, *On the smoothness properties of a family of Bernoulli convolutions*, Amer. J. Math., **62**, (1940), 180-186.
- [26] K. Falconer, *Fractal geometry*, Mathematical foundations and applications. Second edition., (2003).
- [27] A.H. Fan, *How many intervals cover a point in Dvoretzky covering ?*, Israel J. Math., **131**, (2002), 157-184.

- [28] A.H. Fan, J.P. Kahane, *Rareté des intervalles recouvrant un point dans un recouvrement aléatoire*, H. Poincaré Probab. Statist., **29**, No.3, (1993), 453-466.
- [29] A.H. Fan, M. Pollicott, *Non-homogeneous equilibrium states and convergence speeds of averaging operators*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **129**, No.1, (2000), 99-114.
- [30] A.H. Fan, J. Schmeling, S. Troubetzkoy, *Dynamical Diophantine approximation*, preprint, (2007).
- [31] A.H. Fan et D. Schneider, *Sur une inégalité de Littlewood-Salem*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **39**, No.2, (2003), 193-216.
- [32] A.H. Fan, X. Y. Zhang, *Riesz products on the ring of p -adic integers*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **344**, No.7, (2007), 425-430.
- [33] J.L. Fernández, M.V., Melián, D. Pestana, *Quantitative mixing results and inner functions*, Math. Ann., **337**, No.1, (2007), 233-241.
- [34] X. Fernique, *Régularité de fonctions aléatoires gaussiennes stationnaires*, Probab. Theory Related Fields, **88**, No.4, (1991), 521-536.
- [35] X. Fernique, *Régularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, No.4, (1974), 1-96.
- [36] X. Fernique, *Une majoration des fonctions aléatoires gaussiennes à valeurs vectorielles. Application aux fonctions aléatoires gaussiennes réelles d'une ou plusieurs variables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **300**, No.10, (1985), 315-318.
- [37] C. Foias, B. Sz.-Nagy, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, North-Holland Publishing Co., (1970).
- [38] H. Furstenberg, *Recurrence in ergodic theory and combinatorial number theory*, M. B. Porter Lectures. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, (1981).
- [39] S. Galatolo, *Dimension via waiting time and recurrence*, Math. Res. Lett., **12**, No.2-3, (2006), 377-386.
- [40] V. Gaposkin, *Spectral criteria for the existence of generalized ergodic transformations*, Theory Probab. Appl., **41**, No.2, (1996), 247-264.
- [41] V. Gaposkin, *Necessary conditions for the convergence of the series $\sum a_n S_n$ for independent identically distributed random variables*, Mat. Zametki, **20**, No.4, (1976), 529-536.
- [42] N. Guillotin-Plantard, D. Schneider, *Ergodic theorems for dynamic random walks*, Math. Inequal. Appl., **6**, No.1, (2003), 177-195.

- [43] N. Guillotin-Plantard, D. Schneider, *Limit theorems for sampled dynamical systems*, Stoch. Dyn., **3**, No.4, (2003), 477-497.
- [44] P. Halmos, *A nonhomogeneous ergodic theorem*, Trans. Amer. Math. Soc., **66**, (1949), 284-288.
- [45] Y. Heurteaux, *Estimations de la dimension inférieure et de la dimension supérieure des mesures*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **34**, No.3, (1998), 309-338.
- [46] S. Izumi, *A non-homogeneous ergodic theorem*, Proc. Imp. Acad., Tokyo, **15**, (1939), 189-192.
- [47] R. Jones, M. Wierdl, *Convergence of ergodic averages*, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **5** (1996), 229-247.
- [48] J.P. Kahane, *Produits de poids aléatoires indépendants et applications*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., **346**, (1991), 277-324.
- [49] J.-P. Kahane, *Propriétés locales des fonctions à séries de Fourier aléatoires.*, Studia Math., **19**, (1960), 1-25.
- [50] J.P. Kahane *Random coverings and multiplicative. Fractal geometry and stochastic, II processes*, Progr. Probab., **46**, (2000), 125-146.
- [51] J.P. Kahane, *Séries de Fourier aléatoires.*, Soc. Math. France, **5**, No.200 , (1995), 441-450.
- [52] J.P. Kahane, *Some random series of functions. Second edition.*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **5**, (1985).
- [53] J.P. Kahane, *Sur la divergence presque sûre presque partout de certaines séries de Fourier aléatoires*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math., **3-4**, (1960/1961), 101-108.
- [54] D.H. Kim, *The dynamical Borel-Cantelli lemma for interval maps.*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **17**, No.4, (2007), 891-900.
- [55] A.Y. Khintchine, *Continued Fractions*, Noordhoff, Groningen, (1963).
- [56] U. Krengel, *Ergodic theorems*, Studies in Mathematics, (1985).
- [57] M. Lacey, K. Petersen, M. Wierdl, D. Rudolph, *Random ergodic theorems with universally representative sequences*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **30**, No.3, (1994), 353-395.
- [58] K. Lau, S. Ngai, H. Rao, *Iterated function systems with overlaps and self-similar measures*, J. London Math. Soc., **63**, No.1, (2001), 99-116.
- [59] M. Lemańczyk, E. Lesigne, F. Parreau, D. Volný, M. Wierdl, *Random ergodic theorems and real cocycles*, Israel J. Math., **130**, (2002), 285-321.

- [60] E. Lesigne, *Communication personnelle*.
- [61] E. Lesigne, C. Mauduit, B. Moss, *Le théorème ergodique le long d'une suite q -multiplicative*, *Compositio Mathematica*, **93**, No.1, (1994), 49-79.
- [62] J. Levesley, *A general inhomogeneous Jarnik-Besicovitch theorem*, *J. Number Theory*, **71**, No.1, (1998), 65-80.
- [63] M. Lifshits, M. Weber, *Régularisation spectrale et propriétés métriques des moyennes mobiles* *J. Anal. Math.*, **89**, (2003), 1-14.
- [64] F. Maucourant, *namical Borel-Cantelli lemma for hyperbolic spaces*, *Dy. Israel J. Math.*, **152**, (2006), 143-155.
- [65] C. McMullen, *The Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets*, *Nagoya Math. J.*, **96**, (1984), 1-9.
- [66] F. Móricz, *Moment inequalities and the strong laws of large numbers*, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, **35**, No.4, (1976), 299-314.
- [67] D. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and data compression schemes*, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **39**, No.1, (1993), 78-83.
- [68] W. Parry, *On the β -expansions of real numbers*, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **11**, (1960), 401-416.
- [69] W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory*, *Pacific J. Math.*, **20**, (1967), 109-127.
- [70] Ch. Pommerenke, *On ergodic properties of inner functions*, *Math. Ann.*, **256**, No.1, (1981), 43-50.
- [71] F. Przytycki, M. Urbański, *On the Hausdorff dimension of some fractal sets*, *Studia Math.*, **93**, No.2, (1989), 155-186.
- [72] R. Paley and A. Zygmund, *On some series of functions*, *Proc. Cambridge phil. Soc.*, **26**, (1930), 337-357 et **28**, (1932), 190-205.
- [73] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, **8**, (1957), 477-493.
- [74] F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, Dover Publications, Inc., New York, (1995).
- [75] J. Rosenblatt, *Almost everywhere convergence of series*, *Math. Ann.*, **280**, No.4, (1988), 565-577.
- [76] J. Rosenblatt, M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorems via harmonic analysis, ergodic theory and its connections with harmonic analysis*, *London Math. Soc.*, **205**, (1995), 3-151.

- [77] R. Ruelle, *Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas*, Comm. Math. Phys., **9**, (1968), 267-278.
- [78] R. Salem and A. Zygmund, *Some properties of trigonometric series whose terms have random signs*, Acta Math., **91**, (1954), 245-301.
- [79] B. Saussol, S. Troubetzkoy, S. Vaienti, *Recurrence, dimensions, and Lyapunov exponents*, J. Statist. Phys., **106**, No.3-4, (2002), 623-634.
- [80] W.M. Schmidt, *Diophantine approximation*, Lecture Notes in Mathematics, **785**, (1980), Springer, Berlin.
- [81] L.A. Shepp, *Covering the circle with random arcs*, Israel J. Math., **11**, (1972), 328-345.
- [82] D. Schneider, *Théorèmes ergodiques perturbés*, Israel J. Math., **101**, (1997), 157-178.
- [83] D. Schneider, Dominique, M.Weber, *Weighted averages of contractions along subsequences*, Convergence in ergodic theory and probability, Ohio State Univ. Math. Res. Inst. Publ., **5**, (1996), 397-404.
- [84] F. Spitzer, *Principles of random walks*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, **34**, (1976).
- [85] B. Solomyak, *On the random series $\sum \pm \lambda^n$ (an Erdős problem)*, Ann. of Math. (2), **142**, No.3, (1995), 611-62.
- [86] B. Testud, *Mesures quasi-Bernoulli au sens faible : résultats et exemples.*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist., **42**, No.1, (2006), 1-35.
- [87] J. P. Thouvenot, *La convergence presque sûre des moyennes ergodiques suivant certaines sous-suites d'entiers*, Sem. Bourbaki, 42^e année, **719**, (1990).
- [88] F. Tian et Y. Ren, *The value distribution of random dirichlet series on the right half plane (II)*, Acta Mathematica Scientia, **3**, (2003).
- [89] C. Tricot, *Two definitions of fractional dimension*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **91**, No.1, (1982), 57-74.
- [90] M. Urbański, *The probability distribution and Hausdorff dimension of self-affine functions*, Probab. Theory Related Fields, **84**, No.3, (1990), 377-391.
- [91] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Graduate Texts in Mathematics, **79**, (1982), Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [92] A. Wintner, *On Convergent Poisson Convolutions*, Amer. J. Math., **57**, No.4, (1935), 827-838.

- [93] M. Wierdl, *Pointwise ergodic theorem along the prime numbers*, Israel J. Math., **64**, No.3, (1999), 315-336.