HAL open science

Complexité des pavages apériodiques : calculs et interprétations.

Antoine Julien

▶ To cite this version:

Antoine Julien. Complexité des pavages apériodiques : calculs et interprétations.. Mathématiques [math]. Université Claude Bernard - Lyon I, 2009. Français. NNT : . tel-00466323v1

HAL Id: tel-00466323

https://theses.hal.science/tel-00466323v1

Submitted on 23 Mar 2010 (v1), last revised 5 Jan 2012 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 266-2009

Université de Lyon
Université Claude Bernard Lyon 1
Institut Camille Jordan
École doctorale InfoMaths

THÈSE

Spécialité mathématiques (CNU 25)

(arrêté du 7 août 2007)

en vue d'obtenir le grade de docteur,
présentée et soutenue publiquement par

M. Antoine Julien

le 10 décembre 2009.

Complexité des pavages apériodiques : calculs et interprétations

Thèse encadrée par	M. Johannes Kellendonk
soutenue après avis de	M. Pierre Arnoux M. Marcy Barge

devant la commission d'examen formée de

M. Pierre Arnoux	*rapporteur*
Mme Valérie Berthé	*membre*
M. Thierry Fack	*président*
M. Franz Gähler	*membre*
M. Johannes Kellendonk	*directeur*

Institution : *Institut Camille Jordan, Université de Lyon, Université Lyon 1, École Centrale de Lyon, INSA de Lyon, UMR 5208 du CNRS.*

Adresse : *Antoine* Julien
Insitut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon 1
43 boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex
France

Résumé

La théorie des pavages apériodiques a connu des développements rapides depuis les années 1980, avec la découvertes d'alliages métalliques cristallisant dans une structure quasi-périodique.

Dans cette thèse, on étudie particulièrement deux méthodes de construction de pavages apériodiques : la méthode par coupe et projection et la méthode par inflation et substitution. Deux angles d'approche sont développés : l'étude de la fonction de complexité, et l'étude métrique de l'espace de pavages.

Dans une première partie, nous calculons l'asymptotique de la fonction de complexité pour des pavages coupe et projection, généralisant ainsi des résultats connus en dynamiques symbolique pour la dimension 1. On montre que pour un pavage coupe et projection canonique N sur d, sans période, la complexité croît (à des constantes près) comme n^α, où $\alpha \in [\![d, d(N-d)]\!]$.

Ensuite, nous nous basons sur une construction de Pearson et Bellissard qui construisent un triplet spectral sur un ensemble de Cantor ultramétrique. Nous suivons leur construction dans le cas d'ensembles de Cantor auto-similaires. De tels ensembles sont représentés comme l'ensemble des chemins d'un diagramme de Bratteli. La transversale d'un espace de pavages de substitution muni d'une distance usuelle est homéomorphe de manière bi-lipschitzienne à un ensemble de Cantor auto-similaire en ce sens. Certains de ces outils de géométrie non commutative s'appliquent donc directement à l'étude des pavages.

Dans une dernière partie, nous mettons en évidence des liens entre la distance usuelle sur l'enveloppe d'un pavage et la complexité de ce pavage. Les liens entre complexité et métrique permettent de donner une preuve directe et complète du fait suivant : la complexité des pavages de substitution apériodiques de dimension d croît comme n^d. Par ailleurs, une étude approfondie d'un résultat de Sadun et Williams permet de montrer que pour tout pavage de dimension d vérifiant certaines hypothèses, il existe un mot sur $\mathbb{Z}^d$ qui a une complexité comparable. Nous appliquons ce résultat pour faire le lien entre la conjecture de Nivat sur les mots bi-dimensionnels, et une conjecture de Lagarias et Pleasants sur la complexité des pavages.

La question de liens entre la complexité et la topologie (et pas seulement avec la distance) reste ouverte, mais nous apportons des réponses partielles dans cette direction. Pour les pavages coupe et projection, il existe une équivalence entre faible exposant de complexité et finitude des rangs des groupes de cohomologie sur $\mathbb{Q}$. En dimension 1, un pavage de faible complexité (ici sous-linéaire) est associé à un espace dont les groupes de cohomologie sont de dimension finie, et l'implication est stricte. En toute généralité, le problème est ouvert.

Abstract

Since the 1980s, the theory of aperiodic tilings developed quickly, motivated by the discovery of metallic alloys which crystallize in an aperiodic structure. This highlighted the need for new models of crystals.

Two models of aperiodic tilings are specifically studied in this dissertation. First, the cut-and-project method, then the inflation and substitution method. Two point of view are developed for the study of these objects: the study of the complexity function associated to a tiling, and the metric study of the associated tiling space.

In a first part, the asymptotic behaviour of the complexity function for cut-and-project tilings is studied. The results stated here generalize formerly known results in the specific case of dimension 1. It is proved that for an (N, d) canonical projection tiling without periods, the complexity grows like n^α, with $\alpha \in \{d, \ldots, d(N-d)\}$. The exponent α is explicitly computed in terms of algebraic data of the projection method.

A second part is based on a construction by Pearson and Bellissard of a spectral triple for ultrametric Cantor sets. Their construction is applied to *self similar* Cantor sets. Such Cantor sets are represented as sets of infinite paths on weighted self-similar (or stationnary) Bratteli diagrams. The canonical transversal of a substitution tiling space, with the usual distance, is bi-Lipschitz homeomorphic to a self-similar Cantor set in the sense above. Therefore, some of the results developed here apply directly to substitution tiling spaces.

In a last part, the links between the complexity function of a tiling and the usual distance on its associated tiling space are made explicit. These links can provide a direct and complete proof of the following fact: the complexity of an aperiodic d-dimensional substitution tiling grows asymptotically as n^d, up to constants. Moreover, a thorough study of a theorem by Sadun and Williams allows to strengthen their result: for all tiling of dimension d, there exists a word on $\mathbb{Z}^d$ which has a comparable complexity. Thanks to this result, it is possible to compare a conjecture by Nivat on the complexity of bi-dimensional words, and a conjecture by Lagarias and Pleasants on tilings complexity.

These links between complexity and distance raises the question of links between complexity and *topology*. Partial answers are given in this direction. For canonical cut-and-project tilings, there exists an equivalence between low complexity of the tiling on the one hand, and the fact that the cohomology groups over $\mathbb{Q}$ of the associated space are finite dimensional on the other hand. In dimension 1, a low-complexity tiling (at most linear) is associated to a space with finitely generated cohomology groups over $\mathbb{Q}$, and a counter-example shows that this implication is strict. In a more general setting, the problem remains open.

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma gratitude à Johannes Kellendonk, mon directeur de thèse, pour m'avoir proposé ce sujet de thèse qui me passionne depuis maintenant plus de trois ans, et sur lequel je pourrai — j'espère — continuer à travailler les prochaines années. Ses conseils, son intuition et ses encouragements m'ont permis de persévérer durant ces trois années, dont cette thèse est l'aboutissement.

De toutes les personnes que j'ai rencontrées pendant ma thèse, je souhaite remercier tout particulièrement Jean Bellissard, qui m'a donné l'opportunité de travailler avec lui au *Georgia Institute of Technology* à Atlanta (États-Unis d'Amérique), de janvier à mai 2009[1]. Au cours de ce séjour, j'ai pu commencer une collaboration avec Jean Savinien, dont les chapitres 4 et 5 sont le fruit. Leur enthousiasme et leur dynamisme m'ont énormément apporté.

Je veux également remercier toutes les personnes que j'ai pu rencontrer, et avec lesquelles j'ai pu parler de pavages en général et de mes travaux en particulier : Boris Adamczewski, Pierre Arnoux, Michael Baake, Marcy Barge, Nicolas Bedaride, Valérie Berthé, Julien Cassaigne, Thierry Fack, Franz Gähler, Jean-Marc Gambaudo, Thierry Giordano, John Hunton, Daniel Lenz, Haija Moustafa, Samuel Petite, Ian Putnam, Arthur Robinson Jr., Lorenzo Sadun, Anne Siegel, et tous ceux que j'oublierais de citer. Je suis particulièrement reconnaissant envers Laurent Vuillon : c'est grâce au cours de M2 qu'il a donné à Lyon en 2006 que j'ai commencé à m'interesser à des problématiques issues de la combinatoire des mots, et notamment à la complexité.

Je ne voudrais pas omettre l'Institut Camille Jordan qui a hébergé mes recherches, ainsi que l'ÉNS de Lyon puis l'Université Lyon 1 les ont financées, ce qui m'a permis de vivre et travailler dans de bonnes conditions. De bonnes conditions matérielles, mais aussi humaines. Je pense à tous les membres du laboratoire que je n'ai pas mentionés jusqu'à présent, et avec lesquels j'ai eu le plaisir d'enseigner ou simplement de discuter : Sylvie Benzoni, Vincent Borrelli, Damien Gayet, Jérôme Germoni, Régis Goiffon, Nicolas Pelay, Anne Perrut, pour ne citer qu'eux.

Je n'oublie pas mes proches, mathématiciens et non-mathématiciens. Mes amis Alexander, Frédéric, Gwendal, Jean et Magali, Maxime, mais aussi Antoine, Clément, Stéphanie et Alexandre, Philip, Sandrine, Cédric et les autres. Ma famille, qui m'a toujours soutenue : je savais que je pouvais à tout moment prendre le train pour les retrouver et me déconnecter des mathématiques pour quelques temps. Et Maud, bien sûr, pour sa patience, son soutien, et pour avoir été à mes côtés.

[1] Ce séjour a été financé grâce aux bourses NSF n° DMS-0300398 et n° DMS-0600956.

Table des matières

Remerciements **v**

Introduction **xi**

1 Généralités **1**
1.1 Définitions 2
1.1.1 Approche combinatoire 2
1.1.2 Approche topologique et dynamique 4
1.1.3 Fonction de complexité 6
1.2 Dynamique symbolique 8
1.2.1 Vocabulaire de la dynamique symbolique 8
1.2.2 Distance et complexité 10
1.2.3 Dimension un : graphes de Rauzy 10
1.3 Cohomologie des espaces de pavages 11
1.3.1 Cohomologie de Čech 12
1.3.2 Cohomologie de groupe 13
1.4 Un exemple : les suites sturmiennes 13
1.4.1 Construction par coupe et projection 13
1.4.2 Construction par substitution 14

2 Complexité des pavages coupe et projection **17**
2.1 Définitions et propriétés générales 18
2.1.1 Cadre 18
2.1.2 Pavages, amas et espace de pavages 20
2.1.3 Fonction de complexité 21
2.2 Points singuliers et fonction de complexité 22
2.2.1 Proposition fondamentale 23
2.2.2 Géométrie des points singuliers 24
2.3 Calcul de la complexité 26
2.3.1 Énoncé du théorème 26
2.3.2 Préliminaires 27
2.3.3 Preuve du théorème 2.3.1 31
2.4 Exemples 32
2.4.1 Hyperplans discrets 32
2.4.2 Suites de billards cubiques 33
2.4.3 Pavage octogonal 33
2.4.4 Pavages de Penrose 34

3 Liens entre complexité et cohomologie **37**
3.1 Complexité minimale et rang des groupes de cohomologie 38
3.1.1 Énoncé du théorème 38
3.1.2 Le critère de Forrest–Hunton–Kellendonk 38
3.2 Preuve du théorème 39
3.2.1 $\alpha \geq d - \mathrm{rg}(\Delta)$ 39
3.2.2 Le cas d'égalité 40
3.3 Rigidité en basse complexité 42
3.4 Complexité et cohomologie en dimension 1 44
3.4.1 Cohomologie et graphes de Rauzy 44
3.4.2 Les mots simples ont une cohomologie finiment engendrée 45
3.4.3 Un exemple de mot complexe ayant une cohomologie finiment engendrée 46

4 Substitutions et diagrammes de Bratteli **49**
4.1 Pavages de substitution 50
4.1.1 Définitions 50
4.1.2 Propriétés 52
4.2 Propriétés des matrices primitives 52
4.2.1 Rappels 53
4.3 Diagrammes de Bratteli à poids 54
4.3.1 Diagramme associé à une substitution 54
4.3.2 L'application de Robinson 57
4.3.3 Poids et distance 59

5 Laplacien sur les diagrammes de Bratteli **61**
5.1 La construction de Pearson–Bellissard 61
5.1.1 Le Triplet spectral 62
5.1.2 La fonction ζ 63
5.1.3 La trace de Dixmier 64
5.2 Application à Π_∞ 64
5.2.1 ζ-régularité de Π_∞ 65
5.2.2 Caractérisation de μ 66
5.2.3 Mesure de Dixmier et mesure ergodique 67
5.3 Laplacien sur la transversale 68
5.3.1 Définition combinatoire 68
5.3.2 Éléments propres du laplacien 69
5.4 Algèbre de Cuntz–Krieger et applications 71
5.4.1 L'algèbre de Cuntz–Krieger 71
5.4.2 Application au calcul des valeurs propres 73
5.4.3 Asymptotique de Weyl 73
5.5 Un exemple : le diagramme de Fibonacci 74

6 Complexité et distance **77**
6.1 Complexité et recouvrement de la transversale 77
6.1.1 Cadre 78
6.1.2 Énoncé et preuve du théorème 78
6.1.3 La dimension de boîte 79
6.2 Complexité des pavages de substitution 80
6.2.1 Choix d'un diagramme adapté 81

6.2.2 Théorème et discussion 81
6.3 Complexité des pavages et dynamique symbolique 82
6.3.1 Généralisation du théorème de Williams et Sadun 82
6.3.2 Complexité des pavages et des mots 85
6.3.3 Complexité minimale 85

A Limites inverses de graphes de Rauzy 89
A.1 Définition des graphes de Rauzy 89
A.2 Limite inverse de graphes de Rauzy 90

Introduction

La construction d'ensembles de tuiles qui peuvent paver le plan, mais jamais de manière périodique, a d'abord été considérée comme une curiosité : une découverte surprenante, mais appartenant au domaine des mathématiques récréatives. C'est par exemple dans le *Mathematical Intelligencer*[2] que Roger Penrose [55] décrit la construction de son pavage, désormais célèbre. De même, un des premiers articles décrivant les pavages apériodiques a été publié dans une chronique de jeux mathématiques tenue par Martin Gardner [32] dans *Scientific American*.

Dans les années 1980, dans le domaine de la physique du solide, Schlechtman, Blech, Gratias et Cahn [63] ont pu observer un alliage métallique fortement structuré (puisque la figure de diffraction qu'ils ont obtenue est constituée de pics clairs), mais qui ne possédait pas les propriétés classiques des cristaux. En effet, la figure de diffraction possèdait une symétrie qui rend impossible l'agencement des atomes sur un réseau périodique. On était alors en présence d'un nouveau matériau, qui ne pouvait pas être modélisé par la théorie classique des cristaux.

Le développement de la théorie des pavages fut alors étroitement lié à celui de la théorie mathématique des quasi-cristaux. Ainsi, l'utilisation de méthodes topologiques et de C^*-algèbres est largement motivée par la volonté de prouver le théorème du *gap-labeling* [10, 68, 39]. Cela est lié à la recherche d'invariants topologiques pour les espaces de pavages. Parmi ces invariants, on peut citer la K-théorie de la C^*-algèbre associée à l'espace de pavages [8, 40], mais aussi la cohomologie de l'espace [1, 53].

D'autre part, la dynamique symbolique et la théorie des mots se sont développés de manière autonome. Ces domaines sont bien plus anciens, puisqu'on considère les articles de Hedlund et Morse [48, 49] en 1938 et 1940 comme les articles fondateurs de la dynamique symbolique. La dynamique symbolique et l'étude des pavages ne sont pas sans lien : un pavage de dimension 1 peut-être codé par un mot, et bien des notions peuvent être transposées d'un domaine à l'autre par analogie. On citera les notions de substitution, de récurrence, et aussi de *complexité*, dont il sera largement question dans cette thèse.

Certains développements récents en dynamique symbolique se rapprochent encore un peu plus de la théorie des pavages : notamment, l'étude de mots indexés par $\mathbb{Z}^2$, comme les « plans discrets » ou « plans digitalisés ». On pourra voir à ce sujet les articles de Vuillon et Berthé [70, 11]. On peut citer également

[2] On peut lire sur la page de présentation du journal : *Not only does The Mathematical Intelligencer inform a broad audience of mathematicians and the wider intellectual community, it also entertains. Throughout, the journal, humor, puzzles, poetry, fiction, and art can be found.*

les travaux d'Arnoux, Berthé, Ei et Ito [3], qui développent une généralisation de la notion de substitution *symbolique* en dimension supérieure à 1.

Berthé et Vuillon, par exemple, ont calculé la complexité de plans discrets en utilisant un *codage* symbolique du pavage par un mot sur $\mathbb{Z}^2$. L'idée ici est d'utiliser un outil combinatoire (la fonction de complexité) à un objet essentiellement géométrique. Les méthodes développées jusqu'à présent consistent à coder l'objet géométrique (le pavage) pour transposer l'étude dans un cadre exclusivement combinatoire.

Les techniques développées dans cette thèse permettent de calculer le comportement de la fonction de complexité pour tous les pavages coupe et projection, en évitant de faire intervenir la combinatoire des mots. De manière plus générale, l'ambition de cette thèse est d'étudier un objet issu de la dynamique symbolique, et *a priori* purement combinatoire — la fonction de complexité — pour des pavages de dimension quelconque, et en utilisant des méthodes topologiques.

Cadre de la thèse

Le fil rouge de cette thèse est l'étude de la fonction de complexité dans différents contextes. La fonction de complexité d'un pavage est une fonction qui à un réel r associe le nombre d'amas de taille r du pavage. Cette fonction a été beaucoup étudiée dans le cadre de la combinatoire des mots, c'est-à-dire pour les pavages de dimension 1. Cette fonction donne des informations importantes sur le mot. On peut remarquer qu'un mot périodique a une fonction de complexité bornée : la complexité est donc non triviale uniquement pour des mots apériodiques. En cela, il s'agit d'un outil typiquement « apériodique ». Un résultat frappant en dimension 1 est le théorème de Morse–Hedlund [49] : s'il existe n tel qu'un mot bi-infini w a moins de n sous-mots distincts de longueur n, alors w est périodique.

En dimension supérieure, il existe des résultats relatifs à la complexité, et il existe des conjecture généralisant le résultat de Morse–Hedlund. On peut citer par exemple la conjecture de Nivat [51], partiellement résolue par Epifanio, Koskas et Mignosi [23] et Quas–Zamboni [56]. On peut aussi citer plusieurs conjectures de Lagarias et Pleasants [43] qui font un lien entre périodicité et complexité dans le cadre des ensembles de Delone en dimension d. Cela dit, l'énoncé même de ces généralisations se heurte à une difficulté : il n'existe pas, comme en dimension 1, de manière canonique de définir la « taille » d'un amas, et donc de définir la fonction de complexité.

Le choix qui est fait dans cette thèse est donc de ne regarder la fonction de complexité que de manière *asymptotique*. Le comportement asymptotique de la fonction de complexité reste inchangé (sous une relation d'équivalence raisonnable) par un changement de norme.

Un premier chapitre est consacré à un rappel des définitions (pavage, espace de pavage, topologie), et des propriétés usuelles des objets étudiés. On donnera une définition originale d'une fonction de complexité p_Ξ associée à une transversale Ξ. Le comportement asymptotique ne dépend alors pas de Ξ, ce qui permet de parler de l'asymptotique de *la* complexité, bien qu'il n'existe pas de fonction de complexité canonique en dimension $d \geq 1$. Les définitions précises des méthodes de constructions de pavages (par coupe et projection et par substitution) sont laissées pour les chapitres suivants.

Étude de la complexité pour les pavages coupe et projection (chapitres 2 et 3)

Le chapitre 2 de cette thèse est consacré au calcul de la fonction de complexité pour une classe de pavages obtenus par coupe et projection (avec domaine d'acceptance canonique).

Les pavages coupe et projection forment une classe importante de pavages. Ainsi, des pavages comme les pavages octogonaux, les pavages dodécagonaux ou les pavages de Penrose peuvent s'obtenir par coupe et projection. L'idée générale est de considérer un réseau périodique de dimension N, et d'en projeter une « tranche » sur un sous-espace E de dimension inférieure. Si E a une direction irrationnelle en un certain sens, alors l'ensemble de points obtenu sera apériodique, mais héritera néanmoins de propriétés de symétrie locale du réseau de dimension N. On dit que le pavage est *canonique* si la tranche du réseau est $[0,1]^N + E \subset \mathbb{R}^N$, c'est-à-dire si elle a pour base le cube unité de $\mathbb{R}^N$.

La projection d'une tranche canonique d'un réseau de dimension 2 sur une droite donne la classe d'exemples la plus fameuse de suites apériodiques : les suites sturmiennes. Leurs propriétés ont été extensivement étudiées, et on pourra se référer par exemple à [2] ou [64] pour un état de l'art. Notamment les liens entre propriétés combinatoires du pavage et propriétés arithmétiques de l'angle de la droite dans $\mathbb{R}^2$ sont bien connus. Leur complexité est aussi remarquable : une suite sturmienne a exactement $n+1$ sous-mots distincts de longueur n.

La méthode de coupe et projection canonique est une des généralisation possible de ces suites. Lorsque l'espace sur lequel on projette est une droite (le pavage peut alors être codé par un mot), les pavages obtenus peuvent être décrits comme des suites de billard cubique. Un certain nombre des propriétés de ces suites sont déjà connues, et notamment, leur fonction de complexité a été calculée d'abord par Arnoux, Mauduit, Shiokawa et Tamura [4] dans le cas $N = 3$, puis par Baryshnikov [7] dans le cas général. En dimension supérieure, le problème de la complexité des « plans discrets » a été abordée par Vuillon [70] et Berthé et Vuillon [11] dans le cas où $\dim(E) = N-1$. Leur méthode consiste à coder d'abord le pavage par un mot multi-dimensionnel, puis à calculer la complexité rectangulaire de ce mot.

Le point de vue développé dans cette thèse se démarque de ces approches en ceci qu'on ne vise pas à calculer la fonction de complexité de manière exacte, mais plutôt son comportement asymptotique. De ce fait, on obtient des résultats moins précis mais plus robustes. Par exemple, dans le cas particulier des plans discrets, on ne passe pas par le choix d'un codage.

Au chapitre 2, nous calculons l'asymptotique de la fonction de complexité pour des pavages coupe et projection généraux (projection d'une bande de $\mathbb{Z}^N$ sur E de dimension d), dont le domaine d'acceptance est canonique. Si p désigne la fonction de complexité, nous montrons l'encadrement suivant :

$$C_1 n^\alpha \leq p(n) \leq C_2 n^\alpha,$$

où α est un entier, et C_1, C_2 sont des constantes strictement positives. Ainsi, la complexité d'un pavage coupe et projection croît asymptotiquement comme un polynôme. L'exposant maximal est $d(N-d)$, et pour un choix générique de direction de E, cette borne est atteinte.

Les pavages coupe et projection « remarquables », que l'on peut trouver dans la littérature comme les pavages de Penrose, ou d'Ammann–Beenker (aussi

appelé pavage octogonal), ont une complexité bien moindre que ce maximum. On peut montrer que les pavages de Penrose et octogonal ont une complexité quadratique. C'est en réalité l'exposant minimal de la complexité : il est montré au chapitre 3 que l'exposant minimal de la complexité pour un pavage coupe et projection canonique de dimension d est précisément $d - r$, où r est le rang du groupe des périodes du pavage.

Dans le cas des pavages coupe et projection, il existe un lien qualitatif entre le comportement de la fonction de complexité et le rang des groupes de cohomologie. Un théorème de Forrest–Hunton–Kellendonk [27] donne une condition nécessaire et suffisante de nature purement géométrique pour que les groupes de cohomologie sur $\mathbb{Q}$ d'un pavage coupe et projection soient de dimension finie. Les méthodes utilisées pour montrer le résultat de complexité permettent de relier l'exposant de la complexité à des informations géométriques de même nature. Ainsi, nous montrons (théorème 3.1.1) que l'exposant de la complexité est minimal (c'est-à-dire égal à la dimension d du pavage dans le cas d'un pavage sans périodes) si et seulement si les groupes de cohomologie rationnelle sont finiment engendrés.

Cette équivalence est fausse en général : il existe un mot répétitif de dimension 1 dont la fonction de complexité croît plus vite que tout polynôme, mais dont les groupes de cohomologie sont finiment engendrés sur $\mathbb{Q}$. En revanche, toujours en dimension 1, l'implication réciproque est vraie. Il se pose alors la question d'une généralisation.

Étude métrique des espaces de pavages I : construction de Pearson–Bellissard pour les pavages de substitution (chapitres 4 et 5)

Une seconde partie de cette thèse porte sur des travaux réalisés en collaboration avec Jean Savinien lors d'un séjour au *Georgia Institute of Technology* (États-Unis d'Amérique), sur une invitation de Jean Bellissard. Ces travaux ont consisté à mener des calculs en rapport avec une construction réalisée précédemment par John Pearson et Jean Bellissard [38].

Pearson et Bellissard [54] ont construit un triplet spectral sur les ensembles de Cantor ultramétriques. L'idée de cette construction est d'introduire des objets de géométrie non commutative à l'étude des pavages dans le cadre du programme d'Alain Connes [15, 16]. La transversale d'un espace de pavages est en effet un ensemble de Cantor, et on peut le munir d'une ultramétrique usuelle qui est largement utilisée dans la littérature. Bien qu'il n'existe à ce jour pas de distance canonique sur les espaces de pavages (en particulier il ne peut pas exister de mesure invariante par les translations), la construction de Pearson–Bellissard appliquée à la distance usuelle fait néanmoins apparaître des informations intéressantes. De plus, cette distance entretient des liens avec la fonction de complexité (ce dernier point est abordé au chapitre 6). L'étude métrique des espaces de pavages a pour ambition d'apporter des outils nouveaux, qui soient plus fins que les outils purement topologique que sont la K-théorie ou la cohomologie.

Un triplet spectral sur un espace X est la donnée d'une sous-algèbre dense $\mathcal{A}$ de l'algèbre des fonctions continues (qui joue le rôle d'une algèbre de fonctions « régulières »), d'une représentation de cette algèbre sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, et d'un opérateur auto-adjoint non borné D sur $\mathcal{H}$ (l'opérateur de Dirac),

vérifiant certaines propriétés. Le commutateur de D avec une fonction $f \in \mathcal{A}$ est alors l'analogue de la dérivée de f.

La construction de Pearson–Bellissard est très combinatoire : ils réalisent en effet l'ensemble de Cantor comme le bord d'un arbre enraciné à poids. L'arbre encode alors la topologie, et les poids donnent l'ultramétrique. De plus, tout ensemble de Cantor ultramétrique a une telle réalisation (par la correspondance de Michon [47]).

Dans le cas auto-similaire — le cas traité dans cette thèse et dans [38] —, l'arbre est remplacé par un diagramme de Bratteli à poids. Les définitions et propriétés générales du triplet spectral sont préservées et peuvent être directement adaptées de l'article de Pearson–Bellissard. Ainsi les résultats suivants sont encore valides : on peut définir une fonction ζ, dont l'abscisse de convergence est (quand elle existe) la dimension de boîte de l'espace de Cantor ; sous certaines conditions (qui sont automatiques dans le cas étudié ici), l'ultramétrique permet de définir une mesure de probabilités ; on peut définir une famille d'opérateurs Δ_s qui sont interprétés comme des opérateurs de Laplace.

Le véritable intérêt de la structure auto-similaire est de fournir une machinerie qui permet de faire des calculs simplement. Ainsi, on peut montrer que les valeurs propres de l'opérateur Δ_s sont données par l'itération d'un nombre fini de fonctions affines de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sur un ensemble fini de valeurs propres « initiales ».

Enfin, il est connu [39] que la transversale d'un espace de pavages de substitution est homéomorphe à l'ensemble des chemins infinis sur un diagramme de Bratteli. Il est montré au chapitre 4 que cet homéomorphisme est bi-lipschitzien pour un bon choix de poids sur le diagramme. Ainsi, la construction de Pearson–Bellissard sur les diagrammes de Bratteli auto-similaires peut donner des informations sur les pavages de substitution.

Étude métrique des espaces de pavages II : lien entre distance et fonction de complexité (chapitre 6)

Si la construction de Pearson–Bellissard permet d'obtenir des informations de nature géométrique sur un ensemble de Cantor muni d'une ultra-métrique, il n'existe *a priori* pas de choix de métrique naturel.

Cela dit, le choix de la métrique usuelle (deux pavages sont ε-proches si à une ε-translation, ils coïncident sur une boule de rayon $1/\varepsilon$) peut se justifier par son lien avec la fonction de complexité.

On peut montrer que la fonction de complexité d'un pavage (qui compte le nombre d'amas de taille n à translation près) a le même comportement asymptotique que le nombre d'ouverts nécessaires pour recouvrir une transversale canonique Ξ. Plus précisément, à toute transversale Ξ on peut associer une fonction de complexité p_Ξ dont le comportement asymptotique ne dépend pas de Ξ, et telle que $p_\Xi(n)$ est exactement le nombre minimal d'ouverts de diamètre au plus $1/n$ nécessaires pour recouvrir Ξ.

Ainsi, si deux espaces de pavages sont homéomorphes par un homéomorphisme bi-lipschitzien qui préserve une transversale, alors leurs fonctions de complexité ont le même comportement asymptotique. Nous appliquons ce constat à un théorème de Sadun et Williams [61] : tout espace de pavages (vérifiant certaines propriétés standard) est homéomorphe à la suspension d'un sous-décalage

sur $\mathbb{Z}^d$. On peut reprendre la preuve donnée dans l'article original pour montrer que cet homéomorphisme peut être choisi bi-lipschitzien, et préserve une transversale. Ainsi, pour tout pavage de $\mathbb{R}^d$, il existe un mot sur $\mathbb{Z}^d$ tel que les fonctions de complexité associées ont le même comportement asymptotique.

Ce résultat permet de faire le lien entre deux conjectures reliant la fonction de complexité et l'existence de périodes dans un pavage : la conjecture de Nivat [51], issue de la théorie des mots, et une conjecture de Lagarias–Pleasants [43], énoncée pour des ensembles de Delone, donc *a priori* plus générale. Il se trouve qu'une réponse partielle à la conjecture de Nivat, due à Epifanio–Koskas–Mignosi [23] puis précisée par Quas–Zamboni [56] permet de répondre à une version affaiblie d'une conjecture de Lagarias et Pleasants dans le cas de pavages bi-dimensionnels.

Nous utilisons également cette correspondance entre complexité et recouvrements pour lier l'abscisse de convergence de la fonction ζ obtenue au chapitre 5 à la complexité. Il est prouvé [54] que l'abscisse de convergence de la fonction ζ associée à un espace de Cantor ultramétrique est égale à la dimension de boîte de l'espace. La dimension de boîte est définie à partir de recouvrements, elle peut donc s'exprimer en fonction de la complexité. Ainsi, les résultats obtenus aux chapitres précédents permettent de montrer que si p est la fonction de complexité d'un pavage de substitution de dimension d, alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$n^{d-\varepsilon} \leq p(n) \leq n^{d+\varepsilon}$$

pour tout n assez grand. Ce résultat n'est pas optimal puisqu'on s'attend à ce que cet encadrement reste vrai pour $\varepsilon = 0$, à des constantes multiplicatives près. La majoration $p(n) \leq Cn^d$ est en fait connue, et prouvée par Hansen et Robinson [59]. La minoration fait partie du folklore et résulte d'encadrements obtenus par Solomyak [67, lemme 2.4] ; elle peut aussi se déduire de la linéaire répétitivité des pavages de substitution et d'un résultat conjecturé par Lagarias–Pleasants [43] et prouvé par Lenz [45] reliant la répétitivité à la complexité. Nous prouvons l'encadrement

$$C_1 n^d \leq p(n) \leq C_2 n^d$$

directement en utilisant l'invariance de l'asymptotique de la complexité par transformation bi-lipschitzienne, et en utilisant la description des espaces de pavages de substitution (à homéomorphisme bi-lipschitzien près) par des diagrammes de Bratteli, dont la construction est faite au chapitre 4.

Perspectives

Les résultats présentés ici répondent à certaines questions, mais en soulèvent de nouvelles. En ce qui concerne la complexité, il est naturel de vouloir approfondir les liens entre topologie et complexité. On sait par exemple (par un résultat de Baake, Lenz et Richard [5]) que l'entropie topologique du système dynamique (qui est comme son nom l'indique, un invariant topologique), peut-être calculée grâce à la complexité. Cette entropie est non nulle seulement lorsque la complexité croît au moins exponentiellement. Cet invariant n'est donc pas pertinent dans les cas que nous avons étudiés. La question est donc : dans quelle mesure une fonction de complexité polynomiale apporte-t-elle des informations sur la topologie de l'espace de pavage ? Par exemple, l'exposant de la complexité est-il un invariant topologique, au moins dans certaines sous-classes de pavages ?

Avec la même idée de relier complexité et topologie, on peut poser une question plus précise, liée à la cohomologie. On sait que pour les pavages coupe et projection, il est équivalent de dire que le pavage est peu complexe, et que son espace a des groupes de cohomologie sur $\mathbb{Q}$ de dimension finie. On a donc un lien entre complexité combinatoire et complexité « cohomologique ». En dimension 1, seul un sens de l'implication reste vrai : un mot simple a une suspension cohomologiquement simple. Un résultat de Coronel [17] semble montrer que cette implication reste vraie pour les pavages linéairement répétitifs. Or, les pavages linéairement répétitifs sont un cas particulier de pavages de complexité n^d, où d est la dimension [45]. La question qui se pose donc naturellement est de savoir si l'implication reste vraie pour tout pavage apériodique.

Les questions laissées en suspens à la fin du chapitre 6 sont nombreuses, car les réponses apportées sont partielles. Les conjectures de Lagarias–Pleasants et de Nivat restent largement ouvertes. Cela dit, on peut espérer que les méthodes introduites pourraient permettre de les attaquer sous une nouvelle perspective. Notamment, on sait que la conjecture de Nivat ne peut pas se généraliser en tant que telle. Cela dit, le point de vue « asymptotique » est peut-être le bon pour faire le lien entre la complexité et le rang du groupe des périodes.

Enfin, de nombreux travaux restent à faire relativement à la construction du triplet spectral sur la transversale d'espaces de pavages. Les outils développés permettent de mener des calculs, et donc de traiter des exemples qui pourront éventuellement guider les travaux futurs. Il faut cela dit étudier plusieurs questions : à quel point le laplacien sur un diagramme de Bratteli est-il changé par un homéomorphisme bi-lipschitzien, et donc dans quelle mesure le laplacien que nous avons calculé est-il pertinent pour l'étude des pavages ? On a une famille de laplaciens (Δ_s) indexée par un paramètre. Y a-t-il une valeur privilégiée de ce paramètre ? Un laplacien permet de définir une marche aléatoire. Quelles sont ses propriétés dans notre cas, et peut-on la lier à l'étude des marches aléatoires sur les arbres ?

Chapitre 1

Généralités sur les pavages apériodiques

Une manière générale (et peu précise) de définir un pavage, est de dire qu'il s'agit d'un recouvrement d'un certain espace par des sous-ensembles, ou tuiles. Dans cette thèse, l'espace à paver sera toujours l'espace vectoriel réel standard $\mathbb{R}^d$. Cet espace agit sur lui même par translation, ce qui permet de définir la notion de *période*, ou de groupe de périodes. Une période d'un pavage P est un élément $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $P + x = P$. Lorsque l'ensemble des périodes de P est un réseau cocompact de $\mathbb{R}^d$, le pavage est dit périodique. Si un pavage P n'a aucune période, il est dit complètement apériodique. C'est le cas qui nous intéresse ici, même si nous aurons l'occasion de discuter de pavages pour lesquels le groupe des périodes n'est pas trivial.

Il existe plusieurs méthodes pour construire des pavages apériodiques. Dans cette thèse seront considérées la méthode par inflation et substitution, et la méthode par coupe et projection. Les définitions sont données respectivement aux chapitres 2 et 4.

Dans ce chapitre, on donne quelques définitions de base, et on introduit les méthodes qui sont utilisées pour l'étude des pavages apériodiques. Notamment, on fait le lien entre les propriétés combinatoires d'un pavage donné, et les propriétés dynamiques d'un système qui lui est naturellement associé. Une notion importante est la notion de complexité, qui est l'un des principaux objets d'étude de cette thèse.

Ce chapitre se conclut par une section dédiée à un exemple important et qui sera cité à plusieurs reprises : le pavage de Fibonacci.

Il convient de noter que la structure de pavage n'est pas indispensable à l'étude des objets apériodiques. Si la définition par tuiles est utile, notamment pour définir les pavages de substitution, en revanche, la méthode de coupe et projection définit naturellement un ensemble de points plutôt qu'un pavage. Ainsi, on pourra être amenés à considérer aussi bien des pavages que des ensembles de points de $\mathbb{R}^d$ vérifiant certaines propriétés : les ensembles de Delone. On utilise de manière générique le terme pavage, étant entendu que selon le contexte, il pourra désigner un ensemble de Delone.

1.1 Définitions

Dans cette section, on introduit les notations générales qui seront utilisées tout au long de cette thèse. Notamment, on définit en général ce qu'est un pavage, quelles propriétés on peut en attendre. Les détails de la construction des pavages de coupe et projection et de substitution seront traités dans des chapitres ultérieurs (respectivement aux chapitres 2 et 4). Nous définissons également la fonction de complexité associée à un pavage — une notion dont l'étude constitue le fil rouge de cette thèse. La définition choisie pour la fonction de complexité est originale en cela qu'elle est associée à une transversale ; elle est donc reliée à la topologie de l'espace. La définition est cependant équivalente (à équivalence près) à toute définition raisonnable que l'on pourrait donner de la complexité.

1.1.1 Approche combinatoire

On considère $\mathbb{R}^d$ l'espace usuel de dimension d. Une tuile est par définition un ensemble compact régulier (qui est l'adhérence de son intérieur) de $\mathbb{R}^d$. Bien qu'il existe des exemples avec des tuiles à bords fractals, dans la plupart des cas, les tuiles sont des polytopes. Il existe une action naturelle de $\mathbb{R}^d$ sur les tuiles par translation.

On appelle *prototuile* une classe d'équivalence de tuiles par translation. Pour construire un pavage, on se donner un ensemble de prototuiles $\mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ est parfois appelé *l'alphabet*, par analogie avec le cas symbolique).

Définition 1.1.1. On appelle *pavage partiel* un ensemble fini ou infini de tuiles dont les intérieurs sont disjoints, on appelle *amas* un pavage partiel fini. Le *support* $\mathrm{Supp}(a)$ d'un amas a (ou d'un pavage partiel) est défini comme l'union des tuiles qui le composent. On appelle *pavage* un pavage partiel dont le support est $\mathbb{R}^d$.

Ainsi, on dit qu'un pavage partiel P recouvre un ensemble X si X est inclus dans le support de P.

Notation 1.1.2. Si P est un pavage, on notera $P \cap B(x;r)$ l'amas constitué de l'ensemble des tuiles de P qui intersectent la boule de centre $x \in \mathbb{R}^d$ et de rayon $r > 0$.

Comme il a été dit, il peut être plus naturel de considérer comme objet d'étude un ensemble de points plutôt qu'un pavage. Cela nous amène à donner la définition suivante.

Définition 1.1.3. On appelle *ensemble de Delone* un sous-ensemble $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^d$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathcal{D}$ est *uniformément discret* : il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in \mathcal{D}$, $\mathcal{D} \cap B(x;r) = \{x\}$;

(ii) $\mathcal{D}$ est *relativement dense* : il existe $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{D} \cap B(x;R) \neq \emptyset$.

Un tel ensemble est appelé un (r,R)-ensemble de Delone.

Il existe des méthodes standard pour associer un ensemble de Delone à un pavage, et réciproquement : notamment à un ensemble de Delone, on peut associer

l'ensemble des *cellules de Voronoï* associées, ou une triangulation (la *triangulation de Delone*, par exemple, qui est duale du pavage de Voronoï).

Les notions que nous définirons seront applicable aussi bien aux pavages qu'aux ensembles de Delone.

Étant donné un pavage P construit à partir des prototuiles données par un ensemble $\mathcal{A}$, on peut définir différents ensembles qui sont pertinents pour son étude.

Définition 1.1.4. Soit P un pavage. On définit $\Delta(P)$ comme l'ensemble de ses périodes :

$$\Delta(P) = \{x \in \mathbb{R}^d \,;\, P + x = P\}.$$

Il s'agit évidemment d'un sous-groupe de $\mathbb{R}^d$. Un pavage dont le groupe de période est un réseau cocompact est appelé *périodique*. Sinon, il est dit *apériodique*, et si de plus son groupe de périodes est réduit à $\{0\}$, il est appelé *complètement apériodique*.

Définition 1.1.5. Soit P un pavage. On définit le *langage* associé à P de la manière suivante :

- pour tout $r > 0$, on définit $\mathcal{L}_r(P)$ comme l'ensemble des amas de taille r de P à translation près, c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence par translation d'amas de la forme

$$P \cap B(x; r), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

- on définit $\mathcal{L}(P)$, le langage associé à P, comme le plus petit ensemble d'amas contenant tous les $\mathcal{L}_r(P)$, $r > 0$, et tel que si $a \in \mathcal{L}(P)$ et $b \subseteq a$, alors $b \in \mathcal{L}(P)$.

Le langage d'un ensemble de Delone est défini de manière similaire comme l'ensemble des classes d'équivalence par translation :

$$\mathcal{L}_r(\mathcal{D}) = \{(\mathcal{D} - x) \cap B(0; r) \,;\, x \in \mathbb{R}^d\}/\mathbb{R}^d.$$

Le langage $\mathcal{L}$ est donc l'ensemble de tous les amas de P, à translation près. Par abus de notation, on considérera parfois les éléments du langage comme des amas plutôt que comme des classes d'équivalence. Ainsi, on écrira $a \in \mathcal{L}(P)$ pour $\exists x \in \mathbb{R}^d,\ (a - x) \subset P$.

Pour un pavage périodique, il suffit de connaître $\mathcal{L}_r(P)$ avec r assez grand pour déterminer P de manière unique : en effet, si on connaît un amas dont le support recouvre un domaine fondamental du réseau des périodes de P, alors on en déduit le pavage sur $\mathbb{R}^d$ tout entier. En revanche, pour un pavage apériodique, un même langage peut permettre de définir plusieurs pavages, comme nous allons le voir. Ces considérations permettent de donner la proposition suivante.

Proposition 1.1.6. *Les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) Le pavage P est périodique.

(ii) La quantité $\mathrm{Card}(\mathcal{L}_r(P))$ *est bornée indépendemment r.*

Nous nous intéressons à des pavages apériodiques, par conséquent la quantité $\mathrm{Card}(\mathcal{L}_r(P))$ ne sera pas bornée dans les cas que nous considérerons. Cela dit, nous nous restreindrons à des cas pour lesquels cette quantité est bien définie et finie : le cas des pavages de complexité locale finie.

Définition 1.1.7. Soit P un pavage de $\mathbb{R}^d$. On dit que P est de *complexité locale finie*, ou CLF (en anglais : *finite local complexity*, ou *FLC*) si pour tout $r > 0$, $\mathcal{L}_r(P)$ est un ensemble fini.

Comme on l'a dit, à un même langage peuvent correspondre plusieurs pavages. Et si par exemple, $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(P')$, alors P et P' sont indiscernables lorsqu'on ne les regarde que localement, puisque pour tout r, ils ont les mêmes amas de taille r. On dit qu'ils sont *localement isomorphes*. Ainsi, il est naturel d'associer à un pavage apériodique P l'ensemble de tous les pavages qui partagent les mêmes propriétés locales.

Définition 1.1.8. On appelle *espace de pavage associé au langage* $\mathcal{L}$, et on note $\Omega_{\mathcal{L}}$ l'ensemble suivant :

$$\Omega_{\mathcal{L}} := \big\{P \text{ pavage } ; \forall a \subset P \text{ amas, } a \in \mathcal{L}\big\}.$$

Si P est un pavage donné, on note $\Omega_P := \Omega_{\mathcal{L}(P)}$.

Ainsi, l'espace $\Omega_{\mathcal{L}}$ est l'espace de tous les pavages dont les amas sont dans $\mathcal{L}$. Par conséquent, Ω_P est l'ensemble des P' tels que tous les amas de P' sont aussi des amas de P. Autrement dit, si $P' \in \Omega_P$, alors $\mathcal{L}(P') \subset \mathcal{L}(P)$. Remarquons aussi que $\Omega_{\mathcal{L}}$ est stable par l'action de $\mathbb{R}^d$.

Exemple 1.1.9. Soit P le pavage de $\mathbb{R}$ dont les tuiles sont :

$$P = \{[n, n+1]\,;\, n \in \mathbb{Z}, \text{ et } n \neq 0, 1\} \cup \{[0, 2]\}.$$

Alors en particulier, $\mathcal{L}(P)$ contient tous les amas composés de n segments $[0, 1]$ consécutifs, pour tout n. Par conséquent, le pavage périodique par des segments de taille 1 est dans Ω_P.

On remarque que le pavage périodique obtenu n'est pas localement isomorphe à P : son langage est strictement inclus dans le langage de P.

L'étude d'un pavage apériodique passe en général par l'étude de son espace de pavage. En effet, étant donné un langage et un ensemble de pavages $\Omega_{\mathcal{L}}$, tel que tout $P \in \Omega_{\mathcal{L}}$ vérifie $\mathcal{L}(P) = \mathcal{L}$, il n'existe *a priori* pas de raison de privilégier un pavage par rapport à un autre. Par conséquent il est justifié d'étudier l'espace de pavages plutôt qu'un pavage particulier.

La condition ci-dessus (tout $P \in \Omega_{\mathcal{L}}$ a $\mathcal{L}$ pour langage) se traduit de manière combinatoire sur P.

Définition 1.1.10. Un pavage P est dit *répétitif* si pour tout $a \in \mathcal{L}(P)$, il existe un $R > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'amas a apparaît dans $P \cap B(x; R)$.

Il s'agit en quelque sorte d'une condition de *minimalité* sur le langage. Nous allons voir que cette condition se traduit effectivement comme une condition de minimalité d'un certain système dynamique.

1.1.2 Approche topologique et dynamique

On a défini ci-dessus $\Omega_{\mathcal{L}}$ et Ω_P l'espace de pavages associé respectivement à un langage et à un pavage. On les a définis en tant qu'ensembles, stables par translation par un élément de $\mathbb{R}^d$. Il est aussi possible de les munir d'une topologie, et de les étudier du point de vue topologique et dynamique.

Définissons une distance d sur un espace de pavages Ω. Deux pavages P et P' ont une distance $d(P, P')$ inférieure à ε dès que $P - x$ et $P' - y$ coïncident sur une boule de rayon ε^{-1}, avec x, y des vecteurs de $\mathbb{R}^d$ de norme inférieure à ε. De plus, on peut demander à ce que d soit majorée par 1. Formellement :

$$d = \inf \Big(\Big\{ \varepsilon > 0 \,;\, \exists x, y \in B(0;\varepsilon), \\ B(0;\varepsilon^{-1}) \subset \operatorname{Supp}\big((P - x) \cap (P' - y)\big) \Big\} \cup \{1/\sqrt{2}\} \Big) \quad (1.1)$$

Remarque 1.1.11. On ne peut pas remplacer $1/\sqrt{2}$ par 1 dans la définition ci-dessus, car l'inégalité triangulaire ne serait alors plus vérifiée. On peut se rapporter à [44] pour les détails des calculs. Je suis reconnaissant à Franz Gähler qui m'a fait cette remarque.

La topologie définie par cette distance est naturelle. Muni de cette topologie, Ω est compact (sous hypothèse de complexité locale finie), et l'action de $\mathbb{R}^d$ est continue. En revanche, ce choix particulier de distance n'est pas canonique. Cela dit, nous verrons par la suite (au chapitre 6) comment elle peut être reliée à la complexité.

On peut construire une transversale pour cette action ; nous définissons de manière générale la notion de *transversale canonique*.

Définition 1.1.12. Soit Ω un espace de pavages répétitif, apériodique, et de complexité locale finie. On se donne un ensemble de règles locales qui permettent d'associer à tout pavage $P \in \Omega$ un ensemble discret $\mathcal{D}(P)$ qui lui est *localement dérivé*. Alors l'ensemble suivant :

$$\Xi := \{P \in \Omega \,;\, 0 \in \mathcal{D}(P)\}$$

est appelé *une transversale canonique* de Ω.

Par *localement dérivé*, on veut dire que pour tout $r > 0$, il existe un $R > 0$ tel que pour tout P et tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{D}(P) \cap B(x; r)$ ne dépend que de $P \cap B(x; R)$. On montre facilement, par répétitivité, que $\mathcal{D}(P)$ est un ensemble de Delone.

Un moyen usuel de le faire est d'avoir une règle qui choisit un point (ou pointeur) dans chaque prototuile. C'est notamment ainsi que Kellendonk [39] introduit l'ensemble Ω^{punc} des pavages pointés (que nous appelons Ξ ici). On remarque que la transversale n'est vraiment canonique que dans le cas où les prototuiles sont déjà pointées.

Il s'agit notamment d'une transversale abstraite pour l'action de $\mathbb{R}^d$ au sens de Muhly, Renault et Williams [50]. Du fait que $\mathcal{D}(P)$ est un ensemble de Delone, on montre qu'une transversale canonique Ξ vérifie :

- Ξ intersecte toutes les orbites de Ω, de manière relativement dense ;
- Ξ est isolé : il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $(\Xi + x) \cap \Xi$ est vide pour tout x de norme plus petite que ε.

La distance induit une topologie sur Ξ. Nous avons décrit la distance, mais nous aurons besoin de définir une base de voisinages plus adaptés. La démonstration suivante est bien connue.

Proposition 1.1.13. *Soit Ξ une transversale canonique d'un espace de pavages apériodiques, répétitifs et FLC. Pour tout amas a, on définit U_a comme l'en-*

semble des pavages $P \in \Omega$ tels que $a \subseteq P$ au sens littéral[1]*. Alors*

$$\left\{U_{a+x}\,;\, a \in \mathcal{L}(P),\ x \in \mathbb{R}^d\right\}$$

est une base de voisinages pour la topologie induite par la distance d sur Ξ.

Proposition 1.1.14. *Sous les hypothèses de complexité locale finie, d'apériodicité et de répétitivité, Ξ est un ensemble de Cantor.*

Les propriétés combinatoires du pavage peuvent s'interpréter en fonction de la topologie.

Proposition 1.1.15. *Soit P un pavage de $\mathbb{R}^d$. Alors $(\Omega_P, \mathbb{R}^d)$ est minimal si et seulement si P est répétitif.*

Les pavages considérés dans cette thèse seront tous des pavages répétitifs, et de complexité locale finie. Sauf précision contraire, les pavages seront apériodiques. On ne considérera des pavages périodiques que pour répondre à des problématiques du type « À quelles conditions un pavage — *a priori* apériodique est-il périodique ? »

1.1.3 Fonction de complexité

Nous définissons la fonction de complexité associée à un pavage. Il s'agit d'une fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, qui à un entier n associe le nombre d'amas de P de taille n. Nous nous heurtons au problème de définir ce qu'est un amas de taille n. Cette définition dépend certainement de la norme. Cela dit, toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, ce qui nous permet d'introduire une notion d'équivalence entre fonctions, que nous utiliserons pour parler de la complexité à équivalence près.

Définition 1.1.16. Deux fonction $p, p' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sont dites équivalentes s'il existe quatre constantes strictement positives k_1, k_2, C_1, C_2, telles que pour tout n assez grand, on ait :

$$C_1 p(k_1 n) \leq p'(n) \leq C_2 p(k_2 n).$$

Remarque 1.1.17. Il s'agit d'une relation d'équivalence. De plus, lorsque l'une de ces fonctions est majorée par un polynôme (cela implique que les deux le sont), la relation d'équivalence s'exprime comme suit : il existe C_1, C_2 strictement positifs tels que pour tout n assez grand,

$$C_1 p(n) \leq p'(n) \leq C_2 p(n).$$

Définition 1.1.18. Soit P un pavage. On définit une fonction de complexité associée à P comme une fonction $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad p(n) = \mathrm{Card}(\mathcal{L}_n(P)),$$

où la norme choisie dans la définition de $\mathcal{L}_n$ est par exemple la norme euclidienne.

[1] On veut dire par là non seulement que a apparaît dans P, mais qu'il apparaît dans cette position (a n'est pas considérée comme une classe d'équivalence par translation).

Il est aisé de voir que deux choix de normes équivalentes donnent des fonctions de complexité équivalentes. De plus, si un pavage P est répétitif, pour tout $P' \in \Omega_P$, la fonction de complexité associée à P et celle associée à P' sont identiques. Cela permet, dans ce cadre, de parler de la fonction de complexité associée à un espace de pavage minimal.

On peut, de manière générale, définir une fonction de complexité *pointée* associée à une transversale.

Définition 1.1.19. Soit Ω un espace de pavages minimal. Soit Ξ une transversale canonique au sens de la définition 1.1.12. Alors la fonction de complexité p_Ξ associée à la transversale Ξ est définie par :

$$p_\Xi(n) := \mathrm{Card}\Big(\big\{P \cap B(0;n)\,;\, P \in \Xi\big\}\Big).$$

Ainsi, si on note $\mathcal{D} : P \mapsto \mathcal{D}(P)$ la règle locale définissant la transversale Ξ, la fonction p_Ξ compte le nombre d'amas qui sont *pointés*, c'est-à-dire qui ont en leur centre un point de $\mathcal{D}(P)$.

Proposition 1.1.20. *Soit Ω un espace de pavage, et Ξ une transversale canonique au sens ci-dessus. On appelle p la fonction de complexité introduite à la définition 1.1.18, et p_Ξ la fonction de complexité pointée associée à Ξ, comme définie ci-avant. Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour tout n assez grand :*

$$C_1 p_\Xi(n) \leq p(n) \leq C_2 p_\Xi(n).$$

Une conséquence de cette définition est que l'asymptotique d'une fonction de complexité p_Ξ ne dépend pas du choix de la transversale canonique (à une constante près). Si Ξ et Ξ' sont deux transversales canoniques, alors p_Ξ et $p_{\Xi'}$ sont équivalentes au sens de la définition 1.1.16. Il est donc légitime de parler de l'asymptotique de la complexité.

Démonstration. Si $P \in \Omega$, on appelle $\mathcal{D}(P)$ l'ensemble des pointeurs associés à Ξ. On appelle X_n l'ensemble des (classes par translations des) amas tel que $p(n) = \mathrm{Card}(X_n)$, et Y_n l'ensemble des amas pointés tel que $p_\Xi(n) = \mathrm{Card}(Y_n)$. Alors tout $a \in Y_n$ a sa classe par translation incluse dans X_n. On note

$$C := \mathrm{Card}\left(\bigcup_{P \in \Xi} \{\mathcal{D}(P) \cap B(0;r)\}\right),$$

où r est le rayon maximal des tuiles de P. On affirme que C est fini. En effet, $\mathcal{D}(P)$ est construit à partir d'une règle locale, donc par complexité locale finie de P, il n'y a qu'un certain nombre de configurations possibles de $\mathcal{D}(P)$ autour de l'origine.

Maintenant, on remarque que si $x - y \geq r$, alors les amas pointés de quelque taille que ce soit associés à $P - x$ et $P - y$ correspondent à des amas différents. En conséquence, un même amas correspond au plus à C amas pointés, et on a :

$$p_\Xi(n) \leq C p(n).$$

Réciproquement, soit R la constante telle que pour tout P, il y a un point de $\mathcal{D}(P)$ dans toute boule de rayon R (cette quantité existe, par répétitivité de P). Soit R' le rayon de l'amas dans P que l'on doit connaître pour en déduire

(par locale dérivabilité), la configuration de $\mathcal{D}(P)$ dans une boule de rayon R. Alors, tout amas (non pointé) de rayon $n > R'$ contient au moins un pointeur. Par conséquent, tout amas (non pointé) apparaît comme sous-amas d'un amas pointé de taille au plus $n + 2R'$ (voir figure 1.1). Par conséquent :

$$p(n) \leq p_{\Xi}(n + 2R').$$

□

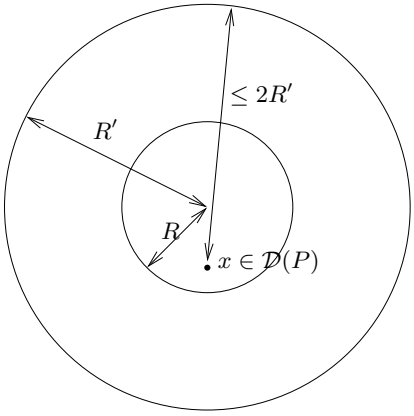


FIG. 1.1: La fonction p_{Ξ} n'oublie pas les amas comptés par p.

1.2 Dynamique symbolique

L'étude des pavages apériodiques a son équivalent discret : la dynamique symbolique, ou l'étude des mots. L'étude des mots est en réalité plus ancienne que l'étude « moderne » (dynamique) des pavages apériodiques, puisqu'elle a été introduite par Morse et Hedlund [48, 49] dans la première moitié du XXe siècle, comme un développement de la théorie des systèmes dynamiques discrets.

La dynamique symbolique a surtout prospéré en dimension un (étude des mots infinis), mais des travaux ont été réalisés plus récemment en dimension supérieure. Dans cette section, nous donnons essentiellement des notations ; les définitions et propriétés relatives aux mots sont essentiellement analogues à celles relatives aux pavages.

Nous introduisons cependant des objets propres à la dimension 1 : les graphes de Rauzy. Ces graphes ont une combinatoire très liée à la complexité. Nous les considérerons cependant du point de vue topologique, ce qui permettra de faire le lien entre complexité et invariants topologiques (la cohomologie) en dimension 1.

1.2.1 Vocabulaire de la dynamique symbolique

Les objets de la dynamique symbolique sont les suites indexées par $\mathbb{Z}^d$ et à valeur dans un alphabet fini $\mathcal{A}$, dont les éléments sont appelés des lettres. On appelle de tels éléments des *mots*, par extension de la terminologie utilisée en

dimension 1. On a sur l'ensemble de ces suites une action de $\mathbb{Z}^d$ par décalage (ou *shift* en anglais) : si w est un mot de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d} \simeq \mathcal{F}(\mathbb{Z}^d, \mathcal{A})$, et $n \in \mathbb{Z}^d$, alors

$$(w+n)_k = w_{k-n}.$$

Remarquons que $\mathcal{A}$ est naturellement équipé de la topologie discrète, et par conséquent, l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ muni de la topologie produit est naturellement un ensemble de Cantor. L'action par décalage est alors continue.

On définit très similairement le langage d'une suite w comme l'ensemble de ses sous-suites à support fini (ces sous-suites sont appelées *facteurs* et sont l'analogue des amas), modulo l'action de $\mathbb{Z}^d$. On définit le *sous-décalage* (on emploie souvent l'anglicisme *sous-shift*) de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$ associé à un langage $\mathcal{L}$ comme étant l'ensemble des suites dont tous les sous-facteurs sont dans $\mathcal{L}$. C'est un sous-ensemble fermé et stable par décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$.

La complexité locale finie est automatique ; les notions de répétitivité et d'apériodicité sont définie de la même manière que pour les pavages. La répétitivité d'une suite est équivalente à la minimalité du sous-décalage qui lui est associé. Si une suite w est répétitive et apériodique, alors le sous-décalage associé est un ensemble de Cantor.

Nous voyons donc que les pavages ont des analogues discrets. Un sous-décalage et une transversale d'un espace de pavage satisfont des propriétés analogues.

Exemple 1.2.1. L'analogue symbolique du pavage de dimension 1 défini à l'exemple 1.1.9 est le mot suivant sur $\mathcal{A} = \{a, b\}$:

$$w := \ldots aaaabaaaa \ldots$$

et le sous-décalage engendré par w contient une orbite périodique : le mot formé d'une infinité de a.

Il est en fait possible d'associer à un sous-décalage un espace de pavages dont il est la transversale. Pour cela, il faut recourir à la construction d'une *suspension*

Définition 1.2.2. Soit Ξ un sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}^d}$. On définit Ω comme l'espace quotient $\Omega = \Xi \times \mathbb{R}^d / \sim$, où $\sim$ est la relation d'équivalence suivante :

$$(w, x) \sim (w+n, x-n),$$

où $n \in \mathbb{Z}^d$.

On peut voir un élément de Ω comme un pavage de $\mathbb{R}^d$ par des cubes unité de différentes couleurs choisies dans $\mathcal{A}$. Le sous-décalage Ξ s'identifie alors naturellement à une transversale canonique de Ω.

Il existe dans une certaine mesure une réciproque, non triviale : tout espace de pavage est homéomorphe à un pavage par cubes — c'est-à-dire à la suspension d'un sous-décalage. Nous nous pencherons plus particulièrement sur ce théorème de Sadun et Williams, et ses conséquences, au chapitre 6 (théorème 6.3.1).

1.2.2 Distance et complexité

Il existe plusieurs notions de complexité qui ont été utilisées en dynamique symbolique. En dimension 1, la fonction de complexité est tout à fait canonique : $p(n)$ est le nombre de facteurs de n lettres. En dimension supérieure, plusieurs auteurs utilisent la *complexité rectangulaire* : par exemple en dimension 2, $p(n, m)$ désigne le nombre de facteurs dont le support est un rectangle de dimensions $n \times m$. La complexité carrée $p(n)$, comme son nom l'indique compte le nombre de facteurs de dimension $n \times n$.

Nous mentionnerons la complexité rectangulaire au chapitre 6. Cela dit, nous utiliserons une fonction d'une seule variable (la taille) ; la complexité carrée est un exemple du type de fonction que nous utiliserons.

Quel que soit la fonction de complexité choisie, nous considérerons une fonction de distance compatible. Par exemple pour la fonction de complexité carrée (en dimension deux), une fonction de distance pourrait être :

$$d(w, w') \leq \frac{1}{2n+1}$$

si w et w' coïncident pour les indices de $[\![-n, n]\!]^2$.

Nous ferons le lien entre complexité et distance au chapitre 6. Cela dit, ces choix ne sont pas rigides. On peut choisir sans dommages une distance lipschitz-équivalente à celle définie ci-dessus, et une fonction de complexité équivalente au sens de la définition 1.1.16 à la complexité carrée.

1.2.3 Dimension un : graphes de Rauzy

C'est en dimension un que l'étude de la dynamique symbolique est la plus approfondie. Nous introduisons maintenant un objet dont nous aurons besoin lorsque nous étudierons la complexité : la suite des graphes de Rauzy associés à un mot infini.

Soit w un mot bi-infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. On note :

$$w = \ldots w_{-2} w_{-1} . w_0 w_1 w_2 \ldots$$

Définissons les graphes de Rauzy associés à w.

Définition 1.2.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $F_n(w)$ l'ensemble des sous-mots (ou facteurs) de w de taille n. Le n-ème graphe de Rauzy R_n associé à w est un graphe orienté défini par :

- un ensemble de sommets $V_n := F_n(w)$;
- un ensemble d'arêtes orientées E_n, tel qu'il y a une arête de $a_1 \ldots a_n \in V_n$ vers $b_1 \ldots b_n \in V_n$ si $a_i = b_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et si le mot $a_1 \ldots a_n b_n$ est un facteur de w.

On note ${}_a f_b$ l'arête orientée de af vers fb, où $a, b \in \mathcal{A}$ et $f \in F_{n-1}$, de sorte que $af, fb \in V_n$. Une telle arête existe, par définition, si et seulement si $afb \in F_{n+1}$.

Les graphes de Rauzy sont tout à fait adaptés pour étudier les propriétés combinatoires des mots, et en particulier la complexité, puisque le nombre d'arêtes de R_n est égal au nombre de facteurs de longueur n, et le nombre d'arêtes de R_n est égal au nombre de facteurs de longueur $n + 1$.

Tels qu'on les a définis, ces graphes sont des objets combinatoires. Cela dit, il est possible (et nous le ferons), de les considérer comme des objets topologiques : chaque arête est une copie du segment $[0, 1]$ dont les extrémités sont recollées sur des points correspondant aux sommets.

Les graphes de Rauzy ont été introduits comme des objets combinatoires, notamment pour étudier la complexité. Ils sont définis de manière analogue aux complexes de Gähler–Sadun [60] associés à un pavage de dimension 1. Ces complexes ont été introduits pour étudier la topologie des espaces de pavages : en effet, tout espace de pavage (sous certaines hypothèses) est limite projective de ses complexes de Gähler–Sadun. Nous montrons qu'il en est de même pour les graphes de Rauzy. Cela fait des graphes de Rauzy un outil parfaitement adapté à l'étude conjointe de la complexité et de la cohomologie pour les pavages de dimension 1.

Théorème 1.2.4. *Soit w un mot bi-infini, répétitif, apériodique, et Ξ le sous-décalage engendré par w. Soit $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses graphes de Rauzy. Alors il existe des applications $\varphi_n : R_{n+1} \to R_n$ tel que l'on a un homéomorphisme :*

$$S\Xi \simeq \varprojlim (R_n, \varphi_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

où $S\Xi$ est la suspension de Ξ (définition 1.2.2).

La preuve de ce résultat est faite en annexe A.

1.3 Cohomologie des espaces de pavages

Une motivation naturelle en théorie des pavages est de vouloir, sinon classifier, du moins avoir des outils pour distinguer des familles de pavages. Ainsi, le fait de pouvoir associer un espace topologique à un pavage ouvre la voie pour utiliser des invariants topologiques.

Plusieurs invariants topologiques ont été étudiés. On peut citer la K-théorie d'une C^*-algèbre associée à l'espace de pavage (ou même au groupoïde de l'action de $\mathbb{R}$ par translation sur l'espace de pavages), et on pourra se consulter l'article de Kellendonk et Putnam [41] et les références qui s'y trouvent pour plus de détails sur cette approche.

L'usage de C^*-algèbres est motivé par la physique des solides, et a permis de prouver des théorèmes de *gap-labeling*.

Un autre invariant topologique est la *cohomologie* de l'espace de pavages. Cet invariant a été beaucoup étudié, sous plusieurs formes, et calculé dans plusieurs cas. Dans cette thèse, nous nous intéresserons à deux familles de pavages : les pavages de substitution, et les pavages de coupe et projection. Nous verrons donc deux types de cohomologies, calculées par des méthodes différentes. Bien que les méthodes soient différentes, on peut prouver qu'elles donnent les mêmes groupes de cohomologie dans les cas où elles sont toutes les deux applicables.

Nous voyons tout d'abord la cohomologie de Čech, qui est adaptée aux espaces que l'on peut exprimer comme limites inverses d'espaces plus simples — c'est le cas des pavages de substitution [1] et des pavages de dimension 1, comme on vient de le montrer en section 1.2.3. Il existe une autre cohomologie : la cohomologie des groupes, qui peut se calculer pour les espaces de pavages lorsqu'on arrive à mettre en évidence une action de $\mathbb{Z}^d$ sur la transversale (et on peut le faire de manière naturelle pour les pavages coupe et projection).

1.3.1 Cohomologie de Čech

La cohomologie de Čech est un invariant topologique que l'on peut calculer pour tout espace topologique. C'est un invariant d'homéomorphisme, et même un invariant d'homotopie (deux espaces homotopes ont les mêmes groupes de cohomologie).

La cohomologie de Čech peut se définir comme suit. Soit X un espace topologique, disons compact et métrisable, et $\mathcal{U}$ l'ensemble de tous les recouvrements finis de X par des ouverts. L'ensemble $\mathcal{U}$ est muni d'une relation d'ordre : un recouvrement est plus « grand » qu'un autre lorsqu'il le raffine. De plus, toute partie finie admet un majorant dans $\mathcal{U}$; cette propriété en fait un ensemble inductif. Pour chaque recouvrement $U = (U_i)_{i\in I}$ de X, on construit un complexe simplicial C_U comme suit : chaque U_i est associé à un sommet, chaque intersection $U_i \cap U_j$ est associée à un segment entre les deux sommets associés à U_i et U_j, chaque n-intersection $U_{i(1)} \cap \ldots \cap U_{i(n)}$ est associée à un $(n-1)$-simplexe qui est adjacent aux $(n-2)$-simplexes associés aux $(n-1)$-intersections, etc. Il existe une projection $\varphi_{U,V}$ surjective de C_U sur C_V dès que U est un raffinement de V. Les complexes C_U ont une cohomologie simpliciale $\mathrm{H}^*(C_U;\mathbb{Z})$, et on a des applications $\varphi^*_{U,V}$ si U raffine V. Les groupes de cohomologie de Čech sont alors définis comme :

$$\check{\mathrm{H}}^\bullet(X;\mathbb{Z}) = \varinjlim_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{H}^*(C_U;\mathbb{Z}).$$

$\check{\mathrm{H}}^\bullet(\,.\,;\mathbb{Z})$ est un foncteur contravariant de la catégorie des espaces topologiques (compacts) avec applications continues dans la catégorie des groupes abéliens avec morphismes de groupes.

Une propriété importante de la cohomologie de Čech est la suivante (on pourra se référer notamment à [21]) :

Proposition 1.3.1. *Soit X un espace topologique compact métrisable, tel que $X = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$, où les X_n sont des espaces topologiques compacts métrisables. Alors :*

$$\check{\mathrm{H}}^\bullet(X;\mathbb{Z}) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \check{\mathrm{H}}^\bullet(X_n;\mathbb{Z}).$$

De plus, si X est un complexe cellulaire fini, alors la cohomologie de Čech coïncide avec la cohomologie singulière. Ce fait et la proposition précédente permettent de calculer la cohomologie d'espaces qui s'expriment comme limites projectives d'espaces plus simples : il « suffit » de connaître la cohomologie singulière des espaces simples, de calculer les applications entre les groupes, et de calculer la limite injective des groupes de cohomologie.

C'est cette approche qui a été amorcée par Anderson et Putnam [1] pour calculer les groupes de cohomologie des pavages de substitution. Leurs méthodes ont mené à de nombreux développements, et il est maintenant prouvé que tout espace de pavages apériodiques, de complexité locale finie et répétitif est limite projective de CW-complexes finis, les complexes de Gähler–Sadun [60]. Bellissard, Benedetti et Gambaudo [9] ont montré que l'on pouvait munir les approximants d'une structure géométrique (une structure de variété branchée). Les raffinements successifs de la construction des approximants ont permis de mener des calculs pour des espaces de pavages de plus en plus compliqués, y compris dernièrement pour le pavage *Pinwheel* [6].

1.3.2 Cohomologie de groupe

Les invariants des espaces de pavages peuvent se calculer par d'autres méthodes. Le calcul de la cohomologie dynamique (ou cohomologie de groupe) en est un.

Le cas le plus simple est le cas d'un sous-décalage Ξ sur $\mathbb{Z}^d$. On note $C(\Xi;\mathbb{Z})$ l'ensemble des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{Z}$ sur Ξ. Comme Ξ est un ensemble de Cantor, cet ensemble n'est pas trivial, et contient notamment les fonctions indicatrices des ouverts fermés de Ξ.

C'est un résultat « bien connu » (qui appartient en fait au folklore), que la cohomologie de Čech de la suspension $\check{\mathrm{H}}^\bullet(S\Xi;\mathbb{Z})$ est isomorphe à la cohomologie de groupe $\mathrm{H}^\bullet(\mathbb{Z}^d;C(\Xi;\mathbb{Z}))$.

Dans le même ordre d'idée, Forrest, Hunton et Kellendonk [27, 28] ont utilisé des méthodes de cohomologie des groupes pour calculer la cohomologie d'un espace de pavage coupe et projection. Ils montrent qu'il existe un $\mathbb{Z}^d$-système dynamique sous-jacent à un pavage coupe et projection (il n'est *a priori* pas canonique), ce qui permet d'utiliser ces outils.

L'application de ces méthodes de cohomologie des groupes et d'algèbre homologique a permis de mener des calculs de plus en plus fins. Les calculs peuvent même être menés jusqu'au bout dans certains exemples de codimension 3, voir [30].

Dans le chapitre 3, nous n'utilisons pas directement la cohomologie des groupes, mais un critère géométrique sur le rang des groupes de cohomologie obtenu dans [27].

1.4 Un exemple : les suites sturmiennes

Dans cette section, nous introduisons l'exemple des suites sturmiennes et du cas particulier de la suite de Fibonacci. L'étude systématique des suites sturmiennes a été initiée par Morse et Hedlund [48] et [49], et on pourra se référer à [2] pour un état de l'art des propriétés de ces suites, et les différentes manières de les construire.

1.4.1 Construction par coupe et projection

On considère $\mathbb{R}^2$ euclidien muni de sa base canonique, et le réseau canonique $\mathbb{Z}^2$. On considère une droite (D) dirigée par le vecteur $(1,\alpha)$, et on considère la bande semi-ouverte :

$$S^- := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\,;\, \alpha x_1 \leq x_2 < \alpha x_1 + 1 + \alpha\}.$$

On définit de manière analogue la bande semi-ouverte de l'autre côté, S^+. Alors on considère le pavage de $\mathbb{R}$ obtenu par la projection orthogonale sur (D) des points à coordonnées entières de S^-, comme sur la figure 1.2.

Si α est irrationnel, le pavage est apériodique (c'est même une équivalence). Dans ce cas, les points projetés sur (D) définissent des intervalles de deux types (courts et longs). Si on code ces intervalles par des lettres (a et b), on obtient une suite, qu'on appelle « suite sturmienne ».

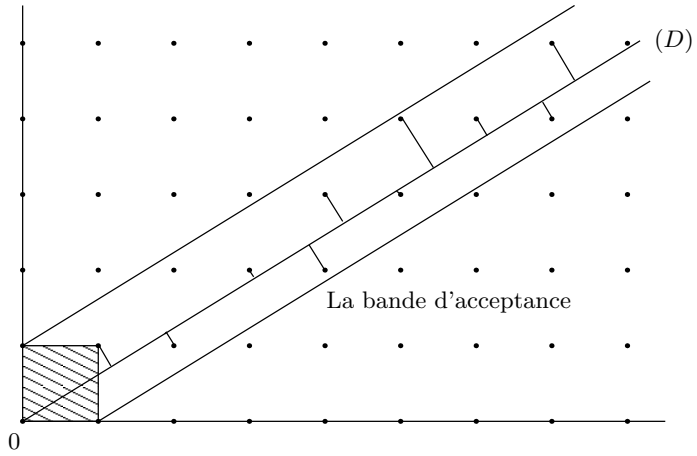


FIG. 1.2: Les points à l'intérieur de la bande sont projetés sur (D), définissant un pavage de dimension 1. Le carré hachuré est le carré unité.

Il est connu que les suites sturmiennes sont répétitives, et apériodiques. L'espace de pavage est $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$, où

$$\Omega^{\pm} := \{\pi_{(D),\perp}(\mathbb{Z}^2 + x \cap S^{\pm})\,;\, x \in \mathbb{R}^2\}.$$

Presque tous les éléments de Ω^+ sont dans Ω^- (et réciproquement), au sens où les éléments de l'un qui sont dans l'autre forment un G_δ dense pour la topologie des pavages. Les points de Ω^+ qui ne sont pas dans Ω^- sont des points *singuliers*, et nous les retrouverons au chapitre 2.

De plus, on sait que la complexité des suites sturmiennes (au sens du nombre de sous-mots de longueur n) est exactement $n+1$.

Généralisations possibles On peut regarder des suites construites avec un autre choix de bande, ou encore projeter des points de $\mathbb{Z}^N$ dans une bande d'intérieur non vide sur une droite de pente *irrationnelle* dans $\mathbb{Z}^N$. Il faut alors donner un sens à irrationnel dans ce contexte.

On peut aussi considérer un hyperplan de dimension $d = N-1$ dans $\mathbb{R}^N$. On projette alors dessus les facettes de dimension d qui sont immédiatement « au dessus ». Par facettes, on entend alors des polyèdres à coordonnées entières qui sont des translatés des faces du cube unité.

Au chapitre 2, on définit un pavage coupe et projection général, en projetant une partie d'un réseau de dimension N sur un sous-espace de dimension d.

1.4.2 Construction par substitution

Certaines suites sturmiennes peuvent être obtenues par *substitution*. Donnons l'exemple de la substitution (symbolique) de Fibonacci, que nous notons ω, sur un alphabet $\mathcal{A} = \{a, b\}$:

$$\begin{cases} a \longmapsto aba \\ b \longmapsto ab. \end{cases} \tag{1.2}$$

Notons que a est un préfixe de $\omega(a)$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\omega^n(a)$ est un préfixe de $\omega^{n+1}(a)$. Ainsi, l'union des $\omega^n(a)$, pour $n \geq 0$ définit un mot infini à droite. De même, en remarquant que a est un suffixe de $\omega(a)$, on peut définir le mot bi-infini suivant :

$$\begin{aligned} w &:= \omega^{+\infty}(a).\omega^{+\infty}(a) \\ &= \ldots abaababaababa.abaababaabaab \ldots \end{aligned}$$

On peut montrer que ce mot est apériodique, répétitif. C'est une suite sturmienne associée à la pente $(\sqrt{5}-1)/2$, qui est l'inverse du nombre d'or.

Généralisations possibles Une généralisation immédiate consiste à modifier la substitution symbolique, et à considérer d'autres substitutions en dimension 1. Nous expliquons au chapitre 4 comment définir des pavages de substitution en général, en dimension d. La notion de substitution est expliquée en dimension 2 par Grünbaum et Shephard [34] (règles d'*inflation* et de *composition*), notamment pour différentes versions du pavage de Penrose. La généralisation de la définition de pavages de substitution en toute dimension est faite notamment par Kenyon [42]. La notion de substitution symbolique est plus ancienne, et on peut notamment se référer à Queffélec [57] ou à Pytheas Fogg [25] et aux références incluses dans ces ouvrages.

Chapitre 2

Complexité des pavages coupe et projection

Les pavages coupe et projection sont une généralisation possible des suites sturmiennes (voir section 1.4). Cette méthode a pour but de construire des pavages apériodiques, mais ayant malgré tout une certaine structure : répétitivité et complexité locale finie (définitions 1.1.10 et 1.1.7) entre autres. Le principe est de partir d'un réseau régulier de dimension N, d'en prendre une « tranche », et de la projeter sous un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ de dimension strictement inférieure à N. Si le sous-espace en question est « irrationnel » en un certain sens, alors la projection est un ensemble de Delone qui satisfait ces propriétés.

L'idée de projeter les points d'un réseau régulier remonte à De Brujn [19], qui donne une description des pavages de Penrose. Bien que son formalisme soit différent de celui que nous utiliserons ici, les concepts sont présents, notamment la notion de point (ou paramètre) singulier, qui est essentielle pour notre propos. L'équivalence entre la méthode de De Brujn et la méthode de projection (et entre leurs généralisations) est montrée par Gähler et Rhyner [31]. La formalisation que nous utilisons doit beaucoup aux efforts issus de la physique pour créer des modèles de quasicristaux. On pourra se référer à Elser [22], Socolar [65] et Oguey, Duneau et Katz [52].

Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et le formalisme de construction de pavages coupe et projection. La présentation choisie ici suit largement le livre de Forrest, Hunton et Kellendonk [27], en la simplifiant, puisque le degré de généralité n'est pas le même. Nous nous plaçons dans un cas non général, mais relativement standard : celui des pavages à domaine d'acceptance canonique (la tranche projetée a pour base le cube unité de $\mathbb{R}^N$).

Dans ce cadre, on choisit une définition d'amas de taille n, et on définit une fonction de complexité p. La définition de la taille d'un amas que nous choisissons dans ce chapitre n'est pas liée à une norme dans l'espace E comme à la section 1.1.3, mais à une norme dans l'espace total $\mathbb{R}^N$. Cette définition donne cependant une fonction de complexité p équivalente au sens de la définition 1.1.16. Le théorème principal (théorème 2.3.1) donne alors le comportement asymptotique de la fonction p, et montre qu'elle est au plus polynomiale. Plus précisément, il s'énonce comme suit : il existe un entier α et C_1, C_2 deux

constantes strictement positives telles que pour tout n assez grand, on a

$$C_1 n^\alpha \leq p(n) \leq C_2 n^\alpha.$$

De plus, il est possible de calculer α explicitement en fonction de données algébriques de la méthode coupe et projection (à savoir le rang de certains sous-groupes de $\mathbb{Z}^N$ qui apparaissent naturellement). Nous montrerons au chapitre suivant que si un pavage coupe et projection de dimension d a un groupe de périodes de rang k, alors l'exposant α de sa fonction de complexité est minoré par $d - k$.

L'étude de la fonction de complexité passe par l'étude fine d'un ensemble de paramètres singuliers (l'espace des paramètres ayant une représentation géométrique simple, on parle alors de point singuliers).

2.1 Définitions et propriétés générales

Dans cette section, nous définissons ce qu'est un pavage coupe et projection, et précisons nos hypothèses.

2.1.1 Cadre

Soit $\mathbb{R}^N$ l'espace standard de dimension N, muni de sa base canonique $(e_1, \ldots, e_N)$.

Notation. Dans la suite, nous adoptons les notations suivantes : pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\|x\|$ est la norme 1 de x, définie par

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{N} |x_i|,$$

la boule de centre x et de rayon r est notée $B(x; r)$, et le cube unité de $\mathbb{R}^N$ est noté $C := [0, 1]^N$.

Considérons E un sous-espace vectoriel de dimension d de $\mathbb{R}^N$, et F un supplémentaire de E. On appelle π et π_F les projections respectivement sur E et F associées à la décomposition $\mathbb{R}^N = E \oplus F$.

Remarque 2.1.1. Certains auteurs choisissent $F = E^\perp$, prennent pour π et π_F les projections orthogonales, et utilisent un réseau co-compact arbitraire à la place de $\mathbb{Z}^N$. Ce point de vue est équivalent au notre : il suffit pour passer de l'un à l'autre de choisir une base adaptée, et de redéfinir le produit scalaire de sorte que cette nouvelle base soit alors orthonormale.

Hypothèse 2.1.2. L'hypothèse d'irrationalité faite sur la décomposition $\mathbb{R}^N = E \oplus F$ peut s'écrire de la manière suivante.

(i) $\pi|_{\mathbb{Z}^N}$ est injective ;

(ii) $\pi_F(\mathbb{Z}^N)$ est un sous-groupe dense de F ;

(iii) $E \cap \mathbb{Z}^N = \{0\}$.

Ces hypothèses ne sont pas strictement nécessaires pour définir un pavage coupe et projection ; le pavage de Penrose, par exemple, ne satisfait pas la seconde hypothèse. Cependant, dans la suite, nous supposerons toujours que les

deux premières hypothèses sont satisfaites. La troisième sera en général satisfaite, sauf mention explicite. Sous les deux premières hypothèses, la troisième hypothèse est équivalente à l'apériodicité totale des ensembles de Delone que nous allons construire.

Définition 2.1.3. On définit les objets suivants :
- le *domaine d'acceptance*, noté K, est un sous-ensemble de F qui est une union finie de polytopes compacts et convexes disjoints ;
- l'ensemble (fini) des sommets de K, noté V ;
- la *bande d'acceptance* $S := K + E$;
- le groupe $\Gamma := \pi_F(\mathbb{Z}^N)$, dont le rang est noté r ($r \leq N$).

Remarque 2.1.4. Les résultats exposés par la suite peuvent sans doute être adaptés pour des domaines d'acceptances qui sont des unions finies de polytopes compacts et convexes *dont les intérieurs sont disjoints*. Cela dit, la généralisation n'est pas directe : le fait de couper un polytope non convexe en polytopes convexes peut rajouter des faces « artificiellement ». Les hyperplans parallèles à ces faces ne devraient alors pas être considérés comme des hyperplans singuliers (voir ci-dessous pour la définition). Je suis reconnaissant à Franz Gähler pour m'avoir fait cette remarque.

Le domaine d'acceptance d'une méthode coupe et projection est dit *canonique* lorsque K est la projection par π_F du cube unité C. Les résultats sur la complexité que nous allons énoncer sont valables pour un domaine d'acceptance canonique, mais aussi dans un cadre légèrement plus général.

Définition 2.1.5. On dit que le domaine d'acceptance K est *presque canonique* si :
- il est une union finie et disjointe de polytopes convexes ;
- chacun de ces polytopes K_i vérifie que $(\partial K_i + \Gamma)$ est une union dénombrable d'hyperplans de F ;
- pour chaque face f de K_i (qui est de dimension $(N - d - 1)$), et pour tout sommet v de K_i, si on note H_f l'hyperplan affine de F contenant f, alors il existe un voisinage de v dans H_f qui puisse être recouvert par un nombre fini de translatés de f de la forme $f + \gamma$, avec $\gamma \in \mathrm{Stab}_\Gamma(H_f)$.

Notons que $f - v$ est d'intérieur non vide dans H_f ; par conséquent, si $H_f \cap \Gamma$ est dense dans H_f pour toute face f, alors K est presque canonique. Nous prouverons par la suite qu'un domaine d'acceptance canonique est en particulier presque canonique.

Comme nous l'avons vu lorsque nous avons introduit les suites sturmiennes à la section 1.4, la méthode de coupe et projection permet de construire un ensemble de Delone par projection sur E des points de $\mathbb{Z}^N$ qui sont dans la « tranche » $K+E$. Il existe des méthodes pour construire un pavage de manière tout à fait naturelle lorsque K est canonique. On peut se référer à l'article de Oguey, Duneau et Katz [52]. Pour notre propos, il est suffisant de considérer l'ensemble de Delone résultant du pavage coupe et projection.

Définition 2.1.6. On dit que $x \in \mathbb{R}^N$ est *singulier*, et on note $x \in \mathrm{Sing}$, lorsque $(x + \mathbb{Z}^N) \cap \partial S \neq \emptyset$. On dit que x est régulier, et on note $x \in \mathrm{Reg}$ sinon.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que $x \in S$ est n-singulier, et on note $x \in \mathrm{Sing}_n$ lorsque $(x + \mathbb{Z}^N \cap B(x; n) \cap \partial S \neq \emptyset$. On dit que $x \in S$ est n-régulier s'il n'est pas n-singulier, et on note alors $x \in \mathrm{Reg}_n$.

Cette définition est motivée par la volonté d'éviter des ambiguïtés dans la définition des pavages coupe et projection. De telles ambiguïtés surviennent lorsque des points du réseau à projetés se trouvent sur le bord de la bande d'acceptance : doit-on les accepter ou les refuser ? La bonne manière de procéder consiste à faire un choix. Dans l'exemple des suites sturmiennes (section 1.4), le choix est analogue au choix de S^+ ou de S^- comme bande d'acceptance. On peut faire tendre le réseau vers sa position singulière de plusieurs manières (régulières) différentes. Chacune de ces manières définit un choix. Cette idée de choix apparaît déjà dans les travaux de De Bruijn [19].

Les points n-réguliers sont un analogue des points réguliers, à ceci près qu'ils permettent de définir des amas de taille n sans ambiguïté, plutôt que des pavages.

2.1.2 Pavages, amas et espace de pavages

On a établi le cadre qui permet de définir une méthode de coupe et projection ; on peut maintenant construire des pavages (ou à proprement parler des ensembles de Delone).

Définition 2.1.7. Pour $x \in \mathrm{Reg}$, on définit :
- L'ensemble relevé associé à x : $\widetilde{\mathcal{P}}(x) := (x + \mathbb{Z}^N) \cap S$;
- L'ensemble de Delone (projeté) associé à x : $\mathcal{P}(x) := \pi\big(\widetilde{\mathcal{P}}(x)\big)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :
- L'amas relevé de taille n et de graine x : $\widetilde{A}(x,n) = (x+\mathbb{Z}^N) \cap B(x;n) \cap S$;
- L'amas de taille n et de graine x : $A(x,n) := \pi\big(\widetilde{A}(x,n)\big)$.

Enfin, on définit $\widetilde{A}_{\mathrm{pt}}(x,n)$ et $A_{\mathrm{pt}}(x,n)$ comme les amas associés à x pour lesquels on distingue le point x et $\pi(x)$, respectivement. On les appelle *amas pointés*.

Ainsi, étant donné une méthode de coupe et projections, les objets que nous étudierons seront les $\mathcal{P}(x)$ pour $x \in \mathrm{Reg}$. Ce sont des ensembles de Delone, et la complétion pour la distance définie au chapitre précédent de l'ensemble de tous les $\mathcal{P}(x)$ donne l'espace de pavages.

Il est connu que les ensembles $\mathcal{P}(x)$ sont des ensembles de Delone répétitifs de E. De plus, sous les hypothèses 2.1.2.(i) et (ii), leur groupe de période est égal à $E \cap \mathbb{Z}^N$, et les pavages sont donc complètement apériodiques pour un choix convenable de E.

On définit les $A(x,n)$ comme étant les amas de taille n. Cette définition peut être légèrement différente de celle donnée en définition 1.1.5, mais elle lui est équivalente au sens de la définition 1.1.16, comme nous le verrons par la suite. à la section 2.1.3.

De plus, la donnée de l'ensemble $A(x,n)$ ne permet pas nécessairement de retrouver $A_{\mathrm{pt}}(x,n)$: le « centre » de l'amas n'est pas uniquement déterminé. C'est la raison pour laquelle nous n'avons pas utilisé la terminologie de centre, mais plutôt de graine. On choisit aussi $x \in S$ pour la définition d'amas de taille n, car si on prenait x loin de S pour n fixé, on pourrait avoir un amas vide ; or, on cherche à compter le nombre d'amas de taille *exactement* n, et non le nombre d'amas de taille *au plus* n.

Remarquons encore que le paramètre x dans l'amas $A(x,n)$ peut se décomposer en deux parties : $x = \pi(x) + \pi_F(x)$. Si $\pi(x)$ est le paramètre de position dans E, $\pi_F(x)$ est un paramètre de configuration : la forme de l'amas dépend de cette deuxième composante. Dans la mesure où nous comptons le nombre

d'amas différents modulo translation, la question est *comment* $\pi_F(x)$ encode-t-il la forme de l'amas.

Espace de pavage

Ouvrons une parenthèse pour décrire l'espace Ω associé aux ensembles $\mathcal{P}(x)$. On pourra se référer au livre de Forrest, Hunton et Kellendonk pour une description plus précise et plus générale. Il est clair que la fonction de Reg dans Ω définie par $\mathcal{P} : x \mapsto \mathcal{P}(x)$ est $\mathbb{Z}^N$-périodique. Du fait de nos hypothèses, on peut montrer que c'est exactement le groupe des périodes de $\mathcal{P}$. Ainsi, $\mathrm{Reg}/\mathbb{Z}^N$ s'identifie à un sous-espace de Ω via $\mathcal{P}$, et on montre que $\mathcal{P}$ est continue. On peut compléter $\mathrm{Reg}/\mathbb{Z}^N$ pour obtenir Ω. Une autre manière de procéder est de définir une distance sur Reg :

$$\tilde{d}(x, y) = \|x - y\| + d(\mathcal{P}(x), \mathcal{P}(y)),$$

où d est la distance définie en section 1.1.2. Alors, on désigne par X l'espace obtenu par complétion de Reg pour cette distance. On montre que X porte une action de $\mathbb{Z}^N$ et de E par translations. On a alors :

$$\Omega \simeq X/\mathbb{Z}^N.$$

Remarque 2.1.8. La minimalité de Ω s'obtient du fait de l'hypothèse 2.1.2 (ii), qui est équivalente au fait que l'image de $E + x$ dans $\mathbb{R}^N/\mathbb{Z}^N$ est dense pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. Cela implique que toutes les E orbites sont denses dans Ω.

On énonce (sans démonstration) la proposition suivante.

Proposition 2.1.9. *On appelle Ξ l'adhérence de $\mathcal{P}(K \cap \mathrm{Reg})$ dans Ω. Alors Ξ est une transversale canonique au sens de la définition 1.1.12.*

Remarquons qu'avec cette définition, Ξ est l'ensemble des $\mathcal{P}(x) - y$ avec $y \in \mathcal{P}(x)$. La règle locale de construction de l'ensemble des pointeurs est donc la règle triviale.

Ces considérations topologiques sur l'espace de pavages ne sont pas nécessaires pour mener les calculs de complexités dans ce chapitre. Il est tout à fait possible de définir une fonction de complexité « raisonnable » de manière combinatoire comme nous le faisons ci-après, et de calculer cette fonction pour un pavage $\mathcal{P}(x)$, avec $x \in \mathrm{Reg}$. Cela dit, nous mentionnons ces méthodes dans un souci de cohérence, puisque nous avons choisi au chapitre 1 de faire dépendre les fonctions de complexité du choix d'une transversale (et ce choix est de nature topologique). Nous définissons dans la section suivante une fonction de complexité. Nous montrerons qu'elle est équivalente à la fonction p_Ξ définie au chapitre 1.

2.1.3 Fonction de complexité

Définition 2.1.10. Soit $x \in \mathrm{Reg}_n$ et $\mathcal{P}(x)$ l'ensemble de Delone associé. La fonction de complexité pointée associée à $\mathcal{P}(x)$ est une fonction $p_{\mathrm{pt}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, où $p_{\mathrm{pt}}(n)$ est défini comme le nombre d'amas pointés de taille n de $\mathcal{P}(x)$, modulo translation par un élément de E.

$$p_{\mathrm{pt}}(n) = \mathrm{Card}\left(\left\{A_{\mathrm{pt}}(y, n); y \in \widetilde{\mathcal{P}}(x)\right\}/E\right).$$

La fonction de complexité est définie similairement, en comptant les amas plutôt que les amas pointés.

Par répétitivité des pavages coupe et projection, la complexité ne dépend pas du pavage choisi, donc la définition ci-dessus est indépendante de x. On peut donc compter les amas en général plutôt que de compter les amas dans un pavage donné.

Comme de plus les amas pointés sont comptés modulo translation, il suffit de compter les amas dont le pointeur est, par exemple, sur F. Cela revient à choisir un représentant dans chaque classe de pavage pointé modulo translation.

Proposition 2.1.11. *La fonction de complexité p_{pt} est donnée par la formule suivante :*

$$p_{\mathrm{pt}}(n) = \mathrm{Card}\Big(\big\{A_{\mathrm{pt}}(y,n); y \in K \cap \mathrm{Reg}_n\big\}\Big).$$

Montrons que cette fonction p_{pt} est bien une fonction de complexité, c'est-à-dire que la définition donnée ici est bien équivalente à la définition de fonction de complexité donnée en section 1.1.3. La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.1.12. On note $B_E(x;r)$ la boule dans E de centre x et de rayon r pour la norme induite par $\|.\|_1$ sur E. Alors il existe un $\mu \geq 0$ tel que :

$$\big(B_E(\pi(x); n-\mu) \cap \mathcal{P}(x)\big) \subseteq A(x,n) \subseteq \big(B_E(\pi(x); n+\mu) \cap \mathcal{P}(x)\big), \tag{2.1}$$

Démonstration. La taille d'un amas est donnée par la norme dans $\mathbb{R}^N$. On cherche à exprimer la taille d'un amas de taille n en fonction de la norme induite sur E par la norme de $\mathbb{R}^N$. Remarquons que si $n \in \mathbb{N}$, et $x \in K$, alors pour tout $y \in \widetilde{\mathcal{P}}(x)$, on a :

$$\|\pi(y) - \pi(x)\|_1 \leq \|\pi(y) - y\|_1 + \|y - x\|_1 + \|x - \pi(x)\|_1 ,$$

et

$$\|y - x\|_1 \leq \|\pi(y) - y\|_1 + \|\pi(y) - \pi(x)\|_1 + \|x - \pi(x)\|_1 .$$

Mais $\pi(y) - y \in K$ et K est compact. Par conséquent, il existe un majorant à $\|\pi(y) - y\|$ qui ne dépend pas de $y \in S$. On appelle $\mu/2$ ce majorant. Alors :

$$\|y - x\|_1 - \mu \leq \|\pi(y) - \pi(x)\|_1 \leq \|y - x\|_1 + \mu.$$

Ainsi, en appliquant cette inégalité à x fixé et pour tout $y \in \widetilde{A}(x,n)$, on obtient le résultat. □

Ce lemme permet de faire le lien entre la taille des amas tels qu'on les a définis dans ce chapitre, et une norme dans E. Dans la mesure où on a défini au chapitre 1 une fonction de complexité en fonction d'une norme, ce résultat montre l'équivalence (au sens de la définition 1.1.16) entre p_{pt} et une fonction de complexité pointée p_Ξ (définition 1.1.19). Plus précisément, Ξ serait alors la transversale canonique définie par la proposition 2.1.9.

Ainsi, il suffit de connaître l'asymptotique de *cette* fonction de complexité pour connaître l'asymptotique de *la* complexité.

2.2 Points singuliers et fonction de complexité

Dans cette section, nous montrons que les amas pointés correspondent exactement aux composantes connexes de Reg_n. Cela motive une étude détaillée des points singuliers.

2.2.1 Proposition fondamentale

Le comptage du nombre d'amas (pointés) de taille n nécessite de comprendre comment $A(x,n)$ est paramétré en fonction de $x \in K \cap \mathrm{Reg}_n$ (proposition 2.1.11). La réponse est donnée par la proposition suivante :

Proposition 2.2.1. *Soit p_{pt} la fonction de complexité comme définie ci-dessus. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $c(n)$ le nombre de composantes connexes de Reg_n. Alors, si K est connexe*[1]*, on a :*

$$p_{\mathrm{pt}}(n) = c(n).$$

Remarque 2.2.2. Dans le cas où K a m composantes connexes, on a l'encadrement suivant :

$$\frac{c(n)}{m} \leq p_{\mathrm{pt}}(n) \leq c(n).$$

Démonstration. Montrons d'abord que $p_{\mathrm{pt}}(n) \leq c(n)$. Rappelons que $p_{\mathrm{pt}}(n)$ est le nombre d'amas pointés de la forme $A_{\mathrm{pt}}(x,n)$, avec $x \in K \cap \mathrm{Reg}_n$. Pour montrer cette inégalité, il suffit de montrer que si x et y sont dans la même composante connexe de Reg_n, alors $A_{\mathrm{pt}}(x,n) = A_{\mathrm{pt}}(y,n)$. Leur point distingué est le même (c'est 0, car $x, y \in F$, donc $\pi(x) = \pi(y) = 0$). Il suffit donc de montrer que l'on a $A(x,n) = A(y,n)$. Soit $x \in \mathrm{Reg}_n$. Montrons que l'ensemble X de tous les $y \in \mathrm{Reg}_n \cap K$ qui vérifient $A(x,n) = A(y,n)$ est à la fois ouvert et fermé pour la topologie relative de $\mathrm{Reg}_n \cap K$. Soit $y \in X$, et soit δ la distance entre $\widetilde{A}(y,n)$ et ∂S. Par définition de Reg_n, δ est strictement positif. Ainsi, $\widetilde{A}(y,n) + B(0;\delta/2)$ est inclus dans l'intérieur de S. Alors $B(y;\delta/2) \cap K \subset X$, et X est ouvert. Pour montrer que X est fermé, on pose $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est suite d'éléments de x qui converge vers $y \in \mathrm{Reg}_n \cap K$. On note δ la distance entre $\widetilde{A}(y,n)$ et ∂S. Pour k assez grand, $y_k \in B(y;\delta/2)$, et donc

$$A(y,n) = A(y_k,n) = A(x_n).$$

Donc $y \in X$. Comme X est ouvert et fermé, il contient la composante connexe de Reg_n qui contient x, et donc $p_{\mathrm{pt}}(n) \leq c(n)$.

Montrons maintenant que si K est connexe, $c(n) \leq p_{\mathrm{pt}}$. Soit $A_{\mathrm{pt}}(x,n)$ un amas pointé de taille n ($x \in \mathrm{Reg}_n \cap K$). Montrons qu'il existe une unique composante connexe X de K telle que si $y \in X$, alors $A_{\mathrm{pt}}(y,n) = A_{\mathrm{pt}}(x,n)$. Si $A_{\mathrm{pt}}(x,n) = A_{\mathrm{pt}}(y,n)$, alors par injectivité de $\pi|_{\mathbb{Z}^N}$, les amas relevés correspondants diffèrent par un élément $v = y - x \in F$. Alors $\widetilde{A}(x,n) + v = \widetilde{A}(y,n)$. Ces deux ensembles sont inclus dans S, et par convexité de K (et donc de S), on a :

$$\text{Pour tout } t \in [0,1], \quad \widetilde{A}(x,n) + tv = \widetilde{A}(x+tv,n),$$

et pour tout t, cet ensemble est inclus dans S. Par conséquent, tous les $x+tv$ sont n-réguliers, et x est dans la même composante connexe de Reg_n que $x + v = y$. Par conséquent, x et y sont dans la même composante connexe de Reg_n. □

Remarque 2.2.3. Dans le cas où K a m composantes connexes, la preuve ci-dessus est encore valide, si ce n'est que pour la seconde inégalité, on prouve

[1] Et donc convexe, puisqu'on a supposé que K était une union disjointe de polyèdres convexes.

que pour chaque composante connexe K_i de K, et pour chaque amas $A(x,n)$, il existe au plus une composante connexe de $\mathrm{Reg}_n \cap K_i$ associée à cet amas. Par conséquent, chaque amas est associé à au plus m composantes connexes (un dans chaque composante connexe de K, et donc $c(n)/m \leq p_{\mathrm{pt}}(n)$).

2.2.2 Géométrie des points singuliers

La Proposition 2.2.1 relie l'étude de la fonction de complexité à l'étude des points singuliers. Il est donc important de connaître la structure de ces points singuliers. Nous allons voir que Sing_n « ressemble » à une union d'hyperplans. Le comptage de ces hyperplans permettra de compter le nombre de composantes connexes. La figure 2.1 représente les poings n-singuliers pour $n = 1, 2, 3$, pour un pavage coupe et projection avec $N = 3$ et $d = 1$.

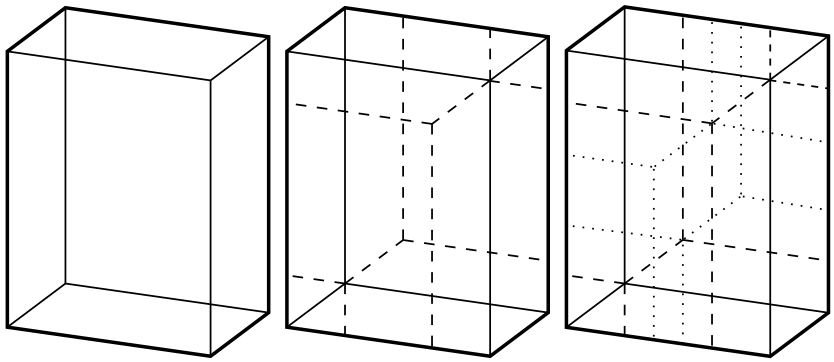


FIG. 2.1: Le domaine d'acceptance d'un pavage coupe et projection canonique avec respectivement les points 1, 2 et 3-singuliers.

Les propriétés des points singuliers sont étroitement liées à la définition que nous avons donnée de domaine d'acceptance presque canonique. Nous prouverons au passage que les domaines d'acceptance canoniques sont presque canoniques.

La proposition suivante découle directement des définitions.

Proposition 2.2.4. *On a :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Sing} &= \partial S + \mathbb{Z}^N; \\ \mathrm{Sing}_k &= \big(B(0;k) \cap \mathbb{Z}^N + \partial S\big) \cap S. \end{aligned}$$

Par conséquent, Sing_k *est une union croissante de sous-ensembles de* S*, dont l'union est* $\mathrm{Sing} \cap S$*. De plus,* Sing_k *et* Sing *sont invariants par l'action de* E*. On a alors, en appliquant* π_F *:*

$$\mathrm{Sing} \cap F = \partial K + \Gamma; \tag{2.2a}$$

$$\mathrm{Sing}_k \cap K = \big(\pi_F(B(0;k) \cap \mathbb{Z}^N) + \partial K\big) \cap K. \tag{2.2b}$$

Nous allons énoncer deux résultats relatifs aux points singuliers. Le premier est un résultat qualitatif ; le second est quantitatif et quelque peu technique.

Un domaine d'acceptance presque canonique est défini de telle sorte que ces propriétés soient vraies. Afin de montrer que nos résultats s'appliquent aux domaines canonique, on prouve le résultat suivant.

Proposition 2.2.5. *Un domaine d'acceptance canonique (c'est-à-dire : K est la projection du cube unité) est presque canonique (voir définition 2.1.5).*

Démonstration. On suppose que le domaine d'acceptance K est canonique. Soit f une face de dimension $(N-d-1)$, et H_f l'hyperplan qui lui est parallèle. Quitte à renommer les vecteurs, la face f est de la forme :

$$f = v + \pi_F\big([0,1]^{N-d-1}\big) = v + \left\{ \sum_{k=1}^{N-d-1} \lambda_k \pi_F(e_k)\,;\, 0 \leq \lambda_k \leq 1 \right\},$$

où $v \in \pi_F(\{0,1\}^N)$ est l'un des sommets du cube unité. Soit Λ le groupe engendré par les $\{\pi_F(e_i)\}_{i=1}^{N-d-1}$. Ce groupe est un réseau cocompact de H_f, et un sous-groupe de $H_f \cap \Gamma$. De plus, $f - v$ contient un domaine fondamental pour l'action de Λ sur H_f par translations. Par conséquent, $f + \Lambda = H_f + v$, et donc $f + \Gamma$ est une union d'hyperplans de F. On applique le même argument pour toutes les faces, et on en déduit que $\partial K + \Gamma$ est une union d'hyperplans de F.

Pour prouver la seconde condition, on remarque que f est compact, et que c'est un domaine fondamental pour le groupe localement fini Λ. Par conséquent, pour tout voisinage de l'origine, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de la forme $(f - v') + \gamma$ qui l'intersectent, avec $\gamma \in \Lambda$, et v' un sommet de f. Comme f est borné, ce nombre fini peut être choisi de manière à ne pas dépendre de v' Donc un voisinage de l'origine donné peut être couvert par un nombre fini de translatés de f de la forme ci-dessus. Cela prouve qu'un domaine d'acceptance canonique est presque canonique. □

La définition d'un domaine d'acceptance presque canonique (définition 2.1.5) et l'équation 2.2 montrent que les points singuliers de F sont une union d'hyperplans affines.

Définition 2.2.6. On note $H_1, \ldots, H_m$ tous les hyperplans distincts de F qui sont parallèles aux faces de K. On les appelle les *hyperplans singuliers* de F. On note $\Gamma^i = \mathrm{Stab}_\Gamma(H_i)$. C'est un sous-groupe de Γ.

Remarquons qu'une face f parallèle à H_i est compacte et que $f + \Gamma^i$ est un hyperplan. Donc Γ^i contient toujours un réseau cocompact de H_i. Par conséquent, pour tout i, on peut toujours trouver une base de H_i formée de $N-d-1$ vecteurs de Γ.

La proposition suivante découle assez directement de la définition d'un domaine d'acceptance presque canonique.

Proposition 2.2.7. *L'ensemble des points singuliers de F est l'union de translatés des hyperplans singuliers :*

$$\mathrm{Sing} \cap F = \bigcup_{i=1}^{m} (H_i + V_i) + \Gamma,$$

où V_i est le sous-ensemble de V formé par les arêtes de K qui appartiennent à une face parallèle à H_i. En particulier, on a :

$$\mathrm{Sing} \cap F \subseteq \left(\bigcup_{i=1}^{m} H_i \right) + V + \Gamma.$$

Si de plus $V \subset \Gamma$ (c'est le cas quand K est canonique), on a :

$$\mathrm{Sing} \cap F = \left(\bigcup_{i=1}^{m} H_i \right) + \Gamma.$$

Le lemme suivant est une version qualitative de cette proposition. On utilise dans sa démonstration la deuxième partie de la définition d'un domaine presque canonique.

Lemme 2.2.8. Avec les notations ci-dessus, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, il existe $\varepsilon_i > 0$ tel que pour tout $y \in \pi_F\big(B(0; n) \cap \mathbb{Z}^N\big) + V_i$, les points de $(H_i + y) \cap B(y; \varepsilon_i)$ sont $(n + M)$-singuliers.

Démonstration. Soit $1 \leq i \leq m$. On fixe ε_i de telle sorte qu'une boule de rayon ε_i autour de 0 dans H_i est couverte par un nombre fini de translatés de faces parallèles à H_i (conformément à la définition 2.1.5). Soit $n \in \mathbb{N}$, et $y \in \pi_F\big(B(0; n) \cap \mathbb{Z}^N\big) + V_i$. On écrit $y = v + \pi_F(z)$, avec $z \in \mathbb{Z}^N$, avec $\|z\|_1 \leq n$, et $v \in V_i$. On appelle f la face parallèle à H_i et contenant v. On se donne un nombre fini de translatés de $f - v$ par des éléments de Γ^i qui couvrent $B(0; \varepsilon_i)$, et on appelle $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les vecteurs de translation correspondants. On définit

$$M_i := \max_{1 \leq i \leq k} \min\{\|w\|_1 \ ; \ w \in \mathbb{Z}^N, \pi_F(w) = \gamma_i\}.$$

Notons que les M_i peuvent être choisis de façon à ne pas dépendre de v (puisque chaque V_i est fini). Donc si $x \in B(y; \varepsilon_i) \cap H_i$, alors $x - y \in B(0; \varepsilon_i) \cap H_i$, et $x - y$ est dans un translaté de la forme $f - v - \pi_F(w)$, avec $w \in \mathbb{Z}^N \cap B(0; M_i)$. Cela signifie que $x \in f + \pi_F(z + w)$, avec $z + w \in \mathbb{Z}^N \cap B(0; n + M_i)$. Le résultat est donc prouvé avec $M := \max_i M_i$. □

2.3 Calcul de la complexité

Dans cette section, nous montrons le théorème principal de cette thèse. Il donne l'asymptotique de la complexité pour les pavages coupe et projection. La fonction p se comporte aux constantes près comme n^α, et α peut être calculé explicitement. Il existe des bornes sur α, qui seront énoncées ici mais qui seront prouvées au chapitre suivant.

2.3.1 Énoncé du théorème

Par la proposition 2.2.1, le calcul du nombre de composantes connexes de Reg_n est équivalent au calcul de la fonction de complexité. L'étude des points singuliers montre que Sing est une union d'hyperplans. Dans cette section, nous montrons que Sing_n est « proche » d'être une union finie d'hyperplans. En comptant ces hyperplans qui approximent Sing_n, il est ensuite possible de compter le nombre de composantes connexes de Reg_n.

Théorème 2.3.1. *On considère une méthode de coupe et projection vérifiant les hypothèses 2.1.2, c'est-à-dire une décomposition $\mathbb{R}^N = E \oplus F$, un réseau $\mathbb{Z}^N$, et un domaine d'acceptance K que l'on suppose presque canonique. Soit p la fonction de complexité associée, $(H_i)_{i=1}^m$ les hyperplans singuliers dans F, et $\Gamma := \pi_F(\mathbb{Z}^N)$. On définit les objets suivants :*

– *pour tout* $i \in [\![1, m]\!]$, *on pose* $\Gamma^i := \mathrm{Stab}_\Gamma(H_i)$ *;*
– *on pose* $\alpha_i := \mathrm{rg}\left(\Gamma/\Gamma^i\right) - 1$ *;*
– *on définit* $I \subset [\![1, m]\!]$ *un sous-ensemble de* $N-d$ *éléments tel que* $\bigcap_{i\in I} H_i = \{0\}$, *et que* $\alpha := \sum_{i\in I} \alpha_i$ *est maximal.*

Alors il existe $C_1, C_2 > 0$ *tels que pour tout* n *assez grand,*

$$C_1 n^\alpha \leq p(n) \leq C_2 n^\alpha.$$

Remarquons que pour un choix générique de décomposition $\mathbb{R}^N = E \oplus F$, le rang de Γ est N. C'est équivalent, sous hypothèses 2.1.2 (i) et (ii), à ce que les ensembles de Delone obtenus soient complètement apériodiques.

De plus, toujours génériquement, le rang de H_i est minimal. Par ailleurs, H_i contient toujours au moins $N-d-1$ éléments de Γ, par définition d'un domaine d'acceptance presque canonique (voir 2.1.5). Par conséquent, génériquement, tous les α_i sont égaux à d, et l'exposant de la complexité vaut $\alpha = d(N-d)$. Cette valeur de α est la valeur maximale possible sous nos hypothèses. Dans la plupart des exemples connus (pavages octogonal notamment, voir section 2.4.3), la complexité est bien moindre. Par exemple, la complexité du pavage octogonal croît comme n^2, ainsi que la complexité du pavage de Penrose. Dans ces exemples, cet exposant de complexité est l'exposant *minimal* pour un pavage apériodique. Nous montrerons en effet au chapitre suivant (théorème 3.1.1) que $\alpha \geq d - \mathrm{rg}(E \cap \mathbb{Z}^N)$.

2.3.2 Préliminaires

Nous avons dit que Sing_n était proche d'une union d'hyperplans. Cette notion de proximité est donnée par le lemme 2.2.8.

Il nous faut voir deux choses : tout d'abord, comment ces hyperplans se répartissent, combien il y en a. Ensuite, combien de composantes connexes a un ensemble compact et convexe lorsqu'on le coupe par un nombre prescrit d'hyperplans dans des directions données.

Premier lemme : compter des points

Les deux premières questions sont résolues par le théorème suivant, dû à Schlottmann. C'est un théorème du type équirépartition : la répartition de ces hyperplans dépend de la manière dont se répartissent les éléments de la forme $\pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N \cap S)$ dans K.

Théorème 2.3.2 (Schlottmann [62], Proposition 2.1)**.** *On considère une méthode de coupe et projection* $(\mathbb{R}^N = E \oplus F, \mathbb{Z}^N, \pi, K)$, *satisfaisant les hypothèses 2.1.2. On munit* E *et* F *de la mesure de Lebesgue (respectivement* μ_E *et* μ_F*), et* $\mathbb{R}^N$ *de la mesure produit. Alors, si* W *est un sous-ensemble borné de* F *dont le bord est de mesure nulle, on a l'égalité suivante (et en particulier, la limite existe) :*

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{\mathrm{Card}\left(\mathbb{Z}^N \cap (B_E(0;r) \oplus W + t\right)}{\mu_E(B_E(0;r)} = \frac{\mu_F(W)}{\mu_E \otimes \mu_F([0,1]^N)},$$

où $B_E(0;r)$ *désigne la boule dans* E *de rayon* r *centrée en l'origine. De plus, la limite est uniforme en le paramètre* $t \in \mathbb{R}^N$.

Ce théorème affirme que le nombre de points d'un ensemble de Delone obtenu par coupe et projection inclus dans une boule de rayon r est asymptotiquement équivalent au volume de la boule, soit Cr^d, où C est une constante. De plus, C dépend du volume de la fenêtre d'acceptance. Il existe une généralisation de ce théorème dans le cas où le pavage coupe et projection est construit sur un espace $E \oplus G$, avec G un groupe abélien localement compact plutôt qu'un espace vectoriel. Voir [62, Théorème 1] pour plus de détails.

Ce théorème est de plus parfaitement adapté pour définir les fréquences des amas. Il peut permettre de prouver qu'un espace de pavage coupe et projection est uniquement ergodique, et que, muni de sa mesure ergodique, il est mesurablement isomorphe au tore unité de R^N, muni de sa mesure invariante normalisée.

Cela dit ces considérations dépassent notre propos. Nous n'avons pas besoin de résultats aussi précis, et nous réécrivons ce théorème dans notre formalisme.

Corollaire 2.3.3. On considère une méthode de coupe et projection $(\mathbb{R}^N = E \oplus F, \mathbb{Z}^N, \pi, K)$, satisfaisant les hypothèses 2.1.2. Soit W un sous-polyèdre de K (typiquement, une composante connexe de Reg_n). Alors la limite suivante existe, et est uniforme en $x \in S$:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{Card}\left(\pi_F(\mathbb{Z}^N \cap B(x;n)) \cap W\right)}{n^d} = C_0 > 0.$$

La boule est ici prise dans $\mathbb{R}^N$. La constante C est proportionnelle à la mesure de Lebesgue de W dans F.

Notons que l'on considère ici l'ensemble des points entiers de $B(x;n)$ qui sont projetés dans W plutôt que, dans le théorème de Schlottmann, l'ensemble des points de $B_E(0;r) \oplus W$. Cette différence est négligeable à la limite si x est pris dans la zone d'acceptance[2].

Remarque 2.3.4. Le théorème ci-dessus reste vrai si $x \notin S$, mais alors la limite n'est plus uniforme. En effet, à x, y fixés, pour n grand il y a peu de différence entre $B(x;n)$ et $B(y;n)$.

Ce théorème compte le nombre de points dans un amas. Cela dit, nous aurons plutôt besoin de compter combien il y a de points dans la projection sur F d'un amas. Ces deux quantités peuvent être différentes si $E \cap \mathbb{Z}^N$ n'est pas injective. Nous énonçons donc maintenant le lemme tel que nous en aurons besoin pour montrer le théorème 2.3.1.

Lemme 2.3.5. On considère $\mathbb{Z}^k$, et B_n la boule de centre 0 et de rayon n dans $\mathbb{Z}^k$. Soit $q : \mathbb{Z}^k \to F$ une injection de $\mathbb{Z}^k$, d'image dense, dans un espace vectoriel (on a alors $\dim(F) < k$). Alors pour tout ouvert U de F, il existe $C_1, C_2 > O$, tels que pour tout n assez grand,

$$C_1 n^p \leq \mathrm{Card}\left(q(B_n) \cap U\right) \leq C_2 n^p,$$

où $p = k - \dim(F)$.

Démonstration. On prouve ce résultat en utilisant le théorème de Schlottmann. Pour une preuve directe élémentaire (mais fastidieuse), on pourra se référer à [37].

[2] Un lecteur sceptique pourra revenir à l'équation (2.1) pour s'en convaincre.

On considère un espace E de dimension $k - \dim(F)$, et on considère l'espace $E \oplus F$, de dimension k. Alors il est possible de trouver une injection $i : \mathbb{Z}^N \to E \oplus F$ dont l'image est un réseau cocompact, et tel que $\pi_F \circ i = q$, où π_F est la projection sur F parallèlement à E. Alors on a une méthode de coupe et projection, et on applique le corollaire 2.3.3. □

Second lemme : compter des morceaux

On utilise la notation de Landau : $u_n = O(v_n)$ signifie qu'il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq C v_n$.

Lemme 2.3.6. Soit F un espace vectoriel réel de dimension p. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, pour toute famille $\{H_i\}_{i=1}^m$ d'hyperplans distincts de F, pour toute famille $(\alpha_i)_{i=1}^m$ d'entiers strictement positifs, pour toute famille de suites croissantes à valeurs entières $\left(\beta^{(i)}\right)_{i=1}^m$ vérifiant pour tout i que $\beta_n^{(i)} = O(n^{\alpha_i})$, on a la propriété suivante :

Si K est une partie ouverte, convexe et bornée de F, et $(K_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'ensemble telle que $K_0 = K$, et pour tout n, K_n est obtenu à partir de K en enlevant $\beta_n^{(i)}$ translatés de H_i (pour tout i), alors le nombre de composantes connexes de K_n, noté $c(n)$ vérifie :

$$c(n) = O(n^{\alpha}),$$

où $\alpha := \sum_{i\in I} \alpha_i$, et l'ensemble I est définit comme suit :

1. $\bigcap_{i\in I} H_i$ est de dimension minimale parmi tous les choix possibles de I ;
2. parmi les ensembles vérifiant la propriété précédente, I est de cardinal minimal (de sorte que $\operatorname{Card} I = p - \dim \bigcap_{i=1}^m H_i$).
3. parmi les ensembles vérifiant ces propriétés, I est choisi de sorte que α soit maximal.

Démonstration. Nous prouvons ce lemme par récurrence sur p. Si $p = 1$, alors $m = 1$, puisque le seul hyperplan est alors $\{0\}$. Alors K_n est un segment dont on a retiré $\beta_n^{(1)}$ points. C'est donc une union de $\beta_n^{(1)}$ intervalles. Par conséquent, $c(n) = \beta_n^{(1)} + 1 = O(n^{\alpha_1})$, et le lemme est prouvé pour $p = 1$.

Supposons que le lemme soit vrai pour tout espace de dimension $p - 1$. Soit F un espace vectoriel de dimension p. On se donne K, m, $(H_i)_{i=1}^m$, $(\beta^{(i)})_{i=1}^n$ et $(K_n)_{n\geq 0}$ comme dans l'énoncé. On introduit la notation suivante : si X est un ensemble, on note $\mathcal{C}(X)$ le nombre de composantes connexes de X. Ainsi, $c(n) = \mathcal{C}(K_n)$. Afin de fixer les notations, on se donne pour tout i, une suite croissante d'ensembles de F : $(X_n^{(i)})_{n\geq 0}$, tels que $\operatorname{Card}(X_n^{(i)}) = \beta_n^{(i)}$ pour tout i et tout n, et tels que

$$K_n = K \setminus \left(\bigcup_{i=1}^m (X_n^{(i)} + H_i) \right).$$

On note $c(x, k, n) := \mathcal{C}\Big((H_k + x) \cap \Big(K \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_n^{(i)} + H_i)\Big)\Big)$, et on remarque que les composantes connexes de K_n sont convexes (puisque ce sont des intersections de demi-espaces). Ainsi, $c(x, k, n)$ est exactement le nombre de composantes

connexes de K_n intersectées par l'hyperplan $H_k + x$. Donc pour tout $x \in X_n^{(i)}$, on a :

$$\mathcal{C}\Big(K \setminus \Big((x + H_k) \cup \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_n^{(i)} + H_i)\Big)\Big) = \mathcal{C}\Big(K \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_n^{(i)} + H_i)\Big). + c(x, k, n) \quad (2.3)$$

On peut interpréter l'équation ci-dessus de la manière suivante : si K' est un ensemble ouvert, constitué d'un certain nombre de composantes convexes disjointes, on veut compter le nombre de composantes de $K' \setminus H$, où H est un hyperplan affine. Le nombre de *nouvelles* composantes connexes obtenues en coupant K' par cet hyperplan est égal au nombre de composantes de K' intersectées par H ou encore, au nombre de composantes connexes de $K' \cap H$ (par convexité des composantes connexes de K). L'équation 2.3 explicite ce fait pour un K' particulier, ce qui permet d'itérer le processus. L'ensemble K_n peut être vu comme un ensemble convexe dont on a retiré des hyperplans *l'un après l'autre*. Ainsi, $c(n)$ peut s'exprimer par sommes successives, et on a :

$$c(n) = \sum_{k=0}^{m} \left(\sum_{x \in X_n^{(k)}} c(x, k, n) \right).$$

Ainsi, si on trouve un majorant indépendant de x et k à $c(x, k, n)$, on pourra trouver un majorant à $c(n)$. Ce majorant à $c(x, k, n)$ est obtenu en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Soit $1 \leq k \leq m$. Considérons l'ensemble suivant :

$$\left(K \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} (X_n^{(i)} + H_i) \right) \cap (H_k + x).$$

Cet ensemble est obtenu en considérant l'espace $F' := H_k + x$ (qui peut être vu comme un espace vectoriel en lui attribuant une origine arbitraire, par exemple x), et le sous-ensemble compact $K' := K \cap F'$. Cet ensemble K' est coupé par des hyperplans affines (de F') dirigés par les $H_j \cap H_k$, avec $j \neq k$. Il se peut que certains de ces hyperplans ne soient en fait pas distincts. On les réindexe pour obtenir $H'_1, \ldots, H'_s$ avec $s < m$. La suite de sous-ensemble $(K_n)_{n \geq 0}$ induit une suite $(K'_n)_{n \geq 0}$ de sous-ensembles de K' en prenant l'intersection avec F'. Les K'_n sont obtenus de K' en retirant des hyperplans dirigés par les H'_i. Le nombre d'hyperplans retirés à chaque étape est donné par une famille de suites croissantes à valeurs entières $\{\gamma^{(i)}\}_{i \in [\![1,s]\!]}$. Cherchons, pour tout i, une estimation asymptotique de $(\gamma_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$, puis nous appliquerons l'hypothèse de récurrence. Si $H'_i = H_{i(1)} \cap H_k = \ldots = H_{i(q)} \cap H_k$, alors $\gamma_n^{(i)} = O(n^{\delta_i})$, où $\delta_i := \max_j a_{i(j)}$.

On appelle I l'ensemble défini dans le lemme — c'est un sous-ensemble d'indices de $[\![1, m]\!]$, associé à un choix d'hyperplans parmi les H_i —, et I' le sous-ensemble de $[\![1, s]\!]$ comme défini dans l'énoncé du lemme, mais associé à un choix des hyperplans parmi les H'_i. Par hypothèse de récurrence, on a :

$$c(x, k, n) = \mathcal{C}(K'_n) = O(n^{\delta}),$$

où $\delta = \sum_{i \in I'} \delta_i$. Cette majoration ne dépend pas de x, donc en sommant sur $x \in X_n^{(i)}$, on a :

$$\sum_{x \in X_n^{(i)}} c(x, n, k) = O(n^{\delta + \alpha_k}).$$

Soient $i, j \in I \setminus \{k\}$. Alors $H_i \cap H_k \neq H_j \cap H_k$, à cause des deux premières condition dans la définition de I. Par conséquent, à $i \neq i' \in I$ correspondent deux hyperplans distincts $H'_i \neq H'_{i'}$. Donc toute somme de $p - 1$ éléments dans $I \setminus \{k\}$ est au moins égale à δ. On en déduit que $\alpha \geq \delta + \alpha_k$, et donc : $\sum_{x \in X_n^{(i)}} c(x, n, k) = O(n^{\delta + \alpha_k})$. Cette somme ne dépend plus de k, on peut donc sommer sur k, et on obtient :

$$c(n) = O(n^{\alpha}).$$

□

2.3.3 Preuve du théorème 2.3.1

Nous donnons maintenant la preuve du théorème établissant le comportement de la fonction de complexité pour les pavages coupe et projection. D'après la proposition 2.2.1, il s'agit de montrer, sous les hypothèses du théorème, que :

$$C_1 n^{\alpha} \leq c(n) \leq C_2 n^{\alpha}$$

pour tout n assez grand, avec C_1 et C_2 des constantes strictement positives et $c(n)$ le nombre de composantes connexes de Reg_n. Pour établir ce comptage du nombre de composantes connexes de Reg_n, nous supposerons que K est connexe. En effet, dans le cas où K est une union finie de composantes connexes, il suffira d'appliquer l'estimation à chacune d'entre elles, et à sommer pour obtenir l'estimation globale.

Majoration

On rappelle que la zone d'acceptance K est donc un polyèdre convexe dont l'ensemble des sommets est noté V.

La proposition 2.2.4 (équations 2.2) établit que

$$\mathrm{Sing}_n \cap K = \Big(\pi_F\big(B(0; n) \cap \mathbb{Z}^N\big) + \partial K\Big) \cap K.$$

Comme ∂K est inclus dans $V + \bigcup_{i=1}^m H_i$, on a :

$$\mathrm{Sing}_n \cap K = \Big(\pi_F\big(B(0; n) \cap \mathbb{Z}^N\big) + \bigcup_{i=1}^m H_i\Big) \cap K.$$

Il nous faut donc trouver une borne supérieure au nombre d'hyperplans distincts de l'ensemble

$$\pi_F\big(B(0; n) \cap \mathbb{Z}^N\big) + V + H_i$$

qui intersectent K. On appelle $\beta_n^{(i)}$ ce nombre. Il nous faut déterminer le comportement asymptotique de $(\beta_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$ puis appliquer le lemme 2.3.6.

Soit $q_i : F \to F/H_i$ l'application quotient. Elle envoie F sur un espace vectoriel de dimension 1, et envoie Γ sur Γ/Γ^i, qui est un groupe abélien libre de rang $\alpha_i + 1$. On veut trouver un majorant au nombre d'hyperplans de la forme $H_i + x$ où $x \in V + \pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N)$. Il suffit pour cela de choisir $x \in q(V + \pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N))$. Or, d'après le lemme 2.3.5, on a :

$$\mathrm{Card}\left(\pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N)\right) = O(n^{\alpha_i}).$$

Comme V est fini, on a donc :

$$\beta_n^{(i)} = O(n^{\alpha_i}).$$

Ce raisonnement (et donc cette majoration) tient pour tout $i \in [\![1, m]\!]$. On connaît donc un ordre de grandeur du nombre d'hyperplans parallèles à H_i intersectant K. On peut donc appliquer le lemme 2.3.6, et on a :

$$c(n) = O(n^{\alpha}).$$

Minoration

On considère l'ensemble d'indexation $I \subset [\![1, m]\!]$ défini dans l'énoncé du théorème, tel que $\sum_{i \in I} \alpha_i = \alpha$, et $\bigcup_{i \in I} H_i = \{O\}$. Pour tout $i \in I$, le lemme 2.2.8 assure l'existence d'un $M \in \mathbb{N}$ et d'un $\varepsilon_i > 0$ tels que pour tout $y \in \pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N)$, les points de $(H_i + y) \cap B(y; \varepsilon_i)$ sont $(n+M)$-singuliers. Soit ε le plus petit des ε_i. On considère un parallélotope $P \subset K$ d'intérieur non vide et inclus dans une boule de diamètre ε, dont les faces sont parallèles aux $\{H_i\}_{i \in I}$. Un tel parallélotope existe, du fait de la condition de transversalité sur les H_i.

En utilisant le même raisonnement que pour la majoration, on peut dire que pour tout $i \in I$ et pour un $v_i \in V_i$ fixé, le nombre de points dans $(\pi_F(B(0;n) \cap \mathbb{Z}^N)) \cap P$ modulo H_i est plus grand que $C_i n^{\alpha_i}$ pour un certain $C_i > 0$.

Alors, par le lemme 2.2.8, les points $(n+M)$-singuliers dans P contiennent au moins $C_i n^{\alpha_i}$ translatés distincts du type $P \cap H_i$, et ce, pour tout $i \in I$. Par conséquent, le nombre de composantes connexes de l'ensemble des points $(n+M)$-singuliers, quand on les restreint à P est au moins

$$\prod_{i \in I} C_i n^{\alpha_i} = C n^{\alpha}$$

où C est le produit des C_i. Par conséquent, on a :

$$c(n) \geq C n^{\alpha}.$$

2.4 Exemples

Dans cette section, nous appliquons nos résultats à trois exemples classiques : les hyperplans discrets (cas $d = N-1$), les suites de billards cubiques (cas $d = 1$), et le cas du pavage octogonal (un cas particulier avec $N = 4$ et $d = 2$.

2.4.1 Hyperplans discrets

Les pavages coupe et projection $(N, N-1)$ sont parfois appelés hyperplans discrets, car on peut les voir comme l'approximation d'un hyperplan par des points à coordonnées entières.

La complexité des hyperplans discrets a déjà été étudiée, notamment par [70] et [11] (dans le cas $N = 3$, mais leurs méthodes semblent se généraliser pour tout N).

Dans ce cas, l'espace F est de dimension 1, et il n'existe qu'un seul hyperplan singulier, à savoir $\{0\}$. Alors $\mathrm{Stab}_\Gamma(H) = \{0\}$, et la complexité ne dépend que du rang de Γ. Supposons que $E \cap \mathbb{Z}^N$ est de rang k (on a alors un groupe de périodes de rang k). Alors Γ est de rang $N - k$, et $\alpha = \mathrm{rg}(\Gamma) - 1 = N - k - 1 = d - k$.

On déduit que la complexité d'un hyperplan discret de dimension d, périodique dans k directions indépendantes croît comme n^{d-k}. Dans le cas $k = 0$ (totalement apériodique), la complexité est de l'ordre de n^d, ce qui est en accord avec les résultats de Berthé et Vuillon.

2.4.2 Suites de billards cubiques

Les suites sturmiennes (définies en section 1.4) peuvent être généralisées en augmentant la dimension N du réseau projeté. Les suites symboliques qui en résultent sont appelées suites de billard, car on peut les décrire par la trajectoire d'un point dans un cube qui rebondit sur les bords.

La complexité des suites de billards cubiques est un résultat connu, prouvé en dimension 3 par [4] et en toute dimension par [7]. Les résultats de ce chapitre permettent de retrouver leurs résultats, avec moins de précision.

L'hypothèse que $\Gamma := \pi_F(\mathbb{Z}^N)$ est dense dans F, et que F est de dimension $N - 1$ implique nécessairement que Γ est de rang N. Les hyperplans singuliers sont les $H_i := \mathrm{Vect}\left(\{\pi_F(e_k)\}_{k \neq i}\right)$. Le rang de $\mathrm{Stab}_\Gamma(H_i)$ est au moins $N - 1$ (par définition), et ne peut pas être N, par densité de Γ dans F.

Donc pour tout i, on a $\alpha_i = N - 1$, et la complexité d'une suite de billard cubique de dimension N dans une direction « irrationnelle » croît comme n^{N-1}.

2.4.3 Pavage octogonal

Le pavage octogonal est obtenu par coupe et projection avec $N = 4$ et $d = 2$, de la manière suivante. On note $(e_1, \ldots, e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On considère la matrice orthogonale suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est $X^4 + 1$, et ses sous-espaces invariants sont donc deux sous-espaces orthogonaux de dimension 2. On appelle E et $F = E^\perp$ ces sous-espaces, et π la projection orthogonale de $\mathbb{R}^4$ sur E.

Par calcul direct, on montre que la famille suivante est une base orthonormale de F :

$$F = \mathrm{Vect}\left((\sqrt{2}/2, 1/2, 0, -1/2), (0, 1/2, \sqrt{2}/2, 1/2)\right).$$

Ainsi, la matrice de π dans la base canonique est la suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathrm{can}}\, \pi_F = \begin{pmatrix} 1/2 & \sqrt{2}/4 & 0 & -\sqrt{2}/4 \\ \sqrt{2}/4 & 1/2 & \sqrt{2}/4 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/4 & 1/2 & \sqrt{2}/4 \\ -\sqrt{2}/4 & 0 & \sqrt{2}/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Alors le pavage octogonal est obtenu à partir de ces paramètres avec un domaine d'acceptance canonique. La figure 2.2 représente le domaine d'acceptance $K \subseteq F$ et les points 1-singuliers.

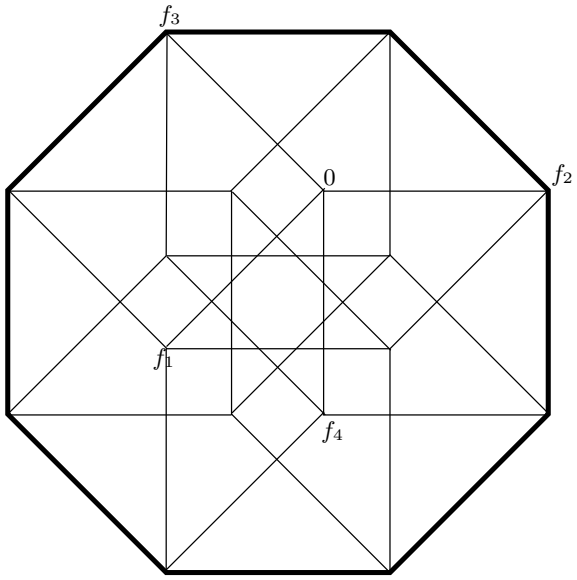


FIG. 2.2: Le domaine d'acceptance du pavage octogonal (comme sous-ensemble de F), avec les points 1-singuliers. Les f_i sont les projections des vecteurs de la base canonique sur F.

On note $f_1, \ldots, f_4$ les projections des $\{e_i\}$ sur F. Les quatre hyperplans singuliers sont les $H_i := \mathrm{Vect}(f_i)$. On voit que les H_i ont des stabilisateurs non triviaux :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Stab}_\Gamma(H_1) &= \langle f_1, f_2 - f_4 \rangle \\
\mathrm{Stab}_\Gamma(H_2) &= \langle f_2, f_1 + f_3 \rangle \\
\mathrm{Stab}_\Gamma(H_3) &= \langle f_3, f_2 + f_4 \rangle \\
\mathrm{Stab}_\Gamma(H_4) &= \langle f_4, f_1 - f_3 \rangle
\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $i \in [\![1, 4]\!]$, $\alpha_i = 2$, de sorte que $\alpha = 2$, et la complexité du pavage octogonal est de l'ordre de n^2.

Notons que le pavage octogonal peut être obtenu par substitution, et que ce résultat était donc déjà connu. On pourra se référer au chapitre 6 pour plus de détails sur la complexité des pavages coupe et projection.

2.4.4 Pavages de Penrose

Le calcul de la complexité pour les pavages de Penrose ne rentre pas exactement dans nos hypothèses, puisque pour le pavage de Penrose, on a $N = 5$ et $d = 2$, mais $\Pi_F(\mathbb{Z}^5)$ n'est pas dense dans F. Cela dit, le pavage de Penrose est « équivalent »en un certain sens à un pavage pour lequel $N = 4$ et $d = 2$, mais où le domaine d'acceptance K est constitué de plusieurs composantes connexes.

Chacune des composantes de K est un pentagone régulier, et on vérifie comme pour le pavage octogonal que Γ est de rang 4, et que chacun des α_i est égal à 1. Alors la complexité est encore quadratique.

Les pavages de Penrose peuvent aussi s'obtenir par substitution, et les méthodes du chapitre 6 permettent d'arriver au même résultat.

Chapitre 3

Liens entre complexité et cohomologie

Le comportement asymptotique de la fonction de complexité est une information combinatoire. Nous verrons au chapitre 6 que la complexité est un invariant métrique pour la distance définie au chapitre 1. Or, il se trouve que dans le cas des pavages coupe et projection, la complexité est liée à la topologie. Une explication intuitive que l'on peut en donner est la suivante : la complexité est liée au nombre d'amas du pavage. Par ailleurs, la topologie des pavages est liée à la récurrence des amas : P et $P - x$ sont proches si l'amas de P centré en 0 apparaît aussi centré en x. Plus il y a d'amas différents, moins l'orbite de P se « replie sur elle-même ». Or, la cohomologie est liée à ces replis de l'espace. Ces considérations heuristiques peuvent expliquer l'existence d'un lien entre complexité et cohomologie.

Dans le cadre des pavages coupe et projection canoniques, le résultat prouvé est le suivant (théorème 3.1.1) : les groupes de cohomologie sur $\mathbb{Q}$ d'un espace de pavage coupe et projection sans période sont de dimension finie si et seulement si sa complexité est dominée par n^d (où d est la dimension) La preuve ne rentre pas dans des technicités de calculs cohomologiques, mais utilise un critère de Forrest, Hunton et Kellendonk [27] sur le rang des groupes de cohomologie dans les pavages coupe et projection. Cela nécessitera de restreindre quelque peu la classe de pavages considérée. Dans le courant de la preuve, il viendra naturellement que l'exposant minimal de la complexité pour un pavage coupe et projection est $d - \mathrm{rg}(\Delta)$, où Δ est son groupe de périodes.

L'équivalence du théorème 3.1.1 est propre aux pavages coupe et projection. En effet, nous aurons l'occasion de voir un contre-exemple en dimension 1 : il existe un mot w indexé par $\mathbb{Z}$ dont la fonction de complexité croît plus vite que n'importe quel polynôme, mais tel que la cohomologie de sa suspension soit finiment engendrée sur $\mathbb{Q}$. En revanche, toujours en dimension 1, si la fonction de complexité d'un mot est dominée par une fonction linéaire en n, alors ses groupes de cohomologie (rationnelle) sont encore finiment engendrés (théorème 3.4.7). On peut se poser la question de la généralisation d'un tel résultat.

Dans tout ce chapitre, on supposera que les pavages considérés satisfont les hypothèses 2.1.2 et ont un domaine d'acceptance canonique.

3.1 Complexité minimale et rang des groupes de cohomologie

Dans cette section, nous montrons le théorème reliant complexité et cohomologie. Avec les notations du théorème 2.3.1, nous montrons que α est supérieur ou égal à $d - \mathrm{rg}(\Delta)$, où Δ est le rang du groupe des périodes du pavage coupe et projection. Nous montrons que l'on a égalité si et seulement si les rangs des groupes de cohomologie (sur $\mathbb{Q}$) sont finis.

3.1.1 Énoncé du théorème

Fixons les notations. Soit $(\mathbb{R}^N = E \oplus F, \mathbb{Z}^N, \pi, K)$ une méthode de coupe et projection satisfaisant les hypothèses 2.1.2. On se restreint ici au cas d'un domaine d'acceptance canonique (c'est-à-dire que K est la projection du cube unité). On note Δ le groupe des périodes des pavages de Ω : $\Delta = E \cap \mathbb{Z}^N$. On a montré au théorème 2.3.1 qu'il existe un entier α tel que pour tout n assez grand, la fonction de complexité p vérifie :

$$C_1 n^\alpha \leq p(n) \leq C_2 n^\alpha.$$

On rappelle qu'on note d la dimension de E, et p la fonction de complexité (définition 2.1.10).

On peut alors énoncer le théorème suivant.

Théorème 3.1.1. *Avec les notations ci-dessus, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout n assez grand,*

$$p(n) \geq C_1 n^{d - \mathrm{rg}(\Delta)}.$$

De plus, les rangs des groupes de cohomologie rationnelle $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\Omega; \mathbb{Q})$ de l'espace de pavage Ω associé à la méthode de coupe et projection sont finis si et seulement si cette minoration est optimale, c'est-à-dire :

$$p(n) \leq C_2 n^{d - \mathrm{rg}(\Delta)},$$

avec $C_2 > 0$.

3.1.2 Le critère de Forrest–Hunton–Kellendonk

La preuve de la seconde partie de ce théorème repose sur un critère de Forrest, Hunton et Kellendonk sur le rang des groupes de cohomologie. On introduit quelques notations.

Définition 3.1.2. Considérons une méthode de coupe et projection N sur d. Les ensembles Sing et Sing_n des points singuliers et n-singuliers respectivement, sont des unions d'hyperplans ou de morceaux d'hyperplans. On note $L^{(0)}$ l'ensemble des intersections de dimension 0 de Sing, et $L_n^{(0)}$ l'ensemble analogue de Sing_n.

Remarquons que Γ agit sur $L^{(0)}$, par translations.

Définition 3.1.3. On appelle un *espace singulier de dimension $N - d - 1$* un translaté d'un hyperplan singulier (définition 2.2.6), inclus dans Sing. Un *espace singulier de dimension k* est défini comme l'intersection de $N - d - k$ espaces singuliers de dimension $N - d - 1$.

Ainsi, les espaces singuliers de dimension k sont exactement les intersections d'espaces de la forme $H_j + \gamma + v$, avec $\gamma \in \Gamma$ et $v \in V_j$, où V_j est l'ensemble des sommets de K contenus dans une face parallèle à H_j (voir la proposition 2.2.7).

Nous citons maintenant le critère de Forrest, Hunton et Kellendonk. Ils ont développé des méthodes de calcul effectives pour les pavages coupe et projection à domaine d'acceptance canonique en codimensions 1, 2, et dans une certaine mesure, en codimension 3. Leur approche pour le calcul se base sur la cohomologie des groupes : ils montrent qu'on peut voir un pavage coupe et projection comme un $\mathbb{Z}^d$-système dynamique, et appliquent des méthodes de cohomologie des groupes (voir section 1.3.2). Ils donnent également un critère général qui donne une caractérisation géométrique du fait que la cohomologie est finiment ou infiniment engendrée. On pourra se référer à [27] pour des détails de calculs.

Théorème 3.1.4 (Forrest–Hunton–Kellendonk [27])**.** *Les groupes de cohomologie* $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\Omega;\mathbb{Q})$ *associés à un espace de pavages de coupe et projection canonique sont de dimension finie si et seulement si* $L^{(0)}/\Gamma$ *est fini.*

3.2 Preuve du théorème

Nous séparons la preuve du théorème 3.1.1 en deux parties. Tout d'abord, nous montrons que la complexité minimale d'un pavage est $n^{d-\mathrm{rg}(\Delta)}$. Ensuite, nous montrons que lorsque l'exposant de la complexité, α, est exactement égal à $n^{d-\mathrm{rg}(\Delta)}$, alors la cohomologie rationnelle est finiment engendrée.

3.2.1 $\alpha \geq d - \mathrm{rg}(\Delta)$

Commençons par remarquer qu'un élément $x \in F$ est dans $L^{(0)}$ si et seulement s'il existe $N-d$ hyperplans singuliers $(H_j)_{j\in J}$ dont l'intersection est de dimension zéro, et $N-d$ éléments $(\gamma_j)_{j\in J}$ dans Γ, et des éléments $v_j \in V_j$, tels que :

$$x = \bigcap_{j\in J} \big(H_j + \gamma_j + v_j\big)$$

On rappelle que V_j est l'ensemble des sommets des faces de K qui sont parallèles à H_j.

Considérons donc une méthode de coupe et projection N sur d, et $p(n)$ la fonction de complexité. On sait (théorème 2.3.1) que $p(n)$ croît comme n^α, avec α un entier. On veut prouver que $\alpha \geq d - \mathrm{rg}(\Delta) = d + \mathrm{rg}(\Gamma) - N$.

Notation. On rappelle que Γ^j désigne le stabilisateur dans Γ de l'hyperplan singulier H_j. Pour $J \subset \{1\dots m\}$, on note H_J l'intersection $\bigcap_{j\in J} H_j$, on note $\Gamma^J = \mathrm{Stab}_\Gamma(H_J)$, et $a_J = \mathrm{rg}(\Gamma^J)$. On utilise la convention $H_\emptyset = F$, et $\Gamma^\emptyset = \Gamma$.

On utilise les notation du théorème 2.3.1 :

$$\alpha = \sum_{i\in I} \alpha_i, \text{ avec } \alpha_i = \mathrm{rg}\,(\Gamma/\Gamma^i) - 1 = \mathrm{rg}\,\Gamma - a_i - 1,$$

et les $(\alpha_i)_{i\in I}$ sont choisis comme étant les $N-d$ plus grands parmi tous les

$(\alpha_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$, et tels que $\bigcap_{i\in I} H_i = \{0\}$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\alpha &= (N-d)\operatorname{rg}(\Gamma) - (N-d) - \sum_{i\in I} a_i \\ &= \big(d+\operatorname{rg}(\Gamma)-N\big) + \left[(N-d-1)\operatorname{rg}(\Gamma) - \sum_{i\in I} a_i\right] \\ &= \big(d-\operatorname{rg}(\Delta)\big) + \left[(N-d-1)\operatorname{rg}(\Gamma) - \sum_{i\in I} a_i\right].\end{aligned} \tag{3.1}$$

et les a_i, $i \in I$, sont les $N-d$ *plus petits* parmi les $(a_j)_{j\in[\![1,m]\!]}$ (avec la condition de transversalité sur les $(H_i)_{i\in I}$, de sorte que $a_I = 0$).

Étant donnés deux ensembles d'indexation $J, J' \subseteq [\![1,m]\!]$, on considère l'application suivante :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_{J,J'}: & \Gamma/\Gamma^{J\cup J'} & \longrightarrow & \Gamma/\Gamma^J \times \Gamma/\Gamma^{J'} \\ & [x]_{J\cup J'} & \longmapsto & ([x]_J, [x]_{J'})\end{array}$$

où $[x]_J$ désigne la classe d'équivalence de x dans Γ modulo Γ^J. On vérifie facilement que cette application est bien définie et injective. Ainsi, le rang du groupe d'arrivée est au moins égal au rang du groupe de départ (remarquons que ces deux groupes sont abéliens libres). On en déduit la condition suivante sur les rangs :

$$\operatorname{rg}(\Gamma) - a_{J\cup J'} \leq \operatorname{rg}(\Gamma) - a_J + \operatorname{rg}(\Gamma) - a_{J'},$$

soit :

$$a_J + a_{J'} - a_{J\cup J'} \leq \operatorname{rg}(\Gamma). \tag{3.2}$$

Nous allons appliquer cette inégalité $N-d-1$ fois à l'équation (3.1). Si on numérote $i(1), \ldots, i(N-d)$ les éléments de I. Alors on peut écrire :

$$\begin{aligned} a_{i(1)} + a_{i(2)} &\leq a_{\{i(1),i(2)\}} + \operatorname{rg}(\Gamma); \\ a_{i(1)} + a_{i(2)} + a_{i(3)} &\leq a_{\{i(1),i(2)\}} + a_{i(3)} + \operatorname{rg}(\Gamma) \\ &\leq a_{\{i(1),i(2),i(3)\}} + 2\operatorname{rg}(\Gamma); \\ &\vdots \\ \sum_{i\in I} a_i &\leq (N-d-1)\operatorname{rg}(\Gamma) + a_I \\ &= (N-d-1)\operatorname{rg}(\Gamma). \end{aligned} \tag{3.3}$$

On déduit que $\left[(N-d-1)\operatorname{rg}(\Gamma) - \sum_{i\in I} a_i\right]$ est positif. Avec l'équation (3.1), on obtient :

$$\alpha \geq d + \operatorname{rg}(\Gamma) - N = d - \operatorname{rg}(\Delta).$$

Cela prouve la première partie du Théorème 3.1.1.

Remarque 3.2.1. La suite d'inéquations 3.3 n'est pas propre à l'ensemble I. On peut l'écrire pour tout ensemble d'indexation J (la dernière ligne nécessite que $a_J = 0$, c'est-à-dire $\bigcap_{j\in J} H_j = \{0\}$). Cela sera utilisé par la suite.

3.2.2 Le cas d'égalité

Prouvons maintenant que $\alpha = d - \operatorname{rg}(\Delta)$ si et seulement si $L^{(0)}/\Gamma$ est fini.

Première implication Commençons par montrer par une récurrence décroissante que si on a l'égalité, alors $L^{(0)}/\Gamma$ est fini. On suppose donc $\alpha = d - \mathrm{rg}(\Delta)$, et on considère l'hypothèse de récurrence suivante :

> *Pour un certain $k < N-d$ et pour tout espace de dimension k de la forme H_J (tel que $J \subset \{1, \ldots, m\}$ est de cardinal $N-d-k$), l'ensemble des espaces singuliers de dimension k (au sens de la définition 3.1.3) qui sont dirigés par H_J est constitué d'un nombre fini de Γ-orbites de translatés de H_J.*

L'assertion ci-dessus est évidente pour $k = N-d-1$, puisque l'ensemble des espaces singuliers de dimension $(N-d-1)$ dirigés par H_i est incluse dans $H_i + V + \Gamma$ pour tout i (voir proposition 2.2.7), et V est fini.

Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $k+1$ fixé, et montrons que l'ensemble des espaces singuliers de dimension k dirigés par un espace vectoriel H_J donné est une union finie de Γ-orbites. Soit J de cardinal $N-d-k$, tel que H_J est de dimension k. On choisit $j \in J$, et on définit $J' := J \setminus \{j\}$. On considère l'application $\varphi_{J',j} := \varphi_{J',\{j\}}$ comme définie ci-avant. On déduit du raisonnement itératif utilisé pour obtenir la suite d'inéquations (3.3) et de la remarque suivante, que pour tout élément I' de $N-d$ éléments vérifiant $H_{I'} = 0$, alors on a :

$$(N-d-1)\,\mathrm{rg}(\Gamma) - \sum_{i \in I'} a_i \geq 0. \tag{3.4}$$

De plus, on a supposé que $\alpha = d - \mathrm{rg}(\Delta)$. Par conséquent, pour le choix particulier $I' = I$, l'inégalité ci-dessus est optimale : c'est une égalité. Mais le choix de I est fait de telle sorte que les a_i sont *minimaux* parmi tous les choix autorisés. L'équation (3.4) est donc toujours positive, et son maximum est zéro. Par conséquent, pour tout choix I' tel que $H_{I'} = \{0\}$, on a :

$$(N-d-1)\,\mathrm{rg}(\Gamma) - \sum_{i \in I'} a_i = 0. \tag{3.5}$$

On affirme que sous l'hypothèse $\alpha = d - \mathrm{rg}(\delta)$, l'inégalité (3.2) est en fait une égalité. Pour cela, il suffit de montrer :

$$a_{J'} + a_j = a_J + \mathrm{rg}(\Gamma). \tag{3.6}$$

En effet, si on avait $a_{J'} + a_j < a_J + \mathrm{rg}(\Gamma)$, alors on pourrait prendre pour I' un ensemble de $N-d$ éléments d $\{1, \ldots, m\}$ contenant J. Alors, en appliquant les inégalités (3.3) à I', l'une des itération serait une inégalité stricte. Cela impliquerait alors :

$$(N-d-1)\,\mathrm{rg}(\Gamma) - \sum_{i \in I'} a_i > 0,$$

ce qui contredirait l'équation (3.5) ci-dessus.

On considère donc l'application $\varphi_{J',j} : \Gamma/\Gamma^J \to (\Gamma/\Gamma^{J'}) \times (\Gamma/\Gamma^j)$: on a montré qu'elle est injective. De plus, le groupe source a pour rang $\mathrm{rg}(\Gamma) - a_J$ et le groupe image est de rang $2\,\mathrm{rg}(\Gamma) - a_{J'} - a_j$. Mais on a montré (équation (3.6)) que ces deux groupe ont le même rang. Cela n'implique pas que $\varphi_{J',j}$ est surjective, mais son image est d'indice fini, et par conséquent, son conoyau G est fini.

Pour conclure la preuve de notre implication, il suffit de considérer l'ensemble des espaces affines de la forme :

$$(H_{J'} + \gamma_1) \cap (H_j + \gamma_2),$$

pour tout $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$. Comme Γ n'agit pas librement sur ces espaces, il suffit de considérer les intersections de cette forme pour $\gamma_1 \in \Gamma^{J'}$, et $\gamma_2 \in \Gamma^j$. On a alors une bijection entre $(\Gamma/\Gamma^{J'}) \times (\Gamma/\Gamma^j)$ et l'ensemble des espaces de la forme ci-dessus. On quotiente alors par Γ (ou par l'image de $\varphi_{J',j}$, ce qui revient au même), et on obtient que l'ensemble des espaces affines de la forme ci-dessus est constituée d'un nombre fini de Γ-orbites.

Pour traiter le cas de tous les espaces singuliers de dimension k, il suffit de considérer les espaces de la forme :

$$(H_{J'} + \gamma_1 + v_1) \cap (H_j + \gamma_2 + v_2),$$

pour tous les choix de $J' \subset \{1, \ldots, m\}$ de cardinal $\mathrm{Card}(J) - 1$, tels que $H_J \subset H_{J'}$, pour tous les choix de j tels que $H_{J'} \cap H_j = H_J$, pour tous les choix de $v_2 \in V$. De plus, par hypothèse de récurrence, l'ensemble des espaces singuliers de dimension $k+1$ est constitué d'un nombre fini de Γ-orbites. Donc on peut se contenter de prendre v_1 dans un ensemble fini pour que les espaces de la forme ci-dessus constituent l'ensemble des espaces singuliers de dimension k. Comme tous les choix que l'on peut faire sont finis, on en déduit que l'ensemble des espaces singuliers de dimension k dirigés par H_J est constitué d'un nombre fini de Γ-orbites. Ce raisonnement peut être fait pour tout ensemble J, donc l'hypothèse de récurrence se transmet au rang k.

Ainsi, par récurrence, l'hypothèse est vraie pour tout k. En particulier, pour $k = 0$, cela implique que $L^{(0)}$ est constitué d'un nombre fini de Γ-orbites.

Réciproque On suppose que $\alpha > d - \mathrm{rg}(\Delta)$. Cela implique qu'au moins une des inégalités des inéquations (3.3) est stricte. Cela signifie qu'il existe un $J' \subseteq \{1, \ldots, m\}$, et un $j \in \{1, \ldots, m\}$ tels que

$$a_{J'} + a_j < a_J + \mathrm{rg}(\Gamma),$$

avec $J = J' \cup \{j\}$, et tels que $\dim(H_J) = \dim(F) - \mathrm{Card}(J)$. Comme on l'a dit ci-dessus, cela prouve que l'ensemble des espaces singuliers de dimension k de la forme

$$(H_{J'} + \gamma_1) \cap (H_j + \gamma_2)$$

est l'union d'une infinité de Γ-orbites de translatés de H_J Par conséquent, on prend l'intersection de ces espaces avec n'importe quel espace singulier supplémentaire, et on déduit que $L^{(0)}$ est l'union d'une infinité de Γ-orbites.

3.3 Rigidité des pavages coupe et projection de basse complexité

Le théorème 3.1.1 montre qu'il existe une certaine rigidité pour les pavages coupe et projection : pour qu'un pavage ait des groupes de cohomologie rationnelle de dimension finie, il est nécessaire que l'exposant α de la complexité soit minimal. Le fait pour α d'être minimal impose des conditions géométriques importantes sur les stabilisateurs des hyperplans singuliers. Nous faisons le lien avec un autre théorème de Forrest–Hunton–Kellendonk (dont nous montrerons la réciproque) pour montrer que la rigidité est encore plus forte.

Nous supposons pour cette section la chose suivante : soit $\{H_i\}_{i=1}^m$ l'ensemble des hyperplans singuliers, et $\{\overrightarrow{n_i}\}_{i=1}^m$ l'ensemble des normales des H_i. On fait l'hypothèse que $\{\overrightarrow{n_i}\}_{i=1}^m$ est *indécomposable* [27, déf. 3.5, chap. IV] en le sens que pour toute partition (A, B) de $[\![1, m]\!]$, $H_A \cap H_B$ est non réduit à $\{0\}$.

Définition 3.3.1 (Définition 6.6, chap. IV dans [27])**.** Pour tout $l \in [\![0, \dim(F)]\!]$, on définit $\mathcal{I}_l$ comme l'ensemble des sous-ensembles $J \subset [\![1, m]\!]$ de cardinal $\dim(F) - l$, tels que $\dim(H_j) = l$.

Théorème 3.3.2 (Théorème 6.7, chap. IV dans [27])**.** *Soit* $(\mathbb{R}^N = E \oplus F, K, \pi)$ *une méthode de coupe et projection canonique, telle que les hyperplans singuliers vérifient les hypothèses ci-dessus. Si* $L^{(0)}/\Gamma$ *est fini (ou de manière équivalente, si la cohomologie de l'espace de pavage associé est de dimension finie, par le théorème 3.1.4), alors pour tout* $l \in [\![0, \dim(F)]\!]$ *et tout* $J \in \mathcal{I}_l$*, on a :*

$$\mathrm{rg}(\Gamma^J) = l\frac{\mathrm{rg}(\Gamma)}{\dim(F)}.$$

Tout d'abord, on énonce la proposition suivante, qui contient la réciproque de ce théorème.

Proposition 3.3.3. *Avec les notation ci-dessus, on a équivalence entre les propositions suivantes :*

(i) $L^{(0)}/\Gamma$ *est fini ;*

(ii) pour tout $i \in [\![1, m]\!]$*,*

$$\mathrm{rg}(\Gamma^i) = (\dim(F) - 1)\,\mathrm{rg}(\Gamma)/\dim(F)\,;$$

(iii) pour tout $l \in [\![0, \dim(F)]\!]$ *et tout* $J \in \mathcal{I}_l$*,*

$$\mathrm{rg}(\Gamma^J) = l\frac{\mathrm{rg}(\Gamma)}{\dim(F)}.$$

Démonstration. (ii) ⇒ (i) — Supposons que pour tout i, on ait

$$\mathrm{rg}(\Gamma^i) = (\dim(F) - 1)\frac{\mathrm{rg}(\Gamma)}{\dim(F)}.$$

Comme $\dim(F) = N - d$, on a :

$$\mathrm{rg}(\Gamma^i) = (N - d - 1)\frac{\mathrm{rg}(\Gamma)}{N - d}.$$

Par conséquent, pour tout i, $\alpha_i = \mathrm{rg}(\Gamma/\Gamma^i) - 1$, et donc $\alpha = d$. Puisque tous les α_i sont égaux, on multiplie cette quantité par $N - d$ pour obtenir α. Alors,

$$\alpha = d - N + \mathrm{rg}(\Gamma) = d - \mathrm{rg}(\Delta).$$

Par conséquent, la complexité est minimale. On applique alors le théorème 3.1.1 pour en déduire que $L^{(0)}/\Gamma$ est fini.

(i) ⇒ (iii) — Cela découle du théorème 3.3.2.

(iii) ⇒ (ii) — C'est le cas particulier $l = \dim(F) - 1$. □

3.4 Complexité et cohomologie en dimension 1

Dans cette section, on utilise les graphes de Rauzy (définition A.1.1) pour établir des résultats liant la complexité et la cohomologie des pavages de dimension 1.

Cette section se démarque des précédentes car elle ne traite plus des pavages coupe et projection, mais plutôt étend la question d'un lien entre complexité et cohomologie à d'autres types de pavages.

3.4.1 Cohomologie et graphes de Rauzy

Soit w un mot bi-infini de dimension 1 sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. On note Σ le sous-décalage associé à w, et $S\Sigma$ la suspension de l'action du décalage sur Σ (voir section 1.2). On note p la fonction de complexité associée à w, qui à n associe le nombre de sous-mots distincts de longueur n. On note $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des graphes de Rauzy associés à w (définition A.1.1) On rappelle le théorème A.2.4.

Théorème A.2.4. *Il existe des applications $\gamma_n : R_{n+1} \to R_n$ telles que la suspension du sous-décalage engendré par le mot w est homéomorphe à la limite projective du système $(R_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

De plus, la cohomologie de Čech (voir section 1.3.1) se comporte bien face aux limites projectives (proposition 1.3.1). Ainsi, on a :

$$\check{\mathrm{H}}^\bullet(\varprojlim(R_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}; \mathbb{Q}) = \varinjlim(\mathrm{H}^\bullet(R_n; \mathbb{Q}), \gamma^*)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Par conséquent, il suffit d'avoir des informations sur la cohomologie des graphes de Rauzy pour en déduire des informations sur la cohomologie de $S\Sigma$.

Par construction, le nombre de sommets du n-ième graphe de Rauzy R_n est égal à $p(n)$, le nombre de facteurs de longueur n. Nous aurons besoin pour notre étude de la définition suivante.

Définition 3.4.1. Soit w un mot bi-infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$, et p sa fonction de complexité. On définit la fonction $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par :

$$s(n) = p(n+1) - p(n).$$

Si $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) = 2$, $s(n)$ compte le nombre de mots *spéciaux* de longueur n, c'est-à-dire le nombre de mots qui peuvent être prolongés de deux manières différentes. Si $\mathrm{Card}(\mathcal{A}) > 2$, ces mots spéciaux sont comptés avec multiplicité, ce qui est résumé par la proposition suivante.

Proposition 3.4.2.

$$s(n) = \sum_{f\in F_n} [\textit{nombre de mainères d'étendre } f \textit{ sur la droite } - 1]$$

Introduisons quelques notations relatives aux graphes.

Notation 3.4.3. Soit G un graphe orienté.

- Si s est un sommet de G, on note $d^+(s)$ le nombre d'arêtes partant de s. On définit de même $d^-(s)$ comme le nombre d'arêtes entrantes.
- Si e est une arête de G, on appelle e^+ le sommet vers lequel pointe e, et e^- son sommet de départ.

La proposition suivante relie la complexité et les propriétés topologiques des graphes de Rauzy.

Proposition 3.4.4. *Le rang du groupe de cohomologie* $\mathrm{H}^1(R_n;\mathbb{Z})$ *du* n*-ième graphe de Rauzy est égal à* $s(n)+1$.

Démonstration. Il est classique que la caractéristique d'Euler d'un espace topologique est définie comme la somme alternée des rangs des groupes de cohomologie. Par ailleurs, pour un groupe, cette caractéristique coïncide avec la différence entre le nombre d'arêtes et le nombre de sommets. On a donc :

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{H}^1(R_n;\mathbb{Z})\right) - \mathrm{rg}\left(\mathrm{H}^0(R_n;\mathbb{Z})\right) = \mathrm{Card}(E_n) - \mathrm{Card}(V_n).$$

Comme le graphe est connexe, $\mathrm{H}^0(R_n;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Par ailleurs, par construction, $\mathrm{Card}(V_n) = p(n)$. De plus, tout $e \in E_n$ correspond à un et un seul mot de longueur $n+1$ (qui est la concaténation de e^- et e^+), et tous les mots de longueur $n+1$ sont obtenus de la sorte. Par conséquent :

$$\mathrm{rg}\left(\mathrm{H}^1(R_n;\mathbb{Z})\right) = p(n+1) - p(n) + 1 = s(n) + 1.$$

□

Nous énonçons maintenant le lemme clef, qui permet de lier en général complexité et cohomologie pour les pavages de dimension 1.

Lemme 3.4.5. On suppose qu'il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que le rang des groupes de cohomologie des graphes de Rauzy est borné par M infiniment souvent. Alors les groupes de cohomologie de Čech rationnels de la limite inverse des groupes de Rauzy sont au plus de rang M.

Démonstration. On sait que la cohomologie de Čech de la limite inverse des graphes de Rauzy est égale à la limite directe des groupes de cohomologie des graphes :

$$\check{\mathrm{H}}^\bullet(\varprojlim(R_n,\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*};\mathbb{Q}) = \varinjlim(\mathrm{H}^\bullet(R_n;\mathbb{Q}),\gamma^*)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

Soit $x_1,\dots,x_{M+1}$ une famille de $M+1$ éléments dans la cohomologie de la limite. On note $\hat{x}_1,\dots,\hat{x}_{M+1}$ des relevés des x_i, de sorte que $\hat{x}_i$ est un élément de la cohomologie de l'un des graphes $R_{\varphi(i)}$. Soit N un majorant des $\{\varphi(i)\}_{i\in[\![1,M+1]\!]}$. On peut supposer N choisi de manière à ce que la cohomologie de R_N soit engendrée par au plus M éléments. On appelle $y_1,\dots,y_{M+1}$ les images des $\hat{x}_i$ dans la cohomologie de R_N. La cohomologie rationnelle de R_N est un espace vectoriel de dimension au plus M. Par conséquent, la famille des $(y_i)_{i\in[\![1,M+1]\!]}$ est liée : elle satisfait une relation linéaire à coefficients rationnels. On prend l'image de cette relation linéaire dans la limite inductive des groupes de cohomologie pour déduire que les x_i ne forment pas une famille libre. □

3.4.2 Les mots simples ont une cohomologie finiment engendrée

Nous prouvons maintenant que si un sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ minimal et apériodique est « simple » (en le sens que la fonction de complexité associée est majorée par une fonction affine), alors les groupes de cohomologie de sa suspension sont finiment engendrés.

Lemme 3.4.6. Soit w un mot bi-infini sur un alphabet fini, et p la fonction de complexité associée. On suppose qu'il existe $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p(n) \leq Cn$$

Alors la fonction $s : n \mapsto p(n+1) - p(n)$ ne tend pas vers $+\infty$; autrement dit, $s(n)$ est infiniment souvent plus petit qu'un entier M donné.

Un résultat bien plus fort a été en fait prouvé par Cassaigne [12, Thm. 1] : sous certaines hypothèses sur w, la fonction s est en fait *bornée*. Cela dit, ce résultat plus faible nous suffit.

Démonstration. Il suffit de remarquer que $p(n+1) = p(n) + s(n)$, et donc que $p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} s(k)$. Soit $M \in \mathbb{N}$. Supposons que $s(n)$ est plus grand que $M+1$ pour tout $n \geq n_0$. Alors $p(n)$ est plus grand que Mn pour n assez grand. Si s tend vers l'infini, on peut choisir M aussi grand qu'on veut, et alors p n'est borné par aucune fonction linéaire, ce qui est une contradiction. Donc s ne tend pas vers l'infini. □

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant.

Théorème 3.4.7. *Soit w un mot bi-infini sur un alphabet fini. On le suppose répétitif*[1] *et apériodique. Soit p la fonction de complexité associée à w, et Ω la suspension du sous-décalage associé à w.*

On suppose que $p(n) \leq Cn$ à partir d'un certain rang. Alors les groupes de cohomologie rationnelle $\check{\mathrm{H}}^\bullet(\Omega; \mathbb{Q})$ sont finiment engendrés.

Démonstration. Comme Ω est toujours connexe, il suffit de montrer que le premier groupe de cohomologie est finiment engendré. Par le théorème A.2.4, la suspension de Ω est homéomorphe à la limite projective des groupes de Rauzy. Donc ses groupes de cohomologie sont isomorphes à la limite injective des groupes de cohomologie des graphes R_n associés à w.

Par ailleurs, en utilisant le lemme 3.4.6, la condition de sous-linéarité sur la complexité permet de montrer que la fonction s est infiniment souvent plus petite qu'un entier M fixé. Mais par ailleurs, on a montré (proposition 3.4.4) que le rang de $\mathrm{H}^1(R_n; \mathbb{Q})$ était égal à $s(n)+1$. Donc ces groupes de cohomologie sont infiniment souvent de rang majoré par $M+1$. Il reste à appliquer le lemme 3.4.5 pour conclure que le rang de la limite inductive des groupes de cohomologie (rationnelle) est majoré par $M+1$. □

3.4.3 Un exemple de mot complexe ayant une cohomologie finiment engendrée

Notation. Si f est un mot fini, on note $|f|$ sa longueur.

On donne ici un exemple de mot bi-infini, dont la fonction de complexité croît plus vite que tout polynôme, mais tel que le premier groupe de cohomologie (rationnelle) de sa suspension est $\mathbb{Q}^2$. Je suis redevable à Julien Cassaigne pour m'avoir donné les idées qui m'ont permis de construire cet exemple. Grâce à l'analyse de la section 3.4.1 ci-avant, notamment du lemme 3.4.5, il suffit de

[1] Certains auteurs utilisent la terminologie *uniformément répétitif* pour signifier ce que nous appelons répétitif

construire un mot w très complexe dont une infinité de graphes de Rauzy est homotope à un bouquet de deux cercles. Par la proposition 3.4.4, il suffit de construire w de sorte que la fonction s associée (définition 3.4.1) vérifie

$$s(n) = 1 \text{ infiniment souvent.}$$

Construisons donc w sur un alphabet à deux lettres $\mathcal{A} = \{a, b\}$. On fait d'abord le choix d'un mot fini f_1 qui contient tous les mots de longueur 2 sur $\mathcal{A}$, sauf aa. On définit $u_1 = aabf_1baa$, et $v_1 = abbf_1baa$.

Supposons qu'on ait construit f_k, u_k et v_k, de sorte que $|u_k| = |v_k|$. On définit un mot f_{k+1} sur l'alphabet $\{0, 1\}$ de la manière suivante : f_{k+1} est un mot fini dans lequel tous les facteurs de longueur $|u_k|$ sur l'alphabet $\{0, 1\}$ apparaissent, sauf 00. On applique alors à f_{k+1} la substitution suivante :

$$\begin{cases} 0 \longmapsto u_k \\ 1 \longmapsto v_k \end{cases}$$

On appelle encore f_{k+1} le mot obtenu après cette substitution (c'est maintenant un mot sur l'alphabet $\{a, b\}$). On définit alors :

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= u_k u_k v_k f_{k+1} v_k u_k u_k \\ v_{k+1} &= u_k v_k v_k f_{k+1} v_k u_k u_k. \end{aligned}$$

Alors on a encore $|u_{k+1}| = |v_{k+1}|$.

Par induction, on construit une suite infinie de paires de mots $(u_k, v_k)_{k\in\mathbb{N}}$. De plus, pour tout k, le mot u_k apparaît dans f_k (à de nombreux endroits), donc u_k apparaît dans u_{k+1} dans une position non-extrémale. Par conséquent, la suite des u_k permet de définir un mot bi-infini w par inclusions successives.

Proposition 3.4.8. *Soit p la fonction de complexité de w. Alors $p(n)$ n'est dominée par aucune fonction polynomiale.*

Démonstration. Soit p' la fonction de complexité du langage $\mathcal{L} = \{ab, ba, bb\}$. Ce langage définit l'ensemble de mots bi-infinis sur $\{a, b\}$ qui ne contiennent pas aa. Ce sous-décalage contient $\{bab, bbb\}^{\mathbb{Z}}$, et par conséquent, $p'(3n) \geq 2^n$.

Comparons maintenant p et p'. Par définition,

$$p(|u_n|^2) \geq p'(|u_n|) \geq 2^{|u_n|/3}.$$

Donc il existe une infinité de valeurs de $N \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $p(N) \geq 2^{\sqrt{N}/3}$. Cela prouve que p ne peut pas être dominée par une fonction polynomiale. □

Montrons maintenant que l'homologie des graphes de Rauzy de w est infiniment souvent égale à $\mathbb{Z}^2$.

Lemme 3.4.9. Il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquels $s(n) = 1$ (où s est la fonction associée à w qui compte le nombre de facteurs spéciaux, voir définition 3.4.1).

Démonstration. On remarque que w a une structure hiérarchique en un certain sens. On peut réécrire de manière unique w sur l'alphabet $\{u_1, v_1\}$ (où u_1 et v_1 sont vus comme des symboles et non comme des mots). En effet, on peut

repérer chaque occurrence de $aaaa$ et de $baaab$ et rajouter une « coupure » de la manière suivante :

$$\begin{cases} aaaa \longmapsto aa.aa \\ baaab \longmapsto baa.ab \end{cases}$$

Le mot w est alors divisé en une concaténation de blocs, et chacun de ces blocs est exactement u_1 ou v_1.

De la même manière, on peut voir que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut réécrire w de manière unique comme un mot sur l'alphabet $\{u_k, v_k\}$ (où u_k n'est plus vu comme un mot mais comme un symbole). On appelle $\varphi_k(w)$ cette réécriture.

Soit $N = |u_{k+1}| + 4\,|u_k|$. Un sous-mot fini f de w est dit *spécial à droite* s'il peut être prolongé de deux manières différentes à droite. Étant donné f de longueur N, on peut le réécrire comme un mot sur l'alphabet $\{u_k, v_k\}$, à un préfixe et à un suffixe près, dont la longueur n'excède pas $2\,|u_k|$ (la longueur est prise sur l'alphabet $\{a, b\}$. On note f' le sous-mot de f qui peut se réécrire uniquement comme un mot sur $\{u_k, v_k\}$. Du fait du choix de N, il y a dans f' au moins une occurrence de l'un des motifs suivants : $(u_k)^4$ ou $v_k(u_k)^3v_k$.

L'occurrence de l'un de ces motifs permet de reconnaître que f est un sous-facteur de xu_{k+1} ou de xv_{k+1} respectivement, où $x \in \{u_{k+1}, v_{k+1}\}$ (*a priori*, on ne peut pas décider si x est l'un ou l'autre des deux symboles). Donc dans la plupart des cas, cela nous permet de prédire comment f peut s'étendre sur la droite, et f a donc une extension unique.

On sait que u_i et v_i commencent par u_{i-1} pour tout i, et que u_1 et v_1 commencent par a. Ainsi, le seul cas pour lequel l'extension n'est pas unique est lorsque f est de la forme $xu_{k+1}u_k \dots u_1a$ (avec x un préfixe non reconnaissable). On a alors deux cas :

- si la lettre suivante est a, alors le aa à la fin de fa détermine que l'unique extension de fa est $xu_{k+1}u_k \dots u_1u_1$, et donc par récurrence, son unique extension est $xu_{k+1}u_{k+1}$;
- si la lettre suivante est b, l'unique extension de fb sera $xu_{k+1}v_{k+1}$

Par conséquent, il n'existe qu'un seul mot spécial de longueur N. □

On a remarqué que dans le cas d'un alphabet à deux lettres, le nombre de mots spéciaux était égal à $s(n)$. Par conséquent, le lemme ci-dessus prouve (avec la proposition 3.4.4) qu'infiniment souvent, la cohomologie du n-ième graphe de Rauzy R_n associé à w est de rang 2. En appliquant le lemme 3.4.5, on en déduit que la cohomologie rationnelle de la limite inverse des R_n est de rang 2. Avec le théorème A.2.4, on en déduit :

Proposition 3.4.10. *Les groupes de cohomologie rationnels de l'espace de pavages associé à w sont de dimension finie.*

Chapitre 4

Représentation des pavages de substitution par des diagrammes de Bratteli

Les pavages de substitution, ou pavages auto-similaires, sont des pavages qui sont construits grâce à une règle d'*inflation et substitution* : chaque tuile peut être dilatée par un facteur λ et partitionnée, de sorte que chaque élément de cette partition est une tuile de l'alphabet. Ce procédé permet de construire par itération des amas de plus en plus gros, et à la limite, des pavages.

La notion de pavage auto-similaire, ou de structure hiérarchique est connue depuis longtemps, et a par exemple été mise en évidence pour les pavages de Penrose avant que la notion de substitution ne soit formalisée et systématiquement étudiée [34, 55]. Les substitutions ont été formalisées en dimension un [57], puis en dimension plus grande [42, 66]. On pourra se référer à l'ouvrage collectif [25] et aux articles [59, 29] pour une revue du sujet de différents points de vue, respectivement en dimension 1 et en dimension supérieure.

Dans la seconde partie de ce chapitre, on explique comment associer un diagramme de Bratteli à poids à un pavage de substitution. L'espace des chemins infini sur le diagramme, muni d'une métrique dépendant du poids, est alors homéomorphe à l'espace de pavages muni de la métrique usuelle.

Les diagrammes de Bratteli ont été introduits dans les années 1970 dans le but de classifier les C^*-algèbres AF. Elles ont été utilisées par Veršik pour encoder des actions mesurables de $\mathbb{Z}$, l'idée étant d'approcher une action par une suite d'actions périodiques [69]. Elles ont été ensuite adaptées dans le contexte topologique pour encoder des actions de $\mathbb{Z}$ sur des ensembles de Cantor, avec les travaux successifs de Herman–Putnam–Skau [35], Giordano–Putnam–Skau [33], et Durand–Host–Skau [20] et Forrest [26], notamment. Un sous-décalage minimal et sans orbite périodique de dimension 1 est un cas particulier d'action de $\mathbb{Z}$ sur un ensemble de Cantor.

En dimension plus grande, il est encore possible d'associer un diagramme à une substitution, mais alors on ne sait plus comment encoder la *dynamique*, même dans le cas où on considère un sous-décalage de $\mathbb{Z}^d$, et où la dynamique est « tout simplement » une action de $\mathbb{Z}^d$. L'idée d'associer un diagramme de Bratteli à un pavage est ancienne : on trouve une image du diagramme associé

au pavage de Penrose dans le livre de Connes [15].

La correspondance topologique entre un espace de pavages de substitution et l'espace des chemins du diagramme de Bratteli associé est montrée par Kellendonk [39]. Dans ce chapitre, on montre que cette correspondance peut être rendue bi-lipschitzienne pour un bon choix de poids sur le diagramme.

4.1 Pavages de substitution

Dans cette section, on donne la définition d'un pavage de substitution, et on énonce un certain nombre de propriétés vérifiées par ces pavages.

4.1.1 Définitions

Définition 4.1.1. Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de prototuiles de $\mathbb{R}^d$. On appelle *règle d'inflation–substitution* (ou simplement substitution) une application ω, associée à une constante $\lambda > 1$, telle que pour toute tuile t, $\omega(t)$ est un amas (fini) de support λt.

La substitution ω s'étend aux amas, et aux pavages. Il existe également une notion de substitution symbolique sur un alphabet $\mathcal{A}$: c'est une application qui à une lettre associe un mot fini de $\mathcal{A}^*$. De même, elle s'étend aux mots finis ou infinis.

Exemple 4.1.2.
1. L'exemple des suites sturmiennes donné au chapitre 1 est un exemple de substitution symbolique.
2. Le pavage *chair tiling* (figure 4.1) est un exemple de pavage de substitution apériodique.

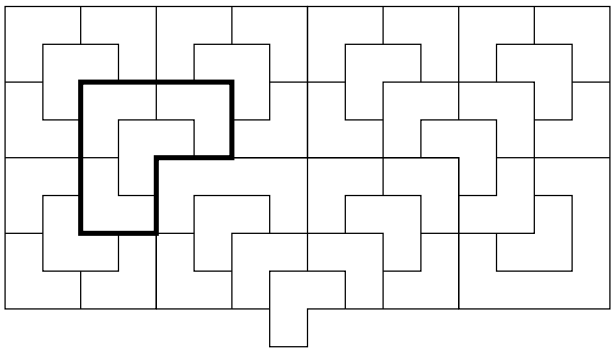


FIG. 4.1: Le *chair tiling*. Le facteur de dilatation est 2. On a graissé une « super-tuile » afin de mettre en évidence la règle de substitution.

3. La substitution représentée en figure 4.2 engendre des pavages périodiques (de période $\mathbb{Z}^2$ si les carrés sont de longueur 1).

Définition 4.1.3. Si ω est une substitution, sa *matrice d'abélianisation* est une matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in\mathcal{A}}$ dont les entrées sont indexées par l'ensemble des prototuiles, et sont définies par :

$$a_{ij} = \text{nombre d'occurrences de } i \text{ dans } \omega(j).$$

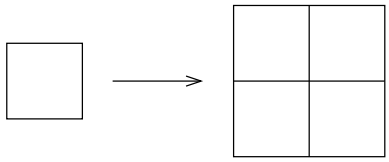


FIG. 4.2: Une substitution qui engendre un pavage périodique. Le facteur de dilatation est 2.

Cette matrice donne des informations combinatoires sur ω. Nous faisons l'hypothèse que la matrice A est *primitive*, au sens suivant.

Définition 4.1.4. Une matrice A est primitive si tous ses coefficients sont positifs, et s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que tous les coefficients de A^n soient strictement positifs.

Les matrices primitives ont plusieurs propriétés remarquables. Nous leur consacrerons la section 4.2 de ce chapitre. Pour l'instant, nous pouvons constater qu'une conséquence sur ω de la primitivité est que pour toutes tuiles $t, t' \in \mathcal{A}$, t apparaît dans $\omega^n(t')$ pour n assez grand. Cela signifie que toutes les tuiles apparaissent dans les pavages construits par itération de ω. Ainsi, l'hypothèse de primitivité permet de montrer la répétitivité.

On définit le langage associé à la substitution $\mathcal{L}_\omega$ comme l'ensemble de tous les amas qui sont inclus dans un $\omega^n(t)$ pour un $t \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}$. L'espace de pavage Ω_ω (ou simplement Ω) est l'espace associé à $\mathcal{L}_\omega$ comme défini en définition 1.1.5.

Comme l'application ω s'étend aux pavages, on peut la voir comme une fonction $\Omega \to \Omega$.

Définition 4.1.5. On dit que la substitution ω est dite *apériodique* si aucun des pavages de Ω n'a de période.

Nous avons besoin, en prévision de la suite, d'une hypothèse supplémentaire sur ω, introduite par Kellendonk [39]. Cette hypothèse est nécessaire pour associer la transversale d'un espace de pavages à un diagramme, comme nous le ferons en section 4.3.

Définition 4.1.6. On dit que ω *force sa frontière* (ou *force le bord*) s'il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in \mathcal{A}$, il existe un amas a_t contenant un ε-voisinage de $\omega^n(t)$, tel que pour tout pavage P, si $t \in P$, alors $a_t \subset \omega^n(P)$.

Autrement dit, le fait que t appartienne à P permet de savoir que $\omega^n(t)$ appartient à $\omega^n(P)$, et même un peu plus : on connaît quelles sont les tuiles adjacentes à $\omega^n(t)$. Cela ne revient pas à dire que chaque fois que $\omega^n(t)$ apparaît dans un pavage, alors on connaît les tuiles qui lui sont adjacentes. Ce n'est le cas que lorsque cet amas apparaît *en tant que substitué n-ième de t*.

Exemple 4.1.7. Considérons la substitution

$$\begin{aligned} \omega : a &\longmapsto baa; \\ b &\longmapsto ba. \end{aligned}$$

Alors chaque fois que b apparaît dans un mot infini w, on appelle x la lettre immédiatement à droite de b. Alors la première lettre de $\omega(x)$ est forcément un b, donc on sait que bab apparaît dans $\omega(w)$. On peut faire le même raisonnement à gauche, et montrer ainsi que ω force le bord. En revanche, le fait que ba apparaisse dans un pavage ne permet pas de dire que ce facteur est suivi de la lettre b, puisque baa est également un mot du langage.

On peut toujours modifier un pavage (rajouter des étiquettes aux tuiles, quitte à augmenter leur nombre) pour qu'il force sa frontière. On peut se référer à l'article d'Anderson et Putnam [1] pour les détails d'une telle construction. Le pavage initial et celui obtenu par cette décoration sont « identiques »en un certain sens[1], mais pour le second, la substitution force la frontière.

À partir de maintenant, les pavages de substitution que nous considérerons seront apériodiques, primitifs, et forceront le bord.

4.1.2 Propriétés

L'apériodicité d'un espace de pavages de substitution a une conséquence forte sur l'application $\omega : \Omega \to \Omega$. On a en fait l'équivalence suivante, prouvée par Solomyak (l'autre implication est relativement simple).

Théorème 4.1.8 (Solomyak [67])**.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) L'application $\omega : \Omega \to \Omega$ est injective ;

(ii) Tous les pavages de Ω sont apériodiques.

Proposition 4.1.9. *Soit ω une substitution primitive, apériodique, telle que $\mathcal{L}_\omega$ soit de complexité locale finie. Alors Ω est un ensemble non vide de pavages répétitifs et apériodiques. De plus, $\omega : \Omega \to \Omega$ est un homéomorphisme.*

Les pavages de substitution vérifient d'autres propriétés remarquables : notamment, le système dynamique associé $(\Omega, \mathbb{R}^d)$ est uniquement ergodique [66]. De plus, la structure auto-similaire permet de faire une construction relativement simple pour calculer les groupes de cohomologie de l'espace de pavages [1]. On sait de plus énoncer des propriétés quantitatives sur la récurrence des orbites (de manière combinatoire, sur le rayon maximal d'une boule contenant tous les amas d'une taille donnée).

Nous reviendrons plus particulièrement sur la complexité des pavages de substitution au chapitre 6. Pour appliquer la construction de Pearson–Bellissard et mener des calculs au chapitre 5, les aspects fondamentaux sont l'auto-similarité, et les propriétés des matrices primitives.

4.2 Propriétés des matrices primitives

On considère dans cette partie des substitutions dont la matrice d'abélianisation (définition 4.1.3) est primitive (définition 4.1.4). Dans cette partie, nous rappelons quelques propriétés classiques sur les matrices primitives. On pourra se référer au livre de Horn et Johnson [36] pour les démonstrations et des détails supplémentaires.

[1] Ils sont *mutuellement localement dérivables* : l'un peut se déduire de l'autre par un ensemble de règles locales, et réciproquement.

4.2.1 Rappels

On rappelle (définition 4.1.4) qu'une matrice A est *primitive* si A a tous ses coefficients positifs, et s'il existe un entier n tel que A^n a tous ses coefficients strictement positifs. Le théorème principal sur les matrices primitives est le théorème de Perron–Frobenius.

Théorème 4.2.1 (Théorème de Perron–Froebenius)**.** *Soit A une matrice primitive. Alors il existe une valeur propre réelle $\Lambda > 0$ de multiplicité 1, appelée* valeur propre de Perron–Frobenius *de A, telle que pour toute valeur propre $\nu \neq \Lambda$ de A, on a :*

$$|\nu| < \Lambda.$$

De plus, les vecteurs propres de ${}^tA$ et A associés à Λ (respectivement x_L et x_R) peuvent être choisis de manière à avoir toutes leurs coordonnées strictement positives.

Enfin, si x_L et x_R sont normalisés de sorte que $\langle x_L, x_R\rangle = 1$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A^n}{\Lambda^n} = B,$$

où B est la matrice de rang 1 définie par $B := (x_R)({}^tx_L)$.

Faisons une remarque à ce stade : si $A \in \mathrm{M}_l(\mathbb{Z})$ est une matrice primitive à coefficients entiers, alors :
- soit $A = (1)$ est une matrice 1×1 et son unique coefficient est 1 ;
- soit $\Lambda > 1$.

Nous éliminerons ce premier cas. Remarquons que si A est une matrice d'abélianisation d'une substitution primitive et apériodique, alors le premier cas est automatiquement exclu (car on aurait $\omega = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^d}$, et donc $\lambda = 1$).

Le dernier point du théorème de Perron–Frobenius (en particulier le fait que la matrice B a tous ses coefficients strictement positifs), combiné avec un résultat classique sur les suites récurrentes linéaires permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 4.2.2. *Soit $a_{i,j}^{(n)}$ le coefficient (i,j) de A^n. Alors :*

$$a_{i,j}^{(n)} = c_{ij}\Lambda^n + o(\nu^n)$$

lorsque $n \to +\infty$, où $\nu < \Lambda$, et $c_{ij} > 0$.

Démonstration. C'est un résultat classique de l'étude des suites définies par une récurrence linéaire que si A est diagonalisable, alors :

$$a_{i,j}^{(n)} = c_{ij}\Lambda^n + \sum_{k=1}^{l-1} c_k\mu_k^n \tag{4.1}$$

où les μ_k sont les valeurs propres de A, et les c_k sont des coefficients. Comme Λ est plus grand que tous les $|\mu_k|$ on a le résultat. Le fait que c_{ij} soit non nul s'obtient en considérant la limite :

$$c_{ij} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{ij}^{(n)}}{\Lambda^n}.$$

Par le théorème de Perron–Frobenius, c_{ij} est donc le coefficient (i, j) de la matrice B, et est donc strictement positif.

Si A n'est pas diagonalisable, on montre classiquement, en utilisant la forme de Jordan de A, que l'équation (4.1) est encore vraie en remplaçant les c_k par des polynômes en n. Alors on pose μ n'importe quel nombre réel compris strictement entre Λ et le plus grand des $|\mu_k|$, et on obtient le résultat. □

Dans le cas où la matrice A est la matrice d'abélianisation d'une substitution, on peut faire le lien entre λ (le facteur de dilatation de la substitution) et Λ (la valeur propre de Perron–Frobenius de A).

Lemme 4.2.3. Soit ω une substitution de dimension d et de facteur d'inflation λ, A sa matrice d'abélianisation, et Λ la valeur propre de Perron–Frobenius de cette matrice. Alors $\Lambda = \lambda^d$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que λ correspond à une dilatation du rayon des tuiles, alors que Λ correspond à une dilatation des volumes. En dimension d, on a donc $\Lambda = \lambda^d$. □

4.3 Diagrammes de Bratteli à poids

Dans cette section, nous définissons ce qu'est un diagramme de Bratteli auto-similaire, et nous montrons comment on peut naturellement associer un tel diagramme à une substitution. Du point de vue topologique, cela est connu [39] : la transversale d'un espace de pavages est homéomorphe à l'espace des chemins d'un diagramme de Bratteli. Nous montrons en plus que pour un bon choix de poids sur ce diagramme, l'homéomorphisme est alors bi-lipschitzien. L'objectif est alors d'appliquer au diagramme la construction de Pearson–Bellissard.

4.3.1 Diagramme associé à une substitution

Soit $A \in \mathrm{M}_l(\mathbb{N})$ une matrice primitive (définition 4.1.4) à coefficients entiers. Le diagramme de Bratteli auto-similaire associé à A est construit à partir d'un graphe orienté dont la matrice d'adjacence est A. Construisons d'abord le graphe.

Définition 4.3.1. Le graphe $\mathcal{G}$ associé à la matrice $A \in \mathrm{M}_l(\mathbb{N})$ est un graphe composé d'un ensemble de sommets $\mathcal{V} = \{v_1, \ldots, v_l\}$, et d'un ensemble d'arêtes orientées $\mathcal{E}$, tel que pour tout couple $(v_i, v_j) \in \mathcal{V}^2$, il y a exactement a_{ij} arêtes de v_i vers v_j. L'adjacence dans le graphe est encodée par deux fonctions source et but (ou *range*), que nous appelons respectivement s et $r : \mathcal{V} \to \mathcal{E}$.

La figure 4.3 illustre la construction de ce graphe.

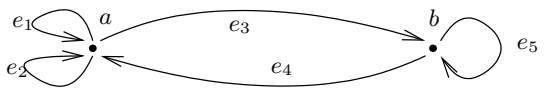


FIG. 4.3: Le graphe associé à la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

L'objet qui nous intéresse est l'ensemble des chemins à valeurs dans le graphe $\mathcal{G}$. Le diagramme de Bratteli $\mathcal{B}$ associé à A est un graphe orienté dont l'ensemble des chemins partant d'un sommet distingué appelé la racine est identique à l'ensemble des chemins dans $\mathcal{G}$. La différence entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{G}$ vient du fait que l'on distingue dans $\mathcal{B}$ les ensembles des sommets d'arrivée des chemins de longueur n et m pour $n \neq m$. Le diagramme de Bratteli correspondant au graphe de la figure 4.3 est représenté dans l'exemple 4.1.7, figure 4.4.

Définition 4.3.2. Le diagramme de Bratteli associé à la matrice A est construit à partir du graphe $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ associé à A comme suit. Il est constitué des ensembles suivants :

- l'ensemble des sommets de $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{V}_{\text{tot}}$, est l'union disjointe d'ensembles $\mathcal{V}_n$, $n \geq 0$, où :
  - $\mathcal{V}_0$ est un singleton constitué d'un unique élément appelé la *racine*, et noté $\circ$,
  - pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{V}_n$ est une copie de $\mathcal{V}$ identifiée à $\mathcal{V} \times \{n\}$;
- l'ensemble des arêtes de $\mathcal{B}$, noté $\mathcal{E}_{\text{tot}}$, est l'union disjointe d'ensembles $\mathcal{E}_n$, $n \geq 0$, où :
  - $\mathcal{E}_0$ est constitué d'arêtes partant de la racine vers les éléments de $\mathcal{V}_1$, de sorte que pour tout $v \in \mathcal{V}_1$, il existe exactement un $e \in \mathcal{E}_0$ reliant $\circ$ à v,
  - pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{E}_n$ est une copie de $\mathcal{E}$ identifiée à $\mathcal{E} \times \{n\}$ de sorte qu'à tout $e \in \mathcal{E}$ corresponde un unique $(e, n) \in \mathcal{E}_n$, reliant $(s(e), n) \in \mathcal{V}_n$ à $(r(e), n+1) \in \mathcal{V}_{n+1}$.

Les fonctions r et s sont étendues à $\mathcal{E}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ de manière à encoder l'adjacence. Ainsi, $s : \mathcal{E}_n \to \mathcal{V}_n$ et $r : \mathcal{E}_n \to \mathcal{V}_{n+1}$.

Dans la définition ci-dessus, nous avons supposé que $\mathcal{E}_0$ comprenait exactement une arête entre la racine et chaque élément de $\mathcal{V}_1$. On peut faire un choix différent, notamment lorsqu'on veut tirer parti de l'existence de symétries par rotation. On pourra voir [38] : des calculs sont faits sur des pavages avec des symétries de rotation, en encodant la rotation à la racine.

Définition 4.3.3. Un *chemin* de longueur $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ dans un diagramme de Bratteli auto-similaire est un élément

$$\gamma \in \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{E}_i,$$

tel que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $r(\gamma_{i-1}) = s(\gamma_i)$.

Un chemin, par définition, part de la racine. Nous pourrons avoir besoin de plus de précision, et nous pourrons dire « un chemin partant de $v \in \mathcal{V}_n$ et arrivant à $v' \in \mathcal{V}_m$ », pour désigner un élément

$$\gamma \in \prod_{i=n}^{m-1} \mathcal{E}_i,$$

vérifiant $r(\gamma_i) = s(\gamma_{i+1})$ pour tout $i \in [\![n, m-1]\!]$, ainsi que $s(\gamma_n) = v$, et $r(\gamma_{m-1}) = v'$.

Les fonctions r et s s'étendent naturellement aux chemins. Par abus de notation, nous désignerons parfois $r(\gamma)$ comme l'élément de $\mathcal{V}_n$, et parfois comme l'élément correspondant dans $\mathcal{V}$. Nous introduisons alors les notations suivantes :

Notation 4.3.4. On note :

1. $|\gamma|$ la longueur d'un chemin fini γ.
2. $\Pi_n(\mathcal{B})$ (ou simplement par Π_n) l'ensemble des chemins (enracinés) de longueur n dans $\mathcal{B}$;
3. Π l'ensemble des chemins finis ;
4. $\Pi_\infty(\mathcal{B})$ (ou simplement par Π_∞) l'ensemble des chemins infinis dans $\mathcal{B}$ partant de la racine ;
5. Π_γ avec $\gamma \in \Pi$ l'ensemble des chemins finis qui ont γ pour préfixe ;
6. $\Pi_{v\to v'}$ l'ensemble des chemins finis commençant en $v \in \mathcal{V}_{\text{tot}}$ et terminant en $v' \in \mathcal{V}_{\text{tot}}$;

Les notations 5 et 6 seront principalement utiles dans les preuves de lemmes techniques, lorsque nous devrons étudier finement la combinatoire du diagramme de Bratteli.

Les considérations de la section 4.2 nous permettent d'énoncer le résultat suivant.

Proposition 4.3.5. *Pour $v \in \mathcal{V}_n$ et $v' \in \mathcal{V}_{n+k}$, on a :*

$$\text{Card}\left(\Pi_{v\to v'}\right) = C\Lambda^k + O(\eta^k),$$

où $0 < \eta < \Lambda$, et C une constante strictement positive. Cette domination est encore vérifiée pour Π_k avec une constante différente.

En particulier, on a :

$$\text{Card}(\Pi_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} C\Lambda^n$$

avec C une constante strictement positive.

Démonstration. Le résultat pour $\pi_{v\to v'}$ résulte de la proposition 4.2.2 : il suffit de remarquer que le nombre de chemins de v vers v' de longueur k est le coefficient (v, v') de la matrice A^k. Le résultat pour Π_k se déduit par sommation finie. □

Définition 4.3.6. Étant donnés deux chemins γ et γ' de Π, on désigne par $\gamma\wedge\gamma'$ le plus grand commun préfixe de γ et γ' (ce préfixe pouvant être le chemin vide).

Définition 4.3.7. Si γ est un chemin fini ou infini, et $k < |\gamma| + 1$, on définit $\gamma|_k$ (la restriction de γ de longueur k) comme le chemin formé des k premières arêtes de γ.

Ces ensembles de chemins sont naturellement munis de la topologie produit (où chaque $\mathcal{E}_n$ est lui-même muni de la topologie discrète). Cela fait de Π_n un ensemble discret pour tout n, et la topologie qui en résulte pour Π_∞ est donnée par la proposition suivante, dont la démonstration est bien connue.

Proposition 4.3.8. *Si la matrice A est primitive (et différente de* (1)*, alors l'ensemble Π_∞ des chemins infinis sur $\mathcal{B}$ muni de la topologie produit est un ensemble de Cantor.*

Une base de voisinages ouverts et fermés pour la topologie de Π_∞ est donnée par les ensembles

$$[\gamma] \ ; \qquad \gamma \in \Pi,$$

où $[\gamma]$ est l'ensemble des chemins de Π_∞ qui ont γ comme préfixe.

4.3.2 L'application de Robinson

Soit (Ω, ω) un espace de pavages de substitution de complexité locale finie, tel que ω soit primitive et force sa frontière. On appelle A la matrice d'abélianisation de ω, et $\mathcal{A}$ l'ensemble des prototuiles. On suppose que les prototuiles sont pointées, et on appelle Ξ la transversale canonique associée à ce pointage.

Soit $\mathcal{B} = (\mathcal{V}_{\text{tot}}, \mathcal{E}_{\text{tot}}, r, s)$ le diagramme de Bratteli associé à A. Chaque $\mathcal{V}_n$ est une copie de $\mathcal{V}$, et $\mathcal{V}$ est en bijection avec l'ensemble d'indexation de la matrice A, qui lui même est du même cardinal que l'alphabet $\mathcal{A}$. On peut donc identifier $\mathcal{V}$ et $\mathcal{A}$. Cette bijection sera notée implicitement : $v_t \in \mathcal{V}$ correspond au sommet associé à $t \in \mathcal{A}$; réciproquement, t_v correspond à la tuile associée au sommet v.

De plus, par construction, pour tout $t, t' \in \mathcal{A}$, il existe autant d'arêtes de $v_{t'}$ vers v_t qu'il y a d'occurrences de t' dans $\omega(t)$. Ainsi, une identification entre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{V}$ étant donnée, pour tout $t, t' \in \mathcal{V}$, on peut identifier $s^{-1}(v_t) \cap r^{-1}(v_{t'}) \subset \mathcal{E}$ avec l'ensemble des occurrences de t dans $\omega_{t'}$. Ce dernier choix est arbitraire, mais on le fait une fois pour toute.

Construction d'une identification $\Pi_\infty \to \Xi$

Voyons comment on peut identifier Π_∞ avec la transversale de Ω. Nous allons décrire la construction de l'application entre ces deux espaces, connue sous le nom d'*application de Robinson*, et construite dans [39].

La construction de cette application repose sur des extensions successives de l'identification tuiles–sommets. Telle que nous l'avons définie pour l'instant, cette identification associe des prototuiles aux arêtes de $\mathcal{V} \simeq \mathcal{V}_1$. Autrement dit, comme $\mathcal{V}_1$ s'identifie à $\mathcal{E}_0$, elle identifie les chemins de longueur 1 aux prototuiles. Nous faisons le choix d'un représentant pour les prototuiles : $t \in \mathcal{A}$ désignera soit une prototuile (la classe d'équivalence par translation), soit le représentant de cette classe qui a son pointeur en 0. Ainsi, nous définissons $\psi(e)$ $(e \in \mathcal{E}_0)$ comme la tuile dans la classe de $t_{r(e)}$ qui a son pointeur à l'origine.

L'application ψ est définie sur les chemins de longueur 1 ; on veut l'étendre aux chemins finis dans Π_∞, de manière à leur associer un amas. Cette application devra vérifier que si γ est un préfixe de γ', alors $\psi(\gamma)$ est un amas inclus dans $\psi(\gamma')$. Pour étendre en une application $\Pi_\infty \to \Omega$ (que nous appellerons encore ψ), il suffira de définir l'image d'un chemin infini comme l'union des images de ses préfixes, et vérifier que cette union est bien un pavage (et non un pavage partiel).

On étend ψ par récurrence. Supposons $\psi : \Pi_n \to \mathcal{A}^*$ construit, et supposons que pour tout chemin γ de longueur n, $\psi(\gamma)$ est un certain translaté de $\omega^{n-1}(t_{r(\gamma)})$ (cette dernière condition est vérifiée pour les chemins de longueur 1). Étendons ψ aux chemins de longueur $n+1$. Soit $\gamma = (\gamma_0, \ldots, \gamma_n)$ un chemin de longueur $n+1$. L'amas $\psi(\gamma|_{n-1})$ est bien défini, et c'est un translaté de $\omega^{n-1}(t_{r(\gamma)})$. On considère la tuile $t_0 := \omega^{-n+1}(\psi(\gamma|_{n-1}))$. C'est un translaté de $t_{r(\gamma)}$. De plus, l'arête γ_n encode une inclusion

$$t_{s(\gamma_n)} \hookrightarrow \omega\big(t_{r(\gamma_n)}\big).$$

Autrement dit, il existe un x tel que t_0 appartient à l'amas $\omega(t_{r(\gamma_n)}) - x$, et c'est la tuile correspondant à l'inclusion encodée par γ_n. Alors on définit

$$\psi(\gamma) := \omega^n(t_{r(\gamma)}) - \lambda^{n-1}x,$$

et il satisfait nos conditions.

Exemple 4.3.9. Voyons un exemple dans le cas de dimension 1. On considère la substitution de l'exemple 4.1.7 :

$$a \longmapsto baa$$
$$b \longmapsto ba.$$

La matrice associée est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors le diagramme associé représenté en figure 4.4.

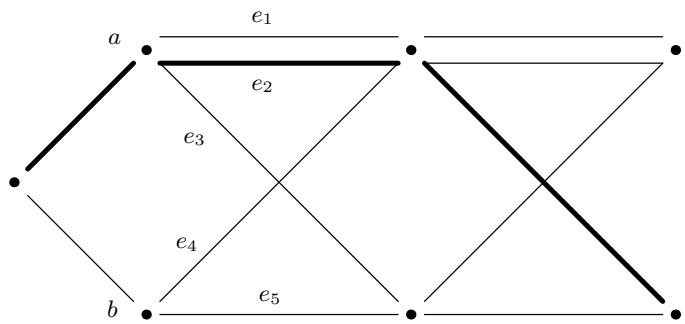


FIG. 4.4: Le diagramme de Bratteli associé à la substitution $a \mapsto baa$; $b \mapsto ba$.

Voyons à quel mot correspond le chemin en gras sur la figure (que l'on peut coder (e_2, e_3)). La première arête code la lettre $a = s(e_2)$, comme étant la deuxième occurence de la lettre a dans la substitution $\omega(r(e_2)) = \omega(a)$. La première arête code donc le mot $ba\underline{a}$. La seconde arête code le mot $b\underline{a}$. Connaissant la profondeur de cette arête, on sait qu'elle code en fait le mot

$$\omega(b)\underline{\omega(a)}.$$

En combinant ces deux informations, on peut dire que le chemin en gras code pour le mot

$$baba\underline{a}.$$

Cette construction en dimension 1 est bien connue. De plus, toujours en dimension 1, il existe des moyens d'encoder l'action de décalage par une donnée supplémentaire combinatoire sur le graphe (un ordre sur chaque $\mathcal{E}_n$). On pourra consulter les références données au début de ce chapitre pour plus de détails.

Le théorème de Kellendonk

Théorème 4.3.10 (Kellendonk, théorème 4 dans [39])**.** *Considérons* (Ω, ω) *un espace de pavages de complexité locale finie associé à une substitution primitive, apériodique, et qui force sa frontière. Alors l'application de Robinson définie ci-dessus est un homéomorphisme.*

Cette application associe à un élément $\gamma \in \Pi_\infty$ un pavage partiel qui est l'union des images des $\gamma|_{\to n}$. Il faut tout d'abord montrer que cette application est bien définie, c'est-à-dire que l'image d'un élément de Π_∞ est bien un pavage de support total. Pour cela, le point indispensable est que ω force sa frontière. Une fois cela prouvé, on peut montrer que l'application est bijective en exhibant un inverse. Ces deux faits sont prouvés dans [39].

Ainsi, le diagramme de Bratteli nous donne donc une représentation combinatoire de la transversale de l'espace de pavages. Nous souhaitons maintenant encoder une métrique dans la combinatoire du diagramme de Bratteli.

4.3.3 Poids et distance

Nous définissons ce qu'est un *poids* sur les sommets du diagramme de Bratteli. Ce poids nous permettra de définir une métrique sur $\mathcal{B}$.

Définition 4.3.11. Un *poids* sur un diagramme de Bratteli auto-similaire $\mathcal{B}$ associé à une matrice primitive A est une fonction

$$w : \mathcal{V}_{\text{tot}} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1. $w(\circ) = 1$;
2. pour tout $e \in \mathcal{E}_{\text{tot}}$, $w(r(e)) < w(s(e))$;
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\max\limits_{v\in\mathcal{V}_n} w(v) \right) = 0$;

On dit que w est *auto-similaire* s'il existe $0 < \alpha < 1$ tel que :

$$\forall v \in \mathcal{V}, \quad w((v, n+1)) = \alpha w((v, n)),$$

et α est alors appelé le facteur de décroissance de w.

Ce poids permet de définir une distance sur Π_∞.

Proposition–Définition 4.3.12. Soit w une fonction de poids sur un diagramme de Bratteli $\mathcal{B}$. On définit la fonction $d_w : \Pi_\infty \times \Pi_\infty \to \mathbb{R}_+^*$ par :

$$d_w(x, y) = \begin{cases} w\big(r(x \wedge y)\big) & \text{si } x \neq y; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors d_w est une ultramétrique sur Π_∞.

Démonstration. La démonstration est directe par disjonction de cas, selon que le chemin infini z partage un préfixe commun avec x ou y. □

Théorème 4.3.13. *Soit (Ω, ω) un espace de pavage de complexité locale finie associé à une substitution apériodique, primitive, et forçant le bord. On munit Ω de la distance d définie par l'équation 1.1 au chapitre 1. On appelle $\lambda > 1$ la constante d'expansion de ω. Soit $(\mathcal{B}, w)$ l'espace de Bratteli associé à ω, muni d'un poids w auto-similaire avec un facteur de décroissance λ^{-1}. Alors l'application de Robinson*

$$\psi : (\Pi_\infty, d_w) \longrightarrow (\Xi, d)$$

du théorème 4.3.10 est un homéomorphisme bi-lipschitzien.

Lemme 4.3.14. Soit ω une substitution vérifiant les propriétés de l'énoncé du théorème 4.3.13. Alors il existe des constantes positives C_1, C_2 telles que pour tout $\gamma \in \Pi_n$ avec n assez grand, on a la propriété suivante : si $\psi(\gamma)$ apparaît dans un pavage comme le substitué $(n-1)$-ième de $t_{r(\gamma)}$, alors l'amas « forcé » par $\psi(\gamma)$ au sens de la définition 4.1.6 contient une boule de rayon $C_1\lambda^n$ dans son support, mais pas une boule de rayon $C_2\lambda^n$.

Démonstration. Soit k le plus petit entier tel que tous les coefficients de A^k sont positifs (voir la définition 4.1.4) Alors pour tout $v, v' \in \mathcal{V}$, il existe un chemin de longueur k de (v, n) à $(v, n+k)$, pour tout n. Soit C le diamètre maximal des tuiles de $\mathcal{A}$, et soit $\gamma \in \Pi_n$. Alors il existe deux extensions distinctes de γ, notées $\gamma_1, \gamma_2 \in \Pi_{n+k+1}$. L'application ψ a été construite de sorte que $\psi(\gamma_i)$ est un translaté de $\omega^{n+k-1}(t_{r(\gamma_i)})$, tel que 0 est dans le support de cet amas. On a donc deux amas distincts, qui sont tous les deux des extensions de l'amas $\psi(\gamma)$, et sont inclus dans une boule de rayon $C\lambda^{n+k-1}$. Par conséquent, il existe deux extensions de $\psi(\gamma)$ qui diffèrent dans une boule de rayon $C\lambda^{n+k-1}$, et donc l'amas forcé par $\psi(\gamma)$ ne peut pas contenir la boule de rayon $C\lambda^{n+k-1}$.

Pour l'inclusion, soit m l'entier associé à la propriété qu'a ω de forcer sa frontière (voir la définition 4.1.6), et soit γ un chemin de longueur m. Soit $t := r(\gamma) \in \mathcal{A}$. Alors l'amas forcé par $\omega^m(t)$ contient un ε-voisinage de $\mathrm{Supp}(\omega^m(t))$. Cela implique que, puisque $\psi(\gamma)$ est un translaté de $\omega^m(t)$ qui contient 0,

$$B(0;\varepsilon) \subset \mathrm{Supp}\big(\mathrm{F}(\psi(\gamma))\big),$$

où $\mathrm{F}(\psi(\gamma))$ désigne la région forcée par $\psi(\gamma)$. De même, pour tout chemin γ' de longueur $n = m + k$, $B(0; \lambda^k\varepsilon)$ est incluse dans l'amas forcé par $\psi(\gamma')$.

En prenant $C_1 = \varepsilon\lambda^{-m}$, on obtient le résultat. □

Démonstration du Théorème 4.3.13. Comme les $[\gamma]$ forment une base de la topologie de Π_∞, il suffit de montrer qu'il existe deux constantes $m, M > 0$, telles que pour tout $\gamma \in \Pi$,

$$m \leq \frac{\mathrm{diam}([\gamma])}{\mathrm{diam}(\psi([\gamma]))} \leq M.$$

Soit $\gamma \in \Pi_n$. D'après le lemme 4.3.14, deux pavages de $\psi([\gamma])$ coïncident sur une boule de rayon au moins $C_1\lambda^n$. Par conséquent,

$$\mathrm{diam}(\psi([\gamma])) \leq \frac{1}{C_1}\lambda^{-n}.$$

Par ailleurs, il est possible de trouver deux pavages de $\psi(U_\gamma)$, qui diffèrent dans une boule de rayon $C_2\lambda^n$. Donc,

$$\mathrm{diam}(\psi([\gamma])) \geq \frac{1}{C_2}\lambda^{-n}.$$

Par conséquent, par définition des poids,

$$\big(\min\{w((v,1))\ ;\ v \in \mathcal{V}\}\big)\lambda^{-n+1} \leq \mathrm{diam}([\gamma]) \leq \big(\max\{w((v,1))\ ;\ v \in \mathcal{V}\}\big)\lambda^{-n+1}.$$

En combinant cela avec les inégalité précédentes, on obtient le résultat. □

On a montré l'existence d'un homéomorphisme bi-lipschitzien entre l'espace de pavage et son diagramme de Bratteli associé. De plus, on a quelque marge de manoeuvre dans le choix des poids.

Chapitre 5

Laplacien sur les diagrammes de Bratteli

Dans ce chapitre, on applique la construction de Pearson et Bellissard [54] à une classe d'exemple qui permet de réaliser des calculs. Pearson et Bellissard ont construit un triplet spectral (un objet de la géométrie non-commutative) pour des espaces de Cantor ultramétriques. Ils avaient l'idée d'appliquer cette construction à la transversale d'espaces de pavages ; en effet, la plupart des outils de géométrie non-commutative développés pour l'étude des pavages relèvent plus de la topologie que de la géométrie. On peut citer la construction d'une C^*-algèbre associée au groupoïde d'un pavage, le calcul de sa K-théorie, et les théorèmes de *gap-labeling*.

La construction de Bellissard et Pearson est une proposition qui vise à introduire des outils géométriques dans l'étude des pavages. Notons que leur construction est faite dans le cadre des espaces de Cantor ultramétriques abstraits, et n'est absolument pas restrictive aux pavages.

La construction du triplet spectral repose sur le fait que l'on peut représenter un ensemble de Cantor ultramétrique (isométriquement) comme l'ensemble des chemins infinis sur un arbre à poids (ou arbre de Michon [47]). Nous proposons une application aux ensembles de Cantor auto-similaires — c'est-à-dire qui sont le bord d'un diagramme de Bratteli muni d'un poids auto-similaire (voir définitions 4.3.2 et 4.3.11) — pour lesquels nous proposons une méthode de calcul.

Nous suivons la construction de Pearson et Bellissard, que nous adaptons à notre formalisme.

5.1 La construction de Pearson–Bellissard

Dans cette section, nous rappelons la construction de Pearson et Bellissard [54]. Leurs résultats se transfèrent immédiatement au cadre des diagrammes de Bratteli, puisque si $\mathcal{B}$ est un diagramme, l'ensemble des chemins finis Π a une structure d'arbre à poids. Ainsi, les diagrammes de Bratteli auto-similaires représentent une classe particulière d'arbres qui se « replient » en diagrammes.

5.1.1 Le Triplet spectral

Soit $(\mathcal{B}, w)$ un diagramme de Bratteli associé à une matrice primitive A (définition 4.3.2), et muni d'une fonction poids auto-similaire w (définition 4.3.11). On note (Π_∞, d_w), ou simplement (Π_∞, d) l'espace métrique des chemin infinis sur $\mathcal{B}$, muni de la distance associée à w (définition 4.3.12).

On considère l'algèbre $C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty)$ des fonctions continues lipschitziennes sur Π_∞ à valeur dans $\mathbb{R}$. On définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H} := l^2(\Pi) \otimes \mathbb{C}^2$. On veut construire un *triplet spectral*, c'est-à-dire une représentation de l'espace des fonctions continues $C(\Pi_\infty)$, à valeurs dans $\mathcal{H}$, et un opérateur $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ qui satisfait certaines relations de commutations avec l'image de $C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty)$ par la représentation.

On définit en réalité plusieurs représentations, qui dépendent d'un choix.

Définition 5.1.1. Une *fonction de choix* est une fonction

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \Pi & \longrightarrow & \Pi_\infty \times \Pi_\infty \\ \gamma & \longmapsto & \big(\tau_+(\gamma), \tau_-(\gamma)\big) \end{array} \right. \tag{5.1}$$

qui vérifie $\tau_+(\gamma) \wedge \tau_-(\gamma) = \gamma$. Autrement dit, $d(\tau_+(\gamma), \tau_-(\gamma)) = w(\gamma)$. On appelle Υ l'ensemble des fonctions de choix.

On définit autant de représentations de $C(\Pi_\infty)$ qu'il y a de fonctions de choix. Soit τ une fonction de choix. On considère l'application $\pi_\tau : C(\Pi_\infty) \to \mathrm{B}(\mathcal{H})$ définie par l'égalité suivante, pour tout $\xi \in \mathcal{H} \simeq \mathcal{F}(\Pi; \mathbb{C}^2)$ et tout $\gamma \in \Pi$:

$$\big(\pi_\tau(f) \cdot \xi\big)(\gamma) = \begin{pmatrix} f\big(\tau_+(\gamma)\big) & 0 \\ 0 & f\big(\tau_-(\gamma)\big) \end{pmatrix} \cdot \xi(\gamma). \tag{5.2}$$

Proposition 5.1.2 (Pearson–Bellissard [54])**.** *Pour tout $\tau \in \Upsilon$, l'application π_τ est une représentation fidèle de $C(\Pi_\infty)$ sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.*

On définit un opérateur $D : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, qu'on appelle *opérateur de Dirac* par l'équation suivante, pour tout $\xi \in \mathcal{H}$ et tout $\gamma \in \Pi$:

$$(D \cdot \xi)(\gamma) := \frac{1}{w(\gamma)} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi(\gamma). \tag{5.3}$$

Alors D est un opérateur auto-adjoint, non borné.

Proposition 5.1.3 (Proposition 8 dans [54])**.** *L'opérateur D satisfait les propriétés suivantes :*

- *il est auto-adjoint ;*
- *il est non borné ;*
- *pour tout $f \in C(\Pi_\infty)$, tout $\xi \in \mathcal{H}$ et $\gamma \in \Pi$,*

$$\big[D, \pi_\tau(f)\big] = \frac{f\big(\tau_+(\gamma)\big) - f\big(\tau_-(\gamma)\big)}{w(\gamma)} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \xi(\gamma), \tag{5.4}$$

  et en particulier le commutateur est borné lorsque $f \in C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty)$;
- *l'opérateur $(D^2 - I)$ est compact.*

Ainsi, $(C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty), \mathcal{H}, D)$ est un triplet spectral *pour toute représentation π_τ associée à une fonction de choix.*

L'interprétation que font Pearson et Bellissard de la relation de commutation (5.4) est celle d'une dérivée directionnelle : $[D, \pi_\tau(f)](\gamma)$ est la dérivée de f en γ dans la direction $\tau(\gamma)$. Ainsi, une fonction de choix est interprétée comme un champ de vecteurs unitaires tangents. L'espace des choix Υ devient alors l'analogue du fibré unitaire tangent sur l'algèbre $C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty)$.

Pearson et Bellissard prouvent le théorème suivant, qui montre que le triplet spectral permet de retrouver la distance.

Théorème 5.1.4 (Pearson–Bellissard, théorème. 1 dans [54])**.** *On a l'égalité suivante :*

$$d_w(x,y) = \sup\big\{|f(x) - f(y)| \ ; \ f \in C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty), \ \sup_{\tau\in\Upsilon} \|[D, \pi_\tau(f)]\| \leq 1\big\}.$$

Le terme droite de l'égalité est la *distance de Connes* associée au triplet spectral.

5.1.2 La fonction ζ

On peut définir une fonction ζ associée au triplet spectral.

Définition 5.1.5. La *fonction* ζ associée au triplet spectral est définie par :

$$\zeta(s) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\big(|D|^{-s}\big) = \sum_{\gamma\in\Pi} w(\gamma)^s. \tag{5.5}$$

On note $s_0 \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ son abscisse de convergence, quand elle existe.

Lorsque cet abscisse de convergence existe dans $\overline{\mathbb{R}}$, Pearson et Bellissard en donnent une interprétation géométrique.

Théorème 5.1.6 (Pearson–Bellissard, théorème 2 dans [54])**.** *L'abscisse de convergence s_0, quand elle existe, est égale à la* dimension de boite *supérieure de (Π_∞, d_w), c'est-à-dire :*

$$s_0 = \limsup_{r\to 0^+} -\frac{N_r(\Pi_\infty)}{\ln(r)},$$

où $N_r(\Pi_\infty)$ est le nombre minmal d'ensemble de diamètre inférieur à r requis pour couvrir Π_∞.

Notons que ce théorème requiert une hypothèse sur la croissance du nombre d'enfants des sommets de l'arbre comparée à la décroissance des poids de ces sommets. Dans notre cas, nous avons une borne uniforme sur le nombre d'enfants, ce qui est suffisant pour obtenir le théorème. Cette borne est donnée (brutalement) par la somme des coefficients de A.

Nous reviendrons sur cette dimension de boite dans le chapitre 6, pour relier cette donnée géométrique à la complexité. Nous pouvons néanmoins signaler que la dimension de boite est invariante par homéomorphisme bi-lipschitzien (voir Falconer [24]).

5.1.3 La trace de Dixmier

On suit la définition de Pearson–Bellissard en disant que l'ensemble de Cantor Π_∞ est *ζ-régulier* si la limite

$$\lim_{s \to s_0^+} (s - s_0)\zeta(s)$$

est bien définie, finie, et strictement positive.

On définit alors la limite suivante, appelée *trace de Dixmier* pour $f \in C_{\mathrm{lip}}(\Pi_\infty)$ et $\tau \in \Upsilon$:

$$\mu(f) = \lim_{s \to s_0^+} \frac{\mathrm{Tr}\big(|D|^{-s}\, \pi_\tau(f)\big)}{\mathrm{Tr}\big(|D|^{-s}\big)}. \tag{5.6}$$

Théorème 5.1.7 (Pearson–Bellissard, théorème 3 dans [54])**.** *Si Π_∞ est ζ régulier, alors la limite* (5.6) *existe, ne dépend pas de τ, et définit une mesure de probabilité sur Π_∞.*

La mesure d'un ensemble est alors obtenue en appliquant μ à la fonction indicatrice de cet ensemble. Dans le cas où il s'agit d'un voisinage du type $[\gamma]$ avec $\gamma \in \Pi$, on a :

$$\mu([\gamma]) = \lim_{s \to s_0^+} \sum_{\eta \in \Pi_\gamma} w(\gamma)^s. \tag{5.7}$$

Cette écriture montre au passage que la mesure, si elle existe, ne doit pas dépendre de τ.

Il sera montré dans la suite que les espaces de Cantor issus d'un diagramme de Bratteli muni d'un poids auto-similaire sont ζ-réguliers (proposition 5.2.3). On caractérisera alors la mesure μ (théorème 5.2.4). Il est possible de donner une preuve directe que la limite (5.7) est bien définie pour les diagrammes de Bratteli considérés ici, et définit une mesure de probabilité, sans passer par l'hypothèse de ζ-régularité et sans utiliser le théorème 3 de [54]. Cette preuve directe est utilisée dans [38].

5.2 Application à Π_∞

Dans cette section, nous montrons qu'un ensemble de Cantor obtenu comme le bord d'un diagramme de Bratteli auto-similaire muni d'un poids lui-même auto-similaire est ζ-régulier, et nous caractérisons sa mesure. Nous montrons que dans le cas où $(\mathcal{B}, w)$ est associé à un pavage de substitution, la mesure sur Π_∞ rend mesurablement isomorphes les espaces $(\mathcal{B}, \mu)$ et $(\Xi, \mu_{\mathrm{erg}})$, où Ξ est la transversale canonique de l'espace de pavage, et μ_{erg} est la mesure de probabilité induite sur Ξ par la mesure ergodique.

Dans cette section, nous travaillerons avec un espace de Cantor ultramétrique auto-similaire obtenu comme le bord d'un diagramme de Bratteli à poids $(\mathcal{B}, w)$. On appelle A la matrice d'incidence (primitive) à partir de laquelle $\mathcal{B}$ est construit, et Λ sa valeur propre de Perron–Frobenius.

5.2.1 ζ-régularité de Π_∞

Tout d'abord, montrons que la fonction ζ associée à un diagramme de Bratteli à poids auto-similaire a une abscisse de convergence finie.

Proposition 5.2.1. *Soit (Π_∞, d_w) un espace de Cantor ultramétrique issu d'un diagramme $(\mathcal{B}, w)$ auto-similaire primitif. On suppose que le poids w a un facteur de décroissance $\alpha \in]0,1[$. Alors la fonction ζ associée a une abscisse de convergence égale à*

$$s_0 = -\frac{\ln(\Lambda)}{\ln(\alpha)}.$$

Démonstration. Par définition, $\zeta(s) = \sum_{\gamma\in\Pi} w(\gamma)^s$. Il s'agit d'une somme à termes positifs. Remarquons que pour tout γ, on a l'encadrement :

$$m\alpha^n \leq w(\gamma) \leq M\alpha^n,$$

où m et M sont respectivement le minimum et le maximum des $\alpha^{-1}w(v)$ pour $v \in \mathcal{V}_1$. Par conséquent, on a, en regroupant par paquets (racine mise à part) :

$$1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} m\,\mathrm{Card}(\Pi_n)\alpha^{ns} \leq \zeta(s) + 1 \leq \sum_{n\in\mathbb{N}^*} M\,\mathrm{Card}(\Pi_n)\alpha^{ns}.$$

Or, $\mathrm{Card}(\Pi_n)$ est équivalent quand n tend vers l'infini à $C\Lambda^n$ (proposition 4.3.5). Par conséquent, on a l'encadrement suivant du reste de la somme :

$$\sum_{n\geq n_0} mC_1(\Lambda\alpha^s)^n \leq \sum_{|\gamma|\geq n_0} w(\gamma)^s \leq \sum_{n\geq n_0} MC_2(\Lambda\alpha^s)^n.$$

On voit alors que les sommes encadrantes sont géométriques, convergent pour $\Lambda\alpha^s < 1$ et divergent pour $\Lambda\alpha^s > 1$. On a alors le résultat. □

Corollaire 5.2.2. Si ω est une substitution de dimension d et que $(\mathcal{B}, w)$ est le diagramme de Bratteli associé, alors la fonction ζ associée à (Π_∞, d_w) a pour abscisse de convergence $s_0 = d$.

En particulier (par le théorème 5.1.6), la dimension de boite de la transversale d'un espace de pavages de substitution est d.

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'alors le facteur de décroissance est égal à λ^{-1} (voir le théorème 4.3.13). De plus, par le lemme 4.2.3, $\Lambda = \lambda^d$, ce qui permet de conclure. □

Montrons maintenant que (Π_∞, d_w) est ζ-régulier.

Proposition 5.2.3. *L'espace de Cantor ultramétrique (Π_∞, d_w) est ζ-régulier.*

Démonstration. Il s'agit de montrer, par la définition de ζ-régularité donnée en section 5.1.3, que la limite

$$\lim_{s\downarrow s_0} (s - s_0)\zeta(s)$$

est bien définie, finie, et strictement positive.

Cette preuve est similaire à la preuve de la proposition 5.2.1, mais se base sur une analyse plus fine. Par définition, $\zeta(s) = \sum_{\gamma\in\Pi} w(\gamma)^s$. On peut regrouper la somme par paquets dépendant :

– de la longueur du chemin ;
– de la première arête du chemin ;
– du sommet $r(\gamma)$.

Ainsi, on obtient (avec les notations 4.3.4) :

$$\begin{aligned}\zeta(s) &= 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{v\in\mathcal{V}}\sum_{\gamma\in\Pi_{\circ\to(v,n)}} w((v,n))^s \\ &= 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*}\sum_{v\in\mathcal{V}} \mathrm{Card}(\Pi_{\circ\to(v,n)})w((v,1))\alpha^{(n-1)s}.\end{aligned}$$

Or, on a établi (proposition 4.3.5) que $\mathrm{Card}(\Pi_{\circ\to(v,n)}) = c_v\Lambda^n + O(\eta^n)$, avec c_v une constante strictement positive, et $0 < \eta < \Lambda$. Par conséquent, par sommation, on a :

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{c_v w((v,1))}{\alpha}\left(\alpha^s\Lambda\right)^n + O\left(\sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\alpha^s\eta\right)^n\right).$$

On remarque maintenant que $\sum_{n\in\mathbb{N}}(\alpha^s\Lambda)^n = 1/(1-\alpha^s\Lambda)$, et de même pour le second terme. Or,

$$\frac{1}{1-\alpha^s\eta}$$

reste borné lorsque s tend vers s_0, ne dépend pas de n, et la convergence de la somme vers cette quantité est uniforme en s. Donc, uniformément sur l'intervalle $[s_0, +\infty[$, on a :

$$\zeta(s) = 1 + \frac{c_v w((v,1))}{\alpha}\frac{1}{1-\alpha^s\Lambda} + O(1),$$

avec $c_v > 0$. On écrit alors

$$\alpha^s\Lambda = \exp((s-s_0)\ln(\alpha)) \qquad = 1 + (s-s_0)\ln(\alpha) + o(s-s_0),$$

et on en déduit que $(s-s_0)\zeta(s)$ est une fonction qui satisfait les propriétés requises au voisinage de s_0^+. □

5.2.2 Caractérisation de μ

La ζ-régularité nous donne automatiquement l'existence de la « trace de Dixmier », qui définit une mesure de probabilités sur Π_∞. Lorsque l'on sait qu'elle existe, il est assez aisé de la caractériser, en utilisant les propriétés des matrices primitives.

Théorème 5.2.4. *La mesure μ donnée par la limite* (5.6)*. Soit $x_R = (x_a)_{a\in\mathcal{A}}$ le vecteur propre de Perron–Frobenius de A, normalisé de sorte que $\sum_{e\in\mathcal{E}_0} v_{r(e)} = 1$. Pour $\gamma \in \Pi_n$, on note $a := r(\gamma) \in \mathcal{V}_n$. Alors :*

$$\mu([\gamma]) = v_a\Lambda^{-n+1}.$$

Démonstration. Soit $\gamma \in \Pi$. On note $\Pi(\gamma)$ le sous-ensemble de Π constitué de tous les chemins finis qui ont γ comme préfixe. On considère la quantité suivante :

$$\frac{\sum_{\eta\in\Pi(\gamma)} w(\eta)^s}{\sum_{\eta\in\Pi} w(\eta)^s}.$$

La limite de cette quantité lorsque s tend vers d, quand elle existe, définit une mesure de probabilité sur Π_∞. Par ζ-régularité de (Π_∞, d_w) et le théorème 3 dans [54], on sait que cette limite existe.

On sait que μ existe ; il faut maintenant la caractériser. On remarque que nécessairement, par la formule ci-dessus, $\mu([\gamma])$ ne dépend que de $r(\gamma)$. Ainsi, si on peut caractériser les mesures prises par μ sur les éléments de $\mathcal{V}_{\text{tot}}$, on aura entièrement déterminé μ. Pour tout n, on appelle $u^{(n)} = (u_a^{(n)})_{a\in\mathcal{A}}$ le vecteur défini par $u_a^{(n)} = \mu((a,n))$. Remarquons que si γ et γ' sont tels que $r(\gamma) = (a,n)$ et $r(\gamma') = (a,m)$ pour un $a \in \mathcal{A}$, alors les ensembles Π_γ et $\Pi_{\gamma'}$ sont isomorphes, à ceci près que les poids des chemins du second ensemble sont multipliés par λ^{n-m}. Alors, pour de tels γ et γ', on obtient

$$\sum_{\eta\in\Pi(\gamma)} w(\eta)^s = (\lambda^{m-n})^s \sum_{\eta\in\Pi(\gamma')} w(\eta)^s$$

par un changement de variable. Ainsi, pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mu((a,n)) = \Lambda\mu((a,n+1)). \tag{5.8}$$

De plus, pour tout $v \in \mathcal{V}_n$,

$$\mu(v) = \sum_{e\in s^{-1}(v)\subset\mathcal{E}_n} \mu(r(e)). \tag{5.9}$$

Cette dernière équation montre que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u^{(n)} = Au^{(n+1)}$. Cela et l'équation (5.8) montrent que $u^{(1)}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre Λ. Comme μ est une mesure de probabilité, cela force la normalisation de $u^{(1)}$ comme la donne l'énoncé du théorème, et la preuve est achevée. □

5.2.3 Mesure de Dixmier et mesure ergodique

Les espaces de pavages de substitution sont uniquement ergodiques. Cela a été prouvé dans différents contextes par Michel [46] (voir aussi Queffélec [57]), Radin [58] dans un cas d'un espace de pavages du plan stable par les rotations, et Solomyak [66]. On rappelle un corollaire de Solomyak qui lie la mesure ergodique et la fréquence d'apparition des amas.

Proposition 5.2.5 (Corollaire 3.5 dans [66])**.** *Soit U_a le voisinage associé à un amas a dans Ξ, et μ_Ξ la mesure de probabilité sur Ξ induite par la mesure ergodique sur Ω. Alors :*

$$\mu_\Xi(U_a) = \lim_{n\to+\infty} \frac{L_a(\omega^n(t))}{\mathrm{Vol}(\omega^n(t))} =: \mathrm{Freq}(a), \tag{5.10}$$

où $L_a(b)$ désigne le nombre d'occurrences distinctes de l'amas a dans l'amas b, et t est n'importe quelle tuile.

On appelle *fréquence* de a la quantité $\mathrm{Freq}(a)$.

Une fois que l'on sait que le système dynamique $(\Omega, \mathbb{R}^d)$ est uniquement ergodique, cela signifie que la transversale Ξ a une unique mesure invariante pour l'« action » induite par l'action de $\mathbb{R}^d$ (il ne s'agit pas de l'action d'un groupe, mais de l'action d'un groupoïde). Cela permet d'identifier cette mesure invariante à la mesure de Dixmier. Ce fait est montré dans [39, section 4.2, éq. (56)].

Corollaire 5.2.6. La mesure de Dixmier sur Ξ définie à partir de la métrique d_w (section 5.1.3) et la mesure ergodique coïncident :

$$\mu_\Xi = \mu_{\mathrm{Dix}}.$$

Le calcul des fréquences des *tuiles* pour le pavage de Penrose avait déjà été fait par Grünbaum et Shephard [34, 10.5.5].

5.3 Laplacien sur la transversale

Dans cette section, nous donnons la définition de l'opérateur de Laplace–Beltrami défini par Pearson et Bellissard [54]. La définition peut s'exprimer en termes de trace et d'algèbres d'opérateurs ; nous nous contenterons de donner la définition combinatoire. À partir de cette définition, nous calculerons les éléments propres de l'opérateur. Nous donnerons une méthode récursive qui fait intervenir des algèbres de Cuntz–Krieger, afin de calculer les valeurs propres.

5.3.1 Définition combinatoire

On définit pour tout $s \in \mathbb{R}$ un opérateur non borné Δ_s sur l'espace de Hilbert $L^2(\Pi_\infty, \mu)$, et dont le domaine est l'espace engendré par les fonctions caractéristiques de la forme $\mathbf{1}_{[\gamma]}$, pour $\gamma \in \Pi$.

Définition 5.3.1. Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on définit Δ_s sur les fonctions indicatrices des voisinages $[\gamma]$ ($\gamma \in \Pi$) par la formule :

$$\Delta_s \mathbf{1}_{[\gamma]} := -\sum_{k=0}^{|\gamma|-1} \frac{w(\gamma|_{\to k})^{s-2}}{G(\gamma|_{\to k})} \Big(\big(\mu([\gamma|_{\to k}]) - \mu([\gamma|_{\to k+1}])\big)\mathbf{1}_{[\gamma]} - \mu([\gamma])\big(\mathbf{1}_{[\gamma|_{\to k}]} - \mathbf{1}_{[\gamma|_{\to k+1}]}\big)\Big), \quad (5.11)$$

où $\gamma|_{\to k}$ est le préfixe de longueur k de γ, et

$$G(v) := \frac{1}{2} \sum_{(e,e') \in (s^{-1}(v))^2} \mu(r(e))\mu(r(e'))$$

pour $v \in \mathcal{V}_{\mathrm{tot}}$ (avec implicitement $G(\eta) = G(r(\eta))$).

Remarquons que le terme $\mathbf{1}_{[\gamma|_{\to k}]} - \mathbf{1}_{[\gamma|_{\to k+1}]}$ est la fonction caractéristique des chemins infinis qui ont $\gamma(k)$ pour préfixe, mais ne se prolongent pas en $\gamma|_{\to k+1}$. Le terme G est un facteur de normalisation qui est obtenu par intégration d'une mesure sur l'espace des choix Υ induite par μ (on pourra voir [54] pour les détails de la construction).

Notation 5.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$E_n := \mathrm{Vect}\left\{\mathbf{1}_{[\gamma]}\,;\, \gamma \in \Pi_n\right\},$$

et E l'union des E_n.

Pearson et Bellissard montrent que pour tout $s \in \mathbb{R}$, Δ_s est un opérateur défini négatif et auto-adjoint. Ils définissent le domaine de Δ_s comme étant E. De plus, les opérateurs Δ_s laissent invariants les espaces de dimension finie E_n, et sont symétriques donc diagonalisables en restriction à ces espaces. Comme, E est un sous-espace dense de $L^2(\Pi_\infty, \mu)$, et qu'il est engendré par des vecteurs propres de Δ_s, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 5.3.3 (Proposition 9 dans [54])**.** *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, le spectre de Δ_s est purement ponctuel.*

Ainsi, quel que soit le domaine auquel on étend Δ_s, le spectre de Δ_s est toujours l'adhérence des valeurs propres. De plus, on n'oublie aucune valeur propre de Δ_s lorsque l'on considère $\Delta_s|_E$.

5.3.2 Éléments propres du laplacien

Le théorème suivant donne entièrement les éléments spectraux de Δ_s. Il est illustré par la figure 5.1.

Théorème 5.3.4. *Les vecteurs propres de Δ_s sont de trois types :*

1. *La fonction $\mathbf{1}_{\Pi_\infty}$, associée à la valeur propre 0 ;*
2. *Les fonctions de la forme suivantes, associées à une valeur propre $\lambda_\circ$:*
$$\left\{ \frac{1}{\mu([e_1])}\mathbf{1}_{[e_1]} - \frac{1}{\mu([e_2])}\mathbf{1}_{[e_2]} \,;\, e_1, e_2 \in \mathcal{E}_0 \right\},$$
elles engendrent un espace propre de dimension $\mathrm{Card}(\mathcal{E}_0) - 1$ *;*
3. *Les fonctions de la forme suivante, pour $\gamma \in \Pi_n$, $n \geq 1$, associées à une valeur propre λ_γ :*
$$\left\{ \frac{1}{\mu([\eta])}\mathbf{1}_{[\eta]} - \frac{1}{\mu([\eta'])}\mathbf{1}_{[\eta']} \,;\, \eta \neq \eta' \in \Pi_{n+1},\ \text{et } \eta \wedge \eta' = \gamma \right\},$$
elles engendrent un espace de dimension $\mathrm{Card}\left(s^{-1}(r(\gamma))\right) - 1$.

De plus, tous les vecteurs propres de Δ_s sont obtenus de cette manière.

Démonstration. Une fois les formules connues, c'est un calcul simple de vérifier qu'elles sont effectivement fonctions propres, et que les espaces propres ont la dimension indiquée. Comme E est dense dans $L^2(\Pi_\infty, \mu)$, les vecteurs propres de n'importe quelle extension de Δ_s à un domaine plus grand sont les vecteurs propres de Δ_s sur son domaine minimal.

Pour montrer qu'aucun vecteur propre n'est oublié dans l'énoncé du théorème 5.3.4, on réalise un comptage de dimensions. On sait que

$$E_n := \mathrm{Vect}\{\mathbf{1}_{[\gamma]} \,;\, \gamma \in \Pi_n$$

est stable par Δ_s. Par conséquent, la somme des dimensions des espaces propres de $\Delta_s|_{E_n}$ est égale à $\dim(E_n) = \mathrm{Card}(\Pi_n)$. Procédons par récurrence pour montrer que la somme des espaces propres que l'on a explicités dans Π_n est bien égale à $\mathrm{Card}(\Pi_n)$ pour tout n. Pour $n = 0$, c'est bien le cas : $\mathrm{Card}(\Pi_0) = 1$ (le chemin vide), et on a la valeur propre 0 de multiplicité 1. Supposons que les dimensions soient les bonnes pour Π_n pour un certain n. Alors les valeurs propres de $\Delta_s|_{E_{n+1}}$ sont constituées :

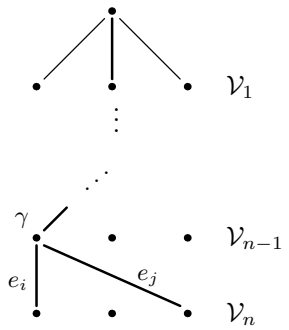


FIG. 5.1: Les fonctions propres de $\Delta_s|_{E_n}$ sont en général de la forme $\mathbf{1}_{[\gamma e_i]}/\mu([\gamma e_i]) - \mathbf{1}_{[\gamma e_j]}/\mu([\gamma e_j])$ avec $\gamma \in \Pi_{n-1}$.

1. de la valeur propre 0 associée à un espace propre de dimension 1 ;
2. des valeurs propres de la forme λ_γ pour $\gamma \in \Pi_k$, $k < n$;
3. des valeurs propres de la forme λ_γ pour $\gamma \in \Pi_n$.

La somme des dimensions des espaces propres associés aux valeurs propres 1 et 2 vaut $\mathrm{Card}(\Pi_n)$ par hypothèse de récurrence. La dimension des espaces propres associés à 3 vaut :

$$\sum_{\gamma \in \Pi_n} \Big[\mathrm{Card}\left(s^{-1}(r(\gamma))\right) - 1 \Big] = \mathrm{Card}(\Pi_{n+1}) - \mathrm{Card}(\Pi_n).$$

Donc la somme des dimensions des espaces propres de $\Delta_s|_{E_n}$ listés dans l'énoncé du théorème vaut $\mathrm{Card}(\Pi_{n+1}) = \dim(E_n)$. Par récurrence, c'est le cas pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, tout vecteur propre de Δ_s est de l'une des trois formes listée dans l'énoncé du théorème. □

On a volontairement choisi de distinguer les vecteurs propres du second et du troisième type. On pourrait prendre $\gamma = \emptyset$ (le chemin vide) dans la définition des vecteurs propres de type 3 pour obtenir les vecteurs propres de type 2. Cela dit, les vecteurs propres de type 3 satisfont des propriétés d'auto-similarité qui seront détaillée par la suite, c'est pourquoi on fait cette distinction.

On peut donner la formule des valeurs propres.

Proposition 5.3.5. *Par le théorème 5.3.4, les valeurs propres de Δ_s sont de trois types : 0, $\lambda_\circ$, et λ_γ pour $\gamma \in \Pi_n$ avec $n \geq 1$. On a, pour tout $\gamma \in \Pi_n$ avec $n \geq 1$:*

$$\lambda_\gamma = \sum_{k=0}^{|\gamma|-1} w(\gamma|_{\to k})^{s-2} \frac{\mu([\gamma|_{\to k+1}]) - \mu([\gamma|_{\to k}])}{G(\gamma|_{\to k})} - w(\gamma)^{s-2} \frac{\mu([\gamma])}{G(\gamma)},$$

et on a :

$$\lambda_\circ = \frac{1}{G(\circ)}.$$

Démonstration. Là encore, le calcul est direct. □

5.4 Algèbre de Cuntz–Krieger et applications

Dans cette section, on applique l'auto-similarité du diagramme de Bratteli au calcul des valeurs propres de Δ_s. On montre l'existence d'isométries partielles envoyant espaces propres sur espaces propres. Ces isométries partielles sont associées de manière naturelle au diagramme, et engendrent une algèbre de Cuntz–Krieger.

5.4.1 L'algèbre de Cuntz–Krieger

Il est possible de calculer par récurrence les valeurs propres du type λ_γ, avec $\gamma \in \Pi_{n+1}$, en fonction des valeurs propres du même type pour $\gamma \in \Pi_n$. Cela permet de calculer algorithmiquement n'importe quelle valeur propre par itération de fonctions « de transition » sur une valeur propre λ_γ, $\gamma \in \Pi_1$. Les données qui doivent être calculées initialement sont alors seulement les premières valeurs propres, et les fonctions de transition qui sont au nombre de $\mathrm{Card}(\mathcal{E})$. On montre que ces fonctions de transition peuvent être associées à des opérateurs sur l'espace de Hilbert $L^2(C, \mu)$ qui satisfont les relations de générateurs de Cuntz–Krieger.

Tout d'abord, nous associons à un diagramme de Bratteli à poids $(\mathcal{B}, w)$ un diagramme dual, dont la matrice associée est à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Définition 5.4.1. Soit $(\mathcal{B}, w)$ un diagramme de Bratteli à poids auto-similaire, associé à une matrice A. On dit que $\mathcal{B}$ est *simple* si A est à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Si un diagramme est simple, cela signifie que tout couple d'arêtes $(v, v') \in \mathcal{V}^2$ a au plus une arête de v vers v'. Alors on peut encoder le chemin par les sommets plutôt que par les arêtes : l'application

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \prod_{i=0}^n \mathcal{E}_i & \longrightarrow & \mathcal{E}_0 \times \prod_{i=2}^n \mathcal{V}_{i+1} \\ (e_0, e_1, \ldots) & \longmapsto & (e_0, r(e_1), \ldots, r(e_i)) \end{array} \right. \tag{5.12}$$

est un homéomorphisme pour tout $i \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

Proposition 5.4.2. *Soit $(\mathcal{B}, w)$ un diagramme de Bratteli associé à une matrice primitive A. Alors il existe $(\mathcal{B}', w')$ un diagramme simple, associé à une matrice primitive A', tel que les espaces de chemins (Π_∞, d_w) et $({\Pi_\infty}', d'_w)$ soient isométriquement homéomorphes.*

Démonstration. Il suffit de construire pour $\mathcal{B}' = (\mathcal{V}_{\mathrm{tot}}, \mathcal{E}_{\mathrm{tot}})$ le diagramme dual. On pose $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ le graphe dont la matrice d'adjacence est A (voir définition 4.3.1). On définit son graphe dual $\mathcal{G}' = (\mathcal{V}', \mathcal{E}')$, tel que :

- $\mathcal{V}' \simeq \mathcal{E}$;
- il y a une arête de $v \in \mathcal{V}'$ vers $v' \in \mathcal{V}'$ si les arêtes correspondantes e_v et $e_{v'}$ dans $\mathcal{E}$ satisfont $r(e_v) = s(e_{v'})$.

On note A' la matrice d'adjacence de ce graphe. Le diagramme de Bratteli $\mathcal{B}'$ est construit à partir de $\mathcal{G}'$ comme expliqué en section 4.3.1 ; en ce qui concerne $\mathcal{E}'_0$, pour chaque arête $e \in \mathcal{E}_0$ et chaque arête $f \in \mathcal{E}_1 \cap s^{-1}(r(e))$, il existe une unique arête $e'_{e,f} \in \mathcal{E}'_0$ reliant $\circ'$ à $v_e \in \mathcal{V}_1$.

On pose $w'(v_e) = w(r(e))$. On vérifie alors facilement que l'application définie par l'équation (5.12) est isométrique. □

Dans la suite, on considère un diagramme de Bratteli auto-similaire associé à une matrice A, et on note $A' = (a'_{e,f})_{e,f\in\mathcal{E}} \in \mathrm{M}_{|\mathcal{E}|}(\{0,1\})$ la matrice du diagramme simple associé.

Pour tout $e \in \mathcal{E}$, on définit un opérateur

$$U_e : l^2(\Pi \setminus \Pi_0) \to l^2(\Pi \setminus \Pi_0).$$

On note les éléments de $l^2(\Pi)$ comme des sommes formelles de la forme

$$\sum_{\gamma\in\Pi} a_\gamma \cdot \gamma.$$

L'opérateur U_e est alors défini sur les générateurs de $l^2(\Pi)$ par :

$$U_e(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n) = \begin{cases} (f_0, e, e_1, e_2, \ldots, e_n) & \text{si } r(e_0) = r(e)\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.13a}$$

$$U_e^*(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_n) = \begin{cases} (f_0, e_2, e_3, \ldots, e_n) & \text{si } e_1 = e\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.13b}$$

Les opérateurs U_i envoient E_n dans E_{n+1}. Il n'est pas difficile de montrer que les opérateurs U_e^* définis par l'équation (5.13b) sont effectivement adjoints aux opérateurs U_e.

Ces opérateurs satisfont des relations de Cuntz–Krieger [18].

Proposition 5.4.3. *Les opérateurs $(U_e)_{e\in\mathcal{E}}$ sont des isométries partielles qui vérifient :*

(i) $U_eU_e^*, U_e^*U_e \in \mathrm{P}(\mathcal{H})$ *;*

(ii) $(U_eU_e^*).(U_fU_f^*) = 0$ *si* $e \neq f$ *;*

(iii) $U_e^*U_e = \sum_{f\in\mathcal{E}} A'_{ef} U_f U_f^*$ *;*

Démonstration. Soit $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. On vérifie que $U_eU_e^*.\gamma$ vaut γ si $\gamma_1 = e$ et 0 sinon, et que $U_e^*U_e\gamma$ vaut γ si $r(e) = s(\gamma_1)$, et 0 sinon. Ainsi, $U_eU_e^*$ est le projecteur sur l'ensemble des chemins de la forme $(*, e, *, *, \ldots)$, et $U_e^*U_e$ est le projecteur sur l'ensemble des chemins $(f_{r(e)}, *, *, \ldots)$, où $f_{r(e)}$ est l'arête de $\mathcal{E}_0$ reliant la racine à $(r(e), 1) \in \mathcal{V}_1$.

Les autres propriétés découlent de ce calcul. □

La C^*-algèbre engendré par les isométries partielles $\{U_e\}_{e\in\mathcal{E}}$ est donc l'algèbre de Cuntz–Krieger associée à A'. En effet, comme A est primitive, A' l'est aussi, et toutes les C^*-algèbres engendrées par des isométries partielles vérifiant les identités ci-dessus sont isomorphes [18, théorème 2.13].

On appelle $\mathcal{O}_{A'}$ l'algèbre de Cuntz–Krieger associée à la matrice A'. L'algèbre $\mathcal{O}_{A'}$ se représente sur $L^2(\Pi_\infty, \mu)$. On exprime les images des U_e (que l'on appelle encore U_e) sur la famille génératrice de l'espace de Hilbert donnée par les $\mathbf{1}_{[\gamma]}$, pour $\gamma \in \Pi_k$, $k \geq 2$.

$$U_e\mathbf{1}_{[\gamma]} = \begin{cases} \mathbf{1}_{[U_e\gamma]} & \text{si } U_e\gamma \neq 0\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.14}$$

Remarquons que les fonctions caractéristiques $\mathbf{1}_{\Pi_\infty}$ et $\mathbf{1}_{[e]}$ avec $e \in \mathcal{E}_0$ peuvent s'écrire comme sommes de $\mathbf{1}_{[\gamma]}$ avec $|\gamma| \geq 2$. Par conséquent, les U_i sont bien des opérateurs sur $L^2(\Pi_\infty, \mu)$ tout entier.

5.4.2 Application au calcul des valeurs propres

Il est immédiat que si $|\gamma| \geq 1$, et si φ est une fonction propre de Δ_s associée à λ_γ, alors $U_e\varphi$ est soit nulle soit une fonction propre associée à $\lambda_{U_e\gamma}$. Ainsi, on voudrait définir des fonctions u_e qui à λ_γ associent $\lambda_{U_e\gamma}$. C'est ce qui est fait dans la proposition suivante.

Proposition 5.4.4. *Soit Λ la valeur propre de Perron–Frobenius de A (et de A'). Il existe une famille de nombres réels $\{\beta_e\,;\, e \in \mathcal{E}\}$ telle que pour toute valeur propre λ_γ et pour tout $e \in \mathcal{E}$ tels que $U_e\gamma \neq 0$, alors*

$$\lambda_{U_e(\gamma)} = \Lambda^{(d+2-s)/d}\lambda_\gamma + \beta_e.$$

On appelle alors u_e la fonction $x \mapsto \Lambda^{(d+2-s)/d}x + \beta_e$.

La formule exacte des β_e est donnée par un calcul direct. On pourra se référer à [38]. Ces coefficients β_e se calculent aisément, et les valeurs propres de la forme λ_e avec $e \in \mathcal{E}_0$ aussi.

Ainsi, si $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n-1}) \in \Pi_n$, alors on peut calculer λ_γ en fonction de λ_e, où e est une arête de $\mathcal{E}_0$ reliant la racine à $(r(\gamma_{n-1}), 1) \in \mathcal{V}_1$. On écrit :

$$\lambda_\gamma = \big(u_{\gamma_{n-1}} \circ \ldots \circ u_{\gamma_2} \circ u_{\gamma_1}\big)(\lambda_e).$$

On a alors une méthode récursive pour calculer toutes les valeurs propres. On peut la résumer de la manière suivante.

Proposition 5.4.5. *Pour $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n) \in \Pi_n$, $n \geq 1$, on pose $U_\gamma = U_{\gamma_1}U_{\gamma_2}\cdots U_{\gamma_n}$ et $u_\gamma = u_{\gamma_1} \circ u_{\gamma_2} \circ \cdots u_{\gamma_n}$. Alors pour tout $\gamma \in \Pi_n$, $n \geq 1$, on a :*

$$\lambda_\gamma = u_\gamma(\lambda_{e'_0}) = \Lambda^{n(d-s+2)/d}\lambda_{e'_0} + \sum_{j=1}^{n} \Lambda^{(j-1)(d-s+2)/d}\beta_{\gamma_j}.$$

5.4.3 Asymptotique de Weyl

La répartition asymptotique des valeurs propres est une donnée intéressante à étudier. Dans le cas classique, la répartition asymptotique des valeurs propre d'un opérateur de type laplacien fait apparaître un exposant égal à la moitié de la dimension. Dans notre cas, on a le résultat suivant.

Proposition 5.4.6. *On considère l'opérateur Δ_s sur $L^2(\Pi_\infty, \mu)$. On note*

$$\mathcal{N}_s(\lambda) := \mathrm{Card}\{\lambda' \text{ valeur propre de } \Delta_s\,;\, |\lambda'| \leq \lambda\}.$$

Si $s < s_0 + 2$, il existe $C_1, C_2 > 0$ tels que pour λ assez grand, on a :

$$C_1\lambda^{s_0/(d-s_0+2)} \leq \mathcal{N}_s(\lambda) \leq C_2\lambda^{d/(d-s_0+2)}.$$

On a vu que l'abscisse de convergence s_0 s'interprétait comme une dimension (théorème 5.1.6). On voit ici que l'exposant est égal à $s_0/2$ lorsque $s = s_0$.

Démonstration. On sait que le nombre de valeurs propres de la forme λ_γ avec $\gamma \in \Pi_k$, $k \leq n$ (répétées selon leur multiplicité), est égal à $\mathrm{Card}(\Pi_{n+1})$, et est donc de l'ordre de Λ^n (voir la proposition 4.3.5).

Par ailleurs, on peut avoir une estimation de la plus grande valeur propre de la forme λ_γ avec $\gamma \in \Pi_k$ en utilisant la proposition 5.4.5. On note $\Lambda_s := \Lambda^{(s_0-s+2)/s_0}$, et on remarque que $\Lambda_s > 1$ pour $s < s_0 + 2$. Alors

$$\max_{\gamma\in\Pi_k} |\lambda_\gamma| \leq C_1 \Lambda_s^k,$$

où C_1 ne dépend que des λ_e, $e \in \mathcal{E}_0$, et des β_f, $f \in \mathcal{E}$. Ainsi, on a aussi la majoration

$$\max_{\gamma\in\Pi_k} |\lambda_\gamma| \leq C_1 \Lambda_s^n.$$

Donc les valeurs propres de $\Delta|_{E_{n+1}}$ sont toutes plus petites que $C_1\Lambda_s^n$. Par conséquent, pour tout n, il y a au moins $\mathrm{Card}(\Pi_{n+1})$ valeurs propres plus petites que $C_1\Lambda_s^n$. Autrement dit, en utilisant la proposition 4.3.5,

$$\mathcal{N}_s(C_1\Lambda_s^n) \geq C_1'\Lambda^n,$$

où $C_1' > 0$.

De même, en appliquant le fait que les β_f sont tous strictement négatifs (et que les λ_e le sont aussi) à la proposition 5.4.5, on obtient une minoration de la plus petite valeur propre de la forme λ_γ, avec $|\gamma| > n$:

$$\min_{\gamma\in\Pi_{k>n}} |\lambda_\gamma| \geq C_2\Lambda_s^n.$$

Par conséquent, il y a au plus $\mathrm{Card}(\Pi_n)$ valeurs propres de Δ_s qui sont plus petites que $C_2\Lambda_s^n$, et on a donc :

$$\mathcal{N}_s(C_2\Lambda_s^n) \leq C_2'\Lambda^n.$$

Mais par ailleurs, $\mathcal{N}_s$ est croissante. Il suffit de choisir un k tel que $C_1 \leq C_2\Lambda_s^k$, et on obtient :

$$C_1'\Lambda^n \leq \mathcal{N}_s(C_1\Lambda_s^n) \leq \mathcal{N}_s(C_2\Lambda_s^{n+k}) \leq C'2\Lambda_s^{n+k}.$$

Ainsi, quitte à modifier les constantes C_1' et C_2', on a :

$$C\Lambda^n \leq \mathcal{N}_s(\Lambda_s^n) \leq C'\Lambda^n.$$

On peut ensuite encadrer tout réel λ quelconque entre Λ_s^n et Λ_s^{n+1}, et quitte à modifier encore les constantes C et C', on a le résultat. □

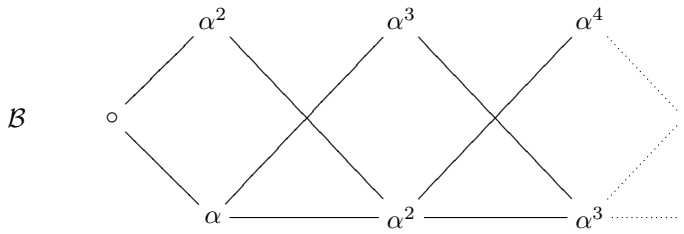
5.5 Un exemple : le diagramme de Fibonacci

Dans cette section, nous traitons le cas du diagramme associé à la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour traiter cet exemple, on prend $s = 1$, et donc $\Delta_s = \Delta_1$ par souci de simplicité.

Le diagramme de Bratteli associé à la substitution de Fibonacci $a \mapsto ab$; $b \mapsto a$ s'écrit :



où les sommets de la ligne du dessus sont « de type b », et ceux du bas sont « de type a ». Les coefficients indiquent les poids, où $\alpha = 1/\varphi = (\sqrt{5}-1)/2$ est l'inverse du nombre d'or. On vérifie que ces poids sont aussi les mesures : le vecteur propre normalisé de la matrice A est (α, α^2).

On remarque que la substitution ne force pas la frontière. On ne peut donc pas appliquer directement les informations obtenues sur ce diagramme aux pavages de Fibonacci.

Comme le diagramme est simple (définition 5.4.1), on peut indexer les chemins par les sommets plutôt que par les arêtes. Ainsi, tout élément de Π_n (avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$) peut être indexé par une suite sur l'alphabet $\{a, b\}$ dans laquelle le facteur aa n'apparaît jamais.

On peut écrire les matrice de Δ_1 en restriction à chacun des E_n. Ainsi, la restriction de Δ_1 à E_1 dans la base $(\mathbf{1}_{[a]}, \mathbf{1}_{[b]})$ est donnée par :

$$\Delta|_{E_1} = \begin{pmatrix} -\varphi & \varphi \\ 1+\varphi & -1-\varphi \end{pmatrix}, \text{ et les éléments propres sont :}$$
$$\left(0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \left(-1-2\varphi, \begin{bmatrix} 1 \\ -\varphi \end{bmatrix}\right).$$

On remarque que la matrice n'est pas symétrique : c'est parce que la base $(\mathbf{1}_{[a]}, \mathbf{1}_{[b]})$ est une base orthogonale de E_1, mais pas orthonormale.

De même, la restriction de Δ_1 à E_2 est donnée (dans la base $(\mathbf{1}_{[aa]}, \mathbf{1}_{[ab]}, \mathbf{1}_{[ba]})$ par :

$$\Delta|_{E_2} = \begin{pmatrix} -1-3\varphi & 1+2\varphi & \varphi \\ 2+3\varphi & -2-4\varphi & \varphi \\ \varphi & 1 & -1-\varphi \end{pmatrix}, \text{ et les éléments propres sont :}$$
$$\left(0, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right), \left(-1-2\varphi, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\varphi \end{bmatrix}\right), \left(-3-6\varphi, \begin{bmatrix} 1 \\ -\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

On a deux opérateurs de Cuntz–Krieger : U_a et U_b. On calcule les deux fonctions associées u_a et u_b.

$$u_a(x) = \varphi^2 x - \varphi;$$
$$u_b(x) = \varphi^2 x + \varphi,$$

Ainsi, pour tout chemin γ tel que $U_a\gamma \neq 0$, on a $\lambda_{U_a\gamma} = u_a(\lambda_\gamma)$, et de même avec u_b.

On a les premières valeurs propres et les formules de récurrence, on est donc en mesure de calculer tout le spectre de Δ_1 explicitement.

Chapitre 6

Complexité et étude métrique de l'espace de pavages

Nous avons vu au chapitre 3 que le comportement de la fonction de complexité — qui est *a priori* une information combinatoire — peut avoir des conséquences topologiques, en l'occurrence sur la cohomologie. En réalité, la complexité est plutôt un invariant *métrique* (pour la distance introduite au chapitre 1, section 1.1.2). Les chapitres précédents permettent de réinterpréter ce fait : dans la mesure où la distance encode la *géométrie* de la transversale, la complexité devient une information de nature géométrique. En effet, nous verrons que la complexité est liée à la dimension de boîte d'une transversale canonique. Cette dimension est invariante par homéomorphisme bi-lipschitzien (voir par exemple Falconer [24], mais nous en donnerons une preuve directe). Je suis redevable à Jean Bellissard pour m'avoir indiqué lors d'une discussion le fait que la complexité devrait être liée plus intimement à la distance qu'à la topologie.

Dans ce chapitre, nous explicitons les liens entre complexité et distance. Nous montrons que la dimension de boîte de la transversale canonique est égale à l'exposant de la fonction de complexité (lorsque celle-ci se comporte comme n^α). Nous montrons comment le point de vue métrique permet de préciser un théorème de Sadun et Williams [61] pour établir un lien entre une conjecture de Lagarias et Pleasants sur les ensembles de Delone et la conjecture de Nivat en dynamique symbolique.

6.1 Complexité et recouvrement de la transversale

Dans cette section, nous montrons que la fonction de complexité associée à une transversale canonique (au sens des définitions 1.1.12 et 1.1.19) est liée au nombre de recouvrement d'un espace par des ouverts. Cela nous permet de faire le lien avec la dimension de boîte introduite précédemment.

6.1.1 Cadre

Soit Ω un ensemble de pavages, minimal et de complexité locale finie. On note Ξ une transversale canonique au sens de la définition 1.1.12. On note $\mathcal{D}$ la règle locale permettant de définir l'ensemble des pointeurs à partir d'un pavage : $\mathcal{D}(P)$ est l'ensemble de Delone des pointeurs de P. La distance est celle définie à la section 1.1.2 : $P, P' \in \Xi$ sont à une distance au plus ε si $P \cap P'$ contient $B(0;\varepsilon)$ dans son support. Ainsi, si a est un amas, le diamètre de U_a est l'inverse du diamètre de la plus grande boule incluse dans l'amas « forcé[1] » par a.

On note $\mathcal{L}_r(\Xi)$ l'ensemble des amas de taille r, qui ont un pointeur à l'origine. Ainsi, la fonction de complexité pointée p_Ξ associée à Ξ (voir définition 1.1.19) est définie par :

$$p_\Xi(n) = \mathrm{Card}(\mathcal{L}_n(\Xi)).$$

On rappelle (proposition 1.1.20), que l'asymptotique de la fonction de complexité p_Ξ ne dépend pas de Ξ au sens suivant : si Ξ, Ξ' sont des transversales canoniques, alors il existe $C_1, C_2, k_1, k_2 > 0$ tels que pour tout n assez grand,

$$C_1 p_\Xi(k_1 n) \leq p_{\Xi'}(n) \leq C_2 p_\Xi(k_2 n).$$

Nous voulons lier la fonction de complexité p_Ξ au nombre de recouvrements de Ξ par des ouverts. Nous définissons donc la quantité suivante.

Définition 6.1.1. Soit (X, d) un espace métrique compact, et $r > 0$. On appelle *r-recouvrement* de X un recouvrement de X par des ouverts de diamètre au plus r. On note $N_r(X)$ le cardinal minimal d'un r-recouvrement optimal.

Proposition 6.1.2. *On considère un homéomorphisme bi-lipschitzien $\varphi : X \to X'$ entre deux espaces compacts. Alors il existe $C, C' > 0$ tels que pour tout $r > 0$,*

$$N_{Cr}(X') \leq N_r(X) \leq N'_{C'r}(X').$$

Démonstration. Le résultat est direct en remarquant que les ouverts de rayon au plus r de Ξ sont transformés en ouverts de rayon au plus Cr par φ, où C est le coefficient de Lipschitz de φ. De même pour φ^{-1}. □

6.1.2 Énoncé et preuve du théorème

Théorème 6.1.3. *Soient Ω un espace de pavages minimal, apériodique et de complexité locale finie, et Ξ une transversale canonique. Pour tout $r > 0$, on note N_r le nombre minimal d'ouverts de diamètre inférieur ou égal à r nécessaires pour recouvrir Ξ. Alors N_r et la fonction de complexité p_Ξ associée à Ξ sont reliés par l'inégalité suivante :*

$$\forall r > 0, \quad p(\lfloor 1/r \rfloor) \leq N_r \leq p(\lfloor 1/r \rfloor + 1),$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

Démonstration. Commençons par montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'égalité :

$$p(n) = N_{1/n}.$$

[1] L'amas p est forcé par a si tout pavage qui contient a contient p.

La fonction de complexité est définie par $p(n) = \mathrm{Card}(\mathcal{L}_{1/n})$. Or, pour tout $a \in \mathcal{L}_n$, l'ouvert U_a a un diamètre inférieur ou égal à $1/n$, ce qui prouve que $N_{1/n} \leq p(n)$.

Réciproquement, soit $\mathcal{U}$ un $(1/n)$-recouvrement optimal : un ensemble d'ouverts dont le diamètre est plus petit que $1/n$, dont l'union est Ξ, et de sorte que $N_{1/n} = \mathrm{Card}(\mathcal{U})$. Alors par définition de la distance, tout $U \in \mathcal{U}$ est contenu dans un voisinage de la forme U_a avec $a \in \mathcal{L}$, et $\mathrm{Supp}\, a$ contient $B(0; n)$. On note X l'ensemble de ces amas. Ainsi, $\{U_a\,;\, a \in X\}$ est un recouvrement de Ξ. Supposons que $N_{1/n} < p(n)$. Alors il existe un amas $a_0 \in \mathcal{L}_n$ tel que a_0 n'est un sous-amas d'aucun des $a \in X$. Cela signifie que $\bigcup_{a \in X} U_a$ n'intersecte pas U_{a_0}, ce qui est une contradiction.

Finalement, on note que N_r est décroissant en fonction de r, ce qui achève de prouver le résultat. □

6.1.3 La dimension de boîte

Ce résultat permet immédiatement de relier complexité et dimension de boîte. La dimension de boîte est définie par la quantité suivante, quand elle existe :

$$\dim_{\mathrm{B}}(\Xi) = \lim_{r \to 0^+} -\frac{\ln N_r}{\ln(r)}.$$

Le résultat suivant découle donc directement du théorème 6.1.3.

Théorème 6.1.4. *La dimension de boîte de la transversale d'un espace de pavages (pour la distance usuelle), est définie par :*

$$\dim_{\mathrm{B}}(\Xi) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln p(n)}{\ln(n)}.$$

Ce théorème permet de calculer la dimension de boîte d'une transversale d'un espace de pavage dont on connaît la complexité. Par ailleurs, le théorème 5.1.6 assure que la dimension de boîte est égale à l'abscisse de convergence de la fonction ζ (définition 5.1.5). Cela permet donc de prédire quelle peut être l'abscisse de convergence de la fonction ζ pour certaines classes de pavages, même si on n'est pas capable de la calculer directement par les méthodes du chapitre 5. Ainsi, si la fonction de complexité croît comme n^α, alors l'abscisse de convergence pour la fonction ζ doit être α.

Ce résultat permet aussi d'obtenir une réciproque partielle : connaissant l'abscisse de convergence de la fonction ζ (et donc la dimension de boîte), on peut obtenir des informations sur la fonction de complexité.

Proposition 6.1.5. *Soit Ξ une transversale d'un espace de pavages, de dimension de boîte α. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ assez grand, on a :*

$$n^{\alpha - \varepsilon} \leq p(n) \leq n^{\alpha + \varepsilon}.$$

Démonstration. Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(n) = \frac{\ln(p(n))}{\ln(n)}.$$

Alors $\ln p(n) = \varphi(n) \ln n = \ln(n^{\varphi(n)})$, de sorte que $p(n) = n^{\varphi(n)}$. Or φ tend vers d, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N tel que pour tout $n \geq N$, $\varphi(n) \in \,]d - \varepsilon, d + \varepsilon[$. □

En particulier, en combinant ce résultat avec le corollaire 5.2.2, qui dit que la dimension de boîte de la transversale associée à un pavage de substitution est égale à la dimension d de l'espace à paver, on a :

Corollaire 6.1.6. Soit Ξ la transversale d'un pavage de substitution de dimension d. Alors la complexité vérifie l'encadrement suivant :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad n^{d-\varepsilon} \leq p(n) \leq n^{d+\varepsilon}.$$

Ce résultat est en réalité un résultat plus faible que ce que l'on peut espérer. En effet, on s'attend à ce que $p(n)$ croisse comme n^d, c'est-à-dire soit encadré par $C_1 n^d$ et $C_2 n^d$, pour C_1, C_2 deux constantes positives. La majoration est un résultat connu : c'est un théorème de Hansen et Robinson pour les pavages dits *self-affine*, qui s'énonce comme suit dans le cas des substitutions.

Théorème 6.1.7 (Théorème 7.17 dans [59])**.** *Soit Ω un espace de pavages de substitution de dimension d. Alors il existe $C > 0$ tel que pour tout n assez grand, on a :*

$$p(n) \leq C n^d.$$

La minoration de $p(n)$ par $C' n^d$ fait partie du folklore. Elle peut résulter de la conjonction d'un résultat de Lenz[2] [45] et du fait que les pavages de substitution sont *linéairement répétitifs*. Intuitivement : puisque les amas d'un pavage de substitution se répètent « souvent », alors la complexité ne peut pas être trop haute (car trop d'amas ne peuvent pas se répéter trop souvent dans un volume donné).

La minoration peut également se déduire d'un résultat de Solomyak [66, lemme 2.4] : dans un pavage de substitution P sans période, il existe une constante C telle que si a et b sont deux amas de taille r de P qui sont un translatés l'un de l'autre (disons $a = b + x$ avec $x \in \mathbb{R}^d$), alors $\|x\| \geq Cr$. Ainsi, les amas qui sont « proches » de a sont différents de a. Cela donne une borne inférieure sur la complexité.

On donnera dans la suite de ce chapitre une preuve directe de l'encadrement de p pour un pavage de substitution. La preuve utilisera les propriétés d'invariance de la complexité par homéomorphisme bi-lipschitzien afin de simplifier le problème. Cela dit, il est intéressant de voir que les méthodes de Pearson–Bellissard permettent de retrouver des résultats de complexité, même s'ils ne sont pas optimaux.

6.2 Complexité des pavages de substitution

Le calcul de la complexité des pavages de substitution a été partiellement résolu par Hansen et Robinson [59]. Nous proposons ici une preuve qui utilise le lien entre complexité et nombre de recouvrements. L'idée est la suivante : estimer la fonction de complexité est équivalent à estimer le nombre d'ouverts dans un recouvrement optimal. On choisit donc un diagramme de Bratteli à poids $(\mathcal{B}, w)$ dont l'ensemble des chemins est homéomorphe de manière bi-lipschitzienne à une transversale Ξ de l'espace de pavages de substitutions. On compte alors le nombre d'ouverts recouvrant $(\Pi_\infty(\mathcal{B}), d_w)$, et si le choix de diagramme est judicieux, il sera plus facile de compter le nombre d'ouverts d'un diamètre donné de Π_∞ que de Ξ.

[2] Répondant à une conjecture de Lagarias et Pleasants [43]

6.2.1 Choix d'un diagramme adapté

Soit (Ω, ω) un espace de pavage de substitution (définition 4.1.1) apériodique et de complexité locale finie, et A la matrice d'abélianisation de ω (définition 4.1.3). On note λ la constante d'expansion de ω, et Λ la valeur propre de Perron–Frobenius de A. On rappelle qu'on a $\lambda^d = \Lambda$ (lemme 4.2.3). On suppose que ω force le bord. Soit Ξ la transversale canonique associée au pointage des tuiles, et p_Ξ la fonction de complexité associée.

On note $\mathcal{B}$ le diagramme de Bratteli associé à ω (définition 4.3.2). Alors l'ensemble des chemins infinis sur $\mathcal{B}$ (noté Π_∞) est homéomorphe par l'application de Robinson à la transversale Ξ (théorème 4.3.10). De plus, si on munit $\mathcal{B}$ d'une fonction poids (définition 4.3.11) qui attribue un poids λ^{-n} aux sommets qui sont à la profondeur n, alors cet homéomorphisme est bi-lipschitzien (théorème 4.3.13).

Or, (proposition 6.1.2) si Π_∞ et Ξ sont homéomorphes par un homéomorphisme bi-lipschitzien, alors les quantités $N_r(\Xi)$ et $N_r(\Pi_\infty)$ croissent de la même manière, autrement dit on a un encadrement du type :

$$N_{Cr}(\Pi_\infty) \leq N_r(\Xi) \leq N_{C'r}(\Pi_\infty),$$

pour tout r assez petit.

Par conséquent, il suffit de connaître le comportement de $N_r(\Pi_\infty)$ pour connaître celui de $N_r(\Xi)$, et donc connaître le comportement de la fonction de complexité (par le théorème 6.1.3).

6.2.2 Théorème et discussion

Théorème 6.2.1. *Soit (Ω, ω) un espace de pavages de substitution de dimension d. Soit p la fonction de complexité associée. Alors il existe C_1, C_2 deux constantes positives telles que pour tout n assez grand :*

$$C_1 n^d \leq p(n) \leq C_2 n^d.$$

Démonstration. L'étude précédente nous a permis de montrer qu'il suffit de montrer que la fonction $N_r(\Pi_\infty)$ (que l'on note simplement N_r) satisfait l'inégalité suivante :

$$C_1' r^{-d} \leq N_r \leq C_2' r^{-d},$$

pour deux constantes positives C_1' et C_2', pour tout r assez petit.

On a choisi pour $\mathcal{B}$ le diagramme associé à ω comme à la section 4.3.1. Le poids d'un sommet à la profondeur k est λ^{-k}. Ainsi, les ouverts de diamètre λ^{-k} sont exactement les ouverts de la forme U_γ, avec γ un chemin de longueur k. Par conséquent,

$$N_{\lambda^{-k}}(\Pi_\infty) = \mathrm{Card}(\Pi_k),$$

où Π_k désigne l'ensemble des chemins de longueur k. Or, on sait (proposition 4.3.5) que le nombre de chemins de longueur k est équivalent à $C\Lambda^k = C\lambda^{dk}$, où C est une constante strictement positive. En particulier, on a l'encadrement suivant pour k assez grand :

$$(C-1)\big(\lambda^k\big)^d \leq N_{\lambda^{-k}} \leq (C+1)\big(\lambda^k\big)^d.$$

Soit $r > 0$. Soit k choisi de sorte que $\lambda^k \leq r^{-1} \leq \lambda^{k+1}$. Alors :

$$\begin{aligned} \lambda^{-(k+1)} \leq \quad & r \quad \leq \lambda^{-k}; \\ N_\lambda^{-k} \leq \quad & N_r \quad \leq N_{\lambda^{-(k+1)}}; \\ (C-1)\lambda^{-1}\big(\lambda^{k+1}\big)^d \leq \quad & N_r \quad \leq (C+1)\lambda\big(\lambda^k\big)^d. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$(C-1)\lambda^{-1}r^{-d} \leq N_r \leq (C+1)\lambda r^{-d}$$

pour tout r assez petit.

Cette quantité est polynomiale. Par conséquent, comme on raisonne à une constante près, $N_r(\Xi)$ se comporte comme r^{-d}. On a alors le résultat en appliquant le théorème 6.1.3. □

Ainsi, nous avons prouvé qu'un pavage de substitution de dimension d a une complexité de l'ordre de n^d. Cette méthode que nous proposons a ceci de particulier qu'elle permet de se ramener à un cas beaucoup plus simple par un homéomorphisme bi-lipschitzien : on ne compte plus les amas de taille n, mais les amas dont la taille sont *de l'ordre de* n.

6.3 Complexité des pavages et dynamique symbolique

Nous avons vu que la complexité était un invariant métrique. Il peut donc être intéressant de voir si certains théorèmes établissant l'existence d'homéomorphismes entre espaces peuvent être renforcés afin d'obtenir l'existence d'homéomorphismes bi-lipschitziens. C'est ce que nous faisons pour un théorème de Williams et Sadun [61] afin de lier l'étude de la complexité dans le domaine des pavage d'une part, et dans le domaine de la dynamique symbolique d'autre part. Cela nous permet d'appliquer un résultat d'Epifanio, Koskas et Mignosi [23] pour montrer la version asymptotique d'une conjecture de Lagarias et Pleasants [43] en dimension deux.

6.3.1 Généralisation du théorème de Williams et Sadun

Nous énonçons ici un théorème de Sadun et Williams, mettant en relation les pavages et la dynamique symbolique.

À partir de maintenant, nous restreignons les classes de pavages pour être dans les conditions du théorème de Sadun et Williams. Nous considérons donc un espace de pavages Ω formés à partir d'un nombre fini (à translation près) de prototuiles, de complexité locale finie comme construit dans le chapitre 1. Nous demandons de plus que les tuiles de $\mathcal{A}$ soient des polyèdres triangulés, qui se rencontrent face-à-face.

Théorème 6.3.1 (Sadun–Williams, théorèmes 1 et 2 dans [61])**.** *Un espace de pavages Ω de dimension d qui satisfait les hypothèses ci-dessus est une fibration au dessus d'un tore, dont la fibre est un espace de Cantor.*

De plus, il existe un homéomorphisme $\varphi : \Omega \to \Sigma$, où Σ est un espace de pavages dont les tuiles sont des d-cubes colorés, et peut donc être vu comme la suspension d'un sous-décalage de $\mathbb{Z}^d$.

Il faut noter que l'homéomorphisme φ construit dans la preuve de ce théorème n'est en général pas une conjugaison topologique. Cela dit, en reprenant la preuve de Sadun et Williams, nous soulignons que cet homéomorphisme est plus que bi-continu : il est bi-lipschitzien.

Proposition 6.3.2. *On reprend les notations du théorème 6.3.1. Alors l'application φ est bi-lipschitzienne, et elle envoie une transversale canonique sur une transversale canonique au sens de la définition 1.1.12.*

Rappelons les lignes de la démonstration du théorème de Sadun et Williams, en soulignant pourquoi l'homéomorphisme φ est bi-lipschitzien. Tout comme dans l'article, on se place en dimension 2 pour donner l'idée de la preuve. On peut se référer à l'article original pour les détails supplémentaires, ainsi que pour les arguments permettant de transférer la preuve en dimension supérieure.

On part donc d'un espace de pavages Ω vérifiant les conditions ci-dessus. Il suffit pour notre propos de choisir dans Ω une transversale canonique correspondant à un pointage des tuiles. On note $t_1, \ldots, t_l$ l'ensemble de ses tuiles, et $v_1, \ldots, v_n$ l'ensemble des arêtes de toutes ses tuiles (sans répétition : une intersection autorisée $t_i \cap t_j$ correspond à un seul vecteur v_k). On dit qu'un pavage (par polygones) est rationnel si toutes les différences de sommets $x - y$ sont des éléments de $\mathbb{Q}^d$.

Fait 1. L'espace de pavage Ω est homéomorphe, par un homéomorphisme bi-lipschitzien qui préserve la transversale canonique, à un espace de pavages *rationnels.*

Pour cela (en dimension 2), on considère toutes les arêtes de toutes les tuiles : $v_1, \ldots, v_n$. Ces vecteurs satisfont un certain nombre d'équations linéaires du type suivant :

$$v_{i(1)} \pm \ldots \pm v_{i(k)} = 0.$$

Ces équations correspondent au fait que les tuiles sont fermées : on a autant d'équations que de tuiles. Ce système linéaire à coefficients entiers a une solution ; il a donc une solution rationnelle $(v'_1, \ldots, v'_n)$ qui approxime d'aussi près que l'on veut la solution originale. On choisit une telle solution rationnelle, pour définir un nouvel ensemble de tuiles rationnelles $t'_1, \ldots, t'_l$, toutes non vides. On définit des applications affines qui envoient les v_i sur les v'_i. On note m et M respectivement le minimum et le maximum des facteurs de dilatation des applications $v_i \to v'_i$. On se donne, avec ce choix, une famille d'applications

$$f_i : t_i \longrightarrow t'_i,$$

qui envoient bijectivement les tuiles dans leurs analogues rationnels, et qui étendent les applications linéaires $v_i \to v'_i$. Il est possible de choisir les f_i bi-lipschitziens, de facteurs compris entre m et M, quitte à changer m et M. Ces applications envoient le pointeur des tuiles t_i sur un point des tuiles t'_i, de sorte que les tuiles rationnelles sont maintenant pointées. Quitte à modifier les f_i, on suppose queles pointeurs des tuiles t'_i sont rationnels eux aussi.

Pour associer un pavage rationnel T' à un pavage $T \in \Omega$, on procède de la manière suivante :

- on considère t_i la tuile de T contenant 0 ;
- on place la tuile t'_i dans $\mathbb{R}^2$ de sorte que 0 soit à la position correspondant à la position de 0 dans t_i par l'application f_i ;

– si une tuile t_j appartient à T, on construit un chemin d'arêtes :

$$v_{i(1)} \pm \ldots \pm v_{i(k)},$$

de sorte que ce chemin relie une arête de t_i à une arête de t_j ;
– on place la tuile t'_j dans T', de sorte que la position relative de t'_j et t'_i est donnée par le chemin :

$$v'_{i(1)} \pm \ldots \pm v'_{i(k)}.$$

On appelle φ_1 cette application. On note aussi bien φ_1 l'application qui à un pavage associe un autre pavage, que l'application $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ qui à un point de T associe un point de T'.

Caractère lipschitzien — L'image par φ_1 d'un amas de taille n est un amas de taille au moins mn et au plus Mn. En effet, pour placer les tuiles de T dans une boule de taille n, on suit un chemin d'arêtes depuis l'origine. Pour placer les tuiles de T', ce chemin est dilaté ou contracté dans des facteurs compris entre m et M. De plus, il est clair que si $d(T, T+x) = \varepsilon$, alors

$$m\varepsilon \leq d(\varphi_1(T), \varphi_1(T+x)) \leq M\varepsilon,$$

par le caractère lipschitzien des f_i.

Ces deux faits combinés permettent de déduire que φ_1 est bi-lipschitzienne en tant qu'application entre espaces de pavages.

Image de la transversale — Notons que T et $\varphi_1(T)$ ne sont pas mutuellement localement dérivables : l'image d'une tuile t_i ne dépend pas seulement de t_i ou de son voisinage immédiat, mais du chemin d'arêtes qui la relie à l'origine, et en particulier de sa distance à l'origine. Cela fait perdre le caractère local. En revanche, et par construction, l'ensemble des pointeurs des tuiles de $\varphi_1(T)$ est localement dérivable de $\varphi_1(T)$, et φ_1 envoie donc transversale canonique sur transversale canonique.

Fait 2. Un espace de pavages rationnel est homéomorphe à un espace de pavages entier dont les pointeurs des tuiles sont entiers, de manière bi-lipschitzienne.

Il suffit de dilater les pavages par un nombre entier assez grand, de manière à ce que les coordonnées rationnelles des sommets et des pointeurs deviennent entières. C'est clairement une opération réversible et bi-lipschitzienne.

Fait 3. Un pavage à coordonnées entières de dimension d est *localement équivalent*[3] à un pavage dont les tuiles sont des d-cubes.

Ce dernier fait est prouvé directement dans l'article de Sadun et Williams. Il s'agit de remplacer les bords des tuiles par des zigzags de longueur entière et parallèles aux axes de coordonnées. Ce remplacement des arêtes par des zigzags est fait de manière localement équivalente.

Ce dernier fait entraîne facilement l'existence d'un homéomorphisme bi-lipschitzien (en fait, il s'agit même d'une conjugaison topologique) entre l'espace de pavage Ω, et l'espace de pavage $S\Sigma$ associé au pavage par des d-cubes. De plus, l'image par φ de la transversale canonique est une transversale canonique au sens de la définition 1.1.12, puisque l'ensemble des pointeurs de $\varphi_1(P)$ est

[3] Deux pavages T et T' sont localement équivalents (ou mutuellement localement dérivables) si la configuration de T au voisinage d'un point x se déduit de la configuration locale de T' autour du point x (et réciproquement), et si le caractère local est uniforme en x.

localement dérivable de $\varphi_1(P)$, et que $\varphi(P)$ (et ses pointeurs) sont localement dérivables de $\varphi_1(P)$.

Par conséquent, on a bien le résultat, à savoir que Ω est homéomorphe par un homéomorphisme bi-lipschitzien à la suspension d'un sous-décalage de $\mathbb{Z}^d$, et que l'homéomorphisme envoie une transversale canonique sur une transversale canonique.

6.3.2 Complexité des pavages et des mots

Théorème 6.3.3. *Soit Ω un espace de pavages de dimension d vérifiant les hypothèses du théorème de Sadun et Williams, muni d'une transversale canonique Ξ. On appelle p_Ξ la fonction de complexité associée à Ξ. Alors il existe un sous-décalage Σ de $\mathbb{Z}^d$, dont la suspension est homéomorphe à Ω, et dont la fonction de complexité p_Σ se comporte asymptotiquement comme p en le sens suivant : il existe C_1, C_2, k_1, $k_2 > 0$ tels que pour tout n assez grand,*

$$C_1 p_\Xi(k_1 n) \leq p_\Sigma(n) \leq C_2 p_\Xi(k_2 n).$$

Démonstration. On sait (théorème 6.1.3), que $p_\Xi(n)$ et $N_{1/n}(\Xi)$ sont équivalentes. Par ailleurs, l'homéomorphisme φ de Sadun–Williams entre Ω et la suspension de Σ (notée $S\Sigma$) envoie transversale canonique sur transversale canonique et est bi-lipschitzien (proposition 6.3.2). Donc $N_{1/n}(\Xi)$ et $N_{1/n}(\varphi(\Xi))$ sont équivalents. Par ailleurs, $N_{1/n}(\varphi(\Xi))$ et $p_{\varphi(\Xi)}(n)$ sont équivalentes, où $p_{\varphi(\Xi)}(n)$ est la fonction de complexité associée à la transversale canonique $\varphi(\Xi)$. Mais si Ξ et Ξ' sont deux transversales canoniques, les fonctions de complexité associées sont équivalentes (proposition 1.1.20). Par conséquent, les fonctions de complexité $p_{\varphi(\Xi)}$ et p_Σ sont équivalentes, et on a le résultat. □

Corollaire 6.3.4. Lorsque la complexité de Ω est majorée par un polynôme, l'encadrement ci-dessus devient :

$$C_1' p_\Xi(n) \leq p_\Sigma(n) \leq C_2' p_\Xi(n),$$

pour tout n assez grand.

Ce résultat permet de relier la complexité utilisée en dynamique symbolique (y compris en plusieurs dimensions), et la complexité utilisée dans l'étude des pavages. On a vu que pour les pavages, la fonction de complexité ne pouvait pas être canonique. La notion d'équivalence de fonctions de complexité semble être une notion adaptée à notre propos, puisqu'un changement de norme dans la définition d'un amas de taille n donne deux fonctions équivalentes. Le prix à payer pour ce point de vue est que nous ne pouvons pas regarder à proprement parler les *valeurs* de la fonction de complexité, mais plutôt son comportement asymptotique.

6.3.3 Complexité minimale

Nous appliquons le théorème 6.3.3 pour discuter de problèmes de complexité minimale des mots et des pavages. On a déjà mentionné au chapitre 1 que si la fonction de complexité d'un pavage était bornée, alors il était complètement périodique. Nous énonçons le résultat suivant, dû à Morse et Hedlund.

Théorème 6.3.5 (Morse–Hedlund [49]). *Soit w un mot bi-infini de dimension 1 sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Soit p la fonction de complexité telle que $p(n)$ est l'ensemble des sous-mots de longueur n de w. S'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p(n_0) \leq n_0$, le mot w est périodique.*

Nous voyons que ce résultat est nettement plus puissant, puisqu'il suffit que la fonction de complexité ne croisse pas assez vite pour que le mot soit périodique (et en particulier pour que p soit bornée). La précision de ce résultat (l'existence d'un unique n_0 tel que $p(n_0) \leq n_0$) n'est pas à la portée des méthodes développées dans ce chapitre (puisque la fonction de complexité n'est considérée qu'asymptotiquement, et à une constante près). Une reformulation plus adaptée à nos méthodes est la suivante.

Corollaire 6.3.6. Soit w un mot bi-infini de dimension 1, apériodique. Soit p une fonction de complexité associée. Alors on a, pour tout n assez grand :

$$p(n) \geq Cn,$$

où $C > 0$. De manière équivalente :

$$\liminf_{n \to +\infty} \frac{p(n)}{n} > 0.$$

Ce résultat se généralise pour des mots d-dimensionnels : si w est un mot non totalement périodique, alors $p_w(n)/n > C > 0$, pour tout n assez grand. La preuve est relativement simple, et consiste à utiliser le théorème de Morse–Hedlund. La preuve est faite par Cassaigne [13]. Un résultat analogue a été prouvé par Lagarias et Pleasants pour les ensembles de Delone en dimension quelconque, voir [43].

Il existe d'autres questions plus précises que l'on peut se poser : Quelle est la complexité minimale d'un pavage (ou d'un mot) sans période et répétitif ? De manière équivalente, quelle est la complexité en dessous de laquelle un pavage a nécessairement une période ? Ou encore plus précisément, peut-on déterminer le rang du groupe des périodes d'un pavage uniquement à partir de sa fonction de complexité ? Cette dernière question fait l'objet d'une conjecture de Lagarias et Pleasants.

Conjecture 6.3.7 (Lagarias–Pleasants, conj. 2.2 dans [43]). *Soit d une dimension fixée. Pour tout couple de constantes $0 < r < R$ et tout , $j \in [\![1, d]\!]$, il existe une constante $c_j := c_j(r, R, d)$ qui vérifie la propriété suivante. Tout (r, R)-ensemble de Delone $\mathcal{D}$ (définition 1.1.3) de fonction de complexité p qui satisfait l'inégalité*

$$\frac{p(n)}{n^{d+1-j}} < c_j$$

pour tout n assez grand, alors le groupe des périodes de $\mathcal{D}$ est de rang au moins j.

De même que pour le théorème de Morse–Hedlund, nous donnons une version asymptotique de ce résultat qui permet de faire disparaître les constantes.

Conjecture 6.3.8 (Lagarias–Pleasants, version asymptotique). *Soit Ω un espace de pavages répétitif et de complexité locale finie. Soit p une fonction de*

complexité. On suppose que p vérifie :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n^{d+1-j}} = 0.$$

Alors le groupe des périodes des pavages de Ω est de rang au moins j.

En particulier, la contraposée de ce résultat pour $j = 1$ affirme que tout pavage apériodique et répétitif de complexité locale finie vérifie :

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n^{d}} > 0.$$

Notons que l'on doit utiliser ici une limite supérieure et non une limite inférieure : ce n'est pas anodin, et l'analogue avec une limite inférieure serait faux, au moins pour $d \geq 3$.

Théorème 6.3.9 (Lagarias–Pleasants, théorème. 2.2 dans [43])**.** *En dimension $d \geq 3$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de Delone répétitif et apériodique, notés $\mathcal{D}$, qui vérifie :*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n^{\lceil (n+1)/2\rceil+\varepsilon}} = 0,$$

pour tout $\varepsilon > 0$, où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x.

Le théorème de Sadun renforcé (et sa conséquence, le théorème 6.3.3) permettent de faire le lien entre complexité des pavages et complexité des mots. Nous l'utilisons pour comparer la conjecture de Lagarias–Pleasants à la conjecture de Nivat en théorie des mots. Nous montrons que des résultats partiels obtenus sur la conjecture de Nivat suffisent à montrer la conjecture de Lagarias–Pleasants en dimension 2. Réciproquement, nous montrons que la construction du théorème 6.3.9 fait peser de sérieux doutes sur la possibilité de généraliser la conjecture de Nivat en dimension supérieure.

Conjecture 6.3.10 (Nivat [51])**.** *Soit w un mot de dimension deux sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Soit $p(n,m)$ la fonction de complexité* rectangulaire *: $p(n,m)$ désigne le nombre de facteurs rectangulaires distincts de w de taille $n \times m$. S'il existe $(n_0, m_0) \in \mathbb{N}^2$ tels que*

$$p(n_0, m_0) \leq n_0 m_0,$$

alors le mot w a au moins une période.

La version asymptotique de cette conjecture serait la suivante (nous remplaçons également la complexité rectangulaire par une fonction de complexité quelconque comme définie au chapitre 1) :

Conjecture 6.3.11 (Nivat, version asymptotique)**.** *Soit w un mot de dimension deux sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. Soit p une fonction de complexité. Alors*

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{p(n)}{n^{2}} > 0.$$

Or, il se trouve qu'une version faible de la conjecture de Nivat a été prouvée, et qu'elle implique en particulier sa version asymptotique.

Théorème 6.3.12 (Epifanio–Koskas–Mignosi [23])**.** *On considère un mot de dimension deux, $w \in \mathcal{A}^{\mathbb{Z}^2}$. Soit $p(n,m)$ la complexité rectangulaire. S'il existe (n_0, m_0) tels que $p(n_0, m_0) \leq n_0 m_0/144$, alors w a au moins une période.*

Ce théorème permet donc d'affirmer que la conjecture de Nivat asymptotique est vraie. Le théorème 6.3.3 permet d'affirmer qu'elle tient donc aussi pour les pavages de dimension 2.

Corollaire 6.3.13. Soit P un pavage de dimension 2, vérifiant les hypothèses du théorème de Sadun et Williams. Si P est complètement apériodique, alors il existe $C > 0$ tel que pour tout n assez grand, on a :

$$p(n) \geq Cn^2.$$

Ainsi, en combinant le corollaire précédent avec le corollaire du théorème de Morse–Hedlund, on obtient la proposition suivante.

Proposition 6.3.14. *La conjecture de Lagarias–Pleasants asymptotique est satisfaite pour les pavages de dimension deux.*

Réciproquement, si on combine le théorème 6.3.3 et la construction de Lagarias et Pleasants (théorème 6.3.9), on a :

Proposition 6.3.15. *Pour tout $d \geq 3$, il existe un mot w de dimension d, complètement apériodique et répétitif, dont la fonction de complexité p vérifie pour tout $\varepsilon > 0$:*

$$p(n) \leq \varepsilon n^d$$

infiniment souvent.

En particulier (mis à part le fait que l'on a changé la complexité rectangulaire par une fonction de complexité « usuelle »), cette dernière proposition montre que la conjecture de Nivat ne peut être généralisée en dimension supérieure ou égale à 3, même pour des pavages répétitifs.

Annexe A

Limites inverses de graphes de Rauzy

Nous montrons dans cet appendice qu'un espace de pavage de dimension un est homéomorphe à la limite inverse des graphes de Rauzy associés (définition A.1.1).

Les graphes de Rauzy sont traditionnellement associés à un mot infini ; ce sont des objets combinatoires. Ici, nous associons un mot à un pavage de dimension 1, nous construisons les graphes de Rauzy à partir du mot, et nous montrons que sous certaines conditions (apériodicité et répétitivité), l'espace associé au pavage est homéomorphe à la limite inverse des graphes. Il faut pour cela considérer les graphes de Rauzy comme des graphes topologiques. Nous le faisons de manière arbitraire, ce qui nous permet d'avoir un homéomorphisme, mais nous fait perdre espoir d'obtenir une conjugaison topologique (voir [14]).

Les graphes de Rauzy sont très similaires aux complexes de Gähler, et la preuve de l'homéomorphisme est inspirée des résultats préexistants, notamment ceux d'Anderson–Putnam [1], et Gähler–Sadun [60].

A.1 Définition des graphes de Rauzy

Soit w un mot bi-infini sur un alphabet fini $\mathcal{A}$. On note :

$$w = \dots w_{-2}w_{-1}.w_0w_1w_2\dots$$

Nous redonnons la définition des graphes de Rauzy associés au mot w.

Définition A.1.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle $F_n(w)$ l'ensemble des sous-mots (ou facteurs) de w de taille n. Le n-ème graphe de Rauzy R_n associé à w est un graphe orienté défini par :

- un ensemble de sommets $V_n := F_n(w)$;
- un ensemble d'arêtes orientées E_n, tel qu'il y a une arête de $a_1 \dots a_n \in V_n$ vers $b_1 \dots b_n \in V_n$ si $a_i = b_{i-1}$ pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et si le mot $a_1 \dots a_n b_n$ est un facteur de w.

On note ${}_af_b$ l'arête orientée de af vers fb, où $a, b \in \mathcal{A}$ et $f \in F_{n-1}$, de sorte que $af, fb \in V_n$. Une telle arête existe, par définition, si et seulement si $afb \in F_{n+1}$.

Les graphes de Rauzy sont tout à fait adaptés pour étudier les propriétés combinatoires des mots, et en particulier la complexité, puisque le nombre d'arêtes de R_n est égal au nombre de facteurs de longueur n, et le nombre d'arêtes de R_n est égal au nombre de facteurs de longueur $n+1$.

Tels qu'on les a définis, ces graphes sont des objets combinatoires. Cela dit, il est possible (et nous le ferons), de les considérer comme des objets topologiques : chaque arête est une copie du segment $[0,1]$ dont les extrémités sont recollées sur des points correspondant aux sommets.

A.2 Limite inverse de graphes de Rauzy

Montrons maintenant que l'on peut définir une suite d'applications de projection

$$\gamma_n : R_{n+1} \longrightarrow R_n$$

continues et surjectives, de sorte que la limite inverse des graphes de Rauzy sous ces applications est homéomorphe à la suspension du sous-décalage engendré par w.

Le fait qu'on peut raccourcir un mot de longueur $n+1$ en un mot de longueur n permet de définir des applications de projection γ_n. Cette définition nécessite néanmoins un choix.

Définition A.2.1. On définit $\gamma_n : R_{n+1} \to R_n$ de la manière suivante. Si n est pair, γ_n est défini par :

- $\gamma_n(a := a_1 \dots a_{n+1}) = a_1 \dots a_n$, où $a \in S_{n+1}$ (on enlève une lettre à droite) ;
- s'il existe $e \in E_n$ de a vers b, alors il existe dans R_n une arête de $\gamma_n(a)$ vers $\gamma_n(b)$. L'application γ_n envoie alors e sur cette arête, et sa restriction à e est la fonction identité sur le segment $[0,1]$.

Si n est impair, γ_n est défini similairement par :

- $\gamma_n(a := (a_1 \dots a_{n+1})) = a_2 \dots a_{n+1}$, où $a \in S_{n+1}$ (on enlève une lettre à gauche) ;
- la définition de γ_n sur les arêtes est exactement la même.

Proposition A.2.2. *Les applications γ_n sont continues et surjectives.*

Démonstration. La preuve est directe. □

On peut maintenant construire la limite projective du système (R_n, γ_n).

Définition A.2.3. La limite projective du système $(R_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est le sous-ensemble suivant de $\prod_{n\in\mathbb{N}^*} R_n$:

$$\varprojlim \left(R_n, \gamma_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{ (x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n\in\mathbb{N}^*} R_n \,;\, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \gamma_n(x_{n+1}) = x_n \right\}.$$

La topologie de la limite inverse est induite par la topologie du produit. C'est un ensemble compact, comme sous-ensemble fermé d'un ensemble compact.

Théorème A.2.4. *Soit w un mot bi-infini sur l'alphabet $\mathcal{A}$. Soit Σ_w le sous-décalage de $\mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ engendré par w. On note Ω_w la suspension (définition 1.2.2) de (Σ_w, τ). Alors on a un homéomorphisme :*

$$\Omega_w \simeq \varprojlim (R_n, \gamma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}.$$

La preuve s'inspire des travaux similaires [1, 60].

Démonstration. Construisons un homéomorphisme entre $X := \varprojlim_n R_n$ et $\Omega := \Omega_w$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une application $\psi_n : \Omega \to R_n$. À partir de ces applications, nous construirons $\psi : \Omega \to X$, qui sera l'homéomorphisme recherché. Soit $P \in \Omega$. Alors $P = (m, t)$ pour un certain $m \in \Sigma_w$, et t dans $[0, 1[$. On note $m = (m_i)_{i\in\mathbb{Z}}$. Définissons alors $\psi_n(P)$ comme suit, selon la parité de n :

- si n est pair ($n = 2p$), on considère les sommets s_1 et s_2 de R_n définis par les mots suivants :

$$s_1 := m_{-p} \dots m_{p-1}\,;$$
$$s_2 := m_{-p+1} \dots m_p.$$

  Il existe une arête orientée, isométrique à $[0, 1]$, de s_1 vers s_2. Alors $\psi_n(P)$ est défini comme le point en position $t \in [0, 1]$ sur cette arête.
- si n est impair, ($n = 2p + 1$), on considère les sommets s_1 et s_2 de R_n définis par les mots suivants :

$$s_1 := m_{-p-1} \dots m_{p-1}\,;$$
$$s_2 := m_{-p} \dots m_p.$$

  $\psi_n(P)$ est défini comme le point en position $t \in [0, 1]$ sur l'arête de s_1 vers s_2.

Un calcul direct montre que les ψ_n commutent aux γ_n :

$$\psi_n = \gamma_{n+1} \circ \psi_{n+1}$$

De ce fait, les applications ψ_n permettent de définir une application $\psi : \Omega \to X$. Il nous faut vérifier que ψ est bijective et continue. Par compacité de Ω, cette application sera un homéomorphisme.

Soit $P, P' \in \Omega$. On écrit $P = (m, t)$ et $P' = (m', t')$, avec $t, t' \in [0, 1[$. On suppose que $P \neq P'$. Si $t \neq t'$, alors il est clair que $\psi_n(P) \neq \psi_n(P')$ pour tout n, et par conséquent, $\psi(P) \neq \psi(P')$. Si $t = t'$, alors $m \neq m'$, et donc il existe un $p \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$m_{-p-1} \dots m_{p-1} \neq m'_{-p-1} \dots m'_{p-1}$$

Par conséquent, $\psi_{2p+1}(P)$ et $\psi_{2p+1}(P')$ n'appartiennent pas à la même arête de R_{2p+1}, et ne peuvent donc être égales. Dans tous les cas, si $P \neq P'$ alors $\psi(P) \neq \psi(P')$. Cela prouve l'injectivité de ψ.

Montrons que ψ est surjective. Étant donné $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$, construisons un antécédent de x dans Ω. Par construction, il existe au plus une arête entre deux sommets fixés dans un graphe de Rauzy. Par conséquent, l'élément $x_n \in R_n$ est entièrement déterminé par les deux sommets s_n et s'_n (respectivement la source et le but de l'arête), et par un réel $t_n \in [0, 1[$, qui paramètre la position sur l'arête. Il est clair que $t_n =: t$ ne dépend pas de n (du fait de la commutation des ψ_n et des γ_n). À partir de la suite des s_n, on construit un mot bi-infini : par les conditions de commutation, chaque s_n est une extension de s_{n-1} soit par la droite, soit par la gauche (dépendant de la parité de n). On définit donc m comme le mot bi-infini obtenu comme l'union croissante de ces mots finis. Le facteur $s_n = s_n^{(1)} \dots s_n^{(n)}$ se trouvera en position suivante (disons pour n pair) :

$$m = \dots s_n^{(1)} \dots s_n^{(n/2)} \cdot s_n^{(n/2+1)} \dots s_n^{(n)} \dots$$

où le point se situe juste avant la lettre d'indice 0 de m. On vérifie que $(m,t) \in \Omega$ est une préimage de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Enfin, montrons que ψ est continue. On se rappellera de la définition de la topologie d'une suspension (définition 1.2.2). Soit $P \in \Omega$, et V un voisinage ouvert de $x := \psi(P)$. Alors V est de la forme

$$V = V_1 \times \ldots \times V_n \times \prod_{i>n} R_i,$$

où les V_i sont des voisinages des $x_i := \psi_i(P)$ dans R_i. Montrons que $\psi^{-1}(V)$ contient un ensemble ouvert contenant P. Il nous faut considérer deux cas :

1. Si $P = [(m,t)]$ avec $t \in \,]0,1[$, alors on peut se restreindre à des V_i tels que pour tout $i \leq n$, V_i est un voisinage ouvert de x_i entièrement inclus dans une arête de R_n. De plus, si on note comme ci-dessus $x_i = (s_i, s'_i, t)$, l'union des s_n et des s'_n définit un mot fini de longueur $n+1$ centré en zéro, qui lui-même définit une partie ouverte de Σ_w. On appelle W ce voisinage. Enfin, comme les V_i sont tous inclus dans des arêtes isométriques à $[0,1]$, chacun de ces intervalles définit I_i de $]0,1[$. On appelle I leur intersection (finie) ; c'est un intervalle ouvert contenant t. Alors $U(W,I)$ est une partie ouverte de Ω inclue dans $\psi^{-1}(V)$, et contenant P.
2. Si $P = [(m,0)]$, la construction est similaire. On construit un sous-mot fini de m, lequel définit un voisinage W dans Σ_w, et tel que $\psi\big([(W,0)]\big) \subseteq V$. Puis, on remarque que les V_i définissent un certain nombre de voisinages de 1 dans $[0,1]$ (qui correspondent aux flèches entrantes sur les graphes), et un certain nombre de voisinages de 0 dans $[0,1]$ (qui correspondent aux flèches sortantes). On appelle I_k tous les voisinages de 1 (avec $i \in [\![1,n]\!]$), et J_k les voisinages de 0. On définit maintenant I comme l'intersection de tous les I_k, et J comme celle de tous les J_k. Finalement, on définit $I' = (J-1) \cup I$, qui est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$. Alors $U(W,I')$ est une partie ouverte de Ω incluse dans $\psi^{-1}(V)$, et contenant P.

La continuité de ψ est ainsi montrée. Par compacité de Ω_w, il est automatique que ψ est un homéomorphisme, et la preuve est achevée. $\square$

Bibliographie

[1] J. E. Anderson et I. F. Putnam : Topological invariants for substitution tilings and their associated C^*-algebras. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 18(3):509–537, 1998.

[2] P. Arnoux : Sturmian sequences. *In Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, vol. 1794 de *Lecture Notes in Math.*, p. 143–198. Springer, Berlin, 2002.

[3] P. Arnoux, V. Berthé, H. Ei et S. Ito : Tilings, quasicrystals, discrete planes, generalized substitutions, and multidimensional continued fractions. *In Discrete models : combinatorics, computation, and geometry (Paris, 2001)*, Discrete Math. Theor. Comput. Sci. Proc., AA, p. 059–078 (electronic). Maison Inform. Math. Discrèt. (MIMD), Paris, 2001.

[4] P. Arnoux, C. Mauduit, I. Shiokawa et J. ichi Tamura : Complexity of sequences defined by billiard in the cube. *Bull. Soc. Math. France*, 122(1):1–12, 1994.

[5] M. Baake, D. Lenz et C. Richard : Pure point diffraction implies zero entropy for Delone sets with uniform cluster frequencies. *Lett. Math. Phys.*, 82(1):61–77, 2007.

[6] M. Barge, B. Diamond, J. Hunton et L. Sadun : Cohomology of substitution tiling spaces. *Prépublication*, 2008.

[7] Y. Baryshnikov : Complexity of trajectories in rectangular billiards. *Comm. Math. Phys.*, 174(1):43–56, 1995.

[8] J. Bellissard : K-theory of C^*-algebras in solid state physics. *In Statistical mechanics and field theory : mathematical aspects (Groningen, 1985)*, vol. 257 de *Lecture Notes in Phys.*, p. 99–156. Springer, Berlin, 1986.

[9] J. Bellissard, R. Benedetti et J.-M. Gambaudo : Spaces of tilings, finite telescopic approximations and gap-labeling. *Comm. Math. Phys.*, 261(1):1–41, 2006.

[10] J. Bellissard, A. Bovier et J.-M. Ghez : Gap labelling theorems for one-dimensional discrete Schrödinger operators. *Rev. Math. Phys.*, 4(1):1–37, 1992.

[11] V. Berthé et L. Vuillon : Tilings and rotations on the torus : a two-dimensional generalization of Sturmian sequences. *Discrete Math.*, 223(1-3):27–53, 2000.

[12] J. Cassaigne : Special factors of sequences with linear subword complexity. *In Developments in language theory, II (Magdeburg, 1995)*, p. 25–34. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1996.

[13] J. Cassaigne : Subword complexity and periodicity in two or more dimensions. *In Developments in Language Theory*, p. 14–21, 1999.

[14] A. Clark et L. Sadun : When size matters : subshifts and their related tiling spaces. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(4):1043–1057, 2003.

[15] A. Connes : *Géométrie non commutative.* InterEditions, Paris, 1990.

[16] A. Connes : *Noncommutative geometry.* Academic Press Inc., San Diego, CA, 1994.

[17] D. Coronel : Cohomological equations for tangential smooth 1-form on linearly recurrent Delone dynamical systems. Non publié.

[18] J. Cuntz et W. Krieger : A class of C^*-algebras and topological Markov chains. *Invent. Math.*, 56(3):251–268, 1980.

[19] N. G. de Bruijn : Algebraic theory of Penrose's nonperiodic tilings of the plane. I, II. *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, 43(1):39–52, 53–66, 1981.

[20] F. Durand, B. Host et C. Skau : Substitutional dynamical systems, Bratteli diagrams and dimension groups. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 19(4):953–993, 1999.

[21] S. Eilenberg et N. Steenrod : *Foundations of algebraic topology.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1952.

[22] V. Elser et C. L. Henley : Crystal and quasicrystal structures in al-mn-si alloys. *Phys. Rev. Lett.*, 55(26):2883–2886, Dec 1985.

[23] C. Epifanio, M. Koskas et F. Mignosi : On a conjecture on bidimensional words. *Theoret. Comput. Sci.*, 299(1-3):123–150, 2003.

[24] K. Falconer : *Fractal geometry.* John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1990. Mathematical foundations and applications.

[25] N. P. Fogg : *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, vol. 1794 de *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, 2002. Edited by V. Berthé, S. Ferenczi, C. Mauduit and A. Siegel.

[26] A. Forrest : K-groups associated with substitution minimal systems. *Israel J. Math.*, 98:101–139, 1997.

[27] A. Forrest, J. Hunton et J. Kellendonk : Topological invariants for projection method patterns. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 159(758):x+120, 2002.

[28] A. H. Forrest, J. R. Hunton et J. Kellendonk : Cohomology of canonical projection tilings. *Comm. Math. Phys.*, 226(2):289–322, 2002.

[29] N. P. Frank : A primer of substitution tilings of the Euclidean plane. *Expo. Math.*, 26(4):295–326, 2008.

[30] F. Gähler, J. R. Hunton et J. Kellendonk : Torsion in tiling homology and cohomology. *Prépublication*, 2005.

[31] F. Gähler et J. Rhyner : Equivalence of the generalised grid and projection methods for the construction of quasiperiodic tilings. *J. Phys. A*, 19(2):267–277, 1986.

[32] M. Gardner : Mathematical games. Extraordinary nonperiodic tiling that enriches the theory of tiles. *Scientific American*, 236:110–121, 1977.

[33] T. Giordano, I. F. Putnam et C. F. Skau : Topological orbit equivalence and C^*-crossed products. *J. Reine Angew. Math.*, 469:51–111, 1995.

[34] B. Grünbaum et G. C. Shephard : *Tilings and patterns.* A Series of Books in the Mathematical Sciences. W. H. Freeman and Company, New York, 1989. An introduction.

[35] R. H. Herman, I. F. Putnam et C. F. Skau : Ordered Bratteli diagrams, dimension groups and topological dynamics. *Internat. J. Math.*, 3(6):827–864, 1992.

[36] R. A. Horn et C. R. Johnson : *Matrix analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[37] A. Julien : Complexity and cohomology for cut and projection tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems,* à paraître, 2009.

[38] A. Julien et J. Savinien : Transverse laplacian for substitution tilings. *Prépublication*, 2009.

[39] J. Kellendonk : Noncommutative geometry of tilings and gap labelling. *Rev. Math. Phys.*, 7(7):1133–1180, 1995.

[40] J. Kellendonk : The local structure of tilings and their integer group of coinvariants. *Comm. Math. Phys.*, 187(1):115–157, 1997.

[41] J. Kellendonk et I. F. Putnam : Tilings, C^*-algebras, and K-theory. *In Directions in mathematical quasicrystals*, vol. 13 de *CRM Monogr. Ser.*, p. 177–206. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[42] R. Kenyon : The construction of self-similar tilings. *Geom. Funct. Anal.*, 6(3):471–488, 1996.

[43] J. C. Lagarias et P. A. B. Pleasants : Repetitive delone sets and quasicrystals. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(03):831–867, 2003.

[44] J. Y. Lee, R. V. Moody et B. Solomyak : Pure point dynamical and diffraction spectra. *Annales Henri Poincare*, 3(5):1003–1018, 2002.

[45] D. Lenz : Aperiodic linearly repetitive Delone sets are densely repetitive. *Discrete Comput. Geom.*, 31(2):323–326, 2004.

[46] P. Michel : Stricte ergodicité d'ensembles minimaux de substitution. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 278:811–813, 1974.

[47] G. Michon : Les cantors réguliers. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300(19):673–675, 1985.

[48] M. Morse et G. A. Hedlund : Symbolic Dynamics. *Amer. J. Math.*, 60(4):815–866, 1938.

[49] M. Morse et G. A. Hedlund : Symbolic dynamics II. Sturmian trajectories. *Amer. J. Math.*, 62:1–42, 1940.

[50] P. S. Muhly, J. N. Renault et D. P. Williams : Equivalence and isomorphism for groupoid C^*-algebras. *J. Operator Theory*, 17(1):3–22, 1987.

[51] M. Nivat : invited talk. *In ICALP, Bologna*, 1997.

[52] C. Oguey, M. Duneau et A. Katz : A geometrical approach of quasiperiodic tilings. *Comm. Math. Phys.*, 118(1):99–118, 1988.

[53] N. Ormes, C. Radin et L. Sadun : A homeomorphism invariant for substitution tiling spaces. *Geom. Dedicata*, 90:153–182, 2002.

[54] J. C. Pearson et J. V. Bellissard : Noncommutative riemannian geometry and diffusion on ultrametric cantor sets. *J. Noncommut. Geom.*, 3(3):447–481, 2009.

[55] R. Penrose : Pentaplexity : a class of nonperiodic tilings of the plane. *Math. Intelligencer*, 2(1):32–37, 1979/80.

[56] A. Quas et L. Zamboni : Periodicity and local complexity. *Theoret. Comput. Sci.*, 319(1-3):229–240, 2004.

[57] M. Queffélec : *Substitution dynamical systems—spectral analysis*, vol. 1294 de *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[58] C. Radin : Space tilings and substitutions. *Geom. Dedicata*, 55(3):257–264, 1995.

[59] E. A. Robinson, Jr. : Symbolic dynamics and tilings of $\mathbb{R}^d$. *In Symbolic dynamics and its applications*, vol. 60 de *Proc. Sympos. Appl. Math.*, p. 81–119. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[60] L. Sadun : Tiling spaces are inverse limits. *J. Math. Phys.*, 44(11):5410–5414, 2003.

[61] L. Sadun et R. F. Williams : Tiling spaces are Cantor set fiber bundles. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 23(1):307–316, 2003.

[62] M. Schlottmann : Cut-and-project sets in locally compact abelian groups. *In Quasicrystals and discrete geometry (Toronto, ON, 1995)*, vol. 10 de *Fields Inst. Monogr.*, p. 247–264. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

[63] D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias et J. W. Cahn : Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Phys. Rev. Lett.*, 53(20):1951–1953, Nov 1984.

[64] A. Siegel : Théorème des trois longueurs et suites sturmiennes : mots d'agencement des longueurs. *Acta Arith.*, 97(3):195–210, 2001.

[65] J. E. S. Socolar : Simple octagonal and dodecagonal quasicrystals. *Phys. Rev. B*, 39(15):10519–10551, May 1989.

[66] B. Solomyak : Dynamics of self-similar tilings. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 17(3):695–738, 1997.

[67] B. Solomyak : Nonperiodicity implies unique composition for self-similar translationally finite tilings. *Discrete Comput. Geom.*, 20(2):265–279, 1998.

[68] A. Van Elst : Gap-labelling theorems for Schrödinger operators on the square and cubic lattice. *Rev. Math. Phys.*, 6(2):319–342, 1994.

[69] A. M. Veršik : A theorem on periodical Markov approximation in ergodic theory. *In Ergodic theory and related topics (Vitte, 1981)*, vol. 12 de *Math. Res.*, p. 195–206. Akademie-Verlag, Berlin, 1982.

[70] L. Vuillon : Local configurations in a discrete plane. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6(4):625–636, 1999.