



HAL
open science

Effet dispersif pour les fluides anisotropes avec viscosité évanescence en rotation rapide

Van-Sang Ngo

► **To cite this version:**

Van-Sang Ngo. Effet dispersif pour les fluides anisotropes avec viscosité évanescence en rotation rapide. Mathématiques [math]. Université Paris Sud - Paris XI, 2009. Français. NNT: . tel-00466698

HAL Id: tel-00466698

<https://theses.hal.science/tel-00466698>

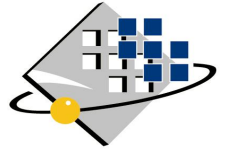
Submitted on 24 Mar 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



UNIVERSITÉ PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY



N° D'ORDRE : 9554

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS XI ORSAY

par

NGO Van-Sang

EFFET DISPERSIF POUR LES FLUIDES ANISOTROPES AVEC VISCOSITÉ ÉVANESCENTE EN ROTATION RAPIDE

Soutenue le 7 octobre 2009 devant le jury composé de

M.	Didier BRESCH	Rapporteur
Mme.	Isabelle GALLAGHER	Rapporteur
M.	Patrick GÉRARD	Examineur
M.	Marius PAICU	Directeur de thèse
Mme.	Geneviève RAUGEL	Directrice de thèse
M.	Frédéric ROUSSET	Examineur

UNIVERSITÉ DE PARIS XI
UFR SCIENTIFIQUE D'ORSAY

**EFFET DISPERSIF POUR LES FLUIDES
ANISOTROPES AVEC VISCOSITÉ
ÉVANESCENTE EN ROTATION RAPIDE**

NGO Van-Sang

Orsay 2009

Remerciements

Tout d’abord, mes profonds remerciements et ma gratitude vont à Geneviève Raugel et à Marius Paicu qui m’ont dirigé tout au long de ma thèse de doctorat ainsi que pendant mon DEA et m’ont initié à la théorie des équations de la mécanique des fluides. Je remercie Geneviève Raugel pour ses idées mathématiques, sa patience bienveillante, sa grande disponibilité et sa gentillesse qui me sont toujours précieuses et qui me sont comme une source de courage. C’est grâce à ses conseils que j’ai pu surmonter les moments difficiles pendant ma thèse. Je remercie Marius Paicu pour son enthousiasme, sa passion permanente pour les mathématiques et surtout pour sa profonde connaissance des équations de la mécanique des fluides qui m’ont énormément motivé dans mes recherches mathématiques.

Je voudrais ensuite remercier chaleureusement Isabelle Gallagher et Didier Bresch de m’avoir fait l’honneur d’écrire un rapport sur ma thèse. Je suis aussi reconnaissant à Patrick Gérard et Frédéric Rousset d’avoir accepté de faire partie de mon jury.

Un grand merci à Frédéric Charve avec lequel j’ai collaboré avec beaucoup de plaisir sur une partie de mon travail. Merci pour toutes ses discussions fructueuses, pour sa grande disponibilité et aussi pour son amitié.

Je voudrais également remercier tous les membres du laboratoire de mathématiques d’Orsay, et surtout ceux de l’équipe d’AN-EDP et de l’École Doctorale de Mathématiques, qui m’ont permis de vivre quatre ans inoubliables. Merci pour l’accueil chaleureux et l’environnement scientifique exceptionnel. Merci à Catherine Poupon et à Valérie Lavigne de m’avoir aidé à résoudre de nombreux problèmes administratifs.

Je remercie tous mes amis doctorants et aussi ma “petite soeur” Basma, de m’avoir accompagné tout au long des années passées à Orsay. Avec eux, j’ai vécu des moments très heureux. Merci aussi à mes amis vietnamiens de l’École Polytechnique pour l’ambiance amicale et familiale qu’ils ont créée. Sans leur aide, je n’aurais pu terminer avec succès mes études en France.

Je voudrais remercier particulièrement Jean et Yolande Piombini, qui sont pour moi comme une deuxième famille. Merci à Hung Viet, Duc Lam, et Minh Cong, mes meilleurs amis, pour leur fidélité, leur soutien et leurs encouragements. Merci aussi à Chi, Dao Ha, Yen, Kieu Anh, . . . qui m’ont offert une grande aide pour pouvoir réaliser ma soutenance.

Finalement, je voudrais remercier du fond du coeur ma famille ; elle est pour moi l’origine de tout le bonheur du monde. Merci à mon père et à ma mère de m’avoir donné la vie et d’avoir sacrifié toute leur vie pour m’élever, m’éduquer et me faire devenir la personne que je suis. Ils sont toujours mes idoles. Merci à ma femme, Thu Giang, pour son amour inestimable et pour la confiance qu’elle a en permanence en moi. Merci à ma fille, Sophie Nhu Y, de m’avoir donné une nouvelle raison d’être. Cette thèse leur est dédiée.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Équation du mouvement de fluides en rotation	1
1.1.1	Équations de Navier-Stokes	1
1.1.2	Force de Coriolis	3
1.2	Fluides en rotation rapide	4
1.2.1	Nombre de Rossby	4
1.2.2	Théorème de Taylor-Proudman	5
1.3	Quelques mots sur la viscosité	6
1.4	Quelques modèles plus complexes	7
1.4.1	Équations primitives	7
1.4.2	Équations de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide	8
1.4.3	Équations des fluides de grade deux	9
2	Historique des résultats et Contributions de la thèse	11
2.1	Fluides en rotation rapide	12
2.1.1	Existence locale des solutions	12
2.1.2	Existence globale de solutions fortes	14
2.1.3	Couches limites d'Ekman	16
2.1.4	Contribution de la thèse	18
2.2	Équations primitives	23
2.2.1	Généralités sur les équations primitives dans \mathbb{R}^3	23
2.2.2	Résultats connus	24
2.2.3	Contribution de cette thèse	27
2.3	Équations de la MHD en rotation rapide	29
2.3.1	Rappel de résultats	29

TABLE DES MATIÈRES

2.3.2	Contributions de cette thèse	30
2.4	Équations de fluides de grade deux	31
3	Fluides tournants avec viscosité petite	35
I.	Rotating fluids with small viscosity	35
3.1	Introduction	35
3.2	Preliminaries	38
3.2.1	Vertical dyadic decomposition and anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{0,s}$.	39
3.2.2	A priori estimates	41
3.3	Strichartz-type estimates with viscosity ε^α	42
3.4	Proof of the global existence of the solution	47
3.4.1	Continuity	48
3.4.2	Decomposition of the initial data	48
3.4.3	Additional energy estimates	51
3.4.4	Proof of Theorem 3.1.3	55
II.	Fluides anisotropes avec viscosité petite et avec amortissement en rotation rapide	58
3.5	Introduction	58
3.6	Estimations pour le système limite $2D$	60
3.7	Cas semi bien-préparé	62
3.7.1	Estimations de Strichartz pour le système linéaire tronqué	64
3.7.2	Estimations d'énergie a priori	64
3.7.3	Démonstration du théorème 3.7.2	66
3.8	Cas mal-préparé	71
3.9	Application à des fluides en rotation rapide entre deux plaques	75
3.9.1	Introduction	75
3.9.2	Les couches limites d'Ekman	77
3.9.3	Convergence vers le système limite $(Ed2D_\beta)$	78
4	Équations primitives avec viscosité petite	85
4.1	Introduction	85
4.2	Preliminaries	91
4.2.1	Anisotropic spaces	91
4.2.2	A priori estimates	93
4.3	Spectral aspects of the linear system	94
4.3.1	Eigenvalues	96

4.3.2	Eigenvectors	98
4.3.3	Asymptotic expansions of the eigenvalues with respect to the Rossby number ε	99
4.3.4	Projectors	100
4.4	Dispersion and Strichartz estimates	102
4.4.1	Duality	103
4.4.2	Dispersion	104
4.4.3	Proof of the Strichartz estimates	106
4.5	Global existence, proof of the theorem	106
4.5.1	The different systems	107
4.5.2	Truncation of the data	108
4.5.3	Proof of Theorem 4.5.1	109
4.5.4	Discussion on the parameter α	115
5	Les systèmes MHD en rotation rapide	117
5.1	Introduction	117
5.2	Préliminaires	120
5.3	Existence globale pour des données petites	123
5.4	Existence locale pour toute donnée initiale	127
5.5	Unicité	131
5.6	Le cas $\mathbf{E} = \varepsilon^{1+\alpha}$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1}$, $\theta = \varepsilon$	135
5.6.1	Inégalités de Strichartz	136
5.6.2	Démonstration du théorème 5.1.2	144
6	Analyticité - Fluides grade 2	149
6.1	Introduction	149
6.2	Estimations non-linéaires	152
6.3	Démonstration du théorème 6.1.1	154
A	Rappels d'éléments de la théorie de Littlewood-Paley	159
A.1	Les espaces de fonctions	159
A.2	Découpage dyadique	160
A.3	Preuve du théorème 5.2.7	163
A.4	Démonstration des lemmes 5.2.8 et 5.2.9.	166

Introduction

Ce chapitre est consacré à la présentation des systèmes étudiés dans cette thèse et aux problèmes qui leur correspondent. Dans la première partie, nous rappelons rapidement la modélisation des équations générales du mouvement des fluides en rotation (l'équation de Navier-Stokes avec un terme de force de Coriolis). Ensuite, nous présentons le problème des fluides géophysiques à grande échelle et nous insistons sur l'importance du nombre de Rossby dans les systèmes de fluides géophysiques quand la rotation est rapide. Dans la troisième partie, nous discutons, en quelques lignes, du rôle joué par la viscosité et donnons une motivation de l'étude du cas d'une viscosité anisotrope, évanescence dans la direction verticale. Dans la dernière partie, nous présentons de façon simplifiée quelques systèmes plus complexes étudiés dans les chapitres suivants, à savoir le système des équations primitives et le système des équations de la magnéto-hydrodynamique. Nous présentons également un modèle de fluides non-newtoniens que nous étudions au chapitre 6.

1.1 Équation du mouvement de fluides en rotation

L'histoire des équations du mouvement des fluides a commencé avec les travaux de L. Euler et J. d'Alembert dans le cas d'un fluide "parfait" et avec ceux de L. Navier pour un fluide visqueux. Dans cette section, nous allons rappeler de manière succincte la modélisation des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible en rotation. Des calculs détaillés et des explications physiques peuvent être trouvés dans Pedlosky [88] ou dans Cushman-Roisin [34].

1.1.1 Équations de Navier-Stokes

Avant de présenter les équations de fluides géophysiques étudiés dans le cadre de ce mémoire, nous rappelons d'abord les équations modélisant le mouvement d'un fluide général, dans un repère fixé (repère absolu). Considérons un fluide homogène, incompressible de densité ρ , qui évolue dans le temps à vitesse u . La propriété d'incompressibilité s'écrit

$$\operatorname{div} u \equiv \nabla \cdot u = 0. \quad (1.1)$$

Supposons que le fluide évolue de manière continue. Alors, la conservation de la masse implique que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho(\nabla \cdot u) = 0. \quad (1.2)$$

Comme le fluide est homogène, ρ est constant en espace, et les équations (1.1) et (1.2) impliquent que $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, c'est-à-dire, $\rho = \rho_0$. Donc la densité est également constante en temps.

Maintenant, la seconde loi de Newton dit que le produit de l'accélération subie par une unité de volume du fluide avec la densité du fluide est égal à la somme des forces volumiques et des contraintes. L'accélération se calcule comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + [u(x, t) \cdot \nabla] u(x, t).$$

Alors, la seconde loi de Newton s'exprime par l'équation suivante

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = \nabla \cdot \sigma + f, \quad (1.3)$$

où σ est le tenseur des contraintes et où $f = \rho_0 \nabla \phi$ représente le terme des forces volumiques (telles que le potentiel de gravitation).

Dans le cadre de cette thèse, nous supposons que les fluides considérés sont newtoniens, sauf dans le chapitre 6 où nous étudions le système de fluides de grade deux. Nous pouvons donc supposer que le tenseur des contraintes est une fonction linéaire du gradient de vitesse, c'est-à-dire

$$\sigma = -pI + 2\mu D, \quad (1.4)$$

où la fonction scalaire p représente la pression, $I = (\delta_{ij})$ est le tenseur identité, D le tenseur des taux de déformation, défini par

$$D = (D_{ij}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right],$$

et où μ désigne la viscosité dynamique (ou la viscosité moléculaire) du fluide. On note que, comme le fluide est homogène, la viscosité dynamique μ est constante. En remplaçant σ dans (1.3) par l'expression dans (1.4), pour tout $i = 1, 2, 3$, on a

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x_j} u^j \right) &= - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p}{\partial x_j} \delta_{ij} + 2 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} [\mu D_{ij}(u)] + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \\ &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} \right) + \mu \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) + \rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Puisque la divergence de u est nulle, en regroupant le potentiel de gravitation avec le gradient de la pression, on déduit des équations ci-dessus que, pour tout $i = 1, 2, 3$,

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u^i}{\partial t} + \frac{\partial u^i}{\partial x_j} u^j \right) = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \Delta u^i,$$

ou bien encore

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -\nabla P + \mu \Delta u, \quad (1.5)$$

qui est le système bien connu des équations de Navier-Stokes.

1.1.2 Force de Coriolis

Considérons maintenant le mouvement d'un fluide en rotation rapide (un fluide sur la Terre, par exemple). Si nous regardons le fluide à partir d'un repère fixé (absolu) qui n'est pas lié à la Terre (par exemple, un repère lié à une étoile qui est loin de la Terre), d'après le paragraphe précédent, nous pouvons décrire le mouvement du fluide par l'équation de Navier-Stokes (1.5). Pourtant, il est plus commode d'observer le fluide dans un repère lié à la Terre, qui tourne avec la vitesse angulaire Ω (orientée selon l'axe des pôles, dirigée du sud vers le nord et supposée constante). Les évolutions d'un champ de vecteurs exprimées dans les deux repères sont liées par l'équation suivante :

$$\left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_A = \left(\frac{\partial B}{\partial t} \right)_R + \Omega \wedge B. \quad (1.6)$$

Soit r le vecteur de position d'une particule de fluide. Alors, d'après (1.6), on a

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_A = \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_R + \Omega \wedge r,$$

donc,

$$u_A = u_R + \Omega \wedge r.$$

En appliquant (1.6) pour le champ de vitesse, on obtient

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} u_A \right)_A &= \left(\frac{\partial}{\partial t} u_A \right)_R + \Omega \wedge u_A \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_R + \Omega \wedge r) \right)_R + \Omega \wedge (u_R + \Omega \wedge r) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} u_R \right)_R + \Omega \wedge \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_R + \Omega \wedge u_R + \Omega \wedge (\Omega \wedge r) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} u_R \right)_R + 2\Omega \wedge u_R + \Omega \wedge (\Omega \wedge r). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Le second terme du membre de droite représente l'accélération de Coriolis (que l'on appelle aussi "la force de Coriolis" de façon abusive), tandis que le troisième terme représente l'accélération centrifuge. Ce dernier terme peut s'écrire comme un terme gradient

$$\Omega \wedge (\Omega \wedge r) = -\nabla \left(\frac{1}{2} |\Omega \wedge r|^2 \right),$$

donc il peut être regroupé avec le gradient de la pression et le potentiel de gravitation.

Maintenant, en notant simplement u_R par u et en remplaçant l'expression de $\left(\frac{\partial u_A}{\partial t} \right)_A$ obtenue par (1.7) dans l'équation de Navier-Stokes et en tenant compte du fait que

$$\frac{\partial}{\partial t} [u(x, t)] = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + [u(x, t) \cdot \nabla] u(x, t),$$

on obtient l'équation suivante du mouvement du fluide dans le repère relatif

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u + 2\Omega \wedge u = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta u, \quad (1.8)$$

qui est le système des équations de Navier-Stokes avec un terme de “force de Coriolis”. Ici, le terme $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$ est appelé viscosité cinématique (on reviendra à ce terme ν dans la section 1.3).

1.2 Fluides en rotation rapide

1.2.1 Nombre de Rossby

La question que l'on peut se poser maintenant est la suivante. Quel est le rôle joué par la force de Coriolis ? Qu'advient-il quand cette force de Coriolis devient très grande dans l'équation du mouvement des fluides tournants (1.8) ? Pour répondre à cette question, on introduira la notion de “fluides à grande échelle” et un paramètre très important, à savoir le nombre de Rossby ε .

Supposons maintenant que la vitesse du fluide est U . Alors le temps mis par un élément du fluide pour parcourir la distance L est L/U . Lorsque ce temps est bien inférieur à la période de rotation de la Terre, le fluide sent à peine l'influence de la rotation de la Terre pendant la période L/U . Pour que la rotation joue un rôle “importante”, il faut que

$$\frac{L}{U} \geq \Omega^{-1}, \quad (1.9)$$

où Ω est la vitesse angulaire de rotation de la Terre. Les fluides sont dits à grande échelle s'ils satisfont (1.9).

Par exemple, la vitesse typique des courants océaniques est de l'ordre de quelques mètres par seconde et la taille typique d'un océan est de l'ordre de 5000 kilomètres. Une particule devrait donc mettre une cinquantaine de jours pour traverser l'océan et pendant ce temps-là, la Terre ferait une cinquantaine de tours. La vitesse de rotation autour de l'axe de la Terre, et en particulier la force de Coriolis, sont donc bien plus importantes que la vitesse du fluide. On peut considérer que c'est un mouvement à grande échelle.

Introduisons maintenant le nombre de Rossby (adimensionnel)

$$\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \frac{U}{2\Omega L}. \quad (1.10)$$

Dans ce mémoire, on abordera le cas particulier des fluides à grande échelle quand le nombre de Rossby devient vraiment petit ($\varepsilon \ll 1$). Dans ce cas, on voit que la force de Coriolis devient le facteur dominant parmi les forces considérées. On dit alors que les fluides sont en rotation rapide. En réalité, il existe évidemment d'autres phénomènes physiques qui sont également importants comme la variation de la température, la salinité, la stratification, etc. . . . Toutefois, la première étape est de bien comprendre le comportement des fluides en rotation rapide. En effet, de nombreux comportements des courants océaniques peuvent s'expliquer par la rotation rapide : un modèle aussi simple que le

système de Navier-Stokes, auquel on a ajouté une grande force de Coriolis, peut décrire, avec une bonne précision, des circulations océaniques à grande échelle. Il peut aussi expliquer le comportement de certains courants, comme par exemple le célèbre Gulf Stream près du golfe de Mexique, le courant Kuroshio près du Japon, etc. . . .

Ces remarques montrent qu'il est pertinent de considérer simplement le système de Navier-Stokes avec une force de Coriolis. Remarquons que l'hypothèse d'incompressibilité des fluides est tout aussi raisonnable. En effet, à cette échelle, la vitesse de l'air ou de l'eau est si petite par rapport à celle du son que l'on peut considérer que le nombre de Mach est égal à zéro, ce qui conduit à supposer que les fluides considérés sont incompressibles. Ces considérations nous amènent à étudier le système d'équations (adimensionnel) de fluides en rotation rapide suivant

$$(RF^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p + f \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans ces équations, u désigne le champ de vecteurs de vitesse du fluide, p la pression (ce n'est pas une pression au sens usuel car on a regroupé dans le terme ∇p tous les termes gradients, voir (1.8)), $e_3 = (0, 0, 1)$ le vecteur unité dans la direction de x_3 (on suppose que la Terre tourne autour de l'axe Oz), et ν la viscosité cinématique du fluide. Le terme f désigne la force extérieure qui sera considérée nulle dans le cadre de cette thèse. La rotation rapide correspond au régime où ε est très petit et tend vers 0. En réalité, il y a un lien entre ε et ν quand ε tend vers 0 : ν est de l'ordre de ε . Dans le cadre de cette thèse, on étudie le cas où ν est de l'ordre ε^α où $0 \leq \alpha < \alpha_0$ avec α_0 assez petit (dans un sens qui sera précisé dans les chapitres suivants).

1.2.2 Théorème de Taylor-Proudman

Dans cette partie, nous parlons d'un des effets majeurs de la force de Coriolis sur les fluides en rotation rapide : elle force le fluide à avoir une certaine rigidité verticale, au sens où, lorsque le fluide tourne rapidement, on observe des "mouvements en colonnes". Cette propriété a été découverte par G. I. Taylor. Étant arrivé à cette conclusion uniquement par des arguments théoriques et, croyant s'être trompé, G. I. Taylor a effectué des expériences qui ont montré que cette observation théorique était vraie : quelques gouttes de colorant dans un fluide tournant rapidement forment des traînées verticales, qui deviennent après quelques rotations des colonnes relativement à une spirale horizontale.

Remarquons aussi que la seule façon d'équilibrer une grande force de Coriolis quand ε tend vers zéro est de la compenser par le terme de pression et donc, à la limite, $u \wedge e_3$ doit être un terme gradient

$$u \wedge e_3 = \nabla \phi,$$

ou bien

$$\begin{cases} -u^2 = -\partial_1 \phi, \\ u^1 = -\partial_2 \phi, \\ 0 = -\partial_3 \phi. \end{cases}$$

En particulier, on trouve que la pression limite ϕ ne dépend pas de x_3 , donc u^1 et u^2 sont également indépendants de x_3 . De plus, on a

$$\partial_1 u^1 + \partial_2 u^2 = -\partial_1 \partial_2 \phi + \partial_1 \partial_2 \phi = 0.$$

L'incompressibilité implique donc que $\partial_3 u^3 = -\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2 = 0$. On trouve que u^3 ne dépend pas non plus de x_3 et que (u^1, u^2) est un champ de vecteurs horizontal de divergence (horizontale) nulle. Le comportement limite du fluide est donc celui d'un fluide bidimensionnel avec trois composantes.

Du point de vue physique, les particules de mêmes coordonnées x_1 et x_2 ont la même vitesse. Le fluide se déplace donc en "colonnes verticales", dites colonnes de Taylor. C'est le théorème de Taylor-Proudman, qui décrit l'effet principal de la rotation rapide. Dans les fluides atmosphériques ou océaniques, un tel état de parfaite rigidité verticale n'est pas réalisé, principalement parce que la rotation n'est pas assez rapide, et que la densité n'est pas assez uniforme. Cependant, les mouvements dans l'atmosphère et dans les océans montrent une forte tendance à cette répartition en colonnes : par exemple, on a pu observer certains courants situés dans l'Atlantique Nord-Ouest qui s'étendent verticalement sur 4000m sans changement significatif d'amplitude ou de direction.

1.3 Quelques mots sur la viscosité

Retournons maintenant à l'équation (1.5). En introduisant la viscosité cinématique ν , définie comme $\nu = \frac{\mu}{\rho_0}$, on peut réécrire (1.5) comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla \tilde{p} + \nu \Delta u + \tilde{f}. \quad (1.11)$$

Nous remarquons donc que c'est la viscosité cinématique qui joue un grand rôle dans l'équation et non la viscosité dynamique. Par exemple, la viscosité cinématique de l'air est presque 15 fois plus grande que celle de l'eau (à cause de sa faible densité), donc dans l'équation (1.11), l'air est bien plus visqueux que l'eau ! Le tableau suivant, qui est extrait de [38], donne quelques ordres de grandeurs de la viscosité. On voit bien à partir de ce tableau que la viscosité cinématique ν est de taille comparable au nombre de Rossby ε ($\sim 10^{-7}$). Pour plus de détails, voir [19], [35] et [81].

	Viscosité dynamique	Viscosité cinématique
Mercure	$1,43 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$	$1,1 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Gallium	$1,02 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$	$1,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Sodium	$7,4 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$	$7,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Eau	$10^{-3} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$	$10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Air	$1,85 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot (\text{m} \cdot \text{s})^{-1}$	$1,43 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

Dans les situations réelles, pourtant, le fluide est turbulent et ν n'est plus exactement la viscosité cinématique moléculaire mais désigne plutôt une viscosité "turbulente". La force de Coriolis crée une asymétrie entre le mouvement horizontal et le mouvement vertical, le mouvement vertical étant limité quand la rotation est rapide. Cela induit une

anisotropie dans le comportement du fluide : le mouvement dans la direction horizontale est bien plus important que celui dans la direction verticale. Afin d'inclure cet effet dans l'étude, il est raisonnable (et cela est fréquent en météorologie et en océanographie) de remplacer la viscosité isotrope $-\nu\Delta$ par une viscosité anisotrope de la forme $-\nu_h\Delta_h - \nu_v\partial_3^2$ où $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$, ν_h est la viscosité horizontale et ν_v la viscosité verticale.

Il est évident que le système (RF^ε) avec une viscosité anisotrope est un modèle simplifié pour expliquer la turbulence. Des modèles plus compliqués pourraient être considérés, où même la géométrie du domaine dans lequel s'écoule le fluide serait prise en compte. Dans le cadre de cette thèse, on ne s'intéresse qu'à des comportements vraiment liés à la rotation rapide. On considère également la géométrie la plus simple, c'est-à-dire le cas où le fluide remplit tout l'espace \mathbb{R}^3 . Après avoir étudié ce modèle, au chapitre 4, on abordera un modèle plus compliqué, à savoir les équations primitives anisotropes dans \mathbb{R}^3 . Dans ce modèle, on prend en compte le rôle d'autres paramètres tels que la stratification, la salinité, et la variation de température. Pour traiter ce cas plus général, on essaiera d'adapter la méthode introduite pour (RF^ε) . Dans le chapitre 5, un autre facteur sera inclus dans les équations - le champ magnétique de la Terre - ce qui nous permet d'avoir des résultats pour les fluides dans le noyau terrestre.

1.4 Quelques modèles plus complexes

1.4.1 Équations primitives

Dans la modélisation des fluides en rotation rapide faite précédemment, on a négligé un effet important, à savoir la gravité de la Terre qui, dans certaines situations, a une forte influence sur les fluides géophysiques. C'est la stratification qui apparaît naturellement lorsque l'on considère des fluides à densité variable (par exemple air chaud ou froid, eau douce ou salée...). Dans ce cas-là, la pesanteur joue un rôle important puisqu'elle tend à abaisser les fluides les plus lourds et à élever les fluides les plus légers. Le fluide est stratifié et consiste en un empilement vertical de couches horizontales de même densité où la densité décroît lorsque l'altitude croît. Les mouvements du fluide détruisent constamment cet équilibre que la gravité s'efforcera de rétablir. Ces perturbations sont à l'origine des ondes internes (par exemple les vents dominants dans l'atmosphère sont dus à la différence de température pôle-équateur).

On peut aussi évoquer les phénomènes dus à la stratification, qui ne peuvent pas être expliqués simplement par l'équation du mouvement de fluides en rotation rapide, et qui sont observés par de nombreux océanographes. C'est le phénomène des "eaux mortes" (pour une description, on renvoie le lecteur à [34]). Il arrive qu'un bateau subisse une forte résistance dans son mouvement alors que l'eau en surface est apparemment très calme. La cause en est la présence d'ondes internes. Le bateau navigue sur une mince couche d'eau relativement douce située sur une couche d'eau très salée. Le bateau crée des ondes internes sur l'interface, invisibles en surface mais de grande énergie, provoquant ainsi la résistance au mouvement du bateau.

Pour modéliser le mouvement de fluides géophysiques à grande échelle, on considère donc deux phénomènes très différents : la rotation tendant à une répartition en colonnes verticales, et la stratification, tendant à maintenir une répartition en couches horizontales

de même densité. En utilisant la conservation de la masse, de la quantité du mouvement, l'approximation de Boussinesq (voir [11], [34]) et l'adimensionnement introduit par Majda ([43]), on obtient le système des équations primitives

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} + \frac{\theta e_3}{F\varepsilon} = -\frac{\nabla \Phi}{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \cdot \nabla \theta - \nu' \Delta \theta - \frac{u \cdot e_3}{F\varepsilon} = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \end{cases}$$

où u est le champ de vitesse, θ la température potentielle, et Φ la pression. Les paramètres sont la viscosité cinématique ν , la diffusivité thermique ν' , le nombre de Rossby ε et le nombre de Froude F . Pour une modélisation plus détaillée, on renvoie le lecteur à [13], et pour un historique complet du système des équations primitives, on renvoie à [11], [34] et [88].

1.4.2 Équations de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide

Un autre modèle que l'on va étudier dans cette thèse est le système des équations de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide. L'origine de ce modèle est totalement différente de celle du système des équations primitives présenté ci-dessus, mais il a également des rapports étroits avec le système des fluides en rotation rapide. En effet, ce système est le couplage entre le système des fluides en rotation rapide et l'équation de Maxwell, qui décrit le comportement des courants du magma dans le noyau de la Terre.

Dans le cadre de cette thèse, on prendra la modélisation faite par B. Desjardins, E. Dormy et E. Grenier dans [36]. On renvoie aussi le lecteur à [38] pour une modélisation détaillée du système de la magnéto-hydrodynamique. Plus précisément, on considère le système suivant

$$(MHD) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \frac{E}{\varepsilon} \Delta u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\frac{\Lambda}{\varepsilon} (\operatorname{curl} b) \wedge e_3 + \frac{\Lambda \theta}{\varepsilon} (\operatorname{curl} b) \wedge b \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \frac{\operatorname{curl} (u \wedge e_3)}{\theta} + \frac{\Delta b}{\theta} \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0), \end{cases}$$

dans l'espace \mathbb{R}^3 , avec comme paramètres, le nombre d'Ekman E , le nombre de Rossby ε , le nombre d'Elsasser Λ et le nombre de Reynolds θ . Ici u et b décrivent le champ des vitesses et le champ magnétique du fluide.

Dans le chapitre 5, pour le système (MHD) dans le cas anisotrope, nous montrons des résultats d'existence analogues à ceux de Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier dans [26]. Nous montrons ensuite qu'avec certains choix des paramètres, nous pouvons obtenir de bonnes propriétés de dissipation pour le système (MHD) et en utilisant les estimations de Strichartz, nous montrons avec nos choix de paramètres E , Λ et θ , que le système (MHD) admet une unique solution globale pour des données grandes quand la rotation est assez rapide.

1.4.3 Équations des fluides de grade deux

Retournons à l'équation (1.3). Pour simplifier, nous supposons que la densité $\rho_0 = 1$, et donc la viscosité dynamique μ et la viscosité cinématique ν coïncident. Comme nous l'avons vu dans le premier paragraphe de ce chapitre, dans le cas d'un fluide newtonien qui se déplace à vitesse u , le tenseur des contraintes σ est une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation

$$\sigma = -pI + 2\nu D,$$

où p représente la pression, ν est la viscosité cinématique et D le tenseur des taux de déformation, défini par

$$D = (D_{ij}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^i}{\partial x_j} + \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right) \right].$$

L'eau, par exemple, est un fluide newtonien. Pourtant, il s'avère que cette hypothèse n'est pas vérifiée dans de nombreux cas, à savoir dans le cas des fluides non newtoniens, par exemple le sable, le caoutchouc, ...

Les fluides de grade deux appartiennent à une classe particulière de fluides non-newtoniens dits de type différentiel de Rivlin-Ericksen. Pour ces fluides, le tenseur des contraintes σ s'écrit sous la forme

$$\sigma = -pI + 2\nu D + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2,$$

où A_1 et A_2 désignent les deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen

$$A_1 = 2D,$$

$$A_2 = (A_{ij}) = \left(\partial_t D_{ij} + D_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + D_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

Dans cette thèse, nous utilisons le modèle développé par Dunn et Fosdick [40], dans lequel, la viscosité ν est positive, et les constantes α_1 et α_2 satisfont aux conditions

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 > 0.$$

Si on pose $\alpha_1 = \alpha$, on obtient le système suivant

$$(FG2) \quad \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \text{rot} (u - \alpha \Delta u) \wedge u + \nabla p = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dans } \mathbb{T}^3, \end{cases}$$

où $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$ est le tore tridimensionnel; $u(t, x)$, $f(t, x)$ et $p(t, x)$ sont respectivement la vitesse du fluide, la force extérieure et la pression.

Dans les systèmes newtoniens considérés précédemment, il y avait d'effet régularisant en temps fini dû au terme visqueux $-\nu \Delta u$ ($-\nu \Delta_h u$ dans le cas anisotrope), même si cet effet était faible dans le cas où $\nu = \varepsilon^\alpha$, $\alpha > 0$, et ε désigne le nombre de Rossby. Ici, pour le système de fluides de grade deux, nous n'avons plus d'effet régularisant en temps fini. En outre, le système (FG2) est un système vraiment non-linéaire. Dans le chapitre 6, nous allons nous intéresser à la propagation de la régularité analytique de la donnée initiale par ce système. En utilisant une méthode récemment développée par Chemin [24], nous montrons que si la donnée initiale est petite dans une classe de Gevrey, (FG2) admet une solution globale qui reste dans une certaine classe de Gevrey pour tout temps positif.

Historique des résultats et Contributions de la thèse

Dans le cadre de cette thèse, nous nous intéressons principalement à trois systèmes de fluides géophysiques newtoniens, à savoir les équations des fluides en rotation rapide, les équations primitives et les équations de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide. Dans le dernier chapitre, nous considérons également un système de fluides non-newtoniens - le système de fluides de grade deux - et nous étudions le problème de propagation de l'analyticité en temps positif.

On rappelle que dans le cas isotrope où tous les termes de viscosité ainsi que la diffusivité thermique pour les équations primitives et la diffusivité magnétique pour les équations de la magnéto-hydrodynamique, sont positifs dans toutes les directions, on a les résultats classiques de Leray et de Fujita-Kato, et on obtient l'existence globale d'une solution faible au sens de Leray dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et l'existence locale (globale pour des données petites) et l'unicité d'une solution classique dans $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$.

Dans le cas anisotrope, où la viscosité verticale est évanescente, l'existence de solutions faibles au sens de Leray reste toujours ouverte. On se concentre donc sur l'existence de solutions fortes dans des espaces de Sobolev qui sont presque "optimaux". On rappelle qu'un espace est dit "optimal" (ou critique) s'il est invariant par changement d'échelles pour les systèmes considérés (on remarque donc que $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ est "optimal" pour les équations de Navier-Stokes isotropes classiques). Ici, dans notre cas, l'espace "optimal" est $\mathbf{H}^{0,\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, mais à cause des limitations des techniques utilisées, on se contentera de travailler dans le cadre des espaces $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ avec $s > \frac{1}{2}$.

Une autre différence entre les trois modèles considérés et le système de Navier-Stokes classique réside dans la présence du terme de force de Coriolis $\frac{1}{\varepsilon}u \wedge e_3$ qui est dû à la rotation de la terre autour de l'axe Oz . Comme nous l'avons déjà vu, cette force oblige en général le fluide à avoir "un comportement bidimensionnel" selon le théorème de Taylor-Proudman. Dans le cas de l'espace entier \mathbb{R}^3 , elle crée un effet dispersif pour la partie du fluide appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et la force à converger vers 0. Grâce à ce phénomène de dispersion, on peut obtenir des résultats d'existence de solutions fortes globales pour des données initiales grandes.

2.1 Fluides en rotation rapide

2.1.1 Existence locale des solutions

Avant de présenter les résultats de cette thèse, on commence par rappeler les résultats fondamentaux d'existence et d'unicité connus pour les équations de Navier-Stokes et les équations de fluides en rotation rapide en l'absence de termes de forces extérieures. On remarque que tous les résultats d'existence locale (globale pour des données petites) s'appliquent aussi bien à des équations des fluides tournants qu'à des équations de Navier-Stokes.

Cas isotrope

Dans ce paragraphe, les résultats rappelés concernent les équations de Navier-Stokes isotropes. Pourtant, comme le terme de force de Coriolis n'a pas de contributions aux estimations d'énergie, on a les mêmes résultats pour les équations de fluides isotropes en rotation rapide. On considère le système des équations de Navier-Stokes classique suivant

$$(NS) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où $u(t, x)$ est le champ de vecteurs de la vitesse, $p(t, x)$ la pression et ν désigne la viscosité cinématique du fluide.

L'existence de solutions faibles globales en temps dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $d = 2, 3$ pour le système (NS) a été démontrée par Leray en 1933 ([70]). L'unicité de ces solutions n'est connue qu'en dimension deux tandis qu'en dimension trois, l'unicité et la régularité de ces solutions faibles globales restent un problème ouvert.

Une réponse partielle à la question de l'unicité et de la régularité des solutions en dimension trois a été donnée en 1964 par Fujita et Kato [49]. Dans le cas où le fluide occupe l'espace \mathbb{R}^3 entier, leur résultat implique que si la donnée initiale est dans $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, le système (NS) admet une solution (forte) unique, locale en temps

$$u \in \mathbf{C}([0, T], \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2([0, T], \dot{\mathbf{H}}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)).$$

Cette solution est classique sur l'intervalle d'existence. Ici, l'espace de Sobolev homogène $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^3)$ est défini par la (semi-)norme

$$\|f\|_{\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^3)} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{f}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lorsque la donnée initiale vérifie une condition de petitesse par rapport à la viscosité, la solution construite est globale en temps.

Remarquons que les espaces $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ sont critiques pour les équations de Navier-Stokes (et les équations de fluides en rotation rapide), c'est-à-dire, invariants par le changement d'échelle, au sens que, si $u(t, x)$ est une solution de (NS) , alors $u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x)$ est aussi une solution de (NS) . Le résultat de Fujita et Kato a été ensuite étendu par

Weissler [95] et Kato [65] à des données dans les espaces critiques plus grands $\mathbf{L}^d(\mathbb{R}^d)$. On peut aussi citer la généralisation de ces résultats dans des espaces de Besov critiques d'indice de régularité négative par Cannone, Meyer et Planchon [12] ou dans des espaces BMO^{-1} par Koch et Tataru [68]. Enfin, on remarque que tous ces espaces sont inclus dans l'espace de Hölder-Zygmund $C^{-1}(\mathbb{R}^d)$ dans lequel, Chemin ([23]) a montré l'unicité de la solution de (NS) . Pour un historique plus complet, on renvoie le lecteur à [94], [33], [73], [78] et [69].

Cas anisotrope où la viscosité verticale est évanescente

Dans cette thèse, on s'intéressera principalement au cas anisotrope où la viscosité verticale est nulle. Remarquons premièrement que dans ce cas, le manque d'effet régularisant dans la direction verticale empêche l'utilisation de la méthode développée par Leray pour les solutions faibles. L'existence de ces solutions faibles globales reste donc toujours ouverte. Rappelons à nouveau que les résultats de l'existence locale des solutions rappelés dans ce paragraphe concernent le système de Navier-Stokes anisotrope, mais on a les mêmes résultats pour le système de fluides anisotropes en rotation rapide.

Le système de Navier-Stokes anisotrope (où la viscosité verticale est nulle) a été étudié pour la première fois par Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier dans [26]. Motivés par l'étude des fluides tournants entre deux plaques, ils ont considéré les équations de Navier-Stokes sans viscosité verticale suivante :

$$(NS_h) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu_h \Delta_h u + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0, \end{cases}$$

où $u(t, x)$ est le champ de vecteurs de la vitesse, $p(t, x)$ la pression, $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$ et ν_h désigne la viscosité horizontale du fluide. D'après la théorie des systèmes hyperboliques, ces systèmes est localement bien posés quand la donnée initiale est dans des espaces de Sobolev très réguliers $\mathbf{H}^{\frac{5}{2}+\eta}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $\eta > 0$. Dans le but d'obtenir le résultat le plus proche possible de celui de Fujita et Kato, ils ont considéré les espaces de Sobolev anisotropes suivants (pour plus de détails sur ces espaces, on renvoie à Iftimie [59])

$$\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3) \mid \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \right\}.$$

Ils ont obtenu des théorèmes d'existence locale (globale pour des données petites) dans des espaces $\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$, $s_0 > \frac{1}{2}$ et ont montré l'unicité quand la donnée initiale est aussi dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{3}{2}$ en utilisant la théorie de Littlewood-Paley et la décomposition du système en fréquences dans laquelle la variable verticale joue un rôle différent de la variable horizontale. L'unicité dans $\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$, $s_0 > \frac{1}{2}$ a été démontré plus tard par Iftimie [62]. On peut donc énoncer le théorème suivant

Théorème 2.1.1 *Soient $s_0 > \frac{1}{2}$ et $u_0 \in \mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$. Alors, il existe un temps T et une unique solution u de (NS_h) tels que $u \in \mathbf{L}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3))$ et $\nabla_h u \in \mathbf{L}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3))$. En outre, il existe une constante c telle que si $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \leq c\nu_h$, alors la solution est globale.*

L'idée fondamentale de la démonstration est que l'on peut récupérer la viscosité manquante dans la direction verticale en utilisant le fait que le champ de vitesse est de divergence nulle. On observe que toute dérivée verticale dans le terme non-linéaire $u \cdot \nabla u$ est multipliée par la composante u^3 (ce sont les termes du type $u^3 \partial_3$). Or, on s'aperçoit que la composante u^3 est plus régulière que prévue dans la variable verticale compte tenu de la relation $\partial_3 u^3 = -\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2 = -\operatorname{div}_h u^h$, et du fait que la présence de la viscosité horizontale induit un effet régularisant sur les dérivées dans la variable horizontale.

Remarquons que l'espace invariant par le changement d'échelle pour ces équations anisotropes est $\mathbf{H}^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ qui contient tous les espaces $\mathbf{H}^{0, s_0}(\mathbb{R}^3)$ considérés dans le résultat ci-dessus. Des raisons techniques ne permettent pas d'obtenir l'existence des solutions fortes dans $\mathbf{H}^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$. Suivant l'idée de [60] de travailler dans l'espace "un peu plus petit" $\mathcal{B}^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, qui est de type \mathbf{L}^2 en la variable horizontale et de type Besov $\mathbf{B}_{2,1}^{\frac{1}{2}}$ en la variable verticale et qui est également invariant par le changement d'échelle, Paicu ([84]) a montré l'existence locale (globale pour des données petites) en utilisant les estimations d'énergie dans des espaces de Besov. Il a également prouvé l'unicité de cette solution dans $\mathbf{H}^{0, \frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ en montrant une inégalité doublement logarithmique et en appliquant le lemme d'Osgood.

Enfin, pour les domaines bornés, on renvoie le lecteur au travail de Paicu dans [83] qui considère les équations de Navier-Stokes anisotropes sur le tore tridimensionnel et au travail récent de Paicu et Raugel ([85]) qui considèrent les équations de Navier-Stokes anisotropes dans les domaines cylindriques. Pour le problème dans un demi-plan, on renvoie à Iftimie et Planas [63].

2.1.2 Existence globale de solutions fortes - Effet dispersif dans le cas où le domaine est \mathbb{R}^3

Considérons maintenant les systèmes de fluides en rotation rapide isotrope

$$(RF^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta u + u \nabla u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

et anisotrope

$$(RF_h^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu_h \Delta_h u + u \nabla u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On observe d'abord que le terme de rotation $\frac{u \wedge e_3}{\varepsilon}$ ne contribue pas aux estimations d'énergie. Donc, les théorèmes de Leray et de Fujita-Kato s'appliquent aussi au système (RF^ε) et nous donnent l'existence globale de solutions faibles au sens de Leray et l'existence locale (globale pour des données petites) et l'unicité d'une solution classique au sens de Fujita-Kato. À nouveau, ces résultats ne sont pas connus pour le système (RF_h^ε) .

Cas d'un domaine périodique

Bien que le terme de rotation n'ait pas de contribution dans les estimations d'énergie dans $\dot{\mathbf{H}}^s$, il a des effets importants, comme l'ont montré de nombreux auteurs. On peut mentionner d'abord les travaux de Babin, Mahalov et Nicolaenko ([1], [5]) dans lesquels, ils ont étudié le système (visqueux ou non visqueux) en rotation rapide dans des domaines périodiques (non résonant ou résonant). Dans le cas visqueux, ils ont prouvé l'existence globale (et l'unicité) de solutions régulières quand $\varepsilon > 0$ est petit. D'autre part, en utilisant la méthode de Schochet ([92]), Grenier ([56]) s'est intéressé aux ondes induites par le terme de rotation et les a filtrées grâce à un groupe d'isométries. En utilisant aussi la méthode de Schochet, Gallagher ([51]) a retrouvé les résultats de Babin, Mahalov et Nicolaenko pour le système des fluides tournants et a généralisé ces résultats pour des équations paraboliques plus générales.

Pour le cas anisotrope (sans viscosité verticale), Paicu [82] a démontré des résultats d'existence de solutions fortes globales ou "presque globales" pour des données grandes pour le système (RF_h^ε) sur les tores non-résonants et sur certains tores résonants. La différence dans ce cas est que l'on n'a pas d'effet dispersif pour la solution linéaire des ondes libres. Les ondes ne disparaissent pas mais persistent longtemps. Dans [82], Paicu a utilisé la méthode de Schochet pour filtrer ces ondes, avec un groupe d'isométries comme dans [56] ou [51].

Cas de \mathbb{R}^3 tout entier - Effet dispersif et existence globale de solutions fortes pour des données grandes

Le cas où le fluide est en rotation rapide dans tout l'espace \mathbb{R}^3 a été traité par Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier dans [25], qui ont donné une illustration du théorème de Taylor-Proudman en utilisant l'effet dispersif engendré par une grande force de Coriolis. Dans le cas isotrope (les viscosités sont positives dans toutes les directions), ils ont démontré des estimations de Strichartz pour le système linéaire correspondant à (RF^ε) ; ensuite, ils ont déduit que dans ce cas, la suite des solutions faibles converge vers zéro dans $\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3))$ ($q \in]2, 6[$) si la donnée initiale est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et vers la solution du système de Navier-Stokes bidimensionnel avec trois composantes si la donnée initiale est de type $u_0 = \bar{u}_0 + w_0$ avec $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ et $w_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. En développant des estimations de Strichartz anisotropes, il ont montré ([26]) que si la rotation est rapide, la solution forte de (RF^ε) devient globale en temps.

Dans le cas anisotrope où la viscosité verticale est nulle et où la viscosité horizontale ν_h est positive et fixée, l'existence des solutions faibles de Leray est inconnue. L'idée principale est donc de prouver l'existence globale de solutions fortes pour des données grandes en mettant en évidence des phénomènes dispersifs "de type Strichartz" pour le système linéaire correspondant au système (RF_h^ε) . On considère le système suivant

$$(LRF_h^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t w_F - \nu_h \Delta_h w_F + \frac{w_F \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p_F, \\ \operatorname{div} w_F = 0, \\ w_F(t=0) = w_0. \end{cases}$$

L'utilisation des effets dispersifs dans des équations aux dérivées partielles a commencé par l'étude de l'équation des ondes avec la démonstration des estimations de Strichartz (voir Strichartz [93] et les articles de Ginibre et Velo [53] et plus récemment, voir, par

exemple, Keel et Tao [66]) ; ces estimations montrent que les solutions dispersent en temps dans les normes $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p > 2$ et donc induisent des effets “régularisants”. Ces effets ont été utilisés dans de nombreux travaux (par exemple Klainerman et Machedon [67], Bahouri et Chemin [7]) visant à améliorer les résultats classiques d’existence de solutions globales.

Dans le cas du système (LRF_h^ε) avec une force extérieure $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3))$, dans [25] et [26], Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier ont prouvé les estimations de type Strichartz anisotropes suivantes

Théorème 2.1.2 *Pour toutes constantes positives r et R , il existe une constante $C_{r,R} > 0$ telle que si les supports des transformées de Fourier de w_0 et de $f(t, \cdot)$ sont localisés dans $\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi_3| \geq r \text{ et } |\xi| \leq R\}$, alors pour tout $T > 0$ et pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on a*

$$\|w_F\|_{\mathbf{L}^p([0,T], \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3))} \leq C_{r,R} \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \left(\|w_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} + \|f\|_{\mathbf{L}^1([0,T], \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3))} \right). \quad (2.1)$$

Ici, les espaces de Lebesgue anisotropes $\mathbf{L}_h^{q_1} \mathbf{L}_v^{q_2}(\mathbb{R}^3)$, avec $q_1, q_2 \geq 1$, sont définis par la norme

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{q_1} \mathbf{L}_v^{q_2}(\mathbb{R}^3)} \stackrel{\text{def}}{=} \left[\int_{\mathbb{R}_h^2} \left| \int_{\mathbb{R}_v} |u(x_h, x_3)|^{q_2} dx_3 \right|^{\frac{q_1}{q_2}} dx_h \right]^{\frac{1}{q_1}}.$$

Les estimations dispersives (2.1) permettent de prouver le théorème suivant, à savoir l’existence de solutions fortes globales quand la donnée initiale est mal préparée.

Théorème 2.1.3 *Soit $u_0 = \bar{u}_0 + w_0$ où $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ est un champ de vecteur bidimensionnel avec trois composantes (c-à-d \bar{u}_0 ne dépend pas de x_3) et $w_0 \in \mathbf{H}^{0,s}$, avec $s > \frac{1}{2}$. On suppose que les deux champs de vecteurs sont à divergence nulle. Alors, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, il existe une unique solution globale u du système (RF_h^ε) ,*

$$u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{et} \quad \nabla_h u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}).$$

De plus, lorsque ε tend vers zéro, $u - \bar{u} - w_F \rightarrow 0$ dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ et $\nabla_h(u - \bar{u} - w_F) \rightarrow 0$ dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$, où \bar{u} est solution des équations de Navier-Stokes bidimensionnelles avec trois composantes

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u} - \nu_h \Delta_h \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla_h \bar{u} = -\nabla \bar{p}, \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0, \\ \partial_3 \bar{u} = 0, \\ \bar{u}(0) = \bar{u}_0, \end{cases}$$

et w_F est la solution du système linéaire des ondes libres (LRF_h^ε) associé à (RF_h^ε) .

2.1.3 Fluides en rotation rapide entre deux plaques horizontales - Couches limites d’Ekman

Considérons maintenant le cas des fluides tournant rapidement entre deux plaques horizontales parallèles (i.e. dans $\Omega = \Omega_h \times [0, 1]$, où Ω_h est un domaine de \mathbb{R}^2). Nous

présentons le système suivant avec les viscosités dites “turbulentes” qui s’écrivent sous la forme $\nu_h \Delta_h + \beta \varepsilon \partial_3^2$:

$$(NSC_\beta^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon - \beta \varepsilon \partial_3^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{e_3 \wedge u^\varepsilon}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Dans ce cas, la friction près du bord freine le fluide de telle sorte que la vitesse au bord est nulle (condition de Dirichlet). Combinée avec la forte rotation, cette friction crée deux situations différentes suivantes :

1. Près du bord, la vitesse décroît rapidement vers zéro, le comportement du fluide est très compliqué.
2. Loin du bord, le fluide a des comportements bidimensionnels (effet de la rotation rapide).

Nous rappelons d’abord les travaux de Grenier et Masmoudi [57] sur ces phénomènes. Ils ont considéré le cas où $\Omega_h = \mathbb{T}^2$ (ou un domaine borné de \mathbb{R}^2 avec le bord régulier) avec la viscosité ν_h fixé et ν_v tend vers zéro avec le nombre de Rossby (le cas le plus intéressant est que $\nu_v = \beta \varepsilon$, avec $\beta > 0$ est une constante et ε le nombre de Rossby). Ils ont explicité la partie “turbulente” de la vitesse dans les couches limites et ils ont montré que quand ε tend vers 0, les solutions faibles du système (NSC_β^ε) tend vers la solution d’un système de type Navier-Stokes (ou Euler) bidimensionnel avec une dissipation due à la partie “turbulente” de la vitesse dans les couches limites (le pompage d’Ekman).

Théorème 2.1.4 *Soit u^ε une solution faible de (NSC_β^ε) de donnée initiale $u_0^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ de divergence nulle telle que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon = (\bar{u}_0^h, 0), \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega),$$

où $\bar{u}_0^h(x_1, x_2) = (\bar{u}^1(x_1, x_2), \bar{u}^2(x_1, x_2))$ est un champs de vecteurs bidimensionnel. Soit \bar{u} la solution globale du système $(NS2D_{\alpha, \beta}^\varepsilon)$ suivant

$$(NS2D_{\alpha, \beta}^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} - \nu_h \Delta_h \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla_h \bar{u} + \sqrt{2\beta} \bar{u} = -\nabla_h \bar{p}, \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0, \\ \partial_3 \bar{u} = 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = (\bar{u}_0^h, 0). \end{cases}$$

Alors, u^ε converge vers $(\bar{u}, 0)$ dans $\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$ et $\nabla_h u^\varepsilon$ converge vers $(\nabla_h \bar{u}, 0)$ dans $\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$.

Le cas où ν_h tend également vers zéro quand $\varepsilon \rightarrow 0$ a été traité plus tard par Masmoudi dans [75] (pour des données bien préparées) et dans [76] (pour des données générales). En utilisant le fait que le système limite de type Euler bidimensionnel dissipatif est bien posé dans des espaces \mathbf{H}^σ avec $\sigma > 2$, il a montré la convergence de la famille u^ε vers

la solution du système limite sur tout intervalle de temps $[0, T]$ si la viscosité horizontale $\nu_h \geq C\varepsilon$ où $C > 0$ est une constante dépendant de la donnée initiale.

Enfin, dans le cas où $\Omega_h = \mathbb{R}^2$, la viscosité $\nu_h > 0$ est fixée et la viscosité verticale $\nu_v = \beta\varepsilon$, Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier [27] ont montré la convergence vers le système limite de type Navier-Stokes bidimensionnel dissipatif pour toute donnée initiale, en utilisant les estimations de Strichartz.

Théorème 2.1.5 *Soit u_0 un champ de vecteurs de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2 \times [0, 1])$ de divergence nulle et soit u^ε une solution faible de (NSC_β^ε) de donnée initiale u_0 . Soit \bar{u} la solution globale du système de $(NS2D_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ avec donnée initiale*

$$\bar{u}_0(x_h) = \int_0^1 u_0^h(x_h, x_3) dx_3.$$

Alors, pour tout temps $T > 0$ et pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{[0,T] \times K} |u^\varepsilon(t, x) - (\bar{u}(t, x_h), 0)|^2 dx_h dx_3 = 0.$$

2.1.4 Contribution de la thèse : Cas où la viscosité horizontale ν_h tend vers zéro avec le nombre de Rossby et la viscosité verticale ν_v est nulle

Premier cas : La donnée initiale est purement tridimensionnelle

Dans la première partie du chapitre 3 de cette thèse, pour $\alpha > 0$, on considère le système suivant

$$(NSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \varepsilon^\alpha \Delta_h u + u \nabla u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Tout d'abord, on remarque que le théorème 2.1.1 s'applique bien dans notre cas quand ε est fixé, et donne l'existence d'une unique solution forte locale, définie sur un intervalle de temps qui dépend de ε . On s'intéresse donc à l'existence globale de cette solution quand ε est petit.

Observons que dans tous les résultats mentionnés ci-dessus, la viscosité horizontale est toujours fixée (tandis que la viscosité verticale peut être positive ou nulle). Dans ce cas, la rotation rapide implique l'existence de solutions fortes globales. Par contre, pour le système d'Euler en rotation rapide (sans le terme visqueux $-\nu\Delta$), la rotation rapide n'implique que l'existence sur des intervalles de temps arbitrairement longs. C'est ce qu'ont démontré Babin, Mahalov et Nicolaenko [1] et [4], dans le cas de \mathbb{T}^3 et Dutrifoy [42] dans le cas de \mathbb{R}^3 . Donc la viscosité joue un rôle important dans l'étude des fluides en rotation rapide. La question se pose alors de savoir quel est l'ordre de grandeur suffisant pour pouvoir toujours démontrer l'existence globale de la solution quand la rotation est rapide ?

Supposons maintenant que la viscosité horizontale ne soit plus fixée mais dépende du nombre de Rossby ε : $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 0$. Une première difficulté surgit quand on veut établir un résultat de dispersion du type (2.1) dans le théorème 2.1.2. Les quantités $C_{r,R}$ ne peuvent plus être constantes, mais devraient a priori dépendre de ε , c'est-à-dire $C_{r,R}$ pourrait tendre vers l'infini quand ε tend vers zéro. En outre, l'effet régularisant donné par la viscosité horizontale est très faible (de l'ordre de ε^α) quand le nombre de Rossby ε tend vers zéro. Cela entraîne de grandes difficultés quand on veut utiliser les estimations d'énergie pour montrer l'existence de solutions fortes globales. Dans le chapitre 3 de cette thèse, on montre une estimation du type (2.1) pour le cas où la viscosité horizontale est de taille ε^α , en explicitant les relations entre $C_{r,R}$ et r , R et ε . Ensuite, on utilise un argument de type "bootstrap" en ajustant les paramètres r et R pour pouvoir compenser le faible effet régularisant donné par la petite viscosité horizontale. Plus précisément, on décompose le système (NSC_ε) en deux systèmes : le système linéaire

$$(LNSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u} + \frac{\bar{u} \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \end{cases}$$

et le système non-linéaire couplé

$$(NNSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon^\alpha \Delta_h v + v \cdot \nabla v + \bar{u} \cdot \nabla v + v \cdot \nabla \bar{u} + \frac{v \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p - \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0 = u_0 - \bar{u}_0, \end{cases}$$

où \bar{u}_0 est une troncature en fréquences de u_0 dans le domaines

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{ \xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi_h| \geq r; |\xi_3| \geq r \text{ et } |\xi| \leq R \}.$$

La première étape consiste à établir des estimations de Strichartz pour le système linéaire $(LNSC_\varepsilon)$. En exploitant l'idée de J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier dans [26], on montrera le théorème suivant

Théorème 2.1.6 (Estimations de Strichartz) *Soient $p \geq 1$ et $r = R^{-\beta}$ avec $\beta \geq 1$. Supposons que la donnée \bar{u}_0 de $(LNSC_\varepsilon)$ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et que le support de sa transformée de Fourier est localisé dans $\mathcal{C}_{r,R}$. Alors la solution \bar{u} de $(LNSC_\varepsilon)$ satisfait*

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^p((0,+\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Ensuite, si on veut utiliser un argument de type "bootstrap" pour démontrer l'existence de solutions fortes globales de (NSC_ε) dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{1}{2}$, on a besoin de contrôler de manière précise la norme de v_0 par la norme de u_0 dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$. Donc, on ne peut plus choisir u_0 seulement dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ mais il faut prendre u_0 dans un espace plus régulier. Pour tout $s > \frac{1}{2}$, $\eta > 0$ et $1 \leq p < 2$, on introduit l'espace

$$\begin{aligned} Y_{s,\eta,p} &= \mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^{\eta,s+\eta}(\mathbb{R}^3) \\ &= \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_{Y_{s,\eta,p}} = \sup \left\{ \|u\|_{\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p}, \|u\|_{\mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s}, \|u\|_{\mathbf{H}^{\eta,s+\eta}} \right\} < +\infty \right\}, \end{aligned}$$

où les espaces de Sobolev anisotropes $\mathbf{H}^{\eta,s+\eta}(\mathbb{R}^3)$ sont définis par la norme

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_h|^2)^\sigma (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On obtient le théorème suivant :

Théorème 2.1.7 *Soient $\eta > 0$, $1 \leq p < 2$ et $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 0$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $s > \frac{1}{2}$ et pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour tout champ de vecteurs à divergence nulle $u_0 \in \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3) \cap Y_{s,\eta,p}$ avec $\|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}} \leq r_0$, le système (NSC_ε) admet une (unique) solution globale*

$$u \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)).$$

Comparons maintenant ce résultat au théorème 2.1.3. On voit d'abord que l'on a ici un résultat plus général que le théorème 2.1.3 au sens où l'on peut considérer le cas où la viscosité cinétique est variable et tend vers zéro (de manière assez lente par rapport au nombre de Rossby ε) quand la rotation tend vers l'infini (ce qui est plus proche des situations réelles). Ce que l'on perd est que l'on ne peut plus considérer des données initiales de type $2D + 3D$, i.e. de la forme $u_0 = \bar{u}_0 + w_0$ où $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ est un champ de vecteurs bidimensionnel et $w_0 \in \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, avec $s > \frac{1}{2}$ est un champ de vecteurs tridimensionnel. En effet, dans notre résultat, on a utilisé le fait que le système limite est zéro et donc l'effet dispersif dû à la rotation rapide permet de compenser l'effet régularisant très faible dû à la viscosité évanescence lorsque ε tend vers zéro. Si l'on considère une donnée initiale de la forme $2D + 3D$ comme dans le théorème 2.1.3, lorsque ε tend vers zéro, la solution de (NSC_ε) approche la solution d'un système d'Euler bidimensionnel avec trois composantes. Comme les estimations en norme \mathbf{H}^s connues pour la solution du problème d'Euler en dimension deux sont de l'ordre d'une double exponentielle en temps, cette solution n'est pas intégrable en temps. Cela ne nous permet pas de montrer l'existence globale de solutions fortes pour (NSC_ε) , mais seulement une existence sur un grand intervalle de temps.

Finalement, remarquons que les résultats de cette thèse s'appliquent bien aux fluides isotropes en rotation rapide avec viscosité petite dans toutes les directions ($\nu_h = \nu_v = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 0$). Ce cas est très important dans l'étude de différents fluides physiques de grande densité où la viscosité cinématique est beaucoup plus petite que la viscosité dynamique (comme par exemple des fluides géophysiques dans les étoiles, ...).

Deuxième cas : La donnée initiale est somme d'une partie bidimensionnelle et d'une partie tridimensionnelle

Pour le cas où la donnée initiale est somme d'une partie bidimensionnelle et d'une partie tridimensionnelle, le système (NSC_ε) se décompose en deux parties : une partie bidimensionnelle qui évolue selon une équation de type Euler bidimensionnelle avec trois composantes, et une partie tridimensionnelle oscillante qui converge vers zéro d'après les estimations de Strichartz. La théorie des systèmes hyperboliques implique que la partie bidimensionnelle existe globalement en temps dans des espaces $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$ avec $\sigma > 2$ (mais

on ne dispose que d'une estimation de la norme $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$ qui pourrait exploser exponentiellement en temps à l'infini). Cette estimation, qui est du type d'une double exponentielle, ne nous permet plus d'utiliser les arguments de la première partie pour montrer l'existence globale de la solution forte du système (NSC_ε) , car l'absence de l'intégrabilité en temps ne permet pas d'utiliser le lemme de Gronwall.

L'idée de cette deuxième partie est d'ajouter un terme dissipatif du type γu dans le système (NSC_ε) . Nous remarquons que ce nouveau terme de friction n'a aucun effet régularisant et contribue peu aux estimations de Strichartz. Le rôle de ce terme est simplement de donner une dissipation en temps pour compenser la croissance peut-être exponentielle de la partie bidimensionnelle. Nous considérons donc le système suivant

$$(NSC_{\varepsilon,\gamma}) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon + \gamma u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

dans le cas où la donnée initiale $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, où $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ et $v_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Ici le paramètre $\gamma > 0$ représente le coefficient de friction de Rayleigh.

Maintenant, grâce au terme dissipatif γu , le système limite est du type Euler bidimensionnel dissipatif avec trois composantes

$$(Ed2D) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \gamma \bar{u} + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \bar{u} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0 \\ \partial_3 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \end{cases}$$

qui admet une unique solution globale en temps, si la donnée initiale est dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ avec le rotationnel $\operatorname{rot} \bar{u}_0$ appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2)$. De plus, les deux premières composantes de cette solution vérifient un vrai système d'Euler bidimensionnel dissipatif, donc leurs normes \mathbf{L}^p , avec $p \geq 2$, décroissent exponentiellement en temps. Le seul problème vient de la troisième composante, qui évolue selon une équation de transport.

Soit

$$Y_{s,\eta} = \dot{\mathbf{H}}_h^{-\eta} \mathbf{H}_v^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\eta}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s}(\mathbb{R}^3),$$

où les espaces $\dot{\mathbf{H}}^\eta$ et \mathbf{H}^η sont les espaces de Sobolev homogènes et non homogènes usuels. Dans le cas où la troisième composante est nulle, nous obtenons le théorème suivant

Théorème 2.1.8 (Cas semi-bien préparé) *Soient $\gamma > 0$, $\eta > 0$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ et $a > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $s > \frac{1}{2}$ et pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour toute donnée initiale $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, de divergence nulle satisfaisant*

- (i) \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel de divergence nulle $\bar{u}_0 = (\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2, 0)$ avec $\partial_3 \bar{u}_0^h = 0$, appartenant à $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, avec $\sigma > 2$, tel que $\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)} \leq r_0$ et tel que $\Omega_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2)$,
- (ii) v_0 est un champ de vecteurs tridimensionnel de divergence nulle appartenant à $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3) \cap Y_{s,\eta}$ tel que $\|v_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0 \varepsilon^{-a}$,

le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma})$ admet une (unique) solution globale

$$u^\varepsilon \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)).$$

Dans le cas général, nous devons supposer que la viscosité horizontale ne tend pas vers zéro trop rapidement, à savoir $\nu_h = -\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$. Nous considérons le système

$$(NSC_{\varepsilon,\gamma}^{bis}) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon + \frac{1}{\delta \ln \varepsilon} \Delta_h u^\varepsilon + \gamma u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Nous obtenons le résultat suivant

Théorème 2.1.9 (Cas mal préparé) *Soient $\gamma > 0$, $\eta > 0$. Pour tout $s > \frac{1}{2}$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$ et pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour toute donnée initiale $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, de divergence nulle satisfaisant*

(i) \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel de divergence nulle avec $\partial_3 \bar{u}_0 = 0$, appartenant à $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, avec $\sigma > 2$, tel que $\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)} \leq r_0$

(ii) v_0 est un champ de vecteurs tridimensionnel de divergence nulle appartenant à $\mathbf{H}^{0,s} \cap Y_{s,\eta}$ tel que $\|v_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0$,

le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma}^{bis})$ admet une (unique) solution globale

$$u^\varepsilon \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}).$$

Fluides en rotation rapide entre deux plaques infinies

Retournons maintenant au cas d'un fluide entre deux plaques infinies (on rappelle que $\Omega = \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$). Regardons le théorème 2.1.4 dans le cas où la viscosité horizontale ν_h est égale à ε^α avec $\alpha > 0$, et où les données initiales sont bien préparées. Comme dans la démonstration du théorème 2.1.8, les normes $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)$, $p \geq 2$, de la solution du système limite

$$(Ed2D_\beta) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \sqrt{2\beta} \bar{u} = -\nabla_h \bar{p}, \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0, \\ \partial_3 \bar{u} = 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = (\bar{u}_0^h, 0). \end{cases}$$

décroissent exponentiellement en temps. Ceci implique une intégrabilité en temps des normes \mathbf{L}^p des solutions de $(Ed2D_\beta)$. Ceci nous aussi permet de construire des couches limites d'Ekman dans le cas où $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ et de montrer la convergence uniforme en temps des solutions faibles du système

$$(NSC_\beta^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon - \beta \varepsilon \partial_3^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{e_3 \wedge u^\varepsilon}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0, \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases}$$

vers la solution du système limite $(Ed2D_\beta)$ quand ε tend vers 0. Nous obtenons le théorème suivant :

Théorème 2.1.10 *Soit $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ et soit u^ε une solution faible de $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ de donnée initiale $u_0^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon = (\bar{u}_0, 0)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, où \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel tel que $\bar{u}_0 \in \mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, $\sigma > 2$ et*

$$\bar{\Omega}_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2).$$

Supposons de plus que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))} = 0,$$

où \bar{u} est la solution du système limite $(Ed2D_\beta)$.

2.2 Équations primitives

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous étudions un modèle plus compliqué que le système de fluides en rotation rapide. Ce modèle modélise les fluides géophysiques à grande échelle, en tenant compte de la stratification due à la gravité de la terre. Nous rappelons rapidement les équations de ce modèle, les résultats connus et à la fin de ce paragraphe, nous présentons les résultats de ce mémoire.

2.2.1 Généralités sur les équations primitives dans \mathbb{R}^3

On rappelle que les équations primitives dans tout l'espace \mathbb{R}^3 s'écrivent

$$(PE^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^1 - \nu_h \Delta_h v_\varepsilon^1 - \nu_v \partial_3^2 v_\varepsilon^1 - \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^2 = -\frac{\partial_1 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t v_\varepsilon^2 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^2 - \nu_h \Delta_h v_\varepsilon^2 - \nu_v \partial_3^2 v_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^1 = -\frac{\partial_2 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t v_\varepsilon^3 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^3 - \nu_h \Delta_h v_\varepsilon^3 - \nu_v \partial_3^2 v_\varepsilon^3 + \frac{1}{F_\varepsilon} \theta_\varepsilon = -\frac{\partial_3 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon - \nu'_h \Delta_h \theta_\varepsilon - \nu'_v \partial_3^2 \theta_\varepsilon - \frac{1}{F_\varepsilon} v_\varepsilon^3 = 0 \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)|_{t=0} = (v_0, \theta_0) \end{cases}$$

où ε et F sont les nombres de Rossby et de Froude, ν_h et ν'_h (respectivement ν_v et ν'_v) sont la viscosité horizontale et la diffusivité thermique horizontale (respectivement la viscosité verticale et la diffusivité thermique verticale). Le champ de vecteurs v_ε décrit la vitesse du fluide, θ_ε est la fluctuation de densité et Φ_ε est le géopotential (qui contient la pression et la force centrifuge). Pour la modélisation de ce système, on renvoie le lecteur à [13].

Si on pose $U_\varepsilon = (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$, on peut réécrire le système (PE^ε) sous la forme plus compacte suivante :

$$(PE^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t U_\varepsilon + U_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon - L U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A} U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (-\nabla \Phi_\varepsilon, 0) \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ U_\varepsilon|_{t=0} = U_{0,\varepsilon}. \end{cases}$$

où

$$U_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon = v_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 v_\varepsilon^i \cdot \partial_i U_\varepsilon,$$

où l'opérateur \mathcal{A} est donné par la matrice

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et où L est l'opérateur linéaire

$$LU_\varepsilon = (\nu_h \Delta_h v_\varepsilon + \nu_v \partial_3^2 v_\varepsilon, \nu'_h \Delta_h \theta_\varepsilon + \nu'_v \partial_3^2 \theta_\varepsilon).$$

Pour énoncer les résultats d'existence (et d'unicité) des solutions du système (PE^ε) , on introduit les quantités suivantes. On définit d'abord le tourbillon potentiel

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 v_\varepsilon^2 - \partial_2 v_\varepsilon^1 - F \partial_3 \theta_\varepsilon.$$

Ensuite, on définit la décomposition orthogonale de U_ε en deux parties : la partie quasi-géostrophique :

$$U_{\varepsilon, QG} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\partial_2 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ \partial_1 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ 0 \\ -F \partial_3 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \Delta_F \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + F^2 \partial_3^2,$$

et la partie oscillante :

$$U_{\varepsilon, osc} \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon - U_{\varepsilon, QG} = \begin{pmatrix} v_\varepsilon^1 + \partial_2 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon^2 - \partial_1 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon^3 \\ \theta_\varepsilon + F \partial_3 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \end{pmatrix}.$$

Cette décomposition se résume en fait à une décomposition orthogonale du même type que celle obtenue lorsque l'on définit le projecteur de Leray \mathbb{P} de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ sur le sous-espace des champs de vecteurs de divergence nulle : il existe deux opérateurs pseudo-différentiels homogènes d'ordre zéro, notés \mathcal{P} et \mathcal{Q} tels que $U_{\varepsilon, osc} = \mathcal{P}U_\varepsilon$ et $U_{\varepsilon, QG} = \mathcal{Q}U_\varepsilon$.

2.2.2 Résultats connus

Les résultats de cette thèse concernent l'étude asymptotique des équations primitives anisotropes en rotation rapide avec viscosité petite. Avant d'énoncer les résultats de la thèse, on va rappeler rapidement les résultats obtenus précédemment. Précisons que les rappels ci-dessous concernent tous le cas isotrope où $\nu_h = \nu_v = \nu > 0$ et $\nu'_h = \nu'_v = \nu' > 0$.

Rappelons d'abord les travaux de Lions, Temam et Wang ([71] et [72]) qui ont considéré le système des équations primitives dans une géométrie sphérique ou cartésienne, et ont

étudié l'existence de solutions et les développements asymptotiques du système par rapport au nombre de Rossby ε , à savoir les systèmes géostrophique (développement d'ordre zéro) et quasigéostrophique (développement du premier ordre).

On rappelle aussi le travail de Beale et Bourgeois dans [8] qui considèrent les équations primitives (non visqueuses et avec une équation simplifiée pour la densité) dans le cas d'un domaine périodique en la coordonnée horizontale et borné en la coordonnée verticale, pour des données initiales régulières. Ils ont d'abord étudié le système limite quasigéostrophique et ensuite, ils ont démontré la convergence des solutions des équations primitives, pour des données dans \mathbf{H}^3 bien préparées, vers les solutions de ce système quasigéostrophique quand ε tend vers zéro.

Dans [43] et [44], Embid et Majda ont considéré une formulation générale pour les mouvements de fluides géophysiques en utilisant l'approximation de Boussinesq et l'adimensionnement. Le choix d'un unique petit paramètre rendant compte des phénomènes dus à la rotation et à la stratification permet ensuite une simplification aboutissant au système des équations primitives.

Citons aussi le travail de Chemin [22], qui a étudié le système des équations primitives dans les espaces de Sobolev $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^3)$ sous l'hypothèse $F = 1$, cas où il n'y a pas d'effet dispersif. Il a prouvé le résultat suivant

Théorème 2.2.1 (Cas $F = 1$) *Il existe une constante $c \in]0, 1[$ telle que si $|\nu - \nu'| \leq c\nu$ et si la donnée initiale $U_0 = (v_0, \theta_0) \in \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{\mathbf{H}}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ vérifie :*

$$(i) \quad \|U_{0,osc}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} \leq \frac{c\nu^4}{\|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^3} \exp \left\{ -\frac{\|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \|U_0\|_{\mathbf{L}^2}}{c\nu^2} \right\},$$

$$(ii) \quad \varepsilon \leq \frac{c\nu^4}{\|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^4 \|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}}} \exp \left\{ -\frac{\|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} \|U_0\|_{\mathbf{L}^2}}{c\nu^2} \right\},$$

alors, le système (PE^ε) admet une unique solution globale $U_\varepsilon(t)$ appartenant à l'espace $\mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbb{R}^3))$ et vérifiant pour tout temps t ,

$$\|U_\varepsilon(t)\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2 + \nu \int_0^\infty \|U_\varepsilon(s)\|_{\dot{\mathbf{H}}^2}^2 ds \leq \|U_0\|_{\dot{\mathbf{H}}^1}^2.$$

Dans [22], Chemin a également prouvé que, quand ε tend vers zéro, la solution U_ε converge vers la solution unique du système quasigéostrophique ayant pour donnée initiale $U_{0,QG} = QU_0$. Plus précisément, il a obtenu le résultat suivant

Théorème 2.2.2 (Cas $F = 1$) *On suppose que $|\nu - \nu'| \leq c\nu$. Soient $(U_{0,\varepsilon})_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ une famille de données initiales bornées dans $\dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)$ et $U_{0,QG} \in \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)$ telles que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|U_{0,\varepsilon,QG} - U_{0,QG}\|_{\dot{\mathbf{H}}^1} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|U_{0,\varepsilon,osc}\|_{\dot{\mathbf{H}}^{-1}} = 0.$$

Alors, pour tout $\eta > 0$, la famille de solutions $(U_\varepsilon)_{\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]}$ du système des équations primitives avec donnée initiale $U_{0,\varepsilon}$ converge dans l'espace $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^{1-\eta}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^{2-\eta}(\mathbb{R}^3))$, vers la solution $U_{QG} = {}^t(v^1, v^2, 0, \theta)$ du système quasigéostrophique

$$\partial_t U_{QG} - \Gamma U_{QG} = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \\ 0 \\ \partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F^{-1}(v \cdot \nabla \Omega), \quad U_{QG}|_{t=0} = U_{0,QG}$$

où $\Gamma = \Delta \Delta_F^{-1} (\nu \partial_1^2 + \nu \partial_2^2 + \nu' F^2 \partial_3^2)$.

Dans le même esprit que dans [22], D. Iftimie ([61]) s'est intéressé au cas du système des équations primitives non visqueuses avec $F \neq 1$, et a prouvé la convergence vers le système quasigéostrophique dans l'espace $\mathbf{L}^\infty(]0, T[, \mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}^3))$ pour tout $T < +\infty$ et $\sigma < s$, quand la donnée initiale $U_{0,\varepsilon}$ appartient à $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{5}{2}$.

Le cas du système des équations primitives visqueuses avec $F \neq 1$ a été étudié de façon détaillée par Charve ([14],[15] et [16]). Il a obtenu des résultats classiques d'existence de solutions faibles globales au sens de Leray dans \mathbf{L}^2 et d'existence et unicité d'une solution forte locale dans l'espace de Sobolev $\dot{\mathbf{H}}^1$. Suivant les idées de [25], Charve a étudié les propriétés spectrales de la matrice $-L + \widehat{\frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \mathcal{A}}$ et a ensuite montré des estimations de type Strichartz dans le cadre des équations primitives. Il a prouvé dans [15] les théorèmes suivants.

Théorème 2.2.3 (Cas $F \neq 1$) *Pour toute donnée initiale U_0 appartenant à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le système (PE^ε) admet une solution faible de Leray $U_\varepsilon(t)$ globale. De plus, quand ε tend vers zéro, la partie oscillante $U_{\varepsilon,osc}$ de cette solution tend vers zéro dans l'espace $\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3))$, pour tout $q \in]2, 6[$.*

Théorème 2.2.4 (Cas $F \neq 1$) *Sous les mêmes hypothèses que dans le théorème 2.2.3, il existe une suite extraite de la partie quasigéostrophique $U_{\varepsilon,QG}$ qui converge pour tout $q \in]2, 6[$ dans l'espace $\mathbf{L}_{loc}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^q(\mathbb{R}^3))$ vers la solution $U_{QG} = {}^t(v^1, v^2, 0, \theta)$ du système quasigéostrophique*

$$(QG) \quad \begin{cases} \partial_t U_{QG} - \Gamma U_{QG} = \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ 0 \\ -F \partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F^{-1} (v_{QG} \cdot \nabla \Omega_{QG}) \\ U_{QG}|_{t=0} = U_{0,QG} = \mathcal{Q}U_0, \end{cases}$$

où $\Omega_{QG} = \partial_1 v_{QG}^2 - \partial_2 v_{QG}^1 - F \partial_3 \theta_{QG}$ et où Γ est l'opérateur elliptique d'ordre deux défini par $\Gamma = \Delta \Delta_F^{-1} (\nu \partial_1^2 + \nu \partial_2^2 + \nu' F^2 \partial_3^2)$.

Concernant les solutions fortes des équations quasigéostrophiques, Charve a obtenu dans [14] le résultat suivant

Théorème 2.2.5 (Cas $F \neq 1$) *Supposons que $U_{0,QG}$ appartient à $\dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)$, alors le système (QG) a une unique solution globale $U_{QG}(t)$ appartenant à l'espace $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^2(\mathbb{R}^3))$.*

Finalement, en imposant plus de conditions sur la donnée initiale, dans [14], Charve a obtenu le résultat plus précis ci-dessous. Dans l'énoncé de ce résultat, nous avons besoin de l'espace

$$E^s = \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^{s+1}(\mathbb{R}^3)), \quad \text{pour tout } s \in \mathbb{R}.$$

Théorème 2.2.6 (Cas $F \neq 1$) *Supposons que $U_0 \in \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}^3) \cap \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et que $U_{0,QG} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Alors, le système suivant*

$$\begin{cases} \partial_t W_\varepsilon - LW_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}\mathcal{A}W_\varepsilon = -G \\ W_{\varepsilon|t=0} = U_{0,osc} = U_0 - U_{0,QG}, \end{cases}$$

où

$$G = \mathbb{P}\mathbb{P}(U_{QG} \cdot \nabla U_{QG}) - F(\nu - \nu') \Delta \Delta_F^{-2} \begin{pmatrix} -F \partial_2 \partial_3^2 \\ F \partial_1 \partial_3^2 \\ 0 \\ (\partial_1^2 + \partial_2^2) \partial_3 \end{pmatrix} \Omega_{QG},$$

et où U_{QG} est la solution forte globale du système quasigéostrophique (QG), admet une seule solution W_ε dans E^s , pour tout $s \in [\frac{1}{2}, 1]$. En outre, on a les propriétés suivantes :

- (i) $\|W_\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^\infty)} \rightarrow 0$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (ii) Pour ε assez petit, le vecteur $\gamma_\varepsilon = U_\varepsilon - U_{QG} - W_\varepsilon$ appartient à E^s et tend vers zéro dans E^s , pour tout $s \in [\frac{1}{2}, 1]$, quand ε tend vers zéro.

De plus, si ε est assez petit, la solution U_ε est globale en temps, appartient à E^s et, en outre, $U_\varepsilon - U_{QG} = \gamma_\varepsilon + W_\varepsilon$ tend vers zéro dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^\infty)$, lorsque ε tend vers zéro.

La preuve de ce théorème repose sur une étude minutieuse des propriétés spectrales de l'opérateur $-L + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P}\mathcal{A}$ et sur l'obtention d'estimations de Strichartz pour cet opérateur.

Dans le cas périodique [51], Gallagher avait montré la convergence du système des équations primitives vers la limite quasigéostrophique quand F , ν , ν' sont quelconques et les données initiales mal préparées. C'est un cas particulier des résultats plus généraux pour des équations paraboliques, obtenus par des méthodes développées par Schochet ([92]). Finalement, rappelons les travaux de Desjardins et Grenier dans [37] qui considèrent le cas d'une bande infinie, bornée en haut et en bas par une paroi solide, et une viscosité évanescence (viscosité verticale petite devant ε). Ils ont obtenu l'existence globale d'une solution faible pour le système quasigéostrophique et ont étudié non seulement la convergence vers la limite quasigéostrophique mais aussi les couches limites d'Ekman sur les parois verticales lorsque ε tend vers zéro.

2.2.3 Contribution de cette thèse

Considérons maintenant le système des équations primitives anisotropes avec viscosité verticale évanescence ($\nu_v = \nu'_v = 0$). Comme précédemment dans le cas des fluides anisotropes en rotation, on ne connaît pas l'existence de solutions faibles globales au sens de Leray, à cause de la viscosité verticale nulle. De plus, la même problématique que dans le cas des fluides anisotropes en rotation rapide, se pose quand on considère une viscosité horizontale dépendant du nombre de Rossby, à savoir quand ν_h, ν'_h sont de l'ordre de ε^α avec $\alpha > 0$.

En collaboration avec Charve, dans [18], nous considérons le système des équations primitives anisotropes avec viscosité verticale nulle, viscosité horizontale de l'ordre de ε^α avec $\alpha > 0$, dans le cas où le nombre de Froude F est différent de 1. Comme dans le cas

des fluides tournants, nous considérons aussi des données initiales dans $\mathbf{H}^{0,s}$ avec $s > \frac{1}{2}$. Plus précisément, nous étudions le système suivant

$$(PE_h^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^1 - \varepsilon^\alpha \Delta_h v_\varepsilon^1 - \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^2 = -\frac{\partial_1 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t v_\varepsilon^2 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^2 - \varepsilon^\alpha \Delta_h v_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^1 = -\frac{\partial_2 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t v_\varepsilon^3 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^3 - \varepsilon^\alpha \Delta_h v_\varepsilon^3 + \frac{1}{F_\varepsilon} \theta_\varepsilon = -\frac{\partial_3 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} \\ \partial_t \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon - \rho \varepsilon^\alpha \Delta_h \theta_\varepsilon - \frac{1}{F_\varepsilon} v_\varepsilon^3 = 0 \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)|_{t=0} = (v_0, \theta_0) \end{cases}$$

Nous obtenons d'abord le résultat d'existence et d'unicité de la solution forte locale de (PE_h^ε) .

Théorème 2.2.7 ($F \neq 1$, **Existence locale et unicité**) *Soient $s > \frac{1}{2}$ et $U_0 \in \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un temps $T > 0$ tel que le système (PE_h^ε) admet une unique solution forte $U_\varepsilon \in \mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3))$ avec $\nabla_h U \in \mathbf{L}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3))$. De plus, il existe une constante c telle que si $\|U_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq c\nu_h$, alors la solution est globale en temps.*

Le théorème suivant, qui donne l'existence globale de solutions fortes du système des équations primitives anisotropes pour des données grandes, fait l'objet principal du chapitre 4. Nous rappelons que

$$Y_{s,\eta,p} = \mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^{\eta,s+\eta}(\mathbb{R}^3).$$

Nous obtenons le théorème suivant

Théorème 2.2.8 ($F \neq 1$, **Existence globale**) *Soient $s > \frac{1}{2}$, $1 \leq p < 2$ et $\eta > 0$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r_0)$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour tout $U_0 \in Y_{s,\eta,p}$ avec partie quasigéostrophique $\mathcal{Q}U_0$ nulle et $\|U_0\|_{Y_{s,\eta,p}} \leq r_0$, le système (PE_h^ε) admet une unique solution globale U_ε dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{0,s}) \cap \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$ avec $\nabla_h U_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$.*

Comme pour les fluides tournants, dans ce résultat, on doit supposer que la donnée initiale a une partie quasigéostrophique nulle. La raison est due au fait que le système limite de (PE_h^ε) , quand ε tend vers zéro, est nulle. Si la partie quasigéostrophique de la donnée initiale est non nulle, le système limite sera le système (QG) , et notre méthode n'est plus valable.

L'idée de la démonstration consiste en l'observation que les propriétés spectrales en la variable de Fourier de l'opérateur $-\widehat{L + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \mathcal{A}}$ ne changent "pas trop" quand on considère le cas où la viscosité verticale est évanescence. Les ingrédients principaux de la démonstration du théorème ci-dessus sont donc, d'une part, une adaptation, dans le cadre des équations primitives, des estimations de Strichartz pour le système linéaire correspondant à (PE_h^ε) et d'autre part, une généralisation de la méthode utilisée pour les systèmes de fluides en rotation rapide (voir le chapitre 3 ou [80]) pour compenser le faible effet régularisant induit

par la viscosité horizontale petite. L'effet dispersif (qui se traduit par des estimations de Strichartz) combiné au fait que la partie quasi-géostrophique est nulle nous permettent d'obtenir que la solution du système linéaire tend vers zéro quand ε tend vers zéro. Donc on peut utiliser un argument de type "bootstrap" comme dans le chapitre 3 pour montrer l'existence globale de la solution du système non linéaire associé et donc l'existence globale de la solution de (PE_h^ε) .

2.3 Équations de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide

2.3.1 Rappel de résultats

On considère l'espace \mathbb{R}^3 tout entier rempli par un fluide conducteur incompressible de vitesse u , soumis à la pression p , tournant autour de l'axe e_3 et générant un champ magnétique b . On utilise le modèle suivant, étudié par B. Desjardins, E. Dormy et E. Grenier dans [36] (voir aussi le chapitre 5).

$$(MHD) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \frac{E}{\varepsilon} \Delta u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\frac{\Lambda}{\varepsilon} (\operatorname{curl} b) \wedge e_3 + \frac{\Lambda \theta}{\varepsilon} (\operatorname{curl} b) \wedge b \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \frac{\operatorname{curl} (u \wedge e_3)}{\theta} + \frac{\Delta b}{\theta} \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0). \end{array} \right.$$

Ici, le nombre d'Ekman E , le nombre de Rossby ε , le nombre d'Elsasser Λ et le nombre de Reynolds θ satisfont les conditions asymptotiques suivantes

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \Lambda = \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon \theta \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad E \sim \varepsilon^2.$$

Dans [39] et [36], Dormy, Cardin et Jault d'une part et Desjardins, Dormy et Grenier d'autre part ont donné une modélisation des flots de magnéto-hydrodynamique dans le noyau de la Terre. Ils ont aussi étudié l'existence des solutions de ces modèles et la stabilité des couches limites d'Ekman-Hartmann dans le cas d'une coquille sphérique.

Dans [9], J. Benameur, S. Ibrahim et M. Majdoub ont considéré le système (MHD) avec les paramètres $E = \varepsilon^2$, $\Lambda = \varepsilon$ et $\theta = 1$, et ont obtenu le résultat suivant d'existence et d'unicité d'une solution forte locale (globale pour des données petites) dans des espaces de Sobolev isotropes homogènes $\dot{\mathbf{H}}^m(\mathbb{R}^3)$ avec m entier et $m > \frac{7}{2}$.

Théorème 2.3.1 ($E = \varepsilon^2$, $\Lambda = \varepsilon$, $\theta = 1$ [9]) *Soit $m > \frac{7}{2}$ un entier et u_0, b_0 des champs de vecteurs dans $\dot{\mathbf{H}}^m(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Alors, il existe un temps T et une constante positive C tels que le système (MHD) admet une unique solution*

$$(u, b) \in \mathbf{C}([0, T], \dot{\mathbf{H}}^m(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^2([0, T], \dot{\mathbf{H}}^{m+1}(\mathbb{R}^3)).$$

De plus, si $\|(u_0, b_0)\|_{\dot{\mathbf{H}}^s} \leq C\varepsilon$, alors la solution (u, b) devient globale.

2.3.2 Contributions de cette thèse

Le travail dans le chapitre 5 se concentre sur le cas anisotrope où il n'y a ni viscosité ni diffusivité magnétique dans la direction verticale (le cas où, dans les équations de la magnéto-hydrodynamique, on remplace le terme Δ par le terme $\Delta_h = \partial_1^2 + \partial_2^2$), c'est-à-dire sur le système

$$(MHD_h) \quad \begin{cases} \partial_t u - \frac{E}{\varepsilon} \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} + \frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_3 b & = -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \frac{1}{\theta} \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \frac{1}{\theta} \partial_3 u & = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b & = 0 \\ (u(0), b(0)) & = (u_0, b_0). \end{cases}$$

Dans un premier temps, on s'intéresse à l'existence et l'unicité d'une solution forte locale de (MHD_h) quand la rotation est fixée, dans le cas où $\frac{\Lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ (remarquons que le cas considéré par J. Benameur, S. Ibrahim et M. Majdoub dans [9] satisfait aussi à cette hypothèse). La raison de l'hypothèse $\frac{\Lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ est que l'on ne sait pas estimer les termes $\partial_3 u$ et $\partial_3 b$ et donc on veut utiliser des intégrations par parties pour se débarrasser de ces termes. On considère donc le système plus général suivant :

$$(MHD_h^1) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu_h \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} + \mu \partial_3 b = -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \nu'_h \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \mu \partial_3 u = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0). \end{cases}$$

En utilisant la théorie de Littlewood-Paley et en adaptant la méthode développée dans [26] au cadre des équations de la magnéto-hydrodynamique, on obtient des résultats d'existence locale (globale pour des données petites) et d'unicité de la solution forte dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ avec $s > \frac{1}{2}$ pour le système (MHD_h^1) . On remarque que pour l'unicité de la solution, on utilise la méthode de [62] due à D. Iftimie. On obtient le théorème suivant.

Théorème 2.3.2 (Existence locale et unicité) *Soit $s > \frac{1}{2}$. Soit u_0, b_0 des champs de vecteurs dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ à divergence nulle. Alors, il existe un temps $T > 0$ tel que le système (MHD_h^1) admet une unique solution*

$$(u, b) \in \mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad (\nabla_h u, \nabla_h b) \in \mathbf{L}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)).$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que si $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|b_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq c\nu_h$, alors la solution est globale

$$(u, b) \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad (\nabla_h u, \nabla_h b) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)).$$

Maintenant, revenons au système (MHD_h) . Motivé par les résultats obtenus pour les systèmes des fluides tournants et des équations primitives anisotropes, on s'intéresse à l'existence de solutions fortes globales de (MHD_h) dans $\mathbf{H}^{0,s}$ pour des données initiales grandes. La première difficulté que l'on rencontre est que la structure de ce système est

beaucoup plus compliquée que celle des fluides tournants et des équations primitives. Quand on considère les propriétés spectrales du système linéaire associé à (MHD_h) , il faut étudier une matrice d'ordre 6, dont il est en général très difficile de calculer les valeurs propres et les vecteurs propres. Pourtant, avec des paramètres E , ε , Λ et θ bien choisis, on obtient certaines symétries pour cette matrice, ce qui nous permet de calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Cela permet d'obtenir des estimations de Strichartz semblables à celles du théorème 2.1.6 pour le système linéaire et donc permet de montrer l'existence de solutions fortes globales. Plus précisément, on considère le système suivant

$$(MHD_h^2) \quad \begin{cases} \partial_t u - \varepsilon^\alpha \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e}{\varepsilon} + \frac{\partial_3 b}{\varepsilon} & = \nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \varepsilon^\alpha \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \frac{\partial_3 u}{\varepsilon} & = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b & = 0 \\ (u(0), b(0)) & = (u_0, b_0). \end{cases}$$

Le théorème suivant montre l'existence de solutions fortes globales de (MHD_h^2) pour des données grandes.

Théorème 2.3.3 (Existence globale) *Soient $s > \frac{1}{2}$, $\eta > 0$, $1 \leq p < 2$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, et pour tous champs de vecteurs $(u_0, b_0) \in Y_{s,\eta,p}$ à divergence nulle tels que*

$$\|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}}^2 + \|b_0\|_{Y_{s,\eta,p}}^2 \leq r_0^2,$$

le système (MHD_h^2) admet une unique solution forte, globale en temps

$$(u, b) \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s}) \quad \text{avec} \quad (\nabla_h u, \nabla_h b) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}).$$

2.4 Équations de fluides de grade deux

Dans le dernier chapitre de la thèse, nous considérons un modèle de fluides non-newtoniens, à savoir le système de fluides de grade deux suivant

$$(FG2) \quad \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \wedge u + \nabla p = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dans } \mathbb{T}^3, \end{cases}$$

où $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$, $u(t, x)$, $f(t, x)$ et $p(t, x)$ sont respectivement la vitesse du fluide, la force extérieure et la pression.

Rappelons d'abord quelques résultats principaux obtenus dans des travaux précédents. Dans [32], Cioranescu et El Hacène ont montré l'existence locale et l'unicité dans \mathbf{H}^3 d'une solution forte du système $(FG2)$ dans des domaines réguliers bornés Ω de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord. De plus, dans le cas de dimension 2, la solution existe globalement en temps. Plus tard, dans [79], Moise, Rosa et Wang ont prouvé l'existence d'un attracteur global compact pour ce système dans le cas de la dimension 2, ce qui fait apparaître naturellement la question de la régularité de l'attracteur. Dans

[86], Paicu, Raugel et Rekaló ont répondu à cette question dans le cas du tore \mathbb{T}^2 . Ils ont démontré que dans ce cas, pour α suffisamment petit, l'attracteur admet une régularité \mathbf{H}^m pour $m \geq 1$ quelconque. Ils ont également mis en évidence des comportements de dimension finie de cet attracteur.

Mais, on ne sait pas encore si l'attracteur n'est composé que de fonctions analytiques. Un premier pas dans cette direction est la démonstration de la propagation de l'analyticité. Plus précisément, il s'agit de montrer que si la donnée est analytique, alors la solution du système des fluides de grade deux reste analytique pour tout temps positif. Rappelons qu'il y a eu de nombreux travaux concernant l'analyticité des solutions des systèmes de fluides newtoniens parmi lesquels, on peut citer les travaux de Masuda [77], de Foias et Temam [48], de Ferrari et Titi [45], . . . Pour les fluides de grade deux, une difficulté supplémentaire apparaît. À cause de l'absence d'effet régularisant, les techniques classiques (voir par exemple [48]) ne s'appliquent pas dans ce cas.

Avant de présenter le résultat obtenu, nous rappelons les définitions et notations des classes de Gevrey. Pour $p \geq 0$ et pour $a > 0$, $|D|^p$ est l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$|D|^p u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^p \widehat{u}(n) e^{in \cdot x},$$

et $e^{a|D|^p}$ est l'opérateur

$$e^{a|D|^p} u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|^p} \widehat{u}(n) e^{in \cdot x}.$$

La classe de Gevrey $\mathcal{G}_a^p(\mathbb{T}^3)$, avec $p \geq 0$, $a > 0$, est définie comme l'ensemble des champs de vecteurs $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$ tels que

$$\|u\|_{\mathcal{G}_a^p}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \||D|^p e^{a|D|^p} u\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^{2p} e^{2a|n|^p} |\widehat{u}(n)|^2 < +\infty.$$

La méthode que nous utilisons dans le chapitre 6 a été introduite par Chemin [24] et plus tard Chemin, Gallagher et Paicu [29] (voir aussi [87]), qui consiste à introduire un opérateur qui, à tout $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$, associe

$$u_\Phi(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\Phi(t, D)} u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} [e^{\Phi(t, n)} \widehat{u}(t, n)] e^{in \cdot x},$$

où Φ est une fonction définie par

$$\Phi(t, n) = (a - \theta(t)) |n|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^3,$$

et telle que la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(t) \leq \frac{a}{2}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t) > 0, \quad \forall t > 0.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \partial_t u_\Phi &= e^{\Phi(t, D)} \partial_t u - \dot{\theta}(t) \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n| \widehat{u}(n) e^{\Phi(t, n) + in \cdot x} \\ &= (\partial_t u)_\Phi - \dot{\theta}(t) |D| u_\Phi. \end{aligned}$$

Donc, quand on applique l'opérateur $e^{\Phi(t,D)}$ au système (FG2), on obtient le terme $\dot{\theta}(t) |D| u_{\Phi}$ qui joue un rôle régularisant. Il reste à trouver une estimation pour contrôler le terme non linéaire $\text{rot} (u - \alpha \Delta u) \wedge u$ et pour profiter de ce nouveau terme faiblement régularisant.

Le résultat du chapitre 6 est le théorème suivant

Théorème 2.4.1 *Soient $\alpha > 0$ et $a > 0$. Il existe une constante $C_{\alpha} > 0$ telle que si $u_0 \in \mathcal{G}_a^3(\mathbb{T}^3)$ et $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{G}_a^1(\mathbb{T}^3))$ et si*

$$\|u_0\|_{\mathcal{G}_a^3} + \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_{\mathcal{G}_a^1} dt \leq C_{\alpha} a \nu.$$

alors, le système (FG2) admet une unique solution globale $u \in \mathbf{L}^{\infty}(\mathbb{R}_+, \mathcal{G}_{a/2}^3(\mathbb{T}^3))$, dont la norme $\mathcal{G}_{a/2}^3(\mathbb{T}^3)$ est bornée uniformément en temps par une constante qui ne dépend que de a , α et la viscosité ν .

Fluides anisotropes avec viscosité évanescente en rotation rapide

I. Rotating fluids with small viscosity

3.1 Introduction

In this paper, we study the dispersion phenomena in a rotating fluid system in \mathbb{R}^3 with a small viscosity. We consider the following system

$$(NSC_\varepsilon^\nu) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu \Delta_h u^\varepsilon - \nu_v \partial_3^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $\Delta_h = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ is the horizontal Laplacian, $e_3 = (0, 0, 1)$ and $\varepsilon > 0$ denotes the Rossby number.

In the case of isotropic fluids with fixed viscosities $\nu_h = \nu_v > 0$, the global existence of weak solutions in the sense of Leray can be proved by the same method as in the case of the Navier-Stokes equations (see J. Leray, [70]), since the Coriolis force term $\frac{1}{\varepsilon} u \wedge e_3$ does not appear in the energy estimates. The uniqueness of the weak ‘‘Leray’’ solution is known for the two-dimensional case and is still open for the three-dimensional case. By using the same arguments as in H. Fujika and T. Kato [49] for the Navier-Stokes equations, one easily shows local existence and uniqueness of a strong solution of (NSC_ε^ν) . These arguments, also based on the fact that the Coriolis force does not bring any contribution in the energy estimates, prove that the lifespan of the strong solutions is bounded from below, uniformly with respect to ε .

Global existence of strong solutions in the case of 3D Navier-Stokes equations is known only for small initial data. However, in the case of rotating fluids, although the smoothing effect induced by the viscosity is weak, when ε is small, the fast rotation stabilizes the system and implies global existence of strong solutions for large data. This result was proved in the case of non-resonant periodic domains by A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko ([1], [5]) and also by I. Gallagher ([51]), who used the method of Schochet. It was also

proved, in the case of the whole space \mathbb{R}^3 , by J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier [26], by using the dispersive properties of the linearized system.

In the case of anisotropic fluids, that is, when $\nu_h > 0$ is fixed and ν_v vanishes (when the Rossby number ε goes to zero), the energy method of Leray does no longer apply and the existence of a weak solution in the sense of Leray is still unknown. However, one can prove existence and uniqueness of strong solutions. In [26], using a dyadic decomposition in which the vertical variable plays a role different from the horizontal variables, J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier proved the local existence of a strong solution of (NSC_ε^ν) on a time interval uniform in ε , in the anisotropic spaces $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ with $s > \frac{1}{2}$. They also showed global existence in the same spaces when the data are small and proved the uniqueness in $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, $s > \frac{3}{2}$. Moreover, in [26], using anisotropic Strichartz estimates, the authors proved the global existence of a strong solution of (NSC_ε^ν) for large data in $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ with $s > \frac{1}{2}$, provided that ε is small enough. The uniqueness of the solution for $s > \frac{1}{2}$ was shown by D. Iftimie in [62]. Let us also mention, that in the anisotropic case and for periodic domains, using Schochet's method, M. Paicu ([82]) proved the global existence of a strong solution for large data and small Rossby number ε (for non-resonant tori and some resonant tori).

In all the above mentioned papers, the horizontal viscosity ν_h is fixed and independent of ε . If now ν_h also depends on ε , say $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ in the equations (NSC_ε^ν) , a new difficulty arises in showing global existence of strong solutions. Indeed, the fact that the coefficient $\frac{1}{\nu_h} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$ in the energy estimates goes to infinity when ε goes to 0, prevents one to use Gronwall-type arguments in order to deduce the global existence of strong solutions.

We remark that in the case of rotating Euler equations (*i.e* the limiting case of rotating fluids equations where $\nu = \nu_v = 0$), only long-time existence results of classical solutions are known, that is, when the Rossby number ε goes to 0, the lifespan of the solution goes to infinity (see A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko [1] for the periodic case and A. Dutrifoy [42] for the case of the whole space).

The goal of this paper is to prove the global existence of a unique strong solution of (NSC_ε^ν) with $\nu_h = \varepsilon^\alpha$, $\nu_v = 0$, for large data, for $0 < \alpha \leq \alpha_0$, provided that ε is small enough. We use the method of [26] which consists in proving Strichartz-type estimates for the linearized system

$$(LNSC_\varepsilon^\nu) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu_h \Delta_h u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Let \bar{u} be the truncated solution of $(LNSC_\varepsilon^\nu)$ on the domain

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_h| \geq r, |\xi_3| \geq r, |\xi| \leq R \}.$$

The exact meaning of this truncation will be given in Section 3.3. In [26], the authors proved that

$$\forall p \in [1, \infty], \quad \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+; \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3))} \leq C_{r,R} \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

These estimates indicate a dispersion of \bar{u} . Then, by considering (NSC_ε^ν) as a perturbation of $(LNSC_\varepsilon^\nu)$, the authors could prove the global existence of strong solutions of (NSC_ε^ν) . Actually, as the truncation radii r and R depend on the viscosity ν_h , the constant $C_{r,R}$ also does. In the case where $\nu_h = \varepsilon^\alpha$, $C_{r,R}$ blows up when ε goes to 0. Another problem that prevents us to use Gronwall-type arguments as in [26] is that the coefficient $\frac{1}{\nu_h} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$ in the energy estimates goes to infinity when ε goes to 0. In order to overcome these difficulties, in Section 3.3 of this paper, we will prove that $C_{r,R}$ depends in a polynomial way on the radii r and R . This dependence allows us to get Strichartz-type estimates which are able to absorb the blowing-up term $\frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, and thus, allows us to use Gronwall-type arguments to prove global existence of strong solutions.

In order to state our results, we first recall the definitions of anisotropic spaces. In what follows, we will use the index “h” to refer to the horizontal variable, and the index “v” or “3” to refer to the vertical one. Thus, $x_h = (x_1, x_2)$ and $\xi_h = (\xi_1, \xi_2)$. The anisotropic Lebesgue spaces $\mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q$ with $p, q \geq 1$ are defined as

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q(\mathbb{R}^3) &= \mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2; \mathbf{L}_v^q(\mathbb{R})) \\ &= \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_{\mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q} = \left[\int_{\mathbb{R}_h^2} \left| \int_{\mathbb{R}_v} |u(x_h, x_3)|^q dx_3 \right|^{\frac{p}{q}} dx_h \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

Here, we remark that the order of integration is important. Indeed, if $1 \leq p \leq q$ and if $u : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a function in $\mathbf{L}^p(X_1; \mathbf{L}^q(X_2))$, where $(X_1, d\mu_1)$, $(X_2, d\mu_2)$ are measurable spaces, then $u \in \mathbf{L}^q(X_2; \mathbf{L}^p(X_1))$ and

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{L}^q(X_2; \mathbf{L}^p(X_1))} &= \left[\int_{X_2} \left| \int_{X_1} |u|^p d\mu_1 \right|^{\frac{q}{p}} d\mu_2 \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\int_{X_1} \left| \int_{X_2} |u|^q d\mu_2 \right|^{\frac{p}{q}} d\mu_1 \right]^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{\mathbf{L}^p(X_1; \mathbf{L}^q(X_2))}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

The anisotropic non-homogeneous Sobolev spaces $\mathbf{H}^{\sigma,s}$, with $\sigma, s \in \mathbb{R}$, are defined as the closure of the set of smooth functions under the norm

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_h|^2)^\sigma (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For details on anisotropic spaces $\mathbf{H}^{\sigma,s}$, we refer the reader to L. Hörmander [58], M. Sablé-Tougeron [91] and D. Iftimie [59].

We consider the system

$$(NSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where u_0 is in $\mathbf{H}^{0,s}$ with $s > \frac{1}{2}$.

We first state the local existence theorem, the proof of which follows the lines of Theorems 1 and 2 in [26]. The details are left to the reader.

Theorem 3.1.1 (Local existence) *Let $s > \frac{1}{2}$. Suppose that $\varepsilon > 0$ and $\alpha > 0$ are fixed. For any divergence-free vector u_0 in $\mathbf{H}^{0,s}$, there exists a positive time T_ε such that the system (NSC_ε) has a unique strong solution*

$$u \in \mathbf{L}^\infty((0, T_\varepsilon), \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{with} \quad \nabla_h u \in \mathbf{L}^2((0, T_\varepsilon), \mathbf{H}^{0,s}).$$

Moreover, there exists a positive constant C such that, if $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C\varepsilon^\alpha$, then the solution becomes global in time.

Definition 3.1.2 *For any $s > \frac{1}{2}$, $\eta > 0$ and $1 \leq p < 2$, let*

$$\begin{aligned} Y_{s,\eta,p} &= \mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p \cap \mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{H}^{\eta,s+\eta} \\ &= \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_{Y_{s,\eta,p}} = \sup \left\{ \|u\|_{\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p}, \|u\|_{\mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s}, \|u\|_{\mathbf{H}^{\eta,s+\eta}} \right\} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

We now state the main theorem of this paper.

Theorem 3.1.3 (Global existence) *Let $\eta > 0$ and $1 \leq p < 2$. We can choose $\alpha_0 > 0$ such that, for any $0 < \alpha < \alpha_0$, for any $s > \frac{1}{2}$ and for any $r_0 > 0$, there exist $\varepsilon_0 > 0$ such that for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ and for any divergence-free vector $u_0 \in \mathbf{H}^{0,s} \cap Y_{s,\eta,p}$ with $\|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}} \leq r_0$, the system (NSC_ε) has a unique global strong solution*

$$u \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{with} \quad \nabla_h u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}).$$

Remark

The choice of the spaces $Y_{s,\eta,p}$ comes from the fact that we will have to cut off the initial data u_0 in the space of frequencies. The idea is to write $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, where $\bar{u}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\mathcal{F}(u_0)(\xi))$ (Ψ is defined in (3.14)). The above choice of $Y_{s,\eta,p}$ allows us to give an explicit bound of v_0 in the norm of $\mathbf{H}^{0,s}$. Other choices are possible; for instance, one could replace the space $Y_{s,\eta,p}$ by the spaces $\dot{\mathbf{H}}_h^{-\sigma} \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\sigma} \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s}$ where $\sigma > 0$ (for more details, see Remark 3.4.3).

The structure of the paper is as follows. In the next section, we recall some properties of the anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{\sigma,s}$ and introduce the dyadic decomposition. Section 3.3 is devoted to the proof of Strichartz-type estimates for the linearized equations of (NSC_ε) . In the last section, we give the proof of Theorem 3.1.3.

3.2 Preliminaries

In this section, we recall the properties of dyadic decompositions in the Fourier space and give some elements of the Littlewood-Paley theory. Then, we define the anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{0,s}$, by using dyadic decompositions. We will also state Bernstein inequalities, in the vertical direction as well as in all three directions.

3.2.1 Vertical dyadic decomposition and anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{0,s}$

We first recall the definition of the dyadic localization operators in the Fourier space. Let \mathcal{A}_{r_1, r_2} be the ring

$$\mathcal{A}_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{R} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}.$$

Let ψ be an even smooth function in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ such that the support is contained in the ball $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{4}{3})$ and ψ is equal to 1 on a neighborhood of the ball $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{3}{4})$. Let

$$\varphi(z) = \psi\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(z).$$

Thus, the support of φ is contained in the ring $\mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}} = \{z \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq |z| \leq \frac{8}{3}\}$, and φ is identically equal to 1 on the ring $\mathcal{A}_{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}} = \{z \in \mathbb{R} : \frac{4}{3} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$.

Now, for all $j \in \mathbb{N}$, we set

$$\varphi_j(z) = \varphi\left(\frac{z}{2^j}\right).$$

Thus, the support of φ_j is contained in the ring $2^j \mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}}$, φ_j is identically equal to 1 on the ring $2^j \mathcal{A}_{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}}$ and

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \psi(z) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(z) = 1. \quad (3.2)$$

Moreover, if $|j - j'| \geq 2$, then

$$\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_{j'}) = \emptyset. \quad (3.3)$$

Let \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} be the Fourier transform and the inverse Fourier transform respectively. We will often use the notation $\widehat{u} = \mathcal{F}u$. We introduce the following definitions of the frequency truncation operators.

Definition 3.2.1 *For all tempered distribution u , we set*

$$\begin{aligned} \Delta_q^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi_q(|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)), \quad \forall q \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\psi(|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)), \\ \Delta_q^v u &= 0, \quad \forall q \leq -2, \\ S_q^v u &= \sum_{q' \leq q-1} \Delta_{q'}^v u, \quad \forall q, q \geq 1. \end{aligned}$$

We refer to [10] and [21] for a more detailed construction of the dyadic decomposition. This definition, combined with the equality (3.2), implies that all tempered distributions can be decomposed with respect to the vertical frequencies as

$$u = \sum_{q \geq -1} \Delta_q^v u.$$

We denote \mathcal{F}_v the Fourier transform in the vertical direction. In what follows, we need the following vertical Bernstein inequality (for the proof, see [21], [59] and [83]).

Lemma 3.2.2 (Vertical Bernstein Lemma) *Let $0 < r_1 < r_2$. There exists a positive constant C_0 such that, for any $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ for which the support of $\mathcal{F}_v u$ is contained in the domain $\mathbb{R}_h^2 \times 2^q \mathcal{A}_{r_1, r_2}$, we have :*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \|\partial_3^k u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (3.4)$$

and

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_3}} \leq C_0 2^{q(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq p_3. \quad (3.5)$$

Now, we can rewrite the norm of the anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{0,s}$ in terms of dyadic sums in the vertical frequencies.

Lemma 3.2.3 *Suppose that $u \in \mathbf{H}^{0,s}$ with $s \in \mathbb{R}$, then we have*

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \sim \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

This lemma is deduced from Definition 3.2.1 and the Bernstein inequality (3.4). We also have the following relation between each vertical dyadic block of a function u and its $\mathbf{H}^{0,s}$ -norm.

Lemma 3.2.4 *Suppose that u belongs to $\mathbf{H}^{0,s}$, then there exists a square-summable sequence of positive numbers $\{c_q(u)\}$ with $\sum_q c_q(u)^2 = 1$, such that*

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2} \leq c_q(u) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}.$$

Proof

Let

$$c_q(u) = \frac{2^{qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}}{\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}}.$$

Since $\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \sim \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\{c_q(u)\}_{q \in \mathbb{Z}}$ is square-summable. Lemma 3.2.4 is then proved. ■

Finally, we recall that the spaces $\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})$, where $p \geq 2$ and I is an interval of \mathbb{R}_+ , are the closure of the set of smooth vector-fields under the norms

$$\|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})} = \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

With this definition, it is easy to see that, for any $p \geq 2$, $\tilde{\mathbf{L}}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ is smoother than $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$. From the above definition, we can prove the following lemma which is similar to Lemma 3.2.4.

Lemma 3.2.5 *Suppose that u belongs to $\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})$ where I is an interval of \mathbb{R}_+ , then there exists a square-summable sequence of positive numbers $(c_q(u))$, with $\sum_q c_q(u)^2 = 1$,*

such that

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)} \leq c_q(u) 2^{-qs} \|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})}.$$

3.2.2 A priori estimates

In what follows, we always denote (c_q) (respectively (d_q)) a square-summable (respectively summable) sequence, with $\sum_q c_q^2 = 1$ (respectively $\sum_q d_q = 1$), of positive constants (which can depend on several parameters). We recall that, using the above dyadic decomposition, J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier have proved the following estimates (see [26]).

Lemma 3.2.6 *For any real number $s > \frac{1}{2}$, there exists a constant C such that for any vector fields u and v , where u is divergence free,*

$$\left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| \leq C d_q 2^{-2qs} \left(\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right), \quad (3.7)$$

where $\{d_q\}$ is a summable sequence of positive constants with $\sum_q d_q = 1$.

We also recall the following lemma [see [83], Lemma 3.3].

Lemma 3.2.7 *For any real numbers $m, n, l \geq 1$ such that $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{l}$, there exists a constant $C > 0$ such that, for any functions u, v , we have*

$$\| [\Delta_q^v; u] v \|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^m} \leq C 2^{-q} \|\partial_3 u\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^n} \|v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^l}. \quad (3.8)$$

In the previous subsection, we presented the vertical truncation and the vertical Bernstein inequalities to define the anisotropic Sobolev spaces. In Sections 3.3 and 3.4, we also need to define truncations and an anisotropic Bernstein inequality in all three directions.

Definition 3.2.8 *For $0 < r < R$, we introduce the set*

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{ \xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_h| \geq r, |\xi_3| \geq r, |\xi| \leq R \}.$$

In general, r will be chosen very small and R very large.

Associated with these truncations, we have the following anisotropic Bernstein inequalities.

Lemma 3.2.9 (Anisotropic Bernstein Lemma) *Let $0 < r_1 < r_2$. There exists a positive constant C_0 such that, for any $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ for which the support of $\mathcal{F}u$ is contained in the set $2^q \mathcal{C}_{r_1, r_2}$, we have :*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (3.9)$$

and

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{q_1} \mathbf{L}_v^{q_2}} \leq C_0 2^{q(\frac{2}{p_1} - \frac{2}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1 \leq q_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq q_2. \quad (3.10)$$

3.3 Strichartz-type estimates with viscosity ε^α

The goal of this section is to prove Strichartz-type estimates for the following linear system :

$$(LNSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u} + \frac{\bar{u} \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases}$$

To study this system, we write it in Fourier variables. Applying the Leray projection \mathbb{P} of $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)^3$ onto the subspace of divergence-free vector fields and then the Fourier transformation, we have

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{u} &= -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \widehat{u} - \widehat{\mathbb{P}A\bar{u}} \\ &= \mathbb{B}(\xi, \varepsilon) \widehat{u}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

where

$$\widehat{\mathbb{P}} = \frac{1}{|\xi|^2} \begin{bmatrix} \xi_2^2 + \xi_3^2 & -\xi_1 \xi_2 & -\xi_1 \xi_3 \\ -\xi_1 \xi_2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & -\xi_2 \xi_3 \\ -\xi_1 \xi_3 & -\xi_2 \xi_3 & \xi_1^2 + \xi_2^2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \end{bmatrix}.$$

Classical calculations allow us to obtain the eigenvalues $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ and their corresponding eigenvectors V_0, V_1, V_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \quad \text{and} \quad V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1 &= -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{i\xi_3}{\varepsilon |\xi|} \quad \text{and} \quad V_1 = \frac{1}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}, \\ \lambda_2 &= -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{i\xi_3}{\varepsilon |\xi|} \quad \text{and} \quad V_2 = \frac{1}{|\xi|^2} \begin{pmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ -i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

We remark that V_1 and V_2 are orthogonal. Moreover, for all ξ and ε , V_1 and V_2 (but not V_0) are orthogonal to the vector $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$. Thus, (V_1, V_2) forms a basis of the Fourier subspace of all divergence-free vector fields. As a consequence, we can write the following decomposition

$$\widehat{u}(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} V_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} V_2, \quad (3.12)$$

where

$$C_1 = \langle \widehat{u}_0, V_1 \rangle \quad \text{and} \quad C_2 = \langle \widehat{u}_0, V_2 \rangle.$$

Now, to estimate the norm of \bar{u} , we have to estimate the norm of its Fourier components in the direction of each eigenvector V_i of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$. This leads us to consider the $\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)$ operators, defined as follows,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{\xi_3}{\varepsilon |\xi|})} \widehat{f}(\xi) \right) (x) = \int_{\mathbb{R}_y^3 \times \mathbb{R}_\xi^3} f(y) e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{\xi_3}{\varepsilon |\xi|}) + i(x-y) \cdot \xi} d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{y_h}^2} \mathcal{F}_{\xi_3}^{-1} \left[\int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{\xi_3}{\varepsilon |\xi|}) + i(x_h - y_h) \cdot \xi_h} \mathcal{F}_{x_3}(f)(y_h, \xi_3) d\xi_h \right] dy_h, \end{aligned} \quad (3.13)$$

where f is a tempered distribution.

In what follows, we consider a truncation function

$$\Psi(\xi) = \chi \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_h|}{r} \right) \right] \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_3|}{r} \right) \right], \quad (3.14)$$

where χ is a C^∞ -function from \mathbb{R} to \mathbb{R} such that

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 2. \end{cases}$$

Thus, $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \Psi \subset \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$ and $\Psi \equiv 1$ on $\mathcal{C}_{r, R}$ (see Definition 3.2.8).

The goal of what follows is to give estimates of the operators $\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)$.

Theorem 3.3.1 *Let $r = R^{-\beta}$ with $\beta \geq 1$ and $p \geq 1$. Then for all $f \in (\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3))^3$,*

$$\|\Psi(D)\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f\|_{\mathbf{L}^p((0, +\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_\xi^2)} \leq CR^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (3.15)$$

In order to prove Theorem 3.3.1, we define the kernel function

$$K_\pm(\theta, \tau, z_h, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} \Psi(\xi) e^{\mp i\theta a(\xi) + iz_h \cdot \xi_h - \tau |\xi_h|^2} d\xi_h,$$

where

$$a(\xi) = a(\xi_h, \xi_3) = \frac{\xi_3}{|\xi|}.$$

In what follows, we use the method of the non-stationary phase as in [25] and [26] in order to prove the next lemma. But here, even if we follow the lines of the proofs of [[25], Lemmas 1, 3] and [[26], Lemma 7], we cannot just use their results, since we need to determine more precisely the constants $C_{r, R}$ arising in those lemmas.

Lemma 3.3.2 *Let r, R and β as in Theorem 3.3.1. Then,*

$$\|K_\pm(\theta, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbf{L}_{x_h}^\infty \mathbf{L}_{\xi_3}^\infty} \leq CR^{4+3\beta} \theta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^2\tau}. \quad (3.16)$$

Proof of Lemma 3.3.2 :

Using the invariance by rotation in (ξ_1, ξ_2) , one can suppose that $z_2 = 0$. Setting

$$\gamma(\xi) \equiv -\partial_{\xi_2} a(\xi) = \frac{\xi_2 \xi_3}{|\xi|^3}.$$

If $\xi \in \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$, we obtain the simple estimate

$$\frac{|\xi_2|}{16R^{3+\beta}} \leq |\gamma(\xi)| \leq \frac{1}{|\xi|} \leq 2R^\beta.$$

We next consider the operator

$$\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{1 + \theta\gamma^2} (1 + i\gamma \partial_{\xi_2})$$

which acts on the ξ_2 variable and satisfies $\mathcal{L}(e^{\pm i\theta a}) = e^{\pm i\theta a}$. By integration by parts, we show that

$$K_{\pm}(\theta, \tau, z_h, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} e^{i\theta \frac{\xi_3}{|\xi|} \mp iz_1 \cdot \xi_1} \mathcal{L}^t \left(\Psi(\xi) e^{-\tau |\xi_h|^2} \right) d\xi_h.$$

A simple calculation implies

$${}^t \mathcal{L}(\Psi(\xi) e^{-\tau |\xi_h|^2}) = \left[\frac{1}{1 + \theta\gamma^2} - i(\partial_{\xi_2} \gamma) \frac{1 - \theta\gamma^2}{(1 + \theta\gamma^2)^2} \right] \Psi(\xi) e^{-\tau |\xi_h|^2} - \frac{i\gamma}{1 + \theta\gamma^2} \partial_{\xi_2} \left(e^{-\tau |\xi_h|^2} \Psi(\xi) \right).$$

The fact that

$$\frac{|\xi_2|}{16R^{3+\beta}} \leq |\gamma| \leq 2R^\beta, \quad (3.17)$$

$$|\partial_{\xi_2} \gamma| = \left| \frac{\xi_3 |\xi|^2 - 3\xi_2^2 \xi_3}{|\xi|^5} \right| \leq \frac{4}{|\xi|^2} \leq 16R^{2\beta} \quad (3.18)$$

implies the following estimates.

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + \theta\gamma^2} \Psi(\xi) e^{-\tau |\xi_h|^2} \right| &\leq \frac{C e^{-r^2 \tau}}{1 + \theta \frac{\xi_2^2}{R^{6+2\beta}}} \\ \left| i(\partial_{\xi_2} \gamma) \frac{1 - \theta\gamma^2}{(1 + \theta\gamma^2)^2} \Psi(\xi) e^{-\tau |\xi_h|^2} \right| &\leq \frac{CR^{2\beta} e^{-r^2 \tau}}{1 + \theta \frac{\xi_2^2}{R^{6+2\beta}}}. \end{aligned}$$

Using again (3.17), (3.18) and the fact that

$$|\partial_{\xi_2} \Psi(\xi)| \leq CR^\beta,$$

we deduce that

$$\begin{aligned} \left| \frac{i\gamma}{1 + \theta\gamma^2} \partial_{\xi_2} \left(e^{-\tau |\xi_h|^2} \Psi(\xi) \right) \right| &\leq \left| \frac{i\gamma}{1 + \theta\gamma^2} e^{-\tau |\xi_h|^2} \partial_{\xi_2} \Psi(\xi) \right| \\ &\quad + 2 \left| \frac{i\gamma}{1 + \theta\gamma^2} \Psi(\xi) \frac{1}{|\xi_h|} \left(\tau |\xi_h|^2 e^{-\frac{1}{2}\tau |\xi_h|^2} \right) e^{-\frac{1}{2}\tau |\xi_h|^2} \right| \\ &\leq \frac{CR^{2\beta} e^{-r^2 \tau}}{1 + \theta \frac{\xi_2^2}{R^{6+2\beta}}} + \frac{CR^{2\beta} e^{-\frac{1}{2}r^2 \tau}}{1 + \theta \frac{\xi_2^2}{R^{6+2\beta}}}. \end{aligned}$$

For R large enough and $\beta \geq 1$, we finally obtain the following estimate

$$\left| {}^t\mathcal{L}(\Psi(\xi)e^{-\tau|\xi_h|^2}) \right| \leq \frac{CR^{2\beta}e^{-\frac{1}{2}r^2\tau}}{1 + \theta\frac{\xi_2^2}{R^{6+2\beta}}}.$$

By performing a change of variables and by using the fact that $\text{supp } \Psi \subset \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$ we finally obtain

$$\|K_{\pm}(\theta, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty}\mathbf{L}_{\xi_3}^{\infty}} \leq CR^{4+3\beta}e^{-\frac{1}{2}r^2\tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{d\xi_2}{1 + \theta\xi_2^2},$$

which implies (3.16). \blacksquare

Proof of Theorem 3.3.1 :

Let us come back to the definition of $\mathcal{G}_{\pm}^{\varepsilon}(t)$. By using (3.13), a Hölder inequality in x_3 , the Young inequality in x_h and Lemma 3.3.2 we obtain

$$\begin{aligned} \|\Psi(D)\mathcal{G}_{\pm}^{\varepsilon}(t)f\|_{\mathbf{L}_h^{\infty}\mathbf{L}_v^2} &\leq \left\| \int_{\mathbb{R}_{y_h}^2} \left\| \mathcal{F}_{\xi_3}^{-1} \left(K_{\pm}\left(\frac{t}{\varepsilon}, t\varepsilon^{\alpha}, x_h - y_h, \xi_3\right) \mathcal{F}_{x_3}(f)(y_h, \xi_3) \right) \right\|_{\mathbf{L}_{x_3}^2} dy_h \right\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty}} \\ &\leq \left\| \left\| K_{\pm}\left(\frac{t}{\varepsilon}, t\varepsilon^{\alpha}, \cdot, \cdot\right) \right\|_{\mathbf{L}_{\xi_3}^{\infty}} *_{x_h} \left\| \mathcal{F}_{x_3}(f) \right\|_{\mathbf{L}_{x_3}^2} \right\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty}} \\ &\leq \left\| K_{\pm}\left(\frac{t}{\varepsilon}, t\varepsilon^{\alpha}, \cdot, \cdot\right) \right\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty}\mathbf{L}_{\xi_3}^{\infty}} \|f\|_{\mathbf{L}_{x_h}^1\mathbf{L}_{x_3}^2} \\ &\leq CR^{4+3\beta} \left(\frac{t}{\varepsilon}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^2t\varepsilon^{\alpha}} \|f\|_{\mathbf{L}_h^1\mathbf{L}_v^2}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

To deduce the estimate (3.15) from (3.19), we apply the classical method of duality, called TT^* -method. Let

$$\mathcal{B} = \left\{ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) : \|\varphi\|_{\mathbf{L}^{\infty}((0,+\infty), \mathbf{L}_h^1\mathbf{L}_v^2)} \leq 1 \right\} \tag{3.20}$$

and let $\Phi = \Psi(D)\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\widehat{\varphi}(\xi))$. We have

$$\begin{aligned} \|\Psi(D)\mathcal{G}_{\pm}^{\varepsilon}(t)f\|_{\mathbf{L}^1((0,+\infty), \mathbf{L}_h^{\infty}\mathbf{L}_v^2)} &= \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^+} \langle \Psi(D)\mathcal{G}_{\pm}^{\varepsilon}(t)f, \varphi \rangle dt \\ &= (2\pi)^{-3} \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \int_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_\xi^3} \widehat{f}(t, \xi) \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{\mp \frac{it\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - t\varepsilon^{\alpha}|\xi_h|^2} dt d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-3} \sup_{\varphi \in \mathcal{B}} \|f\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \int_{\mathbb{R}^+} \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{\mp \frac{it\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - t\varepsilon^{\alpha}|\xi_h|^2} dt \right\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Using Plancherel theorem, Hölder inequality and (3.19) we get

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_{\mathbb{R}^+} \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{\mp \frac{it\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - t\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} dt \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}_\xi^3} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{-\frac{it\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - t\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} \overline{\widehat{\Phi}(s, \xi)} e^{\frac{is\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - s\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} dt ds d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}_\xi^3} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \overline{\widehat{\Phi}(s, \xi)} \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{\mp \frac{i(t-s)\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - (t+s)\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} dt ds d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}_x^3} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \left| \varphi(s, x) \mathcal{F}^{-1} \left(\Psi(\xi) \widehat{\varphi}(t, \xi) e^{\mp \frac{i(t-s)\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - (t+s)\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} \right) \right| dt ds dx \\
&\leq \int_{(\mathbb{R}^+)^2} CR^{4+3\beta} \|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty((0,+\infty), \mathbf{L}_h^1 \mathbf{L}_v^2)}^2 \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}{|t-s|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^\alpha \frac{t+s}{R^{2\beta}}} dt ds.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Performing the following change of variables

$$t' = \frac{\varepsilon^\alpha t}{R^{2\beta}} \quad \text{and} \quad s' = \frac{\varepsilon^\alpha s}{R^{2\beta}}$$

in (3.22), and using the fact that $\|\varphi\|_{\mathbf{L}^\infty((0,+\infty), \mathbf{L}_h^1 \mathbf{L}_v^2)} \leq 1$, we deduce from (3.22) that

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^+} \widehat{\Phi}(t, \xi) e^{\mp \frac{it\xi_3}{\varepsilon|\xi|} - t\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2} dt \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq CR^{4+6\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{2}} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}(t'+s')}}{|t' - s'|^{\frac{1}{2}}} dt' ds' \tag{3.23}$$

Combining (3.21) with (3.23), we obtain

$$\begin{aligned}
\|\Psi(D)\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f\|_{\mathbf{L}^1((0,+\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} &\leq C \|f\|_{\mathbf{L}^2} \sqrt{R^{4+6\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{2}} \int_{(\mathbb{R}^+)^2} \frac{e^{-\frac{1}{2}(t'+s')}}{|t' - s'|^{\frac{1}{2}}} dt' ds'} \\
&\leq CR^{2+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|f\|_{\mathbf{L}^2}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Next, using the spectral localization of $\Psi(D)\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f$ and Bernstein inequality we obtain the estimate

$$\|\Psi(D)\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f\|_{\mathbf{L}^\infty((0,+\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.25}$$

Interpolating between the spaces \mathbf{L}_t^1 and \mathbf{L}_t^∞ , we deduce from the inequalities (3.24) and (3.25), that

$$\|\Psi(D)\mathcal{G}_\pm^\varepsilon(t)f\|_{\mathbf{L}^p((0,+\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \quad \blacksquare$$

Theorem 3.3.1 implies the following corollary that gives Strichartz-type estimates which we need for the proof of Theorem 3.1.3.

Corollary 3.3.3 *Let $p \geq 1$. Suppose that the initial data \bar{u}_0 of the system $(LNSC_\varepsilon)$ belong to $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ and that $\mathcal{F}(\bar{u}_0)$ has its support in $\mathcal{C}_{r,R}$ where $r = R^{-\beta}$ with $\beta \geq 1$. Then the (unique, global) solution \bar{u} of $(LNSC_\varepsilon)$ satisfies*

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^p((0,+\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \tag{3.26}$$

Proof

We come back to (3.12). Since V_1 and V_2 are orthogonal, using Theorem 3.3.1 as well as Hölder inequality and Plancherel theorem, we obtain :

$$\begin{aligned} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} &\leq \|\mathcal{F}^{-1}(C_1 e^{\lambda_1 t} V_1)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} + \|\mathcal{F}^{-1}(C_2 e^{\lambda_2 t} V_2)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \\ &\leq CR^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} (\|C_1 V_1\|_{\mathbf{L}^2} + \|C_2 V_2\|_{\mathbf{L}^2}) \\ &\leq C\sqrt{2}R^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|C_1 V_1 + C_2 V_2\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \tilde{C}R^{\frac{1+p+3\beta}{p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Corollary 3.3.3 is then proven. ■

Remark 3.3.4 In the next section, we will use the following particular cases of Corollary 3.3.3,

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{2+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (3.27a)$$

and,

$$\|\bar{u}\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{3+3\beta}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (3.27b)$$

Remark 3.3.5 In order to have a self contained text, we presented in this section a complete proof of Theorem 3.3.1. We can also use the following result of [26] (see [[26], Theorem 5])

$$\|\Delta_j^h \Delta_k^v A_{RF}^\varepsilon f\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3))} \leq C_\nu 2^{j(1-\frac{2}{p})} \min\left(1, (\varepsilon 2^{2j})^{\frac{1}{4p}} 2^{\frac{1}{2p}|j-k|}\right) \|\Delta_j^h \Delta_k^v f\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)},$$

where

$$\mathcal{F}(A_{RF}^\varepsilon f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\frac{t}{\varepsilon} \frac{\xi_3}{|\xi|} - \nu t |\xi_h|^2} \mathcal{F}f(\xi),$$

and where ν denote the horizontal viscosity. By performing a change of time variable $t \mapsto t\varepsilon^\alpha$ and then, by summing all the dyadic blocs contained in the domain $\mathcal{C}_{r,R}$, we can deduce the Strichartz-type estimates obtained in Theorem 3.3.1.

3.4 Proof of the global existence of the solution

We recall that the rotation term $\frac{1}{\varepsilon}u \wedge e_3$ brings no contribution in the energy estimate, so the proof of Theorem 3.1.1 follows the lines of Theorems 1 and 2 of [26] with the viscosity ν replaced by ε^α . The uniqueness can be proved as in [62]. As in [30], we have

Lemma 3.4.1 *The (local, unique) solution u of (NSC_ε) is in fact in $\tilde{\mathbf{L}}^\infty((0, T), \mathbf{H}^{0,s})$ with $\nabla_h u \in \tilde{\mathbf{L}}^2((0, T), \mathbf{H}^{0,s})$.*

3.4.1 Continuity

Before proving the global existence, we prove the continuity of the solution in $\mathbf{H}^{0,s}$. First, we prove that for all q , $\Delta_q^v u(t)$ is continuous in \mathbf{L}^2 . We remark that $\Delta_q^v u(t)$ satisfies the equation

$$\frac{d}{dt} \Delta_q^v u = \varepsilon^\alpha \Delta_h \Delta_q^v u - \Delta_q^v (u \cdot \nabla u) - \frac{1}{\varepsilon} \Delta_q^v u \wedge e_3 + \Delta_q^v \nabla p. \quad (3.28)$$

Taking the inner product of (3.28) with $\Delta_q^v u$ in \mathbf{L}^2 , and using Lemma 3.2.6, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left| \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right| &\leq \varepsilon^\alpha \|\nabla_h \Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \left| \langle \Delta_q^v (u \cdot \nabla u) | \Delta_q^v u \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| \\ &\leq \varepsilon^\alpha \|\Delta_q^v \nabla_h u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + C d_q 2^{-2qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

For each $\varepsilon > 0$, $u \in \widetilde{\mathbf{L}}^\infty((0, T), \mathbf{H}^{0,s})$ with $\nabla_h u \in \widetilde{\mathbf{L}}^2((0, T), \mathbf{H}^{0,s})$ for all $T < T_0^*$ where T_0^* is the maximal time of existence of u . So the right-hand side of (3.29) is locally integrable in time. As a consequence, $\frac{d}{dt} \|\Delta_q^v u(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2$ is locally integrable in time, which means that $\|\Delta_q^v u(t)\|_{\mathbf{L}^2}$ is continuous in \mathbf{L}^2 . We already know that, in the proof of the existence of the solution by the Friedrichs method, u is the weak limit in $\widetilde{\mathbf{L}}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{0,s})$ of a sequence of smooth vector-fields $\{u_n\}$. So it is easy to show that $\Delta_q^v u(t)$ is weakly continuous in $\mathbf{H}^{0,s}$ with respect to the time variable. Combining this with the continuity of the norm, we conclude that $\Delta_q^v u(t)$ is continuous in \mathbf{L}^2 with respect to the time variable.

Since $u \in \widetilde{\mathbf{L}}^\infty((0, T); \mathbf{H}^{0,s})$, for all $0 < T < T_0^*$, then for all $\varepsilon > 0$, there exists $N > 0$ such that

$$\sum_{|q| > N} 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^\infty((0, T), \mathbf{L}^2)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{4}. \quad (3.30)$$

As $\Delta_q^v u$ is continuous in time, there exists $\delta > 0$ such that if $|t - t'| < \delta$ then

$$\sum_{|q| \leq N} 2^{2qs} \|\Delta_q^v (u(t) - u(t'))\|_{\mathbf{L}^\infty((0, T), \mathbf{L}^2)}^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2}. \quad (3.31)$$

Combining (3.30) with (3.31), we obtain that $\|u(t) - u(t')\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \varepsilon$, for all $|t - t'| \leq \delta$, which means that u is continuous.

3.4.2 Decomposition of the initial data

In order to prove Theorem 3.1.3, we first decompose the initial data u_0 of the system (NSC_ε) into two parts

$$u_0 = \bar{u}_0 + v_0$$

where $\bar{u}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi) \widehat{u}_0(\xi))$ and Ψ has been defined in (3.14). We next estimate the $\mathbf{H}^{0,s}$ -norm of v_0 and we prove the following lemma which says that when R goes to infinity, $\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}$ goes to 0.

Lemma 3.4.2 *Let $u_0 \in Y_{s,\eta,p}$ (see Definition 3.1.2) and $\bar{u}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\widehat{u}_0(\xi))$ where Ψ is defined in (3.14). We keep the quantities r, R and β as given in Theorem 3.3.1 and we set $\eta_0 = \min\left\{\beta\frac{2-p}{2p}, \eta\right\}$. Then there exists a positive constant C such that*

$$\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C_0 R^{-\eta_0} \quad \text{with} \quad C_0 = C \|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}}. \quad (3.32)$$

Proof

We have

$$\begin{aligned} \|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_h d\xi_3 + \int_{|\xi_h| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_3 d\xi_h \\ &\quad + \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (3.33)$$

In what follows, we will always set $r = R^{-\beta}$ with $\beta \geq 1$ and R large enough. We also recall that \mathcal{F}_h (\mathcal{F}_v) is the horizontal (vertical) Fourier transform. Let q, p' be positive numbers such that $q = \frac{p}{p-1}$, $q' = \frac{q}{2}$ and $p' = \frac{p}{2-p}$. Thus $1 \leq p < 2 < q$ and p, q, p', q' satisfy

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad \text{and} \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1.$$

First, we write

$$\int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_h d\xi_3 \leq \int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} |\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})|^2 d\xi_h d\xi_3.$$

Using Plancherel theorem in the horizontal direction and Fubini theorem, we get

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} |\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})|^2 d\xi_h d\xi_3 &= \int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} |\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}}|^2 dx_h d\xi_3 \\ &= \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \int_{|\xi_3| \leq r} |\mathcal{F}_v(u_0)|^2 (1 + |\xi_3|^2)^s d\xi_3 dx_h. \end{aligned}$$

As r is supposed to be small, $|\xi_3|^2$ is negligible compared to 1. Then, Hölder inequality in the vertical direction implies

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \int_{|\xi_3| \leq r} |\mathcal{F}_v(u_0)|^2 (1 + |\xi_3|^2)^s d\xi_3 dx_h \\ &\leq \left(\int_{|\xi_3| \leq r} (1 + |\xi_3|^2)^{p's} d\xi_3 \right)^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} |\mathcal{F}_v(u_0)|^{2q'} d\xi_3 \right)^{\frac{1}{q'}} dx_h \\ &\leq Cr^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} |\mathcal{F}_v(u_0)|^q d\xi_3 \right)^{\frac{2}{q}} dx_h. \end{aligned}$$

Using Hausdorff-Young inequality in the vertical direction, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ and $p < 2 < q$, we obtain

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_3| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_h d\xi_3 &\leq Cr^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} |\mathcal{F}_v(u_0)|^q d\xi_3 \right)^{\frac{2}{q}} dx_h \\ &\leq Cr^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{x_h}^2} \left(\int_{\mathbb{R}_{x_3}} |u_0|^p dx_3 \right)^{\frac{2}{p}} dx_h \\ &= Cr^{\frac{1}{p'}} \|u_0\|_{\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p}^2. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Next, using Fubini theorem and Hölder inequality, we get

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_h| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_3 d\xi_h &= \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} \int_{|\xi_h| \leq r} |\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})|^2 d\xi_h d\xi_3 \\ &\leq \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} \left| \int_{|\xi_h| \leq r} d\xi_h \right|^{\frac{1}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} |\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})|^{q'} \left| d\xi_h \right|^{\frac{1}{q'}} d\xi_3 \\ &\leq Cr^{\frac{2}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} \|\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})\|_{\mathbf{L}_{\xi_h}^q}^2 d\xi_3. \end{aligned}$$

Hausdorff-Young inequality in the horizontal, with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ and $p < 2 < q$, implies

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_h| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_3 d\xi_h &\leq Cr^{\frac{2}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} \|\mathcal{F}_h(\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}})\|_{\mathbf{L}_{\xi_h}^q}^2 d\xi_3 \\ &\leq Cr^{\frac{2}{p'}} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} \|\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}}\|_{\mathbf{L}_h^p}^2 d\xi_3 \\ &= Cr^{\frac{2}{p'}} \left\| \|\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}}\|_{\mathbf{L}_h^p} \right\|_{\mathbf{L}_{\xi_3}^2}^2. \end{aligned}$$

Then, the fact that $1 \leq p < 2$ and Inequality (3.1) imply

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_h| \leq r} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi_3 d\xi_h &\leq Cr^{\frac{2}{p'}} \left\| \|\mathcal{F}_v(u_0)(1 + |\xi_3|^2)^{\frac{s}{2}}\|_{\mathbf{L}_{\xi_3}^2} \right\|_{\mathbf{L}_h^p}^2 \\ &= Cr^{\frac{2}{p'}} \|u_0\|_{\mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s}^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Now, as $u_0 \in \mathbf{H}^{\eta, s+\eta}$, we have

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi &\leq C \int_{|\xi| \geq R} (1 + |\xi|^2)^{-\eta} (1 + |\xi_h|^2)^\eta (1 + |\xi_3|^2)^{s+\eta} |\widehat{u}_0|^2 d\xi \\ &\leq CR^{-2\eta} \|u_0\|_{\mathbf{H}^{\eta, s+\eta}}^2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Let $\eta_0 = \min \left\{ \beta \frac{2-p}{2p}, \eta \right\}$. Using the fact that $r = R^{-\beta}$ and summing the inequalities (3.34), (3.35) and (3.36), we finally obtain

$$\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C_0 R^{-\eta_0},$$

where $C_0 = C \|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}}$. ■

Remark 3.4.3 As we already mentioned in Section 3.1, there are other choices of $Y_{s,\eta,p}$ which can simplify the proof of Lemma 3.4.2. For example, we could consider the spaces $\dot{\mathbf{H}}_h^{-\sigma} \mathbf{H}_v^s$ and $\mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\sigma}$, defined by

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_h|^{-2\sigma} (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}_0|^2 d\xi < +\infty,$$

and

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_3|^{-2\sigma} |\widehat{u}_0|^2 d\xi < +\infty,$$

where $\sigma > 0$. However, it is less convenient to work in these spaces with negative index.

So, if $u_0 \in \mathbf{H}^{0,s} \cap \dot{\mathbf{H}}_h^{-\sigma} \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\sigma} \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s}$, if $\bar{u}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\widehat{u}_0(\xi))$ and $v_0 = u_0 - \bar{u}_0$, we also have

$$\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C_0 R^{-\eta_0},$$

where $C_0 = C \|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,s} \cap \dot{\mathbf{H}}_h^{-\sigma} \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\sigma} \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s}}$, and η_0 depends on s, σ and η . In order to prove this inequality, one also has to estimate the three terms as in Lemma 3.4.2. The details are left for the reader.

3.4.3 Additional energy estimates

In this section, we prove additional energy estimates which will play an important role in the proof of Theorem 3.1.3.

Lemma 3.4.4 *Let \bar{u} be the solution of $(LNSC_\varepsilon)$. There exists a constant C , which depends on \bar{u}_0 , such that, for any tempered distributions v, w , we have*

$$\int_0^T |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| dt \leq C d_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty((0,T);\mathbf{H}^{0,s})} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty((0,T);\mathbf{H}^{0,s})}. \quad (3.37)$$

Proof

By using the Bony decomposition into paraproducts and remainders in the vertical variable (see for example [21], [84] for more details), we have

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_q^v(w^i \cdot \partial_i \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| &\leq \left| \langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v(\partial_i \bar{u}) \Delta_{q'}^v w^i | \Delta_q^v v \rangle \right| \\ &+ \left| \langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v w^i \partial_i \Delta_{q'}^v \bar{u} | \Delta_q^v v \rangle \right|. \end{aligned}$$

We recall that $\|S_q^v u\|_{\mathbf{L}^\infty} \leq C \|u\|_{\mathbf{L}^\infty}$, for any $q \in \mathbb{N}$ and for any tempered distribution u . So, Cauchy-Schwarz inequality, Lemma 3.2.5 and Bernstein inequalities (3.9), (3.10) imply that

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left| \langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v(\partial_i \bar{u}) \Delta_{q'}^v w^i | \Delta_q^v v \rangle \right| dt \\ &\leq \sum_{q' \geq q-N_0} \|S_{q'+2}^v(\partial_i \bar{u})\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}^\infty)} \|\Delta_{q'}^v w^i\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \\ &\leq C 2^{-2qs} R^{\frac{3}{2}} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} c_q(v) \sum_{q' \geq q-N_0} c_{q'}(w) 2^{(q-q')s}. \end{aligned}$$

We remark that $\left\{c_q(v) \sum_{q' \geq q-N_0} c_{q'}(w) 2^{(q-q')s}\right\}_q$ is a summable sequence. Then, by using Inequality (3.27a), we have

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v (\partial_i \bar{u}) \Delta_{q'}^v w^i | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\ \leq C d_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Similar estimates and the fact that $\|S_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^\infty} \leq C \|u\|_{\mathbf{H}^s}$, for any $q \in \mathbb{N}$, for any $s > \frac{1}{2}$ and for any tempered distribution u , imply that

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v w^i \partial_i \Delta_{q'}^v \bar{u} | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\ \leq \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v w^i\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^\infty)} \|\partial_i \Delta_{q'}^v \bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \\ \leq C R^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} c_q(v) 2^{-qs} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|\Delta_{q'}^v \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \\ \leq C R^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} 2^{-2qs} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \left[c_q(v) \sum_{|q'-q| \leq N_0} c_{q'}(\bar{u}_0) 2^{(q-q')s} \right] \\ \leq C d_q 2^{-2qs} R^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|w\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Summing the inequalities (3.38) and (3.39), we obtain (3.37). \blacksquare

Lemma 3.4.5 *Let \bar{u} be the solution of $(LN\text{SC}_\varepsilon)$. For any tempered distribution v , we have*

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \leq d_q 2^{-2qs} \left[C R^{4+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right. \\ \left. + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + C R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Proof

First, we have

$$\left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| \leq \left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u}^h \cdot \nabla_h v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| + \left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u}^3 \cdot \partial_3 v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right|.$$

Using a decomposition into paraproducts and remainders, we obtain

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u}^h \cdot \nabla_h v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| &\leq \sum_{i=1,2} \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v (\partial_i v) \Delta_{q'}^v \bar{u}^i | \Delta_q^v v \right\rangle \right| \\ &+ \sum_{i=1,2} \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v \bar{u}^i \partial_i \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right|. \end{aligned} \quad (3.41)$$

The same calculations as in the proof of Lemma 3.4.4 (the only difference is that we use Inequality (3.27b) instead of (3.27a)) give

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^T \sum_{i=1,2} \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v (\partial_i v) \Delta_{q'}^v \bar{u}^i | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\
& \leq 2 \sum_{q' \geq q-N_0} \|S_{q'+2}^v (\nabla_h v)\|_{\mathbf{L}_T^2(\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^\infty)} \|\Delta_{q'}^v \bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^2(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \\
& \leq C c_q(v) 2^{-qs} R^{\frac{3+3\beta}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \sum_{q' \geq q-N_0} \|\Delta_{q'}^v \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \\
& \leq CR^{\frac{3+3\beta}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} 2^{-2qs} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \left[c_q(v) \sum_{|q'-q| \leq N_0} c_{q'}(\bar{u}_0) 2^{(q-q')s} \right] \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[CR^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \right],
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^T \sum_{i=1,2} \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v \bar{u}^i \Delta_{q'}^v (\partial_i v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\
& \leq 2 \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v(\bar{u})\|_{\mathbf{L}_T^2(\mathbf{L}^\infty)} \|\Delta_{q'}^v \nabla_h v\|_{\mathbf{L}_T^2(\mathbf{L}^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \\
& \leq CR^{\frac{1}{2}} 2^{-2qs} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^2(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} c_q(v) \sum_{q' \geq q-N_0} c_{q'}(\nabla_h v) 2^{(q-q')s} \\
& \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{\frac{4+3\beta}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[CR^{4+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \right].
\end{aligned}$$

So summing these two inequalities, we get

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^T \left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u}^h \cdot \nabla_h v) | \Delta_q^v v \right\rangle_{\mathbf{L}^2} \right| dt \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[CR^{4+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \right]. \quad (3.42)
\end{aligned}$$

To estimate the last term on the right-hand side of (3.41), we use again the Bony decomposition into paraproducts and remainders as follows. First, we have

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \Delta_q^v (\bar{u}^3 \cdot \partial_3 v) | \Delta_q^v v \right\rangle \right| & \leq \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v (\partial_3 v) \Delta_{q'}^v \bar{u}^3 | \Delta_q^v v \right\rangle \right| \\
& + \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v (\bar{u}^3) \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right|. \quad (3.43)
\end{aligned}$$

Using the estimations given in the proof of Lemma 3.4.4 and the Bernstein inequalities (3.4), (3.5), we can write

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^T \left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v (\partial_3 v) \Delta_{q'}^v \bar{u}^3 | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\
& \leq \sum_{q' \geq q-N_0} \|S_{q'+2}^v (\partial_3 v)\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^\infty)} \|\Delta_{q'}^v \bar{u}^3\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^2)} \\
& \leq C \sum_{q' \geq q-N_0} \|S_{q'+2}^v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^\infty)} \|\Delta_{q'}^v \partial_3 \bar{u}^3\|_{\mathbf{L}^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbf{L}^2)} \\
& \leq CR^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} c_q(v) 2^{-qs} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \sum_{q' \geq q-N_0} \|\Delta_{q'}^v \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \\
& \leq CR^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} 2^{-2qs} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 c_q(v) \sum_{q' \geq q-N_0} c_{q'}(\bar{u}_0) 2^{(q-q')s} \\
& \leq CR^{3+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} d_q 2^{-2qs} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

Next we decompose the second term on the right-hand side of (3.43) into three parts as in [26]. We get

$$\begin{aligned}
\left| \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v (\bar{u}^3) \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| & \leq \left| \left\langle S_q^v (\bar{u}^3) \partial_3 \Delta_q^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| \\
& + \sum_{|q'-q| \leq N_0} \left| \left\langle [\Delta_q^v, S_{q'-1}^v \bar{u}^3] \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| \\
& + \sum_{|q'-q| \leq N_0} \left| \left\langle (S_q^v - S_{q'-1}^v) \bar{u}^3 \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right|. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

Integrating by parts and then using Cauchy-Schwarz inequality, the free-divergence property of \bar{u} and the spectral localization of \bar{u} as well as Inequality (3.27a), we obtain

$$\begin{aligned}
2 \int_0^T \left| \left\langle S_q^v (\bar{u}^3) \partial_3 \Delta_q^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt & = \frac{1}{2} \int_0^T \left| \left\langle S_q^v (\partial_3 \bar{u}^3) \Delta_q^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \\
& \leq \frac{1}{2} \|S_q^v (\partial_3 \bar{u}^3)\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}^\infty)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)}^2 \\
& \leq CR^{\frac{3}{2}} (c_q(v))^2 2^{-2qs} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\
& \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2. \tag{3.46}
\end{aligned}$$

Similar estimates give

$$2 \int_0^T \sum_{|q'-q| \leq N_0} \left| \left\langle (S_q^v - S_{q'-1}^v) \bar{u}^3 \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \right\rangle \right| dt \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2. \tag{3.47}$$

It remains to estimate the second term on the right-hand side of (3.45). Using Inequality (3.8) of Lemma 3.2.7 with $m = l = 2, n = \infty$, we can write

$$\begin{aligned}
 & 2 \int_0^T \sum_{|q'-q| \leq N_0} |\langle [\Delta_q^v, S_{q'-1}^v \bar{u}^3] \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v v \rangle| dt \\
 & \leq C \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v \partial_3 \bar{u}^3\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}^\infty)} \|\Delta_{q'}^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_T^\infty(\mathbf{L}^2)} \\
 & \leq CR^{\frac{3}{2}} \|\bar{u}\|_{\mathbf{L}_T^1(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})}^2 c_q(v) \sum_{|q'-q| \leq N_0} c_{q'}(v) \\
 & \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})}^2. \tag{3.48}
 \end{aligned}$$

Now, summing (3.42), (3.44), (3.46), (3.47) and (3.48), we finally obtain (3.40). \blacksquare

3.4.4 Proof of Theorem 3.1.3

According to Theorem 3.1.1 and Lemma 3.4.1, the system (NSC_ε) admits a unique local solution

$$u \in \tilde{\mathbf{L}}^\infty((0, T), \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{with} \quad \nabla_h u \in \tilde{\mathbf{L}}^2((0, T), \mathbf{H}^{0,s}).$$

As in Subsection 3.4.2, we decompose the initial data u_0 into the sum $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$ where $\bar{u}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi) \widehat{u}_0(\xi))$, which implies that $u = \bar{u} + v$, where \bar{u} is the solution of the linear system $(LNSC_\varepsilon)$ with initial data \bar{u}_0

$$(LNSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u} + \frac{\bar{u} \wedge e_3}{\varepsilon} = 0 \\ \operatorname{div} \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases}$$

and v is the solution of the following system

$$(NNSC_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v - \varepsilon^\alpha \Delta_h v + v \cdot \nabla v + \bar{u} \cdot \nabla v + v \cdot \nabla \bar{u} + \frac{v \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p - \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \\ \operatorname{div} v = 0 \\ v|_{t=0} = v_0. \end{cases}$$

So if we can prove that, for $\varepsilon > 0$ small enough, the solution v of this system is global then we can conclude that u is global. To do that, we will use the energy and the Strichartz-type estimates that we have proved in the previous section.

Applying the operators Δ_q^v to the first equation of $(NNSC_\varepsilon)$ and taking the \mathbf{L}^2 -inner product of the obtained inequality with $\Delta_q^v v$, we obtain

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \varepsilon^\alpha \|\Delta_q^v \nabla_h v\|_{\mathbf{L}^2}^2 & \leq |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| + |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| + |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle|. \tag{3.49}
 \end{aligned}$$

Integrating (3.49) in the time variable, we get for all $0 < T < T_0^*$,

$$\begin{aligned} \|\Delta_q^v v(T)\|_{\mathbf{L}^2}^2 &+ 2\varepsilon^\alpha \int_0^T \|\Delta_q^v \nabla_h v\|_{\mathbf{L}^2}^2 dt - \|\Delta_q^v v(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq 2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| dt + 2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| dt \\ &+ 2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| dt + 2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| dt \end{aligned}$$

Applying the estimate (3.7) of Lemma 3.2.6 we have

$$\left| \langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| \leq C d_q 2^{-2qs} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2,$$

and thus,

$$2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| dt \leq \tilde{C} d_q 2^{-2qs} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2. \quad (3.50)$$

Lemma 3.4.4 implies the following estimate

$$2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (v \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| dt \leq C d_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2. \quad (3.51)$$

Since $\|\bar{u}\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}$ is bounded by $\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}$, Lemma 3.4.4 also implies

$$\begin{aligned} 2 \int_0^T |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v v \rangle| dt &\leq C d_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|\bar{u}\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \\ &\leq \tilde{C} d_q 2^{-2qs} R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \left(1 + \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2\right). \end{aligned} \quad (3.52)$$

Lemma 3.4.5 gives

$$\begin{aligned} \int_0^T |\langle \Delta_q^v (\bar{u} \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| dt &\leq d_q 2^{-2qs} \left[C R^{4+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + C R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Summing all the inequalities (3.50), (3.51), (3.52) and (3.53), then multiplying the obtained inequality by 2^{2qs} and summing with respect to q , for all $0 < T < T_0^*$, we get

$$\begin{aligned} \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 &\leq \|v(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\ &\quad + M(\varepsilon) \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T];\mathbf{H}^{0,s})}^2 + C R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \end{aligned}$$

where

$$M(\varepsilon) = C R^{\frac{7}{2}+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} + C R^{4+3\beta} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}}.$$

Now we choose

$$R = (8CC_0)^{\frac{1}{\eta_0}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\eta_0}}. \quad (3.54)$$

So this choice implies that

$$\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{8C}. \quad (3.55)$$

Using (3.54), we get the estimate

$$M(\varepsilon) \leq C\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}\left(3+\frac{14+12\beta}{\eta_0}\right) + C\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}\left(7+\frac{16+12\beta}{\eta_0}\right).$$

So, if

$$\left(3 + \frac{14 + 12\beta}{\eta_0}\right) \alpha < 1 \quad \text{and} \quad \left(7 + \frac{16 + 12\beta}{\eta_0}\right) \alpha < 1,$$

then there exists $\varepsilon_1 > 0$ such that for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, $M(\varepsilon) < \frac{1}{2}$.

Next, let $T_\varepsilon^* = \sup \left\{ T > 0 : \|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t];\mathbf{H}^{0,s})} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}, \forall t < T \right\}$. Since v is continuous in the time variable, (3.55) implies that $T_\varepsilon^* > 0$. Using (3.54), (3.55) and the fact that $M(\varepsilon) < \frac{1}{2}$, for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, we obtain

$$\|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T_\varepsilon^*],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{32C^2} + 2C\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}\left(3+\frac{14+12\beta}{\eta_0}\right). \quad (3.56)$$

Now, if

$$2\alpha \leq \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4} \left(3 + \frac{14 + 12\beta}{\eta_0}\right),$$

then there exists $\varepsilon_2 > 0$ such that for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, we have

$$2C\varepsilon^{\frac{1}{4}-\frac{\alpha}{4}}\left(3+\frac{14+12\beta}{\eta_0}\right) \leq \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{32C^2}.$$

Choosing $\varepsilon_0 = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, then (3.56) implies that for any $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, we have

$$\|v\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T_\varepsilon^*],\mathbf{H}^{0,s})} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{4C} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C},$$

which means that $T_\varepsilon^* = +\infty$.

Remark

The hypotheses $r = R^{-\beta}$ with $\beta \geq 1$ and $1 \leq p < 2$ imply

$$0 < \eta_0 = \min \left\{ \beta \frac{2-p}{2p}, \eta \right\} \leq \frac{\beta}{2}.$$

Thus, we obtain a bound for α_0

$$\alpha_0 < \min \left\{ \frac{1}{7 + \frac{16+12\beta}{\eta_0}}; \frac{1}{11 + \frac{14+12\beta}{\eta_0}} \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{31 + \frac{32}{\beta}}; \frac{1}{35 + \frac{28}{\beta}} \right\}.$$

II. Fluides anisotropes avec viscosité petite et avec amortissement en rotation rapide

3.5 Introduction

Dans cette partie, nous nous intéressons au système des fluides anisotropes avec amortissement en rotation rapide dans le cas où la viscosité verticale ν_v est nulle, la viscosité horizontale ν_h tend lentement vers 0 avec ε ,

$$(NSC_{\varepsilon,\gamma}) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \nu_h \Delta_h u^\varepsilon + \gamma u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

et dans le cas où la donnée initiale est mal préparée, c'est-à-dire $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, où

$$\bar{u}_0 = (\bar{u}_0^1(x_1, x_2), \bar{u}_0^2(x_1, x_2), \bar{u}_0^3(x_1, x_2)) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$$

et

$$v_0 = (v_0^1(x_1, x_2, x_3), v_0^2(x_1, x_2, x_3), v_0^3(x_1, x_2, x_3)) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3).$$

Le paramètre $\gamma > 0$ représente le coefficient de friction de Rayleigh. Remarquons que nous utilisons l'espace "en gras" \mathbf{L}^2 pour désigner l'espace des champs de vecteurs dont toutes les trois composantes appartiennent à L^2 .

Rappelons d'abord que, dans le cas où γ est nul et ν_h est fixé, Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier [26] ont montré que, quand le nombre de Rossby ε est assez petit, la solution $u^\varepsilon(t)$ existe globalement et reste proche de la solution du système limite de type Navier-Stokes suivant

$$(NS2D3C) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \nu_h \Delta_h \bar{u} + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \bar{u} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0 \\ \partial_3 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases}$$

Le cas où γ est nul et où ν_h tend vers 0 quand ε tend vers 0, est plus difficile dans le sens où le système limite est de type Euler bidimensionnel avec trois composantes :

$$(E2D3C) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \bar{u} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0 \\ \partial_3 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique, globale en temps dans $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, avec $\sigma > 2$. Alors, comme dans la partie précédente, on peut faire une décomposition qui consiste à découper le système en une partie 2D et une partie 3D dissipative (donc petite) et un reste. Le problème est que dans les estimations d'énergie, nous allons avoir besoin de contrôler la norme $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$ de la partie 2D, pour laquelle, malheureusement, on ne connaît que des

estimations contenant une double exponentielle en temps si \bar{u}_0 n'est pas nulle. Nous ne pouvons donc pas avoir de "bonnes estimations" d'énergie et utiliser un argument de type "bootstrap" avec le lemme de Gronwall pour déduire l'existence globale de la solution $u^\varepsilon(t)$.

Quand $\gamma = 0$ et le système limite est nul (la donnée initiale est de type 3D, c'est-à-dire $\bar{u}_0 = 0$), dans la partie précédente, nous avons montré que, si la viscosité est lentement évanescente quand ε tend vers 0, à savoir $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ avec $\alpha > 0$ assez petit, la solution $u^\varepsilon(t)$ existe globalement en temps lorsque ε est assez petit et converge vers la solution du système limite, c'est-à-dire tend vers 0 quand ε tend vers 0.

Remarquons maintenant que dans le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma})$, si $\gamma > 0$, le terme γu^ε est une dissipation faible, ce qui nous permet de traiter le cas plus général où la donnée initiale est de type 2D + 3D (c'est-à-dire $\bar{u}_0 \neq 0$) et où ν_h tend vers 0 quand ε tend vers 0. On insiste sur le fait que la viscosité horizontale ne peut ni être nulle ni tendre vers 0 trop rapidement.

Dans le cas où la viscosité horizontale n'est pas nulle et tend vers 0, le système limite est le système d'Euler dissipatif bidimensionnel avec trois composantes :

$$(Ed2D) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \gamma \bar{u} + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \bar{u} = -\nabla \bar{p} \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0 \\ \partial_3 \bar{u} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases}$$

Remarquons qu'il y a une difficulté due à la présence de la composante verticale de la partie 2D. En passant au tourbillon, on gagne un contrôle supplémentaire sur le gradient horizontal de la composante horizontale (qui évolue selon une équation d'Euler dissipative en dimension deux), ce qui n'est pas le cas pour la composante verticale, qui évolue selon une équation de transport.

On peut se demander que, si dans le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma})$ toutes les viscosités sont nulles, peut-on obtenir l'existence globale de solutions seulement avec la dissipation due au terme γu^ε ? La réponse pour cette question est ouverte. En effet, la viscosité horizontale positive (même si elle tend vers 0) nous donne un effet régularisant qui permet de contrôler le terme non-linéaire $u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon$ avec des estimations dans des espaces anisotropes. Si toutes les viscosités sont nulles, le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma})$ devient un système d'Euler dissipatif en rotation rapide. Ce système admet toujours $(Ed2D)$ comme système limite. Pourtant, dans nos estimations, nous devons estimer la solution de $(Ed2D)$ en norme $\mathbf{H}^{2+\eta}(\mathbb{R}_h^2)$ avec $\eta > 0$. Or, pour cette solution, nous ne disposons que d'estimations en norme $\mathbf{H}^{2+\eta}$ contenant une double exponentielle en temps, ce qui ne nous permet pas d'utiliser le lemme de Gronwall pour déduire l'existence globale du système d'Euler dissipatif en rotation rapide.

Le plan de cette partie est le suivant. Dans le paragraphe 3.6, nous démontrons des estimations concernant la solution du système limite $(Ed2D)$. Dans le paragraphe 3.7, nous étudions le cas où la viscosité horizontale est de taille ε^α avec α assez petit. Nous allons montrer que la difficulté concernant la troisième composante de la solution limite, mentionnée ci-dessus nous oblige à supposer que la troisième composante de la partie 2D de la donnée initiale est nulle afin que la composante verticale de la solution du système

limite reste nulle pour tout temps t . Dans le cas général où cette troisième composante est non-nulle, nous devons supposer que la viscosité horizontale tend vers 0 encore plus lentement, à savoir comme $-\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$. Ceci fait l'objet du paragraphe 3.8.

3.6 Estimations pour le système limite $2D$

Dans ce paragraphe, nous démontrons des résultats auxiliaires très utiles concernant le système limite ($Ed2D$). Pour tout champ de vecteurs $\bar{u} = (\bar{u}^1, \bar{u}^2, \bar{u}^3)$, notons Ω le tourbillon horizontal associé à \bar{u} ,

$$\Omega = \partial_2 \bar{u}_1 - \partial_1 \bar{u}_2.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.6.1 *Soit $\bar{u}_0 = (\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2, \bar{u}_0^3) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ un champ de vecteurs bidimensionnel (indépendant de la troisième variable) de divergence nulle, tel que le tourbillon horizontal*

$$\Omega_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in L^2(\mathbb{R}_h^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_h^2).$$

Alors, le système ($Ed2D$) admet une unique solution globale $\bar{u} \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2))$. De plus,

(i) Pour tout $p \geq 2$, il existe une constante C telle que, pour tout $t > 0$,

$$\|\nabla_h \bar{u}^h(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)} \leq CMp e^{-\gamma t}, \quad (3.57)$$

$$\|\bar{u}^h(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \leq \|\bar{u}_0^h\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} e^{-\gamma t} \leq M e^{-\gamma t}, \quad (3.58)$$

$$\|\bar{u}^h(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)} \leq CM e^{-\gamma t}, \quad (3.59)$$

où

$$M = \max \left\{ \|\bar{u}_0^h\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)}, \|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)}, \|\Omega_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_h^2)} \right\}.$$

(ii) Pour tout $p \geq 2$, si $\bar{u}^3(0) \in \mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)$, alors,

$$\|\bar{u}^3(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)} \leq \|\bar{u}^3(0)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)} e^{-\gamma t}. \quad (3.60)$$

(iii) Si $\bar{u}_0^h \in \mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, $\sigma > 2$, alors $\bar{u}^h \in \mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2))$.

Preuve du lemme 3.6.1

1. Rappelons que l'existence et l'unicité de \bar{u} est classique. Pour cela, nous renvoyons à Yudovitch [96]. Nous remarquons que, pour le système ($Ed2D$), les deux premières composantes de \bar{u} vérifient une équation d'Euler bidimensionnelle et la troisième composante vérifie une équation linéaire. Maintenant, on considère l'équation vérifiée par Ω :

$$\begin{cases} \partial_t \Omega + \gamma \Omega + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \Omega = 0 \\ \Omega(0) = \Omega_0. \end{cases} \quad (3.61)$$

En prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}_h^2)$ de la première équation de (3.61) avec $|\Omega|^{p-2} \Omega$, on obtient

$$\frac{1}{p} \frac{d}{dt} \|\Omega\|_{L^p}^p + \gamma \|\Omega\|_{L^p}^p = 0.$$

Puisque que $L^p(\mathbb{R}_h^2)$ est un interpolé entre $L^2(\mathbb{R}_h^2)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_h^2)$, on déduit de l'inégalité précédente que

$$\|\Omega(t)\|_{L^p} \leq \|\Omega_0\|_{L^p} e^{-\gamma t} \leq C \|\Omega_0\|_{L^2}^{\frac{2}{p}} \|\Omega_0\|_{L^\infty}^{1-\frac{2}{p}} e^{-\gamma t} \leq CM e^{-\gamma t}.$$

Comme $\nabla_h \bar{u}^h = R \Omega$ où R est un opérateur de type Caldéron-Zygmund homogène d'ordre 0, on en déduit que

$$\|\nabla_h \bar{u}^h(t)\|_{\mathbf{L}^p} \leq Cp \|\Omega(t)\|_{L^p} \leq CMp e^{-\gamma t},$$

d'où l'inégalité (3.57). Remarquons que dans le cas où $p = 2$, nous avons tout simplement

$$\|\nabla_h \bar{u}^h(t)\|_{\mathbf{L}^2} = \|\Omega(t)\|_{L^2} \leq \|\Omega_0\|_{L^2} e^{-\gamma t}.$$

2. L'inégalité (3.58) se déduit simplement de l'estimation d'énergie classique.

3. Nous remarquons que $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}_h^2) \hookrightarrow \mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2)$ et que $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}_h^2)$ est un interpolé entre $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ et $\dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}_h^2)$. L'inégalité (3.59) est donc une conséquence de (3.57) et (3.58).

4. Nous remarquons que \bar{u}^3 vérifie l'équation de transport

$$\partial_t \bar{u}^3 + \gamma \bar{u}^3 + \bar{u}^h \cdot \nabla_h \bar{u}^3 = 0.$$

Donc, les estimations classiques en norme \mathbf{L}^p impliquent l'inégalité (3.60).

5. Cette propriété est classique et typique pour les équations d'Euler bidimensionnelles. Une démonstration détaillée peut être trouvée par exemple dans [64], [74], [21] ou [73].

Dans ce paragraphe, nous considérons également le système suivant

$$(NSd2D) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u}^\varepsilon - \nu_h \Delta_h \bar{u}^\varepsilon + \gamma \bar{u}^\varepsilon + \bar{u}^{\varepsilon,h} \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon = -\nabla \bar{p}^\varepsilon \\ \operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon = 0 \\ \partial_3 \bar{u}^\varepsilon = 0 \\ \bar{u}^\varepsilon|_{t=0} = \bar{u}_0. \end{cases}$$

Nous remarquons que, comme $(NSd2D)$ est un système de Navier-Stokes dissipatif bidimensionnel avec trois composantes, le théorème de Fujita-Kato implique que, pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$, le système $(NSd2D)$ admet une unique solution globale $\bar{u}^\varepsilon \in \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)) \cap \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}_h^2))$.

Remarque 3.6.2 Les estimations du lemme 3.6.1 restent inchangées si nous remplaçons la solution \bar{u} de $(Ed2D)$ par la solution \bar{u}^ε de $(NSd2D)$.

Maintenant, nous démontrons la convergence de la solution \bar{u}^ε du système $(NSd2D)$ vers la solution \bar{u} du système $(Ed2D)$ quand ε tend vers 0. Il s'agit du lemme suivant :

Lemme 3.6.3 *Supposons que $\nu_h = \nu_h(\varepsilon)$ tende vers 0 quand ε tend vers 0 et que \bar{u}_0 appartient à $\mathbf{H}^s(\mathbb{R}_h^2)$, $s > 2$. Alors, \bar{u}^ε converge vers \bar{u} dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2))$, quand ε tend vers 0.*

Preuve du lemme 3.6.3

Pour tout $t > 0$, nous avons $\|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \leq Me^{-\gamma t}$ et $\|\bar{u}^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \leq Me^{-\gamma t}$. Fixons $\mu > 0$. Alors, il existe un temps $T_\mu > 0$ tel que si $t \geq T_\mu$,

$$\|\bar{u}^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} + \|\bar{u}(t)\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \leq \mu.$$

Comparons maintenant \bar{u}^ε et \bar{u} sur l'intervalle de temps $[0, T_\mu]$. Soit $w^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon - \bar{u}$. Alors w^ε est solution du système

$$\begin{cases} \partial_t w^\varepsilon - \nu_h \Delta_h w^\varepsilon + \gamma w^\varepsilon + \bar{u}^{\varepsilon, h} \cdot \nabla_h w^\varepsilon + w^{\varepsilon, h} \cdot \nabla_h \bar{u} = \nabla \tilde{p} + \nu_h \Delta_h \bar{u}, \\ \operatorname{div}_h w^{\varepsilon, h} = 0, \\ \partial_3 w^\varepsilon = 0, \\ w^\varepsilon|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

En prenant le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 de la première équation du système avec w^ε , on a

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu_h \|\nabla_h w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \gamma \|w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \nu_h \|\nabla_h \bar{u}\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla_h w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} + |\langle w^{\varepsilon, h} \cdot \nabla_h \bar{u} | w^\varepsilon \rangle|,$$

et donc,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \gamma \|w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \nu_h \|\nabla_h \bar{u}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \|\nabla_h \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty} \|w^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

En intégrant en temps, nous obtenons

$$\|w^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \gamma^{-1} \nu_h \|\nabla_h \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_\mu], \mathbf{L}^2)}^2 + \int_0^t \|\nabla_h \bar{u}(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} e^{-\gamma(t-\tau)} \|w^\varepsilon(\tau)\|_{\mathbf{L}^2}^2 d\tau.$$

Le lemme de Gronwall implique que, pour tout $0 < t < T_\mu$,

$$\|w^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq C \nu_h M^2 T_\mu \exp \left\{ \int_0^t \|\nabla_h \bar{u}(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau \right\}.$$

Si $\bar{u}_0 \in \mathbf{H}^s$, $s > 2$, alors $\|\nabla_h \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty([0, T_\mu], \mathbf{L}^2)} < C_1(T_\mu)$ et $\int_0^t \|\nabla_h \bar{u}(\tau)\|_{\mathbf{L}^\infty} d\tau < C_2(T_\mu)$ pour tout $0 < t < T_\mu$. Par conséquent, le fait que $\nu_h = \nu_h(\varepsilon) \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$ entraîne qu'il existe $\varepsilon = \varepsilon(T_\mu)$ tel que, pour tout $0 < t < T_\mu$, $\|w^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2} < \mu$. On en déduit que pour tout $\mu > 0$, il existe $\varepsilon(\mu) > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon(\mu)$, $\|\bar{u}^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2))} < \mu$. Le lemme 3.6.3 est donc démontré. ■

3.7 Cas semi bien-préparé

Dans ce paragraphe, nous étudions le système

$$(NSC_{\varepsilon, \alpha, \gamma}) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h u^\varepsilon + \gamma u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{u^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0 & \text{dans } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

Dans ce qui suit, nous aurons besoin de l'espace suivant

$$Y_{s,\eta} = \dot{\mathbf{H}}_h^{-\eta} \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\eta} \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s},$$

où les espaces $\dot{\mathbf{H}}^\eta$ et \mathbf{H}^η sont les espaces de Sobolev homogènes et non homogènes usuels. Soit

$$\Psi(\xi) = \chi \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_h|}{r} \right) \right] \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_3|}{r} \right) \right], \quad (3.62)$$

où χ est une fonction \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

On remarque que $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \Psi \subset \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$ et $\Psi \equiv 1$ dans $\mathcal{C}_{r,R}$. On a besoin du lemme suivant, dont la preuve est facile (voir par exemple le lemme 3.4.2).

Lemme 3.7.1 *Soient $r = R^{-1}$, $s > 0$ et $\eta > 0$. Si $v_0 \in Y_{s,\eta}$, $v_{0,L} = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\mathcal{F}v_0)$ et $w_0 = v_0 - v_{0,L}$, alors*

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C \|v_0\|_{Y_{s,\eta}} R^{-\eta}.$$

Le résultat principal de cette section est le théorème suivant :

Théorème 3.7.2 (Existence globale) *Soient $\gamma > 0$, $\eta > 0$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ et $a > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $s > \frac{1}{2}$ et pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour toute donnée initiale $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, de divergence nulle satisfaisant*

(i) $\bar{u}_0(x_1, x_2)$ est un champ de vecteurs bidimensionnel, $\bar{u}_0 = (\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2, 0)$, de divergence nulle et appartenant à $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, $\sigma > 2$, tel que $\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)} \leq r_0$ et tel que le tourbillon

$$\Omega_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in L^2(\mathbb{R}_h^2) \cap L^\infty(\mathbb{R}_h^2),$$

(ii) v_0 est un champ de vecteurs tridimensionnel de divergence nulle appartenant à $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3) \cap Y_{s,\eta}$ tel que $\|v_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0 \varepsilon^{-a}$,

le système $(NSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma})$ admet une (unique) solution globale

$$u^\varepsilon \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)).$$

De plus, quand ε tend vers 0,

$$u^\varepsilon - \bar{u}^\varepsilon - v_L \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)),$$

où \bar{u}^ε est la solution du système de Navier-Stokes dissipatif bidimensionnel avec trois composantes (NSd2D) avec $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ et où v_L est la solution du système linéaire

$$(LNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}) \quad \begin{cases} \partial_t v_L - \varepsilon^\alpha \Delta_h v_L + \gamma v_L + \frac{\bar{v}_L \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla p_L \\ \text{div } v_L = 0 \\ v_L(0) = v_{0,L} = \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\mathcal{F}(v_0)), \end{cases}$$

où la fonction de troncature Ψ est définie dans (3.62).

Remarque 3.7.3 Dans ce théorème, on considère une donnée initiale v_0 pour la partie tridimensionnelle qui peut être très grande quand ε tend vers 0.

3.7.1 Estimations de Strichartz pour le système linéaire tronqué

On rappelle que $\mathcal{C}_{r,R} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi_h| \geq r; |\xi_3| \geq r \text{ et } |\xi| \leq R\}$.

Lemme 3.7.4 (Estimations de Strichartz) *Soient $p \geq 1$ et $r = R^{-\beta}$ avec $\beta \geq 1$. Il existe une constante $C = C(\gamma, p, \beta)$ telle que si v_L est la solution de $(LNSC_{\varepsilon, \alpha, \gamma})$ de donnée initiale $v_{0,L} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Alors,*

$$\|v_L\|_{\mathbf{L}^p((0, +\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{2+2p+3\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \|v_{0,L}\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Preuve : La preuve de ce lemme est analogue à celle du théorème 3.3.1 et du corollaire 3.3.3. Nous remarquons qu'ici, la partie réelle des valeurs propres de la matrice $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ est $-\gamma - \varepsilon^\alpha |\xi_h|^2$ (pour la définition de la matrice $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$, nous renvoyons au paragraphe 3.3). Quand ε tend vers 0, $\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2$ est négligeable par rapport à γ . Cela nous donne une estimation meilleure que celle du théorème 3.3.1. ■

Remarque 3.7.5 Ici, comme $\gamma > 0$ est fixé, la viscosité horizontale ν_h ne joue aucun rôle dans les estimations de Strichartz. Les estimations restent donc les mêmes si on prend $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ ou si on prend $\nu_h = -\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$.

Remarque 3.7.6 Dans ce qui suit, on va prendre $\beta = 1$. Les estimations de Strichartz deviennent simplement

$$\|v_L\|_{\mathbf{L}^p((0, +\infty), \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{5+2p}{2p}} \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \|v_{0,L}\|_{\mathbf{L}^2}.$$

3.7.2 Estimations d'énergie a priori

Dans ce paragraphe, nous allons donner les estimations d'énergie a priori nécessaires pour la démonstration du théorème 3.7.2. Comme on l'a mentionné dans l'énoncé du théorème, la stratégie de la preuve est de décomposer u^ε en trois parties : $u^\varepsilon = \bar{u}^\varepsilon + v_L + w$, où \bar{u}^ε est solution du système bidimensionnel $(NSd2D)$, v_L est solution du système linéaire $(LNS_{\varepsilon, \alpha, \gamma})$ et w est solution du système non-linéaire suivant

$$(NNSC_{\varepsilon, \alpha, \gamma}) \quad \begin{cases} \partial_t w - \varepsilon^\alpha \Delta_h w + \gamma w + Q(w) + \frac{w \wedge e_3}{\varepsilon} = -\nabla \tilde{p} \\ \operatorname{div} w = 0 \\ w(0) = v_0 - v_{0,L}, \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} Q(w) &= (\bar{u}^\varepsilon + v_L + w) \cdot \nabla (\bar{u}^\varepsilon + v_L + w) - \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon \\ &= w \cdot \nabla w + w \cdot \nabla v_L + v_L \cdot \nabla w + v_L \cdot \nabla v_L \\ &\quad + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L + v_L \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla w + w \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Le but de ce paragraphe est de donner les estimations pour les termes croisés de $Q(w)$.

Rappelons que les opérateurs de troncature Δ_q^v sont définis dans la définition 3.2.1. Nous avons d'abord le lemme suivant dû à Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier [26] :

Lemme 3.7.7 *Pour tout $s > \frac{1}{2}$, il existe une constante C telle que pour tous champs de vecteurs u et v dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ de divergence nulle dont le gradient horizontal appartient à $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, on a*

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle| &\leq Cd_q 2^{-2qs} \left(\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} \right), \end{aligned}$$

où $\{d_q\}$ est une suite sommable de constantes positives et $\|(d_q)\|_{\ell^1} \leq 1$.

Pour les termes qui contiennent la solution v_L du système linéaire ($LNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$), on utilise le lemme suivant (pour une preuve de ce lemme, voir les lemmes 3.4.4 et 3.4.5) :

Lemme 3.7.8 *Soit $s > \frac{1}{2}$. Pour tous champs de vecteurs v_1 et v_2 dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$ de divergence nulle dont le gradient horizontal appartenant à $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, il existe une constante $C > 0$ et une suite sommable des nombres positifs d_q (qui peuvent dépendre de v_1 et v_2) de somme 1 telle que*

$$|\langle \Delta_q^v(v_2 \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v v_1 \rangle| \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|v_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}, \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla v_1) | \Delta_q^v v_1 \rangle| &\leq Cd_q 2^{-2qs} R^s \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|v_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h v_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\quad + Cd_q 2^{-2qs} R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|v_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Enfin, pour les termes qui ne contiennent que la solution \bar{u}^ε du système ($NSd2D$) et la solution w du système ($NNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$), on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.7.9 *Soient $s > \frac{1}{2}$ et $p \geq 4$. Pour tout $q \geq -1$,*

$$\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle = 0.$$

De plus, si la troisième composante $\bar{u}^{\varepsilon,3}$ est nulle, il existe une constante $C > 0$ et une suite sommable des nombres positifs $(d_q)_{q \geq 1}$ de somme 1 telle que

$$|\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^{\varepsilon,h}) | \Delta_q^v w^h \rangle| \leq Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{2}{p}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{p}}.$$

Preuve du lemme 3.7.9

Comme l'opérateur Δ_q^v n'agit que sur la variable verticale, alors si $\bar{u} = \bar{u}(x_1, x_2)$ ne dépend pas de x_3 et si $v = v(x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{S}'$, alors $\Delta_q^v(\bar{u}v) = \bar{u}\Delta_q^v v$. On rappelle que \bar{u}^ε est un champ de vecteurs bidimensionnel de divergence nulle avec trois composantes, *i.e.* $\operatorname{div}_h \bar{u}^{\varepsilon,h} = 0$ et $\partial_3 \bar{u}^\varepsilon = 0$. On en déduit que

$$\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle = \langle \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla(\Delta_q^v w) | \Delta_q^v w \rangle = 0.$$

Pour la deuxième estimation, le fait que \bar{u}^ε est un champ de vecteurs bidimensionnel et l'inégalité de Hölder impliquent que

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^{\varepsilon,h}) | \Delta_q^v w^h \rangle| &= |\langle \Delta_q^v w \cdot \nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h} | \Delta_q^v w^h \rangle| \\ &\leq \|\nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_h^{\frac{2p}{p-2}} \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'inclusion $\dot{\mathbf{H}}_h^{\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow \mathbf{L}_h^{\frac{2p}{p-2}}(\mathbb{R}^2)$ (avec une constante du type $C\sqrt{\frac{p}{p-2}} \leq 2C$ pour $p \geq 4$) et le fait que l'espace $\dot{\mathbf{H}}_h^{\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^2)$ est un interpolé entre $\mathbf{L}_h^2(\mathbb{R}^2)$ et $\dot{\mathbf{H}}_h^1(\mathbb{R}^2)$, on obtient

$$\begin{aligned} |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^{\varepsilon,h}) | \Delta_q^v w^h \rangle| &\leq \|\nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_h^{\frac{2p}{p-2}} \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3)} \\ &\leq C \|\nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{2}{p}} \|\Delta_q^v \nabla_h w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{p}} \\ &\leq Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,h}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{2}{p}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{p}}. \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. \blacksquare

3.7.3 Démonstration du théorème 3.7.2

On remarque d'abord que la composante $\bar{u}^{\varepsilon,3}$ de la solution \bar{u}^ε du système ($NSd2D$) est solution de l'équation de transport suivant

$$\begin{cases} \partial_t \bar{u}^{\varepsilon,3} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u}^{\varepsilon,3} + \gamma \bar{u}^{\varepsilon,3} + \bar{u}^{\varepsilon,h} \nabla_h \bar{u}^{\varepsilon,3} = 0 \\ \bar{u}^{\varepsilon,3}(0) = \bar{u}_{\varepsilon,3}^3. \end{cases}$$

Donc si $\bar{u}_0^{\varepsilon,3} = 0$, $\bar{u}^{\varepsilon,3}(t)$ reste nulle pour tout temps $t > 0$. On rappelle ensuite que le terme $\bar{u}^\varepsilon \wedge e_3$ est un terme gradient. En utilisant l'argument classique dans les espaces de Sobolev anisotrope $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$, on peut montrer l'existence locale et l'unicité d'une solution forte du système ($NSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$) (et donc de celle du système ($NNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$)). Le but est de montrer que la solution du système ($NNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$) est globale.

On applique l'opérateur Δ_q^v à la première équation du système ($NNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$) et on prend le produit scalaire de l'équation obtenue avec $\Delta_q^v v$, d'où l'inégalité

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \gamma \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \varepsilon^\alpha \|\Delta_q^v \nabla_h w\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq |\langle \Delta_q^v Q(w) | \Delta_q^v v \rangle|. \quad (3.65)$$

La définition de $Q(w)$ implique que

$$|\langle \Delta_q^v Q(w) | \Delta_q^v v \rangle| \leq F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5,$$

où

$$\begin{aligned} F_1 &= |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle|, \\ F_2 &= |\langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle| + |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle|, \\ F_3 &= |\langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle|, \\ F_4 &= |\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle| + |\langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle|, \\ F_5 &= |\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle| + |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle|. \end{aligned}$$

Le lemme 3.7.7 nous donne

$$F_1 \leq Cd_q 2^{-2qs} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2. \quad (3.66)$$

Le lemme 3.7.8 implique que

$$F_2 \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + Cd_q 2^{-2qs} R^s \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}. \quad (3.67)$$

On rappelle que v_L est solution du système linéaire ($LNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma}$), donc, pour tout $t \geq 0$, on a $\|v_L(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}$. Alors, l'inégalité (3.63) du lemme 3.7.8 implique que

$$F_3 = \left| \langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \leq Cd_q 2^{-2qs} R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}. \quad (3.68)$$

L'estimation du terme F_4 est un peu plus délicate. En fait, nous ne pouvons plus utiliser le lemme 3.7.8 car \bar{u}^ε est un champ de vecteur bidimensionnel qui ne dépend pas de x_3 . Pour le premier terme de F_4 , comme $\bar{u}^{\varepsilon,3} = 0$, on peut écrire

$$\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle = \left\langle \sum_{i=1,2} \partial_i \Delta_q^v(\bar{u}^{\varepsilon,i} v_L) | \Delta_q^v w \right\rangle + \langle \Delta_q^v((\operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon) v_L) | \Delta_q^v w \rangle.$$

Alors, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \leq \|\Delta_q^v((\operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon) v_L)\|_{\mathbf{L}^2} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2} + \|\Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \otimes v_L)\|_{\mathbf{L}^2} \|\Delta_q^v \nabla_h w\|_{\mathbf{L}^2}.$$

En utilisant le lemme 3.2.4, on a

$$\left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \leq Cd_q 2^{-2qs} \left[\|(\operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon) v_L\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}^\varepsilon \otimes v_L\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right].$$

Puisque \bar{u}^ε ne dépend pas de x_3 , dans la direction verticale, les supports des transformées de Fourier de $(\operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon) v_L$ et de $\bar{u}^\varepsilon \otimes v_L$ sont localisés dans $[-R, R]$ comme l'est celle de v_L . Alors, grâce au lemme de Bernstein (voir le lemme 3.2.2), on obtient

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \left[\|(\operatorname{div}_h \bar{u}^\varepsilon) v_L\|_{\mathbf{L}^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}^\varepsilon \otimes v_L\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right] \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \left[\|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right]. \end{aligned}$$

De l'inégalité précédent et du lemme 3.6.1, on déduit que

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \left[\|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right]. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta_q^v(v_L^h \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle \right| & \leq Cd_q 2^{-2qs} \|v_L^h \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L^h \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ & \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} F_4 &= \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v(v_L \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle \right| \\ &\leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \left[\|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right]. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Finalement, le lemme 3.7.9 implique que

$$F_5 \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{2}{p}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{p}}. \quad (3.70)$$

Maintenant, on somme les inégalités (3.66) à (3.70) ci-dessus et ensuite, on remplace la quantité obtenue dans l'inégalité (3.65). En multipliant l'inégalité obtenue par 2^{2qs} et ensuite, en sommant en q , on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + CR^s \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} (\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\quad + CR^{s+1} (\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} + \|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\quad + CR^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{2-\frac{2}{p}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Comme $\|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq r_0 \varepsilon^{-a}$, en utilisant l'inégalité de Young, on déduit de (3.71) que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2\gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \\ &\quad + \left[C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \right] \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\quad + (p-1) \left[C \frac{1}{p} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \right]^{\frac{p}{p-1}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p-1}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 3.6.1, nous avons $\frac{1}{p} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \leq C M e^{-\gamma t}$, pour tout $t \geq 0$. Donc, il existe $T_0 = T_0(\bar{u}_0)$ tel que pour tout $t \geq T_0$ et pour tout $p \geq 2$, nous avons

$$\left[C \frac{1}{p} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \right]^{\frac{p}{p-1}} \leq \frac{\gamma}{e}.$$

Il existe deux intervalles de temps, à savoir $[0, T_0]$ et $[T_0, +\infty]$, sur lesquels nous faisons deux arguments différents. Rappelons que notre but est de montrer que $w(t)$ reste borné uniformément en temps dans $\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)$.

1. Sur l'intervalle $[0, T_0]$, il suffit de majorer, pour $\sigma > 2$,

$$F_5 = \left| \langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^h), \Delta_q^v w^h \rangle \right| \leq C d_q 2^{-2qs} \|\bar{u}\|_{\mathbf{H}^\sigma} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq C(T_0, \bar{u}_0) d_q 2^{-2qs} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2.$$

Alors, pour tout $0 < t < T_0$, on a

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2\gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \\ &\quad + \left[C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} + C(T_0, \bar{u}_0) \right] \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned}$$

Soit $T_{*,\varepsilon} = \sup \left\{ 0 \leq T \leq T_0 : \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}, \forall 0 \leq t \leq T \right\}$. Rappelons qu'avec le choix $v_0 \in Y_{s,\eta}$, le lemme 3.7.1 nous donne

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C(r_0)\varepsilon^{-a}R^{-\eta}.$$

On choisit maintenant

$$R = C(r_0)^{\frac{1}{\eta}}\varepsilon^{-\frac{3\alpha+2\delta+2a}{2\eta}},$$

avec $\delta > 0$ petit à déterminer. On obtient

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \varepsilon^{\frac{3\alpha+2\delta}{2}},$$

donc il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}$. La continuité de l'application $t \mapsto \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}$ implique que $T_{*,\varepsilon} > 0$. En intégrant l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 &\leq \|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + C(\bar{u}_0)R^{2s}\varepsilon^{-\alpha}\|v_L(\tau)\|_{\mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2}^2 \\ &\quad + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1}\varepsilon^{-a}\|v_L\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2)} + \int_0^t \left[C(\bar{u}_0)R^{2s}\varepsilon^{-\alpha}\|v_L(\tau)\|_{\mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1}\varepsilon^{-a}\|v_L(\tau)\|_{\mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2} + C(T_0, \bar{u}_0) \right] \|w(\tau)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique que, pour tout $0 \leq t \leq T_{*,\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \left[\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C(\bar{u}_0)R^{2s}\varepsilon^{-\alpha}\|v_L\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2)}^2 + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1}\varepsilon^{-a} \right. \\ &\quad \left. + \|v_L\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2)} \right] \times \exp \left\{ T_0 C(T_0, \bar{u}_0) + C(\bar{u}_0)R^{2s}\varepsilon^{-\alpha}\|v_L\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2)}^2 \right. \\ &\quad \left. + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1}\varepsilon^{-a}\|v_L\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty\mathbf{L}_v^2)} \right\}. \end{aligned}$$

Comme $\|v_0\|_{\mathbf{L}^2} \leq r_0\varepsilon^{-a}$, les estimations de Strichartz pour v_L impliquent que, pour tout $0 \leq t \leq T_{*,\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \varepsilon^{3\alpha+\delta} \left[\varepsilon^\delta + C(\bar{u}_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta-\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} + C(\bar{u}_0, r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta-3\alpha-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ T_0 C(T_0, \bar{u}_0) + C(\bar{u}_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} + C(\bar{u}_0, r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \right\}. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Alors, si

$$4\alpha + 2a < \frac{\eta}{9 + 4s + 4\eta},$$

on peut choisir $\delta > 0$ tel que

$$4\alpha + 2a + 2\delta < \frac{\eta}{9 + 4s + 4\eta},$$

et donc,

$$\begin{cases} \frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta} + \delta + 3\alpha + 2a < \frac{1}{4}, \\ \frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta} + \delta + \alpha + 2a < \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Par conséquent, si $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\bar{u}_0, T_0)$ est suffisamment petit, on a

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq 2 \exp \{T_0 C(T_0, \bar{u}_0)\} \varepsilon^{3\alpha+\delta} < \frac{\varepsilon^\alpha}{4C} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C},$$

pour tout $0 \leq t \leq T_{*,\varepsilon}$. Cela implique que $T_{*,\varepsilon} = T_0$ et en particulier, on a

$$\|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq 2 \exp \{T_0 C(T_0, \bar{u}_0)\} \varepsilon^{3\alpha+\delta}.$$

2. Sur l'intervalle $[T_0, +\infty]$, pour tout $p \geq 4$, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2\gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ & \leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \\ & \quad + \left[C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \right] \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ & \quad + \frac{\gamma}{e} e^{-\gamma(t-T_0)} (p-1) \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p-1}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2. \end{aligned}$$

Pour minimiser le terme $(p-1)\varepsilon^{-\frac{\alpha}{p-1}}$, on choisit $p = 1 - \alpha \ln \varepsilon$ (remarquons que pour ε assez petit, $p = 1 - \alpha \ln \varepsilon \geq 4$). On a

$$(p-1) \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p-1}} = e \ln \varepsilon^{-\alpha}.$$

Soit

$$\Gamma_1(v_L)(t) = C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L(t)\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L(t)\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2\gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 & \leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + \Gamma_1(v_L) \\ & \quad + [\Gamma_1(v_L) + \gamma \ln \varepsilon^{-\alpha} e^{-\gamma(t-T_0)}] \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned}$$

Soit $T_\varepsilon^* = \sup \left\{ T \geq T_0 : \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}, \forall T_0 \leq t \leq T \right\}$. On sait déjà que

$$\|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \sqrt{2 \exp \{T_0 C(T_0, \bar{u}_0)\}} \varepsilon^{\frac{3\alpha+\delta}{2}},$$

donc il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}$. La continuité de l'application $t \mapsto \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}$ implique que $T_\varepsilon^* > T_0$. Soit

$$\Gamma_2(v_L) = C(\bar{u}_0) R^{2s} \varepsilon^{-\alpha} \|v_L\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)}^2 + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \varepsilon^{-a} \|v_L\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)}.$$

En intégrant l'inégalité ci-dessus en temps et pour tout $T_0 \leq t \leq T_\varepsilon^*$, on obtient

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 \leq \|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + \Gamma_2(v_L) + \int_{T_0}^t \left[\Gamma_1(v_L)(\tau) + \gamma \ln \varepsilon^{-\alpha} e^{-\gamma(\tau-T_0)} \right] \|w(\tau)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 d\tau.$$

En utilisant le lemme de Gronwall, on obtient, pour tout $T_0 \leq t \leq T_\varepsilon^*$,

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq \left(\|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \Gamma_2(v_L) \right) \varepsilon^{-\alpha} \exp \{ \Gamma_2(v_L) \}.$$

Comme $\|v_0\|_{\mathbf{L}^2} \leq r_0 \varepsilon^{-a}$, les estimations de Strichartz pour v_L impliquent que, pour tout $T_0 \leq t \leq T_\varepsilon^*$,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \left[\varepsilon^{-\alpha} \|w(T_0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C(r_0) R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-2\alpha-2a} + C(\bar{u}_0, r_0) R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha-2a} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ C(r_0) R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha-2a} + C(\bar{u}_0, r_0) R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-2a} \right\}. \end{aligned} \quad (3.73)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \varepsilon^{2\alpha} \left[2\varepsilon^\delta \exp \{T_0 C(T_0, \bar{u}_0)\} \right. \\ &\quad \left. + C(r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-4\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} + C(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-3\alpha-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ C(r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} + C(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

La condition sur α , a et δ :

$$4\alpha + 2a + 2\delta < \frac{\eta}{9 + 4s + 4\eta},$$

implique que

$$\frac{(9 + 4s)(3\alpha + 2\delta + 2a)}{4\eta} + 4\alpha + 2a < \frac{1}{4}.$$

Donc, il existe $0 < \varepsilon_0 \leq \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ tel que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\begin{cases} 2\varepsilon^\delta \exp \{T_0 C(T_0, \bar{u}_0)\} + C(r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-4\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \\ \quad + C(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-3\alpha-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} < \frac{1}{32C^2}, \\ \exp \left\{ C(r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha-2a-\frac{(9+4s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} + C(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}-2a-\frac{(9+2s)(3\alpha+2\delta+2a)}{4\eta}} \right\} < 2. \end{cases}$$

On déduit de l'inégalité (3.74) que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, pour tout $T_0 \leq t \leq T_\varepsilon^*$,

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{4C} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}.$$

Cela implique que $T_\varepsilon^* = +\infty$. ■

Remarque 3.7.10 On voit bien que cet argument marche à condition que la viscosité ν_h ne tend pas vers 0 trop rapidement, à savoir $\nu_h = \varepsilon^\alpha$ avec

$$\alpha < \frac{\eta}{36 + 16s + 16\eta} < \frac{1}{16}.$$

3.8 Cas mal-préparé

Dans cette section, on va traiter le cas des données initiales plus générales dans le sens où \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel de divergence nulle et où ses trois

composantes peuvent être non nulles. Dans ce cas, on suppose que la viscosité verticale est nulle et la viscosité horizontale égale à $-\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$. Rappelons que

$$Y_{s,\eta} = \dot{\mathbf{H}}_h^{-\eta} \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{L}_h^2 \dot{\mathbf{H}}_v^{-\eta} \cap \mathbf{H}_h^\eta \mathbf{H}_v^{\eta+s}.$$

On a le théorème suivant :

Théorème 3.8.1 (Existence globale) *Soient $\gamma > 0$, $\eta > 0$. Pour tout $s > \frac{1}{2}$, pour tout $\delta < \frac{1}{4}$ et pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et pour toute donnée initiale $u_0 = \bar{u}_0 + v_0$, de divergence nulle satisfaisant*

(i) \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel de divergence nulle et $\partial_3 \bar{u}_0 = 0$, appartenant à $\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, $\sigma > 2$, tel que $\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)} \leq r_0$,

(ii) v_0 est un champ de vecteurs tridimensionnel de divergence nulle appartenant à $\mathbf{H}^{0,s} \cap Y_{s,\eta}$ tel que $\|v_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0$,

le système $(NSC_{\varepsilon,\gamma})$ admet une (unique) solution globale

$$u^\varepsilon \in \mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}).$$

De plus, quand ε tend vers 0,

$$u^\varepsilon - \bar{u}^\varepsilon - v_L \rightarrow 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s}),$$

où \bar{u}^ε et v_L sont respectivement solutions des systèmes $(NSd2D)$ et $(LNSC_{\varepsilon,\alpha,\gamma})$ avec la viscosité $\nu_h = -\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$.

Remarque 3.8.2 Pour simplifier la preuve, on a énoncé le théorème dans le cas où la taille de v_0 ne dépend pas de ε . La preuve du théorème est aussi valable (avec de petites modifications) dans le cas où la taille de v_0 est de l'ordre ε^{-a} avec $a > 0$ assez petit.

Preuve du théorème 3.8.1

La preuve de ce théorème est analogue à celle du théorème 3.7.2. Les estimations pour les termes F_1 , F_2 et F_3 sont les mêmes. Il reste à estimer de nouveau les deux termes F_4 et F_5 .

Pour F_4 , nous remarquons que dans le cas semi-bien préparé, la troisième composante $\bar{u}^{\varepsilon,3} = 0$. Dans le cas mal préparé, en tenant compte du fait que $\partial_3 \bar{u}^\varepsilon = 0$, nous écrivons $F_4 = F_4^h + F_4^v$ où

$$F_4^h = \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^{\varepsilon,h} \cdot \nabla_h v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v(v_L^h \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle \right|,$$

et

$$F_4^v = \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^{\varepsilon,3} \partial_3 v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right|.$$

Le terme F_4^h peut être estimé de la même manière que dans le cas semi-bien préparé.

$$F_4^h \leq CR^s d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \left[\|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right]. \quad (3.75)$$

Pour le terme F_4^v , puisque le support de la transformée de Fourier de v_L est localisé dans $\mathcal{C}_{r,R}$, on a

$$\begin{aligned} F_4^v &= \left| \langle \Delta_q^v(\bar{u}^{\varepsilon,3} \partial_3 v_L) | \Delta_q^v w \rangle \right| \leq C d_q 2^{-2qs} \|\bar{u}^{\varepsilon,3} \partial_3 v_L\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\leq CR^{s+1} d_q 2^{-2qs} \|\bar{u}^{\varepsilon,3} v_L\|_{\mathbf{L}^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\leq CR^{s+1} d_q 2^{-2qs} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\leq CR^{s+1} d_q 2^{-2qs} \|\bar{u}_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Pour F_5 , nous rappelons que l'opérateur Δ_q^v n'agit que sur la variable verticale, que \bar{u}^ε ne dépend pas de x_3 et que $\langle \Delta_q^v(\bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla w) | \Delta_q^v w \rangle = 0$. En faisant une intégration par parties et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} F_5 &= |\langle \Delta_q^v(w \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon) | \Delta_q^v w \rangle| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} [(\Delta_q^v w^h \cdot \nabla_h) \Delta_q^v w] \cdot \bar{u}^\varepsilon \, dx \right| \\ &\leq \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}^2)} \|\nabla_h \Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_h^4 \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned}$$

Rappelons que $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_h^2) \hookrightarrow \mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)$ et que l'espace $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_h^2)$ est interpolé entre $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2)$ et $\dot{\mathbf{H}}^1(\mathbb{R}_h^2)$. Puisque $\bar{u}_0 \in \mathbf{H}^\sigma(\mathbb{R}_h^2)$, $\sigma > 2$, alors, $\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)$. En utilisant l'inégalité de Young, on déduit que

$$\begin{aligned} F_5 &\leq C \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}^2)} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\Delta_q^v \nabla_h w\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)} e^{-\gamma t} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \\ &\leq d_q 2^{-2qs} \left[C \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)}^4 e^{-4\gamma t} \ln \varepsilon^{-\delta} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 - \frac{1}{2 \ln \varepsilon} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Maintenant, on somme les inégalités (3.66), (3.67), (3.68), (3.75), (3.76) et (3.77). Ensuite, on remplace la quantité obtenue dans l'inégalité (3.65) (on remarque que la viscosité horizontale est $\frac{1}{\delta \ln \varepsilon}$ mais pas ε^α). En multipliant l'inégalité obtenue par 2^{2qs} et ensuite, en sommant en q , on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 - \frac{1}{2\delta \ln \varepsilon} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + CR^s \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} (\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\quad + CR^{s+1} (\|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^2)} + \|\Omega_0\|_{L^2(\mathbb{R}_h^2)} + \|v_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \\ &\quad + CR^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)}^4 e^{-4\gamma t} \ln \varepsilon^{-\delta} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2\gamma \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 - \frac{1}{2\delta \ln \varepsilon} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\ &\leq C \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + C(r_0) R^{2s} \ln \varepsilon^{-\delta} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 \\ &\quad + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} + \left[C(r_0) R^{2s} \ln \varepsilon^{-\delta} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + C \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)}^4 e^{-4\gamma t} \ln \varepsilon^{-\delta} + C(\bar{u}_0, r_0) R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \right] \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \end{aligned}$$

Ici, pour simplifier, supposons que $C \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)}^4 \leq 4\gamma$. En effet, si ce n'est pas le cas, nous découpons $\mathbb{R}_+ = [0, T_0] \cup [T_0, +\infty)$ comme dans le paragraphe précédent et nous traitons séparément les deux intervalles. Soit

$$T_\varepsilon^* = \sup \left\{ T : \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)} \leq -\frac{1}{2C\delta \ln \varepsilon}, \forall 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Alors, en intégrant en temps, on obtient, pour tout $0 \leq t \leq T_\varepsilon^*$,

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C(r_0)R^{2s} \ln \varepsilon^{-\delta} \|v_L\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)}^2 \\ &\quad + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1} \|v_L\|_{\mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} + \int_0^t \left[C(r_0)R^{2s} \ln \varepsilon^{-\delta} \|v_L(\tau)\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2}^2 \right. \\ &\quad \left. + C \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^4(\mathbb{R}_h^2)}^4 e^{-4\gamma\tau} \ln \varepsilon^{-\delta} + C(\bar{u}_0, r_0)R^{s+1} \|v_L(\tau)\|_{\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2} \right] \|w(\tau)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 d\tau. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall et les estimations de Strichartz pour v_L impliquent que

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \left[\varepsilon^{-\delta} \|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C(r_0)R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta} \ln \varepsilon^{-\delta} + C(\bar{u}_0, r_0)R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ C(r_0)R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \ln \varepsilon^{-\delta} + C(\bar{u}_0, r_0)R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \right\}. \end{aligned}$$

Puisque

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^\delta} = +\infty,$$

il existe une constante C telle que pour tout $0 < \varepsilon \leq 1$,

$$\ln \varepsilon^{-\delta} \leq C\varepsilon^{-\delta}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \left[\varepsilon^{-\delta} \|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C(r_0)R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-2\delta} + C(\bar{u}_0, r_0)R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ C(r_0)R^{\frac{9+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta} + C(\bar{u}_0, r_0)R^{\frac{9+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1}{4}} \right\}. \quad (3.78) \end{aligned}$$

Soit δ_0 à déterminer tel que $R^{\frac{9+4s}{2}} = \varepsilon^{-\delta_0}$. Alors, on a

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C \|v_0\|_{Y_{s,\eta}} R^{-\eta} \leq Cr_0 \varepsilon^{\frac{2\delta_0\eta}{9+4s}}.$$

Il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que si $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, alors

$$\|w_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C(r_0) \varepsilon^{\frac{2\delta_0\eta}{9+4s}} < -\frac{1}{2C\delta \ln \varepsilon},$$

ce qui implique que $T^* > 0$. L'inégalité (3.79) devient

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &\leq \left[C(r_0)\varepsilon^{\frac{2\delta_0\eta}{9+4s}-\delta} + C(r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-2\delta-\delta_0} + C(\bar{u}_0, r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta-\delta_0} \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ C(r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta-\delta_0} + C(\bar{u}_0, r_0)\varepsilon^{\frac{1}{4}-\delta_0} \right\}. \quad (3.79) \end{aligned}$$

Si

$$\delta < \frac{\eta}{9+4s+8\eta},$$

alors, on peut choisir δ_0 tel que

$$\begin{cases} \frac{2\delta_0\eta}{9+4s} - \delta > 0 \\ \frac{1}{4} - 2\delta - \delta_0 > 0. \end{cases}$$

Soit

$$\sigma_0 = \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{2\delta_0\eta}{9+4s} - \delta, \frac{1}{4} - 2\delta - \delta_0 \right\} > 0.$$

Il existe donc une constante $\bar{C}(\bar{u}_0, r_0)$ telle que

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \bar{C}(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{\sigma_0} \exp \left\{ \bar{C}(\bar{u}_0, r_0) \varepsilon^{2\sigma_0} \right\}.$$

Par conséquent, il existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ tel que si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\|w(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} < -\frac{1}{4C\delta \ln \varepsilon},$$

pour tout $0 < t < T^*$. On obtient donc que $T^* = +\infty$.

3.9 Application à des fluides en rotation rapide entre deux plaques

3.9.1 Introduction

Dans cette section, nous étudions le problème des fluides visqueux en rotation rapide entre deux plaques horizontales infinies dans le cas où les viscosités horizontale et verticale tendent vers zéro avec le nombre de Rossby. Nous considérons le système :

$$(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h u^\varepsilon - \beta \varepsilon \partial_3^2 u^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla u^\varepsilon + \frac{e_3 \wedge u^\varepsilon}{\varepsilon} = -\nabla p^\varepsilon \\ \operatorname{div} u^\varepsilon = 0 \\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_0^\varepsilon, \end{cases}$$

sur le domaine $\Omega = \Omega_h \times [0, 1]$, où $\Omega_h = \mathbb{R}^2$, $u^\varepsilon(t, x)$ est le champ de vecteurs de vitesse et $p^\varepsilon(t, x)$ désigne la pression du fluide et où le nombre de Rossby $\varepsilon > 0$ tend vers zéro. Les constantes α et β sont strictement positives. Sur le bord

$$\partial\Omega = \Omega_h \times \{x_3 = 0\} \cap \Omega_h \times \{x_3 = 1\},$$

il est naturel de supposer que le fluide satisfait à la condition de Dirichlet $u|_{\partial\Omega}^\varepsilon = 0$. Nous supposons aussi que nous sommes dans le cas bien préparé où la famille des données initiales $(u_0^\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers $(\bar{u}_0, 0)$ dans \mathbf{L}^2 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, où \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel. Le cas des données générales sera traité dans un travail ultérieur.

Dans les chapitres précédents, on a vu que, selon le théorème de Taylor-Proudman, sous l'effet de la rotation rapide, le fluide tend vers un déplacement en colonnes (la vitesse du fluide ne dépend pas de la hauteur x_3). Pourtant, ce comportement n'est pas compatible avec la condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$, sauf dans le cas où $u = 0$ dans tout le domaine Ω , ce qui veut dire que le fluide ne se déplace pas dans Ω ! Cette incompatibilité provient du fait que jusqu'à maintenant, nous négligeons le rôle de la friction. En effet, à une certaine distance du bord du domaine, la friction est négligeable et le fluide a un comportement bidimensionnel, ce qui est conséquence de la rotation rapide. En revanche, près du bord du domaine, la friction est importante et freine le fluide de telle sorte que la

vitesse au bord est nulle. Quand nous passons à la limite lorsque ε tend vers zéro, cette friction ajoute un terme dissipatif et le système $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ admet comme limite le système de type Euler bidimensionnel dissipatif suivant

$$(Ed2D_\beta) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} + \sqrt{2\beta} \bar{u} = -\nabla_h \bar{p}, \\ \operatorname{div}_h \bar{u} = 0, \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0, \end{cases}$$

où, pour simplifier, nous avons noté \bar{u} le champ de vecteurs horizontal $(\bar{u}, 0)$ (la composante verticale étant nulle).

Dans [57], Grenier et Masmoudi ont montré l'existence de couches limites pour le système des fluides tournants dans un domaine $\Omega = \Omega_h \times [0, 1]$, où $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ est soit le tore \mathbb{T}^2 soit un domaine borné avec un bord régulier, dans le cas d'une viscosité horizontale ν_h fixée et d'une viscosité verticale $\nu_v = \beta\varepsilon$ et dans le cas bien-préparé où les données initiales convergent vers un champ de vecteurs horizontal. Ils ont prouvé que quand le nombre de Rossby ε tend vers zéro, le système limite est un système de Navier-Stokes bidimensionnel dissipatif. Le cas où $\Omega_h = \mathbb{T}^2$ et où la viscosité horizontale ν_h tend vers zéro et $\nu_h \geq C\varepsilon$ (où C est une constante dépendant des données initiales) a été démontré plus tard par Masmoudi dans [75], pour des données bien préparées et dans [76], pour des données générales. Il a montré la convergence du système vers le système limite (pas uniformément en temps) lorsque la donnée initiale est assez régulière. Enfin, le cas où $\Omega_h = \mathbb{R}^2$, où la viscosité horizontale ν_h est fixée et la viscosité verticale ν_v est égale à $\beta\varepsilon$, a été traité dans [27] par Chemin, Desjardins, Gallagher et Grenier en utilisant les estimations de Strichartz (voir aussi [28]), pour des données générales.

Rappelons que l'existence des solutions faibles du système $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ est classique et nous renvoyons par exemple à [28] pour une démonstration. Dans cette section, nous appliquons les estimations d'énergie non-linéaires faites dans les sections précédentes pour montrer l'existence de couches limites pour le système $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$. Nous remarquons que le système limite de $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, possède les mêmes propriétés d'intégrabilité en temps que le système $(Ed2D)$ (voir la section 3.7.2) et donc le tourbillon associé à la solution limite joue un rôle important sur les couches limites.

Théorème 3.9.1 *Soit $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ et soit (u^ε) une famille de solutions faibles de $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ associées à une famille de données initiales $(u_0^\varepsilon) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon = (\bar{u}_0, 0)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, où \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel tel que*

$$\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2) \cap \dot{\mathbf{H}}^\sigma(\mathbb{R}_h^2),$$

avec $\sigma > 2$ et

$$\bar{\Omega}_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2).$$

Supposons de plus que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - \bar{u}\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))} = 0,$$

où \bar{u} est la solution du système limite $(Ed2D_\beta)$.

3.9.2 Les couches limites d'Ekman

La construction des couches limites d'Ekman pour les équations ($NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon$) a été détaillée dans les travaux de Grenier et Masmoudi [57] et dans [27] (voir aussi [88] et [28]). L'idée principale est d'utiliser un développement asymptotique formel pour chercher les solutions approchées sous la forme

$$\begin{aligned} u_{app}^\varepsilon &= u_{0,int} + u_{0,BL} + \varepsilon u_{1,int} + \varepsilon u_{1,BL} + \dots \\ p_{app}^\varepsilon &= \frac{1}{\varepsilon} p_{-1,int} + \frac{1}{\varepsilon} p_{-1,BL} + p_{0,int} + p_{0,BL} + \dots, \end{aligned} \quad (3.80)$$

où les termes avec l'indice "int" représentent la partie "intérieure", qui sont des fonctions régulières de (x_h, x_3) et les termes avec l'indice "BL" désignent les couches limites, qui sont fonctions régulières de la forme

$$(x_h, x_3) \rightarrow F_0(t, x_h, \frac{x_3}{\delta}) + F_1(t, x_h, \frac{1-x_3}{\delta}),$$

où $F_0(x_h, \zeta)$ et $F_1(x_h, \zeta)$ décroissent rapidement à l'infini en ζ . La quantité $\delta > 0$, qui tend vers zéro avec ε , dénote la taille des couches limites (en fait, $\delta \sim \varepsilon$). En remplaçant les expressions (3.80) dans le système ($NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon$), il est démontré dans [57] que pour pouvoir obtenir la condition de Dirichlet sur le bord $\partial\Omega$, la condition de divergence nulle et pour équilibrer le terme dissipatif du système limite, les couches limites doivent s'écrire sous la forme

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}^1 + \mathcal{B}^2 + \mathcal{B}^3 + \mathcal{B}^4,$$

où les termes \mathcal{B}^i , $i = 1, 2, 3, 4$, satisfont aux conditions suivantes. Le terme \mathcal{B}^1 est défini par

$$\mathcal{B}^1 = \begin{pmatrix} \tilde{w}_1 + \check{w}_1 \\ \tilde{w}_2 + \check{w}_2 \\ \sqrt{\frac{E}{2}} \operatorname{curl}(\bar{u})G(x_3) \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{w}_1 &= -e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} \left(\bar{u}_1 \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{E}}\right) + \bar{u}_2 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{E}}\right) \right), \\ \tilde{w}_2 &= -e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} \left(\bar{u}_2 \cos\left(\frac{x_3}{\sqrt{E}}\right) - \bar{u}_1 \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{E}}\right) \right), \\ \check{w}_1 &= -e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \left(\bar{u}_1 \cos\left(\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}\right) + \bar{u}_2 \sin\left(\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}\right) \right), \\ \check{w}_2 &= -e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \left(\bar{u}_2 \cos\left(\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}\right) - \bar{u}_1 \sin\left(\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}\right) \right), \\ G(x_3) &= -e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} \sin\left(\frac{x_3}{\sqrt{E}} + \frac{\pi}{4}\right) + -e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \sin\left(\frac{1-x_3}{\sqrt{E}} + \frac{\pi}{4}\right); \end{aligned}$$

pour assurer la condition de divergence nulle à l'ordre zéro du développement asymptotique. Le terme \mathcal{B}^2 défini par

$$\mathcal{B}^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{E} \bar{u}_2 \\ -\sqrt{E} \bar{u}_1 \\ \sqrt{E} \operatorname{curl}(\bar{u})\left(\frac{1}{2} - x_3\right) \end{pmatrix}$$

est présent pour obtenir la condition appropriée sur le bord au premier ordre. Enfin, les termes \mathcal{B}^3 et \mathcal{B}^4 sont définis par

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^3 &= e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) \begin{pmatrix} -\bar{u}_1 \\ -\bar{u}_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{B}^4 &= f(x_3) \begin{pmatrix} -\bar{u}_2 \\ \bar{u}_1 \\ 0 \end{pmatrix} + g(x_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \text{curl}(\bar{u}) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}f(x_3) &= a \left(e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} + e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \right) + b, \\ g(x_3) &= -\sqrt{\frac{E}{2}} e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{x_3} f(s) ds,\end{aligned}$$

où a et b satisfont

$$\begin{cases} a \left(1 + e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \right) + b = \sqrt{E} + e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\right) \\ 2a\sqrt{E} \left(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \right) + b = -\sqrt{2E} e^{-\frac{1}{\sqrt{E}}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{E}} + \frac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

Ici, tout ce dont nous avons besoin est que $a < C\sqrt{E}$ et $b < CE$. Rappelons que $E = 2\beta\varepsilon^2$ désigne le nombre d'Ekman et \bar{u} est la solution du système limite ($Ed2D_\beta$). Nous rappelons aussi que \mathcal{B} satisfait une équation de la forme (voir [57] et [75] pour plus de détails) :

$$\mathcal{B} = \mathcal{M}(x_3)A(t, x_1, x_2),$$

où $A(t, x_1, x_2) = {}^t(\bar{u}_1, \bar{u}_2, \text{curl}(\bar{u}))$ et \mathcal{M} est une matrice 3×3 de la forme $\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}$, où M et m sont de dimension 2 et de dimension 1 respectivement, tels que pour tout $p \geq 1$, on a

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^p} &\leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}}, \quad \|\partial_{x_3}\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^p} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{p}-1}, \quad \|m(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^\infty} \leq C\varepsilon, \\ \|m(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^p} &\leq C\varepsilon \quad \text{et} \quad \|x_3^2\partial_{x_3}m(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^\infty} \leq C\varepsilon.\end{aligned}\tag{3.81}$$

3.9.3 Convergence vers le système limite ($Ed2D_\beta$)

Rappelons d'abord que si \bar{u}^ε est la solution globale du système de Navier-Stokes bidimensionnel dissipatif suivant :

$$(NS2D_{\alpha,\beta}^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u}^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u}^\varepsilon + \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla_h \bar{u}^\varepsilon = -(\nabla_h \bar{p}^\varepsilon, 0) \\ \text{div} \bar{u}^\varepsilon = 0 \\ \bar{u}^\varepsilon|_{t=0} = (\bar{u}_0, 0), \end{cases}$$

alors le lemme 3.6.3 implique que le théorème 3.9.1 est un corollaire du théorème suivant

Théorème 3.9.2 *Soit $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ et soit u^ε une solution faible de $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ de donnée initiale $u_0^\varepsilon \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ telle que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_0^\varepsilon = (\bar{u}_0, 0)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$, où \bar{u}_0 est un champ de vecteurs bidimensionnel tel que*

$$\bar{u}_0 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2) \cap \dot{\mathbf{H}}^\sigma(\mathbb{R}_h^2),$$

avec $\sigma > 2$ et

$$\bar{\Omega}_0 = \partial_2 \bar{u}_0^1 - \partial_1 \bar{u}_0^2 \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2).$$

Supposons de plus que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u^\varepsilon - \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))} = 0,$$

où \bar{u}^ε la solution globale du système $(NS2D_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$.

Preuve du théorème 3.9.2 :

Nous remarquons que si nous essayons d'utiliser les estimations d'énergie pour montrer que le terme $u^\varepsilon - \bar{u}^\varepsilon$ est petit, alors il y a des termes que nous ne pouvons pas contrôler car \bar{u}^ε ne vérifie pas la condition de Dirichlet sur le bord. L'idée est donc de construire un terme "couche limite" \mathcal{B}^ε pour \bar{u}^ε pour que $\bar{u}^\varepsilon + \mathcal{B}^\varepsilon$ vérifie la condition de Dirichlet sur le bord et la condition de divergence nulle. Remarquons que \bar{u}^ε vérifie les mêmes estimations d'énergie que \bar{u} (voir la remarque 3.6.2), et que la construction de \mathcal{B}^ε reste identique à celle de \mathcal{B} en remplaçant tous les termes qui contiennent \bar{u} par leurs analogues avec \bar{u}^ε .

Comme le terme \mathcal{B}^ε qui désigne les couches limites d'Ekman est un terme "petit", à savoir que \mathcal{B}^ε tend vers zéro dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$ avec ε , on va montrer que $v^\varepsilon = u^\varepsilon - \bar{u}^\varepsilon - \mathcal{B}^\varepsilon$ converge vers zéro dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2(\Omega))$ quand ε tend vers 0. Remarquons que dans [75], la convergence n'est pas uniforme en temps car dans les estimations d'énergie, on utilise les normes \mathbf{H}^s de \bar{u} , avec $s > 2$. Or, la solution du système limite $(Ed2D_\beta)$ existe globalement en temps, mais sa norme \mathbf{H}^s , avec $s > 2$, pourrait tendre vers l'infini. Pour obtenir des estimations uniformes en temps, nous allons estimer les termes \bar{u} et $\nabla_h \bar{u}$ dans des normes \mathbf{L}^p , avec $p \geq 2$ bien choisis, et utiliser le lemme 3.6.1 qui dit que si le tourbillon $\bar{\Omega}_0 = \partial_{x_2} \bar{u}_0^1 - \partial_{x_1} \bar{u}_0^2$ appartient à $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_h^2) \cap \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_h^2)$, alors les normes \mathbf{L}^p , avec $p \geq 2$, de \bar{u} et $\nabla_h \bar{u}$ décroissent exponentiellement en temps.

Rappelons maintenant qu'un champ de vecteurs horizontal (ne dépendant pas de x_3) de divergence nulle appartient au noyau de l'opérateur $\mathbb{P}(e_3 \wedge \cdot)$, où \mathbb{P} est la projection de Leray sur le sous-espace des champs de vecteurs de divergence nulle. Par conséquent, $e_3 \wedge \bar{u}^\varepsilon$ est un terme gradient. En remplaçant u^ε par $v^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon + \mathcal{B}^\varepsilon$ dans le système $(NSC_{\alpha,\beta}^\varepsilon)$ et ensuite en soustrayant l'équation vérifiée par \bar{u}^ε , on trouve que v^ε est solution de l'équation suivante

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{B}^\varepsilon + \partial_t v^\varepsilon + u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon + \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon \\ + \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon + v^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h \mathcal{B}^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h v^\varepsilon - \beta \varepsilon \partial_3^2 \mathcal{B}^\varepsilon \\ - \beta \varepsilon \partial_3^2 v^\varepsilon + \frac{e_3 \wedge \mathcal{B}^\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{e_3 \wedge v^\varepsilon}{\varepsilon} - \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon = -\nabla \hat{p}^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.82)$$

En prenant le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 de (3.82) avec v^ε , en intégrant par parties et en tenant compte du fait que v^ε vérifie la condition de Dirichlet sur le bord, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \beta \varepsilon \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ = -\langle L_1, v^\varepsilon \rangle - \langle u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle - \langle \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle - \langle \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle \\ - \langle v^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle - \langle v^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle + \langle L_2, v^\varepsilon \rangle, \end{aligned} \quad (3.83)$$

où

$$\begin{aligned} L_1 &= \partial_t \mathcal{B}^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h \mathcal{B}^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon \\ L_2 &= \beta \varepsilon \partial_3^2 \mathcal{B}^\varepsilon - \frac{\mathcal{B}^\varepsilon \wedge e_3}{\varepsilon} + \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon. \end{aligned}$$

Le but maintenant est de majorer les sept termes du membre de droite de l'équation (3.83). Nous reprenons les notations de [57] et [75], et nous notons B_1 , B_2 et b (respectivement V_1 , V_2 et v) les trois composantes de \mathcal{B}^ε (respectivement v^ε) et nous prenons $B = (B_1, B_2)$ et $V = (V_1, V_2)$.

1. On rappelle que $\mathcal{B}^\varepsilon = \mathcal{M}(x_3)A(t, x_1, x_2)$ où $A(t, x_1, x_2) = {}^t(\bar{u}_1^\varepsilon, \bar{u}_2^\varepsilon, \text{curl}(\bar{u}^\varepsilon))$. On sait que \bar{u} vérifie l'équation

$$\partial_t \bar{u}^\varepsilon - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u}^\varepsilon + \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon = -(\nabla_h \bar{p}^\varepsilon, 0),$$

ce qui implique que (en tenant compte du fait que \bar{u}^ε est de divergence nulle)

$$\partial_t(\text{curl} \bar{u}^\varepsilon) - \varepsilon^\alpha \Delta_h(\text{curl} \bar{u}^\varepsilon) + \sqrt{2\beta}(\text{curl} \bar{u}^\varepsilon) + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla \text{curl}(\bar{u}^\varepsilon) = 0,$$

et donc

$$\partial_t A - \varepsilon^\alpha \Delta_h A + \sqrt{2\beta} A + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla A = -(\nabla_h \bar{p}^\varepsilon, 0).$$

En utilisant le fait que la troisième composante de \bar{u}^ε est nulle, on a

$$|\langle L_1, v^\varepsilon \rangle| = |\langle \mathcal{M}(x_3)(\partial_t A - \varepsilon^\alpha \Delta_h A + \bar{u}^\varepsilon \cdot \nabla A), v^\varepsilon \rangle| \leq \sqrt{2\beta} \|\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^2} \|A\|_{\mathbf{L}_{x_h}^2} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Les estimations (3.81), le lemme 3.6.1 et l'inégalité de Young impliquent donc que

$$|\langle L_1, v^\varepsilon \rangle| \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} (1 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (3.84)$$

2. Le deuxième terme est traité de manière classique. En utilisant la divergence nulle de u^ε , on a

$$\langle u^\varepsilon \cdot \nabla v^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = 0. \quad (3.85)$$

3. On décompose le troisième terme en deux parties :

$$\langle \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \langle B \cdot \nabla_h \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle + \langle b \partial_{x_3} \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle.$$

Pour la partie horizontale, on utilise une intégration par parties :

$$|\langle B \cdot \nabla_h \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| \leq |(\text{div}_h B) \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon| + |\langle B \otimes \mathcal{B}^\varepsilon, \nabla_h v^\varepsilon \rangle| = |\langle B \otimes \mathcal{B}^\varepsilon, \nabla_h v^\varepsilon \rangle|.$$

Donc, l'inégalité de Hölder, les estimations (3.81), le lemme 3.6.1 et l'inégalité de Young impliquent que

$$\begin{aligned}
 |\langle B \cdot \nabla_h \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| &\leq \|B\|_{\mathbf{L}^4} \|\mathcal{B}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq \|\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}^4_{x_3}}^2 \left(\|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h}}^2 + \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h}}^2 \right) \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{1-\alpha} e^{-t\sqrt{2\beta}} + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 \quad (3.86)
 \end{aligned}$$

De la même manière, pour la partie verticale, on a

$$\begin{aligned}
 |\langle b \partial_{x_3} \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| &\leq \|b\|_{\mathbf{L}^4} \|\partial_{x_3} \mathcal{B}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq \|m(x_3)\|_{\mathbf{L}^4_{x_3}} \|\partial_{x_3} \mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}^4_{x_3}} \left(\|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h}}^2 + \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h}}^2 \right) \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{4}} e^{-t\sqrt{2\beta}} (1 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (3.87)
 \end{aligned}$$

4. Le quatrième terme peut être traité de la même manière. En utilisant le fait que \bar{u}^ε ne dépend pas de x_3 , les estimations (3.81) et le lemme 3.6.1, on a

$$\begin{aligned}
 |\langle \mathcal{B}^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| &\leq \|\mathcal{B}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h} \mathbf{L}^2_{x_3}} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2_{x_h}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq \|\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}^2_{x_3}} \left(\|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4}^2 + \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4}^2 \right) \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\
 &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} (1 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2). \quad (3.88)
 \end{aligned}$$

5. Le cinquième terme est plus compliqué à estimer. On le découpe en quatre parties comme suit :

$$\langle v^\varepsilon \cdot \nabla \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle = \langle V \cdot \nabla_h B, V \rangle + \langle V \cdot \nabla_h b, v \rangle + \langle v \partial_{x_3} b, v \rangle + \langle v \partial_{x_3} B, V \rangle = I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

D'abord, pour $p > 2$, l'inégalité de Hölder implique que

$$|I_1| \leq C \|V\|_{\mathbf{L}^2_{x_h} \mathbf{L}^p_{x_3}} \|\nabla_h B\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{p-2}}} \|V\|_{\mathbf{L}^p_{x_h} \mathbf{L}^2_{x_3}}.$$

En utilisant les inclusions

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}^2_{x_h}) &\hookrightarrow \mathbf{L}^p_{x_h}, \\
 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{2p}}(\mathbb{R}_{x_3}) &\hookrightarrow \mathbf{L}^p_{x_3},
 \end{aligned}$$

les interpolations des espaces de Sobolev, les estimations (3.81) et le lemme 3.6.1, on obtient

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq C \|\mathcal{M}(x_3)\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{p-2}}_{x_3}} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^{\frac{2p}{p-2}}_{x_h}} \|V\|_{\dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{p}}(\mathbb{R}^2_{x_h})} \|V\|_{\dot{\mathbf{H}}^{\frac{p-2}{2p}}(\mathbb{R}_{x_3})} \\
 &\leq \frac{C(\bar{u}_0)p}{p-2} e^{-t\sqrt{2\beta}} \varepsilon^{\frac{p-2}{2p}} \|V\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{p+6}{2p}} \|\nabla_h V\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{p-2}{p}} \|\partial_3 V\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{p-2}{2p}} \\
 &\leq \frac{C(\bar{u}_0)p}{p-2} e^{-t\sqrt{2\beta}} \varepsilon^{\frac{(p-2)(1-2\alpha)}{p+6}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\beta\varepsilon}{8} \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2.
 \end{aligned}$$

On choisit $p = \frac{14}{3}$ et on trouve donc

$$|I_1| \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\beta\varepsilon}{8} \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (3.89)$$

Maintenant, en intégrant I_2 par parties et utilisant l'inégalité de Hölder, on a

$$|I_2| \leq C \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|b\|_{\mathbf{L}^4_{x_h} \mathbf{L}^\infty_{x_3}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h} \mathbf{L}^2_{x_3}}.$$

L'inclusion $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2_{x_h}) \hookrightarrow \mathbf{L}^4_{x_h}$, les estimations (3.81), le lemme 3.6.1 et l'inégalité de Young impliquent donc que

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq C \|m(x_3)\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_3}} \|\operatorname{curl} \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^4_{x_h}} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|v^\varepsilon\|_{\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}_{x_h} \mathbf{L}^2_{x_3}} \\ &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{3}{2}} \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{4-3\alpha} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned} \quad (3.90)$$

Le terme I_3 peut être estimé comme le terme I_1 car par une intégration, on a

$$|I_3| = 2 |\langle bv, \partial_3 v \rangle| = 2 |\langle bv, \operatorname{div}_h V \rangle| \leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\beta\varepsilon}{8} \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (3.91)$$

Le terme I_4 est le plus difficile à contrôler. D'abord, on remarque que d'après le lemme 3.6.1, la norme de \bar{u}^ε dans $\mathbf{L}^p_{x_h}$ est majorée uniformément en p , donc

$$\|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_h}} \leq e^{-t\sqrt{2\beta}} \max \left\{ \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2_{x_h}}, \|\bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_h}} \right\}.$$

Ensuite, on remarque que si $f \in \mathbf{C}^1(\mathbb{R})$, f s'annule en 0 et 1, alors

$$\left\| \frac{f(x)}{x} \right\|_{\mathbf{L}^2([0,1])} \leq C \|f'(x)\|_{\mathbf{L}^2([0,1])}.$$

Donc, les estimations (3.81) et l'inégalité de Young implique

$$\begin{aligned} |I_4| &= \left| \left\langle \frac{v}{x_3} x_3^2 \partial_{x_3} B, \frac{V}{x_3} \right\rangle \right| \leq C \left\| \frac{v}{x_3} \right\|_{\mathbf{L}^2} \|x_3^2 \partial_{x_3} M(x_3)\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_3}} \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty_{x_h}} \left\| \frac{V}{x_3} \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon e^{-t\sqrt{2\beta}} \|\partial_{x_3} v\|_{\mathbf{L}^2} \|\partial_{x_3} V\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C(\bar{u}_0) \varepsilon^{2-\alpha} e^{-t\sqrt{2\beta}} + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\beta\varepsilon}{8} \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned} \quad (3.92)$$

6. Le sixième terme est traité de la même manière que dans la section précédente. Nous utilisons le lemme 3.7.9 et nous obtenons

$$|\langle v^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| \leq C \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^{2-\frac{2}{p}} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{2}{p}}.$$

L'inégalité de Young et des arguments analogues à ceux de la preuve du théorème 3.7.2 impliquent donc que

$$|\langle v^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| \leq (p-1) \left[C \frac{1}{p} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \right]^{\frac{p}{p-1}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p-1}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2$$

En utilisant le lemme 3.6.1 et en choisissant $p = 1 - \alpha \ln \varepsilon$, on obtient enfin

$$|\langle v^\varepsilon \cdot \nabla \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle| \leq C(\bar{u}_0) \ln \varepsilon^{-\alpha} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{H}^{0,s}(\mathbb{R}^3)}^2 \quad (3.93)$$

7. Finalement, on estime le septième terme comme dans [57] ou [75]. Par définition de L_2 ,

$$\langle L_2, v^\varepsilon \rangle = \langle \beta \varepsilon \partial_3^2 \mathcal{B}^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle - \left\langle \frac{e_3 \wedge \mathcal{B}^\varepsilon}{\varepsilon}, v^\varepsilon \right\rangle + \left\langle \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon, v^\varepsilon \right\rangle.$$

Notons par B^i la partie horizontale de $\mathcal{B}^{\varepsilon,i}$. En utilisant les expressions de $\mathcal{B}^{\varepsilon,i}$, nous avons

$$\begin{aligned} \partial_3^2 B^3 &= 0, \\ \beta \varepsilon \partial_3^2 B^1 - \frac{e_3 \wedge B^1}{\varepsilon} &= 0, \\ \beta \varepsilon \partial_3^2 B^2 - \frac{e_3 \wedge B^2}{\varepsilon} + \sqrt{2\beta} \bar{u}^\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

Pour les termes qui restent, on a

$$\begin{aligned} \beta \varepsilon \left| \langle \partial_3^2 b, v \rangle \right| &\leq \beta \varepsilon \|\partial_3 b\|_{\mathbf{L}^2} \|\partial_3 v\| \\ &\leq \beta \varepsilon \|\nabla_h B\|_{\mathbf{L}^2} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq \beta \varepsilon \|M(x_3)\|_{\mathbf{L}_{x_3}^2} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}_{x_h}^2} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \varepsilon^{3-\alpha} e^{-t\sqrt{2\beta}} + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2; \end{aligned} \quad (3.94)$$

$$\left| \left\langle \frac{e_3 \wedge B^3}{\varepsilon}, V \right\rangle \right| \leq C \varepsilon^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{1}{\varepsilon}} \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \varepsilon e^{-t\sqrt{2\beta}} (1 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2); \quad (3.95)$$

$$\begin{aligned} \beta \varepsilon \left| \langle \partial_3^2 B^4, V \rangle \right| &= \beta \varepsilon \left| \langle f''(x_3) \bar{u}^\varepsilon, V \rangle \right| \\ &\leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} \sqrt{\beta} \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} + \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2, \end{aligned} \quad (3.96)$$

où $f(x_3) = a \left(e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} + e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \right) + b$, $E = 2\beta\varepsilon^2$ est le nombre d'Ekman ; $a < C\varepsilon^{\frac{1}{2}}$ et $b < C\varepsilon$. Enfin,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{e_3 \wedge B^4}{\varepsilon}, V \right\rangle \right| &\leq \left[C \left(\int_0^1 \left| e^{-\frac{x_3}{\sqrt{E}}} + e^{-\frac{1-x_3}{\sqrt{E}}} \right|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} + \beta \varepsilon \right] \|\bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2} \|V\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-t\sqrt{2\beta}} (1 + \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2). \end{aligned} \quad (3.97)$$

Maintenant, en sommant les estimations (3.84) à (3.97) et ensuite en remplaçant les quantités obtenues dans l'équation (3.83), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \beta \varepsilon \|\partial_3 v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq C e^{-t\sqrt{2\beta}} \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{1-\alpha} \right) + \bar{C}(\bar{u}_0) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{4-3\alpha} + \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} + \ln \varepsilon^{-\alpha} \right) e^{-t\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, nous supposons que

$$\bar{C}(\bar{u}_0) = \left[C \frac{1}{p} \|\nabla_h \bar{u}^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^2)} \right]^{\frac{p}{p-1}} \leq \gamma.$$

Une intégration en temps nous donne

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{1-\alpha} + \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \right) \\ &\quad + \bar{C}(\bar{u}_0) \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{4-3\alpha} + \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} + \ln \varepsilon^{-\alpha} \right) \int_0^t e^{-s\sqrt{2\beta}} \|v^\varepsilon(s)\|_{\mathbf{L}^2}^2 ds. \end{aligned}$$

Le lemme de Gronwall implique donc

$$\begin{aligned} \|v^\varepsilon(t)\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{1-\alpha} + \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \right) \exp \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{4-3\alpha} + \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} + \ln \varepsilon^{-\alpha} \right\} \\ &\leq C \left(\varepsilon^{\frac{1}{4}-\alpha} + \varepsilon^{-\alpha} \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} \right) \exp \left\{ \varepsilon^{\frac{1}{4}} + \varepsilon^{4-3\alpha} + \varepsilon^{\frac{1-2\alpha}{4}} \right\}. \end{aligned} \quad (3.98)$$

Maintenant, comme $\alpha < \frac{1}{4}$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-\alpha} \|u_0^\varepsilon - \bar{u}_0\|_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|v^\varepsilon\|_{\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2)} = 0.$$

Le théorème 3.9.2 est donc démontré. \blacksquare

Remarque 3.9.3

Toutes les estimations présentées dans la preuve du théorème 3.9.2 peuvent être justifiées par une approximation classique par des fonctions régulières (voir par exemple [28] pour les détails).

Global existence for the primitive equations with small anisotropic viscosity¹

Résumé : Dans cet article, nous considérons le système des équations primitives dans le cas où la viscosité verticale et la diffusivité thermique verticale sont nulles, la viscosité horizontale et la diffusivité thermique horizontale sont de taille ε^α avec $0 < \alpha < \alpha_0$. Nous démontrons l'existence globale et l'unicité d'une solution forte pour des données grandes à condition de supposer que le nombre de Rossby est petit (c'est-à-dire que la rotation est rapide et la stratification verticale de la densité est forte).

Classification AMS : 35Q35, 35S30, 76D05, 76U05

Mots clés : Equations primitives, système quasi-géostrophique, anisotropie, dispersion, estimations de Strichartz.

Abstract : In this paper, we consider the primitive equations with zero vertical viscosity, zero vertical thermal diffusivity, and the horizontal viscosity and horizontal thermal diffusivity of size ε^α where $0 < \alpha < \alpha_0$. We prove the global existence of a unique strong solution for large data provided that the Rossby number is small enough (the rotation and the vertical stratification are large).

AMS Classification : 35Q35, 35S30, 76D05, 76U05

Key words : Primitive equations, quasi-geostrophic system, anisotropy, dispersion, Strichartz estimates.

4.1 Introduction

In this paper, we consider the primitive equations with no vertical viscosity and no vertical thermal diffusivity and we also suppose that the horizontal viscosity and thermal diffusivity go to zero when the rotation goes to infinity. We prove the convergence towards

1. Travail en collaboration avec Frédéric Charve, Université Paris-Est, Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050), 61 Avenue du Général de Gaulle, 94 010 Créteil Cedex (France), e-mail : frederic.charve@univ-paris12.fr

the quasi-geostrophic system and the global existence of a unique strong solution when the rotation is fast enough.

The primitive equations describe the hydrodynamical flow in a large scale (of order of hundreds or thousands of kilometers) on the earth, typically an ocean or the atmosphere, under the assumptions that vertical motion is much smaller than horizontal motion and that the fluid layer depth is small compared to the radius of the earth. Concerning the difference between the vertical and horizontal scales, it is also observed that for geophysical fluids, the vertical component of the diffusion term (viscosity or thermal diffusivity in the case of primitive equations) is much smaller than the horizontal component. In the case of a rotating fluid between two planes for example (see [57] and [27]), the viscosity has the form $(-\nu_h \Delta_h - \beta \varepsilon \partial_3^2)$. It is then relevant to consider a zero vertical diffusivity in the primitive equations.

In the studies of the fluids of that scale, two important phenomena have to be considered : the earth rotation and the vertical stratification of the density due to the gravity. When the movement is observed in a fixed frame, the rotation of the earth, defined by the Rossby number Ro , induces two additional force terms in the equations : the Coriolis force and the centrifugal force. The latter is included in the gravity gradient term in the right-hand side of the equations and has no important influence in our work. The Coriolis force, on the other hand, induces a vertical rigidity in the fluid. Under a fast rotation, the velocity of each particle of an homogeneous fluid, which has the same horizontal coordinates, is the same. This is called the phenomenon of Taylor-Proudman columns.

Gravity forces the fluid masses to have a vertical structure : heavier layers lay under lighter ones. Internal movements in the fluid tend to destroy this structure and the gravity basically tries to restore it, which gives a horizontal rigidity (to be opposed to the vertical rigidity induced by the rotation). In order to formally estimate the importance of this rigidity, we also compare the typical time scale of the system with the Brunt-Väisälä frequency and define the Froude number Fr . We will not give more details here and, for more physical considerations, we refer to [28], [34], [88], and [11] for example.

The primitive equations are obtained with moment, energy, mass conservations and scale simplifications by choosing the same scale for the rotation and stratification (see Embid and Majda [43]). In what follows, we denote by ε the Rossby number and we set $Fr = \varepsilon F$, where Fr is the Froude number, and $\varepsilon > 0$ will go to zero. In the sequel, we call ε and F the Rossby and Froude numbers. Then, the anisotropic primitive equations are given by

$$(APE_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t v_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^1 - \nu \Delta_h v_\varepsilon^1 - \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^2 = -\frac{\partial_1 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ \partial_t v_\varepsilon^2 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^2 - \nu \Delta_h v_\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon^1 = -\frac{\partial_2 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ \partial_t v_\varepsilon^3 + v_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon^3 - \nu \Delta_h v_\varepsilon^3 + \frac{1}{F\varepsilon} \theta_\varepsilon = -\frac{\partial_3 \Phi_\varepsilon}{\varepsilon} & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ \partial_t \theta_\varepsilon + v_\varepsilon \cdot \nabla \theta_\varepsilon - \nu' \Delta_h \theta_\varepsilon - \frac{1}{F\varepsilon} v_\varepsilon^3 = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3 \\ (v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)|_{t=0} = (v_0, \theta_0) & \text{in } \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

where $\Delta_h = \partial_{x_1}^2 + \partial_{x_2}^2$ is the horizontal Laplacian, and where ν and ν' are the horizontal

viscosity and the horizontal thermal diffusivity, which are of order ε^α , where α is a positive constant which will be made more precise in the last section. The vector field $v_\varepsilon(t, x)$ is the fluid velocity, $\theta_\varepsilon(t, x)$ is the (scalar) density fluctuation and $\Phi_\varepsilon(t, x)$ is the geopotential term, containing the pressure and the centrifugal force. Notice that, in the case of meteorology problems, θ_ε is only a function of the temperature whereas, in oceanography, θ_ε depends on both temperature and salinity. For more details on the physical meanings of the quantities, we refer the reader to [11], [34], [54] and [88].

Denoting U_ε the pair $(v_\varepsilon, \theta_\varepsilon)$, we can write the system (APE_ε) in the more compact form

$$(APE_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t U_\varepsilon + U_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon - L U_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A} U_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (-\nabla \Phi_\varepsilon, 0) \\ \operatorname{div} v_\varepsilon = 0 \\ U_\varepsilon|_{t=0} = U_{0,\varepsilon}. \end{cases}$$

where

$$U_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon = v_\varepsilon \cdot \nabla U_\varepsilon = \sum_{i=1}^3 v_\varepsilon^i \cdot \partial_i U_\varepsilon,$$

the matrix \mathcal{A} is defined by

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F^{-1} \\ 0 & 0 & -F^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

and L denotes the linear operator

$$L U_\varepsilon = (\nu \Delta_h v_\varepsilon, \nu' \Delta_h \theta_\varepsilon).$$

We introduce the potential vorticity :

$$\Omega_\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1 v_\varepsilon^2 - \partial_2 v_\varepsilon^1 - F \partial_3 \theta_\varepsilon.$$

Then we define the orthogonal decomposition of U_ε into its quasi-geostrophic part, and its oscillating part :

$$U_\varepsilon = U_{\varepsilon, QG} + (1 - U_{\varepsilon, QG}) \stackrel{\text{def}}{=} U_{\varepsilon, QG} + U_{\varepsilon, osc},$$

where

$$U_{\varepsilon, QG} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} -\partial_2 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ \partial_1 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ 0 \\ -F \partial_3 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \end{pmatrix}, \quad U_{\varepsilon, osc} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} v_\varepsilon^1 + \partial_2 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon^2 - \partial_1 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \\ v_\varepsilon^3 \\ \theta_\varepsilon + F \partial_3 \Delta_F^{-1} \Omega_\varepsilon \end{pmatrix},$$

and

$$\Delta_F \stackrel{\text{def}}{=} \partial_1^2 + \partial_2^2 + F^2 \partial_3^2.$$

In [88], assuming that the Brunt-Väisälä frequency is constant, the authors have shown that, when ε goes to zero, the formal limit of the system (APE_ε) is the following quasi-geostrophic system :

$$(QG) \quad \begin{cases} \partial_t \widetilde{U}_{QG} - \Gamma \widetilde{U}_{QG} = - \begin{pmatrix} -\partial_2 \\ \partial_1 \\ 0 \\ -F\partial_3 \end{pmatrix} \Delta_F^{-1} (\widetilde{U}_{QG} \cdot \nabla \widetilde{\Omega}_{QG}) \\ \operatorname{div} \widetilde{U}_{QG} = 0 \\ \widetilde{U}_{QG}|_{t=0} = U_{0,QG}, \end{cases}$$

where $\widetilde{U}_{QG} \cdot \nabla \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{v}_{QG} \cdot \nabla$, Γ is the operator :

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \Delta_h \Delta_F^{-1} (\nu \partial_1^2 + \nu \partial_2^2 + \nu' F^2 \partial_3^2),$$

and $U_{0,QG}$ is the quasi-geostrophic part of the initial data U_0 .

In real observations, the rotation is usually not fast enough and the fluid not homogeneous enough, but this quasi-geostrophic system (which considers not only rotation terms but also vertical stratification terms) is still a very good approximation of the behavior of real geophysical fluids. From the mathematical point of view, the quasi-geostrophic system has an “almost” bidimensional behavior, thus, is globally wellposed. This fact is very useful in proving the global existence of solutions of the primitives equations when the rotation is fast enough.

Before stating the main theorem of this paper, we want briefly recall known results for the primitive equations. We emphasize that all the following mentioned results concern the isotropic case where the viscosity and the thermal diffusivity are fixed and are the same in all directions (that is; $\nu \Delta_h$ and $\nu' \Delta_h$ are replaced by $\nu \Delta$ and $\nu' \Delta$ in the system (APE_ε) with constant ν and ν').

First, we remark that, in the case of isotropic geophysical fluids, there are results corresponding to the Leray ([70]) and Fujita-Kato ([49]) theorems. We also remark that there are two different cases to be considered for the primitive equations in the whole space \mathbb{R}^3 , namely the case where $F = 1$ and where there is no dissipation with respect to ε and the case where $F \neq 1$ and where the dissipation plays an important role. In [22], Chemin studied the first case and proved the convergence of the solutions towards those of the quasi-geostrophic system for regular, well prepared data, under the assumption that $|\nu - \nu'|$ is small.

In the case where $F \neq 1$, the dissipation allows not only to prove the convergence of the primitive system towards the quasi-geostrophic system but also to prove the global existence of solutions when the Rossby number ε is small (fast rotation). Thus, the quasi-geostrophic system can be interpreted as the asymptotics of the primitive equations when the rotation and stratification have a important influence. In this case, one needs to decompose the general solution into its quasi-geostrophic part (which has the same structure as the solution of the quasi-geostrophic system) and its oscillating part (the remaining terms). Then, filtering the fast oscillating terms leads to the stabilization the system and makes it tend to the slow quasi-geostrophic system. In [15] and [16], in the

case of constant isotropic viscosity and thermal diffusivity, the first author of this paper proved, for various initial data, that the limiting system of the primitive equations is the quasi-geostrophic system (QG) when ε goes to zero. In [14], he considered strong solutions and showed that the oscillating part goes to zero, whereas the quasi-geostrophic part goes to the unique global solution of the 3D quasi-geostrophic system whose initial data is the quasi-geostrophic part of the initial data. As in [43], [51] and [25], the tools used in [14] is Strichartz-type estimates and spectral properties of the matrix $-\widehat{L + \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{P}\mathcal{A}}$, where \mathbb{P} denotes the Leray projection of \mathbf{L}^2 onto the subspace of divergence free vector fields.

Finally, we recall some further results concerning the primitive equations. We refer to Lions, Temam and Wang ([71] and [72]), for the asymptotic expansion of the primitive equations with respect to the Rossby number ε , where one recovers the geostrophic system and the quasi-geostrophic system as expansions of zero and first order respectively. In [8], Beale and Bourgeois studied the quasi-geostrophic system in periodic domains and proved the convergence of the primitive system towards the quasi-geostrophic system when ε goes to zero, provided that the initial data are well prepared in \mathbf{H}^3 . This convergence was also proved by Gallagher in [51], using Schochet's methods. For the case of inviscid primitive equations with $F \neq 1$, in [61], Iftimie proved the local convergence in time of the primitive system towards the quasi-geostrophic system with regular data.

The anisotropic primitive equations with evanescent viscosity and evanescent thermal diffusivity introduce new difficulties. First of all, in the case where there is no vertical viscosity and thermal diffusivity, the theorems of Leray-type are no longer available and the existence of a weak solution is still open. For strong solutions, the problem comes from the lack of regularizing effect in the third direction. Here, the fundamental idea is to use the divergence free property of the velocity. We note that the vertical derivative in the term $u \cdot \nabla$ is multiplied by u^3 . However, the divergence free condition implies that $\partial_3 u^3 = -\partial_1 u^1 - \partial_2 u^2$, so we can still use the regularizing effect induced by the horizontal viscosity and thermal diffusivity.

In order to state our results, we need to introduce anisotropic Sobolev spaces. In what follows, we use the index “h” (respectively “v” or “3”) to refer to the horizontal variable (respectively to the vertical variable). Thus, $x_h = (x_1, x_2)$ and $\xi_h = (\xi_1, \xi_2)$. The anisotropic Sobolev spaces $H^{\sigma,s}$ are defined as the closure of the set of smooth functions under the norm

$$\|u\|_{H^{\sigma,s}} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_h|^2)^\sigma (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

In the spirit of [26], we can prove the following theorem of the local existence (global existence for small data) of a strong solution of the primitive equations. The proof of this theorem follows the lines of the proof of existence given in [26] in the case of anisotropic rotating fluids. The uniqueness is proved as in [62]. For these reasons, the details are left to the reader.

Theorem 4.1.1 (Local Existence) *Let $s > \frac{1}{2}$, $\varepsilon > 0$ and $U_0 = (u_0, \theta_0)$ be a divergence-free vector field (i.e. $\text{div } u_0 = 0$) in $H^{0,s}$. Then there exists $T_\varepsilon > 0$ such that the system (APE_ε) has a unique solution U_ε in $L^\infty([0, T_\varepsilon], H^{0,s})$ and $\nabla_h U_\varepsilon \in L^2([0, T_\varepsilon], H^{0,s})$.*

Moreover, there exists a constant $c_\varepsilon > 0$ such that if $\|U_0\|_{H^{0,s}} \leq c_\varepsilon \min(\nu, \nu')$, then $T_\varepsilon = \infty$.

Proving the global existence of strong solutions for large data in this case is more delicate. To simplify the situation, we go back to a much simpler system, namely the system of rotating fluids :

$$(NSC) \quad \begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta_h u + \frac{1}{\varepsilon} u \wedge e_3 = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0. \end{cases}$$

Let w_F be the solution of the linear free waves system corresponding to (NSC)

$$\begin{cases} \partial_t w_F - \nu \Delta_h w_F + \frac{1}{\varepsilon} w_F \wedge e_3 = -\nabla p_F \\ \operatorname{div} w_F = 0 \\ w_F(t=0) = w_0. \end{cases}$$

In [26], when the viscosity $\nu > 0$ is fixed, Chemin, Desjardins, Gallagher and Grenier proved the following Strichartz-type estimates :

Theorem 4.1.2 *For any $0 < r < R$, there exists a constant $C_{r,R} > 0$ such that if the support of the Fourier transform of w_0 is localized in $\{\xi \in \mathbb{R}^3 \mid |\xi_3| \geq r \text{ and } |\xi| \leq R\}$, then, for any $1 \leq p \leq +\infty$, we have*

$$\|w_F\|_{\mathbf{L}^p([0,T], \mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2(\mathbb{R}^3))} \leq C_{r,R} \varepsilon^{\frac{1}{4p}} \|w_0\|_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Here, the anisotropic Lebesgue spaces $L_h^p L_v^q$ with $p, q \geq 1$ are defined by the norm

$$\|u\|_{L_h^p L_v^q} = \left(\int_{\mathbb{R}_h^2} \left(\int_{\mathbb{R}_v} |f(x_h, x_3)|^q dx_3 \right)^{\frac{p}{q}} dx_h \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Then using the so-called “bootstrap” argument, they proved the global existence of a strong solution for large data, provided that ε is small enough.

Now, if in the equations (NSC) , the viscosity ν is not fixed, but depends on ε , say $\nu = \varepsilon^\alpha$, with $\alpha > 0$, an additional difficulty arises in showing global existence of strong solutions. Indeed, by using the method of [26], in the energy estimates, we have to deal with the coefficient $\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\varepsilon^\alpha}$, which goes to infinity when ε goes to 0. Nevertheless, in [80], the second author of this paper proved the global existence of a unique strong solution of (NSC) with $\nu = \varepsilon^\alpha$, for large data, when ε is small and $\alpha \leq \alpha_0$. The idea is to carefully study the dependence with respect to the cut-off radii r and R of the constant $C_{r,R}$ arising in the Strichartz estimates in order to get an estimate which is able to absorb the blowing-up term $\frac{1}{\varepsilon^\alpha}$.

The goal of this paper is to extend the result obtained in [80] to the primitive equations (APE_ε) and to show global existence of strong solutions of (APE_ε) for large data when ε is small enough, in the case where $\nu = \varepsilon^\alpha$, $\nu' = \rho \varepsilon^\alpha$ for $\alpha \leq \alpha_0$ and without any particular assumption on ρ . We will adapt the computations of eigenvalues and eigenvectors of the linearized primitive equations developed by F.Charve in [15], [14], [16], and [17] in the isotropic case to the anisotropic case.

We remark that, if $\nu \sim \nu' \sim \varepsilon^\alpha$, then unlike the case of rotating fluids ([80]) where the limiting system is zero, the limiting system of the primitive equations, when ε goes to zero, is the inviscid quasi-geostrophic system, which has no regularizing effect. So we have to estimate the \mathbf{H}^σ -norm, with $\sigma > \frac{5}{2}$, of the solution of the quasi-geostrophic system. The theory of hyperbolic systems implies the existence of a unique strong solution of this quasi-geostrophic system in \mathbf{H}^σ with $\sigma > \frac{5}{2}$, but this solution could exponentially blow up in time at infinity. We have two different cases :

- The quasi-geostrophic part of the initial data is zero : the limiting system is then zero, so we can use the idea of [80] with the adapted computations from [14] and [16] to prove a Strichartz-type estimate which will help to absorb the blow-up term and then prove the global existence of strong solutions of (APE_ε) for large data when ε is small. This is the case considered in this paper.
- The quasi-geostrophic part of the initial data is not zero : the limiting system is then a hyperbolic-type system. Mathematically, an idea to deal with this kind of system is to add a “friction” term γu , with $\gamma > 0$, in order to obtain an exponential dissipation in time which will balance the possible exponential blow-up of the solution of the quasi-geostrophic system. We will treat this case in a subsequent paper.

Before stating the main theorem of this paper, we recall that, for $\eta \in \mathbb{R}$, the usual homogenous Sobolev space $\dot{H}^{-\eta}$ is defined by the (semi-)norm

$$\|u\|_{\dot{H}^\eta} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\xi_h|^{2\eta} |\widehat{u}|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

For $s > \frac{1}{2}$ and $\eta > 0$, we define

$$Y_{s,\eta} = H^{\eta,s+\eta} \cap L_h^2 \dot{H}_v^{-2\eta} \cap \dot{H}_h^{-\eta} H_v^s.$$

The main result of this paper is the following

Theorem 4.1.3 (Global Existence) *Let $s > \frac{1}{2}$ and $\eta > 0$. There exists $\alpha_0 > 0$ and for any $r_0 > 0$, a positive number $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r_0)$, such that, for all $0 < \alpha < \alpha_0$, for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ and for all $U_0 \in Y_{s,\eta}$ with a zero quasi-geostrophic part and with $\|U_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0$, the system (APE_ε) has a unique global solution U_ε in $\mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$, with $\nabla_h U \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$.*

The structure of the paper is as follows. In Section 4.2 we recall basic results on anisotropic spaces and Littlewood-Paley decomposition. Section 4.3 is devoted to the spectral properties of the linearized problem corresponding to the system (APE_ε) . In Section 4.4, we study the dispersive effect and prove Strichartz estimates that will be used in the proof of Theorem 4.1.3. Finally, Section 4.5 contains the proof of Theorem 4.1.3 and a discussion on the constant α_0 .

4.2 Preliminaries

4.2.1 Anisotropic spaces

We briefly recall some basic properties of the anisotropic spaces. We refer to [25], [84] and [80] for more details. First we recall that the anisotropic Lebesgue spaces $L_h^p L_v^q$ with

$p, q \geq 1$ are defined as

$$L_h^p L_v^q(\mathbb{R}^3) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \|u\|_{L_h^p L_v^q} = \left(\int_{\mathbb{R}_h^2} \left(\int_{\mathbb{R}_v} |f(x_h, x_3)|^q dx_3 \right)^{\frac{p}{q}} dx_h \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

The order of integration is important. Indeed, let $(X_1, d\mu_1)$, $(X_2, d\mu_2)$ be measurable spaces, if $1 \leq p \leq q$ and if $u : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ is a function in $L^p(X_1; L^q(X_2))$, then $u \in L^q(X_2; L^p(X_1))$ and

$$\|u\|_{L^q(X_2; L^p(X_1))} \leq \|u\|_{L^p(X_1; L^q(X_2))}.$$

We first recall the definition of the dyadic localization operators in the Fourier space. Let ψ be an even smooth function in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ such that the support of ψ is contained in the ball $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{4}{3})$ and ψ equals to 1 on a neighbourhood of the ball $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{3}{4})$. Let

$$\varphi(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi(\xi),$$

Clearly the support of φ is contained in the ring $\{\xi \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\}$, φ is identically equal to 1 on the ring $\{\xi \in \mathbb{R} : \frac{4}{3} \leq |\xi| \leq \frac{3}{2}\}$ and

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \psi(\xi) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi\left(\frac{\xi}{2^j}\right) = 1,$$

Let \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} be the Fourier and inverse Fourier transforms respectively. We will often use the notation $\widehat{u} = \mathcal{F}u$. We introduce the following frequency truncation operators.

Definition 4.2.1 *For any tempered distribution u , we set*

$$\begin{aligned} \Delta_q^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)), \quad \forall q \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\psi(|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)), \\ \Delta_q^v u &= 0, \quad \forall q \leq -2, \\ S_q^v u &= \sum_{q' \leq q-1} \Delta_{q'}^v u. \end{aligned}$$

We refer to [10] and [21] for a more detailed construction of the dyadic decomposition. By using this definition, we can decompose all tempered distributions with respect to the vertical frequencies as

$$u = \sum_{q \geq -1} \Delta_q^v u.$$

We denote \mathcal{F}_v the Fourier transform in the vertical direction. In our arguments, we shall use the following vertical Bernstein inequality (for the proof, see [21], [59] and [83]).

Lemma 4.2.2 (Vertical Bernstein Lemma) *Let $0 < r_1 < r_2$. There exists a positive constant C_0 such that, for any $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ for which the support of $\mathcal{F}_v u$ is contained in the domain $\mathbb{R}_{\xi_h}^2 \times \{2^q r_1 \leq \xi_3 \leq 2^q r_2\}$, we have :*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \|\partial_3^k u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (4.1)$$

and

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_3}} \leq C_0 2^{q(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall p_1 \geq 1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq p_3. \quad (4.2)$$

This lemma allow us to rewrite the norm of the anisotropic Sobolev spaces $\mathbf{H}^{0,s}$ in terms of dyadic sums in the vertical frequencies.

Lemma 4.2.3 *Suppose that $u \in \mathbf{H}^{0,s}$ with $s \in \mathbb{R}$, then we have*

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \sim \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

We also have the following relation between each vertical dyadic block of a function u and its $\mathbf{H}^{0,s}$ -norm.

Lemma 4.2.4 *Suppose that u belongs to $\mathbf{H}^{0,s}$, then there exists a square-summable sequence of positive numbers $\{c_q(u)\}$ with $\sum_q c_q(u)^2 = 1$, such that*

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2} \leq c_q(u) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}.$$

Finally, we define the spaces $\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})$, where $p \geq 2$ and I is an interval of \mathbb{R}_+ , as the closure of the set of smooth vector-fields with respect to the norms

$$\|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})} = \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

With this definition, it is easy to see that, for any $p \geq 2$, the norm of $\tilde{\mathbf{L}}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ is stronger than the usual norm of $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$. From the above definition, we can prove the following lemma which is similar to Lemma 4.2.4.

Lemma 4.2.5 *Suppose that u belongs to $\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})$ where I is an interval of \mathbb{R}_+ , then there exists a square-summable sequence of positive numbers $(c_q(u))$, with $\sum_q c_q(u)^2 = 1$,*

such that

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)} \leq c_q(u) 2^{-qs} \|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})}.$$

4.2.2 A priori estimates

In what follows, we always denote by (c_q) (respectively (d_q)) a square-summable (respectively summable) sequence of positive constants (which can depend on several parameters), such that $\sum_q c_q^2 = 1$ (respectively $\sum_q d_q = 1$). We recall that, using the above dyadic decomposition, J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier have proved the following estimates (see [26]).

Lemma 4.2.6 *For any real number $s > \frac{1}{2}$, there exists a constant C such that for any vector fields u and v , where u is divergence free,*

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| &\leq C d_q 2^{-2qs} \left(\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right), \end{aligned} \quad (4.3)$$

where $\{d_q\}$ is a summable sequence of positive constants with $\sum_q d_q = 1$.

We also recall the following lemma [see [83], Lemma 3.3].

Lemma 4.2.7 *For any real numbers $m, n, l \geq 1$ such that $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{l}$, there exists a constant $C > 0$ such that, for any functions u, v , we have*

$$\|[\Delta_q^v; u] v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^m} \leq C 2^{-q} \|\partial_3 u\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^n} \|v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^l}. \quad (4.4)$$

In the previous paragraph, we introduced the vertical truncation and recalled the vertical Bernstein inequalities to define the anisotropic Sobolev spaces. We will also need to define truncations and anisotropic Bernstein inequalities in all three directions.

Definition 4.2.8 *For $0 < r < R$, we introduce the set*

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_h| \geq r, |\xi_3| \geq r, |\xi| \leq R\}.$$

Remark 4.2.9 In general, r will be chosen very small and R very large.

We have the following anisotropic Bernstein inequalities.

Lemma 4.2.10 (Anisotropic Bernstein Lemma) *Let $0 < r_1 < r_2$. There exists a positive constant C_0 such that, for any $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ for which the support of $\mathcal{F}u$ is contained in the set $2^q \mathcal{C}_{r_1, r_2}$, we have :*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (4.5)$$

and

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{q_1} \mathbf{L}_v^{q_2}} \leq C_0 2^{q(\frac{2}{p_1} - \frac{2}{q_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{q_2})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1 \leq q_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq q_2. \quad (4.6)$$

4.3 Spectral aspects of the linear system

The aim of this section is to determine the eigenvalues and eigenvectors of the matrix $L - \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \mathcal{A}$, and to establish the estimates of the associate projectors onto the eigenspaces. Recall that we already define

$$\mathcal{C}_{r,R} \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_h| \geq r, |\xi_3| \geq r, |\xi| \leq R\}.$$

In what follows, we consider the following frequency cut-off function

$$\Psi(\xi) = \chi\left(\frac{|\xi|}{R}\right) \left[1 - \chi\left(\frac{2|\xi_h|}{r}\right)\right] \left[1 - \chi\left(\frac{2|\xi_3|}{r}\right)\right],$$

where χ is a C^∞ -function from \mathbb{R} to \mathbb{R} such that

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{if } |x| \geq 2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Thus, $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \Psi \subset \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$ and $\Psi \equiv 1$ on $\mathcal{C}_{r, R}$. The frequency cut off operator is the following pseudo-differential operator :

$$\mathcal{P}_{r, R} f \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}(\Psi(\xi)\mathcal{F}(f)), \quad \forall f \in \mathcal{S}', \quad (4.8)$$

where \mathcal{F} denotes the Fourier transform. In this paper, we do not consider a “fixed” frequency cut-off but a cut-off that depend on ε . So the frequency cut-off domain will be chosen as $\mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, with $R_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta}$, and $r_\varepsilon = R_\varepsilon^{-\gamma} = \varepsilon^{\beta\gamma}$.

In this section, we consider the following cut-off linear system corresponding to (APE_ε)

$$\begin{cases} \partial_t \bar{U}_\varepsilon - L\bar{U}_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}\bar{U}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(-\nabla \bar{\Phi}_\varepsilon, 0) \\ \text{div } \bar{v}_\varepsilon = 0 \\ \bar{U}_{\varepsilon|_{t=0}} = \bar{U}_{0, \varepsilon} = \mathcal{P}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon} U_{0, \varepsilon}. \end{cases}$$

Applying the Leray projection \mathbb{P} of $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)^3$ onto the subspace of divergence-free vector fields and then the Fourier transformation, we have

$$\partial_t \widehat{\bar{U}}_\varepsilon = \mathbb{B}(\xi, \varepsilon) \widehat{\bar{U}}_\varepsilon,$$

where

$$\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = L - \frac{1}{\varepsilon} \widehat{\mathbb{P}\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & \frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 & -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon F} & -\nu'_\varepsilon |\xi_h|^2 \end{pmatrix}.$$

The main result of this section is the following proposition, which will be used later in the proof of the Strichartz estimates

Proposition 4.3.1 *There exists $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $\varepsilon < \varepsilon_0$, for all R_ε such that $|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2 \varepsilon \ll 1$ and for all $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$ with $r_\varepsilon = R_\varepsilon^{-\gamma}$, the matrix $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = L - \frac{1}{\varepsilon} \widehat{\mathbb{P}\mathcal{A}}$ is diagonalizable and its eigenvalues have the following asymptotic expansions with respect*

to ε :

$$\begin{cases} \mu_0 = -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2, \\ \mu = -(\nu_\varepsilon \xi_1^2 + \nu_\varepsilon \xi_2^2 + \nu'_\varepsilon F^2 \xi_3^2) \frac{|\xi_h|^2}{|\xi|_F^2} + \varepsilon E_2, \\ \lambda = -\tau(\xi) |\xi_h|^2 + i \frac{|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon E_2, \\ \bar{\lambda} = -\tau(\xi) |\xi_h|^2 - i \frac{|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon E_2, \end{cases} \quad (4.9)$$

where $|\xi|_F^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + F^2 \xi_3^2$, E_2 is uniformly bounded on $\mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, and where :

$$\varepsilon |E_2| \leq C_F \varepsilon |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| |\xi_h|^2 \leq C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2 \varepsilon \ll 1,$$

and

$$\tau(\xi) = \frac{\nu_\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{F^2 \xi_3^2}{|\xi|_F^2} \right) + \frac{\nu'_\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{F^2 \xi_3^2}{|\xi|_F^2} \right) \geq \min(\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon) > 0.$$

Moreover, if we denote by $\mathcal{P}_i(\xi, \varepsilon)$, the projectors onto the eigenspaces corresponding to μ , λ and $\bar{\lambda}$ ($i \in \{2, 3, 4\}$), and we set

$$\mathbb{P}_i(u) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_i(\xi, \varepsilon)(\widehat{u}(\xi))), \quad (4.10)$$

then for any divergence-free vector field f whose Fourier transform is supported in $\mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, we have the following estimates :

$$\|\mathbb{P}_2 f\|_{H^{\sigma, s}} \leq \begin{cases} C_F \|f\|_{H^{\sigma, s}} & \text{if } \Omega(f) \neq 0, \\ C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \varepsilon R_\varepsilon^2 \|f\|_{H^{\sigma, s}} & \text{if } \Omega(f) = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

and for $i = 3, 4$,

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{H^{\sigma, s}} \leq C_F R_\varepsilon^{1+\gamma} \|f\|_{H^{\sigma, s}}. \quad (4.12)$$

Remark 4.3.2 If $R_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta}$, $\nu_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ and $\nu'_\varepsilon = \rho \varepsilon^\alpha$, then the condition $|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2 \varepsilon \ll 1$, for small $\varepsilon > 0$, is equivalent to $1 + \alpha - 2\beta > 0$.

In order to prove Proposition 4.3.1, we first determine the eigenvalues of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ (the roots of its characteristic polynomial). One of the roots is easy to find. In order to calculate the others, we perform a change of variable on the remaining polynomial of degree 3 and then, we use the Cardan formulas. We show that, as ε goes to zero, the discriminant is positive and we obtain the remaining three roots. The end of this section is devoted to the asymptotic expansions of these eigenvalues and to the proof of the proposition 4.3.1.

4.3.1 Eigenvalues

We recall that matrix $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = L - \widehat{\frac{1}{\varepsilon} \mathcal{P} \mathcal{A}}$ writes :

$$\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = \begin{pmatrix} -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & \frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\nu_\varepsilon |\xi_h|^2 & -\frac{\xi_1^2 + \xi_2^2}{\varepsilon F |\xi|^2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\varepsilon F} & -\nu'_\varepsilon |\xi_h|^2 \end{pmatrix}.$$

Its characteristic polynomial is :

$$\chi_{\mathbb{B}}(X) = (X + \nu_{\varepsilon}|\xi_h|^2)P(X + \nu_{\varepsilon}|\xi_h|^2),$$

with

$$P(Y) = Y^3 - (\nu_{\varepsilon} - \nu'_{\varepsilon})|\xi_h|^2 Y^2 + \frac{|\xi|_F^2}{\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2} Y - (\nu_{\varepsilon} - \nu'_{\varepsilon}) \frac{\xi_3^2 |\xi_h|^2}{\varepsilon^2 |\xi|^2}. \quad (4.13)$$

This polynomial has no particular property so, in order to find its roots, we use the Cardan formulas. We perform the following change of variable

$$X = U - \frac{\nu'_{\varepsilon} + 2\nu_{\varepsilon}}{3} |\xi|^2$$

which takes into account the first change of variable (writing into the variable $(U + \nu_{\varepsilon}|\xi|^2)$ to simplify the expression of $\chi_{\mathbb{B}}$) and the one performed to reduce the polynomial into the particular formulation needed to apply the Cardan formulas ($U^3 + pU + q$). We refer to [15] and [16] for more details.

$$P(X) = P(U + \frac{\nu'_{\varepsilon} + 2\nu_{\varepsilon}}{3} |\xi|^2) = U^3 + pU + q, \quad (4.14)$$

where

$$\begin{cases} p = \frac{|\xi|_F^2}{\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2} - \frac{(\nu_{\varepsilon} - \nu'_{\varepsilon})^2}{3} |\xi_h|^4, \\ q = (\nu_{\varepsilon} - \nu'_{\varepsilon}) \frac{|\xi_h|^2}{\varepsilon^2 |\xi|^2} \left(\frac{|\xi|_F^2}{3F^2} - \xi_3^2 \right) - \frac{2}{27} (\nu_{\varepsilon} - \nu'_{\varepsilon})^3 |\xi_h|^6. \end{cases}$$

Before applying the Cardan formulas we have to define the discriminant of the equation

$$D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

We will see later that even if the radii r_{ε} and R_{ε} of $\mathcal{C}_{r_{\varepsilon}, R_{\varepsilon}}$ depend on the Rossby number, in the expression of D every term is negligible compared to $\frac{|\xi|_F^2}{\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2}$. Thus, in the following (the proof and precise asymptotic expansions are given in section 4.3.3), if ε is small enough, the discriminant is positive, so we can use the same methods as in [15] and [16] where r and R were fixed.

Now, as $D > 0$ we can use the Cardan formulas to compute the eigenvalues of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$. We define the following quantities :

$$\omega_1 = \left(-\frac{q}{2} + D^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \text{and} \quad \omega_2 = \left(-\frac{q}{2} - D^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (4.15)$$

Returning to the original variable, we obtain the eigenvalues of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$:

$$\begin{cases} \mu_0 = -\nu_{\varepsilon} |\xi_h|^2, \\ \mu = -\frac{\nu'_{\varepsilon} + 2\nu_{\varepsilon}}{3} |\xi_h|^2 + \omega_1 + \omega_2, \\ \lambda = -\frac{\nu'_{\varepsilon} + 2\nu_{\varepsilon}}{3} |\xi_h|^2 + \omega_1 j + \omega_2 j^2, \\ \bar{\lambda} = -\frac{\nu'_{\varepsilon} + 2\nu_{\varepsilon}}{3} |\xi_h|^2 + \omega_1 j^2 + \omega_2 j, \end{cases} \quad (4.16)$$

where j is a primitive cube root of 1.

4.3.2 Eigenvectors

In this paragraph, we provide some properties of the eigenvectors of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$. We refer to [15] and [16] for the precise computations. We use here the same methods and notations (except the changes induced by the horizontal Laplacian). Let

$$\begin{cases} A = \mu + \nu_\varepsilon |\xi_h|^2 = \frac{\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon}{3} |\xi_h|^2 + \omega_1 + \omega_2, \\ B = \lambda + \nu_\varepsilon |\xi_h|^2 = \frac{\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon}{3} |\xi_h|^2 + \omega_1 + \omega_2. \end{cases}$$

Since A, B and \bar{B} are the roots of the characteristic polynomial P of $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ (see (4.14)), so we have the following root-coefficient relations :

$$\begin{cases} AB\bar{B} & = (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) \frac{\xi_3^2 |\xi_h|^2}{\varepsilon^2 |\xi|^2}, \\ A + B + \bar{B} & = (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) |\xi_h|^2, \\ AB + A\bar{B} + B\bar{B} & = \frac{|\xi|_F^2}{\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Let W_i , $i = 2, 3, 4$, be the eigenvectors corresponding to the eigenvalues $\mu, \lambda, \bar{\lambda}$. Using the above relations, and after computations close to those in [15], we obtain the following matrix of change of basis :

$$Q = \begin{pmatrix} \xi_2 \xi_3 & \xi_3 (\varepsilon \xi_1 A + \xi_2) & \xi_3 (\varepsilon \xi_1 B + \xi_2) & \xi_3 (\varepsilon \xi_1 \bar{B} + \xi_2) \\ -\xi_1 \xi_3 & \xi_3 (\varepsilon \xi_2 A - \xi_1) & \xi_3 (\varepsilon \xi_2 B - \xi_1) & \xi_3 (\varepsilon \xi_2 \bar{B} - \xi_1) \\ -\varepsilon F^2 (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) |\xi_h|^2 \xi_3^2 & -\varepsilon A |\xi_h|^2 & -\varepsilon B |\xi_h|^2 & -\varepsilon \bar{B} |\xi_h|^2 \\ F \xi_3^2 & F (\varepsilon^2 |\xi|^2 A^2 + \xi_3^2) & F (\varepsilon^2 |\xi|^2 B^2 + \xi_3^2) & F (\varepsilon^2 |\xi|^2 \bar{B}^2 + \xi_3^2) \end{pmatrix}.$$

We recall that the eigenvectors W_i , $i = 2, 3, 4$, are orthogonal to $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$ and form a basis of the Fourier subspace of all divergence-free vector fields. Thus, if a vector f , orthogonal to $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$ in the space of frequencies, is written $f = K_2 W_2 + K_3 W_3 + K_4 W_4$, then

$$\begin{pmatrix} 0 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = Q^{-1} f.$$

Remark 4.3.3

- The fact that A, B and \bar{B} are the roots of polynomial P implies that we have the relation

$$\begin{cases} W_2^3 & = \varepsilon F (A - (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) |\xi|^2) W_2^4, \\ W_3^3 & = \varepsilon F (B - (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) |\xi|^2) W_3^4, \\ W_4^3 & = \varepsilon F (\bar{B} - (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) |\xi|^2) W_4^4. \end{cases} \quad (4.18)$$

- We have $W_4 = \bar{W}_3$.

4.3.3 Asymptotic expansions of the eigenvalues with respect to the Rossby number ε

In this paragraph, we provide asymptotic expansions of quantities depending on $\xi \in \mathcal{C}_{r,R}$ with respect to ε . The methods is close to [16], except that r and R are powers of the Rossby number and hence, we will need more precise asymptotic expansions in terms of ε . We chose to denote by E_2 , $E_2^{(1)}$, or $E_2^{(2)}$ a regular function satisfying $\forall \xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, $|E_2(\xi)|, |E_2^{(1)}(\xi)|, |E_2^{(2)}(\xi)| \leq C_F(|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2)$. We recall that the discriminant $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$. We note

$$\begin{cases} p = \frac{p_1}{\varepsilon^2} + p_2 \\ q = \frac{q_1}{\varepsilon^2} + q_2 \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} p_1 = \frac{|\xi|_F^2}{F^2|\xi|^2}, \\ p_2 = -\frac{(\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon)^2 |\xi_h|^4}{3}, \\ q_1 = (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) \frac{|\xi_h|^2}{|\xi|^2} \left(\frac{|\xi|_F^2}{3F^2} - \xi_3^2 \right), \\ q_2 = -\frac{2}{27} (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon)^3 |\xi_h|^6, \end{cases}$$

then we have

$$D = \frac{p_1^3}{27\varepsilon^6} \left[1 + C_1(\xi) |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| |\xi_h|^2 \varepsilon^2 + C_2(\xi) |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon|^2 |\xi_h|^4 \varepsilon^4 + C_3(\xi) |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon|^3 |\xi_h|^6 \varepsilon^6 \right],$$

where $C_i(\xi)$ are bounded functions. Thus, there exists a bounded function $E_2^{(1)}$ (recall that $|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2 \varepsilon \ll 1$) such that, $\forall \xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, $|E_2^{(1)}(\xi)| \leq C_F(|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2)$, and

$$D = \frac{p_1^3}{27\varepsilon^6} (1 + E_2^{(1)} \varepsilon^2).$$

Then, writing precisely the majorations of the quantities depending on ξ and taking advantage of the fact that $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, we finally obtain a bounded function $E_2^{(2)}$ such that, $\forall \xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, $|E_2^{(2)}(\xi)| \leq C_F(|\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| R_\varepsilon^2)$, and

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{p_1^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{3}} - \frac{q_1}{2p_1} + E_2^{(2)} \varepsilon, \\ \omega_2 = -\frac{p_1^{1/2}}{\varepsilon\sqrt{3}} - \frac{q_1}{2p_1} + E_2^{(2)} \varepsilon, \end{cases}$$

which allows us to get the following property :

Proposition 4.3.4 *There exist a number $\varepsilon_0 > 0$ and functions, all of them denoted by the same notation $E_2(\xi, \varepsilon)$ and satisfying the uniform estimates $|E_2(\xi)| \leq C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \cdot |\xi_h|^2$,*

$\forall \xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$, such that for all $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ and all $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$ the following asymptotic expansions hold :

$$\begin{aligned} A &= (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) F^2 \xi_3^2 \frac{|\xi_h|^2}{|\xi|_F^2} + \varepsilon E_2, \\ B &= i \frac{|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + (\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon) \frac{|\xi_h|^4}{2 |\xi|_F^2} + \varepsilon E_2, \\ \mu &= -(\nu_\varepsilon \xi_1^2 + \nu_\varepsilon \xi_2^2 + \nu'_\varepsilon F^2 \xi_3^2) \frac{|\xi_h|^2}{|\xi|_F^2} + \varepsilon E_2, \\ \lambda &= -\tau(\xi) |\xi_h|^2 + i \frac{|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon E_2, \end{aligned}$$

with

$$\tau(\xi) = \frac{\nu_\varepsilon}{2} \left(1 + \frac{F^2 \xi_3^2}{|\xi|_F^2} \right) + \frac{\nu'_\varepsilon}{2} \left(1 - \frac{F^2 \xi_3^2}{|\xi|_F^2} \right).$$

4.3.4 Projectors

We recall that $\mathcal{P}_i(\xi, \varepsilon)$ and $\mathbb{P}_i(u) = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{P}_i(\xi, \varepsilon)(\widehat{u}(\xi)))$ have been defined in (4.10). In this paragraph we provide estimates of the norms of these operators (defined on Sobolev spaces). We refer to [15] for the fact that (W_2, W_3, W_4) is a basis of the hyperplane of vectors orthogonal to $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$, that a vector $g = (X, Y, Z, T)$, orthogonal to $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$, writes $g = K_2 W_2 + K_3 W_3 + K_4 W_4$ and that the solution of the system :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = Q^{-1} g,$$

is given by :

$$\begin{pmatrix} K_2 \\ K_3 \\ K_4 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \frac{\xi_2 X - \xi_1 Y}{\xi_3 (\xi_1^2 + \xi_2^2)} \\ \frac{\xi_1 X + \xi_2 Y}{\varepsilon \xi_3 (\xi_1^2 + \xi_2^2)} \\ \frac{T}{F \varepsilon^2 |\xi|^2} - \frac{\xi_3 (\xi_2 X - \xi_1 Y)}{\varepsilon^2 |\xi|^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2)} \end{pmatrix},$$

where

$$M = \begin{pmatrix} \frac{|B|^2}{|B|^2 - AB + A^2 - A\bar{B}} & \frac{-(B + \bar{B})}{|B|^2 - AB + A^2 - A\bar{B}} & \frac{1}{|B|^2 - AB + A^2 - A\bar{B}} \\ \frac{-A\bar{B}}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} & \frac{A + \bar{B}}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} & \frac{-1}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} \\ \frac{AB}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} & \frac{-(A + B)}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} & \frac{1}{-A\bar{B} + AB - B^2 + |B|^2} \end{pmatrix}.$$

Using remark (4.18), we can compute the coefficients K_i the same way as in [15] (taking account of the changes induced by the horizontal laplacian) :

$$K_2 = \frac{1}{(A - B)(A - \overline{B})\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2 \xi_3 (\varepsilon^2 |\xi|^2 A^2 + \xi_3^2)} \left(-\xi_3^2 (\xi_1 Y - \xi_2 X - F \xi_3 T) - \varepsilon A |\xi|^2 (\xi_1 X + \xi_2 Y) + F \varepsilon^2 |\xi|^2 A^2 \xi_3 T \right),$$

and,

$$K_3 = \frac{1}{(A - B)(B - \overline{B})\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2 \xi_3 (\varepsilon^2 |\xi|^2 B^2 + \xi_3^2)} \left(-\xi_3^2 (\xi_2 X - \xi_1 Y) + \varepsilon B |\xi|^2 (\xi_1 X + \xi_2 Y) - T \xi_3 F (\xi_3^2 + \varepsilon^2 |\xi|^2 B^2) \right).$$

We recall that, thanks to the coefficient-root relations of the polynomial

$$(X - A)(X - B)(X - \overline{B}),$$

we have the following equality :

$$(A - B)(A - \overline{B})\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2 = |\xi|_F^2 - 2(\nu - \nu') |\xi|_h^2 A \varepsilon^2 F^2 |\xi|^2 + 3A^2 \varepsilon^2 F^2 |\xi|^2,$$

So, if ε is small enough, the previous asymptotic expansions imply that :

$$|(A - B)(A - \overline{B})\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2| \geq \frac{1}{2} |\xi|_F^2.$$

Moreover, a simple computation leads to :

$$|W_2|^2 = (\xi_3^2 + \varepsilon^2 A^2 |\xi|^2) (|\xi|_F^2 + \varepsilon^2 F^2 A^2 |\xi|^2),$$

and to the following estimate :

$$|K_2 W_2|_{\mathbb{C}^4} \leq \frac{1}{|(A - B)(A - \overline{B})\varepsilon^2 F^2 |\xi|^2|} \left(\frac{|\xi|_F^2 + \varepsilon^2 F^2 A^2 |\xi|^2}{\xi_3^2 + \varepsilon^2 A^2 |\xi|^2} \right)^{\frac{1}{2}} (|\xi_3| \cdot |\xi_1 Y - \xi_2 X - F \xi_3 T| + |A| \varepsilon (|\xi_1| + |\xi_2|) \frac{|\xi|^2}{|\xi_3|} |f| + F \varepsilon^2 |\xi|^2 A^2 |f|).$$

We consider two cases :

- If $\Omega(f) \neq 0$, that is $\xi_1 Y - \xi_2 X - F \xi_3 T \neq 0$, then when ε is small, we cannot get a better estimate than :

$$|K_2 W_2|_{\mathbb{C}^4} \leq \frac{2}{|\xi|_F^2} \frac{|\xi|_F}{|\xi_3|} (|\xi_3| \cdot |\xi| + \varepsilon |A| \frac{|\xi|^3}{|\xi_3|} + F \varepsilon^2 A^2 |\xi|^2) |f| \leq C_F \frac{|\xi|}{|\xi|_F} |f|.$$

- If $\Omega(f) = 0$, then we obtain that :

$$|K_2 W_2|_{\mathbb{C}^4} \leq \frac{2}{|\xi|_F^2} \frac{|\xi|_F}{|\xi_3|} \varepsilon |A| \frac{|\xi|^3}{|\xi_3|} |f|$$

then, using the asymptotic expansions we get that the term is much smaller than in the first case :

$$|K_2 W_2|_{\mathbb{C}^4} \leq C_F |\nu - \nu'| \varepsilon R_\varepsilon^2 |f|$$

An adaptation of the previous computations (except that we have to be careful for the asymptotic expansions of B , and that we do not have in this case any simplification if $\Omega(f) = 0$) leads to the estimates of $K_i W_i$ for $i = 3, 4$. We gather these estimates into the following lemma :

Lemma 4.3.5 *There exists a constant C_F and $\varepsilon_0 > 0$ such that for all $g(\xi) = (X(\xi), Y(\xi), Z(\xi), T(\xi))$ orthogonal to $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, 0)$ and $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, for all $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$ we have the estimates :*

$$|K_2 W_2|_{\mathbb{C}^4} \leq \begin{cases} C_F \frac{|\xi|}{|\xi_F|} |g(\xi)| & \text{if } \xi_1 Y - \xi_2 X - F \xi_3 T \neq 0, \\ C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \varepsilon \frac{|\xi|^3}{|\xi_F|^3} |\xi_h|^2 |g(\xi)| & \text{if } \xi_1 Y - \xi_2 X - F \xi_3 T \equiv 0. \end{cases}$$

And for $i = 3, 4$,

$$|K_i W_i| \leq C_F \left(\frac{|\xi_3|}{|\xi|} + \frac{|\xi|}{|\xi_3|} + \frac{|\xi_h|}{|\xi|} \right) |g(\xi)|.$$

As $r_\varepsilon = R_\varepsilon^{-\gamma}$, it follows that :

Corollary 4.3.6 *If f is a divergence-free vector field, we have the following estimates on the norms of the projectors : for all $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$*

$$|\widehat{\mathbb{P}}_2 f(\xi)| \leq \begin{cases} C_F |\widehat{f}(\xi)| & \text{if } \Omega(f) \neq 0, \\ C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \varepsilon R_\varepsilon^2 |\widehat{f}(\xi)| & \text{if } \Omega(f) = 0. \end{cases}$$

And for $i = 3, 4$, we have

$$|\widehat{\mathbb{P}}_i f(\xi)| \leq C_F R_\varepsilon^{1+\gamma} |\widehat{f}(\xi)|.$$

The conclusion of the proof of proposition 4.3.1 is then easy. ■

4.4 Dispersion and Strichartz estimates

The aim of this section is to prove the following Strichartz estimates :

Lemma 4.4.1 *Assume that f satisfies the following system :*

$$\begin{cases} \partial_t f - Lf + \frac{1}{\varepsilon} \mathbb{P} \mathcal{A} f = 0 \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \quad (4.19)$$

where $\operatorname{div} f_0 = 0$, $\Omega(f_0) = 0$ and L is the operator defined in the introduction (with $\nu_\varepsilon = \varepsilon^\alpha$ and $\nu'_\varepsilon = \rho \varepsilon^\alpha$).

Assume also that the frequencies of f_0 are localized in $\mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$. Then, there exists a constant $C_{F,\rho} > 0$ such that for $i = 3, 4$:

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{L^1(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{7+9\gamma}{2}} \|f_0\|_{L^2}.$$

4.4.1 Duality

We have seen in section 4.3.3 that matrix \mathbb{B} has four distinct eigen values : two of them are real (only μ will be useful in the following), and the other two are conjugated complex numbers with the following asymptotic expansion :

$$\lambda = -\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i \frac{|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon E_2,$$

with $|E_2| \leq C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \cdot |\xi_h|^2$ and $\tau(\xi) \geq \min(\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon)$.

For $i \in \{3, 4\}$, $\mathbb{P}_i f$ satisfies system (4.19) with $\mathbb{P}_i f_0$ as its initial data, so in the Fourier variable, we have :

$$\widehat{\mathbb{P}_i f(t, \xi)} = e^{-t\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i \frac{t|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon t E_2} \widehat{\mathbb{P}_i f_0(\xi)}.$$

In order to compute the desired norm, we introduce the set :

$$\mathcal{B} = \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) / \|\psi\|_{L_T^\infty(L_{h,v}^{1,2})} \leq 1\},$$

and duality arguments allow us to write that :

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} = \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{P}_i f(t, x) \psi(t, x) dx dt.$$

Thanks to the properties of the truncation function and the initial data f_0 , we have $f_0 = \mathcal{P}_{\frac{r_\varepsilon}{2}, 2R_\varepsilon} f_0$, so using the Plancherel formula we obtain :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} &= \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \chi\left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_3|}{r_\varepsilon}\right)\right) \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_h|}{r_\varepsilon}\right)\right) \\ &\quad e^{-t\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i \frac{t|\xi|_F}{\varepsilon F |\xi|} + \varepsilon t E_2} \widehat{\mathbb{P}_i f_0}(\xi) \widehat{\psi}(t, \xi) d\xi dt. \end{aligned}$$

So, if we note $\phi_\varepsilon = \chi\left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{|\xi_3|}{r_\varepsilon}\right)\right) \left(1 - \chi\left(\frac{|\xi_h|}{r_\varepsilon}\right)\right)$ and $d(\xi) = \frac{|\xi|_F}{F|\xi|}$, using the Fubini theorem and the Hölder estimate implies that

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} &\leq C \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \|\mathbb{P}_i f_0\|_{L^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \phi_\varepsilon(\xi)^2 \right. \\ &\quad \left. e^{-(t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i \frac{t-s}{\varepsilon} d(\xi) + \varepsilon t E_2 - \varepsilon s \overline{E_2}} \widehat{\psi}(t, \xi) \overline{\widehat{\psi}(s, \xi)} ds dt d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Another use of Fubini and the Plancherel formula gives :

$$\begin{aligned} \|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} &\leq C \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \|\mathbb{P}_i f_0\|_{L^2} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \phi_\varepsilon(\xi)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{-(t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i \frac{t-s}{\varepsilon} d(\xi) + \varepsilon t E_2 - \varepsilon s \overline{E_2}} \widehat{\psi}(t, \xi) d\xi \right) \overline{\widehat{\psi}(s, x)} dx ds dt \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Then, we obtain that :

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \|\mathbb{P}_i f_0\|_{L^2} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \|K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{h,v}^{\infty,2}} \|\overline{\widehat{\psi}(s, \cdot)}\|_{L_{h,v}^{1,2}} dt ds \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.20)$$

where

$$K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi - (t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i\frac{t-s}{\varepsilon}d(\xi) + \varepsilon t E_2 - \varepsilon s \overline{E_2}} \chi\left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon}\right)^2 \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_3|}{r_\varepsilon}\right)\right)^2 \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_h|}{r_\varepsilon}\right)\right)^2 \widehat{\psi}(t, \xi) d\xi,$$

and where χ is defined as in (4.7). If we manage to estimate $\|K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{h,v}^{\infty,2}}$ then we immediately get the estimate of $\|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})}$. In the following paragraph we will give the dispersive estimates related to K , that is $\|K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{h,v}^{\infty,2}}$.

4.4.2 Dispersion

In this paragraph, we prove the following dispersive estimate

Lemma 4.4.2 *There exists a constant $C_{F,\rho} > 0$ such that for all $t \neq s \in \mathbb{R}^3$,*

$$\|K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{x_h, x_3}^{\infty,2}} \leq C_{F,\rho} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} R_\varepsilon^5}{|t-s|^{\frac{1}{2}} r_\varepsilon^4} e^{-(t+s)\nu_{\varepsilon,0} \frac{r_\varepsilon^2}{4}} \|\psi(t)\|_{L_{x_h, x_3}^{1,2}},$$

where $\nu_{\varepsilon,0} = \min(\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon) = \min(1, \rho)\varepsilon^\alpha > 0$.

The methods used here are the same as in [26] and [80]. First we introduce :

$$I(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, z_h, \xi_3) \stackrel{\text{def}}{=} \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_3|}{r_\varepsilon}\right)\right)^2 \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} e^{iz_h \cdot \xi_h - (t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + i\frac{t-s}{\varepsilon}d(\xi)} e^{\varepsilon t E_2 - \varepsilon s \overline{E_2}} \chi\left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon}\right)^2 \left(1 - \chi\left(\frac{2|\xi_h|}{r_\varepsilon}\right)\right)^2 d\xi_h.$$

As $\mathcal{F}K = \mathcal{F}_h I(t, \xi_h, \xi_3) \cdot \mathcal{F}\psi(t, \xi)$, we have $\mathcal{F}_3 K = I(t, \cdot, \xi_3) *_h \mathcal{F}_3 \psi(t, \cdot, \xi_3)$. Using convolution properties it is then easy to see that :

$$\|K(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{x_h, x_3}^{\infty,2}} \leq C \|I(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{z_h, \xi_3}^{\infty, \infty}} \|\psi(t)\|_{L_{x_h, x_3}^{1,2}}.$$

So Lemma 4.4.2 is in fact a corollary of the following result :

Lemma 4.4.3 *There exists a constant $C_{F,\rho} > 0$ such that for all $t \neq s \in \mathbb{R}^3$,*

$$\|I(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, \cdot)\|_{L_{z_h, \xi_3}^{\infty, \infty}} \leq C_{F,\rho} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} R_\varepsilon^5}{|t-s|^{\frac{1}{2}} r_\varepsilon^4} e^{-\frac{1}{4}(t+s)\nu_{\varepsilon,0} r_\varepsilon^2}.$$

Proof :

We will only give a sketch of the proof, since it is very close to the ones of [26] and [80] for example. The difference is that, like in [15] and [16], we have to be careful with the asymptotic expansions in order not to get a negative power of ε . Let us introduce the function

$$\delta(\xi) = -\partial_{\xi_2} \frac{|\xi|_F}{F|\xi|} = -\frac{F^2(F^2-1)\xi_2\xi_3^2}{|\xi|_F|\xi|^3},$$

and the operator :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{1 + \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2} (1 + i\delta \partial_{\xi_2}).$$

We can assume $t > s$. If not, just take instead :

$$\frac{1}{1 + \frac{s-t}{\varepsilon} \delta^2} (1 + i\delta \partial_{\xi_2}).$$

The invariance under the rotation around the z-axis allows us to assume that $z_2 = 0$. So

$$\mathcal{L}(e^{iz_h \cdot \xi_h + i \frac{t-s}{\varepsilon} d(\xi)}) = e^{iz_h \cdot \xi_h + i \frac{t-s}{\varepsilon} d(\xi)}.$$

We have

$$\begin{aligned} I(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, z_h, \xi_3) &= \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_3|}{r_\varepsilon} \right) \right]^2 e^{iz_h \cdot \xi_h + i \frac{t-s}{\varepsilon} d(\xi)} \\ &\quad \mathcal{T}\mathcal{L} \left(e^{-(t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + \varepsilon t E_2 - \varepsilon t \overline{E_2}} \chi \left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon} \right)^2 \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_h|}{r_\varepsilon} \right) \right]^2 \right) d\xi_h, \end{aligned}$$

and where the transposed operator of \mathcal{L} writes :

$$\mathcal{T}\mathcal{L}(g) = \left(\frac{1}{1 + \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2} - i\partial_{\xi_2} \delta \frac{1 - \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2}{(1 + \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2)^2} \right) g - \frac{i\delta}{1 + \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2} \partial_{\xi_2} g.$$

If ε is small enough, we have

$$(t+s)\tau(\xi) - t\varepsilon \frac{E_2}{|\xi_h|^2} + s\varepsilon \frac{\overline{E_2}}{|\xi_h|^2} \geq (t+s) \frac{\nu_{\varepsilon,0}}{2},$$

where $\nu_{\varepsilon,0} = \min(\nu_\varepsilon, \nu'_\varepsilon) = \min(1, \rho)\varepsilon^\alpha$. Then, using the expression of δ , the fact that $\xi \in \mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$ and the inequality $ue^{-mu} \leq \frac{2}{\varepsilon m} e^{-\frac{mu}{2}}$, for $u, m > 0$, we obtain :

$$\begin{aligned} &\left| \mathcal{T}\mathcal{L} \left(e^{-(t+s)\tau(\xi)|\xi_h|^2 + \varepsilon t E_2 - \varepsilon t \overline{E_2}} \chi \left(\frac{|\xi|}{2R_\varepsilon} \right)^2 \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_h|}{r_\varepsilon} \right) \right]^2 \right) \right| \\ &\leq C_{F;\rho} e^{-\frac{\nu_{\varepsilon,0}}{2} |\xi_h|^2 (t+s)} \left(1 + \frac{1}{r_\varepsilon^2} + (t+s)(\nu_\varepsilon + \nu'_\varepsilon) |\xi_h| \right) \frac{1}{1 + \frac{t-s}{\varepsilon} \delta^2}. \end{aligned}$$

Thus, we have

$$|I(t+s, \frac{t-s}{\varepsilon}, z_h, \xi_3)| \leq \frac{C_{F,\rho}}{r_\varepsilon^2} e^{-\frac{\nu_{\varepsilon,0}}{4} |\xi_h|^2 (t+s)} \int_{r_\varepsilon \leq |\xi_h| \leq R_\varepsilon} \frac{d\xi_h}{1 + \frac{t-s}{\varepsilon} C_F \frac{\xi_2^2 \xi_3^4}{|\xi|_F^2 |\xi|^6}}$$

Performing a change of variable $\zeta = \frac{(t-s)^{\frac{1}{2}} \xi_2}{\varepsilon^{\frac{1}{2}} r_\varepsilon^2}$, we get the proof of lemma 4.4.3, and then we can conclude the proof of lemma 4.4.2. ■

4.4.3 Proof of the Strichartz estimates

Going back to (4.20) and using the dispersive estimates, we obtain :

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\lambda} \sup_{\psi \in \mathcal{B}} \|\mathbb{P}_i f_0\|_{L^2} \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} R_\varepsilon^5}{|t-s|^{\frac{1}{2}} r_\varepsilon^4} e^{-(t+s)\nu_{\varepsilon,0} \frac{r_\varepsilon^2}{4}} \|\psi(t)\|_{L_{x_h,x_3}^{1,2}} \|\bar{\psi}(s)\|_{L_{x_h,x_3}^{1,2}} dt ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then the Hardy-Littlewood theorem implies that :

$$\|\mathbb{P}_i f\|_{L_T^1(L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\lambda} \|\mathbb{P}_i f_0\|_{L^2} \frac{\varepsilon^{\frac{1}{4}} R_\varepsilon^{\frac{5}{2}}}{\nu_{\varepsilon,0}^{\frac{3}{4}} r_\varepsilon^{\frac{7}{2}}},$$

We use proposition 4.3.1 and it concludes the proof of lemma 4.4.1. ■

Remark 4.4.4 The result given in Lemma 4.4.1 only concerns $\mathbb{P}_3 f$ and $\mathbb{P}_4 f$. It is important to remember that \hat{f} has a component along W_2 .

4.5 Global existence, proof of the theorem

The aim of this section is to prove the following theorem, which is more precise than theorem 4.1.3 as it gives asymptotics. Recall that for $s > \frac{1}{2}$ and $\eta > 0$,

$$Y_{s,\eta} = H^{\eta,s+\eta} \cap L_h^2 \dot{H}_v^{-2\eta} \cap \dot{H}_h^{-\eta} H_v^s,$$

where $\dot{H}^{-\eta}$ are usual homogeneous Sobolev spaces. Let us consider the spaces

$$E^s = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3) : \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^{0,s})}^2 + \int_0^\infty \|\nabla_h u(t)\|_{H^{0,s}}^2 < \infty\}.$$

The main theorem is as follows :

Theorem 4.5.1 (Global Existence) *Let $s > \frac{1}{2}$, $1 \leq p < 2$ and $\eta > 0$. There exists $\alpha_0 > 0$ such that for all $0 < \alpha < \alpha_0$, for all $r_0 > 0$, for all $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ where ε_0 depends on r_0 and for all $U_0 \in Y_{s,\eta}$ with a zero quasi-geostrophic part and with $\|U_0\|_{Y_{s,\eta}} \leq r_0$, system (APE_ε) has a unique global solution U_ε in $\mathbf{C}_b(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$ with $\nabla_h U_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}_+, H^{0,s})$.*

Moreover, if $\overline{U_{0,\varepsilon}} = \mathcal{P}_{r,R} U_0$, where the cut-off operator $\mathcal{P}_{r,R}$ is defined as in (4.8), and $\overline{U_\varepsilon}$ is the solution of the following linear system :

$$\begin{cases} \partial_t \overline{U_\varepsilon} - L \overline{U_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A} \overline{U_\varepsilon} = (-\nabla \overline{\Phi_\varepsilon}, 0) \\ \operatorname{div} \overline{v_\varepsilon} = 0 \\ \overline{U_\varepsilon}|_{t=0} = \mathbb{P}_{3+4} \overline{U_{0,\varepsilon}}, \end{cases}$$

with $R_\varepsilon = \varepsilon^{-\beta}$ and $r_\varepsilon = R_\varepsilon^{-\gamma}$, then there exist β and γ such that $V_\varepsilon = U_\varepsilon - \overline{U_\varepsilon}$ goes to zero in E^s , when ε goes to zero.

4.5.1 The different systems

As announced in the introduction, we will consider oscillating initial data (their quasi-geostrophic part is zero). So in system (APE_ε) , we have $U_{0,QG} = 0$.

As in [80] we decompose the initial data with frequency truncations : $U_0 = \overline{U_{0,\varepsilon}} + V_{0,\varepsilon}$, where :

$$\begin{cases} \overline{U_{0,\varepsilon}} = \mathcal{P}_{r,R}U_0 \\ V_{0,\varepsilon} = U_0 - \overline{U_{0,\varepsilon}}. \end{cases} \quad (4.21)$$

Then we define $\overline{U_\varepsilon}$ as the solution of the following linear system (projecting this system with the Leray projector \mathbb{P} gives exactly system (4.19)) :

$$\begin{cases} \partial_t \overline{U_\varepsilon} - L\overline{U_\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}\overline{U_\varepsilon} = (-\nabla \overline{\Phi_\varepsilon}, 0) \\ \operatorname{div} \overline{v_\varepsilon} = 0 \\ \overline{U_\varepsilon}|_{t=0} = \mathbb{P}_{3+4} \overline{U_{0,\varepsilon}} \end{cases} . \quad (4.22)$$

And if we define $V_\varepsilon = U_\varepsilon - \overline{U_\varepsilon}$, then V_ε satisfies the following system :

$$\begin{cases} \partial_t V_\varepsilon - LV_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \mathcal{A}V_\varepsilon = -\frac{1}{\varepsilon}(\nabla \phi_\varepsilon, 0) - V_\varepsilon \cdot \nabla V_\varepsilon - V_\varepsilon \cdot \nabla \overline{U_\varepsilon} - \overline{U_\varepsilon} \cdot \nabla V_\varepsilon - \overline{U_\varepsilon} \cdot \nabla \overline{U_\varepsilon} \\ V_\varepsilon|_{t=0} = V_{0,\varepsilon} + \mathbb{P}_2 \overline{U_{0,\varepsilon}} \end{cases} . \quad (4.23)$$

Remark 4.5.2 Obviously we have $\Omega(\overline{U_{0,\varepsilon}}) = 0$, so we will be able to use optimized estimates from proposition 4.3.1 for $\mathbb{P}_2 \overline{U_{0,\varepsilon}}$.

As $\overline{U_\varepsilon}|_{t=0} = \mathbb{P}_{3+4} \overline{U_{0,\varepsilon}}$ has no “ \mathbb{P}_2 -component”, and as the system is diagonalizable, then for all t , so is $\overline{U_\varepsilon}(t)$ and $\overline{U_\varepsilon} = \mathbb{P}_{3+4} \overline{U_\varepsilon}$. Using lemma 4.4.1 and the fact that $\mathbb{P}_{3+4} \overline{U_{0,\varepsilon}} = (I_d - \mathbb{P}_2) \overline{U_{0,\varepsilon}}$ (using Proposition 4.3.1 easily implies $\|\overline{U_\varepsilon}(0)\|_{L^2} \leq 2\|\overline{U_{0,\varepsilon}}\|_{L^2} \leq 2\|U_0\|_{L^2}$ if ε is small enough) we have :

$$\|\overline{U_\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{7+9\gamma}{2}} \|U_0\|_{L^2}.$$

Using the Bernstein Lemma, proposition 4.3.1, and the energy estimates we get :

$$\|\overline{U_\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq CR_\varepsilon^{2(\frac{1}{2}-\frac{1}{\infty})} \|\overline{U_\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2)} \leq CR_\varepsilon \|\mathbb{P}_{3+4} \overline{U_{0,\varepsilon}}\|_{L^2} \leq C_F R_\varepsilon^{2+\gamma} \|U_0\|_{L^2}.$$

Then, using interpolation we obtain the formulation of the Strichartz estimates we will use in this article :

Lemma 4.5.3 *With the same notations as above, the solution of (4.22) satisfies the following Strichartz estimates :*

$$\|\overline{U_\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} R_\varepsilon^{\frac{3+7\gamma}{2p} + 2 + \gamma} \|U_0\|_{L^2},$$

and, localizing in frequency, we get that for all q ,

$$\|\Delta_q^v \overline{U_\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} R_\varepsilon^{\frac{3+7\gamma}{2p} + 2 + \gamma} \|\Delta_q^v U_0\|_{L^2},$$

so, there exists a square summable sequence $(c_q)_{q \in \{-1\} \cup \mathbb{N}}$ such that $\sum_q c_q^2 \leq 1$ and for all q ,

$$\|\Delta_q^v \overline{U_\varepsilon}\|_{L^p(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq c_q 2^{-qs} C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} R_\varepsilon^{\frac{3+7\gamma}{2p} + 2 + \gamma} \|U_0\|_{H^{0,s}}.$$

4.5.2 Truncation of the data

In this paragraph, we study the truncation in frequency of the initial data U_0 introduced in the previous section : $V_{\varepsilon|t=0} = V_{0,\varepsilon} + \mathbb{P}_2 \overline{U_{0,\varepsilon}}$. Recall that U_0 has no quasigeostrophic part so using proposition 4.3.1, we get that the “ \mathbb{P}_2 component” of the medium-frequency part of U_0 (with $0 < r_\varepsilon \leq |\xi_h|, |\xi_3|, |\xi| \leq R_\varepsilon$) goes to zero when ε goes to zero :

$$\|\mathbb{P}_2 \overline{U_{0,\varepsilon}}\|_{H^{0,s}} \leq C_{F,\rho} \varepsilon^{1+\alpha} R_\varepsilon^2 \|U_0\|_{H^{0,s}}. \quad (4.24)$$

We prove now that with $r_\varepsilon = R_\varepsilon^{-\gamma}$ with $\gamma > 0$, chosen small, $V_{0,\varepsilon}$, that consists in the “low-frequency” and “high-frequency” parts of U_0 is also small in $H^{0,s}$. We have :

$$\begin{aligned} \|V_{0,\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \left\{ 1 - \chi\left(\frac{|\xi|}{R_\varepsilon}\right) \left[1 - \chi\left(\frac{|\xi_3|}{r_\varepsilon}\right) \left(1 - \chi\left(\frac{|\xi_h|}{r_\varepsilon}\right) \right) \right] \right\} \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi \\ &\leq \int_{|\xi_3| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi_h d\xi_3 + \int_{|\xi_h| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi_3 d\xi_h \\ &\quad + \int_{|\xi| \geq R_\varepsilon} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (4.25)$$

First, we have

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_3| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi_h d\xi_3 &\leq \int_{|\xi_3| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} |\xi_3|^{2\eta} \left[|\xi_3|^{-2\eta} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 \right] d\xi_h d\xi_3 \\ &\leq C r_\varepsilon^{2\eta} \|U_0\|_{L_h^2 \dot{H}_v^{-2\eta}}^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Next,

$$\begin{aligned} \int_{|\xi_h| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 d\xi_3 d\xi_h &\leq \int_{|\xi_h| \leq r_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}_{\xi_3}^2} |\xi_h|^\eta \left[|\xi_h|^{-\eta} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0(\xi) \right|^2 \right] d\xi_3 d\xi_h \\ &\leq C r_\varepsilon^{2\eta} \|U_0\|_{\dot{H}_h^{-\eta} H_v^s}^2. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Finally, we have :

$$\begin{aligned} \int_{|\xi| \geq R_\varepsilon} (1 + |\xi_3|^2)^s \left| \widehat{U}_0 \right|^2 d\xi &\leq C \int_{|\xi| \geq R_\varepsilon} (1 + |\xi|^2)^{-\eta} (1 + |\xi_h|^2)^\eta (1 + |\xi_3|^2)^{s+\eta} \left| \widehat{U}_0 \right|^2 d\xi \\ &\leq C R_\varepsilon^{-2\eta} \|U_0\|_{\mathbf{H}^{\eta,s+\eta}}^2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Let $\eta_0 = \min(\eta, \gamma\eta)$. Summing (4.26)-(4.28) we obtain

$$\|V_{0,\varepsilon}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq C(U_0) R_\varepsilon^{-2\eta_0}. \quad (4.29)$$

Then, combining this and (4.24), we get :

$$\|V_{\varepsilon|t=0}\|_{H^{0,s}} \leq C(U_0) (\varepsilon^{1+\alpha-2\beta} + \varepsilon^{\beta\eta_0}). \quad (4.30)$$

4.5.3 Proof of Theorem 4.5.1

In the previous sections we obtained the following Strichartz estimates (lemma 4.5.3) which we only write here in the cases $p \in \{1, 2\}$: there exists a square summable sequence c_q such that $\sum_q c_q^2 \leq 1$ and for all q ,

$$\|\Delta_q^v \overline{U_\varepsilon}\|_{L^1(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq c_q 2^{-qs} C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{7+9\gamma}{2}} \|U_0\|_{H^{0,s}}.$$

$$\|\Delta_q^v \overline{U_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}_+, L_{h,v}^{\infty,2})} \leq c_q 2^{-qs} C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} R_\varepsilon^{\frac{11+11\gamma}{4}} \|U_0\|_{H^{0,s}}.$$

and the initial data estimates (4.30) :

$$\|V_\varepsilon|_{t=0}\|_{H^{0,s}} \leq C(U_0)(\varepsilon^{1+\alpha-2\beta} + \varepsilon^{\beta\eta_0}).$$

In the following, although it may vary from line to line, d_q will denote a summable sequence, c_q a square summable sequence and C_{F,ρ,s,U_0} a constant depending on the listed coefficients.

Let us go back to system (4.23). The aim is to show that, if ε is small enough, the solution V_ε of this system is global in time. For this we apply the Leray projector \mathbb{P} , then truncate with Δ_q^v , take the inner product in L^2 with $\Delta_q^v V_\varepsilon$ and integrate in time from zero to t . We obtain the estimate :

$$\|\Delta_q^v V_\varepsilon(t)\|_{L^2}^2 + 2\nu_{0,\varepsilon} \int_0^t \|\Delta_q^v \nabla_h V_\varepsilon(\tau)\|_{L^2}^2 d\tau \leq \|\Delta_q^v V_\varepsilon(0)\|_{L^2}^2 + (A_1) + (A_2) + (A_3) + (A_4), \quad (4.31)$$

with

$$\begin{cases} A_1 &= \int_0^t |(\Delta_q^v(V_\varepsilon \cdot \nabla V_\varepsilon))| \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2} d\tau \\ A_2 &= \int_0^t |(\Delta_q^v(V_\varepsilon \cdot \nabla \overline{U_\varepsilon}))| \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2} d\tau \\ A_3 &= \int_0^t |(\Delta_q^v(\overline{U_\varepsilon} \cdot \nabla V_\varepsilon))| \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2} d\tau \\ A_4 &= \int_0^t |(\Delta_q^v(\overline{U_\varepsilon} \cdot \nabla \overline{U_\varepsilon}))| \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2} d\tau \end{cases}.$$

The first term is estimated in the usual way with lemma 4.2.6 (see for example [26] for the proof) : there exists a constant $C > 0$ and a summable sequence $(d_q)_{q \in \mathbb{Z}}$ such that :

$$|(\Delta_q^v(V_\varepsilon \cdot \nabla V_\varepsilon))| \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2} \leq C d_q 2^{-2qs} \|V_\varepsilon\|_{H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{H^{0,s}}^2,$$

and from this we easily deduce that :

$$A_1 \leq C d_q 2^{-2qs} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2. \quad (4.32)$$

An additional estimate

As the viscosities are small as ε goes to zero, we cannot use this estimate for A_2 , A_3 or A_4 because of terms like $\|V_\varepsilon\|_{H^{0,s}}^2 \|\nabla_h \overline{U_\varepsilon}\|_{H^{0,s}}^2 / \nu_\varepsilon$, introduced in the energy and bootstrap methods. The only way for us is to take advantage of the norm $\|\overline{U_\varepsilon}\|_{L_{x_h, x_3}^{\infty,2}}$ and the Strichartz estimates in order to balance this $1/\nu_\varepsilon$. This is the aim of the following lemma (adapted from the one proven in [80], slightly different from [26]) :

Lemma 4.5.4 For any $s > \frac{1}{2}$ there exists a constant $C = C(F, \rho, U_0, s) > 0$ such that, for all tempered distribution w and all time $T > 0$, we have :

$$\int_0^T |(\Delta_q^v(w(t) \cdot \nabla \overline{U}_\varepsilon(t)) | \Delta_q^v V_\varepsilon(t))_{H^{0,s}}| dt \leq C d_q 2^{-2qs} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}$$

where $(d_q)_{q \in \{-1\} \cup \mathbb{N}}$ is a positive summable sequence such that $\sum_q d_q \leq 1$ (and it depends on the three functions involved).

Proof : For the convenience of the reader we adapt here the proof given in [26] or [80].

Let us write, as in [26] or [80], the Bony decomposition into the following way (we refer to definition 4.2.1) :

$$a \cdot b = \sum_q S_{q-1}^v a \cdot \Delta_q^v b + \sum_q S_{q+2}^v b \cdot \Delta_q^v a.$$

So we get the estimate :

$$|(\Delta_q^v(w^i \cdot \partial_i \overline{U}_\varepsilon) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| \leq I_1 + I_2,$$

with

$$I_1 = |(\Delta_q^v \left(\sum_{|q-q'|\leq N_0} S_{q'-1}^v w^i \cdot \Delta_{q'}^v \partial_i \overline{U}_\varepsilon \right) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}|,$$

and,

$$I_2 = |(\Delta_q^v \left(\sum_{q' \geq q-N_0} S_{q'+2}^v \partial_i \overline{U}_\varepsilon \cdot \Delta_{q'}^v w^i \right) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}|,$$

Using Hölder estimates we get :

$$\int_0^T I_1 dt \leq \sum_{|q-q'|\leq N_0} \|S_{q'-1}^v w^i\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \|\Delta_{q'}^v \partial_i \overline{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \|\Delta_q^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2}.$$

We easily estimate the first term : using the Bernstein lemma (see 4.2), we obtain

$$\|S_{q'-1}^v w\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \leq \sum_{q'' \leq q'-2} \|\Delta_{q''}^v w\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \leq \sum_{q'' \leq q'-2} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta_{q''}^v w\|_{L_T^\infty L^2},$$

so, with the definition of Besov spaces there exists a square summable sequence $c_{q''}$:

$$\|S_{q'-1}^v w\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \leq \sum_{q'' \leq q'-2} 2^{q''(\frac{1}{2}-s)} c_{q''} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}.$$

As $s > \frac{1}{2}$ we get that :

$$\|S_{q'-1}^v w\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \leq \left(\sum_{q'' \leq q'-2} 2^{2q''(\frac{1}{2}-s)} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q'' \leq q'-2} c_{q''}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \leq C_s \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}.$$

The classical Bernstein lemma (recall that \overline{U}_ε has frequencies localized in $\mathcal{C}_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$) and Strichartz estimates allow to write :

$$\|\Delta_{q'}^v \partial_i \overline{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \leq R_\varepsilon \|\Delta_{q'}^v \overline{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \leq c_{q'} 2^{-q's} C_{F,\rho} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|U_0\|_{H^{0,s}}.$$

The last term is estimated thanks to the Besov spaces definition. There exists a square summable sequence with $\sum_q c_q^2 \leq 1$ such that :

$$\|\Delta_q^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2} \leq c_q 2^{-qs} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}},$$

So going back to the estimate of (1) we obtain :

$$\int_0^T I_1 dt \leq 2^{-2qs} c_q \left(\sum_{|q-q'|\leq N_0} c_{q'} 2^{(q-q')s} \right) C_{F,\rho,\varepsilon} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|U_0\|_{H^{0,s}} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}},$$

where the term $\left(\sum_{|q-q'|\leq N_0} c_{q'} 2^{(q-q')s} \right)$ is nothing but the convolution of two sequences in $l^1(\mathbb{Z})$ and $l^2(\mathbb{Z})$, so it is in $l^2(\mathbb{Z})$ and

$$\int_0^T I_1 dt \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}},$$

For I_2 , Hölder estimates imply :

$$\int_0^T I_2 dt \leq \sum_{q' \geq q - N_0} \|S_{q'+2}^v \partial_i \bar{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L^\infty} \|\Delta_{q'}^v w^i\|_{L_T^\infty L^2} \|\Delta_q^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2}.$$

The first term is treated the same way as I_1 :

$$\|S_{q'+2}^v \partial_i \bar{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L^\infty} \leq \sum_{q'' \leq q'+1} \|\Delta_{q''}^v \partial_i \bar{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L^2} \leq \sum_{q'' \leq q'-2} R_\varepsilon 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta_{q''}^v \partial_i \bar{U}_\varepsilon\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{\infty,2}},$$

Then, the very same arguments give that there exists a summable sequence (d_q) dans $l^1(\{-1\} \cup \mathbb{Z})$ so that :

$$\int_0^T I_2 dt \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|w\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}.$$

The lemma is proven. ■

Going back to the energy estimate (4.31), this lemma allows us to obtain the existence of a summable sequence (once again denoted by $(d_q)_{q \in \mathbb{Z}}$) so that :

$$A_2 + A_4 \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} (\|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\bar{U}_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}). \quad (4.33)$$

Unfortunately, this lemma is not useful for A_3 where the derivative is now applied to V_ε which is not localized in frequency in $C_{r_\varepsilon, R_\varepsilon}$ as \bar{U}_ε . So using this lemma would force us to deal with an additionnal 2^q that would be impossible to absorb. This is the reason why we decompose it as in [26] or [80] :

$$\begin{aligned} A_3 &= \int_0^T |(\Delta_q^v(\bar{U}_\varepsilon \cdot \nabla V_\varepsilon) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt \leq \int_0^T |(\Delta_q^v(\bar{U}_\varepsilon^h \cdot \nabla_h V_\varepsilon) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt \\ &\quad + \int_0^T |(\Delta_q^v(\bar{U}_\varepsilon^3 \cdot \partial_3 V_\varepsilon) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt = A_{31} + A_{32} \end{aligned}$$

The term A_{31} is dealt the same way as in the proof of lemma 4.5.4 except that we take advantage of the estimate of $\|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}$ (and therefore use the Strichartz estimate with $p = 2$) and we obtain that :

$$A_{31} \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} R_\varepsilon^{\frac{11}{4}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}.$$

For the last term, as usual (we refer for example to [26]) we decompose :

$$A_{32} = \int_0^T |(\Delta_q^v(\overline{U_\varepsilon^3} \cdot \partial_3 V_\varepsilon) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt \leq A_{321} + A_{322},$$

where

$$A_{321} = \int_0^T |(\Delta_q^v \left(\sum_{|q-q'|\leq N_0} S_{q'-1}^v \overline{U_\varepsilon^3} \cdot \Delta_{q'}^v \partial_3 V_\varepsilon \right) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt,$$

and,

$$A_{322} = \int_0^T |(\Delta_q^v \left(\sum_{q'\geq q-N_0} S_{q'+2}^v \partial_3 V_\varepsilon \cdot \Delta_{q'}^v \overline{U_\varepsilon^3} \right) | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt,$$

Let us write that

$$A_{322} \leq \sum_{q'\geq q-N_0} \|S_{q'+2}^v \partial_3 V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \cdot \|\Delta_{q'}^v \overline{U_\varepsilon^3}\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \|\Delta_q^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2}.$$

The same arguments imply that for all $q' \geq -1$,

$$\|S_{q'+2}^v \partial_3 V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L_{h,v}^{2,\infty}} \leq C 2^{q'} \sum_{q''\leq q'+1} 2^{\frac{q''}{2}} \|\Delta_{q''}^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2} \leq 2^{q'} C_s \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}.$$

And for all $q \geq 0$ we can absorb $2^{q'}$ thanks to the anisotropic Bernstein lemma :

$$\|\Delta_{q'}^v \overline{U_\varepsilon^3}\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \leq 2^{-q'} \|\Delta_{q'}^v \partial_3 \overline{U_\varepsilon^3}\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}} \leq 2^{-q'} R_\varepsilon \|\Delta_{q'}^v \overline{U_\varepsilon^3}\|_{L_T^1 L_{h,v}^{\infty,2}},$$

which is also obviously true when $q' = -1$ so using the Strichartz estimates and the same method as before we finally obtain :

$$A_{322} \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2.$$

It is less easy to estimate A_{321} because we cannot move the derivative, as we have done above, without introducing an additionnal $2^{q'}$ (which couldn't be balanced by $R_\varepsilon 2^{-q'}$). As in [26] or [80] we need to decompose $A_{321} \leq A_{321}^1 + A_{321}^2 + A_{321}^3$ in the following way :

$$A_{321}^1 = \int_0^T \sum_{|q-q'|\leq N_0} |([\Delta_q^v, S_{q'-1}^v \overline{U_\varepsilon^3}] \partial_3 \Delta_{q'}^v V_\varepsilon | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt,$$

$$A_{321}^2 = \int_0^T \sum_{|q-q'|\leq N_0} |((S_q^v - S_{q'-1}^v) \overline{U_\varepsilon^3} \partial_3 \Delta_{q'}^v V_\varepsilon | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt,$$

$$\text{and } (A_{321}^3) = \int_0^T |(S_q^v \overline{U_\varepsilon^3} \cdot \partial_3 \Delta_q^v V_\varepsilon | \Delta_q^v V_\varepsilon)_{L^2}| dt$$

The last term is dealt using an integration by parts :

$$A_{321}^3 \leq \frac{1}{2} \|S_q^v \partial_3 \overline{U}_\varepsilon\|_{L_T^1 L^\infty} \|\Delta_q^v V_\varepsilon\|_{L_T^\infty L^2}^2.$$

The usual computations imply then :

$$A_{321}^3 \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2.$$

For A_{321}^2 we use the same tools as in the proof of lemma 4.5.4 together with the argument in the estimate of A_{322} . Then we use lemma 4.2.6 (with $p = t = 2$ and $r = \infty$) followed by the same arguments as above for A_{321}^1 and we obtain the estimate :

$$A_{321} \leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2,$$

which is the last part of the estimate of A_3 :

$$\begin{aligned} A_3 &\leq C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} R_\varepsilon^{\frac{11}{4}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}} \\ &\quad + C_{F,\rho,s,U_0} 2^{-2qs} d_q \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Plugging (4.32), (4.33) and (4.34) into (4.31) then multiplying by 2^{2qs} before summing over q , we obtain, for all $T \in [0, T_\varepsilon^*[$:

$$\begin{aligned} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + 2\nu_{0,\varepsilon} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 &\leq \|V_\varepsilon(0)\|_{H^{0,s}}^2 + C \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 \\ &\quad + C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{9}{2}(1+\gamma)} (\|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\overline{U}_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}) \\ &\quad + C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} R_\varepsilon^{\frac{11}{4}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}} \end{aligned}$$

The classical estimate $ab \leq \frac{a^2+b^2}{2}$ allows us to write :

$$\begin{aligned} C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{8}} R_\varepsilon^{\frac{11}{4}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}} &\leq \nu_{0,\varepsilon} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 \\ &\quad + \frac{C_{F,\rho,s,U_0}}{\nu_{0,\varepsilon}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} R_\varepsilon^{\frac{11}{2}(1+\gamma)} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 \end{aligned}$$

Remark 4.5.5 It is important to outline that it is here that Strichartz estimates balance $1/\nu_{\varepsilon,0}$.

On the other hand, energy estimates in $H^{0,s}$ for system (4.21) and proposition 4.3.1 imply that (if ε is small enough) :

$$\begin{aligned} \|\overline{U}_\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}} &\leq \|\overline{U}_\varepsilon(0)\|_{H^{0,s}} \leq \|(I_d - \mathbb{P}_2)\overline{U}_\varepsilon(t)\|_{H^{0,s}} \\ &\leq (1 + C_F |\nu_\varepsilon - \nu'_\varepsilon| \varepsilon R_\varepsilon^2) \|U_0\|_{H^{0,s}} \leq 2 \|U_0\|_{H^{0,s}}. \end{aligned}$$

Then we can write :

$$C_{F,\rho,s,U_0} (\|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\overline{U}_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}) \leq C_{F,\rho,s,U_0} (1 + \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2).$$

Replacing R_ε by its value and using (4.30) we finally get :

$$\begin{aligned} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \nu_{0,\varepsilon} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 &\leq C(\varepsilon^{\beta\eta_0} + \varepsilon^{1+\alpha-2\beta})^2 + C\|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 \\ &\quad + C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma)} + \Phi(\varepsilon) \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}, \end{aligned}$$

where

$$\Phi(\varepsilon) = C_{F,\rho,s,U_0} (\varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma)} + \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4} - \frac{11}{2}\beta(1+\gamma)}).$$

In order to set up the usual bootstrap argument let us define :

$$T_\varepsilon = \sup\{t \in]0, T_\varepsilon^*[\text{ such that } \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_t H^{0,s}} \leq \frac{\nu_{\varepsilon,0}}{2C}\}.$$

We are sure that $T_\varepsilon > 0$ as soon as :

$$\|V_\varepsilon(0)\|_{H^{0,s}} \leq C(\varepsilon^{\beta\eta_0} + \varepsilon^{1+\alpha-2\beta}) \leq \frac{\nu_{\varepsilon,0}}{4C},$$

that is (when ε is small enough) when $(\nu_{0,\varepsilon} = \min(1, \rho)\varepsilon^\alpha)$:

$$\begin{cases} \beta\eta_0 > \alpha \\ 1 + \alpha - 2\beta > \alpha. \end{cases}$$

For all $T > T_\varepsilon$,

$$\begin{aligned} \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \frac{\nu_{0,\varepsilon}}{2} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 &\leq C(\varepsilon^{\beta\eta_0} + \varepsilon^{1+\alpha-2\beta})^2 \\ &\quad + C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma)} + \Phi(\varepsilon) \|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2. \end{aligned}$$

To be able to conclude we need to adjust the parameters : in order to complete the bootstrap argument, we need the following estimates :

$$\begin{cases} \Phi(\varepsilon) \leq \frac{1}{2} \\ C_{F,\rho,s,U_0} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma)} + C(\varepsilon^{\beta\eta_0} + \varepsilon^{1+\alpha-2\beta})^2 \leq \left(\frac{\varepsilon^\alpha}{4C}\right)^2 \end{cases} \quad (4.35)$$

As ε goes to zero, it is sufficient to require :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\eta_0} < \beta < \frac{1}{2} \\ \frac{1-7\alpha}{4} - \frac{11}{2}\beta(1+\gamma) > 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

We refer to the last section for a discussion on the parameters. For now let us just say that if $\alpha < \frac{1}{51}$ we can choose parameters β and γ satisfying (4.36). Plugging it into the energy estimates allows us to write that for all $T > T_\varepsilon$,

$$\|V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^\infty H^{0,s}}^2 + \nu_{0,\varepsilon} \|\nabla_h V_\varepsilon\|_{\tilde{L}_T^2 H^{0,s}}^2 \leq \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{8C} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{\nu_0}{2C}\right)^2. \quad (4.37)$$

And then by contradiction it gives us that $T_\varepsilon = T_\varepsilon^* = \infty$ and V_ε and the solution U_ε are global in time. Moreover U_ε goes to zero in the sense that the energy estimate (4.37) for $V_\varepsilon = U_\varepsilon - \overline{U}_\varepsilon$ is bounded by a positive power of ε and goes to zero. And, with this classical bootstrap argument, we have proven the second part of Theorem 4.5.1 : the solution U_ε goes to zero in a certain way.

Remark 4.5.6 We have shown that the solution U_ε goes to zero in a certain way but we didn't mention anywhere the quasi-geostrophic system. Indeed the solution of the anisotropic quasi-geostrophic system with zero initial data is zero.

Remark 4.5.7 Technical problems forced $\alpha < \frac{1}{29}$ but the question of the optimal value of α is open (see the next paragraph).

4.5.4 Discussion on the parameter α

In the previous section we concluded the bootstrap argument thanks to a precise estimation of the parameters β and γ (α , η and p being given in the beginning). In order to conclude the classical bootstrap method, we required that the parameters satisfy (4.35). That implies :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\eta_0} < \beta < \frac{1}{2} \\ \frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma) > \alpha \\ \frac{1-3\alpha}{4} - \frac{9}{2}\beta(1+\gamma) > 0 \\ \frac{1-7\alpha}{4} - \frac{11}{2}\beta(1+\gamma) > 0. \end{cases}$$

Choosing $\gamma = 1$, so $\eta_0 = \eta$ and the problem is then, given $\alpha > 0$ and $\eta > 0$, to find β so that :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\eta} < \beta < \frac{1}{2} \\ 1 > 7\alpha + 22\beta(1+\gamma). \end{cases} \quad (4.38)$$

Choosing $\eta > 0$ large enough and $\beta > 0$ such that $\alpha < \beta\eta$ and $\alpha \sim \beta\eta$, simple calculations imply

$$\alpha < \frac{1}{29 + \frac{44}{\eta}}.$$

In any cases, the greatest possible value for the parameter α is $\frac{1}{29}$ and in both cases the greatest we want to choose α (nearest $\alpha < \frac{1}{29}$), the greatest have to be η which means we must require more regularity on the initial data.

Les systèmes MHD en rotation rapide

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie un fluide anisotrope conducteur en rotation avec une charge électrique. Le but est d'appliquer les méthodes développées dans les chapitres précédents pour étudier l'existence, l'unicité et les comportements du fluide quand la rotation est rapide, c'est-à-dire quand le nombre de Rossby ε tend vers zéro. Plus précisément, on considère un fluide conducteur incompressible de vitesse U , de viscosité cinétique ν , de densité ρ , de conductivité σ , de perméabilité magnétique μ_0 et de diffusivité magnétique η , soumis à la pression p , générant un champ magnétique B , et tournant autour de l'axe e_3 avec une vitesse angulaire Ω_0 . On suppose qu'il remplit un domaine de taille L . Les paramètres adimensionnels

$$E = \nu\Omega_0^{-1}L^{-2}; \quad \varepsilon = U\Omega_0^{-1}L^{-1}; \quad B^2\rho^{-1}\Omega_0^{-1}\mu_0^{-1}\eta^{-1}; \quad \theta = UL\eta^{-1},$$

désignent respectivement le nombre d'Ekman, le nombre de Rossby, le nombre d'Elsasser et le nombre de Reynolds magnétique. L'anisotropie s'exprime par le fait que l'on considère le cas où les termes de diffusivité (viscosité et diffusivité magnétique) s'annulent dans la direction verticale. On rappelle d'abord le modèle adimensionnel venant de la modélisation du noyau de la terre, faite par B. Desjardins, E. Dormy et E. Grenier (voir [36]).

(MHD^ε)

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u + u \cdot \nabla u + \frac{\nabla p}{\varepsilon} - \frac{E}{\varepsilon} \Delta u + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} = -\frac{\Lambda}{\varepsilon} (\text{curl } b) \wedge e_3 + \frac{\Lambda \theta}{\varepsilon} (\text{curl } b) \wedge b \\ \partial_t b + u \cdot \nabla b = b \cdot \nabla u - \frac{\text{curl } (u \wedge e_3)}{\theta} + \frac{\Delta b}{\theta} \\ \text{div } u = \text{div } b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0), \end{array} \right.$$

où u est le champ des vitesses et b le champ magnétique. Dans [36], B. Desjardins, E. Dormy et E. Grenier considèrent la condition asymptotique suivante

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \Lambda = \mathcal{O}(1), \quad \varepsilon\theta \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad E \sim \varepsilon^2, \quad (5.1)$$

qui correspond bien au cas du noyau de la terre. On suppose aussi que l'on travaille à très grande échelle et que l'on peut considérer que le fluide remplit l'espace \mathbb{R}^3 tout entier.

Rappelons que

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} b) \wedge b &= b \cdot \nabla b - \frac{1}{2} \nabla |b|^2, \\ (\operatorname{curl} b) \wedge e_3 &= \partial_3 b - \nabla b_3, \end{aligned}$$

et

$$\operatorname{curl} (u \wedge e_3) = \partial_3 u.$$

Donc dans le cas anisotrope où les termes de diffusivité s'annulent dans la direction verticale, le système (MHD^ε) peut se récrire comme suit

$$(MHD_h^\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u - \frac{E}{\varepsilon} \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} + \frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_3 b &= -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \frac{1}{\theta} \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \frac{1}{\theta} \partial_3 u &= 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b &= 0 \\ (u(0), b(0)) &= (u_0, b_0). \end{cases}$$

On observe que dans le système (MHD^ε) , les termes $\frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_3 b$ et $\frac{1}{\theta} \partial_3 u$ sont de mauvais termes car on perd une dérivée verticale dans les estimations d'énergie. Dans le cadre de ce chapitre, on se contente de considérer le cas particulier où les paramètres E , Λ et θ sont choisis de façon à ce que $\frac{\Lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$ et que les conditions (5.1) sont satisfaites. Quand $\frac{\Lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\theta}$, les mauvais termes $\frac{\Lambda}{\varepsilon} \partial_3 b$ et $\frac{1}{\theta} \partial_3 u$ disparaissent dans nos estimations a priori, par intégration par parties. On remarque aussi que si on estime séparément les termes $b \cdot \nabla b$ dans l'équation de u et $b \cdot \nabla u$ dans l'équation de b , on perd une dérivée en la variable verticale dans les estimations d'énergie, à cause de la viscosité verticale nulle. L'idée est donc de grouper ces deux termes dans nos estimations d'énergie et d'utiliser le fait que la troisième composante (u^3, b^3) est plus régulière en la variable verticale, compte tenu de la propriété de divergence nulle.

Dans un premier temps, on considère le système suivant avec une rotation fixée et on montre l'existence locale (globale pour des données petites) et l'unicité de la solution forte de ce système.

$$(MHD_h^{\varepsilon,g}) \quad \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e_3}{\varepsilon} + \mu \partial_3 b &= -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \nu' \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \mu \partial_3 u &= 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b &= 0 \\ (u(0), b(0)) &= (u_0, b_0). \end{cases}$$

On remarque que, pour $\frac{\Lambda}{\varepsilon} = \frac{1}{\theta} = \mu$, $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ est bien une généralisation de (MHD_h^ε) .

Rappelons que

$$\mathbf{H}^{\sigma,s} = \left\{ u \in \mathcal{S}' \mid \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_h|^2)^\sigma (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}|^2 d\xi < +\infty \right\},$$

et que $\mathbf{H}_{div}^{\sigma,s}$ est l'espace des champs de vecteurs u dont les composantes u^i , avec $i = 1, 2, 3$, appartiennent à $\mathbf{H}^{\sigma,s}$ et $\operatorname{div} u = 0$. Dans les sections 5.3, 5.4 et 5.5, on montre l'existence locale (globale pour des données petites) et l'unicité de la solution forte du système $(MHD_h^{\varepsilon,g})$. On a le théorème suivant

Théorème 5.1.1 *Soit $s > \frac{1}{2}$. Soit $u_0, b_0 \in \mathbf{H}_{div}^{0,s}$. Alors, il existe un temps $T > 0$ tel que le système $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ admet une unique solution*

$$u, b \in \mathbf{L}^\infty([0, T], \mathbf{H}_{div}^{0,s}) \cap \mathbf{C}([0, T], \mathbf{H}_{div}^{0,s}) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u, \nabla_h b \in \mathbf{L}^2([0, T], \mathbf{H}_{div}^{0,s}).$$

De plus, il existe une constante $c > 0$ telle que si $\|u_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|b_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq c \min\{\nu, \nu'\}$, alors la solution est globale

$$u, b \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s}) \cap \mathbf{C}(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s}) \quad \text{avec} \quad \nabla_h u, \nabla_h b \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s}).$$

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée au cas où ε est petit. On considérera le système (MHD_h^ε) dans le cas où les paramètres E, ε, Λ et θ sont “bien choisis”, et on étudiera l'existence globale de la solution forte pour des données grandes. On pose $\Lambda = 1$, $\theta = \varepsilon$ et $E = \varepsilon^{1+\alpha}$, avec $\alpha > 0$ assez petit que l'on précisera dans la section 5.6. Ce choix de E est fait pour pouvoir obtenir de “bonnes estimations” de Strichartz. On observe ici que la diffusivité magnétique est d'ordre ε^{-1} . Ce terme sera très grand quand ε tend vers 0, et produit un très grand effet régularisant. On considère donc le cas plus difficile où la viscosité et la diffusivité sont de même ordre ε^α avec $\alpha > 0$ petit. Ce choix vient aussi d'un problème technique que l'on précisera dans la section 5.6. Concrètement, dans la section 5.6, on va montrer l'existence globale de la solution forte pour des données grandes du système suivant

$$(MHD_{Glo}^\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \varepsilon^\alpha \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e}{\varepsilon} + \frac{\partial_3 b}{\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon} \nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \varepsilon^\alpha \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \frac{\partial_3 u}{\varepsilon} = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0). \end{array} \right.$$

La méthode de démonstration consiste en l'utilisation d'estimations d'énergie et d'estimations de Strichartz. Cette méthode est due à J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier ([26]) (dans le cas où les termes de diffusivité sont fixés). Dans le cas où la viscosité et la diffusivité magnétique sont de taille ε^α , on montre de nouvelles estimations Strichartz, grâce auxquelles on peut compenser le faible effet régularisant dû aux termes de diffusivité petits.

Soit $Y_{s,\eta,p} = \mathbf{H}_{div}^{0,s} \cap \mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p \cap \mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{H}^{\eta,\eta+s}$ (voir Chapitre 3 pour la définition de cet espace). Dans la section 5.6, on montre le résultat suivant :

Théorème 5.1.2 ($E = \varepsilon^{1+\alpha}$, $\Lambda = 1$, $\theta = \varepsilon$) *Soient $s > \frac{1}{2}$, $\eta > 0$, $1 \leq p < 2$. On peut choisir $\alpha_0 > 0$ de sorte que, pour tout $0 < \alpha \leq \alpha_0$, pour tout $r_0 > 0$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, et pour toutes données initiales $u_0, b_0 \in Y_{s,\eta,p}$ satisfaisant $\|u_0\|_{Y_{s,\eta,p}}^2 + \|b_0\|_{Y_{s,\eta,p}}^2 \leq r_0^2$, le système (MHD_{Glo}^ε) admet une unique solution forte, globale en temps, $(u, b) \in C_b(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s})$ avec $(\nabla_h u, \nabla_h b) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{div}^{0,s})$.*

Les estimations de Strichartz anisotropes basées sur celles de [26] jouent un rôle clé dans la démonstration de ce théorème. Cependant, ici la viscosité ν n'est pas fixée mais tend vers 0 quand ε tend vers 0. Dans les estimations d'énergie, on a un terme de l'ordre $\frac{1}{\nu}$ qui fait exploser les normes en temps. On adapte donc la méthode utilisée dans le chapitre 3.

5.2 Préliminaires

Dans cette section, on rappelle rapidement quelques notions de découpage dyadique et on donne les résultats préliminaires importants que l'on utilisera dans les sections suivantes. Une étude plus détaillée est donnée dans l'appendice A.2. Soit $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction paire telle que le support de ψ est contenu dans la boule $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{4}{3})$ et telle que ψ est identiquement égale à 1 dans un voisinage de la boule $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{3}{4})$ et soit

$$\varphi(\xi) = \psi\left(\frac{\xi}{2}\right) - \psi(\xi).$$

On note \mathcal{F} et \mathcal{F}^{-1} la transformation de Fourier et son inverse (on utilise aussi la notation \widehat{u} pour la transformée de Fourier de u). Les opérateurs de découpage dyadique en fréquences sont définis comme suit.

Définition 5.2.1 *Pour toute distribution tempérée u , on pose*

$$\begin{aligned} \Delta_j^h u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(\frac{|\xi_h|}{2^j}\right)\widehat{u}(\xi)\right), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^h u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(|\xi_h|)\widehat{u}(\xi)\right), \\ \Delta_j^h u &= 0, \quad \forall j \leq -2 \\ \Delta_k^v u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\varphi\left(\frac{|\xi_3|}{2^k}\right)\widehat{u}(\xi)\right), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^v u &= \mathcal{F}^{-1}\left(\psi(|\xi_3|)\widehat{u}(\xi)\right), \\ \Delta_k^v u &= 0, \quad \forall k \leq -2. \end{aligned}$$

Toute distribution tempérée peut s'écrire comme

$$u = \sum_{j,k \geq -1} \Delta_j^h \Delta_k^v u. \quad (5.2)$$

Maintenant, on rappelle le lemme de Bernstein (voir [21], [59] et [83] pour une démonstration) qui permet d'estimer la dérivée des fonctions dont la transformée de Fourier est localisée en fréquences.

Lemme 5.2.2 (Lemme de Bernstein) *Soit $0 < r_1 < r_2$. Il existe une constante positive C_0 telle que pour tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dont le support de la transformation de Fourier est contenu dans $2^q \mathcal{A}_{r_1, r_2}$, où $\mathcal{A}_{r_1, r_2} = \{\xi \in \mathbb{R} : r_1 \leq |\xi| \leq r_2\}$, on a*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (5.3)$$

et

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{p'_1} \mathbf{L}_v^{p'_2}} \leq C_0 2^{q\left(\frac{2}{p_1} - \frac{2}{p'_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'_2}\right)} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1 \leq p'_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq p'_2. \quad (5.4)$$

La norme de $\mathbf{H}^{\sigma,s}$ peut donc se récrire sous forme d'une somme de termes dyadiques.

Lemme 5.2.3 *Supposons que $u \in \mathbf{H}^{\sigma,s}$. Alors,*

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} = \left\{ \sum_{j,k \geq -1} 2^{2(j\sigma+ks)} \|\Delta_j^h \Delta_k^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

On aura aussi besoin du lemme suivant qui donne une estimation de chaque terme Δ_q^v .

Lemme 5.2.4 *Supposons que u appartient à $\mathbf{H}^{\sigma,s}$. Alors, il existe une suite de nombres positifs $\{c_q(u, \sigma, s)\}$ de carré sommable telle que*

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq c_q(u, \sigma, s) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}}.$$

Dans le cas où $\sigma = 0$ ou dans le cas où il n'y a pas de confusion possible, on va écrire tout simplement $c_q(u)$ au lieu de $\{c_q(u, \sigma, s)\}$. Dans le cas où $\sigma = 0$, l'inégalité ci-dessus s'écrit simplement

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2} \leq c_q(u, \sigma) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}.$$

On rappelle maintenant les lois de produits dans les espaces de Sobolev anisotropes. Pour les espaces de Sobolev isotropes sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, on a la loi classique suivante

Théorème 5.2.5 *Soit $s, t < \frac{d}{2}$ et $s + t > 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in \mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)$ et tout $b \in \mathbf{H}^t(\mathbb{R}^d)$, le produit uv appartient à $\mathbf{H}^{s+t-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\|ab\|_{\mathbf{H}^{s+t-\frac{d}{2}}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|a\|_{\mathbf{H}^s(\mathbb{R}^d)} \|b\|_{\mathbf{H}^t(\mathbb{R}^d)}. \quad (5.5)$$

Dans le cas anisotrope, on a le résultat suivant qui a été prouvé dans [59].

Théorème 5.2.6 *Soit $s, t < 1$, $s + t > 0$, et $s', t' < \frac{1}{2}$, $s' + t' > 0$. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $a \in \mathbf{H}^{s,s'}(\mathbb{R}^3)$ et tout $b \in \mathbf{H}^{t,t'}(\mathbb{R}^3)$, le produit uv appartient à $\mathbf{H}^{s+t-1, s'+t'-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ et*

$$\|ab\|_{\mathbf{H}^{s+t-1, s'+t'-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|a\|_{\mathbf{H}^{s,s'}(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{\mathbf{H}^{t,t'}(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.6)$$

Dans la section 5.5, on aura besoin de plus de régularité dans la direction verticale. Au lieu du théorème 5.2.6, on utilisera alors le théorème suivant, qui est une généralisation du théorème 1.4 de [62] (voir aussi la remarque 3 de [62]). La démonstration de ce théorème est donnée dans l'appendice A.3.

Théorème 5.2.7 *Soit $\sigma, \sigma' < 1$ et $\sigma + \sigma' > 0$. Soit $s_0 > \frac{1}{2}$ et $s_1 \leq s_0$ tel que $s_0 + s_1 > 0$. Alors, il existe une constante C telle que pour tout $a \in \mathbf{H}^{\sigma,s_0}(\mathbb{R}^3)$, et tout $b \in \mathbf{H}^{\sigma',s_1}(\mathbb{R}^3)$, le produit uv appartient à $\mathbf{H}^{\sigma+\sigma'-1, s_1}$ et*

$$\|ab\|_{\mathbf{H}^{\sigma+\sigma'-1, s_1}(\mathbb{R}^3)} \leq C \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}(\mathbb{R}^3)} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}(\mathbb{R}^3)}. \quad (5.7)$$

Tout au long de ce travail, on notera toujours (c_q) (respectivement (d_q)) une suite de carré sommable (respectivement une suite sommable) de constantes positives. Dans la suite, C désignera une constante générique positive qui peut changer de ligne à ligne.

Rappelons maintenant les estimations importantes sur lesquelles sont basées toutes les démonstrations d'existence et d'unicité de la solution. Ces estimations résultent du théorème 5.2.7 ci-dessus (voir aussi [26])

Lemme 5.2.8 *Pour tout $s_0 > \frac{1}{2}$ et $s_1 \leq s_0$ tels que $s_0 + s_1 > 0$, il existe une constante C telle que, pour tous les champs de vecteurs u et v dans $\mathbf{H}_{div}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$ de divergence nulle, dont le gradient horizontal appartient à $\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$,*

$$\left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right| \leq C d_q 2^{-2qs_1} \left(\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}(\mathbb{R}^3)} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}(\mathbb{R}^3)} \right. \\ \left. + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}(\mathbb{R}^3)}^{\frac{3}{2}} \right), \quad (5.8)$$

où $\{d_q\}$ est une suite sommable de constantes positives et $\|(d_q)\|_{\ell^1} \leq 1$.

En fait, dans le cadre du système de MHD, nous aurons besoin du résultat plus général suivant :

Lemme 5.2.9 *Soient u, v et w des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 dans $\mathbf{H}_{div}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$ de divergence nulle, dont le gradient horizontal appartient à $\mathbf{H}^{0,s_0}(\mathbb{R}^3)$. Soit $s_0 > \frac{1}{2}$ et $s_1 \leq s_0$ tels que $s_0 + s_1 > 0$. Alors on a :*

$$\left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v w \rangle + \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla w) | \Delta_q^v v \rangle \right| \\ \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \left[\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ \left. + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s_1}}^{\frac{1}{2}} \right] \quad (5.9)$$

où (d_q) est une suite sommable de nombres positifs et $\|(d_q)\|_{\ell^1} \leq 1$.

La démonstration de ces deux lemmes sera donnée dans l'appendice A.4.

On remarque que dans ce chapitre, on montre non seulement l'existence de la solution des systèmes de la magnéto-hydrodynamique dans l'espace $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ (avec le gradient horizontal dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$) mais aussi dans un espace plus régulier en temps que l'on définit comme suit.

Définition 5.2.10 *Soit $p \geq 2$ et I un intervalle de temps. On définit les espaces $\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})$ comme l'adhérence de l'ensemble des fonctions régulières pour la norme*

$$\|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})} = \left(\sum_{q \geq -1} 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On remarque que grâce au lemme A.1.7 (voir l'appendice A.1), on trouve que pour tout $p \geq 2$, on a

$$\|u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})} = \left(\int_I \left(\sum_{q \geq -1} 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{p}{2}} dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{q \geq -1} 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^p(I, \mathbf{L}^2)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\tilde{\mathbf{L}}^p(I, \mathbf{H}^{0,s})}.$$

Dans le cadre de cette thèse, on utilise souvent une version intégrale des deux lemmes ci-dessus.

Lemme 5.2.11 *Pour tout $s_0 > \frac{1}{2}$ et $s_1 \leq s_0$ tels que $s_0 + s_1 > 0$, il existe une constante positive C telle que, pour tous les champs de vecteurs u et v dans $\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}_{div}^{0, s_0}(\mathbb{R}^3))$ de divergence nulle, dont le gradient horizontal appartient à $\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0}(\mathbb{R}^3))$,*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)} \right| dt \\ & \leq C d_q 2^{-2qs_1} \left(\|\nabla_h u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})} \|v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})} \|\nabla_h v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})} \right. \\ & \quad \left. + \|u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})} \|\nabla_h u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})} \|v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})} \|\nabla_h v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})} \right), \end{aligned} \quad (5.10)$$

où $\{d_q\}$ est une suite sommable de constantes positives et $\|(d_q)\|_{\ell^1} \leq 1$.

Lemme 5.2.12 *Soient u, v et w des champs de vecteurs sur \mathbb{R}^3 dans $\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}_{div}^{0, s_0}(\mathbb{R}^3))$ de divergence nulle, dont le gradient horizontal appartient à $\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0}(\mathbb{R}^3))$. Soit $s_0 > \frac{1}{2}$ et $s_1 \leq s_0$ tels que $s_0 + s_1 > 0$. Alors on a :*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v w \rangle + \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla w) | \Delta_q^v v \rangle \right| dt \\ & \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left[\|u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad + \|u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \left. + \|\nabla_h u\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0, s_0})}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\widetilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0, s_1})}^{\frac{1}{2}} \right], \end{aligned} \quad (5.11)$$

où (d_q) est une suite sommable de nombres positifs et $\|(d_q)\|_{\ell^1} \leq 1$.

Finalement, on aura besoin du lemme ci-dessous, qui est très simple et moins fort que les lemmes 5.2.8 et 5.2.9.

Lemme 5.2.13 *Soient u, v des champs de vecteurs dans $\mathbf{H}^{0, s}(\mathbb{R}^3)$ avec $\text{supp}(\widehat{v}) \subset B(0, R)$. Soit $s > \frac{1}{2}$. Alors il existe une suite de nombres positifs (c_d) tels que $\|(c_d)\|_{\ell^2} \leq 1$ et :*

$$\|\Delta_q^v(u \cdot \nabla v)\|_{\mathbf{L}^2} \leq C(R) c_q 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0, s}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0, s}}. \quad (5.12)$$

5.3 Existence globale pour des données petites

On commence par montrer la deuxième partie du Théorème 5.1.1, c'est-à-dire l'existence globale d'une solution forte de $(MHD_h^{\varepsilon, g})$ pour des données petites. Sans perte de généralité, on considère le cas où $\nu = \nu'$ pour simplifier les notations. Le cas où $\nu \neq \nu'$

se traite de la même manière. Pour la démonstration, on va utiliser la méthode de Friedrichs, qui consiste en l'approximation du système $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ par des systèmes tronqués en fréquences. On définit les opérateurs de troncature

$$J_N u = \mathcal{F}^{-1} (\mathbf{1}_{B(0,N)} \widehat{u}).$$

Remarquons qu'en utilisant la condition de divergence nulle pour u et b , on peut calculer le terme de pression. En effet, si on prend la divergence des équations en u , on obtient

$$\tilde{p} = -\Delta^{-1} \left[\sum_{i,j} [\partial_i \partial_j (u^i u^j) - \partial_i \partial_j (b^i b^j)] + \frac{1}{\varepsilon} (\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2) \right]. \quad (5.13)$$

Considérons les systèmes approchés suivants :

$$(MHD^n) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_n + J_n (J_n u_n \cdot \nabla J_n u_n) - J_n (J_n b_n \cdot \nabla J_n b_n) - \nu J_n \Delta_h u_n + \mu \partial_3 J_n b_n \\ \quad + J_n \left(\frac{J_n u_n \wedge e_3}{\varepsilon} \right) = J_n \nabla \Delta^{-1} \left[\sum_{i,j} \partial_i \partial_j (J_n u_n^i J_n u_n^j - J_n b_n^i J_n b_n^j) \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{\varepsilon} (\partial_2 J_n u_1 - \partial_1 J_n u_2) \right] \\ \partial_t b_n - J_n (J_n b_n \cdot \nabla J_n u_n) + J_n (J_n u_n \cdot \nabla J_n b_n) - \nu J_n \Delta_h b_n + \mu \partial_3 J_n u_n = 0 \\ \operatorname{div} u_n = \operatorname{div} b_n = 0, \\ u_n|_{t=0} = J_n u_0; \quad b_n|_{t=0} = J_n b_0. \end{array} \right.$$

Il est clair que, pour chaque n , les opérateurs bilinéaires sont continus de $\mathbf{L}^2 \times \mathbf{L}^2$ dans \mathbf{L}^2 . De plus, la donnée initiale $\mathcal{U}_n(0) = \begin{pmatrix} u_n(0) \\ b_n(0) \end{pmatrix}$ appartient à \mathbf{L}^2 . Le système (MHD^n) devient donc une équation différentielle ordinaire. Alors, grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz, ce système approché admet une solution unique $\mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} u_n \\ b_n \end{pmatrix}$ locale en temps à valeurs dans \mathbf{L}^2 . Soit T_n le temps de vie maximal de la solution. Comme $J_n^2 = J_n$, $J_n \mathcal{U}_n = \begin{pmatrix} J_n u_n \\ J_n b_n \end{pmatrix}$ est aussi une solution de (MHD^n) . Par l'unicité, on en déduit que $J_n \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n$. Donc, \mathcal{U}_n est aussi solution du système suivant (que l'on note toujours (MHD^n)).

$$(MHD^n) \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_n + J_n (u_n \cdot \nabla u_n) - J_n (b_n \cdot \nabla b_n) - \nu \Delta_h u_n + \mu \partial_3 b_n + \frac{u_n \wedge e_3}{\varepsilon} \\ \quad = J_n \nabla \Delta^{-1} \left[\sum_{i,j} \partial_i \partial_j (u_n^i u_n^j - b_n^i b_n^j) + \frac{1}{\varepsilon} (\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2) \right] \\ \partial_t b_n - J_n (b_n \cdot \nabla u_n) + J_n (u_n \cdot \nabla b_n) - \nu \Delta_h b_n + \mu \partial_3 u_n = 0 \\ \operatorname{div} u_n = \operatorname{div} b_n = 0, \\ u_n|_{t=0} = J_n u_0; \quad b_n|_{t=0} = J_n b_0. \end{array} \right.$$

Grâce au fait que

$$\langle u \cdot \nabla u | u \rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle u \cdot \nabla b | b \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

et

$$\langle b \cdot \nabla u | b \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle b \cdot \nabla b | u \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

pour tous champs de vecteurs à divergence nulle u et b suffisamment réguliers, on a les égalités

$$\langle J_n(u_n \cdot \nabla u_n) | u_n \rangle_{\mathbf{L}^2} = \langle J_n(u_n \cdot \nabla b_n) | b_n \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0,$$

et

$$\langle J_n(b_n \cdot \nabla u_n) | b_n \rangle_{\mathbf{L}^2} + \langle J_n(b_n \cdot \nabla b_n) | u_n \rangle_{\mathbf{L}^2} = 0.$$

Alors, l'estimation d'énergie dans \mathbf{L}^2 nous donne

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{U}_n(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu \|\nabla_h \mathcal{U}_n(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 = 0, \quad \forall t > 0, \quad (5.14)$$

où $\mathcal{U}_n(t) = \begin{pmatrix} u_n(t) \\ b_n(t) \end{pmatrix}$. La solution $\mathcal{U}_n(t)$ reste donc bornée dans $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ sur l'intervalle maximal d'existence $[0, T_n[$, et donc $T_n = +\infty$.

Maintenant, on montre que la solution est en fait bornée dans les espaces de Sobolev $\mathbf{H}^{0,s}$ avec $s > \frac{1}{2}$. Ensuite, par un argument classique de compacité et par passage à la limite dans les systèmes approchés (MHD^n), on peut démontrer l'existence globale de la solution de ($MHD_h^{\varepsilon,g}$) pour des données initiales petites.

Si on applique l'opérateur de localisation en fréquences verticales Δ_q^v au système (MHD^n), si on prend le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 du système obtenu avec $(\Delta_q^v u_n, \Delta_q^v b_n)$ et si on tient compte du fait que J_n et la projection de Leray \mathbb{P} sont des projections orthogonales, et que

$$\mathbb{P}\mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n, \quad J_n \mathcal{U}_n = \mathcal{U}_n,$$

on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^2}^2 &\leq |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| + |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| \\ &+ |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| + |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| \\ &+ \mu |\langle \partial_3 \Delta_q^v b_n | \Delta_q^v u_n \rangle| + |\langle \partial_3 \Delta_q^v u_n | \Delta_q^v b_n \rangle|. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Par intégration par parties, on a

$$\mu |\langle \partial_3 \Delta_q^v b_n | \Delta_q^v u_n \rangle| + |\langle \partial_3 \Delta_q^v u_n | \Delta_q^v b_n \rangle| = 0. \quad (5.16)$$

En intégrant (5.15) en temps, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n(t)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^2([0,t],\mathbf{L}^2)}^2 - \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq \int_0^t |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| ds + \int_0^t |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| ds \\ + \int_0^t |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| + |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| ds. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t],\mathbf{L}^2)}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^2([0,t],\mathbf{L}^2)}^2 - \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq 2 \int_0^t |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| ds + 2 \int_0^t |\langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| ds \\ + 2 \int_0^t |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v b_n \rangle| + |\langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v u_n \rangle| ds. \end{aligned} \quad (5.17)$$

L'estimation (5.10) nous donne

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v u_n \rangle \right| ds &\leq C d_q 2^{-2qs} \|u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2, \end{aligned} \quad (5.18)$$

où (d_q) est une suite sommable de constantes positives de somme égale à 1. De même, en utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \langle \Delta_q^v(u_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v b_n \rangle \right| dt &\leq C d_q 2^{-2qs} \left[\|\nabla_h u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \right. \\ &\quad \left. + \|u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{1}{2}} \|b_n\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h b_n\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Enfin, l'estimation (5.11) implique que

$$\begin{aligned} \int_0^t \left| \langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla u_n) | \Delta_q^v b_n \rangle + \langle \Delta_q^v(b_n \cdot \nabla b_n) | \Delta_q^v u_n \rangle \right| dt \\ \leq C d_q 2^{-2qs} \left[\|\nabla_h u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \right. \\ \left. + \|u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{1}{2}} \|b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h b_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^{\frac{3}{2}} \right] \\ \leq C d_q 2^{-2qs} \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Sommons les estimations (5.16) à (5.20). On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t],\mathbf{L}^2)}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^2([0,t],\mathbf{L}^2)}^2 \\ \leq \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n(0)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2C d_q 2^{-2qs} \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2. \end{aligned} \quad (5.21)$$

En multipliant les équations (5.21) par 2^{2qs} et ensuite en sommant en q , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \nu \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\ \leq \|\mathcal{U}_n(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + 2C \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Soit $c = \frac{1}{4C}$ et supposons maintenant que $\|\mathcal{U}_n(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \frac{c\nu}{2}$. Soit T_n^* le temps maximal tel que $\|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq (c\nu)^2$, pour tout $0 < t < T_n^*$. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\mathcal{U}_n(\cdot)$ est continue en temps à valeurs dans \mathbf{L}^2 , donc $\Delta_q^v \mathcal{U}_n(\cdot)$ l'est aussi. Par conséquent, $\|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,\cdot],\mathbf{L}^2)}$ est continue en temps. Comme

$$\sup_{0 < t < t_0} 2^{qs} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t],\mathbf{L}^2)} = 2^{qs} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t_0],\mathbf{L}^2)},$$

et

$$\sum_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q^v \mathcal{U}_n\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t_0],\mathbf{L}^2)} = \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t_0],\mathbf{H}^{0,s})}^2,$$

l'application

$$t \mapsto \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}$$

est continue sur $[0, t_0]$ pour tout $t_0 \geq 0$ tel que $\|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t_0],\mathbf{H}^{0,s})} < +\infty$. Cela implique que $T_n^* > 0$.

En utilisant la propriété $\|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq (c\nu)^2$ dans l'inégalité (5.22), pour tout $0 < t < T_n^*$, on obtient

$$\|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \nu \|\nabla_h \mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq \frac{(c\nu)^2}{2} < (c\nu)^2. \quad (5.23)$$

L'inégalité (5.23) et la continuité de l'application $t \mapsto \|\mathcal{U}_n\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})}^2$ impliquent que $T_n^* = +\infty$.

La suite des solutions approchées $(\mathcal{U}_n)_n$ est donc bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ et $(\nabla_h \mathcal{U}_n)_n$ est bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$. En particulier, on trouve que la suite $(\mathcal{U}_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2)$. Alors, en utilisant l'équation vérifiée par \mathcal{U}_n , on montre que la suite $(\partial_t \mathcal{U}_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{-N})$ pour N assez grand ($N > \frac{3}{2}$ par exemple). Le théorème d'Arzela-Ascoli implique qu'il existe une sous-suite de $(\mathcal{U}_n)_n$ (que l'on note toujours par $(\mathcal{U}_n)_n$) qui tend vers \mathcal{U} dans $\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}_{loc}^{-N})$. Comme $(\mathcal{U}_n)_n$ est bornée dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2)$, par interpolation, on trouve que

$$\mathcal{U}_n(t) \rightarrow \mathcal{U}(t) \text{ dans } \mathbf{H}_{loc}^\delta \text{ pour tout } -N \leq \delta < 0.$$

Comme $(\mathcal{U}_n(t))_n$ est aussi bornée dans $\mathbf{H}_{loc}^{\delta'}$, pour tout $\delta' < \frac{1}{2}$, la loi de produit dans les espaces de Sobolev implique que

$$\mathcal{U}_n(t) \otimes \mathcal{U}_n(t) \rightarrow \mathcal{U}(t) \otimes \mathcal{U}(t) \text{ dans } \dot{\mathbf{H}}^{\delta+\delta'-\frac{3}{2}} \text{ pour tout } -N \leq \delta < 0,$$

et en particulier, que

$$\mathcal{U}_n(t) \otimes \mathcal{U}_n(t) \rightarrow \mathcal{U}(t) \otimes \mathcal{U}(t) \text{ dans } \mathcal{D}'.$$

En passant à la limite, il s'ensuit que $\mathcal{U}(t)$ vérifie les équations $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ au sens de distributions.

On remarque que $\mathcal{U}_n \rightharpoonup \mathcal{U}$ faiblement dans $\tilde{\mathbf{L}}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ et $\nabla_h \mathcal{U}_n \rightharpoonup \nabla_h \mathcal{U}$ faiblement dans $\tilde{\mathbf{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$. $(\mathcal{U}_n)_n$ est donc bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ et $(\nabla_h \mathcal{U}_n)_n$ est bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$. On en déduit que $\mathcal{U} \in \tilde{\mathbf{L}}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$ et que $\nabla_h \mathcal{U} \in \tilde{\mathbf{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})$.

5.4 Existence locale pour toute donnée initiale

Pour démontrer l'existence locale de la solution de $(MHD_h^{\varepsilon,g})$, on va décomposer le système en deux parties : une partie "hautes fréquences" et une partie "basses fréquences". Pour simplifier les notations, on fait la démonstration dans le cas $\nu = \nu'$. Le cas $\nu \neq \nu'$ se traite de la même manière. On écrit la donnée initiale $\mathcal{U}_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$ comme la somme suivante

$$\begin{cases} u_0 = J_N u_0 + (\mathbb{I} - J_N) u_0, \\ b_0 = J_N b_0 + (\mathbb{I} - J_N) b_0, \end{cases} \quad (5.24)$$

où N est grand et reste à déterminer.

On considère le système linéaire à basses fréquences suivant :

$$(MHD_N^{(L)}) \quad \begin{cases} \partial_t \bar{u}_N - \nu \Delta_h \bar{u}_N + \mu \partial_3 \bar{b}_N + \frac{1}{\varepsilon} \bar{u}_N \wedge e_3 = -\nabla \bar{p}_N, \\ \partial_t \bar{b}_N - \nu \Delta_h \bar{b}_N + \mu \partial_3 \bar{u}_N = 0, \\ \operatorname{div} \bar{u}_N = \operatorname{div} \bar{b}_N = 0, \\ \bar{u}_N(0) = J_N u_0, \bar{b}_N = J_N b_0. \end{cases}$$

En utilisant la même méthode d'énergie que dans la démonstration de l'existence globale de la solution, on peut montrer que $(MHD_N^{(L)})$ admet une unique solution globale $\bar{\mathcal{U}}_N = \begin{pmatrix} \bar{u}_N \\ \bar{b}_N \end{pmatrix}$ qui satisfait l'inégalité d'énergie suivante

$$\|\bar{\mathcal{U}}_N\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})}^2 + \nu \|\nabla_h \bar{\mathcal{U}}_N\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2(\mathbb{R}_+, \mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq 2 \|\mathcal{U}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} = C_0. \quad (5.25)$$

A partir de (5.25) et de la localisation en fréquences de $\bar{\mathcal{U}}_N$, on peut déduire les estimations suivantes.

$$\begin{cases} \|\bar{\mathcal{U}}_N(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \sqrt{C_0}, \quad \forall t > 0, \\ \|\nabla_h \bar{\mathcal{U}}_N(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq N \sqrt{C_0}, \\ \|\bar{\mathcal{U}}_N\|_{\mathbf{L}^p([0,T], \mathbf{H}^{0,s})} \leq \sqrt{C_0} T^{\frac{1}{p}}, \\ \|\nabla_h \bar{\mathcal{U}}_N\|_{\mathbf{L}^p([0,T], \mathbf{H}^{0,s})} \leq N \sqrt{C_0} T^{\frac{1}{p}}. \end{cases} \quad (5.26)$$

Supposons maintenant que $\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix}$ est une solution du système $(MHD_h^{\varepsilon,g})$. Si on fait la décomposition suivante

$$\begin{cases} u = \bar{u}_N + \omega, \\ b = \bar{b}_N + \beta, \end{cases} \quad (5.27)$$

on voit que $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \omega \\ \beta \end{pmatrix}$ est solution du système

$$(MHD_{Loc}) \quad \begin{cases} \partial_t \omega - \nu \Delta_h \omega + \omega \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \bar{u}_N + \bar{u}_N \cdot \nabla \omega - \beta \cdot \nabla \beta - \beta \cdot \nabla \bar{b}_N - \bar{b}_N \cdot \nabla \beta \\ \quad + \mu \partial_3 \beta + \frac{1}{\varepsilon} \omega \wedge e_3 = -\nabla \tilde{p} + \bar{b}_N \cdot \nabla \bar{b}_N - \bar{u}_N \cdot \nabla \bar{u}_N \\ \partial_t \beta - \nu \Delta_h \beta - \beta \cdot \nabla \omega - \beta \cdot \nabla \bar{u}_N - \bar{b}_N \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \beta + \omega \cdot \nabla \bar{b}_N + \bar{u}_N \cdot \nabla \beta \\ \quad + \mu \partial_3 \omega = \bar{b}_N \cdot \nabla \bar{u}_N - \bar{u}_N \cdot \nabla \bar{b}_N \\ \operatorname{div} \omega = \operatorname{div} \beta = 0 \\ \omega(0) = (\mathbb{I} - J_N) u_0, \quad \beta(0) = (\mathbb{I} - J_N) b_0. \end{cases}$$

Inversivement, si l'on montre l'existence locale de la solution \mathcal{V} de (MHD_{Loc}) , on obtiendra aussi l'existence locale de la solution \mathcal{U} de $(MHD_h^{\varepsilon,g})$.

Pour montrer l'existence locale d'une solution forte de (MHD_{Loc}) sur un intervalle de temps $[0, T]$, on va à nouveau utiliser la méthode de Friedrichs. On obtient ainsi l'existence de la solution approchée $\mathcal{V}_n = \mathcal{U}_n - \bar{\mathcal{U}}_N$. Ensuite, on va à nouveau appliquer la méthode de

compacité et passer à la limite dans les systèmes approchés. Dans ce but, on va montrer qu'il existe un temps T qui ne dépend que de $\|\mathcal{U}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}$ et de N , tel que la suite $\{\mathcal{V}_n\}_n$ soit uniformément bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$ et que $\{\nabla_h \mathcal{V}_n\}_n$ soit uniformément bornée dans $\tilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$. Pour cela, on démontre à nouveau des estimations d'énergie pour les systèmes approchés. Pour alléger les notations, on omet l'indice n dans l'équation approchée correspondant à (MHD_{Loc}) et on note simplement \mathcal{V} la solution \mathcal{V}_n de cette équation approchée.

Si l'on applique l'opérateur Δ_q^v aux deux premières équations du système (MHD_{Loc}) , et si l'on prend le produit scalaire de la quantité obtenue avec $(\Delta_q^v \omega, \Delta_q^v \beta)$, on arrive à l'inégalité :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2}^2 & \\
 & \leq |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| \\
 & + |\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| + |\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle|. \tag{5.28}
 \end{aligned}$$

En utilisant le lemme 5.2.8 avec $s_0 = s > \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}
 |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| & \leq Cd_q 2^{-2qs} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\
 & \leq Cd_q 2^{-2qs} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \tag{5.29}
 \end{aligned}$$

De même, l'estimation (5.8) et l'inégalité de Young nous donnent

$$\begin{aligned}
 |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| & \leq Cd_q 2^{-2qs} \left[\|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right. \\
 & \quad \left. + \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \right] \\
 & \leq Cd_q 2^{-2qs} (\|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \tag{5.30}
 \end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant l'estimation (5.9) et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
 & |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle + \langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle| \\
 & \leq Cd_q 2^{-2qs} \left[\|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right] \\
 & \leq Cd_q 2^{-2qs} (\|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2. \tag{5.31}
 \end{aligned}$$

Les estimations (5.9) et (5.26) impliquent que

$$\begin{aligned}
& |\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle + \langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle| \\
& \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h \bar{b}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \left[\|\bar{b}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \|\bar{b}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_h \bar{b}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \right] \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[\frac{C}{\nu^2} N^2 C_0^2 (\|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2) + \frac{C}{\nu} N^2 C_0 \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \frac{\nu}{16} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \right] \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[\left(\frac{C}{\nu^2} N^2 C_0^2 + \frac{C}{\nu} N^2 C_0 \right) \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \frac{\nu}{16} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \right]. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations (5.8), (5.26) et l'inégalité de Young, on obtient aussi

$$\begin{aligned}
|\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| & \leq C d_q 2^{-2qs} \left[\|\bar{u}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \bar{u}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right. \\
& \quad \left. + \|\nabla_h \bar{u}_N\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h \omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right] \\
& \leq d_q 2^{-2qs} \left[\left(\frac{C}{\nu} N^2 C_0^2 + \frac{C}{\nu} N^2 C_0 \right) \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \frac{\nu}{16} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \right]. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

De même, on a

$$|\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| \leq d_q 2^{-2qs} \left[\left(\frac{C}{\nu} N^2 C_0^2 + \frac{C}{\nu} N^2 C_0 \right) \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \frac{\nu}{16} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \right]. \tag{5.34}$$

Finalement, en utilisant le lemme 5.2.13, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et les estimations (5.26), on obtient

$$|\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} \sqrt{C_0} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \tag{5.35}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} C_0 \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \tag{5.36}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} \sqrt{C_0} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \tag{5.37}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \omega \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} C_0 \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \tag{5.38}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} \sqrt{C_0} \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \tag{5.39}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\bar{u}_N \cdot \nabla \bar{b}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} C_0 \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \tag{5.40}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} \sqrt{C_0} \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \tag{5.41}$$

$$|\langle \Delta_q^v(\bar{b}_N \cdot \nabla \bar{u}_N) | \Delta_q^v \beta \rangle| \leq C_N d_q 2^{-2qs} C_0 \|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}}. \tag{5.42}$$

En utilisant les estimations données par les inégalités (5.29) à (5.42) dans l'inégalité (5.28), on trouve finalement l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \frac{\nu}{2} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 & \leq C (\|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}) \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \\
& + \bar{C}_1(N, \nu, C_0) \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \bar{C}_2(N, C_0) (\|\omega\|_{\mathbf{H}^{0,s}} + \|\beta\|_{\mathbf{H}^{0,s}}). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Maintenant, on intègre l'inégalité (5.43) en temps, ce qui nous donne

$$\begin{aligned} \|\mathcal{V}(T)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \nu \int_0^T \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 dt \\ \leq \|\mathcal{V}(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C_1(N, \nu, C_0) T \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})}^2 + C_2(N, C_0) T \\ + C \left(\|\omega\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})} + \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})} \right) \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})}^2. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Rappelons que $\mathcal{V}(0) = \begin{pmatrix} (\mathbb{I} - J_N)u_0 \\ (\mathbb{I} - J_N)b_0 \end{pmatrix}$. Prenons N assez grand pour que

$$\sqrt{2} \|\mathcal{V}(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \frac{\nu}{2C} = c\nu.$$

En suite, choisissons T_0 assez petit pour que

$$\begin{cases} C_1(N, \nu, C_0) T < \frac{1}{2} \\ C_2(N, C_0) T < \frac{c^2 \nu^2}{4}. \end{cases}$$

Soit $T^* = \sup \left\{ 0 < T < T_0 : \|\omega\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]; \mathbf{H}^{0,s})} + \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t]; \mathbf{H}^{0,s})} \leq 2c\nu, \forall 0 \leq t \leq T \right\}$. Pour tout $T < T^*$, on a

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 \leq 2 \left[\|\mathcal{V}(0)\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C_2(N, C_0) T \right] \leq \frac{3}{2} c^2 \nu^2,$$

et par conséquent,

$$\|\omega\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})} + \|\beta\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T]; \mathbf{H}^{0,s})} \leq \sqrt{2 \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2} < 2c\nu.$$

On en conclut que $T^* = T_0$. De manière classique, on en déduit l'existence locale de (ω, β) et donc l'existence locale dans $[0, T_0]$ de la solution (u, b) . On remarque T_0 ne dépend que de C_0, N , et ν .

5.5 Unicité

Dans cette section, on veut montrer l'unicité de la solution. On remarque que l'on ne peut pas utiliser les mêmes estimations dans $\mathbf{H}^{0,s}$ que dans les sections précédentes à cause d'une perte de régularité. En effet, le problème provient des termes non-linéaires qui contiennent la dérivée verticale qui ne peut pas être compensée, parce que la viscosité verticale est nulle. On utilise donc la méthode due à D. Ifimie (voir [62]) pour montrer l'unicité des solutions par des estimations dans $\mathbf{H}^{0,s-1}$. Plus précisément, on montre le théorème suivant.

Théorème 5.5.1 *Soit $\mathcal{U}_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ et $\mathcal{U}_2 = \begin{pmatrix} u_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ deux solutions dans $\mathbf{C}_b([0, T_0], \mathbf{H}^{0,s})$ (avec $\nabla_h \mathcal{U}_1$ et $\nabla_h \mathcal{U}_2$ appartenant à $\mathbf{L}^2([0, T_0], \mathbf{H}^{0,s})$) de $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ avec même donnée initiale dans $\mathbf{H}^{0,s}$. Soient*

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - u_2 \\ b_1 - b_2 \end{pmatrix}.$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\frac{d}{dt} \|\mathcal{U}\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \leq C f(t) \|\mathcal{U}\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \quad (5.45)$$

où

$$f(t) = \left(1 + \|u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|b_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2\right) \\ \times \left(1 + \|\nabla_h u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|\nabla_h u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|\nabla_h b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + \|\nabla_h b_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2\right),$$

est une fonction intégrable sur tout l'intervalle de temps $[0, T]$, où T est fini et $T \leq T_0$.

À partir de ce théorème, par une intégration en temps et par la continuité de l'application $t \mapsto \|\mathcal{U}(t)\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2$, on déduit que \mathcal{U}_1 et \mathcal{U}_2 coïncident dans $\mathbf{H}^{0,s-1}$, et donc la solution de $(MHD_h^{\varepsilon,g})$ est unique dans $\mathbf{H}^{0,s}$ avec $s > \frac{1}{2}$.

Démonstration du théorème 5.5.1 :

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\nu = \nu'$. Pour la première étape de la démonstration du théorème 5.5.1, on observe que \mathcal{U} est solution du système suivant

$$(MHD_{U_{ni}}) \begin{cases} \partial_t u - \nu \Delta_h u + u_1 \cdot \nabla u + u \cdot \nabla u_2 - b_1 \cdot \nabla b - b \cdot \nabla b_2 + \frac{1}{\varepsilon} u \wedge e_3 + \mu \partial_3 b = -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \nu \Delta_h b - b_1 \cdot \nabla u - b \cdot \nabla u_2 + u_1 \cdot \nabla b + u \cdot \nabla b_2 + \mu \partial_3 u = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ u(0) = b(0) = 0. \end{cases}$$

En répétant les arguments que l'on a utilisés dans les sections précédentes, on trouve l'inégalité d'énergie suivante,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta_q^v \mathcal{U}\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \nu \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{U}\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \left| \langle \Delta_q^v (u_1 \cdot \nabla u) | \Delta_q^v u \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v (u_1 \cdot \nabla b) | \Delta_q^v b \rangle \right| \\ + \left| \langle \Delta_q^v (b_1 \cdot \nabla b) | \Delta_q^v u \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v (b_1 \cdot \nabla u) | \Delta_q^v b \rangle \right| + R, \quad (5.46)$$

où

$$R = \left| \langle \Delta_q^v (u \cdot \nabla u_2) | \Delta_q^v u \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v (b \cdot \nabla b_2) | \Delta_q^v u \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v (b \cdot \nabla u_2) | \Delta_q^v b \rangle \right| + \left| \langle \Delta_q^v (u \cdot \nabla b_2) | \Delta_q^v b \rangle \right|. \quad (5.47)$$

On rappelle que (d_q) désigne toujours une suite sommable de nombres positifs, et (c_q) une suite de carré sommable de nombres positifs. On peut supposer que (d_q) et (c_q) sont fixées dans ce qui suit.

En utilisant le lemme 5.2.8, et l'inégalité de Young, on obtient

$$\left| \langle \Delta_q^v (u_1 \cdot \nabla u) | \Delta_q^v u \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| \leq C d_q 2^{-2q(s-1)} \left(\|\nabla_h u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}} \right. \\ \left. + \|u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{3}{2}} \right) \\ \leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{16} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right], \quad (5.48)$$

et

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta_q^v(u_1 \cdot \nabla b) | \Delta_q^v b \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| &\leq C d_q 2^{-2q(s-1)} \left(\|\nabla_h u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}} \right. \\ &\quad \left. + \|u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{3}{2}} \right) \\ &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{16} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

De même, le lemme 5.2.9 et l'inégalité de Young impliquent que

$$\begin{aligned} &|\langle \Delta_q^v(b_1 \cdot \nabla b) | \Delta_q^v u \rangle + \langle \Delta_q^v(b_1 \cdot \nabla u) | \Delta_q^v b \rangle| \\ &\leq C d_q 2^{-2q(s-1)} \|\nabla_h b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \left[\|b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \|b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_h b_1\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) + \frac{\nu_h}{16} (\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.50)$$

On découpe R (voir (5.47)), c'est-à-dire les quatre autres termes trilineaires, en deux parties : la "partie horizontale" $Pa_h R$ (qui contient les dérivées dans les directions x_1 et x_2) et la "partie verticale" $Pa_v R$ (qui contient la dérivée dans la direction x_3). Pour la "partie horizontale", on utilise l'estimation pour $P_h(u, v, w)$ que l'on a faite dans la démonstration des lemmes 5.2.8 et 5.2.9 (voir Appendice, section A.4). On obtient alors l'inégalité

$$\begin{aligned} |Pa_h R| &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_h}{2} (\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \right]. \end{aligned} \quad (5.51)$$

En revanche, pour la partie verticale, on procède autrement. On a

$$|Pa_v R| \leq A + B + C + D,$$

où

$$\begin{aligned} A &= |\langle \Delta_q^v(u^3 \partial_3 u_2) | \Delta_q^v u \rangle|, \\ B &= |\langle \Delta_q^v(b^3 \partial_3 b_2) | \Delta_q^v u \rangle|, \\ C &= |\langle \Delta_q^v(b^3 \partial_3 u_2) | \Delta_q^v b \rangle|, \\ D &= |\langle \Delta_q^v(u^3 \partial_3 u_2) | \Delta_q^v b \rangle|. \end{aligned}$$

On découpe le terme A en trois parties en utilisant la décomposition de Bony en paraproducts et reste :

$$\begin{aligned} A_1 &= |\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v u^3 \Delta_{q'}^v(\partial_3 u_2) | \Delta_q^v u \rangle|, \\ A_2 &= |\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v(\partial_3 u_2) \Delta_{q'}^v u^3 | \Delta_q^v u \rangle|, \\ A_3 &= |\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} \Delta_{q'-i}^v(\partial_3 u_2) \Delta_{q'}^v u^3 | \Delta_q^v u \rangle|. \end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de Bernstein (5.3) et (5.4), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\operatorname{div} u = 0$ et que $s > \frac{1}{2}$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \|S_{q'-1}^v u^3\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^2} &\leq C \sum_{-1 \leq p \leq q'-2} 2^{-\frac{p}{2}} \|\Delta_p^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C \sum_{-1 \leq p \leq q'-2} 2^{-p(s-\frac{1}{2})} 2^{p(s-1)} \|\Delta_p^v \nabla_h u\|_{\mathbf{L}^2} \leq C \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

De l'estimation (5.52) et de l'inégalité de Young, on déduit que

$$\begin{aligned} A_1 &\leq \left\{ \sum_{|q'-q| \leq N_0} 2^{q'} \|S_{q'-1}^v u^3\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^2} \|\Delta_{q'}^v u_2\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \right\} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \\ &\leq C 2^{-2q(s-1)} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{3}{2}} \|u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \left(c_q^{(1)} \sum_{|q'-q| \leq N_0} 2^{(q-q')(s-1)} c_{q'}^{(2)} \right) \\ &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{48} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right], \end{aligned} \quad (5.53)$$

où

$$d_q = c_q^{(1)} \sum_{|q'-q| \leq N_0} 2^{(q-q')(s-1)} c_{q'}^{(2)}.$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} \|S_{q'-1}^v \partial_3 u_2\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^4} &\leq C \sum_{-1 \leq p \leq q'-2} 2^{\frac{3p}{2}} \|\Delta_p^v u_2\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \\ &\leq C 2^{q'} \sum_{-1 \leq p \leq q'-2} 2^{-p(s-\frac{1}{2})} \left(2^{ps} \|\Delta_p^v u_2\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \right) \left(2^{ps} \|\Delta_p^v \nabla_h u_2\|_{\mathbf{L}^2}^{\frac{1}{2}} \right) \\ &\leq C 2^{q'} \|u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} A_2 &\leq C \left\{ \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v \partial_3 u_2\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^4} 2^{-q'} \|\Delta_{q'}^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}^2} \right\} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \\ &\leq C 2^{-2q(s-1)} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{3}{2}} \|u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \left\{ c_q^{(1)} \sum_{|q'-q| \leq N_0} 2^{(q-q')(s-1)} c_{q'}^{(2)} \right\} \\ &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{48} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right]. \end{aligned} \quad (5.54)$$

En utilisant les inégalités de Bernstein (5.3) et (5.4) et l'inégalité de Young, on obtient aussi l'estimation

$$\begin{aligned}
 A_3 &\leq \left\{ \sum_{q' \geq q - N_0} \|\Delta_{q'}^v u^3\|_{\mathbf{L}^2} \|\Delta_{q'-i}^v \partial_3 u_2\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \right\} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^4} \\
 &\leq C 2^q \left\{ \sum_{q' \geq q - N_0} \|\Delta_{q'}^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}^2} \|\Delta_{q'-i}^v u_2\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \right\} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^4} \\
 &\leq C 2^{-2q(s-1)} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^{\frac{3}{2}} \|u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u_2\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \left\{ C_q^{(1)} \sum_{|q'-q| \leq N_0} 2^{(q-q')(2s-1)} [C_{q'}^{(2)}]^2 \right\} \\
 &\leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{48} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right]. \tag{5.55}
 \end{aligned}$$

En additionnant les inégalités (5.53) à (5.55), on obtient l'inégalité

$$A \leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{16} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right]. \tag{5.56}$$

De mêmes, on peut écrire les inégalités

$$B \leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) + \frac{\nu_h}{16} (\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \right], \tag{5.57}$$

$$C \leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \frac{\nu_h}{16} \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 \right], \tag{5.58}$$

$$D \leq d_q 2^{-2q(s-1)} \left[C f(t) (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) + \frac{\nu_h}{16} (\|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|\nabla_h b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \right]. \tag{5.59}$$

Finalement, on déduit des inégalités (5.46), (5.48), (5.49), (5.50), (5.51) et (5.56) à (5.59) que, pour tout $0 \leq t \leq T_0$,

$$\frac{d}{dt} (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2) \leq C f(t) (\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2 + \|b\|_{\mathbf{H}^{0,s-1}}^2).$$

Le théorème 5.5.1 est donc démontré. \blacksquare

5.6 Existence globale de la solution du système de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide dans le cas $\mathbf{E} = \varepsilon^{1+\alpha}$, $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{1}$, $\theta = \varepsilon$ pour des données grandes

Le but de cette section est de montrer le théorème 5.1.2. Le système considéré s'écrit comme suit.

$$(MHD_{Glo}^\varepsilon) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - \varepsilon^\alpha \Delta_h u + u \cdot \nabla u - b \cdot \nabla b + \frac{u \wedge e}{\varepsilon} + \frac{\partial_3 b}{\varepsilon} = -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t b - \varepsilon^\alpha \Delta_h b + u \cdot \nabla b - b \cdot \nabla u + \frac{\partial_3 u}{\varepsilon} = 0 \\ \operatorname{div} u = \operatorname{div} b = 0 \\ (u(0), b(0)) = (u_0, b_0). \end{array} \right.$$

La méthode que l'on utilise ici est la même que dans [80] (voir aussi le chapitre 3). On décompose le système (MHD_{Glo}^ε) en deux parties : le système linéaire $(MHD_{Glo}^{\varepsilon,L})$ et le système non-linéaire associé. En utilisant le fait que la solution du système linéaire est petite quand le nombre de Rossby ε tend vers 0 (voir les estimations de Strichartz), on montre que la solution locale de (MHD_{Glo}^ε) obtenue dans les sections précédentes reste proche de la solution du système linéaire, uniformément en temps, et donc reste bornée pour tout temps $t > 0$. On en déduit l'existence globale de la solution de (MHD_{Glo}^ε) .

5.6.1 Inégalités de Strichartz

Dans un premier temps, on étudie le système linéaire suivant :

$$(MHD_{Glo}^{\varepsilon,L}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \partial_t \bar{u} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{u} + \frac{\bar{u} \wedge e_3}{\varepsilon} + \frac{\partial_3 \bar{b}}{\varepsilon} = -\nabla \tilde{p} \\ \partial_t \bar{b} - \varepsilon^\alpha \Delta_h \bar{b} + \frac{\partial_3 \bar{u}}{\varepsilon} = 0 \\ \operatorname{div} \bar{u} = \operatorname{div} \bar{b} = 0 \\ \bar{u}|_{t=0} = \bar{u}_0 \\ \bar{b}|_{t=0} = \bar{b}_0, \end{array} \right.$$

où \bar{u}_0 et \bar{b}_0 sont des champs de vecteurs dont le support de la transformée de Fourier est dans la couronne $\mathcal{C}_{r,R} = \{\xi \in \mathbb{R}^3 : |\xi_h| \geq r, |\xi_3| \geq r, |\xi| \leq R\}$. Notre but ici est d'obtenir de "bonnes estimations" de Strichartz pour le vecteur $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$.

En appliquant le projecteur de Leray et ensuite la transformation de Fourier au système ci-dessus, on obtient le système,

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \widehat{u} + \varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \widehat{u} + \widehat{\mathbb{P}A\bar{u}} + \frac{i\xi_3 \widehat{b}}{\varepsilon} = 0 \\ \partial_t \widehat{b} + \varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \widehat{b} + \frac{i\xi_3 \widehat{u}}{\varepsilon} = 0 \\ \widehat{u}|_{t=0} = \widehat{u}_0 \\ \widehat{b}|_{t=0} = \widehat{b}_0. \end{array} \right.$$

où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On peut récrire le système ci-dessus comme suit

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{U} &= -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \widehat{U} - \begin{pmatrix} \widehat{\mathbb{P}A\bar{u}} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{i\xi_3 \widehat{b}}{\varepsilon} \\ \frac{i\xi_3 \widehat{u}}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ &= \mathbb{B}(\xi, \varepsilon) \widehat{U} \end{aligned}$$

avec

$$\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1 + \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & 0 & -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 & 0 & 0 & -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} \\ -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i \xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \end{bmatrix}.$$

On veut maintenant calculer les valeurs propres de $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ et les vecteurs propres correspondants. Posons :

$$\begin{cases} \eta_0 = \varepsilon^\alpha |\xi_h|^2; \eta_1 = \frac{i \xi_3}{\varepsilon} \\ \eta_2 = \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2}; \eta_3 = \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2}; \eta_4 = \frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} \\ \eta_5 = \frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2}; \eta_6 = \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2}. \end{cases} \quad (5.60)$$

On a

$$X\mathbb{I} - \mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} X + \eta_0 - \eta_2 & -\eta_6 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 \\ \eta_5 & X + \eta_0 + \eta_2 & 0 & 0 & \eta_1 & 0 \\ -\eta_3 & \eta_4 & X + \eta_0 & 0 & 0 & \eta_1 \\ \eta_1 & 0 & 0 & X + \eta_0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta_1 & 0 & 0 & X + \eta_0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_1 & 0 & 0 & X + \eta_0 \end{bmatrix}.$$

Donc,

$$\text{Det}(X\mathbb{I} - \mathbb{B}(\xi, \varepsilon)) \equiv P(Y) = Y^3 + (\eta_5 \eta_6 - 3\eta_1^2 - \eta_2^2) Y^2 - \eta_1^2 (\eta_5 \eta_6 - 3\eta_1^2 - \eta_2^2) Y - \eta_1^6$$

avec $Y = (X + \eta_0)^2$. En utilisant les relations simples

$$\begin{aligned} \eta_5 \eta_6 - \eta_2^2 &= \frac{(\xi_1^2 + \xi_3^2)(\xi_2^2 + \xi_3^2) - \xi_1^2 \xi_2^2}{\varepsilon^2 |\xi|^4} = \frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2 |\xi|^2} \\ \eta_1^2 &= -\frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2}, \end{aligned}$$

on obtient que

$$\begin{aligned} P(Y) &= Y^3 + \frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2} \left(\frac{1}{|\xi|^2} + 3 \right) Y^2 + \frac{\xi_3^4}{\varepsilon^4} \left(\frac{1}{|\xi|^2} + 3 \right) Y + \frac{\xi_3^6}{\varepsilon^6} \\ &= \left(Y + \frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2} \right) \left[Y^2 + 2 \frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{1}{2|\xi|^2} \right) Y + \frac{\xi_3^4}{\varepsilon^4} \right]. \end{aligned}$$

Comme

$$\Delta = \frac{\xi_3^4}{\varepsilon^4} \left(1 + \frac{1}{2|\xi|^2} \right)^2 - \frac{\xi_3^4}{\varepsilon^4} = \frac{\xi_3^4 (4|\xi|^2 + 1)}{4\varepsilon^4 |\xi|^4},$$

les racines de $P(Y)$ sont donc

$$Y = -\frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2}$$

$$Y = -\frac{\xi_3^2}{\varepsilon^2} \left(1 + \frac{1}{2|\xi|^2}\right) \pm \frac{\xi_3^2 \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}{2\varepsilon^2 |\xi|^2}$$

et par conséquent, les valeurs propres de $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ sont

$$\lambda_{1,2} = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm \frac{i\xi_3}{\varepsilon}$$

$$\lambda_{3,4} = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm \frac{i\xi_3}{\varepsilon} A$$

$$\lambda_{5,6} = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \mp \frac{i\xi_3}{\varepsilon} B$$

où

$$A = \frac{1 + \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}{2|\xi|} \quad (5.61)$$

et

$$B = \frac{-1 + \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}{2|\xi|}. \quad (5.62)$$

On remarque que $AB = 1$.

Calcul des vecteurs propres :

1. Valeur propre $\lambda_1 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{i\xi_3}{\varepsilon}$. On a

$$\begin{bmatrix} -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} + \frac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon|\xi|^2} & \frac{i\xi_3}{\varepsilon} - \frac{\xi_1\xi_2}{\varepsilon|\xi|^2} & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{\xi_2\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & -\frac{\xi_1\xi_3}{\varepsilon|\xi|^2} & \frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} \\ -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_1^1 \\ W_1^2 \\ W_1^3 \\ W_1^4 \\ W_1^5 \\ W_1^6 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$W_1 = \begin{pmatrix} W_1^1 \\ W_1^2 \\ W_1^3 \\ W_1^4 \\ W_1^5 \\ W_1^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2. Valeur propre $\lambda_2 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{i\xi_3}{\varepsilon}$. Des calculs analogues donnent

$$W_2 = \begin{pmatrix} W_2^1 \\ W_2^2 \\ W_2^3 \\ W_2^4 \\ W_2^5 \\ W_2^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

3. Valeur propre $\lambda_3 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon}$. On a

$$\begin{bmatrix} -\frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} \\ -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_3^1 \\ W_3^2 \\ W_3^3 \\ W_3^4 \\ W_3^5 \\ W_3^6 \end{pmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$W_3 = \begin{pmatrix} W_3^1 \\ W_3^2 \\ W_3^3 \\ W_3^4 \\ W_3^5 \\ W_3^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ -i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 \\ A\xi_1^2 + A\xi_3^2 \\ -iA\xi_1 |\xi| - A\xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}.$$

4. Valeur propre $\lambda_4 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{i\xi_3 A}{\varepsilon}$. De calculs analogues entraînent que

$$W_4 = \begin{pmatrix} W_4^1 \\ W_4^2 \\ W_4^3 \\ W_4^4 \\ W_4^5 \\ W_4^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \\ iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 \\ -A\xi_1^2 - A\xi_3^2 \\ -iA\xi_1 |\xi| + A\xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}.$$

5. Valeur propre $\lambda_5 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{i\xi_3 B}{\varepsilon}$. On a

$$W_5 = \begin{pmatrix} W_5^1 \\ W_5^2 \\ W_5^3 \\ W_5^4 \\ W_5^5 \\ W_5^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ -i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \\ -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 \\ -B\xi_1^2 - B\xi_3^2 \\ iB\xi_1 |\xi| + B\xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}.$$

6. Valeur propre $\lambda_6 = -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{i\xi_3 B}{\varepsilon}$. On a

$$W_6 = \begin{pmatrix} W_6^1 \\ W_6^2 \\ W_6^3 \\ W_6^4 \\ W_6^5 \\ W_6^6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ i\xi_1 |\xi| - \xi_2 \xi_3 \\ -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ B\xi_1^2 + B\xi_3^2 \\ iB\xi_1 |\xi| - B\xi_2 \xi_3 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les vecteurs W_1 et W_2 ne sont pas orthogonaux au vecteur $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$,

alors que les vecteurs W_3, W_4, W_5 et W_6 le sont. Par conséquent, on déduit de la propriété de divergence nulle de u et b que

$$\widehat{U}(t) = \sum_{i=3}^6 C_i e^{\lambda_i t} W_i, \quad (5.63)$$

avec

$$\widehat{U}(0) = C_3 W_3 + C_4 W_4 + C_5 W_5 + C_6 W_6, \quad (5.64)$$

où $C_i, i = 3, \dots, 6$ sont des coefficients dépendant de ξ et de \bar{U}_0 . On va montrer dans ce qui suit que l'on peut estimer chaque composante de $\widehat{U}(t)$ associée au vecteur propre $W_i, i = 3, \dots, 6$ en utilisant les estimations anisotropes de Strichartz. Donc, pour pouvoir estimer $\widehat{U}(t)$, il faut déterminer les coefficients $C_i, i = 3, \dots, 6$. En utilisant la propriété de divergence nulle de \bar{U}_0 , on obtient l'équation suivante

$$\begin{bmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 & iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -B(\xi_1^2 + \xi_3^2) & B(\xi_1^2 + \xi_3^2) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{U}_1(0) \\ \widehat{U}_2(0) \\ \widehat{U}_4(0) \\ \widehat{U}_5(0) \end{pmatrix}.$$

Soit

$$D = \begin{bmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 & iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -B(\xi_1^2 + \xi_3^2) & B(\xi_1^2 + \xi_3^2) \end{bmatrix},$$

on a

$$|D| = 2\xi_3^2 (\xi_1^2 + \xi_3^2)^2 (4|\xi|^2 + 1).$$

Posons

$$D_3 = \begin{bmatrix} \widehat{U}_1(0) & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \widehat{U}_2(0) & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ \widehat{U}_4(0) & iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ \widehat{U}_5(0) & -A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -B(\xi_1^2 + \xi_3^2) & B(\xi_1^2 + \xi_3^2) \end{bmatrix},$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_1(0) & i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 & \widehat{U}_2(0) & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_4(0) & -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & \widehat{U}_5(0) & -B(\xi_1^2 + \xi_3^2) & B(\xi_1^2 + \xi_3^2) \end{bmatrix},$$

$$D_5 = \begin{bmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_1(0) & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \widehat{U}_2(0) & \xi_1^2 + \xi_3^2 \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 & iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_4(0) & -iB\xi_3 |\xi| - B\xi_1 \xi_2 \\ A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & \widehat{U}_5(0) & B(\xi_1^2 + \xi_3^2) \end{bmatrix},$$

et

$$D_6 = \begin{bmatrix} i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & -i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & i\xi_3 |\xi| - \xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_1(0) \\ \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \xi_1^2 + \xi_3^2 & \widehat{U}_2(0) \\ iA\xi_3 |\xi| - A\xi_1 \xi_2 & iA\xi_3 |\xi| + A\xi_1 \xi_2 & -iB\xi_3 |\xi| + B\xi_1 \xi_2 & \widehat{U}_4(0) \\ A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -A(\xi_1^2 + \xi_3^2) & -B(\xi_1^2 + \xi_3^2) & \widehat{U}_5(0) \end{bmatrix}.$$

On a donc $C_i = \frac{|D_i|}{|D|}$, pour tout $i = 3, 4, 5, 6$. En remplaçant A et B par leurs valeurs (5.61) et (5.62), on montre, par des calculs simples que

$$|D_i| \leq C |\widehat{U}(0, \xi)| \frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{|\xi|} |\xi|^5$$

et donc

$$C_i = \frac{|D_i|}{|D|} \leq \frac{|\widehat{U}(0\xi)| |\xi|^5}{\xi_3^2 (\xi_1^2 + \xi_3^2) |\xi| (4|\xi|^2 + 1)}. \quad (5.65)$$

Maintenant, pour chaque composante de $\widehat{U}(t)$ associée au vecteur propre W_i , on utilise la méthode dans [26] et on raisonne de la même façon que dans [80] (voir chapitre 3) pour obtenir des estimations de Strichartz. Cela nous amène à considérer les opérateurs $\mathcal{G}_\pm^{A,\varepsilon}(t)$ et $\mathcal{G}_\pm^{B,\varepsilon}(t)$ suivants, opérant sur les distributions dont le support de la transformée de Fourier est contenu dans

$$\mathcal{C}_{r,R} = \{ \xi \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq |\xi_h| \leq R; r \leq |\xi_3| \leq R; r \leq |\xi| \leq R \}.$$

Plus précisément, on considère les opérateurs :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\pm^{A,\varepsilon}(t)f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{A\xi_3}{\varepsilon})} \widehat{f}(\xi) \right) (x) = \int_{\mathbb{R}_y^3 \times \mathbb{R}_\xi^3} f(y) e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{A\xi_3}{\varepsilon}) + i(x-y) \cdot \xi} d\xi dy \\ &= \int_{\mathbb{R}_{y_h}^2} \mathcal{F}_{\xi_3}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{A\xi_3}{\varepsilon}) + i(x_h - y_h) \xi_h} \mathcal{F}_{x_3}(f)(y_h, \xi_3) d\xi_h \right) dy_h, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\pm^{B,\varepsilon}(t)f(x) &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{B\xi_3}{\varepsilon})} \widehat{f}(\xi) \right) (x) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{y_h}^2} \mathcal{F}_{\xi_3}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} e^{-t(\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 \pm i \frac{B\xi_3}{\varepsilon}) + i(x_h - y_h) \xi_h} \mathcal{F}_{x_3}(f)(y_h, \xi_3) d\xi_h \right) dy_h, \end{aligned}$$

où f est une distribution tempérée.

Comme au chapitre 3, on introduit la fonction de troncature

$$\psi(\xi) = \chi \left(\frac{|\xi|}{R} \right) \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_h|}{r} \right) \right] \left[1 - \chi \left(\frac{2|\xi_3|}{r} \right) \right], \quad (5.66)$$

où χ est une fonction \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2. \end{cases}$$

On remarque que $\text{supp } \psi \subset \mathcal{C}_{\frac{r}{2}, 2R}$ et que $\psi \equiv 1$ sur $\mathcal{C}_{r, R}$.

Comme dans [26] et [80], pour estimer $\mathcal{G}_\pm^{A, \varepsilon}(t)$ et $\mathcal{G}_\pm^{B, \varepsilon}(t)$, on estime les fonctions suivantes

$$K_\pm^A(\theta, \tau, z_h, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} \psi(\xi) e^{\mp i\theta a(\xi) + iz_h \cdot \xi_h - \tau |\xi_h|^2} d\xi_h,$$

où

$$a(\xi) = A\xi_3 = \frac{\xi_3 \left(1 + \sqrt{4|\xi|^2 + 1}\right)}{2|\xi|}$$

et

$$K_\pm^B(\theta, \tau, z_h, \xi_3) = \int_{\mathbb{R}_{\xi_h}^2} \psi(\xi) e^{\mp i\theta b(\xi) + iz_h \cdot \xi_h - \tau |\xi_h|^2} d\xi_h,$$

où

$$b(\xi) = B\xi_3 = \frac{\xi_3 \left(-1 + \sqrt{4|\xi|^2 + 1}\right)}{2|\xi|}$$

On utilise la même méthode que dans la démonstration du lemme 3.3.2. En posant

$$\gamma_A(\xi) = -\partial_{\xi_2} a(\xi) = -\xi_2 \xi_3 \frac{6|\xi|^2 + 1 + \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}{|\xi|^2 \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}$$

et

$$\gamma_B(\xi) = -\partial_{\xi_2} b(\xi) = -\xi_2 \xi_3 \frac{6|\xi|^2 + 1 - \sqrt{4|\xi|^2 + 1}}{|\xi|^2 \sqrt{4|\xi|^2 + 1}},$$

on obtient les estimations suivantes

$$\frac{2r|\xi_2|}{R^2} \leq |\gamma_A(\xi)| \leq \frac{3}{2}\sqrt{4R^2 + 1} + 1,$$

et

$$\frac{r(\sqrt{4r^2 + 1} - 1)|\xi_2|}{R^2} \leq |\gamma_B(\xi)| \leq \frac{3}{2}\sqrt{4R^2 + 1} + 1.$$

Prenons maintenant R très grand et $r = R^{-\beta}$ très petit ($\beta \geq 1$). Par des développements limités, on obtient des estimations simplifiées

$$2R^{-2-\beta} |\xi_2| \leq |\gamma_A(\xi)| \leq 4R, \quad (5.67)$$

et

$$R^{-3\beta} |\xi_2| \leq |\gamma_B(\xi)| \leq 4R. \quad (5.68)$$

On procède de la même manière pour $\partial_{\xi_2} \gamma_A(\xi)$ et $\partial_{\xi_2} \gamma_B(\xi)$. On a

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_2} \gamma_A(\xi) &= \frac{\gamma_A(\xi)}{\xi_2} + \xi_2 \xi_3 \left[\frac{8\xi_2}{(4|\xi|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} + \frac{4\xi_2}{|\xi|^4} - \frac{4\xi_2}{|\xi|^2 \sqrt{4|\xi|^2 + 1}} \right], \\ \partial_{\xi_2} \gamma_B(\xi) &= \frac{\gamma_B(\xi)}{\xi_2} + \xi_2 \xi_3 \left[\frac{8\xi_2}{(4|\xi|^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4\xi_2}{|\xi|^2 \sqrt{4|\xi|^2 + 1}} \right], \end{aligned}$$

et on montre que

$$|\partial_{\xi_2} \gamma_A(\xi)| \leq \frac{4R}{r} + 3 + \frac{4}{r} \leq 5R^{1+\beta}, \quad (5.69)$$

et

$$|\partial_{\xi_2} \gamma_B(\xi)| \leq \frac{4R}{r} + 3 \leq 5R^{1+\beta}. \quad (5.70)$$

À partir des estimations (5.67) à (5.70), en procédant de la même manière que dans la démonstration du lemme 3.3.2 du chapitre 3, on obtient le lemme suivant.

Lemme 5.6.1 *Soient R très grand et $r = R^{-\beta}$ avec $\beta \geq 1$. Alors,*

$$\|K_{\pm}^A(\theta, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty} \mathbf{L}_{\xi_3}^{\infty}} \leq CR^{4+2\beta} \theta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^2\tau}, \quad (5.71)$$

et

$$\|K_{\pm}^B(\theta, \tau, \cdot, \cdot)\|_{\mathbf{L}_{x_h}^{\infty} \mathbf{L}_{\xi_3}^{\infty}} \leq CR^{2+4\beta} \theta^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}r^2\tau}, \quad (5.72)$$

En utilisant l'argument de dualité classique, appelé méthode de TT^* , comme dans le lemme 3.3.2 du chapitre 3 (voir aussi [26] et [80]), on obtient les estimations suivantes pour les opérateurs $\mathcal{G}_{\pm}^{A,\varepsilon}(t)$ et $\mathcal{G}_{\pm}^{B,\varepsilon}(t)$.

Théorème 5.6.2 *Soient R , r , et β comme dans le lemme 5.6.1. Soit $p \geq 1$. Pour tout $f \in \mathbf{L}^2$, on a*

$$\left\| \psi(D) \mathcal{G}_{\pm}^{A,\varepsilon}(t) f \right\|_{\mathbf{L}_T^p(\mathbf{L}_h^{\infty} \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{2+2p+5\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (5.73)$$

et

$$\left\| \psi(D) \mathcal{G}_{\pm}^{B,\varepsilon}(t) f \right\|_{\mathbf{L}_T^p(\mathbf{L}_h^{\infty} \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{2p+7\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|f\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (5.74)$$

En tenant compte de l'expression de $\widehat{U}(t)$ et en utilisant le théorème de Plancherel, le théorème 5.6.2 et l'inégalité de Hölder, on peut écrire

$$\begin{aligned} \|\overline{U}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{L}_h^{\infty} \mathbf{L}_v^2)} &\leq \sum_{i=3}^6 \|\mathcal{F}^{-1}(C_i e^{\lambda_i t} W_i)\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{L}_h^{\infty} \mathbf{L}_v^2)} \\ &\leq CR^{\frac{2p+7\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} (\|C_3 W_3\|_{\mathbf{L}^2} + \|C_4 W_4\|_{\mathbf{L}^2} + \|C_5 W_5\|_{\mathbf{L}^2} + \|C_6 W_6\|_{\mathbf{L}^2}) \\ &\leq CR^{\frac{2p+7\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \sum_{i=3}^6 \|C_i\|_{\mathbf{L}^2} \|W_i\|_{\mathbf{L}^{\infty}}. \end{aligned}$$

Grâce aux estimations (5.65) et à l'inégalité de Hölder, on déduit de l'inégalité ci-dessus que

$$\begin{aligned} \|\bar{U}\|_{\mathbf{L}^p(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} &\leq CR^{\frac{2p+7\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{U}(0)\|_{\mathbf{L}^2} \left\| \frac{\mathcal{O}(|\xi|^5)}{\xi_3^2 (\xi_1^2 + \xi_3^2) |\xi| (4|\xi|^2 + 1)} \right\|_{\mathbf{L}^\infty} \|W_i\|_{\mathbf{L}^\infty} \\ &\leq CR^{\frac{2p+7\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{U}(0)\|_{\mathbf{L}^2} R^{4+4\beta} \\ &\leq CR^{\frac{10p+(8p+7)\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{U}(0)\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

On a donc démontré le corollaire suivant

Corollaire 5.6.3 *Soient R , r , et β comme dans le lemme 5.6.1. Soit \bar{U} la solution globale du système linéarisé (MHD_1^L) avec $\mathcal{F}(\bar{U}(0))$ à support dans $\mathcal{C}_{r,R}$. Alors, pour tout $p \geq 1$,*

$$\|\bar{U}\|_{\mathbf{L}_T^p(\mathbf{L}_h^\infty \mathbf{L}_v^2)} \leq CR^{\frac{10p+(8p+7)\beta}{2p}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4p}} \|\bar{U}(0)\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (5.75)$$

5.6.2 Démonstration du théorème 5.1.2

Dans une première étape, on décompose la donnée initiale comme dans [80] (voir chapitre 3), c'est-à-dire, on écrit

$$\begin{cases} \mathcal{U}_0 = \bar{U}_0 + \mathcal{V}_0, \\ \bar{U}_0 = \mathcal{F}^{-1}(\psi(\xi)\mathcal{F}(\mathcal{U}_0)(\xi)), \\ \mathcal{V}_0 = \mathcal{U}_0 - \bar{U}_0, \end{cases}$$

où la fonction ψ est définie dans (5.66). Les mêmes estimations qu'au chapitre 3 nous donnent que

$$\|\mathcal{V}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq C_0 R^{-\eta_0}, \quad (5.76)$$

où C_0 est une constante dépendant de la norme de \mathcal{U}_0 dans $Y = \mathbf{H}_{div}^{0,s} \cap \mathbf{L}_h^2 \mathbf{L}_v^p \cap \mathbf{L}_h^p \mathbf{H}_v^s \cap \mathbf{H}^{\eta,\eta+s}$ et où $\eta_0 = \min\left\{\beta\frac{2-p}{2p}, \eta\right\}$.

Considérons maintenant le système

$$\begin{cases} \partial_t \omega - \varepsilon^\alpha \Delta_h \omega + \omega \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \bar{u} + \bar{u} \cdot \nabla \omega - \beta \cdot \nabla \beta - \beta \cdot \nabla \bar{b} - \bar{b} \cdot \nabla \beta + \frac{\omega \wedge e_3}{\varepsilon} + \frac{\partial_3 \beta}{\varepsilon} \\ \quad \quad \quad = -\nabla \tilde{p} + \bar{b} \cdot \nabla \bar{b} - \bar{u} \cdot \nabla \bar{u} \\ \partial_t \beta - \varepsilon^\alpha \Delta_h \beta - \beta \cdot \nabla \omega - \beta \cdot \nabla \bar{u} - \bar{b} \cdot \nabla \omega + \omega \cdot \nabla \beta + \omega \cdot \nabla \bar{b} + \bar{u} \cdot \nabla \beta + \frac{\partial_3 \omega}{\varepsilon} = \bar{b} \cdot \nabla \bar{u} - \bar{u} \cdot \nabla \bar{b} \\ \operatorname{div} \omega = \operatorname{div} \beta = 0 \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \beta(0) = \beta_0. \end{cases}$$

Le théorème 5.1.1 implique que la solution \mathcal{U} de (MHD_{Glo}^ε) existe localement sur $[0, T]$, et donc $\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \omega \\ \beta \end{pmatrix}$ existe aussi localement. Si l'on peut montrer que \mathcal{V} existe globalement, on

peut en déduire l'existence globale de \mathcal{U} . En refaisant des estimations d'énergie semblables à celles faites dans la démonstration du théorème 5.1.1 de la section 5.4, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{V}(T)\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \varepsilon^\alpha \int_0^T \|\Delta_q^v \nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2}^2 dt - \frac{1}{2} \|\Delta_q^v \mathcal{V}_0\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
& \leq \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{u} \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt \\
& + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{u} \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{b}) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt \\
& + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{b} \cdot \nabla \bar{b}) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{b} \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle + \langle \Delta_q^v(\bar{b} \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt \\
& + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \omega) | \Delta_q^v \beta \rangle + \langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \omega \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt \\
& + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{u} \cdot \nabla \beta) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\omega \cdot \nabla \bar{b}) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\beta \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt \\
& + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{b} \cdot \nabla \bar{u}) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt + \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{u} \cdot \nabla \bar{b}) | \Delta_q^v \beta \rangle| dt. \tag{5.77}
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant d'estimer de manière adéquate tous les termes du membre de droite de (5.77). Le lemme suivant donne deux inégalités qui sont analogues à celles obtenues dans les lemmes 3.4.4 et 3.4.5 du chapitre 3.

Lemme 5.6.4 *Soit $s > \frac{1}{2}$. Pour toutes distributions tempérées V et W appartenant à $\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$ telles que leurs gradients horizontaux sont dans $\tilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$, et pour \bar{U} solution du système linéaire $(MHD_{Glo}^{\varepsilon,L})$, il existe une constante C et une suite sommable de nombres positifs d_q telles que*

$$\int_0^T |\langle \Delta_q^v(W \cdot \nabla \bar{U}) | \Delta_q^v V \rangle| dt \leq C d_q 2^{-2qs} R^{\frac{12+15\beta+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|V\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})} \|W\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})} \tag{5.78}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{U} \cdot \nabla V) | \Delta_q^v V \rangle| dt & \leq d_q 2^{-2qs} \left[C R^{\frac{20+23\beta+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} \|V\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right. \\
& \left. + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \|\nabla_h V\|_{\tilde{\mathbf{L}}^2([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + C R^{\frac{12+15\beta+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \|V\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right]. \tag{5.79}
\end{aligned}$$

Dans le cadre des équations de la magnéto-hydrodynamique, on a besoin de la généralisation de l'inégalité (5.79), qui est contenue dans l'inégalité (5.80) du lemme suivant. La démonstration de ce lemme est donnée dans l'appendice.

Lemme 5.6.5 *Soit $s > \frac{1}{2}$ et $\bar{U} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{b} \end{pmatrix}$ solution du système linéaire $(MHD_{Glo}^{\varepsilon,L})$. Pour toutes V et W appartenant à $\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$, de divergence nulle, telles que leurs gradients horizontaux sont dans $\tilde{\mathbf{L}}^2([0, T], \mathbf{H}^{0,s})$, il existe une constante C et une suite som-*

table de nombres positifs d_q telles que

$$\begin{aligned} & \int_0^T |\langle \Delta_q^v(\bar{U} \cdot \nabla V) | \Delta_q^v W \rangle + \langle \Delta_q^v(\bar{U} \cdot \nabla W) | \Delta_q^v V \rangle| dt \\ & \leq d_q 2^{-2qs} \left[C \left(R^{\frac{20+23\beta+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}} + R^{\frac{12+15\beta+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} \right) \left(\|V\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \|W\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\varepsilon^\alpha}{16} \left(\|\nabla_h V\|_{\mathbf{L}^2([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \|\nabla_h W\|_{\mathbf{L}^2([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \right) \right] \quad (5.80) \end{aligned}$$

En utilisant les lemmes 5.2.11, 5.2.12, 5.6.4 et 5.6.5, on arrive à estimer tous les termes du membre de droite de l'inégalité (5.77). En remplaçant les estimations obtenues dans l'inégalité (5.77), ensuite en multipliant l'inégalité obtenue par 2^{2qs} et en sommant par rapport à q , on déduit que

$$\begin{aligned} & \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + \varepsilon^\alpha \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\ & \leq \|\mathcal{V}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^2 + C \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})} \|\nabla_h \mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^2([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \\ & \quad + \Phi(\varepsilon) \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T],\mathbf{H}^{0,s})}^2 + CR^{\frac{12+15\beta+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}}, \quad (5.81) \end{aligned}$$

où

$$\Phi(\varepsilon) = CR^{\frac{12+15\beta+2s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-3\alpha}{4}} + CR^{\frac{20+23\beta+4s}{2}} \varepsilon^{\frac{1-7\alpha}{4}}.$$

Maintenant, on choisit

$$R = (8CC_0)^{\frac{1}{\eta_0}} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{\eta_0}}. \quad (5.82)$$

L'inégalité (5.76) implique que

$$\|\mathcal{V}_0\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{8C}. \quad (5.83)$$

En outre, l'égalité (5.82) entraîne que

$$\Phi(\varepsilon) = C \left[\varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4}} \left(3 + \frac{24+30\beta+4s}{\eta_0} \right) + \varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4}} \left(7 + \frac{40+46\beta+8s}{\eta_0} \right) \right].$$

Donc, si

$$\left(3 + \frac{24 + 30\beta + 4s}{\eta_0} \right) \alpha < 1 \quad \text{et} \quad \left(7 + \frac{40 + 46\beta + 8s}{\eta_0} \right) \alpha < 1, \quad (5.84)$$

alors il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$, $\Phi(\varepsilon) < \frac{1}{2}$.

Soit $T^* = \sup \left\{ T > 0 : \|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,t],\mathbf{H}^{0,s})} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{2C}, \forall t < T \right\}$. Puisque \mathcal{V} est continue en temps, l'estimation (5.83) implique que $T^* > 0$. En tenant compte du choix de R dans (5.82), l'inégalité (5.81), l'inégalité (5.83) et le fait que $\Phi(\varepsilon) < \frac{1}{2}$ impliquent que

$$\|\mathcal{V}\|_{\mathbf{L}^\infty([0,T^*],\mathbf{H}^{0,s})}^2 \leq \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{32C^2} + 2C\varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4}} \left(3 + \frac{24+30\beta+4s}{\eta_0} \right). \quad (5.85)$$

Maintenant, si

$$2\alpha \leq \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4} \left(3 + \frac{24 + 30\beta + 4s}{\eta_0} \right), \quad (5.86)$$

alors, il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$, on a

$$2C\varepsilon^{\frac{1}{4} - \frac{\alpha}{4}} \left(3 + \frac{24+30\beta+4s}{\eta_0} \right) \leq \frac{\varepsilon^{2\alpha}}{32C^2}.$$

Choisissons $\varepsilon_0 = \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Donc, on déduit de l'inégalité (5.85) que pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$,

$$\|\mathcal{V}\|_{\tilde{\mathbf{L}}^\infty([0, T^*], \mathbf{H}^{0,s})} \leq \frac{\varepsilon^\alpha}{4C} < \frac{\varepsilon^\alpha}{2C},$$

ce qui implique que $T^* = +\infty$. ■

Remarque 5.6.6 On peut donner une borne sur α_0 , en raisonnant comme suit. L'hypothèse $r = R^{-\beta}$, avec $\beta \geq 1$ et $1 \leq p < 2$, implique que

$$0 < \eta_0 = \min \left\{ \beta \frac{2-p}{2p}, \eta \right\} \leq \frac{\beta}{2},$$

et donne l'estimation suivante sur α_0 :

$$\alpha_0 < \min \left\{ \frac{1}{11 + \frac{24+30\beta+4s}{\eta_0}}; \frac{1}{7 + \frac{40+46\beta+8s}{\eta_0}} \right\} \leq \min \left\{ \frac{1}{71 + \frac{48+8s}{\beta}}; \frac{1}{99 + \frac{80+16s}{\beta}} \right\}.$$

Remarque 5.6.7 La méthode utilisée dans cette section est une méthode purement calculatoire. Le point clé dans cette méthode est l'obtention des estimations de Strichartz qui sont basées sur les calculs explicites des valeurs propres et vecteurs propres de $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$. Si l'on revient au cas "plus facile" où la viscosité dynamique est $\frac{E}{\varepsilon} = \varepsilon^\alpha$ et la diffusivité magnétique est $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{\varepsilon}$ (c'est-à-dire au cas où l'on a beaucoup plus d'effet "régularisant" pour le champ de magnétique), la matrice $\mathbb{B}(\xi, \varepsilon)$ devient

$$\mathbb{B}(\xi, \varepsilon) = \begin{bmatrix} -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 + \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & \frac{\xi_2^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 \\ -\frac{\xi_1^2 + \xi_3^2}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 - \frac{\xi_1 \xi_2}{\varepsilon |\xi|^2} & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 \\ \frac{\xi_2 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\frac{\xi_1 \xi_3}{\varepsilon |\xi|^2} & -\varepsilon^\alpha |\xi_h|^2 & 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} \\ -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} |\xi_h|^2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} |\xi_h|^2 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{i\xi_3}{\varepsilon} & 0 & 0 & -\frac{1}{\varepsilon} |\xi_h|^2 \end{bmatrix}$$

et son polynôme caractéristique devient

$$P(Y) = (Y^2 + \eta Y - \eta_1^2) \left[Y^4 + 2\eta Y^3 + (\Gamma - \eta_1^2 + \eta^2) Y^2 + 2\eta \Gamma Y + \eta^2 (\Gamma + \eta_1^2) + \eta_1^4 \right],$$

où $Y = X + \eta_0$, les quantités η_i sont définies comme dans (5.60), et où, $\Gamma = \eta_5 \eta_6 - \eta_2^2 - \eta_1^2$ et $\eta = \left(\frac{1}{\varepsilon} - \varepsilon^\alpha \right) |\xi_h|^2$. Les calculs des vecteurs propres sont beaucoup plus compliqués dans ce cas-là.

Analyticité de la solution du système des fluides de grade deux

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème de la régularité des solutions du système des fluides de grade deux sur le tore \mathbb{T}^3 . Ce système, contrairement à des systèmes semi-linéaires étudiés dans les chapitres précédents, est un système vraiment non-linéaire pour lequel, on n'a pas d'effet régularisant en temps fini, mais seulement un effet régularisant en temps infini. Dans ce chapitre, nous montrons que, malgré l'absence de l'effet régularisant en temps fini, si les données initiales sont analytiques (plus précisément, appartenant à une certaine classe de Gevrey), et suffisamment petites, la largeur de la bande d'analyticité de la solution ne tend pas vers zéro. Autrement dit, nous montrons qu'avec une bonne condition initiale de petitesse, la solution du système des fluides de grade deux existe globalement en temps et appartient à une classe de Gevrey que nous préciserons dans la suite du chapitre.

Les fluides de grade deux appartiennent à une classe particulière de fluides non-newtoniens, à savoir la classe des fluides de type différentiel de Rivlin-Ericksen. Pour ces fluides, le tenseur des contraintes σ n'est pas une fonction linéaire du tenseur des taux de déformation mais s'écrit sous la forme

$$\sigma = -pI + 2\nu D + \alpha_1 A_2 + \alpha_2 A_1^2,$$

où la fonction scalaire p représente la pression, $I = (\delta_{ij})$, ν la viscosité cinématique, et D est le tenseur des taux de déformation, défini par

$$D = (D_{ij}) = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right],$$

(u étant le vecteur de vitesse) et où A_1 et A_2 désignent les deux premiers tenseurs de Rivlin-Ericksen

$$\begin{aligned} A_1 &= 2D, \\ A_2 &= (A_{ij}) = \left(\partial_t D_{ij} + D_{jk} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + D_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Dans leurs travaux sur la thermodynamique et la stabilité des fluides de grade deux, Dunn et Fosdick [40] ont montré que ν , α_1 et α_2 doivent satisfaire aux conditions

$$\nu \geq 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_1 \geq 0$$

comme conséquence de l'inégalité de Clausius-Duhem. En posant $\alpha_1 = \alpha \leq 0$, ces restrictions nous ramènent à considérer le système des fluides de grade deux suivant

$$(FG2) \quad \begin{cases} \partial_t(u - \alpha \Delta u) - \nu \Delta u + \operatorname{rot} (u - \alpha \Delta u) \wedge u + \nabla p = f, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ u(0, x) = u_0(x), & \text{dans } \mathbb{T}^3, \end{cases}$$

où $\mathbb{T}^3 = \mathbb{R}^3/2\pi\mathbb{Z}^3$ est le tore tridimensionnel et où $u(t, x)$, $f(t, x)$ et $p(t, x)$ sont respectivement la vitesse du fluide, la force extérieure et la pression.

Avant de présenter le résultat de ce chapitre, nous rappelons quelques résultats principaux obtenus dans des travaux précédents. Dans [32], Cioranescu et El Hacène ont montré l'existence locale et l'unicité dans \mathbf{H}^3 d'une solution forte du système (FG2) dans des domaines réguliers bornés Ω de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 avec des conditions de Dirichlet homogènes sur le bord. De plus, dans le cas de la dimension 2, la solution existe globalement en temps. Plus tard, dans [79], Moise, Rosa et Wang ont prouvé l'existence d'un attracteur global compact dans \mathbf{H}^3 pour ce système dans le cas de dimension 2. On peut alors se demander si cet attracteur est dans un espace plus régulier que \mathbf{H}^3 . Dans [86], Paicu, Raugel et Rekaló ont répondu à cette question dans le cas du tore \mathbb{T}^2 . Ils ont démontré que, dans ce cas, pour α suffisamment petit, l'attracteur est borné dans \mathbf{H}^m pour $m \geq 1$ quelconque. Ils ont également mis en évidence des comportements de dimension finie de cet attracteur. Remarquons aussi que le système des fluides de grade deux est très différent du système α -Navier-Stokes, qui contient un terme très régularisant $-\nu \Delta(u - \alpha \Delta u)$ et donc devient un problème semi-linéaire qui est plus facile à traiter (voir par exemple [46] et [47]).

Le but de ce travail est d'étudier les propriétés analytiques du système (FG2). Nous allons montrer que pour le système (FG2) dans le tore \mathbb{T}^3 , si les données initiales u_0 et f sont suffisamment petites dans des classes de Gevrey appropriées, la solution existe globalement en temps et appartient elle-même à une classe de Gevrey pour tout temps t positif.

Rappelons que de nombreux travaux traitent de l'analyticité des solutions des systèmes de fluides newtoniens parmi lesquels, on peut citer les travaux de Masuda [77], de Foias et Temam [48], de Ferrari et Titi [45], ... Dans le cas des fluides de grade deux, on ne peut pas appliquer ces techniques à cause de l'absence d'effet régularisant en temps fini.

Pour pouvoir énoncer le théorème principal de ce chapitre, nous rappelons d'abord les définitions des classes de Gevrey que nous utiliserons tout au long du chapitre. D'abord, pour tout champ de vecteurs $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$, en utilisant le développement en série de Fourier, on peut écrire :

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \widehat{u}(n) e^{in \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbb{T}^3,$$

où $\widehat{u}(n)$ est le n -ième coefficient de Fourier de u ,

$$\widehat{u}(n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{T}^3} u(x) e^{-in \cdot x} dx.$$

La condition $\operatorname{div} u = 0$ s'écrit $n \cdot \widehat{u}(n) = 0$. Si u est de moyenne nulle sur \mathbb{T}^3 , alors $\widehat{u}(0) = 0$. Rappelons que, si nous notons λ_N les valeurs propres (dans l'ordre croissant) de l'opérateur de Stokes $A = -\mathbb{P}\Delta$, où \mathbb{P} est la projection de Leray sur le sous-espace des champs de vecteurs de divergence nulle de \mathbf{L}^2 , alors, les champs de vecteurs à moyenne nulle et à divergence nulle satisfont l'inégalité de Poincaré

$$\|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \lambda_1^{-1} \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Rappelons maintenant que, pour $p \geq 0$ et pour $a > 0$, $|D|^p$ est l'opérateur pseudo-différentiel défini par

$$|D|^p u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^p \widehat{u}(n) e^{in \cdot x},$$

et $e^{a|D|^p}$ est l'opérateur

$$e^{a|D|^p} u(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|^p} \widehat{u}(n) e^{in \cdot x}.$$

La classe de Gevrey $\mathcal{G}_a^p(\mathbb{T}^3)$, avec $p \geq 0$, $a > 0$, est définie comme l'ensemble des champs de vecteurs $u \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$ tels que

$$\|u\|_{\mathcal{G}_a^p}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \||D|^p e^{a|D|^p} u\|_{\mathbf{L}^2}^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^{2p} e^{2a|n|^p} |\widehat{u}(n)|^2 < +\infty.$$

Cet ensemble, muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{\mathcal{G}_a^p} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n|^{2p} e^{2a|n|^p} \widehat{u}(n) \overline{\widehat{v}(n)},$$

est un espace de Hilbert.

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat suivant

Théorème 6.1.1 *Soient $\alpha > 0$ et $a > 0$. Il existe une constante $C_\alpha > 0$ telle que si $u_0 \in \mathcal{G}_a^3(\mathbb{T}^3)$ et $f \in \mathbf{L}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{G}_a^1(\mathbb{T}^3))$ et si*

$$\|u_0\|_{\mathcal{G}_a^3} + \int_0^{+\infty} \|f(t)\|_{\mathcal{G}_a^1} dt \leq C_\alpha a \nu. \quad (6.1)$$

alors, le système (FG2) admet une unique solution globale $u \in \mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathcal{G}_{a/2}^3(\mathbb{T}^3))$, dont la norme $\mathcal{G}_{a/2}^3(\mathbb{T}^3)$ est bornée uniformément en temps par une constante qui ne dépend que de a , α et la viscosité ν .

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, le système (FC2) ne possède aucun effet régularisant en temps fini. Les estimations d'énergie classiques avec les normes de Gevrey (voir [48] ou [45]) ne sont pas suffisantes pour contrôler le terme non linéaire $\operatorname{rot}(u - \alpha \Delta u) \wedge u$. Dans ce chapitre, nous utilisons la méthode introduite par Chemin [24] (voir aussi Chemin, Gallagher et Paicu [29] et Paicu et Zhang [87]), qui consiste à introduire un opérateur qui, pour tout $t > 0$, à tout $u(t, x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$, associe

$$u_\Phi(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\Phi(t, D)} u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} [e^{\Phi(t, n)} \widehat{u}(t, n)] e^{in \cdot x},$$

où Φ est une fonction définie par

$$\Phi(t, n) = (a - \theta(t)) |n|, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^3, \quad (6.2)$$

telle que la fonction $\theta : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie

$$\theta(0) = 0, \quad \theta(t) \leq \frac{a}{2}, \quad \forall t \geq 0, \quad \text{et} \quad \partial_t \theta > 0, \quad \forall t > 0. \quad (6.3)$$

On remarque que

$$\begin{aligned} \partial_t u_\Phi &= e^{\Phi(t,D)} \partial_t u - \partial_t \theta \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n| \widehat{u}(n) e^{\Phi(t,n)+inx} \\ &= (\partial_t u)_\Phi - \partial_t \theta |D| u_\Phi. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Donc, quand on applique l'opérateur $e^{\Phi(t,D)}$ au système (FG2), on obtient le terme $\partial_t \theta |D| u_\Phi$ qui joue un rôle régularisant. Notre but est de montrer l'existence de la fonction θ et montrer de bonnes estimations qui permettent de contrôler le terme non linéaire $\text{rot}(u - \alpha \Delta u) \wedge u$ et de profiter de ce nouveau terme faiblement régularisant pour déduire l'existence globale et l'analyticité de solutions du système (FG2).

Le plan du chapitre est le suivant. Dans le deuxième paragraphe, nous démontrons une estimation qui permet de contrôler le terme non linéaire $\text{rot}(u - \alpha \Delta u) \wedge u$ et nous expliquons comment exploiter le terme $\partial_t \theta |D| u_\Phi$. Dans la dernière partie, nous démontrons le théorème principal.

6.2 Estimations non-linéaires

Le but de cette section est d'établir des estimations permettant de contrôler le terme non linéaire $\text{rot}(u - \alpha \Delta u) \wedge u$ dans les estimations dans les normes Gevrey. Le résultat de cette section est le lemme suivant :

Lemme 6.2.1 *Soit $\delta > \frac{3}{2}$. Pour tous champs de vecteurs $u \in \mathcal{G}_a^{1/2+\delta}(\mathbb{T}^3)$ et $w \in \mathcal{G}_a^{1/2}(\mathbb{T}^3)$ de divergence nulle et de moyenne nulle sur \mathbb{T}^3 , il existe une constante $C_0 > 0$ telle que*

$$|\langle e^{a|D|}(u \cdot \nabla w), e^{a|D|}w \rangle| \leq C_0 \left\| e^{a|D|} |D|^{\delta+\frac{1}{2}} u \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w \right\|_{\mathbf{L}^2}^2, \quad (6.5)$$

et

$$|\langle e^{a|D|}(w \cdot \nabla u), e^{a|D|}w \rangle| \leq C_0 \left\| e^{a|D|} |D|^{\delta+\frac{1}{2}} u \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w \right\|_{\mathbf{L}^2}^2, \quad (6.6)$$

Remarque 6.2.2 La quantité a du lemme 6.2.1 ne joue pas de rôle dans les estimations. Le résultat du lemme ne change pas si l'on remplace $a|n|$ par la fonction $\Phi(t, n)$ définie dans (6.2).

Preuve du lemme 6.2.1 :

Par définition, on écrit

$$e^{a|D|} f = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|} \widehat{f}(n) e^{inx},$$

et donc,

$$e^{a|D|}(u_j \partial_i w_j)(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[e^{inx+a|n|} \sum_{k+l=n} \widehat{u}_i(k) l_i \widehat{w}_j(l) \right].$$

En utilisant le fait que u est à divergence nulle (*i.e.* $\sum_{i=1,2,3} k_i \widehat{u}_i(k) = 0$), on obtient :

$$\begin{aligned} e^{a|D|}(u \cdot \nabla w_j)(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[e^{inx+a|n|} \sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} \widehat{u}_i(k) l_i \widehat{w}_j(l) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[e^{inx+a|n|} \sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} n_i \widehat{u}_i(k) \widehat{w}_j(l) \right] \\ &\quad - \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[e^{inx+a|n|} \sum_{k+l=n} \widehat{w}_j(l) \left(\sum_{i=1,2,3} k_i \widehat{u}_i(k) \right) \right] \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[e^{inx+a|n|} \sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} n_i \widehat{u}_i(k) \widehat{w}_j(l) \right]. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Maintenant, en prenant le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{T}^3)$ de l'égalité (6.7) avec $e^{a|D|}w_j$, et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$\begin{aligned} &|\langle e^{a|D|}(u \cdot \nabla w_j), e^{a|D|}w_j \rangle| \\ &= \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{2a|n|} \left(\sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} n_i \widehat{u}_i(k) \widehat{w}_j(l) \right) \overline{\widehat{w}_j(n)} \right| \\ &\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left(\left| \sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} |n|^{\frac{1}{2}} e^{a|n|} \widehat{u}_i(k) \widehat{w}_j(l) \right| \right) \left(e^{a|n|} |n|^{\frac{1}{2}} |\widehat{w}_j(n)| \right) \\ &\leq \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} |n| e^{2a|n|} \left(\left| \sum_{k+l=n} \sum_{i=1,2,3} \widehat{u}_i(k) \widehat{w}_j(l) \right| \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{2a|n|} |n| |\widehat{w}_j(n)|^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On remarque que pour tout $n, k, l \in \mathbb{Z}^3$ tels que $k + l = n$, si $|k|, |l| > 0$, alors $|n| \leq 2|k||l|$. En effet, sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $|k| > |l| \geq 1$. Il suffit de remarquer que, comme $|n| \leq |k| + |l|$, on a $|k| \geq \frac{1}{2}|n|$. Comme u et w sont de moyenne nulle sur le tore, $\widehat{u}(0) = \widehat{w}(0) = 0$. Donc,

$$\begin{aligned} &|\langle e^{a|D|}(u \cdot \nabla w_j), e^{a|D|}w_j \rangle| \\ &\leq C \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[\sum_{k+l=n} \left(\sum_{i=1,2,3} e^{a|k|} |k|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}_i(k)| \right) \left(e^{a|l|} |l|^{\frac{1}{2}} |\widehat{w}_j(l)| \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w_j \right\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Remarquons que maintenant, pour tous $f_1 \in \ell^1(\mathbb{Z}^3)$ et $f_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$, en utilisant l'inégalité de Young, on a $f_1 * f_2 \in \ell^2(\mathbb{Z}^3)$ et

$$\|f_1 * f_2\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^3)} \leq C \|f_1\|_{\ell^1(\mathbb{Z}^3)} \|f_2\|_{\ell^2(\mathbb{Z}^3)}.$$

Alors, on obtient :

$$\begin{aligned} & |\langle e^{a|D|}(u \cdot \nabla w_j), e^{a|D|}w_j \rangle| \\ & \leq C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|} |n|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(n)| \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{2a|n|} |n| |\widehat{w}_j(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w_j \right\|_{\mathbf{L}^2} \\ & \leq C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|} |n|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(n)| \right) \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w_j \right\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $\delta > \frac{3}{2}$ impliquent que

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|} |n|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(n)| &= \sum_{|n| \geq 1} e^{a|n|} |n|^{\delta + \frac{1}{2}} |\widehat{u}(n)| \frac{1}{|n|^\delta} \\ &\leq \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{2a|n|} |n|^{2\delta + 1} |\widehat{u}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{|n| \geq 1} \frac{1}{|n|^{2\delta}} \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left\| e^{a|D|} |D|^{\delta + \frac{1}{2}} u \right\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

Finalement, en sommant en $j = 1, 2, 3$, on obtient l'estimation (6.5).

Il reste à montrer l'estimation (6.6). En permutant le rôle de u et w dans $e^{a|D|}u \cdot \nabla w_j$, et en remarquant que w est aussi à divergence nulle, on a, pour tout $j = 1, 2, 3$,

$$\begin{aligned} & |\langle e^{a|D|}w \cdot \nabla u_j, e^{a|D|}w_j \rangle| \\ & \leq C \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} \left[\sum_{k+l=n} \left(\sum_{i=1,2,3} e^{a|k|} |k|^{\frac{1}{2}} |\widehat{w}_i(k)| \right) \left(e^{a|l|} |l|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}_j(l)| \right) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w_j \right\|_{\mathbf{L}^2}. \end{aligned}$$

L'inégalité de Young et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent

$$\begin{aligned} |\langle e^{a|D|}(w \cdot \nabla u), e^{a|D|}w_j \rangle| &\leq C \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}^3} e^{a|n|} |n|^{\frac{1}{2}} |\widehat{u}(n)| \right) \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ &\leq C_0 \left\| e^{a|D|} |D|^{\delta + \frac{1}{2}} u \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| e^{a|D|} |D|^{\frac{1}{2}} w \right\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned}$$

Le lemme 6.2.1 est donc démontré. \blacksquare

6.3 Démonstration du théorème 6.1.1

Pour $m \in \mathbb{N}$, soit V^m l'adhérence de l'espace

$$\left\{ u \in [\mathbf{C}^\infty(\mathbb{T}^3)]^3 \mid u \text{ est périodique, } \operatorname{div} u = 0, \int_{\mathbb{T}^3} u(x) dx = 0 \right\},$$

dans $\mathbf{H}^m(\mathbb{T}^3)$. On note simplement V^0 par H . L'inégalité de Poincaré implique que pour tout $u \in V^1$,

$$\|u\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq (\lambda_1^{-1} + \alpha) \|\nabla u\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (6.8)$$

Soient λ_N les valeurs propres (de l'ordre croissant) de l'opérateur de Stokes $A = -\mathbb{P}\Delta$ et P_N la projection orthogonale de H sur le sous-espace vectoriel engendré par les N premiers vecteurs propres de A . Nous savons déjà que (FG2) admet une unique solution locale $u(t, x)$ (globale si la donnée est petite) dans V^3 (voir par exemple [32]). Nous voulons montrer une majoration uniforme en temps de cette solution dans $\mathcal{G}_{a/2}^3$ si la donnée initiale est suffisamment petite dans \mathcal{G}_a^3 . Pour cela, nous utilisons le schéma de Galerkin. Soit $u_N = P_N u$ la solution du système approché

$$\begin{cases} \partial_t(u_N - \alpha\Delta u_N) - \nu\Delta u_N + P_N\mathbb{P}\{\text{rot}(u_N - \alpha\Delta u_N) \wedge u_N\} = P_N\mathbb{P}f, & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ \text{div } u_N = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{T}^3, \\ u_N(0, x) = P_N u_0(x), & \text{dans } \mathbb{T}^3. \end{cases}$$

Maintenant, pour tout $t \geq 0$, soit $\Phi(t, n) = [a - \theta(t)]|n|$, définie comme dans (6.2) et (6.3) et rappelons que, pour tout $u(t, x) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{T}^3)$,

$$u_\Phi(t, x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\Phi(t, D)} u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^3} [e^{\Phi(t, n)} \widehat{u}(t, n)] e^{in \cdot x}.$$

Considérons la première équation du système approché,

$$\partial_t(u_N - \alpha\Delta u_N) - \nu\Delta u_N + P_N\mathbb{P}\{\text{rot}(u_N - \alpha\Delta u_N) \wedge u_N\} = P_N\mathbb{P}f. \quad (6.9)$$

Posons $v_N = \text{rot}(u_N - \alpha\Delta u_N)$. En appliquant l'opérateur $e^{\Phi(t, D)}$ au rotationnel de l'équation (6.9), on obtient

$$(\partial_t v_N)_\Phi - \nu [\text{rot}(\Delta u_N)]_\Phi + (P_N\mathbb{P}(u_N \cdot \nabla v_N))_\Phi + (P_N\mathbb{P}(v_N \cdot \nabla u_N))_\Phi = (P_N\mathbb{P}\text{rot } f)_\Phi,$$

ou bien

$$\begin{aligned} \partial_t(v_N)_\Phi - \nu [\text{rot}(\Delta u_N)]_\Phi + \partial_t \theta |D| (v_N)_\Phi \\ + (P_N\mathbb{P}(u_N \cdot \nabla v_N))_\Phi + (P_N\mathbb{P}(v_N \cdot \nabla u_N))_\Phi = (P_N\mathbb{P}\text{rot } f)_\Phi. \end{aligned} \quad (6.10)$$

En prenant le produit scalaire dans \mathbf{L}^2 de l'équation (6.10) avec $(v_N)_\Phi$ et en utilisant le lemme 6.2.1 avec $\delta = \frac{5}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \nu \langle [\text{rot}(\Delta u_N)]_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle + \partial_t \theta \left\| |D|^{\frac{1}{2}} (v_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\ \leq |\langle (\text{rot } f)_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle| + |\langle (u_N \cdot \nabla v_N)_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle| + |\langle (v_N \cdot \nabla u_N)_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle| \\ \leq \|(\text{rot } f)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} + C_0 \left\| |D|^3 (u_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| |D|^{\frac{1}{2}} (v_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2}^2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Maintenant, soit

$$\mu = \frac{1 + 2\alpha\lambda_1}{1 + \alpha\lambda_1}.$$

Puisque $(u_N)_\Phi$ est de moyenne nulle, l'inégalité de Poincaré donne

$$\|\text{rot}(u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \|\nabla \text{rot}(u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \leq \frac{1}{\mu} \left(\|\text{rot}(u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot}(u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right).$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 \langle \text{rot } (u_N)_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle &= \langle \text{rot } (u_N)_\Phi, \text{rot } ((u_N)_\Phi - \alpha \Delta (u_N)_\Phi) \rangle \\
 &= \|\text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha \|\nabla \text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
 &\leq \frac{1}{\mu} \left(\|\text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right) \\
 &\leq \frac{1}{\mu} \left(\|\text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + 2\alpha \|\nabla \text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \alpha^2 \|\Delta \text{rot } (u_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right) \\
 &= \frac{1}{\mu} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 - \langle (\text{rot } (\Delta u_N))_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle &= \frac{1}{\alpha} \left(\|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 - \langle \text{rot } (u_N)_\Phi, (v_N)_\Phi \rangle \right) \\
 &\geq \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{1}{\mu} \right) \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
 &= \frac{\lambda_1}{1 + 2\alpha\lambda_1} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2.
 \end{aligned}$$

En remplaçant cette estimation dans l'équation (6.11) on obtient,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \frac{\nu\lambda_1}{1 + 2\alpha\lambda_1} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}^2 + \partial_t \theta \left\| |D|^{\frac{1}{2}} (v_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2}^2 \\
 \leq \|(\text{rot } f)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} + C_0 \left\| |D|^3 (u_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2} \left\| |D|^{\frac{1}{2}} (v_N)_\Phi \right\|_{\mathbf{L}^2}^2. \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

Choisissons la fonction $\theta(t)$ telle que $\theta(0) = 0$ et

$$\partial_t \theta(t) = C_0 \left\| |D|^3 (u_N)_\Phi(t) \right\|_{\mathbf{L}^2}.$$

Alors, l'inégalité (6.12) implique que

$$\frac{d}{dt} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} + \frac{2\nu\lambda_1}{1 + 2\alpha\lambda_1} \|(v_N)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} \leq \|(\text{rot } f)_\Phi\|_{\mathbf{L}^2}. \quad (6.13)$$

Une intégration en temps de l'équation (6.13) entraîne que

$$\|(v_N)_\Phi(t)\|_{\mathbf{L}^2} \leq e^{-\gamma t} \|(v_N)_\Phi(0)\|_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t e^{-\gamma(t-s)} \|(\text{rot } f(s))_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} ds, \quad (6.14)$$

où

$$\gamma = \frac{2\nu\lambda_1}{1 + 2\alpha\lambda_1}.$$

Remarquons que le dernier terme du membre de droite de l'équation (6.14) peut s'écrire sous la forme d'une convolution en temps. L'inégalité de Young implique donc

$$\int_0^t \|(v_N)_\Phi(s)\|_{\mathbf{L}^2} ds \leq \frac{1}{\gamma} \left(\|(v_N)_\Phi(0)\|_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \|(\text{rot } f(s))_\Phi\|_{\mathbf{L}^2} ds \right). \quad (6.15)$$

Maintenant, soit

$$T^* = \sup \left\{ T \geq 0 \mid \theta(t) = C_0 \int_0^t \| |D|^3 (u_N)_\Phi(s) \|_{\mathbf{L}^2} ds < \frac{a}{2}, \forall 0 \leq t \leq T \right\}.$$

Le fait que $\theta(0) = 0$ implique déjà que $T^* > 0$. Pour tout $0 \leq t < T^*$, l'estimation (6.15) entraîne que

$$\begin{aligned} \theta(t) &= C_0 \int_0^t \| |D|^3 (u_N)_\Phi(s) \|_{\mathbf{L}^2} ds \leq C_0 C_\alpha \int_0^t \| (v_N)_\Phi(s) \|_{\mathbf{L}^2} ds \\ &\leq \frac{C_0 C_\alpha}{\gamma} \left(\| u_0 \|_{\mathcal{G}_a^3} + \int_0^{+\infty} \| f(t) \|_{\mathcal{G}_a^1} ds \right). \end{aligned}$$

Si les données initiales satisfont

$$\| u_0 \|_{\mathcal{G}_a^3} + \int_0^{+\infty} \| f(t) \|_{\mathcal{G}_a^1} ds \leq \frac{a\gamma}{C_0 C_\alpha},$$

alors pour tout $0 \leq t < T^*$, $\theta(t) \leq \frac{a}{4} < \frac{a}{2}$, ce qui implique que $T^* = +\infty$.

Le fait que $T^* = +\infty$ et l'estimation (6.14) entraîne que, pour tout $N \in \mathbb{N}$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\| (v_N)_\Phi(t) \|_{\mathbf{L}^2} \leq \| (v_N)_\Phi(0) \|_{\mathbf{L}^2} + \int_0^t \| (\text{rot } f(s))_\Phi \|_{\mathbf{L}^2} ds \leq \frac{a}{C_0 C_\alpha}.$$

Donc $\{(v_N)_\Phi\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{L}^\infty(\mathbb{R}_+, \mathbf{L}^2)$. Retournons à l'équation (6.10), il est facile de montrer que $\{\partial_t (v_N)_\Phi\}$ est une suite bornée dans $\mathbf{L}_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{\mathbf{H}}^{-1})$. Le théorème d'Arzela-Ascoli nous permet enfin de passer à la limite en N et le théorème 6.1.1 est donc démontré. ■

Rappels d'éléments de la théorie de Littlewood-Paley

A.1 Les espaces de fonctions

Dans cette section, on rappelle les définitions des espaces de fonctions usuels ainsi que les définitions des espaces anisotropes que l'on a utilisés tout au long de cette thèse.

Définition A.1.1 *L'espace de Sobolev (isotrope, inhomogène) $\mathbf{H}^m(\mathbb{R}^3)$, avec m entier positif, est l'espace des fonctions f dans \mathbf{L}^2 telles que les dérivées au sens des distributions D^α de f appartiennent également à \mathbf{L}^2 , pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{N}^3$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \leq m$.*

Ici, $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3}$ et $D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, pour tout $j = 1, 2, 3$. La norme de \mathbf{H}^m peut être définie comme suit

$$\|f\|_{\mathbf{H}^m}^2 = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{\mathbf{L}^2}^2.$$

Ici, on travaille dans l'espace \mathbb{R}^3 tout entier. En utilisant la transformation de Fourier, on peut définir les espaces de Sobolev (isotropes) \mathbf{H}^s , avec $s \in \mathbb{R}$, en termes des fréquences.

Définition A.1.2 *Pour toute distribution $u \in \mathcal{D}'$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}u$ (aussi notée \widehat{u}) est définie comme suit*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3, \quad \mathcal{F}u(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{-ix \cdot \xi} u(x) dx.$$

La transformée de Fourier inverse, notée \mathcal{F}^{-1} , permet de récupérer u à partir de \widehat{u} :

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}\widehat{u}(x) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi.$$

Définition A.1.3 *Pour tout $s \in \mathbb{R}$, l'espace de Sobolev inhomogène (isotrope) \mathbf{H}^s est défini comme suit*

$$\mathbf{H}^s = \left\{ u \in \mathcal{S}' \mid \|u\|_{\mathbf{H}^s}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

De la même manière, on définit l'espace de Sobolev homogène (isotrope) $\dot{\mathbf{H}}^s$ comme suit

$$\dot{\mathbf{H}}^s = \left\{ u \in \mathcal{S}' \mid \widehat{u} \in \mathbf{L}_{loc}^1 \text{ et } \|u\|_{\dot{\mathbf{H}}^s}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} |\xi|^{2s} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

Remarque A.1.4 On remarque que si $s \geq \frac{3}{2}$, alors $\dot{\mathbf{H}}^s$ n'est pas un espace de Banach.

On rappelle le théorème fondamental suivant sur les inclusions de Sobolev.

Théorème A.1.5 1. Si s est positif et plus petit que $\frac{n}{2}$, alors l'espace $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$ est inclus, avec injection continue, dans l'espace $\mathbf{L}^{\frac{2n}{n-2s}}(\mathbb{R}^n)$.

2. Si $1 < p \leq 2$, alors l'espace $\mathbf{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est inclus, avec injection continue, dans l'espace $\dot{\mathbf{H}}^s(\mathbb{R}^n)$ avec $s = -n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right)$.

Maintenant, on définit les espaces de Lebesgue et les espaces de Sobolev anisotropes. On utilise l'indice "h" pour décrire les variables horizontales, et l'indice "v" ou "3" pour la variable verticale. De cette manière, $x_h = (x_1, x_2)$ et $\xi_h = (\xi_1, \xi_2)$.

Définition A.1.6 Les espaces de Lebesgue anisotropes $\mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q$ avec $p, q \geq 1$ sont définis de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q(\mathbb{R}^3) &= \mathbf{L}^p(\mathbb{R}_h^2; \mathbf{L}_v^q(\mathbb{R})) \\ &= \left\{ u \in \mathcal{S}' : \|u\|_{\mathbf{L}_h^p \mathbf{L}_v^q} = \left[\int_{\mathbb{R}_h^2} \left| \int_{\mathbb{R}_v} |u(x_h, x_3)|^q dx_3 \right|^{\frac{p}{q}} dx_h \right]^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}. \end{aligned}$$

On remarque que l'ordre d'intégration est très important comme le montre le lemme suivant.

Lemme A.1.7 Soient $1 \leq p \leq q$. Si $u : X_1 \times X_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de $\mathbf{L}^p(X_1; \mathbf{L}^q(X_2))$, où $(X_1, d\mu_1)$ et $(X_2, d\mu_2)$ sont des espaces mesurables, alors $u \in \mathbf{L}^q(X_2; \mathbf{L}^p(X_1))$ et

$$\begin{aligned} \|u\|_{\mathbf{L}^q(X_2; \mathbf{L}^p(X_1))} &= \left[\int_{X_2} \left| \int_{X_1} |u|^p d\mu_1 \right|^{\frac{q}{p}} d\mu_2 \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\int_{X_1} \left| \int_{X_2} |u|^q d\mu_2 \right|^{\frac{p}{q}} d\mu_1 \right]^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{\mathbf{L}^p(X_1; \mathbf{L}^q(X_2))}. \end{aligned}$$

Définition A.1.8 Les espaces de Sobolev anisotropes inhomogènes $\mathbf{H}^{\sigma, s}$, avec $\sigma, s \in \mathbb{R}$, sont définis comme suit

$$\mathbf{H}^{\sigma, s} = \left\{ u \in \mathcal{S}' \mid \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s}}^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} (1 + |\xi_h|^2)^\sigma (1 + |\xi_3|^2)^s |\widehat{u}|^2 d\xi < +\infty \right\}.$$

A.2 Découpage dyadique

L'idée de base est d'échantillonner les fréquences à l'aide d'un découpage en couronnes de tailles 2^q , où q est un entier naturel. Soit $\mathcal{A}_{r_1, r_2} = \{z \in \mathbb{R} : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$. Soit ψ une

fonction paire, C^∞ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que son support est contenu dans la boule $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{4}{3})$ et ψ est identiquement égale à 1 sur un voisinage de la boule $B_{\mathbb{R}}(0, \frac{3}{4})$. Soit

$$\varphi(z) = \psi\left(\frac{z}{2}\right) - \psi(z).$$

Alors, le support de φ est contenu dans la couronne $\mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}} = \{z \in \mathbb{R} : \frac{3}{4} \leq |z| \leq \frac{8}{3}\}$, et φ est identiquement égale à 1 sur la couronne $\mathcal{A}_{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}} = \{z \in \mathbb{R} : \frac{4}{3} \leq |z| \leq \frac{3}{2}\}$.

Maintenant, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on pose

$$\varphi_j(z) = \varphi\left(\frac{z}{2^j}\right).$$

Alors, le support de φ_j est contenu dans la couronne $2^j \mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}}$, φ_j est identiquement égale à 1 dans la couronne $2^j \mathcal{A}_{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}}$. On a la proposition suivante

Proposition A.2.1

1. Pour tout $z \in \mathbb{R}$, $\psi(z) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \varphi_j(z) = 1$.
2. Si $|j - j'| \geq 2$, $\text{supp}(\varphi_j) \cap \text{supp}(\varphi_{j'}) = \emptyset$.
3. Si $\tilde{\mathcal{A}} = B(0, \frac{2}{3}) + \mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}}$, alors $\tilde{\mathcal{A}}$ est une couronne et si $|j - j'| \geq 5$, on a

$$2^j \tilde{\mathcal{A}} \cap 2^{j'} \mathcal{A}_{\frac{3}{4}, \frac{8}{3}} = \emptyset,$$

et

$$\frac{1}{3} \leq \psi^2(z) + \sum_{j \geq 0} \phi^2(2^{-j}z) \leq 1.$$

On introduit les définitions des opérateurs de troncature suivants.

Définition A.2.2 Pour toute distribution tempérée u , on définit

$$\begin{aligned} \Delta_j^h u &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi_j(|\xi_h|)\hat{u}(\xi)), \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^h u &= \mathcal{F}^{-1}(\psi(|\xi_h|)\hat{u}(\xi)), \\ \Delta_j^h u &= 0, \quad \forall j \leq -2 \\ \Delta_k^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\varphi_k(|\xi_3|)\hat{u}(\xi)), \quad \forall k \in \mathbb{N}, \\ \Delta_{-1}^v u &= \mathcal{F}^{-1}(\psi(|\xi_3|)\hat{u}(\xi)), \\ \Delta_k^v u &= 0, \quad \forall k \leq -2. \end{aligned}$$

On renvoie le lecteur à [10] et [21] pour une construction plus détaillée de ces opérateurs. Cette définition, combinée avec la proposition A.2.1, implique que toute distribution tempérée peut s'écrire en termes des troncatures en fréquences verticales

$$u = \sum_{j, k \geq -1} \Delta_j^h \Delta_k^v u.$$

Dans ce qui suit, on aura besoin des inégalités de Bernstein suivantes (voir [83] pour une démonstration).

Lemme A.2.3 (Lemme de Bernstein) *Soit $0 < r_1 < r_2$. Il existe une constante positive C_0 telle que pour toute $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dont le support de la transformation de Fourier est contenu dans l'anneau $2^q \mathcal{A}_{r_1, r_2}$, on a*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \sup_{|\alpha|=k} \|\partial^\alpha u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (\text{A.1})$$

et

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{p'_1} \mathbf{L}_v^{p'_2}} \leq C_0 2^{q(\frac{2}{p_1} - \frac{2}{p'_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'_2})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1 \leq p'_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq p'_2. \quad (\text{A.2})$$

Notons maintenant \mathcal{F}^v la transformation de Fourier selon la direction verticale. On a également le lemme de Bernstein en la direction verticale.

Lemme A.2.4 (Lemme de Bernstein) *Soit $0 < r_1 < r_2$. Il existe une constante positive C_0 telle que pour toute $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ dont le support de la transformation de Fourier verticale est contenu dans le domaine $\mathbb{R}_h^2 \times 2^q \mathcal{A}_{r_1, r_2}$, on a*

$$2^{qk} C_0^{-k} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq \|\partial_3^k u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}} \leq 2^{qk} C_0^k \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall k \geq 0, \quad \forall p_1, p_2 \geq 1, \quad (\text{A.3})$$

et

$$\|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p'_2}} \leq C_0 2^{q(\frac{1}{p_2} - \frac{1}{p'_2})} \|u\|_{\mathbf{L}_h^{p_1} \mathbf{L}_v^{p_2}}, \quad \forall 1 \leq p_1, \quad \forall 1 \leq p_2 \leq p'_2. \quad (\text{A.4})$$

Maintenant, on peut écrire la norme des espaces de Sobolev anisotropes $\mathbf{H}^{\sigma, s}$ sous forme des sommes dyadiques.

Lemme A.2.5 *Supposons que $u \in \mathbf{H}^{\sigma, s}$. Alors,*

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s}} = \left(\sum_{j, k \geq -1} 2^{2(j\sigma + ks)} \|\Delta_j^h \Delta_k^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ce lemme se déduit directement de Définition A.2.2 et des inégalités de Bernstein.

Remarque A.2.6 1. Par des raisonnements simples, on peut montrer que

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s}}^2 = \sum_{j \geq -1} 2^{2j\sigma} \|\Delta_j^h u\|_{\mathbf{L}_h^2(\mathbf{H}_v^s)}^2 = \sum_{k \geq -1} 2^{2ks} \|\Delta_k^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)}^2.$$

2. En général, on a

$$\mathbf{H}^{\sigma, s} \neq \mathbf{H}_h^\sigma(\mathbf{H}_v^s) \neq \mathbf{H}_v^s(\mathbf{H}_h^\sigma).$$

Dans le cas particulier où $\sigma = 0$, on a

$$\mathbf{H}^{0, s} = \mathbf{L}_h^2(\mathbf{H}_v^s) \neq \mathbf{H}_v^s(\mathbf{L}_h^2),$$

et la norme de $\mathbf{H}^{0, s}$ s'écrit sous forme

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{0, s}} = \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le lemme suivant donne une estimation pour chaque paquet Δ_q^v .

Lemme A.2.7 *Supposons que u appartient à $\mathbf{H}^{\sigma,s}$. Alors, il existe une suite de nombres positifs de carré sommable $\{c_q(u, \sigma, s)\}$ telle que*

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq c_q(u, \sigma, s) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}}.$$

Dans le cas où $\sigma = 0$ ou dans le cas où la situation est claire, on va écrire tout simplement $c_q(u)$. Pour le cas où $\sigma = 0$, l'inégalité s'écrira

$$\|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}^2} \leq c_q(u, \sigma) 2^{-qs} \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s}}.$$

Preuve

Soit

$$c_q(u) = \frac{2^{qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)}}{\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}}}.$$

Comme

$$\|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} = \left(\sum_q 2^{2qs} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

on déduit que $\{c_q(u)\}_{q \geq -1}$ est une suite de carré sommable. Lemme A.2.7 est donc démontré. ■

Rappelons que l'on utilise toujours (c_q) (respectivement (d_q)) pour une suite de carré sommable (respectivement sommable), dont la somme des carrés (respectivement la somme) est égale à 1, des constantes positives (qui peuvent dépendre de plusieurs paramètres). De plus, on notera toute autre constante par C .

Finalement, on rappelle le lemme suivant [voir [83], Lemme 3.3].

Lemma A.2.1 *For any real numbers $m, n, l \geq 1$ such that $\frac{1}{m} = \frac{1}{n} + \frac{1}{l}$, there exists a constant $C > 0$ such that, for any functions u, v , we have*

$$\|[\Delta_q^v; u] v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^m} \leq C 2^{-q} \|\partial_3 u\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^n} \|v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^l}. \quad (\text{A.5})$$

A.3 Preuve du théorème 5.2.7

Pour toute distribution tempérée u , pour tout $q \geq -1$ en utilisant le lemme de Bernstein, on a

$$\|S_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq \sum_{p \leq q-1} 2^{\frac{p}{2}} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq \sum_{p \leq q-1} 2^{p(\frac{1}{2}-s)} 2^{ps} \|\Delta_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)}. \quad (\text{A.6})$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|S_q^v u\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq \begin{cases} C \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} & \text{si } s > \frac{1}{2}, \\ C \sqrt{q} \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma, \frac{1}{2}}} & \\ C 2^{-q(s-\frac{1}{2})} \|u\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s}} & \text{si } s < \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Maintenant, en utilisant la décomposition de Bony en paraproducts, on a

$$\begin{aligned}
 \Delta_q^v(ab) &= \Delta_q^v(T_a^v b + T_b^v a + R(a, b)) \\
 &= \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v a \Delta_{q'}^v b + \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v b \Delta_{q'}^v a \\
 &= \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} \sum_{i \in \{0, \pm 1\}} \Delta_{q'-i}^v a \Delta_{q'}^v b.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Alors, les lois de produit bidimensionnel impliquent

$$\begin{aligned}
 \|\Delta_q^v(ab)\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})} &\leq \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v a\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^\sigma)} \|\Delta_{q'}^v b\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \\
 &+ \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v b\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \|\Delta_{q'}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \\
 &+ \left\| \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} \sum_{i \in \{0, \pm 1\}} \Delta_{q'-i}^v a \Delta_{q'}^v b \right\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})}.
 \end{aligned} \tag{A.9}$$

Pour le premier terme, en utilisant (A.7) et Lemme A.2.7 on a

$$\|S_{q'-1}^v a\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^\sigma)} \|\Delta_{q'}^v b\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \leq C c_{q'}(b) 2^{-q' s_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}},$$

donc

$$\sum_{|q'-q| \leq N_0} \|S_{q'-1}^v a\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^\sigma)} \|\Delta_{q'}^v b\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \leq C c_q 2^{-q s_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}}, \tag{A.10}$$

où

$$c_q = \sum_{|q'-q| \leq N_0} c_{q'}(b) 2^{-(q'-q)s_1}$$

est une suite de carré sommable.

Pour le deuxième terme, on étudie trois cas.

1. Si $s_1 > \frac{1}{2}$. En utilisant (A.7), Lemme A.2.7 et le fait que $q' \geq 0$ et $s_1 \leq s_0$ on a

$$\begin{aligned}
 \|S_{q'-1}^v b\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \|\Delta_{q'}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} &\leq C c_{q'}(a) 2^{-q' s_0} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}} \\
 &\leq C c_{q'}(a) 2^{-q' s_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}}.
 \end{aligned}$$

2. Si $s_1 < \frac{1}{2}$. En utilisant (A.7), Lemme A.2.7 et le fait que $q' \geq 0$ et $s_0 > \frac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned}
 \|S_{q'-1}^v b\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \|\Delta_{q'}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} &\leq C c_{q'}(a) 2^{-q'(s_1+s_0-\frac{1}{2})} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}} \\
 &\leq C c_{q'}(a) 2^{-q' s_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}}.
 \end{aligned}$$

3. Si $s_1 = \frac{1}{2}$. En utilisant (A.7), Lemme A.2.7 et le fait que $q' \geq 0$ et $s_0 > \frac{1}{2}$ on a

$$\begin{aligned}
 \|S_{q'-1}^v b\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \|\Delta_{q'}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} &\leq C c_{q'}(a) 2^{-\frac{q'}{2}} \left(2^{-q'(s_0-\frac{1}{2})} \sqrt{q'} \right) \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}} \\
 &\leq C c_{q'}(a) 2^{-q' s_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma, s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma', s_1}}.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$\sum_{|q'-q|\leq N_0} \|S_{q'-1}^v b\|_{\mathbf{L}_v^\infty(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \|\Delta_{q'}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \leq C c_q 2^{-qs_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}}, \quad (\text{A.11})$$

où

$$c_q = \sum_{|q'-q|\leq N_0} c_{q'}(a) 2^{-(q'-q)s_1}$$

est une suite de carré sommable.

Pour le dernier terme, en utilisant le lemme de Bernstein on a

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_q^v \sum_{q'\geq q-N_0} \Delta_{q'-i}^v a \Delta_{q'}^v b \right\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})} &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \left\| \Delta_q^v \sum_{q'\geq q-N_0} \Delta_{q'-i}^v a \Delta_{q'}^v b \right\|_{\mathbf{L}_v^1(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})} \\ &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \sum_{q'\geq q-N_0} \|\Delta_{q'-i}^v a\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^\sigma)} \|\Delta_{q'}^v b\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma'})} \\ &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}} \sum_{q'\geq q-N_0} c_{q'-i}(a) c_{q'}(b) 2^{-q'(s_0+s_1)} \end{aligned}$$

On remarque que

$$\sum_{i\in\{0,\pm 1\}} c_{q'-i}(a) c_{q'}(b)$$

forme une suite sommable des constantes positives (car (c_q) est une suite de carré sommable). En posant

$$c_q = \sum_{q'\geq q-N_0} c_{q'-i}(a) c_{q'}(b) 2^{-(q'-q)(s_0+s_1)}$$

et en utilisant le fait que $s_0 + s_1 > 0$, on trouve facilement que (c_q) est une suite sommable des constantes positives, et donc (c_q) est de carré sommable. En utilisant le fait que $s_0 > \frac{1}{2}$, on obtient enfin

$$\begin{aligned} \sum_{q'\geq q-N_0} \left\| \Delta_q^v \sum_{q'\geq q-N_0} \sum_{i\in\{0,\pm 1\}} \Delta_{q'-i}^v a \Delta_{q'}^v b \right\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})} &\leq C c_q 2^{-q(s_1+s_0-\frac{1}{2})} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}} \\ &\leq C c_q 2^{-qs_1} \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}}. \quad (\text{A.12}) \end{aligned}$$

Les inégalités (A.10) à (A.12) et (A.9) impliquent que

$$2^{qs_1} \|\Delta_q^v(ab)\|_{\mathbf{L}_v^2(\mathbf{H}_h^{\sigma+\sigma'-1})} \leq C c_q \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}}. \quad (\text{A.13})$$

Finalement, en prenant la norme ℓ^2 par rapport à q les membres de gauche et de droite de l'inégalité (A.13), on obtient

$$\|ab\|_{\mathbf{H}^{\sigma+\sigma'-1,s_1}} \leq C \|a\|_{\mathbf{H}^{\sigma,s_0}} \|b\|_{\mathbf{H}^{\sigma',s_1}}.$$

Le théorème 5.2.7 est démontré. ■

A.4 Démonstration des lemmes 5.2.8 et 5.2.9.

Afin de démontrer ces deux lemmes à la fois, on pose

$$\begin{aligned} P_h(u, v, w) &= \langle \Delta_q^v(u^h \cdot \nabla_h v) | \Delta_q^v w \rangle \\ P_v(u, v, w) &= \left\langle \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \Delta_{q'}^v u^3 | \Delta_q^v w \right\rangle \\ Q_v(u, v, w) &= \left\langle \Delta_q^v \sum_{|q'-q| \leq N_0} S_{q'-1}^v u^3 \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v w \right\rangle. \end{aligned}$$

Pour la partie horizontale, l'estimation est standard. En utilisant la dualité entre $\dot{\mathbf{H}}_h^{\frac{1}{2}}$ et $\dot{\mathbf{H}}_h^{-\frac{1}{2}}$, le fait que $\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^2)$ est interpolé entre \mathbf{L}^2 et $\dot{\mathbf{H}}^1$ et le lemme A.2.7, on obtient

$$\begin{aligned} |P_h(u, v, w)| &\leq \left\| \Delta_q^v(u^h \cdot \nabla_h v) \right\|_{\mathbf{L}_v^2(\dot{\mathbf{H}}_h^{-\frac{1}{2}})} \left\| \Delta_q^v w \right\|_{\mathbf{L}_v^2(\dot{\mathbf{H}}_h^{\frac{1}{2}})} \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \left\| u^h \cdot \nabla_h v \right\|_{\mathbf{H}^{-\frac{1}{2}, s}} \left\| w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le théorème 5.2.7 avec $\sigma = \frac{1}{2}$, $\sigma' = 0$, $s_0 > \frac{1}{2}$, $s_1 = s$ on obtient

$$\begin{aligned} |P_h(u, v, w)| &\leq C d_q 2^{-2qs} \left\| u \right\|_{\mathbf{H}^{\frac{1}{2}, s_0}} \left\| \nabla_h v \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}} \left\| w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \left\| u \right\|_{\mathbf{H}^{0, s_0}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h u \right\|_{\mathbf{H}^{0, s_0}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h v \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}} \left\| w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.14}) \end{aligned}$$

Pour la partie verticale, les estimations se font de façon standard pour $P_v(u, v, w)$ car la dérivée ∂_3 dans $S_{q'+2}^v(\partial_3 v)$ peut être absorbée par le terme $\Delta_{q'}^v u^3$. En revanche, dans $Q_v(u, v, w)$, la dérivée ∂_3 dans $\partial_3 \Delta_{q'}^v v$ ne peut pas être absorbée par le terme $S_{q'-1}^v u^3$. Alors, on va estimer $Q_v(u, v, w) + Q_v(u, w, v)$ au lieu de $Q_v(u, v, w)$ afin de pouvoir absorber la dérivée verticale dans le terme $S_{q'-1}^v u^3$.

Tout d'abord, on a

$$|P_v(u, v, w)| \leq C c_q 2^{-qs} \left\| w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h w \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \Delta_{q'}^v u^3 \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}}.$$

L'inégalité de Bernstein et la loi de produit des espaces de Sobolev $2D$ impliquent que

$$\begin{aligned} \left\| \Delta_q^v \sum_{q' \geq q - N_0} S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \Delta_{q'}^v u^3 \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{-\frac{1}{2}}} &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \sum_{q' \geq q - N_0} \left\| S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \Delta_{q'}^v u^3 \right\|_{\mathbf{L}_v^1 \dot{\mathbf{H}}_h^{-\frac{1}{2}}} \\ &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \sum_{q' \geq q - N_0} \left\| \left\| S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \right\|_{\dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}} \left\| \Delta_{q'}^v u^3 \right\|_{\mathbf{L}_h^2} \right\|_{\mathbf{L}_v^1} \\ &\leq C 2^{\frac{q}{2}} \sum_{q' \geq q - N_0} \left\| S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}} \left\| \Delta_{q'}^v u^3 \right\|_{\mathbf{L}^2} \end{aligned}$$

D'une part, en utilisant l'inégalité de Bernstein et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \left\| S_{q'+2}^v(\partial_3 v) \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}} &\leq \sum_{p \leq q'+1} 2^p \left\| \Delta_p^v v \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sum_{p \leq q'+1} 2^{p(1-s)} 2^p \left\| \Delta_p^v v \right\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq C 2^{q'(1-s)} \left\| v \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}} \left\| \nabla_h v \right\|_{\mathbf{H}^{0, s}}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \|\Delta_{q'}^v u^3\|_{\mathbf{L}^2} &\leq C2^{-q'} \|\Delta_{q'}^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}^2} \leq C2^{-q'} \|\Delta_{q'}^v \operatorname{div}_h u^h\|_{\mathbf{L}^2} \\ &\leq C2^{-q'} \|\Delta_{q'}^v \nabla_h u\|_{\mathbf{L}^2} \leq Cc_{q'} 2^{-q'(1+s_0)} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}. \end{aligned}$$

Grâce au fait que $s_0 > \frac{1}{2}$, on obtient enfin

$$|P_v(u, v, w)| \leq Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.15})$$

Maintenant, on s'intéresse à la somme $Q_v(u, v, w) + Q_v(u, w, v)$. On décompose comme dans [30] et [26], et on obtient

$$Q_v(u, v, w) + Q_v(u, w, v) \leq Q_S(u, v, w) + Q_1(u, v, w) + Q_1(u, w, v) + Q_2(u, v, w) + Q_2(u, w, v), \quad (\text{A.16})$$

où

$$\begin{cases} Q_S(u, v, w) = \langle S_q^v(u^3) \partial_3 \Delta_q^v v | \Delta_q^v w \rangle + \langle S_q^v(u^3) \partial_3 \Delta_q^v w | \Delta_q^v v \rangle \\ Q_1(u, v, w) = \sum_{|q'-q| \leq N_0} \langle [\Delta_q^v, S_{q'-1}^v u^3] \partial_3 \Delta_{q'}^v v | \Delta_q^v w \rangle \\ Q_2(u, v, w) = \sum_{|q'-q| \leq N_0} \langle (S_q^v - S_{q'-1}^v) u^3 \partial_3 \Delta_q^v v | \Delta_q^v w \rangle. \end{cases}$$

Une intégration par parties transforme $Q_S(u, v, w)$ en

$$Q_S(u, v, w) = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_3 S_q^v u^3 \Delta_q^v v \Delta_q^v w \, dx = - \int_{\mathbb{R}^3} S_q^v \operatorname{div}_h u^h \Delta_q^v v \Delta_q^v w \, dx.$$

En utilisant l'inégalité de Bernstein, la loi de produit dans les espaces de Sobolev sur \mathbb{R}^2 , le fait que $s_0 > \frac{1}{2}$ et l'estimation suivante

$$\|S_q^v \operatorname{div}_h u^h\|_{\mathbf{L}^2} \leq C2^{-qs_0} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}},$$

on obtient que

$$\begin{aligned} |Q_S(u, v, w)| &\leq \|S_q^v \operatorname{div}_h u^h \Delta_q^v v\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}_h^{-\frac{1}{2}}} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}_h^{\frac{1}{2}}} \\ &\leq Cd_q 2^{-2qs} 2^{\frac{q}{2}} \|S_q^v \operatorname{div}_h u^h\|_{\mathbf{L}^2} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.17}) \end{aligned}$$

Le terme $Q_2(u, v, w)$ se calcule exactement comme $P_v(u, v, w)$. On trouve donc les mêmes estimations

$$\begin{cases} |Q_2(u, v, w)| = Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}, \\ |Q_2(u, w, v)| = Cd_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (\text{A.18})$$

Pour majorer le terme $Q_1(u, v, w)$, on va utiliser l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Bernstein, le lemme A.2.1

$$\|[\Delta_q^v; a] b\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^p} \leq C2^{-q} \|\partial_3 a\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^r} \|b\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^t},$$

avec $a = S_{q'-1}^v u^3$, $b = \partial_3 \Delta_{q'}^v v$ et $p = \frac{4}{3}$, $r = 2$, $t = 4$, l'inclusion $\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}} \hookrightarrow \mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4$, le fait que $\mathbf{L}_v^2 \dot{\mathbf{H}}^{\frac{1}{2}}$ est interpolé entre \mathbf{L}^2 et $\mathbf{L}_v^2 \mathbf{H}_h^1$, ainsi que le fait que

$$\|S_{q'-1}^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^2} \leq \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}.$$

On obtient alors

$$\left\{ \begin{array}{l} |Q_1(u, v, w)| \leq \sum_{|q'-q| \leq N_0} \|[\Delta_q^v, S_{q'-1}^v u^3] \partial_3 \Delta_{q'}^v v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^{\frac{4}{3}}} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \\ \leq \sum_{|q'-q| \leq N_0} C 2^{-q} \|S_{q'-1}^v \partial_3 u^3\|_{\mathbf{L}_v^\infty \mathbf{L}_h^2} \|\partial_3 \Delta_{q'}^v v\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \|\Delta_q^v w\|_{\mathbf{L}_v^2 \mathbf{L}_h^4} \\ \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \\ |Q_1(u, w, v)| \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right. \quad (\text{A.19})$$

Les inégalités (A.16), (A.17), (A.18) et (A.19) impliquent que

$$|Q_v(u, v, w) + Q_v(u, w, v)| \leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.20})$$

Maintenant, en regroupant les estimations (A.14), (A.15), (A.20), on trouve

$$\begin{aligned} \left| \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v v \rangle_{\mathbf{L}^2} \right| &\leq |P_h(u, v, v)| + |P_v(u, v, v)| + |Q_v(u, v, v)| \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \left(\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}} \right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &|\langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla v) | \Delta_q^v w \rangle + \langle \Delta_q^v(u \cdot \nabla w) | \Delta_q^v v \rangle| \\ &\leq |P_h(u, v, w)| + |P_h(u, w, v)| + |P_v(u, v, w)| + |P_v(u, w, v)| + |Q_v(u, v, w) + Q_v(u, w, v)| \\ &\leq C d_q 2^{-2qs} \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \left[\|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} + \right. \\ &\quad \left. + \|u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|\nabla_h v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} + \|\nabla_h u\|_{\mathbf{H}^{0,s_0}}^{\frac{1}{2}} \|v\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \|w\|_{\mathbf{H}^{0,s}}^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}$$

Les deux lemmes 5.2.8 et 5.2.9 sont bien démontrés. \blacksquare

Bibliographie

- [1] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, Global Splitting, Integrability and Regularity of 3D Euler and Navier-Stokes Equations for Uniformly Rotating Fluids, *European Journal of Mechanics*, **15**, 1996, p.291-300.
- [2] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, Resonances and regularity for Boussinesq equations, *Russ. J. of Math. Physics*, **4**, 1996, p.417-428.
- [3] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, On the asymptotic regimes and the strongly stratified limit of rotating Boussinesq equations, *Journal of Theoretical and Comp. Fluid Dynamics*, **9**, 1997, p.223-251.
- [4] A. Babin, A. Mahalov, and B. Nicolaenko, Regularity and integrability of 3d euler and navier-stokes equations for rotating fluids, *Asymptotic Analysis*, **15**, no. 2, 1997, p.103-150.
- [5] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains, *Indiana University Mathematics Journal*, **48**, 1999, p.1133-1176.
- [6] A. Babin, A. Mahalov et B. Nicolaenko, Strongly stratified limit of 3D primitive equations in an infinite layer, *Contemporary Mathematics*, **283**, 2001.
- [7] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Équations d'ondes quasilineaires et estimations de Strichartz, *American Journal of Mathematics*, **121**, 1999, p.131-175.
- [8] T. Beale and A. Bourgeois, Validity of the quasi-geostrophic model for large scale flow in the atmosphere and ocean, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **25**, 1994, p.1023-1068.
- [9] J. Benameur, S. Ibrahim and M. Majdoub, Asymptotic study of a magneto-hydrodynamic system, *Differential Integral Equations*, **18**, 2005, no. 3, p.299-324.
- [10] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'École Normale Supérieure*, **14**, 1981, p.209-246.
- [11] P. Bougeault and R. Sadourny, Dynamique de l'atmosphère et de l'océan, *Editions de l'École polytechnique*, 2001.
- [12] M. Cannone, Y. Meyer, F. Planchon, Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes, *Seminaire sur les équations aux dérivées partielles, École Polytechnique*, 1994.

BIBLIOGRAPHIE

- [13] F. Charve, Thèse de doctorat, *École Polytechnique*, 2004.
- [14] F. Charve, Global well-posedness and asymptotics for a geophysical fluid system, *Communications in Partial Differential Equations*, **29** (11 & 12), 2004, p.1919-1940.
- [15] F. Charve, Convergence of weak solutions for the primitive system of the quasigeostrophic equations, *Asymptotic Analysis*, **42**, 2005, p.173-209.
- [16] F. Charve, Asymptotics and vortex patches for the quasigeostrophic approximation, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, **85**, 2006, p.493-539.
- [17] F. Charve, Global well-posedness for the primitive equations with less regular initial data, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse Mathématiques (6)*, **17**, 2008, no. 2, p.221-238.
- [18] F. Charve and V-S. Ngo, Asymptotics for the primitive equations with small anisotropic viscosity (soumis à Revista Matemática Iberoamericana).
- [19] P. Chassaing, Mécanique des fluides, *Cépaduès-Éditions*, 1997.
- [20] J.-Y. Chemin, Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible, *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, **23**, 1992, p.20-28.
- [21] J.-Y. Chemin, Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque*, **230**, 1995.
- [22] J.-Y. Chemin, A propos d'un problème de pénalisation de type antisymétrique, *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, **76**, 1997, p.739-755.
- [23] J.-Y. Chemin, Théorèmes d'unicité pour le système de Navier-Stokes tridimensionnel, *Journal d'Analyse Mathématique*, **77**, 1999, p.27-50.
- [24] J.-Y. Chemin, Le système de Navier-Stokes incompressible soixante dix ans après Jean Leray, *Actes des Journées Mathématiques à la Mémoire de Jean Leray, Séminaires & Congrès*, **9**, Soc. Math. France, Paris, 2004, p.99-123.
- [25] J.-Y. Chemin, B.Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier, Anisotropy and dispersion in rotating fluids, *Nonlinear Partial Differential Equations and their application, Collège de France Seminar, Studies in Mathematics and its Applications*, **31**, 2002, p.171-191.
- [26] J.-Y. Chemin, B.Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier, Fluids with anisotropic viscosity, Special issue for R. Temam's 60th birthday, *M2AN. Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **34**, no. 2, 2000, p.315-335.
- [27] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, E. Grenier, Ekman boundary layers in rotating fluids, *ESAIM Controle optimal et calcul des variations, A tribute to J.-L. Lions*, **8**, 2002, p.441-466.
- [28] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier, Mathematical Geophysics : An introduction to rotating fluids and to the Navier-Stokes equations, *Oxford University Press*, 2006.
- [29] J.-Y. Chemin, I. Gallagher, M. Paicu, Global regularity for some classes of large solutions to the Navier-Stokes equations (prepublication).
- [30] J.-Y. Chemin and N. Lerner, Flot de champs de vecteurs non Lipschitziens et équations de Navier-Stokes, *Journal of Differential Equations*, **121**, 1992, p.314-328.
- [31] J.-Y. Chemin and P. Zhang, On the global wellposedness to the 3-D incompressible anisotropic Navier-Stokes equations, *Communications in Mathematical Physics*, **272**, no. 2, 2007, p.529-566.

- [32] D. Cioranescu and O. El Hacène, Existence and uniqueness for fluids of second grade, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar, Vol. VI (Paris, 1982/1983)*, p.178-197, Boston, MA, Pitman, 1984.
- [33] P. Constantin and C Foias, Navier-Stokes equations, *Chicago University Press*, 1988.
- [34] B. Cushman-Roisin, Introduction to geophysical fluid dynamics, *Prentice-Hall*, 1994.
- [35] Handbook of Chemistry and Physics, *C.R.C Press*, 1974, 1994.
- [36] B. Desjardins, E. Dormy and E. Grenier, Stability of mixed Ekman-Hartmann boundary layers, *Nonlinearity*, **12**, 1999, no. 2, p.181-199.
- [37] B. Desjardins and E. Grenier, Derivation of the Quasigeostrophic Potential Vorticity Equations, *Advances in Differential Equations*, **3 (5)**, 1998, p.715-752.
- [38] E. Dormy, Thèse de doctorat.
- [39] E. Dormy, P. Cardin and D. Jault, MHD flow in a slightly differentially rotating spherical shell, with conducting inner core, in a dipolar magnetic field, *Earth and Planetary Science Letters*, **160**, 1998, p.15-30.
- [40] J.E. Dunn, R.L. Fosdick, Thermodynamics, stability and boundedness of fluids of complexity 2 and fluids of second grade, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **56**, 1974, p.191-252.
- [41] A. Dutrifoy, Slow convergence to vortex patches in quasigeostrophic balance, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **171**, 2004, no. 3, p.417-449.
- [42] A. Dutrifoy, Examples of dispersive effects in non-viscous rotating fluids, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **84(9)**, no. 3, 2005, p.331-356.
- [43] P. Embid, A. Majda, Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with arbitrary potential vorticity, *Communications in Partial Differential Equations*, **21** (1996), p.619-658.
- [44] P. Embid, A. Majda, Averaging over fast gravity waves for geophysical flows with unbalanced initial data, *Theoretical and computational fluid dynamics*, **11**, 1998, p.155-169.
- [45] A.B. Ferrari, E.S. Titi, Gevrey regularity for nonlinear analytic parabolic equations, *Communications in Partial Differential Equations*, **23**, 1998, no. 1-2, p.1-16.
- [46] C. Foias, D. Holm, E.S. Titi, The Navier-Stokes-alpha model of fluid turbulence, Advances in nonlinear mathematics and science, *Physica D*, **152/153**, 2001, p.505-519.
- [47] C. Foias, D. Holm, E.S. Titi, The three dimensional viscous Camassa-Holm equations, and their relation to the Navier-Stokes equations and turbulence theory, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **14**, 2002, no. 1, p.1-35.
- [48] C. Foias, R. Temam, Gevrey class regularity for the solutions of the Navier-Stokes equations, *Journal of Functional Analysis*, **87**, 1989, no. 2, p.359-369.
- [49] H. Fujita and T. Kato, On the Navier-Stokes initial value problem I, *Archiv for Rational Mechanic Analysis*, **16**, 1964, p.269-315.
- [50] I. Gallagher, The Tridimensional Navier-Stokes Equations with Almost Bidimensional Data : Stability, Uniqueness and Life Span, *International Mathematics Research Notices*, **18**, 1997, p.919-935.

- [51] I. Gallagher, Applications of Schochet's Methods to Parabolic Equation, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **77**, 1998, p.989-1054.
- [52] I. Gallagher, Asymptotics of the Solutions of Hyperbolic Equations With a Skew-Symmetric Perturbation, *Journal of Differential Equations*, **150**, 1998, p.363-384.
- [53] J. Ginibre and G. Velo, Generalised Strichartz inequalities for wave equation, *Journal of Functional Analysis*, **133**, 1995, p.50-68.
- [54] H.P. Greenspan, The theory of rotating fluids, *Cambridge University Press*, 1968.
- [55] E. Grenier, Fluides en rotation et ondes d'inertie, *CRAS*, **321 (6)**, 1995, p.711-714.
- [56] E. Grenier, Oscillatory perturbations of the Navier-Stokes equations, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **76**, 1997, p.477-498.
- [57] E. Grenier, N. Masmoudi, Ekman layers of rotating fluid, the case of well prepared initial data, *Communications in Partial Differential Equations*, **22 (5-6)** (1997), p.953-975.
- [58] L. Hörmander, Linear partial differential operators, *Springer Verlag*, 1969.
- [59] D. Iftimie, The resolution of the Navier-Stokes equations in anisotropic spaces, *Revista Matemática Iberoamericana*, **15**, 1999, p.1-36.
- [60] D. Iftimie, The 3D Navier-Stokes equations seen as a perturbation of the 2D Navier-Stokes equations, *Bulletin de la Société Mathématique de France*, **127**, 1999, no. 4, p.473-517.
- [61] D. Iftimie, The approximation of the quasigeostrophic system with the primitive systems, *Asymptotic Analysis*, **21**, no. 2, 1999, p.89-97.
- [62] D. Iftimie, A uniqueness result for the Navier-Stokes equations with vanishing vertical viscosity, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **33**, no. 6, 2002, p.1483-1493.
- [63] D. Iftimie and G. Planas, Inviscid limits for the Navier-Stokes equations with Navier friction boundary conditions, *Nonlinearity*, **19**, no. 4, 2006, p.899-918.
- [64] T. Kato, On classical solutions of the two-dimensional non-stationary Euler equation, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **25**, 1967, p.188-200.
- [65] T. Kato, Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equations in \mathbb{R}^m , with application to weak solutions, *Mathematische Zeitschrift*, **187**, 1984, p.471-480.
- [66] M. Keel and T. Tao, Endpoint Strichartz estimates, *American Journal of Mathematics*, **121**, 1999, p.629-669.
- [67] S. Klainerman et M. Machedon, Remark on Strichartz type estimates (with an appendix of J. Bourgain and T. Tataru), *International Mathematics Research Notices*, **5**, 1996, p.201-220.
- [68] H. Koch and D. Tataru, Well-posedness for the Navier-Stokes equations, *Advanced in Mathematics*, **157**, no. 1, 2001, p.22-35.
- [69] P.Lemarié-Rieusset, Recent developments in The Navier-Stokes Problem, *Chapman and Hall*, 2002.
- [70] J. Leray, Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace, *Acta Mathematica*, **63**, 1933, p.193-248.
- [71] J.-L. Lions, R. Temam and S. Wang, New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications, *Nonlinearity*, **5**, 1992, p.237-288.

- [72] J.-L. Lions, R. Temam and S. Wang, Geostrophic asymptotics of the primitive equations of the atmosphere, *Topological Methods in Non Linear Analysis*, **4**, 1994, p.1-35.
- [73] P.-L. Lions, Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. I, Incompressible Models, *Oxford Science Publications*, 1997.
- [74] A. Majda, Vorticity and the mathematical theory of incompressible fluid flow, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **39**, 1986, p.187-220.
- [75] N. Masmoudi, The Euler limit of the Navier-Stokes equations and rotating fluids with boundary, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **142**, 1998, no. 4, p.375-394.
- [76] N. Masmoudi, Ekman layers of rotating fluids : the case of general initial data, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **53**, 2000, no. 4, p.432-483.
- [77] , K. Masuda, On the analyticity and the unique continuation theorem for solutions of the Navier-Stokes equation, *Proc. Japan Acad.*, **43**, 1967, no. 9, p.827-832.
- [78] Y. Meyer, Wavelets, Paraproducts and Navier-Stokes, *Current developments in Mathematics*, 1996 (Cambridge, MA), *International Press*, 1997 (Boston, MA).
- [79] I. Moise, R. Rosa, X. Wang, Attractors for non-compact semigroups via energy equations, *Nonlinearity*, **11**, 1998, no. 5, p.1369-1393.
- [80] V-S. Ngo, Rotating Fluids with small viscosity, *International Mathematics Research Notices IMRN*, 2009, no. 10, p.1860-1890.
- [81] J. Padet, Fluides en écoulement, *Mason, Paris*, 1991.
- [82] M. Paicu, Étude asymptotique pour les fluides anisotropes en rotation rapide dans le cas périodique, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **83**, no. 2, 2004, p.163-242.
- [83] M. Paicu, Équation périodique de Navier-Stokes sans viscosité dans une direction, *Communications in Partial Differential Equations*, **30**, 2005, no. 7-9, p.1107-1140.
- [84] M. Paicu, Équation anisotrope de Navier-Stokes dans des espaces critiques, *Revista Matemática Iberoamericana*, **21**, 2005, no. 1, p.179-235.
- [85] M. Paicu and G. Raugel, Anisotropic Navier-Stokes equations in a bounded cylindrical domain, *PDE and Fluid mechanics, Cambridge University Press*, 2009.
- [86] M. Paicu, G. Raugel, A. Rekaló, Regularity of the global attractor and finite-dimensional behavior for the second grade fluid equations (à paraître au Journal of Differential Equations).
- [87] M. Paicu, Z. Zhang, Global regularity for the Navier-Stokes equations with some classes of large initial data (prepublication).
- [88] J. Pedlosky, Geophysical fluid dynamics, *Springer*, 1979.
- [89] J. Rauch and M. Reed, Nonlinear microlocal analysis of semilinear hyperbolic systems in one space dimension, *Duke Mathematical Journal*, **49**, 1982, p.397-475.
- [90] G. Raugel, Global Attractors in Partial Differential Equations, Ch.17, Handbook of Dynamical Systems, Vol.2, *Elsevier*, 2002.
- [91] M. Sablé-Tougeron, Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires, *Annales de l'Institut Fourier*, **36**, 1986, p.39-82.
- [92] S. Schochet, Fast singular limits of hyperbolic PDEs, *Journal of Differential Equations*, **114**, 1994, p.476-512.

BIBLIOGRAPHIE

- [93] R. Strichartz, Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave equations, *Duke Mathematical Journal*, **44**, 1977, p.705-714.
- [94] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Theory and Numerical Analysis *Amsterdam, North Holland*, 1984.
- [95] F. Weissler, The Navier-Stokes Initial Value Problem in L^p , *Archiv for Rational Mechanics and Analysis*, **74**, 1980, p.219-230.
- [96] V. Yudovitch, Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid, *Zh. Vych. Math.*, **3**, 1963, p.1032-1066.

Résumé

Cette thèse a essentiellement pour objet l'étude de fluides anisotropes en rotation rapide dans \mathbb{R}^3 , quand la viscosité tend vers zero avec le nombre de Rossby $\varepsilon > 0$. On démontre en particulier des résultats d'existence globale pour des données arbitrairement grandes quand le nombre de Rossby ε tend vers zero. On met en lumière le rôle joué par l'effet dispersif. Dans la dernière partie de la thèse, on démontre l'analyticité de la solution globale du système des fluides de grade deux pour des données initiales analytiques petites.

Dans une première partie, on considère les équations de Navier-Stokes avec terme de rotation $\frac{u \wedge e_3}{\varepsilon}$, avec viscosité verticale nulle et viscosité horizontale petite de l'ordre de ε^α , avec $\alpha > 0$. On démontre l'existence globale de la solution forte pour des données initiales grandes, quand $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Nous suivons une démarche utilisée par J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher et E. Grenier, c'est-à-dire, nous décomposons le système de départ en un système linéaire avec donnée initiale plus régulière et un système non-linéaire avec donnée initiale petite. Pour le système linéaire, une grande partie du travail consiste à adapter les estimations de Strichartz et à trouver de nouvelles estimations qui tiennent compte de la viscosité petite. Pour le système non-linéaire, on utilise une méthode de "bootstrap", plus délicate que dans le cas classique, à cause de la petitesse de la viscosité.

Toujours dans cette première partie, on considère les équations de fluides en rotation rapide dans le cas de données mal préparées. Pour ce cas, on montre que, si on ajoute un terme de "friction" aux équations considérées, on peut obtenir de bonnes estimations dissipatives et surtout de bonnes propriétés pour le système limite, ce qui permet de montrer l'existence globale de solutions fortes. Dans le dernier paragraphe de cette partie, on étudie une application importante de la méthode ci-dessus aux fluides en rotation rapide entre deux plaques infinies. Plus précisément, on montre que le résultat de E. Grenier et N. Masmoudi est toujours valable si on suppose que la viscosité est de l'ordre de ε^α , $\alpha > 0$, ce qui permet de construire les couches limites d'Ekman dans ce cas-là.

La deuxième partie est consacrée à l'étude des équations primitives dans \mathbb{R}^3 avec, comme précédemment, viscosité verticale nulle et viscosité horizontale de taille ε^α , $\alpha > 0$. Dans cette partie, nous développons la méthode de la première partie dans le cadre des équations primitives et nous cherchons à adapter au cas anisotrope les calculs faits par F. Charve dans le cas isotrope. Ceci nous permet de montrer l'existence globale de la solution forte du système des équations primitives pour des données grandes avec partie quasi-géostrophique nulle.

Dans la troisième partie, nous étudions le système de la magnéto-hydrodynamique en rotation rapide dans \mathbb{R}^3 dans le cas anisotrope. Nous prouvons d'abord des résultats d'existence locale (globale pour des données petites) et d'unicité de la solution forte. Avec des paramètres bien choisis, nous pouvons aussi appliquer la méthode développée dans les deux premières parties et montrer que le système de la magnéto-hydrodynamique est globalement bien posé pour des données grandes.

Finalement, dans la dernière chapitre de la thèse, on considère le problème de propagation de régularité pour le système des fluides de grade deux sur le tore \mathbb{T}^3 . En utilisant une technique développée par J.-Y. Chemin, on montre que, si la donnée initiale est petite dans une classe de Gevrey appropriée, la solution du système de fluides de grade deux existe globalement en temps, reste dans une certaine classe de Gevrey pour tout temps positif et est donc analytique.

Mots-Clés : Navier-Stokes, Fluides en rotation rapide, Équations primitives, MHD, Fluides de Grade deux, Existence globale, Anisotropie, Estimations de Strichartz, Analyticité.

Classification AMS : 35Q35, 35S30, 76D03, 76D05, 76U05.

Abstract

In this work, we study the global existence of strong solutions of anisotropic rotating fluid systems in the whole space \mathbb{R}^3 , in the case where the data are large and where there are no viscosity in the vertical direction and a small viscosity in the horizontal direction (of size ε^α with $0 < \alpha \leq \alpha_0$, for some $\alpha_0 > 0$). Using Strichartz-type estimates, we prove global existence of strong solutions when the Rossby number ε is small enough. In the last chapter of this thesis, we prove the analyticity of the global solution of the system of fluids of second grade, for small analytic data.

In the first part (third chapter), we consider the Navier-Stokes equations with rotating term $\frac{u \wedge e_3}{\varepsilon}$, with no vertical viscosity and with horizontal viscosity of size ε^α , $\alpha > 0$. We prove the global existence of a unique, strong solution for large data, provided that ε is small enough. Using a method of J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher and E. Grenier, we decompose the system into two parts : a linear system with smooth data and a nonlinear system with small data. An important part of the work is to adapt Strichartz-type estimates and to find new estimates in order to deal with the small viscosities. For the nonlinear system, we use a “bootstrap” argument, more delicate than in the classic case because of small viscosities.

Always in the third chapter, we consider the rotating fluids system in the ill-prepared case. By adding a “friction” term to the system, we prove that we could obtain good dissipative estimates and good properties for the limiting system, which imply global existence of strong solutions for large data. In the last section of this chapter, we study an application of the previously mentioned method for the case of rotating fluids between two infinite parallel plates. More precisely, we prove that the result of E. Grenier and N. Masmoudi also applies in the case where the viscosity is of size ε^α , $\alpha > 0$.

The fourth chapter is devoted to study the primitive equations in \mathbb{R}^3 , in the case where there is no vertical viscosity and where the horizontal viscosity is ε^α , $\alpha > 0$. In this chapter, we apply the method using previously for the primitive equations and we adapt in the anisotropic case the calculation developed by F. Charve for the isotropic case. This enables us to prove the global existence of strong solutions for large data with no quasi-geostrophic part.

In the fifth chapter, we study the anisotropic rotating magneto-hydrodynamic system. We first prove the local existence (global for small data) and uniqueness results of strong solutions. Then, with precise choices of parameters, we prove certain symmetries of the system, which allow us to use the previous method to prove global existence of strong solutions for large data.

Finally, in the last chapter, we consider the problem of propagation of regularity for the system of fluids of second grade on the torus \mathbb{T}^3 . Using a technique recently developed by J.-Y. Chemin, we prove that, if the initial data is small in an appropriate Gevrey class, the solution of the system of fluids of second grade exists globally in time, stays in a certain Gevrey class for any positive time, and thus is analytic.

Key words : Navier-Stokes, Rotating Fluids, Primitive Equations, MHD Equations, Fluids of Second Grade, Global Existence, Anisotropy, Strichartz-type Estimates, Analyticity.

AMS Subject Classification : 35Q35, 35S30, 76D03, 76D05, 76U05.