Étude de la quadrangulation infinie uniforme

Laurent Menard

Universités Paris VI et Paris XI

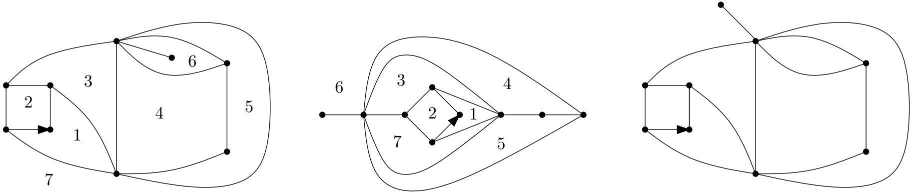
Soutenance de thèse

Lignes directrices

1. Cartes planaires
   - Généralités
   - Lien avec les arbres
2. Limites locales
   - Quadrangulation infinie uniforme (UIPQ)
   - Arbre bien étiqueté infini uniforme (UIPT)
   - Lien entre UIPQ et UIPT
3. Limites d'échelle
   - Contours de l'arbre infini uniforme
   - Applications à la quadrangulation infinie uniforme

Lignes directrices

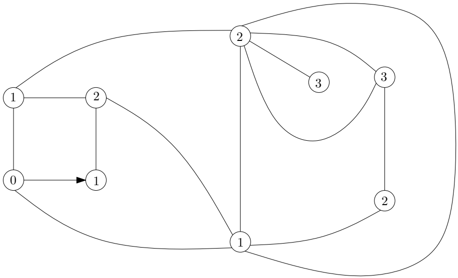
Définition d'une carte planaire



- Carte planaire : plongement propre d'un graphe connexe dans la sphère $\mathbb{S}^2$.
- Cartes considérées à homéomorphisme conservant l'orientation du plan près : objets combinatoires.
- Cartes enracinées : on distingue une arête orientée de la carte.
- Face : composante connexe du complémentaire de l'union des arêtes.
- Cartes munies de la distance de graphe : si m est une carte (m, d_m) est un espace métrique (modèle de géométrie discrète).

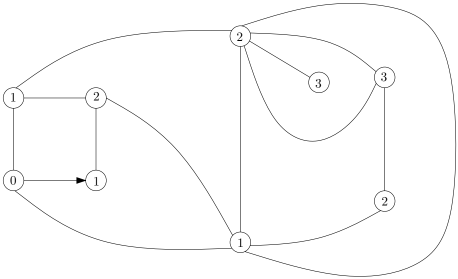
Quadrangulations

Quadrangulation : chaque face adjacente à quatre arêtes (on parle de face de degré 4).



Quadrangulations

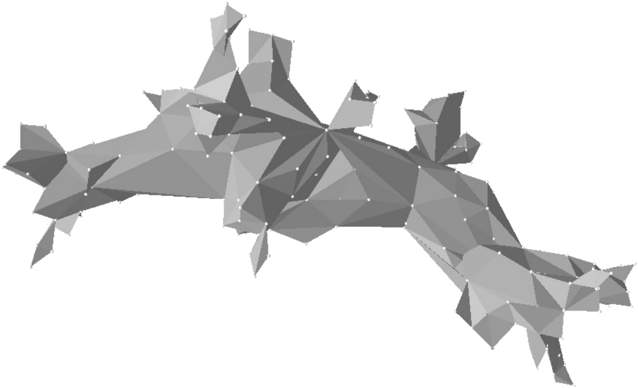
Quadrangulation : chaque face adjacente à quatre arêtes (on parle de face de degré 4).



$\mathbf{Q}_n$: ensemble des quadrangulations enracinées à n faces. D'après Tutte :

$$|\mathbf{Q}_n| = \frac{2}{n+2} 3^n \, \mathrm{Cat}_n.$$

Exemple de triangulation



Simulation d'une grande triangulation planaire par G. Chapuy.

Grandes cartes aléatoires

- Considérons $\mathcal{M}_n$ un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).
  Soit M_n de loi uniforme sur $\mathcal{M}_n$ et d_{M_n} sa distance de graphe.

Grandes cartes aléatoires

- Considérons $\mathcal{M}_n$ un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).
  Soit M_n de loi uniforme sur $\mathcal{M}_n$ et d_{M_n} sa distance de graphe.
- On renormalise d_{M_n} en $d_n = n^{-\alpha} d_{M_n}$. (M_n, d_n) est un espace métrique aléatoire.

Grandes cartes aléatoires

- Considérons $\mathcal{M}_n$ un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).
  Soit M_n de loi uniforme sur $\mathcal{M}_n$ et d_{M_n} sa distance de graphe.
- On renormalise d_{M_n} en $d_n = n^{-\alpha} d_{M_n}$. (M_n, d_n) est un espace métrique aléatoire.
- On cherche α de sorte à avoir la convergence en loi suivante (dans un sens à préciser) :

$$(M_n, d_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (S, d).$$

Grandes cartes aléatoires

- Considérons $\mathcal{M}_n$ un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).
  Soit M_n de loi uniforme sur $\mathcal{M}_n$ et d_{M_n} sa distance de graphe.
- On renormalise d_{M_n} en $d_n = n^{-\alpha} d_{M_n}$. (M_n, d_n) est un espace métrique aléatoire.
- On cherche α de sorte à avoir la convergence en loi suivante (dans un sens à préciser) :
$$(M_n, d_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (S, d).$$
- Si $\alpha = 0$: (S, d) est un espace métrique discret non compact,

Grandes cartes aléatoires

- Considérons $\mathcal{M}_n$ un ensemble fini de cartes de paramètre n (nombre de faces, sommets ...).
  Soit M_n de loi uniforme sur $\mathcal{M}_n$ et d_{M_n} sa distance de graphe.
- On renormalise d_{M_n} en $d_n = n^{-\alpha} d_{M_n}$. (M_n, d_n) est un espace métrique aléatoire.
- On cherche α de sorte à avoir la convergence en loi suivante (dans un sens à préciser) :

$$(M_n, d_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (S, d).$$

- Si $\alpha = 0$: (S, d) est un espace métrique discret non compact,
- si $\alpha > 0$: (S, d) est un espace métrique continu et compact (surface si homéomorphe à $\mathbb{S}^2$).

Motivations / Universalité

- Universalité (conjecturée par les physiciens) : l'espace limite (S, d) ne dépend pas de la classe choisie (par exemple p-angulations).

Motivations / Universalité

- Universalité (conjecturée par les physiciens) : l'espace limite (S, d) ne dépend pas de la classe choisie (par exemple p-angulations).
  - Cas continu $\alpha > 0$: carte brownienne (Chassaing-Schaeffer, Le Gall, Marckert-Mokkadem, Miermont ...).

Motivations / Universalité

- Universalité (conjecturée par les physiciens) : l'espace limite (S, d) ne dépend pas de la classe choisie (par exemple p-angulations).
  - Cas continu $\alpha > 0$: carte brownienne (Chassaing-Schaeffer, Le Gall, Marckert-Mokkadem, Miermont ...).
  - Cas discret $\alpha = 0$: récurrence (Benjamini-Schramm), percolation (Angel) ...

Motivations / Universalité

- Universalité (conjecturée par les physiciens) : l'espace limite (S, d) ne dépend pas de la classe choisie (par exemple p-angulations).
  - Cas continu $\alpha > 0$: carte brownienne (Chassaing-Schaeffer, Le Gall, Marckert-Mokkadem, Miermont ...).
  - Cas discret $\alpha = 0$: récurrence (Benjamini-Schramm), percolation (Angel) ...
- Physique théorique :
  - Gravité quantique en deux dimensions ;
  - KPZ ;
  - Intégrales de matrices, ...

Motivations / Universalité

- Universalité (conjecturée par les physiciens) : l'espace limite (S, d) ne dépend pas de la classe choisie (par exemple p-angulations).
  - Cas continu $\alpha > 0$: carte brownienne (Chassaing-Schaeffer, Le Gall, Marckert-Mokkadem, Miermont ...).
  - Cas discret $\alpha = 0$: récurrence (Benjamini-Schramm), percolation (Angel) ...
- Physique théorique :
  - Gravité quantique en deux dimensions ;
  - KPZ ;
  - Intégrales de matrices, ...
- Combinatoire, ...

Lignes directrices

1. Cartes planaires
   - Généralités
   - Lien avec les arbres
2. Limites locales
   - Quadrangulation infinie uniforme (UIPQ)
   - Arbre bien étiqueté infini uniforme (UIPT)
   - Lien entre UIPQ et UIPT
3. Limites d'échelle
   - Contours de l'arbre infini uniforme
   - Applications à la quadrangulation infinie uniforme

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

- toutes les étiquettes sont > 0 ;

Arbres bien étiquetés

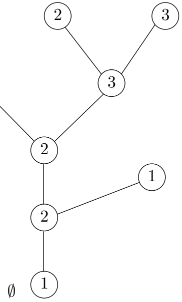
Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

- toutes les étiquettes sont > 0 ;
- l'étiquette de la racine est 1 ;

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

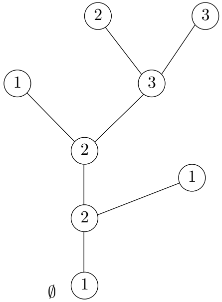
- toutes les étiquettes sont > 0 ;
- l'étiquette de la racine est 1 ;
- si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leqslant 1$.



Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

- toutes les étiquettes sont > 0 ;
- l'étiquette de la racine est 1 ;
- si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leqslant 1$.

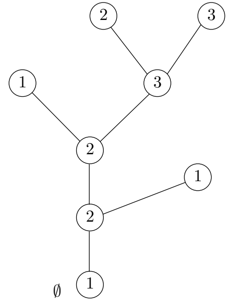


$\mathbb{T}_n$: ensemble des arbres bien étiquetés à n arêtes. Cet ensemble est en bijection avec $\mathbf{Q}_n$ (Cori-Vauquelin, Schaeffer).

Arbres bien étiquetés

Arbres bien étiquetés : arbres planaires enracinés dont on a étiqueté les sommets en suivant les régles suivantes

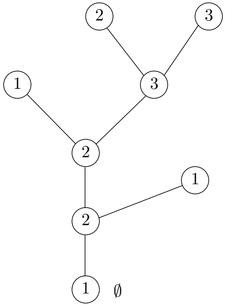
- toutes les étiquettes sont > 0 ;
- l'étiquette de la racine est 1 ;
- si s et s' sont deux sommets voisins, alors $|\ell(s) - \ell(s')| \leqslant 1$.



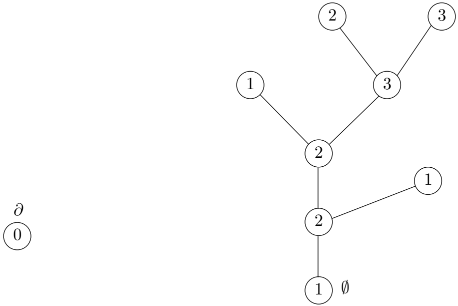
$\mathbb{T}_n$: ensemble des arbres bien étiquetés à n arêtes. Cet ensemble est en bijection avec $\mathbf{Q}_n$ (Cori-Vauquelin, Schaeffer).

Classes plus générales d'arbres et de cartes : Bouttier-Di Francesco-Guitter (04).

La bijection de Schaeffer



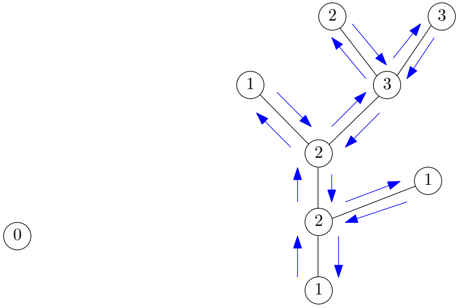
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.

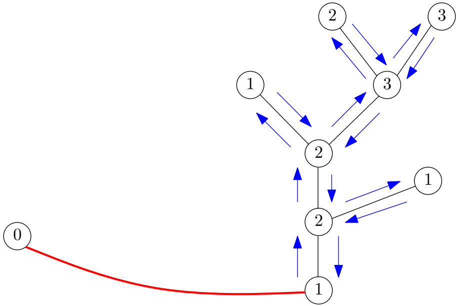
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.

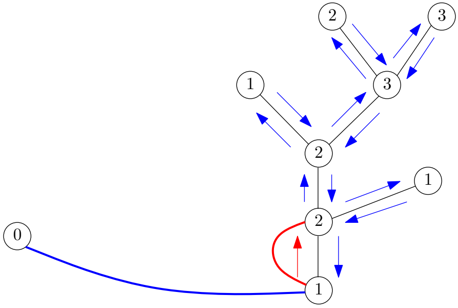
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

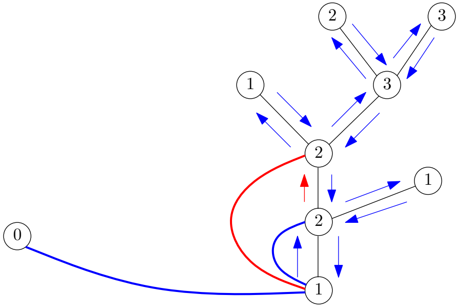
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

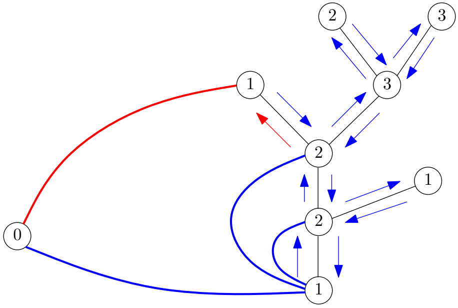
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

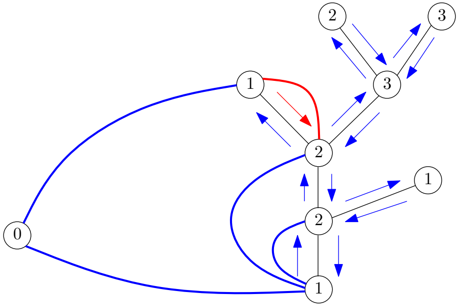
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

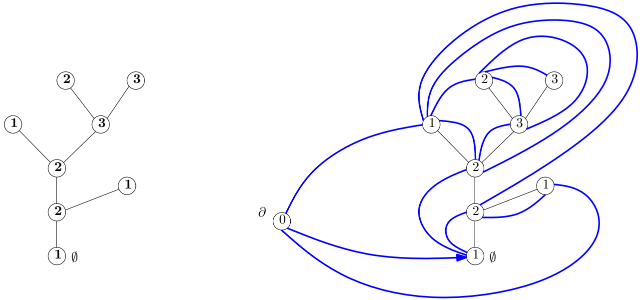
La bijection de Schaeffer



Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

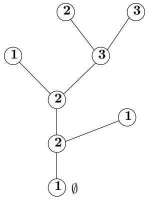
La bijection de Schaeffer

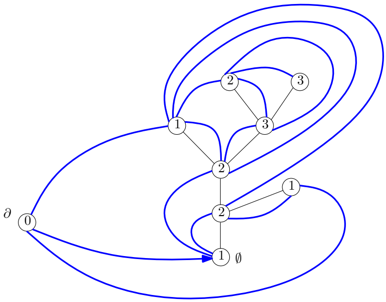


Construction :

- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.

La bijection de Schaeffer

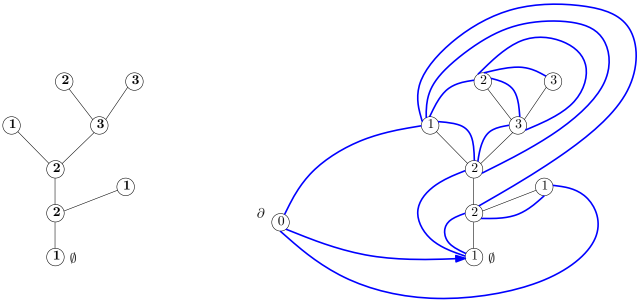




Construction :

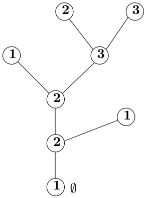
- On ajoute un sommet supplémentaire ∂ d'étiquette 0.
- On suit le contour de l'arbre.
- On relie chaque sommet au dernier sommet visité ayant une étiquette strictement plus petite.
- La première arête tracée $(\partial, \emptyset)$ est la racine.

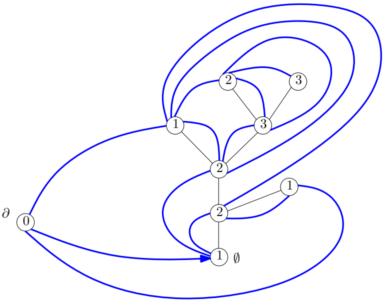
Points clé de la bijection de Schaeffer



- Les sommets de l'arbre sont les sommets de la quadrangulation associée (sauf ∂).

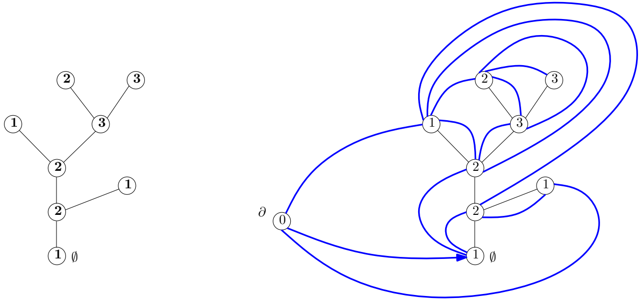
Points clé de la bijection de Schaeffer





- Les sommets de l'arbre sont les sommets de la quadrangulation associée (sauf ∂).
- Les étiquettes de l'arbre sont les distances au sommet racine ∂ dans la quadrangulation associée.

Points clé de la bijection de Schaeffer



- Les sommets de l'arbre sont les sommets de la quadrangulation associée (sauf ∂).
- Les étiquettes de l'arbre sont les distances au sommet racine ∂ dans la quadrangulation associée.

Methode bijective : comprendre les propriétés des arbres pour mieux comprendre celles des cartes.

Lignes directrices

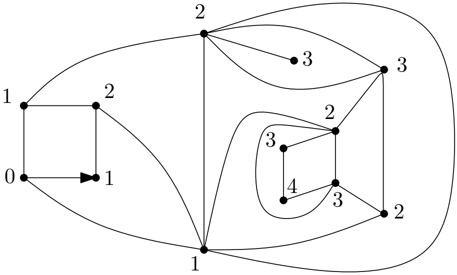
Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

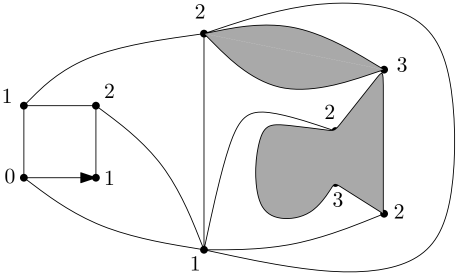
- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.



Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

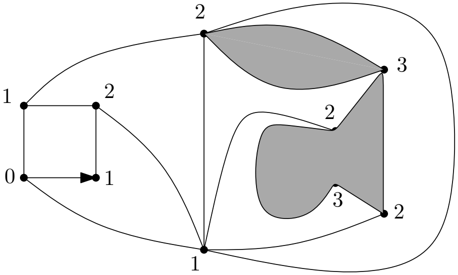
- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.
- Exemple : $B_{\mathbf{Q},2}(q)$.



Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.
- Exemple : $B_{\mathbf{Q},2}(q)$.



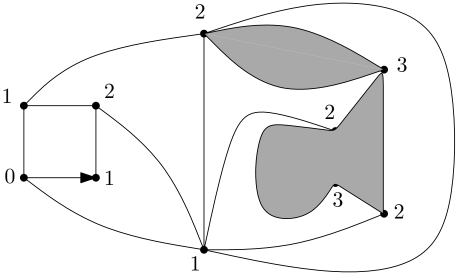
- pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

$$d_{\mathbf{Q}}(q, q') = \left(1 + \max\{R > 0 : \ B_{\mathbf{Q},R}(q) = B_{\mathbf{Q},R}(q')\}\right)^{-1}.$$

Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.
- Exemple : $B_{\mathbf{Q},2}(q)$.



- pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

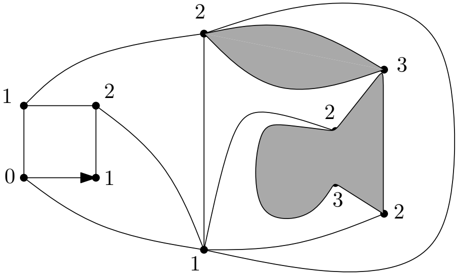
$$d_{\mathbf{Q}}(q, q') = \left(1 + \max\{R > 0 : \; B_{\mathbf{Q},R}(q) = B_{\mathbf{Q},R}(q')\}\right)^{-1}.$$

$d_{\mathbf{Q}}$ est une distance ultramétrique.

Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.
- Exemple : $B_{\mathbf{Q},2}(q)$.



- pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

$$d_{\mathbf{Q}}(q, q') = \left(1 + \max\{R > 0 : \ B_{\mathbf{Q},R}(q) = B_{\mathbf{Q},R}(q')\}\right)^{-1}.$$

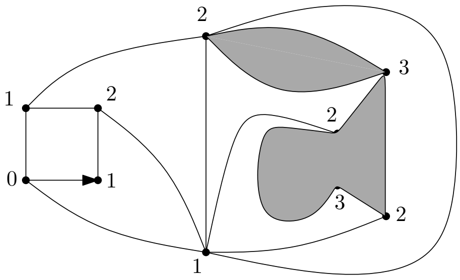
$d_{\mathbf{Q}}$ est une distance ultramétrique.

- $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{Q}})$: complété de $(\mathbf{Q}_f, d_{\mathbf{Q}})$; c'est l'ensembles des quadrangulations enracinées localement finies.

Topologie sur les quadrangualtions

Soit $q \in \mathbf{Q}_f = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbf{Q}_n$, on définit :

- pour tout $R > 0$, $B_{\mathbf{Q},R}(q)$: union des faces de q ayant au moins un sommet à distance strictement inférieure à R de la racine.
- Exemple : $B_{\mathbf{Q},2}(q)$.



- pour $q, q' \in \mathbf{Q}_f$:

$$d_{\mathbf{Q}}(q,q') = \left(1 + \max\{R > 0 :\ B_{\mathbf{Q},R}(q) = B_{\mathbf{Q},R}(q')\}\right)^{-1}.$$

$d_{\mathbf{Q}}$ est une distance ultramétrique.

- $(\mathbf{Q}, d_{\mathbf{Q}})$: complété de $(\mathbf{Q}_f, d_{\mathbf{Q}})$; c'est l'ensembles des quadrangulations enracinées localement finies. Espace Polonais.

Quadrangulation infinie uniforme de Krikun

Théorème (Krikun 06)

Pour tout n, soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Q}_n$.
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν pour la topologie associée à $d_{\mathbf{Q}}$.

Quadrangulation infinie uniforme de Krikun

Théorème (Krikun 06)

Pour tout n, soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Q}_n$.
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν pour la topologie associée à $d_{\mathbf{Q}}$.

- ν : loi de la quadrangulation infinie uniforme.

Quadrangulation infinie uniforme de Krikun

Théorème (Krikun 06)

Pour tout n, soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Q}_n$.
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν pour la topologie associée à $d_{\mathbf{Q}}$.

- ν : loi de la quadrangulation infinie uniforme.
- une quadrangulation infinie de loi ν a p.s. un unique «bout».

Quadrangulation infinie uniforme de Krikun

Théorème (Krikun 06)

Pour tout n, soit ν_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Q}_n$.
La suite (ν_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité ν pour la topologie associée à $d_{\mathbf{Q}}$.

- ν : loi de la quadrangulation infinie uniforme.
- une quadrangulation infinie de loi ν a p.s. un unique «bout».
- Peut-on se servir des propriétés des arbres pour avoir des propriétés de ν ?

Lignes directrices

Topologie sur les arbres bien étiquetés

On note $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{T}_n \cup \mathbb{T}_\infty$ l'ensemble des arbres plans enracinés bien étiquetés localement finis.

Topologie sur les arbres bien étiquetés

On note $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{T}_n \cup \mathbb{T}_\infty$ l'ensemble des arbres plans enracinés bien étiquetés localement finis.

Soit $\theta \in \mathbb{T}$, on définit :

Topologie sur les arbres bien étiquetés

On note $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{T}_n \cup \mathbb{T}_\infty$ l'ensemble des arbres plans enracinés bien étiquetés localement finis.

Soit $\theta \in \mathbb{T}$, on définit :

- pour tout $H > 0$, $B_{\mathbb{T},H}(\theta)$: sous arbre de θ jusqu'à la génération H.

Topologie sur les arbres bien étiquetés

On note $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{T}_n \cup \mathbb{T}_\infty$ l'ensemble des arbres plans enracinés bien étiquetés localement finis.

Soit $\theta \in \mathbb{T}$, on définit :

- pour tout $H > 0$, $B_{\mathbb{T},H}(\theta)$: sous arbre de θ jusqu'à la génération H.
- pour $\theta, \theta' \in \mathbb{T}$:

$$d_{\mathbb{T}}(\theta, \theta') = \left(1 + \max\{H > 0 : \ B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta')\}\right)^{-1}.$$

Topologie sur les arbres bien étiquetés

On note $\mathbb{T} = \bigcup_{n \geqslant 0} \mathbb{T}_n \cup \mathbb{T}_\infty$ l'ensemble des arbres plans enracinés bien étiquetés localement finis.

Soit $\theta \in \mathbb{T}$, on définit :

- pour tout $H > 0$, $B_{\mathbb{T},H}(\theta)$: sous arbre de θ jusqu'à la génération H.
- pour $\theta, \theta' \in \mathbb{T}$:

$$d_{\mathbb{T}}(\theta, \theta') = \left(1 + \max\{H > 0 :\ B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta')\}\right)^{-1}.$$

- $(\mathbb{T}, d_{\mathbb{T}})$ est un espace polonais.

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

- μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

- μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.
- Un arbre infini de loi μ a presque sûrement :

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

- μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.
- Un arbre infini de loi μ a presque sûrement :
  - une unique branche infinie («tronc») ;

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

- μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.
- Un arbre infini de loi μ a presque sûrement :
  - une unique branche infinie («tronc») ;
  - un nombre fini de sommets d'étiquette l pour tout $l \geqslant 1$.

Arbre bien étiqueté infini uniforme

Théorème (Chassaing-Durhuus 06)

Pour tout n, soit μ_n la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbb{T}_n$.
La suite (μ_n) converge faiblement vers une mesure de probabilité μ pour la topologie associée à $d_{\mathbb{T}}$.

- μ : loi de l'arbre bien étiqueté infini uniforme.
- Un arbre infini de loi μ a presque sûrement :
  - une unique branche infinie («tronc») ;
  - un nombre fini de sommets d'étiquette l pour tout $l \geqslant 1$.

On notera $\mathscr{S}$ l'ensemble des arbres vérifiant ces deux propriétés.

Lignes directrices

Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \longrightarrow \mathbf{Q}$.

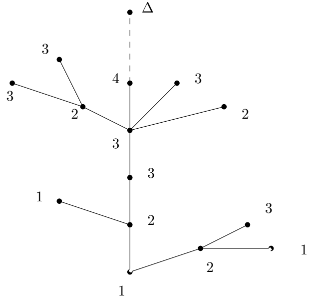
Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.

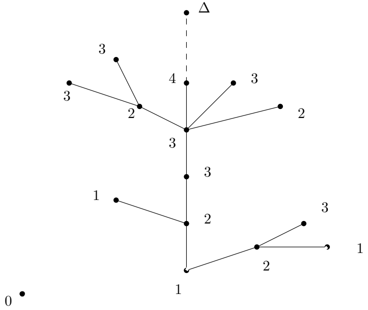


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.

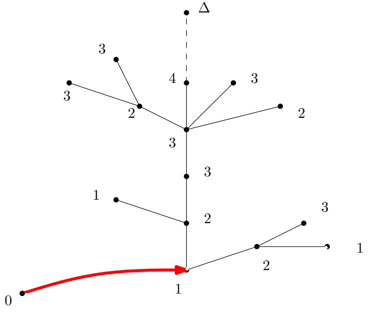


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté gauche du tronc : on relie un sommet d'étiquette $l > 0$ au dernier coin visité d'étiquette $l - 1$.

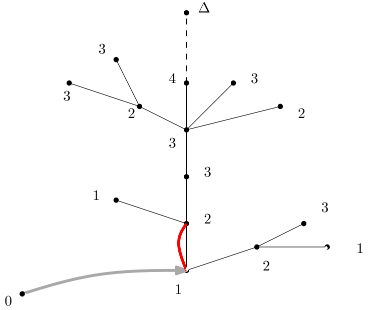


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté gauche du tronc : on relie un sommet d'étiquette $l > 0$ au dernier coin visité d'étiquette $l - 1$.

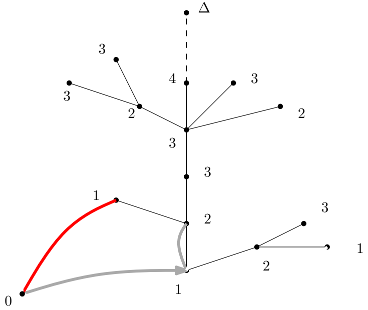


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté gauche du tronc : on relie un sommet d'étiquette $l > 0$ au dernier coin visité d'étiquette $l - 1$.

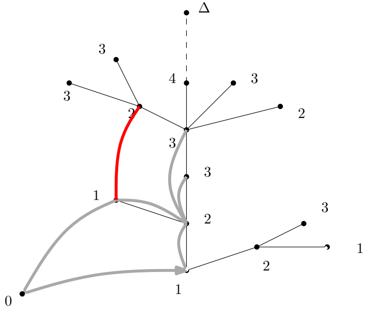


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté gauche du tronc : on relie un sommet d'étiquette $l > 0$ au dernier coin visité d'étiquette $l - 1$.

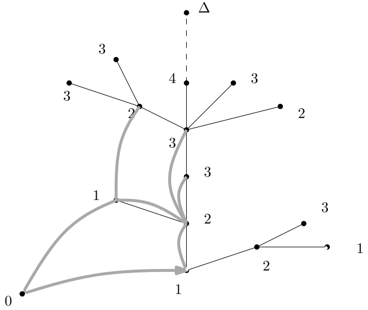


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$

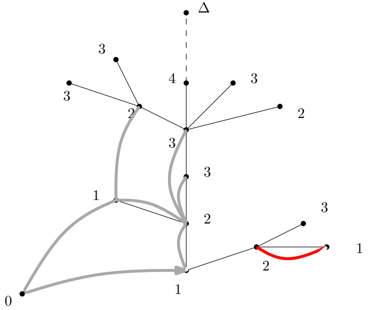


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;

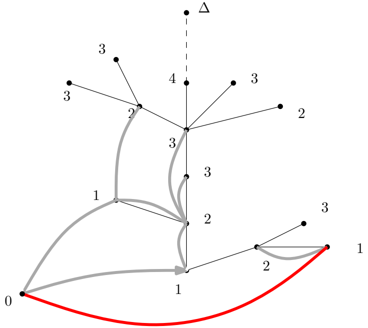


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l-1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l-1$.

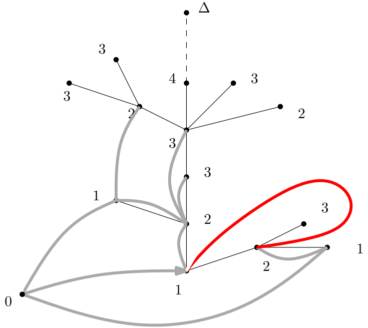


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l - 1$.

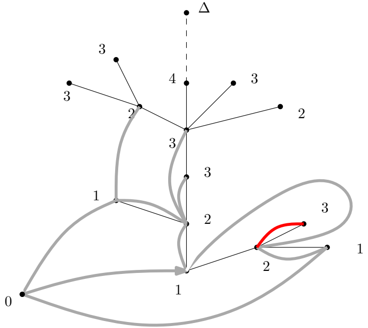


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l - 1$.

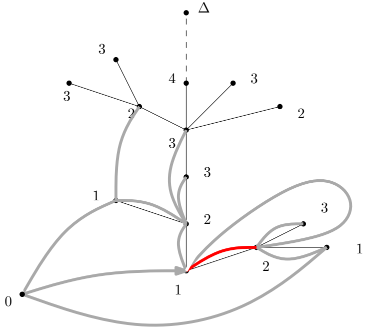


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l - 1$.

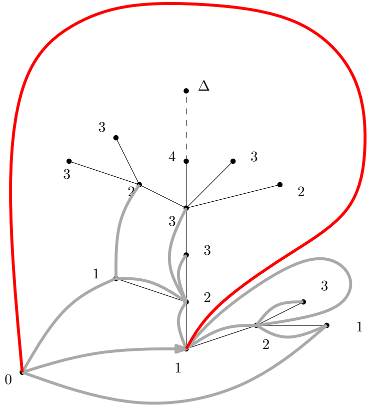


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l - 1$.

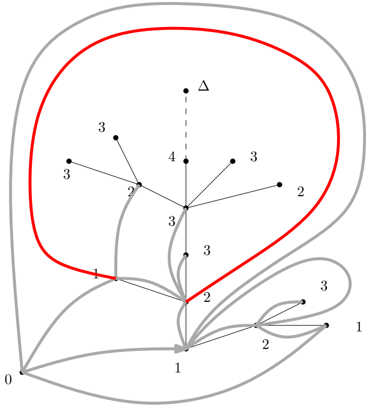


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l - 1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l - 1$.

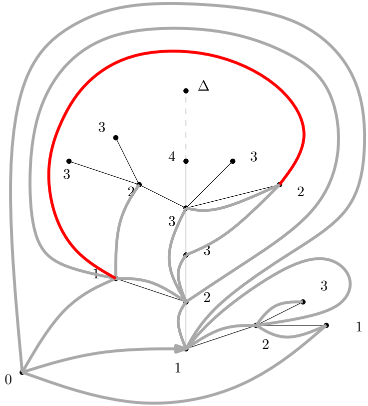


Bijection de Schaeffer étendue

Chassaing-Durhuus (06) : on peut étendre la bijection de Schaeffer en un plongement $\Phi : \mathscr{S} \cup \mathbb{T}_f \to \mathbf{Q}$.

Soit $\theta \in \mathscr{S}$:

- On plonge θ dans $\mathbb{S}^2$.
- On ajoute un sommet d'étiquette 0.
- Parcours du côté droit du tronc : on visite un coin c d'un sommet d'étiquette $l > 0$
  - si un coin d'un sommet d'étiquette $l-1$ est visité après c, on relie c au premier tel coin ;
  - si un tel coin n'existe pas, on relie c au dernier coin à gauche du tronc d'étiquette $l-1$.



«Codage» de l'UIPQ par l'UIPT

Théorème (M. 08)

$$\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$$

«Codage» de l'UIPQ par l'UIPT

Théorème (M. 08)

$$\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$$

- Φ n'est pas continue : on peut avoir $\theta_n \to \theta \in \mathscr{S}$ avec θ_n ayant une étiquette $< R$ à une génération $> k(n) \to \infty$.
  Dans ce cas $\Phi(\theta_n) \nrightarrow \Phi(\theta)$.

«Codage» de l'UIPQ par l'UIPT

Théorème (M. 08)

$$\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$$

- Φ n'est pas continue : on peut avoir $\theta_n \to \theta \in \mathscr{S}$ avec θ_n ayant une étiquette $< R$ à une génération $> k(n) \to \infty$.
  Dans ce cas $\Phi(\theta_n) \nrightarrow \Phi(\theta)$.
- Lemme combinatoire pour se ramener aux arbres uniquement.

«Codage» de l'UIPQ par l'UIPT

Théorème (M. 08)

$$\nu = \mu \circ \Phi^{-1}$$

- Φ n'est pas continue : on peut avoir $\theta_n \to \theta \in \mathscr{S}$ avec θ_n ayant une étiquette $< R$ à une génération $> k(n) \to \infty$.
  Dans ce cas $\Phi(\theta_n) \nrightarrow \Phi(\theta)$.
- Lemme combinatoire pour se ramener aux arbres uniquement.
- Étude probabiliste des étiquettes des arbres dans les grandes générations.

Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

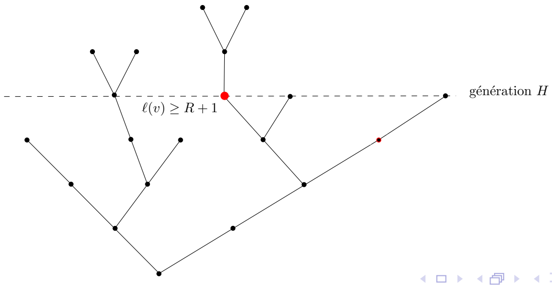
Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.

Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n \left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n \left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu \left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.

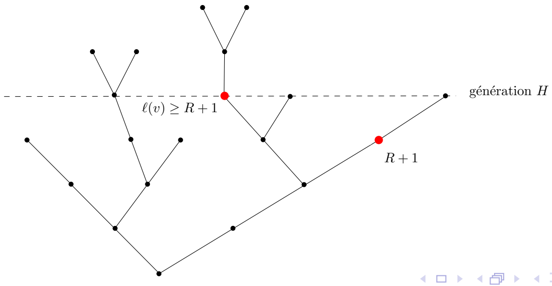


Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.

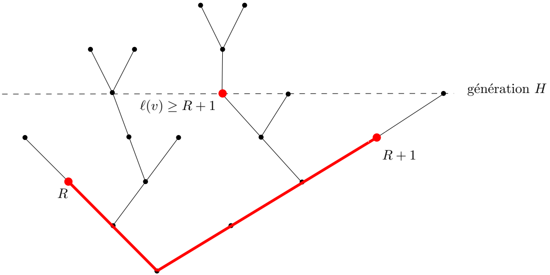


Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.

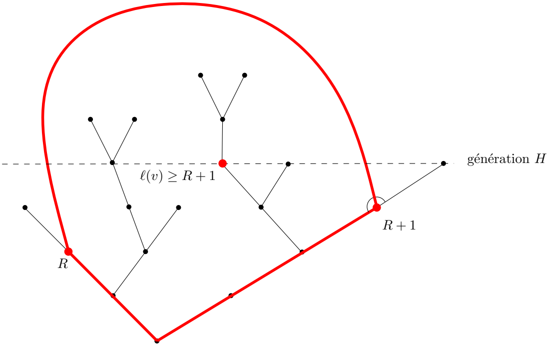


Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.

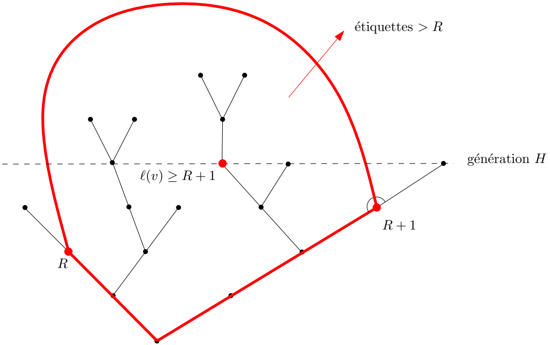


Éléments de preuve

On fixe $Q^\star = \Phi(\theta^\star)$, il faut montrer

$$\nu_n\left(Q : B_{\mathbf{Q},R}(Q) = B_{\mathbf{Q},R}(Q^\star)\right) = \mu_n\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right)$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu\left(\theta : B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))\right).$$

Lemme combinatoire : si $B_{\mathbb{T},H}(\theta) = B_{\mathbb{T},H}(\theta^\star)$ et que θ et $\theta^\star$ n'ont pas d'étiquettes $\leqslant R$ au dessus de H, alors $B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta)) = B_{\mathbf{Q},R}(\Phi(\theta^\star))$.



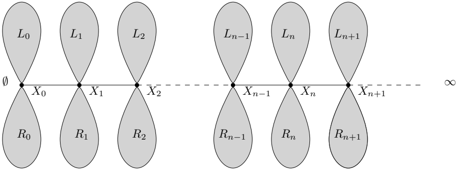
Éléments de preuve (suite)

On veut montrer que si H est assez grand, un arbre de loi μ_n a une étiquette $\leqslant R$ au dessus de H avec probabilité uniformément petite en n.

Éléments de preuve (suite)

On veut montrer que si H est assez grand, un arbre de loi μ_n a une étiquette $\leqslant R$ au dessus de H avec probabilité uniformément petite en n.

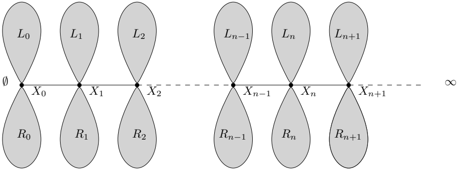
Chassaing-Durhuus (06) : description de μ :



Éléments de preuve (suite)

On veut montrer que si H est assez grand, un arbre de loi μ_n a une étiquette $\leqslant R$ au dessus de H avec probabilité uniformément petite en n.

Chassaing-Durhuus (06) : description de μ :



(X_n) : chaîne de Markov avec probabilités de transition explicites.
On montre que

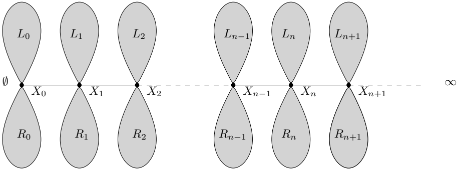
$$\left(\sqrt{\frac{3}{2N}}X_{\lfloor Nt \rfloor}\right)_{t\geqslant 0} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (\rho_t)_{t\geqslant 0}$$

avec ρ : processus de Bessel de dimension 9.

Éléments de preuve (suite)

On veut montrer que si H est assez grand, un arbre de loi μ_n a une étiquette $\leqslant R$ au dessus de H avec probabilité uniformément petite en n.

Chassaing-Durhuus (06) : description de μ :



(X_n) : chaîne de Markov avec probabilités de transition explicites. On montre que

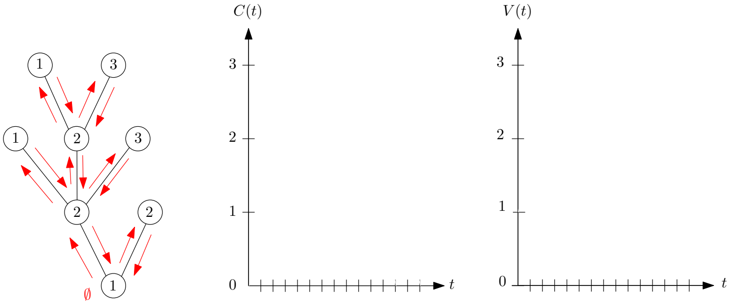
$$\left(\sqrt{\frac{3}{2N}}X_{\lfloor Nt \rfloor}\right)_{t\geqslant 0} \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} (\rho_t)_{t\geqslant 0}$$

avec ρ : processus de Bessel de dimension 9.

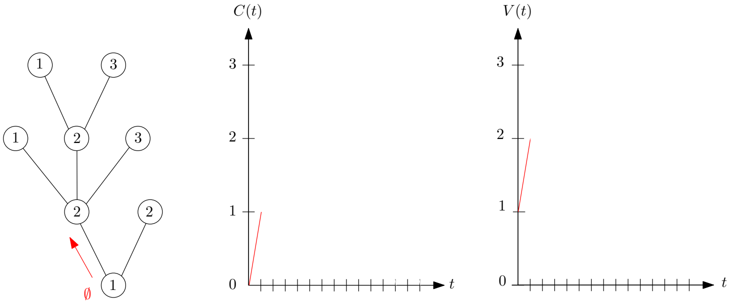
Conditionnellement à (X_n), les L_n et R_n sont tous indépendants de loi P_{X_n} : Arbre de Galton-Watson étiqueté multitype «critique» (taille d'espérance finie).

Lignes directrices

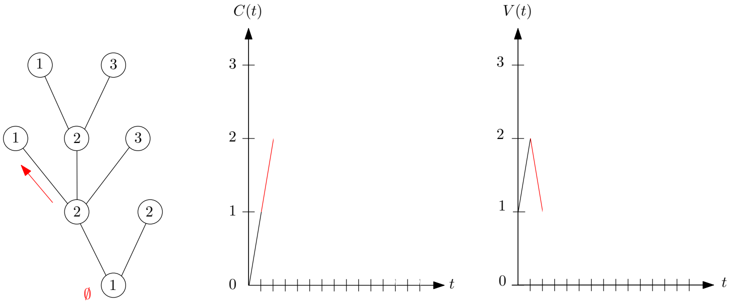
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



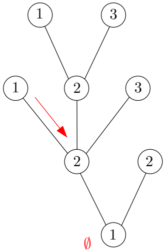
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté

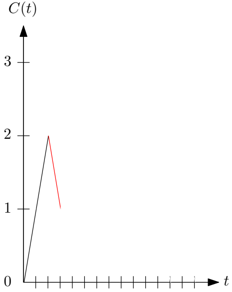


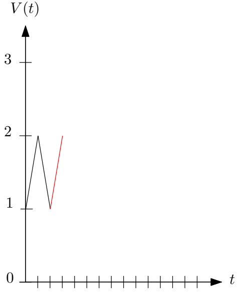
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



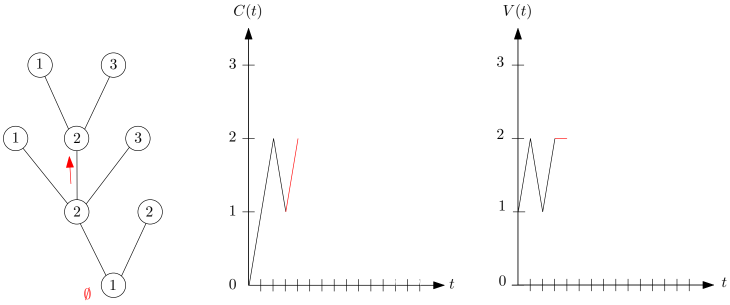
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



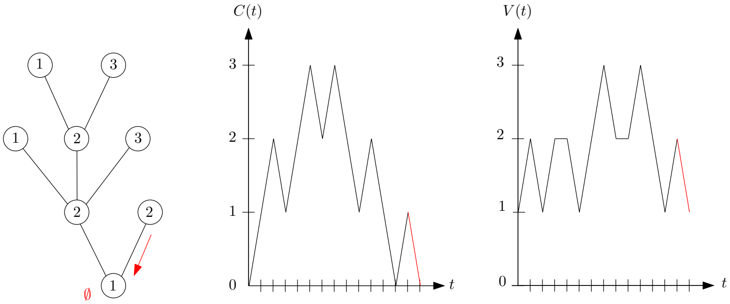




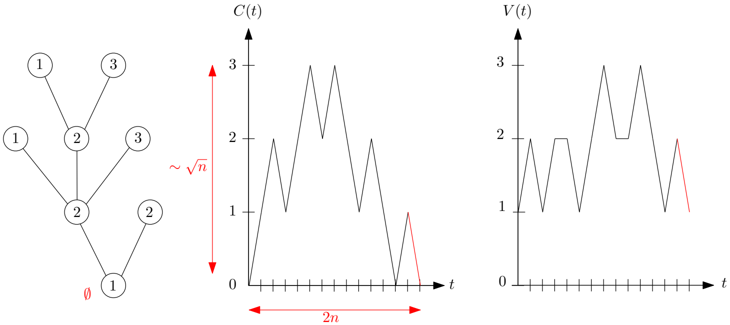
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



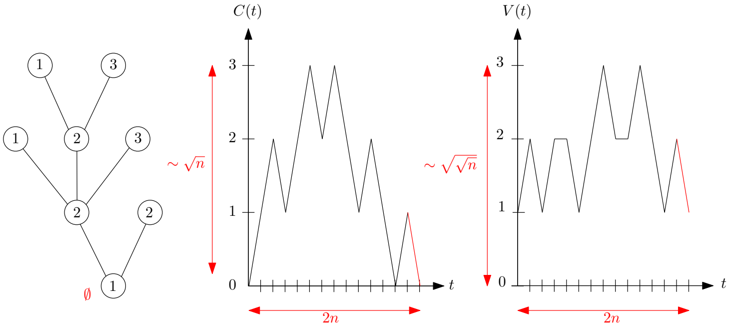
Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



Aldous : C_n fonction de contour d'un arbre plan enraciné uniforme à n arêtes :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{e}_t)_{t\in[0,1]} \,.$$

Fonctions de contour d'un arbre étiqueté



Aldous : C_n fonction de contour d'un arbre plan enraciné uniforme à n arêtes :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{e}_t)_{t\in[0,1]} \,.$$

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.
Sans la contrainte de positivité des étiquettes (Chassaing-Schaeffer 04) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} V_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t\in[0,1]},$$

où :

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.
Sans la contrainte de positivité des étiquettes (Chassaing-Schaeffer 04) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} V_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t\in[0,1]},$$

où :

- $\mathbf{e}$ est une excursion brownienne normalisée ;

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.
Sans la contrainte de positivité des étiquettes (Chassaing-Schaeffer 04) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}} C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} V_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\mathbf{e}_t, Z_t)_{t\in[0,1]},$$

où :

- $\mathbf{e}$ est une excursion brownienne normalisée ;
- conditionnellement à $\mathbf{e}$, Z est un processus gaussien centré de covariance
$$\mathrm{Cov}\left(Z_s, Z_t\right) = \inf_{s\wedge t\leqslant u\leqslant s\vee t} \mathbf{e}_u;$$

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.
On a la convergence en distribution (Le Gall-Weill 06) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} V_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\overline{\mathbf{e}}_t, \overline{Z}_t\right)_{t\in[0,1]},$$

où :

- $\mathbf{e}$ est une excursion brownienne normalisée ;
- conditionnellement à $\mathbf{e}$, Z est un processus gaussien centré de covariance
$$\mathrm{Cov}\left(Z_s, Z_t\right) = \inf_{s\wedge t\leqslant u\leqslant s\vee t} \mathbf{e}_u;$$
- le processus $(\overline{\mathbf{e}}, \overline{Z})$ est le processus $(\mathbf{e}, Z)$ conditionné à rester positif.

Limite d'échelle d'arbres bien étiquetés

Soit θ_n de loi uniforme sur $\mathbb{T}_n$. Fonctions de contour C_n et V_n.
On a la convergence en distribution (Le Gall-Weill 06) :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}C_n(2nt), \left(\frac{9}{8n}\right)^{1/4} V_n(2nt)\right)_{t\in[0,1]} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \left(\overline{\mathbf{e}}_t, \overline{Z}_t\right)_{t\in[0,1]},$$

où :

- $\mathbf{e}$ est une excursion brownienne normalisée ;
- conditionnellement à $\mathbf{e}$, Z est un processus gaussien centré de covariance
$$\mathrm{Cov}\left(Z_s, Z_t\right) = \inf_{s\wedge t\leqslant u\leqslant s\vee t} \mathbf{e}_u;$$
- le processus $(\overline{\mathbf{e}}, \overline{Z})$ est le processus $(\mathbf{e}, Z)$ conditionné à rester positif.

$(\mathbf{e}, Z)$: «tête» du serpent brownien.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.
  - Si ζ_s décroît, on efface la trajectoire par la fin.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.
  - Si ζ_s décroît, on efface la trajectoire par la fin.
  - Si ζ_s croît, on rajoute des morceaux de trajectoire browniennes indépendantes à la fin.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.
  - Si ζ_s décroît, on efface la trajectoire par la fin.
  - Si ζ_s croît, on rajoute des morceaux de trajectoire browniennes indépendantes à la fin.
- On note Θ_x^{ζ} la loi de W conditionnellement à ζ.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.
  - Si ζ_s décroît, on efface la trajectoire par la fin.
  - Si ζ_s croît, on rajoute des morceaux de trajectoire browniennes indépendantes à la fin.
- On note Θ_x^{ζ} la loi de W conditionnellement à ζ.

Tête du serpent brownien : processus des valeurs terminales $\widehat{W}_s = W_s(\zeta_s)$.

Serpent brownien de Le Gall

Serpent brownien partant de $x \in \mathbb{R}$: processus de Markov $W = (W_s)_{s \geqslant 0}$ à valeurs dans l'espace Ω trajectoires réelles de durées de vie finie.

- Processus des durées de vie : mouvement brownien réfléchit $\zeta = (\zeta_s)_{s \geqslant 0}$.
- Serpent brownien à l'instant s : trajectoire aléatoire de durée de vie ζ_s.
  - Si ζ_s décroît, on efface la trajectoire par la fin.
  - Si ζ_s croît, on rajoute des morceaux de trajectoire browniennes indépendantes à la fin.
- On note Θ_x^ζ la loi de W conditionnellement à ζ.

Tête du serpent brownien : processus des valeurs terminales $\widehat{W}_s = W_s(\zeta_s)$.

Mesure d'excursion du serpent brownien :

$$\mathbb{N}_x = \int \mathbf{n}(\mathrm{d}e)\Theta_x^e,$$

où $\mathbf{n}$ est la mesure d'Itô.

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2 \, \mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}} \, \mathrm{d}r \, \mathbb{N}_0 \left(\mathrm{d}\omega \right).$$

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\,(\mathrm{d}\omega)\,.$$

On note $\tau_u = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{h_i \leqslant u\}} \sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i\in I} \delta_{(h_i,\omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega)\subset]-\rho_t,\infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\left(\mathrm{d}\omega\right).$$

On note $\tau_u = \sum_{i\in I} \mathbf{1}_{\{h_i\leqslant u\}}\sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i
Pour tout $s > 0$, il existe un unique u tel que $\tau_{u^-} \leqslant s \leqslant \tau_u$.

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\,(\mathrm{d}\omega)\,.$$

On note $\tau_u = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{h_i \leqslant u\}} \sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i
Pour tout $s > 0$, il existe un unique u tel que $\tau_{u^-} \leqslant s \leqslant \tau_u$.

- Soit il existe i tel que $u = h_i$ et on pose
  - $\zeta_s^\infty = u + \zeta_{s - \tau_{u^-}}(\omega_i)\,;$

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\left(\mathrm{d}\omega\right).$$

On note $\tau_u = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{h_i \leqslant u\}} \sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i
Pour tout $s > 0$, il existe un unique u tel que $\tau_{u^-} \leqslant s \leqslant \tau_u$.

- Soit il existe i tel que $u = h_i$ et on pose
  - $\zeta_s^\infty = u + \zeta_{s - \tau_{u^-}}(\omega_i)\,;$
  - $W_s^\infty(t) = \begin{cases} \rho_t & \text{si } t \leqslant u\,; \\ \rho_u + W_{s-\tau_{u^-}}(\omega_i)(t-u) & \text{si } u < t \leqslant \zeta_s^\infty. \end{cases}$

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\,(\mathrm{d}\omega)\,.$$

On note $\tau_u = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{h_i \leqslant u\}} \sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i
Pour tout $s > 0$, il existe un unique u tel que $\tau_{u^-} \leqslant s \leqslant \tau_u$.

- Soit il existe i tel que $u = h_i$ et on pose
  - $\zeta_s^\infty = u + \zeta_{s - \tau_{u^-}}(\omega_i)\,;$
  - $W_s^\infty(t) = \begin{cases} \rho_t & \text{si } t \leqslant u\,; \\ \rho_u + W_{s-\tau_{u^-}}(\omega_i)(t-u) & \text{si } u < t \leqslant \zeta_s^\infty. \end{cases}$
- Sinon on pose
  - $\zeta_s^\infty = u\,;$

Serpent brownien éternel (Le Gall-Weill)

ρ : processus de Bessel de dimension 9.
Conditionnellement à ρ, on se donne $\mathcal{P} = \sum_{i \in I} \delta_{(h_i, \omega_i)}$ un processus ponctuel de Poisson d'intensité

$$2\,\mathbf{1}_{\{\mathcal{R}(\omega) \subset]-\rho_t, \infty[\}}\, \mathrm{d}r\, \mathbb{N}_0\left(\mathrm{d}\omega\right).$$

On note $\tau_u = \sum_{i \in I} \mathbf{1}_{\{h_i \leqslant u\}} \sigma_i$, avec $\sigma_i =$ «durée de vie totale» de ω_i
Pour tout $s > 0$, il existe un unique u tel que $\tau_{u^-} \leqslant s \leqslant \tau_u$.

- Soit il existe i tel que $u = h_i$ et on pose
  - $\zeta_s^\infty = u + \zeta_{s-\tau_{u^-}}(\omega_i)$;
  - $W_s^\infty(t) = \begin{cases} \rho_t & \text{si } t \leqslant u\,; \\ \rho_u + W_{s-\tau_{u^-}}(\omega_i)(t-u) & \text{si } u < t \leqslant \zeta_s^\infty. \end{cases}$
- Sinon on pose
  - $\zeta_s^\infty = u$;
  - $W_s^\infty(t) = \rho_t$.

Limite d'échelle de l'arbre bien étiqueté infini uniforme

- (C_L, V_L) : fonctions de contour du côté gauche de l'UIPT et (C_R, V_R) pour le côté droit ;

Limite d'échelle de l'arbre bien étiqueté infini uniforme

- (C_L, V_L) : fonctions de contour du côté gauche de l'UIPT et (C_R, V_R) pour le côté droit ;
- ρ : processus de Bessel de dimension 9 issu de 0 ;

Limite d'échelle de l'arbre bien étiqueté infini uniforme

- (C_L, V_L) : fonctions de contour du côté gauche de l'UIPT et (C_R, V_R) pour le côté droit ;
- ρ : processus de Bessel de dimension 9 issu de 0 ;
- $\left(\left(\zeta^{(L)}, W^{(L)}\right), \left(\zeta^{(R)}, W^{(R)}\right)\right)$: paire de serpents browniens éternels corrélés adossés au processus ρ.

Limite d'échelle de l'arbre bien étiqueté infini uniforme

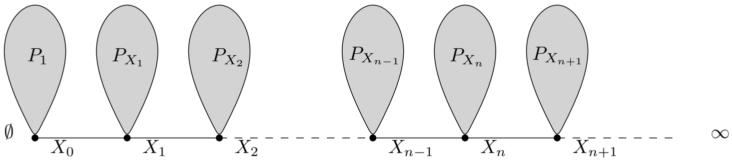
- (C_L, V_L) : fonctions de contour du côté gauche de l'UIPT et (C_R, V_R) pour le côté droit ;
- ρ : processus de Bessel de dimension 9 issu de 0 ;
- $\left(\left(\zeta^{(L)}, W^{(L)}\right), \left(\zeta^{(R)}, W^{(R)}\right)\right)$: paire de serpents browniens éternels corrélés adossés au processus ρ.

Théorème (Le Gall-M. 09)

$$\left(\left(\frac{1}{N}C_L(N^2s), \sqrt{\frac{3}{2N}}V_L(N^2s)\right)_{s\geqslant 0}, \left(\frac{1}{N}C_R(N^2s), \sqrt{\frac{3}{2N}}V_R(N^2s)\right)_{s\geqslant 0}\right)$$

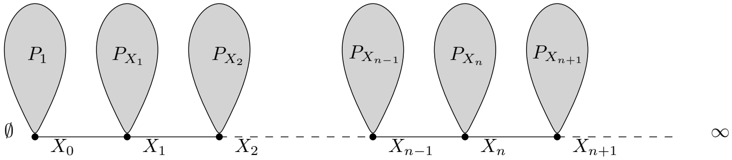
$$\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \left(\left(\zeta_s^{(L)}, \widehat{W}_s^{(L)}\right)_{s\geqslant 0}, \left(\zeta_s^{(R)}, \widehat{W}_s^{(R)}\right)_{s\geqslant 0}\right)$$

Éléments de preuve



- Étiquettes de long du tronc changées d'échelle : Bessel 9.

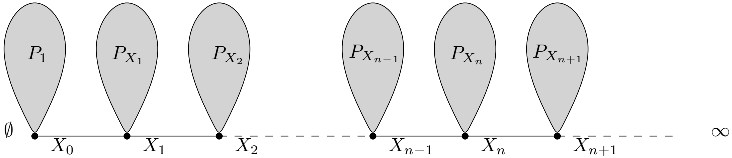
Éléments de preuve



- Étiquettes de long du tronc changées d'échelle : Bessel 9.
- Avec les résultats de Janson-Marckert (05) :

$$NP_{X_{\lfloor Nt \rfloor}}\left(f\left(C^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}, V^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}\right)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2\mathbb{N}_{\rho_t}\left(f\left(\zeta, \widehat{W}\right)\right)$$

Éléments de preuve



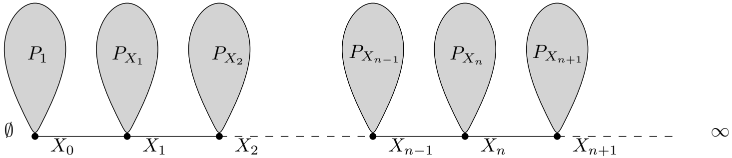
- Étiquettes de long du tronc changées d'échelle : Bessel 9.
- Avec les résultats de Janson-Marckert (05) :

$$NP_{X_{\lfloor Nt \rfloor}}\left(f\left(C^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}, V^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}\right)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2\mathbb{N}_{\rho_t}\left(f\left(\zeta, \widehat{W}\right)\right)$$

- Contours des arbres L_n de taille $\geqslant N^2\varepsilon$ changés d'échelle : Processus de Poisson d'intensité finie

$$2\,\mathbf{1}_{\{\sigma(\omega)\geqslant\varepsilon, \mathcal{R}(\omega)\subset]-\rho_t,\infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\left(\mathrm{d}\omega\right).$$

Éléments de preuve



- Étiquettes de long du tronc changées d'échelle : Bessel 9.
- Avec les résultats de Janson-Marckert (05) :

$$NP_{X_{\lfloor Nt \rfloor}}\left(f\left(C^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}, V^{(N)}_{L_{\lfloor Nt \rfloor}}\right)\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 2\mathbb{N}_{\rho_t}\left(f\left(\zeta, \widehat{W}\right)\right)$$

- Contours des arbres L_n de taille $\geqslant N^2\varepsilon$ changés d'échelle : Processus de Poisson d'intensité finie

$$2\,\mathbf{1}_{\{\sigma(\omega)\geqslant\varepsilon, \mathcal{R}(\omega)\subset]-\rho_t,\infty[\}}\,\mathrm{d}r\,\mathbb{N}_0\left(\mathrm{d}\omega\right).$$

- Les petits arbres disparaissent dans la limite continue.

Lignes directrices

Volume des boules et profil

Chassaing-Durhuus (06) : $E\left[|B_{\mathbf{Q},R}(Q)|\right] \sim R^4$

Volume des boules et profil

Chassing-Durhuus (06) : $E\left[|B_{\mathbf{Q},R}(Q)|\right] \sim R^4$

Grâce à la convergence des contours de l'UIPT, on démontre que sous ν :

$$\frac{1}{N^4}\left|B_{\mathbf{Q},Nr}(Q)\right| \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{9}{4}r^4\int_0^\infty \mathrm{d}s\left(\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\widehat{W}_s^{(L)}\right)+\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\widehat{W}_s^{(R)}\right)\right)$$

en distribution.

Volume des boules et profil

Chassaing-Durhuus (06) : $E\left[|B_{\mathbf{Q},R}(Q)|\right] \sim R^4$

Grâce à la convergence des contours de l'UIPT, on démontre que sous ν :

$$\frac{1}{N^4}\left|B_{\mathbf{Q},Nr}(Q)\right| \underset{N\to\infty}{\to} \frac{9}{4} r^4 \int_0^\infty \mathrm{d}s \left(\mathbf{1}_{[0,1]}\left(\widehat{W}_s^{(L)}\right) + \mathbf{1}_{[0,1]}\left(\widehat{W}_s^{(R)}\right)\right)$$

en distribution.

Ce résultat est une conséquence de la convergence du profil de l'UIPQ :

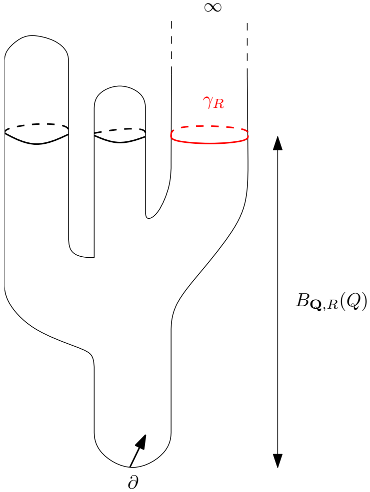
Théorème (Le Gall-M. 09)

$$\sum_{v\in Q} \frac{1}{N^4} g\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{d(\partial, v)}{N}\right) \underset{N\to\infty}{\to} \int_0^\infty \mathrm{d}s \left(g\left(\widehat{W}_s^{(L)}\right) + g\left(\widehat{W}_s^{(R)}\right)\right)$$

en distribution pour toute fonction g continue à support compact, sous ν.

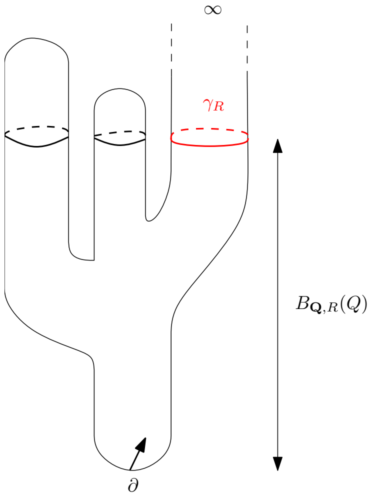
Points de sortie vers l'infini

- Q de loi ν, $\gamma_R(Q)$ = cycle de $B_{\mathbf{Q},R}(Q)$ qui sépare ∂ de la composante infinie.



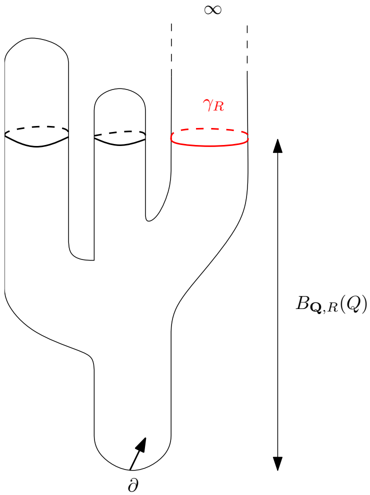
Points de sortie vers l'infini

- Q de loi ν, $\gamma_R(Q)$ = cycle de $B_{\mathbf{Q},R}(Q)$ qui sépare ∂ de la composante infinie.
- Krikun (06) : $|\gamma_R|/R^2$ converge vers une variable aléatoire de loi $\Gamma(3/2)$.



Points de sortie vers l'infini

- Q de loi ν, $\gamma_R(Q)$ = cycle de $B_{\mathbf{Q},R}(Q)$ qui sépare ∂ de la composante infinie.
- Krikun (06) : $|\gamma_R|/R^2$ converge vers une variable aléatoire de loi $\Gamma(3/2)$.
- Grâce à la correspondance de Schaeffer : interprétation d'un analogue à γ_R en termes de mesure de sortie du serpent éternel.



Merci de votre attention !