1/33



Techniques de tracage pour la méthode des caractéristiques appliquée à la résolution de l'équation du transport des neutrons

Macrobandes

François FÉVOTTE

thèse effectuée sous la direction de : Richard SANCHEZ. Simone SANTANDREA

Commissariat à l'Énergie Atomique CEA/DEN/DANS/DM2S/SERMA/LTSD

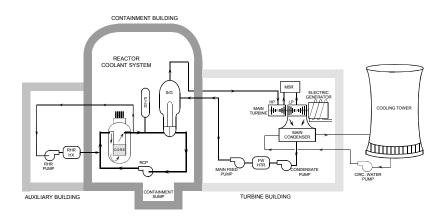
8 octobre 2008 Salle des conseils, Institut de Physique Nucléaire d'Orsay



Introduction

Contexte

Enjeux de la simulation neutronique





Contexte

Enjeux de la simulation neutronique

Conception:

Introduction

- assemblages combustibles
- dimensionnement du cœur
- dossiers de sûreté des centrales
- Exploitation :
 - plans de chargements
 - confrontation avec les détecteurs
- Démantèlement :
 - radioprotection
 - transport des déchets



Plan

Introduction

Équation du transport des neutrons La méthode des caractéristiques

Méthode des macrobandes

Problèmes de discrétisation et de traçage Principe de la méthode des macrobandes Résultats numériques

Traçage en géométries périodiques

Position du problème Construction de traçage périodiques Résultats numériques



Variables et inconnues

- 7 variables :
 - $ightharpoonup \vec{r}$: position (3 coord.)
 - $ightharpoonup \vec{\Omega}$: direction (2 coord.)
 - E : energie (ou vitesse : $E = \frac{1}{2} m v^2$)
 - ▶ t : temps
- ▶ Densité neutronique : $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, E, t) \, d\vec{r} \, d\vec{\Omega} \, dE \, dt$ $\psi = v \, N$ nombre de neutrons présents dans un volume élémentaire.
- ▶ Taux de réaction : $\tau(\vec{r}, E, t) d\vec{r} dE dt$ $\tau = \Sigma \psi$ nombre de réactions se produisant dans un volume élémentaire.



Équation de Boltzmann

$$\frac{1}{v}\frac{d\psi}{dt}$$
accumulation

= 0

Introduction

000 00

 $\blacktriangleright \psi$: flux neutronique



= 0

Transport neutronique

Équation de Boltzmann

$$\underbrace{\frac{1}{v}\frac{d\psi}{dt}}_{accumulation} = \underbrace{-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\psi}_{transport}$$

Introduction

000 00



- $\blacktriangleright \psi$: flux neutronique
- v: vitesse des neutrons
- \triangleright $\vec{\Omega}$: direction de propagation



Équation de Boltzmann

$$\underbrace{\frac{1}{v}\frac{d\psi}{dt}}_{accumulation} = \underbrace{-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\psi}_{transport} \underbrace{-\Sigma\,\psi}_{interactions}$$

= 0



 $\blacktriangleright \psi$: flux neutronique

Introduction

000 00

- v: vitesse des neutrons
- \triangleright $\vec{\Omega}$: direction de propagation
- Σ: section efficace (probabilité d'interaction avec un noyau)

Équation de Boltzmann

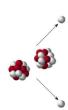
$$\frac{1}{v}\frac{d\psi}{dt} = \underbrace{-\vec{\Omega}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{r}}\psi}_{transport} \underbrace{-\Sigma\psi}_{interactions} + \underbrace{S}_{sources}$$

$$= 0$$

$$-transfert$$

$$-fission$$

$$-(externes)$$



 $\blacktriangleright \psi$: flux neutronique

Introduction

000 00

- v: vitesse des neutrons
- \triangleright $\vec{\Omega}$: direction de propagation
- Σ: section efficace (probabilité d'interaction avec un noyau)



Discrétisation

variable énergétique : formalisme multigroupe

$$\Sigma \to \Sigma_g$$

Introduction

000 00

variable angulaire : formule S_N

$$\Omega \to \Omega_d$$

équation multigroupe S_N :

$$\left(\vec{\Omega}_d \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Sigma_g\right) \psi = Q_{g,d}$$



Discrétisation

- variable énergétique : formalisme multigroupe $\Sigma \to \Sigma_a$
- $lackbox{ variable angulaire : formule } S_N$ $\Omega
 ightarrow \Omega_d$
- litérations sur les sources :

$$\left(\vec{\Omega}_d \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}} + \Sigma_g\right) \psi^{i+1} = Q_{g,d}^i$$

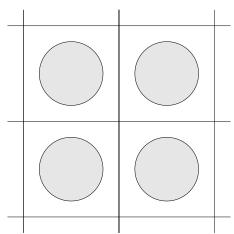


Approche classique

Découpage du domaine de calcul en régions.

Introduction

000 •0





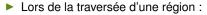
Approche classique

Découpage du domaine de calcul en régions.

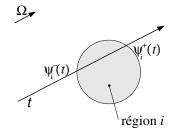
Introduction

000 00

Appui sur des trajectoires neutroniques rectilignes.



$$\psi_i^+(t) = \psi_i^-(t)$$



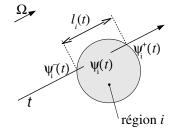
Approche classique

- Découpage du domaine de calcul en régions.
- Appui sur des trajectoires neutroniques rectilignes.
- Hypothèse : régions homogènes

$$ightharpoonup \Sigma(\vec{r}) = \Sigma_i, \quad \forall \vec{r} \in \text{région } i$$

Lors de la traversée d'une région :

$$\psi_i^+(t) = \psi_i^-(t) \quad \underbrace{e^{-\Sigma_i \, l_i(t)}}_{\text{coefficient de transmission}}$$





Approche classique

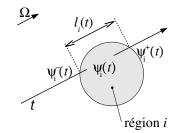
- Découpage du domaine de calcul en régions.
- Appui sur des trajectoires neutroniques rectilignes.
- Hypothèse : régions homogènes

$$ightharpoonup \Sigma(\vec{r}) = \Sigma_i, \quad \forall \vec{r} \in \text{région } i$$

$$q(\vec{r}) = q_i$$

Lors de la traversée d'une région :

$$\psi_i^+(t) = \psi_i^-(t) \quad \underbrace{e^{-\Sigma_i \, l_i(t)}}_{\text{coefficient de}} \quad + \text{ sources}$$



9/33



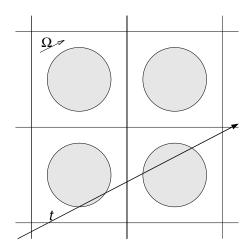
Introduction

000 00

La méthode des caractéristiques

Approche classique

Trajectoires rectilignes traversant tout le domaine



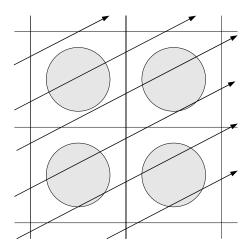
Introduction

000 00

La méthode des caractéristiques

Approche classique

- Trajectoires rectilignes traversant tout le domaine
- Plusieurs trajectoires parallèles pour recouvrir toutes les régions



Introduction

000 00

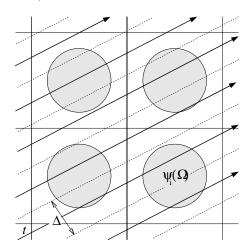
La méthode des caractéristiques

Approche classique

- Trajectoires rectilignes traversant tout le domaine
- Plusieurs trajectoires parallèles pour recouvrir toutes les régions
- Moyenne du flux entre les trajectoires recouvrant une région :

formule d'intégration transverse

$$\psi_{i}(\vec{\Omega}) = \frac{\sum_{t \cap i} \Delta l_{i}(t) \psi_{i}(t)}{\sum_{t \cap i} \Delta l_{i}(t)}$$





Plan

Introduction

Équation du transport des neutrons La méthode des caractéristiques

Méthode des macrobandes

Problèmes de discrétisation et de traçage Principe de la méthode des macrobandes Résultats numériques

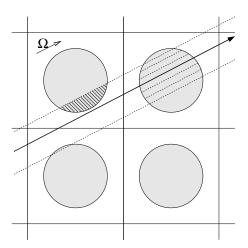
Traçage en géométries périodiques
Position du problème
Construction de traçage périodiques
Résultats numériques



Limites de la méthode traditionnelle

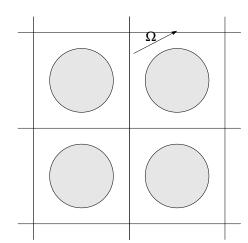
Approximations dues au traçage :

- discontinuités matérielles
- variation transverse des longueurs des cordes
- variation transverse du flux



Variantes de la méthode traditionnelle

Projection globale de toutes les discontinuités :

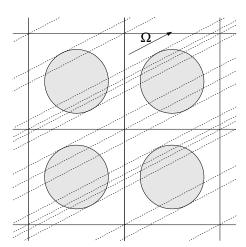


Macrobandes

Variantes de la méthode traditionnelle

Projection globale de toutes les discontinuités :

- génère un grand nombre de bandes
- solution plus chère que le traçage traditionnel

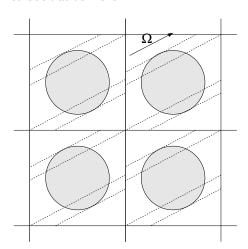




Variantes de la méthode traditionnelle

Projection locale des discontinuités : [A. Yamamoto et al., M&C 2005]

- nécessite un découpage en cellules
- pas de contrôle de la dispersion numérique

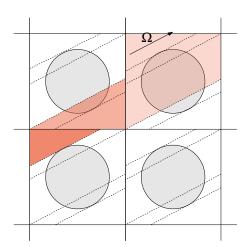




Variantes de la méthode traditionnelle

Projection locale des discontinuités : [A. Yamamoto et al., M&C 2005]

- nécessite un découpage en cellules
- pas de contrôle de la dispersion numérique

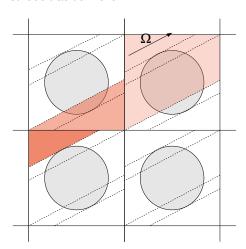




Variantes de la méthode traditionnelle

Objectifs de la méthode des macrobandes :

- prendre en compte les discontinuités matérielles
 - limiter le nombre de bandes générées
 - limiter la dispersion numérique
- prendre en compte la variation transverse des longueurs de cordes

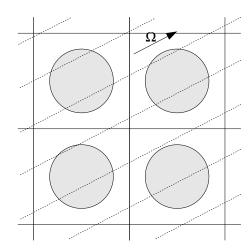




Éviter les discontinuités

Nouvelle méthode de traçage :

1. définir un maillage transverse à pas constant

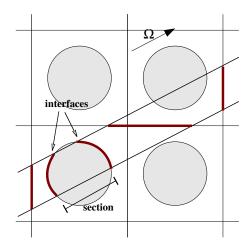


Éviter les discontinuités

Nouvelle méthode de traçage :

Introduction

- définir un maillage transverse à pas constant
- séparer chaque bande en sections

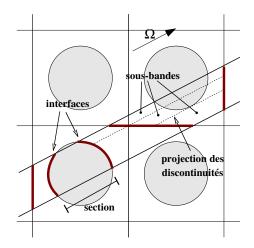




Éviter les discontinuités

Nouvelle méthode de traçage :

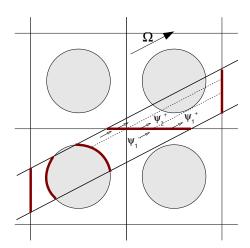
- définir un maillage transverse à pas constant
- séparer chaque bande en sections
- 3. projeter les discontinuités localement



Éviter les discontinuités

Nouvelle méthode de traçage :

- définir un maillage transverse à pas constant
- séparer chaque bande en sections
- projeter les discontinuités localement
- 4. redistribuer le flux aux interfaces



Redistribution du flux aux interfaces

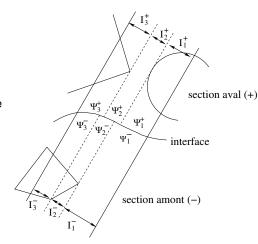
Principe de la redistribution aux interfaces :

- hypothèse de flux plat dans chaque sous-bande
- bilan conservatif
- formule aussi peu dispersive que possible

$$\psi_k^+ = \sum_{k'} \frac{\Delta_{k,k'}}{\Delta_k} \psi_{k'}^-$$

$$\Delta_k = l(I_k^+)$$

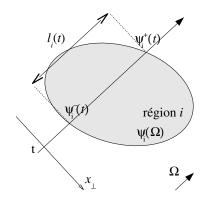
$$\Delta_{k k'} = l(I_k^+ \cap I_{k'}^-)$$



Formule d'intégration transverse

Équation de transmission :

$$\psi_i^+(t) = e^{-\Sigma_i l_i(t)} \; \psi_i^-(t) + \text{sources}$$



15/33

La méthode des macrobandes

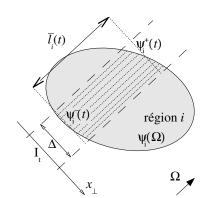
Formule d'intégration transverse

Équation de transmission :

$$\psi_i^+(t) = T_i(t) \; \psi_i^-(t) + \text{sources}$$

Coefficient de transmission moyen :

$$T_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{I_t} e^{-\Sigma_i l_i(x_\perp)} dx_\perp$$





Formule d'intégration transverse

Équation de transmission :

$$\psi_i^+(t) = T_i(t) \; \psi_i^-(t) + \text{sources}$$

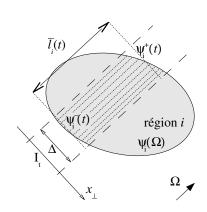
Coefficient de transmission moyen :

$$T_i(t) = \frac{1}{\Delta} \int_{I_t} e^{-\Sigma_i l_i(x_\perp)} dx_\perp$$

Développement de Taylor pour le terme exponentiel :

$$T_i(t) \simeq e^{-\sum_i \bar{l}_i(t)} \sum_{p=1}^{n_k} \alpha_p \sum_i^p$$

$$\alpha_p = \frac{(-1)^p}{\Delta p!} \int_{I_*} \left[l_i(x_\perp) - \bar{l}_i(t) \right]^p dx_\perp$$



Résultats numérique

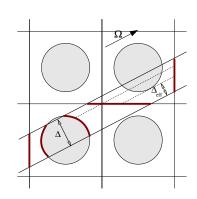
Comparaison des deux méthodes

Méthodologie de comparaison entre la méthode "classique" et la méthode des macrobandes :

- comparaison des taux d'absorption
- \blacktriangleright calcul de référence : méthode "classique", $\Delta=5.10^{-4}~\rm cm$
- utilisation du pas de traçage effectif pour les macrobandes :

$$\Delta_{eff} = \frac{\Delta}{\bar{n}_{sb}}$$

 \bar{n}_{sb} : nombre moyen de sous-bandes par section.



Résultats numérique

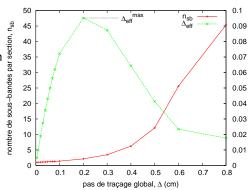
Comparaison des deux méthodes

Méthodologie de comparaison entre la méthode "classique" et la méthode des macrobandes :

- comparaison des taux d'absorption
- \blacktriangleright calcul de référence : méthode "classique", $\Delta=5.10^{-4}~{\rm cm}$
- utilisation du pas de traçage effectif pour les macrobandes :

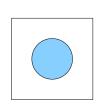
$$\Delta_{eff} = \frac{\Delta}{\bar{n}_{sb}}$$

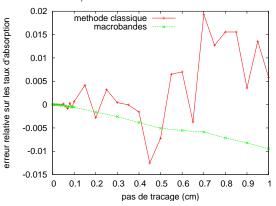
 \bar{n}_{sb} : nombre moyen de sous-bandes par section.



Résultats numériques

Cellule REP simplifiée

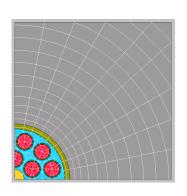


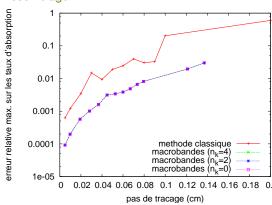


Comparaison entre la méthode "classique" et la méthode des macrobandes. Cellule combustible REP simplifiée.



Assemblage RBMK



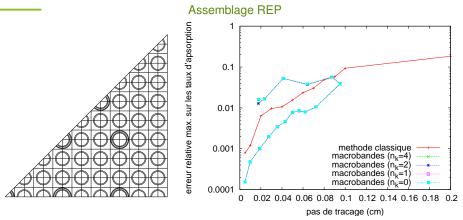


Comparaison entre la méthode "classique" et la méthode des macrobandes. Cellule RBMK.



Introduction

Résultats numériques



Comparaison entre la méthode "classique" et la méthode des macrobandes. Assemblage REP barré.



Conclusions – Perspectives

Précision de la méthode des caractéristiques

Macrobandes

- Gain en précision avec la méthode des macrobandes :
 - _ précision de la méthode des caractéristiques limitée par les problèmes d'intégration transverse.
- Impact négligeable du développement de Taylor (n_k) : ⇒ cause principale d'erreur : discontinuités matérielles.
- Résultats numériques obtenus avec la méthode des macrobandes :
 - à précision constante : jusqu'à 6× moins de bandes ;
 - à nombre de bandes constant : 2 à 3× plus d'opérations ;
 - jusqu'à 30 50% de gains en termes de temps de calcul.
- Perspectives :
 - éliminer les redistributions de flux [Santandrea, en cours de soumission];
 - travailler sur l'hypothèse de flux plat.



Plan

Introduction

Équation du transport des neutrons La méthode des caractéristiques

Méthode des macrobandes

Problèmes de discrétisation et de traçage Principe de la méthode des macrobandes Résultats numériques

Traçage en géométries périodiques

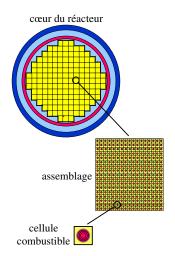
Position du problème Construction de traçage périodiques Résultats numériques





Traçage en géométries périodiques

Réacteur à eau pressurisée



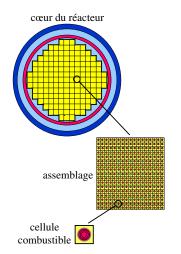
Remarques sur la géométrie :

- géométrie fortement multi-échelle
- présence de réseaux réguliers à tous les niveaux
- présence de symétries fortes
- ...mais tout n'est pas périodique non plus (réflecteur)

⇒ Est-il possible de ne construire le traçage que sur une partie minimale du domaine?

Traçage en géométries périodiques

Réacteur à eau pressurisée



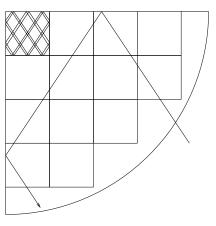
Introduction

⇒ Est-il possible de ne construire le traçage que sur une partie minimale du domaine?

Enjeux:

- réduction de la taille du traçage
- particulièrement utile/nécessaire pour le 3D

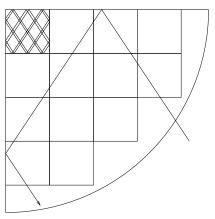
Traçage en géométries périodiques Objectifs



Objectifs :

- stocker le minimum d'information nécessaire
- permettre de traiter des morceaux non-périodiques
- recouvrir uniformément le domaine
- impact nul sur la précision
- impact faible sur le temps de calcul

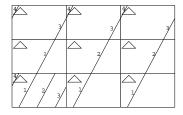
Traçage en géométries périodiques Objectifs



- Contraintes sur le traçage local :
 - nombre fini de segments
 - compatibilité avec les translations du réseau
 - compatibilité avec les réflexions des conditions aux limites
 - raccord avec un traçage à pas constant dans le réflecteur



Traçage en géométries périodiques État de l'art

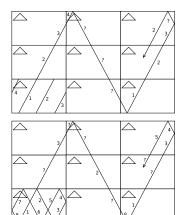


réseaux infinis

- connus depuis longtemps
- trajectoires cycliques ou ergodiques
- ightharpoonup condition sur la direction $\vec{\Omega}$



Traçage en géométries périodiques État de l'art



Introduction

- réseaux infinis
 - connus depuis longtemps

000 0000 000 0

- trajectoires cycliques ou ergodiques
- condition sur la direction $\vec{\Omega}$
- réseaux avec conditions aux limites
 - plus complexes à traiter
 - mêmes conditions de trajectoires cycliques
 - problème: construction du tracage local

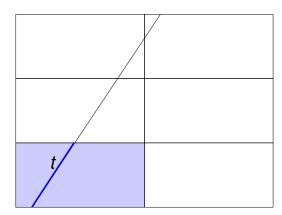
25/33



Construction du traçage local

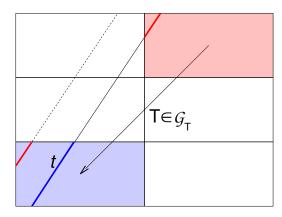
Invariance sous l'action du groupe de transformations

 \mathcal{G}_T : groupe des translations du réseau

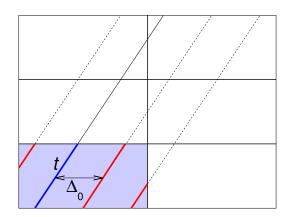


Invariance sous l'action du groupe de transformations

 G_T: groupe des translations du réseau

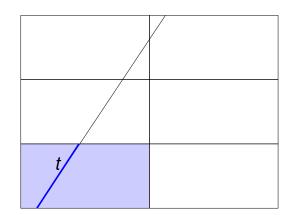


- \mathcal{G}_T : groupe des translations du réseau



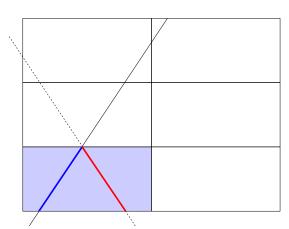


- $ightharpoonup \mathcal{G}_T$: groupe des translations du réseau
 - $\mathcal{G}_T t = \{ T_0^i t; i \in \mathbb{Z} \}$
- \mathcal{G}_{cl} : groupe de conditions aux limites





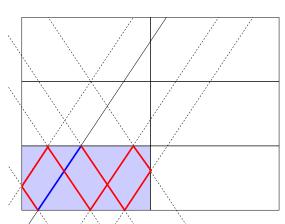
- $ightharpoonup \mathcal{G}_T$: groupe des translations du réseau
 - $\mathcal{G}_T t = \{ T_0^i t; i \in \mathbb{Z} \}$
- \mathcal{G}_{cl} : groupe de conditions aux limites



25/33

Construction du traçage local

- \mathcal{G}_T : groupe des translations du réseau
- G_{cl}: groupe de conditions aux limites





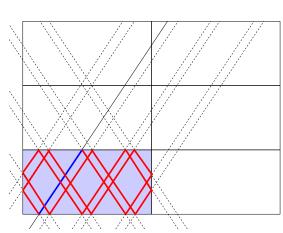
Invariance sous l'action du groupe de transformations

 \mathcal{G}_T : groupe des translations du réseau

 \mathcal{G}_{cl} : groupe de conditions aux limites

$$\blacktriangleright \ \mathcal{G} = \langle \mathcal{G}_T \cup \mathcal{G}_{cl} \rangle$$

- ⇒Traçage local complet
- = traçage local invariant par G



25/33

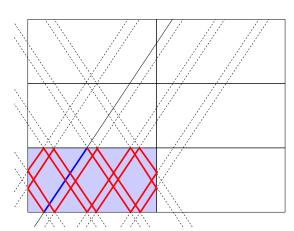


Construction du traçage local

Invariance sous l'action du groupe de transformations

Méthode de construction directe [S. Kosaka et E. Saji, 2000]

- pas de traçage non constant
- peu de contrôle sur la taille du traçage



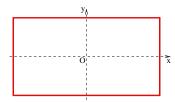


Méthode systématique

Hypothèse:

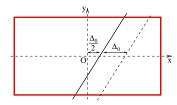
Introduction

existence d'un point invariant par \mathcal{G}_{cl}



Méthode systématique

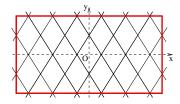
- Hypothèse :
 - existence d'un point invariant par \mathcal{G}_{cl}
- Méthode :
 - choix des paramètres de traçage appropriés





Méthode systématique

- Hypothèse :
 - existence d'un point invariant par \mathcal{G}_{cl}
- Méthode :
 - choix des paramètres de traçage appropriés
 - 2. tracage cyclique conventionnel





Méthode systématique

Hypothèse :

existence d'un point invariant par Gcl

Méthode :

- choix des paramètres de traçage appropriés
- 2. traçage cyclique conventionnel

Avantages:

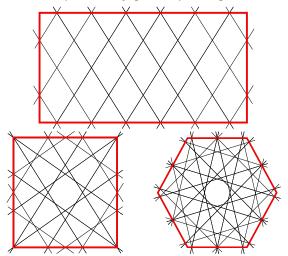
- utilisation de routines de traçage déjà existantes
- obtention d'un traçage à pas constant

27/33

Introduction

Construction du traçage local

Exemples de traçages complets réguliers





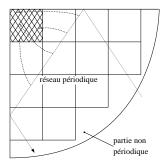
Connexion avec une partie non-périodique

Macrotraçage

Idée: plutôt que de calculer à la volée la succession de segments de traçage à balayer, les précalculer dans un "macrotracage"

Construction du macrotracage :

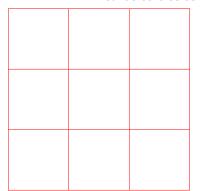
- parties non-périodiques
 - → tracage standard
- réseau périodique
 - → pointeurs vers les segments locaux

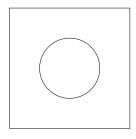


- Inconvénient : léger coût de stockage supplémentaire
- Avantage: réduction du coût de calcul



Motif de cellules combustibles



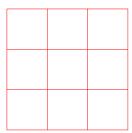


9 cellules 18 régions gain max. $\simeq 89\%$

	trad.	périod.	diff. rel.
taille du traçage (o)	6192	5160	-16.67%
temps de traçage (s)	0.18	0.26	44.44%
temps de balayage (s)	0.89	1.15	29.21%



Motif multi-assemblages

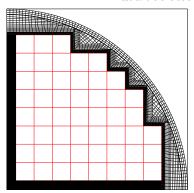


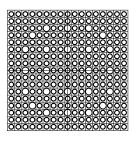
80000000000000000 0000000000000000 0000000000000000000 000000000000000000 00000000000000000 000000000000000000 00000000000000000

9 cellules $\simeq 54~000$ régions gain max. $\simeq 89\%$

	trad.	périod.	diff. rel.
taille du traçage (o)	10 172 688	1 781 532	-82.49%
temps de traçage (s)	69.57	30.40	-56.30%
temps de balayage (s)	13.61	12.94	-4.92%

Quart de cœur REP





52 cellules $\simeq 80~000$ régions gain max. $\simeq 82\%$

	trad.	périod.	diff. rel.
taille du traçage (o)	39 198 114	8 783 076	-77.59%
temps de traçage (s)	203.28	119.19	-41.37%
temps de balayage (s)	45.64	50.34	+10.30%



Conclusions – Perspectives

Traçage périodique

Conclusions:

méthode très efficace pour les grandes géométries :

Macrobandes

- gains élevés en taille de traçage ($\simeq 80\%$)
- peu ou pas de coût supplémentaire en CPU ($\leq 10\%$)
- méthode de traçage très générale :
 - s'applique à toutes les géométries usuelles
- permet de traiter les raccords avec des parties non-périodiques

Reste à implémenter :

- possibilité d'irrégularités dans le réseau
 - rotation des cellules périodiques
- prise en compte des cellules "coupées"
- implémentation pratique des formes autres que rectangle/carré
 - hexagones



Merci pour votre attention



- ▶ Méthode des macrobandes
 - Complexité algorithmique
 - Algorithmes de balayage
 - Impact de l'ordre de Taylor
 - Bibliographie
- Méthode des macrobandes
 - Bibliographie

35/40

Introduction

Méthode des macrobandes

Complexités algorithmiques

Comparaison des complexités algorithmiques:

	exp.	×	+	stockage
MOC classique	1	2	2	1
Macrobandes avec développement de Taylor	1	$3 + n_T + r$	$2 + n_T$	$1 + n_T + 2r$
Macrobandes sans développement de Taylor	1	2+r	2	1+2r

r: coût moyen de la répartition du flux aux interfaces

$$r \simeq 0.6$$





Algorithmes de balayage

```
pour chaque trajectoire t faire
   initialiser \psi avec les C.L.
   pour chaque région r sur t faire
     mettre à jour \psi
   fin pour
fin pour
```

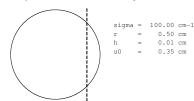
```
pour chaque trajectoire t faire
   initialiser \psi avec les C.L.
   pour chaque section s de t faire
     pour chaque sous-bande b de s faire
        pour chaque région r dans b faire
           mettre à jour \psi
        fin pour
     fin pour
     redistribuer \psi
```

fin pour fin pour

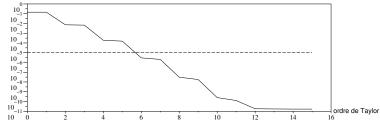


Méthode des macrobandes

Impact de l'ordre de Taylor



erreur relative





Bibliographie

Méthode des macrobandes



A. Yamamoto, M. Tabushi, N. Sugimura, and T. Ushio.

Non-equidistant ray tracing for the method of characteristics.

In Proceedings of M&C 2005, September 12–15 2005.



A Yamamoto

Reduction in spatial discretization error in the method of characteristics by using the mobile-chord ray tracing method.

Annals of Nuclear Energy, 35(5):783-789, May 2008.



F. Févotte, S. Santandrea, and R. Sanchez.

Advanced transverse integration for the method of characteristics.

In Joint International Topical Meeting on Mathematics & Computation and Supercomputing in Nuclear Applications 2007, Monterey, CA, USA, April 15-19 2007.

39/40



Bibliographie



Traçage périodique

S. Kosaka and E. Saji.

Transport theory calculation for a heterogeneous multi-assembly problem by characteristics method with direct neutron path linking technique.

Journal of Nuclear Science and Technology, 37(12):1015–1023, 2000.



K. S. Smith and J. D. Rhodes, III.

Full-core, 2-D, LWR core calculation with CASMO-4E.

In Proceedings of PHYSOR 2002, October 7–10 2002.



S. Sternberg.

Group Theory and Physics.

Cambridge University Press, 1994.



F. Févotte, S. Santandrea, and R. Sanchez.

Tracking on periodic lattices for the method of characteristics.

In Proceedings of PHYSOR 2008, Interlaken, Switzerland, September 14-19 2008.





Merci pour votre attention