



HAL
open science

Simulations numériques des transferts de chaleur turbulents par convection forcée dans des conduites cylindriques et des espaces annulaires

Lotfi Redjem Saad

► **To cite this version:**

Lotfi Redjem Saad. Simulations numériques des transferts de chaleur turbulents par convection forcée dans des conduites cylindriques et des espaces annulaires. Autre [cond-mat.other]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0234 . tel-00469422

HAL Id: tel-00469422

<https://theses.hal.science/tel-00469422>

Submitted on 1 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Université PARIS-EST
U.F.R Sciences de la matière

THÈSE
pour obtenir le grade de
Docteur de l'Université PARIS-EST

Spécialité : Energétique et Génie des Procédés
Ecole doctorale : Information, Communication, Modélisation, Simulation (ED n°431)

présentée et soutenue publiquement par

Lotfi REDJEM SAAD

le 22 février 2008

***Simulations numériques des transferts de chaleur turbulents
par convection forcée dans des conduites cylindriques et des
espaces annulaires.***

Membre du jury :

G. Desrayaud	Professeur	Univ. de Picardie	Examineur
L. Jacquin	Dir. de recherche	ONERA	Rapporteur
G. Lauriat	Professeur	Univ. Marne la Vallée	Directeur de thèse
J. Legrand	Professeur	Univ. Nantes	Président
M. Ould-Rouiss	HDR	Univ. Marne la Vallée	Co-directrice de thèse
C. Rey	Professeur	Univ. Marseille	Rapporteur

Simulations numériques des transferts de chaleur turbulents par convection forcée dans des conduites cylindriques et des espaces annulaires.

Résumé :

Ce travail de thèse a été consacré à la simulation numérique des transferts par convection forcée dans des écoulements turbulents pleinement développés. Deux configurations ont été considérées : la conduite cylindrique et l'espace annulaire. Les champs turbulents sont analysés statistiquement en moyennant dans le temps et dans l'espace les champs instantanés de vitesse et de température afin d'en déduire les profils moyens, les profils de couche limite, les écart-types (rms), les flux de chaleur turbulents ainsi que des statistiques d'ordres plus élevés telles que les coefficient de dissymétrie et d'aplatissement. Une approche plus poussée dans l'analyse des écoulements turbulents est aussi utilisée : les fonctions de densité de probabilité (pdf) et les fonctions de densité de probabilité jointes (jpdf). On s'intéressera à l'influence de la diffusivité thermique du fluide (nombre de Prandtl) sur les transferts thermo-convectifs dans les deux géométries. On étudiera l'effet de la rotation de la paroi sur le transfert de chaleur dans la conduite cylindrique. Quelques résultats obtenus par simulations numériques des grandes échelles sont aussi présentés. Dans la géométrie annulaire, l'influence du rapport des flux de chaleur imposés sur les parois est analysée.

Mots clés : transfert de chaleur, écoulement turbulent, conduite cylindrique, espace annulaire.

Numerical simulations of turbulent heat transfer by forced convection in pipe and annulus fully developed flows.

Resume :

This thesis was devoted to the numerical simulation of heat transfer by forced convection in fully developed turbulent flows. Two configurations were considered : the pipe and the annulus flows. The turbulent fields are statistically analyzed by averaging the instantaneous fields of velocity and temperature in order to deduce the mean profiles, profiles of boundary layer, root mean square, turbulent heat fluxes as well as higher order statistics such as skewness and flatness coefficients. A more thorough in the analysis of turbulent flows is also used : probability density functions (pdf) and joined probability density functions (jpdf). We look at the influence of the thermal diffusivity of the fluid (Prandtl number) on the convective heat transfer in both geometries. We study the effect of the rotation of the wall in the pipe flow. Some achievements in large eddy simulations are also presented. In the annular geometry, the influence of the ratio of heat fluxes imposed on the walls is analyzed.

Keywords : heat transfer, turbulent flow, pipe, annulus.

Table des matières

Introduction	1
1 Revue bibliographique des écoulements turbulents avec transfert de chaleur	3
1.1 Le canal plan	3
1.2 La conduite cylindrique	4
1.3 L'espace annulaire	5
2 Analyse statistique de la turbulence	9
2.1 Moyenne ou moment d'ordre 1	10
2.1.1 Moyenne temporelle	10
2.1.2 Moyenne d'ensemble	10
2.2 Moments statistiques d'ordre plus élevé	11
2.2.1 Décomposition de Reynolds	11
Propriétés de l'opérateur moyenne	12
2.2.2 Variance	13
2.2.3 Coefficient de dissymétrie	13
2.2.4 Coefficient d'aplatissement	13
2.2.5 Coefficient de corrélation	13
2.3 Fonctions de densité de probabilité	14
2.3.1 Loi normale	14
2.3.2 Loi normale à deux variables	15
2.4 Corrélations spatio-temporelles	18
2.5 Turbulence proche paroi	19

3	Formulation mathématique et méthodes numériques	23
3.1	Physique et modélisation des écoulements	23
3.1.1	Transport de la quantité de mouvement	23
	Configuration de l'écoulement et adimensionnement	24
	Forçage du champ dynamique	26
	Condition initiale	27
	Conditions aux limites	27
3.1.2	Transport du scalaire passif	28
	Conditions aux limites	31
3.2	Méthode numérique	32
3.2.1	Domaine de calcul et maillage	32
3.2.2	Distribution radiale des points et fonctions de raffinement	33
3.3	Discrétisation des équations	34
3.3.1	Discrétisation spatiale	34
3.4	Méthode de résolution	35
3.5	Schéma numérique, Conditions aux limites	35
3.5.1	(A) Calcul du champ non-solénoïal	35
3.5.2	(A1) Premier pas de la factorisation (direction θ)	37
3.5.3	(A2) Deuxième pas de la factorisation (direction z)	37
3.5.4	(A3) Troisième pas de la factorisation (direction r)	38
3.5.5	(B) Correction de pression et calcul du champ solénoïdal	40
3.5.6	(B1) Résolution de l'équation de Poisson	40
3.5.7	(B2) Calcul du champ solénoïdal et réactualisation de la pression	41
3.5.8	(C) Calcul du scalaire passif	41
3.6	Simulation des grandes échelles	41
3.6.1	Filtrage des équations	41
3.6.2	Modélisation sous-maille	43
	Contraintes sous-maille / Procédure dynamique	43
	Flux de chaleur sous-maille	44

4	Résultats de l'étude dans la conduite cylindrique	47
4.1	Domaine de calcul et validation du champ dynamique	47
4.1.1	Profil de vitesse	48
4.2	Transport du scalaire passif	51
4.2.1	Profil de température	51
4.2.2	Ecart-type des fluctuations de température	54
4.2.3	Flux de chaleur turbulents	55
4.3	Comportements asymptotiques proche paroi	57
4.3.1	Ecart-type des fluctuations de température	57
4.3.2	Flux de chaleur turbulents	59
4.3.3	Nombre de Prandtl turbulent	61
4.4	Moments statistiques d'ordre 3 et 4	63
4.5	Interactions entre le champ thermique et le champ dynamique	65
4.5.1	Coefficients de corrélation	65
4.5.2	Fonctions de densité de probabilité	67
4.5.3	Fonctions de densité de probabilité jointes	70
4.6	Visualisation du champ thermique et mise en évidence des structures cohérentes	72
4.7	Coefficient d'échange	75
4.8	La conduite en rotation	79
4.8.1	Profil moyen de température	79
4.8.2	Ecart-type des fluctuations de température	80
4.8.3	Flux de chaleur turbulents	80
4.8.4	Fonctions de densité de probabilité jointes	82
4.9	Simulation des grandes échelles	86
5	Résultats de l'étude dans l'espace annulaire	93
5.1	Champ dynamique	94
5.1.1	Domaine de calcul	94
5.1.2	Profil de vitesse	95
5.1.3	Ecart types des fluctuations de vitesse	97
5.1.4	Positions radiales du maximum de vitesse axiale et de la tension de Reynolds nulle	99
5.1.5	Analyse de l'écoulement par les fonctions de densités de probabilités jointes (JPDF)	103

5.2	Champ thermique	108
5.2.1	Validation	108
5.2.2	Profil de température	110
5.2.3	Ecart-type des fluctuations de température	112
5.2.4	Flux de chaleur turbulents	113
5.3	Influence du nombre de Prandtl	113
	Comportements asymptotiques	116
5.4	Chauffage dissymétrique	118
5.4.1	Profil de température dans la couche limite	118
5.4.2	RMS des fluctuations de température	119
5.4.3	Flux de chaleur turbulents	120
	Synthèse et perspectives	125

Table des figures

2.1	Evolution temporelle de la variable $a(x_i, t)$	10
2.2	Echantillonnage de la variable $a(x_i, t)$	11
2.3	Distributions normales pour diverses valeurs de μ et σ	15
2.4	Loi normale à deux variables.	16
2.5	Ellipses de dispersion pour plusieurs coefficients de corrélation.	17
2.6	Les différentes zones de la turbulence proche paroi.	20
3.1	Configurations des écoulements.	25
3.2	Bilan d'énergie sur une longueur élémentaire.	30
3.3	Maillage décalé.	32
4.1	Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale.	49
4.2	Profil moyen de la vitesse axiale.	49
4.3	Ecart-types des fluctuations de vitesse.	50
4.4	Profil de température moyen.	51
4.5	Profil de température moyen.	52
4.6	Constantes κ_Θ et β_Θ du profil moyen de température.	53
4.7	Ecart-type des fluctuations de température.	54
4.8	Flux de chaleur turbulent axial.	55
4.9	Flux turbulent radial.	56
4.10	Flux de chaleur turbulent radial et flux de chaleur total.	57
4.11	Ecart-types des fluctuations de température adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.	59
4.12	Flux turbulents axiaux adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.	60
4.13	Flux turbulents radiaux adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.	61
4.14	Nombre de Prandtl turbulent pour un écoulement d'air $Pr = 0.71$	61

4.15	Variation du nombre de Prandtl turbulent en fonction du nombre de Prandtl. . .	63
4.16	Coefficient de dissymétrie.	64
4.17	Coefficient d'aplatissement.	65
4.18	Coefficients de corrélation $R_{v_r\Theta}$ et $R_{v_r v_z}$	66
4.19	Coefficient de corrélation $R_{v_z\Theta}$	67
4.20	Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 5$	68
4.21	Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 14$	69
4.22	Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 100$	69
4.23	JPDF des fluctuations de vitesses.	70
4.24	JPDF entre les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuations de température.	71
4.25	Champ de température $Pr = 0.026$	72
4.26	Champ de température $Pr = 0.71$	73
4.27	Champs fluctuants : (a) v'_z ($Re_b = 5500$), (b) Θ' ($Pr = 0.71$), (c) Θ' ($Pr = 0.2$), (d) Θ' ($Pr = 0.026$)	74
4.28	Auto-corrélations spatiales avec séparation azimutale : (a) $Pr = 0.71$, (b) $Pr =$ 0.026	75
4.29	Auto-corrélations spatiales avec séparation axiale : (a) $Pr = 0.71$, (b) $Pr = 0.026$	76
4.30	Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Prandtl.	77
4.31	Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Peclet.	78
4.32	Profil de température moyen ($Pr = 0.71$, $Re = 5500$).	80
4.33	Effet de la rotation sur l'écart type des fluctuations de température.	81
4.34	Variation des flux de chaleur turbulents en fonction du taux de rotation.	82
4.35	JPDF entre v'_z et Θ' pour différents taux de rotation à $y^+ \simeq 5$	83
4.36	JPDF entre v'_θ et Θ' pour différents taux de rotation $y^+ \simeq 100$	84
4.37	Champ de température $N = 0$	85
4.38	Champ de température $N = 3$	85
4.39	Simulation des grandes échelles (a) Profil de vitesse, (b) rms.	87
4.40	Simulation des grandes échelles $Pr = 0.71$ (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent radial.	89
4.41	Simulation des grandes échelles $Pr = 5$ (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent radial.	90
4.42	Simulation des grandes échelles, $N = 3$: (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent azimutal.	91
5.1	Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale. . .	95

5.2	Profil de vitesse axiale.	95
5.3	Ecart type des fluctuations de vitesse.	97
5.4	Paramètre de partition d'énergie.	98
5.5	Caractéristiques d'un écoulement turbulent dans un espace annulaire.	99
5.6	Positions radiales r_0 et r_{max}	101
5.7	Méthode des quadrants.	103
5.8	JPDF des fluctuations de vitesses axiale et radiale / paroi externe.	104
5.9	JPDF des fluctuations de vitesses axiale et radiale / paroi interne.	105
5.10	Coefficient de corrélation $R_{v'_r, v'_z}$	106
5.11	JPDF des fluctuations de vitesses axiale-azimutale et radiale-azimutale / à droite paroi externe, à gauche paroi interne.	107
5.12	JPDF des fluctuations de vitesses au voisinage de la position de vitesse axiale maximale.	108
5.13	Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale.	109
5.14	Profil de température.	110
5.15	Détermination des coefficients de la droite logarithmique : (a) κ_Θ , (b) β_Θ	111
5.16	Ecart-type des fluctuations de température.	112
5.17	Flux de chaleur turbulents : (a) flux axial, (b) flux radial.	113
5.18	Variation des écarts-types des fluctuations de température en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	114
5.19	Variation du flux turbulent axial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	115
5.20	Variation du flux turbulent radial en fonction du nombre de Prandtl.	115
5.21	Comportement proche paroi des écarts-types des fluctuations de température en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	117
5.22	Comportement proche paroi du flux turbulent axial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	117
5.23	Comportement proche paroi du flux turbulent radial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	118
5.24	Couche limite thermique : (a) paroi interne, (b) paroi externe.	119
5.25	Variation de la rms en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$	120
5.26	Variation du flux turbulent axial en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$	121
5.27	Variation du flux turbulent radial en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$	122
5.28	Position du flux turbulent radial nul en fonction du rapport de flux.	123

Liste des tableaux

4.1	Paramètres des simulations comparés aux paramètres d'Eggels et al. (1994) . . .	48
4.2	Paramètres de la présente simulation comparés aux paramètres des simulations de la littérature	50
4.3	Valeurs des coefficients de corrélation $R_{v_r\Theta}$ et $R_{v_rv_z}$ ($Pr = 0.71$)	66
4.4	Nombre de Nusselt.	77
4.5	Variation du Rapport N/Nu_0 en fonction du taux de rotation.	84
4.6	Paramètres des simulations des grandes échelles comparés aux paramètres des simulations numériques directes	86
4.7	Erreur relative par rapport à la DNS.	87
5.1	Paramètres des simulations comparés aux paramètres de Chung et al. (2001) ($r^* = 0.1$)	94
5.2	Résultats des simulations comparés aux résultats numériques de Chung et al. (2001) ($r^* = 0.1$)	96
5.3	Positions r_0 et r_{max}	102
5.4	Paramètres des simulations comparés aux paramètres de Chung et al. (2003) ($r^* = 0.1$)	109
5.5	Valeurs de κ_Θ et β_Θ pour diverses géométries	111
5.6	Nombre de Nusselt sur les parois interne et externe de l'espace annulaire en fonction du rapport de flux.	123

Nomenclature

C_p	Chaleur massique à pression constante
D	Diamètre de la conduite
D_h	Diamètre hydraulique
$F(.)$	Coefficient d'aplatissement (Flatness)
h	Coefficient de transfert convectif
k	Conductivité thermique
L	Longueur de la conduite
n_1	Nombre de mailles total dans la direction tangentielle
n_2	Nombre de mailles total dans la direction radiale
n_3	Nombre de mailles total dans la direction axiale
N	Taux de rotation
Nu	Nombre de Nusselt
P	Pression
Pr	Nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$
q	Flux de chaleur imposé à la paroi
q^*	Rapport des flux de chaleur imposés sur les parois de l'espace annulaire, $q^* = q_i/q_e$
r	Coordonnée radiale
r^*	Rapport des rayons de l'espace annulaire, $r^* = r_i/r_e$
R	Rayon de la conduite
Re_p	Nombre de Reynolds, $Re = U_p R/\nu$
Re_b	Nombre de Reynolds, $Re_b = U_b D_h/\nu$
Re_δ	Nombre de Reynolds, $Re_\delta = U_p \delta/\nu$
$S(.)$	Coefficient de dissymétrie (Skewness)
t	Temps
T	Température
T_p	Température de paroi
T_r	Température de référence, $T_r = q_p/\rho.C_p.U_b$
T_τ	Température de frottement, $T_\tau = q_p/\rho.C_p.u_\tau$
U_b	Vitesse moyenne débitante
U_p	Vitesse maximale du profil de Poiseuille
U_τ	Vitesse de frottement
v_r	Composante radiale de la vitesse, $q_r = rv_r$
v_θ	Composante azimutale de la vitesse, $q_\theta = v_\theta$
v_z	Composante axiale de la vitesse, $q_z = v_z$
y	Distance de la paroi
z	Coordonnée axiale

LETTRES GREQUES

α	Diffusivité thermique du fluide
δ	Demi-distance de l'espace annulaire, $\delta = (r_e - r_i)/2$
θ	Coordonnée azimutale
Θ	Température adimensionnée
μ	Viscosité dynamique
ν	Viscosité cinématique
ρ	Masse volumique du fluide
Ω	Vitesse angulaire de rotation

INDICES

e	Externe
i	Interne
c	Coordonnées dans les trois directions, $c = \theta, r, z$
l	Pas intermédiaires du schéma de Runge-Kutta, $l = 1, 2, 3$
m	Moyen
t	Turbulent

EXPOSANTS

*	Variable adimensionnée
+	Variable normalisée par rapport à u_τ , T_τ et ν
'	Fluctuation
$\langle \cdot \rangle$	Moyenne dans les directions périodiques
$\overline{(\cdot)}$	Moyenne temporelle

Introduction

Les écoulements turbulents sont présents dans de nombreux processus naturels (mouvements de fluides dans les océans ou dans l'atmosphère) ainsi que dans des applications industrielles (jets des réacteurs, chambres de combustion, sillages des aubes et compresseurs). La turbulence désigne l'état d'un fluide dans lequel la vitesse présente en tout point un caractère tourbillonnaire : tourbillons dont la taille et l'orientation varient constamment dans le temps et dans l'espace. Les écoulements turbulents se caractérisent donc par une apparence très désordonnée, un comportement difficilement prévisible et l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles. De tels écoulements apparaissent lorsque la source d'énergie cinétique qui met le fluide en mouvement est relativement intense devant les forces de viscosité que le fluide oppose pour se déplacer.

La compréhension des mécanismes qui régissent le transport turbulent possède une grande importance dans plusieurs domaines de l'ingénierie, particulièrement dans les problèmes de transfert de chaleur ou de transport de polluants. Par exemple, un matériau qui est soumis à de fortes variations de température, provoquées par un écoulement turbulent, peut à long terme se déformer, se fissurer, voir se rompre. La fatigue thermique des matériaux intéresse bon nombre d'industriels, notamment dans le domaine de l'aéronautique et de l'énergétique (conception de turbines) où la majorité des travaux sont réalisés.

Pendant longtemps, l'approche expérimentale a été la seule voie possible pour étudier ces mécanismes relativement complexes. Malgré les progrès de certaines techniques comme la PIV, l'expérience permet de tirer quelques informations globales mais ne permet pas l'accès aux champs de vitesse et de température instantanés tridimensionnels. C'est durant ces 30 dernières années, avec l'arrivée de calculateurs de plus en plus performants, que l'utilisation d'outils de simulation numérique a pris son essor. Au début de l'ère des simulations numériques des équations de Naviers-Stokes, les modèles de turbulence de fermeture en un point, basés sur la décomposition de Reynolds, ont été largement utilisés et ont fourni de bons résultats pour l'analyse des écoulements de couches limites à gradient de pression modéré. Ce n'est qu'au début des années 80 que les chercheurs ont mis en évidence l'usage limité des modèles de fermeture en un point pour l'étude des écoulements complexes. C'est ainsi que les chercheurs se sont tournés vers les simulations numériques directes (DNS) et les simulations des grandes échelles (LES)

La simulation numérique directe consiste à résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes (conservation de la masse et quantité de mouvement) et l'équation de l'énergie. Comme son nom l'indique, cette méthode consiste à résoudre explicitement les équations sans aucune modélisation. La DNS ne fait appel à aucune approximation, toutes les échelles spatio-temporelles sont donc résolues, et le maillage utilisé doit être en mesure de capter toutes ces

échelles.

Une approche des écoulements turbulents consiste à traiter statistiquement les informations disponibles soit par expérimentation soit par simulation. Cette approche permet de simplifier et de quantifier les résultats. Même si le traitement statistique occulte certaines caractéristiques essentielles, il permet néanmoins de généraliser quelques propriétés communes aux écoulements turbulents. Certaines statistiques intéressent directement la modélisation en un point qui requiert la connaissance de nombreuses corrélations pour développer un modèle.

L'objectif de cette thèse est de simuler numériquement le transfert thermo-convectif à l'aide de simulation numérique directe (DNS) de l'écoulement turbulent pleinement développé, dans une conduite cylindrique et dans un espace annulaire (i.e. entre deux cylindres coaxiaux). Nous utilisons une base de code DNS élaboré par le professeur P. Orlandi de l'université de Rome pour simuler l'écoulement turbulent pleinement développé dans un tube en rotation. L'équation de transport pour le scalaire passif a été introduite dans le code qui a été donc développé pour prendre en compte les transferts thermiques dans le tube. Le code a été ensuite modifié et adapté à la géométrie annulaire. Toute la partie statistique des champs turbulents a ensuite été programmée, en moyennant dans le temps et dans les directions périodiques les champs instantanés de vitesse et de température afin d'en déduire les profils moyens des champs turbulents, les profils de couche limite, les écart-types (rms), les flux de chaleur turbulents ainsi que des statistiques d'ordres plus élevés telles que les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement. Une approche plus poussée dans l'analyse des écoulements turbulents est aussi utilisée : les fonctions de densité de probabilité (pdf) et les fonctions de densité de probabilité jointes (jpdf).

Dans le premier chapitre, nous présentons une revue bibliographique qui résume, de façon non exhaustive, quelques études réalisées dans les écoulements turbulents pleinement développés avec transfert de chaleur, dans trois géométries : le canal plan, la conduite cylindrique et l'espace annulaire.

Ensuite, le deuxième chapitre résume, pour les moins avertis, la méthode d'analyse des écoulements turbulents et l'intérêt que peut présenter le calcul des différentes statistiques pour la compréhension des mécanismes de turbulence.

La formulation mathématique des équations régissant le problème ainsi que la méthode de résolution sont présentées dans le troisième chapitre de ce mémoire.

Les chapitres quatre et cinq sont respectivement consacrés à l'étude des transferts thermo-convectifs dans un écoulement turbulent pleinement développé dans une conduite cylindrique et dans un espace annulaire concentrique. Les résultats issus de nos simulations numériques sont dépouillés, analysés et confrontés aux données trouvées dans la littérature.

Chapitre 1

Revue bibliographique des écoulements turbulents avec transfert de chaleur

Les écoulements turbulents pleinement développés dans les géométries simples sont d'une grande importance pour la compréhension des mécanismes de la turbulence. Durant ces dernières années, les études des écoulements turbulents dans ces géométries ont permis de réaliser de gros progrès dans la compréhension des structures cohérentes propre à l'écoulement turbulent. Ces études sont restées limitées : elles ont principalement concerné les écoulements à frontières planes car il est beaucoup plus aisé de travailler en coordonnées cartésiennes. Dans la pratique, plusieurs écoulements intéressants requièrent l'utilisation de coordonnées cylindriques. Certains cas peuvent être résolus à l'aide de coordonnées cartésiennes au détriment de la précision. Trois configurations académiques sont principalement étudiées : le canal plan, la conduite cylindrique et l'espace annulaire. Notons que les écoulements dans une conduite cylindrique et dans un canal plan sont les cas limites de l'écoulement annulaire (entre deux tubes coaxiaux). Lorsque le rapport de rayon varie ($r^* = r_i/r_e$), toutes les caractéristiques des structures au voisinage des parois interne et externe changent notablement à cause de l'influence des courbures des parois. Pour des rapports de rayon faibles, les structures tourbillonnaires au voisinage de la paroi interne sont similaires à celles de l'écoulement turbulent de couche limites dans un écoulement axial autour d'un cylindre. Par ailleurs, les structures tourbillonnaires au voisinage de la paroi externe semblent similaires à celles dans un tube, dans le cas de rapports de rayon très faibles. Lorsque le rapport de rayons augmente et tend vers 1, les caractéristiques de l'écoulement tendent vers celles d'un canal plan.

1.1 Le canal plan

Les écoulements turbulents pleinement développés entre deux plaques planes infinies ont fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques. En revanche, on trouve peu de simulations numériques lorsqu'on considère le transport turbulent d'un scalaire passif (champ de température). Une des premières simulations numériques du transport d'un scalaire passif dans un écoulement turbulent dans un canal plan est celle de Kim et Moin (1985). Ces auteurs

ont simulé l'écoulement d'un fluide (à $Re_\tau = 180$) contenant une source de chaleur interne qui s'évacue par l'intermédiaire des parois froides du canal, pour trois nombres de Prandtl ($Pr = 0.1, 0.71$ et 2). Cette étude a mis en évidence la présence de structures thermiques allongées et a confirmé la très forte corrélation entre les fluctuations de vitesse longitudinale et les fluctuations de température. Des résultats similaires ont été présentés par Lyons (1991) dans le cas du transport turbulent d'un champ de température entre deux plaques maintenues à des températures différentes pour un nombre de Reynolds $Re_\tau = 180$ et un nombre de Prandtl $Pr = 1$. Kasagi et al. (1992) et Kasagi et Ohtsubo (1993) ont réalisé une simulation numérique directe pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) avec un nombre de Reynolds $Re_\tau = 150$, avec un flux de chaleur uniforme imposé sur les parois. Ces derniers présentent la rms des fluctuations de température ainsi que les flux de chaleur turbulents. Le nombre de Prandtl turbulent ainsi que les taux de dissipation sont examinés. Kawamura et al. (1998) ont effectué une série de simulations numériques directes dans un canal plan chauffé uniformément par les parois, pour une large gamme de nombres de Prandtl allant de $Pr = 0.025$ à $Pr = 5$. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement est fixé à $Re_\tau = 180$. L'effet du nombre de Prandtl sur les différentes statistiques (rms, flux turbulents ...) est analysé. Les auteurs montrent que l'intensité des fluctuations de la température augmente avec l'augmentation du nombre de Prandtl. Le nombre de Prandtl turbulent est indépendant du nombre de Prandtl lorsque $Pr \geq 0.1$.

1.2 La conduite cylindrique

Le transfert de chaleur turbulent dans les conduites cylindriques (tube fixe) a été en général examiné dans le passé sur une base semi-théorique postulant que les lois gouvernant les transferts de quantité de mouvement et de chaleur sont similaires. Plus précisément, une analogie entre frottement et transfert de chaleur est établie, (Von Karman (1939) et Martinelli (1947)).

Plus tard, quelques études ont été menées en vue de déterminer les profils de températures dans des écoulements turbulents à l'intérieur d'un tube lisse. Gowen et Smith (1967) ont mené une étude dans l'air et l'éthylène aqueux. Ils ont également utilisé les données expérimentales de la littérature pour analyser l'influence du nombre de Prandtl sur la distribution de température. Des relations empiriques, fonction du nombre de Prandtl, ont été établies.

Les statistiques sur le champ turbulent dépendent des conditions thermiques imposées aux frontières (parois). Dans le cas de conditions aux limites isothermes sur le tube lisse, on trouve dans la littérature des études variées expérimentales ou théoriques (Hishida et al. (1986)). Par contre, dans le cas de conditions aux limites isoflux (flux de chaleur imposé sur le tube fixe), les travaux sont moins nombreux que les précédents. Ces travaux, essentiellement expérimentaux, portent principalement sur la mesure des coefficients de transfert dans des fluides à propriétés constantes ou variables (Sleicher et Rousse (1975)) ou dans des métaux liquides (Chen et Chiou (1981), Brown et al. (1957), Skupinsky et al. (1965)).

Les investigations sur le transfert de chaleur dans les conduites cylindriques en rotation sont peu nombreuses :

- Cannon et Kays (1969) ont analysé expérimentalement l'influence de la rotation du tube sur le transfert thermique. Les auteurs montrent ainsi que le transfert de chaleur est fortement réduit avec l'augmentation de la vitesse de rotation. Des visualisations expérimentales mettent

en évidence une suppression considérable des fluctuations de vitesse au voisinage de la paroi en rotation.

- L'étude à la fois expérimentale et théorique de Reich et Beer (1989) détermine la distribution radiale des profils de vitesse et de température ainsi que le coefficient de frottement et le nombre de Nusselt, dans l'écoulement turbulent pleinement développé d'air, pour différents nombres de Reynolds et taux de rotation. L'étude analytique est basée sur la théorie de longueur de mélange modifiée afin de prendre en compte la suppression de la turbulence due aux forces centrifuges. Un bon accord existe entre les prédictions théoriques et les mesures expérimentales. Les auteurs concluent que la rotation du tube supprime le mouvement turbulent ; un phénomène de laminarisation est alors observé : il a pour conséquence une réduction du frottement et du transfert de chaleur dans la conduite.

Notons que le nombre de travaux sur les transferts thermo-convectifs dans l'écoulement turbulent dans les tubes fixes ou en rotation est très réduit, comparé au nombre de travaux concernant le même type d'écoulement dans une géométrie annulaire ou dans un canal plan. En effet, on trouve très peu de simulations numériques directes (DNS) du transfert de chaleur dans un écoulement turbulent pleinement développé dans un tube fixe ou en rotation :

- Satake et al. (2002) ont réalisé une série de simulations numériques directes du transfert thermique turbulent dans une conduite cylindrique, avec flux de chaleur uniforme imposé sur la paroi. Le nombre de Reynolds basé sur la vitesse débitante est fixé à $Re_b = 5283$ et le nombre de Prandtl à $Pr = 0.71$. Ces auteurs ont analysé l'effet de la rotation de la paroi sur l'écoulement turbulent ainsi que sur le transfert de chaleur en présentant différentes statistiques (profils moyens, rms, flux turbulents, budgets). Ils concluent que le frottement pariétal et le transfert de chaleur sont réduits lorsque le taux de rotation augmente.

- Piller (2005) a réalisé des simulations numériques directes du transfert de chaleur turbulent dans une conduite cylindrique pour trois types de conditions aux limites : flux de chaleur idéal, paroi isotherme idéale, et condition mixte. L'auteur montre l'influence des conditions aux limites sur le transfert de chaleur en examinant les grandeurs moyennes ainsi que les statistiques jusqu'à l'ordre 4. Il montre que le type de condition imposée à la paroi influe sur le transfert de chaleur dans la région pariétale ainsi que dans la région centrale de l'écoulement. Les conditions de flux de chaleur idéal ou mixte modifient le transfert de chaleur uniquement dans la sous couche de conduction, tandis qu'une condition de paroi isotherme idéale influence considérablement le transfert de chaleur jusqu'au cœur de l'écoulement. L'auteur montre également que l'intensité des fluctuations de température est plus grande dans la conduite cylindrique comparée au canal plan.

1.3 L'espace annulaire

L'étude de l'écoulement turbulent dans une conduite annulaire est d'un grand intérêt pour les applications industrielles telles que les échangeurs de chaleur, le refroidissement des réacteurs nucléaires ou des générateurs électriques, les turbomachines. On trouve dans la littérature plusieurs études, aussi bien expérimentales que numériques, de l'écoulement turbulent pleinement développé dans un espace annulaire. Les auteurs se sont focalisés sur le problème de la coïncidence des positions radiales du maximum de vitesse et de tension de cisaillement nulle. Lorenz (1937) a découvert expérimentalement que la position du maximum du profil moyen

de vitesse dans un écoulement laminaire diffère de la position dans un écoulement turbulent. Kjellstöm et Hedberg (1966) ont pu confirmer expérimentalement la différence entre la localisation du maximum de vitesse et de la tension de cisaillement nul dans le cas d'un espace annulaire rugueux, mais sont restés incapables de le confirmer dans le cas d'un espace lisse. Lawn et Elliott (1972) ont finalement montré expérimentalement que les deux positions ne coïncident pas.

A cause de cette particularité, qui apparaît pour tous les rapports de rayons et pour une large gamme de nombres de Reynolds, la plupart des études théoriques et semi-théoriques qui ont prédit des expressions empiriques du profil de vitesse, des coefficients de frottement, et des nombres de Nusselt, peuvent contenir des erreurs significatives. Ces études n'ont pas pris en considération le fait qu'à une certaine position le gradient de vitesse change de signe contrairement au gradient de la tension totale. Quelques investigations récentes ont pu prédire correctement l'écoulement turbulent dans un espace annulaire : Hanjalić et Launder (1972) en utilisant un modèle $k - \epsilon - \overline{u'v'}$, Kawamura et al. (1994), Satake et Kawamura (1993) par simulation des grandes échelles, et Chung et al. (2002) par simulation numérique direct.

Il existe plusieurs études qui traitent le transfert de chaleur turbulent dans un espace annulaire. Heikel et al. (1976) ont mesuré le coefficient d'échange thermique sur les parois dans un écoulement d'air. Kuzay et Scott (1977) ont analysé l'effet de la rotation de la paroi interne sur le coefficient d'échange et le profil moyen de température dans un écoulement d'air. Plusieurs simulations numériques du transfert de chaleur turbulent dans un espace annulaire chauffé uniquement à la paroi interne ont été réalisées : Wilson et Medwell (1968) ont utilisé le modèle van Driest de la viscosité turbulente. Un nombre de Prandtl turbulent constant $Pr_t = 1$ a été utilisé pour des nombres de Prandtl tels que $Pr < 1$, et une relation empirique pour $Pr < 1$. Malik et Pletcher (1981) ont comparé trois modèles de turbulence, et ont utilisé un nombre de Prandtl turbulent constant ($Pr_t = 0.9$). Kawamura et al. (1994) ont effectué des simulations des grandes échelles pour deux rapports de rayons. Les nombres de Nusselt prédits sont en bon accord avec les corrélations de Dall Donne et Meerwald (1973). Ces auteurs montrent une similarité entre les structures thermiques et les structures dynamiques de l'écoulement. Zarate et al. (2001) ont utilisé un modèle algébrique explicite du flux de chaleur développé par So et Sommer (1996) ; ils ont comparés leurs prédictions numériques avec les données expérimentales de Kang et al. (2001).

Les études concernant les espaces annulaires chauffés aux deux parois sont moins nombreuses, et rarissimes lorsque le chauffage est dissymétrique. Chung et al. (2003) ont étudié par simulations numériques directes, l'effet de courbure de la paroi intérieure sur le transfert de chaleur turbulent dans un espace annulaire. Le rapport des flux de chaleur imposé sur les parois est fixé à $q_i/q_e = 1$ et deux rapports de rayons sont considérés $r^* = 0.1$ et $r^* = 0.5$. Ces auteurs ont mis en évidence l'influence du rapport des rayons sur les grandeurs statistiques telles que le profils moyens de température, les flux de chaleur turbulents et les coefficients d'échange. Ils montrent que l'intensité de la turbulence est plus élevée du côté de la paroi externe, la différence est encore plus marquée lorsque le rapport de rayon diminue. Kays et Leung (1963) se sont intéressés au transfert de chaleur dans un écoulement turbulent pleinement développé entre deux cylindres uniformément chauffés. Ils ont développé des solutions asymptotiques pour une large gamme de rapport de rayons, nombre de Reynolds et nombre de Prandtl. Les solutions sont basées sur des profils de vitesse et de diffusivité empiriques. Ces auteurs décrivent également une méthode de superposition pour résoudre le problème du chauffage asymétrique ($q_i/q_e \neq 1$) et proposent des formules pour le calcul du nombre

de Nusselt. Ils concluent que le rapport des flux de chaleur q^* a une large influence sur les nombres de Nusselt : celui à la paroi interne peut être supérieur ou inférieur à celui de la paroi externe, selon la valeur du rapport des flux de chaleur imposé sur les parois. Zeng et al. (2007) ont analysé, en écoulement pleinement développé, en régimes laminaire et turbulent, le transfert de chaleur dans les espaces annulaires très étroits ($r^* \geq 0.6$ et $\delta \leq 2mm$). Les deux parois de l'espace annulaire sont différemment chauffées. Les auteurs montrent, qu'en régime laminaire, la diminution de l'espace annulaire entraîne une réduction du transfert de chaleur sur les deux parois. Cependant, en régime turbulent, les conclusions sont différentes. La diminution de l'espace (augmentation du rapport de rayons) entraîne une réduction du transfert de chaleur à la paroi interne et une augmentation du coefficient de transfert de chaleur à la paroi externe. En outre, l'augmentation ou la réduction du transfert thermo-convectif dépend des effets combinés du rapport des flux de chaleur et du nombre de Reynolds.

Chapitre 2

Analyse statistique de la turbulence

La turbulence est une propriété des écoulements de fluide et non du fluide lui-même. Une définition générale et précise de ce phénomène reste impossible et inexistante. Cependant tous les écoulements turbulents, en dépit d'une grande diversité, présentent des caractéristiques communes :

- le caractère aléatoire : l'irrégularité à la fois spatiale et temporelle d'un écoulement turbulent le rendent sensible aux perturbations qui ont tendance à s'amplifier du fait de l'importance des termes d'inertie,
- le caractère non linéaire (dû à la non-linéarité des termes de convection),
- le caractère tridimensionnel même si l'écoulement moyen est unidirectionnel,
- le caractère dissipatif : l'énergie cinétique est dissipée sous forme de chaleur, ce phénomène est dû à la présence de nombreuses structures de tailles différentes qui interagissent entre elles. La différence de taille entre les grandes et petites structures est régie par le nombre de Reynolds : plus celui-ci est grand plus cette différence est grande,
- le caractère diffusif : la turbulence favorise la diffusion des propriétés transportables telles que les espèces chimiques et la température.

Le comportement des écoulements turbulents peut être décrit à partir de théories basées sur les statistiques en un point. Les premières statistiques qui nous informent sur l'écoulement turbulent sont les différents moments liés à la variable aléatoire.

Dans ce chapitre, nous allons présenter un ensemble d'outils statistiques qui permettent d'analyser l'écoulement turbulent en considérant une variable aléatoire $a(x_i, t)$ (vitesse, température, pression ...) qui dépend du temps et de l'espace. Cette variable admet une valeur moyenne $A(x_i)$ qui est associée à une fluctuation $a'(x_i, t)$. Notre attention se portera particulièrement sur les systèmes dont les variables statistiques ne dépendent que de l'espace, ces systèmes sont dits statistiquement stationnaires.

2.1 Moyenne ou moment d'ordre 1

2.1.1 Moyenne temporelle

Le point de départ de toute analyse statistique d'une variable fluctuante est de bien comprendre et définir la notion *Moyenne*.

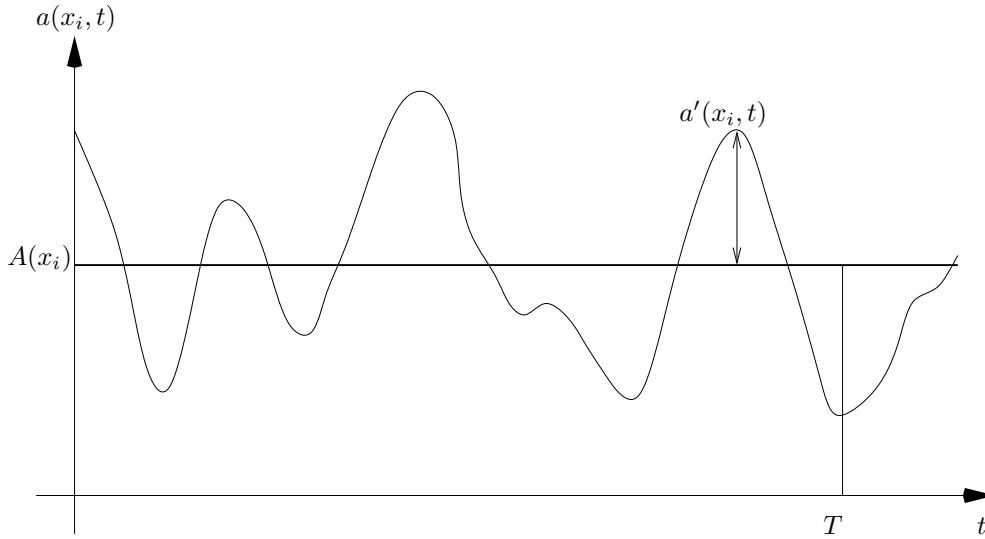


FIG. 2.1 – Evolution temporelle de la variable $a(x_i, t)$.

La figure 2.1 décrit l'évolution au cours du temps de la variable $a(x_i, t)$ à une position x_i . La moyenne temporelle de la variable $a(x_i, t)$ est définie par la relation suivante :

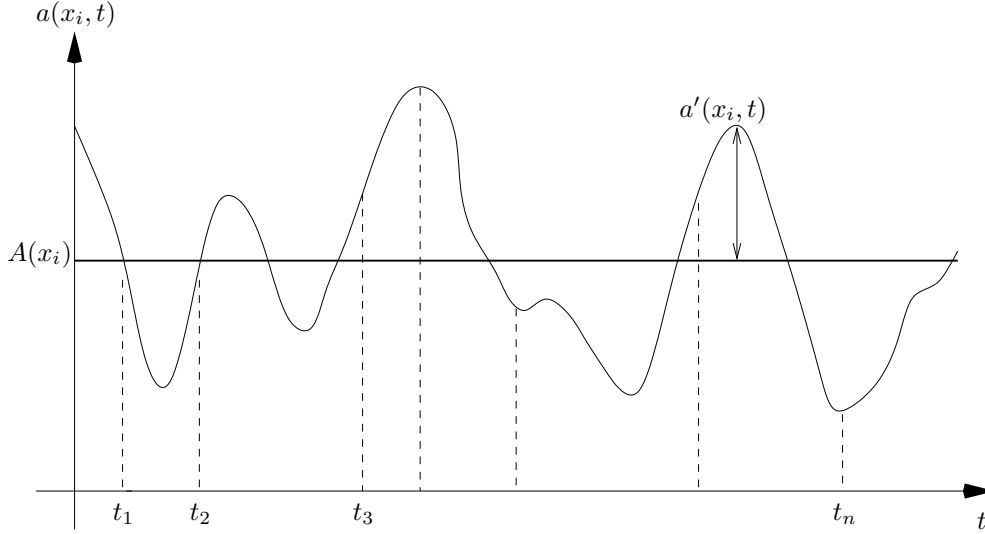
$$\overline{a(x_i, t)} = A(x_i) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_i, t) dt \quad (2.1)$$

Cette définition signifie qu'une variable fluctuante à une position fixe est intégrée sur un intervalle de temps T . La variable $a(x_i, t)$ est dite statistiquement stationnaire lorsque sa moyenne temporelle converge vers une valeur constante. Cette façon de moyennner est la plus couramment utilisée en turbulence théorique et expérimentale. En pratique, on obtient la stationnarité de l'écoulement en augmentant progressivement T jusqu'à ce que $A(x_i)$ devienne constante.

2.1.2 Moyenne d'ensemble

La moyenne d'ensemble (ou moyenne statistique) est une variante de la moyenne temporelle. Si pour une raison ou une autre, il est impossible d'avoir une évolution temporelle continue du système stationnaire, on peut définir une moyenne sur un ensemble d'échantillons notés $a(x, t_n)$ ($n = 1, 2, \dots, N$.) de la variable a . La moyenne d'ensemble est alors définie telle que :

$$\langle a(x_i, t) \rangle = A(x_i) = \frac{a(x_i, t_1) + a(x_i, t_2) + \cdots + a(x_i, t_n)}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N a(x_i, t_n) \quad (2.2)$$


 FIG. 2.2 – Echantillonnage de la variable $a(x_i, t)$.

Le nombre d'échantillons nécessaires pour considérer le système comme stationnaire est obtenu en augmentant progressivement ce nombre jusqu'à ce que la valeur moyenne obtenue $A(x_i)$ soit constante.

Remarque

Si la turbulence est stationnaire et que le temps d'observation est suffisamment long : la moyenne temporelle converge en moyenne quadratique lorsque $T \rightarrow \infty$ vers une limite non aléatoire égale à la moyenne d'ensemble $\langle a(x_i, t) \rangle$, à la seule condition que :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(x_i, t) a(x_i, t + \tau) d\tau = 0$$

Dans ce cas, le processus turbulent est dit *ergodique* et on a :

$$\overline{a(x_i, t)} = \langle a(x_i, t) \rangle \quad (2.3)$$

2.2 Moments statistiques d'ordre plus élevé

2.2.1 Décomposition de Reynolds

Lorsqu'on étudie le champ dynamique (ou thermique) d'un écoulement de fluide turbulent, en chaque point de cet écoulement, chaque variable est caractérisée par un signal aléatoire dans

le temps. La meilleure alternative pour analyser toutes ces données est l'étude statistique. Il s'agit alors de décomposer la variable aléatoire (le signal) en une valeur moyenne et une fluctuation autour de cette moyenne :

$$a(x_i, t) = \overline{a(x_i, t)} + a'(x_i, t) \quad (2.4)$$

La fluctuation est considérée comme une nouvelle variable dont la valeur moyenne est nulle :

$$\overline{a'(x_i, t)} = 0 \quad (2.5)$$

Pour un écoulement de fluide incompressible, toute quantité est décomposée en une valeur moyenne et une fluctuation turbulente, sauf la masse volumique pour laquelle on suppose que les fluctuations turbulentes sont négligeables.

Propriétés de l'opérateur moyenne

Considérons un processus turbulent représenté par un couple de variable aléatoires indépendantes $[a(x_i, t), b(x_i, t)]$. Appliquons la décomposition de Reynolds à ce couple de variables :

$$a(x_i, t) = A(x_i) + a'(x_i, t) \quad (2.6)$$

$$b(x_i, t) = B(x_i) + b'(x_i, t) \quad (2.7)$$

L'opérateur moyenne admet les propriétés suivantes :

$$\overline{a'(x_i, t)} = 0 \quad (2.8)$$

$$\overline{\overline{a(x_i, t)}} = A(x_i) \quad (2.9)$$

$$\overline{\overline{a(x_i, t)b(x_i, t)}} = A(x_i)B(x_i) \quad (2.10)$$

$$\overline{a(x_i, t) + b(x_i, t)} = A(x_i) + B(x_i) \quad (2.11)$$

$$\overline{a(x_i, t)b(x_i, t)} = A(x_i)B(x_i) + \overline{a'(x_i, t)b'(x_i, t)} \quad (2.12)$$

$$\overline{\alpha a(x_i, t)} = \alpha A(x_i) \quad (2.13)$$

$$\overline{\frac{\partial a}{\partial x_i}(x_i, t)} = \frac{\partial A(x_i)}{\partial x_i} \quad (2.14)$$

$$\overline{\int a(x_i, t)} = \int A(x_i) \quad (2.15)$$

où α est une constante.

2.2.2 Variance

La moyenne ou le moment d'ordre un ne nous donne pas toujours des indications suffisantes sur l'écoulement turbulent. Voilà pourquoi on calcule les moments d'ordres plus élevés. Le moment d'ordre deux appelé *variance* (ou écart-type) de la variable aléatoire $a(x_i, t)$ est défini par :

$$\sigma^2 = \overline{a'^2(x_i)} \quad (2.16)$$

L'écart type $\overline{a'^2(x_i)}$ renseigne sur la distribution des valeurs de la variable autour de sa moyenne. On l'appelle souvent *RMS* (Root Mean Square). Les RMS renseignent sur l'intensité de la turbulence.

2.2.3 Coefficient de dissymétrie

Le coefficient de dissymétrie (appelé *Skewness* en anglais), ou moment d'ordre trois est défini tel que :

$$S(a') = \frac{\overline{a'^3}}{[\overline{a'^2(x_i)}]^{3/2}} = \frac{\overline{a'^3}}{\sigma^3} \quad (2.17)$$

Ce coefficient nous renseigne sur l'amplitude relative des fluctuations positives et négatives par rapport à la valeur moyenne. Si $S(a')$ est positif alors les fluctuations positives sont prépondérantes, à l'inverse, si $S(a')$ est négatif ce sont les fluctuations négatives qui prédominent.

2.2.4 Coefficient d'aplatissement

Le coefficient d'aplatissement (appelé *Flatness* ou bien *Kurtosis* en anglais), ou moment d'ordre quatre est défini tel que :

$$F(a') = \frac{\overline{a'^4}}{[\overline{a'^2(x_i)}]^2} = \frac{\overline{a'^4}}{\sigma^4} \quad (2.18)$$

Ce coefficient permet de mesurer les pics ou l'aplatissement relatif de la distribution des fluctuations par rapport à une distribution dite *normale*. Nous verrons ce qu'est une distribution normale dans les paragraphes suivants.

2.2.5 Coefficient de corrélation

En turbulence, on s'intéresse souvent à la corrélation qui peut exister entre les fluctuations de deux variables. Le coefficient de corrélation entre deux variables $a'(x_i, t)$ et $b'(x_i, t)$ est défini par la relation suivante :

$$R_{a'b'}(x_i) = \frac{\overline{a'b'(x_i)}}{[\overline{a'^2(x_i)}\overline{b'^2(x_i)}]^{1/2}} \quad (2.19)$$

- Le coefficient de corrélation est toujours borné entre -1 et $+1$
- Si $R_{a'b'} = 0$, il n'existe aucun lien statistique entre les deux variables pour des lois normales.
- Si $R_{a'b'} = +1$, les deux variables sont parfaitement corrélées.
- Si $R_{a'b'} = -1$, les deux variables sont parfaitement anticorrélées.

Les deux dernières propriétés traduisent l'existence d'une relation linéaire entre les deux variables. En effet, si on prend $a' = \alpha b'$, où α est une constante arbitraire alors $R_{a'b'} = 1$ si α est positif et $R_{a'b'} = -1$ si α est négatif.

2.3 Fonctions de densité de probabilité

2.3.1 Loi normale

on appelle fonction de densité de probabilité (*pdf*) d'une variable aléatoire $a(x_i, t)$ une fonction $f(a, x_i)$:

- positive ou nulle sur \mathfrak{R}
- intégrable sur \mathfrak{R}
- vérifiant $\int_{\mathfrak{R}} f(a, x_i) da = 1$

La probabilité d'avoir des valeurs de $a(x_i, t)$ situées dans l'intervalle $[a_{min}, a_{max}]$ se calcule par la relation suivante :

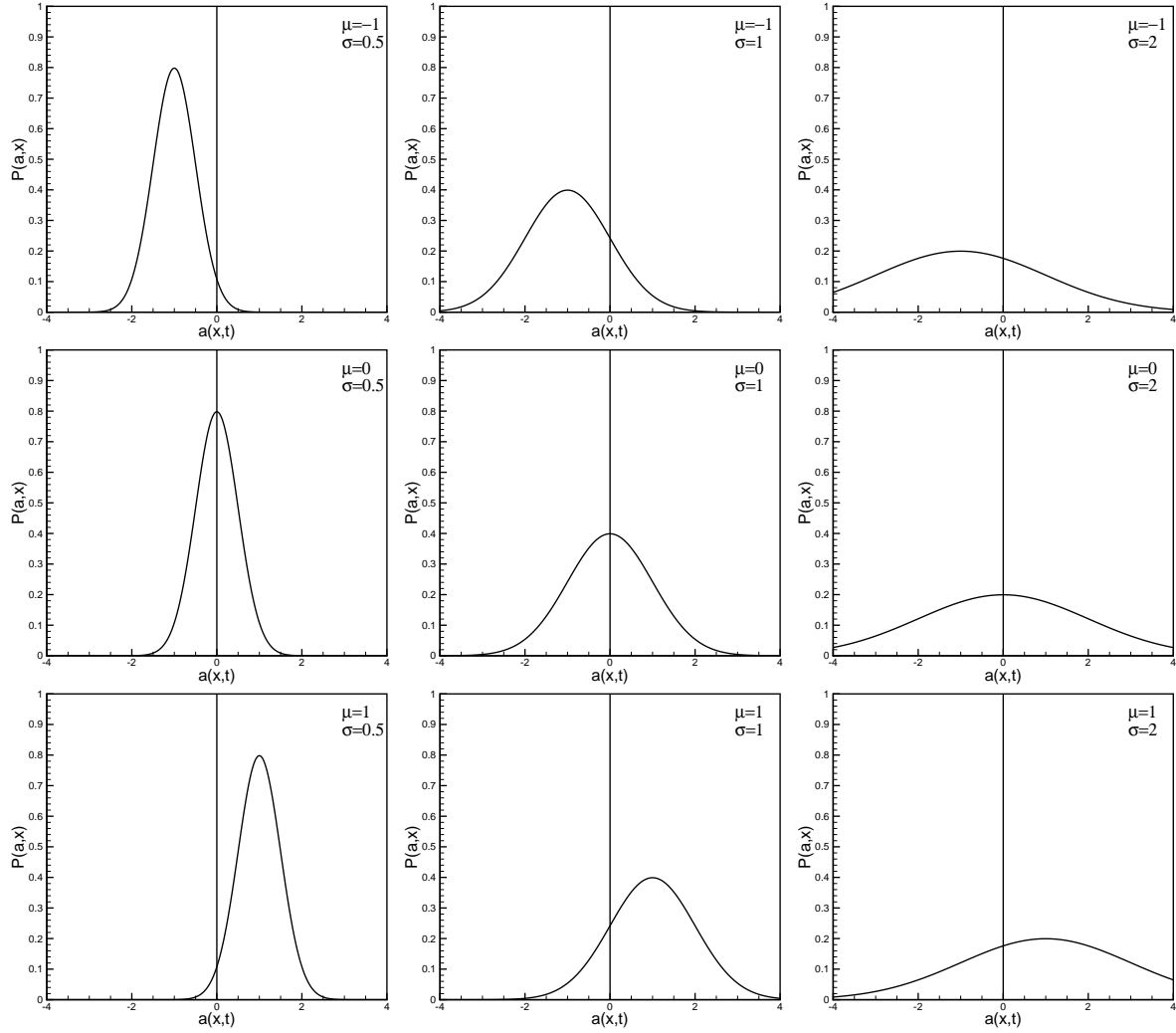
$$P(a_{min} \leq a < a_{max}) = \int_{a_{min}}^{a_{max}} f(a, x_i) da \quad (2.20)$$

La loi normale est une des principales distributions de probabilité en statistique, sa fonction de densité de probabilité est donnée par la relation suivante :

$$f(a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2}\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (2.21)$$

où $\sigma^2 = \overline{a^2}$ est la variance (et σ l'écart type) de la variable a dont la valeur moyenne $\mu = A(x_i)$ est appelée aussi *espérance*. Cette pdf est symétrique par rapport à sa valeur moyenne, son skewness $S = 0$ alors que son flatness $F = 3$.

La figure 2.3 présente diverses distributions de la loi normale en fonction des paramètres σ et μ . Sur chaque ligne, μ prend la même valeur : respectivement $(-1, 0, 1)$. Sur chaque colonne c'est σ qui prend la même valeur : respectivement $(0.5, 1, 2)$. Les deux paramètres sont complètement indépendants ; μ est le paramètre de translation, il décale à gauche ou à droite la distribution ; σ est le paramètre d'échelle, la densité est plus ou moins serrée autour de l'espérance (la moyenne) de sa valeur.

FIG. 2.3 – Distributions normales pour diverses valeurs de μ et σ .

2.3.2 Loi normale à deux variables

Après avoir défini la loi normale à une variable, on peut définir une distribution normale à deux variables. La fonction de densité de probabilité jointe ou *joint density function* est très utile pour étudier la corrélation pouvant exister entre deux variables aléatoires. Dans le cas de deux distributions indépendantes, la fonction de densité de probabilité de deux variables $a(x_i, t)$ et $b(x_i, t)$ est obtenue en effectuant le produit de leurs fonctions densités de probabilités respectives soit :

$$f(a, b) = f(a) \times f(b) = \frac{1}{\sigma_a \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2} \left(\frac{a - \mu_a}{\sigma_a} \right)^2} \times \frac{1}{\sigma_b \sqrt{2\pi}} \exp^{-\frac{1}{2} \left(\frac{b - \mu_b}{\sigma_b} \right)^2} \quad (2.22)$$

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi \sigma_a \sigma_b} \exp^{-\frac{1}{2} \left[\left(\frac{a - \mu_a}{\sigma_a} \right)^2 + \left(\frac{b - \mu_b}{\sigma_b} \right)^2 \right]} \quad (2.23)$$

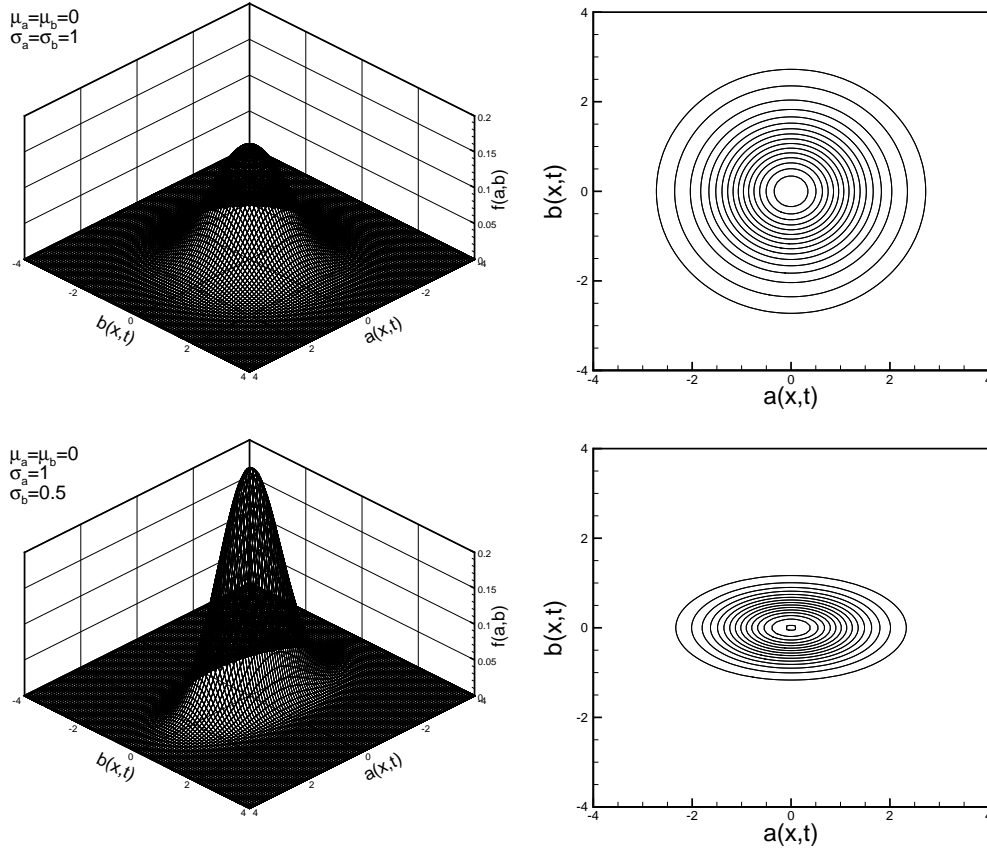


FIG. 2.4 – Loi normale à deux variables.

La probabilité pour que le point $M(a, b)$ soit localisé dans le domaine $S = \{[a_{min}, a_{max}], [b_{min}, b_{max}]\}$ est donnée par la relation suivante :

$$P(M \in S) = \int_{a_{min}}^{a_{max}} \int_{b_{min}}^{b_{max}} f(a, b, x_i) da db \quad (2.24)$$

En traçant les courbe d'isodensité $f(a, b) = Cste$, on définit les *ellipses de dispersion* telles que :

$$\left(\frac{a - \mu_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b - \mu_b}{\sigma_b}\right)^2 = k^2 \quad (2.25)$$

Ces ellipses d'ordre k représentent le rapport des demi-axes aux écarts-types correspondants. La probabilité d'appartenir à l'ellipse de dispersion d'ordre k est définie par la relation :

$$P(M \in (E_k)) = 1 - \exp^{-\frac{k^2}{2}} \quad (2.26)$$

La probabilité d'appartenir à l'ellipse unitaire $k = 1$ (dont les demi-axes sont égaux aux écarts-types) est égale à 39%.

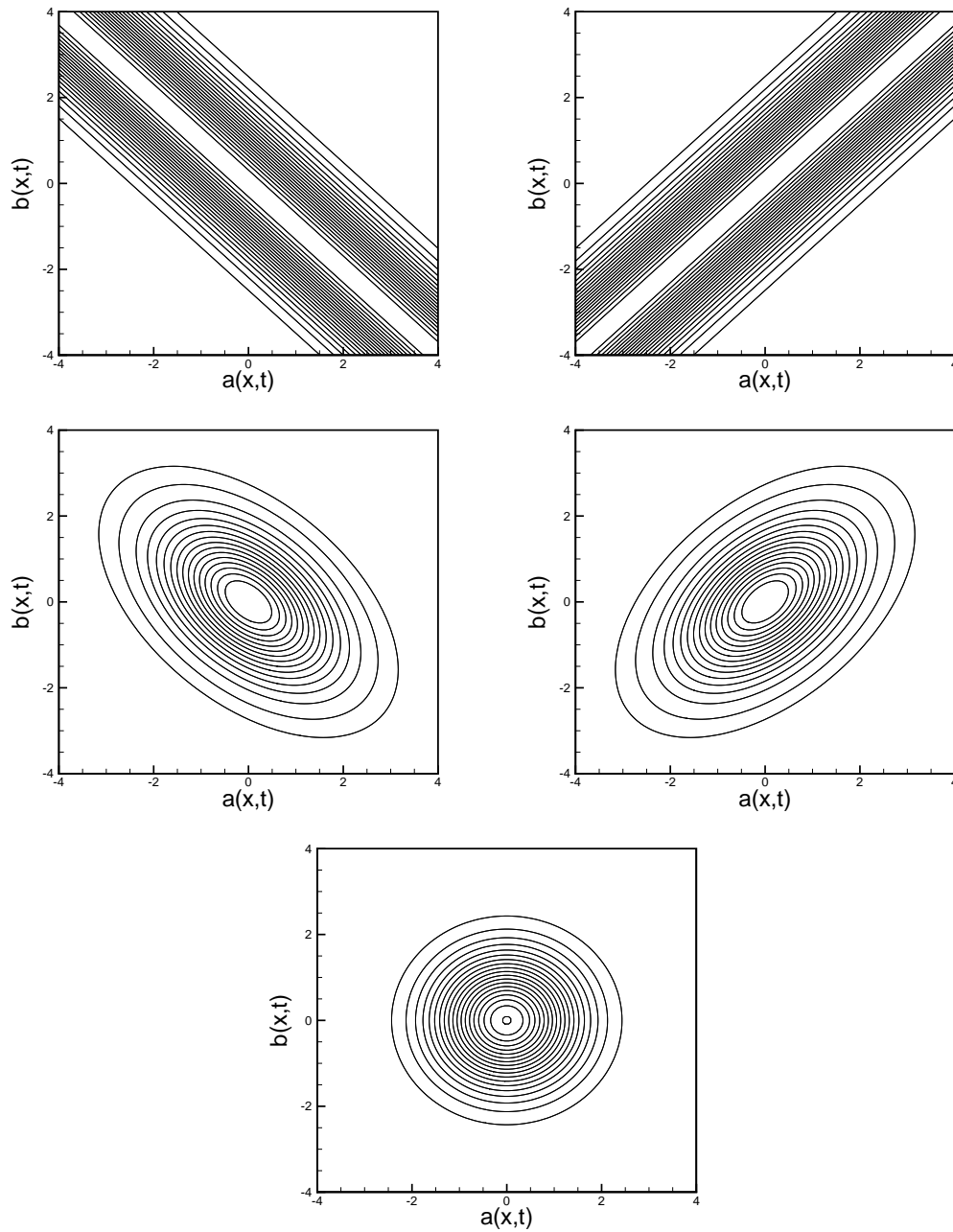


FIG. 2.5 – Ellipses de dispersion pour plusieurs coefficients de corrélation.

Dans le cas où les deux variables sont complètement décorréelées, les ellipses de dispersions sont symétriques par rapport à un des deux axe. Dès qu'il y a corrélation, les ellipses s'inclinent d'un angle α . La fonction de densité de probabilité jointes de deux variables corrélées s'écrit alors en fonction du coefficient de corrélation R_{ab} défini dans le paragraphe 2.2.5 :

$$f(a, b) = \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b\sqrt{1-R_{ab}^2}} \exp^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2 - 2R_{ab}\frac{(a-\mu_a)(b-\mu_b)}{\sigma_a\sigma_b}\right]} \quad (2.27)$$

On rappelle que :

$$R_{ab} = \frac{Cov(a, b)}{\sigma_a\sigma_b} = \frac{\overline{a'b'}}{[\overline{a'^2}(x_i)\overline{b'^2}(x_i)]^{1/2}} \quad (2.28)$$

où $Cov(a, b) = \overline{a'b'}$ est la *covariance*

Les ellipses de dispersions sont données par la relation suivante :

$$\left(\frac{a-\mu_a}{\sigma_a}\right)^2 + \left(\frac{b-\mu_b}{\sigma_b}\right)^2 - 2R_{ab}\frac{(a-\mu_a)(b-\mu_b)}{\sigma_a\sigma_b} = k^2 \quad (2.29)$$

La figure 2.5 montre les ellipses de dispersion de 5 loi binormales. Dans tous les cas, $\sigma_a = \sigma_b = 1$ et $\mu_a = \mu_b = 0$. Seul le coefficient de corrélation change prenant successivement les valeurs $-1, +1, -0.5, +0.5, 0$. Lorsque $R_{ab} = -1, +1$, les ellipses deviennent des droites parallèles à la droite $a = b$. Pour $R_{ab} = 0$, on retrouve bien une répartition de deux variables indépendantes, c'est à dire des cercles concentriques.

2.4 Corrélations spatio-temporelles

Nous nous sommes intéressés jusque là à l'analyse statistique d'une variable aléatoire $a(x_i, t)$. Si on considère que cette variable est une vitesse, une pression ou une température en une position fixe, il est évident que les définitions précédentes ne fournissent aucune information sur les échelles caractéristiques (échelles de temps et de longueur).

La corrélation spatio-temporelle entre deux variables aléatoires (par exemple deux composantes de vitesse) est utilisée pour suivre l'évolution de la turbulence dans l'espace et dans le temps. Elle consiste à comparer statistiquement les grandeurs mesurées en deux points différents, mais aussi en des instants différents. La corrélation spatio-temporelle de deux composantes fluctuantes $a'(x_i, t)$ et $b'(x_i, t)$ mesurées en deux points séparés d'une distance l et décalées par un temps τ est défini par la relation suivante :

$$R_{a'b'}(l, \tau) = \frac{\overline{a'(x_i, t)b'(x_i + l, t + \tau)}}{[\overline{a'^2}(x_i)\overline{b'^2}(x_i)]^{1/2}} \quad (2.30)$$

Si la turbulence est stationnaire, la corrélation spatio-temporelle ne dépend que de τ . Si la turbulence est homogène, cette corrélation ne dépend que de la séparation l .

A partir de la relation 2.30, on définit une auto-corrélation temporelle entre deux variables fluctuantes $a'(x_i, t)$ et $a'(x_i, t + \tau)$ d'un système statistiquement stationnaire par :

$$R_{a'}(x_i, \tau) = \frac{\overline{a'(x_i, t)a'(x_i, t + \tau)}}{a'^2(x_i)} \quad (2.31)$$

De la même façon, on définit l'auto-corrélation spatiale de deux variables fluctuantes $a'(x_i, t)$ et $a'(x_i + l, t)$ par :

$$R_{a'}(l, t) = \frac{\overline{a'(x_i, t)a'(x_i + l, t)}}{a'^2(x_i)} \quad (2.32)$$

2.5 Turbulence proche paroi

Dans les écoulements turbulents pleinement développés confinés, la turbulence est directement influencée par la présence des parois solides qui agissent sur le fluide par l'intermédiaire des contraintes visqueuses. Dans la région proche paroi, on définit une première zone, la sous-couche visqueuse, où les effets visqueux sont prépondérants. Afin d'analyser la turbulence proche paroi, on est amené à définir des échelles appropriées. Dans l'hypothèse d'incompressibilité, les échelles de vitesse (vitesse de frottement) et de longueur sont respectivement définies par :

$$u_\tau(\theta, z) = \sqrt{\left| \nu \frac{\partial v_z}{\partial r}(\theta, z) \right|_{r=0}} \quad (2.33)$$

$$l_\tau(\theta, z) = \frac{\nu}{u_\tau(\theta, z)} \quad (2.34)$$

La distance à la paroi mesurée à partir de l'échelle l_τ est alors exprimée en unités de paroi :

$$y^+(\theta, z) = \frac{r}{l_\tau(\theta, z)} \quad (2.35)$$

La figure 2.6 montre le découpage de l'écoulement à partir de la paroi jusqu'au centre de l'écoulement. La sous-couche visqueuse s'étend jusqu'à une distance $y^+ = 5$. Dans cette zone, les contraintes visqueuses sont prépondérantes et les effets convectifs très négligeables. La contrainte de cisaillement est presque uniquement due au gradient normal de la vitesse longitudinale, si bien qu'on a :

$$v_z^+ = \frac{v_z}{u_\tau} = y^+ \quad (2.36)$$

La zone tampon s'étend entre $y^+ = 5$ et $y^+ = 30$: c'est dans cette zone que l'on trouve le maximum de production d'énergie turbulente. A partir de $y^+ = 30$ s'étend la zone logarithmique où le profil de vitesse longitudinale suit une loi de la forme :

$$v_z^+ = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C \quad (2.37)$$

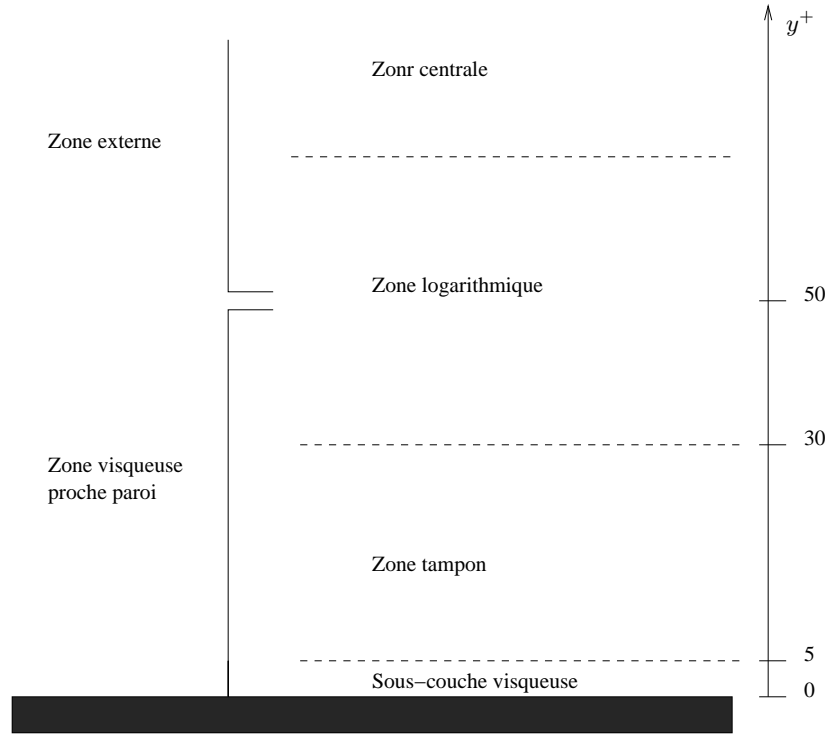


FIG. 2.6 – Les différentes zones de la turbulence proche paroi.

Au delà de $y^+ = 50$, on passe dans la zone externe dans laquelle les effets de paroi deviennent négligeables : la turbulence y est alors homogène.

Les profils moyens de couches limites thermiques présentent la même topologie que ceux de la couche limite dynamique. Le découpage précédent reste donc valable, la seule différence est l'épaisseur de chaque zone qui dépend de la valeur du nombre de Prandtl. Afin d'adimensionner les champs moyens et les écarts-types des fluctuations de température, on définit la température de frottement T_τ qui fait intervenir le flux de chaleur à la paroi ainsi que la vitesse de frottement u_τ :

$$T_\tau = \frac{\alpha}{u_\tau} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_{r=0} \quad (2.38)$$

La température de frottement permet de donner le champ de température sans dimension sous la forme :

$$\Theta^+ = \frac{T_p - T}{T_\tau} \quad (2.39)$$

De la même façon que la couche limite dynamique, la couche limite thermique présente donc trois zones caractéristiques en proche paroi :

-une sous-couche conductive où les effets de conduction moléculaire sont prépondérants par rapport à la convection. Cette zone s'étend jusqu'à une distance $y^+ \simeq 5Pr$, et le profil moyen de température s'écrit :

$$\Theta^+ = Pr \cdot y^+ \quad (2.40)$$

- une zone tampon
- une zone logarithmique où le profil de température suit une loi :

$$\Theta^+ = \frac{1}{\kappa_{\Theta}} \ln(y^+) + \beta_{\Theta} \quad (2.41)$$

Cette zone s'étend à partir de :

- $y^+ \simeq 2/Pr$ pour $Pr \ll 1$
- $y^+ \simeq 30$ pour $Pr \sim 1$
- $y^+ \simeq 12/Pr^{1/3}$ pour $Pr \gg 1$

Chapitre 3

Formulation mathématique et méthodes numériques

3.1 Physique et modélisation des écoulements

3.1.1 Transport de la quantité de mouvement

Le mouvement turbulent du fluide considéré (fig 5.5) est régi par les équations de Navier-Stokes. Nous allons, dans un premier temps, écrire ces équations en coordonnées cylindriques puis nous expliciterons les décompositions de Reynolds permettant d'obtenir les équations de l'écoulement moyen. Dans le cadre de cette étude, le fluide peut être soumis à des forces centrifuges induites par la rotation des parois. Le mouvement rotatif s'exprime soit par rapport à un repère inertiel (repère fixe) soit par rapport à un repère rotatif (repère relatif). La rotation est introduite grâce aux conditions aux limites dans le premier cas, et par addition des forces centrifuges et des effets de Coriolis dans le second cas. On note respectivement les directions azimutale, radiale et axiale par (r, θ, z) . Les composantes de la vitesses sont alors notées (v_r, v_θ, v_z) . La rotation se fait autour de l'axe et le vecteur de rotation s'écrit $\Omega = \Omega e_z$. Le fluide est considéré newtonien incompressible et les propriétés thermodynamiques constantes.

– Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

– Equation de quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} = \\ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left[\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] - 2\Omega v_\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} = \\ -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \nu \left[\Delta v_\theta - \frac{v_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] + 2\Omega v_r \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} + \nu \Delta v_z \quad (3.4)$$

où Δ représente le laplacien, il s'écrit en coordonnées cylindriques :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Dans un repère fixe, le terme de Coriolis ($2\Omega \times u$) est nul, la rotation est introduite dans les conditions aux limites.

Configuration de l'écoulement et adimensionnement

En rapportant chaque quantité à une valeur de référence, les équations précédentes peuvent être réécrites sous forme adimensionnée. Dans cette étude, le fluide est newtonien et incompressible, la masse volumique (ρ) et la viscosité dynamique (μ) sont constantes. Deux géométries sont explorées. La première est une conduite cylindrique de longueur L_z et de rayon R ; la seconde est un espace annulaire, de longueur L_z également, les rayons intérieur et extérieur sont respectivement notée r_i et r_e et le rapport de rayons $r^* = r_i/r_e$.

Le choix de la longueur de référence l est directement lié à la géométrie étudiée, dans le cas de la conduite cylindrique, c'est le rayon R qui est choisi. Dans le cas de l'espace annulaire, la demi-distance entre les deux parois $\delta = (r_e - r_i)/2$ est considérée. La vitesse maximale du profil laminaire de Poiseuille U_p est choisie comme vitesse de référence, elle permet de construire les échelles de temps $\hat{t} = l/U_p$ et de pression $\hat{p} = \rho U_p^2$.

La forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes fait apparaître des nombres sans dimension qui permettent de caractériser l'écoulement :

-Le nombre de Reynolds Re , caractérise la nature et le régime de l'écoulement. Il représente le rapport entre forces d'inertie et forces visqueuses ou le rapport (qualitatif) du transfert par convection par le transfert par diffusion de la quantité de mouvement. Dans cette étude, le nombre de Reynolds est construit à partir de la vitesse de référence U_p et de la longueur l :

$$Re = \frac{U_p l}{\nu} \quad (3.5)$$

-Le nombre de Rossby est un nombre sans dimension très utilisé en dynamique des fluides géophysiques. Il représente le rapport entre les forces d'inerties et les forces dues à la rotation qui caractérisent le mouvement d'un fluide dans un repère tournant.

$$Ro = \frac{U_p}{2\Omega l} \quad (3.6)$$

Le nombre de Rossby est lié au taux de rotation défini comme :

$$N = \frac{1}{Ro} \quad (3.7)$$

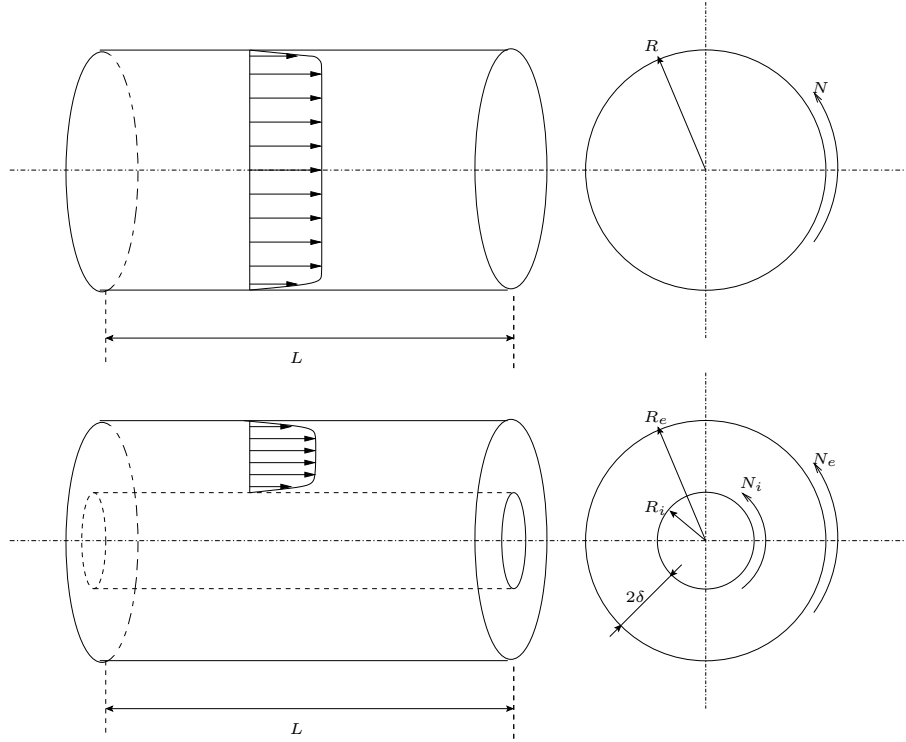


FIG. 3.1 – Configurations des écoulements.

Afin de contourner la singularité introduite par l'axe dans le cas de la conduite cylindrique, on introduit des variables primitives $q_r = r.v_r$, $q_\theta = v_\theta$ et $q_z = v_z$. Cette méthode est issue des travaux de Verzicco et Orlandi (1996), ce changement de variables permet en effet de garantir la vérification des lois de conservation. La précision du calcul est ajustée de façon à ce que l'énergie totale du système se conserve au cours du temps. Cette façon de traiter la singularité à l'axe peut introduire du bruit numérique dû aux erreurs d'arrondis.

En utilisant les dimensions caractéristiques choisies précédemment ainsi que les variables primitives on réécrit le système d'équations à résoudre :

– Equation de continuité :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(q_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(q_z) \quad (3.8)$$

– Equation de quantité de mouvement :

$$\frac{Dq_r}{Dt} = -r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (3.9)$$

$$\frac{Dq_z}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial q_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_z}{\partial z^2} \right] \quad (3.10)$$

$$\frac{Dq_\theta}{Dt} = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_\theta}{r} \right) - \frac{q_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 q_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 q_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \right] \quad (3.11)$$

Les dérivées totales ont les expressions :

$$\frac{Dq_r}{Dt} = \frac{\partial q_r}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_r q_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{q_r q_\theta}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (q_r q_z) - q_\theta q_\theta \quad (3.12)$$

$$\frac{Dq_z}{Dt} = \frac{\partial q_z}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q_r q_z) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta q_z) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z q_z) \quad (3.13)$$

$$\frac{Dq_\theta}{Dt} = \frac{\partial q_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r q_r q_\theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (q_\theta q_z) \quad (3.14)$$

Forçage du champ dynamique

La perte de charge engendrée par les frottements aux parois doit être compensée par un terme de forçage qui correspond à un gradient longitudinal de pression moyenne. La pression p (dans le sens de l'écoulement) est alors décomposée en une partie linéaire P_l et une composante périodique P telles que :

$$p = P_l + P \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial z} = f_z + \frac{\partial P}{\partial z} \quad (3.15)$$

Le gradient de pression f_z , contribue à maintenir un débit constant dans la conduite en compensant les pertes par viscosité. Ce terme apparait en raison de l'application des conditions aux limites périodiques sur le champ de pression. Il est construit à partir de la vitesse de frottement et de la vitesse débitante (Deschamps (1988)), tel que :

$$\frac{\partial U_b}{\partial t} = -(f_z + u_\tau^2) \quad (3.16)$$

L'état quasi-stationnaire est atteint en imposant pour chaque simulation le même débit Q , ce débit est maintenu constant au cours du temps grâce au terme de forçage $f_z(t)$. A chaque itération temporelle, $f_z(t)$ est recalculé à partir de la relation 3.16. Cette méthode nous permet d'une part d'atteindre assez rapidement un état de turbulence développée en accélérant la fin de la transition et, d'autre part, d'avoir un débit constant dans chaque section perpendiculaire à l'écoulement.

Condition initiale

L'initialisation du champ de vitesse est celle proposée par Orlandi et Fatica (1997). Elle consiste à superposer un profil de Poiseuille (solution des équations de Navier-Stokes) et une perturbation arbitraire à divergence nulle :

$$\vec{v}(\vec{x}, t = 0) = \vec{U}_p + \Re \left[\epsilon_r \vec{u}_r(r) e^{i\alpha z} + \epsilon_\theta \vec{u}_\theta(r) e^{i(\alpha z + \beta \theta)} \right] \quad (3.17)$$

La perturbation doit vérifier les conditions d'adhérence et de périodicité imposées sur la vitesse. Sa moyenne doit être nulle pour que le débit ne soit pas modifié. Cette condition est réalisée pour la perturbation choisie en prenant des nombres d'onde α et β respectivement égaux à l'inverse de la taille du domaine dans les directions périodiques (z) et (θ).

$$\alpha = \frac{1}{L_z} \quad (3.18)$$

$$\beta = \frac{1}{L_\theta} \quad (3.19)$$

Comme seul le cas du scalaire passif est abordé dans cette étude, il y a un découplage total entre le champ dynamique et le champ thermique. Le champ thermique est initialisé une fois le champ de vitesse résolu (écoulement turbulent pleinement développé). L'initialisation choisie est celle proposée par Kasagi (1992) :

$$\Theta^+(\vec{x}, t = 0) = Pr.v_z^+(\vec{x}, t = t_0) \quad (3.20)$$

Conditions aux limites

Selon l'hypothèse de non glissement le fluide est supposé adhérer aux parois. Celles-ci étant imperméables et indéformables, les composantes de la vitesse du fluide s'annulent à la paroi et on a :

– Espace annulaire :

• A la paroi interne :

$$r = 2r^*/(1 - r^*) \quad \longrightarrow \quad q_z = q_r = 0, \quad q_\theta = N_i/2$$

• A la paroi externe :

$$r = 2/(1 - r^*) \quad \longrightarrow \quad q_z = q_r = 0, \quad q_\theta = N_e/2$$

– Cylindre :

- Sur l'axe :

$$r = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial q_\theta}{\partial r} = \frac{\partial q_z}{\partial r} = 0, \quad q_r = 0$$

- A la paroi :

$$r = 1 \quad \longrightarrow \quad q_z = q_r = 0, \quad q_\theta = N/2$$

où N est le taux de rotation défini par : $N = 2\Omega R/U_p = 2v_\theta/U_p$

NB : Le maillage étant décalé, q_θ et q_z ne sont jamais calculées en $r = 0$ (cf. paragraphe 3.2).

Pour simuler la taille infinie du domaine (dans le sens de l'écoulement), des conditions de périodicité sont utilisées dans les directions axiale et azimutale. Ces conditions s'expriment par :

$$\begin{aligned} q_i(\theta, r, z) &= q_i(\theta, r, z + L_z) \\ q_i(\theta, r, z) &= q_i(\theta + 2\pi, r, z) \end{aligned}$$

3.1.2 Transport du scalaire passif

Dans le cadre de cette étude, il y a un découplage totale entre la dynamique de l'écoulement et sa thermique, on parle alors de scalaire passif. En coordonnées cylindriques, l'équation de transport pour le scalaire passif s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] \quad (3.21)$$

où α est la diffusivité thermique du fluide.

Les conditions aux limites pour le champ thermique sont du type flux de chaleur imposé aux parois. Les flux de chaleur sur les parois interne (q_i) et externe (q_e) peuvent être identiques ou différents dans le cas de l'espace annulaire, on notera leur rapport $q^* = q_i/q_e$. La condition de flux idéal impose que la température de paroi moyennée dans la direction azimutale (θ) augmente linéairement dans le sens de l'écoulement (z).

Nous allons expliciter dans un premier temps la méthode pour implémenter ce type de condition dans un espace annulaire, le cas de la conduite cylindrique pouvant être facilement déduit en faisant tendre le rapport des rayons vers 0.

On introduit alors une nouvelle variable Θ qui représente une différence de température locale et qui s'écrit :

$$\Theta = \frac{\langle T_b(z) \rangle_\theta - T(\theta, r, z, t)}{T_r} \quad (3.22)$$

où $\langle T_b \rangle_\theta$ est la température débitante définie comme :

$$T_b = \frac{2}{U_b(r_e^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_e} u(r)T(r)rdr$$

Afin de tenir compte de l'effet du rapport des flux de chaleur, la température de référence T_r est définie telle que $T_r = q_r \delta / k$, où q_r est une fonction des flux imposés aux parois et du rapport de rayons :

$$q_r = q_e + r^* q_i \quad (3.23)$$

En utilisant cette nouvelle variable, l'équation du scalaire passif s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q_r \Theta) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta \Theta) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z \Theta) - q_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\langle T_b \rangle_\theta}{T_r} \right) = \\ \frac{1}{Re.Pr} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

La condition de flux de chaleur idéal signifie que le flux de chaleur est uniforme le long de la paroi et constant au cours du temps (Piller (2005)). En écoulement dynamiquement et thermiquement établi, cela implique que la température moyennée dans le temps varie linéairement dans la direction de l'écoulement :

$$\frac{\partial \langle T \rangle_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \langle T_b \rangle_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \langle T_{p_e} \rangle_\theta}{\partial z} = \frac{\partial \langle T_{p_i} \rangle_\theta}{\partial z} = Cste \quad (3.25)$$

où $\langle T_{p_i} \rangle$ et $\langle T_{p_e} \rangle$ sont respectivement les températures moyennes des parois interne et externe.

Un bilan d'énergie sur un anneau élémentaire de longueur dz (figure 3.2) exprime que l'écart entre les flux d'enthalpie sortant et entrant est égal à l'apport de chaleur sur la périphérie du volume élémentaire, soit :

$$Q(z + dz) - Q(z) = Q_{p_i} + Q_{p_e} \quad (3.26)$$

soit encore :

$$\dot{m} C_p T_b(z + dz) - \dot{m} C_p T_b(z) = q_i 2\pi r_i dz + q_e 2\pi r_e dz \quad (3.27)$$

d'où :

$$\frac{d \langle T_b \rangle}{dz} = \frac{2\pi (r_i q_i + r_e q_e)}{\dot{m} C_p} = cste \quad (3.28)$$

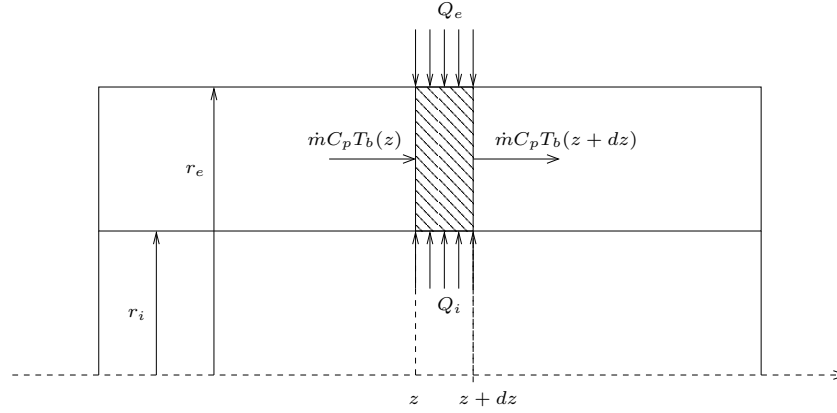


FIG. 3.2 – Bilan d'énergie sur une longueur élémentaire.

\dot{m} , $\langle T_b \rangle$, C_p sont respectivement le débit massique, la température débitante et la capacité calorifique du fluide :

$$\dot{m} = \rho U_b \pi (r_e^2 - r_i^2) \quad \text{et} \quad T_b = \frac{2}{U_b (r_e^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_e} u(r) T(r) r dr$$

On rappelle que U_b est la vitesse débitante qui s'écrit :

$$U_b = \frac{2}{(r_e^2 - r_i^2)} \int_{r_i}^{r_e} u(r) T(r) r dr$$

Ainsi, les équations 3.25 et 3.28, pour un écoulement pleinement développé dans un espace annulaire, nous donnent :

$$\frac{\partial \langle T_{pi} \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \langle T_b \rangle}{\partial z} = \frac{2\pi(r_i q_i + r_e q_e)}{\dot{m} C_p} \quad (3.29)$$

En remplaçant le débit massique par son expression, on obtient :

$$\frac{d \langle T_{pi} \rangle}{dz} = \frac{d \langle T_b \rangle}{dz} = \frac{2(r_i q_i + r_e q_e)}{\rho C_p U_b (r_e^2 - r_i^2)} = \frac{2q_r (r^* q_i / q_r + q_e / q_r)}{r_e \rho C_p U_b (1 - r^{*2})} \quad (3.30)$$

On montre facilement que :

$$\frac{q_i}{q_r} = \frac{q^*}{1 + r^* q^*} \quad (3.31)$$

$$\frac{q_e}{q_r} = \frac{1}{1 + r^* q^*} \quad (3.32)$$

En faisant intervenir la température de référence $T_r = q_r \delta / k$, et en utilisant les expressions 3.31 et 3.32, la relation 3.30 s'écrit :

$$\frac{d\langle T_{p_i} \rangle}{dz} = \frac{d\langle T_b \rangle}{dz} = \frac{2T_r}{r_e Pr Re_\delta (1 - r^{*2})} \quad (3.33)$$

Cette expression est donc indépendante du rapport des flux.

Dans le cas de la conduite cylindrique et afin de faciliter l'implémentation de la condition à la limite ($\Theta = 0$) la différence de température est rapportée à la température de paroi. Cette conditions est de type mixte (Piller (2005)), le flux de chaleur (moyenné dans le temps) est uniforme le long de la paroi tandis que la température instantanée à la paroi reste constante au cours du temps :

$$\Theta = \frac{\langle T_{p_i}(z) \rangle - T(\theta, r, z, t)}{T_r} \quad (3.34)$$

Ici, la température de référence est définie par $T_r = q_p / \rho C_p U_b$ où q_p est le flux de chaleur imposé à la paroi. L'équation 3.24 reste inchangée, seul le terme supplémentaire sera exprimé en fonction de la température de paroi. L'expression 3.25 s'appliquant aussi pour un écoulement développé dans un tube, il suffit donc de faire tendre le rayon intérieur vers 0 dans la relation 3.30 pour retrouver le terme supplémentaire :

$$\frac{\partial \langle T_p \rangle}{\partial z} = \frac{\partial \langle T_b \rangle}{\partial z} = \frac{2q_p}{r_e \rho C_p U_b} = \frac{2T_r}{r_e} \quad (3.35)$$

Conditions aux limites

– Espace annulaire :

- A la paroi interne :

$$r = 2r^*/(1 - r^*) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = q^*/(1 + q^* r^*)$$

- A la paroi externe :

$$r = 2/(1 - r^*) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 1/(1 + q^* r^*)$$

– Cylindre :

• Sur l'axe :

$$r = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0$$

• A la paroi :

$$r = 1 \quad \longrightarrow \quad \Theta = 0$$

Des conditions de périodicité sont aussi appliquées sur le champ thermique :

$$\Theta(\theta, r, z) = \Theta(\theta, r, z + L_z)$$

$$\Theta(\theta, r, z) = \Theta(\theta + 2\pi, r, z)$$

3.2 Méthode numérique

3.2.1 Domaine de calcul et maillage

Le maillage est uniforme dans les directions axiale et azimutale. L'uniformité en θ et z est absolument nécessaire pour l'utilisation des développements trigonométriques dans l'équation de la pression, tandis que dans la direction r le maillage peut être resserré près des parois et ce en utilisant des fonctions d'affinement. On considère une discrétisation avec $(n1, n2, n3)$ points de collocations dans les directions (θ, r, z) . Les variables primitives seront calculées en des points différents (maillage décalé, figure 3.3), situés sur les faces des cellules pour les composantes de vitesse, ou au centre des cellules pour les grandeurs scalaires et définis par les coordonnées spatiales suivantes :

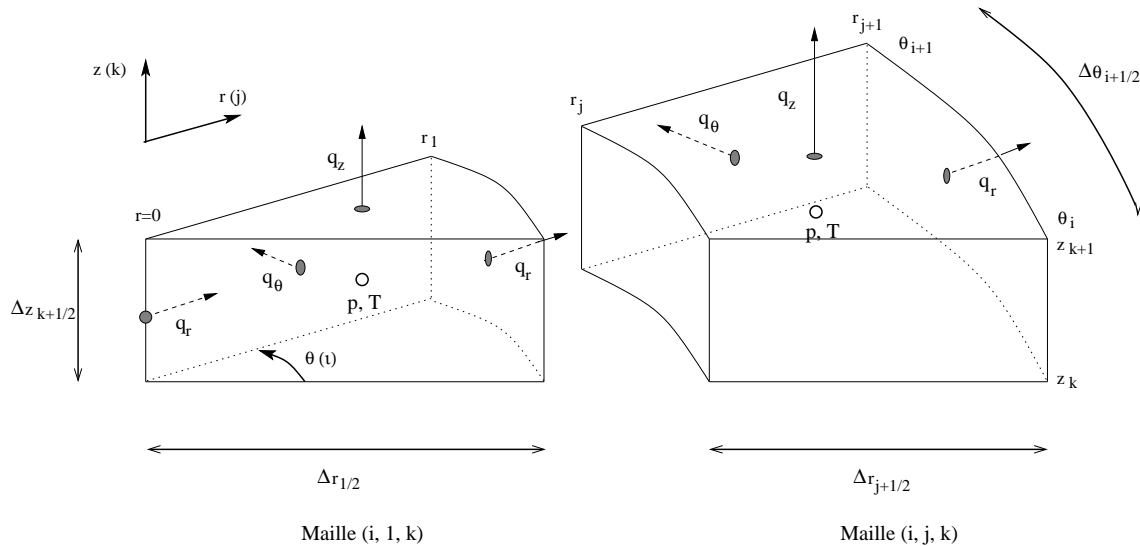


FIG. 3.3 – Maillage décalé.

$$q_\theta \rightarrow (i, j + 1/2, k + 1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_c(i), r_m(j), z_m(k))$$

$$q_r \rightarrow (i + 1/2, j, k + 1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_c(j), z_m(k))$$

$$q_z \rightarrow (i + 1/2, j + 1/2, k) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_m(j), z_c(k))$$

$$p, \Theta \rightarrow (i + 1/2, j + 1/2, k + 1/2) \quad \text{ou} \quad (\theta_m(i), r_m(j), z_m(k))$$

avec :

$$\begin{aligned} \theta_c &= (i - 1)\Delta\theta \quad i = 1 \cdots n_1, & \theta_m &= (i - 1/2)\Delta\theta \quad i = 1 \dots (n_1 - 1), & \Delta\theta &= \frac{2\pi}{n_1 - 1} \\ r_c &= (j - 1)\Delta r \quad j = 1 \cdots n_2, & r_m &= (j - 1/2)\Delta r \quad j = 1 \dots (n_2 - 1), & \Delta r &= \frac{l.f(r)}{n_2 - 1} \\ z_c &= (k - 1)\Delta z \quad k = 1 \cdots n_3, & z_m &= (k - 1/2)\Delta z \quad k = 1 \dots (n_3 - 1), & \Delta z &= \frac{L}{n_3 - 1} \end{aligned}$$

3.2.2 Distribution radiale des points et fonctions de raffinement

Les fortes variations des différents variables aux voisinages des parois pour les écoulements turbulent exigent l'utilisation d'un maillage plus serré pour une meilleure résolution des couches limites près des parois. Dans la conduite cylindrique, nous avons utilisé une transformation hyperbolique qui permet un bon resserrement des mailles au voisinage de la paroi :

$$r(j) = \frac{\tanh(\alpha b(j))}{\tanh(\alpha)} \quad 0 \leq r(j) \leq 1 \quad (3.36)$$

α est un paramètre ajustable qui détermine la concentration de la grille dans la région proche paroi.

Pour l'espace annulaire nous avons opté pour un maillage sinusoidal qui permet un très fort resserrement des mailles aux voisinages des deux parois sans les déformer au centre :

$$r(j) = r_i + (1 - \cos(\pi b(j))) \quad r_i \leq r(j) \leq r_e \quad (3.37)$$

Dans les deux cas, $b(j)$ est donné par :

$$b(j) = \frac{j - 1}{n_2 - 1} \quad 1 \leq j \leq n_2 \quad (3.38)$$

3.3 Discrétisation des équations

3.3.1 Discrétisation spatiale

Les équations sont discrétisées par la méthode des différences finies sur un maillage décalé en utilisant un schéma centré de second ordre. La méthode des différences finies est généralement moins précise que la méthode spectrale mais elle a l'avantage d'être plus flexible pour les géométries complexes. Les simulations directes dans un canal (Rai et Moin (1991), Choi et Moin (1994)) ont montré que, lorsque la conservation globale est maintenue, les statistiques de faible ordre sont convenablement décrites avec un schéma de différences finies de second ordre.

On définit le système de coordonnées (x_1, x_2, x_3) dans lequel $\theta = x_1$, $r = f(x_2)$, $z = x_3$. Les dérivées premières et seconde dans les directions θ et z sont exprimées par les opérateurs usuels indiqués par les opérateurs algébriques $\delta/\delta x_i$ et $\delta^2/\delta x_i^2$ avec $i = 1, 3$. Les dérivées dans la direction radiale sont approximées par une transformation de coordonnées $r = r(x_2)$, qui introduit une fonction métrique $g_2(x_2) = \delta r/\delta x_2$ du fait de l'utilisation du maillage non-uniforme. Ainsi, les variables r et g_2 apparaissent dans les deux positions $j, j + 1/2$, d'où la notation :

c : centre pour la position j (noeud)
 m : milieu pour la position j+1/2

avec ces définitions le système d'équations discrétisées s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned}
 & \frac{\delta q_\theta}{\delta t} + g_{2m} \frac{\delta q_\theta / r_m q_r}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \frac{\delta q_\theta q_\theta}{\delta x_1} + \frac{\delta q_\theta q_z}{\delta x_3} + \frac{q_\theta q_r}{r_m^2} + N\eta q_r = \\
 & -\frac{\delta p}{\delta x_1} + \frac{1}{Re} \left[g_{2m} \frac{\delta}{\delta x_2} g_{2c} r_c \frac{\delta q_\theta / r_m}{\delta x_2} - \frac{q_\theta}{r_m^2} + \frac{1}{r_m^2} \frac{\delta^2 q_\theta}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_\theta}{\delta x_3^2} + \frac{2}{r_m^2} \frac{\delta q_r}{\delta x_1} \right] \\
 & \frac{\delta q_r}{\delta t} + g_{2m} \frac{\delta q_r q_r}{\delta x_2} + g_{2m} \frac{\delta}{\delta x_2} \frac{q_r q_r}{r_c} + \frac{\delta}{\delta x_1} \frac{q_\theta q_r}{r_m r_c} + \frac{\delta q_r q_z}{\delta x_3} - \frac{q_\theta q_\theta}{r_c^2} + N\eta q_\theta = \\
 & -r_c g_{2c} \frac{\delta p}{\delta x_2} + \frac{1}{Re} \left[g_{2c} \frac{\delta}{\delta x_2} g_{2c} r_c \frac{\delta q_r / r_c}{\delta x_2} - \frac{q_r}{r_c^2} + \frac{1}{r_c^2} \frac{\delta^2 q_r}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_r}{\delta x_3^2} + \frac{2}{r_c^2} \frac{\delta q_\theta}{\delta x_1} \right] \\
 & \frac{\delta q_z}{\delta t} + \frac{g_{2m}}{r_m} \frac{\delta q_r q_z}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \frac{\delta q_\theta q_z}{\delta x_1} + \frac{\delta q_z q_z}{\delta x_3} = \\
 & \frac{\delta p}{\delta x_2} - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{g_{2m}}{r_m} \frac{\delta}{\delta x_2} g_{2c} r_c \frac{\delta q_z}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \frac{\delta^2 q_z}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_z}{\delta x_3^2} \right]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Nous utilisons des interpolations linéaires pour nous permettre d'évaluer les variables en des positions où elles ne sont pas définies.

3.4 Méthode de résolution

Pour la résolution du système d'équations discrétisées, nous avons opté pour une variante de la méthode de projection (méthode à pas de temps fractionné), combinée à une technique d'approximation par factorisation, proposée par Kim et Moin (1985) et modifiée par Verzicco et Orlandi (1996) qui utilisent un schéma hybride de Runge-Kutta/Crank-Nicolson. La méthode à pas de temps fractionné est, en général, une méthode d'approximation des équations d'évolution basée sur la décomposition des opérateurs qu'elles contiennent, elle permet de traiter en même temps le problème de couplage vitesse-pression et de calculer la solution à un nouvel instant t_{n+1} .

Dans son application aux équations de Navier-Stokes, on peut interpréter le rôle de la pression dans les équations de la quantité de mouvement comme un opérateur de projection qui projette un champ de vitesse arbitraire dans un champ de vitesse à divergence nulle. Cette méthode est avérée mieux adaptée pour le traitement des termes convectifs, pour sa stabilité; elle a aussi l'avantage de requérir un minimum de mémoire en exécution pour cette classe de schéma.

3.5 Schéma numérique, Conditions aux limites

La méthode de projection décompose chaque pas de temps en trois sous-pas de la manière suivante :

Pour chaque pas intermédiaire de Runge-Kutta ($l=1,2,3$),

- (A) on calcule, dans une première étape, un champ de vitesse non-solénoïdal (\hat{q}^l), par la résolution des équations de quantité de mouvement.
- (B) on corrige le champ (\hat{q}^l), dans une deuxième étape, pour satisfaire l'équation de continuité.
- (C) une fois le champ de vitesse solénoïdal (\hat{q}^{l+1}) calculé, l'équation du scalaire passif est résolue directement, dans un seul pas

3.5.1 (A) Calcul du champ non-solénoïal

Les équations de quantité de mouvement sont discrétisées suivant le schéma de Runge-Kutta, en appliquant

- un traitement explicite aux termes de convection, au gradient de pression et aux termes visqueux de couplage;
- un traitement semi-implicite (schéma de Crank-Nicolson) aux termes visqueux;

$$\frac{\hat{q}_c^l - q_c^l}{\Delta t} = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^l + \frac{\alpha_l}{2} \mathcal{A}_c (\hat{q}_c^l + q_c^l) \right], \quad \text{pour } c = \theta, r, z \quad (3.40)$$

avec les termes explicites :

$$\begin{aligned}
 -\mathcal{H}_z &= \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (q_r q_z) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta q_z) + \frac{\partial}{\partial z} (q_z q_z) \right] \\
 -\mathcal{H}_\theta &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_\theta q_r}{r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (q_\theta q_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (q_\theta q_z) + \frac{q_\theta q_z}{r^2} + N q_r \right] - \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} \\
 -\mathcal{H}_r &= \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_r q_r}{r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{q_r q_\theta}{r^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} (q_r q_z) - \frac{q_\theta q_\theta}{r^2} - N q_\theta \right] + \frac{1}{Re} \frac{2}{r^2} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta}
 \end{aligned} \quad (3.41)$$

et les opérateurs :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_z &= \mathcal{A}_{zr} + \mathcal{A}_{z\theta} + \mathcal{A}_{zz} = \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\
 \mathcal{A}_\theta &= \mathcal{A}_{\theta r} + \mathcal{A}_{\theta\theta} + \mathcal{A}_{\theta z} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\cdot}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \\
 \mathcal{A}_r &= \mathcal{A}_{rr} + \mathcal{A}_{r\theta} + \mathcal{A}_{rz} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{\cdot}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right]
 \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\mathcal{G} = \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, r \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (3.43)$$

Les coefficients du schéma de Runge-Kutta sont calculés pour une précision à l'ordre deux en temps. Ils prennent les valeurs :

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \frac{8}{15} & \gamma_2 &= \frac{5}{12} & \gamma_3 &= \frac{3}{4} \\
 \rho_1 &= 0 & \rho_2 &= -\frac{17}{60} & \rho_3 &= -\frac{5}{12}
 \end{aligned}$$

Pour l'homogénéité du schéma, on impose $\alpha_l = \gamma_l + \rho_l$; de plus $\rho_l = 0$ permet de démarrer la procédure Runge-Kutta sans stocker l'état précédent.

L'avancement d'un pas de temps Δt (entre t^n et t^{n+1}) s'effectue par intégration sur des intervalles intermédiaires de longueurs $\alpha_l \Delta t$; en conséquence, les instants de temps intermédiaires seront :

$$\tau_0 = t^n, \quad \tau_1 = t^n + \alpha_1 \Delta t, \quad \tau_2 = t^n + (\alpha_1 + \alpha_2) \Delta t, \quad \tau_3 = t^n + \underbrace{\sum_{l=1}^3 \alpha_l \Delta t}_{=1} = t^{n+1} \quad (3.44)$$

Pour résoudre les équations discrétisées (3.40), écrites sous la forme :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_c \right) \Delta \hat{q}_c^l = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^l + \alpha_l \mathcal{A}_c q_c^l \right] \Delta t \quad (3.45)$$

les opérateurs implicites

$$\mathcal{A}_c = \mathcal{A}_{c\theta} + \mathcal{A}_{cr} + \mathcal{A}_{cz}, \quad c = \theta, r, z$$

seront inversés par une factorisation précise à l'ordre deux en temps (Cf. Annexe A) :

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{c\theta} \right) \overline{\Delta \hat{q}_c^l} = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^l + \alpha_l \mathcal{A}_c q_c^l \right] \Delta t & (A1) \\ \left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{cr} \right) \overline{\Delta \hat{q}_c^l} = \overline{\Delta \hat{q}_c^l} & (A2) \\ \left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{cz} \right) \Delta \hat{q}_c^l = \overline{\Delta \hat{q}_c^l} & (A3) \end{cases}$$

Les trois équations (**A1**, **A2**, **A3**) sont facilement inversables, car les opérateurs y intervenant sont diagonaux. Les champs intermédiaires $\overline{\Delta\hat{q}_c^l}$, $\overline{\Delta\hat{q}_c^l}$ n'ont aucune signification physique et, en conséquence, les conditions aux limites pour ces champs seront assimilées aux conditions physiques imposées pour l'inconnue

$$\Delta\hat{q}_c^l = \hat{q}_c^l - q_c^l$$

3.5.2 (A1) Premier pas de la factorisation (direction θ)

L'équation à résoudre est de type :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{c\theta}\right) X(i, j, k) = rhs(i, j, k)$$

avec les opérateurs :

$$\mathcal{A}_{\theta\theta} = \mathcal{A}_{r\theta} = \mathcal{A}_{z\theta} = \frac{1}{Re} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

L'équation discrétisée devient maintenant :

$$-a(j)X(i-1, j, k) + (1 + 2a(j))X(i, j, k) - a(j)X(i+1, j, k) = rhs(i, j, k), \quad (3.46)$$

$$\text{avec } a_\theta(j) = a_z(j) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \Delta t \frac{1}{\Delta \theta^2} \frac{1}{r_m^2(j)}, \quad \text{et } a_r(j) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \Delta t \frac{1}{\Delta \theta^2} \frac{1}{r_c^2(j)}$$

Cette équation doit être résolue pour $i = 1 \dots (n1 - 1)$, avec une condition de périodicité :

$$X(1, j, k) = X(n1, j, k)$$

3.5.3 (A2) Deuxième pas de la factorisation (direction z)

L'équation à résoudre est de type :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{cz}\right) X(i, j, k) = rhs(i, j, k)$$

avec les opérateurs :

$$\mathcal{A}_{\theta z} = \mathcal{A}_{r z} = \mathcal{A}_{z z} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

L'équation discrétisée devient maintenant :

$$-a(k)X(i, j, k-1) + (1 + 2a(k))X(i, j, k) - a(k)X(i, j, k+1) = rhs(i, j, k), \quad (3.47)$$

$$\text{avec } a_\theta(k) = a_r(k) = a_z(k) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \Delta t \frac{1}{\Delta z^2}, \quad k = 2 \dots (n_3 - 1) = n_3 m$$

Cette équation doit être résolue pour $k = 1 \dots (n_3 - 1)$, avec une condition de périodicité :

$$X(i, j, 1) = X(i, j, n_3)$$

3.5.4 (A3) Troisième pas de la factorisation (direction r)

L'équation à résoudre est de type :

$$\left(1 - \frac{\alpha_l}{2} \Delta t \mathcal{A}_{cr}\right) X(i, j, k) = rhs(i, j, k)$$

avec les opérateurs :

$$\mathcal{A}_{\theta r} = \frac{1}{Re} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right), \quad \mathcal{A}_{rr} = \frac{1}{Re} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right), \quad \mathcal{A}_{zr} = \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \cdot}{\partial r} \right)$$

L'équation discrétisée devient maintenant :

$$-a(j)X(i, j-1, k) + b(j)X(i, j, k) - c(j)X(i+1, j, k) = rhs(i, j, k), \quad (3.48)$$

avec les coefficients suivants, pour $j = 2 \dots (n_2 - 2)$:

– pour la composante q_θ , discrétisée en $(i, j + 1/2, k + 1/2)$:

$$\begin{cases} a_\theta(j) = \beta(j) \frac{r_c(j)}{r_m(j-1)} \\ c_\theta(j) = \beta(j) \frac{r_c(j+1)}{r_m(j+1)} \\ b_\theta(j) = 1 + \frac{\beta(j)}{r_m(j)} [r_c(j+1) + r_c(j)] \end{cases} \quad \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m^2(j)}$$

– pour la composante q_r , discrétisée en $(i + 1/2, j, k + 1/2)$:

$$\begin{cases} a_r(j) = \frac{\beta(j)}{r_m(j-1)} \\ c_r(j) = \frac{\beta(j)}{r_m(j)} \\ b_r(j) = 1 + a_r(j) + c_r(j) \end{cases} \quad \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} r_c(j) \Delta t$$

– pour la composante q_z , discrétisée en $(i + 1/2, j + 1/2, k)$:

$$\begin{cases} a_z(j) = \beta(j)r_c(j) \\ c_z(j) = \beta(j)r_c(j+1) \\ b_z(j) = 1 + a_z(j) + c_z(j) \end{cases} \quad \beta(j) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m(j)}$$

Il est intéressant à observer que les coefficients de ces systèmes ne dépendent que de j ; ils seront calculés avant l'intégration en temps et reactualisés pour chaque pas l de Runge-Kutta pour la dépendance de α_l .

Il reste à préciser les **conditions aux limites suivant la direction r** :

– Dans le cas de la conduite cylindrique, pour le traitement de l'axe $r = 0$ (cellule $j = 1$), nous utilisons le

fait que la composante q_r s'annule automatiquement :

$$\left(q_r = rv_r = 0, \quad \frac{\partial q_z}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial q_\theta}{\partial r} = 0 \right)_{r=rc(1)=0} \implies \begin{cases} (\Delta \tilde{q}_r^l)_1 = 0 \\ (\Delta \tilde{q}_\theta^l)_1 = (\Delta \tilde{q}_\theta^l)_{-1} \\ (\Delta \tilde{q}_z^l)_1 = (\Delta \tilde{q}_z^l)_{-1} \end{cases}$$

ce qui implique :

$$\begin{cases} a_\theta(1) = 0, & a_r(1) = 0, \quad a_z(1) = 0 \\ c_\theta(1) = -\frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{\Delta t}{\Delta r^2} \frac{r_c(2)}{r_m(2)}, & c_r(1) = 0, \quad c_z(1) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m(1)} r_c(2) \\ b_\theta(1) = 1 + \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \left(\frac{\Delta t}{\Delta r^2} \frac{r_c(2)}{r_m(1)} - \frac{1}{r_m^2(1)} \right), & b_r(1) = 1, \quad b_z(1) = 1 + c_z(1) \end{cases}$$

– pour le traitement de la paroi $r = R$ (cellule $j = (n2 - 1) = n2m$), une condition d'adhérence :

$$(q_r = 0, \quad q_z = 0, \quad q_\theta = f(N))_{r=rc(n2)} \implies \begin{cases} (\Delta \tilde{q}_r^l)_{n2} = 0 \\ (\Delta \tilde{q}_\theta^l)_{n2} = f(N) \\ (\Delta \tilde{q}_z^l)_{n2} = 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

ce qui implique :

– pour q_θ :

$$\begin{cases} a_\theta(n2m) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m^2(n2m)} \frac{r_c^3(n2m)}{r_m(n2m-1)} \\ c_\theta(n2m) = 0 \\ b_\theta(n2m) = 1 + \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m^2(n2m)} \left[\frac{r_c^3(n2m)}{r_m(n2m)} + r_c^3(n2) \left(\frac{1}{r_m(n2m)} - \frac{1}{r_m(n2)} \right) \right] \end{cases}$$

– pour q_r nous imposons explicitement

$$q_r(n2) = 0 \implies a_r(n2) = c_r(n2) = 0., \quad b_r(n2) = 1, \quad rhs(n2) = 0.$$

– pour q_z

$$\begin{cases} a_z(n2m) = \frac{\alpha_l}{2} \frac{1}{Re} \frac{1}{\Delta r^2} \frac{\Delta t}{r_m(n2m)} r_c(n2m) \\ c_z(n2m) = 0 \\ b_z(n2m) = 1 + a_z(n2m) \end{cases}$$

Les systèmes (3.48) doivent être inversés suivant la direction j pour chaque $i = 1 \dots (n1 - 1)$ et chaque $k = 1 \dots (n3 - 1)$. Comme les coefficients des systèmes ne dépendent que de j , le code peut être optimisé en effectuant la résolution de ces systèmes par une décomposition LU .

3.5.5 (B) Correction de pression et calcul du champ solénoïdal

Le champ de vitesse solénoïdal pour le pas suivant de la procédure Runge-Kutta est calculé par l'équation de correction suivante :

$$q_c^{l+1} - \hat{q}_c^l = -\alpha_l \Delta t \mathcal{G}_c \Phi^{l+1}, \quad c = \theta, r, z \quad (3.50)$$

La variable scalaire Φ est calculée par l'intermédiaire d'une équation de Poisson (obtenue en imposant la divergence nulle du champ $\vec{q}^{l+1} = 0$ dans l'équation précédente) :

$$\mathcal{L}\Phi^{l+1} = \frac{1}{\alpha_l \Delta t} \mathcal{D}\vec{q}^l \quad (3.51)$$

Les opérateurs gradient, divergence et laplacien sont définis de manière classique, comme :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} &= \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, r \frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ \mathcal{D} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathcal{L} &= \mathcal{G}\mathcal{D} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned}$$

Pour l'équation de Poisson discrète $\mathcal{L}\Phi(i, j, k) = Q(i, j, k)$, une condition de Neumann $\partial\Phi/\partial n = 0$ est imposée sur toutes les frontières. La périodicité sur les directions θ et z nous permet de décomposer le champ scalaire Φ en séries de Fourier.

L'équation finale dans l'espace de Fourier donne une matrice tridiagonale, facilement inversable par l'algorithme de Thomas. Pour revenir dans l'espace physique, les transformées inverses sont calculées.

3.5.6 (B1) Résolution de l'équation de Poisson

Pour résoudre l'équation de Poisson, nous utilisons deux transformées de Fourier rapide (FFT) (Cf. Annexe B).

3.5.7 (B2) Calcul du champ solénoïdal et réactualisation de la pression

Une fois le champ scalaire Φ calculé, nous revenons maintenant dans l'équation 3.51 pour calculer le champ solénoïdal q_c^{l+1} , $c = \theta, r, z$. Le gradient de pression est réactualisé par l'équation suivante (Cf. Annexe C) :

$$p^{l+1} = p^l + \Phi^{l+1} - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \mathcal{A}_c \Phi^{l+1} \quad (3.52)$$

3.5.8 (C) Calcul du scalaire passif

Le champ solénoïdal q^{l+1} sera utilisé pour la résolution de l'équation d'évolution du scalaire passif. Le calcul du scalaire passif s'effectue après la correction de pression, afin d'utiliser un champ solénoïdal de vitesse pour l'évaluation des termes explicites.

3.6 Simulation des grandes échelles

3.6.1 Filtrage des équations

Le formalisme des simulations numériques des grandes échelles (LES) repose sur le filtrage passe-bas des équations de bilan ; on introduit un filtre G_Δ de largeur Δ . La plus petite longueur d'onde qui peut être entièrement reproduite correspond au nombre d'onde : $k_c = \pi/\Delta$. Le produit de convolution correspondant au filtrage d'une variable $f(\vec{x}, t)$ s'écrit dans l'espace physique :

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int f(\vec{y}, t) G_\Delta(\vec{x}, \vec{y}) d\vec{y} \quad (3.53)$$

Dans la majorité des modèles LES, le filtre G_Δ n'intervient pas explicitement dans le formalisme. Il est généralement supposé être un filtre Gaussien. C'est la largeur du filtre Δ qui est importante, car elle est fixée par le maillage utilisé. Dans le cas d'un maillage régulier, $\Delta_x = cst$, la plus petite longueur d'onde qui peut être calculée est $2\Delta_x$ et par conséquent, la largeur minimale du filtre doit être $\Delta = 2\Delta_x$. Cette valeur correspond au nombre d'onde $k_c = 2\pi/\lambda = \pi/\Delta_x$ qui caractérise la coupure dans le spectre de l'énergie ; conformément à la théorie de Kolmogorov, k_c doit se situer vers la fin de la zone inertielle pour s'assurer de l'homogénéité et l'isotropie des petites échelles, qui seront modélisées.

Le filtre est supposé être homogène en espace ($G_\Delta(\vec{x}, \vec{y}) = G_\Delta(\vec{x} - \vec{y})$) et indépendant de la position ; dans ce cas, le filtre peut commuter avec les dérivées spatiales et temporelles. La largeur du filtre Δ est issue de la discrétisation des équations sur une grille de calcul ; dans notre cas, elle est définie par :

$$\Delta = (r\Delta r\Delta\theta\Delta z)^{1/3} \quad (3.54)$$

La forme conservative de l'équation de quantité de mouvement fait intervenir le tenseur des contraintes visqueuses τ :

$$\begin{aligned}
 \frac{Dq_\theta}{Dt} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{z\theta}) \right] \\
 \frac{Dq_r}{Dt} &= -r \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \tau_{rz}) - \tau_{\theta\theta} \right] \\
 \frac{Dq_z}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zz}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 \tau_{ij} &= 2S_{ij} \\
 \tau_{\theta\theta} &= \frac{2}{r} \frac{\partial q_\theta}{\partial \theta} + 2 \frac{q_r}{r^2} & \tau_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_z}{\partial \theta} + \frac{\partial q_\theta}{\partial z} \\
 \tau_{rr} &= 2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_r}{r} \right) & \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial q_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{q_\theta}{r} \right) \\
 \tau_{zz} &= 2 \frac{\partial q_z}{\partial z} & \tau_{rz} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q_r}{\partial z} + \frac{\partial q_z}{\partial r}
 \end{aligned} \tag{3.56}$$

Les équations (3.55) sont filtrées à l'aide d'un filtre générique de moyenne spatiale sur un volume de contrôle cylindrique :

$$\bar{q}(r, \theta, z) = \frac{1}{r \Delta r \Delta \theta \Delta z} \int \int \int q(r', \theta', z') r' \Delta r' \Delta \theta' \Delta z' \tag{3.57}$$

Tenant compte que le filtre ainsi introduit commute avec les dérivées spatiales et temporelles, et que le tenseur sous-maille est modélisée de manière classique :

$$T_{ij} = \bar{q}_i \bar{q}_j - \overline{q_i q_j} = 2\nu_t \bar{S}_{ij} + \frac{1}{3} T_{ll} \delta_{ij} \tag{3.58}$$

les équations filtrées s'écrivent sous une forme similaire :

$$\begin{aligned}
 \frac{D\bar{q}_\theta}{Dt} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \theta} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \hat{\tau}_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{\theta\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{z\theta}) \right] \\
 \frac{D\bar{q}_r}{Dt} &= -r \frac{\partial \bar{P}}{\partial r} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r \hat{\tau}_{rr}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{r\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (r \hat{\tau}_{rz}) - \hat{\tau}_{\theta\theta} \right] \\
 \frac{D\bar{q}_z}{Dt} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{1}{Re} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{\tau}_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\tau}_{z\theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\hat{\tau}_{zz}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

avec :

$$\bar{P} = \bar{p} - \frac{1}{3} T_{ll} \tag{3.60}$$

$$\widehat{\tau}_{ij} = 2 \underbrace{(1 + Re \nu_t)}_{\overline{\nu}} \overline{S}_{ij} = \overline{\nu} \overline{\tau}_{ij} \quad (3.61)$$

Ce nouveau système d'équations peut être résolu avec le schéma numérique utilisé pour la simulation directe.

L'équation du scalaire passif nécessite également une modélisation sous-maille. Si l'opérateur de filtrage est appliqué à l'équation de transport du scalaire passif, écrite sous la forme :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \text{div}(\Theta \mathbf{u}) = \frac{1}{Pe} \text{div}(\text{grad}(\Theta)), \quad \text{avec } \mathbf{u} = (q_\theta, q_r, q_z) \quad (3.62)$$

nous obtenons un nouveau terme : $\overline{\Theta} \overline{\mathbf{u}}$ qui ne peut pas être calculé directement. Une modélisation similaire à celle introduite pour le tenseur sous-maille est (voir, par exemple, Lesieur et Métais (1996)) :

$$\overline{\Theta} \overline{\mathbf{u}} - \overline{\Theta \mathbf{u}} = \alpha_t \text{grad}(\Theta), \quad \alpha_t = \frac{\nu_t}{Pr_t} \quad (3.63)$$

L'équation filtrée pour le scalaire passif devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\overline{q_r} \overline{\Theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\overline{q_\theta} \overline{\Theta}) + \frac{\partial}{\partial z} (\overline{q_z} \overline{\Theta}) = \\ \frac{1}{Pe} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\overline{\alpha_t} r \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\overline{\alpha_t} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\overline{\alpha_t} \frac{\partial \overline{\Theta}}{\partial z} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.64)$$

où nous avons noté :

$$\overline{\alpha_t} = 1 + Pe \frac{\nu_t}{Pr_t} = 1 + \frac{Pe}{Re} \frac{\overline{\nu} - 1}{Pr_t} \quad (3.65)$$

3.6.2 Modélisation sous-maille

Contraintes sous-maille / Procédure dynamique

La viscosité turbulente est évaluée grâce à la procédure dynamique, ce modèle a été programmé lors d'une thèse précédente (Feiz (2005)). L'idée consiste à introduire un deuxième filtre, appelé filtre-test (noté $\widetilde{(\cdot)}$), de largeur supérieur au premier filtre ($\overline{(\cdot)}$). On note alors les tensions de Reynolds sous-maille T_{ij} et Q_{ij} qui sont définies par :

$$(\overline{\Delta}) \implies T_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j} = 2\nu_t \overline{S}_{ij} = 2C (\overline{\Delta})^2 |\overline{S}| \overline{S}_{ij}$$

$$\widetilde{T}_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\overline{u_i}} \widetilde{\overline{u_j}} = 2C (\overline{\Delta})^2 |\widetilde{S}| \widetilde{S}_{ij}$$

$$(\tilde{\Delta}) \implies Q_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \overline{u_i u_j} = 2\tilde{\nu}_t \tilde{S}_{ij} = 2C (\tilde{\Delta})^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij}$$

L'identité de Germano donne :

$$L_{ij} = \widetilde{u_i u_j} - \overline{u_i u_j} = Q_{ij} - \tilde{T}_{ij} = 2C \left[(\tilde{\Delta})^2 |\tilde{S}| \tilde{S}_{ij} - (\bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \right] = 2C M_{ij}$$

La constante C sera évaluée comme (Lilly (1991)) :

$$C = \frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij} M_{ij} \rangle}{\langle M_{ij} M_{ij} \rangle},$$

où $\langle \cdot \rangle$ représente la moyenne dans les directions homogènes. Dans notre cas, nous avons choisi de moyennner seulement dans la direction périodique θ . Le filtre test $(\tilde{\Delta})$ utilisé est un filtre de type *boîte* (moyenne spatiale dans les directions θ et z). La taille de ce filtre est double dans les directions θ et z par rapport au filtre naturel :

$$\tilde{\Delta} = [r \Delta r (2\Delta\theta)(2\Delta z)]^{1/3}$$

Flux de chaleur sous-maille

Par analogie à la loi de Fourier, le flux de chaleur sous-maille est relié au gradient de température résolue à l'aide d'une diffusivité thermique sous-maille, α_t :

$$\overline{\Theta u_j} - \overline{\Theta} u_j = \alpha_t \text{grad}(\Theta), \quad (3.66)$$

On introduit la notion de Prandtl-sous maille, Pr_t , qui est défini par :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \quad (3.67)$$

- Modèle à Prandtl sous-maille constant

La modélisation la plus simple permettant de calculer la diffusivité thermique α_t est de fixer le nombre de Prandtl turbulent à une valeur constante. Généralement, la valeur admise est proche de 1 et varie suivant les auteurs entre 0.5 et 1.1. On prendra dans cette étude une valeur $Pr_t = 0.9$. Ce modèle suppose que le flux de chaleur sous-maille est colinéaire et parfaitement corrélé au gradient de température résolu ce qui n'a pas été confirmé par les expériences ou par simulations numériques directes.

- Modèle dynamique

Le principe des modèles dynamiques pour le champ thermique est le même que celui des modèles dynamique pour la vitesse. On définit deux filtres noté $(\tilde{\cdot})$ et $(\bar{\cdot})$. Les flux de chaleurs sous-maille correspondants à ces deux filtres s'expriment selon :

$$\chi_{\Theta j} = \overline{\Theta u_j} - \overline{\Theta} u_j$$

$$\Phi_{\Theta j} = \widetilde{\Theta} \widetilde{u}_j - \widetilde{u_i u_j}$$

L'identité de Germano appliquée pour un scalaire passif donne :

$$L_{\Theta j} = \widetilde{\Theta} \widetilde{u}_j - \widetilde{\Theta} \widetilde{u}_j = \Phi_{\Theta j} - \widetilde{\chi}_{\Theta j} = 2C \left[(\widetilde{\Delta})^2 |\widetilde{F}| \widetilde{F}_j - (\bar{\Delta})^2 |\widetilde{F}| \widetilde{F}_j \right]$$

Le nombre de Prandtl turbulent est donné par la relation :

$$Pr_t = C(\bar{\Delta})^2 \frac{F_j F_j}{L_{\Theta j} F_j} \quad (3.68)$$

avec :

$$F_j = \frac{(\widetilde{\Delta})^2}{(\bar{\Delta})^2} |\widetilde{S}| \widetilde{\nabla} \widetilde{\Theta} - |\widetilde{S}| \widetilde{\nabla} \widetilde{\Theta} \quad (3.69)$$

Chapitre 4

Résultats de l'étude dans la conduite cylindrique

Ce chapitre est consacré à l'analyse des résultats obtenus par simulations numériques directes d'un écoulement turbulent pleinement développé dans une conduite cylindrique, avec flux de chaleur uniforme imposé à la paroi. Seul le cas du scalaire passif est abordé, la résolution du champ dynamique étant complètement découplée de celle du champ thermique. Dans un premier temps nous validerons le champ dynamique en comparant nos résultats aux prédictions d'Eggels et al. (1994) pour la même configuration. On s'intéressera par la suite à l'effet du nombre de Prandtl sur le transfert de chaleur. La validation du champ thermique se fera en confrontant nos simulations pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) à celles obtenues par Satake et Kunugi (2002). On mettra en évidence les principales différences entre la conduite cylindrique et le canal plan.

4.1 Domaine de calcul et validation du champ dynamique

Afin d'analyser correctement le champ thermique, il est nécessaire que le champ dynamique soit correctement résolu. En effet, dans cette étude, seul le cas du scalaire passif est abordé. Le champ thermique est transporté par le champ de vitesse sans être influencé par ce dernier. Cependant, il faut s'affranchir de toutes les erreurs qui peuvent être induites sur le champ thermique dues à une mauvaise résolution du champ de vitesse.

La configuration étudiée est une conduite cylindrique de rayon R et de longueur $L = 15R$. Une condition d'adhérence est imposée sur la paroi tandis que des conditions aux limites périodiques sont utilisées dans les directions axiale (sens de l'écoulement) et azimutale. L'utilisation de conditions aux limites périodiques conditionne le choix de la taille du domaine. En effet, la taille du domaine de calcul, doit être plus grande que les périodes spatiales des structures cohérents λ_z^+ et λ_θ^+ .

A partir du nombre de Reynolds basé sur la vitesse de frottement u_τ et le rayon de la conduite R , noté Re_τ , il est possible de déterminer la taille du domaine en unité de paroi. La longueur de la conduite est alors notée L_z^+ et sa circonférence L_θ^+ , avec :

$$L_z^+ = L.Re_\tau \quad (4.1)$$

$$L_\theta^+ = 2\pi.Re_\tau \quad (4.2)$$

Le tableau 4.1 donne le récapitulatif des caractéristiques des simulations (taille du domaine, maillage) comparées à celles utilisées dans la simulation numérique directe de Eggels et al. (1994).

	DNS	Eggels et al. (1994)
N_θ	129	128
N_r	129	96
N_z	257	256
L_θ^+	1168.67	1131.52
L_z^+	2790	3584
$R\Delta\theta^+$	9.06	8.84
Δr_{min}^+	0.01	0.15
Δr_{max}^+	5	1.88
Δz^+	10.85	14

TAB. 4.1 – Paramètres des simulations comparés aux paramètres d'Eggels et al. (1994)

Selon Zang (1991), une simulation numérique directe de bonne qualité est obtenue pour des pas d'espace $\Delta x^+ < 10$ et $\Delta y^+ < 6$, où x et y représentent respectivement les directions parallèle et normale à l'écoulement.

Les auto-corrélations spatiales des composantes de vitesse avec séparation axiale sont illustrées sur la figure 4.1.a, à une distance $y^+ \simeq 5$ de la paroi. Toutes les corrélations s'annulent à une distance de l'ordre de la moitié de la conduite. On note que la composante axiale v_z nécessite une longueur plus importante que les deux autres composantes (v_r et v_θ). En effet, les structures les plus allongées correspondent aux régions basse et haute valeurs de la vitesse axiale. Ces structures apparaissent dans la région proche paroi rendant celle-ci plus restrictive. C'est pour cela qu'il n'est pas nécessaire de tracer les corrélations à deux points à des distances plus éloignées de la paroi. De même, toutes les auto-corrélations spatiales avec séparation azimutale (Figure 4.1.b) s'annulent parfaitement. La taille du domaine restreint moins l'écoulement dans la direction azimutale.

4.1.1 Profil de vitesse

Le profil moyen de la vitesse axiale normalisé par la vitesse de frottement u_τ en fonction de la distance à la paroi $y^+ = u_\tau y / \nu$ est illustré sur la figure 4.2. La simulation a été effectuée pour un nombre de Reynolds $Re = 5500$, basé sur la vitesse débitante U_b et le diamètre de la conduite D . Sur la même figure nous avons reporté le profil moyen de vitesse obtenu par Eggels et al. (1994) qui ont effectué une simulation numérique directe dans une conduite cylindrique à un nombre de Reynolds proche ($Re = 5300$). Les deux profils sont en bon accord, la sous couche visqueuse est bien résolue et suit parfaitement le profil linéaire $v_z^+ = y^+$. Dans la région

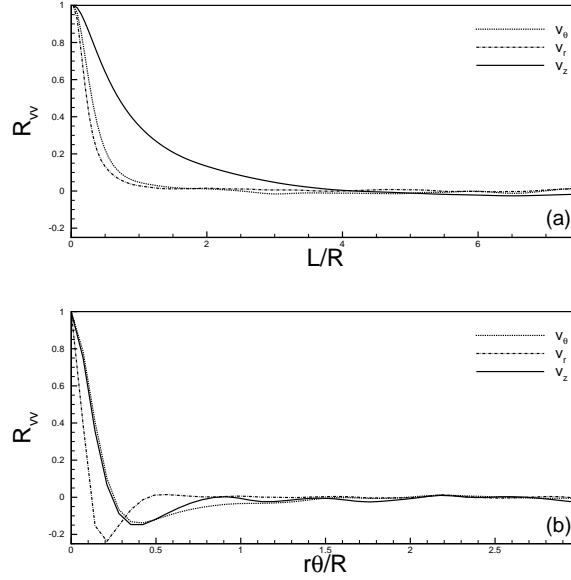


FIG. 4.1 – Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale.

logarithmique, pour des distance telles que $y^+ > 30$, le profil de vitesse ne suit pas tout à fait la loi universelle. Le décalage est aussi observé sur le profil de Eggels et al. (1994). En effet, un parfait accord avec la loi logarithmique ne peut être observé que pour des valeurs du nombre de Reynolds assez élevées (Tennekes et Lumley (1972)).

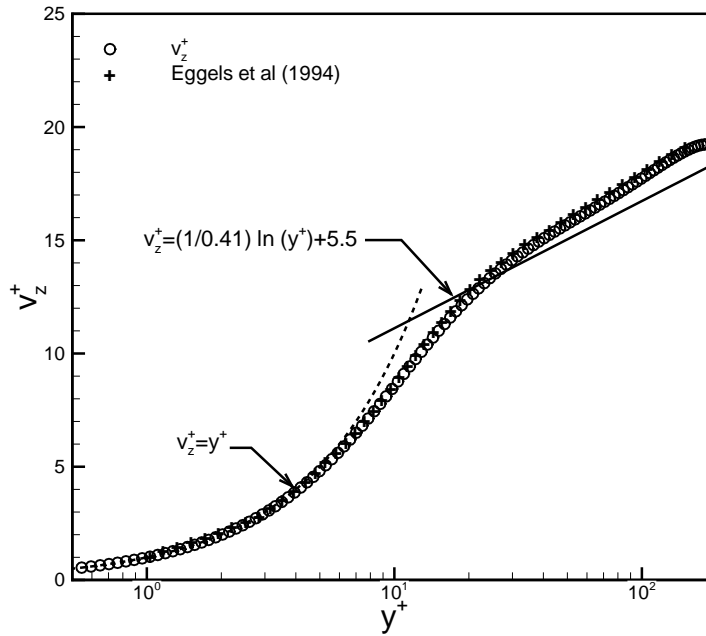


FIG. 4.2 – Profil moyen de la vitesse axiale.

Le tableau 4.2 regroupe quelques paramètres issus de notre simulation comparés aux résultats trouvés dans la littérature. Le coefficient de frottement pariétal est défini par $C_f = 2\tau_p/U_b^2$, sa valeur ($C_f = 9.25 \times 10^{-3}$) est en bon accord avec celle proposée par Eggels et al. (1994) ($C_f = 9.22 \times 10^{-3}$) ou encore celle prédite par Piller (2005) ($C_f = 9.32 \times 10^{-3}$).

TAB. 4.2 – Paramètres de la présente simulation comparés aux paramètres des simulations de la littérature

	DNS	Eggels et al. (1994)	Piller (2005)
$Re_b = U_b D/\nu$	5500	5300	5273
$Re_\tau = u_\tau R/\nu$	186	180	–
U_b/u_τ	14.78	14.72	–
$C_f(\times 10^{-3})$	9.25	9.22	9.32

Les écarts-types des fluctuations de vitesse normalisés par la vitesse de frottement en fonction de la distance à la paroi sont reportés sur la figure 4.3. Ici encore, l'accord est satisfaisant avec les résultats d'Eggels et al. (1994).

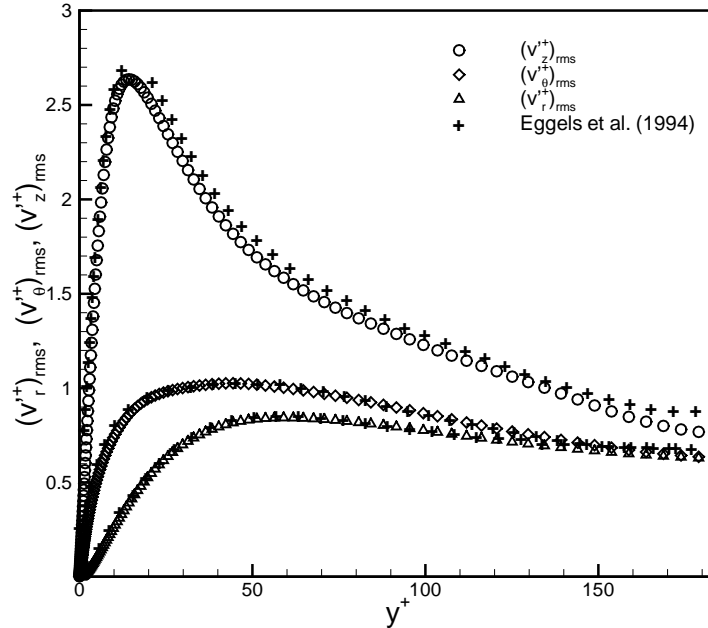


FIG. 4.3 – Ecarts-types des fluctuations de vitesse.

il n'est pas nécessaire de s'étaler davantage sur la dynamique de l'écoulement, ceci n'étant pas l'objet principal de cette thèse. Les résultats présentés jusque là ne sont qu'une validation du champ de vitesse afin d'appréhender l'étude du transport du scalaire passif (thermique). Les écoulements turbulents pleinement développés dans une conduite cylindrique ont fait l'objet de plusieurs études numériques et expérimentales. Le lecteur pourra trouver une analyse plus détaillée de la structure de l'écoulement dans les travaux de : Eggels et al. (1994), Orlandi et al. (1997).

4.2 Transport du scalaire passif

L'épaisseur de la couche limite thermique (zone de conduction), δ_t , dépend de la valeur du nombre de Prandtl. Plus le nombre de Prandtl est élevé, plus la zone de conduction thermique est fine. Autrement dit, les plus fines échelles dans les fluctuations de température diminuent avec l'augmentation du nombre de Prandtl, de manière inversement proportionnelle à $Pr^{1/2}$ (Tennekes et Lumley (1972)).

Pour des nombres de Prandtl inférieurs à 1 ($Pr \ll 1$), le rapport des couches limites thermique et dynamique varie comme $\delta_t/\delta_d = Pr^{-1/2}$. Pour des valeurs du nombre de Prandtl supérieures à 1 ($Pr > 1$), ce rapport devient $\delta_t/\delta_d = Pr^{-1/3}$. Ceci signifie que pour une simulation à grand nombre de Prandtl, le nombre de mailles doit être augmenté dans chaque direction entraînant un calcul plus coûteux. Par conséquent, pour des valeurs élevées du nombre de Prandtl, il est possible d'obtenir une résolution suffisante pour capter la sous-couche visqueuse mais insuffisante pour la zone de conduction thermique. Pour de faibles valeurs du nombre de Prandtl, le comportement inverse est observé.

Pour ces raisons, nous nous sommes limités dans cette étude à des valeurs du nombre de Prandtl inférieures à l'unité. Nous avons effectué des simulations numériques pour une gamme de nombres de Prandtl comprises entre $Pr = 0.026$ et $Pr = 1$. Les caractéristiques de l'écoulement ont été données dans la section précédente. Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 5500$ pour toutes les simulations. Le maillage utilisé est $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 129 \times 257)$ pour tous les nombres de Prandtl, ce qui correspond à une résolution $(R\Delta\theta^+, \Delta r^+, \Delta z^+) = (10, 0.01 - 5, 10)$. Seul le cas $Pr = 0.026$ a été résolu avec un maillage plus grossier $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 129 \times 257)$ soit une résolution $(R\Delta\theta^+, \Delta r^+, \Delta z^+) = (10, 0.01 - 7, 20)$.

4.2.1 Profil de température

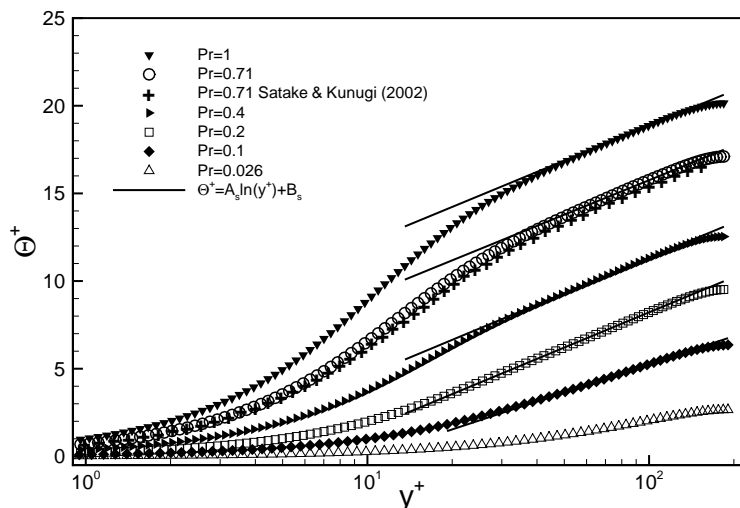


FIG. 4.4 – Profil de température moyen.

La distribution radiale du champ de température moyen normalisé par la température de

frottement ($T_\tau = q_p / \rho C_p u_\tau$) en fonction de la distance à la paroi ($y^+ = y u_\tau / \nu$) pour plusieurs nombres de Prandtl est donnée par la figure 4.4.

Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), le profil obtenu est en bon accord avec celui proposé par Sataké et Kunugi (2002) qui ont réalisé une simulation numérique directe à un nombre de Reynolds proche du notre $Re_b = 5283$. La zone logarithmique est mieux distinguée de la zone tampon lorsque le nombre de Prandtl augmente. En effet, pour les nombres de Prandtl les plus petits ($Pr = 0.026$), la partie logarithmique du profil moyen de température n'apparaît que pour des nombre de Reynolds assez élevés ($Re > 10^5$).

Afin de mieux voir l'influence du nombre de Prandtl sur l'étendue de la zone de conduction, nous avons représenté sur la figure 4.5 les profils moyens de température précédents divisés, cette fois-ci, par leurs nombres de Prandtl correspondants. Dans la région proche paroi, le profil de température suit parfaitement la droite théorique $\Theta^+ = Pr \cdot y^+$. Pour $Pr = 0.026$, la zone de conduction pénètre plus profondément dans le cœur de l'écoulement, elle est plus épaisse que la sous-couche visqueuse et s'étend jusqu'à une distance à la paroi $y^+ \simeq 30$. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, la zone de conduction devient de plus en plus fine, elle s'étend jusqu'à $y^+ \simeq 7$ pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) et est confinée dans la région $y^+ \leq 6$ pour un nombre de Prandtl égal à l'unité.

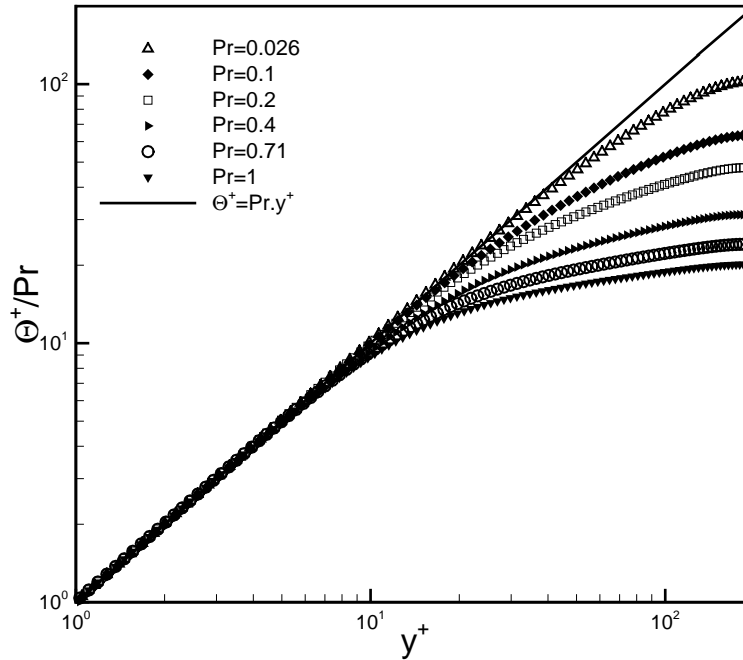


FIG. 4.5 – Profil de température moyen.

Dans la zone logarithmique, le profil de température est analogue à celui de la loi logarithmique pour le profil de vitesse universel et s'écrit sous la forme :

$$\Theta^+ = \kappa_\Theta \ln(y^+) + \beta_\Theta \quad (4.3)$$

Les valeurs des constantes κ_Θ et β_Θ dépendent du nombre de Prandtl. Dans le cas d'une

conduite circulaire fixe avec flux de chaleur constant imposé sur la paroi, Gowen et Smith (1967) ont mené plusieurs expériences afin de déterminer ces constantes. Les profils de température et les coefficients de transfert ont été mesurés pour différents types de fluides : mercure ($Pr = 0.026$), air ($Pr = 0.7$), eau ($Pr = 5$), éthylène aqueux ($Pr = 14.3$) ... et pour une gamme de nombres de Reynolds variant entre 10000 et 50000. Gowen et Smith (1967) montrent que la constante κ_Θ reste relativement insensible aux variations des nombres de Prandtl et de Reynolds tandis que la constante β_Θ est considérablement influencée par les propriétés thermiques du fluide (nombre de Prandtl) et reste indépendante du nombre de Reynolds. Ces auteurs proposent ainsi l'évolution suivante de la constante β_Θ en fonction du nombre de Prandtl :

$$\beta_\Theta = 5 \ln \left(\frac{5Pr + 1}{30} \right) + 8,55\beta + 5Pr \quad \text{où } \beta = \frac{\kappa_\Theta}{2,5} \quad (4.4)$$

La simulation numérique directe permet de déterminer d'une façon plus précise les valeurs des constantes κ_Θ et β_Θ . En dérivant la relation 4.3, la constante κ_Θ est donnée par :

$$\kappa_\Theta = \frac{1}{y^+} \left(\frac{d\Theta^+}{dy^+} \right)^{-1} \quad (4.5)$$

En injectant l'expression 4.5 dans la loi logarithmique 4.3 on obtient :

$$\beta_\Theta = \Theta^+ - \frac{1}{\kappa_\Theta} \ln y^+ \quad (4.6)$$

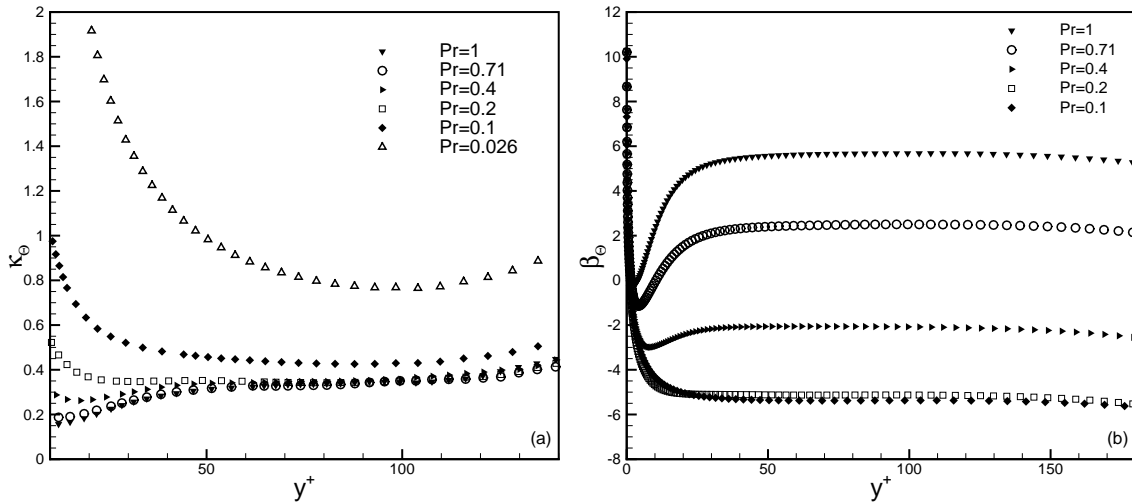


FIG. 4.6 – Constantes κ_Θ et β_Θ du profil moyen de température.

Les figures 4.6.a et 4.6.b représentent respectivement les distributions radiales de κ_Θ et β_Θ pour les différents nombres de Prandtl. Dans la région logarithmique, κ_Θ et β_Θ sont supposées être constantes. Pour le plus petit nombre de Prandtl ($Pr = 0.026$), il n'y a pas de plateau

apparent dans la distribution radiale de κ_Θ . La zone logarithmique est quasi inexistante car la simulation est effectuée à un nombre de Reynolds modéré. Le coefficient β_Θ étant directement déduit de κ_Θ , celui-ci n'est pas représenté sur la figure 4.6.b pour $Pr = 0.026$. Pour des nombres de Prandtl tels que $Pr > 0.2$, la courbe κ_Θ exhibe nettement un plateau avec une valeur $\kappa_\Theta = 0.347$. Cette valeur est en bon accord avec le résultat trouvé par Piller (2005) dans une conduite cylindrique. Elle est toutefois inférieure à la constante obtenue par Kawamura et al. (1998) dans un canal plan avec flux de chaleur imposé sur les parois ($\kappa_\Theta = 0.4$). La figure 4.6.a montre clairement que la constante κ_Θ est indépendante du nombre de Prandtl lorsque celui-ci dépasse une certaine valeur ($Pr > 0.2$). A l'inverse, comme le montre la figure 4.6.b, la constante β_Θ reste sensiblement dépendante du nombre de Prandtl.

4.2.2 Ecart-type des fluctuations de température

L'évolution radiale de l'écart type des fluctuations de température normalisé par la température de frottement est illustrée sur la figure 4.7, pour les six nombres de Prandtl et un nombre de Reynolds fixé à $Re_b = 5500$.

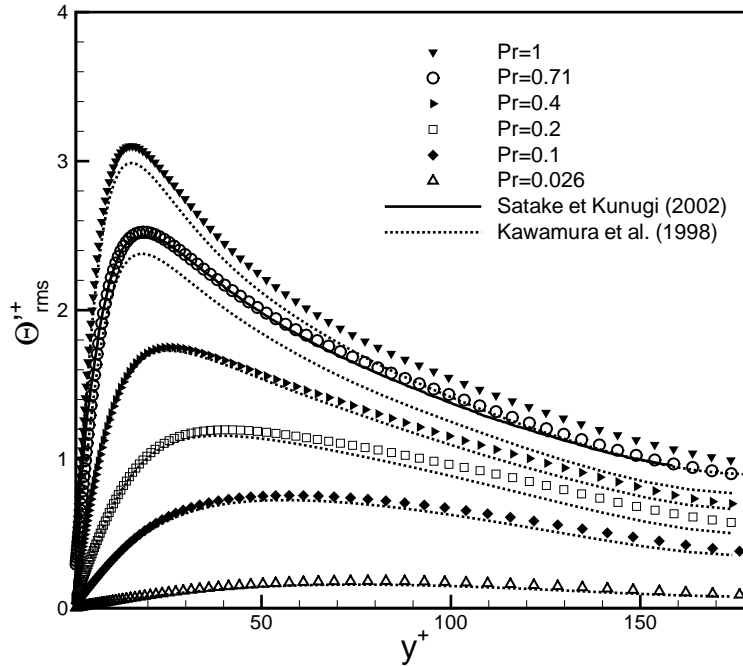


FIG. 4.7 – Ecart-type des fluctuations de température.

Nous avons comparé nos résultats avec ceux obtenus par Satake et Kunugi (2002) pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) à $Re_b = 5283$, dans une conduite cylindrique. Nous avons aussi reporté les résultats obtenus par Kawamura et al. (1998), par simulation numérique directe dans d'un canal plan, pour une large gamme de nombres de Prandtl. Un accord global satisfaisant est observé entre nos calculs et ceux de la littérature.

Dans le cas de l'air ($Pr = 0.71$), le maximum des fluctuations de température est localisé

autour de la valeur $y^+ \simeq 18$, en accord avec les calculs de Kawamura et al. (1998) et ceux de Montreuil (2000), mais également très proche des résultats de Kasagi et al. (1992) et Kim et Moin (1987) avec $y^+ \simeq 18$ et de Lyons et al. (1991) avec $y^+ \simeq 17$. Le pic des fluctuations de la température augmente et se rapproche de la paroi lorsque le nombre de Prandtl croît. Pour $Pr = 1$, il est localisé autour de $y^+ \simeq 16$. Il est à noter que le maximum des fluctuations de température est proche du maximum de l'intensité de la turbulence (pour la vitesse axiale) qui est situé à $y^+ \simeq 14$. Pour $Pr = 0.026$, la zone de conduction devient prépondérante : le maximum des fluctuations de la température se situe à $y^+ \simeq 78$.

4.2.3 Flux de chaleur turbulents

La distribution radiale du flux de chaleur turbulent axial, pour diverses valeurs du nombre de Prandtl, est représentée sur la figure 4.8. Les flux de chaleur sont adimensionnés par rapport aux vitesse et température de frottement.

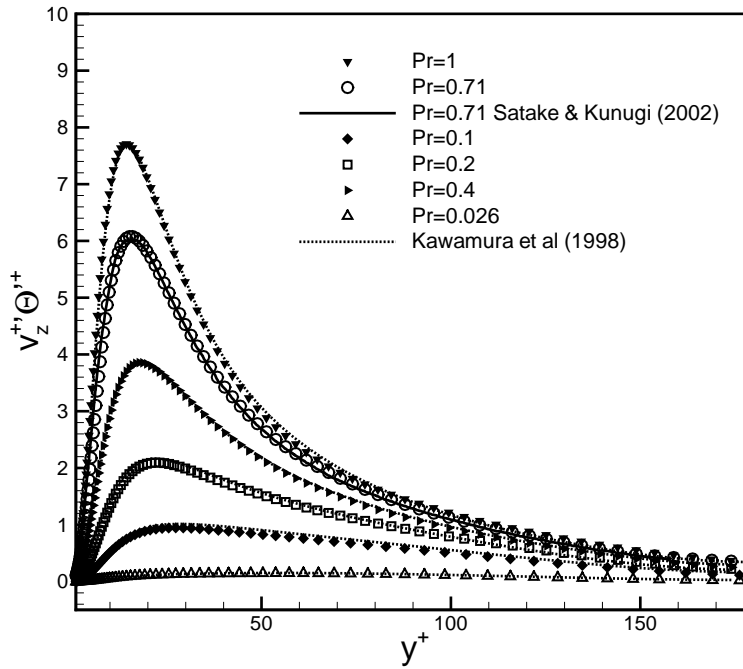


FIG. 4.8 – Flux de chaleur turbulent axial.

Sur la figure 4.8, nous avons reporté le résultat obtenu par Satake et Kunugi (2002) dans une conduite cylindrique pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), à un nombre de Reynolds, $Re = 5283$. Nos prédictions sont en bon accord avec celles de Satake et Kunugi (2002). Le flux de chaleur axial atteint son maximum pour $y^+ \sim 16$. Cette valeur se situe entre le maximum des fluctuations de la vitesse axiale ($y^+ \sim 14$) et le maximum des fluctuations de température ($y^+ \sim 18$). Lorsque l'épaisseur de la région de conduction diminue, autrement dit lorsque le nombre de Prandtl augmente, l'évolution du maximum du flux de chaleur axial est similaire à celui de l'écart-type des fluctuations de la température (cf. figure 4.7) : il augmente en se

rapprochant de la paroi. La position du maximum des fluctuations du flux de chaleur passe de $y^+ \simeq 57$ pour le nombre de Prandtl $Pr = 0.026$, à $y^+ \simeq 14$ pour le nombre de Prandtl $Pr = 1$.

Nous avons reporté sur la figure 4.8 les résultats obtenus par Kawamura et al. (1998) par simulations numériques directes dans un canal plan. Indépendamment du nombre de Prandtl, la géométrie du canal semble n'avoir pratiquement pas d'effet sur le flux turbulent axial.

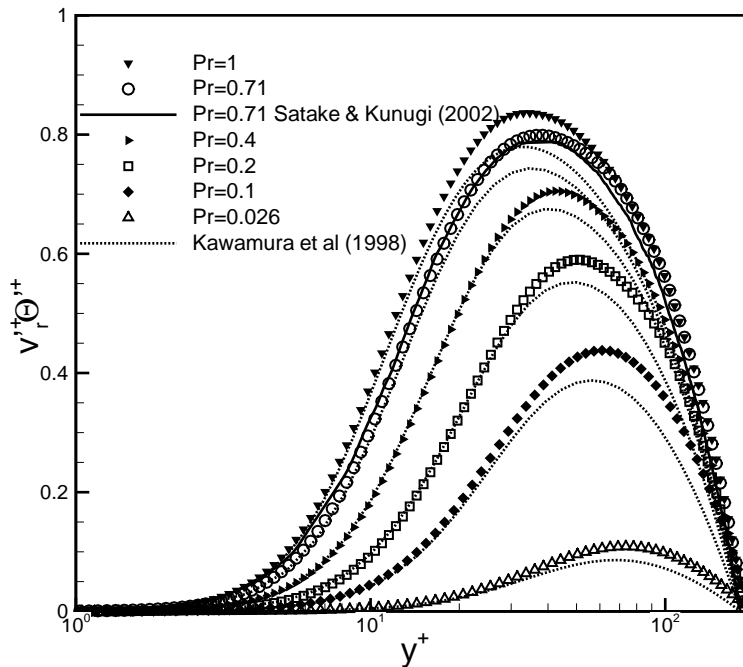


FIG. 4.9 – Flux turbulent radial.

Le flux de chaleur normal à la paroi adimensionné par rapport aux vitesses et température de frottement est illustré sur la figure 4.9, pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl. Comparé au flux de chaleur axial, le flux radial est d'intensité plus faible et la position de son maximum est plus éloignée de la paroi que dans le cas du flux de chaleur axial.

L'augmentation du nombre de Prandtl entraîne un décalage du maximum du flux de chaleur radial vers la paroi, ainsi qu'une amplification de la valeur de ce maximum. Le pic se déplace de $y^+ \simeq 74$ pour un nombre de Prandtl, $Pr = 0.026$, à $y^+ \simeq 38$ pour un nombre de Prandtl, $Pr = 0.71$ et $y^+ \sim 34$ pour un nombre de Prandtl, $Pr = 1$.

Contrairement au flux de chaleur turbulent axial, et indépendamment du nombre de Prandtl, la géométrie a un effet non négligeable sur le flux de chaleur turbulent normal à la paroi. Ce dernier est légèrement plus intense et son pic plus décalé vers le cœur de l'écoulement dans la conduite cylindrique comparé au canal plan. Piller (2005) avait relevé la même observation dans le cas d'un écoulement d'air ($Pr = 0.71$). Cette tendance reste donc valable pour les nombres de Prandtl inférieurs à l'unité.

Le flux de chaleur total est la somme des flux moléculaire (conductif) et turbulent. Il se déduit de l'équation de l'énergie moyenne et s'écrit :

$$\frac{1}{Pr} \frac{\partial \Theta^+}{\partial y^+} - \overline{v_r'^+ \Theta'^+} \quad (4.7)$$

Nous avons représenté sur la figure 4.10, le flux de chaleur turbulent radial ainsi que le flux de chaleur total pour deux valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 1$ et $Pr = 0.026$). Pour $Pr = 1$, on constate qu'au voisinage de la paroi, le flux de chaleur est essentiellement conductif. C'est là où la résistance thermique est principalement située. Au cœur de l'écoulement, c'est le flux de chaleur turbulent qui prédomine et la chaleur diffuse plus rapidement. Pour $Pr = 0.026$ la diffusion moléculaire est prépondérante sur une large partie de la section de la conduite, confirmant l'indication précédente relative à la zone de conduction qui pénètre plus profondément dans la zone centrale de l'écoulement lorsque le nombre de Prandtl décroît.

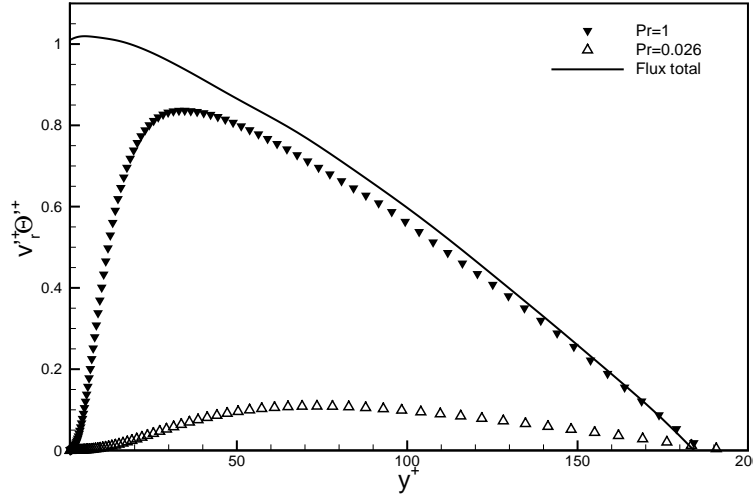


FIG. 4.10 – Flux de chaleur turbulent radial et flux de chaleur total.

4.3 Comportements asymptotiques proche paroi

4.3.1 Ecart-type des fluctuations de température

Au voisinage de la paroi, les fluctuations de vitesse peuvent être développées en terme de y^+ telles que :

$$v_z'^+ = b_z y^+ + c_z y^{+2} + \dots \quad (4.8)$$

$$v_r'^+ = c_r y^{+2} + d_r y^{+3} + \dots \quad (4.9)$$

$$v_\theta'^+ = b_\theta y^+ + c_\theta y^{+2} + \dots \quad (4.10)$$

Par ailleurs, le gradient de température à la paroi est donné par la relation :

$$\frac{1}{Pr} \frac{d\Theta^+}{dy^+} = 1 + \frac{q'_p}{\bar{q}_p}, \quad y \rightarrow 0. \quad (4.11)$$

où \bar{q}_p est le flux de chaleur moyen pariétal et q'_p sa fluctuation. En décomposant les grandeurs de l'équation 4.11 comme étant la somme d'une grandeur moyenne et d'une fluctuation, mais également, en posant $\Theta^+ = Pr.y^+ + \dots$, la fluctuation de température Θ'^+ va satisfaire l'équation suivante :

$$\frac{1}{Pr} \frac{d\Theta'^+}{dy^+} = \frac{q'_p}{\bar{q}_p}, \quad y \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

La fluctuation de température peut être donc développée comme suit :

$$\Theta'^+ = Pr(b_\Theta y^+ + c_\Theta y^{+2} + \dots) \quad (4.13)$$

Le coefficient b_Θ peut dépendre aussi du nombre de Prandtl. Par exemple, pour un fluide extrêmement conducteur, la fluctuation du flux de chaleur q'_p tend vers 0. Cela indique que pour un fluide à nombre de Prandtl très faible, le coefficient b_Θ aurait tendance à diminuer.

La figure 4.11 indique clairement que les fluctuations de température tendent linéairement vers la valeur zéro en se rapprochant de la paroi et confirment le comportement asymptotique $\Theta'^+ \simeq Pr.b_\Theta.y^+$. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, le coefficient b_Θ devient indépendant de ce dernier ; sa valeur converge vers $b_\Theta \simeq 0.41$ pour $Pr = 1$. Ces tendances confirment les observations de Kawamura et al. (1998). Dans le canal plan, la constante $b_\Theta \simeq 0.38$. Dans le cas d'une paroi isotherme, Teitel et al. (1993) donnent une corrélation proche paroi ($y^+ < 6$) pour le comportement des fluctuations de température $\Theta'^+ = 0.36Pr.y^+$. La différence entre notre valeur et celle obtenue par Kawamura et al. (1998) peut être attribuée à l'effet de courbure. Notons également que le nombre Reynolds basé sur la vitesse de frottement ($Re_\tau = 186$) est légèrement plus élevé que celui de Kawamura et al. (1998) ($Re_\tau = 180$). Ces auteurs montrent par ailleurs que le coefficient b_Θ augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds (Kawamura et al. (1999)). Cependant, pour le plus petit nombre de Prandtl ($Pr = 0.026$), le coefficient b_Θ vaut environ 1.6, en bon accord avec le résultat de Kawamura et al. (1998).

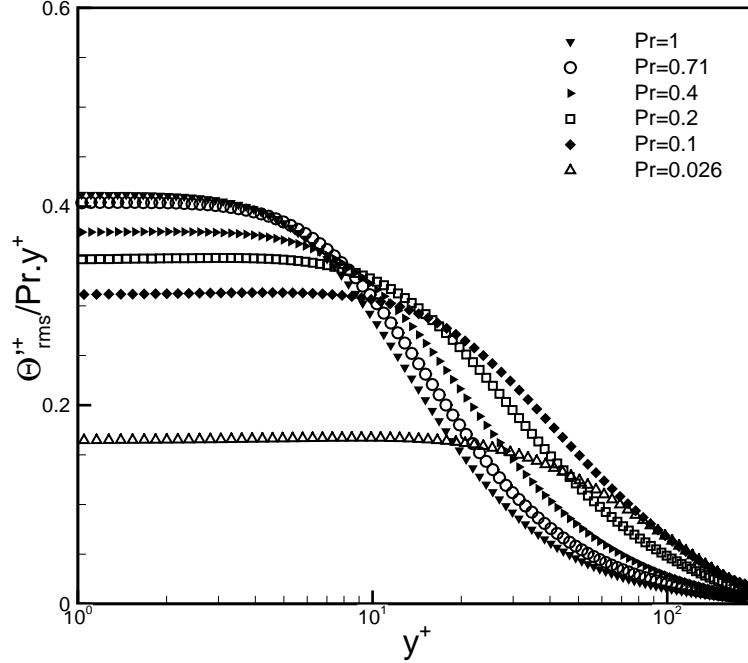


FIG. 4.11 – Ecart-types des fluctuations de température adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.

4.3.2 Flux de chaleur turbulents

Il est possible de retrouver le comportement asymptotique du flux de chaleur turbulent axial en multipliant les équations 4.8 et 4.13 :

$$\overline{v_z'^+ \Theta'^+} = Pr(\overline{b_z b_\Theta} y^{+2} + \overline{c_z b_\Theta} y^{+3} + \dots) \quad (4.14)$$

Au voisinage immédiat de la paroi le flux de chaleur turbulent axial évolue donc comme suit :

$$\overline{v_z'^+ \Theta'^+} / Pr \simeq \overline{b_z b_\Theta} y^{+2}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (4.15)$$

Sur la figure 4.12 est représenté le flux de chaleur axial, rapporté au nombre de Prandtl correspondant, pour les différents nombres de Prandtl. Au voisinage de la paroi, le flux de chaleur doit tendre vers zéro en suivant le comportement asymptotique $\overline{v_z'^+ \Theta'^+} / Pr \simeq \overline{b_z b_\Theta} y^{+2}$. La figure 4.12 montre clairement que le coefficient $\overline{b_z b_\Theta}$ tend vers la valeur 0.13 lorsque le nombre de Prandtl augmente. Cette valeur est en bon accord avec le résultat de Kawamura et al. (1998), $\overline{b_z b_\Theta} \sim 0,12$ dans un canal plan. La valeur du coefficient $\overline{b_z b_\Theta}$ décroît lorsque le nombre de Prandtl devient très faible, car le coefficient b_Θ diminue. Ces résultats confirment que le coefficient b_Θ est pratiquement indépendant du nombre de Prandtl pour $Pr > 0.2$

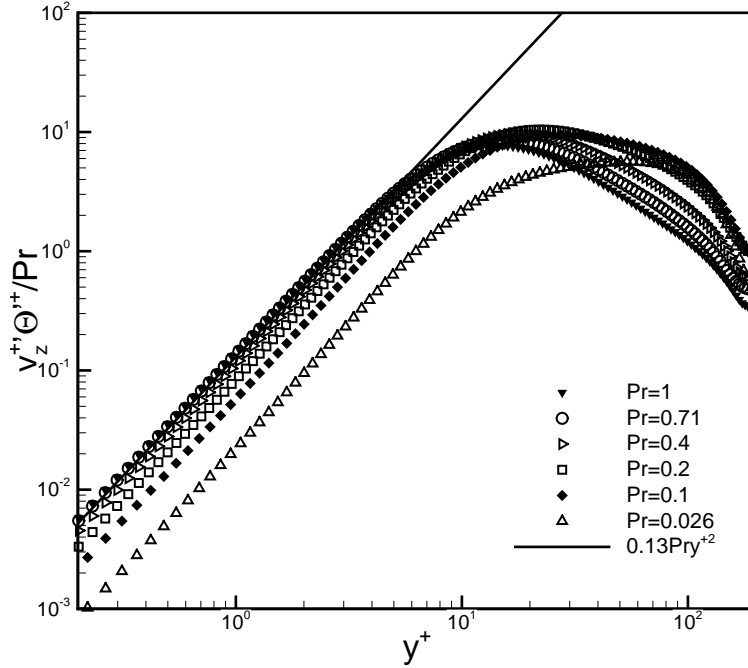


FIG. 4.12 – Flux turbulents axiaux adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.

Le flux de chaleur radial, comme le montre la figure 4.13, tend linéairement vers la valeur zéro pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl, lorsqu'on se rapproche de la paroi, en suivant le comportement asymptotique (obtenu en multipliant les équations 4.9 et 4.13) :

$$\overline{v_r'^+ \Theta'^+} = Pr(\overline{c_r b_\Theta} y^{+3} + \overline{d_r b_\Theta} y^{+4} + \dots) \quad (4.16)$$

Soit au voisinage immédiat de la paroi :

$$\overline{v_r'^+ \Theta'^+} / Pr \simeq \overline{c_r b_\Theta} Pr y^{+3}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

Selon Kawamura et al. (1998), $\overline{c_r b_\Theta} \simeq 7 \times 10^{-4}$ dans un canal plan. Cette valeur varie selon les auteurs. D'après Chapman et Kuhn (1986), le comportement asymptotique en y^{+3} est suivi jusqu'à une distance de la paroi $y^+ \simeq 3$ ($y^+ \simeq 5$ selon Myong et al. (1989) dans une conduite cylindrique) et sa valeur varie entre 5 et 7×10^{-4} . La figure 4.13 montre que ce comportement asymptotique est assez bien suivi jusqu'à $y^+ \sim 6$. Notons que le coefficient $\overline{c_r b_\Theta}$ est indépendant du nombre de Prandtl lorsque $Pr \geq 0.2$, sa valeur tend vers 7×10^{-4} ce qui est en très bon accord avec les résultats trouvés dans la littérature.

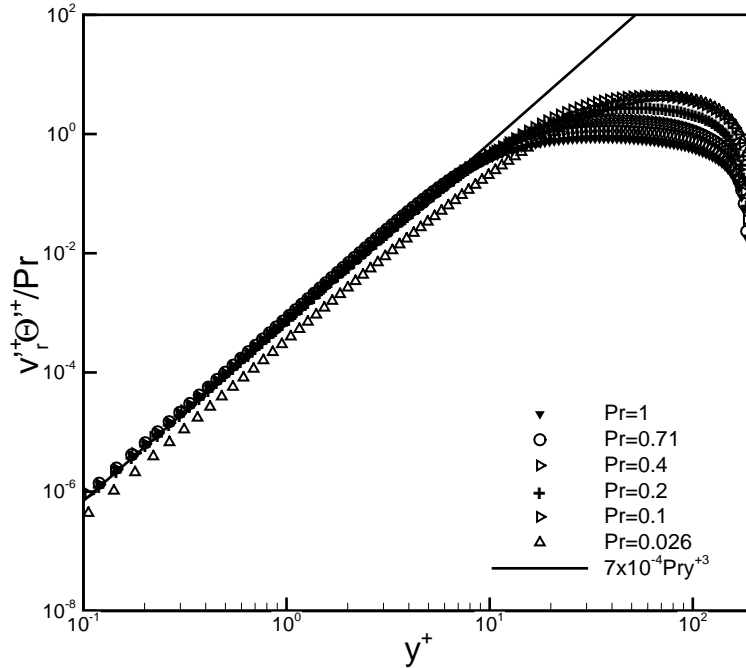
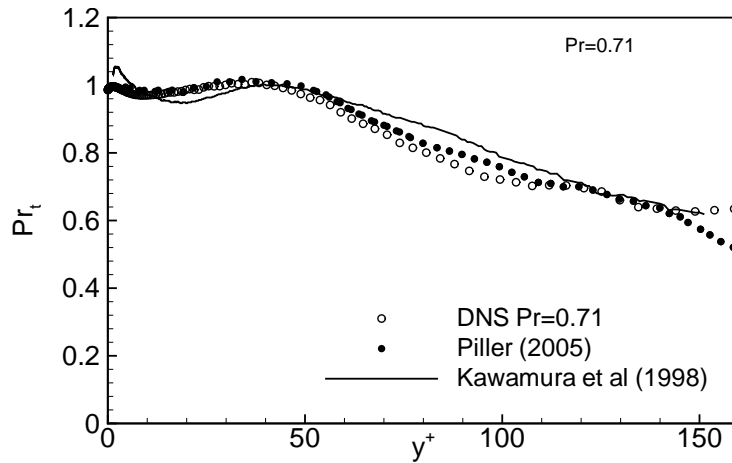


FIG. 4.13 – Flux turbulents radiaux adimensionnés par les nombres de Prandtl correspondants.

4.3.3 Nombre de Prandtl turbulent

FIG. 4.14 – Nombre de Prandtl turbulent pour un écoulement d'air $Pr = 0.71$.

Le nombre de Prandtl turbulent est défini comme étant le rapport entre la viscosité turbulente ν_t et la diffusivité thermique turbulente α_t . Il est d'une grande importance pour la détermination du champ thermique à partir d'un champ de vitesse connu. La figure 4.14 montre l'évolution du nombre de Prandtl turbulent pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$). Nous avons reporté sur la même figure le résultat obtenu par Piller (2005) dans une conduite

cylindrique ainsi que celui de Kawamura et al. (1998) dans un canal plan. Les trois profils sont en bon accord, la géométrie de la paroi ne semble pas trop affecter la distribution du Prandtl turbulent. Ces évolutions du nombre de Prandtl turbulent indiquent qu'au voisinage de la paroi, la diffusion de quantité de mouvement est plus importante que la diffusion de chaleur.

De la même façon que l'écart type des fluctuations de température et les flux de chaleur turbulents, il est possible de déterminer l'évolution asymptotique du nombre de Prandtl turbulent au voisinage immédiat de la paroi. Le nombre de Prandtl turbulent est donné par la relation suivant :

$$Pr_t = \frac{\nu_t}{\alpha_t} \quad (4.18)$$

où ν_t est la viscosité turbulente donnée par :

$$\nu_t = \frac{\overline{v_z'^+ v_r'^+}}{dv_z^+/dy^+} \quad (4.19)$$

et α_t est la diffusivité thermique turbulente donnée par :

$$\alpha_t = \frac{\overline{v_r'^+ \Theta'^+}}{d\Theta^+/dy^+} \quad (4.20)$$

En considérant qu'au voisinage de la paroi $\Theta^+ = Pr y^+$ et en utilisant les expressions 4.8 4.9 et 4.16, la viscosité turbulente ν_t et la diffusivité thermique turbulente α_t varient proportionnellement à y^{+3} selon :

$$\nu_t = \overline{c_r b_z} y^{+3}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (4.21)$$

$$\alpha_t = \overline{c_r b_\Theta} y^{+3}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (4.22)$$

Finalement, dans le cas d'une paroi isotherme, le nombre de Prandtl turbulent au voisinage de la paroi est constant :

$$Pr_t = \frac{\overline{c_r b_z}}{\overline{c_r b_\Theta}}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (4.23)$$

Nous avons calculé, à partir du profil de vitesse axiale et de la tension de Reynolds $\overline{v_z'^+ v_r'^+}$, la valeur du coefficient $\overline{c_r b_r}$; celui-ci vaut 7×10^{-4} au voisinage de la paroi. Cette valeur est en bon accord avec celle proposée par Mansour et al. (1988) qui trouvent également 7×10^{-4} . Nous avons vu précédemment, dans l'évolution asymptotique du flux turbulent radial, que la constante $\overline{c_r b_\Theta}$ tend vers la valeur 7×10^{-4} lorsque le nombre de Prandtl augmente. Cela signifie que pour des nombres de Prandtl tels que $Pr \geq 0.2$ le nombre Prandtl turbulent tend vers $Pr_t \simeq 1$ lorsqu'on se rapproche de la paroi.

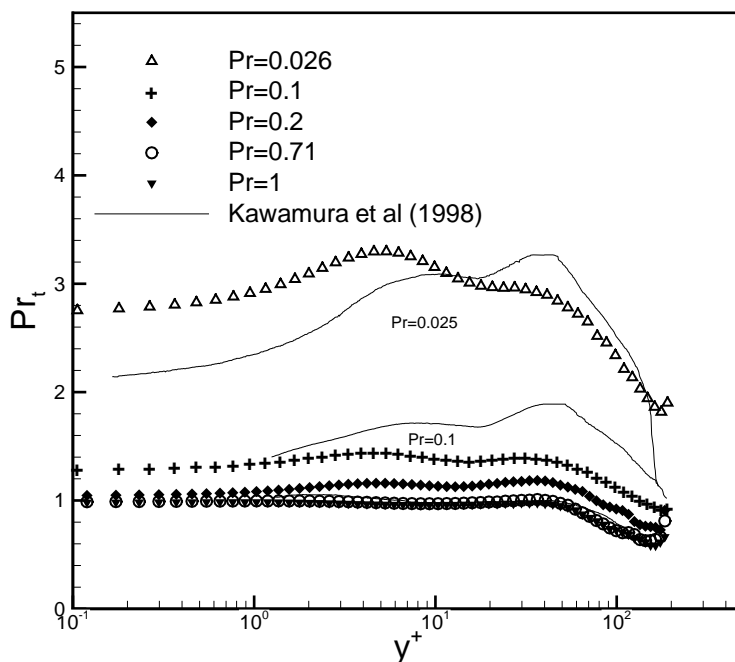


FIG. 4.15 – Variation du nombre de Prandtl turbulent en fonction du nombre de Prandtl.

La figure 4.15 présente la distribution du nombre de Prandtl turbulent pour différentes valeurs du nombre de Prandtl en fonction de la distance à la paroi. Nous avons reporté sur la figure les résultats obtenus par Kawamura et al. (1998) dans un canal plan pour deux nombres de Prandtl $Pr = 0.1$ et $Pr = 0.026$. Lorsque le nombre de Prandtl diminue, la différence entre la distribution du nombre de Prandtl turbulent dans un canal plan et dans une conduite cylindrique s'accroît.

Les distributions radiales du nombre de Prandtl turbulent obtenues par nos simulations numériques sont en accord avec le comportement asymptotique que nous avons développé précédemment. Pour des nombres de Prandtl tels que $Pr \geq 0.2$, le nombre de Prandtl turbulent est à la fois indépendant de la distance à la paroi y^+ et du nombre de Prandtl moléculaire. Sa valeur tend vers 1. Ce comportement a été démontré dans le canal plan jusqu'à des valeurs de $Pr = 2$ par Antonia et Kim (1994) et $Pr = 5$ par Kawamura et al. (1998). Cette conclusion explique en partie le choix d'une valeur constante proche de l'unité du nombre de Prandtl turbulent dans les calculs théoriques ou dans les modèles de sous mailles.

4.4 Moments statistiques d'ordre 3 et 4

Les moments d'ordre 3 et 4 apparaissent dans les équations de transport pour les contraintes de Reynolds sous la forme de diffusion turbulente. Ces moments donnent des indications supplémentaires sur la distribution des fluctuations. Le coefficient de dissymétrie S et le facteur d'aplatissement F sont définis pour la variable fluctuante Θ' comme suit :

$$S(\Theta') = \frac{\overline{\Theta'^3}}{(\overline{\Theta'^2})^{3/2}} \quad (4.24)$$

$$F(\Theta') = \frac{\overline{\Theta'^4}}{(\overline{\Theta'^2})^2} \quad (4.25)$$

Le coefficient S permet de mesurer la dissymétrie de la distribution d'une quantité fluctuante par rapport à une distribution gaussienne. Dans le cas où la densité de probabilité des fluctuations d'une des variables (composantes de vitesse ou température), dans les zones turbulentes, est une fonction aléatoire gaussienne on a $S = 0$ et $F = 3$. Les valeurs non nulles de S indiquent donc le degré de dissymétrie des fluctuations aléatoires. Les valeurs positives de S signifient que les grandes fluctuations positives sont plus probables que les grandes fluctuations négatives et inversement. Les valeurs du facteur d'aplatissement supérieures à 3 indiquent l'aspect intermittent des fluctuations.

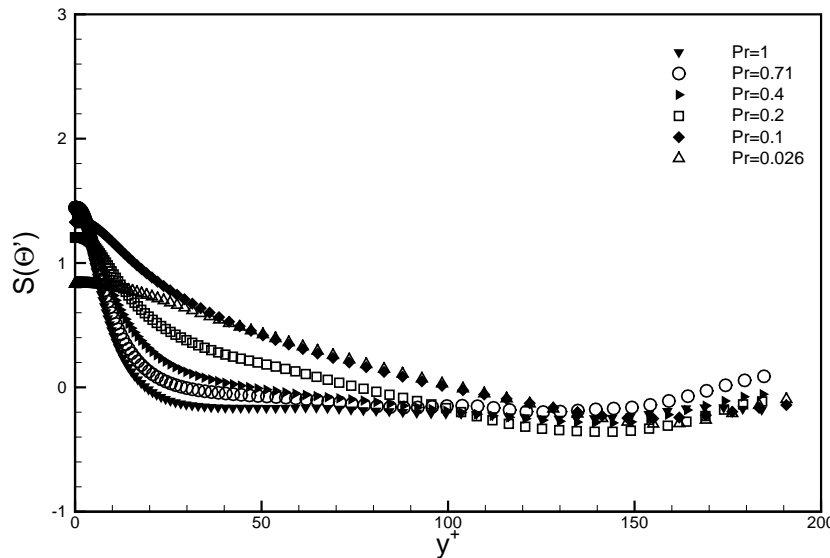


FIG. 4.16 – Coefficient de dissymétrie.

Les figures 4.16 et 4.17 représentent respectivement les coefficients de dissymétrie et d'aplatissement des fluctuations de température pour la gamme de valeurs de Prandtl étudiée. Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), le coefficient de dissymétrie $S(\Theta')$ vaut 1.4 à la paroi. Cette valeur est légèrement supérieure à celle proposée par Piller (2005) ($S(\Theta') \simeq 1.2$). On note aussi que cette valeur est différente du coefficient de dissymétrie des fluctuations de la vitesse axiale $S(v'_z) \simeq -0.25$. Cette différence est liée aux conditions aux limites différentes imposées. La valeur non nulle et positive de $S(\Theta')$ à la paroi indique que les fluctuations de température sont asymétriques dans cette région et que les grandes fluctuations positives sont les plus probables. Ceci confirme le caractère intermittent au voisinage de la paroi tandis que la turbulence est presque homogène au cœur de l'écoulement. En effet, $S(\Theta')$ tend assez rapidement vers la valeur d'une gaussienne "0" lorsqu'on s'approche du centre de la conduite.

Le coefficient d'aplatissement $F(\Theta')$ à un comportement similaire au coefficient de dissymétrie. Pour ($Pr = 0.71$), sa valeur est $S(\Theta') \simeq 7$ à la paroi. Cette valeur est surestimée par rapport à celle trouvée par Piller (2005) ($F(\Theta') \simeq 5$). Ainsi, c'est au voisinage de la paroi qu'un phénomène d'intermittence apparaît, tandis qu'au loin, la turbulence est pratiquement homogène.

Lorsque le nombre de Prandtl diminue, les valeurs de $S(\Theta')$ et $F(\Theta')$ diminuent aussi indiquant que l'intermittence observée au voisinage de la paroi est plus prononcée pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl. De plus, l'intersection de la courbe $S(\Theta')$ avec l'axe 0 s'éloigne de la paroi. Cela signifie que, même si l'intermittence est moins forte pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl, celle-ci s'étend plus loin au cœur de l'écoulement.

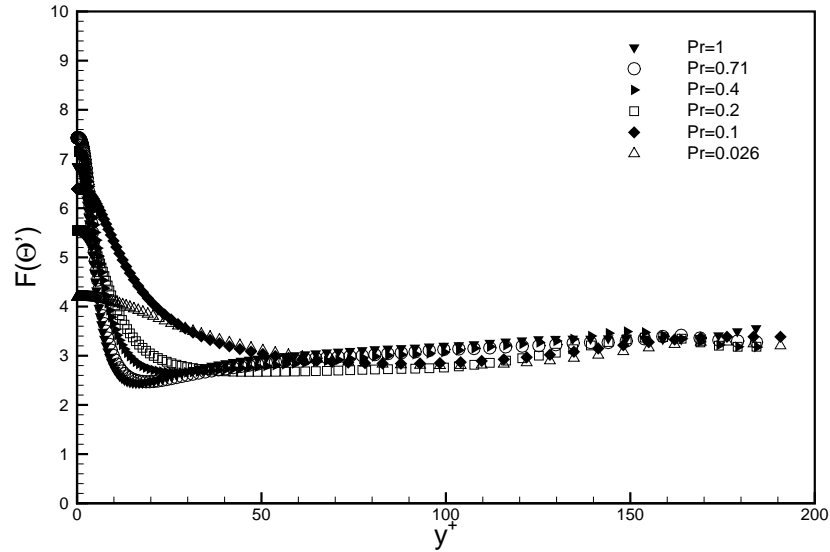
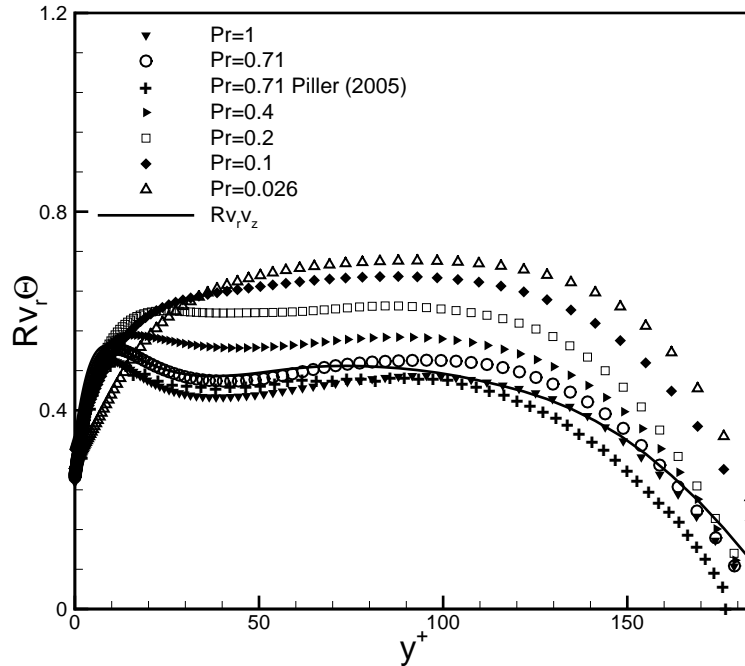


FIG. 4.17 – Coefficient d'aplatissement.

4.5 Interactions entre le champ thermique et le champ dynamique

4.5.1 Coefficients de corrélation

Les coefficients de corrélation entre les champs de vitesse et de température fournissent des estimations quantitatives concernant l'interaction entre les caractéristiques thermiques et cinématiques des fluctuations turbulentes. Sur la figure 4.18 sont représentés les coefficients de corrélation $R_{v_r, \Theta}$ (corrélation entre fluctuations de vitesse radiale et fluctuations de température) et R_{v_r, v_z} (corrélation entre fluctuations de vitesse radiale et fluctuations de vitesse axiale), pour diverses valeurs du nombre de Prandtl. On constate que les deux courbes sont quasiment identiques pour les valeurs les plus élevées du nombre de Prandtl ($Pr \geq 0.71$). Cette concordance, indique que le flux de chaleur turbulent radial et la seule composante non nulle des tensions de Reynolds sont générés par des mécanismes de turbulence similaires.


 FIG. 4.18 – Coefficients de corrélation $R_{v_r \Theta}$ et $R_{v_r v_z}$.

Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), le coefficient de corrélation $R_{v_r \Theta}$ croît avec la distance à la paroi, dans la sous-couche de conduction ($y^+ < 10$) pour atteindre un maximum dont la valeur est de l'ordre de 0.5. Loin de la paroi, pour des distances telles que $30 \leq y^+ \leq 100$, les fluctuations de la température et les fluctuations de la vitesse radiale sont bien corrélées. La valeur du coefficient de corrélation est $R_{v_r \Theta} \simeq 0.46$. Notons que le coefficient de corrélation entre les fluctuations des vitesses axiale et radiale vaut $R_{v_r v_z} \simeq 0.47$. Ce comportement est retrouvé dans la majorité des études faites sur une couche limite ou dans un canal plan. Cependant, les valeurs changent d'un auteur à un autre. Le tableau 4.3 regroupe quelques valeurs des coefficients de corrélation relevées dans la littérature :

Auteurs	Configurations	$R_{v_r \Theta}$	$R_{v_r v_z}$
Présent travail	conduite cylindrique	0.46	0.47
Hishida et al. (1986)	conduite cylindrique	0.45	0.50
Bremhorst et al. (1973)	conduite cylindrique	0.47	0.43
Subramania et al. (1981)	canal plan	0.49	0.47
Verriopoulos. (1983)	canal plan	0.57	0.47

 TAB. 4.3 – Valeurs des coefficients de corrélation $R_{v_r \Theta}$ et $R_{v_r v_z}$ ($Pr = 0.71$)

Lorsque le nombre de Prandtl diminue, on constate une nette augmentation du coefficient de corrélation $R_{v_r \Theta}$. Pour des distances telles que $30 \leq y^+ \leq 100$, sa valeur passe de 0.46 (pour $Pr = 1$) à 0.7 pour ($Pr = 0.026$). Pour des fluides très conductifs, les fluctuations de température sont plus fortement corrélées avec les fluctuations de la vitesse radiale.

La figure 4.19 illustre la distribution du coefficient de corrélation entre les fluctuations de la vitesse axiale et les fluctuations de la température, en fonction de la distance à la paroi. Pour $Pr = 0.71$, le coefficient de corrélation $R_{v_z\Theta}$ est plus grand que le coefficient $R_{v_r\Theta}$ suggérant que les fluctuations de température sont plus fortement corrélées avec les fluctuations de la vitesse axiale qu'avec celles de la vitesse radiale. La valeur maximum qu'atteint $R_{v_z\Theta}$ est de l'ordre de 0.95, ce maximum est situé à $y^+ \simeq 8$. Au centre de la conduite, contrairement au coefficient de corrélation $R_{v_r\Theta}$, $R_{v_z\Theta}$ diminue mais ne s'annule pas.

Lorsque le nombre de Prandtl diminue, $R_{v_z\Theta}$ diminue aussi. Les fluctuations de température sont moins bien corrélées avec les fluctuations de la vitesse axiale alors qu'elles deviennent mieux corrélées aux fluctuations de la vitesse radiale. La chaleur est moins bien évacuée dans le sens de l'écoulement.

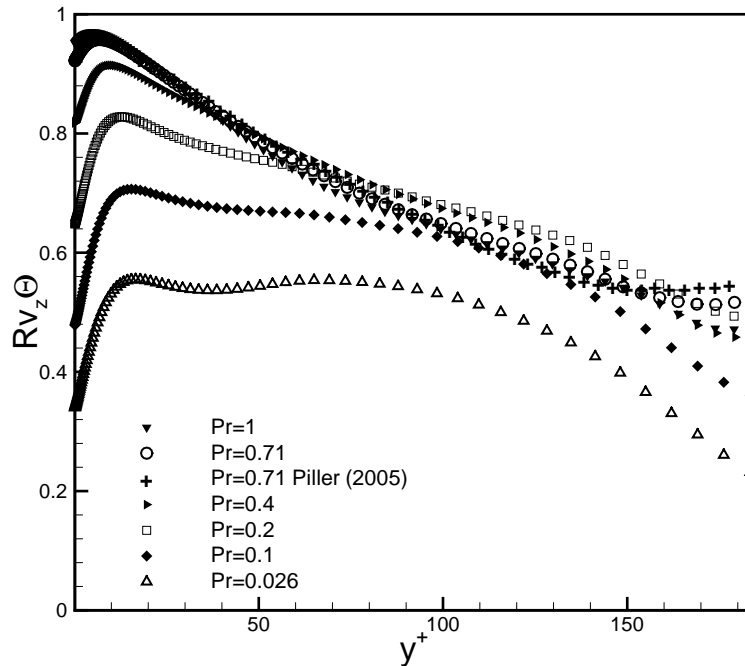


FIG. 4.19 – Coefficient de corrélation $R_{v_z\Theta}$.

4.5.2 Fonctions de densité de probabilité

Les fonctions de densité de probabilité permettent la vérification des propriétés statistiques d'une variable aléatoire. Il est intéressant d'étudier les densités de probabilité des fluctuations de vitesses longitudinale et normale à l'écoulement.

Les densités de probabilité des fluctuations des trois composantes de vitesse v'_r , v'_z et v'_θ sont respectivement représentées sur les figures 4.20, 4.21 et 4.22 à différentes distances de la paroi ($y^+ \simeq 5$, $y^+ \simeq 14$ et $y^+ \simeq 100$).

On observe dans la région pariétale, à $y^+ \simeq 5$, un écart notable de la distribution des fluctuations de la vitesse longitudinale v'_z par rapport à la distribution gaussienne, synonyme

d'intermittence dans l'écoulement. A cette position, le pic de la distribution est situé dans la partie des v'_z négatifs. Les fluctuations négatives de vitesse longitudinale sont plus nombreuses. Cependant, l'amplitude des fluctuations positives est plus grande.

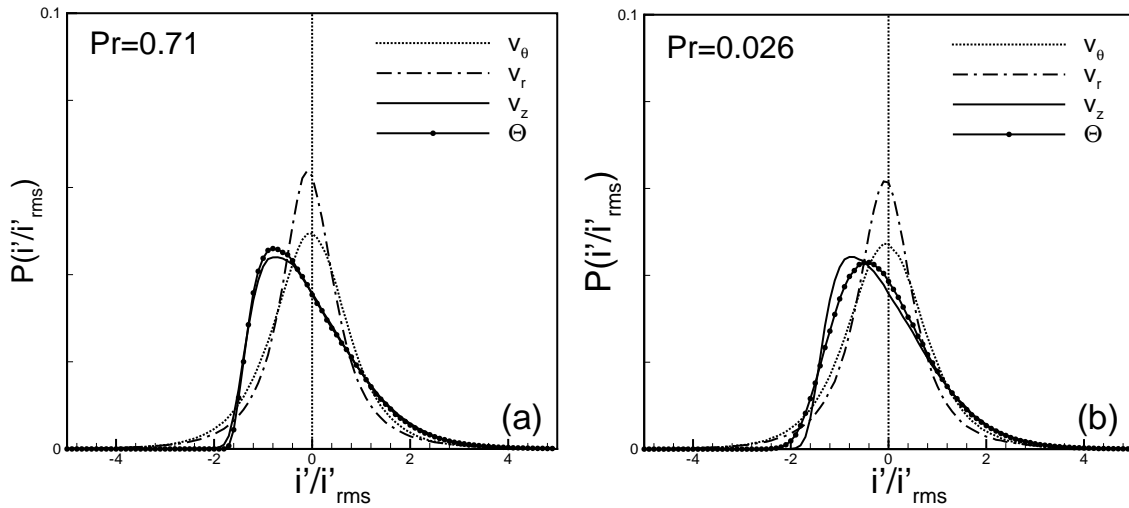


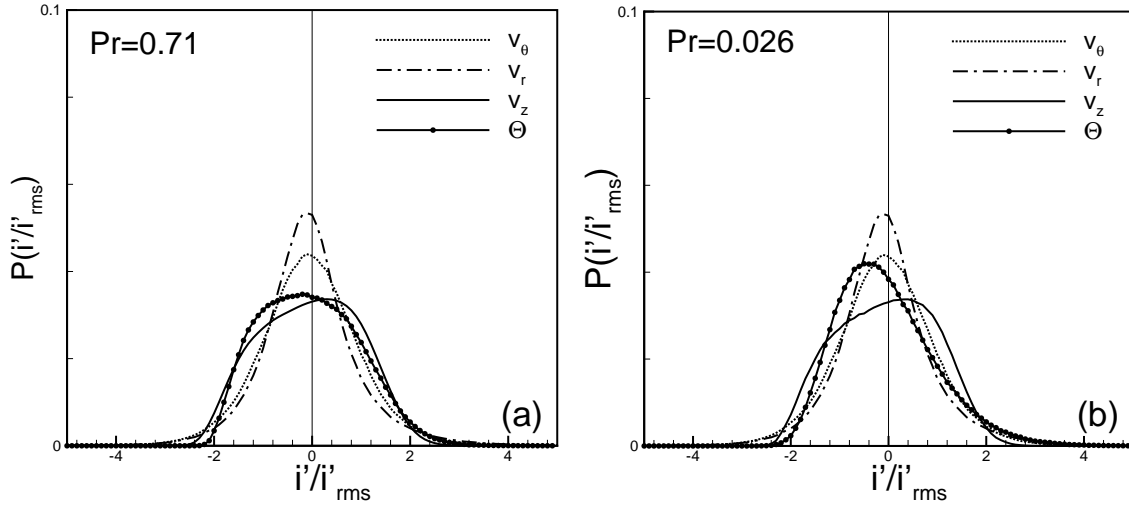
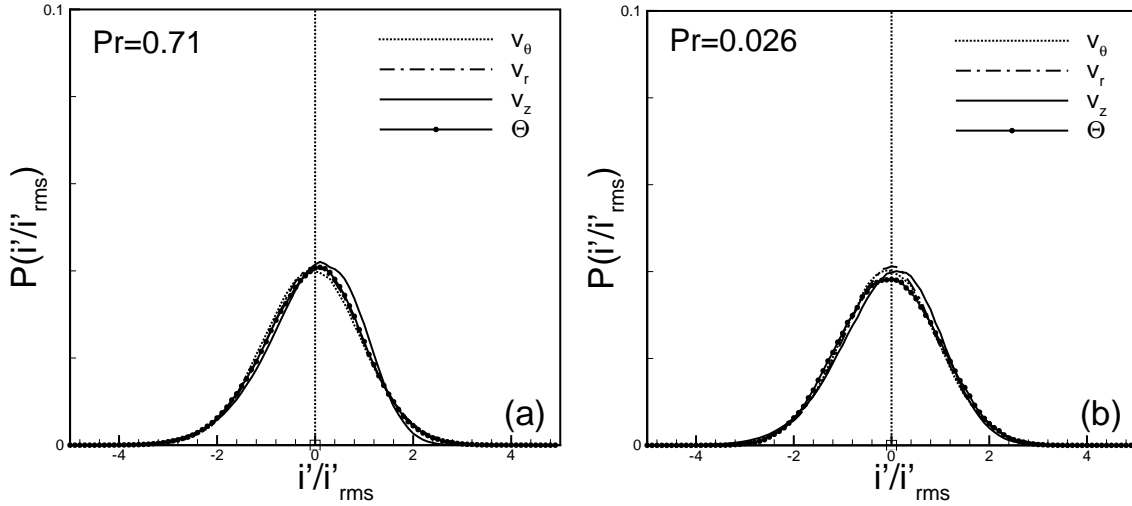
FIG. 4.20 – Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 5$.

Dans la zone tampon, à $y^+ \simeq 14$, le coefficient de dissymétrie des fluctuations de la vitesse axiale $S(v'_z)$ est proche de zéro exprimant le fait que la distribution de v'_z présente presque autant de grandes fluctuations positives que de grandes fluctuations négatives alors que le coefficient d'aplatissement $F(v'_z)$ atteint sa valeur minimale. Cette position correspond à la production maximale de l'énergie turbulente puisque l'intensité de la turbulence y atteint sa valeur maximale. En même temps, la distribution de v'_z montre une dissymétrie positive et un aplatissement supérieur à la valeur gaussienne. Ceci met en évidence le mouvement d'éjection du fluide de la paroi vers l'extérieur de la couche limite.

A partir de la distance $y^+ \simeq 15$ et jusqu'à une distance $y^+ \simeq 100$, les distributions de v'_r et v'_z se rapprochent graduellement de la distribution gaussienne. A $y^+ \simeq 100$, $S(v'_z)$ est légèrement négatif (-0.25) et $F(v'_z)$ proche de la valeur 3 (3.1). A la même position, $S(v'_r)$ et $F(v'_r)$ atteignent leurs valeurs minimales respectives de -0.13 et 3.2.

Les distributions des densités de probabilité des fluctuations de température pour deux nombres de Prandtl ($Pr = 0.71$ et $Pr = 0.026$) sont aussi illustrées sur les figures 4.20, 4.21 et 4.22. Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), la distribution des fluctuations de température montre un comportement similaire à celui des fluctuations de vitesse longitudinale. Au voisinage de la paroi à $y^+ \simeq 5$, les fluctuations négatives de température sont plus nombreuses mais leur amplitude plus faible que celles des fluctuations positives. La dissymétrie de la répartition des fluctuations de température se maintient jusqu'à une distance $y^+ \simeq 18$. A partir de cette position, la distribution se rapproche (de la même façon que les fluctuations des composantes de vitesse) d'une distribution gaussienne. A $y^+ \simeq 100$, $S(\Theta')$ et $F(\Theta')$ atteignent respectivement les valeurs -0.15 et 3.1.

L'influence du nombre de Prandtl sur la distribution des fluctuations de température est clairement observée sur les figures 4.20 et 4.21. Dans la région pariétal, à $y^+ \simeq 5$, l'intermittence

FIG. 4.21 – Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 14$.FIG. 4.22 – Fonctions de densité de probabilité à $y^+ \simeq 100$.

des fluctuations de température est moins prononcée pour $Pr = 0.026$. A $y^+ \simeq 14$, la dissymétrie des fluctuations de température pour $Pr = 0.71$ s'atténue, alors qu'elle persiste pour $Pr = 0.026$. Comme nous l'avons vu précédemment, dans l'évolution des coefficients de dissymétrie des fluctuations de température (paragraphe 4.4), même si l'intermittence est moins intense dans la région pariétale pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl, celle-ci s'étend plus loin au cœur de l'écoulement. Pour $Pr = 0.026$, les coefficients ($S(\Theta')$) et d'aplatissement $F(\Theta')$ ne tendent respectivement vers les valeurs 0 et 3 qu'à partir de $y^+ \simeq 50$. Au cœur de l'écoulement, à $y^+ \simeq 100$ le nombre de Prandtl n'a plus aucun effet sur la distribution des fluctuations de température et la turbulence est homogène.

4.5.3 Fonctions de densité de probabilité jointes

Les fonctions de densité de probabilité (PDF) nous renseignent sur la répartition des fluctuations positives et négatives de chaque variable indépendamment des autres variables. Afin d'analyser les interactions qui peuvent exister entre les fluctuations des différentes variables, on étudie les fonctions de densité de probabilité jointes (JPDF). Les coefficients de corrélation présentés dans le paragraphe 4.5.1 nous renseignent sur ces interactions mais de façon limitée. Les JPDF, donnent plus d'indications sur la façon dont les fluctuations sont corrélées.

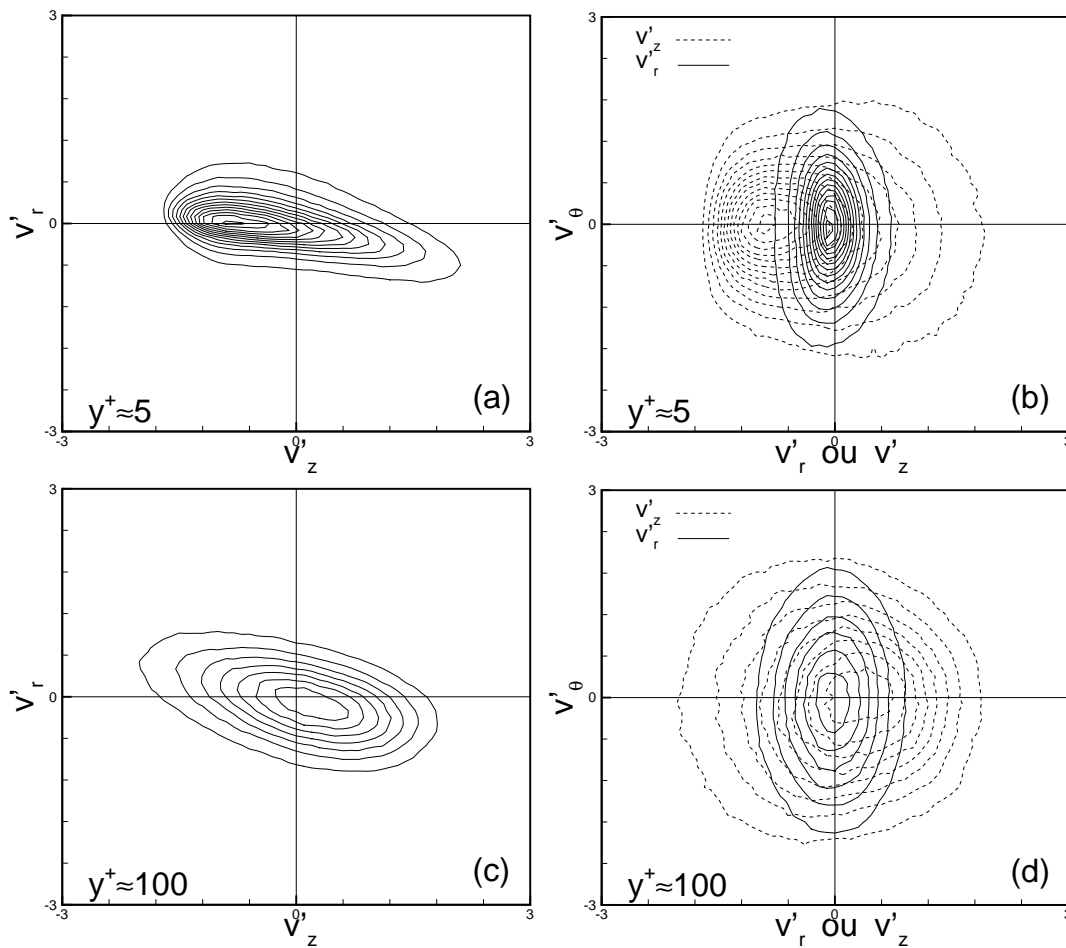


FIG. 4.23 – JPDF des fluctuations de vitesses.

La figure 4.23 présentent les fonctions de densité de probabilité jointes entre les fluctuations de vitesse adimensionnées par les rms correspondantes à deux distance de la paroi ($y^+ \simeq 5$ et $y^+ 100$). Les figures 4.23.a et 4.23.c montrent que les combinaisons de signes opposés des fluctuations des vitesse radiale et axiale contribuent largement à la production de la tension de Reynolds $\overline{v'_r v'_z}$ la plus intense (production d'énergie turbulente). Dans la région pariétale, la probabilité d'apparition des fluctuations positives de vitesse axiale v'_z au même moment que des fluctuations négatives de vitesse radiale v'_r est la plus grande. Le fluide est éjecté vers le centre de la conduite. Plus loin, au cœur de l'écoulement, on a un phénomène inverse : la

probabilité d'apparition des fluctuations négatives de vitesse axiale et des fluctuations positives de vitesse radiale est plus élevée. Le fluide est alors drainé du centre de la conduite vers la paroi, mais de manière moins intense.

Les figures 4.23.b et 4.23.d illustrent les JPDF entre les fluctuations de vitesse azimutale et les fluctuations des autres composantes de vitesse. Quelle que que soit la position considérée, toutes les JPDF présentent une symétrie autour de l'axe v'_θ signifiant que les tensions $\overline{v'_r v'_\theta}$ et $\overline{v'_z v'_\theta}$ sont nulles, et que les fluctuations de la vitesse azimutale ne sont jamais corrélées avec les fluctuations de vitesse radiale et axiale.

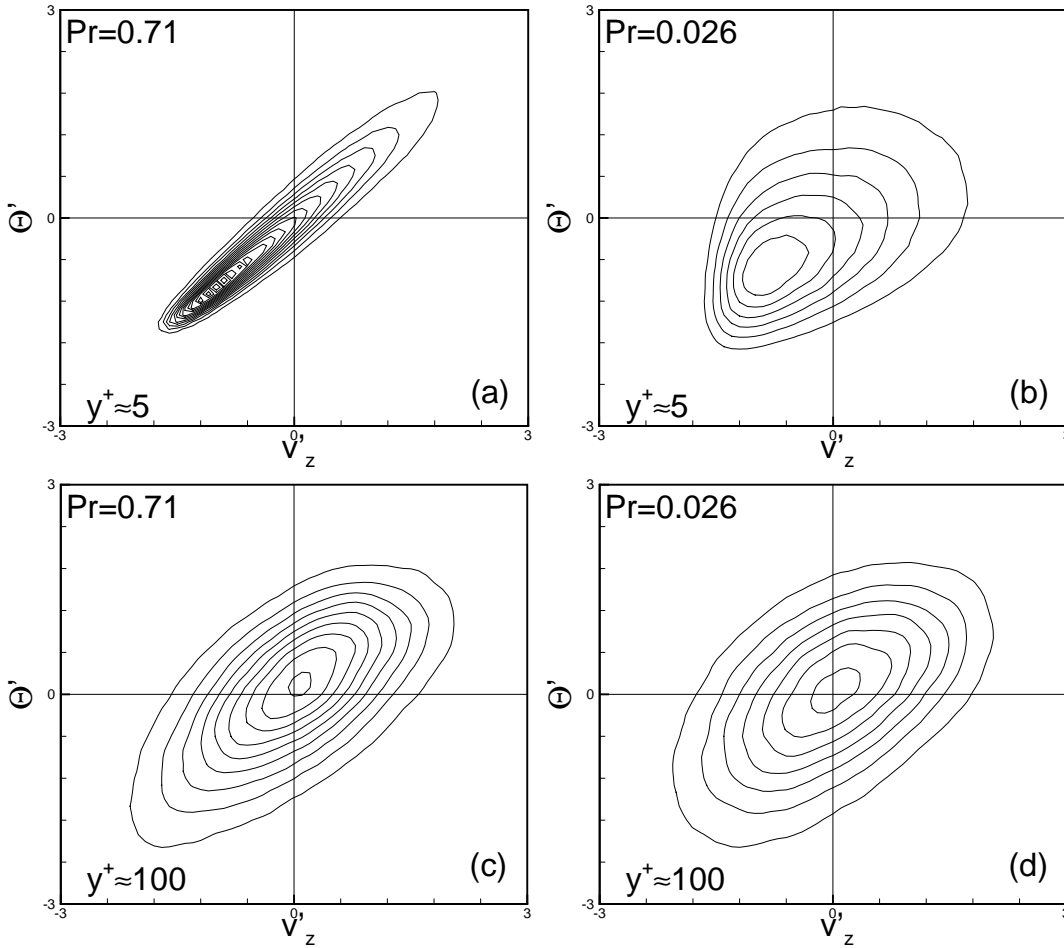


FIG. 4.24 – JPDF entre les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuations de température.

Les fonctions de densité de probabilité jointes entre les fluctuations de température Θ' et les fluctuations de vitesse axiale v'_z sont représentées sur la figures 4.24, pour deux valeurs du nombres de Prandtl ($Pr = 0.71$ et $Pr = 0.026$) et à deux positions ($y^+ \simeq 5$ et $y^+ 100$). Dans la région proche paroi, à une distance $y^+ \simeq 5$, les JPDF montrent que les fluctuations de température sont fortement corrélées aux fluctuations de vitesse axiale dans un écoulement d'air ($Pr = 0.71$). Lorsque le nombre de Prandtl diminue ($Pr = 0.026$), les isovalues s'écartent, notamment du côté des fluctuations positives, soulignant que le coefficient de corrélation devient moins important. Ces résultats confirment les prédictions du coefficient de corrélation

ce dernier est deux fois plus élevé pour $Pr = 0.71$ ($R_{v_z\Theta} = 0.95$) par rapport à $Pr = 0.026$ ($R_{v_z\Theta} = 0.46$).

Le flux turbulent axial, comme le montre la figure 4.24.a, est généré par des combinaisons de fluctuations de même signe. Les fluctuations positives de température apparaissent en même temps que les fluctuations positives de vitesse axiale et inversement. Dans la région pariétale, les courants chauds haute vitesse ont tendance à venir impacter la paroi créant ainsi un frottement localement plus fort que le frottement moyen. A l'inverse, les courants froids basse vitesse ont tendance à expulser le fluide loin de la paroi.

Lorsque on s'éloigne de la région pariétale, la différence notable observée entre les JPDP pour $Pr = 0.71$ et celles pour $Pr = 0.026$ s'atténue. De même, la corrélation entre les fluctuations de température Θ' et les fluctuations de vitesse axiale v'_z diminue signifiant que le flux axial est moins important dans cette région. Les lignes étant plus resserrées pour $Pr = 0.71$, le coefficient de corrélation reste légèrement plus élevé ($R_{v_z\Theta} = 0.64$) que pour $Pr = 0.026$ ($R_{v_z\Theta} = 0.52$).

4.6 Visualisation du champ thermique et mise en évidence des structures cohérentes

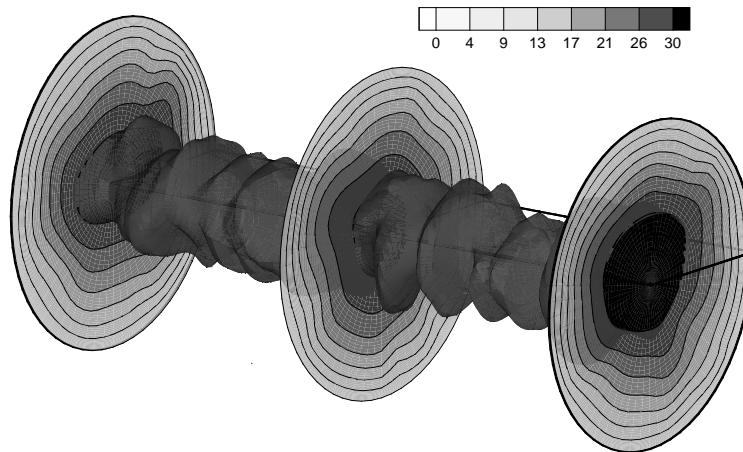
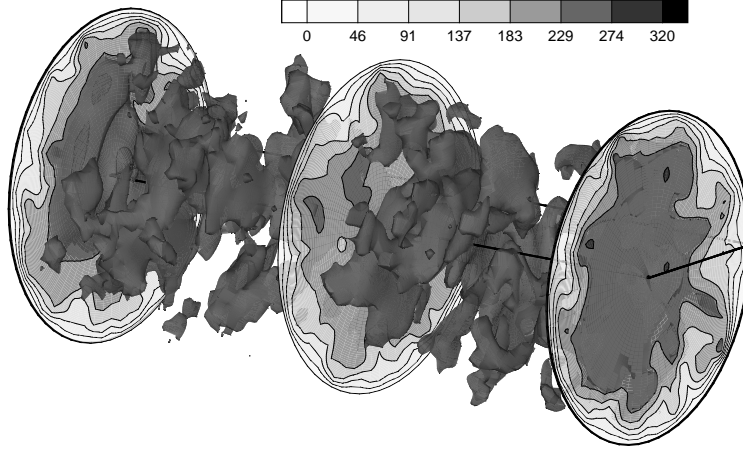


FIG. 4.25 – Champ de température $Pr = 0.026$.

Les figures 4.25 et 4.26 montrent respectivement la répartition du champ de température $\Theta = (\langle T_p \rangle - T)/T_r$ pour deux valeurs du nombre de Prandtl, $Pr = 0.026$ et $Pr = 0.71$. L'effet du nombre de Prandtl s'observe aisément sur les visualisations des champs thermiques. La température étant un scalaire passif, le champ de vitesse axiale (non représenté ici) est identique pour les deux écoulements.

Pour une faible valeur du nombre de Prandtl ($Pr = 0.026$), les isothermes sont réparties de manière régulière (Figure 4.25). La distribution du champ thermique est plutôt uniforme soulignant ainsi l'épaisseur importante de la zone conductive. Lorsque le nombre de Prandtl


 FIG. 4.26 – Champ de température $Pr = 0.71$.

augmente, des structures irrégulières apparaissent (Figure 4.26), la zone de conduction devient moins épaisse entraînant une diminution du flux de chaleur moléculaire compensée par une amplification du flux de chaleur turbulent normal à la paroi.

Plusieurs études des écoulements turbulents pariétaux pleinement développés ont montré l'existence au voisinage de la paroi de structures allongées appelées “streaks”. Ces structures, sont en fait de minces filets lents ou rapides étirés dans le sens de l'écoulement. Afin de mettre en évidence ces structures, il est nécessaire de visualiser les fluctuations de vitesse axiale dans la direction principale de l'écoulement. Pour cela, on introduit le champ fluctuant noté v'_z défini par :

$$v'_z(\theta, r, z, t) = v_z(\theta, r, z, t) - \langle v_z \rangle_{\theta, z}(r, t) \quad (4.26)$$

Le champ de température étant transporté par le champ de vitesse, on s'attend à observer des structures assez similaires. De la même façon que pour le champ de vitesse axiale, on définit le champ fluctuant de température Θ' par :

$$\Theta'(\theta, r, z, t) = \Theta(\theta, r, z, t) - \langle \Theta \rangle_{\theta, z}(r, t) \quad (4.27)$$

Les fluctuations de vitesse axiale v'_z normalisées par la vitesse de frottement u_τ , pour un écoulement à $Re = 5500$, sont illustrées sur la figure 4.27.a. Les valeurs représentées sont telles que $-1 < v'_z < +1$ dans le plan (θ, z) situé à une distance $y^+ \simeq 5$ de la paroi. Les régions négatives (sombres) sont assimilées aux zones de fluide lent, tandis que les régions positives (claires) sont assimilées aux zones de fluide rapide. Au même instant, et sur le même plan, sont illustrées sur les figures 4.27.b, 4.27.c et 4.27.d les fluctuations de températures ($-1 < \Theta' < +1$) associées respectivement à trois valeurs du nombre de Prandtl, $Pr = 0.026$, $Pr = 0.2$ et $Pr = 0.71$. Ici, les zones sombres (fluctuations négatives) sont associées au zone de fluide basse température et les zones claires (fluctuations positives) sont associées aux zones de fluide haute température.

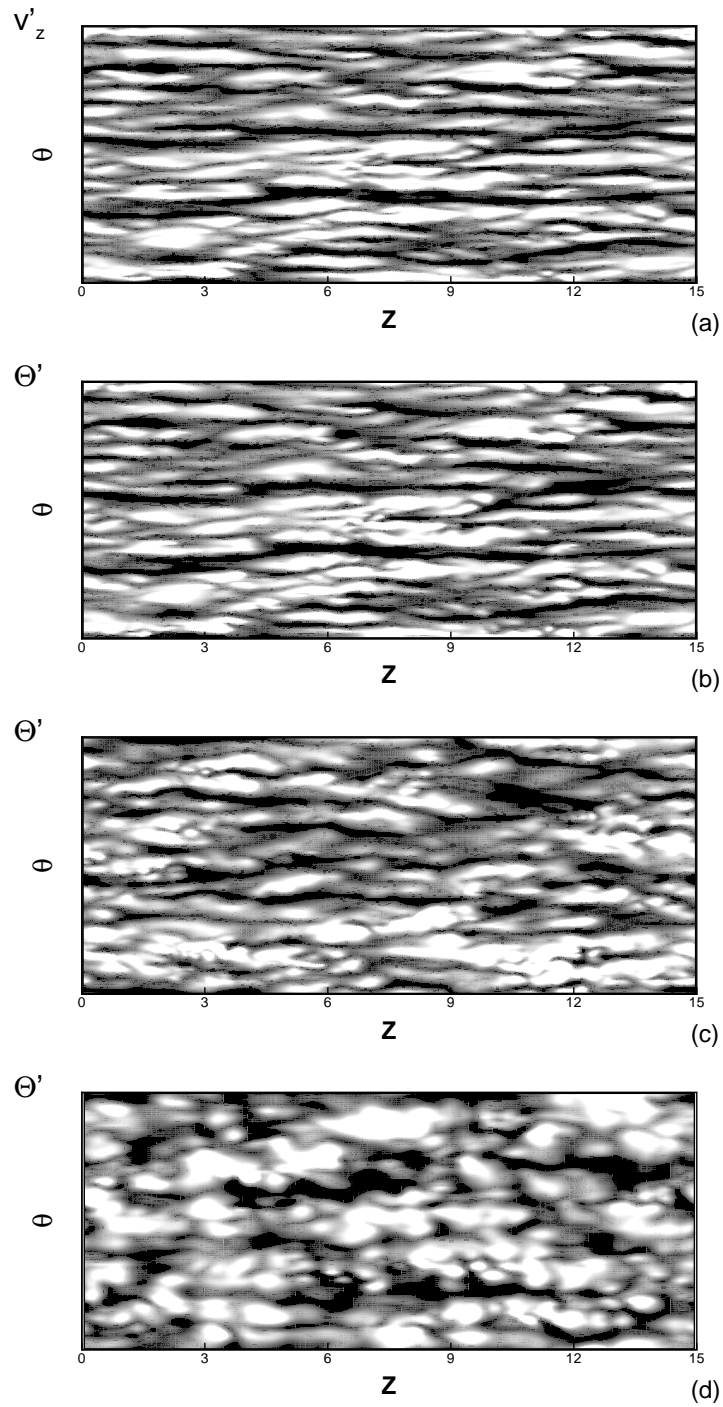


FIG. 4.27 – Champs fluctuants : (a) v'_z ($Re_b = 5500$), (b) Θ' ($Pr = 0.71$), (c) Θ' ($Pr = 0.2$), (d) Θ' ($Pr = 0.026$)

Selon Lesieur (1997), les structures tourbillonnaires proche paroi semblent avoir des tailles en unité de paroi indépendantes du nombre de Reynolds. Les figure 4.27.b, c et d montrent que

leur longueur dépend fortement de la valeur du nombre de Prandtl. Celles-ci sont de plus en plus allongées lorsque le nombre de Prandtl augmente. Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), les figures 4.27.a et 4.27.b montrent que les structures thermiques sont bien corrélées avec les structures dynamiques. En effet, les zones basse vitesse sont associées aux zones basse température tandis que les zones fluides les plus rapides sont associées aux zones où le fluide est plus chaud. Ces observations confirment ainsi les résultats trouvés précédemment par l'analyse des coefficients de corrélations et des densités de probabilité.

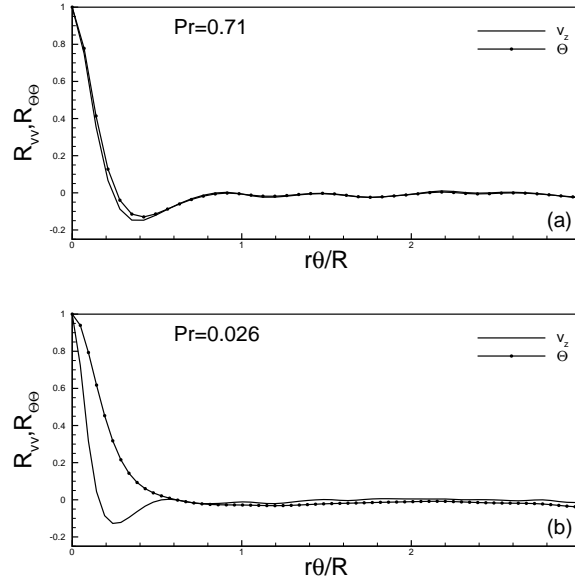


FIG. 4.28 – Auto-corrélations spatiales avec séparation azimuthale : (a) $Pr = 0.71$, (b) $Pr = 0.026$.

L'effet du nombre de Prandtl sur la longueur des structures thermiques peut aussi être observé à partir des auto-corrélations spatiales. Les figures 4.28 et 4.29 montrent respectivement les auto-corrélations spatiales de la température avec séparations azimuthale et axiale. Pour $Pr = 0.71$, les auto-corrélations de la vitesse axiale et de la température sont assez proches, les structures thermiques ont pratiquement la même longueur de séparation que les structures dynamiques dans la direction de l'écoulement. Lorsque le nombre de Prandtl diminue ($Pr = 0.026$), l'auto-corrélation spatiale dans la direction longitudinale chute plus rapidement vers la valeur 0 suggérant que la séparation spatiale devient plus petite.

4.7 Coefficient d'échange

Le coefficient de transfert de chaleur est déterminé par l'intermédiaire du gradient de température pariétal :

$$h = -k \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_p$$

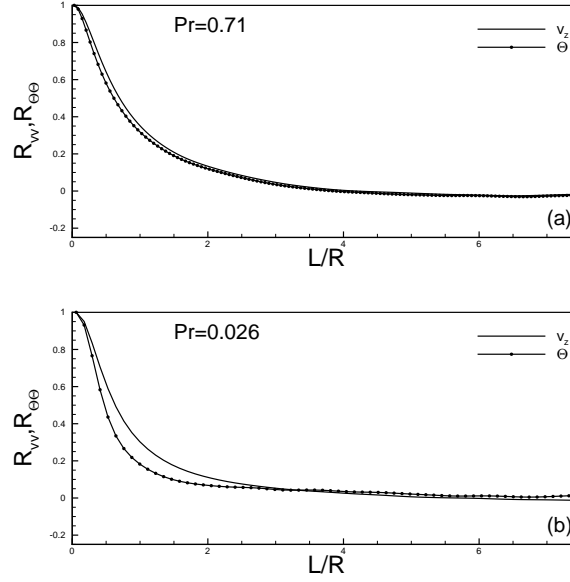


FIG. 4.29 – Auto-corrélations spatiales avec séparation axiale : (a) $Pr = 0.71$, (b) $Pr = 0.026$.

où k est la conductivité thermique du fluide. Le transfert de chaleur est alors quantifié par le nombre de Nusselt défini comme $Nu = hD/k$.

Sleicher et Rouse (1975) ont déterminé une loi d'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Prandtl. Cette loi est valable pour des valeurs de nombres de Prandtl comprises entre $0, 1 < Pr < 10^5$. L'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Prandtl, d'après la loi de Sleicher et Rouse (1975), est représentée sur la figure 4.30. Sur la même figure, sont reportés les valeurs trouvées par Kawamura et al. (1998) dans le cas d'un canal plan avec flux de chaleur constant imposé aux parois. Un bon accord avec ces prédictions est obtenu pour les nombres de Prandtl les plus élevés.

Le tableau 4.4 regroupe les nombres de Nusselt obtenus à partir de nos simulations confrontés à quelques résultats trouvés dans la littérature. Pour un écoulement d'air $Pr = 0.71$, les résultats sont en assez bon accord avec la corrélation proposée par Gnielinski (1976). Cette corrélation donne le nombre de Nusselt en fonction des nombres de Prandtl et de Reynolds et est valable uniquement pour les nombre de Prandtl tels que $Pr \geq 0.7$:

$$Nu = \frac{\xi (Re - 1000) Pr}{1 + 12.7 \sqrt{\frac{\xi}{8}} (Pr^{2/3} - 1)} \quad (4.28)$$

avec :

$$\xi = \frac{1}{(1.82 \log Re - 1.64)^2} \quad (4.29)$$

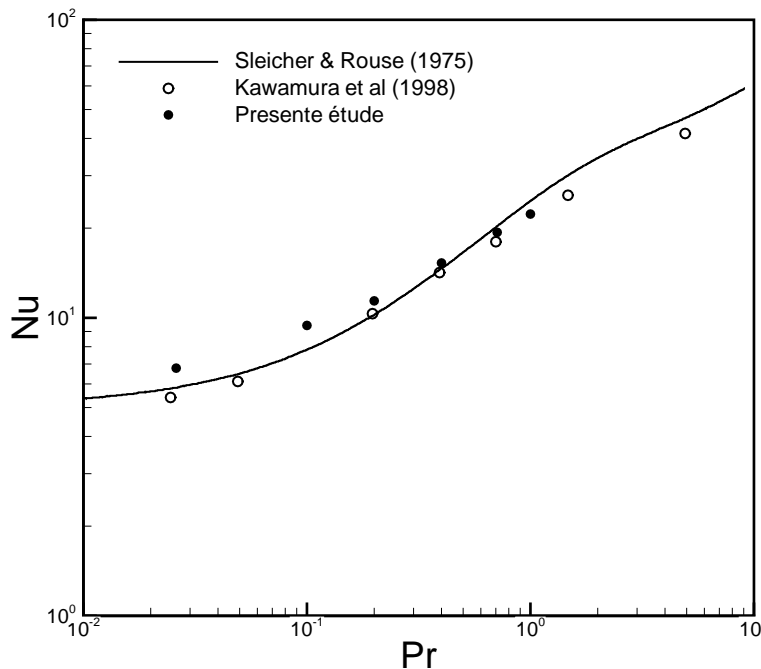


FIG. 4.30 – Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Prandtl.

Dans le même tableau, nous avons inclus les résultats obtenus par Kawamura et al. (1998) [30] dans un canal plan chauffé uniformément. On constate que l'écart entre la valeur du nombre de Nusselt obtenu dans les deux géométries se creuse lorsque le nombre de Prandtl diminue. Pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl, le nombre de Nusselt obtenu dans une conduite cylindrique est légèrement supérieur à celui du canal plan. Cet écart est probablement dû à la différence constatée précédemment dans la distribution radiale du nombre de Prandtl turbulent.

TAB. 4.4 – Nombre de Nusselt.

Pr	Conduite cylindrique				canal plan
	Présent	Gnielinski (1976)	Piller (2005)	Sleicher & Rouse (1975)	Kawamura et al. (1998)
0.026	6.78	-	-	5.82	5.4 (Pr=0.025)
0.1	9.43	-	-	7.82	-
0.2	11.4	-	-	10.22	10.32
0.4	15.28	-	-	14.75	14.18
0.71	19.36	18.17	18.54	20.32	18
1	22.3	21.06	-	24.72	-

En 1999, Tricoli propose des lois de similarité entre transport de chaleur et quantité de mouvement. Ces lois ne sont valables que pour les fluides dont le nombre de Prandtl est petit ($Pr \ll 1$). La figure 4.31 regroupe différents résultats du nombre de Nusselt, trouvés dans la littérature, en fonction du nombre de Péclet. Nos calculs sont en assez bon accord avec les

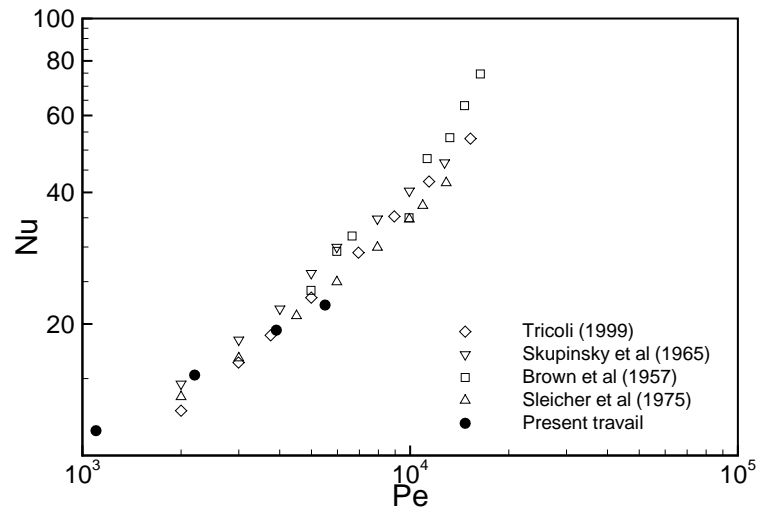


FIG. 4.31 – Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Peclet.

résultats trouvés par Tricoli (1999) dans le cas d'une conduite circulaire avec flux de chaleur constant imposé à la paroi.

4.8 La conduite en rotation

On trouve dans la littérature quelques études numériques et expérimentales qui se sont intéressées à l'effet de la rotation sur l'écoulement turbulent dans une conduite cylindrique (Kikuyama et al. (1983), Orlandi et al. (1997), Feiz (2005)). Ces auteurs ont montré que les forces de Coriolis générées par le mouvement rotatif de la paroi réduisent l'activité turbulente dans la région centrale de l'écoulement. Une relaminarisation complète est observée pour certaines valeurs du couple (Re, N) au voisinage de la paroi (réduction du frottement pariétal).

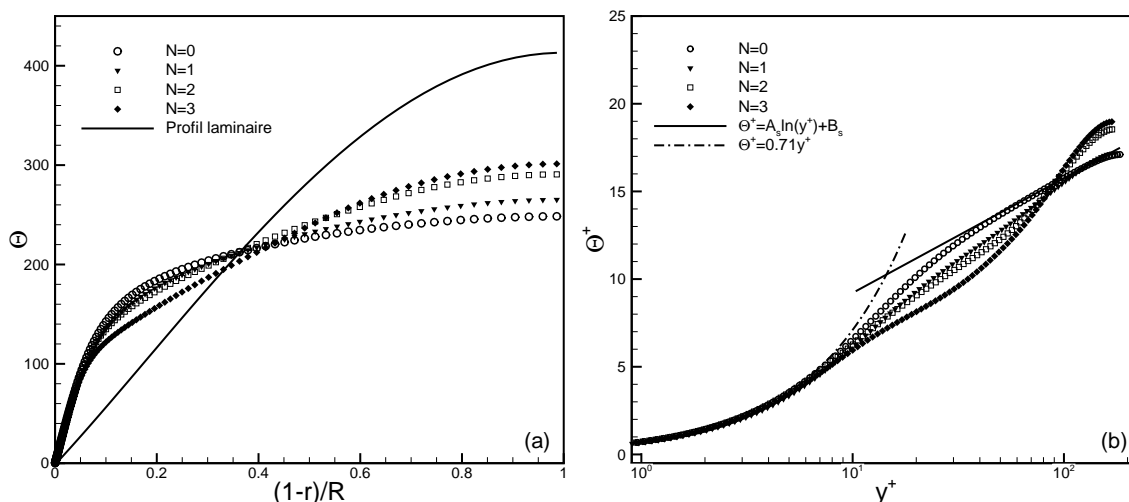
L'effet de la rotation sur le champ thermique a été aussi étudié par des auteurs tels que Cannon et Kays. (1969) ou Reich et Beer. (1989). Ces auteurs ont évalué le coefficient de transfert thermique (nombre de Nusselt) et ont montré une nette réduction du transfert de chaleur lorsque le taux de rotation N augmente.

Après avoir analysé les caractéristiques du champ thermique dans le cas de la conduite fixe, nous allons nous intéresser, dans ce qui suit, à l'effet de la rotation de la conduite sur les statistiques du champ thermique et sur le transfert de chaleur. Les calculs ont été effectués pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), pour quatre valeurs du taux de rotation ($N = 0.5, 1, 2$ et 3). Le nombre de Reynolds est fixé à $Re = 5500$. L'objectif de cette partie est d'étudier plus profondément l'impact de la rotation de la paroi sur la réduction du transfert de chaleur, en traçant les différents flux de chaleur turbulents et en analysant les interactions entre les fluctuations de température à l'aide des fonctions de densité de probabilité jointes.

4.8.1 Profil moyen de température

La figure 4.32.a représente les profils de température pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) à un nombre de Reynolds, $Re = 5500$ et plusieurs taux de rotation. Lorsque le taux de rotation augmente, le profil de température se déforme petit à petit et tend progressivement vers le profil de Poiseuille obtenu pour un écoulement laminaire ($Re = 1500$). Une diminution du gradient de température à la paroi s'ensuit. Cette évolution du profil de température est similaire à celle du profil de vitesse axiale (Orlandi et al. (1997)). L'augmentation du taux de rotation de la conduite a pour conséquence la suppression de la turbulence dans la conduite à cause de la laminarisation de l'écoulement. Des conclusions identiques sont retrouvées dans les travaux de Reich et Beer (1989).

Sur la figure 4.32.b sont représentés les profils de température adimensionnés par la température de frottement, en fonction de la distance à la paroi (y^+). Nous avons également représenté les profils universels de la température dans la sous-couche de conduction et dans la zone logarithmique. Quel que soit le taux de rotation, la simulation conduit à un profil qui coïncide avec le profil de température universel $\Theta^+ \sim Pr y^+$, dans la zone de conduction ($y^+ < 5$). Par contre, dans la zone logarithmique, à des distances éloignées de la paroi apparaît un écart entre les profils obtenus pour la conduite en rotation et la loi universelle. Plus la rotation de la paroi est importante, plus l'écart est notable.


 FIG. 4.32 – Profil de température moyen ($Pr = 0.71$, $Re = 5500$).

4.8.2 Ecart-type des fluctuations de température

La figure 4.33 illustre les distributions radiales de la rms de la température (intensité de la fluctuation de température) pour différents taux de rotation. L'intensité de la turbulence atteint son maximum à une position $y^+ \simeq 18$ dans le cas de la conduite fixe. Il semble que cette position reste pratiquement invariante lorsque le taux de rotation augmente. La valeur de ce maximum, décroît avec l'augmentation du taux de rotation, tout comme le pic de la rms de la vitesse axiale (résultat obtenu dans l'étude de la dynamique de l'écoulement considéré). Dans la conduite en rotation, une visualisation du champ de vorticité dévoile des structures tourbillonnaires de plus en plus volumineuses lorsque le taux de rotation croît, entraînant une augmentation du niveau de turbulence loin de la paroi (Orlandi et Fatica (1997)).

4.8.3 Flux de chaleur turbulents

Les figures 4.34.a, 4.34.b et 4.34.c illustrent respectivement les distributions radiales des flux de chaleur turbulents axial, radial et azimutal, dans un écoulement d'air, pour plusieurs taux de rotation.

Dans le cas d'une conduite fixe, on constate la dominance du flux de chaleur axial et un flux de chaleur azimutal inexistant. La rotation de la conduite a pour conséquence la réduction du flux de chaleur axial $v_z'^+ \Theta'^+$ et l'augmentation des deux autres flux de chaleur, $v_\theta'^+ \Theta'^+$ et $v_r'^+ \Theta'^+$. Comme il existe une similarité entre les champs dynamique et thermique, les mécanismes d'évolution des structures tourbillonnaires du champ dynamique peuvent être utiles pour analyser le développement des structures thermiques turbulentes.

Pour des taux de rotation élevés, des structures étirées se forment dans la région centrale de la conduite. Notons qu'on ne peut obtenir des statistiques convergées pour le cas $N = 3$, que si la longueur de la conduite (L/R) est suffisamment grande, afin de capter toute la

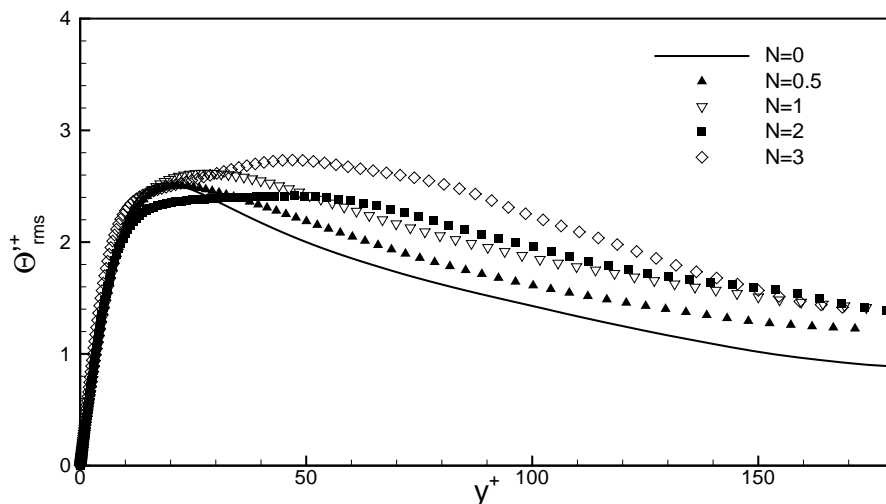


FIG. 4.33 – Effet de la rotation sur l'écart type des fluctuations de température.

longueur des larges structures dans la région centrale. Les oscillations radiales de $v'_\theta \Theta'^+$ dans le cœur de l'écoulement sont dues aux structures larges dans cette région. Lorsque la rotation diminue, l'intensité de ces structures devient plus faible et le flux azimuthal devient négligeable. Au voisinage de la paroi, les valeurs élevées de $v'_\theta \Theta'^+$ sont une conséquence de l'inclinaison et l'orientation des structures tourbillonnaires proches de la paroi (Feiz et al. (2005)) qui augmentent la corrélation entre les fluctuations de température, Θ' , et les fluctuations de vitesse azimuthale, v'_θ .

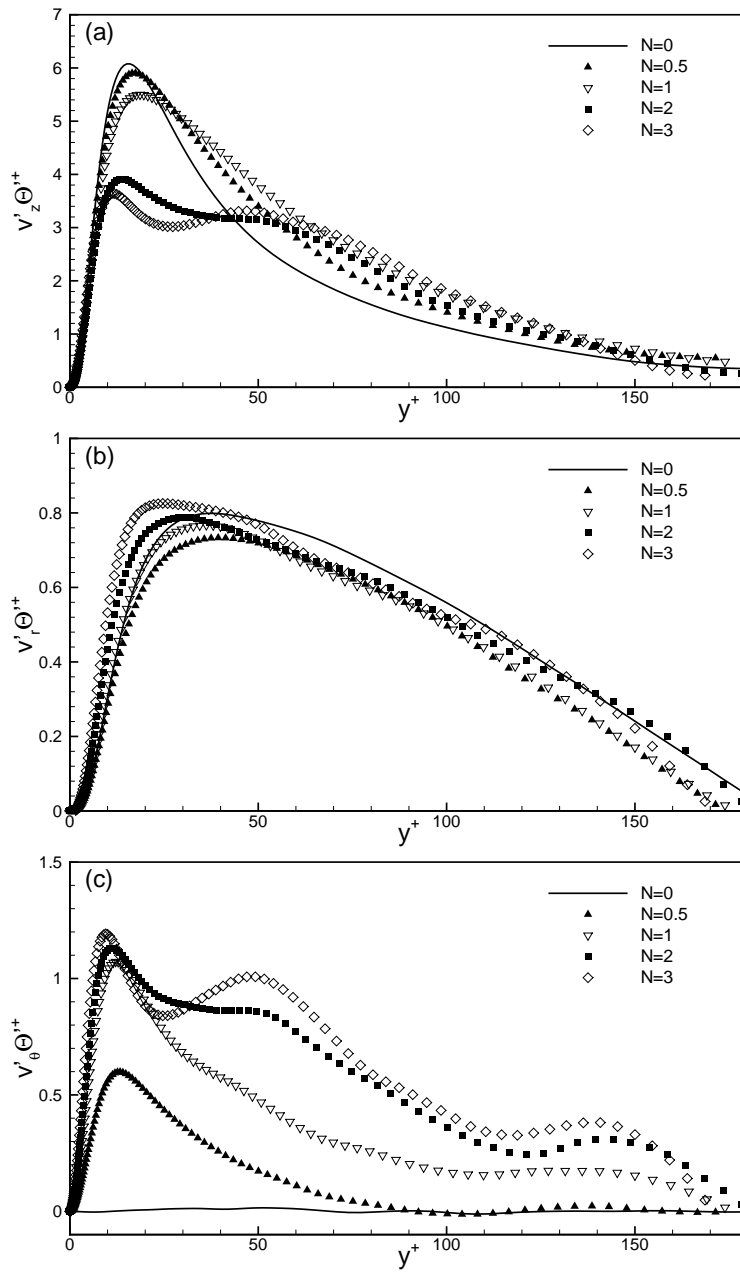


FIG. 4.34 – Variation des flux de chaleur turbulents en fonction du taux de rotation.

4.8.4 Fonctions de densité de probabilité jointes

Afin de mieux analyser l'effet de la rotation sur le transfert de chaleur dans la conduite, nous traçons les fonctions de densité de probabilité jointes entre les fluctuations de température et les fluctuations de vitesse. Le flux de chaleur turbulent radial étant très peu affecté par la rotation, seules les JPDF entre les fluctuations de température et les fluctuations des composantes axiale et azimutale de la vitesse sont considérées.

Les figures 4.35 et 4.36 illustrent respectivement les JPDF entre les fluctuations de température et les fluctuations de vitesse axiale et azimutale pour une conduite fixe, et pour deux taux de rotation ($N = 0.5$ et $N = 3$). Les JPDF sont tracées dans la région proche paroi ($y^+ \simeq 5$) ainsi que dans la région centrale ($y^+ \simeq 100$).

Dans la région pariétale ($y^+ = 5$), dans le cas d'une conduite fixe ($N = 0$), la figure 4.35.a montre une très forte corrélation entre les fluctuations de température (Θ') et les fluctuations de vitesse axiale (v'_z). Le flux de chaleur turbulent axial est généré par des combinaisons de même signe entre les fluctuations de température et les fluctuations de vitesse axiale. Le centre des JPDF se trouve dans le troisième quadrant ($\Theta' < 0, v'_z < 0$) signifiant que les combinaisons négatives sont plus nombreuses, cependant leur amplitude est plus faible que les combinaison positives ($\Theta' > 0, v'_z > 0$). L'augmentation du taux de rotation entraîne une diminution de la corrélation entre Θ' et v'_z . Pour $N = 0.5$ (Fig. 4.35.b), il n'y a pas une très grande différence avec le cas fixe (Fig. 4.35.a), le flux de chaleur axial garde pratiquement la même intensité. Pour un taux plus élevé, $N = 3$ (Fig. 4.35.c), les JPDF sont moins resserrées et le centre se décale légèrement vers l'origine signifiant une diminution du flux de chaleur turbulent axial à cette position $y^+ \simeq 5$.

La figure 4.35.d, qui illustre la JPDF entre les fluctuations de température (Θ') et les fluctuations de vitesse azimutale (v'_θ) présente une symétrie parfaite par rapport à l'axe $v'_\theta = 0$ suggérant qu'il n'y a aucune corrélation entre Θ' et v'_θ , le flux de chaleur turbulent azimutal est donc nul. Lorsqu'on applique un mouvement de rotation à la paroi, la symétrie est brisée (Fig. 4.35.e et 4.35.f). Le centre se déplace vers le troisième quadrant ($\Theta' < 0, v'_\theta < 0$) et le flux de chaleur azimutal devient non nul.

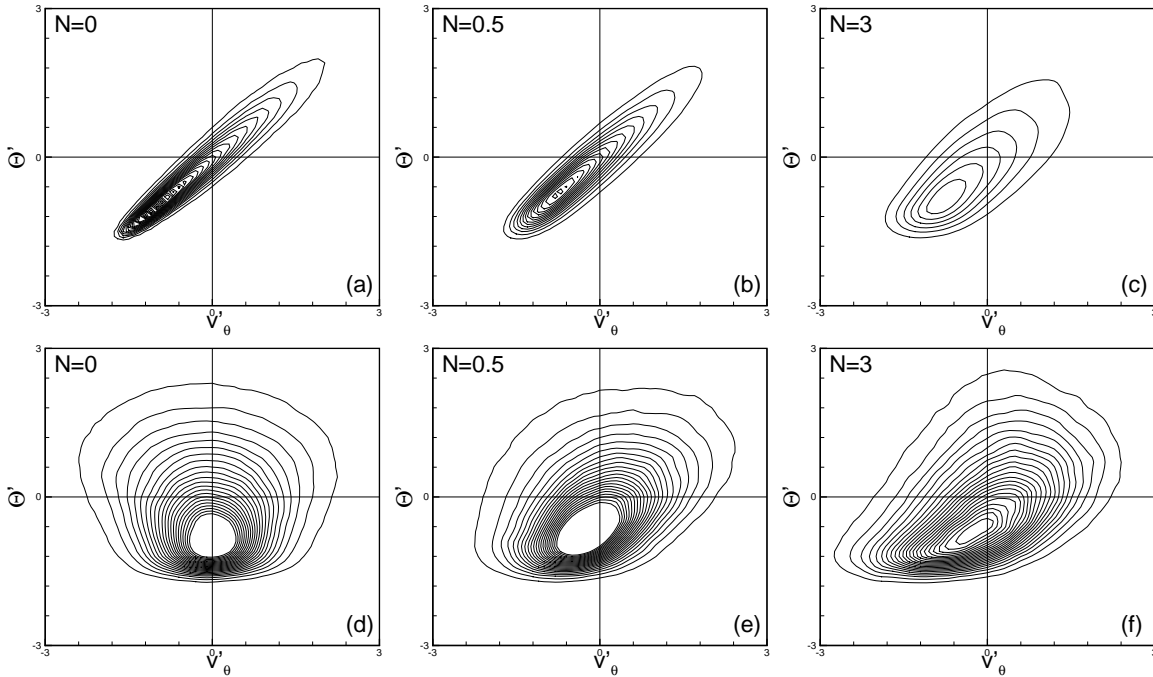


FIG. 4.35 – JPDF entre v'_z et Θ' pour différents taux de rotation à $y^+ \simeq 5$.

Dans la région centrale, à $y^+ \simeq 100$, les JPDF entre les fluctuations de température et

les fluctuations de vitesse axiale (Figure 4.36a, b et c) sont très peu affectées par les taux de rotation considérés dans cette étude. Seul le centre de la JPDF se déplace légèrement de l'origine vers le premier quadrant. Le flux de chaleur axial s'intensifie légèrement lorsque le taux de rotation augmente. La symétrie (par rapport à l'axe $\Theta' = 0$) que présente la JPDF entre les fluctuations de température et les fluctuations de vitesse azimutale (Fig. 4.36.d) subsiste pour un taux de rotation $N = 0.5$ (Fig. 4.36.e) indiquant que la corrélation est nulle et que le flux de chaleur azimutal est pratiquement inexistant. Pour un taux de rotation plus élevé, $N = 3$ la symétrie disparaît et le flux azimutal s'amplifie.

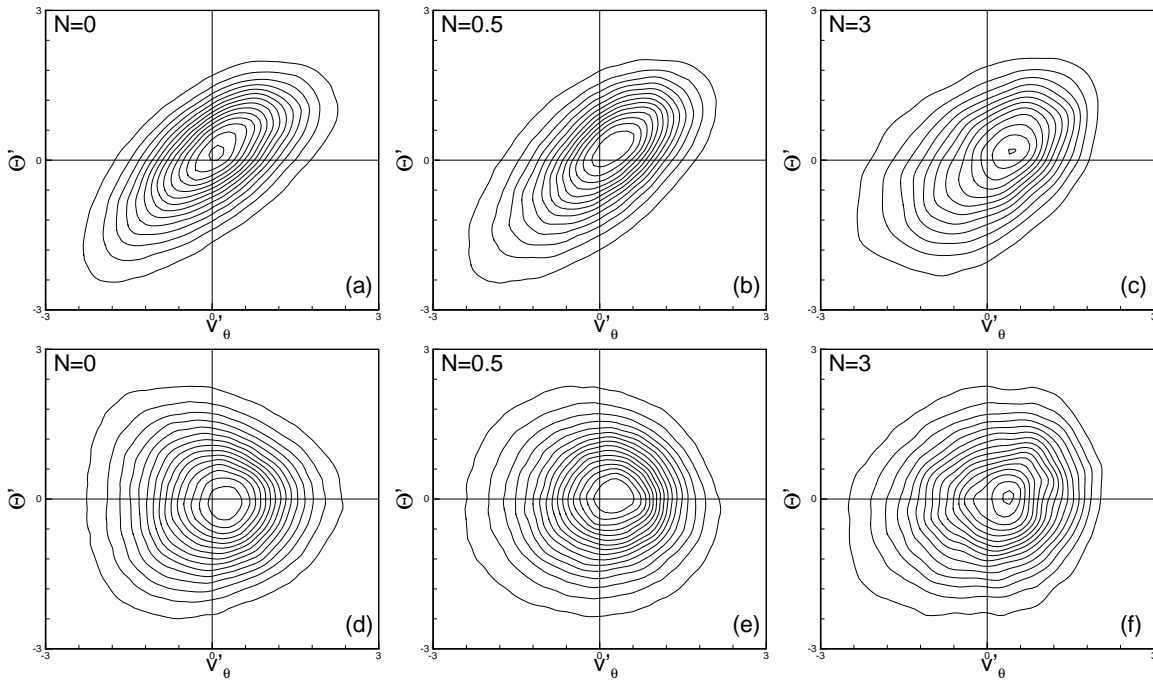


FIG. 4.36 – JPDF entre v'_θ et Θ' pour différents taux de rotation $y^+ \simeq 100$.

N	Nu/Nu_0 (présent)	Nu/Nu_0 (Satake et Kunugi (2002))
0.0	1.0	1.0
0.5	0.9515	0.9311
1.0	0.9358	0.9278
2.0	0.8967	0.8858
3.0	0.8654	—

TAB. 4.5 – Variation du Rapport N/Nu_0 en fonction du taux de rotation.

La réduction du flux de chaleur turbulent axial et l'amplification du flux de chaleur azimutal qui, rappelons-le, est plus marquée dans la région proche paroi entraîne une diminution du coefficient d'échange entre la paroi et le fluide. Le tableau 4.5 donne le rapport Nu/Nu_0 pour les taux de rotation considérés, où Nu_0 est la valeur du nombre de Nusselt dans le cas de la conduite fixe ($Nu_0 = 19.36$). La visualisation du champ thermique (Figures 4.37 et 4.38 montre l'effet des forces centrifuges qui empêchent la migration radiale des particules fluides

(Reich et Beer (1989)), les isosurfaces sont lissées et la turbulence est considérablement réduite ce qui entraîne par conséquent la diminution du transfert (relaminarisation de l'écoulement).

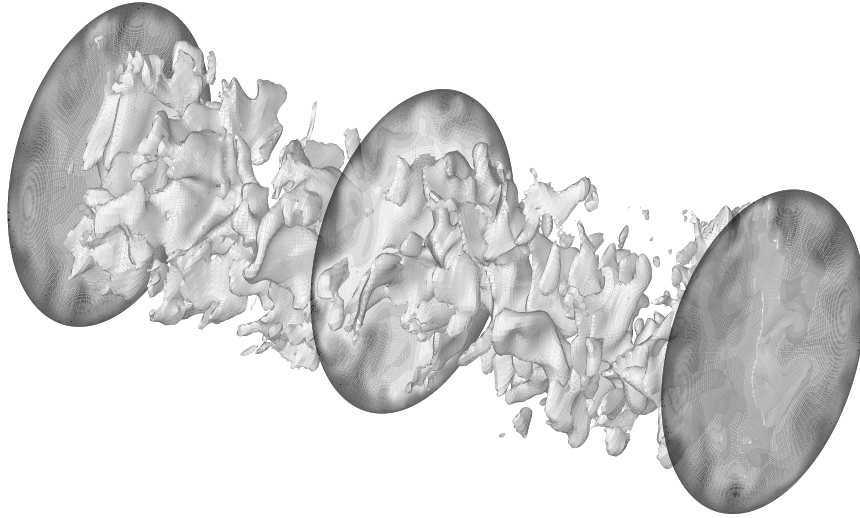


FIG. 4.37 – Champ de température $N = 0$.

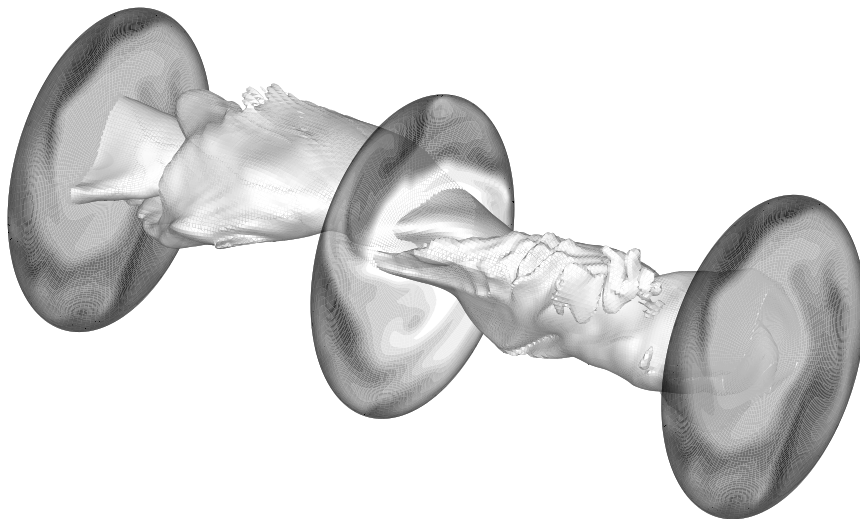


FIG. 4.38 – Champ de température $N = 3$.

4.9 Simulation des grandes échelles

Nous avons effectué jusqu'ici des simulations numériques directes (DNS) pour résoudre les équations régissant le transfert thermo-convectif dans l'écoulement en conduite cylindrique. La DNS, bien que précise (car ne fait appel à aucun modèle) atteint vite ses limites si on ne dispose pas de moyens de calcul performants. Afin de réduire le temps de calcul et l'espace mémoire utilisé, nous avons effectué des simulation des grandes échelles (LES). Deux modèles ont été testés : Le modèle à Prandtl constant qu'on notera (*Prt*) et la procédure dynamique qu'on notera (*Dynam*). Le maillage à été réduit de $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 129 \times 257)$ à $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 39 \times 129)$. Pour réduire la résolution du maillage, la longueur de la conduite a été augmentée de $L^* = 15$ à $L^* = 25$. Les caractéristiques des simulations sont résumées dans le tableau 4.6.

Selon Montreuil (2002), on parle de simulation des grandes échelles à haute résolution lorsque le pas d'espace dans le sens de l'écoulement est proche de 35 unités de paroi ($\Delta z^+ \simeq 35$) et lorsque le pas dans la direction transverse est inférieure à 10 unités de paroi ($R\Delta\theta^+ < 10$). Avec ce type de maillage, il est possible de capter des structures relativement fines telles que les "streaks". Ce critère s'applique sur le champ dynamique. Nous avons vu précédemment que les structures cohérentes du champ thermique sont de taille équivalente aux structures du champ dynamique pour des nombres de Prandtl proches de l'unité. On peut donc considérer que le maillage utilisé est de haute résolution pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$).

	<i>DNS</i>	<i>LES</i>
N_θ	129	129
N_r	129	39
N_z	257	129
L_θ^+	1168.67	1168.67
L_z^+	2790	4650
$R\Delta\theta^+$	9.06	9.06
Δr_{min}^+	0.01	0.08
Δr_{max}^+	5	17.6
Δz^+	10.85	36.05

TAB. 4.6 – Paramètres des simulations des grandes échelles comparés aux paramètres des simulations numériques directes

Afin de s'affranchir des erreurs qui peuvent être induites par ce maillage plus grossier, nous avons opté pour la résolution du champ de vitesse pour la procédure dynamique. Ce modèle (programmé dans une thèse précédente (Feiz (2005))) donne d'excellents résultats. La figure 4.39.a, présente le profil moyen de vitesse obtenu. Celui-ci est en parfait accord avec les lois d'évolution théoriques $v_z'^+ = y^+$ dans la sous-couche visqueuse et $v_z'^+ = (1/0.41) \ln(y^+) + 5.5$ dans la zone logarithmique. Sur la figure 4.39, les écarts types des fluctuations de vitesse prédits (symboles) sont aussi en très bon accord avec les résultats obtenus par simulation numérique directe (trait continu).

Les figures 4.40.a, b et c présentent respectivement la rms des fluctuations de température, le flux de chaleur turbulent axial et le flux de chaleur turbulent radial. Les calculs ont été

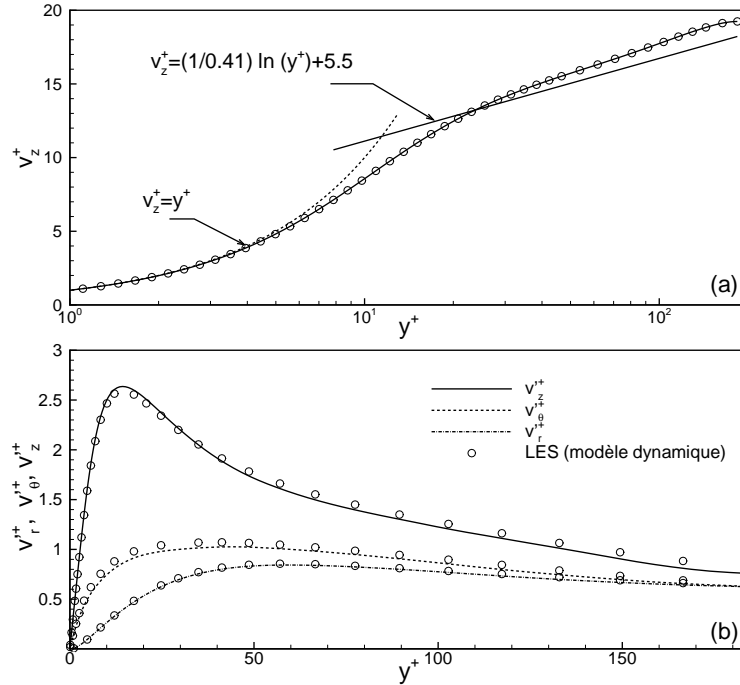


FIG. 4.39 – Simulation des grandes échelles (a) Profil de vitesse, (b) rms.

effectués pour un nombre de Reynolds fixé à $Re = 5500$ dans un écoulement d'air ($Pr = 0.71$). Le trait continu représente la distribution de référence obtenue par simulation numérique directe avec un maillage $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 129 \times 257)$. Le trait discontinu représente la même simulation mais avec un maillage moins fin $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 39 \times 129)$, c'est ce qu'on appelle une simulation numérique directe grossière ou une simulation des grandes échelles "sans modèle" qu'on notera *Smod*. L'écart entre la solution obtenue par une simulation sans modèle et celle obtenue par simulation numérique directe est assez faible. Le maillage utilisé pour les simulations des grandes échelles est presque suffisant pour obtenir une bonne estimation des statistiques d'ordre 1. On constate cependant que le résultat est amélioré lorsque les modèles de sous-mailles interviennent.

TAB. 4.7 – Erreur relative par rapport à la DNS.

$Pr = 0.71$			
	$(\Theta'^+)_max$	$(v'_z \Theta'^+)_max$	$(v'_r \Theta'^+)_max$
<i>Smod</i>	+5.15%	+4.84%	-1.2%
<i>Prt</i>	+2.7%	+2.5%	-1.6%
<i>Dynam</i>	-1.2%	-0.5%	-3.2%
$Pr = 5$			
<i>Smod</i>	+22%	+11%	20%
<i>Dynam</i>	+13.4%	+4.1%	+11.8%

Afin de mieux apprécier l'effet du modèle dynamique qui donne un meilleur résultat, nous

avons effectué un calcul pour un nombre de Prandtl plus élevé ($Pr = 5$), avec le même maillage $(N_\theta, N_r, N_z) = (129 \times 39 \times 129)$. Les figures 4.41.a, b et c illustrent respectivement la rms des fluctuations de température, le flux de chaleur turbulent axial et le flux de chaleur turbulent radial. Nous avons reporté sur les figures les résultats obtenus par Kawamura et al. (1998) dans un canal plan par simulation numérique directe, pour comparaison. Le modèle dynamique améliore les prédictions et réduit sz près de la moitié l'écart relatif entre une simulation sans modèle et une simulation numérique directe. Toutefois, pour $Pr = 5$, il est nécessaire d'augmenter le maillage pour avoir une bonne résolution.

Enfin, nous avons testé la procédure dynamique pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) dans une conduite en rotation. Le nombre de Reynolds et le taux de rotation sont fixés respectivement à $Re = 5500$ et $N = 3$. Le modèle dynamique arrive à prédire correctement l'écart type des fluctuations de température (Fig 4.42.a) ainsi que le flux de chaleur turbulent axial (Fig 4.42.b). Un écart est observé sur le flux de chaleur turbulent azimuthal entre la solution obtenue par simulation numérique directe et celle obtenue par une simulation des grandes échelles. Le modèle ne semble donc pas reproduire correctement les effets de la rotation.

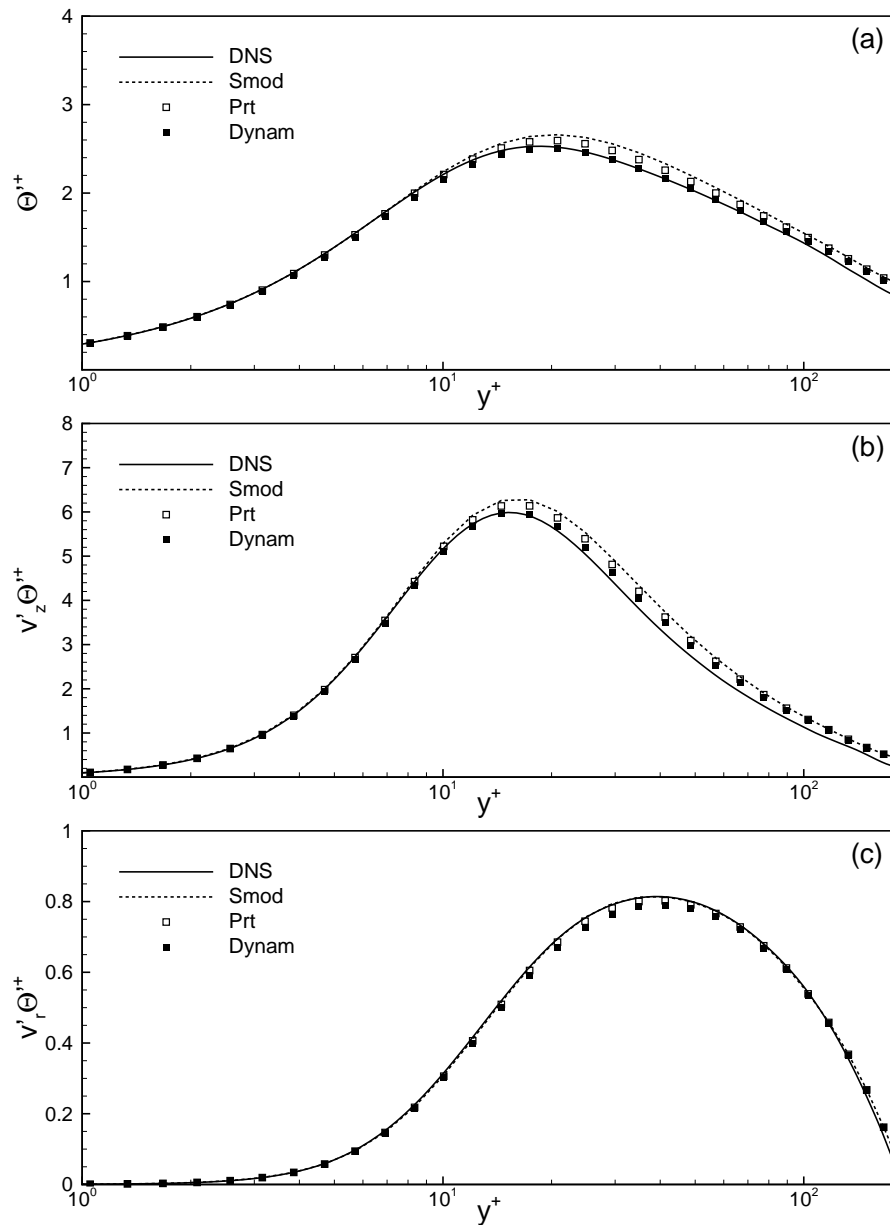


FIG. 4.40 – Simulation des grandes échelles $Pr = 0.71$ (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent radial.

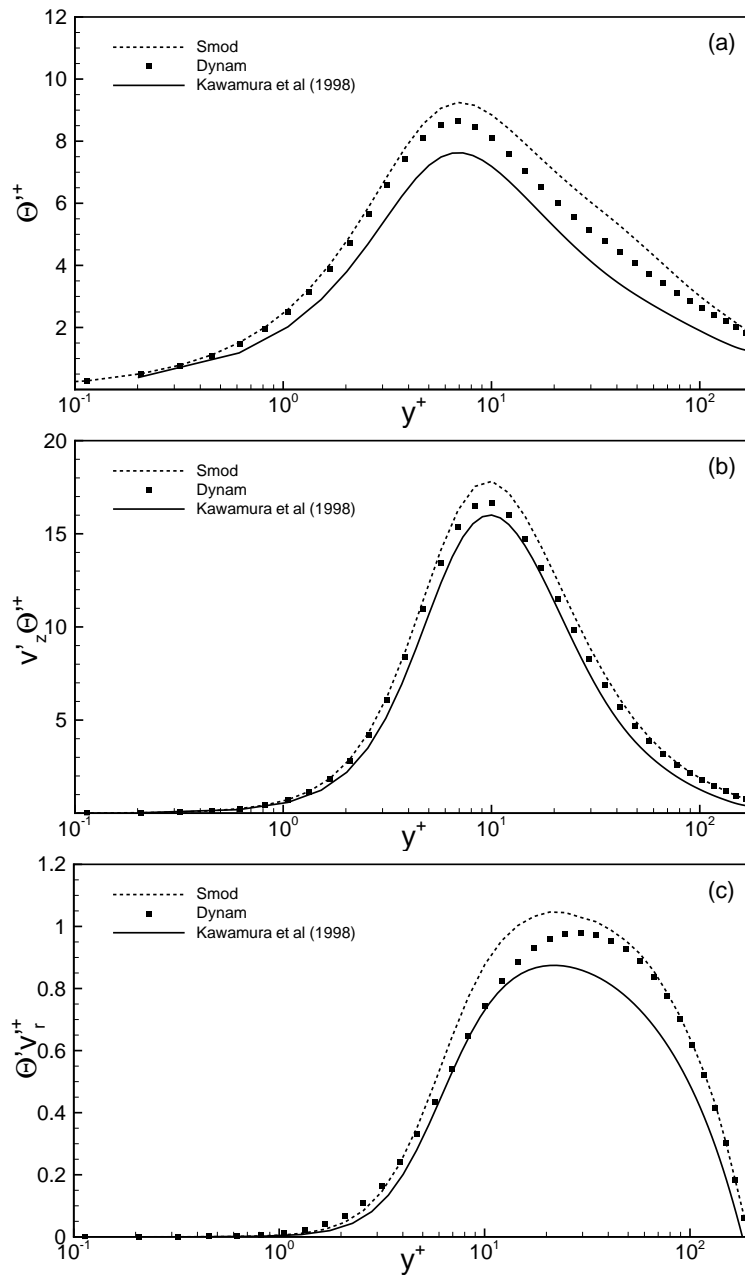


FIG. 4.41 – Simulation des grandes échelles $Pr = 5$ (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent radial.

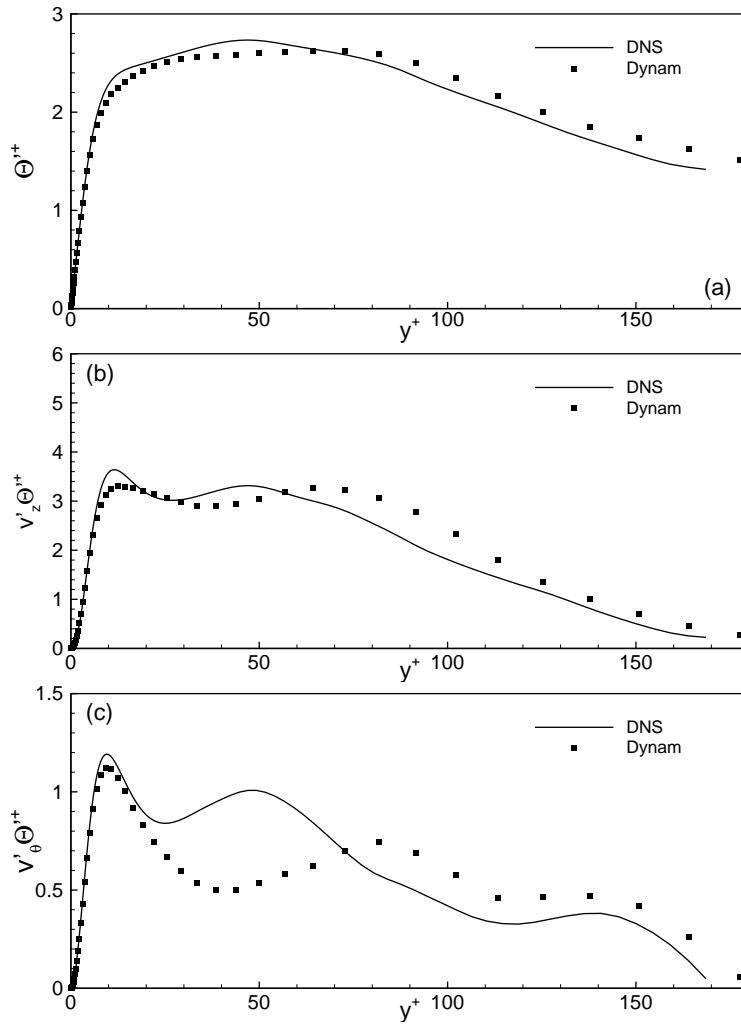


FIG. 4.42 – Simulation des grandes échelles, $N = 3$: (a) rms, (b) flux turbulent axial, (c) flux turbulent azimuthal.

Chapitre 5

Résultats de l'étude dans l'espace annulaire

L'étude de l'écoulement turbulent dans un espace annulaire a fait l'objet de nombreuses études expérimentales et numériques. Cependant, les données existantes dans la littérature restent incomplètes voir parfois incertaines.

La non linéarité radiale de la contrainte totale de cisaillement à travers le fluide rend l'analyse des écoulements turbulents dans un espace annulaire beaucoup plus complexe que dans une conduite cylindrique ou dans un canal plan. Ces deux géométries sont les cas limites d'un espace annulaire. Lorsque le rapport des rayons (rayon interne / rayon externe) tend vers 1, le profil de vitesse et les coefficients de frottement sur les deux parois tendent vers ceux d'un canal plan. A l'inverse, lorsque le rapport des rayons tend vers 0, le coefficient de frottement sur la paroi externe se rapproche de celui obtenu dans un écoulement dans une conduite cylindrique sans jamais l'atteindre à cause de la présence de la paroi interne qui induit un gradient de vitesse non nul. Ces tendances ont été démontrées aussi bien pour les écoulements laminaires que turbulents (Chung et al. (2001)).

Concernant le transfert de chaleur, la plupart des études se sont concentrées sur l'évaluation des coefficients de transfert sur les parois (nombre de Nusselt). La majorité des cas traités sont ceux où le rapport des flux de chaleur imposés sur les parois vaut 1, ou également le cas d'un flux de chaleur imposé sur une des deux parois avec l'autre paroi adiabatique. On trouve une multitude d'études théoriques et expérimentales mais très peu de simulations numériques.

Ce chapitre est consacré à l'analyse des transferts turbulents dans l'écoulement pleinement développé d'un espace annulaire. On ne s'intéressera qu'à un seul rapport de rayons $r^* = r_i/r_e = 0.1$, le but n'étant pas d'étudier l'influence du rapport des rayons sur l'écoulement. On peut en effet trouver une étude détaillée sur cet aspect dans les travaux de Chung et al. (2003). On analysera dans un premier temps la structure de l'écoulement turbulent dans un espace annulaire fixe. On étudiera, ensuite, l'influence de la nature du fluide (nombre de Prandtl) sur la distribution radiale des différentes grandeurs turbulentes. Enfin, on s'intéressera à la variation du rapport de flux de chaleur (q_i/q_e) et son incidence sur le transfert de chaleur.

5.1 Champ dynamique

5.1.1 Domaine de calcul

Afin d'étudier le transport d'un scalaire passif, il faut que le champ dynamique soit correctement résolu. La configuration étudiée est un espace annulaire de rapport de rayons $r^* = 0.1$ et de longueur $L/\delta = 25$. Le nombre de Reynolds basé sur la demi-distance entre les deux parois, $\delta = (r_e - r_i)/2$, et sur le maximum du profil laminaire de Poiseuille, U_p , est fixé à $Re_\delta = 3500$ afin de se rapprocher le plus possible de la simulation numérique directe de Chung et al. (2001) qui nous servira de référence pour valider nos résultats. On se limitera dans cette étude à un seul rapport des rayons, le but n'étant pas d'étudier l'effet de courbure mais d'obtenir une bonne dynamique de l'écoulement afin d'étudier la thermique.

	DNS	Chung et al. (2001)
N_θ	257	256
N_r	65	65
N_z	257	192
$L_{\theta_i}^+$	249.93	250.28
$L_{\theta_e}^+$	2499.31	1975.57
L_z^+	4475	2688.75
$r_i\Delta\theta^+$	0.97	0.98
$r_e\Delta\theta^+$	9.72	7.72
Δr_i^+	0.107	0.15
Δr_e^+	0.09	0.12
Δr_{max}^+	8.7	15.23
Δz^+	17.4	14

TAB. 5.1 – Paramètres des simulations comparés aux paramètres de Chung et al. (2001) ($r^* = 0.1$)

Le tableau 5.1 regroupe les différentes données concernant la taille du domaine ainsi que les maillages choisis dans les directions azimutale, radiale et axiale. Ces données sont comparées à celles de Chung et al. (2001) et nous renseignent sur la résolution du maillage choisi. Afin de s'assurer que la taille du domaine de calcul choisie est suffisamment grande pour ne pas restreindre l'écoulement, on trace sur la figure 5.1 les auto-corrélations spatiales des trois composantes de vitesses à une distance $y^+ \simeq 5$ des parois interne et externe. Les auto-corrélations spatiales dans les directions périodiques s'annulent pratiquement toutes à partir d'une distance de l'ordre de la moitié de la longueur du domaine. Il n'est pas nécessaire de vérifier les auto-corrélations à des distances plus éloignées des parois car les régions proches parois sont celles où les structures les plus allongées apparaissent.

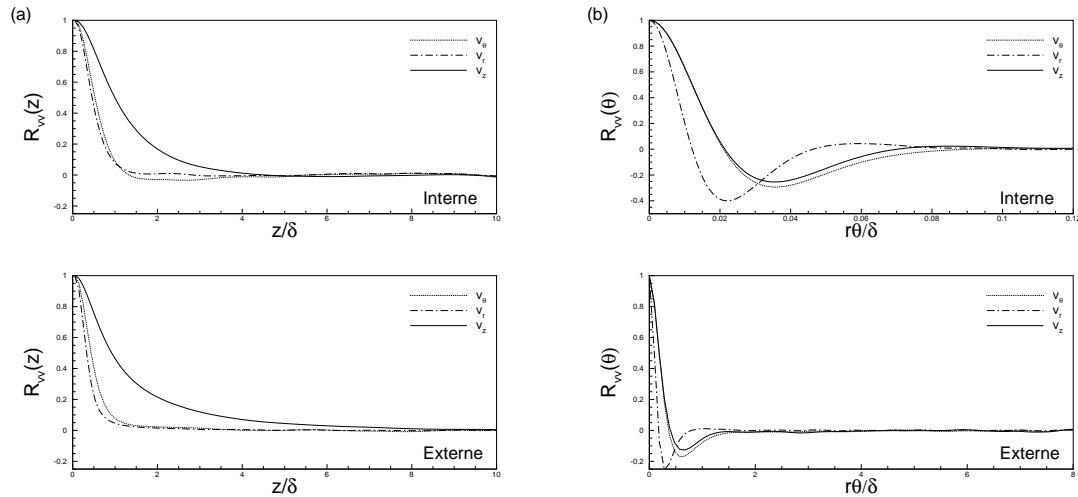


FIG. 5.1 – Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale.

5.1.2 Profil de vitesse

La figure 5.2.a présente le profil de vitesse axiale moyenne normalisé par rapport à la vitesse débitante U_b en fonction de la position radiale. Il est intéressant de noter que le maximum du profil de vitesse se rapproche de la paroi interne. Sur la même figure nous avons reporté le profil de vitesse obtenu par la simulation de Chung et al. (2001). Les deux profils sont quasiment identiques.

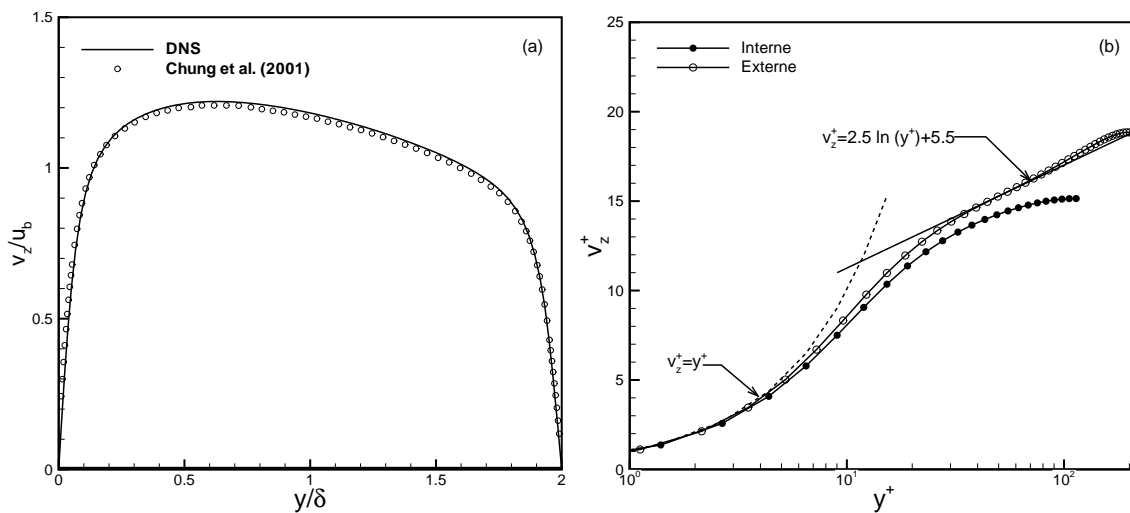


FIG. 5.2 – Profil de vitesse axiale.

Afin de mettre en évidence les différentes zones de l'écoulement dans les régions proche parois, on trace sur la figure 5.2.b le même profil, mais cette fois-ci normalisé par les vitesses de frottement interne (u_{τ_i}) et externe (u_{τ_e}), en fonction de la distance à chaque paroi y^+ . Pour

la paroi externe, on distingue parfaitement les différentes zones : la sous-couche visqueuse $0 \leq y^+ \leq 5$ où la loi est linéaire, la zone tampon $5 \leq y^+ \leq 30$ et finalement la zone logarithmique qui s'étend jusqu'à $y^+ \simeq 200$ et qui suit parfaitement la loi logarithmique $v_z^+ = 2.5 \ln(y^+) + 5.5$.

Sur la paroi interne, la sous-couche visqueuse reste présente. A partir de $y^+ \simeq 5$ on observe un détachement du profil interne par rapport au profil externe ; ce détachement s'accroît dans la zone logarithmique où le profil interne ne suit pas la loi logarithmique. Cette différence est due à l'effet de courbure sur la paroi interne. Dans leur étude, Chung et al. (2001) ont montré que lorsque le rapport des rayons augmente, le profil de vitesse interne se redresse et finit par présenter un profil similaire (qui suit la loi logarithmique) à celui de la paroi externe.

TAB. 5.2 – Résultats des simulations comparés aux résultats numériques de Chung et al. (2001) ($r^* = 0.1$)

	DNS	Chung et al. (2001)
Re_{D_h}	8825	8900
Re_δ	3500	3487
Re_{τ_i}	179	179
Re_{τ_e}	143	141
C_{f_i}	0.01314	0.01300
C_{f_e}	0.00837	0.00810
$-K_{p_i}$	0.00374	0.00242
$-K_{p_e}$	0.00737	0.00492
U_c/U_{τ_i}	19.57	19.45
U_c/U_{τ_e}	24.52	24.65
U_m/U_{τ_i}	12.33	12.41
U_m/U_{τ_e}	15.46	15.72

Le tableau 5.2 regroupe quelques données représentatives de l'écoulement. Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par Chung et al. (2001). Dans leur simulation, Chung et al. définissent un nombre de Reynolds basé sur le diamètre hydraulique et la vitesse débitante $Re_{D_h} = U_b D_h / \nu$ égal à 8900. Il obtiennent ainsi un nombre de Reynolds basé sur la demi-distance entre les deux parois et le maximum du profil de Poiseuille $Re_\delta = U_p \delta / \nu = 3487$. Dans cette étude, c'est Re_δ qui est fixé à 3500, ce qui correspond à $Re_{D_h} = 8825$. On rappelle que le nombre de Reynolds critique (basé sur la demi-distance de l'espace annulaire δ) qui marque la transition entre le régime laminaire et le régime turbulent est fonction du rapport de rayons, sa valeur pour un rapport de rayons $r^* = 0.1$, est $Re_{\delta_c} \simeq 2450$.

Les nombres de Reynolds (Re_τ) basés sur les vitesses de frottements sont comparables à ceux obtenus par Chung et al. (2001), avec une légère surestimation sur la paroi extérieure. A cause de l'effet de courbure, le coefficient de frottement ($C_f = \tau_p / 0.5 \rho U_b$) de la paroi interne est supérieur à celui de la paroi externe.

5.1.3 Écarts types des fluctuations de vitesse

Les écarts types des fluctuations de vitesse axiale, radiale et azimutale sont illustrés par les figures 5.3.a, 5.3.b et 5.3.c. A titre comparatif, nous avons reporté sur ces figures les écarts types obtenus par Chung et al. (2001). Les deux simulations sont en excellent accord. On observe que les intensités turbulentes au voisinage de la paroi interne sont toujours inférieures à celles au voisinage de la paroi externe. Cette différence est due à l'effet de courbure. Dans un canal plan, les intensités au voisinage des deux parois sont similaires. On se rapproche de cette similarité en augmentant le rapport des rayons. En effet, dans un espace annulaire de faible rapport de rayons, la surface de la paroi interne est plus petite que celle de la paroi externe, elle fournit donc moins d'énergie cinétique turbulente.

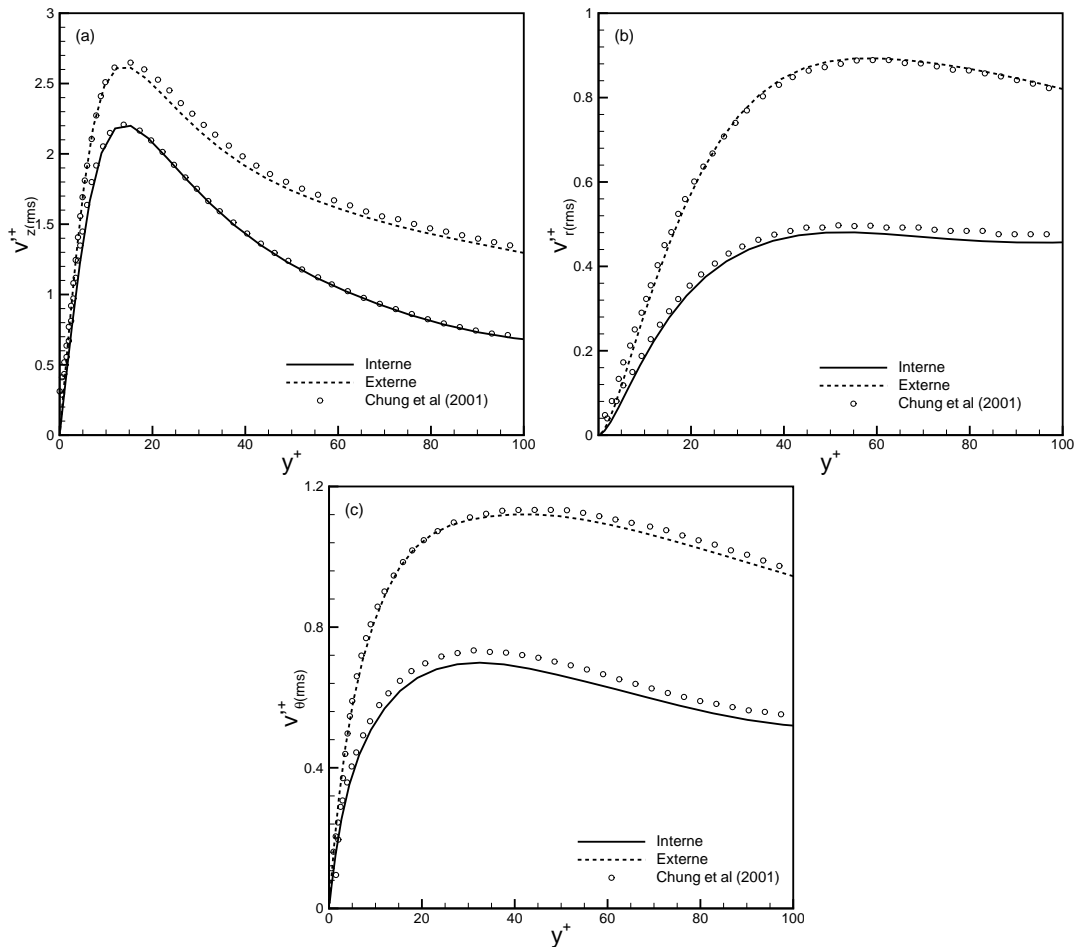


FIG. 5.3 – Écarts type des fluctuations de vitesse.

Le pic des fluctuations de vitesse axiale au voisinage des deux parois atteint son maximum à une distance de la paroi $y^+ \simeq 14$. La valeur de ce maximum est $v'_z{}^+ = 2.2$ pour la paroi interne et $v'_z{}^+ = 2.6$ pour la paroi externe, cette dernière valeur est également obtenue pour un écoulement turbulent dans un canal plan (Kim et al. (1987)) et dans une conduite cylindrique (chapitre précédent) où le pic des fluctuations de la vitesse axiale est aussi situé à $y^+ \simeq 14$.

On en déduit que la position du pic de fluctuations de la vitesse axiale au voisinage des deux parois est indépendante du rapport des rayons. Sa valeur, au voisinage de la paroi externe, est identique à celles trouvées dans les autres géométries (canal plan et conduite cylindrique). Seule la paroi interne semble être affectée, Chung et al. (2001) ont montré que lorsqu'on augmente le rapport des rayons, le maximum des fluctuations au voisinage de la paroi interne, augmente et tend vers la valeur $v_z^+ = 2.6$. Un comportement similaire est observé sur les deux autres composantes de la vitesse. L'intensité de la turbulence pour les vitesses radiale et azimutale est inférieure sur la paroi interne à cause de l'effet de courbure.

Pour montrer la contribution à l'énergie cinétique de l'intensité de turbulence axiale ($\overline{v'_{zrms}}$) par rapport aux intensités normales à l'écoulement ($\overline{v'_{rrms}}$ et $\overline{v'_{\theta rms}}$), on trace le paramètre de partition de l'énergie $K^* = 2\overline{v_z'^2} / (\overline{v_r'^2} + \overline{v_\theta'^2})$ (Figure 5.4). Ce paramètre est plus grand au voisinage de la paroi interne (comparé à celui au voisinage de la paroi externe) et cela jusqu'à une distance $y^+ \simeq 80$ de la paroi, montrant que l'énergie cinétique transférée de la composante axiale aux composantes normales à l'écoulement est plus petite dans la région interne de l'espace annulaire. Sur la même figure, nous avons reporté les paramètres de partition d'énergie obtenus dans un cylindre (chapitre précédent), et dans un canal plan (Kim et al. (1987)). On remarque que le paramètre de partition sur la paroi externe se situe entre les paramètres de partitions obtenus dans le tube cylindrique et le canal plan. Lorsque le rapport de rayons augmente, Chung et al. (2001) montrent que ce paramètre interne diminue au voisinage de la paroi interne et tend vers celui du canal plan.

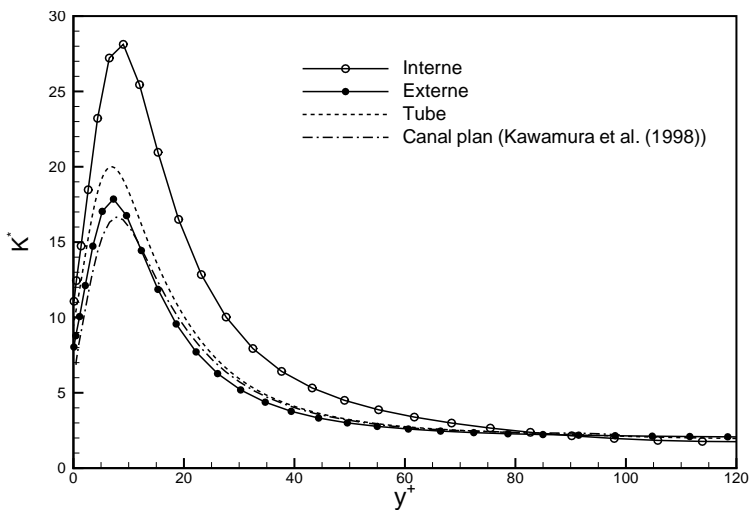


FIG. 5.4 – Paramètre de partition d'énergie.

5.1.4 Positions radiales du maximum de vitesse axiale et de la tension de Reynolds nulle

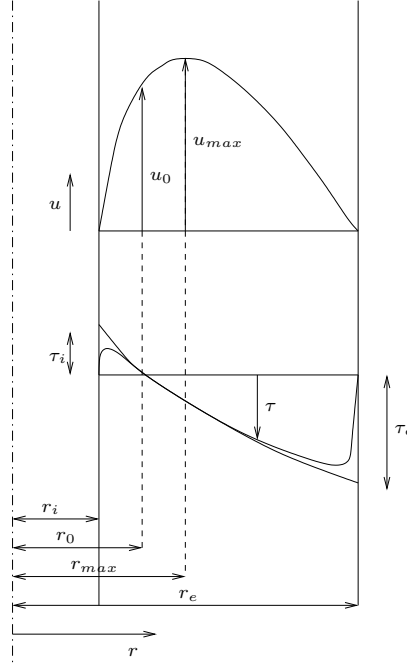


FIG. 5.5 – Caractéristiques d'un écoulement turbulent dans un espace annulaire.

L'intégration de l'équation de quantité de mouvement moyennée dans le temps pour l'écoulement turbulent d'un fluide dans un espace annulaire concentrique et circulaire donne :

$$\tau = \mu \frac{dv_z}{dr} - \overline{\rho v'_r v'_z} \quad (5.1)$$

où τ est la contrainte de cisaillement totale (moyennée dans le temps) à une position radiale r donnée. Les quantités μ et ρ sont respectivement la viscosité et la densité du fluide, u la vitesse locale et $\overline{u'_r u'_z}$ le produit des fluctuations de vitesses radiale et axiale moyenné dans le temps (tension de Reynolds). Le gradient de pression dans la direction de l'écoulement $-dp/dz$ est indépendant de la position radiale r ; la contrainte de cisaillement peut être exprimée en fonction de r_0 qui est la position radiale où la contrainte de cisaillement totale s'annule (Kaneda et al. (2003)) :

$$\tau = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r_0^2 - r^2}{2r} \right) \quad (5.2)$$

L'expression 5.2 est valable sur toute la section droite de l'espace annulaire, du rayon interne r_i au rayon externe r_e . La contrainte de cisaillement τ est positive lorsque $r < r_0$ et négative lorsque $r > r_0$. Pour simplifier, on considère que les contraintes de cisaillement aux parois interne et externe sont positives définies respectivement comme : $\tau_i = \tau_{r=r_i}$ et $\tau_e = -\tau_{r=r_e}$.

Churchill et al. (1995) proposent de réexprimer l'équation 5.1 sous forme adimensionnelle :

$$\frac{\tau}{\tau_p} = \mu \frac{du^+}{dy^+} - \overline{(v'_r v'_z)^+} \quad (5.3)$$

A partir de la relation 5.2, plusieurs expressions reliant les contraintes aux parois et la position r_0 peuvent être déduites :

$$\frac{\tau}{\tau_i} = \frac{r_1}{r} \left(\frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - r_i^2} \right) \quad (5.4)$$

$$\tau_i = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r_0^2 - r_i^2}{2r_i} \right) \quad (5.5)$$

$$\tau_e = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \left(\frac{r_0^2 - r_e^2}{2r_e} \right) \quad (5.6)$$

Kays et Leung (1963) ont effectué une série de mesures expérimentales qui ont permis de déduire une corrélation permettant de déterminer la position radiale r_{max} du maximum du profil de vitesse axiale pour un écoulement turbulent, en fonction des rayons interne et externe de l'espace annulaire :

$$\frac{r_{max} - r_i}{r_e - r_{max}} = r^{*0.343} \quad (5.7)$$

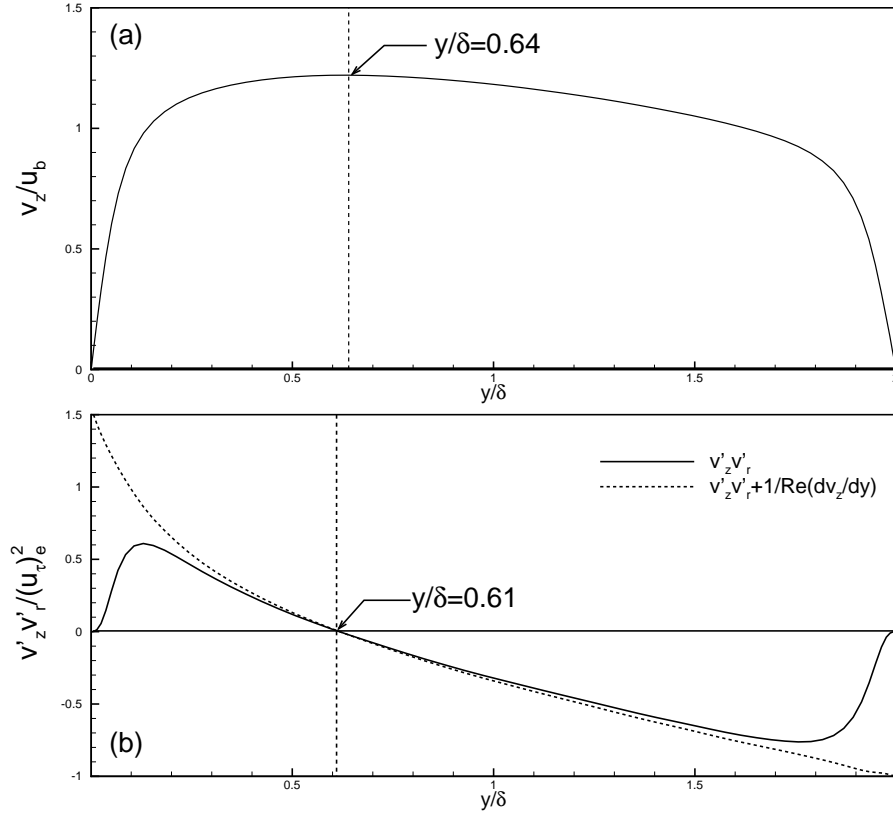
De la même façon, Rheme (1974) a établi une relation similaire à la précédente, à partir de données expérimentales, afin d'évaluer la position radiale r_0 où la contrainte de cisaillement s'annule :

$$\frac{r_0 - r_i}{r_e - r_0} = r^{*0.386} \quad (5.8)$$

Ces deux expressions sont supposées être indépendantes du nombre de Reynolds. Cependant ce postulat reste incertain et découle de l'expression théorique pour le régime laminaire où $r_0 = r_{max}$:

$$\left(\frac{r_{max}}{r_i} \right)^2 = \frac{[(r_e/r_i)^2 - 1]}{\ln(r_e/r_i)^2} \quad (5.9)$$

La figure 5.6.b présente les distributions de la tension de Reynold $\overline{v'_z v'_r}$ et de la tension totale $\overline{v'_z v'_r} - (1/Re)(dv_z/dy)$ normalisées par rapport à la vitesse de frottement u_{τ_i} et en fonction de la distance à la paroi interne. Les parois étant fixes, toutes les autres composantes du tenseur de Reynolds sont nulles. Sur la figure 5.6.b, la tension de Reynolds $\overline{v'_z v'_r}$ est asymétrique, tout comme le profil de vitesse dont le maximum est décalé vers la paroi interne (figure 5.6.a). On note que la position de la tension nulle, ne coïncide pas avec le maximum du profil de vitesse ; celle-ci est plus proche de la paroi interne et se situe à $y/\delta = 0.61$. De plus, la tension de Reynolds dans la région proche de la paroi externe est plus intense que la

FIG. 5.6 – Positions radiales r_0 et r_{max} .

tension dans la région proche de la paroi interne.

Comparons la position radiale du maximum du profil de vitesse, r_{max} , et la position où la tension de Reynolds s'annule, r_0 , obtenues par notre simulation numérique directe (Figure 5.6) à celles calculées à partir des corrélations 5.7 et 5.8. En réexprimant l'expression 5.8 en fonction de la distance à la paroi interne $y^* = y/\delta = (r - r_i)/\delta$ on obtient :

$$\frac{r_0 - r_i}{r_e - r_0} = \frac{(r_0 - r_i)/\delta}{(r_e - r_0)\delta} = \frac{y_0^*}{2 - y_0^*} = r^{*0.386} \quad (5.10)$$

soit :

$$y_0^* = \frac{2r^{*0.386}}{1 + r^{*0.386}} \quad (5.11)$$

De la même façon, à partir de la relation 5.7 on obtient :

$$y_{max}^* = \frac{2r^{*0.343}}{1 + r^{*0.343}} \quad (5.12)$$

Les positions radiales que nous avons obtenues $r_0 = 0.61$ et $r_{max} = 0.64$ sont en parfait accord avec les résultats obtenus par la simulation numérique directe de Chung et al. (2001). A titre comparatif, nous avons reportés dans le tableau 5.3 les prédictions des simulations des grandes échelles de Satake et al. (1993) dans un espace annulaire de rapport de rayons $r^* = 0.1$ et pour une nombre de Reynolds $Re_{\tau_m} = 895$. Le nombre de Reynolds semble influencer les positions radiales r_0 et r_{max} qui s'écartent légèrement de la parois interne lorsqu'il augmente. Les corrélations 5.11 et 5.12 arrivent à prédire le décalage entre les deux positions, mais ne donnent pas les positions exactes.

TAB. 5.3 – Positions r_0 et r_{max}

	$Re_{\tau_m}^a$	y_0^*	y_{max}^*
DNS	144	0.61	0.64
Chung et al. (2001)	146	0.61	0.64
Satake et al. (1993)	895	0.63	0.67
Corrélations 5.11 et 5.12	—	0.583	0.624

$$^a Re_{\tau} = u_{\tau_m} \delta / \nu$$

$$u_{\tau_m} = (\tau_m / 2)^{1/2}$$

$$\tau_m = \tau_i r_i + \tau_e r_e / (r_i + r_e)$$

5.1.5 Analyse de l'écoulement par les fonctions de densités de probabilités jointes (JPDF)

Les écoulements turbulents possèdent une structure tourbillonnaire cohérente et organisée qui domine l'ensemble des autres événements turbulents de nature plus aléatoire. Afin de mieux cerner les interactions entre les différentes fluctuations des composantes de vitesses nous allons utiliser la méthode des quadrants qui consiste à tracer les densités de probabilités jointes (JPDF) entre les fluctuations de vitesse axiale, radiale et azimuthale. Dans notre cas, la composante axiale est celle qui définit le sens de l'écoulement. Les deux autres directions sont dites " normales " à l'écoulement. Les JPDF seront tracées deux à deux $((v'_r, v'_z), (v'_\theta, v'_z), (v'_\theta, v'_r))$. Cependant les phénomènes caractéristiques de l'écoulement turbulent (éjection et balayage) sont mis en évidence uniquement par les composantes radiale (normale à l'écoulement) et axiale (dans le sens de l'écoulement).

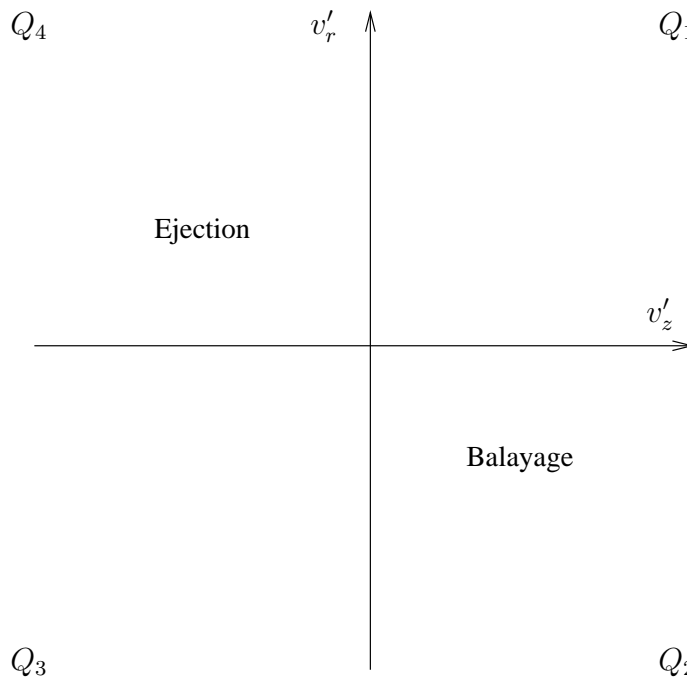


FIG. 5.7 – Méthode des quadrants.

Dans un écoulement turbulent pariétal on peut distinguer plusieurs phénomènes selon le signe des fluctuations des vitesses axiale et radiale. Celles-ci pouvant être négatives ou positives, on peut constituer quatre combinaisons :

- $v'_z > 0$ et $v'_r > 0$, correspond à des régions haute vitesse (premier quadrant).
- $v'_z > 0$ et $v'_r < 0$, correspond aux régions haute vitesse où apparaissent les phénomènes de balayage (deuxième quadrant).
- $v'_z < 0$ et $v'_r < 0$, correspond aux régions basse vitesse (troisième quadrant).
- $v'_z < 0$ et $v'_r > 0$, correspond aux régions basse vitesse où apparaissent les phénomènes d'éjection (quatrième quadrant).

Les figures 5.8 et 5.9 illustrent les densités de probabilités jointes entre les fluctuations des

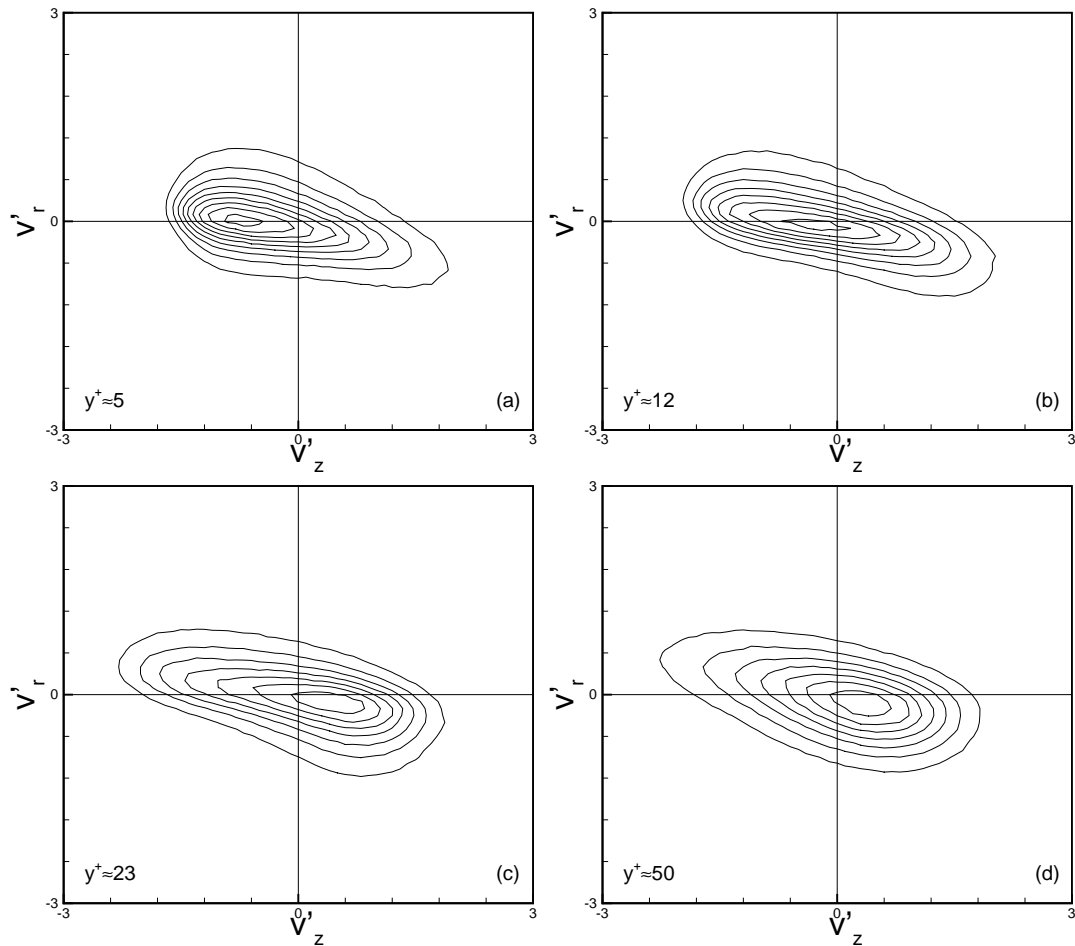


FIG. 5.8 – JPDF des fluctuations de vitesses axiale et radiale / paroi externe.

vitesses axiale et radiale normalisées par leur rms respectives. Les JPDF sont présentées à différentes distances par rapport aux parois interne et externe. On observe un comportement quasi similaire au voisinage des deux parois jusqu'à $y^+ \simeq 50$. A $y^+ \simeq 5$, la probabilité jointe d'apparition des fluctuations positives de vitesse radiale $v'_r > 0$ et des fluctuations négatives de vitesse axiale $v'_z < 0$ est la plus grande. La vitesse longitudinale est alors plus faible que la moyenne de l'écoulement tandis que la vitesse radiale devient plus intense, le fluide est projeté des parois vers l'intérieur de l'espace annulaire. Cela signifie qu'au voisinage des parois les phénomènes d'éjection sont plus nombreux mais les phénomènes de balayage sont plus intenses. A cette position, les JPDF sont un peu plus resserrées du côté interne, signifiant que les phénomènes d'éjection et de balayage sont plus intenses.

A $y^+ \simeq 12$, la probabilité d'apparition de fluctuations radiales et axiales de signes opposés est pratiquement la même pour les combinaisons $v'_z > 0$ et $v'_r < 0$ ou $v'_z < 0$ et $v'_r > 0$. A cette position, les phénomènes d'éjection et de balayage ont pratiquement la même intensité.

A partir de $y^+ \simeq 23$ et jusqu'à $y^+ \simeq 50$, la probabilité d'apparition de fluctuations négatives

de vitesse radiale $v'_r < 0$ en même temps que des fluctuations positives de vitesse axiale $v'_z > 0$ devient plus importante, le fluide est alors drainé vers les parois. Les éjections s'atténuent peu à peu laissant place au phénomène de balayage.

Les phases d'éjection et de balayage contribuent à la production de la tension de Reynolds ($-\overline{v'_r v'_z}$) la plus intense. Entre ces deux phases, on distingue tout de même une petite activité correspondant à une corrélation $\overline{v'_r v'_z}$ positive (production négative) durant laquelle les fluctuations de vitesses axiale et radiale prennent le même signe.

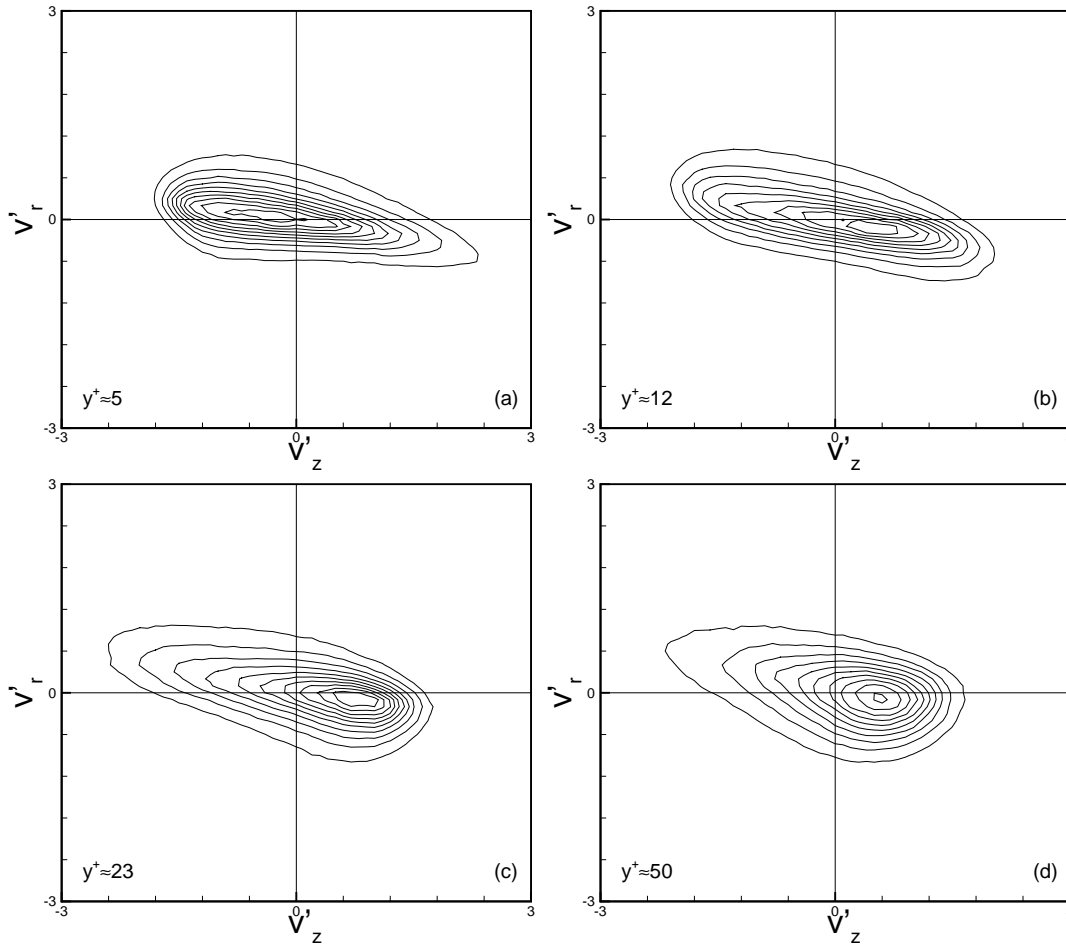
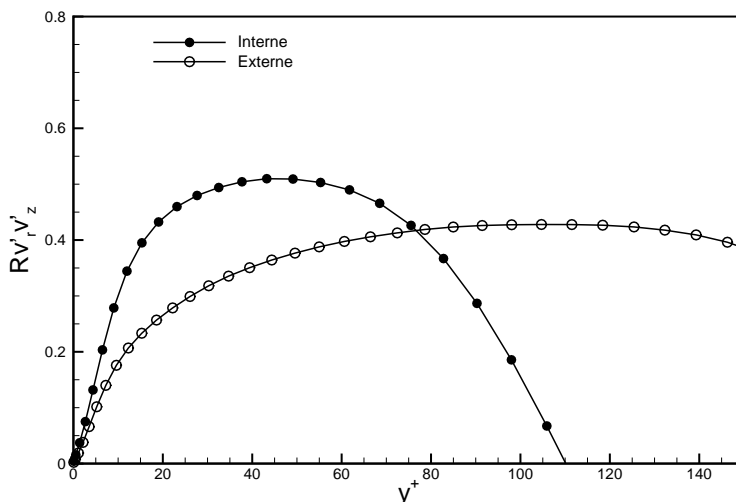


FIG. 5.9 – JPDF des fluctuations de vitesses axiale et radiale / paroi interne.

A des distances plus éloignées des parois ($y^+ > 50$), le balayage persiste des deux côtés. Pour mieux voir jusqu'à quelle distance, nous avons tracé sur la figure 5.10 le coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuations de vitesse radiale, $R_{v'_r v'_z}$, en fonction de la distance aux paroi. Pour des distances y^+ telles que $0 < y^+ < 80$, la corrélation entre v'_z et v'_r est plus grande du côté de la paroi interne, prouvant encore une fois que l'intensité de tous les phénomènes observés du côté interne sont plus intenses que ceux observés du côté externe, notamment les éjections aux voisinage des parois. A partir de $y^+ \simeq 80$, le coefficient de corrélation $R_{v'_r v'_z}$ décroît brusquement du côté interne et s'annule


 FIG. 5.10 – Coefficient de corrélation $R_{v'_r v'_z}$.

à $y^+ \simeq 110$. A cette position, les fluctuations de vitesses axiale et les fluctuations de vitesse radiale sont complètement décorrélées, le balayage disparaît du côté interne. Sur la paroi externe, $R_{v'_r v'_z}$ maintient une valeur quasi constante jusqu'à $y^+ \simeq 150$, signifiant que les phénomènes de balayage sont plus persistants du côté externe. Ces résultats confirment les observations de Chung et al. (2001).

Sur la figure 5.11 sont représentées densités de probabilités jointes entre les fluctuations de vitesse axiale (v'_z) et les fluctuations de vitesse azimuthale (v'_θ) (en trait discontinu) et celles entre les fluctuations de vitesse radiale v'_r et les fluctuations de vitesse azimuthale (v'_θ) (en trait continu), à des distances $y^+ \simeq 5$ et $y^+ \simeq 50$ des deux parois. Toutes les JPDF présentent une symétrie par rapport à l'axe $v'_\theta = 0$. Cette symétrie signifie que les fluctuations de vitesse azimuthale ne sont jamais corrélées aux fluctuations des autres composantes de vitesse. Les parois étant fixes (pas de rotation), les tensions de Reynolds $\overline{v'_z v'_\theta}$ et $\overline{v'_r v'_\theta}$ sont donc nulles.

Il est possible de voir, sur la figure 5.11, la distribution des fluctuations positives et négatives des vitesses axiale et radiale. Sur les deux parois, et quelle que soit la distance par rapport aux parois, la fonction de probabilité des fluctuations de vitesse radiale est centrée et resserrée autour de la valeur moyenne 0. Cela signifie qu'il y a autant de fluctuations positives que de fluctuations négatives, leur amplitude est beaucoup plus petite par rapport aux fluctuations de vitesse axiale. A une distance $y^+ \simeq 5$ par rapport aux deux parois, la fonction de probabilité des fluctuations de vitesse axiale est déviée vers les valeurs négatives. Cette déviation est un peu plus prononcée du côté interne. Les fluctuations négatives de vitesse axiale au voisinage des parois sont plus nombreuses. Cependant, l'amplitude des fluctuations positives est plus grande. A une distance, $y^+ \simeq 50$, on observe un comportement inverse, le pic des fluctuations de la vitesse axiale est situé dans les valeurs positives, signifiant que les fluctuations négatives de la vitesse axiale sont moins probables mais leur intensité est beaucoup plus grande.

Enfin, nous avons tracé les fonctions de densité de probabilité jointes entre les fluctuations des composantes de vitesse à une position proche du maximum de vitesse axiale ($y/\delta \simeq 0.64$). A cette position, la contribution des tensions de Reynolds $\overline{v'_z v'_\theta}$ et $\overline{v'_r v'_\theta}$ est pratiquement nulle.

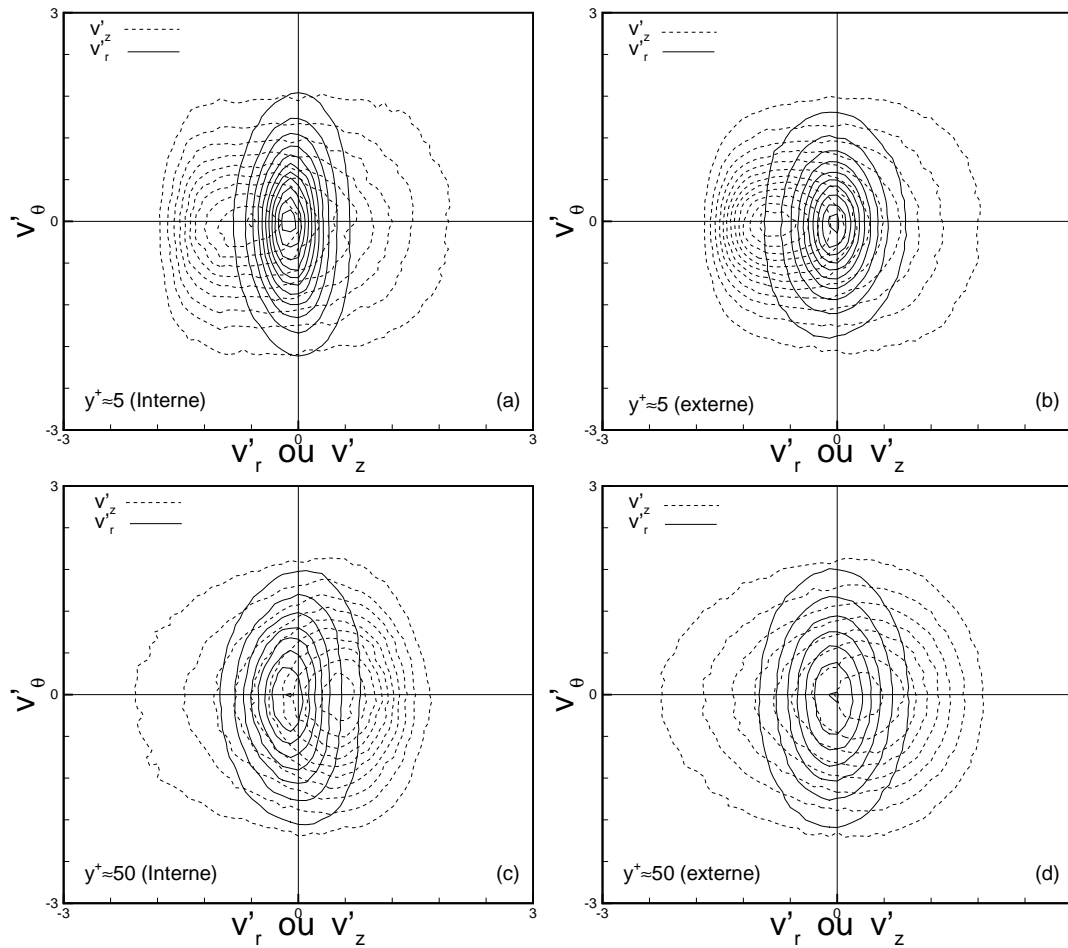


FIG. 5.11 – JPDF des fluctuations de vitesses axiale-azimutale et radiale-azimutale / à droite paroi externe, à gauche paroi interne.

On remarque que le centre de la JPDF entre les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuations de vitesse azimutale se rapproche de 0. La distribution des fluctuations de vitesse axiale devient presque symétrique (autant de fluctuations positives que de fluctuation négatives). La tension de Reynolds $\overline{v'_z v'_r}$ étant pratiquement nulle à cette position, la JPDF entre les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuation de vitesse radial présente une symétrie par rapport à l'axe $v'_r = 0$. Les fluctuations v'_z et v'_r sont alors complètement décorréées et les phénomènes de balayage observés loin des parois disparaissent.

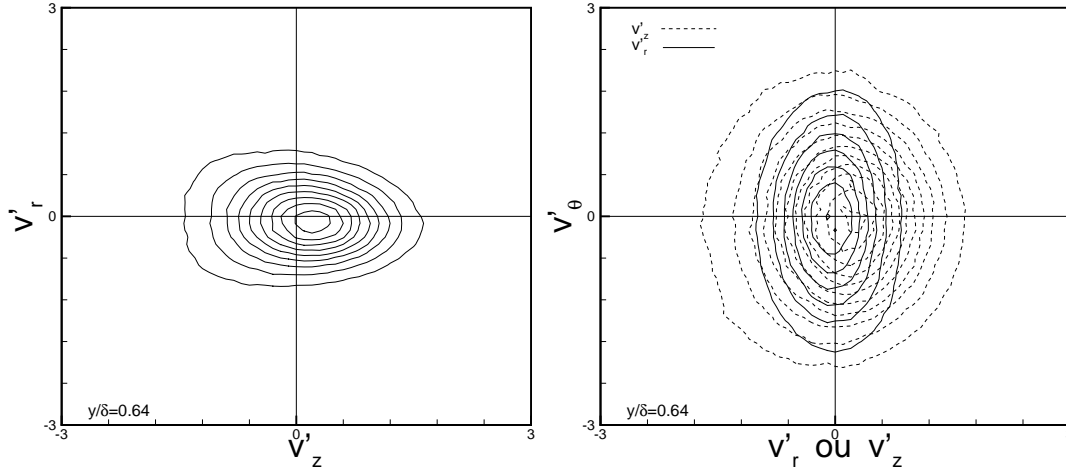


FIG. 5.12 – JPDF des fluctuations de vitesses au voisinage de la position de vitesse axiale maximale.

5.2 Champ thermique

Après avoir validé le champ dynamique et analysé brièvement les différents phénomènes observés dans un écoulement turbulent pleinement développé dans un espace annulaire, nous allons nous intéresser au transport du scalaire passif. Dans un premier temps, nous allons valider les résultats obtenus par notre simulation numérique directe en comparant quelques statistiques (profil de température moyen, rms des fluctuations de température, flux turbulents) aux résultats trouvés dans la littérature. Le transport du scalaire passif peut être influencé par différents paramètres. Dans leur étude, Chung et al. (2003) ont analysé l'influence du rapport de rayon (effet de courbure) sur le champ de température dans un écoulement d'air dans un espace annulaire soumis à un flux de chaleur uniforme et identique sur les deux parois. Cette étude, nous servira de référence pour valider nos résultats. Dans ce qui suit, nous fixons le rapport des rayons à $r^* = 0.1$ afin de tenir compte de l'effet de courbure. Dans un premier temps, on analysera l'influence de la nature du fluide (nombre de Prandtl) en maintenant un rapport des flux de chaleur $q^* = 1$. Ensuite, pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), on étudiera l'influence du rapport des flux de chaleur imposés sur les parois sur le transfert de chaleur en faisant tendre successivement chaque paroi vers un comportement adiabatique (flux de chaleur nul).

5.2.1 Validation

La taille du domaine ainsi que le maillage utilisé pour l'étude du champ thermique sont identiques à ceux utilisés pour le champ dynamique. Cependant, dans leur étude, Chung et al. (2003) ont modifié la taille du domaine en allongeant sa longueur dans le sens de l'écoulement et en raffinant le maillage dans cette direction afin de conserver la même résolution. Par souci de clarté, nous comparons de nouveau les caractéristiques du domaine de calcul ainsi que le maillage utilisé dans notre étude à ceux employés par Chung et al. (2003). On rappelle que la longueur du domaine est $L/\delta = 25$, où δ est la demi distance entre les deux parois.

	DNS	Chung et al. (2003)
N_θ	257	256
N_r	65	65
N_z	257	256
$L_{\theta_i}^+$	249.93	250.28
$L_{\theta_e}^+$	2499.31	1975.57
L_z^+	4475	4485.75
$r_i \Delta \theta^+$	0.97	0.98
$r_e \Delta \theta^+$	9.72	7.72
Δr_i^+	0.107	0.15
Δr_e^+	0.09	0.12
Δr_{max}^+	8.7	15.23
Δz^+	17.4	17.52

TAB. 5.4 – Paramètres des simulations comparés aux paramètres de Chung et al. (2003) ($r^* = 0.1$)

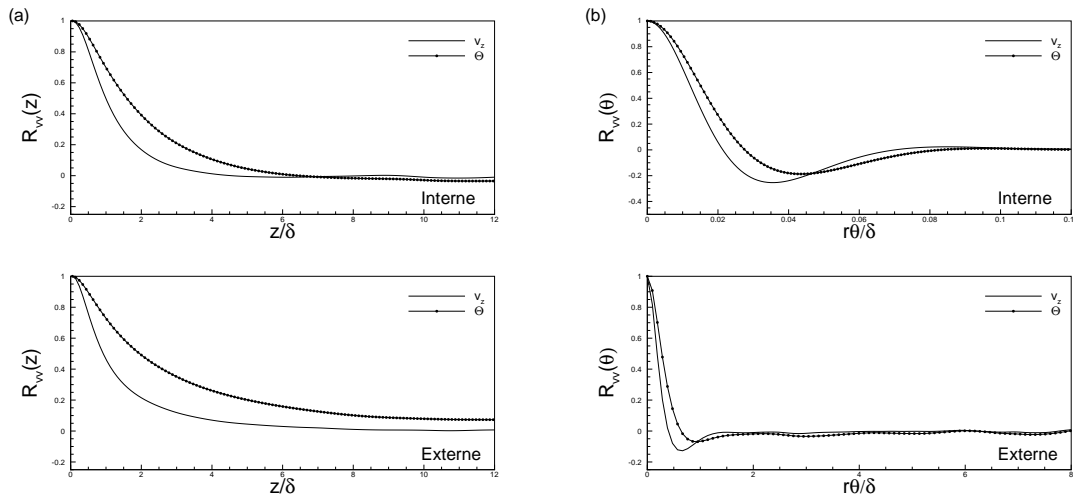


FIG. 5.13 – Auto-corrélations spatiales : (a) séparation axiale, (b) séparation azimutale.

Pour s'assurer que la taille du domaine est suffisamment grande pour capter toutes les structures du champ thermique, nous avons tracé sur la figure 5.13 les auto-corrélations spatiales des fluctuations de température ainsi que celles des fluctuations de vitesse axiale dans les directions axiale et azimutale et à une distance $y^+ \simeq 5$ des parois interne et externe. Dans la direction axiale, l'auto-corrélation des fluctuations de vitesse axiale tend bien vers 0, signifiant que le domaine est assez grand pour capturer les structures dynamique les plus longues. Sur la paroi externe, l'auto-corrélation spatiale des fluctuations de température ne s'annule pas, sa valeur reste constante et égale à 0.07. Ce comportement a aussi été observé par Chung et al. (2003) qui trouve une valeur de 0.09. L'auto-corrélation spatiale des fluctuations de température ne s'annule pas. Tiselj et al. (2001) ont montré dans leur simulation numérique directe,

avec des conditions thermiques similaires (flux de chaleur imposé à la paroi), que même en augmentant la taille du domaine, l'auto-corrélation spatiale des fluctuations de température ne s'annule jamais pour ce genre de conditions aux limites. Cependant, un domaine assez large pour capter les structures dynamiques les plus étirées qui sont à l'origine de la turbulence est aussi suffisant pour le scalaire passif. Les auto-corrélations spatiale dans la direction azimutale s'annulent aussi bien pour la paroi interne que pour la paroi externe. Il y a un léger décalage du pic négatif entre les fluctuations de température et les fluctuations de vitesse axiale dû à la différence entre les conditions aux limites des champs thermique et dynamique.

5.2.2 Profil de température

La figure 5.14 illustre les profils de température normalisés par les températures de frottement $T_\tau = q_i/\rho C_p u_\tau$ (paroi interne) et $T_\tau = q_e/\rho C_p u_\tau$ (paroi externe), pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) et un nombre de Reynold $Re_\delta = 3500$. Au voisinage des parois, dans la zone de conduction, les profils de température suivent parfaitement le comportement asymptotique $\Theta^+ = Pr.y^+$ qui est représenté sur la figure par la ligne discontinue. La zone de conduction s'étend jusqu'à $y^+ \simeq 5$ dans la région proche de la paroi externe. Sur la paroi interne, la zone de conduction est légèrement moins épaisse, celle-ci s'étend jusqu'à $y^+ \simeq 4$. Dans la zone tampon (zone intermédiaire) et à cause de l'effet de courbure, le profil interne se détache assez rapidement du profil externe. Comme pour le profil de vitesse, une différence notable est observée entre les profils interne et externe dans la zone logarithmique ($y^+ > 30$).

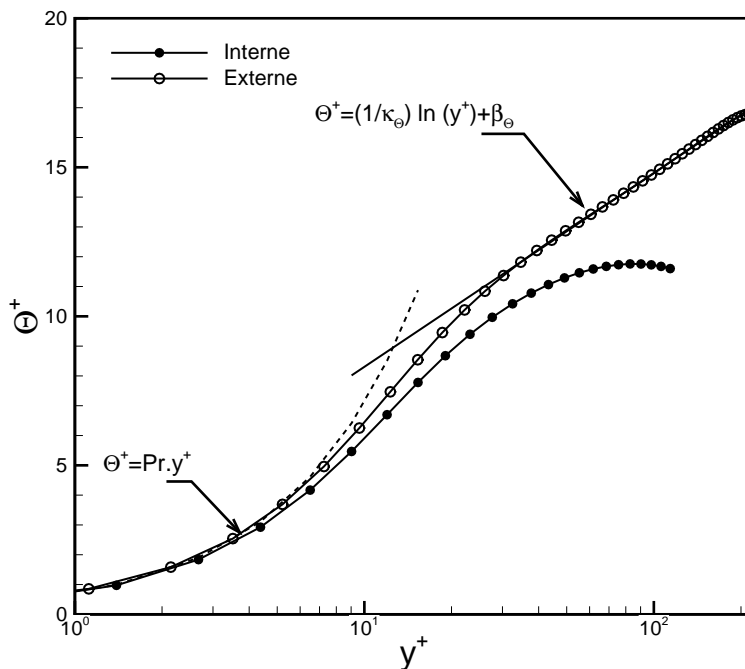


FIG. 5.14 – Profil de température.

Les coefficients κ_Θ et β_Θ de la droite logarithmique sont respectivement représentés sur les figures 5.15.a et 5.15.b. On rappelle que ces coefficients sont déterminés par les relations

suivantes :

$$\kappa_{\Theta} = \frac{1}{y^+} \left(\frac{d\Theta^+}{dy^+} \right)^{-1} \quad (5.13)$$

$$\beta_{\Theta} = \Theta^+ - \frac{1}{\kappa_{\Theta}} \ln y^+ \quad (5.14)$$

Sur la figure 5.15.a, on distingue clairement la différence entre les profils de température dans les régions proches des parois interne et externe. Pour la paroi externe, Le coefficient κ_{Θ} présente un palier dans la zone logarithmique jusqu'à une distance $y^+ \simeq 150$. Pour la paroi interne, ce palier est inexistant, la valeur de κ_{Θ} diverge assez rapidement dénotant l'inexistence d'un comportement logarithmique dans cette région. Le coefficient β_{Θ} étant directement déduit de la valeur κ_{Θ} , seul la paroi externe est présentée sur la figure 5.15. Là aussi, le coefficient β_{Θ} présente un palier.

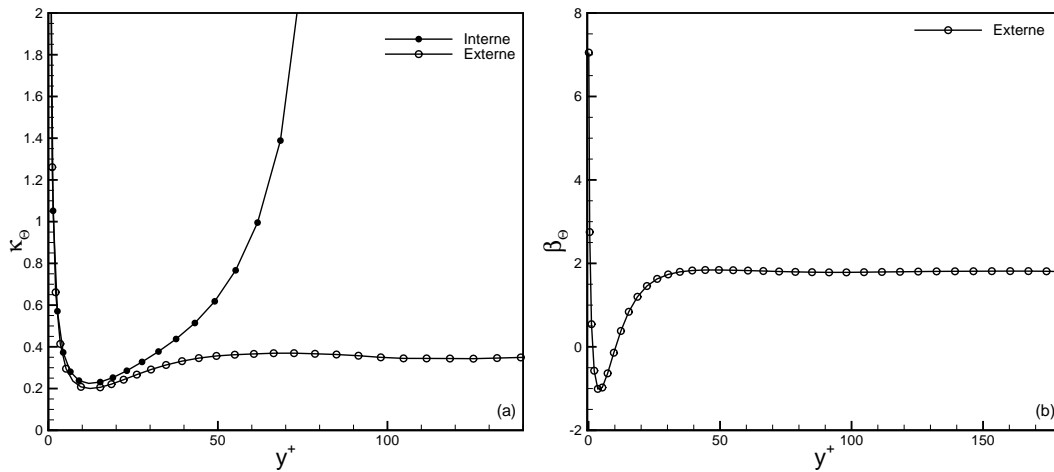


FIG. 5.15 – Détermination des coefficients de la droite logarithmique : (a) κ_{Θ} , (b) β_{Θ} .

TAB. 5.5 – Valeurs de κ_{Θ} et β_{Θ} pour diverses géométries

	κ_{Θ}	β_{Θ}
DNS annulaire	0.362	1.8
Chung et al. (2003)	0.381	2.91
DNS tube	0.347	2.347
Kawamura et al. (1999)	0.430	3.837

La détermination des coefficients de la droite logarithmique du profil de température à fait l'objet de plusieurs études pour le canal plan, la conduite cylindrique ainsi que pour l'espace annulaire. Le tableau 5.5 regroupe les résultats tirés à partir des expressions 5.13 et 5.14 et qui sont comparés à ceux prédits par Chung et al. (2003) dans un espace annulaire, et aux coefficients trouvés dans un canal plan (Kawamura et al. (1999)) ainsi que dans une

conduite cylindrique (chapitre précédent). Dans un espace annulaire et pour un rapport de rayon $r^* = 0.1$ κ_Θ vaut 0.362, cette valeur est légèrement inférieure à celle obtenue par Chung et al. (2003) $\kappa_\Theta = 0.381$. Les coefficients κ_Θ et β_Θ semblent très sensibles à la géométrie, la valeur de κ_Θ obtenue dans un espace annulaire est située entre celle de la conduite cylindrique $\kappa_\Theta = 0.347$ (limite inférieure) et celle du canal plan $\kappa_\Theta = 0.4$ (limite supérieure).

5.2.3 Ecart-type des fluctuations de température

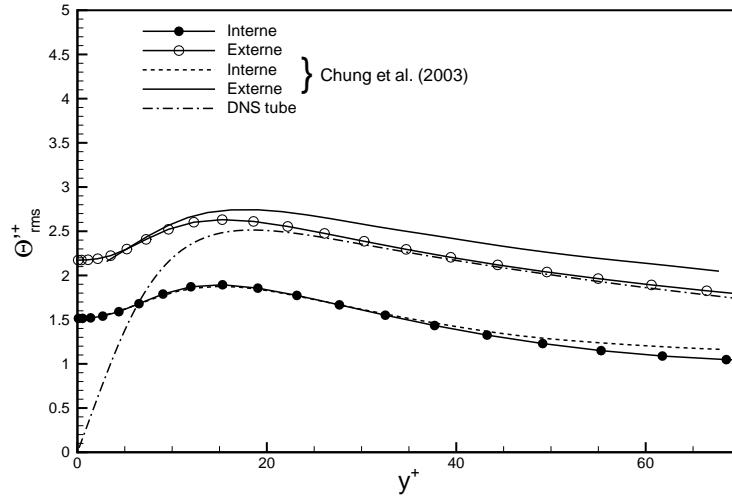


FIG. 5.16 – Ecart-type des fluctuations de température.

Les écart-types (rms) des fluctuations de température normalisés par les températures de frottement de chaque paroi sont illustrés sur la figure 5.16. Sur la même figure, nous avons reporté les résultats obtenus par Chung et al. (2003) ainsi que ceux issus de notre simulation numérique directe d'un écoulement d'air dans une conduite cylindrique (chapitre précédent). Nos résultats concordent avec les résultats de Chung et al. (2003). Sur la paroi interne, l'accord est quasi parfait ; sur la paroi externe, la rms des fluctuations de température est sous-estimée par rapport à celle obtenue par Chung et al. (2003) dans la région $y^+ > 10$. A cause de l'effet de courbure, l'intensité des fluctuations de température sur la paroi externe est supérieure à celle sur la paroi interne. Les pics des fluctuations de température sont localisés à la même distance des paroi $y^+ \simeq 14$ et coïncident avec les pics de fluctuation de la vitesse axiale. Contrairement aux résultats obtenus dans la conduite cylindrique, la rms des fluctuations de température ne tend pas vers 0 lorsqu'on se rapproche des parois. Cette différence s'explique par les conditions aux limites différentes utilisées dans les deux géométries. Dans la conduite cylindrique, nous avons imposé une condition mixte en posant $\Theta^+ = 0$, cela implique que les fluctuations de température s'annulent à la paroi. Dans l'espace annulaire, nous avons pris en considération ces fluctuations, la condition imposée est de type flux idéal. Sur la paroi externe, la rms des fluctuations de température est égale à 2.2, cette valeur est indépendante du nombre de Reynolds ainsi que de la géométrie. Elle se situe généralement entre 2 et 2.2 (Lu et al. (1995), Kong et al. (2000), Tiselj et al. (2001)). Dans la région $y^+ > 20$, la rms des fluctuations de température de la paroi externe coïncide avec celle de la conduite cylindrique.

Le rapport de rayons étant faible $r^* = 0.1$, le comportement de la paroi externe tend vers celui du tube dans la région interne de l'écoulement.

5.2.4 Flux de chaleur turbulents

Les flux de chaleur turbulents axial et radial normalisés par les vitesses et température de frottement sont respectivement illustrés sur les figures 5.17.a et 5.17.b en unités de paroi. Tout comme la rms des fluctuations de température, les flux turbulents sont plus intenses du côté de la paroi externe. Les résultats obtenus sont en bon accord avec les prédictions de Chung et al. (2003), mis à part un léger écart sur la paroi externe pour des distances telles que $y^+ > 20$. Nous avons reporté sur les figures 5.17.a et 5.17.b les flux turbulents axial et radial obtenus dans une conduite cylindrique. Le rapport de rayons r^* étant faible, les résultats coïncident.

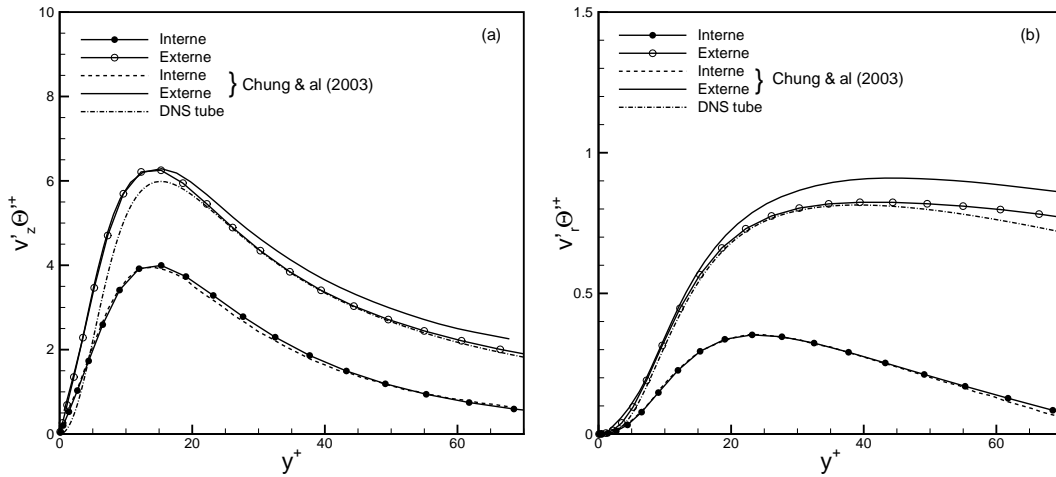


FIG. 5.17 – Flux de chaleur turbulents : (a) flux axial, (b) flux radial.

5.3 Influence du nombre de Prandtl

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le nombre de Prandtl a une grande influence sur le champ thermique et sur l'intensité de la turbulence. Dans la conduite cylindrique ainsi que dans le canal plan, il a été démontré que lorsque le nombre de Prandtl augmente, le pic de turbulence s'intensifie et se rapproche de la paroi. Qu'en est-il dans un espace annulaire ?

Afin d'analyser l'influence de la diffusivité thermique du fluide sur les différentes grandeurs turbulentes, nous avons fait varier le nombre de Prandtl. Pour des raisons de coût de temps de calcul, nous nous sommes limités à des valeurs inférieures à l'unité ($Pr = 0.026, 0.2, 0.4$ et 0.71). Le nombre de Reynolds est toujours fixé à $Re_\delta = 3500$.

Les figures 5.18.a et 5.18.b illustrent respectivement les écart-types des fluctuations de température aux voisinages des parois interne et externe, normalisés par les vitesses et températures de frottement associées à chaque paroi. Un comportement identique est observé au voisinage de chacune des parois. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, l'intensité des

fluctuations de température augmente aussi. Le pic de turbulence qui n'était pas assez visible pour les nombres de Prandtl les plus petits ($Pr = 0.026$ et $Pr = 0.2$) se précise. Ce maximum se déplace vers les parois lorsque le nombre de Prandtl augmente. On retrouve donc le même comportement dans l'espace annulaire.

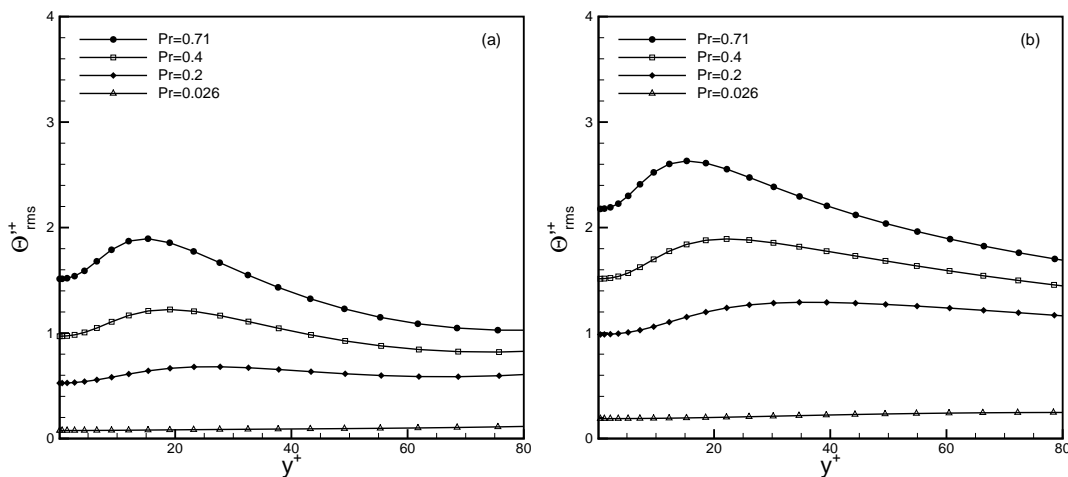


FIG. 5.18 – Variation des écarts-types des fluctuations de température en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

Les flux turbulents axiaux normalisés par les vitesses et températures de frottement sont représentés sur la figure 5.19. Là aussi, lorsque le nombre de Prandtl augmente, on observe le même comportement au voisinage des deux parois, le maximum du flux de chaleur axial augmente. Cependant, la position du maximum du flux turbulent axial est très peu sensible à l'augmentation du nombre de Prandtl. Ce maximum est situé à $y^+ \simeq 15$ côtés interne et externe, indépendamment du nombre de Prandtl. Ce comportement est différent de celui observé dans le canal plan et dans la conduite cylindrique où l'augmentation du nombre de Prandtl induit le déplacement des maximums vers les parois. Il faudrait faire des simulations avec des nombres de Prandtl plus élevés pour confirmer ou infirmer cette tendance.

Une des principales caractéristiques qui différencie les écoulements turbulents dans les espaces annulaires comparés aux autres géométries (canal plan et conduite cylindrique) est la position radiale de la tension de Reynolds nulle. Nous avons vu dans la partie dynamique, que la répartition de la tension de Reynolds est asymétrique. La position radiale où la tension de Reynolds s'annule dépend du rapport de rayons ainsi que du nombre de Reynolds. Le flux turbulent radial a un comportement analogue à la tension de Reynolds, sa distribution radiale est asymétrique aussi. Chung et al. (2003) ont montré que la position radiale où le flux de chaleur turbulent radial s'annule dépend fortement du rapport de rayons. Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) et à $Re_\delta = 3500$, le flux de chaleur turbulent radial s'annule à une position $y/\delta = 0.45$, ce résultat est en bon accord avec celui de Chung et al. (2003) qui trouvent $y/\delta = 0.44$ pour un rapport de rayons $r^* = 0.1$ et $y/\delta = 0.8$ pour un rapport de rayons $r^* = 0.5$.

la figure 5.20 illustre le comportement du flux de chaleur turbulent radial rapporté à la vitesse et température de frottement de la paroi interne et en fonction de la distance à la paroi y/δ pour plusieurs valeurs du nombre de Prandtl. Nous avons reporté sur la même figure le flux

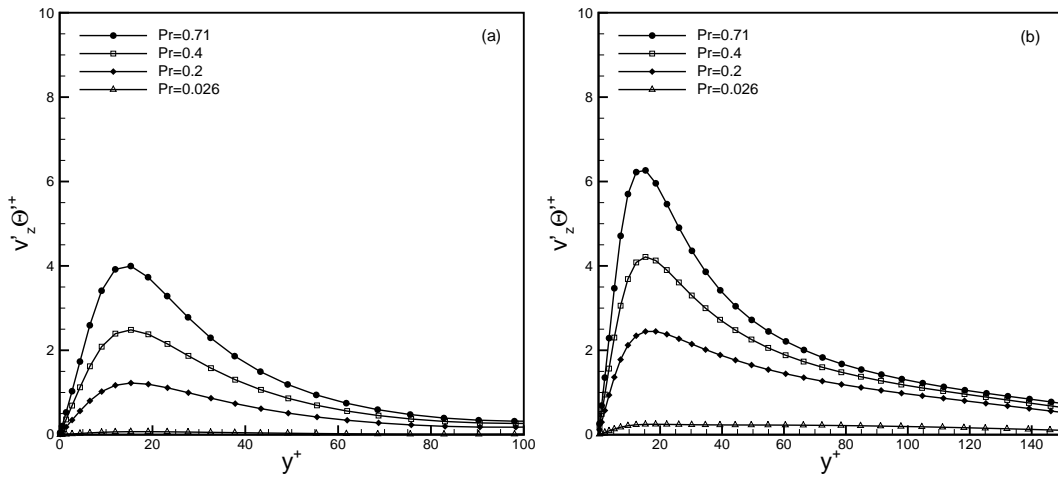


FIG. 5.19 – Variation du flux turbulent axial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

total $(1/Pr)(d\overline{\Theta}^+/dy^+) - \overline{v_r'^+ \Theta'^+}$ schématisé par le trait noir continu. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, l'épaisseur de la zone de conduction (flux moléculaire) diminue et le flux turbulent radial augmente au voisinage des parois interne et externe. Son maximum se déplace vers les parois. Ce qui est remarquable, c'est que la position radiale où le flux de chaleur turbulent radial s'annule dépend très peu de la valeur du nombre de Prandtl. Celle-ci est toujours située à $y/\delta = 0.45$ sauf pour $Pr = 0.026$ où l'intersection est située à $y/\delta = 0.37$.

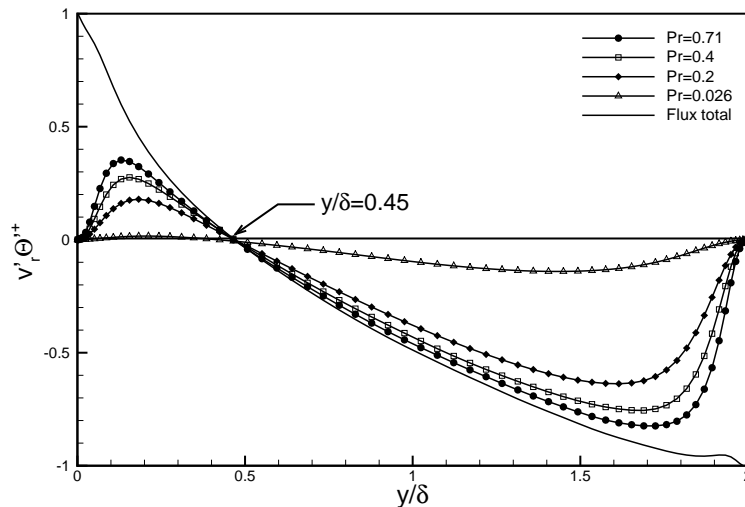


FIG. 5.20 – Variation du flux turbulent radial en fonction du nombre de Prandtl.

Comportements asymptotiques

Nous avons vu au chapitre précédent que les grandeurs turbulentes suivent des lois asymptotiques au voisinage de la paroi. L'écart-type des fluctuations de température, le flux turbulent axial et le flux turbulent radial suivent respectivement des asymptotes en y^+ , y^{+2} et y^{+3} . Ces évolutions ne sont valables que dans le cas d'une condition au limite isotherme ou mixte. Dans cette partie, nous avons imposé sur les deux parois une condition de flux idéal. Cette condition implique, théoriquement, que l'écart-type des fluctuations de température est constant, et que les flux axial et radial suivent respectivement des asymptotes en y^+ et y^{+2} au voisinage des parois (Hojin et al. (2000)).

Pour une condition de flux de chaleur idéal, la fluctuation de température peut être développée au voisinage immédiat de la paroi comme suit :

$$\Theta'^+ = Pr(a_\Theta + b_\Theta y^+ + c_\Theta y^{+3} + \dots) \quad (5.15)$$

soit :

$$\Theta'^+/Pr \simeq a_\Theta, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (5.16)$$

La figure 5.21 représente les écart-types des fluctuations de température aux voisinages des parois interne et externe. Chaque rms est divisée par le nombre de Prandtl correspondant. Pour un écoulement d'air ($Pr = 0.71$), on constate que Θ'_{rms}/Pr prend une valeur constante. Cette valeur s'étend jusqu'à $y^+ \simeq 3$ du côté de la paroi interne, et jusqu'à $y^+ \simeq 4$ du côté de la paroi externe. Ces distances correspondent aux épaisseurs des zones de conduction où les fluctuations de température sont constantes. Lorsque le nombre de Prandtl diminue, la constante $\overline{a_\Theta}$ augmente. La zone de conduction s'épaissit, et les paliers s'étendent jusqu'à $y^+ \simeq 10$ du côté interne et $y^+ \simeq 15$ du côté externe pour le plus petit nombre de Prandtl ($Pr = 0.026$). Contrairement aux résultats trouvés dans le chapitre précédent avec une condition à la limite du type mixte, il y a une très forte dépendance entre la constante $\overline{a_\Theta}$ et la valeur du nombre de Prandtl. Cependant, il serait intéressant d'explorer des valeurs du nombre de Prandtl supérieures à l'unité pour voir si cette dépendance se maintient.

La fluctuation de vitesse axiale peut être développée au voisinage immédiat des parois en terme de y^+ telle que :

$$v_z'^+ = b_z y^+ + c_z y^{+2} + \dots \quad (5.17)$$

A partir de ce développement et de l'expression 5.15, on déduit le comportement asymptotique du flux turbulent axial :

$$\overline{v_z'^+ \Theta'^+} = Pr(\overline{b_z a_\Theta} y^+ + \overline{c_z b_\Theta} y^{+3} + \dots) \quad (5.18)$$

$$\overline{v_z'^+ \Theta'^+}/Pr \simeq \overline{b_z a_\Theta} y^+, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (5.19)$$

Sur la figure 5.22 sont illustrés les flux de chaleur turbulents axiaux pour différents nombres de Prandtl au voisinage des deux parois. Chaque flux de chaleur est divisé par le nombre de

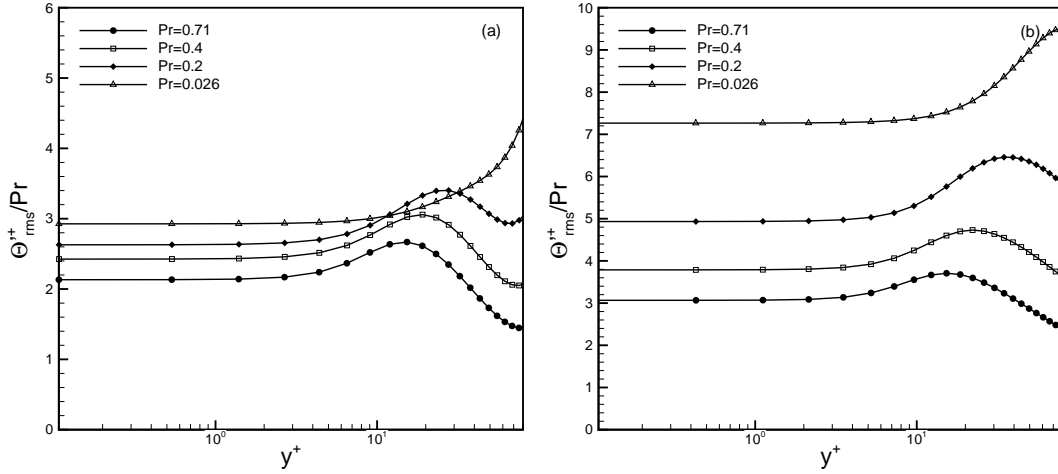


FIG. 5.21 – Comportement proche paroi des écarts-types des fluctuations de température en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

Prandtl correspondant. On constate que le flux axial suit le comportement asymptotique $v_z'^+ \Theta'^+ / Pr \simeq \overline{b_z a_\Theta} y^+$, aussi bien au voisinage de la paroi interne qu'au voisinage de la paroi externe. Pour les valeurs du nombre de Prandtl telles que $Pr \geq 0.2$, les courbes sont confondues, ce qui signifie que le coefficient $\overline{b_z a_\Theta}$ devient indépendant du nombre de Prandtl. Sa valeur est $\overline{b_z a_\Theta} = 0.65$ au voisinage de la paroi interne et $\overline{b_z a_\Theta} = 1.3$ au voisinage de la paroi externe. Cette différence est probablement due à l'effet de courbure.

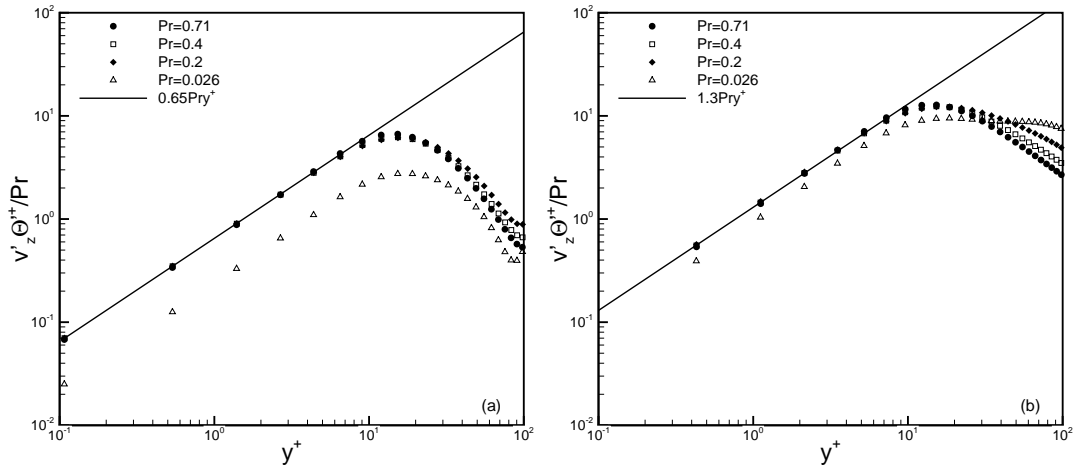


FIG. 5.22 – Comportement proche paroi du flux turbulent axial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

En terme de y^+ , la fluctuation de la vitesse radiale s'exprime de la façon suivante :

$$v_r'^+ = b_r y^{+2} + c_r y^{+3} + \dots \quad (5.20)$$

En multipliant ce développement par l'expression 5.15, le flux turbulent radial peut être exprimé en termes de y^+ comme suit :

$$\overline{v_r'^+ \Theta'^+} = Pr(\overline{b_r a_\Theta} y^{+2} + \overline{c_r b_\Theta} y^{+4} + \dots) \quad (5.21)$$

$$\overline{v_r'^+ \Theta'^+} / Pr \simeq \overline{b_r a_\Theta} Pr y^{+2}, \quad y^+ \rightarrow 0 \quad (5.22)$$

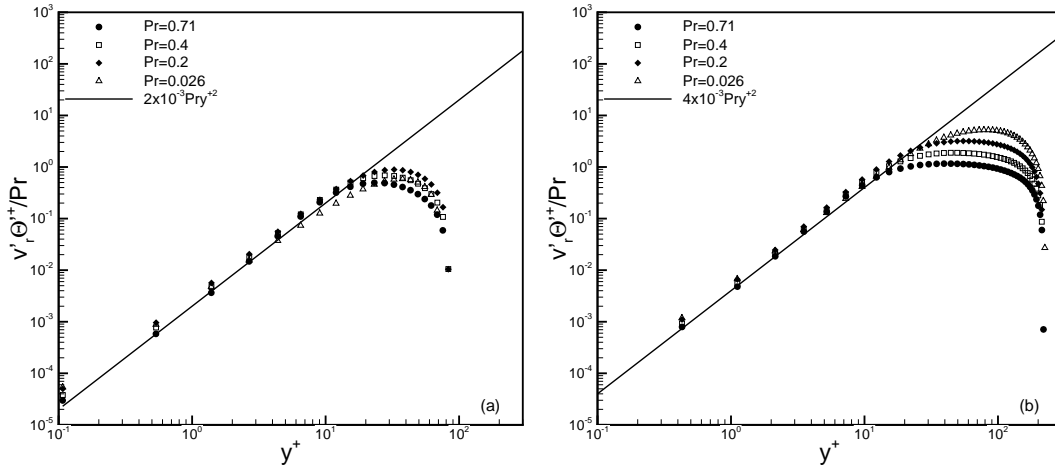


FIG. 5.23 – Comportement proche paroi du flux turbulent radial en fonction du nombre de Prandtl : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

La figure 5.23 confirme le comportement asymptotique en y^{+2} du flux turbulent radial. Le coefficient $\overline{b_r a_\Theta}$ est très peu affecté par la variation du nombre de Prandtl. Celui-ci vaut $\overline{b_r a_\Theta} = 2 \times 10^{-3}$ au voisinage de la paroi interne et $\overline{b_r a_\Theta} = 4 \times 10^{-3}$ au voisinage de la paroi externe. Cette différence, comme nous l'avons évoqué précédemment est probablement due au faible rapport de rayons. On observe sur la figure 5.23.a (paroi interne) une légère déviation par rapport à la droite asymptotique $\overline{v_r'^+ \Theta'^+} / Pr = 2 \times 10^{-3}$ qui s'accroît pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl. Cette déviation n'est pas observée sur la figure 5.23.b (paroi externe) suggérant que le comportement asymptotique que devrait suivre le flux turbulent radial est influencé par l'effet de courbure.

5.4 Chauffage dissymétrique

5.4.1 Profil de température dans la couche limite

Les distributions de température moyenne normalisées par la température de frottement de chaque paroi sont représentées sur la figure 5.24, en unités de parois, en fonction de la distance aux parois interne et externe de l'espace annulaire, pour un nombre de Reynolds $Re_\delta = 3500$ et pour divers rapports des flux de chaleur interne et externe $q^* = q_i/q_e$.

Au voisinage de la paroi interne, on retrouve bien le comportement asymptotique $\Theta^+ = Pr y^+$ dans la sous-couche de conduction, et cela quel que soit le rapport des flux de chaleur. Au-delà de cette sous-couche, le transfert de la chaleur dans l'espace annulaire est largement affecté par le rapport des flux de chaleur. Le transfert de chaleur entre la paroi interne de l'espace annulaire et le fluide est d'autant plus faible que le rapport des flux de chaleur est petit. Les zones tampon et logarithmique sont pratiquement inexistantes pour un rapport des flux de chaleur $q^* = 0.01$. Pour un rapport $q^* = 100$, on distingue mieux la zone tampon et la région logarithmique qui s'étend davantage.

A l'inverse, le transfert de chaleur entre la paroi externe de l'espace annulaire et le fluide, croît quand q^* décroît. La région logarithmique du profil de température se prolonge lorsque le rapport des flux de chaleur diminue. Lorsque $q^* = 100$, le profil externe est fortement affecté, et la zone logarithmique disparaît complètement. Notons que pour un rapport donné, les profils de température dans les couches limites interne et externe sont notablement différents. Chung et al. (2003) font la même observation et montrent que pour le rapport de rayons $r^* = 0.1$, l'écart entre les profils de température de couche limite interne et externe est plus prononcé que celui pour un rapport de rayons $r^* = 0.5$, à cause des effets de courbure (le rayon du cylindre interne devenant plus petit quand on passe de $r^* = 0.5$ à $r^* = 0.1$).

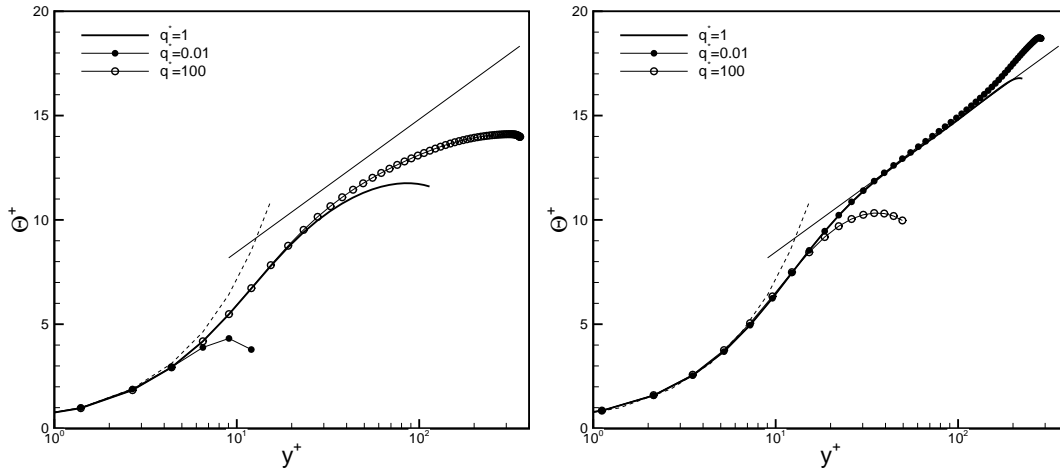


FIG. 5.24 – Couche limite thermique : (a) paroi interne, (b) paroi externe.

5.4.2 RMS des fluctuations de température

La figure 5.25 illustre la distribution radiale de la rms des fluctuations de température normalisée par la température débitante, pour une large gamme de rapports des flux de chaleur, $q^* \leq 1$ (Fig 5.25.a) et $q^* \geq 1$ (Fig 5.25.b). Nous avons vu dans l'étude du champ dynamique que les distributions des fluctuations de vitesse présentent des intensités de turbulence au voisinage de la paroi interne plus faibles que celles au voisinage de la paroi externe. La surface du tube interne étant plus faible que celle du tube externe, la paroi interne génère moins d'énergie cinétique turbulente. Si on fait le parallèle avec la distribution des fluctuations de température, pour un rapport des flux de chaleur $q^* = 1$, l'intensité des fluctuations de température est plus importante au voisinage de la paroi externe comparée à la paroi interne. La surface externe

étant plus grande, celle-ci apporte plus de chaleur. Cette tendance n'est observée que pour des rapports $q^* \leq 1$. En effet, pour $q^* > 1$, l'inverse est constaté : ce sont les fluctuations de température au voisinage de la paroi interne qui dépassent les fluctuations de température au voisinage de la paroi externe, l'écart s'accroît avec l'augmentation du rapport des flux de chaleur.

Quel que soit le rapport des flux de chaleur, le pic des fluctuations de température reste localisé à la même position, et cela aux voisinages des deux parois. L'effet du rapport des flux de chaleur sur l'intensité du pic des fluctuations de température est plus marqué du côté de la paroi interne, et davantage pour les rapports tels que $q^* > 1$. En effet, lorsque q^* diminue de 1 à 0.01, l'intensité des fluctuations de température décroît au voisinage de la paroi interne. Le pic disparaît pour $q^* < 0.5$ tandis que l'intensité des fluctuations de température n'augmente que très légèrement du côté externe. Lorsque q^* croît de 1 à 100, le pic reste visible des deux côtés et ne disparaît que pour $q^* = 100$ au voisinage de la paroi externe, tandis que l'intensité des fluctuations de température augmente d'une manière importante au voisinage de la paroi interne.

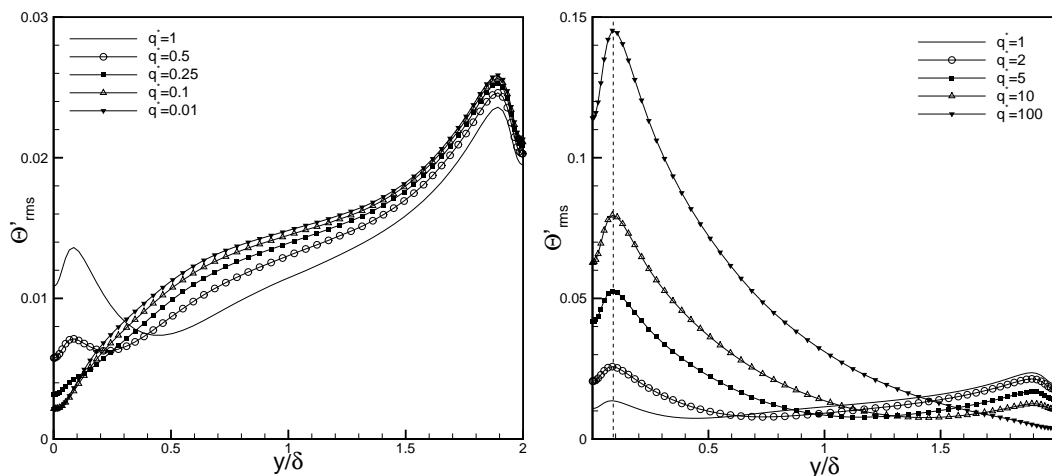


FIG. 5.25 – Variation de la rms en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$.

5.4.3 Flux de chaleur turbulents

Le flux de chaleur turbulent axial rapporté aux température et vitesse débitantes est représenté pour diverses valeurs du rapport des flux de chaleur imposés aux parois q^* sur la figure 5.26. On voit clairement que, pour des rapports tels que $q^* \leq 1$ les valeurs du flux de chaleur turbulent axial près de la paroi interne sont plus faibles que celles près de la paroi externe. Lorsque q^* décroît de 1 à 0.01, on observe une nette réduction du flux de chaleur turbulent axial du côté de la paroi interne, tandis qu'il varie peu sur la paroi externe. Ceci laisse présager que, pour cette gamme de rapports de flux ($q^* \leq 1$), le transfert de chaleur est fortement affecté du côté interne et ne varie quasiment pas du côté externe.

Pour des rapports tels que $q^* > 1$, la tendance est inversée : le flux de chaleur turbulent axial est plus intense du côté de la paroi interne ce d'autant plus lorsque q^* augmente. Lorsque

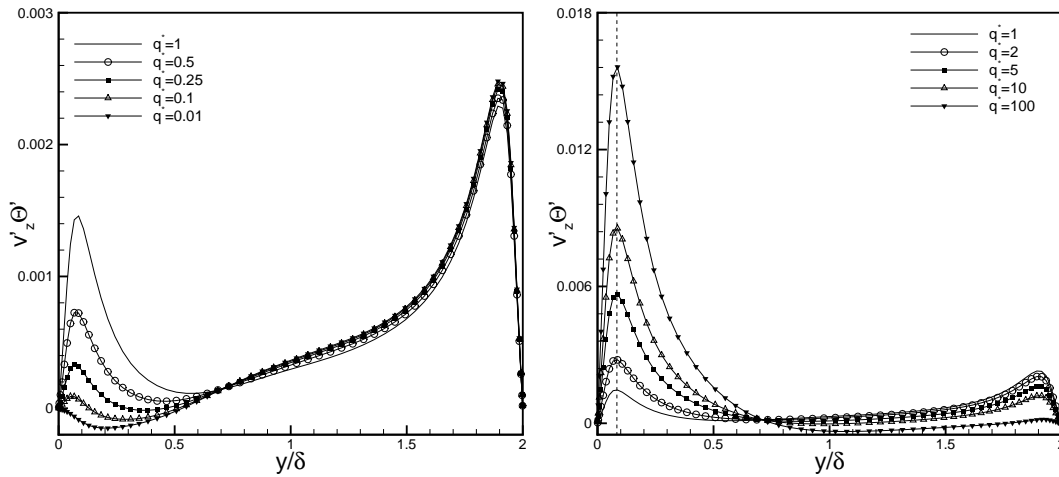


FIG. 5.26 – Variation du flux turbulent axial en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$.

le rapport de flux de chaleur croît de 1 vers 100, le pic du flux turbulent axial augmente considérablement au voisinage de la paroi interne, tandis qu'il diminue jusqu'à s'annuler (pour $q^* = 100$) au voisinage de la paroi externe. Le transfert de chaleur est donc affecté des deux côtés de l'espace annulaire pour cette gamme de rapport de flux.

Les figures 5.27.a et b illustrent le flux de chaleur turbulent radial normalisé par la vitesse et température débitantes pour des rapports de flux de chaleur $q^* \leq 1$ et $q^* \geq 1$. Pour $q^* = 1$, la distribution du flux de chaleur radial est dissymétrique tout comme la distribution de la tension de Reynolds. La position radiale où le flux de chaleur turbulent radial s'annule ($y^* = 0.46$) est plus proche de la paroi interne que celle de la tension de Reynolds ($y^* = 1.39$). Nous avons vu que cette position dépend très peu de la diffusivité thermique du fluide considéré (nombre de Prandtl).

Lorsqu'on fait varier le rapport des flux de chaleur imposé aux parois de $q^* = 1$ à $q^* = 0.01$, le flux de chaleur turbulent radial décroît au voisinage de la paroi interne et son pic disparaît totalement pour les plus petites valeurs du rapport de flux de chaleur q^* . Du côté de la paroi externe, le pic du flux de chaleur turbulent radial est très peu sensible à la diminution du rapport des flux imposés aux parois, on constate cependant une très légère augmentation. Les valeurs du flux turbulent radial sont plus intenses du côté de la paroi externe, tout comme la rms des fluctuations de température et le flux turbulent axial. Notons que la position du flux turbulent radial nul se déplace vers la paroi interne lorsque q^* diminue jusqu'à ce que le flux radial lui même devient nul à la paroi interne pour $q^* = 0.01$.

A l'inverse, lorsque le rapport des flux de chaleur q^* varie de 1 à 100, le flux turbulent radial devient plus intense du côté de la paroi interne. L'augmentation du rapport des flux de chaleur compense la différence d'aire entre les surfaces des tubes interne et externe. Une légère symétrie est retrouvée pour $q^* = 5$. La position où le flux de chaleur turbulent radial s'annule se déplace vers la paroi externe pour q^* allant de 1 à 100, suggérant que le transfert de chaleur normal à la paroi se fait essentiellement de la paroi interne vers la paroi externe.

Nous avons reporté sur la figure 5.28 la position radiale $y^* = y/\delta$ où le flux turbulent

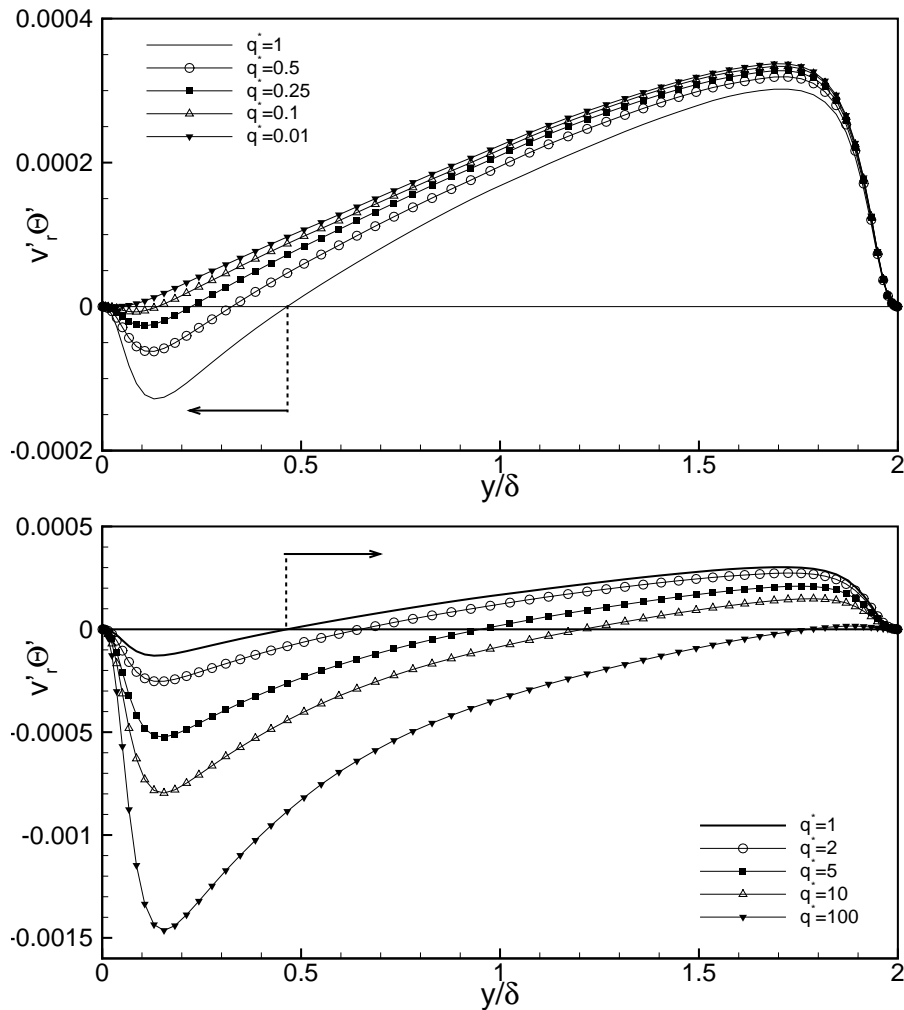


FIG. 5.27 – Variation du flux turbulent radial en fonction du rapport des flux de chaleur : (a) $q^* \leq 1$, (b) $q^* \geq 1$.

radial s'annule en fonction des rapport de flux de chaleur $q^* = q_i/q_e$. On observe, sur cette répartition, deux évolutions distinctes. Pour des rapports tels que $q^* \leq 1$, la position y/δ suit une loi en puissance : $y/\delta = 0.46q^{*0.53}$. Pour des rapports tels que $q^* > 1$, la distribution de la position y/δ s'écarte de cette loi.

Le tableau 5.6 donne les valeurs des nombres de Nusselt sur les paroi interne (Nu_i) et externe (Nu_e) en fonction du rapport des flux de chaleur imposés aux parois ($q^* = q_i/q_e$). Pour un rapport $q^* = 1$, les valeurs obtenues $Nu_i = 60.2$ et $Nu_e = 26.1$ sont en bon accord avec les prédictions de Chung et al. (2003) qui trouvent $Nu_i = 62.53$ sur la paroi interne et $Nu_e = 27.63$ sur la paroi externe de l'espace annulaire. Lorsque le rapport des flux diminue de 1 à 0.1 on observe une nette diminution du transfert de chaleur entre la paroi interne et le fluide. Sur la paroi externe Nu_e , augmente légèrement. Le rapport de rayon étant très petit $r^* = 0.1$, le chauffage de la paroi interne influence peu la paroi externe. Lorsque le rapport des flux augmente de 1 à 100 on observe une augmentation du nombre de Nusselt sur la

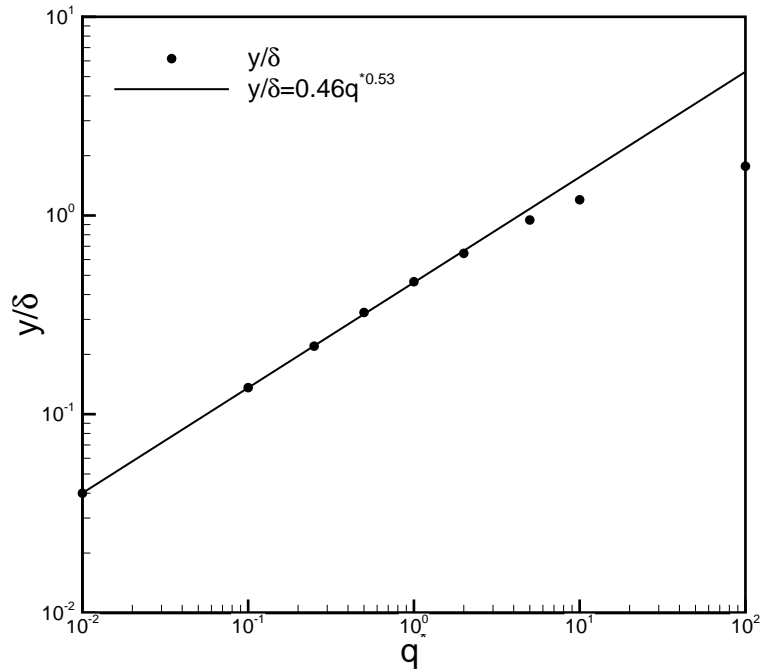


FIG. 5.28 – Position du flux turbulent radial nul en fonction du rapport de flux.

paroi interne, tandis qu'il diminue sur la paroi externe qui peut être assimilée à une paroi adiabatique.

TAB. 5.6 – Nombre de Nusselt sur les parois interne et externe de l'espace annulaire en fonction du rapport de flux.

q^*	Nu_i	Nu_e
0.01	0.27	28.1
0.1	2.92	27.5
0.25	8.01	27.3
0.5	18.94	26.8
1	60.2	26.1
2	62.3	24.3
5	65.8	20.6
10	70.7	12.4
100	75.1	5.6

Dans la littérature, on trouve très peu d'études complètes de l'effet du rapport des flux de chaleur imposés aux parois sur le transfert de chaleur dans un espace annulaire chauffé asymétriquement, nous n'avons donc pas pu comparer nos prédictions à celles de la littérature : Les études concernant l'effet de q^* sont rares, de plus incomplètes voire parfois incertaines. La validation de notre étude se fait en comparant nos résultats à ceux de la littérature dans le cas le plus courant d'un chauffage symétrique ($q^* = 1$). Notons enfin qu'aucune étude ne

présente l'effet de q^* sur les statistiques du champ thermique (profil de couche limite, rms des fluctuations de température, flux de chaleur turbulents).

Synthèse et perspectives

Ce travail de thèse a été consacré à la simulation numérique des transferts par convection dans des écoulements turbulents pleinement développés. Deux configurations ont été considérées : la conduite cylindrique et l'espace annulaire.

Afin d'analyser les interactions entre les champs thermique et dynamique dans ces deux configurations, nous avons complété, modifié et adapté un code de calcul permettant de simuler numériquement l'écoulement turbulent d'un fluide incompressible dans une conduite cylindrique fixe ou en rotation. Cette base de code a été développée par Orlandi (1996). L'équation de transport du scalaire passif a été introduite avec un choix adapté des conditions aux limites utilisées. Un passage de la géométrie cylindrique à la géométrie annulaire a été réalisé. L'analyse statistique des champs turbulents, qui s'appuie sur les moyennes dans le temps et dans l'espace des champs instantanés de vitesse et de température a été entièrement programmée et insérée dans le code.

Dans la première partie des résultats, nous nous sommes intéressés à l'influence de la diffusivité thermique du fluide sur les champs de température dans un écoulement turbulent pleinement développé dans une conduite cylindrique, avec flux de chaleur imposé sur la paroi. L'analyse du champ dynamique n'a pas été abordée, mais validée en comparant le profil moyen de vitesse axiale ainsi que les tensions de Reynolds aux prédictions d'Eggels et al. (1994). Cette validation nous a permis d'écarter toute éventuelle erreur qui peut être introduite par une mauvaise résolution du champ dynamique (seul le cas du scalaire passif étant traité). La validation du champ thermique a été effectuée en comparant les prédictions obtenues dans le cas d'un écoulement d'air ($Pr = 0.71$) aux données numériques de Satake et Kunugi (2002) pour la même configuration.

Les profils de couche limite thermique, obtenus pour une large gamme de nombres de Prandtl, allant de $Pr = 0.026$ à $Pr = 1$, indiquent que la zone de conduction pénètre plus profondément au centre de l'écoulement lorsque le nombre de Prandtl augmente. Les constantes κ_Θ et β_Θ du profil de température logarithmique $\Theta^+ = \kappa_\Theta \ln y^+ + \beta_\Theta$, ont été déterminées. La zone logarithmique n'apparaît clairement que pour les grandes valeurs du nombre de Prandtl, et le coefficient κ_Θ devient indépendant du nombre de Prandtl lorsqu'il dépasse $Pr = 0.2$. À l'inverse, le coefficient β_Θ reste sensiblement dépendant de la valeur du nombre de Prandtl.

L'analyse des champs fluctuants nous a permis de voir l'effet du nombre de Prandtl sur l'écart-type des fluctuations de température et sur les flux de chaleur turbulents : le flux turbulent axial et le flux turbulent radial. L'augmentation du nombre de Prandtl entraîne une augmentation des maximums des rms et des flux de chaleurs turbulents et leur déplacement vers la paroi. Les pics ont été localisés pour les différentes valeurs du nombre de Prandtl et comparés aux prédictions de Kawamura et al. (1998), obtenues dans un écoulement turbulent

dans un canal plan chauffé uniformément par les parois. Contrairement au flux de chaleur axial, et indépendamment du nombre de Prandtl, la géométrie à un effet non négligeable sur le flux de chaleur turbulent normal à la paroi. Celui-ci, est légèrement plus intense et son pic se déplace vers le cœur de l'écoulement dans la conduite cylindrique par rapport au canal plan.

L'étude des coefficients de corrélation montre que les fluctuations de vitesse axiale et les fluctuations de température sont fortement corrélées dans la région pariétale pour les grandes valeurs des nombres de Prandtl ($Pr \geq 0.71$). La corrélation diminue avec les valeurs décroissantes du nombre de Prandtl. Les fluctuations de vitesse radiale et les fluctuations de température présentent un coefficient de corrélation plus modéré, celui-ci augmente lorsque le nombre de Prandtl diminue suggérant que le transfert de chaleur s'effectue davantage dans la direction normale à l'écoulement (transfert par conduction) pour les faibles nombres de Prandtl. Pour des valeurs du nombre de Prandtl proches de l'unité, le coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesse radiale et les fluctuations de température présente la même distribution radiale que le coefficient de corrélation entre les fluctuations de vitesses axiale et radiales. Cette concordance indique que le flux de chaleur turbulent radial et la seule composante non nulle de la tension de Reynolds sont générés par les mêmes mécanismes de turbulence. Cette similarité est confirmée par la visualisation du champ instantané des fluctuations de vitesse axiale et celui des fluctuations de température qui montre que les zones fluides basse vitesse sont associées aux zones fluides basse température et inversement.

Les fonctions de densité de probabilité nous ont permis de quantifier la distribution des fluctuations des différentes variables en considérant leur signe. Dans la région pariétale, $y^+ \simeq 5$, et pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.71$, la distribution des fluctuations de température ainsi que celle des fluctuations de vitesse longitudinale montrent un écart notable par rapport à une distribution gaussienne, synonyme d'intermittence. A cette position les pics des distributions sont situés dans la partie négative, signifiant que les fluctuations négatives sont plus nombreuses, cependant leur amplitude est plus faible. Pour un nombre de Prandtl $Pr = 0.026$, l'intermittence est moins prononcée dans la région pariétale, mais s'étend davantage dans leur cœur de l'écoulement. Loin de la paroi, $y^+ \simeq 100$, le nombre de Prandtl n'a aucun effet sur la distribution des fluctuations de température et la turbulence est homogène. Ces observations sont confirmées par l'analyse des coefficients de dissymétrie et d'aplatissement.

Nous avons abordé dans la deuxième partie de ce travail de thèse l'analyse des transferts thermo-convectifs dans un espace annulaire de faible rapport de rayons ($r^* = 0.1$). Le champ dynamique a été résolu et nos prédictions ont été confrontées aux résultats numériques de Chung et al. (2001). Le profil moyen de vitesse axiale est asymétrique, son maximum est plus proche de la paroi interne et est localisé à $y/\delta = 0.64$. De même, la tension de Reynolds est asymétrique, et s'annule à $y/\delta = 0.61$. Ces résultats sont en bon accord avec les prédictions de Chung et al. (2001) et confirment que les positions radiales du maximum de vitesse axiale et de la tension de Reynolds nulle ne coïncident pas. A cause de l'effet de courbure, l'intensité de la turbulence au voisinage de la paroi interne est plus faible que celle au voisinage de la paroi externe.

Pour valider le champ thermique, nous avons considéré un écoulement d'air $Pr = 0.71$. Les profils de température normalisés par les températures de frottement de chaque paroi montrent que la zone de conduction est légèrement moins épaisse du côté de la paroi interne. Dans la zone tampon et à cause de l'effet de courbure, le profil interne se détache assez rapidement du profil externe. Comme pour les profils de vitesse, une différence notable est observée entre les

profils interne et externe dans la zone logarithmique. A cause de l'effet de courbure, l'intensité des fluctuations de température sur la paroi externe est plus grande que celle sur la paroi interne. Les pics des fluctuations de température sont localisés à la même distance des parois $y^+ \simeq 14$. La rms des fluctuations de température de la paroi externe coïncide avec celle de la conduite cylindrique dans le cœur de l'écoulement pour le rapport des rayons considéré ($r^* = 0.1$). Tout comme la rms des fluctuations de température, les flux de chaleur turbulents axial et radial sont plus intenses du côté de la paroi externe. Ces résultats sont en bon accord avec les prédictions de Chung et al. (2003).

Nous nous sommes intéressés par la suite à l'effet de la diffusivité thermique du fluide sur les transferts thermo-convectifs dans un écoulement turbulent pleinement développé dans un espace annulaire. Pour ce faire, nous avons effectué des calculs pour diverses valeurs du nombre de Prandtl. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, un comportement similaire est observé au voisinage des deux parois : l'intensité des fluctuations de température augmente. Le pic de turbulence qui n'était pas assez visible pour les faibles valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 0.026$ et $Pr = 0.2$) se précise et se déplace vers les parois. Le flux de chaleur turbulent axial augmente aussi avec l'augmentation du nombre de Prandtl ; cependant, la position de son maximum est très peu sensible, celui-ci est localisé à $y^+ \simeq 15$ (au voisinage des deux parois) pour les valeurs du nombre de Prandtl considérés dans cette étude. La distribution radiale du flux de chaleur turbulent normal à la paroi est asymétrique tout comme la tension de Reynolds. Lorsque le nombre de Prandtl augmente, l'épaisseur de la zone de conduction diminue, le flux turbulent radial augmente et les pics se déplacent vers les parois. La position radiale où le flux de chaleur turbulent normal à la paroi s'annule est localisée $y/\delta = 0.45$, cette position est très peu sensible à la variation du nombre de Prandtl.

Finalement, nous avons étudié l'influence du rapport des flux de chaleur imposés aux les parois ($q^* = q_i/q_e$) sur le transfert de chaleur. Deux cas de figures ont été considérés : $q^* \leq 1$ et $q^* \geq 1$. La rms des fluctuations de température est fortement influencée par la variation du rapport de flux q^* . Lorsque la paroi interne tend vers un comportement adiabatique, $q^* \rightarrow 0$, une nette diminution de la rms des fluctuations de température est observée du côté interne de l'espace annulaire, Le pic disparaît pour des valeurs telles que $q^* \leq 0.25$. Sur la paroi interne on observe qu'une légère augmentation de l'intensité des fluctuations de température. Lorsque la paroi externe tend vers un comportement adiabatique, $q^* \rightarrow 100$, on observe un comportement inverse, une nette diminution de l'intensité de la turbulence se produit du côté de la paroi externe, tandis qu'elle augmente du côté de la paroi interne. Le flux de chaleur turbulent axial a un comportement similaire à celui de la rms des fluctuations de température ; cependant, dans le cas $q^* \leq 1$, son maximum varie très peu du côté de la paroi externe. La position radiale où le flux de chaleur turbulent normal à la paroi s'annule est très peu sensible au nombre de Prandtl, celle-ci dépend fortement des conditions aux limites. Lorsque on fait tendre le rapport des flux de chaleur imposés aux parois vers 0 (respectivement vers 100), la position où le flux turbulent radial s'annule se déplace vers la paroi interne (respectivement la paroi externe). On observe deux comportements distincts : pour des rapports tels que $q^* \leq 1$, la position y/δ suit une loi en puissance : $y/\delta = 0.46q^{*0.53}$. Lorsque $q^* \geq 1$, la position y/δ s'écarte de cette distribution.

Les comportements asymptotiques de la rms des fluctuations de température et des flux de chaleur turbulents, en fonction du nombre de Prandtl ont été analysés dans les deux géométries. Ces lois asymptotiques peuvent être d'un grand intérêt dans la modélisation proche paroi. Nous avons utilisé dans la conduite cylindrique une condition de type mixte, l'énergie procurée à

l'écoulement provient d'un flux de chaleur uniforme tandis que la paroi se comporte d'une manière isotherme. Dans la région pariétale, la rms des fluctuations de température, le flux de chaleur turbulent axial et le flux de chaleur turbulent radial suivent respectivement des lois en : y^+ , y^{+2} et y^{+3} . Dans l'espace annulaire, c'est un flux de chaleur idéal qui est imposé sur les deux parois, la rms des fluctuations de température est alors constante et les flux de chaleur turbulents axial et radial évoluent respectivement en y^+ et y^{+2} . Ces résultats sont en bon accord avec les développements analytiques retrouvés dans la littérature. Les constantes des lois d'évolution ont été déterminées et sont indépendantes du nombre de Prandtl lorsque celui-ci dépasse une certaine valeur. Les constantes trouvées dans le cas de la conduite cylindrique sont très proches de celles du canal plan avec condition mixte.

L'une des perspectives de ce travail consiste à étudier les transferts de quantité de mouvement et de chaleur, pour des nombres de Reynolds et de Prandtl plus élevés à l'aide de simulation des grandes échelles (LES). Plusieurs modèles ont été programmés et introduits dans le code, tels que les modèles à Prandtl constant, dynamique, de similarité des échelles ainsi que celui de Bardina. Une étude détaillée de chaque modèle peut être effectuée afin d'améliorer leurs performances. En perspective également, divers points intéressants :

- l'amélioration de la procédure numérique afin de diminuer les temps de calcul (réduire le coût),
- l'étude du problème dans le cas de parois isothermes afin de voir l'impact de la condition à la limite sur le transfert de chaleur,
- l'étude des transferts thermo-convectifs dans le cadre de l'approximation de Boussinesq (convection mixte, conduites verticales),
- l'étude de l'influence de la rotation des parois sur le transfert de chaleur dans l'espace annulaire.

Annexe A

Equation de correction pour le champ non-solénoïdal

Pour prouver que le champ non-solénoïdal \hat{q} approche le champ solénoïdal q à l'ordre deux, on applique la procédure décrite par Kim et Moin (1985).

Supposons que \hat{q}_i^l est l'approximation de la fonction continue q_i^* qui satisfait :

$$\begin{cases} \frac{\partial q_i^*}{\partial t} = \mathcal{H}_i^* - \mathcal{G}_i p^* + \mathcal{A}_i q_i^* \\ q_i^*(t_l) = q_i^l \quad p^*(t_l) = p_i^l \end{cases} \quad (A.1)$$

Alors, par un développement en série de Taylor :

$$\begin{aligned} q_i^{l+1} &\approx q_i^*(t_{l+1}) = q_i^*(t_l) + \left(\frac{\partial q_i^*}{\partial t} \right)_{t=t_l} \Delta t + O(\Delta t^2) \\ &= q_i^*(t_l) + \Delta t [\mathcal{H}_i^* - \mathcal{G}_i p^* + \mathcal{A}_i q_i^*]_{t=t_l} + O(\Delta t^2) \\ &= q_i^l + \Delta t [\mathcal{H}_i^l - \mathcal{G}_i p^l + \mathcal{A}_i q_i^l]_{t=t_l} + O(\Delta t^2) \\ &= q_i^l + \frac{\hat{q}_i^l - q_i^l}{\Delta t} \Delta t + O(\Delta t^2) \end{aligned} \quad (A.2)$$

et finalement :

$$q_i^{l+1} = \hat{q}_i^l + O(\Delta t^2) \quad (A.3)$$

Annexe B

Résolution de l'équation de Poisson

L'équation de Poisson 3.51 s'écrit en forme discrète (la position du Φ est à $(i+1/2, j+1/2, k+1/2)$) :

$$\mathcal{L}\Phi(i, j, k) = Q(i, j, k) \quad (B.1)$$

$$i = 1, n1m = n_1 - 1 \quad j = 1, n2m = n_2 - 1 \quad k = 1, n3m = n_3 - 1$$

où

$$Q(i, j, k) = \frac{1}{\alpha_l \Delta t} (\mathcal{D}\hat{q})_{i+1/2, j+1/2, k+1/2} \quad (B.2)$$

L'opérateur \mathcal{L} est transformé dans un opérateur tridiagonal par deux transformées de Fourier :
 - décomposition en série de Fourier sur z

$$\Phi(i, j, k) = \sum_{l=0}^{n3m-1} \hat{\Phi}(i, j, l) e^{I \frac{2\pi}{n3m} kl} \quad l = 0, n3m - 1 \quad (B.3)$$

Comme $Q(i, j, k)$ sont réels, on applique une transformée de Fourier rapide (FFT) de type réel-demi-complexe ; par conséquent :

$$\hat{Q}(i, j, l) = \text{conj} \left(\hat{Q}(i, j, n3m - 1) \right) = A(l) + IB(l)$$

$$A(l) = \frac{1}{n3m} \sum_{k=0}^{n3m-1} Q(i, j, k) \cos\left(\frac{2\pi}{n3m} kl\right) \quad (B.4)$$

$$B(l) = -\frac{1}{n3m} \sum_{k=0}^{n3m-1} Q(i, j, k) \sin\left(\frac{2\pi}{n3m} kl\right)$$

et l'équation à résoudre devient :

$$\left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] \hat{\Phi}(i, j, l) - \kappa'_l \hat{\Phi}(i, j, l) = \hat{Q}(i, j, l) \quad l = 0, n3m/2 \quad (B.5)$$

où on a utilisé la discrétisation :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(i, j, k) = \frac{\Phi(i, j, k+1) - 2\Phi(i, j, k) + \Phi(i, j, k-1)}{\Delta z^2} \quad (B.6)$$

qui donne comme nombre d'onde :

$$\kappa'_l = \frac{2}{\Delta z^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n3m} l\right) \right] \quad (B.7)$$

- décomposition en série de Fourier sur θ

$$\hat{\Phi}(i, j, l) = \sum_{p=0}^{n1m-1} \hat{\Phi}(p, j, l) e^{I \frac{2\pi}{n1m} p i} \quad p = 0, n1m - 1 \quad (B.8)$$

Cette fois-ci la transformée de Fourier sera de type complex-complex; avec une discrétisation du type (B.6) l'équation du départ est réduite à :

$$\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \hat{\Phi}(p, j, l) - \kappa_l' \hat{\Phi}(p, j, l) - \frac{1}{r^2} \kappa_p' \hat{\Phi}(p, j, l) \right] = \hat{Q}(p, j, l) \quad l = 0, n3m/2 \quad (B.9)$$

avec :

$$\kappa_l' = \frac{2}{\Delta\theta^2} \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi}{n1m} p\right) \right] \quad (B.10)$$

- résolution du système tridiagonal final (B.9) pour la partie réelle et pour la partie imaginaire avec l'algorithme de Thomas; l'inversion doit être effectuée pour chaque $p = 0, n1m$ et $l = 0, n3m/2$. Dans le code, pour chaque l on inverse simultanément $n1m$ systèmes correspondant aux valeurs de p , ce qui permet la vectorisation de l'algorithme.
- une fois trouvé $\hat{\Phi}(p, j, l)$, on effectue les transformées de Fourier inverses.

Annexe C

Calcul de la pression

L'équation de la pression en fonction de Φ peut être obtenue en considérant deux formes de l'équation discrétisée (3.40), avec un traitement de la pression :

– explicite :

$$\frac{\hat{q}_c^l - q_c^l}{\Delta t} = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^l + \frac{\alpha_l}{2} \mathcal{A}_c(\hat{q}_c^l + q_c^l) \right]$$

– implicite :

$$\frac{q_c^{l+1} - q_c^l}{\Delta t} = \left[\gamma_l \mathcal{H}_c^l + \rho_l \mathcal{H}_c^{l-1} - \alpha_l \mathcal{G}_c p^{l+1} + \frac{\alpha_l}{2} \mathcal{A}_c(q_c^{l+1} + q_c^l) \right]$$

Par soustraction, nous obtenons :

$$\frac{q_c^{l+1} - \hat{q}_c^l}{\Delta t} = \alpha_l \mathcal{G}_c p^l - \alpha_l \mathcal{G}_c p^{l+1} + \frac{\alpha_l}{2} \mathcal{A}_c(q_c^{l+1} + \hat{q}_c^l)$$

En utilisant maintenant l'équation de correction nous pouvons retrouver une équation scalaire de la forme :

$$\mathcal{G}_c p^{l+1} = \mathcal{G}_c p^l + \mathcal{G}_c \Phi^{l+1} - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \mathcal{A}_c(\mathcal{G}_c \Phi^{l+1}) \quad (C.1)$$

Une équation simplifiée pour la pression est obtenue de (C.1) en faisant l'approximation :

$$\mathcal{A}_c(\mathcal{G}_c \Phi) = \frac{1}{Re} \mathcal{G}_c(\mathcal{L}\Phi), \quad \text{pour } c = \theta, r, z \quad (C.2)$$

Nous obtenons :

$$p^{l+1} = p^l + \Phi^{l+1} - \frac{\alpha_l \Delta t}{2} \mathcal{A}_c \Phi^{l+1} \quad (C.3)$$

L'approximation (C.2) n'est mathématiquement valable que pour la composante z . Pour les composantes r et θ elle n'est pas valable, à cause du traitement explicite des termes de couplage intervenant dans l'opérateur visqueux original. Néanmoins, l'équation (C.3) donne une très bonne approximation du champ de pression.

Annexe D

En régime établi l'équation de Navier-Stokes se réduit à :

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz})$$

avec :

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} - \overline{\rho v'_r v'_z}$$

en régime laminaire :

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \mu \frac{\partial v_z}{\partial r})$$

$$\frac{r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial v_z}{\partial r})$$

$$r \frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r^2}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial r} = \frac{r}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r}$$

soit :

$$v_z(r) = \frac{r^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln(r) + C_2$$

$$r = r_i \longrightarrow \frac{r_i^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln(r_i) + C_2 = 0$$

$$r = r_e \longrightarrow \frac{r_e^2}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + C_1 \ln(r_e) + C_2 = 0$$

d'où :

$$C_1 = \frac{1}{4\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{(r_e^2 - r_i^2)}{\ln(r_i/r_e)}$$

En régime laminaire on a :

$$\tau_{rz}(r_0) = \frac{\partial v_z(r_{max})}{\partial z} = 0 \Rightarrow r_0 = r_{max}$$

$$\frac{r_0}{2\mu} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{C_1}{r_0} = 0$$

$$r_0^2 = \frac{2\mu C_1}{\partial p / \partial z}$$

En remplaçant la constante C_1 on obtient :

$$r_0 = r_{max} = \sqrt{\frac{(r_e^2 - r_i^2)}{2 \ln(r_i/r_e)}}$$

En régime turbulent on a :

$$\tau_{rz} = \mu \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} - \overline{\rho v'_r v'_z}$$

$\overline{v'_r v'_z}$ n'étant pas proportionnel à $\partial \bar{v}_z / \partial z$, τ_{rz} ne s'annule pas forcément lorsque $\partial \bar{v}_z / \partial z = 0$, r_0 et r_{max} ne coïncident pas.

$$\tau_{rz}(r) = \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{C_1}{r}$$

$$\tau_{rz}(r_0) = 0 \Rightarrow \frac{r_0}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \frac{C_1}{r_0} = 0$$

$$C_1 = -\frac{r_0^2}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$$

d'où :

$$\tau_{rz}(r) = \frac{r}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{r_0^2}{2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right)$$

$$\tau_{rz}(r) = \left(-\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} \right) \left(\frac{r_0^2 - r^2}{2r} \right)$$

Publications

Ce travail de thèse a fait l'objet de :

– un article publié :

- Redjem Saad, L., Ould-Rouis, M., 2007. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flows : Effect of Prandtl number. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, 28(5), 847-861.

– deux conférences internationales :

- Redjem Saad, L., Ould-Rouis, M., Lauriat, G., Feiz, A. A., 2005. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in an axially rotating pipe. In *Proc. 4th International Conference on Computational Heat and Mass Transfer*, Cachan, France, vol 1, 229-234.
- Redjem Saad, L., Ould-Rouis, M., Lauriat, G., Feiz, A. A., 2005. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in pipe flow with respect to rotation rate and Prandtl number effects. *ERCOFTAC workshop, DLES 6*, Poitiers, France, 257-266.

Bibliographie

- [1] Abe, H., Kawamura, H., Matsuo, Y., 2004. Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_\tau = 1020$ with $Pr = 0.025$ and 0.71 . *Int. J. Heat and Fluid Flow* 25, 404-419.
- [2] Antonia, R. A., Krishnamoorthy, L. V., Fulachier, L., 1988. Correlation between the longitudinal velocity fluctuation and temperature fluctuation in the near-wall region of a turbulent boundary layer. *Int. J. Heat Mass Transfer* 31(4), 723-730.
- [3] Bremhorst, K., Bullock, K. J., 1973. Spectral measurements of turbulent heat and momentum transfer in fully developed pipe flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* 16, 2141-2154.
- [4] Brown, H. E., Amstead, B. H., Short, B. E., 1957. Temperature and velocity distribution and transfer of heat in a liquid metal. *Trans. ASME*, 79, 279-285.
- [5] Cannon, J. N., Kays, W. M., 1969. Heat transfer to a fluid flowing inside a pipe rotating about its longitudinal axis. *Journal of Heat Transfer* 91, 135.
- [6] Montreuil, E., 2000. Simulation numérique pour l'aérothermique avec des modèles de sous-maillages. Ph.D. Thesis. Université Pierre et Marie Curie, France.
- [7] Chapman, D. R., Kuhn, G. D., 1986. The limiting behaviour of turbulence near the wall. *J. Fluid. Mech.* 70, 265-1986.
- [8] Chen, C. J., Chiou J. S., 1981. Laminar and turbulent heat transfer in the pipe entrance region for liquid metals. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24, 1179-1189.
- [9] Chung, S. Y., Rhee, G. H., Sung, H. J., 2001. Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow. Part 1 : Flow field. *Int. J. Heat Fluid Flow* 23, 426-440.
- [10] Chung, S. Y., Sung, H. J., 2003. Direct numerical simulation of turbulent concentric annular pipe flow. Part 2 : Heat transfer. *Int. J. Heat Fluid Flow* 24, 399-411.
- [11] Churchill, S. W., 1995. New simplified models and formulations for turbulent flow and convection. *AIChE J*, 41(12), 1125-1140.
- [12] H. Choi, P. Moin, Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow, *J. of Comp. Phys.*, 113, 1-4, 1994.
- [13] Dalle Donne, M., Meerwald, E., 1973. Heat transfer and friction coefficients for turbulent flow of air in smooth annuli at high temperatures. *Int. J. Heat Mass Transfer* 16, 787-809.
- [14] Deschamps, V., 1988. Simulation numérique de la turbulence inhomogène incompressible dans un écoulement de canal plan. Thèse de doctorat, ONERA.
- [15] Eggels, J. G. M., Unger, F., Weiss, M. H., Westerweel, J., Adrian, R. J., Friedrich, R., Nieuwstadt, F. T. M., 1994. Fully developed turbulent pipe flow : a comparison between Direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid. Mech.* 268, 175-209.

- [16] Feiz, A. A., 2005. Simulations des transferts turbulents dans une conduite en rotation. Thèse de doctorat, université de Marne la vallée.
- [17] Feiz, A. A., Ould-Rouis, M., Lauriat, G., 2005. Turbulence statistics in a fully developed rotating pipe flow, *Int. J. of Enhanced Heat Transfer* 12(3), 273-288.
- [18] Germano. M, 1992. Turbulence : the filtering approach. *Journal of Fluid Mechanics*, 238, 325-336.
- [19] Gnielinski, V., 1976. Neue gleichungen für den wärme- und den stoffübergang in turbulent durchströmten rohren und kanalen, *Int. Chem. Eng.* 16, 359.
- [20] Gowen, R. A, Smith, J. W., 1967. The effect of the Prandtl number on temperature profiles for heat transfer in turbulent pie flow, *Chemical Engineering Science* 22, 1701-1711.
- [21] Hanjalić, K., Launder, B. E., 1972. A Reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows. *J. FLuid. Mech.* 52(4), 609-638.
- [22] Heikel, M. R. F., Walklate, P. J., Hatton, A. P., 1976. The effect of free stream turbulence level on the flow and heat transfer in the entrance region of an annulus. *Int. J. Heat. Mass Transfer* 20, 763-771.
- [23] Hishida, M., Nagano, Y., Tagawa, M., 1986. Transport process of heat and momentum in the wall region of tubulent pipe flow, *Proceedings of the 8th International Heat Transfer Conference*, C. L. Tien et al., eds., Hemisphere Publishing Corp. 3, Washington, DC, 925-930.
- [24] Hojin, K., Choi, H., Lee, J. S., 2000. Direct numerical simulation of turbulent thermal boundary layer. *Physics of Fluids* 12(10), 2555-2568.
- [25] Kader, B. A., 1981. Temperature and concentration profiles in fully turbulent boundary layers. *Int. J. Heat Mass Transfer* 24(9), 1541-1544.
- [26] Kaneda, M., Yu, B., Ozoe, H., Churchill, S. W, (2003). The characteristics of turbulent flow and convection in concentric circular annuli. Part I : flow. *Int. J. of Heat and Mass Transfer*, 46, 5045-5057.
- [27] Kang, S., Patil, B., Zarate, J. A., Roy, R. P., 2001. Isothermal and heated turbulent upflow in vertical annular channel - Part 1 : Experimental measurements. *Int. J. Heat Mass Transfer* 44, 1171-1184.
- [28] Kasagi, N., Tomita, Y., Kuroda, A., 1992. Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow. *Trans. ASME J. of Heat Transfer* 114, 598-606.
- [29] Kasagi, N., Ohtsubo, Y., 1993, Direct Numerical Simulation of Low Prandtl Number Thermal Field in a Turbulent Channel Flow. In : *Turbulent Shear Flows*, vol. 8, Springer, Berlin, 97-119. 114, 598-606.
- [30] Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe H., Yamamoto, K., 1998. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid. *Int. J. of Heat and Fluid Flow.* (19), 482-491.
- [31] Kawamura, H., Abe, H., Matsuo, Y., 1999. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynold and Prandtl number effects. *Int. J. of Heat and Fluid Flow.* (20), 196-207.
- [32] Kawamura, H., Nakamura, S., Satake, S., Kunugi, T., 1994. Large eddy simulation of turbulent heat transfer in a concentric annulus. *Thermal Sci. Engn.* 2, 16-25.

- [33] Kays, W. M., Leung, E. Y., 1963. Heat transfer in annular passages-hydrodynamically developed turbulent flow with arbitrarily prescribed heat flux. *Int. J. Heat Mass Transfer* 6, 537-557.
- [34] Kikuyama, H., Murakami, M., Nishibori, K., 1983. Development of three dimensional turbulent boundary layer in an axially rotating pipe. *Transactions of ASME*, 105, 154-160.
- [35] Kays, W. M., Perkins H.C., 1973. *Handbook of Heat Transfer*, edited by W.M. Rohsenow and J.P. Harnett, section 7, Mac Graw-Hill, New York.
- [36] J. Kim, P. Moin, Application of a Fractional-Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. of Comp. Phys.*, 59, 308-323, 1985.
- [37] Kim, J., Moin, P., Moser, R., 1987. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number. *J. Fluid Mech.* 177, 133-166
- [38] Kjellström, B., Hedberg, S., 1966. on shear stress distributions for flow in smooth or partially rough annuli. *Aktiebolaget Atomenergi, Report AE-243*, Stockholm.
- [39] Kong, H., Choi, H. and Lee, J.S., 2000. Direct numerical simulation of turbulent thermal boundary layers. *Phys. Fluids* 12, 2555-2568.
- [40] Kuzay, T. M., Scott, C. J., 1977. Turbulent heat transfer studies in annulus with inner cylinder rotation. *Trans. ASME : J. Heat Transfer* 99, 12-19.
- [41] Lawn, C. J., Elliott, C. J., 1972. Fully developed turbulent flow through concentric annuli. *J. Mech. Engr. Sci.* 14(3), 195-204.
- [42] Lesieur, M., 1997. *Turbulence in Fluids*. Kluwer Academic Publishers.
- [43] Lesieur, M., Metais, O., 1996. New trends in large-eddy simulations of turbulence. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28, 45-81.
- [44] Lorenz, F. R., 1932. Über turbulente Strömung durch Rohre mit kreisförmigen Querschnitt, *Mtt. Inst. Strömungs.*, T.H. Karlsruhe (2), 2767-2777.
- [45] Lu, D.M. and Hetsroni, G., 1995. Direct numerical simulation of a turbulent open channel flow with passive heat transfer. *Int. J. Heat Mass Transfer* 38, 3241-3251
- [46] Lyons, S. L., Hanratty, T. J., McLaughlin, J.B., 1991. Direct numerical simulation of passive heat transfer in a turbulent channel flow. *Int.J. of Heat Mass Transfer.* (34), 1149-1161.
- [47] Malik, M. J., Pletcher, R. H., 1981. A study of some turbulence models for flow and heat transfer in ducts of annular cross-section. *Trans. ASME : J. Heat Transfer* 103, 146-152.
- [48] Mansour, N., Kim, J., Moin, P., 1988. Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *J. Fluid Mech.* 194, 15-44.
- [49] Martinelli, R. C., 1947. Heat transfer to molten metals. *Trans. ASME* 69, 947.
- [50] Montreuil, E. 2000. *Simulations numériques pour l'aérothermique avec modèles de sous-maille*. Thèse de doctorat, Univ. P. et M. Curie.
- [51] Musschenga, E. E., Hamersma, P. J., Fortuin, J. M. H., 1992. Momentum, heat and mass transfer in turbulent pipe flow : The extended random surface renewal model. *Chemical Engineering Science* 47(17), 4373-4392.
- [52] Myong, H. K., Kasagi, N., Hirata, M., 1989. Numerical prediction of turbulent pipe flow : heat transfer for various Prandtl number fluids with the improved $k-\epsilon$ turbulence model. *JSME International Journal* 32, 613-622.

- [53] Na, Y., Hanratty, T. J., 2000. Limiting behavior of turbulent scalar transport close to the wall. *J. Heat Mass Transfer* 43, 1749-1758.
- [54] Orlandi, P., Fatica, M., 1997. Direct numerical simulation of turbulent flow in rotating pipe about its axis. *Journal of Fluids Mechanics*, 343, 43-72.
- [55] Petukhov, B. S., 1970. Heat transfer and friction in turbulent pipe flow with variable physical properties. *Adv. Heat Transfer* 6, 503-504.
- [56] Piller, M., 2005. Direct numerical simulation of turbulent forced convection in a pipe. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 49, 583-602.
- [57] M. M. Rai, P. Moin, Direct Simulations of Turbulent Flow Using Finite-Difference Schemes, *J. of Comp. Phy.*, 96, 15-53, 1991.
- [58] Rehme, K., Turbulent flow in smooth concentric annuli with small radius ratios. *J. Fluid Mech.* 64 (1974), 263-287.
- [59] Reich, G., Beer, H., 1989. Fluid flow and heat transfer in an axially rotating pipe. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32, 551-562.
- [60] Satake, S., Kawamura, H., 1993. Large eddy simulation of turbulent flow in concentric annuli with a thin inner rod, in : Durst, F., Kasagi, N., Launder, B. E., Schmidt, F. W., Suzuki, K., Whitelaw, J. H., (Eds.). *Turbulent Shear Flows*. vol 9, Springer-Verlag, Berlin, 259-281.
- [61] Satake, S., Kunugi, T., 2002. Direct numerical simulation of turbulent heat transfer in an axially rotating pipe : Reynold stress and scalar-flux budgets. *Int. J. of Numerical Methods for Heat & Fluid flow* 12(8), 985-1008.
- [62] Skupinsky, E., Torel, J., Vautrety, L., 1965. Determination des coefficients de convection d'un alliage sodium-potassium dans un tube circulaire. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 8, 937-951.
- [63] Sleicher, C., Rouse, M. W., 1975. A convenient correlation for heat transfer to constant and variable property fluids in turbulent pipe flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* 18, 667-683.
- [64] So, R. M. C., Sommer, T. P., 1996. An explicit algebraic heat-flux model for the temperature field. *Int. J. Heat Mass Transfer* 39, 455-465.
- [65] Subramania, C. S., Antonia, R. A., 1981. Effect of Reynolds number on a slightly heated turbulent boundary layer. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 24, 1833-1846.
- [66] Takagi, T., Hirai, S. H., 1998. Turbulent transport of momentum and scalar in swirling flows with and without combustion. *Int. J. of Fluid Mechanics Research* 25(1-3), 1-13.
- [67] Teitel, M., Antonia, R., 1993. Heat transfer in fully developed turbulent channel flow : comparison between experiment and direct numerical simulations. *Int. J. Heat Mass Trans.* 36, 1701-1706.
- [68] Tennekes, H., Lumley, J. L., 1972. *A first course in turbulence*. MIT Press Design Department.
- [69] Tiselj, I., Bergant, R., Mavko, B., Baisic, I. and Hetsroni, G., 2001. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with heat conduction in the solid wall. *Trans. ASME : J. Heat Transfer* 123, 849-857.
- [70] Thakre, S. S., Joshi, J. B., 2000. CFD modeling of heat transfer in turbulent pipe flows. *AICHE Journal* 46(9), 1798-1812.

-
- [71] Tricoli, V., 1999. Heat transfer in turbulent pipe flow revisited : similarity law for heat and momentum transport in low-Prandtl-number fluids. *Int. J. Heat Mass Transfer* 42, 1535-1540.
- [72] R. Verzicco, P. Orlandi, A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates, *J. of Comp. Phy.*, 123, 402-414, 1996.
- [73] Von Karman, T., 1939. The analogy between fluid friction and heat transfer. *Trans. ASME* 61, 705.
- [74] Verriopoulos, C. A., 1983. Effects of convex surface curvature on heat transfer in turbulent flow. Ph.D thesis, Imperial College,
- [75] Verzicco, R., Orlandi, P. 1996. Finite-Difference Scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *Journal of Comp. Physics*, 123, 402-414.
- [76] Wilson, N. W., Medwell, J. O., 1968. An analysis of heat transfer for fully developed turbulent flow in concentric annuli. *Trans. ASME : J. Heat Transfer* 90, 43-50.
- [77] Yakhot, V., Orszag, S. A., Yakhot, A., 1987. Heat transfer in turbulent flows - I. Pipe flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* 30(1), 15-22.
- [78] Zarate, J. A., roy, R. P., Laporta, A., 2001. Isothermal and heated turbulent upflow in a vertical annular channel - Part 2 : Numerical simulations. *Int. J. Heat Mass Transfer* 44, 1185-1199.
- [79] Zang, T., 1991. Numerical simulation of the dynamics of turbulent boundary layers : perspectives of a transition simulator. In *Philosophical Transaction of the Royal Society of London*, 336, 95-102.
- [80] Zeng, H. Y., Qiu, S. Z., Jia, D. N., 2007. Investigation on the characteristics of the flow and heat transfer in bilaterally heated narrow annuli. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 50, 492-501.