



HAL
open science

Modélisation et validation expérimentale des complexes insonorisants pour la prévision vibroacoustique numérique basse et moyenne fréquences des automobiles

Charles Fernandez

► **To cite this version:**

Charles Fernandez. Modélisation et validation expérimentale des complexes insonorisants pour la prévision vibroacoustique numérique basse et moyenne fréquences des automobiles. Autre [cond-mat.other]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0237 . tel-00470535

HAL Id: tel-00470535

<https://theses.hal.science/tel-00470535>

Submitted on 6 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITE PARIS-EST

Année 2008

THÈSE

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS-EST

Discipline : Mécanique

présentée et soutenue publiquement

par

Charles FERNANDEZ

le 11 décembre 2008

Titre :

**Modélisation et validation expérimentale des
complexes insonorisants pour la prévision
vibroacoustique numérique basse et moyenne
fréquences des automobiles**

**Directeur de thèse
Professeur Christian Soize**

JURY

M. Denis DUHAMEL, Professeur,	<i>examineur</i>
M. Laurent GAGLIARDINI, Docteur,	<i>examineur</i>
M. Mohamed Ali HAMDY, Professeur,	<i>rapporteur</i>
M. Mohamed ICHCHOU, Professeur,	<i>rapporteur</i>
M. Roger OHAYON, Professeur,	<i>Président du jury</i>
M. Christian SOIZE, Professeur,	<i>directeur de thèse</i>

*Ce mémoire est dédié à Pépère et Bob,
mes ancêtres-patriarches*

Remerciements

Je remercie MM. **Hamdi** et **Ichchou** pour avoir rapporté sur mon manuscrit de thèse, pour leurs rapports qui m'ont permis de tourner un oeil nouveau plus objectif vers ces travaux et pour leur participation aux débats lors des traditionnelles questions d'après la soutenance. Je remercie **M. Duhamel** d'avoir accepté d'examiner mon travail et de l'intérêt qu'il y a porté, ce qui m'a permis d'éclaircir mon propos et d'améliorer la rédaction. Je dis maintenant merci à **M. Ohayon** pour sa présidence de mon jury de thèse qui m'a permis de profiter d'une excellente leçon de dissection synthétisée que j'espère, je retiendrai. Je remercie aussi bien sûr **Laurent** et **Christian** mais j'y reviendrai plus tard.

Voy a dar las gracias primero a mis compañeros doctorantes que conocí a la escuela de ingenieros de Sevilla, **Diana** por coger la luz de la razón científica y **Luis** por su ayuda enorme durante estos meses y por supuesto a **Spud** qui participe pleinement de l'*effet papillon* lié à cette thèse et avec qui j'ai passé des week-ends au souvenir impérissable. Je remercie l'ensemble des membres du laboratoire MSME (et surtout **Chantal** et **Isabelle**) avec qui, au cours de ces trois dernières années, j'ai eu des conversations animées, passé de très bons moments lors des divers pots, galettes des rois, anniversaires, naissances et j'en passe. Je remercie particulièrement mes MC-camarades : **Evangeline** (*on commence toujours par la fille*) avec qui j'ai passé d'excellents moments en conférence, eu la peur de ma vie en avion, arpenté 15 miles en une journée à pieds en tongs, englouti des tonnes de sablés au citron ; **Christophe** qui m'a sauvé rien que par sa présence *et plus d'une fois* des méandres informatiques qui menaçaient la fin de ma thèse ; **Régis** avec qui nous portâmes haut les couleurs de la patrie telle Miss France sur le dance floor d'Innsbruck ; mes compagnons doctorants : mis vecinos por su compania de café y correos electronicos de puta madre (*como se dice en España*) : **Sandra**, **Sulpicio** y **David** el Gran Mariachi ; **Anas**, **Fred**, **Seddik**, **Moustapha**, **Eric** et **Bao** ; **Thiago** et **Morad** pour tous les échanges de propos, leur énorme participation à ma compréhension de leurs pays et cultures et leur indéfectible patience et capacité d'écoute ; grâce à toi, **Dr Chaohui**, j'ai été éclairci sur la Chine et l'Asie en général et j'ai amélioré ma préhension du présent (*bo peignang comme on dit chez leurs voisins laos*), je me souviendrai toujours de cette fondue mémorable (sic), let's say it was worth to be expensive-taken : encore duō xiè **Chaohui** ; heeeeeeeey [son puissant et soutenu dans les mediums], et voilà, j'ai encore mis **Elie** avec les doctorants..., c'est pas possible, ça ! Enfin bon, maintenant c'est fait, alors autant te remercier pour tous ces cafés burlesques, ces tranches de rire avec d'amusantes histoires de carafe, de don de scooter cocasse, de on-ne-peut-plus-sérieuses-et-franches [longues] conversations, de soif commune d'envie de comprendre.

En parlant de doctorant plus vraiment doctorant (surtout avec 81 kW sous le capot), le temps est venu d'exprimer ma profonde reconnaissance, selon l'expression consacrée, à **Jean-François**, tout d'abord pour être resté mon ami après l'épisode du désormais légendaire *pain de Satan* (une sorte d'excentricité culinaire...), puis pour avoir décroché son téléphone sans mesure et répondu à mes emails d'innombrables fois, pour m'avoir raccompagné chez moi à des heures impensables via un lieu plus *gastro* que *nomique* (mais enfin, il y avait double ration pour les étudiants), pour

m'avoir défriché les *arcanes incertains* des modèles vibroacoustiques et enfin pour avoir su capter les preuves de l'éternelle amitié sino-française définitivement scellée lors d'une soirée fromage.

Sans transition, je vais passer du côté obscur et remercier sans plus attendre mes collègues vibroacousticiens de PSA, et plus particulièrement le *canal MVA historique* et assimilés, **Philippe** dit Maître Vannier, inlassable Rhône traversant le lac Léman et prodigant des conseils de valeur de tous ordres, **Yves** expert ès 5S à la lettre (du post-it), **Patricia** polyglotte et toujours prête à se détendre efficacement, **Denis** pour ses discussions sans concession, **Benoît** qui a les doigts aussi agiles avec les claviers que la voix prompte à démontrer et avec qui je partage beaucoup, **Manuel** pour sa foi dans la science et ses roulettes randonnantes du vendredi soir. Je voudrais aussi remercier **Loïc**, **Antoine**, **Hélène** et enfin **Pierre-Emmanuel** qui m'a sorti du pétrin tant de fois.

Je voudrais exprimer enfin ma gratitude à **Laurent** car il a trouvé un sujet de recherche qu'on a pu appliquer, il m'a confié une partie de ce travail, il m'a épaulé efficacement, rendu le temps moins long lors des fabuleux embouteillages d'automne sur la N118, fabriqué de l'écart-type si nécessaire mais sans jamais infléchir sur le chemin moyen, et comme son nom l'indique, c'est bien l'exception française qui confirme la règle.

Je tiens à respecter le cycle immémorial et remercier maintenant **mes parents** sans qui je ne serais pas né (*et par récurrence...*) mais surtout ce que je suis. Certes, faire une thèse prend beaucoup de temps mais si elle avait pris tout mon temps, elle n'aurait sans doute jamais abouti jusqu'ici. C'est pourquoi je voudrais remercier **toute ma famille et mes amis** qui ont rigolé avec moi, compris, rien compris, qui m'ont aidé et motivé. A tous mes potes de Nantes, en particulier **Maxime** mon témoin dessinateur, **Dr Sandrine** au coup de carre rapide, **Claudine** à l'optimisme sans faille, et tous les **cacamembres**[©], qui aurait parié que je ferais une thèse? Merci encore de m'avoir accompagné. J'aimerais maintenant remercier les personnes qui m'ont appris des chansons dans la voiture, comme **tata Rina** et **tonton Armand** et appris à compter grâce à la belote et au bridge comme **Marraine** et mes autres grand-tantes, **Jean-Baptiste** et **Lucie** pour leur regard critique indispensable, **Nadine**, **François** et **Jean-Luc** pour être venus à ma soutenance m'apporter leur soutien et enfin **ma grand-mère** qui a fait les gougères du pot de thèse et m'a enseigné à sa façon tellement de procédés ingénieux, durablement. Je voudrais aussi remercier les autres piliers du pot de thèse, **Yves**, **Piglou**, **Alexis** *bec'h de'hi*, **Marie**, **Thomas** et puis **Alèthe** pour son analyse toujours aussi fine de la comédie humaine. Je remercie au passage **tonton Dédé** (dit *Dédoche la caboche*) à titre posthume pour son leg de terrines assorties de recettes et aussi pour m'avoir appris le parisien.

Je veux rendre grâce à présent à l'être qui me connaît le mieux et grâce à qui j'ai vraiment décidé de faire une thèse. **Sandrine**, merci de me faire onduler sans cesse puis de me stabiliser sans relâche sur le meilleur. Et merci aussi de faire des compotes à **Maya** si bonnes, et merci Maya de me laisser, hum, *les goûter*.

And last but not least, **Christian**, je te remercie dans $\mathbb{R}[X]$ pour "m'avoir [presque sûrement] enseigné, orienté, averti, bouleversé, accompagné, engueulé, obligé à travailler, à retravailler, préciser, couper, développer, encore et encore..."¹ Je ne sais pas si je pouvais tomber entre de meilleures mains pour appréhender le monde de la recherche... et bien d'autres choses encore.

¹Erik Orsenna, *L'avenir de l'eau, Petit précis de mondialisation II*, Fayard

Avant-propos

Cette thèse a été effectuée dans le cadre d'un financement **CIFRE** (Convention Industrielle de Formation par la Recherche). Elle a été subventionnée en partie par l'**ANRT** (Association Nationale de la Recherche et de la Technologie).

J'ai été embauché en contrat à durée déterminée par **PSA PEUGEOT CITROEN** au sein du service **ACV** (Acoustique et Vibration) de la **DTI** (Direction Technique et Industrielle). J'ai partagé mon temps entre l'entreprise et le Laboratoire **MSME FRE3160 CNRS** (Modélisation et Simulation Multi-Echelle) de l'**UNIVERSITE PARIS-EST**.

Ces travaux de recherche ont été publiés dans des revues internationales à comité de lecture et ont donné lieu à des communications dans des congrès et des conférences internationales.

Une application industrielle a été développée.

Table des matières

Dédicace	i
Remerciements	iii
Avant-propos	v
Table des matières	vii
Notations	xiii
Introduction	1
1 Contexte de la recherche	1
2 Positionnement de la recherche	2
3 Objectifs de la recherche	5
4 Stratégie de la recherche	6
5 Organisation du manuscrit de thèse	6
I Modèle moyen du système vibroacoustique	9
I.1 Définition du problème vibroacoustique	10
I.1.1 Domaine fréquentiel et caractérisation des différents milieux	10
I.1.2 La géométrie	11
I.1.3 Champs inconnus et excitations du système vibroacoustique	11
I.1.4 Conditions aux limites	12
I.1.5 Champs de forces de couplage	12
I.2 Problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique	13
I.2.1 Structure	13
I.2.2 Habillage	14
I.2.3 Cavité acoustique	14
I.3 Forme faible du problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique	15

I.3.1	Espaces admissibles	15
I.3.2	Forme faible	15
I.3.3	Formes linéaires et bilinéaires	17
I.4	Forme faible pour le problème vibroacoustique et résumé du chapitre	19
II	Modèle de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues	21
II.1	Introduction	22
II.2	Les hypothèses de construction et les notations	22
II.3	Modèle déterministe sous-jacent pour la construction du modèle moyen simplifié de l'habillage	23
II.3.1	Modèle mécanique	23
II.3.2	Expressions de f^s et w en fonction de w^s et p	24
II.3.3	Comportement en fréquence du modèle déterministe sous-jacent	25
II.3.4	Modèle déterministe sous-jacent du modèle moyen simplifié de l'habillage	26
II.4	Modèle moyen simplifié pour l'habillage fondé sur la théorie des structures floues	27
II.4.1	Construction du modèle probabiliste des variables aléatoires $A^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $A^c(\mathbf{x}, \omega)$	30
II.4.2	Calcul des espérances mathématiques	32
II.4.3	Cas de l'absence d'habillage	36
II.5	Paramètres du modèle moyen d'un habillage fictif constitué d'un nombre fini d'oscillateurs physiques	37
II.5.1	Cas d'une densité modale uniforme en fréquence	37
II.5.2	Cas d'une densité modale non uniforme en fréquence	40
II.6	Paramètres du modèle moyen d'un habillage réel	42
II.6.1	Paramétrage du modèle moyen	42
II.6.2	Densité surfacique de masse moyenne $\underline{\mu}(\omega)$ d'un habillage réel	42
II.6.3	Taux de dissipation moyen $\underline{\xi}(\omega)$ d'un habillage réel	43
II.6.4	Densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$ d'un habillage réel	43
II.7	Estimation <i>sur plan</i> des paramètres du modèle moyen de l'habillage	44
II.7.1	Estimation du taux de dissipation moyen	45
II.7.2	Estimation du coefficient de masse participante moyen	45
II.7.3	Estimation de la densité modale moyenne	47
II.8	Résumé du chapitre	47
III	Réduction du modèle vibroacoustique moyen simplifié	49
III.1	Introduction	50

III.2	Formulation faible du problème aux limites moyen vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié d'habillage	50
III.3	Introduction des ensembles de matrices	51
III.4	Modèle matriciel éléments finis moyen	51
III.4.1	Maillage des domaines par la méthode des éléments finis	51
III.4.2	Matrices et vecteurs de la discrétisation par la méthode des éléments finis	51
III.5	Modes élastiques de structure et modes acoustiques de cavité pour le modèle moyen	54
III.5.1	Modes élastiques de structure	54
III.5.2	Modes de cavité acoustique à parois rigides	55
III.6	Modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit	55
III.7	Résumé du chapitre	57
IV	Modèle probabiliste non paramétrique d'incertitudes	59
IV.1	Introduction	60
IV.2	Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de données et de modèle	60
IV.2.1	Définition des matrices aléatoires du système vibroacoustique	60
IV.2.2	Normalisation des matrices aléatoires	62
IV.2.3	Information utilisable pour les matrices aléatoires normalisées	64
IV.2.4	Paramètres de dispersion des matrices aléatoires	65
IV.2.5	Lois de probabilité des matrices aléatoires normalisées	66
IV.3	Résumé du chapitre	69
V	Méthodologie de résolution des équations aléatoires	71
V.1	Introduction	72
V.2	Problème vibroacoustique stochastique	72
V.3	Méthode de simulation de Monte Carlo	73
V.4	Définition des variables aléatoires observées	73
V.5	Analyse de la convergence de la solution stochastique des équations aléatoires	74
V.6	Estimation statistique des observations aléatoires	75
V.6.1	Estimation de la loi de probabilité	75
V.6.2	Estimation des régions de confiance	75
V.7	Résumé du chapitre	76
VI	Validation du modèle simplifié d'habillage	77
VI.1	Introduction	78
VI.2	Méthodologie d'identification des paramètres moyens du modèle simplifié d'habillage	78

VI.2.1	Dispositif expérimental	79
VI.2.2	Recalage expérimental du modèle moyen de la structure sans habillage	81
VI.2.3	Application de l'estimation <i>sur plan</i> des paramètres du modèle moyen de l'habillage	84
VI.2.4	Identification expérimentale des paramètres du modèle moyen d'habillage	85
VI.3	Identification expérimentale des paramètres de dispersion du modèle probabiliste	88
VI.3.1	Définition de la variable d'observation et convergence du solveur stochastique	88
VI.3.2	Identification des paramètres de dispersion	89
VI.3.3	Réduction statistique et méthode du maximum de vraisemblance	91
VI.3.4	Résumé de la méthode d'identification	94
VI.3.5	Résultats	94
VI.4	Prédiction des réponses vibroacoustiques avec le modèle stochastique numérique identifié	97
VI.5	Graphes des coefficients du modèle simplifié de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues	100
VI.6	Résumé du chapitre	104
VII	Application du modèle simplifié d'habillage sur une automobile	105
VII.1	Introduction	106
VII.1.1	Protocole des essais	106
VII.1.2	Modèles vibroacoustiques de l'automobile	109
VII.1.3	Plan du chapitre	109
VII.2	Identification <i>sur plan</i> des paramètres du modèle simplifié des habillages	110
VII.3	Comparaison des mesures avec les modèles moyens	112
VII.3.1	Comparaison des mesures vibroacoustiques avec les modèles moyens - 1 graduation = 10 dB	113
VII.3.2	Comparaison des mesures acoustiques avec les modèles moyens - 1 graduation = 10 dB	115
VII.3.3	Comparaison des deux modèles d'habillage pour les calculs vibratoires - 1 graduation = 10 dB	117
VII.4	Comparaison des mesures avec les modèles stochastiques	118
VII.4.1	Comparaison des mesures vibroacoustiques avec les modèles stochastiques - 1 graduation = 20 dB	120
VII.4.2	Comparaison des mesures acoustiques avec les modèles stochastiques - 1 graduation = 20 dB	122

VII.4.3 Comparaison des mesures vibratoires avec les modèles stochastiques - 1	
graduation = 20 dB	124
VII.5 Synthèse concernant la comparaison des modèles d'habillage	126
VII.5.1 Vibroacoustique	126
VII.5.2 Acoustique	126
VII.5.3 Vibratoire	126
VII.6 Résumé du chapitre	127
Conclusion	129
1 Synthèse des travaux effectués	129
2 Perspectives	130
A Formules utiles	133
A.1 Calcul vectoriel	133
A.2 Primitives utiles	133
B Paramétrage de la densité modale	135
B.1 Définition d'un paramétrage pour la densité modale moyenne d'un habillage réel	135
B.2 Exemple d'évolution fréquentielle des coefficients du modèle simplifié de l'habillage pour un habillage réel	136
C Validation du calcul algébrique par intégration numérique	141
D Calcul par les éléments finis des matrices du modèle simplifié d'habillage	145
D.1 Introduction	145
D.1.1 Rappel des notations	145
D.1.2 Problème à résoudre	145
D.2 Exemple de calcul formel pour la matrice $\underline{\mathbb{B}}^s$	146
D.3 Obtention des matrices réduites \underline{C}^s , \underline{B}^s et \underline{B}^a	147
D.3.1 Introduction	147
D.3.2 Calcul de la matrice généralisée \underline{C}^s	148
D.3.3 Calcul de la matrice généralisée \underline{B}^s	149
D.3.4 Calcul de la matrice généralisée \underline{B}^a	150
E Algorithme de résolution du système des équations aléatoires	151
Références	155
Résumé - Abstract	172

Notations

Notations générales

p	: scalaire déterministe
P	: scalaire aléatoire
$[A]$: matrice déterministe
$[\underline{A}]$: matrice EF du modèle moyen en coordonnées physiques
$[\overline{A}]$: matrice EF du modèle moyen en coordonnées généralisées
$[\mathbf{A}]$: matrice aléatoire
\mathbf{u}	: vecteur déterministe
$\underline{\mathbf{u}}$: vecteur relatif du modèle moyen
\mathbf{U}	: vecteur aléatoire
\mathbf{x}	: point de \mathbb{R}^3
$d\mathbf{x}$: mesure de Lebesgue, $= dx_1 dx_2 dx_3$ sur \mathbb{R}^3
$x_i y_i, a_{ij} b_j$: $\sum_i x_i y_i, \sum_j a_{ij} b_j$
σ	: tenseur des contraintes
ε	: tenseur des déformations
$\mathbb{1}_B(\mathbf{x})$: fonction indicatrice de B , $= 1$ si $\mathbf{x} \in B$, $= 0$ si $\mathbf{x} \notin B$
δ_{ij}	: symbole de Kronecker, $= 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$
\mathcal{E}	: Espérance mathématique d'une variable aléatoire
$\ [A] \ _F$: Norme de Frobenius, $= (\text{tr} ([A][A]^T))^{1/2}$
$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$: Produit scalaire euclidien pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbb{R}^n , $= \sum_{i=1}^n u_i v_i$

Notations spécifiques

Ω_s	: domaine de la structure
Ω_h	: domaine de l'habillage
Ω_a	: domaine de la cavité acoustique
Γ	: frontière entre la cavité acoustique et l'habillage
Γ_s	: frontière entre la structure et l'habillage
Γ_0	: bord de Ω_s où la structure est fixe
Γ_1	: bord de Ω_s où s'applique un champ de forces surfaciques \mathbf{g}^{sur}
Γ_2	: frontière entre la cavité acoustique et la structure

$\partial\Omega_s$: frontière de la structure, = $\Gamma_s \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$
$\partial\Omega_h$: frontière de l'habillage, = $\Gamma \cup \Gamma_s$
$\partial\Omega_a$: frontière de la cavité acoustique, = $\Gamma \cup \Gamma_2$
\mathbf{n}	: normale intérieure au fluide
\mathbf{n}^s	: normale extérieure à la structure
\mathbf{g}^{sur}	: champ de forces surfaciques sur Γ_1
\mathbf{g}^{vol}	: champ de forces volumiques sur Ω_s
\mathbf{f}^s	: force que la structure exerce sur l'habillage
ρ_0	: masse volumique du fluide au repos
c_0	: vitesse du son dans le fluide au repos
\mathbb{B}	: intervalle de fréquences de l'étude, = $[\omega_{min}, \omega_{max}]$
ω	: fréquence angulaire
$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega)$: déplacement de l'habillage sur Γ
$\mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)$: déplacement de la structure
$w(\mathbf{x}, \omega)$: projection de \mathbf{u} sur \mathbf{n} , = $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$
$w^s(\mathbf{x}, \omega)$: projection de \mathbf{u}^s sur \mathbf{n}^s , = $\mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s$
Ω_c	: fréquence de coupure de l'habillage
$ \Gamma_s $: mesure de la surface Γ_s
N_{osc}	: nombre total d'oscillateurs dans la surface Γ_s de l'habillage
m_{osc}	: masse d'un oscillateur physique de l'habillage
m_{tot}	: masse totale de tous les oscillateurs physiques de l'habillage
n_s	: nombre de modes élastiques de la structure considérés pour la projection
n_a	: nombre de modes de cavité acoustique à parois rigides

Introduction

1 Contexte de la recherche

Les constructeurs automobiles tendent à s'appuyer de plus en plus sur des prévisions numériques issues de modèles développés en amont des projets. Le domaine de l'acoustique et des vibrations (**ACV**) n'échappe pas à ce principe et utilise des modèles numériques très détaillés pour caractériser les réponses acoustiques et vibratoires très tôt dans la phase de conception du véhicule. Dans le cadre de ce travail de recherche, on s'intéresse au confort acoustique et vibratoire de véhicules limité au cas de la vibroacoustique linéaire dans le domaine des basses et moyennes fréquences (**BMF** < 400 Hz). Les excitations vibratoires étudiées par la suite sont produites par le groupe moto-propulseur (**GMP**). Les points d'observation sont situés sur la structure (fonctions de réponse en fréquence - **FRF** - purement vibratoires) et dans l'habitacle au niveau des oreilles des passagers avant et arrière (**FRF** vibroacoustiques).

Le constructeur automobile souhaite améliorer la modélisation des habillages de carrosserie (voir un exemple d'habillage de tablier sur la figure 1) qui concerne dans un premier temps les *complexes insonorisants* (dits **habillages**) dans le domaine des basses et moyennes fréquences. Le bureau d'études modélise actuellement ces habillages par un ajout de masse répartie ou de masses nodales dans le modèle éléments finis aux endroits *habillés*. Cependant, les modèles d'habillages simplifiés ne sont pas bien adaptés pour le calcul des réponses acoustiques et vibratoires en basses et moyennes fréquences. En effet, une étude du constructeur (Julien Mignon [75]) a mis en évidence que la modélisation par ajout de masse répartie ou de masses ponctuelles sur la structure était insuffisante. Il a été montré qu'une partie de la masse des habillages se découplait après une certaine fréquence dite *de résonance d'épaisseur* située entre 50 et 150 Hz selon les habillages. La conclusion du rapport était qu'une modélisation par ensembles de {masse-ressort} répartis améliorerait significativement les résultats. En contre-partie, chaque ensemble de {masse-ressort} accroît le nombre de modes propres du modèle éléments finis du véhicule et augmente ainsi excessivement la dimension du modèle réduit du véhicule jusqu'à le rendre inexploitable. Une telle modélisation ne s'est donc pas généralisée.



FIG. 1 – Exemple d’habillage de tablier

Outre la résonance d’épaisseur, un second aspect est à prendre en compte dans la modélisation simplifiée : les points d’accroche des habillages ne sont pas connus avec précision. Les habillages sont fixés, par exemple, avec du ruban adhésif ou des points de colle dont la dispersion au montage est très grande. Il est donc quasiment impossible de modéliser les liaisons entre la structure du véhicule et les habillages de façon déterministe. L’industrie automobile a souhaité dès lors obtenir un modèle simplifié **(1)** qui soit simplement défini grâce aux paramètres de conception des assemblages de matériaux constituant les habillages, **(2)** qui prenne en compte à la fois la dynamique interne de ces assemblages et **(3)** la dispersion des habillages (géométrie, matériaux, conditions aux limites, ...). Le modèle simplifié de l’habillage doit bien sûr être implémentable facilement dans un modèle vibroacoustique complet d’automobile (un exemple d’un modèle vibroacoustique de cavité automobile couplé à la structure est présenté à la figure 2).

2 Positionnement de la recherche

Dans la présente recherche, on s’intéresse à la construction d’un modèle simplifié d’une structure composite (complexe insonorisant ou habillage) constitués d’un assemblage de divers matériaux (**poro-élastiques, bitumeux, feutres, moquettes, ...**) dans le cadre de la vibroacoustique linéaire pour le domaine des basses et moyennes fréquences (< 400 Hz). Ces habillages ont un comportement de système dynamique dont la fréquence de résonance appartient à la bande de fréquences étudiée. On ne s’intéresse pas à la bande des hautes fréquences pour laquelle de très nombreux modes élastiques apparaissent.

Une approche classique de modélisation consiste à modéliser l’habillage en tant que milieu poro-

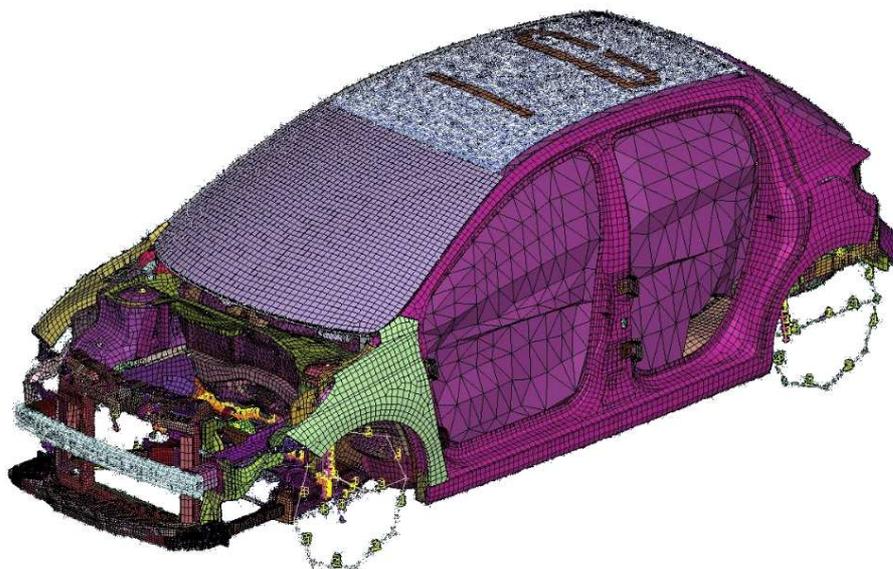


FIG. 2 – Exemple de modèle vibroacoustique numérique d’automobile

élastique et à modéliser ces milieux par les équations continues découlant de la théorie de Biot ; le problème aux limites associé est ensuite résolu par la méthode des éléments finis. Dans ce cas, le système vibroacoustique avec l’habillage est modélisé par la méthode des éléments finis (voir par exemple les références Kang and Bolton [77] [78], Panneton and Atalla [110] [111], Atalla *et al.* [13] [11] [14]). Cette approche n’est pas celle retenue dans ce travail, d’une part parce que le comportement des habillages est relativement simple dans la bande de fréquences étudiée, ce qui permet d’envisager des modèles simplifiés, et d’autre part parce que nous souhaitons développer une approche qui n’accroisse pas le nombre de DDL du modèle sans habillage et qui n’accroisse pas la dimension du modèle réduit de par la présence de tous les modes des habillages qui viendraient s’ajouter à tous les modes déjà très nombreux de la structure.

En conséquence, il existe un très grand intérêt à construire des modèles simplifiés d’habillage qui n’ajoutent pas de degré de liberté au modèle de la structure. Les modélisations par impédance acoustique sont fréquemment utilisées afin de construire des modèles simplifiés sans rajouter de degrés de liberté. Cette notion est développée dans les ouvrages suivants Junger and Feit [76], Pierce [114], Fahy [48], Allard [2], Ohayon and Soize [108]. Un grand nombre de publications a été consacré à ce sujet dans les trois dernières décennies mais la plus grande partie de ces travaux concerne les moyennes et hautes fréquences où le comportement des habillages diffère de celui observé dans les basses et moyennes fréquences étudiées dans cette thèse. Le lecteur pourra trouver de nombreux papiers concernant ces modélisations dans les références suivantes Guyader and Lesueur [67], Moore and Lyon [105], Allard *et al.* [3], Blaise *et al.* [18], Allard and Daigle

[4], Lesueur *et al.* [85], Atalla and Panneton [12], Cushieri and Feit [36], Faverjon and Soize [49] [50], Jaouen *et al.* [71].

Dans ce travail, nous présentons une construction alternative aux approches par éléments finis qui se situe dans la classe des impédances acoustiques de paroi. Comme il est expliqué, un modèle simplifié peut être construit à partir d'un oscillateur à un degré de liberté dont la fréquence de résonance appartient à l'intervalle d'étude. De plus, en raison de la grande variabilité de l'épaisseur, géométrie et propriétés des matériaux les constituant, les habillages sont considérés comme des structures complexes et en conséquence, nous proposons une description statistique des degrés de liberté internes participant de la dynamique. Nous sommes alors enclin à utiliser la théorie des structures floues qui convient à ce cadre et qui a déjà été validée. La théorie des structures floues possède l'avantage de permettre l'interprétation du comportement des habillages en terme de système dynamique. Ce comportement est caractérisé par seulement trois paramètres physiques : le taux de masse participante, la densité modale et le taux de dissipation interne. Ces paramètres peuvent être obtenus facilement par l'ingénierie en fonction des paramètres de conception des habillages que sont la masse, la raideur et la dissipation internes des matériaux constitutifs des habillages.

La théorie des structures floues a été introduite il y a vingt ans afin de modéliser les effets de sous-structures complexes dont on a peu d'information pour en construire un modèle sur le système principal (dit *système maître*), (voir les références Soize [128], Chabas *et al.* [26], Soize [130] [133], Soize and Bjaoui [144]). Cette théorie est développée dans le cadre de la théorie mathématique des probabilités qui est adaptée à notre problème comportant de nombreuses incertitudes (géométrie, matériaux, conditions aux limites). Un certain nombre d'auteurs ont utilisé cette théorie (voir par exemple Pierce *et al.* [117], Strasberg and Feit [152], Weaver [156] [157], Maidanik and Dickey [98], Weaver [158] [159], Mencik and Berry [101]). La plupart de ces développements concerne un sous-système complexe couplé avec un système vibroacoustique principal. Mais jusqu'à présent, aucune tentative n'a été faite pour développer un modèle spécifique de complexe insonorisant en utilisant la théorie des structures floues.

Une telle modélisation introduit cependant des incertitudes qui sont engendrées par les simplifications effectuées. La théorie originale (introduite dans Soize [128]) permet de prendre en compte les incertitudes sur les données grâce à une modélisation probabiliste paramétrique. Aujourd'hui il est largement admis que ces modélisations probabilistes paramétriques ne peuvent englober la prise en compte des incertitudes liées à la construction même du modèle (incertitudes de modélisation). Une approche probabiliste non paramétrique a récemment été introduite (voir les références Soize [134] [135] [140] [143]). Cette dernière approche permet à la fois de prendre en compte les incertitudes sur les données et les incertitudes de modélisation dans les modèles

numériques.

Actuellement, l'ingénierie dispose de modèles moyens déterministes de la structure couplée avec une cavité acoustique encombrée. Les incertitudes de modèle et de données sont prises en compte de manière non paramétrique (voir Durand *et al.* [44] [43] [46] [45], Durand [42], Durand *et al.* [47]). Les prévisions avec ces modèles sont déjà très satisfaisantes mais elles peuvent être améliorées en introduisant un modèle représentatif d'habillage.

3 Objectifs de la recherche

Le **premier objectif** est de construire un modèle moyen simplifié pour les habillages de carrosserie automobile dans le cas particulier des complexes insonorisants (dits habillages). Ces habillages sont constitués d'assemblages de matériaux poroélastiques dont une des trois dimensions est faible devant les deux autres. Ce modèle moyen simplifié sera construit à partir de la théorie des structures floues. On s'attachera dans ce premier objectif à étendre la théorie des structures floues au cas d'un élément élastoacoustique dans le cadre d'un modèle déterministe.

Le **deuxième objectif** de cette recherche est de prendre en compte les incertitudes de modélisation en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Cette modélisation probabiliste permettra de prendre en compte les incertitudes introduites par les simplifications et donc de rendre le modèle d'habillage plus robuste vis-à-vis des incertitudes de modélisation.

Le **troisième objectif** est de valider expérimentalement sur une structure simplifiée (plaque en acier attachée à un cadre élastique en acier suspendu par des tendeurs et recouverte d'un habillage) le modèle probabiliste de l'habillage. On s'attachera à développer une méthodologie d'identification des paramètres du modèle déterministe sous-jacent (masse participante, densité modale et taux de dissipation interne) et des paramètres de dispersion du modèle probabiliste des incertitudes.

Le **quatrième objectif** est de valider ce modèle sur une structure complexe (modèle de structure automobile habillée, fermée et couplée avec une cavité acoustique encombrée représentant l'habitacle).

Dans ce travail, on construit un modèle simplifié robuste d'habillage de carrosserie automobile. On se propose de développer une méthodologie d'identification des paramètres du modèle moyen en fonction des paramètres de conception des matériaux constituant les habillages. On identifie aussi les paramètres de dispersion associés à ce modèle simplifié dans le but de connaître les niveaux d'incertitudes liés aux différents habillages.

4 Stratégie de la recherche

Le modèle numérique moyen vibroacoustique pour le domaine (**BMF**) sera construit à l'aide de la formulation usuelle en utilisant le champ de déplacement structure et le champ de pression acoustique, pour le domaine fréquentiel (voir les ouvrages de référence suivants Pierce [114], Fahy [48], Junger and Feit [76], Morand and Ohayon [106], Ohayon and Soize [108]). Le modèle moyen de l'habillage sera dans un premier temps formulé de la même façon que la structure principale, c'est-à-dire en le considérant comme un milieu tridimensionnel à part entière.

La stratégie employée pour construire le modèle moyen simplifié de l'habillage sera celle de la théorie des structures floues. Elle consiste **(1)** à construire un modèle déterministe sous-jacent de l'habillage dont la base est une densité spatio-fréquentielle d'oscillateurs linéaires amortis suivant la direction normale à l'interface structure-habillage ; **(2)** à construire le modèle moyen simplifié de l'habillage en prenant la moyenne statistique de la répartition d'oscillateurs.

La fluctuation statistique autour de cette moyenne induite par les incertitudes de modélisation sera, quant à elle, prise en compte par la modélisation probabiliste non paramétrique.

Le modèle simplifié d'habillage proposé présente l'avantage d'être bien adapté aux applications visées. En effet, les paramètres de conception des habillages permettront de définir les données d'entrée du modèle moyen d'habillage et les paramètres de dispersion permettront de calibrer le niveau d'incertitude inhérent au modèle simplifié de l'habillage.

Concernant les données d'entrée du modèle moyen de l'habillage, une base de données expérimentale a été construite afin de pouvoir identifier ces paramètres. Une méthode adaptée a ensuite été appliquée pour identifier les paramètres de dispersion du modèle simplifié d'habillage.

5 Organisation du manuscrit de thèse

Chapitre I

Une formulation en champ de déplacement structure et en champ de pression acoustique est utilisée. Dans le premier chapitre nous définissons le **modèle moyen du système vibroacoustique** sans modélisation simplifiée d'habillage. On définit la forme faible du problème aux limites vibroacoustique avec les différentes formes de couplage dont dérivera le modèle simplifié de l'habillage.

Chapitre II

Nous construisons dans le deuxième chapitre le **modèle moyen simplifié de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues**.

Chapitre III

Dans ce chapitre le **modèle moyen du système vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié de l'habillage** est construit en utilisant une modélisation numérique par éléments finis du système vibroacoustique. On réduit ce modèle par analyse modale et on construit ainsi le modèle vibroacoustique réduit adapté à la modélisation probabiliste non paramétrique.

Chapitre IV

Dans le quatrième chapitre nous développons le **modèle probabiliste non paramétrique d'incertitudes de modèle et de paramètres du système vibroacoustique avec habillage simplifié**.

Chapitre V

Dans le cinquième chapitre, nous exposons la **méthode de résolution des équations aléatoires du système vibroacoustique stochastique**. On introduit le solveur stochastique de Monte Carlo puis les observations aléatoires.

Chapitre VI

Ce chapitre est consacré à la **validation du modèle simplifié d'habillage** et au développement d'une **méthodologie d'identification des paramètres du modèle d'un habillage réel**. On présente l'identification des données d'entrée du modèle moyen de l'habillage sur une plaque en acier habillée attachée à un cadre élastique en acier suspendu par des tendeurs. Un calcul numérique vibroacoustique est effectué et comparé avec un *calcul de référence*.

Chapitre VII

Ce dernier chapitre présente l'application du modèle probabiliste avec habillage simplifié sur un véhicule complet.

Les chapitres sont suivis d'une **conclusion** où nous donnons quelques perspectives de recherche.

Cette thèse comprend également des annexes découpées en chapitres. Nous rappelons et donnons quelques **outils mathématiques (A)** utiles. Nous proposons un modèle de **densité modale paramétrée (B)**. Nous exposons la **validation des calculs algébriques (C)** par une intégration numérique. Nous donnons la **construction des matrices moyennes spatiales de l'habillage (D)**. La dernière annexe (en **E**) présente l'algorithme de résolution des équations aléatoires du système vibroacoustique. Ces annexes sont suivies des **références bibliographiques** ainsi que du résumé en français et en anglais de la thèse.

Chapitre I

Modèle moyen du système vibroacoustique

Sommaire

I.1	Définition du problème vibroacoustique	10
I.2	Problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique	13
I.3	Forme faible du problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique	15
I.4	Forme faible pour le problème vibroacoustique et résumé du chapitre	19

I.1 Définition du problème vibroacoustique

On appellera « structure » la partie modélisant la caisse automobile. On appellera « habillage » la partie modélisant l'habillage de carrosserie et on appellera « cavité acoustique » la partie modélisant la cavité pleine d'air.

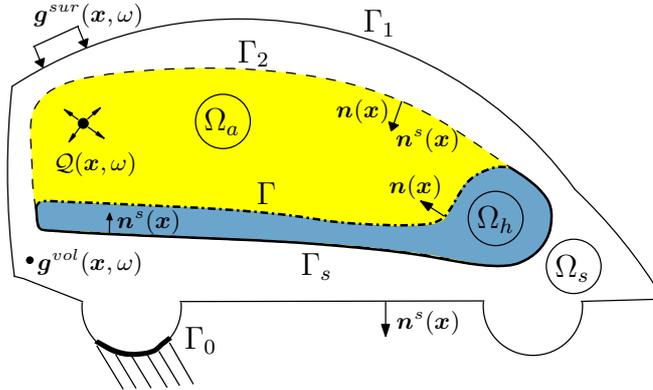


FIG. I.1 – Modèle mécanique du véhicule automobile

I.1.1 Domaine fréquentiel et caractérisation des différents milieux

Domaine fréquentiel

La transformée de Fourier d'une fonction u de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est notée $u(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} u(t) dt$ dont la transformée inverse est $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{i\omega t} u(\omega) d\omega$. Le signal harmonique $\mathbf{u}_{harm}(t)$ associé à cette transformée de Fourier s'écrit $\mathbf{u}_{harm}(t) = \mathbf{u}(\omega) \exp(i\omega t)$. On s'intéresse à la bande de fréquences angulaires $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$ avec

$$0 < \omega_{min} < \omega_{max} \quad , \quad (I.1)$$

où ω_{min} peut être aussi proche de zéro que l'on veut.

Structure et habillage

La structure et l'habillage sont modélisés par un assemblage de matériaux viscoélastiques à mémoire.

Cavité acoustique

La cavité acoustique est remplie d'un gaz (l'air) modélisé par un fluide acoustique dissipatif.

I.1.2 La géométrie

Structure

Soit Ω_s le domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 représentant la structure. Le bord $\partial\Omega_s$ de Ω_s est écrit $\partial\Omega_s = \Gamma_s \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma_s \cap \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$. La normale unitaire à $\partial\Omega_s$ au point \mathbf{x} extérieure à Ω_s est notée $\mathbf{n}^s(\mathbf{x})$. Sur Γ_0 , la structure est indéformable, sur Γ_1 seront appliquées des forces extérieures, Γ_2 sera l'interface de la structure avec la cavité acoustique et Γ_s sera l'interface de la structure avec l'habillage. Il est donc à noter que l'habillage n'occupe pas tout le bord de la cavité acoustique (voir figure I.1).

Habillage

Soit Ω_h le domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 représentant l'habillage. Le bord $\partial\Omega_h = \Gamma \cup \Gamma_s$ avec $\Gamma \cap \Gamma_s = \emptyset$ (voir figure I.1).

Cavité acoustique

Soit Ω_a le domaine ouvert borné de \mathbb{R}^3 représentant la cavité acoustique. Soit $\partial\Omega_a$ le bord de Ω_a qui est écrit $\partial\Omega_a = \Gamma \cup \Gamma_2$ avec $\Gamma \cap \Gamma_2 = \emptyset$. La normale unitaire à $\partial\Omega_a$ au point \mathbf{x} intérieure à Ω_a est notée $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. La partie Γ du bord $\partial\Omega_a$ représente l'interface entre la cavité acoustique et l'habillage. Il est à noter que sur Γ_2 , on a $\mathbf{n} = \mathbf{n}^s$ (voir figure I.1).

I.1.3 Champs inconnus et excitations du système vibroacoustique

Structure

Soit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)$ de Ω_s dans \mathbb{C}^3 le champ de déplacements de la structure. Le champ de déplacements du bord $\partial\Omega_s$ est donc $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)$ de $\partial\Omega_s$ dans \mathbb{C}^3 qui est la trace sur $\partial\Omega_s$ de $\mathbf{u}^s(\omega)$ défini dans Ω_s .

Soit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}^{vol}(\mathbf{x}, \omega)$ de Ω_s dans \mathbb{C}^3 le champ de forces volumiques extérieures appliquées dans la structure. Soit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{g}^{sur}(\mathbf{x}, \omega)$ de Γ_1 dans \mathbb{C}^3 le champ de forces surfaciques extérieures appliquées sur la structure.

Habillage

Soit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \omega)$ de Ω_h dans \mathbb{C}^3 le champ de déplacements de l'habillage. Le champ de déplacements du bord $\partial\Omega_h$ est donc $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \omega)$ de $\partial\Omega_h$ dans \mathbb{C}^3 qui est la trace sur $\partial\Omega_h$ de $\mathbf{u}^h(\omega)$ défini dans Ω_h . Le champ de déplacements de l'interface Γ entre l'habillage et la cavité

acoustique sera donc noté $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \omega)$ de Γ dans \mathbb{C}^3 . L'habillage n'est soumis à aucune force extérieure.

Cavité acoustique

Soit $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, \omega)$ de Ω_a dans \mathbb{C} la fluctuation du champ de pression autour de la pression statique. Il y a une densité de source acoustique appliquée dans Ω_a et représentée par le champ $\mathbf{x} \mapsto \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)$ de Ω_a dans \mathbb{C} . On suppose que le champ $\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)$ vérifie les propriétés suivantes (voir Ohayon and Soize [108]) qui sont nécessaires à l'existence d'une solution du problème aux limites pour $\omega \in \mathbb{B}$,

$$\forall \mathbf{x} \in \Omega_a, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\nabla^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)}{\omega^2} = 0 \quad . \quad (\text{I.2})$$

I.1.4 Conditions aux limites

Structure

Le champ de déplacements est nul sur le bord Γ_0 . Le champ de déplacements est continu sur l'interface Γ_s entre la structure et l'habillage.

Habillage

Le champ de déplacements est continu sur l'interface Γ_s .

Cavité acoustique

On écrit pour le fluide acoustique dissipatif une condition de couplage de fluide parfait sur l'interface Γ_2 entre la structure et la cavité acoustique et sur l'interface Γ entre l'habillage et la cavité acoustique.

I.1.5 Champs de forces de couplage

Le champ de densité surfacique de force que la structure exerce sur l'habillage est noté $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega) = (f_1^s(\mathbf{x}, \omega), f_2^s(\mathbf{x}, \omega), f_3^s(\mathbf{x}, \omega))$ de Γ_s dans \mathbb{C}^3 et s'écrit, pour tout \mathbf{x} dans Γ_s ,

$$\mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega) = f^s(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) + \mathbf{f}_{tang}^s(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{I.3})$$

avec $\mathbf{f}_{tang}^s(\mathbf{x}, \omega) \in \mathbb{C}^3$ la partie tangente à Γ_s du champ telle que $\mathbf{f}_{tang}^s(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) = 0$ pour tout \mathbf{x} dans Γ_s et où $\mathbf{x} \mapsto f^s(\mathbf{x}, \omega)$ de Γ_s dans \mathbb{C} est la composante normale. Il est à noter que la dimension de $f_i^s(\mathbf{x}, t)$ est $[M][L]^{-1}[T]^{-2}$.

Le champ de densité surfacique de forces de couplage $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}^P(\mathbf{x}, \omega)$ de $\partial\Omega_a$ dans \mathbb{C}^3 que le fluide acoustique exerce sur la structure (sur l'interface Γ_2) et l'habillage (sur l'interface Γ) s'écrit, pour tout \mathbf{x} de $\partial\Omega_a$,

$$\mathbf{f}^P(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{n}(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{I.4})$$

avec ds la mesure de surface relative à $\partial\Omega_a$ (voir figure I.1).

I.2 Problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique

I.2.1 Structure

Conditions aux limites

Le problème aux limites pour les équations linéarisées de la structure autour de la configuration de référence supposée non précontrainte s'écrit

$$-\omega^2 \rho^s u_i^s(\omega) - \sigma_{ij,j} = g_i^{vol}(\omega) \text{ dans } \Omega_s \quad , \quad (\text{I.5})$$

$$\mathbf{u}^s(\omega) = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \quad , \quad (\text{I.6})$$

$$\sigma_{ij} n_j^s = g_i^{sur}(\omega) \text{ sur } \Gamma_1 \quad , \quad (\text{I.7})$$

$$\sigma_{ij} n_j^s = -p(\omega) n_i^s \text{ sur } \Gamma_2 \quad , \quad (\text{I.8})$$

$$\sigma_{ij} n_j^s = -f_i^s(\omega) \text{ sur } \Gamma_s \quad . \quad (\text{I.9})$$

Equation de comportement

Le matériau est viscoélastique, anisotrope et non homogène. La loi de comportement s'écrit

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}^s) = \sigma_{ij}^{elas}(\mathbf{u}^s) + i\omega \sigma_{ij}^{damp}(\mathbf{u}^s) \quad (\text{I.10})$$

$$= a_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) + i\omega b_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) \quad , \quad (\text{I.11})$$

avec $a_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega)$ et $b_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega)$ les tenseurs réels du quatrième ordre ayant les propriétés usuelles de symétrie, de positivité, de bornitude en \mathbf{x} et de comportement asymptotique en ω et où $\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s)$ est le tenseur linéaire des déformations qui s'écrit,

$$\varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_h^s}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k^s}{\partial x_h} \right) \quad . \quad (\text{I.12})$$

I.2.2 Habillage

Conditions aux limites

Le problème aux limites pour les équations linéarisées sur la structure autour de la configuration de référence non précontrainte s'écrit

$$-\omega^2 \rho^s u_i^h(\omega) - \sigma_{ij,j}^h = 0 \quad , \quad (\text{I.13})$$

$$\sigma_{ij}^h n_j = -p(\omega) n_i \text{ sur } \Gamma \quad , \quad (\text{I.14})$$

$$\sigma_{ij}^h n_j^s = -f_i^s(\omega) \text{ sur } \Gamma_s \quad . \quad (\text{I.15})$$

Equation de comportement

Le matériau est viscoélastique, anisotrope et non homogène. La loi de comportement s'écrit donc comme pour la structure,

$$\sigma_{ij}^h(\mathbf{u}^h) = \sigma_{ij}^{h,elas}(\mathbf{u}^h) + i\omega \sigma_{ij}^{h,damp}(\mathbf{u}^h) \quad (\text{I.16})$$

$$= a_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^h) + i\omega b_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kl}^h(\mathbf{u}^h) \quad , \quad (\text{I.17})$$

avec $a_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega)$ et $b_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega)$ des tenseurs réels du quatrième ordre ayant les propriétés usuelles de symétrie, de positivité, de bornitude en \mathbf{x} et de comportement asymptotique en ω .

I.2.3 Cavité acoustique

Le problème aux limites pour la cavité acoustique pour les petits mouvements linéarisés autour de l'état d'équilibre statique pris comme état de référence, formulé en fluctuation de pression $p(\mathbf{x}, \omega)$, s'écrit, pour un fluide acoustique dissipatif (voir [108], page 181),

$$-\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} p(\mathbf{x}, \omega) - i\omega \frac{\tau}{\rho_0} \nabla^2 p(\mathbf{x}, \omega) - \frac{1}{\rho_0} \nabla^2 p(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \nabla^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega) + i\frac{\omega}{\rho_0} \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \Omega_a \quad , \quad (\text{I.18})$$

avec ρ_0 , c_0 la masse volumique et la célérité du son à l'état d'équilibre et où τ est le coefficient de dissipation modélisant globalement et d'une façon équivalente et forfaitaire la dissipation volumique et la dissipation dans la couche limite viscothermique. Les conditions aux limites sur Γ et Γ_2 s'écrivent d'après l'équation (75) de la référence (Ohayon and Soize [108])

$$\frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \Gamma \quad , \quad (\text{I.19})$$

$$\frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \omega^2 \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) + \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \omega), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad , \quad (\text{I.20})$$

en notant que sur Γ_2 , $\mathbf{n} = \mathbf{n}^s$ et avec

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{n}^s}(\mathbf{x}, \omega) = \{\nabla_{\mathbf{x}} \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega)\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{et} \quad \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}^s}(\mathbf{x}, \omega) = \{\nabla_{\mathbf{x}} p(\mathbf{x}, \omega)\} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{I.21})$$

I.3 Forme faible du problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique

I.3.1 Espaces admissibles

Structure

Soit \mathcal{C}^s l'espace des champs de déplacements de la structure, définis sur Ω_s à valeurs dans \mathbb{C}^3 et suffisamment différentiables. Soit $\mathcal{C}_0^s \subset \mathcal{C}^s$, le sous-espace de \mathcal{C}^s constitué des champs de déplacements qui sont nuls sur Γ_0 . L'espace \mathcal{C}_0^s est donc l'ensemble des champs de déplacements admissibles de la structure.

Habillage

Soit \mathcal{C}^h l'espace admissible des champs de déplacements de l'habillage, définis sur Ω_h à valeurs dans \mathbb{C}^3 et suffisamment différentiables.

Cavité acoustique

Soit \mathcal{C}^a l'espace admissible des champs de pression de la cavité acoustique, définis sur Ω_a à valeurs dans \mathbb{C} et suffisamment différentiables. Il est à noter que l'espace \mathcal{C}^a contient les champs $\mathbf{x} \mapsto p(\mathbf{x}, \omega) = p_0(\omega)$ à pression constante dans Ω_a .

I.3.2 Forme faible

Structure

Soit $\delta \mathbf{u}^s$ une fonction dans \mathcal{C}_0^s . On multiplie l'équation (I.5) par $\delta \mathbf{u}^s$, on intègre sur Ω_s puis on utilise la formule de Green. On obtient en supprimant \mathbf{x} et ω des arguments,

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho^s u_i^s \delta u_i^s d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \sigma_{ij} \delta u_{i,j}^s d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i^s ds = \int_{\Omega_s} g_i^{vol} \delta u_i^s d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{I.22})$$

ce qui s'écrit encore :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho^s u_i^s \delta u_i^s d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^s) d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i^s ds = \int_{\Omega_s} g_i^{vol} \delta u_i^s d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.23})$$

On utilise ensuite les conditions aux limites définies par les équations (I.6) à (I.9), ce qui donne

$$\int_{\partial\Omega_s} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i^s ds = \int_{\Gamma_s \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2} \sigma_{ij} n_j^s \delta u_i^s ds \quad (\text{I.24})$$

$$= - \int_{\Gamma_s} f_i^s \delta u_i^s ds + 0 + \int_{\Gamma_1} g_i^{sur} \delta u_i^s ds - \int_{\Gamma_2} p n_i^s \delta u_i^s ds. \quad (\text{I.25})$$

La forme faible du problème aux limites s'écrit donc pour tout $\delta \mathbf{u}^s$ dans \mathcal{C}_0^s ,

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int_{\Omega_s} \rho^s u_i^s \delta u_i^s d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}^{damp}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^s) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_s} \sigma_{ij}^{elas}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^s) d\mathbf{x} \\ + \int_{\Gamma_s} f_i^s \delta u_i^s ds + \int_{\Gamma_2} p n_i^s \delta u_i^s ds = \int_{\Omega_s} g_i^{vol} \delta u_i^s d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} g_i^{sur} \delta u_i^s ds. \end{aligned} \quad (\text{I.26})$$

Habillage

Soit $\delta \mathbf{u}^h$ une fonction dans \mathcal{C}^h . On multiplie l'équation (I.13) par $\delta \mathbf{u}^h$ et on intègre Ω_h puis on utilise la formule de Green. On obtient en supprimant \mathbf{x} et ω des arguments,

$$-\omega^2 \int_{\Omega_h} \rho^h u_i^h \delta u_i^h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}^h \delta u_{i,j}^h d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^h n_j \delta u_i^h ds + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^h n_j^s \delta u_i^h ds = 0 \quad , \quad (\text{I.27})$$

ce qui s'écrit encore :

$$-\omega^2 \int_{\Omega_h} \rho^h u_i^h \delta u_i^h d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}^h \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^h) d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^h n_j \delta u_i^h ds + \int_{\Gamma_s} \sigma_{ij}^h n_j^s \delta u_i^h ds = 0 \quad . \quad (\text{I.28})$$

On utilise ensuite les conditions aux limites définies par les équations (I.14) et (I.15) ce qui donne la forme faible du problème aux limites qui s'écrit pour tout $\delta \mathbf{u}^h$ dans \mathcal{C}^h

$$\begin{aligned} -\omega^2 \int_{\Omega_h} \rho^h u_i^h \delta u_i^h d\mathbf{x} + i\omega \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}^{damp}(\mathbf{u}^h) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^h) d\mathbf{x} + \int_{\Omega_h} \sigma_{ij}^{elas}(\mathbf{u}^h) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^h) d\mathbf{x} \\ - \int_{\Gamma_s} f_i^s \delta u_i^h ds + \int_{\Gamma} p n_i \delta u_i^h ds = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.29})$$

Cavité acoustique

Soit δp dans \mathcal{C}^a , on multiplie l'équation (I.18) par δp et on intègre sur Ω_a . On obtient

$$-\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p \delta p d\mathbf{x} - \frac{(1 + i\omega\tau)}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla^2 p \delta p d\mathbf{x} = \int_{\Omega_a} \left(\frac{i\omega}{\rho_0} \mathcal{Q} - \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \nabla^2 \mathcal{Q} \right) \delta p d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.30})$$

On utilise de nouveau la formule de Green en notant que la normale \mathbf{n} à $\partial\Omega_a$ est *intérieure* à Ω_a . On obtient alors,

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p \delta p \, d\mathbf{x} + \frac{(1+i\omega\tau)}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} + \frac{(1+i\omega\tau)}{\rho_0} \int_{\Gamma \cup \Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \delta p \, ds \\
& = \int_{\Omega_a} \left(\frac{i\omega}{\rho_0} \mathcal{Q} - \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \nabla^2 \mathcal{Q} \right) \delta p \, d\mathbf{x} \quad .
\end{aligned} \tag{I.31}$$

Les conditions aux limites définies par les équations (I.19) et (I.20) et l'utilisation de la formule de Green pour transformer le membre de droite de l'équation (I.31) nous permettent d'écrire (en omettant \mathbf{x} et ω dans les arguments),

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p \delta p \, d\mathbf{x} + \frac{(1+i\omega\tau)}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_2} \omega^2 \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s \delta p \, ds \\
& + \int_{\Gamma} \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta p \, ds + \int_{\Gamma \cup \Gamma_2} \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \omega) \delta p \, ds \\
& = \int_{\Omega_a} \frac{i\omega}{\rho_0} \mathcal{Q} \delta p \, d\mathbf{x} - \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \left(- \int_{\Omega_a} \nabla \mathcal{Q} \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma \cup \Gamma_2} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \mathbf{n}} \delta p \, ds \right) \quad .
\end{aligned} \tag{I.32}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
& -\frac{\omega^2}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p \delta p \, d\mathbf{x} + \frac{(1+i\omega\tau)}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} \\
& + \int_{\Gamma_2} \omega^2 \mathbf{u}^s \cdot \mathbf{n}^s \delta p \, ds + \int_{\Gamma} \omega^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \delta p \, ds \\
& = \int_{\Omega_a} \frac{i\omega}{\rho_0} \mathcal{Q} \delta p \, d\mathbf{x} + \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla \mathcal{Q} \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} \quad .
\end{aligned} \tag{I.33}$$

I.3.3 Formes linéaires et bilinéaires

Dans tout ce paragraphe, ω est quelconque fixé dans \mathbb{B} .

Masse structure

Soit m^s la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}_0^s \times \mathcal{C}_0^s$ telle que

$$m^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) = \int_{\Omega_s} \rho^s(\mathbf{x}) \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad . \tag{I.34}$$

Amortissement structure

Soit d^s la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}_0^s \times \mathcal{C}_0^s$ telle que

$$d^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) = \int_{\Omega_s} b_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^s) \, d\mathbf{x} \quad . \tag{I.35}$$

Raideur structure

Soit k^s la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}_0^s \times \mathcal{C}_0^s$ telle que

$$k^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) = \int_{\Omega_s} a_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^s) d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.36})$$

Forces extérieures structure

On introduit la forme linéaire complexe sur \mathcal{C}_0^s telle que

$$l^s(\delta \mathbf{u}^s; \omega) = \int_{\Omega_s} g_i^{vol}(\mathbf{x}, \omega) \delta u_i^s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \int_{\Gamma_1} g_i^{sur}(\mathbf{x}, \omega) \delta u_i^s(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{I.37})$$

Masse habillage

Soit m^h la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}^h \times \mathcal{C}^h$ telle que

$$m^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) = \int_{\Omega_h} \rho^h(\mathbf{x}) \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.38})$$

Amortissement habillage

Soit d^h la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}^h \times \mathcal{C}^h$ telle que

$$d^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h; \omega) = \int_{\Omega_h} b_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^h) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^h) d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.39})$$

Raideur habillage

Soit k^h la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}^h \times \mathcal{C}^h$ telle que

$$k^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h; \omega) = \int_{\Omega_h} a_{ijkl}^h(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^h) \varepsilon_{ij}(\delta \mathbf{u}^h) d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.40})$$

« Masse » acoustique

Soit m^a la forme bilinéaire définie sur $\mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^a$ telle que

$$m^a(p, \delta p) = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.41})$$

« Amortissement » acoustique

Soit d^a la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^a$ telle que

$$d^a(p, \delta p; \omega) = \tau(\omega) k^a(p, \delta p) \quad . \quad (\text{I.42})$$

« Raideur » acoustique

Soit k^a la forme bilinéaire complexe définie sur $\mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^a$ telle que

$$k^a(p, \delta p) = \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p \, d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.43})$$

On notera que le noyau de l'opérateur linéaire défini par $k^a(p, \delta p)$ est un espace vectoriel de dimension 1 constitué des champs constant p_0 dans Ω_a .

Source acoustique

On introduit la forme linéaire complexe définie sur \mathcal{C}^a telle que

$$l^a(\delta p; \omega) = \int_{\Omega_a} \frac{i\omega}{\rho_0} \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \frac{\tau c_0^2}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla \mathcal{Q}(\mathbf{x}, \omega) \cdot \nabla \delta p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{I.44})$$

Couplage

On introduit la forme bilinéaire complexe de couplage entre la structure et la cavité acoustique, définie sur $\mathcal{C}_0^s \times \mathcal{C}^a$ telle que,

$$c_{\Gamma_2}(\mathbf{u}^s, \delta p; \omega) = \int_{\Gamma_2} \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) \, ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{I.45})$$

On introduit la forme bilinéaire complexe de couplage entre la structure et la cavité acoustique, définie sur $\mathcal{C}^h \times \mathcal{C}^a$ telle que,

$$c_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) = \int_{\Gamma} \mathbf{u}^h(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) \, ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{I.46})$$

Force structure-habillage

On introduit la forme linéaire complexe définie sur \mathcal{C}_0^s par

$$c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) = \int_{\Gamma_s} f_i^s(\mathbf{x}, \omega) \delta u_i^s(\mathbf{x}) \, ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{I.47})$$

I.4 Forme faible pour le problème vibroacoustique et résumé du chapitre

On déduit des paragraphes I.3.2 et I.3.3 la forme faible suivante du problème aux limites moyen pour le système vibroacoustique. Pour tout ω fixé dans \mathbb{B} , trouver $\mathbf{u}^s \in \mathcal{C}_0^s$, $\mathbf{u}^h \in \mathcal{C}^h$ et $p \in \mathcal{C}^a$,

tels que, pour tout $\delta \mathbf{u}^s \in \mathcal{C}_0^s$, $\delta \mathbf{u}^h \in \mathcal{C}^h$ et $\delta p \in \mathcal{C}^a$, on ait,

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) + i\omega d^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) + k^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) \\ + c_{T_2}(\delta \mathbf{u}^s, p; \omega) + c_{T_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) = l^s(\delta \mathbf{u}^s; \omega) \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.48})$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h) + i\omega d^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h; \omega) + k^h(\mathbf{u}^h, \delta \mathbf{u}^h; \omega) \\ - c_{T_s}(\delta \mathbf{u}^h; \omega) + c_T(\delta \mathbf{u}^h, p; \omega) = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.49})$$

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^a(p, \delta p) + i\omega d^a(p, \delta p; \omega) + k^a(p, \delta p) \\ + \omega^2 \left\{ c_{T_2}(\mathbf{u}^s, \delta p; \omega) + c_T(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) \right\} = l^a(\delta p; \omega) \quad . \end{aligned} \quad (\text{I.50})$$

Dans ce chapitre nous avons construit le modèle vibroacoustique moyen comprenant une modélisation complète en trois dimensions de l'habillage. Nous avons écrit la forme faible du problème aux limites moyen pour le modèle vibroacoustique résumée dans les trois équations écrites ci-dessus.

Chapitre II

Modèle moyen simplifié de l’habillage fondé sur la théorie des structures floues

Sommaire

II.1	Introduction	22
II.2	Les hypothèses de construction et les notations	22
II.3	Modèle déterministe sous-jacent pour la construction du modèle moyen simplifié de l’habillage	23
II.4	Modèle moyen simplifié pour l’habillage fondé sur la théorie des structures floues	27
II.5	Paramètres du modèle moyen d’un habillage fictif constitué d’un nombre fini d’oscillateurs physiques	37
II.6	Paramètres du modèle moyen d’un habillage réel	42
II.7	Estimation <i>sur plan</i> des paramètres du modèle moyen de l’habillage	44
II.8	Résumé du chapitre	47

II.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons construire le modèle moyen simplifié de l'habillage dont le modèle 3D a été introduit au chapitre I. Nous exposerons dans un premier temps les hypothèses de construction du modèle moyen simplifié de l'habillage, puis nous utiliserons l'approche de la théorie des structures floues pour construire le modèle moyen simplifié de l'habillage.

II.2 Les hypothèses de construction et les notations

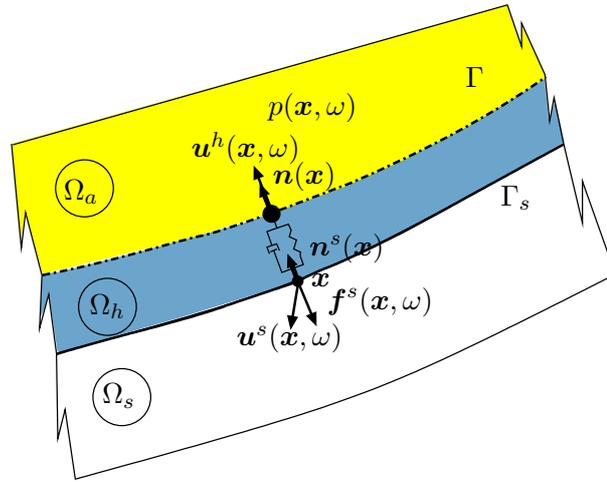


FIG. II.1 – Détail du schéma de l'habillage

Nous présentons le détail du schéma de l'habillage à la figure II.1. Nous supposons que l'habillage, occupant le domaine Ω_h , est suffisamment mince (épaisseur faible) pour que l'on puisse écrire que les surfaces Γ et Γ_s sont voisines,

$$\Gamma \sim \Gamma_s \quad . \quad (\text{II.1})$$

Dans ces conditions, on prendra comme référence de paramétrage de Γ la surface Γ_s dont le point courant est noté \mathbf{x} . Pour $\mathbf{x} \in \Gamma_s$, le point correspondant de Γ est donc encore \mathbf{x} . La normale en \mathbf{x} à Γ_s étant $\mathbf{n}^s(\mathbf{x})$, la normale à Γ en ce même point sera donc notée $\mathbf{n}(\mathbf{x})$. Dans ces conditions on confondra, sur Γ ou Γ_s les normales $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{n}^s(\mathbf{x})$ et donc

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \quad , \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma \sim \Gamma_s \quad . \quad (\text{II.2})$$

On définit alors le déplacement normal $w^s(\mathbf{x}, \omega)$ pour tout \mathbf{x} dans Γ_s , par

$$w^s(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{II.3})$$

$\mathbf{u}^s(\omega)$ étant le champ de déplacements de l'interface Γ_s introduit au paragraphe I.1.3.

Soit $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega)$ de Γ_s dans \mathbb{C}^3 le champ de densité surfacique de force de couplage correspondant à la force exercée par la structure sur l'habillage (voir le paragraphe I.1.5) et qui est donné par l'équation (I.3). Dans le cadre de la construction du modèle simplifié de l'habillage, on suppose que la force exercée par la structure sur l'habillage est normale à Γ_s . On a donc $\mathbf{f}_{tang}^s(\mathbf{x}, \omega) = 0$ pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_s$ et donc l'équation (I.3) donne

$$\mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega) = f^s(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{II.4})$$

On fait l'hypothèse que pour \mathbf{x} fixé sur Γ_s le seul degré de liberté (DDL) du point correspondant sur Γ est le déplacement normal suivant $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ (voir figure II.1). On définit alors $\mathbf{x} \mapsto w(\mathbf{x}, \omega)$, le champ de déplacements de Γ dans \mathbb{C} , normal à Γ tel que

$$w(\mathbf{x}, \omega) = \mathbf{u}^h(\mathbf{x}, \omega) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{II.5})$$

Le champ de déplacement $\mathbf{u}^h(\omega)$ de Γ dans \mathbb{C}^3 est le champ de déplacement de l'interface Γ introduit au paragraphe I.1.3.

II.3 Modèle déterministe sous-jacent pour la construction du modèle moyen simplifié de l'habillage

II.3.1 Modèle mécanique

Le modèle déterministe sous-jacent du modèle moyen simplifié de l'habillage qui est proposé en cohérence avec les hypothèses du paragraphe II.2 et de la théorie des structures floues, est une densité spatio-fréquentielle d'oscillateurs linéaires amortis suivant la direction normale à $\Gamma \sim \Gamma_s$ (voir figure II.1). Dans ces conditions, pour tout ω fixé dans \mathbb{B} et en chaque point \mathbf{x} de Γ_s , il y a un oscillateur linéaire amorti dont le support est au point $\mathbf{x} \in \Gamma_s$ qui se déplace de $w^s(\mathbf{x}, \omega)$ suivant la direction normale et dont le DDL au point correspondant sur Γ a une densité surfacique de masse $\mu(\mathbf{x}, \omega) > 0$ qui se déplace de $w(\mathbf{x}, \omega)$ toujours suivant la direction normale. Il est à noter que $\mu(\mathbf{x}, \omega)$ a pour dimension $[M][L]^{-2}$. La constante de densité surfacique de raideur de l'oscillateur est $k(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) \Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)$ où $\Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega) > 0$ est la pulsation propre de l'oscillateur non amorti avec support fixe. Le taux d'amortissement de l'oscillateur est $\xi(\mathbf{x}, \omega) > 0$. Le point sur Γ de densité surfacique de masse $\mu(\mathbf{x}, \omega)$ est soumis à la densité surfacique de forces $\mathbf{f}^p(\mathbf{x}, \omega)$ exercée

par le fluide acoustique sur l'habillage, $\mathbf{f}^p(\mathbf{x}, \omega)$ étant définie par l'équation (I.4), à savoir,

$$\mathbf{f}^p(\mathbf{x}, \omega) = -p(\mathbf{x}, \omega)\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{II.6})$$

Le champ de densité surfacique de forces exercée par la structure sur l'habillage est $\mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega)$, décrit par l'équation (II.4). On a donc les équations suivantes,

$$\begin{aligned} & -\omega^2\mu(\mathbf{x}, \omega)w(\mathbf{x}, \omega) \\ + & [2i\omega\xi(\mathbf{x}, \omega)\mu(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \mu(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)](w(\mathbf{x}, \omega) - w^s(\mathbf{x}, \omega)) \\ = & -p(\mathbf{x}, \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

et

$$\begin{aligned} & [2i\omega\xi(\mathbf{x}, \omega)\mu(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \mu(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)](w^s(\mathbf{x}, \omega) - w(\mathbf{x}, \omega)) \\ = & \mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega) \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

On réécrit les deux équations (II.7) et (II.8) sous la forme matricielle (en omettant partiellement \mathbf{x} et ω),

$$\mu \begin{bmatrix} -\omega^2 + 2i\omega\xi\Omega_p + \Omega_p^2 & -2i\omega\xi\Omega_p - \Omega_p^2 \\ -2i\omega\xi\Omega_p - \Omega_p^2 & 2i\omega\xi\Omega_p + \Omega_p^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(\mathbf{x}, \omega) \\ w^s(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p(\mathbf{x}, \omega) \\ \mathbf{f}^s(\mathbf{x}, \omega) \end{bmatrix} . \quad (\text{II.9})$$

On introduit les définitions suivantes,

$$a_{11}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) [-\omega^2 + 2i\omega\xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)] \quad , \quad (\text{II.10})$$

$$a_{12}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) [-2i\omega\xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) - \Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)] \quad , \quad (\text{II.11})$$

$$a_{22}(\mathbf{x}, \omega) = \mu(\mathbf{x}, \omega) [2i\omega\xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)] \quad . \quad (\text{II.12})$$

II.3.2 Expressions de f^s et w en fonction de w^s et p

Pour tout ω fixé dans \mathbb{B} , l'équation (II.9) s'écrit en utilisant les équations (II.10) à (II.12) (et en omettant \mathbf{x} et ω),

$$a_{11}w + a_{12}w^s = -p \quad , \quad (\text{II.13})$$

$$a_{12}w + a_{22}w^s = f^s \quad . \quad (\text{II.14})$$

Pour tout ω dans \mathbb{B} et pour tout $\mathbf{x} \in \Gamma_s$, $a_{11}(\mathbf{x}, \omega)$ est non nul et donc l'équation (II.13) peut s'écrire,

$$w = a_{11}^{-1}(-p - a_{12}w^s) = -a_{11}^{-1}p - a_{11}^{-1}a_{12}w^s \quad . \quad (\text{II.15})$$

En utilisant l'équation (II.15), l'équation (II.14) devient

$$f^s = a_{12}a_{11}^{-1}(-p - a_{12}w^s) + a_{22}w^s = (a_{22} - a_{12}a_{11}^{-1}a_{12})w^s - a_{12}a_{11}^{-1}p \quad . \quad (\text{II.16})$$

Pour tout ω fixé dans \mathbb{B} , on définit

$$a^s(\mathbf{x}, \omega) = a_{22}(\mathbf{x}, \omega) - a_{12}(\mathbf{x}, \omega)a_{11}(\mathbf{x}, \omega)^{-1}a_{12}(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.17})$$

$$a^a(\mathbf{x}, \omega) = -\omega^2 a_{11}(\mathbf{x}, \omega)^{-1} \quad , \quad (\text{II.18})$$

$$a^c(\mathbf{x}, \omega) = -a_{12}(\mathbf{x}, \omega)a_{11}(\mathbf{x}, \omega)^{-1} \quad . \quad (\text{II.19})$$

On verra au paragraphe II.3.4 pourquoi le facteur ω^2 a été introduit dans le second membre de l'équation (II.18).

On peut alors écrire,

$$a^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-\omega^2 \mu(\mathbf{x}, \omega) (2i\omega \xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2)}{-\omega^2 + 2i\omega \xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad , \quad (\text{II.20})$$

$$a^a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-\omega^2}{\mu(\mathbf{x}, \omega) (-\omega^2 + 2i\omega \xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2)} \quad , \quad (\text{II.21})$$

$$a^c(\mathbf{x}, \omega) = \frac{2i\omega \xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2}{-\omega^2 + 2i\omega \xi(\mathbf{x}, \omega)\Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad . \quad (\text{II.22})$$

On remplace les expressions de $a^s(\mathbf{x}, \omega)$, $a^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $a^c(\mathbf{x}, \omega)$ dans les équations (II.15) et (II.16).

On obtient alors pour tout $\omega \in \mathbb{B}$,

$$w(\mathbf{x}, \omega) = a^c(\mathbf{x}, \omega)w^s(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{\omega^2}a^a(\mathbf{x}, \omega)p(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.23})$$

$$f^s(\mathbf{x}, \omega) = a^s(\mathbf{x}, \omega)w^s(\mathbf{x}, \omega) + a^c(\mathbf{x}, \omega)p(\mathbf{x}, \omega) \quad . \quad (\text{II.24})$$

II.3.3 Comportement en fréquence du modèle déterministe sous-jacent

Dans ce paragraphe, on cherche le comportement pour $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow +\infty$ du modèle déterministe sous-jacent construit aux paragraphes II.3.1 et II.3.2 ce qui permettra d'établir, par la suite, le comportement en fréquence du modèle moyen simplifié de l'habillage.

Comportement pour $\omega \rightarrow 0$

$$a^s(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} -\omega^2 \mu(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.25})$$

$$a^a(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} \frac{-\omega^2}{\mu(\mathbf{x}, \omega) \Omega_p^2(\mathbf{x}, \omega)} \quad , \quad (\text{II.26})$$

$$a^c(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow 0}{\sim} 1 \quad . \quad (\text{II.27})$$

Comportement asymptotique pour $\omega \rightarrow +\infty$

$$a^s(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} 2i\omega\mu(\mathbf{x}, \omega) \xi(\mathbf{x}, \omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.28})$$

$$a^a(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\mu(\mathbf{x}, \omega)} \quad , \quad (\text{II.29})$$

$$a^c(\mathbf{x}, \omega) \underset{\omega \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{2i}{\omega} \xi(\mathbf{x}, \omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) \quad . \quad (\text{II.30})$$

Les équivalents en 0 permettent d'introduire légitimement une fréquence de coupure Ω_c au-dessous de laquelle le modèle simplifié de l'habillage se comportera comme une masse pure (voir le paragraphe II.4).

II.3.4 Modèle déterministe sous-jacent du modèle moyen simplifié de l'habillage

L'analyse de la forme faible du problème vibroacoustique donné par les équations (I.48) à (I.50) montre que le modèle de l'habillage est complètement décrit par la forme bilinéaire complexe $c_T(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$ sur $\mathcal{C}^h \times \mathcal{C}^a$ et par la forme linéaire complexe $c_{T_s}(\boldsymbol{\delta u}^s; \omega)$ sur \mathcal{C}_0^s , définies respectivement par les équations (I.46) et (I.47). Avec le modèle simplifié d'habillage, l'équation (I.49) disparaît et l'équation (I.50) montre que la forme bilinéaire $c_T(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$ apparaît avec ω^2 en facteur multiplicatif. Dans la suite on considère donc le calcul de $\omega^2 c_T(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$. En utilisant les équations (I.46), (II.5) et (II.23), on obtient

$$\begin{aligned} \omega^2 c_T(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) &= \omega^2 \int_{\Gamma} w(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\ &= \omega^2 \int_{\Gamma} \left(a^c(\mathbf{x}, \omega) w^s(\mathbf{x}, \omega) + \frac{1}{\omega^2} a^a(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) \right) ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

On déduit alors des équations (II.31), (II.1) et (II.3), et compte tenu du fait que le paramétrage de Γ soit réalisé par le paramétrage de Γ_s , que

$$\begin{aligned} \omega^2 c_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) &= \omega^2 \int_{\Gamma_s} a^c(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_s} a^a(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.32})$$

Enfin en utilisant les équations (I.47), (II.4) et (II.24), on obtient

$$\begin{aligned} c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) &= \int_{\Gamma_s} f_i^s(\mathbf{x}, \omega) \delta u_i^s(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\ &= \int_{\Gamma_s} (a^s(\mathbf{x}, \omega) w^s(\mathbf{x}, \omega) + a^c(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega)) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{II.33})$$

En utilisant les équations (II.3) et (II.33) on en déduit donc l'expression de $c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)$,

$$\begin{aligned} c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) &= \int_{\Gamma_s} a^s(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\Gamma_s} a^c(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

II.4 Modèle moyen simplifié pour l'habillage fondé sur la théorie des structures floues

Le modèle moyen simplifié de l'habillage est fondé d'une part sur l'introduction du modèle simplifié du paragraphe II.3.4 et d'autre part sur une description probabiliste de la densité d'oscillateurs introduite dans ce même paragraphe. La théorie des structures floues décrit explicitement le modèle probabiliste en termes de moyenne statistique et de fluctuations statistiques autour de cette moyenne (voir Soize [128] [130]). Ainsi, si le système moyen maître (principal) est représenté par l'opérateur de raideur dynamique $\underline{\mathbb{A}}(\omega)$, alors ses vibrations sont régies par l'équation opératorielle,

$$\underline{\mathbb{A}}(\omega) \mathbf{v}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad , \quad (\text{II.35})$$

avec $\mathbf{v}(\omega)$ le champ de déplacements et $\mathbf{f}(\omega)$ représentant les forces extérieures appliquées. Supposons que ce système moyen maître soit connecté à une sous-structure floue (sur une partie de son bord). Alors les efforts exercés par la sous-structure floue sur le système moyen maître sont représentés par un opérateur aléatoire de bord noté $\mathbb{D}(\omega)$ et l'équation aléatoire du système moyen maître couplé à la sous-structure floue s'écrit,

$$(\underline{\mathbb{A}}(\omega) + \mathbb{D}(\omega)) \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad , \quad (\text{II.36})$$

où $\mathbf{V}(\omega)$ est le champ stochastique des déplacements du système maître. La théorie des structures floues construit explicitement la moyenne statistique $\underline{\mathbb{D}}(\omega) = \mathcal{E}\{\mathbb{D}(\omega)\}$ où \mathcal{E} désigne l'espérance mathématique et la fluctuation statistique $\Delta\mathbb{D}(\omega)$ de l'opérateur stochastique $\mathbb{D}(\omega)$, tels que

$$\mathbb{D}(\omega) = \underline{\mathbb{D}}(\omega) + \Delta\mathbb{D}(\omega) \quad . \quad (\text{II.37})$$

En lui injectant l'équation (II.37), l'équation stochastique (II.36) peut donc s'écrire,

$$(\underline{\mathbb{A}}(\omega) + \underline{\mathbb{D}}(\omega) + \Delta\mathbb{D}(\omega)) \mathbf{V}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad . \quad (\text{II.38})$$

Nous allons ici prendre une stratégie légèrement différente. La partie « moyenne » sera construite par la théorie des structures floues mais la partie « fluctuation statistique » sera construite à l'aide de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et de données. Nous ne construisons donc ci-après que la moyenne statistique $\underline{\mathbb{D}}(\omega)$ de l'opérateur $\mathbb{D}(\omega)$ et donc l'équation du système maître moyen sera du type,

$$(\underline{\mathbb{A}}(\omega) + \underline{\mathbb{D}}(\omega)) \mathbf{v}(\omega) = \mathbf{f}(\omega) \quad . \quad (\text{II.39})$$

Dans ces conditions, nous n'introduisons dans ce paragraphe que la partie relative à la moyenne statistique de la forme bilinéaire complexe $c_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$ et de la forme linéaire complexe $c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)$ définies dans les équations (II.32) et (II.34).

La construction que nous avons retenue du modèle probabiliste en utilisant la théorie des structures floues consiste d'une part à introduire une fréquence de coupure Ω_c et à écrire pour tout $\omega \geq \Omega_c$ dans \mathbb{B} que $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\mu}(\omega) > 0$ et $\xi(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\xi}(\omega) > 0$ où $\omega \mapsto \underline{\mu}(\omega)$ et $\omega \mapsto \underline{\xi}(\omega)$ sont deux fonctions déterministes et indépendantes de \mathbf{x} , et d'autre part à modéliser, pour tout \mathbf{x} fixé dans Γ_s , $\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)$ par une variable aléatoire à valeurs positives dont la mesure de probabilité est indépendante de \mathbf{x} . Dans ces conditions, pour tout \mathbf{x} fixé dans Γ_s , les grandeurs $a^s(\mathbf{x}, \omega)$, $a^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $a^c(\mathbf{x}, \omega)$ définies par les équations (II.20) à (II.22) deviennent des variables aléatoires notées $A^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $A^c(\mathbf{x}, \omega)$, et pour tout \mathbf{u}^s et $\delta \mathbf{u}^s$ dans \mathcal{C}_0^s , et pour tout p et δp dans \mathcal{C}^a les formes $c_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$ et $c_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)$ deviennent des formes aléatoires notées $C_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)$ et $C_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)$ qui s'écrivent compte tenu de (II.32) et (II.34),

$$\begin{aligned} \omega^2 C_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) &= \omega^2 \int_{\Gamma_s} A^c(\mathbf{x}, \omega) \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{\Gamma_s} A^a(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.40})$$

$$\begin{aligned}
 C_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) &= \int_{\Gamma_s} A^s(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \int_{\Gamma_s} A^c(\mathbf{x}, \omega) p(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad .
 \end{aligned} \tag{II.41}$$

En prenant l'espérance mathématique des deux membres des équations (II.40) et (II.41), on obtient

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \mathcal{E}\{C_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)\} &= \omega^2 \int_{\Gamma_s} \mathcal{E}\{A^c(\mathbf{x}, \omega)\} \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \int_{\Gamma_s} \mathcal{E}\{A^a(\mathbf{x}, \omega)\} p(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{II.42}$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}\{C_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)\} &= \int_{\Gamma_s} \mathcal{E}\{A^s(\mathbf{x}, \omega)\} (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \int_{\Gamma_s} \mathcal{E}\{A^c(\mathbf{x}, \omega)\} p(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad .
 \end{aligned} \tag{II.43}$$

On introduit les notations suivantes

$$\underline{c}_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) = \mathcal{E}\{C_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega)\} \quad , \tag{II.44}$$

$$\underline{c}_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) = \mathcal{E}\{C_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega)\} \quad . \tag{II.45}$$

De plus, comme la mesure de probabilité de $\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)$ est indépendante de \mathbf{x} , les moyennes des variables aléatoires $A^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $A^c(\mathbf{x}, \omega)$ sont indépendantes de \mathbf{x} et on introduit donc les notations,

$$\underline{a}^s(\omega) = \mathcal{E}\{A^s(\mathbf{x}, \omega)\} \quad , \tag{II.46}$$

$$\underline{a}^a(\omega) = \mathcal{E}\{A^a(\mathbf{x}, \omega)\} \quad , \tag{II.47}$$

$$\underline{a}^c(\omega) = \mathcal{E}\{A^c(\mathbf{x}, \omega)\} \quad . \tag{II.48}$$

Dans ces conditions, les équations (II.42) et (II.43) donnent

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \underline{c}_{\Gamma}(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) &= \omega^2 \underline{a}^c(\omega) \int_{\Gamma_s} \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \underline{a}^a(\omega) \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}, \omega) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad ,
 \end{aligned} \tag{II.49}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{c}_{\Gamma_s}(\delta \mathbf{u}^s; \omega) &= \underline{a}^s(\omega) \int_{\Gamma_s} (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x}, \omega)) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \\
 &+ \underline{a}^c(\omega) \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}, \omega) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad .
 \end{aligned} \tag{II.50}$$

L'analyse des équations (II.49) et (II.50) conduit à introduire les formes bilinéaires complexes

déterministes $b^s(\mathbf{u}^s, \delta\mathbf{u}^s)$ sur $\mathcal{C}_0^s \times \mathcal{C}_0^s$, $c^s(p, \delta\mathbf{u}^s)$ sur $\mathcal{C}^a \times \mathcal{C}_0^s$ et $b^a(p, \delta p)$ sur $\mathcal{C}^a \times \mathcal{C}^a$ telles que

$$b^s(\mathbf{u}^s, \delta\mathbf{u}^s) = \int_{\Gamma_s} (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{II.51})$$

$$c^s(p, \delta\mathbf{u}^s) = \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{II.52})$$

$$b^a(p, \delta p) = \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{II.53})$$

Alors les équations (II.49) et (II.50) peuvent être réécrites,

$$\omega^2 \underline{c}_r(\mathbf{u}^h, \delta p; \omega) = \omega^2 \underline{a}^c(\omega) c^s(\delta p, \mathbf{u}^s) + \underline{a}^a(\omega) b^a(p, \delta p) \quad , \quad (\text{II.54})$$

$$\underline{c}_{\Gamma_s}(\delta\mathbf{u}^s; \omega) = \underline{a}^s(\omega) b^s(\mathbf{u}^s, \delta\mathbf{u}^s) + \underline{a}^c(\omega) c^s(p, \delta\mathbf{u}^s) \quad . \quad (\text{II.55})$$

Remarque *S'il n'y a pas d'habillage, alors Γ_s est l'interface entre la structure et la cavité acoustique et dans ce cas on vérifie facilement à partir des équations (I.48) à (I.50) et des équations (II.32) et (II.34), puis des équations (II.49) à (II.55) qu'il est nécessaire que l'on ait,*

$$\underline{a}^s(\omega) = \underline{a}^a(\omega) = 0 \quad , \quad \underline{a}^c(\omega) = 1 \quad . \quad (\text{II.56})$$

II.4.1 Construction du modèle probabiliste des variables aléatoires $A^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $A^c(\mathbf{x}, \omega)$

On rappelle que $\mathbb{B} = [\omega_{min}, \omega_{max}]$. La fréquence de coupure de l'habillage est notée Ω_c . On suppose qu'elle est telle que

$$\omega_{min} < \Omega_c < \omega_{max} \quad . \quad (\text{II.57})$$

A. Modélisation déterministe pour $\omega < \Omega_c$

En chaque point \mathbf{x} de Γ_s , on écrit que $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\mu}(\omega)$ avec $\omega \mapsto \underline{\mu}(\omega)$ une fonction de $[\omega_{min}, \Omega_c[$ dans \mathbb{R}^+ .

B. Modélisation probabiliste pour $\omega \geq \Omega_c$

Pour $\omega \geq \Omega_c$ dans \mathbb{B} , on utilise la construction des structures floues en rappelant que nous ne nous intéressons qu'à la partie moyenne de l'opérateur. Nous construisons le modèle probabiliste comme suit.

Pour tout \mathbf{x} dans Γ_s et pour tout $\omega \geq \Omega_c$ dans \mathbb{B} :

(a) On choisit de prendre $\mu(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\mu}(\omega)$ et $\xi(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\xi}(\omega)$ où la densité surfacique de *masse moyenne participante* $\omega \mapsto \underline{\mu}(\omega)$ et le *taux de dissipation moyen* $\omega \mapsto \underline{\xi}(\omega)$ sont deux fonctions déterministes de $[\Omega_c, \omega_{max}]$ dans \mathbb{R}^+ et $]0, 1[$ respectivement.

(b) La fréquence $\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)$ est modélisée par une variable aléatoire encore notée $\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)$. Cette variable aléatoire à valeurs positives a une densité de probabilité par rapport à la mesure de Lebesgue $d\omega_p$, qui est indépendante de \mathbf{x} , et qui s'écrit d'après la théorie des structures floues,

$$p_{\Omega_p(\mathbf{x};\omega)}(\omega_p, \omega) = \ell(\omega) \mathbb{1}_{[a(\omega), b(\omega)]}(\omega_p) \quad , \quad (\text{II.58})$$

avec $\mathbb{1}_B(\mathbf{x}) = 1$ si $\mathbf{x} \in B$, et $= 0$ si $\mathbf{x} \notin B$, et où

$$a(\omega) = \sup \left\{ 0, \omega - \frac{1}{2\underline{n}(\omega)} \right\} \quad , \quad (\text{II.59})$$

$$b(\omega) = \omega + \frac{1}{2\underline{n}(\omega)} \quad , \quad (\text{II.60})$$

$$\ell(\omega) = \frac{1}{b(\omega) - a(\omega)} \quad , \quad (\text{II.61})$$

où $n(\mathbf{x}, \omega) = \underline{n}(\omega)$ est la densité modale moyenne d'oscillateurs au point \mathbf{x} et à la fréquence ω . Par définition de $\underline{n}(\omega)$, le nombre de fréquences propres dans le voisinage $\Delta\omega$ de ω est $\underline{n}(\omega)\Delta\omega$.

Dans ces conditions, pour tout $\omega \geq \Omega_c$ dans \mathbb{B} , et compte tenu des équations (II.20) à (II.22), les variables aléatoires $A^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A^a(\mathbf{x}, \omega)$ et $A^c(\mathbf{x}, \omega)$ sont définies par

$$A^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-\omega^2 \underline{\mu}(\omega) [2i\omega \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2]}{-\omega^2 + 2i\omega \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad , \quad (\text{II.62})$$

$$A^a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-\omega^2}{\underline{\mu}(\omega) [-\omega^2 + 2i\omega \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2]} \quad , \quad (\text{II.63})$$

$$A^c(\mathbf{x}, \omega) = \frac{2i\omega \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2}{-\omega^2 + 2i\omega \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega) + \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad . \quad (\text{II.64})$$

Pour tout \mathbf{x} dans Γ_s et pour tout $\omega \geq \Omega_c$ dans \mathbb{B} , on introduit les décompositions suivantes des variables aléatoires à valeurs complexes,

$$A^s(\mathbf{x}, \omega) = -\omega^2 A_R^s(\mathbf{x}, \omega) + i\omega A_I^s(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.65})$$

$$A^a(\mathbf{x}, \omega) = A_R^a(\mathbf{x}, \omega) + i\omega A_I^a(\mathbf{x}, \omega) \quad , \quad (\text{II.66})$$

$$A^c(\mathbf{x}, \omega) = A_R^c(\mathbf{x}, \omega) + iA_I^c(\mathbf{x}, \omega) \quad . \quad (\text{II.67})$$

avec $A_R^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A_I^s(\mathbf{x}, \omega)$, $A_R^a(\mathbf{x}, \omega)$, $A_I^a(\mathbf{x}, \omega)$, $A_R^c(\mathbf{x}, \omega)$ et $A_I^c(\mathbf{x}, \omega)$, les variables aléatoires réelles définies par,

$$A_R^s(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{1}{\omega^2} \Re e(A^s(\mathbf{x}, \omega)) \quad , \quad (\text{II.68})$$

$$A_I^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\omega} \Im m(A^s(\mathbf{x}, \omega)) \quad , \quad (\text{II.69})$$

$$A_R^a(\mathbf{x}, \omega) = \Re e(A^a(\mathbf{x}, \omega)) \quad , \quad (\text{II.70})$$

$$A_I^a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{1}{\omega} \Im m(A^a(\mathbf{x}, \omega)) \quad , \quad (\text{II.71})$$

$$A_R^c(\mathbf{x}, \omega) = \Re e(A^c(\mathbf{x}, \omega)) \quad , \quad (\text{II.72})$$

$$A_I^c(\mathbf{x}, \omega) = \Im m(A^c(\mathbf{x}, \omega)) \quad . \quad (\text{II.73})$$

En explicitant les équations (II.68) à (II.73) à l'aide des équations (II.62) à (II.64), on obtient

$$A_R^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\underline{\mu}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 (\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2}{(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad , \quad (\text{II.74})$$

$$A_I^s(\mathbf{x}, \omega) = \frac{2\omega^4 \underline{\mu}(\omega) \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)}{(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad , \quad (\text{II.75})$$

$$A_R^a(\mathbf{x}, \omega) = -\frac{\omega^2 (\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)}{\underline{\mu}(\omega) \left[(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 \right]} \quad , \quad (\text{II.76})$$

$$A_I^a(\mathbf{x}, \omega) = \frac{2\omega^2 \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)}{\underline{\mu}(\omega) \left[(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 \right]} \quad , \quad (\text{II.77})$$

$$A_R^c(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 (\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2) + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2}{(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad , \quad (\text{II.78})$$

$$A_I^c(\mathbf{x}, \omega) = \frac{-2\omega^3 \underline{\xi}(\omega) \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)}{(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \Omega_p(\mathbf{x}, \omega)^2} \quad . \quad (\text{II.79})$$

II.4.2 Calcul des espérances mathématiques

Nous avons donc à calculer des expressions du type $\mathcal{E}\{f(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega))\}$ avec f une fonction déterministe connue. Par exemple on aura

$$\begin{aligned} \underline{a}_I^a(\omega) &= \mathcal{E}\{A_I^a(\mathbf{x}, \omega)\} \\ &= \mathcal{E}\{f_I^a(\Omega_p(\mathbf{x}, \omega))\} \quad , \end{aligned} \quad (\text{II.80})$$

avec

$$f_I^a(\omega_p) = \frac{2\omega^2 \underline{\xi}(\omega) \omega_p}{\underline{\mu}(\omega) \left[(\omega_p^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \underline{\xi}(\omega)^2 \omega_p^2 \right]} \quad . \quad (\text{II.81})$$

Dans ces conditions on a en utilisant les équations (II.58) à (II.61),

$$\begin{aligned} \underline{a}_I^a(\omega) &= \int_{\mathbb{R}} f_I^a(\omega_p) p_{\Omega_p(\mathbf{x}, \omega)}(\omega_p; \omega) d\omega_p \\ &= \ell(\omega) \int_{a(\omega)}^{b(\omega)} f_I^a(\omega_p) d\omega_p \quad . \end{aligned} \quad (\text{II.82})$$

Pour tout $\omega \geq \Omega_c$ fixé dans \mathbb{B} , introduit le changement de variable d'intégration

$$\tilde{\omega}_p = \frac{\omega_p}{\omega} \quad , \quad (\text{II.83})$$

ce qui permet d'écrire

$$\underline{a}_I^a(\omega) = \omega \ell(\omega) \int_{\frac{1}{\omega} a(\omega)}^{\frac{1}{\omega} b(\omega)} f_I^a(\omega \tilde{\omega}_p) d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.84})$$

soit

$$\underline{a}_I^a(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell} f_I^a(\tilde{\omega}_p) d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.85})$$

avec

$$\tilde{a}(\omega) = \frac{1}{\omega} a(\omega) = \sup \left\{ 0, 1 - \frac{1}{2\omega \underline{n}(\omega)} \right\} \quad , \quad (\text{II.86})$$

$$\tilde{b}(\omega) \frac{1}{\omega} b(\omega) = 1 + \frac{1}{2\omega \underline{n}(\omega)} \quad , \quad (\text{II.87})$$

$$\tilde{\ell}(\omega) = \frac{1}{\tilde{b}(\omega) - \tilde{a}(\omega)} \quad , \quad (\text{II.88})$$

et

$$\tilde{f}_I^a(\tilde{\omega}_p) = f_I^a(\omega \tilde{\omega}_p) \quad . \quad (\text{II.89})$$

En utilisant ce type de résultat (équations (II.80) à (II.89) et compte tenu des équations (II.46), (II.47) et (II.48) et des équations (II.74) à (II.79)), on obtient,

$$\underline{a}_R^s(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \underline{\mu}(\omega) \frac{\tilde{\omega}_p^2 (\tilde{\omega}_p^2 - 1 + 4 \underline{\xi}(\omega)^2)}{(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4 \underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2} d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.90})$$

$$\underline{a}_I^s(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \frac{2\omega \underline{\mu}(\omega) \underline{\xi}(\omega) \tilde{\omega}_p}{(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4 \underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2} d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.91})$$

$$\underline{a}_R^a(\omega) = - \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \frac{\tilde{\omega}_p^2 - 1}{\underline{\mu}(\omega) [(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4 \underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2]} d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.92})$$

$$\underline{a}_I^a(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \frac{2 \underline{\xi}(\omega) \tilde{\omega}_p}{\omega \underline{\mu}(\omega) [(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4 \underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2]} d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.93})$$

$$\underline{a}_R^c(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \frac{\tilde{\omega}_p^2(\tilde{\omega}_p^2 - 1 + 4\underline{\xi}(\omega)^2)}{(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4\underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2} d\tilde{\omega}_p \quad , \quad (\text{II.94})$$

$$\underline{a}_I^c(\omega) = \int_{\tilde{a}(\omega)}^{\tilde{b}(\omega)} \tilde{\ell}(\omega) \frac{-2\underline{\xi}(\omega)\tilde{\omega}_p}{(\tilde{\omega}_p^2 - 1)^2 + 4\underline{\xi}(\omega)^2 \tilde{\omega}_p^2} d\tilde{\omega}_p \quad . \quad (\text{II.95})$$

Grâce aux équations (A.3), (A.4) et (A.5) de l'annexe (A), et en posant

$$N^\pm(u, \xi) = u^2 \pm 2u\sqrt{1 - \xi^2} + 1 \quad , \quad (\text{II.96})$$

$$\Lambda(u, \xi) = \arctan \left\{ \frac{u^2 + 2\xi^2 - 1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \right\} \quad , \quad (\text{II.97})$$

avec u strictement positif et $\xi \in]0, 1[$ on obtient les équations suivantes :

$$\underline{a}_R^s(\omega) = \underline{\mu}(\omega)\tilde{\ell}(\omega) \left[\tilde{b}(\omega) - \tilde{a}(\omega) - \frac{1}{4\sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \ln \left\{ \frac{N^+(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^-(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))}{N^-(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^+(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))} \right\} \right] , \quad (\text{II.98})$$

$$\underline{a}_I^s(\omega) = \underline{\mu}(\omega) \frac{\omega \tilde{\ell}(\omega)}{2\sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \left[\Lambda(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) - \Lambda(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \right] \quad , \quad (\text{II.99})$$

$$\underline{a}_R^a(\omega) = \frac{\tilde{\ell}(\omega)}{\underline{\mu}(\omega)} \left[\frac{1}{4\sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \ln \left\{ \frac{N^+(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^-(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))}{N^-(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^+(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))} \right\} \right] \quad , \quad (\text{II.100})$$

$$\underline{a}_I^a(\omega) = \frac{\tilde{\ell}(\omega)}{2\omega \underline{\mu}(\omega) \sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \left[\Lambda(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) - \Lambda(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \right] \quad , \quad (\text{II.101})$$

$$\underline{a}_R^c(\omega) = \tilde{\ell}(\omega) \left[\tilde{b}(\omega) - \tilde{a}(\omega) - \frac{1}{4\sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \ln \left\{ \frac{N^+(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^-(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))}{N^-(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^+(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))} \right\} \right] \quad , \quad (\text{II.102})$$

$$\underline{a}_I^c(\omega) = -\frac{\tilde{\ell}(\omega)}{2\sqrt{1 - \underline{\xi}(\omega)^2}} \left[\Lambda(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) - \Lambda(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \right] \quad . \quad (\text{II.103})$$

Afin de contrôler l'algèbre développée, nous avons comparé un calcul numérique direct avec la numérisation des équations (II.98) à (II.103). Cette vérification est donnée dans l'annexe C.

Pour des raisons qui apparaîtront au paragraphe II.5, le paramètre $\underline{\mu}(\omega)\underline{n}(\omega)$ est un paramètre de première importance. On modifie les équations (II.98) à (II.103) pour faire apparaître ce produit de paramètres. Soit donc $\underline{\lambda}(\omega)$, le paramètre défini par,

$$\tilde{\ell}(\omega) = \omega \underline{n}(\omega) \underline{\lambda}(\omega) \quad . \quad (\text{II.104})$$

Premier cas

Lorsque $\sup \left\{ 0, 1 - \frac{1}{2\omega \underline{n}(\omega)} \right\} = 1 - \frac{1}{2\omega \underline{n}(\omega)}$, alors on a $\tilde{\ell}(\omega) = \omega \underline{n}(\omega)$, ce qui montre que

$$\underline{\lambda}(\omega) = 1 \quad . \quad (\text{II.105})$$

Second cas

Lorsque $\sup \left\{ 0, 1 - \frac{1}{2\omega \underline{n}(\omega)} \right\} = 0$, alors on a $\tilde{\ell}(\omega) = \omega \underline{n}(\omega) \frac{2}{1+2\omega \underline{n}(\omega)}$, ce qui montre que

$$\underline{\lambda}(\omega) = \frac{2}{1 + 2\omega \underline{n}(\omega)} \quad . \quad (\text{II.106})$$

Le graphe de la fonction $\omega \underline{n}(\omega) \mapsto \tilde{\lambda}(\omega \underline{n}(\omega)) = \underline{\lambda}(\omega)$ est montré à la figure II.2. Dans ces

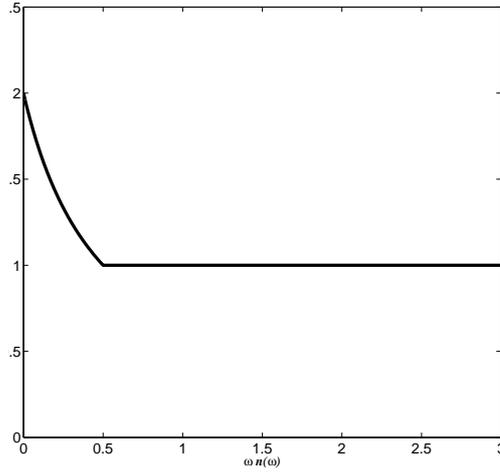


FIG. II.2 – Fonction $\omega \underline{n}(\omega) \mapsto \tilde{\lambda}(\omega \underline{n}(\omega))$

conditions, les équations (II.98) à (II.103) se réécrivent respectivement,

$$\underline{a}_R^s(\omega) = \underline{\mu}(\omega) \underline{n}(\omega) \left[\frac{1}{\underline{n}(\omega)} - \omega \underline{\lambda}(\omega) \Theta_R(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \right] \quad , \quad (\text{II.107})$$

$$\underline{a}_I^s(\omega) = \underline{\mu}(\omega) \underline{n}(\omega) \omega^2 \underline{\lambda}(\omega) \Theta_I(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \quad , \quad (\text{II.108})$$

$$\underline{a}_R^a(\omega) = \omega \underline{n}(\omega) \frac{\underline{\lambda}(\omega)}{\underline{\mu}(\omega)} \Theta_R(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \quad , \quad (\text{II.109})$$

$$\underline{a}_I^a(\omega) = \underline{n}(\omega) \frac{\underline{\lambda}(\omega)}{\underline{\mu}(\omega)} \Theta_I(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \quad , \quad (\text{II.110})$$

$$\underline{a}_R^c(\omega) = 1 - \omega \underline{n}(\omega) \underline{\lambda}(\omega) \Theta_R(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \quad , \quad (\text{II.111})$$

$$\underline{a}_I^c(\omega) = -\omega \underline{n}(\omega) \underline{\lambda}(\omega) \Theta_I(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \quad , \quad (\text{II.112})$$

où on a posé pour tout $\omega \in \mathbb{B}$,

$$\Theta_R(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) = \frac{1}{4\sqrt{1-\underline{\xi}(\omega)^2}} \ln \left\{ \frac{N^+(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^-(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))}{N^-(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) N^+(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega))} \right\}, \quad (\text{II.113})$$

$$\Theta_I(\tilde{a}(\omega), \tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) = \frac{1}{2\sqrt{1-\underline{\xi}(\omega)^2}} \left[\Lambda(\tilde{b}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) - \Lambda(\tilde{a}(\omega), \underline{\xi}(\omega)) \right]. \quad (\text{II.114})$$

En utilisant les équations (II.68) à (II.73) et (II.80), on en déduit que les *coefficients de l'habillage* $\underline{a}^s(\omega)$, $\underline{a}^a(\omega)$ et $\underline{a}^c(\omega)$ qui apparaissent dans les équations (II.54) et (II.55), s'écrivent pour tout $\omega \in \mathbb{B}$,

$$\underline{a}^s(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) = -\omega^2 \underline{a}_R^s(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) + i\omega \underline{a}_I^s(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) \quad , \quad (\text{II.115})$$

$$\underline{a}^a(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) = \underline{a}_R^a(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) + i\omega \underline{a}_I^a(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) \quad , \quad (\text{II.116})$$

$$\underline{a}^c(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) = \underline{a}_R^c(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) + i\underline{a}_I^c(\underline{\mu}, \underline{\xi}, \underline{n}, \omega) \quad . \quad (\text{II.117})$$

Comme nous le verrons au paragraphe B.2, nous avons les propriétés suivantes des *coefficients d'habillage* pour tout ω tel que $\Omega_c \leq \omega \leq \omega_{max}$,

$$\underline{a}_R^s(\omega) \geq 0 \quad , \quad \underline{a}_I^s(\omega) \geq 0 \quad , \quad \underline{a}_R^a(\omega) \geq 0 \quad , \quad \underline{a}_I^a(\omega) \geq 0 \quad , \quad \underline{a}_R^c(\omega) \geq 0 \quad , \quad (\text{II.118})$$

et il n'y a pas de signe fixe pour $\underline{a}_I^c(\omega)$. Ces propriétés nous conduisent à établir les définitions données par les équations (II.115) à (II.117) pour interpréter les coefficients en terme de masse, de dissipation et de raideur.

II.4.3 Cas de l'absence d'habillage

(a) Pour $\omega \geq \Omega_c$ et $\omega \in \mathbb{B}$, i.e. $\Omega_c \leq \omega \leq \omega_{max}$, l'habillage est un système dynamique. Ecrire que pour $\omega \in [\Omega_c, \omega_{max}]$ l'habillage se comporte comme une masse pure revient à écrire que $\underline{n}(\omega) = 0$ pour tout $\omega \in [\Omega_c, \omega_{max}]$. Dans ces conditions les équations (II.107) à (II.112) et (II.115) à (II.117) montrent que

$$\underline{a}^s(\omega) = -\omega^2 \underline{\mu}(\omega) \quad , \quad (\text{II.119})$$

$$\underline{a}^a(\omega) = 0 \quad , \quad (\text{II.120})$$

$$\underline{a}^c(\omega) = 1 \quad . \quad (\text{II.121})$$

Les équations (II.119), (II.120) et (II.121) comparées à l'équation (II.56) montrent bien la cohérence du modèle et le comportement en masse pure de l'habillage.

- (b) Toujours pour $\omega \in [\Omega_c, \omega_{max}]$, si non seulement l'habillage se comporte comme une masse pure (i.e. $\underline{n}(\omega) = 0$, pour $\omega \in [\Omega_c, \omega_{max}]$) mais que de plus la masse de l'habillage est négligeable ($\omega^2 \underline{\mu}(\omega) \ll 1$, pour $\omega \in [\Omega_c, \omega_{max}]$), alors les équations (II.119), (II.120) et (II.121) donnent l'équation (II.56) qui correspond à l'absence d'habillage.

II.5 Paramètres du modèle moyen d'un habillage fictif constitué d'un nombre fini d'oscillateurs physiques

Il est clair que l'habillage est un système continu complexe. Toutefois, il est intéressant pour comprendre la dimension des grandeurs $\underline{\mu}(\omega)$ et $\underline{n}(\omega)$ et leur génération, de considérer un habillage fictif constitué de N_{osc} oscillateurs physiques uniformément distribués sur la surface Γ_s et, soit uniformément distribués sur un intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ dont la largeur de bande est $\Delta\Omega$, soit non uniformément distribués sur l'intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$. On suppose que

$$\omega_{min} < \Omega_c < \Omega_c + \Delta\Omega \leq \omega_{max} \quad . \quad (II.122)$$

De plus on introduit $\Omega_R \in [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ qui est une fréquence donnée qui représente la fréquence de résonance d'épaisseur de l'habillage. Les trois paramètres sont donc Ω_c , Ω_R et $\Delta\Omega$.

II.5.1 Cas d'une densité modale uniforme en fréquence

On suppose donc que l'habillage est constitué de N_{osc} oscillateurs physiques uniformément distribués sur la surface Γ_s et uniformément distribués sur l'intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$. Dans ces conditions, la densité modale $\underline{n}(\omega)$ est une constante \underline{n}_0 sur l'intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$. On suppose de plus pour le cas uniforme que la fréquence Ω_R est centrée dans l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$. On a donc pour ce cas, $\Delta\Omega = 2(\Omega_R - \Omega_c)$. Le graphe est donc donné par la figure II.3. On utilise les résultats établis par la théorie des structures floues (voir les pages 391 et 392 de la référence Ohayon and Soize [108]). On suppose que N_{osc} est tel que $\sqrt{N_{osc}}$ est un entier non nul. L'hypothèse d'uniformité en espace et en fréquence conduit à écrire qu'il y a un unique oscillateur dans un intervalle de fréquences $\delta\Omega$ de mesure $\delta\omega = \Delta\Omega/\sqrt{N_{osc}}$ et dans la surface $\delta\Gamma_s$ de mesure $|\delta\Gamma_s| = |\Gamma_s|\sqrt{N_{osc}}$ dont la fréquence propre est uniformément distribuée sur l'intervalle de fréquences $\delta\Omega$ et sur la surface $\delta\Gamma_s$. Cela montre bien que le nombre total d'oscillateurs physiques sur la surface Γ_s et dans l'intervalle de fréquences $\delta\Omega$ est $\sqrt{N_{osc}}$ et que le nombre total d'oscillateurs physiques sur la surface Γ_s et dans l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$

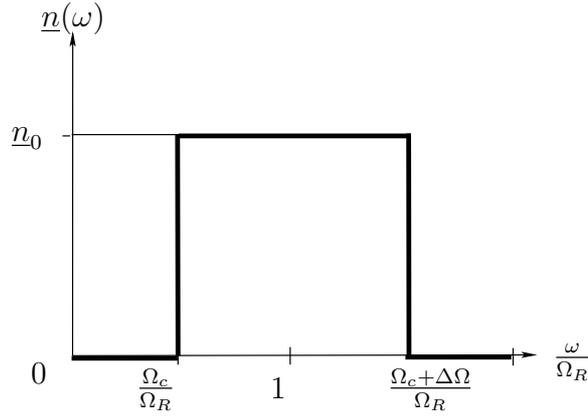


FIG. II.3 – Densité modale uniforme

est $\sqrt{N_{osc}} \times \sqrt{N_{osc}} = N_{osc}$. Cela implique, dans ce cas, qu'il y a $\sqrt{N_{osc}}$ oscillateurs physiques dans la surface $\delta\Gamma_s$ dont les fréquences propres sont uniformément distribuées dans l'intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$, selon les hypothèses de ce paragraphe (voir figure II.4).

- (a) On suppose que tous les oscillateurs ont la même masse m_{osc} . La masse totale physique m_{tot} de tous les oscillateurs sur la surface Γ_s est donc $m_{tot} = \sqrt{N_{osc}} \times \sqrt{N_{osc}} m_{osc}$, d'où

$$m_{tot} = N_{osc} m_{osc} \quad . \quad (\text{II.123})$$

Dans ces conditions, on a :

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad \mu(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\mu}(\omega) = \frac{\sqrt{N_{osc}} m_{osc}}{|\Gamma_s|} \quad , \quad (\text{II.124})$$

ce qui montre que $\underline{\mu}(\omega)$ est une densité surfacique de masse (en $kg \times m^{-2}$) et que

$$\int_{\Gamma_s} \mu(\mathbf{x}, \omega) ds(\mathbf{x}) = \sqrt{N_{osc}} m_{osc} \quad . \quad (\text{II.125})$$

- (b) La densité modale moyenne maximale \underline{n}_0 est donc telle que

$$\underline{n}_0 = \frac{\sqrt{N_{osc}}}{\Delta\Omega} \quad . \quad (\text{II.126})$$

- (c) Soit $\underline{\nu}(\omega)$ le *coefficient de masse participante* moyen qui est défini par l'équation

$$\underline{\mu}(\omega) = \underline{\nu}(\omega) \frac{m_{tot}}{|\Gamma_s|} \quad . \quad (\text{II.127})$$

Le coefficient $\underline{\nu}(\omega)$ est sans dimension. On déduit des équations (II.123), (II.124) et (II.127)

que

$$\underline{\nu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N_{osc}}} \quad . \quad (\text{II.128})$$

Finalement, on déduit des équations (II.123), (II.124), (II.126) et (II.128) que pour le cas uniformément distribué en espace et en fréquences, on a

$$\underline{\mu}(\omega)\underline{n}(\omega) = \frac{m_{tot}}{|\Gamma_s| \Delta\Omega} \quad , \quad (\text{II.129})$$

et donc

$$\int_{\Omega_c}^{\Omega_c+\Delta\Omega} \underline{\mu}(\omega)\underline{n}(\omega) d\omega = \frac{m_{tot}}{|\Gamma_s|} \quad . \quad (\text{II.130})$$

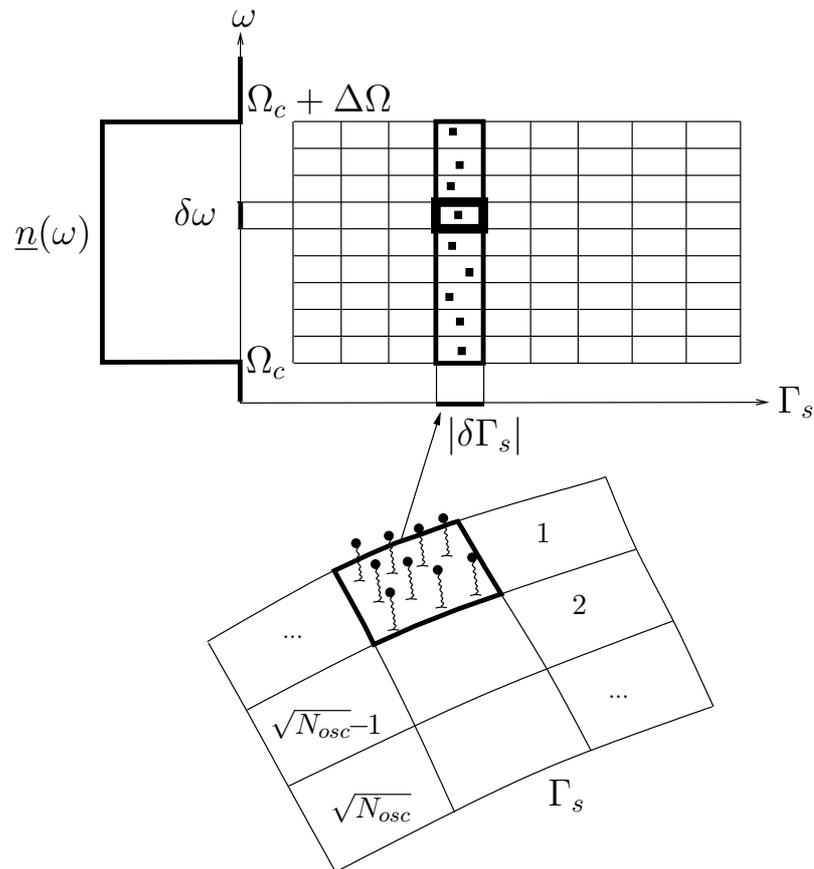


FIG. II.4 – Répartition des oscillateurs sur la surface Γ_s avec une densité modale moyenne uniforme en fréquence

II.5.2 Cas d'une densité modale non uniforme en fréquence

On suppose maintenant que $\underline{n}(\omega)$ n'est pas constante pour $\omega \in [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ mais que la distribution spatiale sur Γ_s est toujours uniforme. De plus on suppose toujours que Ω_R est centrée dans l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ donc que l'on a $\Delta\Omega = 2(\Omega_R - \Omega_c)$. Par exemple on a le graphe montré sur la figure II.5. On partitionne l'intervalle de fréquences $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ en

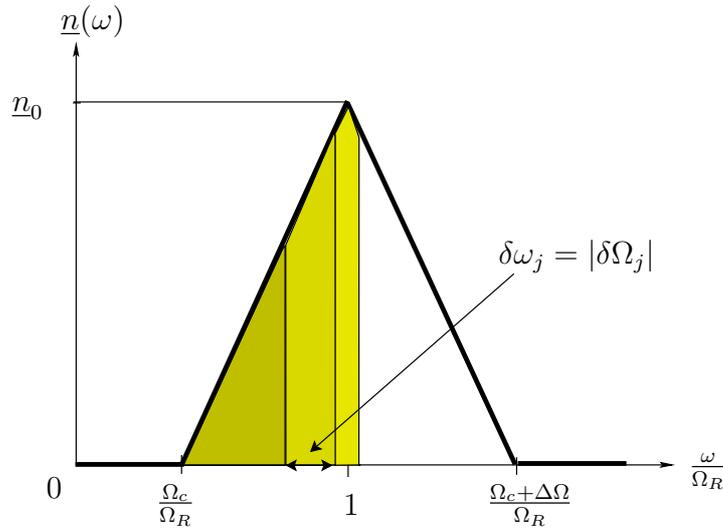


FIG. II.5 – Densité modale non uniforme en fréquence découpée en intervalles de fréquences $\delta\Omega_j$ non égaux de mesures $\delta\omega_j$

intervalles $\delta\Omega_j$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{\sqrt{N_{osc}}} \delta\Omega_j = [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega] \quad , \quad (\text{II.131})$$

$$\forall j \in \{1, \dots, \sqrt{N_{osc}}\}, \quad \int_{\delta\Omega_j} d\omega = \delta\omega_j \quad , \quad (\text{II.132})$$

i.e. $\delta\omega_j = |\delta\Omega_j|$ et les intervalles $\delta\Omega_j$ sont construits pour que l'on ait,

$$\int_{\delta\Omega_j} \underline{n}(\omega) d\omega = 1 \quad , \quad \forall j = 1, \dots, \sqrt{N_{osc}} \quad . \quad (\text{II.133})$$

La densité modale maximale \underline{n}_0 s'écrit,

$$\underline{n}_0 = \frac{2\sqrt{N_{osc}}}{\Delta\Omega} \quad (\text{II.134})$$

On en déduit que pour tout $\mathbf{x} \in \delta\Gamma_s$, le nombre d'oscillateurs présents dans l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ est

$$\int_{\Omega_c}^{\Omega_c + \Delta\Omega} \underline{n}(\omega) d\omega = \sum_{j=1}^{\sqrt{N_{osc}}} \int_{\delta\Omega_j} \underline{n}(\omega) d\omega = \sqrt{N_{osc}} \quad . \quad (\text{II.135})$$

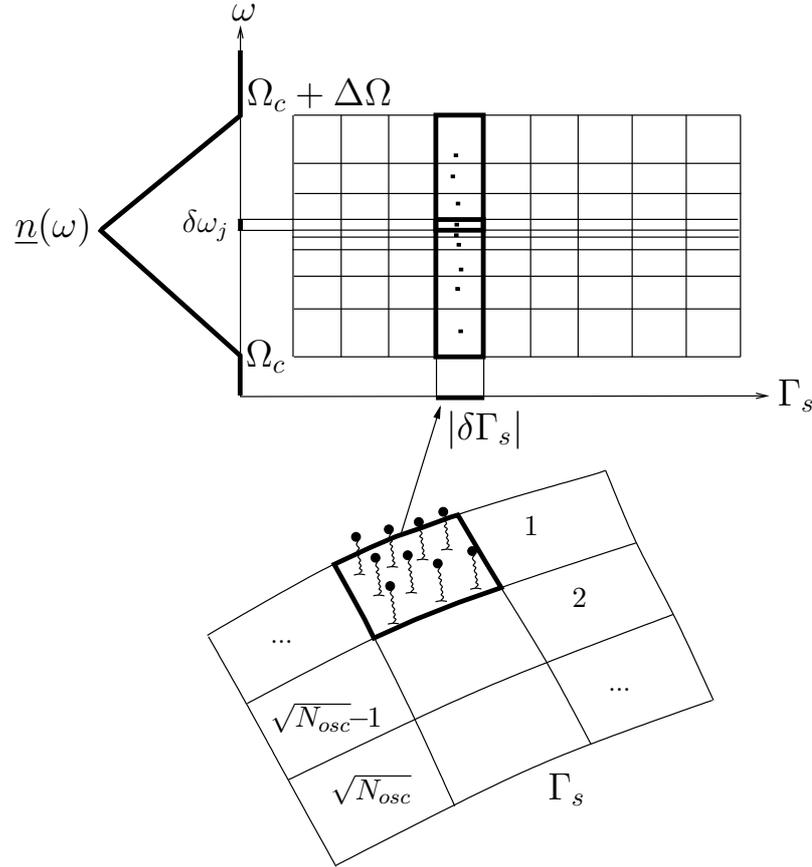


FIG. II.6 – Répartition des oscillateurs sur la surface Γ_s avec une densité modale moyenne non uniforme en fréquence

Puis en sommant sur les $\sqrt{N_{osc}}$ surfaces $\delta\Gamma_s$, on obtient le nombre total d'oscillateurs sur la surface Γ_s qui est $\sqrt{N_{osc}} \times \sqrt{N_{osc}} = N_{osc}$. On remarque d'après l'équation (II.133) que les aires sous la courbe de $\omega \mapsto \underline{n}(\omega)$ associées aux intervalles de fréquences $\delta\Omega_j$ sont toutes égales (voir figure II.5). Dans ces conditions, on a toujours les équations (II.123), (II.124) et (II.128), à savoir,

$$m_{tot} = N_{osc} m_{osc} \quad , \quad (\text{II.136})$$

$$\forall \mathbf{x} \in \Gamma_s, \quad \mu(\mathbf{x}, \omega) = \underline{\mu}(\omega) = \frac{\sqrt{N_{osc}} m_{osc}}{|\Gamma_s|} \quad , \quad (\text{II.137})$$

$$\underline{\nu}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N_{osc}}} \quad . \quad (\text{II.138})$$

On vérifie que l'équation (II.130) est toujours vraie

$$\int_{\Omega_c}^{\Omega_c + \Delta\Omega} \underline{\mu}(\omega) \underline{n}(\omega) d\omega = \frac{m_{tot}}{|\Gamma_s|} \quad . \quad (\text{II.139})$$

II.6 Paramètres du modèle moyen d'un habillage réel

Dans ce paragraphe on considère le cas d'un habillage réel qui est un assemblage de systèmes continus. On présente un modèle moyen paramétré de densité modale.

II.6.1 Paramétrage du modèle moyen

L'objectif de ce paragraphe est d'introduire le paramétrage du modèle moyen qui est défini par la *densité surfacique de masse* moyenne $\underline{\mu}(\omega)$, la *densité modale* moyenne $\underline{n}(\omega)$ et le *taux de dissipation* moyen $\underline{\xi}(\omega)$. Le paramétrage est lié aux propriétés dynamiques moyennes de l'habillage et les paramètres (qui sont des données) seront :

- (1) La fréquence fondamentale de résonance Ω_R de l'habillage (résonance suivant l'épaisseur).
- (2) La fréquence de coupure Ω_c au-dessous de laquelle l'habillage a un comportement de masse pure.
- (3) La largeur de bande $\Delta\Omega$ telle que l'habillage a un comportement dynamique significatif sur l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$. On suppose de plus que

$$\Omega_R \in [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega] \quad . \quad (\text{II.140})$$

II.6.2 Densité surfacique de masse moyenne $\underline{\mu}(\omega)$ d'un habillage réel

Le paramétrage de cette densité surfacique de masse moyenne $\underline{\mu}(\omega)$ d'un habillage réel de masse totale m_{tot} dont l'interface Γ_s avec la structure a une aire $|\Gamma_s|$ est donnée pour tout $\omega \in [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$, par l'équation (II.127), c'est-à-dire,

$$\underline{\mu}(\omega) = \underline{\nu}(\omega) \frac{m_{tot}}{|\Gamma_s|} \quad , \quad (\text{II.141})$$

avec $\underline{\nu}(\omega)$ le *coefficient de masse participante* moyen qui est sans dimension et qui doit être spécifié dans le modèle.

II.6.3 Taux de dissipation moyen $\underline{\xi}(\omega)$ d'un habillage réel

On ne propose pas de paramétrage particulier de $\underline{\xi}(\omega)$ qui est une donnée du modèle moyen et qui doit être spécifié.

II.6.4 Densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$ d'un habillage réel

Le maximum de $\underline{n}(\omega)$ pour $\omega \in [\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ est atteint pour $\omega = \Omega_R$ par définition de Ω_R et est noté \underline{n}_0 . Il est donc tel que,

$$\underline{n}_0 = \underline{n}(\Omega_R) \quad . \quad (\text{II.142})$$

La valeur de \underline{n}_0 est une donnée qui doit être spécifiée pour chaque habillage réel. Il est à noter que le nombre total N_{osc} d'*oscillateurs généralisés* (oscillateurs dans les coordonnées généralisées) sont répartis aléatoirement dans l'intervalle $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ dont la distribution de probabilité (*non uniforme*) est fonction de la densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$. Et par analogie avec les résultats du paragraphe II.5, ce nombre est tel que,

$$\sqrt{N_{osc}} = \int_{\Omega_c}^{\Omega_c + \Delta\Omega} \underline{n}(\omega) d\omega \quad . \quad (\text{II.143})$$

Définition d'une densité modale moyenne pour le calibrage

On introduit une densité modale moyenne « fictive » (voir les explications en fin de paragraphe) qui va servir à calibrer la densité modale paramétrée de l'habillage réel. C'est une fonction continue par morceaux à support compact $[\Omega_c, \Omega_c + \Delta\Omega]$ (voir figure II.7) qui pour tout $\omega \geq 0$ est définie , sachant que dans ce cas $\Delta\Omega = 2(\Omega_R - \Omega_c)$, par

$$\underline{n}(\omega) = \begin{cases} \frac{\underline{n}_0}{\Omega_R - \Omega_c} (\omega - \Omega_c) & \text{pour } \omega \in [\Omega_c, \Omega_R] \quad , \\ \frac{\underline{n}_0}{\Omega_R - \Omega_c} (-\omega + 2\Omega_R - \Omega_c) & \text{pour } \omega \in [\Omega_R, \Omega_c + \Delta\Omega] \quad , \\ 0 & \text{ailleurs} \quad . \end{cases} \quad (\text{II.144})$$

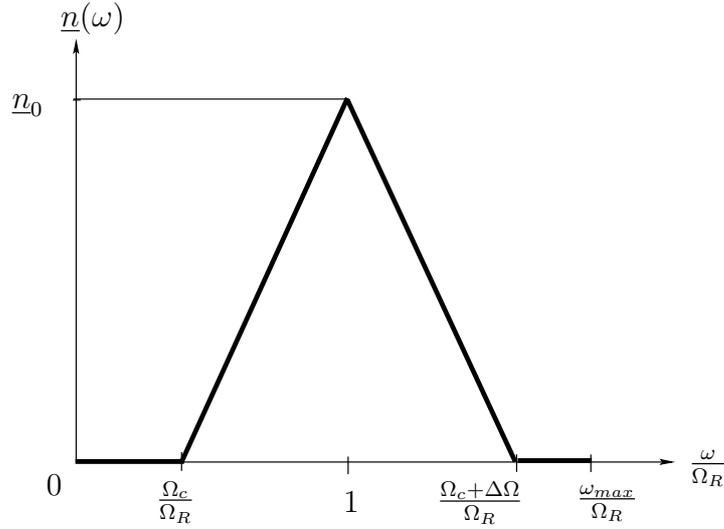


FIG. II.7 – Schéma de principe de la densité modale triangle

La relation entre le nombre N_{osc} d'oscillateurs généralisés et cette densité modale est donné par l'équation (II.143) qui donne

$$\sqrt{N_{osc}} = \frac{n_0 \Delta\Omega}{2} . \quad (\text{II.145})$$

On notera que, si ce modèle de densité modale est cohérent pour $\omega < \Omega_c + \Delta\Omega$, il ne l'est pas pour $\omega \geq \Omega_c + \Delta\Omega$, car pour un milieu continu élastique et occupant un domaine borné de l'espace, le nombre de fréquences propres est infini dénombrable (voir par exemple Gol'denveizer [61], Courant and Hilbert [32]). La densité modale ne peut être nulle pour $\omega \geq \Omega_c + \Delta\Omega$. Toutefois, cette densité modale moyenne « fictive » va servir à calibrer la densité modale paramétrée présentée dans l'annexe B.

II.7 Estimation *sur plan* des paramètres du modèle moyen de l'habillage

Dans ce paragraphe, on présente une méthode d'estimation des paramètres du modèle simplifié de l'habillage présenté dans ce chapitre. On construit un modèle moyen détaillé de l'habillage par la méthode des éléments finis avec les paramètres de conception de l'habillage fournis par l'ingénierie. Le modèle numérique d'habillage est encadré sur la surface qui correspond à l'interface habillage-structure (i.e. Γ_s , voir l'équation (I.15)). On construit ensuite le problème généralisé aux valeurs propres en considérant l'habillage dans le vide. On notera φ^α le mode associé à la valeur propre λ_α et qui est tel que $[\mathbb{K}]\varphi^\alpha = \lambda_\alpha[\mathbb{M}]\varphi^\alpha$ où $[\mathbb{K}]$ et $[\mathbb{M}]$ sont les matrices classiques de raideur et masse respectivement.

II.7.1 Estimation du taux de dissipation moyen

Le taux de dissipation de l'habillage est fourni par l'ingénierie et correspond aux taux de dissipation des matériaux composant l'habillage.

II.7.2 Estimation du coefficient de masse participante moyen

Estimation du coefficient de masse participante par mode

Soit \mathcal{D} , un sous-système du modèle numérique décrit ci-dessus tel que,

$$\mathcal{D} = \{k_1, \dots, k_N\} \quad , \quad (\text{II.146})$$

où N est le nombre de DDL considéré. On a $N \leq N_{tot}$, où N_{tot} est le nombre total de DDL du système numérique. L'énergie cinétique associée au mode α s'écrit,

$$\mathcal{E}_{N_{tot}}^\alpha = \frac{1}{2} \langle [\mathbb{M}] \boldsymbol{\varphi}^\alpha, \boldsymbol{\varphi}^\alpha \rangle \dot{q}_\alpha^2 \quad , \quad (\text{II.147})$$

où \dot{q}_α est la composante α du vecteur des vitesses en coordonnées généralisées $\dot{\mathbf{q}}$. On définit l'énergie cinétique associée au mode α pour les DDL appartenant au sous-système \mathcal{D} ,

$$\mathcal{E}_N^\alpha = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^N [\mathbb{M}]_{k_j k_\ell} \varphi_{k_j}^\alpha \varphi_{k_\ell}^\alpha \dot{q}_\alpha^2 \quad . \quad (\text{II.148})$$

On définit la quantité \mathcal{M}_N^α ,

$$\mathcal{M}_N^\alpha = \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^N [\mathbb{M}]_{k_j k_\ell} \varphi_{k_j}^\alpha \varphi_{k_\ell}^\alpha \quad . \quad (\text{II.149})$$

On remarque en utilisant les équations (II.147) et (II.149) que si on prend en compte tous les DDL, avec la normalisation $\langle [\mathbb{M}] \boldsymbol{\varphi}^\alpha, \boldsymbol{\varphi}^\alpha \rangle = 1$, la quantité $\mathcal{M}_{N_{tot}}^\alpha$ s'écrit,

$$\mathcal{M}_{N_{tot}}^\alpha = 1 \quad . \quad (\text{II.150})$$

On définit la *masse participante modale* \underline{m}_α , pour le sous-système \mathcal{D} , de la façon suivante,

$$\mathcal{E}_N^\alpha = \frac{1}{2} \underline{m}_\alpha \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\varphi_k^\alpha)^2 \dot{q}_\alpha^2 \quad ,$$

On définit le *coefficient de masse participante modale* $\underline{\nu}_\alpha$ de la façon suivante,

$$\underline{\nu}_\alpha = \frac{m_\alpha}{m_{tot}} \quad , \quad (\text{II.151})$$

où m_{tot} est la masse totale du système. En utilisant les équations (II.149) et (II.151), on remarque que le coefficient de masse participante modale moyen peut s'écrire pour le sous-système \mathcal{D} ,

$$\underline{\nu}_\alpha = \frac{\mathcal{M}_N^\alpha}{\frac{m_{tot}}{N} \sum_{j=1}^N (\varphi_{k_j}^\alpha)^2} \quad . \quad (\text{II.152})$$

Estimation du coefficient de masse participante sur la bande de fréquences \mathbb{B}

On définit le critère de tri modal suivant, on supprime les modes φ^α qui sont tels que

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\varphi_j^\alpha)^2 \leq \frac{\mathcal{M}_N^\alpha}{m_{tot}} \quad . \quad (\text{II.153})$$

Commentaires

En utilisant l'équation (II.150), on peut majorer le critère de tri modal défini par l'équation (II.153) par $\frac{1}{m_{tot}}$, on obtient l'équation suivante,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (\varphi_j^\alpha)^2 \leq \frac{\mathcal{M}_N^\alpha}{m_{tot}} \leq \frac{1}{m_{tot}} \quad . \quad (\text{II.154})$$

En utilisant ce majorant, on surestime la densité modale. On ne commet cependant pas une grande erreur avec cette approximation car la géométrie et les matériaux qui composent les habillages l'autorisent. En effet, dans les cas que nous étudierons aux chapitres VI et VII, les habillages sont composés d'une couche de mousse (*qui jouerait le rôle d'un ressort*) recouverte par une couche de septum (*qui jouerait le rôle d'une masse*) et dans ce cas la plus grande partie de l'énergie cinétique qui nous intéresse (*pour les DDL normaux*) est contenue dans le septum (défini ci-dessus par le sous-système \mathcal{D}).

Vis-à-vis de la vibroacoustique, on calcule dans \mathcal{D} , les modes sur les DDL normaux, mais dans ce cas, on sous-estime l'énergie mécanique transmise à la structure (car on ne prend pas la totalité des DDL).

Vis-à-vis de la structure, il faut prendre $N = N_{tot}$ mais dans ce cas on surestime l'énergie transmise à l'acoustique. On sera donc amené à faire un compromis lors de l'estimation *sur plan* des paramètres.

II.7.3 Estimation de la densité modale moyenne

La densité modale moyenne est obtenue en comptant les fréquences propres obtenues au paragraphe II.7.2. On utilise ensuite la définition de la densité modale qui est telle que,

$$N(\omega) = \int_0^\omega n(\tau) d\tau \quad , \quad (\text{II.155})$$

où $N(\omega)$ représente le nombre de fréquences propres dans l'intervalle $[0, \omega]$.

II.8 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons construit le modèle moyen simplifié de l'habillage en nous fondant sur la théorie des structures floues, nous avons ensuite introduit de nouvelles formes linéaires et bilinéaires associées au couplage de l'habillage avec la structure et la cavité acoustique. Finalement, une méthodologie d'estimation *sur plan* des paramètres du modèle moyen de l'habillage est proposée.

Chapitre III

Modèle éléments finis moyen et modèle moyen réduit du système vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié de l'habillage

Sommaire

III.1 Introduction	50
III.2 Formulation faible du problème aux limites moyen vibro- acoustique avec le modèle moyen simplifié d'habillage	50
III.3 Introduction des ensembles de matrices	51
III.4 Modèle matriciel éléments finis moyen	51
III.5 Modes élastiques de structure et modes acoustiques de cavité pour le modèle moyen	54
III.6 Modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit	55
III.7 Résumé du chapitre	57

III.1 Introduction

Dans une première partie de ce chapitre, nous allons implémenter le modèle moyen simplifié de l'habillage, développé dans le chapitre II, dans le modèle moyen du système vibroacoustique, développé au chapitre I. Puis nous discrétiserons le problème aux limites vibroacoustique par la méthode des éléments finis (voir par exemple les ouvrages de référence Zienkewicz and Taylor [163], Ohayon and Soize [108] et les ouvrages Dautray and Lions [37], Dubigeon [39] troisième partie) (paragraphe III.4). Dans une seconde partie nous projeterons le modèle moyen sur les modes structures et les modes acoustiques pour construire le modèle réduit moyen du système vibroacoustique (paragraphe III.6).

III.2 Formulation faible du problème aux limites moyen vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié d'habillage

On injecte les équations (II.54) et (II.55) dans les équations (I.48) et (I.50). On écrit donc la forme faible du problème aux limites moyen vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié d'habillage. Pour tout ω fixé dans \mathbb{B} , trouver $\mathbf{u}^s \in \mathcal{C}_0^s$ et $p \in \mathcal{C}^a$, tels que, pour tout $\delta \mathbf{u}^s \in \mathcal{C}_0^s$ et $\delta p \in \mathcal{C}^a$, on ait,

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) + i\omega d^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) + k^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s; \omega) + c_{\Gamma_2}(\delta \mathbf{u}^s, p; \omega) \\ + \underline{a}^s(\omega) b^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) + \underline{a}^c(\omega) c^s(p, \delta \mathbf{u}^s) = l^s(\delta \mathbf{u}^s; \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.1})$$

et

$$\begin{aligned} -\omega^2 m^a(p, \delta p) + i\omega d^a(p, \delta p; \omega) + k^a(p, \delta p) + \omega^2 c_{\Gamma_2}(\mathbf{u}^s, \delta p; \omega) \\ + \omega^2 \underline{a}^c(\omega) c^s(\delta p, \mathbf{u}^s) + \underline{a}^a(\omega) b^a(p, \delta p) = l^a(\delta p; \omega) \quad , \end{aligned} \quad (\text{III.2})$$

les différentes formes linéaires et bilinéaires étant définies par les équations (I.34) à (I.37) pour m^s , d^s , k^s et l^s ; par les équations (I.41) à (I.44) pour m^a , d^a , k^a et l^a ; par les équations (I.45), (II.51) à (II.53) pour c_{Γ_2} , b^s , c^s , b^a et où les coefficients de l'habillage $\underline{a}^s(\omega)$, $\underline{a}^a(\omega)$ et $\underline{a}^c(\omega)$ sont définis par les équations (II.107) à (II.112).

III.3 Introduction des ensembles de matrices

Nous allons introduire dans ce paragraphe les ensembles de matrices nécessaires à la discrétisation par éléments finis. On définit $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices rectangulaires à m lignes et n colonnes dont les éléments appartiennent à \mathbb{R} . De même, on définit $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n ; $\mathbb{M}_n^S(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques; $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques semi-définies positives et $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives. On a les relations d'inclusion,

$$\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n^S(\mathbb{R}) \subset \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \quad . \quad (\text{III.3})$$

De même on note $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à valeurs complexes. Une matrice $[A]$ complexe est dite symétrique si $[A] = [A]^T$. La matrice est dite hermitienne si $[A] = [A]^*$ où $[A]^* = \overline{[A]}^T$.

III.4 Modèle matriciel éléments finis moyen

Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, on note $\{\mathbf{u}^s(\omega), p(\omega)\}$ la solution de la formulation faible du problème défini par les équations (III.1) et (III.2).

III.4.1 Maillage des domaines par la méthode des éléments finis

Pour simplifier l'exposé on suppose que les maillages sont compatibles sur l'interface de couplage $\Gamma_2 \cup \Gamma_s$ (avec $\Gamma \sim \Gamma_s$). L'extension au cas d'un maillage incompatible ne pose pas de difficultés pour ce problème de vibroacoustique car l'incompatibilité de maillage n'a d'incidence que sur la discrétisation des formes bilinéaires de couplage $c_{\Gamma_2}(\mathbf{u}^s, \delta p; \omega)$ et $c^s(p, \delta \mathbf{u}^s)$ qui se prêtent naturellement à une discrétisation avec maillage incompatible (voir Guerich and Hamdi [66]).

III.4.2 Matrices et vecteurs de la discrétisation par la méthode des éléments finis

On définit le produit scalaire euclidien $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^n u_i v_i$ pour \mathbf{u} et \mathbf{v} dans \mathbb{R}^n et on prolonge la forme bilinéaire $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ sur \mathbb{C}^n .

(a) Structure

Soit $\underline{\mathbf{u}}^s(\omega) \in \mathbb{C}^{m_s}$ le vecteur des degrés de liberté aux nœuds du maillage de Γ_s tel que l'approximation $\mathbf{u}^{m_s}(\omega)$ par éléments finis du champ $\mathbf{u}^s(\omega) \in \mathcal{C}_0^s$ s'écrive

$$\mathbf{u}^{m_s}(\mathbf{x}, \omega) = [\mathbb{N}^s(\mathbf{x})]\underline{\mathbf{u}}^s(\omega) \quad , \quad (\text{III.4})$$

avec $[\mathbb{N}^s(\mathbf{x})] \in \mathbb{M}_{3, m_s}(\mathbb{R})$ la matrice construite à l'aide des fonctions d'interpolation des éléments finis du modèle du domaine Ω_s . On note $[\underline{\mathbb{M}}^s]$ la matrice de masse de la structure appartenant à $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$, $[\underline{\mathbb{D}}^s(\omega)]$ la matrice d'amortissement de la structure appartenant à $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$ et $[\underline{\mathbb{K}}^s(\omega)]$ la matrice de raideur de la structure appartenant à $\mathbb{M}_{m_s}^+(\mathbb{R})$ et telles que

$$\langle [\underline{\mathbb{M}}^s]\underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\delta\mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Omega_s} \rho^s(\mathbf{x}) \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \underline{\delta\mathbf{u}}^s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{III.5})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{D}}^s(\omega)]\underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\delta\mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Omega_s} b_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\underline{\delta\mathbf{u}}^s) \, d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{III.6})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{K}}^s(\omega)]\underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\delta\mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Omega_s} a_{ijkh}(\mathbf{x}, \omega) \varepsilon_{kh}(\mathbf{u}^s) \varepsilon_{ij}(\underline{\delta\mathbf{u}}^s) \, d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{III.7})$$

On définit alors, la matrice de raideur dynamique de la structure $[\underline{\mathbb{A}}^s(\omega)]$ appartenant à $\mathbb{M}_{m_s}^S(\mathbb{C})$ par,

$$[\underline{\mathbb{A}}^s(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbb{M}}^s] + i\omega [\underline{\mathbb{D}}^s(\omega)] + [\underline{\mathbb{K}}^s(\omega)] \quad . \quad (\text{III.8})$$

On définit le vecteur $\underline{\mathbb{f}}^s(\omega)$ résultat de la discrétisation des chargements mécaniques externes au système vibroacoustique.

(b) Fluide acoustique

Soit $\underline{\mathbf{p}}(\omega) \in \mathbb{C}^{m_a}$ le vecteur des degrés de liberté aux nœuds du maillage de Ω_a tel que l'approximation $p^{m_a}(\omega)$ par éléments finis du champ $p(\omega) \in \mathcal{C}^a$ s'écrive

$$p^{m_a}(\mathbf{x}, \omega) = [\mathbb{N}^a(\mathbf{x})]\underline{\mathbf{p}}(\omega) \quad , \quad (\text{III.9})$$

avec $[\mathbb{N}^a(\mathbf{x})] \in \mathbb{M}_{1, m_a}(\mathbb{R})$ la matrice construite à l'aide des fonctions d'interpolation des éléments finis du modèle du domaine Ω_a . On note $[\underline{\mathbb{M}}^a]$ la matrice de « masse » du fluide acoustique appartenant à $\mathbb{M}_{m_a}^+(\mathbb{R})$, $[\underline{\mathbb{D}}^a(\omega)]$ la matrice « d'amortissement » du fluide acoustique appartenant à $\mathbb{M}_{m_a}^{+0}(\mathbb{R})$ et $[\underline{\mathbb{K}}^a]$ la matrice de « raideur » du fluide acoustique appartenant à $\mathbb{M}_{m_a}^{+0}(\mathbb{R})$ telles

que

$$\langle [\underline{\mathbb{M}}^a] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle \simeq \frac{1}{\rho_0 c_0^2} \int_{\Omega_a} p(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{III.10})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{D}}^a(\omega)] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle \simeq \tau(\omega) \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\mathbf{x} \quad , \quad (\text{III.11})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{K}}^a] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle \simeq \frac{1}{\rho_0} \int_{\Omega_a} \nabla p \cdot \nabla \delta p d\mathbf{x} \quad . \quad (\text{III.12})$$

On définit alors, la matrice de « raideur dynamique » du fluide acoustique $[\underline{\mathbb{A}}^a(\omega)]$ appartenant à $\mathbb{M}_{m_a}^S(\mathbb{C})$ par,

$$[\underline{\mathbb{A}}^a(\omega)] = -\omega^2 [\underline{\mathbb{M}}^a] + i\omega [\underline{\mathbb{D}}^a(\omega)] + [\underline{\mathbb{K}}^a] \quad . \quad (\text{III.13})$$

On définit le vecteur $\underline{\mathbb{f}}^a(\omega)$ associé aux sources acoustiques.

(c) Couplage

La matrice $[\underline{\mathbb{C}}] \in \mathbb{M}_{m_s, m_a}(\mathbb{R})$ de couplage entre la structure et le fluide se déduit de la forme bilinéaire $c_{\Gamma_2}(\underline{\delta \mathbf{u}}^s, p; \omega)$ définie par l'équation (I.45) et relative à Γ_2 en utilisant les équations (III.4) et (III.9) et est telle que

$$\langle [\underline{\mathbb{C}}] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Gamma_2} \underline{\delta \mathbf{u}}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x}) p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{III.14})$$

De même, la matrice $[\underline{\mathbb{C}}^s] \in \mathbb{M}_{m_s, m_a}(\mathbb{R})$ de couplage entre la structure et le fluide se déduit de la forme bilinéaire $c^s(p, \underline{\delta \mathbf{u}}^s; \omega)$ définie par l'équation (II.52) et relative à Γ_s en utilisant les équations (III.4) et (III.9) et est telle que

$$\langle [\underline{\mathbb{C}}^s] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \underline{\delta \mathbf{u}}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{III.15})$$

(d) Matrices additionnelles relatives à la présence de l'habillage

La matrice $[\underline{\mathbb{B}}^s] \in M_{m_s}^{+0}(\mathbb{R})$ de « couplage » entre la structure et l'habillage se déduit de la forme bilinéaire $b^s(\mathbf{u}^s, \underline{\delta \mathbf{u}}^s)$ définie par l'équation (II.51) et relative à Γ_s en utilisant les équations (III.4) et (III.9) et est telle que

$$\langle [\underline{\mathbb{B}}^s] \underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq \int_{\Gamma_s} (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \underline{\delta \mathbf{u}}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{III.16})$$

De même, la matrice $[\underline{\mathbb{B}}^a] \in M_{m_a}^{+0}(\mathbb{R})$ additionnelle intervenant sur le fluide se déduit de la forme bilinéaire $b^a(p, \delta p)$ définie par l'équation (II.53) et relative à Γ_s avec $\Gamma \sim \Gamma_s$ en utilisant les

équations (III.4) et (III.9) et est telle que

$$\langle [\mathbb{B}^a] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle \simeq \int_{\Gamma_s} p(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{III.17})$$

(e) Modèle vibroacoustique moyen simplifié

On déduit des équations (III.1) et (III.2) et des paragraphes III.4.2(a) à III.4.2(d), la discrétisation par la méthode des éléments finis du modèle vibroacoustique moyen avec le modèle moyen simplifié de l'habillage qui sera appelé *modèle vibroacoustique moyen simplifié* et qui s'écrit,

$$\{[\mathbb{A}^s(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\mathbb{B}^s]\} \underline{\mathbf{u}}^s(\omega) + \{\underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbb{C}^s] + [\mathbb{C}]\} \underline{\mathbf{p}}(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \quad , \quad (\text{III.18})$$

$$\{[\mathbb{A}^a(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\mathbb{B}^a]\} \underline{\mathbf{p}}(\omega) + \omega^2 \{[\mathbb{C}]^T + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbb{C}^s]^T\} \underline{\mathbf{u}}^s(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \quad , \quad (\text{III.19})$$

où $[A]^T$ désigne la transposée de $[A]$. On donne l'écriture matricielle de ce système,

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{A}^s(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\mathbb{B}^s] & [\mathbb{C}] + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbb{C}^s] \\ \omega^2 \{[\mathbb{C}]^T + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbb{C}^s]^T\} & [\mathbb{A}^a(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\mathbb{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{p}}(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{III.20})$$

III.5 Modes élastiques de structure et modes acoustiques de cavité pour le modèle moyen

On considère le modèle élément fini moyen défini par l'équation (III.20) et pour ω appartenant à la bande de fréquences \mathbb{B} (on rappelle que $0 \notin \mathbb{B}$). Le problème généralisé aux valeurs propres se construit en écrivant un problème généralisé aux valeurs propres pour la structure dans le vide et un problème généralisé pour la cavité acoustique à parois rigides associés à l'équation (III.20).

III.5.1 Modes élastiques de structure

Les modes élastiques de structure sont définis par la raideur à fréquence nulle $[\mathbb{K}^s(0)]$. Ainsi le problème généralisé aux valeurs propres permettant le calcul des modes élastiques de structure dans le vide s'écrit, compte tenu de l'équation (III.20), trouver $\underline{\lambda}^s$ et $\underline{\varphi}^s \in \mathbb{R}^{m_s}$ tels que

$$[\mathbb{K}^s(0)] \underline{\varphi}^s = \underline{\lambda}^s [\mathbb{M}^s] \underline{\varphi}^s \quad . \quad (\text{III.21})$$

Les valeurs propres sont réelles positives telles que $0 < \underline{\lambda}_1^s \leq \underline{\lambda}_2^s \leq \dots \leq \underline{\lambda}_{m_s}^s$ et les vecteurs associés $\underline{\varphi}_1^s, \dots, \underline{\varphi}_{m_s}^s$ vérifient les propriétés usuelles d'orthogonalité (voir par exemple Bathe

and Wilson [16]),

$$\underline{\varphi}_i^{sT} [\underline{\mathbb{M}}^s] \underline{\varphi}_j^s = \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\varphi}_i^{sT} [\underline{\mathbb{K}}^s(0)] \underline{\varphi}_j^s = \lambda_i^s \delta_{ij} \quad , \quad (\text{III.22})$$

où $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, $= 0$ si $i \neq j$ désigne le symbole de Kronecker. La structure comporte m_s modes élastiques car elle n'a pas de déplacements de corps rigides.

III.5.2 Modes de cavité acoustique à parois rigides

Le problème généralisé aux valeurs propres permettant le calcul des modes de cavité acoustique à parois rigides s'écrit, compte tenu de l'équation (III.20), trouver $\underline{\lambda}^a = \omega_a^2$ positif et $\underline{\varphi}^a$, un vecteur réel de dimension m_a tels que

$$[\underline{\mathbb{K}}^a] \underline{\varphi}^a = \underline{\lambda}^a [\underline{\mathbb{M}}^a] \underline{\varphi}^a \quad . \quad (\text{III.23})$$

Les vecteurs propres $\underline{\varphi}_1^a, \dots, \underline{\varphi}_{m_a}^a$ associés aux valeurs propres $0 = \underline{\lambda}_1^a < \underline{\lambda}_2^a < \dots < \underline{\lambda}_{m_a}^a$ vérifient les propriétés usuelles d'orthogonalité,

$$\underline{\varphi}_i^{aT} [\underline{\mathbb{M}}^a] \underline{\varphi}_j^a = \delta_{ij} \quad , \quad \underline{\varphi}_i^{aT} [\underline{\mathbb{K}}^a] \underline{\varphi}_j^a = \underline{\lambda}_i^a \delta_{ij} \quad . \quad (\text{III.24})$$

La cavité acoustique possède un mode de pression constante $\underline{\varphi}_1^a$ associé à la valeur propre nulle $\underline{\lambda}_1^a = 0$ et $m_a - 1$ modes acoustiques de cavité à parois rigides.

III.6 Modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit

Dans ce paragraphe on projette le modèle vibroacoustique moyen simplifié défini par l'équation (III.20) pour obtenir le *modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit*. Soient $E_{n_s} \subset \mathbb{R}^{m_s}$ et $E_{n_a} \subset \mathbb{R}^{m_a}$ les sous-espaces de dimension n_s et n_a de \mathbb{R}^{m_s} et \mathbb{R}^{m_a} tels que

$$E_{n_s} = \text{vect} \left\{ \underline{\varphi}_1^s, \dots, \underline{\varphi}_{n_s}^s \right\} \quad \text{et} \quad E_{n_a} = \text{vect} \left\{ \underline{\varphi}_1^a, \dots, \underline{\varphi}_{n_a}^a \right\} \quad . \quad (\text{III.25})$$

On notera $E_{n_s}^c$ et $E_{n_a}^c$ les complexifiés de E_{n_s} et E_{n_a} . Le modèle moyen simplifié réduit consiste à projeter l'équation (III.20) sur $E_{n_s} \times E_{n_a}$. On introduit donc les matrices $[\underline{\Phi}^s] \in \mathbb{M}_{m_s, n_s}$ et $[\underline{\Phi}^a] \in \mathbb{M}_{m_a, n_a}$ telles que

$$[\underline{\Phi}^s] = \left[\underline{\varphi}_1^s, \dots, \underline{\varphi}_{n_s}^s \right] \quad , \quad [\underline{\Phi}^a] = \left[\underline{\varphi}_1^a, \dots, \underline{\varphi}_{n_a}^a \right] \quad . \quad (\text{III.26})$$

La projection de la solution $\{\underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\mathbf{p}}(\omega)\}$ de l'équation (III.20) sur le sous-espace $E_{n_s} \times E_{n_a}$ s'écrit donc,

$$\underline{\mathbf{u}}^s(\omega) = [\Phi^s] \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \quad , \quad (\text{III.27})$$

$$\underline{\mathbf{p}}(\omega) = [\Phi^a] \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \quad , \quad (\text{III.28})$$

avec $\underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \in \mathbb{C}^{n_s}$ et $\underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \in \mathbb{C}^{n_a}$ les vecteurs des coordonnées généralisées de structure et de fluide acoustique. On introduit la matrice $[\underline{H}] \in \mathbb{M}_{m_s+m_a, n_s+n_a}(\mathbb{R})$ définie par blocs par

$$[\underline{H}] = \begin{bmatrix} [\Phi^s] & 0 \\ 0 & [\Phi^a] \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{III.29})$$

Alors les équations (III.27) et (III.28) s'écrivent,

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{p}}(\omega) \end{bmatrix} = [\underline{H}] \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{III.30})$$

La projection sur $E_{n_s} \times E_{n_a}$ de l'équation (III.20) s'écrit donc,

$$\begin{bmatrix} [\underline{A}^s(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\underline{B}^s] & [\underline{C}] + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\underline{C}^s] \\ \omega^2 \{[\underline{C}]^T + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\underline{C}^s]^T\} & [\underline{A}^a(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\underline{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{III.31})$$

où on a introduit les relations matricielles suivantes,

$$[\underline{A}^s(\omega)] = [\Phi^s]^T [\underline{A}^s(\omega)] [\Phi^s] \quad \in \mathbb{M}_{n_s}(\mathbb{C}) \quad , \quad (\text{III.32})$$

$$[\underline{B}^s] = [\Phi^s]^T [\underline{B}^s] [\Phi^s] \quad \in \mathbb{M}_{n_s}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{III.33})$$

$$[\underline{C}] = [\Phi^s]^T [\underline{C}] [\Phi^a] \quad \in \mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{III.34})$$

$$[\underline{C}^s] = [\Phi^s]^T [\underline{C}^s] [\Phi^a] \quad \in \mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{III.35})$$

$$[\underline{A}^a(\omega)] = [\Phi^a]^T [\underline{A}^a(\omega)] [\Phi^a] \quad \in \mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{C}) \quad , \quad (\text{III.36})$$

$$[\underline{B}^a] = [\Phi^a]^T [\underline{B}^a] [\Phi^a] \quad \in \mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{III.37})$$

$$\underline{\mathbf{f}}^s(\omega) = [\Phi^s]^T \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \quad \in \mathbb{C}^{n_s} \quad , \quad (\text{III.38})$$

$$\underline{\mathbf{f}}^a(\omega) = [\Phi^a]^T \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \quad \in \mathbb{C}^{n_a} \quad . \quad (\text{III.39})$$

On a les relations matricielles suivantes :

(a) Structure

$$[\underline{A}^s(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}^s] + i\omega [\underline{D}^s(\omega)] + [\underline{K}^s(\omega)] \quad , \quad (\text{III.40})$$

où les matrices $[\underline{M}^s]$, $[\underline{D}^s(\omega)]$ et $[\underline{K}^s(\omega)]$ appartiennent à $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ et sont telles que

$$[\underline{M}^s]_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad [\underline{D}^s(\omega)] = [\underline{\Phi}^s]^T [\underline{\mathbb{D}}^s(\omega)] [\underline{\Phi}^s] \quad , \quad [\underline{K}^s(\omega)]_{ij} = [\underline{\Phi}^s]^T [\underline{\mathbb{K}}^s(\omega)] [\underline{\Phi}^s] \quad . \quad (\text{III.41})$$

Si on utilise l'approximation $[\underline{\mathbb{K}}^s(\omega)] \simeq [\underline{\mathbb{K}}^s(0)]$ sur la bande d'analyse \mathbb{B} alors on a $[\underline{K}^s(\omega)]_{ij} = \lambda_i^s \delta_{ij}$.

(b) Fluide acoustique

$$[\underline{A}^a(\omega)] = -\omega^2 [\underline{M}^a] + i\omega [\underline{D}^a(\omega)] + [\underline{K}^a] \quad , \quad (\text{III.42})$$

où la matrice $[\underline{M}^a]$ appartient à $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$ et les matrices $[\underline{D}^a(\omega)]$ et $[\underline{K}^a]$ appartiennent à $\mathbb{M}_{n_a}^{+0}(\mathbb{R})$ et sont telles que

$$[\underline{M}^a]_{ij} = \delta_{ij} \quad , \quad [\underline{D}^a(\omega)] = \tau(\omega) \lambda_i^a \delta_{ij} \quad , \quad [\underline{K}^a]_{ij} = \lambda_i^a \delta_{ij} \quad . \quad (\text{III.43})$$

(c) Calcul des matrices du modèle simplifié moyen réduit de l'habillage

On explique dans le chapitre d'annexe D le calcul des matrices $[\underline{B}^s]$, $[\underline{B}^a]$ et $[\underline{C}^s]$ dans le cas d'un maillage compatible.

Rappel sur la terminologie On utilise usuellement la terminologie suivante : $[\underline{M}^s]$ est la matrice de masse généralisée de structure, $[\underline{K}^s(\omega)]$ est la matrice de raideur généralisée de structure, $[\underline{D}^s(\omega)]$ est la matrice de dissipation généralisée de structure, $[\underline{M}^a]$ est la matrice de « masse » généralisée du fluide acoustique, $[\underline{K}^a]$ est la matrice de « raideur » généralisée du fluide, $[\underline{D}^a(\omega)]$ est la matrice de « dissipation » généralisée du fluide acoustique, $\underline{f}^s(\omega)$ est le vecteur des efforts généralisés de structure, $\underline{f}^a(\omega)$ est le vecteur des termes de sources acoustiques généralisés du fluide acoustique.

III.7 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous avons écrit la formulation faible du problème aux limites moyen vibroacoustique avec le modèle moyen simplifié d'habillage. Nous avons écrit le modèle éléments finis de ce problème puis nous l'avons projeté sur les modes élastiques de structure dans le vide et

les modes acoustiques dans la cavité à parois rigides. Nous avons finalement obtenu le modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit qui s'écrit (voir l'équation (III.31))

$$\begin{bmatrix} [\underline{A}^s(\omega)] + \underline{a}^s(\omega)[\underline{B}^s] & [\underline{C}] + \underline{a}^c(\omega)[\underline{C}^s] \\ \omega^2\{[\underline{C}]^T + \underline{a}^c(\omega)[\underline{C}^s]^T\} & [\underline{A}^a(\omega)] + \underline{a}^a(\omega)[\underline{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix} .$$

Chapitre IV

Modèle vibroacoustique simplifié réduit stochastique avec modélisation probabiliste non paramétrique des incertitudes

Sommaire

IV.1 Introduction	60
IV.2 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de données et de modèle	60
IV.3 Résumé du chapitre	69

IV.1 Introduction

Nous avons vu au paragraphe II.4 que la stratégie concernant la modélisation probabiliste de l'habillage était de construire le modèle moyen par la théorie des structures floues et était de tenir compte des incertitudes de modélisation à l'aide de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de modèle et sur les paramètres. Le développement du modèle vibroacoustique probabiliste basé sur une approche non paramétrique des incertitudes de modèle et de données, mais sans modélisation de l'habillage, a été fait entièrement dans la thèse de doctorat Durand [42]. Nous allons à présent développer la modélisation non paramétrique des incertitudes à partir du modèle moyen réduit du système vibroacoustique incluant le modèle moyen simplifié de l'habillage du chapitre III. Le principe de construction des matrices aléatoires dans la théorie de modélisation non paramétrique des incertitudes est expliqué dans les articles Soize [134] [135] [143]. Nous reprendrons ici les mêmes notations que dans la dernière référence citée, à savoir : $[\underline{R}]$ désigne une matrice du modèle moyen réduit et $[\mathbf{R}]$ désigne la matrice aléatoire associée dans le cadre de l'approche probabiliste. Nous verrons au paragraphe IV.2 quelles relations les lient.

IV.2 Approche probabiliste non paramétrique des incertitudes de données et de modèle

IV.2.1 Définition des matrices aléatoires du système vibroacoustique

La construction du modèle probabiliste des matrices des équations (III.31), (III.40) et (III.42) est faite en utilisant l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes. Plus particulièrement, les matrices aléatoires associées à $[\underline{M}^s]$, $[\underline{D}^s(\omega)]$, $[\underline{K}^s(\omega)]$, $[\underline{C}]$, $[\underline{M}^a]$, $[\underline{D}^a(\omega)]$ et $[\underline{K}^a]$ seront construites classiquement dans le cadre de l'approche probabiliste non paramétrique comme il a été fait dans Durand [42] mais en tenant compte de la dépendance en (ω) des matrices $[\underline{D}^s(\omega)]$, $[\underline{K}^s(\omega)]$ et $[\underline{D}^a(\omega)]$. Par contre les matrices aléatoires associées aux matrices $\underline{a}^s(\omega)[\underline{B}^s]$, $\underline{a}^c(\omega)[\underline{C}^s]$ et $\underline{a}^a(\omega)[\underline{B}^a]$ seront construites suivant cette même approche non paramétrique mais en considérant que les incertitudes de modèle et de données sont prises en compte par la fluctuation statistique des matrices associées à $[\underline{B}^s]$, $[\underline{C}^s]$ et $[\underline{B}^a]$, les coefficients complexes $\underline{a}^s(\omega)$, $\underline{a}^a(\omega)$ et $\underline{a}^c(\omega)$ restant déterministes. Par exemple la matrice aléatoire associée à $\underline{a}^s(\omega)[\underline{B}^s]$ sera $\underline{a}^s(\omega)[\mathbf{B}^s]$ avec $[\mathbf{B}^s]$ la matrice aléatoire associée à $[\underline{B}^s]$. Pour ω fixé dans \mathbb{B} , on introduit les matrices $[\mathbf{M}^s]$, $[\mathbf{D}^s(\omega)]$, $[\mathbf{K}^s(\omega)]$, $[\mathbf{B}^s]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{C}^s]$, $[\mathbf{M}^a]$, $[\mathbf{D}^a(\omega)]$, $[\mathbf{K}^a]$ et $[\mathbf{B}^a]$ sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$. Ces matrices sont des variables aléatoires du second ordre. Compte tenu des propriétés

algébriques des matrices du modèle vibroacoustique moyen simplifié réduit défini par l'équation (III.31), les matrices aléatoires $[\mathbf{M}^s]$, $[\mathbf{D}^s(\omega)]$ et $[\mathbf{K}^s(\omega)]$ sont à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$; la matrice aléatoire $[\mathbf{B}^s]$ est à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_s}^{+0}(\mathbb{R})$; la matrice aléatoire $[\mathbf{M}^a]$ est à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$; les matrices aléatoires $[\mathbf{K}^a]$, $[\mathbf{D}^a(\omega)]$ et $[\mathbf{B}^a]$ sont à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_a}^{+0}(\mathbb{R})$ et les matrices aléatoires $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{C}^s]$ sont à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R})$. En utilisant l'approche probabiliste non paramétrique, les valeurs moyennes de ces matrices aléatoires sont écrites

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{[\mathbf{M}^s]\} &= [\underline{\mathbf{M}}^s] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{D}^s(\omega)]\} &= [\underline{\mathbf{D}}^s(\omega)] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{K}^s(\omega)]\} &= [\underline{\mathbf{K}}^s(\omega)] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{K}^a]\} &= [\underline{\mathbf{K}}^a] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{M}^a]\} &= [\underline{\mathbf{M}}^a] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{D}^a(\omega)]\} &= [\underline{\mathbf{D}}^a(\omega)] \quad , \\ \mathcal{E}\{\underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\mathbf{B}^s]\} &= \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\underline{\mathbf{B}}^s] \quad , & \mathcal{E}\{\underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\mathbf{B}^a]\} &= \underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\underline{\mathbf{B}}^a] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{C}]\} &= [\underline{\mathbf{C}}] \quad , & \mathcal{E}\{\underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbf{C}^s]\} &= \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\underline{\mathbf{C}}^s] \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

où \mathcal{E} désigne l'espérance mathématique. De plus, ces matrices aléatoires doivent vérifier les propriétés introduites par la suite (voir le paragraphe IV.2.3). Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, soient $\mathbf{Q}^s(\omega)$ et $\mathbf{Q}^a(\omega)$ les vecteurs aléatoires à valeurs dans \mathbb{C}^{n_s} et \mathbb{C}^{n_a} des coordonnées généralisées respectivement de structure et du fluide acoustique. De même, on introduit les matrices aléatoires de raideur généralisées qui s'écrivent d'après les équations (III.40) et (III.42),

$$[\mathbf{A}^s(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^s] + i\omega [\mathbf{D}^s(\omega)] + [\mathbf{K}^s(\omega)] \quad , \quad (\text{IV.2})$$

$$[\mathbf{A}^a(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^a] + i\omega [\mathbf{D}^a(\omega)] + [\mathbf{K}^a] \quad , \quad (\text{IV.3})$$

où $[\mathbf{A}^s(\omega)]$ est une matrice aléatoire à valeurs dans $M_{n_s}^S(\mathbb{C})$ et $[\mathbf{A}^a(\omega)]$ est une matrice aléatoire à valeurs dans $M_{n_a}^S(\mathbb{C})$ pour tout $\omega \in \mathbb{B}$. En s'aidant des équations (III.31), (IV.2) et (IV.3), les équations matricielles aléatoires du système vibroacoustique réduit stochastique s'écrivent,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^s(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\mathbf{B}^s] & [\mathbf{C}] + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbf{C}^s] \\ \omega^2 \{[\mathbf{C}]^T + \underline{\mathbf{a}}^c(\omega)[\mathbf{C}^s]^T\} & [\mathbf{A}^a(\omega)] + \underline{\mathbf{a}}^a(\omega)[\mathbf{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix} \quad . \quad (\text{IV.4})$$

Compte-tenu des équations (III.27) et (III.28), les vecteurs $\mathbf{U}^s(\omega)$ des déplacements aléatoires de la structure et $\mathbf{P}(\omega)$ des pressions aléatoires du fluide acoustique s'écrivent pour tout $\omega \in \mathbb{B}$,

$$\mathbf{U}^s(\omega) = [\underline{\Phi}^s] \mathbf{Q}^s(\omega) \quad , \quad (\text{IV.5})$$

$$\mathbf{P}(\omega) = [\underline{\Phi}^a] \mathbf{Q}^a(\omega) \quad . \quad (\text{IV.6})$$

Rappel sur la terminologie On utilise usuellement la terminologie suivante : $[\mathbf{M}^s]$ est la matrice aléatoire de masse généralisée de structure, $[\mathbf{K}^s(\omega)]$ est la matrice aléatoire de raideur

généralisée de structure, $[\mathbf{D}^s(\omega)]$ est la matrice aléatoire de dissipation généralisée de structure, $[\mathbf{M}^a]$ est la matrice aléatoire de « masse » généralisée du fluide acoustique, $[\mathbf{K}^a]$ est la matrice aléatoire de « raideur » généralisée du fluide, $[\mathbf{D}^a(\omega)]$ est la matrice aléatoire de « dissipation » généralisée du fluide acoustique.

IV.2.2 Normalisation des matrices aléatoires

La première étape de construction de l'approche non paramétrique consiste à normaliser les matrices aléatoires du modèle matriciel réduit. Pour ce faire nous devons commencer par factoriser les matrices aléatoires puis introduire les matrices normalisées.

(A) Factorisation des matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$

Dans ce sous-paragraphe, n désigne n_s ou n_a et $[\underline{M}(\omega)]$ désigne $[\underline{M}^s]$, $[\underline{D}^s(\omega)]$, $[\underline{K}^s(\omega)]$, ou $[\underline{M}^a]$. Puisque $[\underline{M}(\omega)] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ on écrit sa factorisation de Cholesky,

$$[\underline{M}(\omega)] = [\underline{L}_M(\omega)]^T [\underline{L}_M(\omega)] \quad , \quad (\text{IV.7})$$

avec $[\underline{L}_M(\omega)]$ une matrice triangulaire supérieure de $\mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{R})$.

(B) Factorisation des matrices du modèle moyen réduit appartenant à $\mathbb{M}_n^{+0}(\mathbb{R})$

Compte-tenu des propriétés algébriques des matrices $[\underline{B}^s]$, $[\underline{B}^a]$, $[\underline{D}^a(\omega)]$ et $[\underline{K}^a]$ il existe toujours une factorisation que l'on peut écrire,

$$[\underline{B}^s] = [\underline{S}_{B^s}]^T [\underline{S}_{B^s}] \quad , \quad (\text{IV.8})$$

$$[\underline{B}^a] = [\underline{S}_{B^a}]^T [\underline{S}_{B^a}] \quad , \quad (\text{IV.9})$$

$$[\underline{D}^a(\omega)] = [\underline{S}_{D^a(\omega)}]^T [\underline{S}_{D^a(\omega)}] \quad , \quad (\text{IV.10})$$

$$[\underline{K}^a] = [\underline{S}_{K^a}]^T [\underline{S}_{K^a}] \quad , \quad (\text{IV.11})$$

avec $n_a - 1$ le rang des matrices $[\underline{D}^a(\omega)]$ et $[\underline{K}^a]$, \tilde{n}_s le rang de la matrice $[\underline{B}^s]$ et \tilde{n}_a le rang de la matrice $[\underline{B}^a]$. Les matrices rectangulaires qui apparaissent sont telles que $[\underline{S}_{B^s}] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_s, n_s}(\mathbb{R})$, $[\underline{S}_{B^a}] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_a, n_a}(\mathbb{R})$, $[\underline{S}_{D^a(\omega)}] \in \mathbb{M}_{n_a-1, n_a}(\mathbb{R})$ et $[\underline{S}_{K^a}] \in \mathbb{M}_{n_a-1, n_a}(\mathbb{R})$. Ces factorisations peuvent être construites soit par un procédé purement algébrique d'élimination du type Gauss en tenant compte de l'existence d'un noyau non réduit à zéro, soit en utilisant une décomposition spectrale pour matrice symétrique réelle.

(C) Factorisation des matrices de couplage appartenant à $\mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R})$

Dans ce paragraphe, $[\underline{C}] \in \mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R})$ désigne $[\underline{C}]$ ou $[\underline{C}^s]$. On suppose que $n_a \leq n_s$ et que $[\underline{C}]\mathbf{x} = 0$ implique que $\mathbf{x} = 0$, c'est-à-dire que le noyau de $[\underline{C}]$ est réduit à 0 et que le rang de $[\underline{C}]$ est n_a . Si $n_a > n_s$ alors les développements qui suivent seront appliqués à $[\underline{C}]^T$ et non pas à $[\underline{C}]$ et le rang de la matrice $[\underline{C}]^T$ est alors égal à n_s . Pour la construction de l'approche probabiliste non paramétrique, on utilise la décomposition polaire de $[\underline{C}]$ qui s'écrit Gholub and Van Loan [60],

$$[\underline{C}] = [\underline{U}][\underline{T}] \quad , \quad (\text{IV.12})$$

où $[\underline{U}]$ est une matrice rectangulaire de $\mathbb{M}_{n_s, n_a}(\mathbb{R})$ telle que,

$$[\underline{U}]^T[\underline{U}] = [\underline{I}_{n_a}] \quad , \quad (\text{IV.13})$$

et où $[\underline{T}]$ est une matrice de $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$. Pour construire $[\underline{U}]$ et $[\underline{T}]$, on utilise une décomposition en valeurs singulières de la matrice $[\underline{C}]$. Soit donc $[\underline{B}_{n_a}] \in \mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$[\underline{B}_{n_a}] = [\underline{C}]^T[\underline{C}] \quad . \quad (\text{IV.14})$$

La matrice $[\underline{B}_{n_a}]$ étant symétrique, elle est diagonalisable et on peut donc l'écrire

$$[\underline{B}_{n_a}] = [\underline{H}_{n_a}][\underline{\Sigma}_{n_a}][\underline{H}_{n_a}]^T \quad , \quad (\text{IV.15})$$

où $[\underline{\Sigma}_{n_a}]$ est une matrice constituée des valeurs propres (qui sont toutes strictement positives car le noyau de $[\underline{C}]$ est réduit à 0) de $[\underline{B}_{n_a}]$ et où la matrice $[\underline{H}_{n_a}]$ qui appartient à $\mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{R})$ est la matrice orthogonale des vecteurs propres de $[\underline{B}_{n_a}]$ qui sont tels que

$$[\underline{H}_{n_a}]^T[\underline{H}_{n_a}] = [\underline{H}_{n_a}][\underline{H}_{n_a}]^T = [\underline{I}_{n_a}] \quad . \quad (\text{IV.16})$$

La matrice $[\underline{T}]$ est définie par

$$[\underline{T}] = [\underline{B}_{n_a}]^{1/2} = [\underline{H}_{n_a}][\underline{\Sigma}_{n_a}]^{1/2}[\underline{H}_{n_a}]^T \quad , \quad (\text{IV.17})$$

et appartient donc à $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$. La matrice $[\underline{U}]$ est calculée en utilisant l'équation (IV.12) et le fait que la matrice $[\underline{T}]$ soit inversible (car elle appartient à $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$). On a donc

$$[\underline{U}] = [\underline{C}][\underline{T}]^{-1} \quad . \quad (\text{IV.18})$$

Comme $[\underline{T}]$ est dans $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$, elle admet une factorisation de Cholesky qui s'écrit,

$$[\underline{T}] = [\underline{L}_C]^T [\underline{L}_C] \quad , \quad (\text{IV.19})$$

avec $[\underline{L}_C]$ une matrice triangulaire supérieure dans $\mathbb{M}_{n_a}(\mathbb{R})$.

(D) Expression des matrices aléatoires

En utilisant les notations des paragraphes (A) à (C) précédents on introduit (en suivant la même démarche que dans Soize [143]) les expressions des matrices aléatoires relatives à la structure, au fluide acoustique et au couplage vibroacoustique, qui s'écrivent pour $n_a \leq n_s$, et compte-tenu des équations (IV.7) à (IV.12) et (IV.19),

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}^s] &= [\underline{L}_{Ms}]^T [\mathbf{G}_{Ms}] [\underline{L}_{Ms}] \quad , & [\mathbf{D}^s(\omega)] &= [\underline{L}_{Ds}(\omega)]^T [\mathbf{G}_{Ds}] [\underline{L}_{Ds}(\omega)] \quad , \\ [\mathbf{K}^s(\omega)] &= [\underline{L}_{Ks}(\omega)]^T [\mathbf{G}_{Ks}] [\underline{L}_{Ks}(\omega)] \quad , & [\mathbf{B}^s] &= [\underline{S}_{Bs}]^T [\mathbf{G}_{Bs}] [\underline{S}_{Bs}] \quad , \\ [\mathbf{M}^a] &= [\underline{L}_{Ma}]^T [\mathbf{G}_{Ma}] [\underline{L}_{Ma}] \quad , & [\mathbf{D}^a(\omega)] &= [\underline{S}_{Da}(\omega)]^T [\mathbf{G}_{Da}] [\underline{S}_{Da}(\omega)] \quad , \\ [\mathbf{K}^a] &= [\underline{S}_{Ka}]^T [\mathbf{G}_{Ka}] [\underline{S}_{Ka}] \quad , & [\mathbf{B}^a] &= [\underline{S}_{Ba}]^T [\mathbf{G}_{Ba}] [\underline{S}_{Ba}] \quad , \\ [\mathbf{C}] &= [\underline{U}] [\underline{L}_C]^T [\mathbf{G}_C] [\underline{L}_C] \quad , & [\mathbf{C}^s] &= [\underline{U}^s] [\underline{L}_{Cs}]^T [\mathbf{G}_{Cs}] [\underline{L}_{Cs}] \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.20})$$

où $[\mathbf{G}_{Ms}]$, $[\mathbf{G}_{Ds}]$ et $[\mathbf{G}_{Ks}]$ sont des matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{Ma}]$ est une matrice aléatoire à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{Da}]$ et $[\mathbf{G}_{Ka}]$ sont des matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_a-1}^+(\mathbb{R})$, où $[\mathbf{G}_{Bs}]$ et $[\mathbf{G}_{Ba}]$ sont des matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ et $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$ respectivement et enfin, si $n_a \leq n_s$, les matrices aléatoires $[\mathbf{G}_C]$ et $[\mathbf{G}_{Cs}]$ sont à valeurs dans $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$.

Si $n_a > n_s$, les matrices aléatoires $[\mathbf{C}]$ et $[\mathbf{C}^s]$ s'écrivent

$$[\mathbf{C}] = [\underline{L}_C]^T [\mathbf{G}_C] [\underline{L}_C] [\underline{U}]^T \quad , \quad [\mathbf{C}^s] = [\underline{L}_{Cs}]^T [\mathbf{G}_{Cs}] [\underline{L}_{Cs}] [\underline{U}^s]^T \quad , \quad (\text{IV.21})$$

avec $[\mathbf{G}_C]$ et $[\mathbf{G}_{Cs}]$ des matrices aléatoires dans $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ et où $[\underline{C}]^T = [\underline{U}] [\underline{T}]$ et $[\underline{C}^s]^T = [\underline{U}^s] [\underline{T}^s]$.

IV.2.3 Information utilisable pour les matrices aléatoires normalisées

La construction du modèle non paramétrique des incertitudes utilise, pour construire les lois de probabilité des matrices aléatoires introduites, le principe de maximum d'entropie ou encore du maximum d'incertitude de la théorie de l'information (voir Shannon [127], Jaynes [73] [74]). La mise en œuvre du principe du maximum d'entropie requiert la définition de l'information

objective disponible. Dans le cadre de l'approche probabiliste non paramétrique des incertitudes, l'information objective disponible est définie dans les sous-paragraphes **C1**, **C2** et **C3** suivants.

(C1) Les matrices aléatoires pleines $[\mathbf{G}]$ doivent être symétriques définies positives presque sûrement. Donc pour tout $a \in \Theta$, on a $[\mathbf{G}_{M^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{D^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{K^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{B^s}(a)] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{M^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{D^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a-1}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{K^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a-1}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{B^a}(a)] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_a}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_C(a)]$ et $[\mathbf{G}_{C^s}(a)]$ sont dans $\mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$ si $n_a \leq n_s$ et sont dans $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ si $n_a > n_s$.

(C2) Compte tenu de l'équation (IV.1) et des équations (IV.7) à (IV.21) on déduit que les valeurs moyennes des matrices aléatoires $[\mathbf{G}]$ s'écrivent

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{M^s}]\} &= [I_{n_s}] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{D^s}]\} &= [I_{n_s}] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{K^s}]\} &= [I_{n_s}] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{M^a}]\} &= [I_{n_a}] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{D^a}]\} &= [I_{n_a-1}] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{K^a}]\} &= [I_{n_a-1}] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{B^s}]\} &= [I_{\tilde{n}_s}] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{B^a}]\} &= [I_{\tilde{n}_a}] \quad , \\ \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_C]\} &= [I_{n_a}] \text{ ou } [I_{n_s}] \quad , & \mathcal{E}\{[\mathbf{G}_{C^s}]\} &= [I_{n_a}] \text{ ou } [I_{n_s}] \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.22})$$

avec $[I_\nu]$ la matrice unité de dimensions $\nu \times \nu$.

(C3) Les moments d'ordre deux de la norme de Frobenius (définie ci-après) des inverses des matrices aléatoires doivent être finis pour que la solution aléatoire du modèle stochastique vibroacoustique soit du second ordre. Ceci s'écrit,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{M^s}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , & \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{D^s}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{K^s}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , & \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{M^a}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{D^a}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , & \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{K^a}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{B^s}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , & \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{B^a}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \\ \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_C]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , & \mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{C^s}]^{-1}\|_F^2\} &< +\infty \quad , \end{aligned} \quad (\text{IV.23})$$

avec $\|[A]\|_F = (\text{tr}([A][A]^T))^{1/2}$ la norme de Frobenius et $\text{tr}[A]$ la trace de la matrice $[A]$.

IV.2.4 Paramètres de dispersion des matrices aléatoires

On introduit les paramètres de dispersion δ_{M^s} , δ_{D^s} , δ_{K^s} , δ_{B^s} , δ_{M^a} , δ_{D^a} , δ_{K^a} , δ_{B^a} , δ_C et δ_{C^s} . Ces paramètres permettent de contrôler le niveau de dispersion des matrices aléatoires $[\mathbf{G}]$ et donc des matrices aléatoires $[\mathbf{M}^s]$, $[\mathbf{D}^s(\omega)]$, $[\mathbf{K}^s(\omega)]$, $[\mathbf{B}^s]$, $[\mathbf{C}]$, $[\mathbf{C}^s]$, $[\mathbf{M}^a]$, $[\mathbf{D}^a(\omega)]$, $[\mathbf{K}^a]$ et $[\mathbf{B}^a]$. Ils

sont définis par

$$\begin{aligned}
\delta_{M^s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{M^s}] - [\underline{G}_{M^s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{M^s}]\|_F^2}} , & \delta_{D^s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{D^s}] - [\underline{G}_{D^s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{D^s}]\|_F^2}} , \\
\delta_{K^s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{K^s}] - [\underline{G}_{K^s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{K^s}]\|_F^2}} , & \delta_{B^s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{B^s}] - [\underline{G}_{B^s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{B^s}]\|_F^2}} , \\
\delta_{M^a} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{M^a}] - [\underline{G}_{M^a}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{M^a}]\|_F^2}} , & \delta_{D^a} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{D^a}] - [\underline{G}_{D^a}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{D^a}]\|_F^2}} , & (IV.24) \\
\delta_{K^a} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{K^a}] - [\underline{G}_{K^a}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{K^a}]\|_F^2}} , & \delta_{B^a} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{B^a}] - [\underline{G}_{B^a}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{B^a}]\|_F^2}} , \\
\delta_C &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_C] - [\underline{G}_C]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_C]\|_F^2}} , & \delta_{C^s} &= \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}_{C^s}] - [\underline{G}_{C^s}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}_{C^s}]\|_F^2}} ,
\end{aligned}$$

La valeur des paramètres de dispersion doit être prise indépendante de la dimension des matrices. La théorie nous assure ainsi de la convergence de la solution stochastique lorsque n_s et n_a tendent vers l'infini (i.e. pour le problème continu de dimension infinie).

IV.2.5 Lois de probabilité des matrices aléatoires normalisées

La loi de probabilité de chaque matrice aléatoire a été construite avec l'information objective disponible donnée par les conditions **C1**, **C2**, et **C3** du paragraphe IV.2.3 en utilisant le principe du maximum d'entropie tel que l'a énoncé Jaynes ([73]). Pour simplifier les notations de ce sous-paragraphe, on introduit la matrice aléatoire $[\mathbf{G}(a)] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ qui, pour tout $a \in \Theta$, représente $[\mathbf{G}_{M^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{D^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{K^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{B^s}(a)] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_s}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{M^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{B^a}(a)] \in \mathbb{M}_{\tilde{n}_a}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{K^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a-1}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_{D^a}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a-1}^+(\mathbb{R})$, $[\mathbf{G}_C(a)] \in \mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ et $[\mathbf{G}_{C^s}(a)] \in \mathbb{M}_{n_a}^+(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{M}_{n_s}^+(\mathbb{R})$ où n représente n_s , n_a , \tilde{n}_s , \tilde{n}_a ou $n_a - 1$. Le paramètre de dispersion δ représente les paramètres δ_{M^s} , δ_{D^s} , δ_{K^s} , δ_{B^s} , δ_{M^a} , δ_{D^a} , δ_{K^a} , δ_{B^a} , δ_C et δ_{C^s} . Ce paramètre permet de contrôler le niveau de dispersion de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$. La loi de probabilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ est définie pour une densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])\tilde{d}\mathbf{G}$ par rapport à la mesure $\tilde{d}\mathbf{G}$ définie par l'équation (IV.26), qui s'écrit

$$P_{[\mathbf{G}]} = p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])\tilde{d}\mathbf{G} \quad , \quad (IV.25)$$

où $[\mathbf{G}] \mapsto p_{[\mathbf{G}]}([\mathbf{G}])$ est la fonction de densité de probabilité de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ et où la mesure $\tilde{d}\mathbf{G}$ sur $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ est telle que

$$\tilde{d}\mathbf{G} = 2^{n(n-1)/4} \times \prod_{1 \leq i < j \leq n} d[\mathbf{G}]_{ij} \quad . \quad (IV.26)$$

Compte tenu de **C1** et des équations (IV.22) et (IV.23), l'information objective disponible pour la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ s'écrit

$$[\mathbf{G}(a)] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \quad , \quad (\text{IV.27})$$

$$\mathcal{E}\{[\mathbf{G}]\} = [\underline{G}] = [I_n] \quad , \quad (\text{IV.28})$$

$$\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}]^{-1}\|_F^2\} < +\infty \quad . \quad (\text{IV.29})$$

L'entropie définie par Shannon dans le cadre de la théorie de l'information ([127]), associée à la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ s'écrit

$$\mathcal{S}(P_{[\mathbf{G}]}) = - \int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}]}([G]) \ln(p_{[\mathbf{G}]}([G])) \tilde{d}G \quad . \quad (\text{IV.30})$$

Les contraintes associées à l'information disponible et satisfaites par la densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ sont données à la suite. La fonction de densité de probabilité vérifie la condition de normalisation

$$\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} p_{[\mathbf{G}]}([G]) \tilde{d}G = 1 \quad . \quad (\text{IV.31})$$

D'après l'équation (IV.28), la fonction de densité de probabilité doit être telle que

$$\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} [G] p_{[\mathbf{G}]}([G]) \tilde{d}G = [I_n] \quad . \quad (\text{IV.32})$$

La contrainte suivante (où \det représente le déterminant) est introduite et implique (IV.23)

$$\int_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})} \log(\det[G]) p_{[\mathbf{G}]}([G]) \tilde{d}G = \nu \quad , \quad |\nu| < +\infty \quad . \quad (\text{IV.33})$$

L'espace \mathcal{G} des fonctions $[G] \mapsto p_{[\mathbf{G}]}([G])$ de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ et satisfaisant les équations (IV.31) à (IV.33) est défini. Le principe du maximum d'entropie appliqué à la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ avec les contraintes définies par les équations (IV.31) à (IV.33) s'écrit donc :

$$\text{Trouver } p_{[\mathbf{G}]}([G]) \text{ solution du problème d'optimisation } \max_{p_{[\mathbf{G}]} \in \mathcal{G}} \mathcal{S}(p_{[\mathbf{G}]}) \quad .$$

La méthode des multiplicateurs de Lagrange a été utilisée pour résoudre le problème d'utilisation sous contraintes. Il est alors montré que la fonction de densité de probabilité $p_{[\mathbf{G}]}([G])$ par rapport

à l'élément de volume $\tilde{d}G$ s'écrit :

$$p_{[\mathbf{G}]}([G]) = \mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G]) \times C_G \times (\det[G])^{(n+1)(1-\delta^2)/(2\delta^2)} \times \exp(-(n+1)\text{tr}[G]/(2\delta^2)) \quad , \quad (\text{IV.34})$$

où la fonction indicatrice $\mathbb{1}_{\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})}([G])$ est égale à 1 si $[G] \in \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ et est égale à 0 sinon. La constante C_G est une constante de normalisation positive qui s'écrit,

$$C_G = \frac{(2\pi)^{-n(n-1)/4} \times \left(\frac{n+1}{2\delta^2}\right)^{n(n+1)/(2\delta^2)}}{\prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2}\right)} \quad , \quad (\text{IV.35})$$

avec Γ la fonction gamma définie pour tout $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad . \quad (\text{IV.36})$$

L'équation (IV.34) montre que les éléments de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ sont des variables aléatoires dépendantes. Cette équation montre également que la fonction de densité de probabilité de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ de dimension n est paramétrée par l'unique scalaire δ qui est le paramètre de dispersion. Rappelons que le paramètre de dispersion δ de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$, défini par

$$\delta = \sqrt{\frac{\mathcal{E}\{\|[\mathbf{G}] - [\underline{G}]\|_F^2\}}{\|[\underline{G}]\|_F^2}} \quad , \quad (\text{IV.37})$$

doit à la fois vérifier la condition

$$0 < \delta < \sqrt{\frac{n+1}{n+5}} \quad , \quad (\text{IV.38})$$

et doit être pris indépendant de la dimension n . Par ailleurs, le tenseur de covariance $C_{ij,i'j'}^G = \mathcal{E}\{([\mathbf{G}]_{ij} - [\underline{G}]_{ij})([\mathbf{G}]_{i'j'} - [\underline{G}]_{i'j'})\}$ s'écrit,

$$C_{ij,i'j'}^G = \frac{\delta^2}{n+1} (\delta_{i'j} \delta_{ij'} + \delta_{ii'} \delta_{jj'}) \quad , \quad (\text{IV.39})$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker. La variance de la variable aléatoire $[\mathbf{G}]_{ij}$ est alors donnée par

$$V_{ij}^G = \frac{\delta^2}{n+1} (1 + \delta_{ij}) \quad . \quad (\text{IV.40})$$

La représentation algébrique suivante de la matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ permet de construire des réalisations indépendantes pour une simulation de Monte Carlo. La matrice aléatoire $[\mathbf{G}]$ peut s'écrire

$$[\mathbf{G}] = [\mathbf{L}_G]^T [\mathbf{L}_G] \quad , \quad (\text{IV.41})$$

où $[\mathbf{L}_G]$ est une matrice triangulaire supérieure à valeurs dans $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ correspondant à la factorisation de Cholesky. La matrice aléatoire $[\mathbf{L}_G]$ est telle que

(a) Les variables aléatoires $\{[\mathbf{L}_G]_{jj'}, j \leq j'\}$ sont indépendantes.

(b) Pour $j < j'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}_G]_{jj'}$ à valeurs réelles s'écrit,

$$[\mathbf{L}_G]_{jj'} = \sigma_n U_{jj'} \quad \text{avec} \quad \sigma_n = \delta(n+1)^{-1/2} \quad , \quad (\text{IV.42})$$

où $U_{jj'}$ est une variable aléatoire gaussienne à valeur réelle centrée de variance unité.

(c) Pour $j = j'$, la variable aléatoire $[\mathbf{L}_G]_{jj}$ à valeurs positives s'écrit

$$[\mathbf{L}_G]_{jj} = \sigma_n \sqrt{2V_j} \quad , \quad (\text{IV.43})$$

où σ_n est défini par l'équation (IV.42) et où V_j est une variable aléatoire à valeurs positives de loi gamma dont la fonction de densité de probabilité $p_{V_j}(v)$ par rapport à la mesure de Lebesgue dv sur \mathbb{R} s'écrit

$$p_{V_j}(v) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(v) \frac{v^{\alpha_{n,j}-1}}{\Gamma(\alpha_{n,j})} \exp(-v) \quad \text{avec} \quad \alpha_{n,j} = \frac{n+1}{2\delta^2} + \frac{1-j}{2} \quad . \quad (\text{IV.44})$$

On se donne un ensemble $\{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]\}$ de ν matrices aléatoires à valeurs dans $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$. L'information disponible pour chaque matrice aléatoire est définie par les équations (IV.31) à (IV.33). En utilisant le principe du maximum d'entropie à l'ensemble de ces matrices, on démontre que la densité de probabilité conjointe $\{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]\} \mapsto p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu])$ de $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ dans \mathbb{R}^+ par rapport à la mesure $\tilde{d}\mathbf{G}_1 \times \dots \times \tilde{d}\mathbf{G}_\nu$ sur $\mathbb{M}_n^+(\mathbb{R}) \times \dots \times \mathbb{M}_n^+(\mathbb{R})$ s'écrit

$$p_{[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]}([\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]) = \prod_{i=1}^n p_{[\mathbf{G}^i]}([\mathbf{G}^i]) \quad . \quad (\text{IV.45})$$

C'est-à-dire que les matrices $[\mathbf{G}^1], \dots, [\mathbf{G}^\nu]$ sont des matrices aléatoires indépendantes.

IV.3 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons appliqué au problème de vibroacoustique posé l'approche non paramétrique probabiliste de modélisation des incertitudes de modélisation et des incertitudes de données. Nous avons introduit les matrices aléatoires nécessaires à cette modélisation probabiliste

et obtenu le modèle stochastique du système vibroacoustique incertain qui s'écrit,

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^s(\omega)] + \underline{a}^s(\omega)[\mathbf{B}^s] & [\mathbf{C}] + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s] \\ \omega^2\{[\mathbf{C}]^T + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s]^T\} & [\mathbf{A}^a(\omega)] + \underline{a}^a(\omega)[\mathbf{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix},$$

avec

$$[\mathbf{A}^s(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^s] + i\omega [\mathbf{D}^s(\omega)] + [\mathbf{K}^s(\omega)], \quad [\mathbf{A}^a(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^a] + i\omega [\mathbf{D}^a(\omega)] + [\mathbf{K}^a].$$

La méthode de résolution de ces équations aléatoires est présentée au chapitre [V](#).

Chapitre V

Méthodologie de résolution des équations aléatoires

Sommaire

V.1	Introduction	72
V.2	Problème vibroacoustique stochastique	72
V.3	Méthode de simulation de Monte Carlo	73
V.4	Définition des variables aléatoires observées	73
V.5	Analyse de la convergence de la solution stochastique des équations aléatoires	74
V.6	Estimation statistique des observations aléatoires	75
V.7	Résumé du chapitre	76

V.1 Introduction

Nous avons choisi de résoudre les équations aléatoires présentées au chapitre IV par la méthode de Monte Carlo. Les traitements statistiques des grandeurs aléatoires observées sont identiques à ceux présentés dans Durand [42]. Les équations aléatoires sont donc celles du modèle réduit qui inclut le modèle d'habillage simplifié du système vibroacoustique. Pour simplifier la lecture de ce chapitre, nous rappelons les équations stochastiques du problème vibroacoustique à résoudre (paragraphe V.2). Nous présentons la méthode de résolution de Monte Carlo (voir Rubinstein [119]) (paragraphe V.3). Nous définissons les variables aléatoires observées dans le système vibroacoustique qui seront considérées dans les chapitres suivants pour les applications (paragraphe V.4). Nous faisons ensuite une analyse de la convergence de la solution stochastique (paragraphe V.5) puis nous présentons le traitement statistique des observations, en particulier les différentes estimations statistiques retenues pour l'estimation des régions de confiance (paragraphe V.6).

V.2 Problème vibroacoustique stochastique

Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, les équations aléatoires du système vibroacoustique stochastique en présence d'incertitudes s'écrivent (voir équations (IV.2) à (IV.4)),

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^s(\omega)] + \underline{a}^s(\omega)[\mathbf{B}^s] & [\mathbf{C}] + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s] \\ \omega^2 \{[\mathbf{C}]^T + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s]^T\} & [\mathbf{A}^a(\omega) + \underline{a}^a(\omega)[\mathbf{B}^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix}, \quad (\text{V.1})$$

$$[\mathbf{A}^s(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^s] + i\omega [\mathbf{D}^s(\omega)] + [\mathbf{K}^s(\omega)] \quad , \quad (\text{V.2})$$

$$[\mathbf{A}^a(\omega)] = -\omega^2 [\mathbf{M}^a] + i\omega [\mathbf{D}^a(\omega)] + [\mathbf{K}^a] \quad . \quad (\text{V.3})$$

Les vecteurs aléatoires des déplacements de la structure et de la pression dans le fluide acoustique sont donnés par (voir équations (IV.5) et (IV.6)),

$$\mathbf{U}^s(\omega) = [\underline{\Phi}^s] \mathbf{Q}^s(\omega) \quad , \quad \mathbf{P}(\omega) = [\underline{\Phi}^a] \mathbf{Q}^a(\omega) \quad . \quad (\text{V.4})$$

On réécrit l'équation (V.1),

$$[\mathcal{A}(\omega)] \mathbf{Q}(\omega) = \underline{\mathbf{f}}(\omega) \quad , \quad (\text{V.5})$$

où $[\mathcal{A}(\omega)]$ est la matrice aléatoire de "raideur" vibroacoustique généralisée, $\mathbf{Q}(\omega)$ est le vecteur aléatoire des coordonnées généralisées du problème vibroacoustique et $\underline{\mathbf{f}}(\omega)$ est le vecteur déterministe des forces généralisées du modèle moyen. La modélisation probabiliste non paramétrique

des incertitudes présentée au chapitre IV est telle que, pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, l'équation (V.5) a presque sûrement une unique solution stochastique donnée par,

$$\mathbf{Q}(\omega) = [\mathcal{A}(\omega)]^{-1} \underline{\mathbf{f}}(\omega) \quad , \quad (\text{V.6})$$

et qui est du second ordre (évidemment, l'écriture est formelle et la matrice $[\mathcal{A}(\omega)]^{-1}$ n'est pas directement construite). Le vecteur solution $\mathbf{Q}(\omega)$ étant une variable aléatoire du second ordre, pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, on a $\mathcal{E}\{\|\mathbf{Q}(\omega)\|^2\} < +\infty$. D'après les équations (V.1) à (V.5) et le chapitre IV, la matrice aléatoire $[\mathcal{A}(\omega)]$ dépend des matrices $[\mathbf{G}_{Ms}]$, $[\mathbf{G}_{Ds}]$, $[\mathbf{G}_{Ks}]$, $[\mathbf{G}_{Bs}]$, $[\mathbf{G}_{Ma}]$, $[\mathbf{G}_{Ba}]$, $[\mathbf{G}_C]$, $[\mathbf{G}_{Cs}]$, $[\mathbf{G}_{Da}]$ et $[\mathbf{G}_{Ka}]$. Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, la matrice $[\mathcal{A}(\omega)]^{-1}$ résulte, d'une transformation non linéaire (mesurable) des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{Ms}]$, $[\mathbf{G}_{Ds}]$, $[\mathbf{G}_{Ks}]$, $[\mathbf{G}_{Bs}]$, $[\mathbf{G}_{Ma}]$, $[\mathbf{G}_{Ba}]$, $[\mathbf{G}_C]$, $[\mathbf{G}_{Cs}]$, $[\mathbf{G}_{Da}]$ et $[\mathbf{G}_{Ka}]$.

V.3 Méthode de simulation de Monte Carlo

Pour résoudre l'équation (V.6), la méthode de simulation de Monte Carlo est utilisée. On rappelle que cette méthode est non intrusive et permet de contrôler efficacement les convergences. Un autre avantage de cette méthode de résolution réside dans le fait que l'on puisse effectuer facilement les calculs en parallèle.

Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, on résout donc l'équation (V.6) par la méthode de Monte Carlo. Pour $i = 1, \dots, n_r$ et pour $\theta_1, \dots, \theta_{n_r} \in \Theta$, soient $[\mathbf{G}_{Ms}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Ds}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Ks}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Bs}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Ma}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Ba}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_C(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Cs}(\theta_i)]$, $[\mathbf{G}_{Da}(\theta_i)]$ et $[\mathbf{G}_{Ka}(\theta_i)]$, les n_r réalisations indépendantes des matrices aléatoires $[\mathbf{G}_{Ms}]$, $[\mathbf{G}_{Ds}]$, $[\mathbf{G}_{Ks}]$, $[\mathbf{G}_{Bs}]$, $[\mathbf{G}_{Ma}]$, $[\mathbf{G}_{Ba}]$, $[\mathbf{G}_C]$, $[\mathbf{G}_{Cs}]$, $[\mathbf{G}_{Da}]$ et $[\mathbf{G}_{Ka}]$. La construction de ces matrices aléatoires est faite à partir de la représentation algébrique introduite au paragraphe IV.2.5.

V.4 Définition des variables aléatoires observées

Les niveaux vibratoires et acoustiques sont caractérisés en décibels (dB). Les modules des fonctions de réponse en fréquence des accélérations de la structure et de la pression dans la cavité acoustique sont exprimés en dB. Soit $f = 2\pi/\omega$ la fréquence en Hertz du système.

De même, on définit la fonction $f \mapsto dB_{\text{accel}}^i(f)$ la fonction représentant en dB le module de la

réponse en fréquence en accélération pour un degré de liberté i de la structure et telle que

$$dB_{\text{accel}}^i(f) = 20 \log_{10}(|-\omega^2 U_i^s(2\pi f)|) \quad , \quad (\text{V.7})$$

où $U_i^s(2\pi f)$ est la composante i du vecteur aléatoire $\mathbf{U}^s(\omega)$. On définit la fonction $f \mapsto dB_{\text{press}}^i(f)$ représentant en dB le module de la réponse en fréquence en pression pour un degré de liberté j acoustique telle que

$$dB_{\text{press}}^j(f) = 20 \log_{10} \left(\frac{|P_j(2\pi f)|}{P_{\text{ref}}} \right) \quad , \quad (\text{V.8})$$

où $P_j(2\pi f)$ est la composante j du vecteur aléatoire des pressions acoustiques $\mathbf{P}(\omega)$ et P_{ref} est la pression de référence définie par $P_{\text{ref}} = 2 \times 10^{-5}$ Pa.

V.5 Analyse de la convergence de la solution stochastique des équations aléatoires

L'étude de la convergence de la solution stochastique est faite en moyenne d'ordre deux ce qui implique la convergence en probabilité et la convergence en loi. Soit $\mathbf{Q}^\ell(\omega)$ désignant $\mathbf{Q}^s(\omega)$ ou $\mathbf{Q}^a(\omega)$. Pour cela, on introduit la norme $|||\mathbf{Q}^\ell(\omega)|||_{\mathbb{B}}$ de $\{\mathbf{Q}^s(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$ telle que

$$|||\mathbf{Q}^\ell|||_{\mathbb{B}}^2 = \int_{\mathbb{B}} |||\mathbf{Q}^\ell(\omega)|||^2 d\omega \quad , \quad (\text{V.9})$$

avec

$$|||\mathbf{Q}^\ell(\omega)|||^2 = \mathcal{E} \left\{ \|\mathbf{Q}^\ell(\omega)\|^2 \right\} \quad , \quad (\text{V.10})$$

où $\|\mathbf{Q}^\ell(\omega)\|^2 = \sum_{k=1}^{n_\ell} |Q_k^\ell(\omega)|^2$ avec $\mathbf{Q}^\ell(\omega) = (Q_1^\ell(\omega), \dots, Q_{n_\ell}^\ell(\omega))$. Dans ces conditions, la convergence en moyenne d'ordre deux de la solution de l'équation stochastique (V.1), peut être étudiée vis-à-vis (1) du nombre n_r de réalisations et (2) de la dimension du modèle réduit stochastique représentée par n_s (nombre de modes élastiques de la structure) et par n_a (nombre de modes acoustiques). On analyse la convergence en étudiant le graphe de la fonction suivante qui est un estimateur de la norme $|||\mathbf{Q}^\ell(\omega)|||_{\mathbb{B}}^2$,

$$(n_r, n_s, n_a) \mapsto \text{Conv}^\ell(n_r, n_s, n_a) = \int_{\mathbb{B}} \frac{1}{n_r} \sum_{j=1}^{n_r} \|\mathbf{Q}^\ell(\omega, \theta_j)\|^2 d\omega \quad . \quad (\text{V.11})$$

L'étude des applications partielles $(n_r, n_s) \mapsto \text{Conv}^s(n_r, n_s, n_a)$ pour n_a fixé et $(n_r, n_a) \mapsto \text{Conv}^a(n_r, n_s, n_a)$ pour n_a fixé permettent de déterminer les valeurs optimales des paramètres assurant la convergence en moyenne d'ordre deux de la solution.

V.6 Estimation statistique des observations aléatoires

V.6.1 Estimation de la loi de probabilité

Soit B une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R} . Pour b fixé dans \mathbb{R} , une estimation $\tilde{G}_{B,n_r}(b)$ de la probabilité $\mathcal{P}(B > b)$ est donnée par

$$\tilde{G}_{B,n_r}(b) = \frac{1}{n_r} \sum_{k=1}^{n_r} H_0(B(\theta_k) - b) \quad , \quad (\text{V.12})$$

où H_0 est la fonction de Heaviside définie par $H_0(x) = 1$, si $x > 0$ et $H_0(x) = 0$ sinon et où $B(\theta_1), \dots, B(\theta_{n_r})$ sont n_r réalisations indépendantes de B .

V.6.2 Estimation des régions de confiance

(A) Estimation des régions de confiance par la méthode des quantiles

Pour ω fixé dans \mathbb{B} , soit $W(\omega)$ la variable aléatoire dans \mathbb{R} représentant $dB_{\text{accel}}^i(f)$ ou $dB_{\text{press}}^j(f)$ (voir les équations (V.7) à (V.8)). La région de confiance associée à un niveau de probabilité P_c pour le processus stochastique $\{W(\omega), \omega \in \mathbb{B}\}$ est déterminée par l'utilisation des quantiles (voir Serfling [126]). Pour $\omega \in \mathbb{B}$, on définit la fonction de répartition $F_{W(\omega)}$ continue à droite de la variable aléatoire $W(\omega)$ telle que $F_{W(\omega)} = P(W(\omega) \leq w)$. Pour $0 < p < 1$, le $p^{\text{ième}}$ quantile ou fractile de $F_{W(\omega)}$ est défini par

$$\zeta(p) = \inf_{F_{W(\omega)} \geq p} \{w\} \quad . \quad (\text{V.13})$$

On définit l'enveloppe supérieure $w^+(\omega)$ et l'enveloppe inférieure $w^-(\omega)$ de la région de confiance par,

$$w^+(\omega) = \zeta\left(\frac{1+P_c}{2}\right) \quad , \quad w^-(\omega) = \zeta\left(\frac{1-P_c}{2}\right) \quad . \quad (\text{V.14})$$

L'estimation de $w^+(\omega)$ et $w^-(\omega)$ est alors effectuée en utilisant les réalisations indépendantes $w_i = W(\omega, \theta_i)$, pour $i = 1, \dots, n_r$, de la variable aléatoire $W(\omega)$. On associe à $w_1(\omega), \dots, w_{n_r}(\omega)$ la statistique ordonnée $\tilde{w}_1(\omega) < \dots < \tilde{w}_{n_r}(\omega)$. En notant $\text{fix}(x)$ la fonction partie entière du réel x , on a donc

$$w^+(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^+}(\omega) \quad , \quad j^+ = \text{fix}\left(n_r \frac{1+P_c}{2}\right) \quad , \quad (\text{V.15})$$

et

$$w^-(\omega) \simeq \tilde{w}_{j^-}(\omega) \quad , \quad j^- = \text{fix}\left(n_r \frac{1-P_c}{2}\right) \quad . \quad (\text{V.16})$$

(B) Estimation des régions de confiance par l'inégalité de Tchebychev

Une autre méthode permet d'estimer les régions de confiance en utilisant l'inégalité de Tchebychev. Pour tout $\omega \in \mathbb{B}$, l'intervalle de confiance associé à la probabilité P_c est définie par l'équation

$$\mathcal{P}[w^-(\omega) < W(\omega) < w^+(\omega)] \geq P_c \quad , \quad (\text{V.17})$$

où les enveloppes supérieure $w^+(\omega)$ et inférieure $w^-(\omega)$ sont construites en utilisant l'inégalité de Tchebychev $\mathcal{P}[|W(\omega) - \mathcal{E}\{W(\omega)\}| \geq a(\omega)] \leq \sigma_{W(\omega)}^2/a(\omega)^2$, avec $\sigma_{W(\omega)}^2$ la variance de la variable aléatoire $W(\omega)$,

$$w^+(\omega) = \mathcal{E}\{W(\omega)\} + \vartheta(\omega) \quad (\text{V.18})$$

$$w^-(\omega) = \mathcal{E}\{W(\omega)\} - \vartheta(\omega) \quad , \quad (\text{V.19})$$

avec $\vartheta(\omega) = \sigma_{W(\omega)}/\sqrt{1 - P_c}$.

Remarque La prévision des enveloppes par la méthode des quantiles est exacte si l'estimateur de la fonction de répartition de la quantité observée est convergé par rapport au nombre de simulations. Pour les faibles niveaux de probabilité, cette convergence nécessite un grand nombre de simulations. Par contre dans la seconde méthode, il suffit que l'estimateur de la variance de la quantité observée soit convergé, ce qui implique un nombre de réalisations plus faible que dans le premier cas. Mais on obtient dans ce cas la borne inférieure du niveau de probabilité. Dans la pratique, le choix de la méthode utilisée pour la construction des régions de confiance sera dicté par la lourdeur de la simulation.

V.7 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre on a expliqué comment nous résolvons les équations aléatoires du système vibroacoustique. Nous avons présenté la méthode de Monte Carlo et son application aux cas particuliers des observables vibroacoustiques utilisés. L'algorithme de résolution du système d'équations aléatoires est donné en annexe [E](#).

Chapitre VI

Validation du modèle simplifié d'habillage et méthodologie d'identification des paramètres du modèle d'un habillage réel

Sommaire

VI.1 Introduction	78
VI.2 Méthodologie d'identification des paramètres moyens du modèle simplifié d'habillage	78
VI.3 Identification expérimentale des paramètres de dispersion du modèle probabiliste	88
VI.4 Prédiction des réponses vibroacoustiques avec le modèle stochastique numérique identifié	97
VI.5 Graphes des coefficients du modèle simplifié de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues	100
VI.6 Résumé du chapitre	104

VI.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'identification des paramètres du modèle simplifié d'habillage sur un cas simple : une plaque encastrée dans un cadre élastique lui-même suspendu et recouvert d'un habillage. Dans un premier temps, on applique la méthodologie d'estimation *sur plan* des paramètres du modèle moyen de l'habillage définie au paragraphe II.7. Dans un deuxième temps, on cherche à améliorer cette estimation en identifiant expérimentalement le coefficient de masse participante moyen. On propose dans ce chapitre une méthode d'identification des paramètres de dispersion du modèle simplifié probabiliste de l'habillage fondé sur une réduction statistique. Dans le paragraphe VI.2.3, on utilise les résultats du chapitre II pour estimer le taux de dissipation moyen, le coefficient de masse participante moyen et la densité modale moyenne. Dans le paragraphe VI.2.4, on identifie expérimentalement le coefficient de masse participante moyen à l'aide de la densité modale moyenne *sur plan*. On présente le dispositif expérimental utilisé pour identifier ces paramètres et les résultats de l'identification. Le paragraphe VI.3 est dédié à l'identification des paramètres du modèle stochastique. Les paramètres de dispersion sont identifiés en combinant le principe du maximum de vraisemblance précédé d'une réduction statistique en suivant la méthode récemment présentée dans la référence Soize *et al.* [145]. Dans le dernier paragraphe VI.4, on compare les résultats du modèle simplifié de l'habillage identifié aux paragraphes VI.2.3 et VI.2.4 avec un calcul de référence sur une fonction de réponse en fréquence vibroacoustique (voir Fernandez *et al.* [56]).

VI.2 Méthodologie d'identification des paramètres moyens du modèle simplifié d'habillage

Description de la méthodologie

On se propose d'appliquer la méthode d'identification proposée au paragraphe II.7 pour déterminer la densité modale et le coefficient de masse participante puis d'améliorer le modèle moyen simplifié d'habillage en exploitant une base de données expérimentale. On suit le schéma donné ci-après :

- (1) On considère une structure dont les fonctions de réponses en fréquence sont mesurées dans la bande $\mathbb{B} =]0, 300]$ Hz.
- (2) Un habillage de carrosserie (constitué d'un assemblage d'une mousse polyuréthane et d'un septum en polymère de type EPDM) est posé sur la structure et les FRF sont mesurées à nouveau pour la structure couplée avec cet habillage.

- (3) On construit et on recalcule un modèle éléments finis moyen pour la structure seule en utilisant les FRF expérimentales mesurées au point (1) ci-dessus.
- (4) On construit le modèle moyen de la structure couplée avec l'habillage en utilisant le modèle moyen recalculé de la structure seule et le modèle simplifié moyen de l'habillage. Ce modèle simplifié moyen dépend des trois paramètres inconnus $\underline{\xi}(\omega)$, $\underline{n}(\omega)$ et $\underline{\nu}(\omega)$ que l'on se propose d'identifier (*dans une première étape*) (voir paragraphe VI.2.3) en utilisant directement la méthode proposée au paragraphe II.7 qui consiste à sélectionner les fréquences propres correspondant aux modes dont la contribution significative se fait dans la direction normale au plan de la plaque. On définit la fréquence de coupure Ω_C comme étant la première fréquence propre pour laquelle la densité modale moyenne est non nulle. Cette fréquence de coupure peut être vue comme la fréquence pour laquelle l'habillage commence à transmettre de l'énergie grâce à ses propres fréquences de résonance (les résonances dynamiques internes prises en compte par la théorie des structures floues). Le critère de sélection ainsi que le calcul du coefficient de masse participante *sur plan* sont rappelés ci-après au paragraphe VI.2.3. On propose d'améliorer l'identification du coefficient de masse participante (*dans une seconde étape*) (voir paragraphe VI.2.4) en utilisant les FRF expérimentales mesurées au point (2) ci-dessus. On suit la méthodologie :
- a. Sur toute la bande de fréquences \mathbb{B} , le taux d'amortissement moyen $\underline{\xi}$ de l'habillage est considéré indépendant de la fréquence ω et est fixé à la valeur fournie par l'ingénierie.
 - b. On utilise la densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$ calculée au paragraphe II.7.
 - c. Pour $\omega < \Omega_C$, le coefficient de masse participante $\underline{\nu}(\omega)$ est égal à 1 et la densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$ est nulle. Les trois coefficients $\underline{a}^s(\omega)$, $\underline{a}^a(\omega)$ and $\underline{a}^c(\omega)$ (définis par les équations (II.115), (II.116), (II.117)) sont donc donnés par les équations suivantes, $\underline{a}^s(\omega) = -\underline{\mu}(\omega)\omega^2$, $\underline{a}^a(\omega) = 0$ and $\underline{a}^c(\omega) = 1$ (voir les équations (II.119), (II.120) et (II.121)).
 - d. Pour $\omega \geq \Omega_C$, le paramètre $\nu(\omega)$ est identifié expérimentalement en résolvant un problème inverse formulé en tant que problème d'optimisation. Si l'habillage a déjà été identifié, on prend alors la valeur correspondante de $\underline{\nu}(\omega)$ dans la base de données existante.

VI.2.1 Dispositif expérimental

Le dispositif expérimental et les mesures ont été réalisés au laboratoire du service Acoustique et Vibrations de PSA Peugeot Citroën. Le système mécanique est constitué d'une plaque mince homogène, isotropique et faiblement dissipative (plaque en acier d'épaisseur constante) dont les



FIG. VI.1 – Configuration expérimentale

bords sont attachés à un cadre élastique en acier constitué de quatre tubes à section rectangulaire et maintenue grâce à une pièce rapportée en acier vissée au cadre au moyen de quatorze vis-écrous (voir les figures VI.1 and VI.2). Le système ainsi construit permet de mesurer facilement les fonctions de réponse en fréquence (FRF) de la plaque nue ou habillée selon le besoin. Lors de mesures avec habillage, celui-ci est posé directement sur la plaque et il est facilement interchangeable. L'ensemble de la structure est suspendu par quatre élastiques (voir figure VI.1) tels que les fréquences propres du solide ainsi suspendu (la plus haute est à 9 Hz) soient très basses devant la première fréquence propre de la structure (43 Hz). Le cadre élastique rigide est censé induire un encastrement de la plaque sur le cadre qui est lui en condition libre-libre (aux effets de suspension près). Ces conditions aux limites sont du type de celles d'un panneau habillé dans une automobile. Le dispositif comprend également une chaîne d'acquisition, un portique et une chaîne de vibrométrie L.A.S.E.R.. La structure est excitée verticalement en un point du cadre au moyen d'un pot vibrant (voir figure VI.1). Les rayons émis par le L.A.S.E.R. et réfléchis sont comparés par interférométrie. Les FRF des accélérations normales à la plaque sont identifiées en 60 points (voir figure VI.2) grâce aux mesures effectuées avec le vibromètre. La bande d'analyse est la bande $\mathbb{B} =]0, 300]$ Hz.

L'excitation ponctuelle appliquée sur le cadre excite le système dynamique principalement en flexion dans la bande d'analyse $\mathbb{B} =]0, 300]$ Hz. Le nombre de points d'échantillonnage fréquentiel est $n_{\text{freq}} = 300$. La résolution fréquentielle est $\Delta f = 1$ Hz. Soient $\omega \mapsto \gamma_i^{\text{exp}}(\omega)$, les FRF identifiées sur la bande de fréquences \mathbb{B} pour les $n_{\text{obs}} = 60$ accélérations normales à la plaque (voir figure VI.2). On construit ensuite l'observation expérimentale $\omega \mapsto r^{\text{exp}}(\omega)$, telle que

$$r^{\text{exp}}(\omega) = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} |\gamma_i^{\text{exp}}(\omega)|^2 \right) . \quad (\text{VI.1})$$

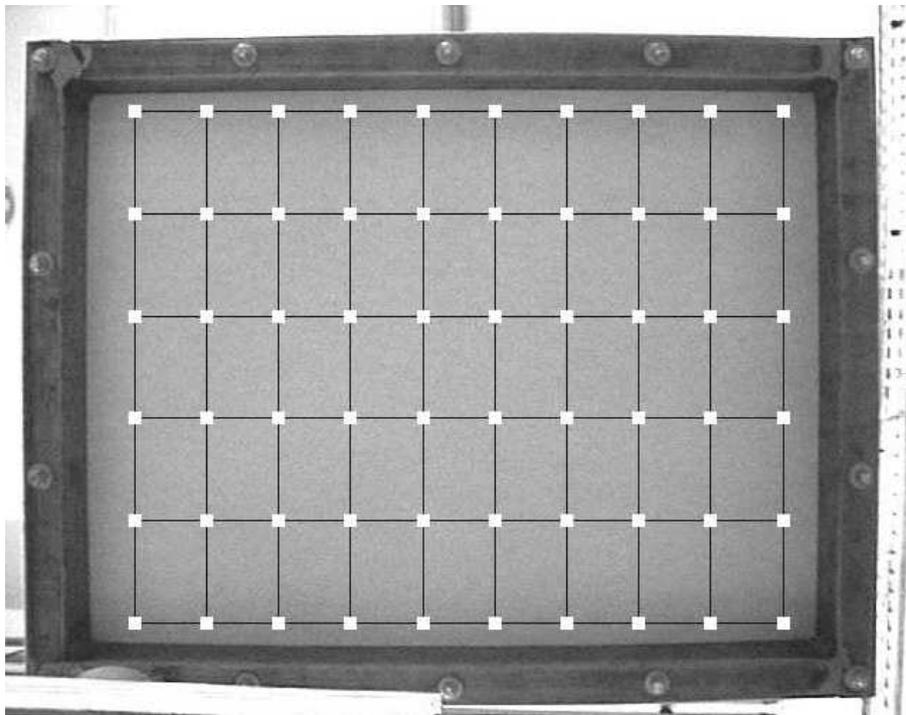


FIG. VI.2 – Soixante points d'observation

VI.2.2 Recalage expérimental du modèle moyen de la structure sans habillage

Le modèle moyen de la structure est fait d'un modèle EF ayant $m_s = 57768$ degrés de liberté (DDL) structuraux (voir la figure VI.3). Le modèle moyen réduit est construit avec $n_s = 240$ modes élastiques structuraux. Le modèle moyen est recalé en faisant varier le module d'Young, la masse volumique et le taux d'amortissement de la plaque et du cadre. On a recalé le modèle moyen en essayant de faire coïncider en fréquence et en niveau les pics des quatre premiers

modes élastiques du système dynamique (correspondant aux quatre premiers modes élastiques de la plaque) et du neuvième mode élastique du système dynamique (correspondant au mode élastique de torsion du cadre). Le modèle moyen recalé sera simplement dénommé le modèle moyen ci-dessous.

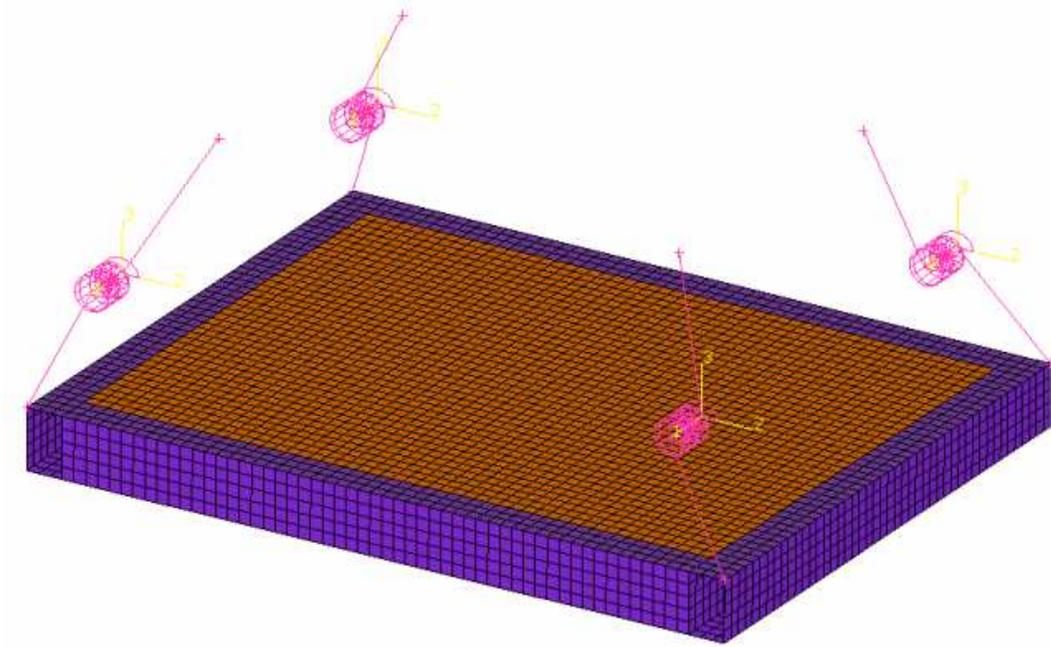


FIG. VI.3 – Modèle numérique détaillé de la structure nue

On introduit la fonction,

$$\omega \mapsto r(\omega) = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} |\gamma_i(\omega)|^2 \right) . \quad (\text{VI.2})$$

La figure VI.4 permet de comparer les graphes de la mesure expérimentale et de la FRF du modèle moyen de la structure sans habillage.

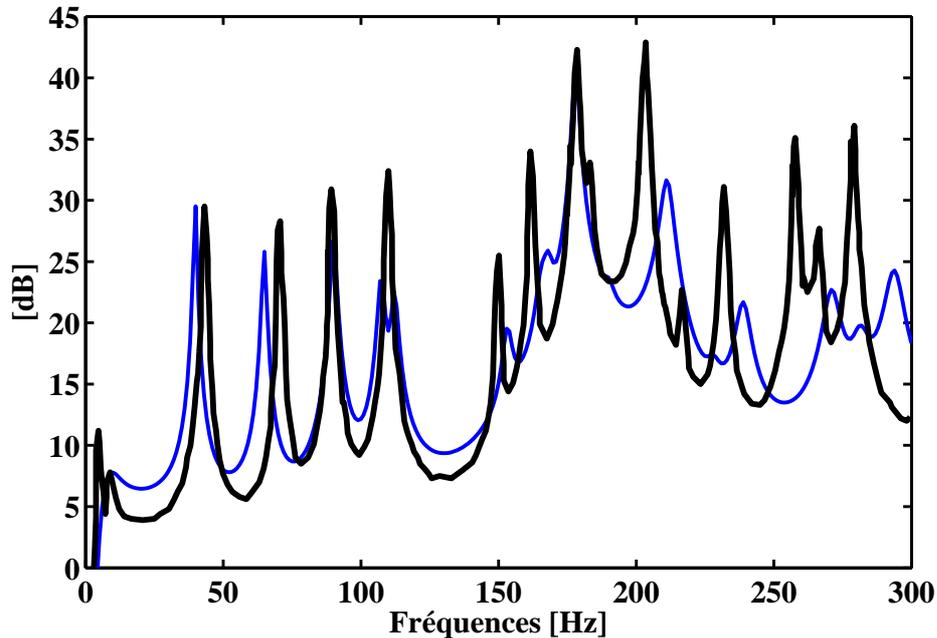


FIG. VI.4 – Structure sans habillage : Graphes de $\omega \mapsto r(\omega)$ (trait bleu fin) et $\omega \mapsto r^{\text{exp}}(\omega)$ (trait noir épais)

Commentaires

Le recalage du modèle numérique de la structure est *bon dans l'ensemble*. On notera cependant des différences significatives entre le modèle numérique et les mesures expérimentales qui sont dues à des choix de modélisation. On a essayé de privilégier les niveaux des 4 premiers modes de structure et surtout du mode de torsion du cadre (178 Hz). Il apparaît que le niveau des deuxième et quatrième modes de structure n'est pas parfaitement recalé. Il est à noter de plus que les 2 premières fréquences propres du modèle numérique sont plus petites que les deux premières fréquences propres expérimentales pour les mêmes raisons de compromis avec le recalage des niveaux. Finalement, le niveau des anti-résonances n'a pas pu être mieux recalé sur la bande $[0, 170]$ Hz. On verra que cela induit une erreur de modèle importante qui se répercute sur la réponse du modèle numérique avec le modèle simplifié de l'habillage (voir la figure VI.8 qui montre le graphe de la réponse de la plaque habillée). Ces erreurs de modèle sont principalement à imputer à la modélisation du cadre comme un cadre parfait alors qu'il est composé de quatre tubes soudés entre eux et que l'encastrement supposé de la plaque dans le cadre est dans la pratique un assemblage avec une pièce rapportée et quatorze vis-écrous.

VI.2.3 Application de l'estimation *sur plan* des paramètres du modèle moyen de l'habillage

On suit la méthodologie présentée au paragraphe II.7. Le taux de dissipation $\xi = 0.17$ de l'habillage est fourni par l'ingénierie et correspond aux taux de dissipation des matériaux composant l'habillage qui est constitué d'une couche de mousse ayant le comportement d'un matériaux poreux et d'une couche de septum fortement amorti (EPDM) ($\eta = 0.35$ pour la mousse et $\eta = 0.30$ pour le septum). On construit un modèle numérique en éléments finis de l'habillage (voir figure VI.5). Les nœuds de la mousse sont encastrés sur sa base (ce qui correspond à l'interface Γ_s habillage/structure). Le modèle numérique comporte 338013 degrés de liberté.

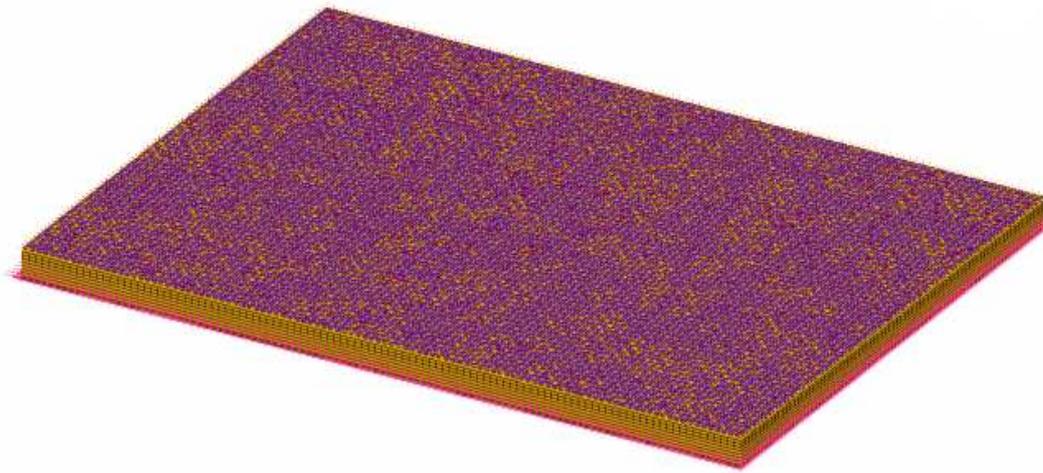
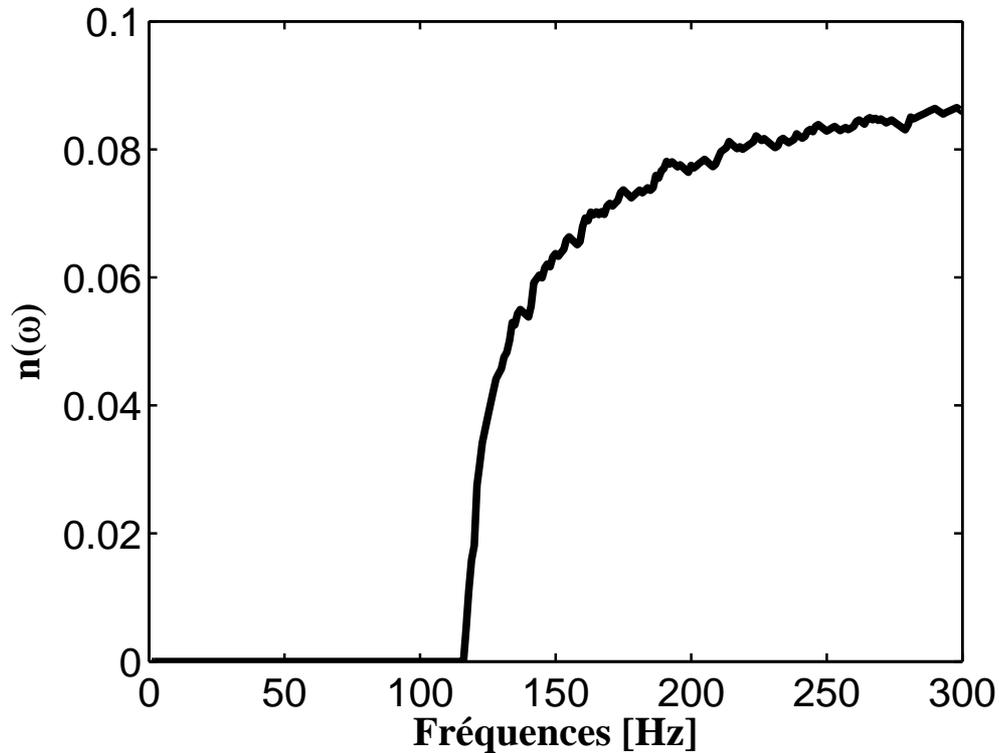


FIG. VI.5 – Modèle numérique détaillé de l'habillage

On fait une analyse modale et on calcule le coefficient de masse participante moyen *sur plan* $\underline{\nu}(\omega)$ donné par l'équation (II.152) dont le graphe est représenté sur la figure VI.7. On calcule la densité modale moyenne $\underline{n}(\omega)$ en comptant les fréquences propres correspondantes (voir l'équation (II.155)) dont le graphe est donné par la figure VI.6. La fréquence de coupure de l'habillage est $\Omega_C = 2 \times \pi \times 117 \text{ rad.s}^{-1}$.

FIG. VI.6 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{n}(\omega)$

VI.2.4 Identification expérimentale des paramètres du modèle moyen d'habillage

Des mesures similaires à celle présentée dans le paragraphe VI.2.2 ont été effectuées pour la structure couplée avec l'habillage présenté au paragraphe VI.2.3. L'habillage est simplement posé sur la plaque. Le modèle réduit s'écrit (voir l'équation (III.31)),

$$[\underline{A}^s(\omega) + \underline{a}^s(\omega)[\underline{B}^s]] \underline{q}^s(\omega) = \underline{f}^s(\omega) \quad . \quad (\text{VI.3})$$

Il est utilisé pour identifier le paramètre $\underline{\nu}(\omega)$ du modèle moyen simplifié d'habillage pour ω dans \mathbb{B} :

(VI.2.4.1) La densité modale moyenne utilisée est celle calculée précédemment et dont le graphe est donné à la figure VI.6 et le taux d'amortissement moyen est celui fourni par l'ingénierie ($\xi = 0.17$).

(VI.2.4.2) Dans la bande de fréquences $]0, \Omega_C]$, on rappelle que l'habillage est équivalent à une masse ajoutée. L'expression du coefficient $\underline{a}^s(\omega)$ est donc donnée par

$$\underline{a}^s(\omega) = -\underline{\mu}\omega^2 \quad \text{pour } \omega \leq \Omega_C \quad . \quad (\text{VI.4})$$

(VI.2.4.3) Dans la bande de fréquences $[\Omega_C, 300]$ Hz, le problème d'optimisation consiste à minimiser la distance entre le modèle et les mesures pour la fonction

$$\omega \mapsto r(\omega; \underline{\nu}(\omega)) = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} |\gamma_i(\omega; \underline{\nu}(\omega))|^2 \right) \quad .$$

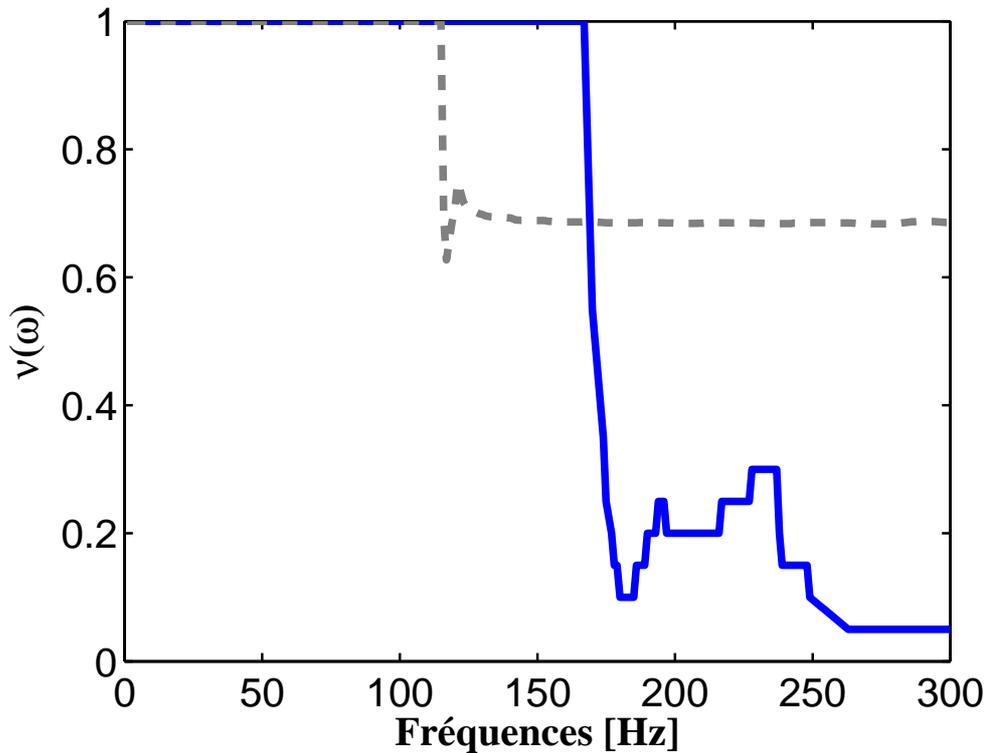


FIG. VI.7 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{\nu}(\omega)$ *sur plan* (trait gris épais discontinu); expérimental (noir épais)

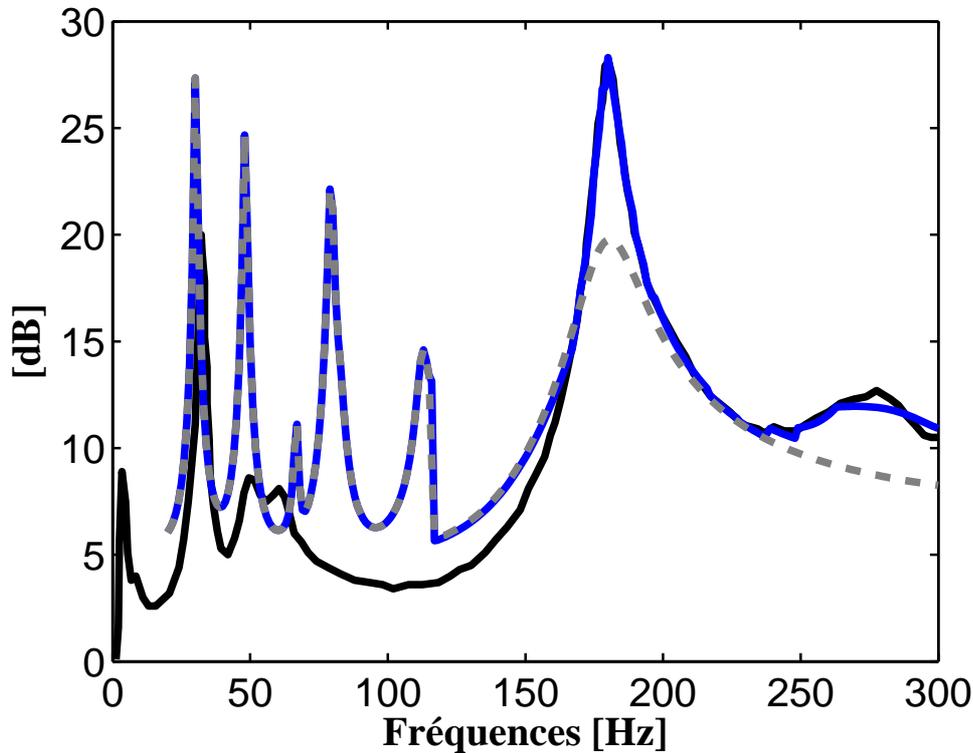


FIG. VI.8 – Système dynamique avec habillage ; graphes des fonctions $\omega \mapsto r(\omega; \underline{\nu}(\omega))$ (le trait gris discontinu correspond au modèle avec la masse participante *sur plan*, le trait bleu correspond au modèle avec la masse participante identifiée expérimentalement) et $\omega \mapsto r^{\text{exp}}(\omega)$ (trait noir épais)

Commentaires

Dans la bande $]0, 117[$ Hz, i.e. avant la fréquence de coupure (à $\Omega_C = 2 \times \pi \times 117 \text{ rad.s}^{-1}$), le modèle simplifié de l'habillage est équivalent à une masse ajoutée sur la structure. On voit que les deux premières fréquences propres de la structure (en prenant en compte l'erreur commise pour le modèle numérique de la structure nue et commentée au paragraphe VI.2.2) sont décalées de la même valeur que pour les mesures expérimentales par rapport à la structure nue. Les niveaux du modèle simplifié restent cependant plus élevés que les mesures expérimentales. Ceci s'explique par le fait que l'habillage est simplement posé sur la plaque et que donc la réponse expérimentale de la plaque est amortie par un effet des liaisons de l'habillage avec la plaque. Le modèle numérique ne rend pas compte de ce comportement induit par la nature des liaisons. Dans la bande $[117, 300]$ Hz, on voit que le modèle simplifié de l'habillage paramétré avec les paramètres *sur plan* (en gris discontinu) reproduit une *bonne allure dans l'ensemble* de la réponse

expérimentale (en noir épais). Sur cette bande, on a identifié expérimentalement le coefficient de masse participante qui permet d'obtenir un très bon recalage de la réponse expérimentale à l'exception de la bande [117, 170] Hz où le niveau reste trop élevé. On a déjà vu que ce problème était lié aux erreurs de modélisations commises sur le modèle numérique de la structure nue.

(VI.2.4.4) L'identification des paramètres moyens $\underline{\nu}(\omega)$, $\underline{\xi}$ et $\underline{n}(\omega)$ peut être menée en n'utilisant que la partie structurale du modèle vibroacoustique. On notera en effet que cette identification permet d'obtenir non seulement le coefficient $\underline{a}^s(\omega)$ mais aussi les coefficients $\underline{a}^c(\omega)$ et $\underline{a}^a(\omega)$. On n'a donc besoin que de la partie structurale du modèle vibroacoustique pour identifier le modèle moyen simplifié de l'habillage (*i.e.* la partie structurale, la partie de couplage fluide-structure et la partie acoustique).

VI.3 Identification expérimentale des paramètres de dispersion du modèle probabiliste

VI.3.1 Définition de la variable d'observation et convergence du solveur stochastique

Dans ce paragraphe, on effectue l'identification expérimentale des paramètres de dispersion δ_{M_s} , δ_{D_s} and δ_{K_s} pour la structure et δ_{B_s} pour le modèle probabiliste d'habillage. Cette identification est menée en utilisant le modèle réduit stochastique,

$$[\mathbf{A}^s(\omega) + \underline{a}^s(\omega)[\mathbf{B}^s]] \mathbf{Q}^s(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \quad ,$$

pour la structure couplée avec l'habillage mais non couplée avec une cavité acoustique (voir l'équation (IV.4)), pour laquelle on a la relation $\mathbf{U}^s(\omega) = [\underline{\Phi}^s] \mathbf{Q}^s(\omega)$ entre les déplacements, les modes élastiques et les coordonnées généralisées des déplacements (voir l'équation (IV.5)).

Pour ω fixée dans \mathbb{B} , on construit (voir le chapitre V pour les détails de construction)

(1) n_r réalisations indépendantes de la variable aléatoire $\mathbf{U}^s(\omega) = (U_1^s(\omega), \dots, U_{m_s}^s(\omega))$. Pour chaque réalisation $\mathbf{U}^s(\omega; \theta_\ell)$ du vecteur aléatoire $\mathbf{U}^s(\omega)$, on calcule la réalisation correspondante $R^s(\omega; \theta_\ell) = 10 \log_{10} (\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} |\omega^2 U_{k_i}^s(\omega; \theta_\ell)|^2)$ où n_{obs} représente le nombre de points d'observation de la variable aléatoire $R^s(\omega)$, donnée par l'équation suivante,

$$R^s(\omega) = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{obs}}} |\omega^2 U_{k_i}^s(\omega)|^2 \right) \quad ; \quad (\text{VI.5})$$

(2) puis on effectue une analyse de la convergence par rapport au nombre n_r de réalisations et au nombre n_s de modes élastiques. On utilise ensuite les statistiques ordonnées et la méthode des quantiles pour construire une estimation des régions de confiance.

En conséquence, pour la plus grande valeur possible fixée à 0.8 des paramètres de dispersion δ_{M_s} , δ_{D_s} , δ_{K_s} et δ_{B_s} , on calcule la valeur de n_r et n_s donnant la convergence en moyenne d'ordre deux, *i.e.* on étudie la fonction $(n_r, n_s) \mapsto \text{Conv}^s(n_r, n_s)$ (voir l'équation (V.11)). Le graphe de cette fonction est montré à la figure VI.9. On peut y voir que la convergence est raisonnablement atteinte pour $n_s = 103$ modes élastiques et $n_r = 800$ réalisations. Dans la méthodologie d'identification présentée ci-après, ces paramètres n_r et n_s sont fixés à ces valeurs. On est ainsi assuré d'être convergé pour des valeurs des paramètres de dispersion inférieures ou égales à 0.8.

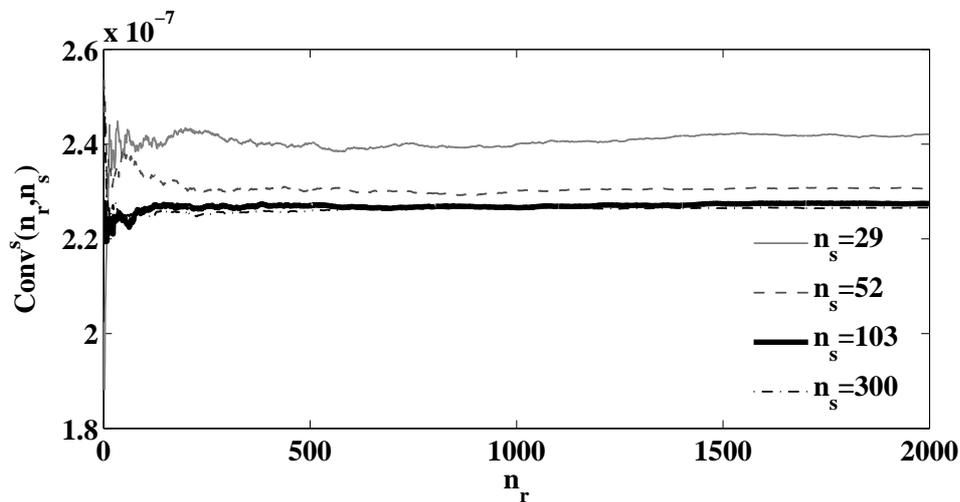


FIG. VI.9 – Graphe de la fonction $(n_r, n_s) \mapsto \text{Conv}^s(n_r, n_s)$

VI.3.2 Identification des paramètres de dispersion

(VI.3.2.1) Dans un premier temps, on utilise la base de données expérimentales (introduite au paragraphe VI.2.1) afin d'identifier les paramètres de dispersion δ_{M_s} , δ_{D_s} et δ_{K_s} pour la structure. La valeur du paramètre de dispersion associé à l'amortissement δ_{D_s} est fixée *a priori* à $\delta_{D_s} = 0.3$. Afin de vérifier que la réponse stochastique du système dynamique est peu sensible à ce paramètre de dispersion δ_{D_s} dans la bande considérée, on a effectué une analyse de sensibilité par rapport à δ_{D_s} en le faisant varier dans l'intervalle $[0.2, 0.4]$ et pour laquelle δ_{M_s} et δ_{K_s} sont fixés à la valeur 0.1 (faible valeur des paramètres de dispersion de masse et de raideur structurales). On a effectivement vérifié à la suite de cette analyse que l'influence du paramètre de

dispersion δ_{D_s} sur la réponse stochastique était suffisamment faible pour fixer sa valeur *a priori* à 0.3. Concernant l'identification des paramètres de dispersion δ_{M_s} et δ_{K_s} , on utilise la méthode du maximum de vraisemblance avec une réduction statistique de l'information. On rappelle cette méthode au paragraphe VI.3.3. On utilise de plus l'hypothèse simplificatrice : $\delta = \delta_{M_s} = \delta_{K_s}$, pour mener cette identification. Pour cette étape, l'équation (IV.4) est remplacée par l'équation aléatoire suivante $[\mathbf{A}^s(\omega)] \mathbf{Q}^s(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^s(\omega)$ relative à la structure incertaine sans habillage et sans cavité acoustique.

(VI.3.2.2) La seconde étape de l'identification concerne le paramètre de dispersion δ_{B_s} relatif au modèle simplifié stochastique de l'habillage. Des simulations numériques ont montré que la sensibilité de la réponse de la structure couplée avec l'habillage est beaucoup plus faible que la sensibilité de la réponse induite par les paramètres de dispersion de la structure. En d'autres termes, cela signifie que l'identification de δ_{B_s} ne peut pas être menée avec la structure incertaine. Le paramètre δ_{B_s} doit donc être identifié à partir d'une *structure de référence* pour laquelle il n'y a pas d'incertitude (il faut toutefois noter que l'habillage ne peut être analysé seul et doit être couplé à une structure). La méthodologie proposée consiste donc

- (i) à définir une *structure de référence* et à analyser la réponse de cette *structure de référence* couplée avec l'habillage. Ce système dynamique de référence est analysé par la méthode des éléments finis en utilisant un maillage fin pour l'habillage et la *structure de référence* et permet de calculer des *réponses numériques de référence*. On notera que ce modèle numérique ne représente pas la configuration expérimentale présentée à la figure VI.1 mais ce choix est cohérent car le modèle simplifié stochastique de l'habillage est indépendant du choix de la structure (il dépend de l'interface Γ_s structure-habillage). Ce modèle numérique est constitué d'une plaque mince similaire à la plaque de la configuration expérimentale présentée au paragraphe VI.2.2 ;
- (ii) puis à construire un modèle stochastique numérique constitué du modèle numérique de la *structure de référence* et du modèle simplifié d'habillage qui dépend de δ_{B_s} . Le modèle d'habillage est similaire à celui présenté au paragraphe VI.2.2. Pour cette seconde étape, l'équation (IV.4) est donc remplacée par l'équation aléatoire

$$[\underline{\mathbf{A}}_{\text{ref}}^s(\omega) + \underline{\mathbf{a}}^s(\omega)[\mathbf{B}^s]] \mathbf{Q}^s(\omega) = \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \quad .$$

La méthode consiste ensuite à minimiser la distance entre la *réponse de référence* et la réponse du modèle réduit stochastique. On utilise à nouveau le maximum de vraisemblance avec réduction statistique.

VI.3.3 Réduction statistique et méthode du maximum de vraisemblance

On utilise la méthode récemment proposée dans Soize *et al.* [145] afin d'identifier les paramètres de dispersion avec la méthode du maximum de vraisemblance pour un processus stochastique tel que le module d'une FRF indexée par la fréquence ω . Cette méthode consiste à introduire une réduction statistique des données puis d'appliquer la méthode du maximum de vraisemblance aux variables aléatoires généralisées du modèle stochastique réduit.

Premièrement, on établit le problème pour les deux étapes décrites respectivement dans les points (VI.3.2.1) et (VI.3.2.2) ci-dessus. Deuxièmement, on présente les résultats pour l'étape (i) du point (VI.3.2.2) et troisièmement, on donne simplement les résultats pour l'étape (ii) du point (VI.3.2.2).

Construction de la fonction vraisemblance Dans la suite de ce paragraphe, on notera le paramètre d'optimisation δ qui représente les paramètres de dispersion $\delta_{M_s} = \delta_{K_s}$ ou δ_{B_s} , pour ω dans la bande \mathbb{B} . Soit $\omega \mapsto W(\delta, \omega)$ le processus stochastique du second ordre défini sur un espace probabilisé $(\Theta, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ qui dépend du paramètre d'optimisation $\delta \in \Delta \subset \mathbb{R}$ et qui représente la fonction aléatoire $\omega \mapsto \mathbf{R}^s(\delta, \omega)$ définie au paragraphe VI.3.1. Soit $\omega \mapsto W^{\text{exp}}(\omega)$ l'observation expérimentale correspondant à l'observation aléatoire $W(\delta, \omega)$ du système stochastique. On notera que $W^{\text{exp}}(\omega)$ représente soit l'observation expérimentale $W_{\text{step } 1}^{\text{exp}}(\omega)$ du point (VI.3.2.1) soit la *référence numérique* $W_{\text{step } 2}^{\text{ref}}(\omega)$ du point (VI.3.2.2). Soit $\{\omega_1, \dots, \omega_{n_{\text{freq}}}\}$ l'échantillonnage en fréquence de la bande \mathbb{B} .

Soit $P_{W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})}(dw_1, \dots, dw_{n_{\text{freq}}}, \delta)$ la distribution de probabilité conjointe sur $\mathbb{R}^{n_{\text{freq}}}$ des variables aléatoires dépendantes $W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})$ dépendant du paramètre de dispersion δ . Pour δ dans Δ , on suppose que cette loi de probabilité conjointe s'écrit

$$P_{W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})}(dw_1, \dots, dw_{n_{\text{freq}}}, \delta) = p(w_1, \dots, w_{n_{\text{freq}}}, \delta) dw_1 \dots dw_{n_{\text{freq}}}, \quad (\text{VI.6})$$

où $p(w_1, \dots, w_{n_{\text{freq}}}, \delta)$ est la fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^{n_{\text{freq}}}$ par rapport à la mesure $dw_1 \dots dw_{n_{\text{freq}}}$. Pour tout δ fixé dans Δ et pour tout $(w_i)_{i \in \{1, \dots, n_{\text{freq}}\}}$ donné dans \mathbb{R} , l'estimation de $p(w_1, \dots, w_{n_{\text{freq}}}, \delta)$ pourrait être effectuée en utilisant le modèle stochastique numérique et la méthode de Monte Carlo (décrite au chapitre V) avec n_r réalisations indépendantes $\{W(\delta, \omega_1, \theta_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}}, \theta_1)\}, \dots, \{W(\delta, \omega_1, \theta_{n_r}), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}}, \theta_{n_r})\}$ de l'observation aléatoire (à valeurs dans $\mathbb{R}^{n_{\text{freq}}}$) $\{W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})\}$ avec $\theta_1, \dots, \theta_{n_r}$

dans Θ . L'observation expérimentale correspondante est

$$\{W^{\text{exp}}(\omega_1), \dots, W^{\text{exp}}(\omega_{n_{\text{freq}}})\} \quad . \quad (\text{VI.7})$$

Le problème à résoudre ensuite serait de trouver la valeur optimale δ^{opt} du paramètre de dispersion δ du modèle stochastique numérique en utilisant les valeurs numériques expérimentales définies par l'équation (VI.7), et qui est tel que

$$\delta^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta \in \Delta} \mathcal{L}(\delta) \quad , \quad (\text{VI.8})$$

avec

$$\mathcal{L}(\delta) = \log_{10} p(W^{\text{exp}}(\omega_1), \dots, W^{\text{exp}}(\omega_{n_{\text{freq}}}), \delta) \quad , \quad (\text{VI.9})$$

car on prend une moyenne de soixante mesures (on ne considère donc qu'un seul vecteur de fréquences expérimental). Puisque n_{freq} est grand (par exemple $n_{\text{freq}} = 300$), le coût numérique pour résoudre l'équation (VI.8) avec l'équation (VI.9) est très grand voire irréaliste.

Fonction vraisemblance approchée Une approximation possible et usuelle pourrait consister à remplacer la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}(\delta)$ par $\tilde{\mathcal{L}}(\delta) = \sum_{k=1}^{n_{\text{freq}}} \log_{10} p_{W(\delta, \omega_k)}(W^{\text{exp}}(\omega_k), \delta)$ dans laquelle $p_{W(\delta, \omega_k)}$ est la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire $W(\delta, \omega_k)$. Cette approximation n'est pas efficace dans la présente situation et donne une surestimation de δ^{opt} à cause de la forte dépendance statistique des variables aléatoires $W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})$.

Réduction statistique de l'information sur la fréquence La méthode de réduction statistique permet de contourner la difficulté et est la suivante. Premièrement, on effectue une réduction statistique de l'information en utilisant une analyse en composantes principales. Deuxièmement, on applique la méthode du maximum de vraisemblance dans l'espace des variables aléatoires décorréliées. Pour tout δ dans Δ , on définit le vecteur aléatoire,

$$\mathbb{W}(\delta) = (W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})) \quad , \quad (\text{VI.10})$$

de moyenne $\mathfrak{m}(\delta) = \mathcal{E}\{\mathbb{W}(\delta)\}$ et le vecteur aléatoire $\mathbb{W}^{\text{exp}} = (W^{\text{exp}}(\omega_1), \dots, W^{\text{exp}}(\omega_{n_{\text{freq}}}))$. Soit $[C_{\mathbb{W}}(\delta)]$ la matrice $(n_{\text{freq}} \times n_{\text{freq}})$ de covariance de $\mathbb{W}(\delta)$ définie par

$$[C_{\mathbb{W}}(\delta)] = \mathcal{E}\{(\mathbb{W}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta))(\mathbb{W}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta))^T\} \quad , \quad (\text{VI.11})$$

où $\mathfrak{m}(\delta)$ et $[C_{\mathbb{W}}(\delta)]$ sont estimées par la méthode de Monte Carlo. On introduit le problème

aux valeurs propres de la matrice symétrique positive $[C_w(\delta)]$,

$$[C_w(\delta)]\mathbf{z}(\delta) = \lambda(\delta)\mathbf{z}(\delta) \quad , \quad (\text{VI.12})$$

pour lequel les valeurs propres sont telles que $\lambda_1(\delta) \geq \lambda_2(\delta) \geq \dots \geq \lambda_{n_{\text{freq}}}(\delta) \geq 0$. Les vecteurs propres associés $\mathbf{z}^1(\delta), \mathbf{z}^2(\delta), \dots, \mathbf{z}^{n_{\text{freq}}}(\delta)$ sont orthonormaux dans $\mathbb{R}^{n_{\text{freq}}}$ et sont écrits $\mathbf{z}^\alpha(\delta) = (x_1^\alpha(\delta), \dots, x_{n_{\text{freq}}}^\alpha(\delta))$. Soit N_{red} un entier naturel plus petit que n_{freq} . On peut donc introduire l'approximation $\mathbb{W}^{N_{\text{red}}}(\delta)$ de $\mathbb{W}(\delta)$ définie par

$$\mathbb{W}^{N_{\text{red}}}(\delta) = \mathfrak{m}(\delta) + \sum_{\alpha=1}^{N_{\text{red}}} \sqrt{\lambda_\alpha(\delta)} Y_\alpha(\delta) \mathbf{z}^\alpha(\delta) \quad , \quad (\text{VI.13})$$

où $Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)$ sont N_{red} variables aléatoires décorréées à valeur réelle telles que, pour tout $\alpha = 1, \dots, N_{\text{red}}$,

$$Y_\alpha(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha(\delta)}} \langle \mathbb{W}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta), \mathbf{z}^\alpha(\delta) \rangle_{\mathbb{B}} \quad , \quad (\text{VI.14})$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{B}}$ est le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^{n_{\text{freq}}}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{B}}$ est sa norme associée. Soit $\|\cdot\|$ la norme définie par $\|\mathbb{W}\|^2 = \mathcal{E}\{\|\mathbb{W}\|_{\mathbb{B}}^2\}$. L'ordre N_{red} de la réduction statistique, calculé afin d'avoir une précision ε indépendante de N_{red} et δ , est tel que $\max_{\delta} \{ \|\mathbb{D} - \mathbb{D}^{\text{red}}\|^2 / \|\mathbb{D}\|^2 \} \leq \varepsilon$ avec $\mathbb{D} = \mathbb{W}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta)$ et $\mathbb{D}^{\text{red}} = \mathbb{W}^{N_{\text{red}}}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta)$. La valeur de N_{red} doit donc être telle que,

$$\max_{\delta \in \Delta} \left(1 - \frac{\sum_{\alpha=1}^{N_{\text{red}}} \lambda_\alpha(\delta)}{\text{tr}[C_w(\delta)]} \right) \leq \varepsilon \quad . \quad (\text{VI.15})$$

La réduction statistique est efficace quand $N_{\text{red}} \ll n_{\text{freq}}$ et elle sera d'autant plus efficace que les composantes de $\mathbb{W}(\delta) - \mathfrak{m}(\delta)$ sont corrélées.

Soit $(y_1, \dots, y_{N_{\text{red}}}) \mapsto p_{Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)}(y_1, \dots, y_{N_{\text{red}}}, \delta)$ la fonction de densité de probabilité sur $\mathbb{R}^{N_{\text{red}}}$ par rapport à $dy_1, \dots, dy_{N_{\text{red}}}$ des variables aléatoires décorréées (mais dépendantes entre elles) $Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)$. Pour tout α dans $\{1, \dots, N_{\text{red}}\}$, on déduit de l'équation (VI.14) la valeur expérimentale $Y_\alpha^{\text{exp}}(\delta)$ de $Y_\alpha(\delta)$ qui dépend maintenant de δ et qui s'écrit

$$Y_\alpha^{\text{exp}}(\delta) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha(\delta)}} \langle \mathbb{W}^{\text{exp}} - \mathfrak{m}(\delta), \mathbf{z}^\alpha(\delta) \rangle_{\mathbb{B}} \quad . \quad (\text{VI.16})$$

Fonction vraisemblance approchée réduite Soit $\tilde{\mathcal{L}}^{\text{red}}$ l'approximation suivante de la fonc-

tion log-vraisemblance réduite qui est définie, pour tout δ fixé dans Δ , par

$$\tilde{\mathcal{L}}^{\text{red}}(\delta) = \sum_{\alpha=1}^{N_{\text{red}}} \log_{10} p_{Y_{\alpha}(\delta)}(Y_{\alpha}^{\text{exp}}(\delta), \delta) \quad , \quad (\text{VI.17})$$

où $y \mapsto p_{Y_{\alpha}(\delta)}(y, \delta)$ est la fonction de densité de probabilité sur \mathbb{R} de la variable aléatoire à valeurs réelles $Y_{\alpha}(\delta)$. Cette approximation de la fonction de vraisemblance serait exacte si les variables aléatoires $Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)$ étaient indépendantes entre elles car la fonction de densité de probabilité conjointe pourrait s'écrire comme le produit des fonctions de densité de probabilité de chaque composante. Ce n'est pas le cas ici, mais cette approximation est raisonnablement bonne puisque les variables aléatoires centrées $Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)$ sont décorrélées (mais restent dépendantes). Le problème d'optimisation à résoudre est donc donné par

$$\delta^{\text{opt}} = \arg \max_{\delta \in \Delta} \tilde{\mathcal{L}}^{\text{red}}(\delta) \quad . \quad (\text{VI.18})$$

VI.3.4 Résumé de la méthode d'identification

Les mesures expérimentales $W^{\text{exp}}(\omega_1), \dots, W^{\text{exp}}(\omega_{n_{\text{freq}}})$ et l'utilisation de l'équation (VI.16) donnent les valeurs $Y_1^{\text{exp}}(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}^{\text{exp}}(\delta)$, pour tout δ dans Δ . L'utilisation du modèle stochastique numérique et la méthode de Monte Carlo permettent de calculer les réalisations indépendantes des variables aléatoires $W(\delta, \omega_1), \dots, W(\delta, \omega_{n_{\text{freq}}})$, pour tout δ dans Δ . Pour une précision donnée ε , la plus petite valeur de $N_{\text{red}} \leq n_{\text{freq}}$ est calculée en utilisant l'équation (VI.15). L'utilisation de l'équation (VI.14) permet alors de calculer les réalisations dépendantes mais décorrélées des variables aléatoires $Y_1(\delta), \dots, Y_{N_{\text{red}}}(\delta)$ et d'en déduire des estimations de la fonction de densité de probabilité marginale $p_{Y_{\alpha}(\delta)}(Y_{\alpha}^{\text{exp}}(\delta), \delta)$. En utilisant les équations (VI.17) et (VI.18), on obtient le paramètre de dispersion δ^{opt} optimal.

VI.3.5 Résultats

Ce paragraphe est consacré à l'identification des paramètres de dispersion δ_{M_s} et δ_{K_s} de la structure en utilisant la méthode présentée au paragraphe (VI.3.2.1). On procède ensuite à l'identification du paramètre de dispersion δ_{B_s} pour l'habillage en suivant la méthode présentée au paragraphe (VI.3.2.2). Premièrement, l'équation (VI.15) est utilisée avec $\Delta = [0.1, 0.95]$ afin de calculer la valeur de N_{red} et on obtient $N_{\text{red}} = 100$ pour $\varepsilon = 0.02$. La figure VI.10 montre le graphe de la fonction $\delta \mapsto \tilde{\mathcal{L}}^{\text{red}}(\delta)$ pour $N_{\text{red}} = 100$.

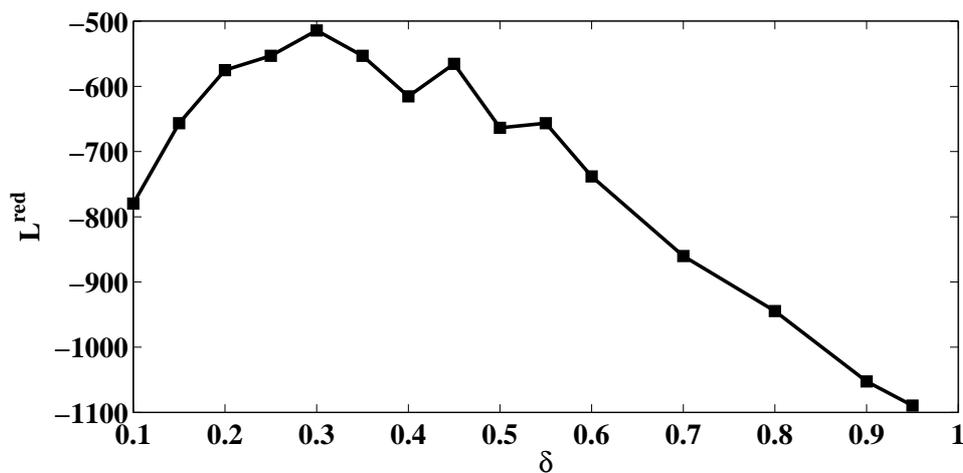


FIG. VI.10 – Graphe de la fonction $\delta \mapsto \tilde{\mathcal{L}}^{\text{red}}(\delta)$ pour $N_{\text{red}} = 100$

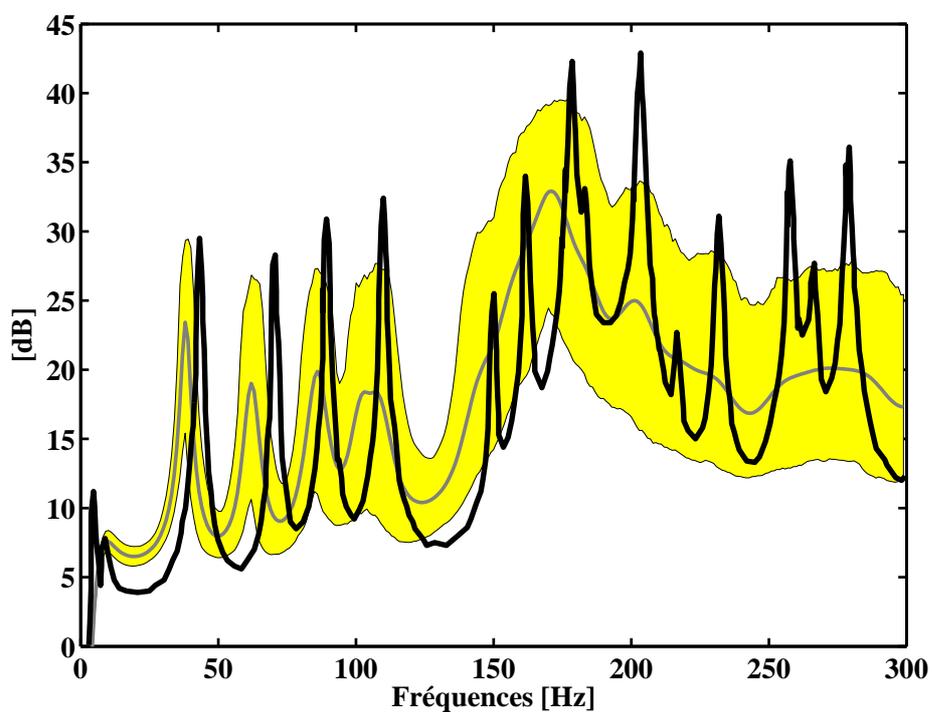


FIG. VI.11 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto R^s(\omega)$ pour la structure sans habillage : mesures (trait noir épais), zone de confiance (region jaune), moyenne stochastique (trait gris épais)

Le maximum de cette fonction est atteint pour $\delta_{M_s}^{\text{opt}} = \delta_{K_s}^{\text{opt}} = \delta^{\text{opt}} = 0.3$. La figure VI.11 est relative à la comparaison calculs-mesures pour la fonction aléatoire $\omega \mapsto R^s(\omega)$ définie au paragraphe VI.3.1 pour la structure incertaine sans habillage et pour $\delta_{D_s} = 0.3$.

Commentaires

Le graphe de la figure VI.11 montre la réponse stochastique optimale du modèle numérique de la structure nue. On a représenté la zone de confiance à 95% en jaune et la moyenne stochastique de la réponse en gris épais au centre de la région jaune. On voit sur ce graphe que le modèle stochastique n'englobe pas la réponse expérimentale sur toute la bande de fréquences. En particulier le deux premiers pics expérimentaux sont englobés seulement en partie. Ceci est dû au fait que le modèle numérique en BF est très robuste aux incertitudes dans cette bande de fréquences et que seule l'amélioration du modèle moyen apporterait un changement. On pourrait aussi améliorer ce résultat en effectuant un plus grand nombre de tirages de réalisations de Monte Carlo (10000 dans ce cas). Le modèle est convergé pour le moment d'ordre 2.

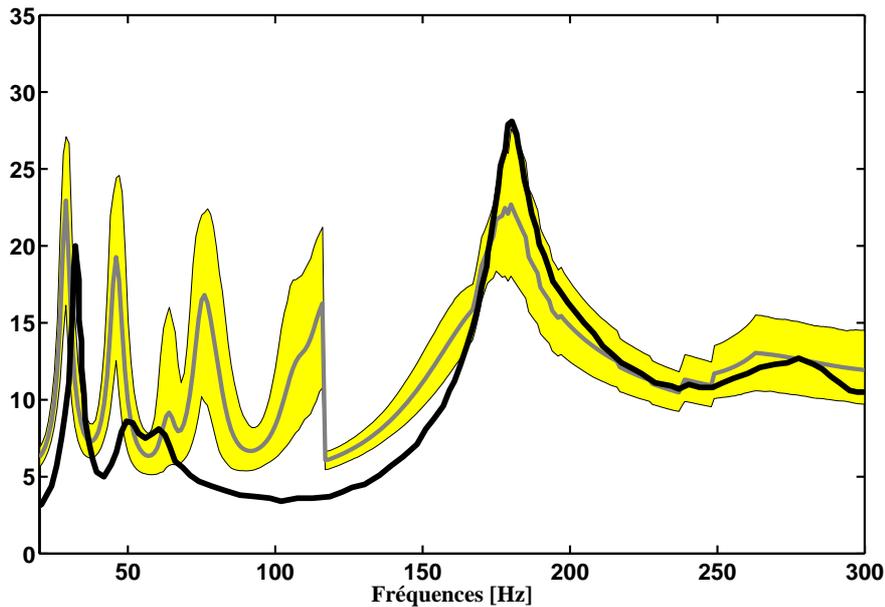


FIG. VI.12 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto R^s(\omega)$ pour la structure incertaine avec l'habillage incertain : mesure (trait noir épais), zone de confiance (région jaune), moyenne stochastique (trait gris épais)

L'identification du paramètre de dispersion δ_{B_s} est obtenue comme il a été expliqué au pa-

ragraphe VI.3.2. On donne directement le résultat issu du problème d'optimisation qui est $\delta_{B_s}^{\text{opt}} = 0.6$. La figure VI.12 est relative à la comparaison calculs-mesures pour la fonction aléatoire $\omega \mapsto R^s(\omega)$ définie au paragraphe VI.3.1 pour la structure incertaine couplée avec l'habillage incertain et avec $\delta_{D_s} = 0.3$.

Commentaires

On remarque sur le graphe de la figure VI.12 que le modèle stochastique est incapable de rattraper l'erreur de modèle du modèle numérique de la structure nue dans la zone $[117, 170]$ Hz. En revanche, le modèle simplifié stochastique de l'habillage remplit son rôle et permet d'améliorer la prédiction sur toute la bande de fréquences $[170, 300]$ Hz.

VI.4 Prédiction des réponses vibroacoustiques avec le modèle stochastique numérique identifié

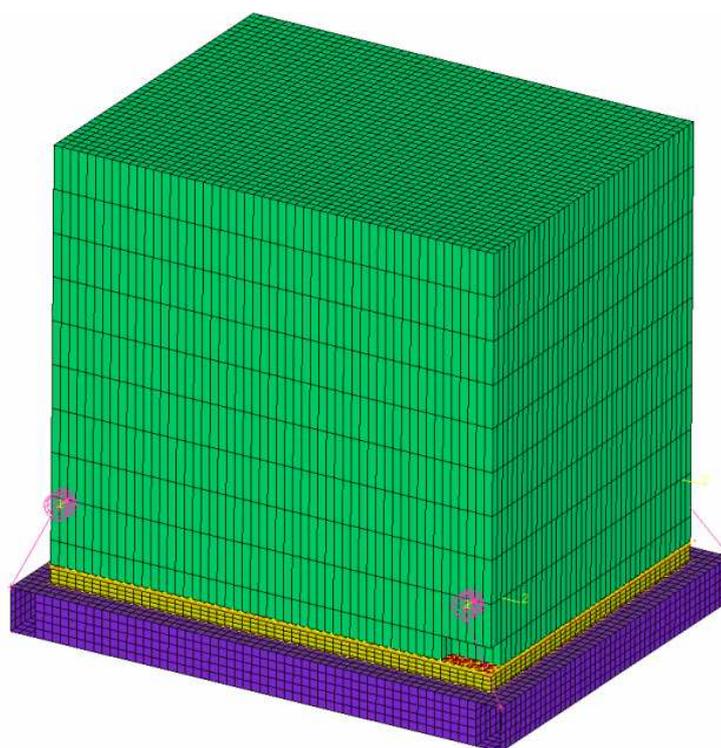


FIG. VI.13 – Modèle numérique de plaque habillée couplée avec une cavité acoustique utilisé pour le *calcul de référence* (6 éléments fluides ne sont pas affichés pour laisser apparaître le septum en rouge)

Dans ce paragraphe, on utilise le modèle stochastique numérique identifié pour prédire des réponses vibroacoustiques. La réponse du modèle identifié est comparée à une *solution de référence* calculée avec un logiciel du commerce. Le modèle de la structure est défini au paragraphe VI.2. Le modèle de l'habillage contient 46494 DDL. L'habillage est couplé avec une cavité acoustique parallélépipédique ($m_a = 23354$ DDL and $n_a = 67$ modes) dont le modèle est supposé ne pas avoir d'incertitudes de modèle (pas d'incertitudes sur la cavité acoustique) et qui est remplie d'air (voir la figure VI.13). On observe en premier lieu la pression à $m_{\text{obs}} = 120$ points dans la cavité acoustique pour une excitation ponctuelle appliquée sur le cadre élastique du système dynamique de la même façon qu'au paragraphe VI.2. On calcule ensuite la fonction $\omega \mapsto r^a(\omega)$ relative à la cavité acoustique et définie par,

$$r^a(\omega) = 10 \log_{10} \left(\sum_{i=1}^{m_{\text{obs}}} |P_{k_i}(\omega)|^2 \right) \quad , \quad (\text{VI.19})$$

et dont la figure VI.14 montre le graphe pour le système dynamique avec et sans habillage. On note R_a , la variable aléatoire associée à r_a pour le modèle numérique stochastique.

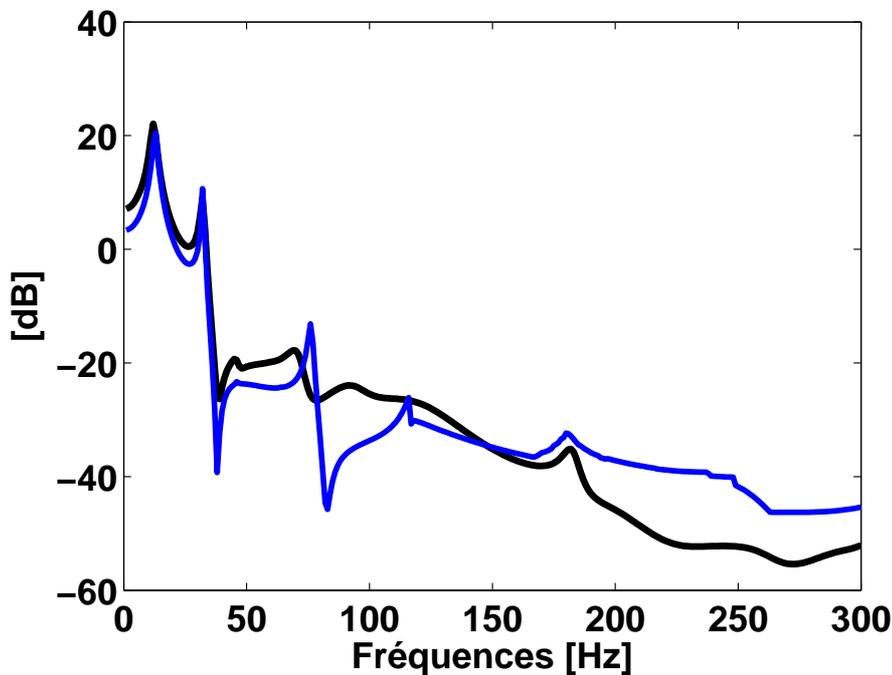


FIG. VI.14 – Graphes de la fonction $\omega \mapsto r^a(\omega)$ pour la *solution de référence* (trait noir épais), le modèle simplifié déterministe de l'habillage (trait bleu fin)

Commentaires

On remarque sur le graphe de la figure VI.14 que le modèle simplifié de l'habillage a globalement la même allure que le *calcul de référence*. Le premier pic est dû au couplage du mode à pression constante avec les suspensions. La réponse du modèle simplifié a été obtenue sans recalage spécifique sur cette courbe (et donc en utilisant les précédents résultats identifiés). Un recalage des paramètres moyens du modèle simplifié par rapport à la *référence numérique* est possible et donne de très bons résultats. Ce n'est pas l'objet de ce paragraphe.

Deuxièmement, les incertitudes sont maintenant prises en compte dans la structure et dans l'habillage. On utilise la même observation dans la cavité acoustique et la même excitation structurale que précédemment. L'équation aléatoire qui doit être à présent résolue est donnée (voir l'équation (III.31)) par

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}^s(\omega)] + \underline{a}^s(\omega)[\mathbf{B}^s] & [\mathbf{C}] + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s] \\ \omega^2([\mathbf{C}]^T + \underline{a}^c(\omega)[\mathbf{C}^s]^T) & [\underline{A}^a(\omega)] + \underline{a}^a(\omega)[\mathbf{B}^a] \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix}. \quad (\text{VI.20})$$

Les valeurs des paramètres de dispersion du modèle probabiliste sont les valeurs identifiées au paragraphe VI.3.5, *i.e.* $\delta_{M_s}^{\text{opt}} = \delta_{K_s}^{\text{opt}} = 0.3$, $\delta_{D_s} = 0.3$ et $\delta_{B_a}^{\text{opt}} = 0.6$. On suppose que les paramètres de dispersion pour l'habillage sont égaux, c'est-à-dire que $\delta_{C_s}^{\text{opt}} = \delta_{B_a}^{\text{opt}} = \delta_{B_s}^{\text{opt}} = 0.6$. La figure VI.15 montre le graphe de la FRF $\omega \mapsto R^a(\omega)$ définie au paragraphe VI.3.1 pour la structure incertaine couplée avec l'habillage incertain et la cavité acoustique.

Commentaires

Il est normal que la moyenne stochastique s'éloigne de la référence du calcul car il y a de fortes incertitudes de modèle. On voit que dans la bande $[0, 40]$ Hz, le modèle est moins sensible aux incertitudes que dans la bande $[40, 300]$ Hz. Dans cette partie de la bande le modèle est très robuste aux incertitudes et seule une réponse expérimentale reproduisant les bonnes conditions aux limites permettrait de départager les deux calculs mais ce n'est pas l'objet de ce paragraphe qui est illustratif. Il est à noter qu'aucun recalage n'est effectué dans ce paragraphe ni sur les paramètres du modèle numérique de structure nue, ni sur le modèle *numérique de référence* de l'habillage, ni sur les paramètres du modèle simplifié de l'habillage.

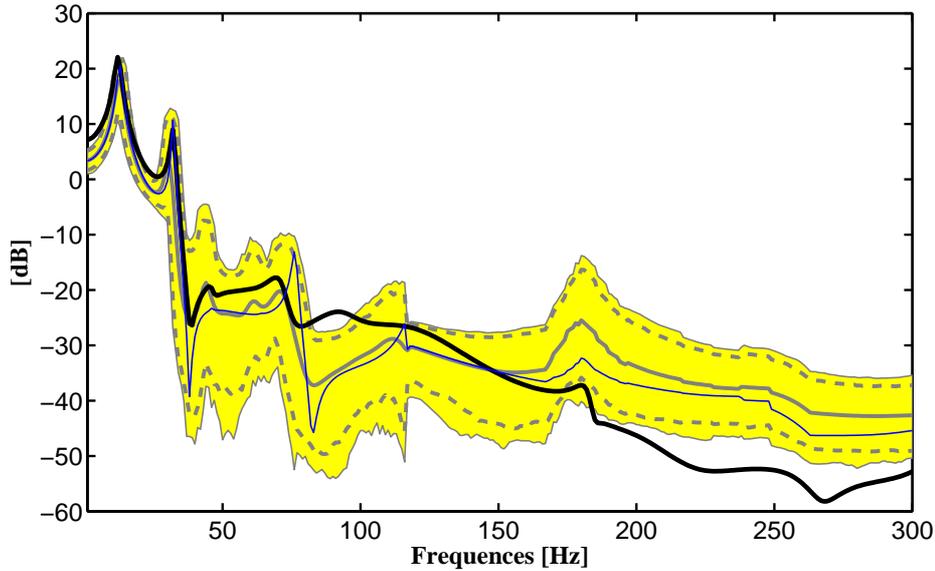
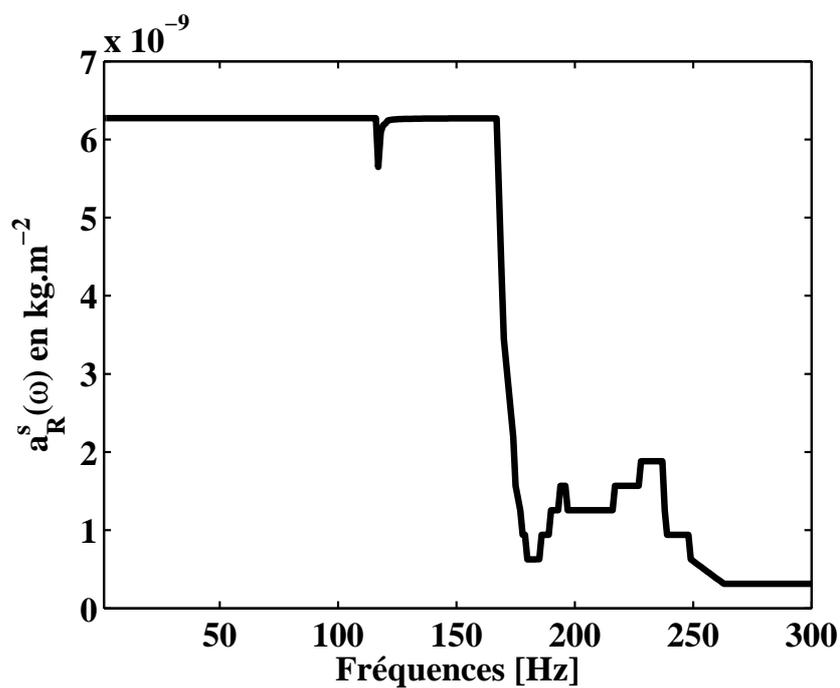
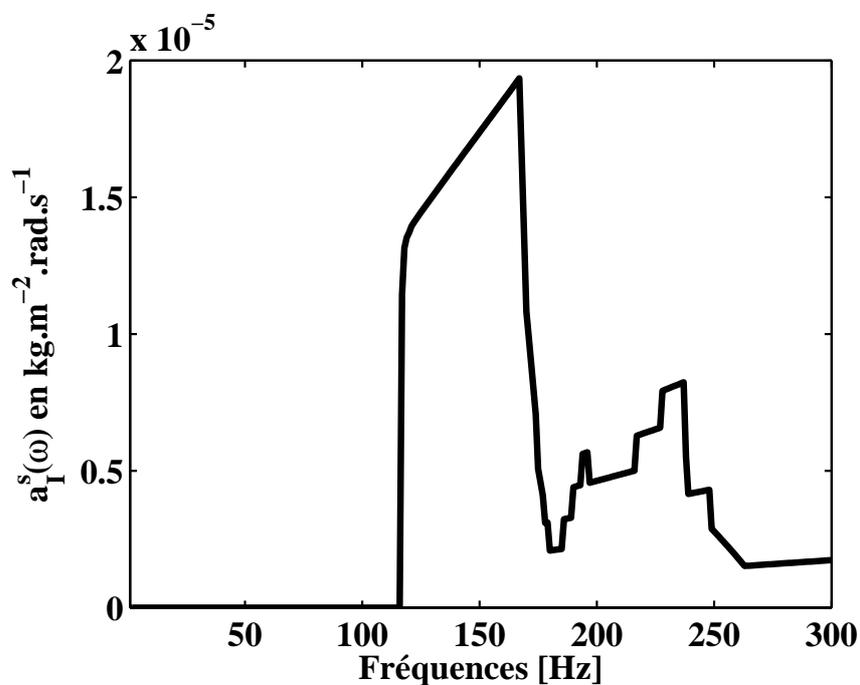
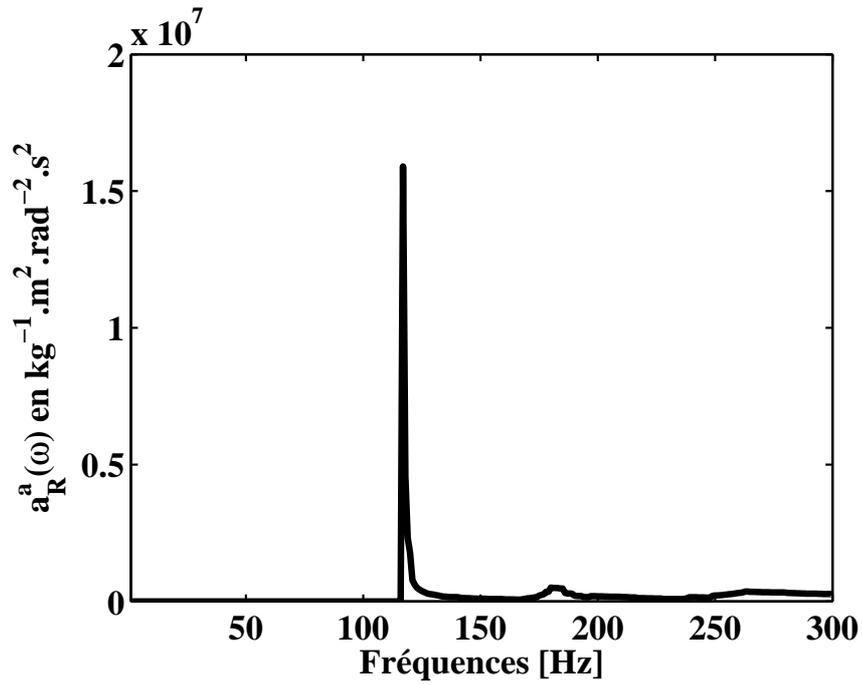
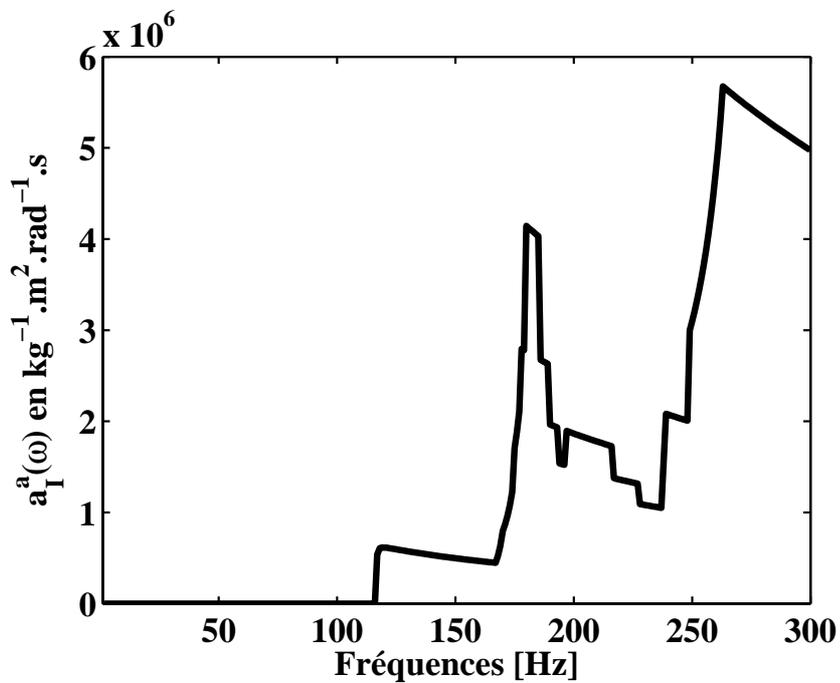


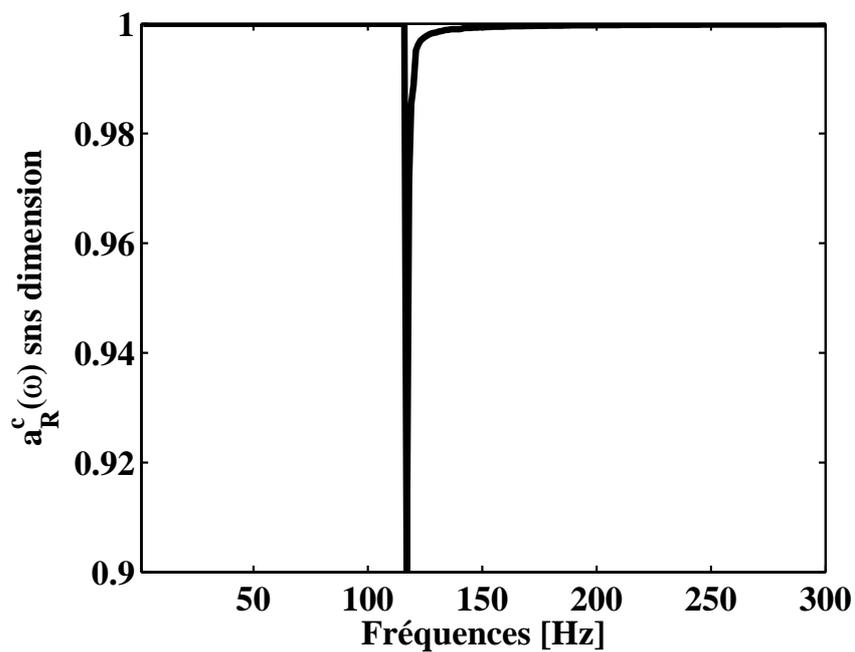
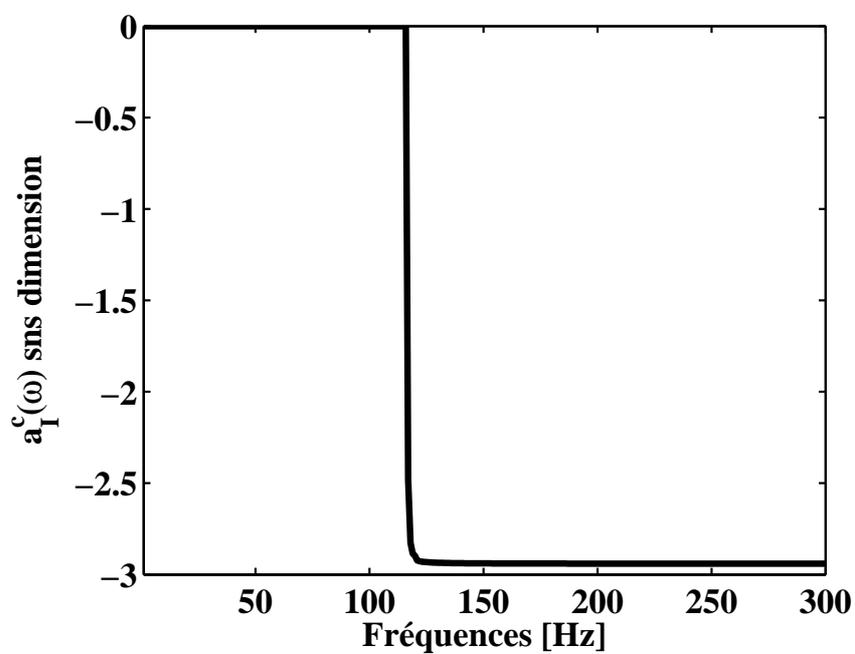
FIG. VI.15 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto R^a(\omega)$ pour la *solution de référence* (trait noir épais), le modèle simplifié déterministe de l'habillage (trait bleu fin), la moyenne stochastique du modèle probabiliste de l'habillage (trait gris épais), la zone de confiance à 95% (trait gris discontinu) et la zone de confiance à 99% (trait gris fin)

VI.5 Graphes des coefficients du modèle simplifié de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues

Les figures. VI.16 à VI.21 montrent les graphes des coefficients du modèle simplifié d'habillage définis par les équations (II.68) à (II.73) avec les paramètres moyens du modèle simplifié d'habillage identifiés. On notera principalement que l'on retrouve bien les comportements en fréquence aux limites prédits au chapitre II.

FIG. VI.16 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_r^s(\omega)$ FIG. VI.17 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_i^s(\omega)$

FIG. VI.18 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_r^a(\omega)$ FIG. VI.19 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_i^a(\omega)$

FIG. VI.20 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_r^c(\omega)$ FIG. VI.21 – Graphe de la fonction $\omega \mapsto \underline{a}_i^c(\omega)$

VI.6 Résumé du chapitre

Dans ce chapitre nous avons exposé une méthodologie d'identification des paramètres du modèle simplifié d'habillage fondé sur la théorie des structures floues. Les paramètres moyens sont identifiés en résolvant un problème inverse formulé comme problème d'optimisation en exploitant une base de données expérimentales. On utilise une méthode fondée sur la méthode du maximum de vraisemblance précédée d'une réduction statistique de l'information pour identifier les paramètres de dispersion du modèle. En fin de chapitre, on présente un calcul vibroacoustique illustratif et les graphes des coefficients de l'habillage associés.

Chapitre VII

Application du modèle simplifié d'habillage sur une automobile

Sommaire

VII.1 Introduction	106
VII.2 Identification <i>sur plan</i> des paramètres du modèle simplifié des habillages	110
VII.3 Comparaison des mesures avec les modèles moyens	112
VII.4 Comparaison des mesures avec les modèles stochastiques . .	118
VII.5 Synthèse concernant la comparaison des modèles d'habillage	126
VII.6 Résumé du chapitre	127

VII.1 Introduction

Ce chapitre est consacré d'une part à l'identification *sur plan* des paramètres des modèles simplifiés des habillages du tablier et du plancher avant (voir figure VII.5) d'un véhicule automobile de type Peugeot 207, et d'autre part à la comparaison du modèle vibroacoustique du véhicule avec (1) le modèle simplifié d'habillage fondé sur la théorie des structure floues et (2) avec un modèle simplifié d'habillage en masses réparties ajoutées sur la structure par modification de la masse volumique aux endroits habillés. On propose, de plus, de comparer les réponses dans chacun des deux cas avec une base de données expérimentales de fonctions de réponse en fréquence (FRF) vibroacoustiques (voir les paragraphes VII.3.1 et VII.4.1) et acoustiques (voir les paragraphes VII.3.2 et VII.4.2). Pour des raisons de protocole expérimental il n'a pas été possible de mesurer des FRF vibratoires sur des points qui nous intéressaient (point sur la structure et sous l'habillage). On propose de plus de comparer des FRF vibratoires obtenues par calcul sur un point du tablier (voir les paragraphes VII.3.3 et VII.4.3) pour les deux types de modèles simplifiés d'habillage.

VII.1.1 Protocole des essais

Le protocole des essais a été défini de façon exhaustive au paragraphe II.5 page 22 de la thèse de doctorat de Jean-François Durand [42]. Nous en rappelons ici les grandes lignes. Les essais portaient sur 20 véhicules en sortie de chaîne de montage et ont duré 2 semaines. La base de données expérimentales utilisée ci-après, outre un nombre de points de mesures plus grand, diffère sur le nombre de véhicules mesurés qui est plus important : 40 véhicules ont été mesurés sur 4 semaines. Ces mesures, réalisées en bout de chaîne ne permettent aucune modification du véhicule. C'est pour cette raison qu'il n'a pas été possible de mesurer des FRF vibratoires sur des points situés sous les habillages. En revanche, ces mesures permettent de mettre en évidence de façon flagrante la dispersion liée à la diversité des véhicules et que l'on tente toutefois de modéliser par un seul et unique modèle.

Mesures vibroacoustiques

On mesure le bruit aux oreilles conducteur induit par une excitation dans une direction donnée aux différents points d'attache du moteur. Pour réaliser ces mesures, deux méthodes expérimentales sont applicables : la mesure directe ou la mesure réciproque des FRF. La mesure directe consiste à générer un effort $f^{\text{exp}}(\omega)$ en un point et une direction donnée (à l'aide d'un marteau d'impact ou d'un pot vibrant comme au chapitre VI) et à mesurer la pression acoustique $p^{\text{exp}}(\omega)$ émise à une place conducteur/passagers. Cette mesure est souvent inaccessible sans démontage.

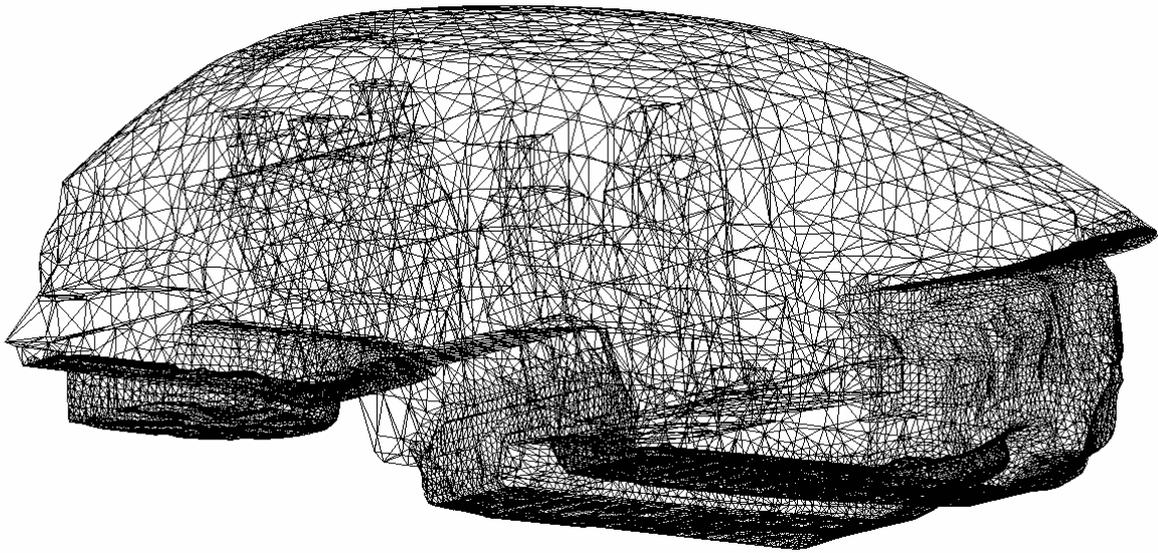


FIG. VII.1 – Modèle numérique de cavité acoustique

On lui préfère la mesure réciproque qui consiste à générer un bruit $Q^{\text{exp}}(\omega)$ au point d'écoute et à mesurer le niveau accélérométrique $\ddot{\mathbf{u}}^{\text{exp}}$ en un point et une direction donnés (points d'attache du moteur). L'applicabilité de la méthode repose sur le comportement linéaire et la réciprocité du système vibroacoustique (généralement vérifié en basses fréquences). On génère donc un bruit de bande $[30, 400]$ Hz à l'aide d'une source acoustique positionnée aux oreilles conducteur (point **avgg**) et on mesure les accélérations sur le support moteur droit en Z (point **csvd**) et sur la biellette d'anti-couple inférieur en X (point **cboi**). On se référera à la figure VII.2 pour la position des points. Les points de mesure et d'excitation acoustiques se trouvent sur le maillage de la cavité acoustique présenté sur la figure VII.1.

Mesures acoustiques

La méthode de mesure retenue des FRF vibroacoustiques permet d'effectuer simultanément la mesure des FRF acoustiques entre la source acoustique et un point situé dans l'habitacle. Les points sont mesurés entre les oreilles conducteurs (point **avgg**) (voir la figure VII.2) et la cave à pieds du passager avant droit (point **cavp**) et un point situé sous le milieu du pare-brise et au-dessus de la planche de bord (point **parbVA**). On se référera à la figure VII.3 pour la position des points.

Mesures et calculs vibratoires

On se propose de comparer les prévisions des FRF entre le support moteur droit en Z et deux points d'observation situés sous les habillages modélisés : un point sous l'habillage du tablier (point **tab**) et un point sous l'habillage du plancher avant (point **pla**). On notera que la mesure

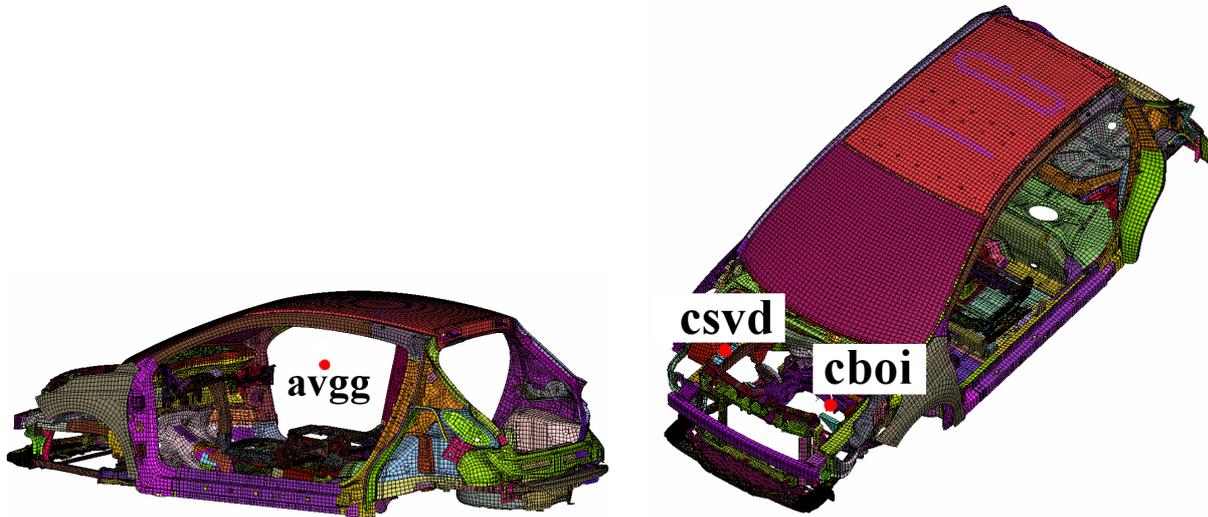


FIG. VII.2 – Points de mesures vibroacoustiques

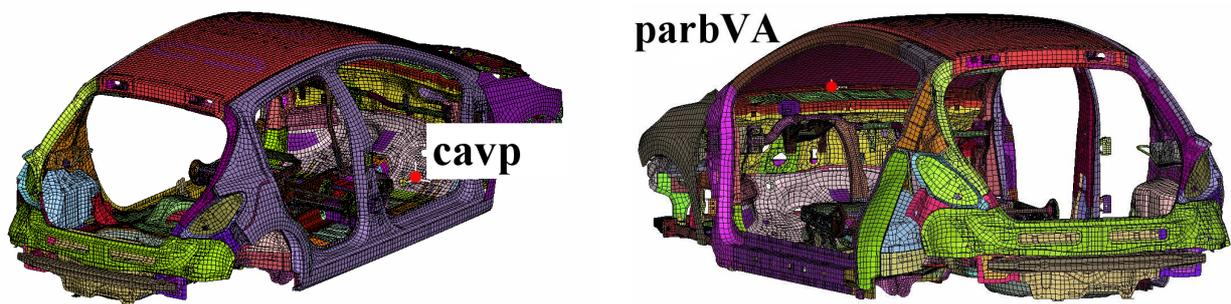


FIG. VII.3 – Points de mesures acoustiques

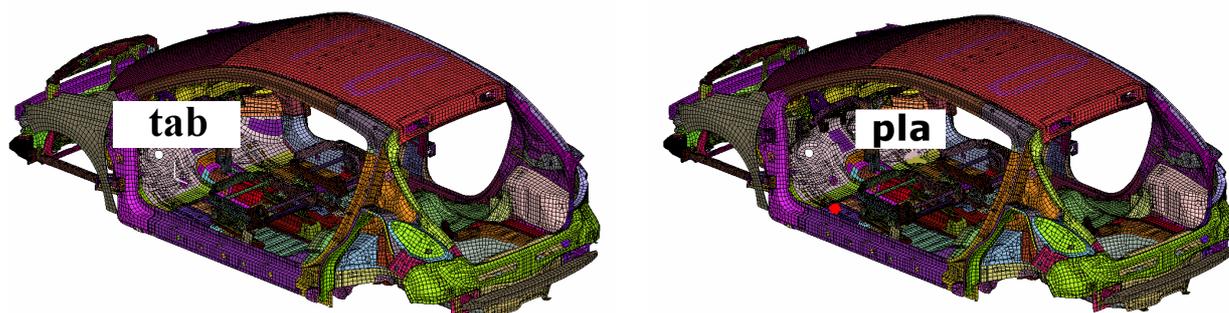


FIG. VII.4 – Points d'observation des calculs vibratoires

correspondante à ce dernier point a été effectuée à l'extérieur de l'automobile.

VII.1.2 Modèles vibroacoustiques de l'automobile

Le modèle vibroacoustique avec la modélisation de l'habillage en masses réparties a 1 175 909 DDL, 1755 modes structures et 136 modes acoustiques dans la bande de fréquences [0,600] Hz. Le modèle vibroacoustique avec la modélisation de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues est basé sur le modèle vibroacoustique précédent duquel on a supprimé les masses réparties sur les habillages du tablier et du plancher avant. Il comporte le même nombre de DDL, 1700 modes structures et 136 modes acoustiques. Il est à noter que les modes de structure du modèle vibroacoustique avec le modèle d'habillage flou diffèrent des modes du modèle vibroacoustique avec le modèle d'habillage en masses réparties. En effet, le fait de rajouter de la masse sur les éléments de structure (le tablier et le plancher avant) modifie l'analyse modale.

VII.1.3 Plan du chapitre

Le paragraphe VII.2 présente l'identification *sur plan* des paramètres des modèles simplifiés des habillages du tablier et du plancher avant du véhicule Peugeot 207. Au paragraphe VII.3, on compare les modèles moyens comprenant le modèle moyen de l'habillage en masses réparties et le modèle moyen de l'habillage fondé sur la théorie des structures floues avec la moyenne des mesures expérimentales pour les calculs vibroacoustiques et acoustiques présentés au paragraphe VII.1.1. On y présente de plus les calculs vibratoires effectués à l'aide des modèles moyens. Le paragraphe VII.4 montre la comparaison des domaines de confiance du modèle stochastique avec les mesures expérimentales. Le paragraphe VII.5 donne une synthèse des résultats et est suivi d'un résumé du chapitre.



FIG. VII.5 – Modèles numériques des habillages du tablier et du plancher avant

VII.2 Identification *sur plan* des paramètres du modèle simplifié des habillages

L'habillage du tablier est composé d'une couche de mousse dont le comportement est celui d'un matériau poreux et d'une couche de septum (EPDM=polymère). L'habillage du plancher avant est composé d'une couche de feutre et d'une couche de septum (bitumineux). Si on appliquait directement la méthodologie du paragraphe II.7, on construirait directement le coefficient de masse participante moyen et la densité modale moyenne à partir de modèles en éléments finis très détaillés de ces habillages comme on peut le voir à la figure VII.5. Il est possible d'extraire les composantes normales des modes sur les DDL souhaités pour ces modèles mais le calcul est en revanche très lourd et demande une quantité de mémoire qui peut devenir irréaliste. On prend alors l'hypothèse simplificatrice de modéliser les habillages du tablier et du plancher avant par des plaques ayant la même épaisseur et la même surface que ceux-ci. On construit un maillage assez fin dans l'épaisseur afin de capter toute la dynamique interne. On applique ensuite la méthodologie définie au paragraphe II.7. Dans les deux cas, on a utilisé le même maillage comportant 338 013 DDL. La surface de l'habillage de tablier est de 1.38 m² et son épaisseur moyenne est de 0.025 m. La surface de l'habillage du plancher avant est de 1.02 m² et son épaisseur moyenne est de 0.025 m. Le coefficient de masse participante moyen et la densité modale moyenne *sur plan* pour l'habillage du tablier (respectivement pour le plancher avant) sont donnés par le graphe de la figure VII.6 (respectivement VII.8). Les produits $\underline{n}(\omega)\underline{\nu}(\omega)$ et quotients $\underline{n}(\omega)/\underline{\nu}(\omega)$ pour l'habillage du tablier (respectivement pour le plancher avant) sont donnés par le graphe de la figure VII.7 (respectivement VII.9).

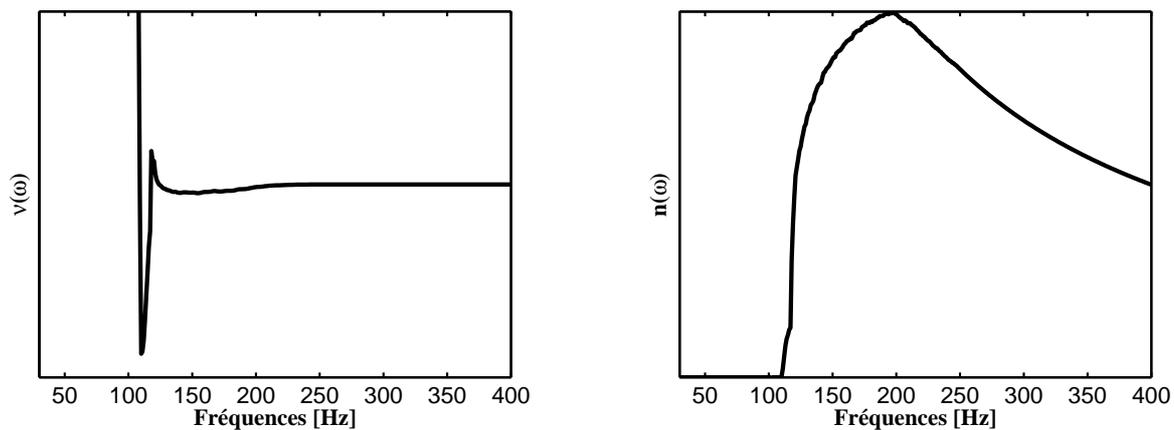


FIG. VII.6 – coefficient de masse participante moyen (figure de gauche) et la densité modale moyenne (figure de droite) *sur plan* pour l'habillage du tablier

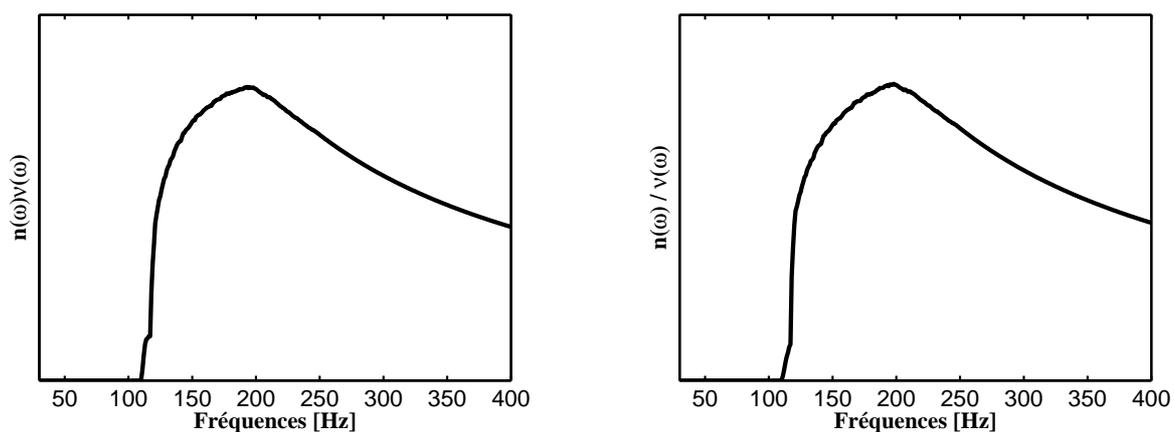


FIG. VII.7 – produit $n(\omega)\nu(\omega)$ (figure de gauche) et quotient $n(\omega)/\nu(\omega)$ (figure de droite) *sur plan* pour l'habillage du tablier

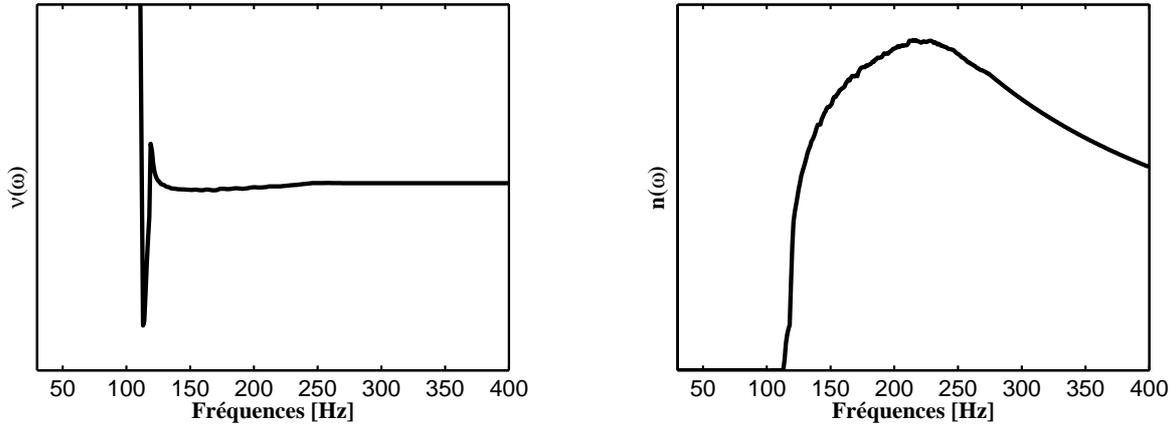


FIG. VII.8 – coefficient de masse participante moyen (figure de gauche) et la densité modale moyenne (figure de droite) *sur plan* pour l'habillage du plancher avant

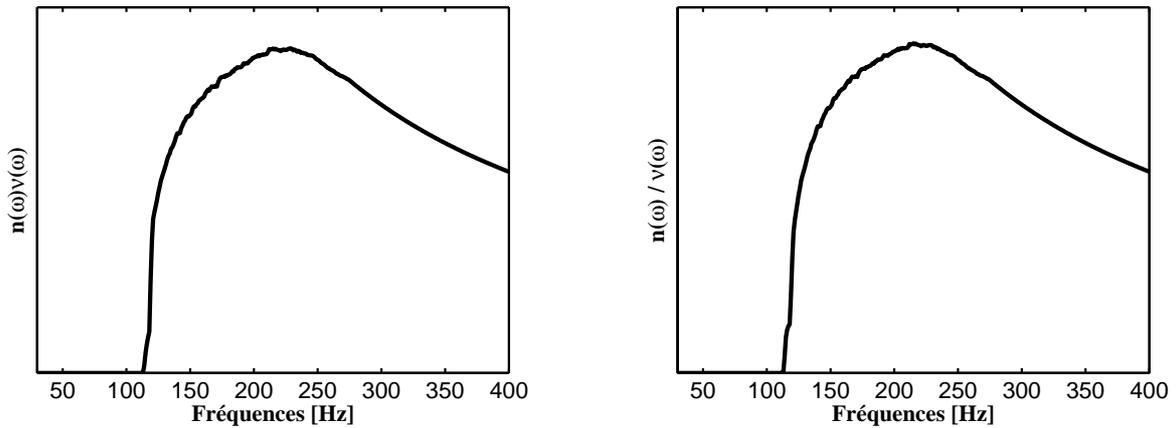


FIG. VII.9 – produit $\underline{n}(\omega)\nu(\omega)$ (figure de gauche) et quotient $\underline{n}(\omega)/\nu(\omega)$ (figure de droite) *sur plan* pour l'habillage du plancher avant

VII.3 Comparaison des mesures avec les modèles moyens

Ce paragraphe est consacré à la comparaison des mesures avec les modèles moyens vibroacoustiques avec le modèle simplifié moyen d'habillage fondé sur la théorie des structures floues (graphe des fonctions $f \mapsto \underline{dB}^{\text{flou}}(f)$, *trait épais clair*), avec le modèle d'habillage en masses réparties (graphe des fonctions $f \mapsto \underline{dB}^{\text{massrep}}(f)$, *trait fin discontinu*) et la moyenne des 40 mesures

(graphe des fonctions $f \mapsto dB^{\text{exp,moy}}(f)$ avec $dB^{\text{exp,moy}}(f) = (1/40) \times \sum_{k=1}^{40} dB^{\text{exp}}(f)$, *trait épais foncé*).

VII.3.1 Comparaison des mesures vibroacoustiques avec les modèles moyens - 1 graduation = 10 dB

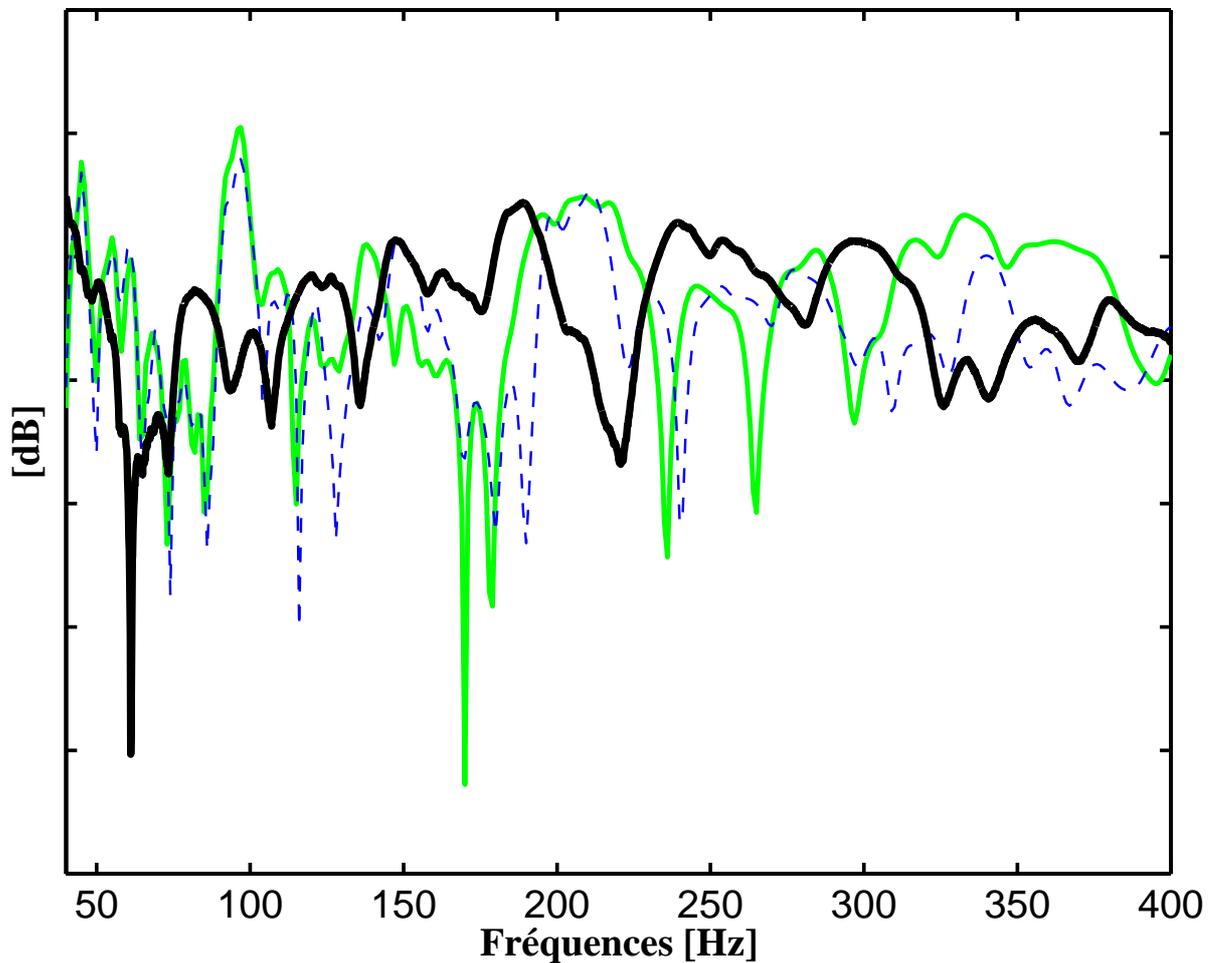


FIG. VII.10 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp,moy}}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **cboi** dans la direction **X** et observation au point **avgg** (*trait épais foncé*) (voir figure VII.2). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{flou}}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{massrep}}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*)

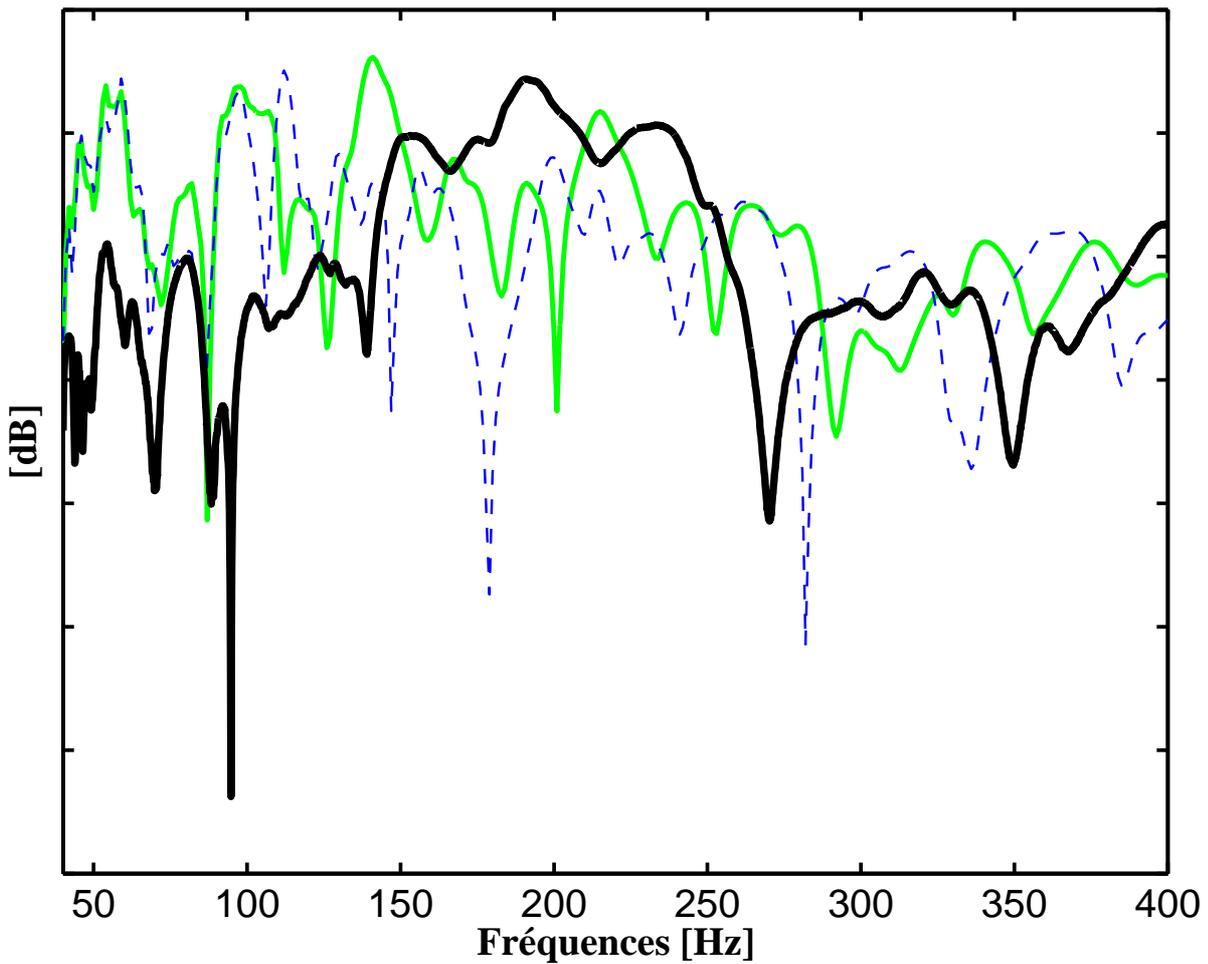


FIG. VII.11 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp,moy}}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **csvd** dans la direction **Z** et observation au point **avgg** (*trait épais foncé*) (voir figure VII.2). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{flou}}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{massrep}}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*)

VII.3.2 Comparaison des mesures acoustiques avec les modèles moyens - 1 graduation = 10 dB

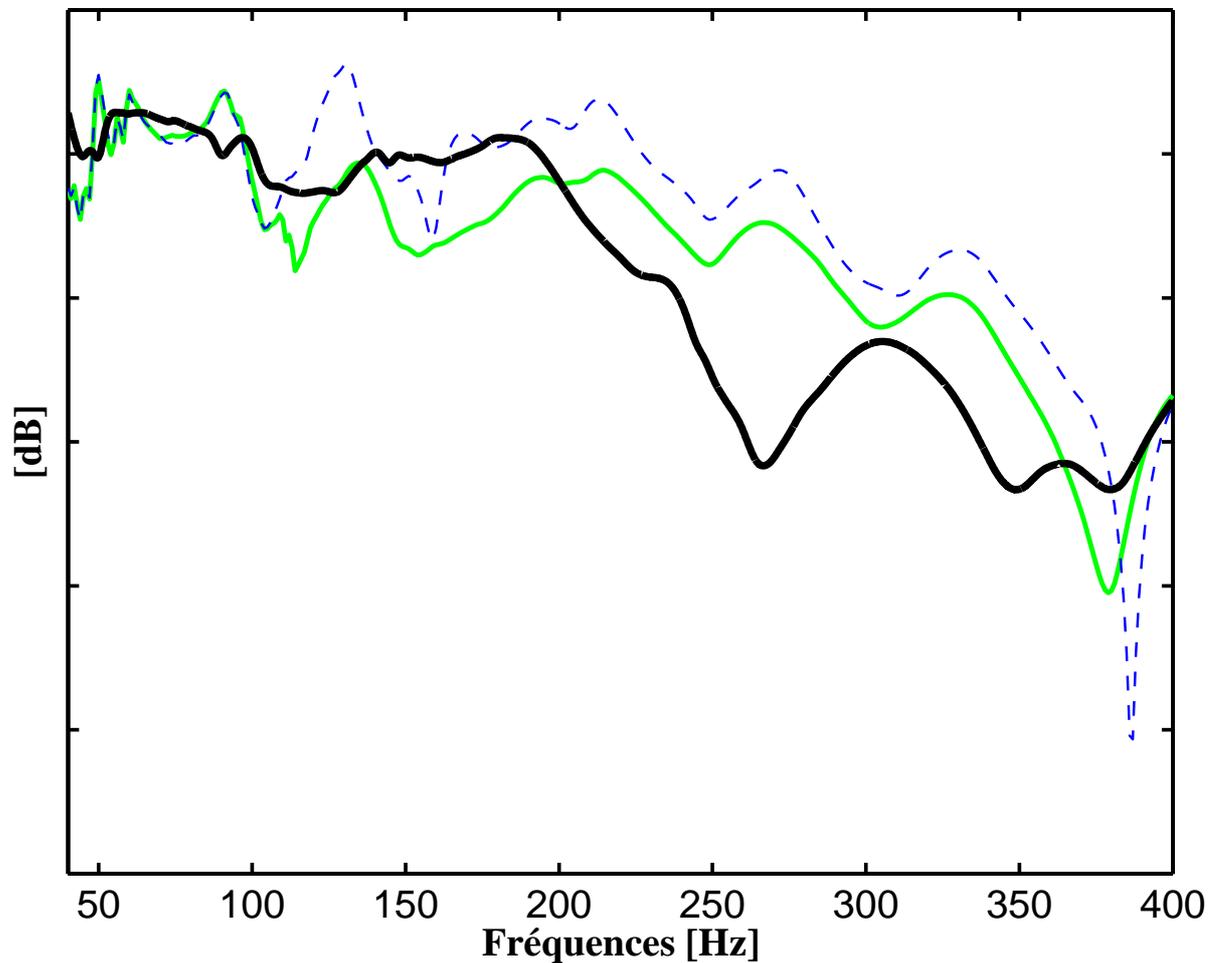


FIG. VII.12 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp,moy}}(f)$ des mesures pour une excitation acoustique au point **avgg** et observation au point **cavp** (*trait épais foncé*) (voir figures VII.2, VII.3). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{flou}}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{massrep}}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*)

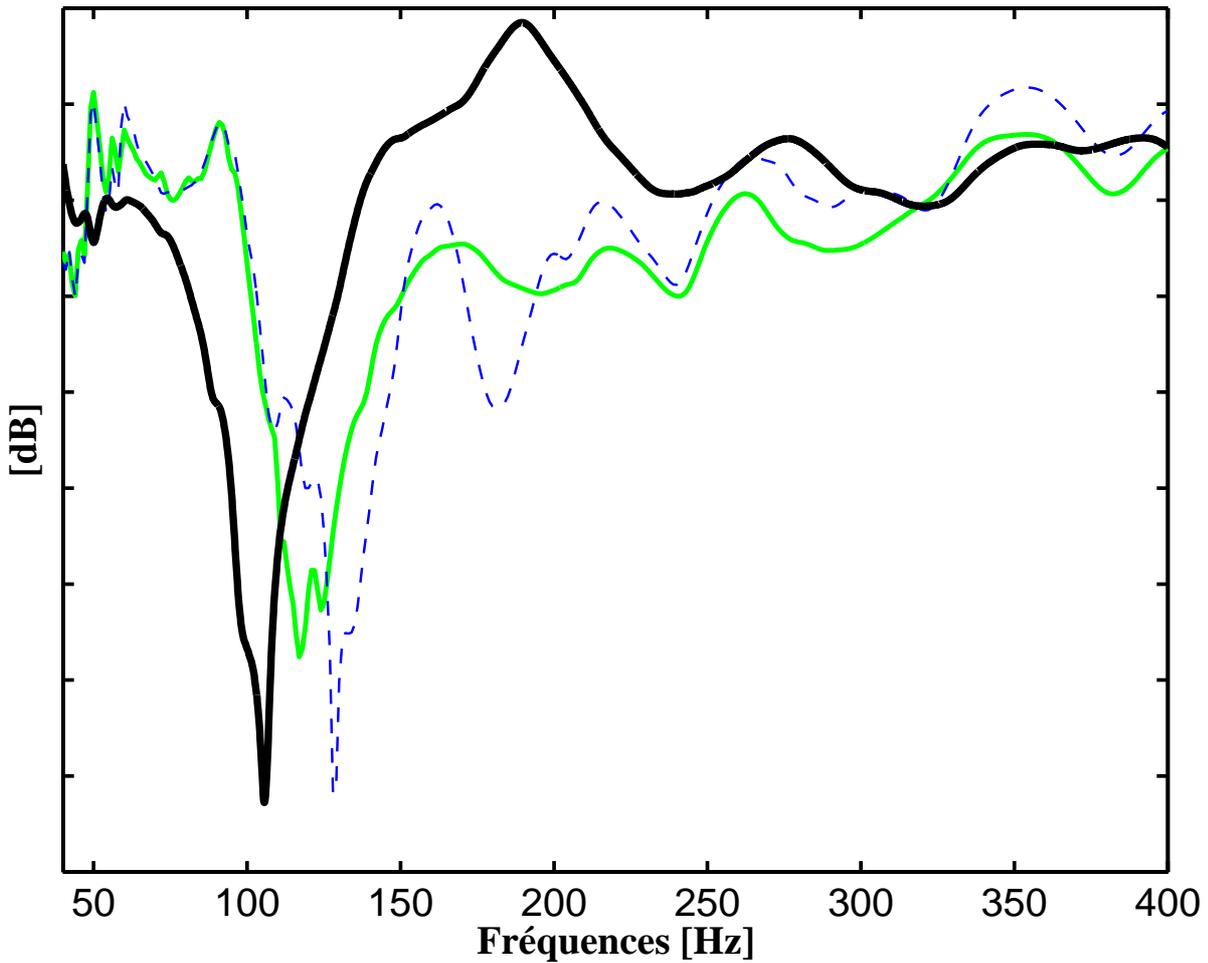


FIG. VII.13 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp,moy}}(f)$ des mesures pour une excitation acoustique au point **avgg** et observation au point **parbVA** (*trait épais foncé*) (voir figures VII.2,VII.3). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{flou}}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{press}}^{\text{massrep}}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*)

VII.3.3 Comparaison des deux modèles d'habillage pour les calculs vibratoires - 1 graduation = 10 dB

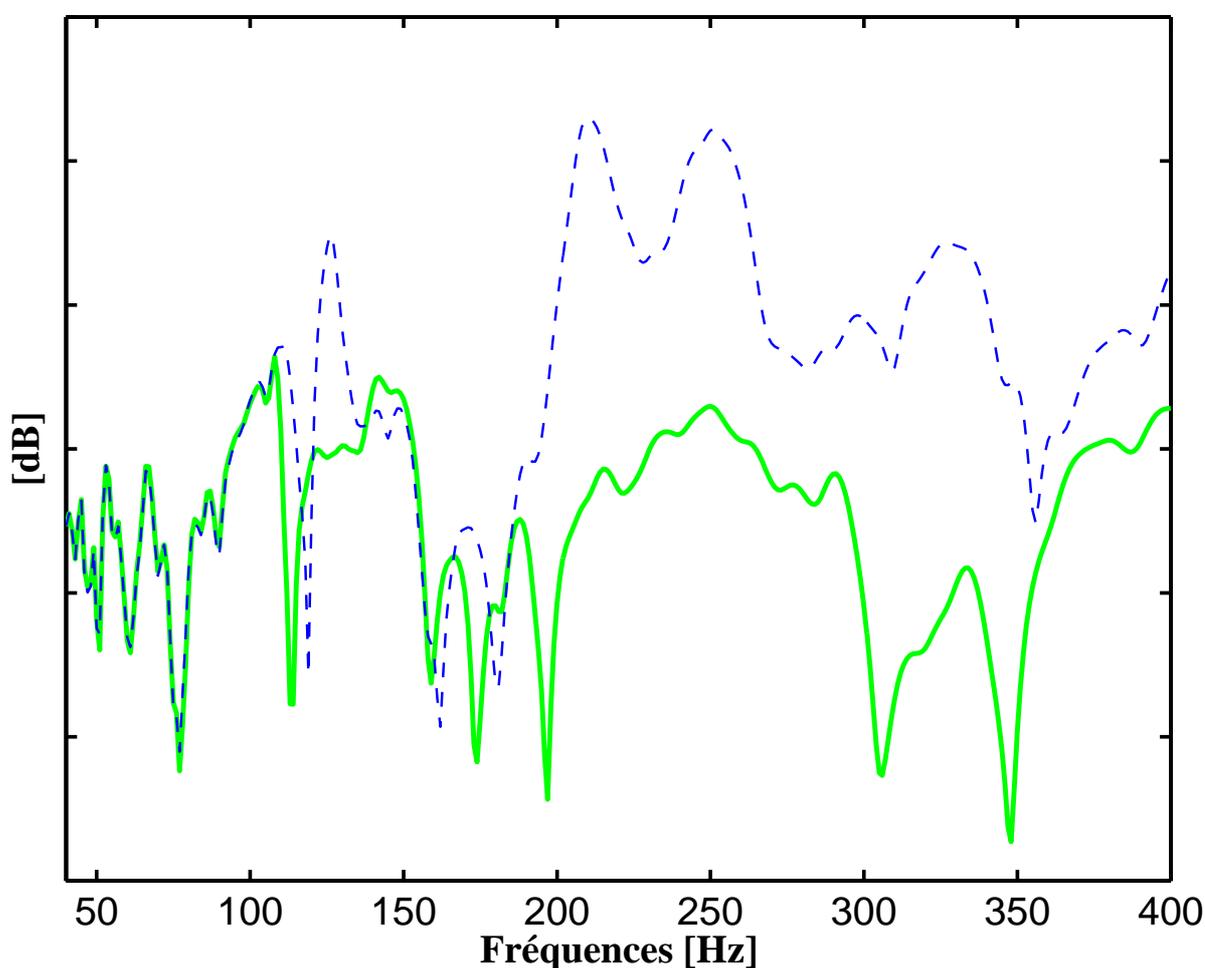


FIG. VII.14 – Graphes de $f \mapsto \underline{dB}_{acc}^{flou}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*) et $f \mapsto \underline{dB}_{acc}^{massrep}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*) pour une excitation mécanique au point **csvd** dans la direction **Z** et observation au point **tab** (voir figures VII.2, VII.4).

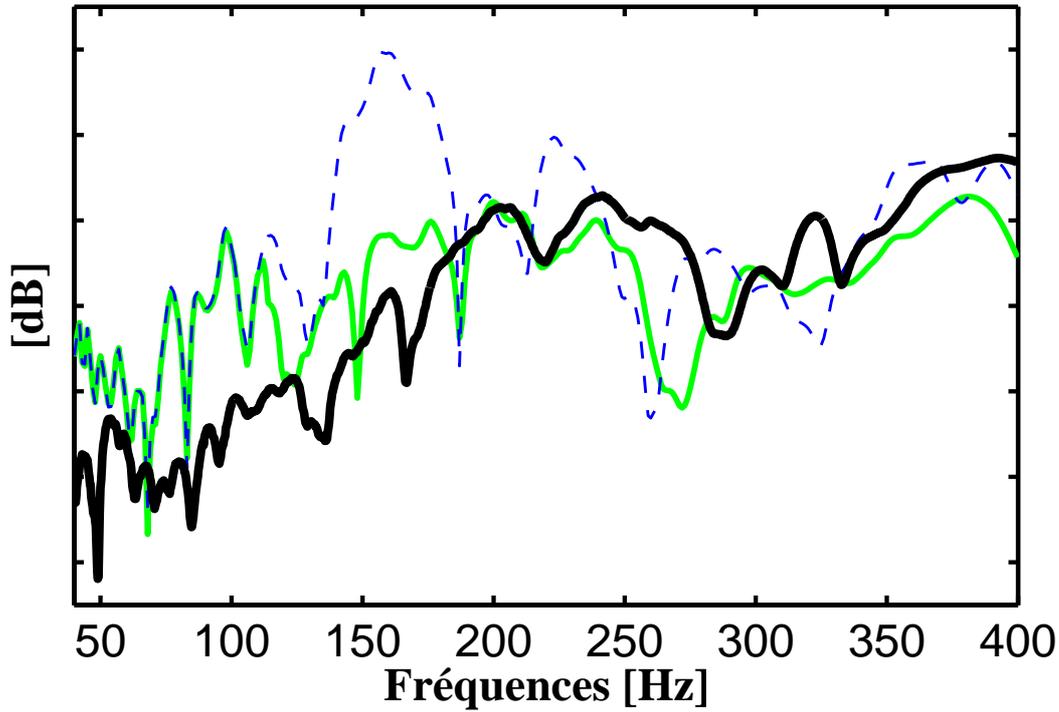


FIG. VII.15 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{acc}}^{\text{exp,moy}}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **csvd** dans la direction **Z** et observation au point **pla** (*trait épais foncé*) (voir figures VII.2, VII.4). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{acc}}^{\text{flou}}(f)$ du modèle avec structures floues (*trait épais clair*). Graphe de $f \mapsto \underline{dB}_{\text{acc}}^{\text{massrep}}(f)$ du modèle avec masses réparties (*trait fin discontinu*).

VII.4 Comparaison des mesures avec les modèles stochastiques

Ce paragraphe est consacré à la comparaison des 40 mesures avec les modèles vibroacoustiques réduits probabilistes dont le modèle simplifié moyen d'habillage est soit fondé sur la théorie des structures floues soit sur un modèle de masses réparties. Les paramètres de dispersion δ des matrices aléatoires sont ceux identifiés par Jean-François Durand dans sa thèse de doctorat [42] et ceux identifiés au chapitre VI.

Pour les calculs, on trace la moyenne stochastique $f \mapsto \mathcal{E}\{dB(f)\}$ (*trait épais clair*), et les quantiles $f \mapsto \mathcal{E}\{dB^+(f)\}$ et $f \mapsto \mathcal{E}\{dB^-(f)\}$ pour $\alpha = 0.95$ (*trait épais foncé*) et $\alpha = 0.99$ (*trait épais foncé discontinu*). On trace pour les mesures la moyenne des mesures $f \mapsto$

$dB^{\text{exp,moy}}(f)$ (trait clair fin central) et les courbes enveloppant les mesures (traits supérieur et inférieur fin clairs). On montre à la figure VII.16 la convergence en moyenne d'ordre 2 du solveur stochastique.

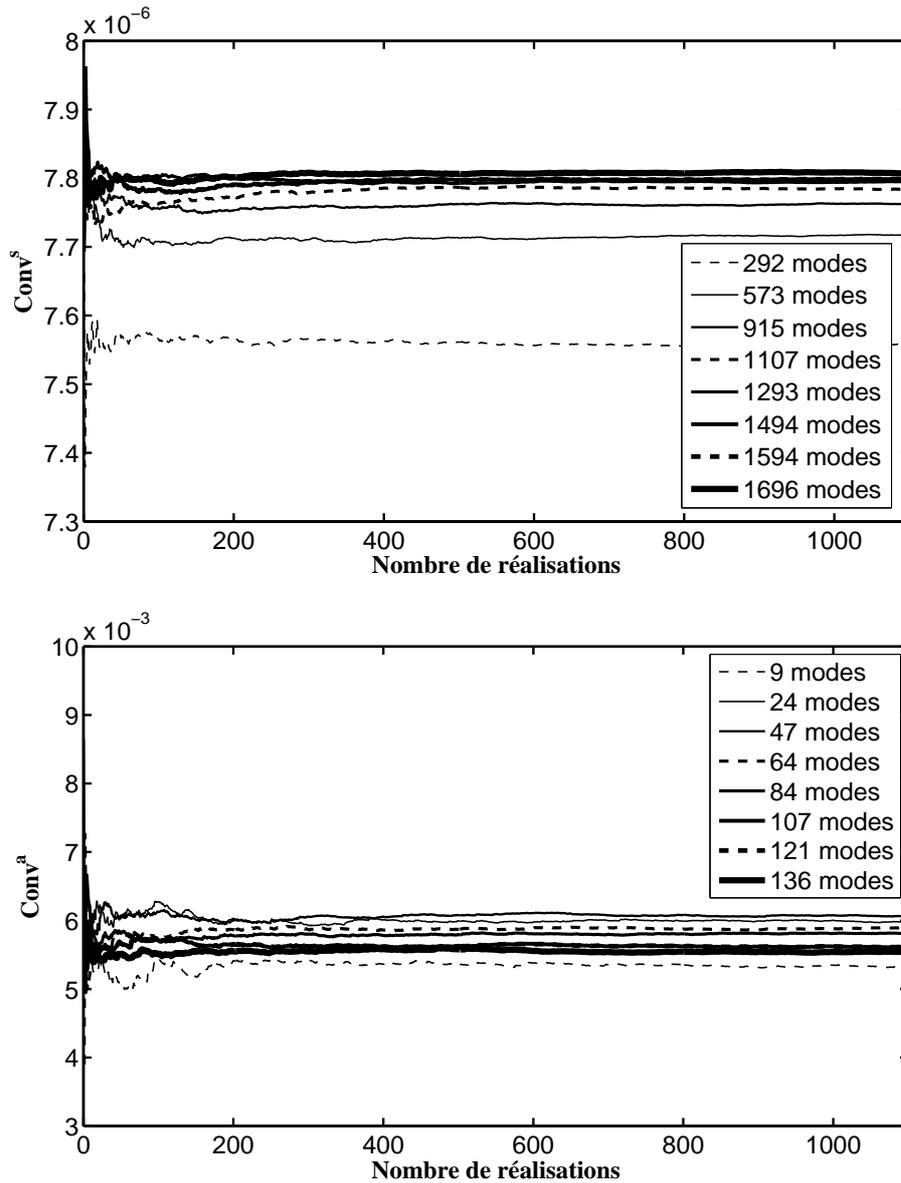


FIG. VII.16 – Graphe des fonctions $(n_r, n_s) \mapsto \text{Conv}^s(n_r, n_s)$ (figure du haut) et $(n_r, n_a) \mapsto \text{Conv}^a(n_r, n_a)$ (figure du bas) pour le modèle vibroacoustique avec le modèle d'habillage fondé sur la théorie des structures floues.

VII.4.1 Comparaison des mesures vibroacoustiques avec les modèles stochastiques - 1 graduation = 20 dB

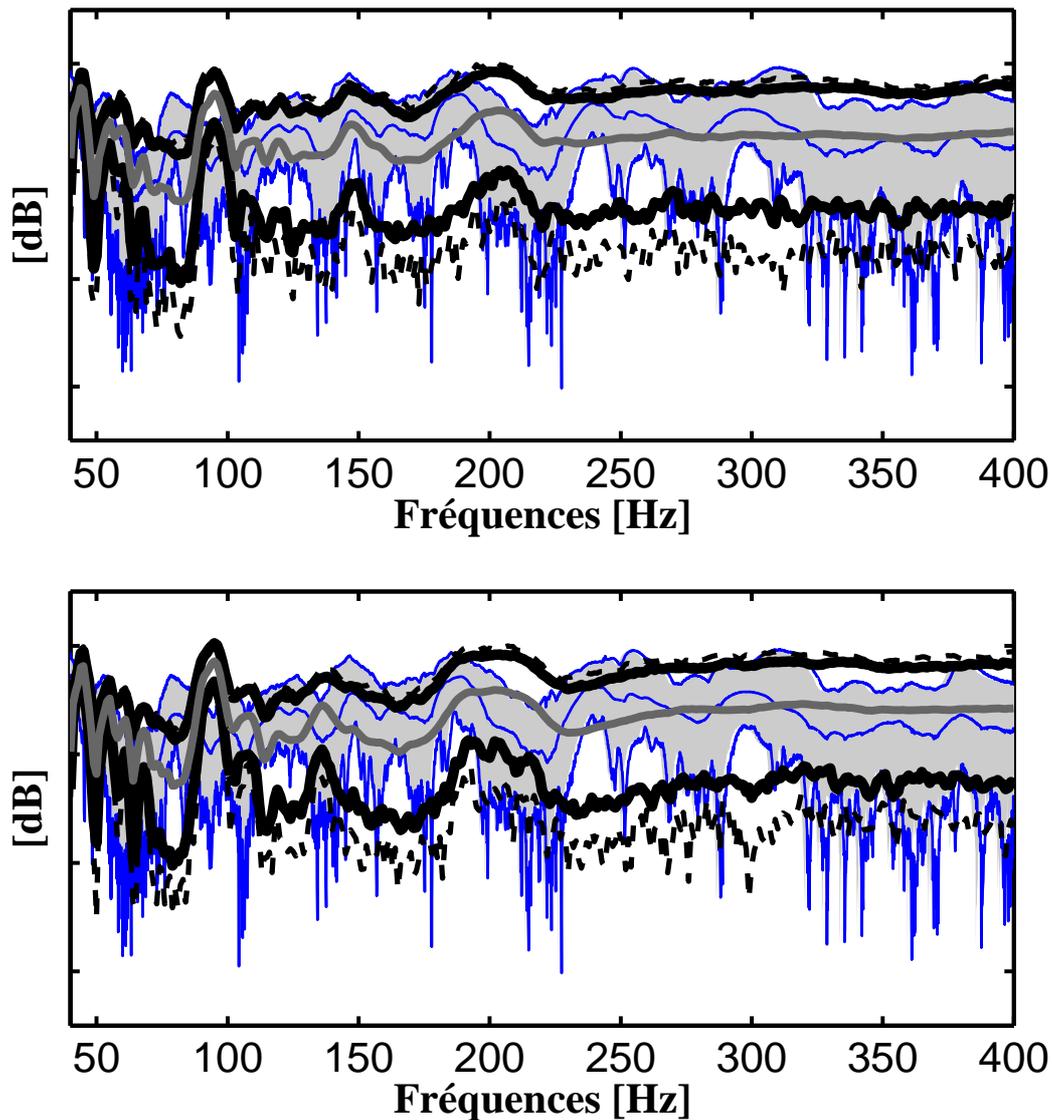


FIG. VII.17 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp}}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **cb0i** dans la direction **X** et observation au point **avgg** (zone grisée claire) (voir figure VII.2). Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{\text{press}}(f)\}$ (trait gris épais). Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{\text{press}}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (traits épais foncés supérieur et inférieur) et pour $\alpha = 0.99$ (traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

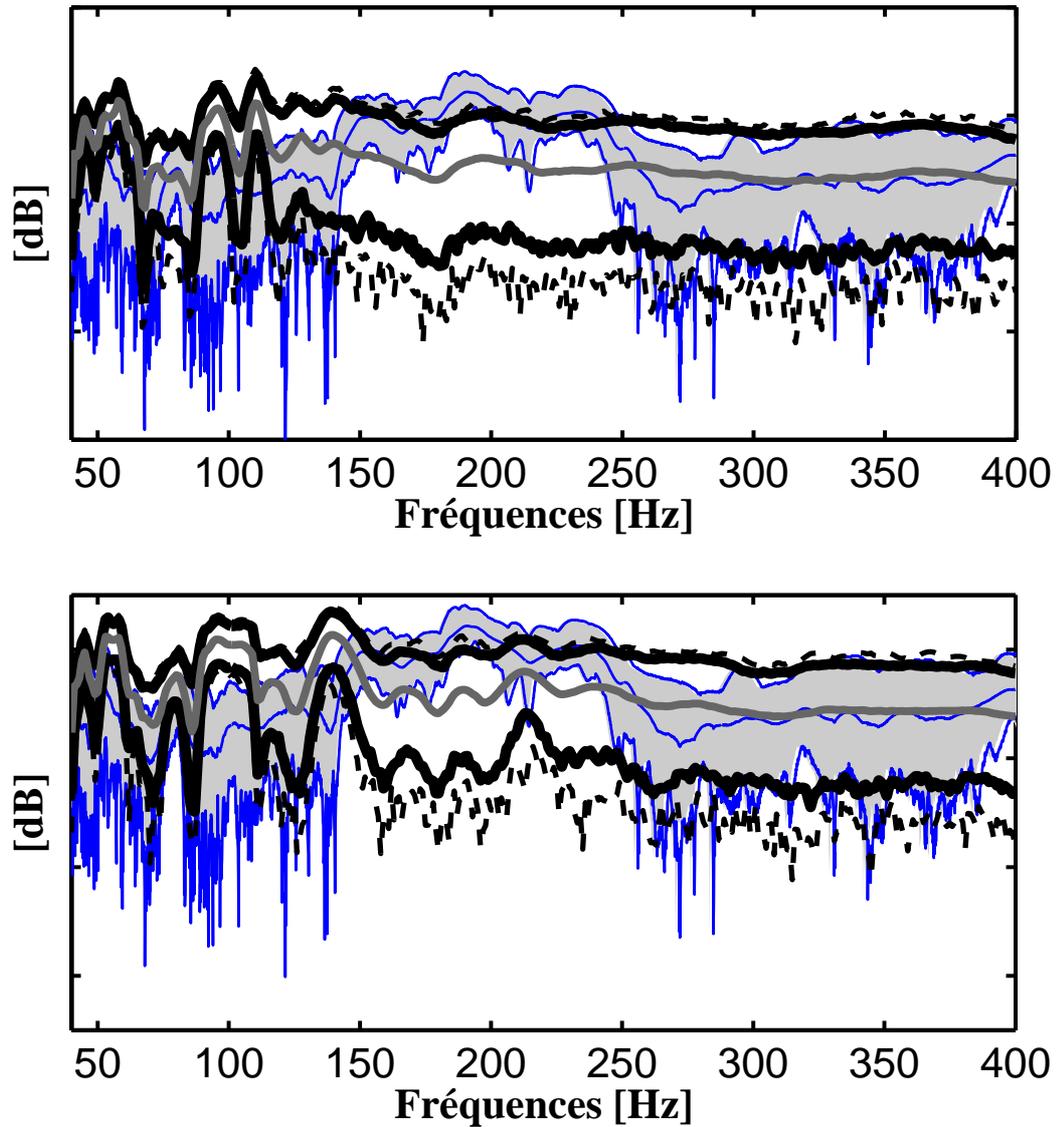


FIG. VII.18 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp}}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **csvd** dans la direction **Z** et observation au point **avgg** (*zone grisée claire*) (voir figure VII.2). Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{\text{press}}(f)\}$ (*trait gris épais*). Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{\text{press}}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (*traits épais foncés supérieur et inférieur*) et pour $\alpha = 0.99$ (*traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur*). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

VII.4.2 Comparaison des mesures acoustiques avec les modèles stochastiques - 1 graduation = 20 dB

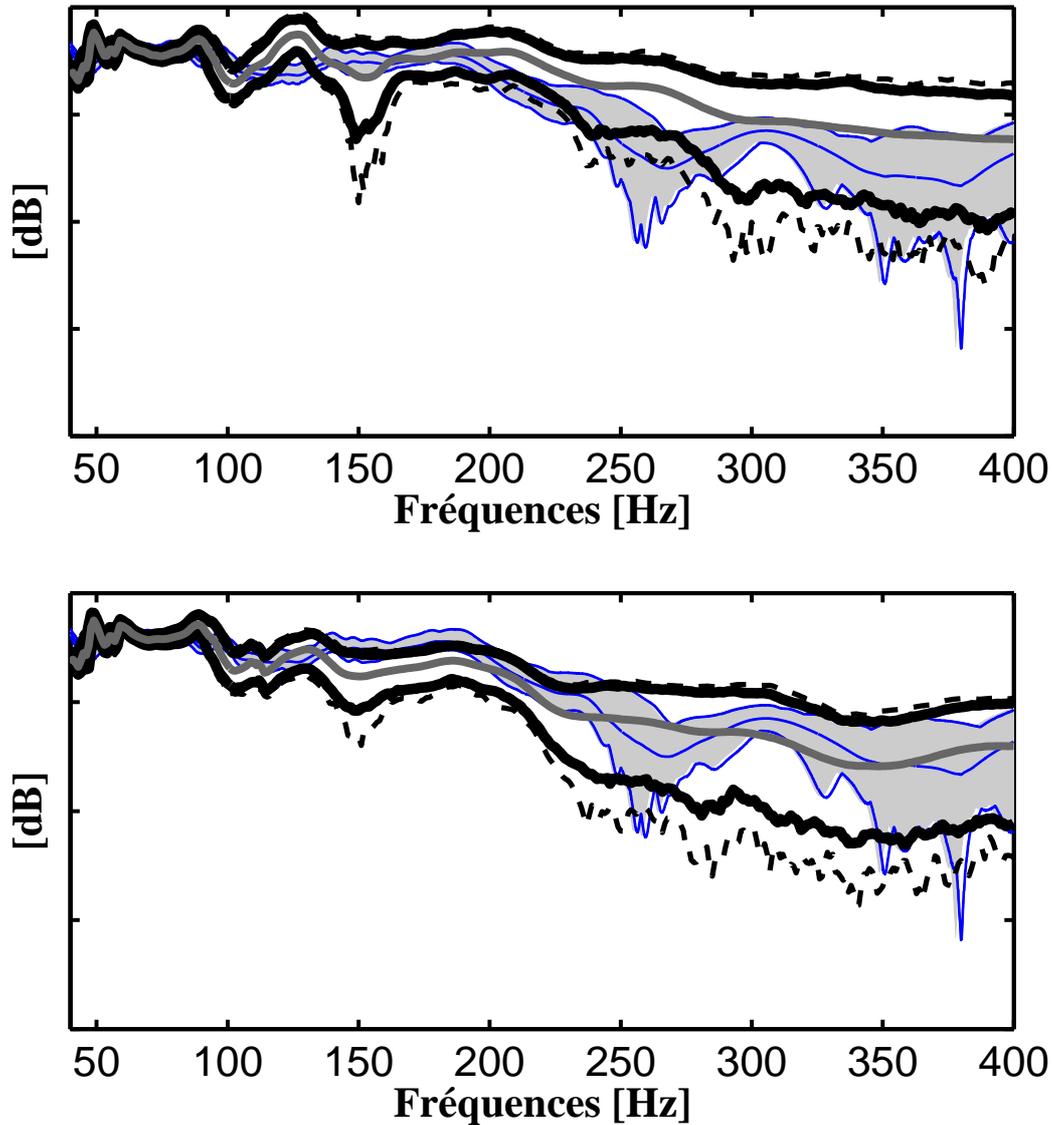


FIG. VII.19 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp}}(f)$ des mesures pour une excitation au point **avgg** et observation au point **cavp** (*zone grisée claire*) (voir figure VII.2,VII.3). Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{\text{press}}(f)\}$ (*trait gris épais*). Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{\text{press}}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (*traits épais foncés supérieur et inférieur*) et pour $\alpha = 0.99$ (*traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur*). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

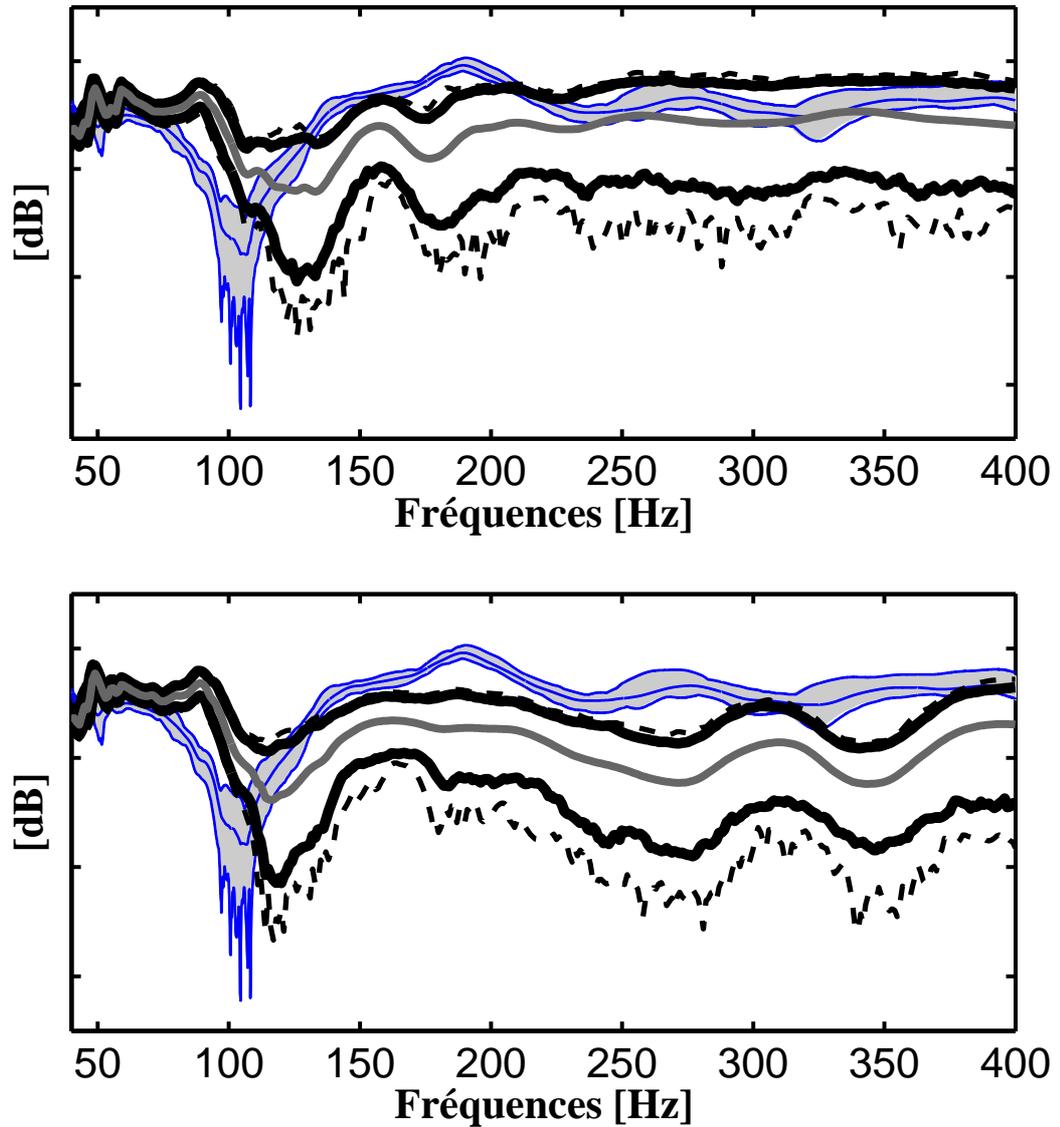


FIG. VII.20 – Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^{\text{exp}}(f)$ des mesures pour une excitation au point **avgg** et observation au point **parbVA** (zone grisée claire) (voir figure VII.2,VII.3). Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{\text{press}}(f)\}$ (trait gris épais). Graphe de $f \mapsto dB_{\text{press}}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{\text{press}}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (traits épais foncés supérieur et inférieur) et pour $\alpha = 0.99$ (traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

VII.4.3 Comparaison des mesures vibratoires avec les modèles stochastiques - 1 graduation = 20 dB

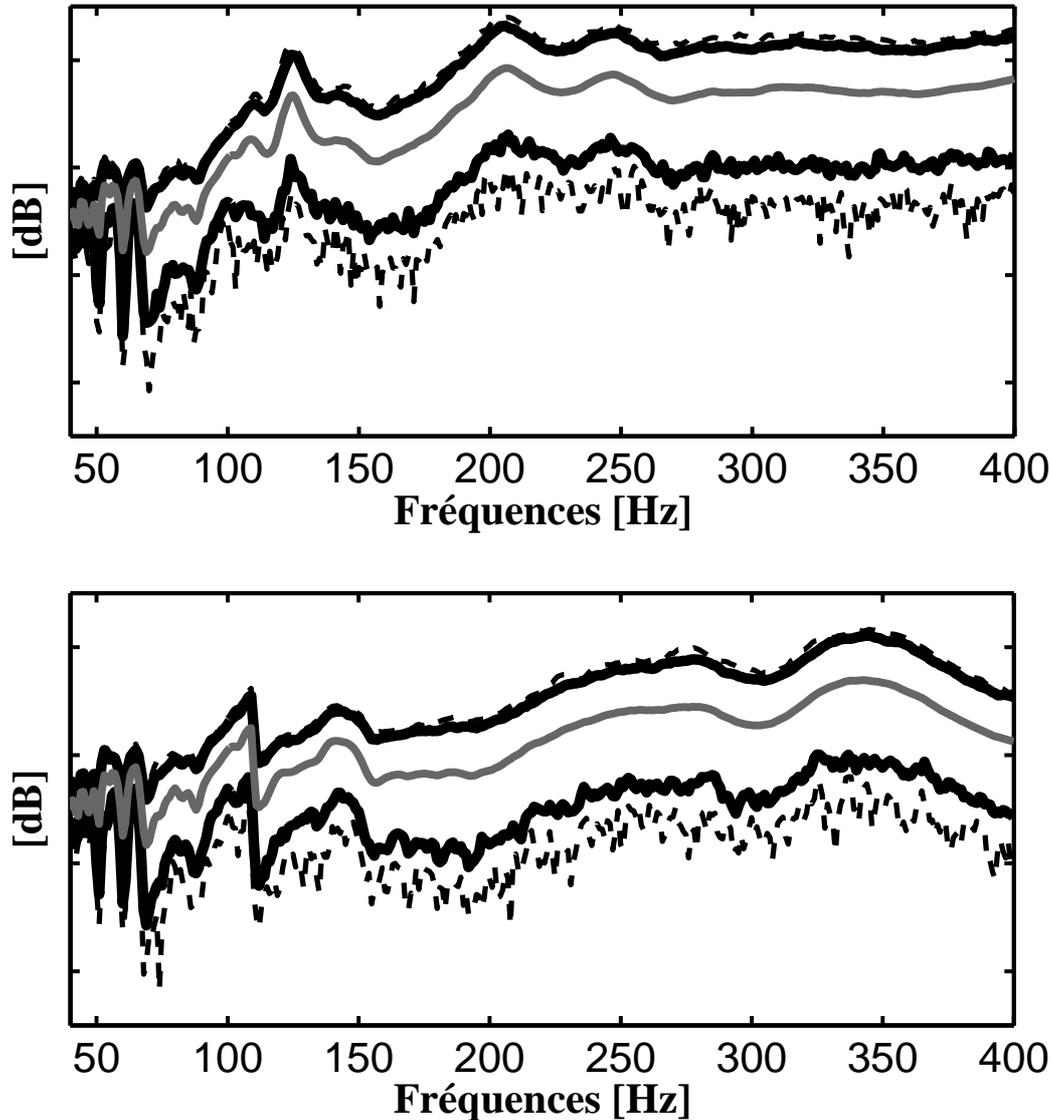


FIG. VII.21 – Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{acc}(f)\}$ (*trait gris épais*) pour une excitation au point **csvd** et observation au point **tab** (voir figure VII.2,VII.4). Graphe de $f \mapsto dB_{acc}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{acc}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (*traits épais foncés supérieur et inférieur*) et pour $\alpha = 0.99$ (*traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur*). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

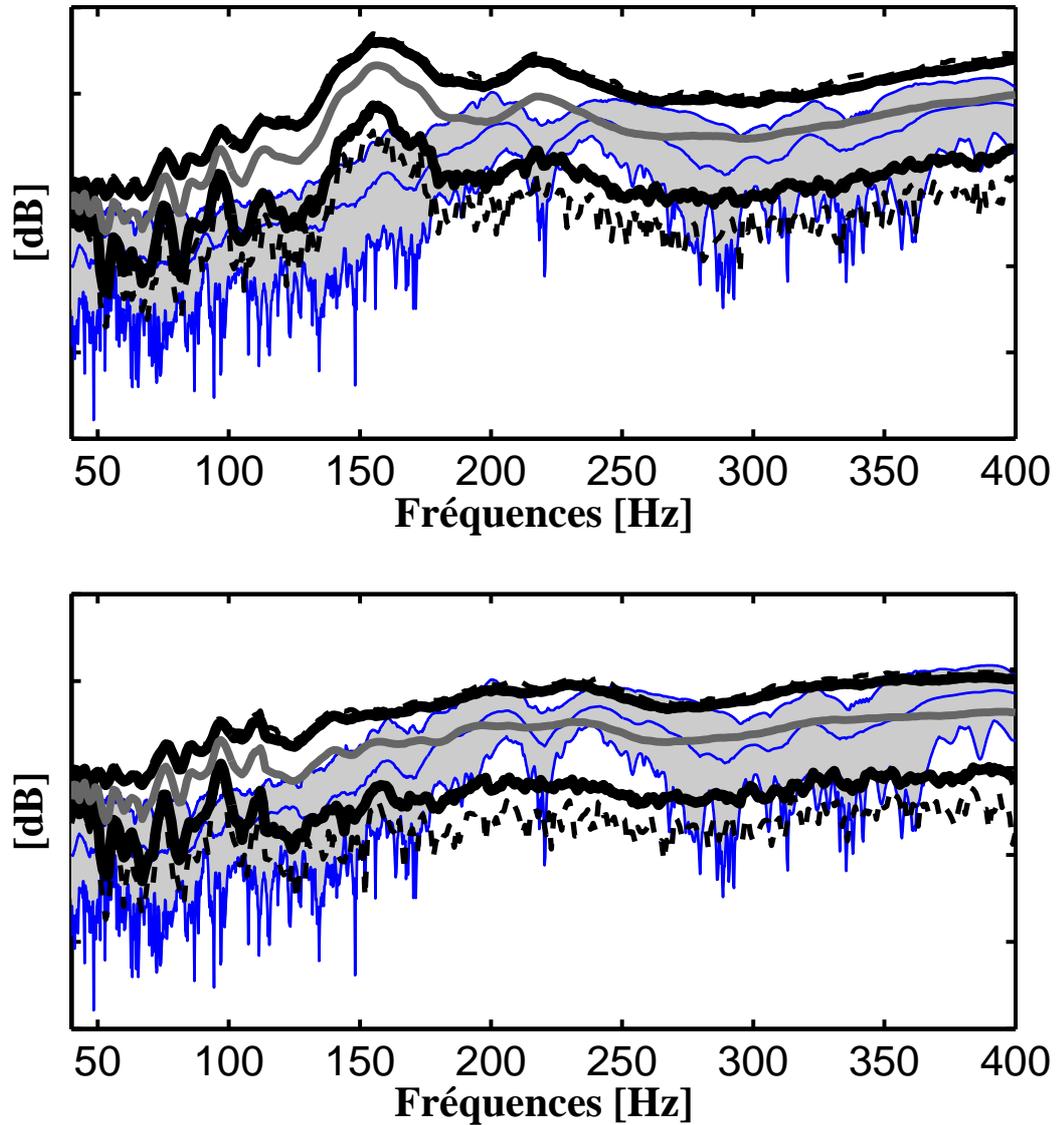


FIG. VII.22 – Graphe de $f \mapsto dB_{acc}^{exp}(f)$ des mesures pour une excitation mécanique au point **csvd** dans la direction **Z** et observation au point **pla** (voir figure VII.2,VII.4). Graphe de $f \mapsto \mathcal{E}\{dB_{acc}(f)\}$ (trait gris épais). Graphe de $f \mapsto dB_{acc}^+(f)$ et $f \mapsto dB_{acc}^-(f)$ pour $\alpha = 0.95$ (traits épais foncés supérieur et inférieur) et pour $\alpha = 0.99$ (traits épais foncés discontinus supérieur et inférieur). Modèle d'habillage avec des masses réparties (figure du haut). Modèle d'habillage fondé sur la théorie des structure floues (figure du bas).

VII.5 Synthèse concernant la comparaison des modèles d'habillage

VII.5.1 Vibroacoustique

Il est difficile de conclure à partir de la comparaison des modèles moyens avec la moyenne des mesures. On voit que l'estimation *sur plan* des paramètres moyens de l'habillage considéré donne une prédiction relativement bonne. On peut de plus noter qu'il subsiste des erreurs de modélisation qui ne sont pas liées uniquement au modèle d'habillage considéré et qui rendent les comparaisons ardues (voir les figures VII.10 et VII.11). Lorsque l'on compare les modèles stochastiques avec les mesures on relèvera que dans les bandes de fréquences d'intérêt, *i.e.* [100,250] Hz (la bande de fréquences où les habillages possèdent une forte dynamique interne), les zones de confiance du modèle vibroacoustique avec le modèle d'habillage fondé sur la théorie des structures floues sont plus étroites que pour le modèle avec les masses réparties (voir la figure VII.18). On peut ainsi conclure que le fait de prendre en compte la physique interne de l'habillage permet d'obtenir des prévisions plus robustes aux incertitudes. On a donc augmenté la prédictibilité du modèle vibroacoustique dans cette bande de fréquences.

VII.5.2 Acoustique

La comparaison des mesures acoustiques avec les modèles vibroacoustiques moyens montre que ceux-ci contiennent beaucoup d'erreurs de modélisation que même un modèle parfait d'habillage ne pourrait recalculer complètement. Il y a notamment dans la bande de fréquences [150,200] Hz des écarts importants entre le modèle et les mesures pour le point fluide situé sous le pare-brise (voir figure VII.13). On relèvera de plus pour le point fluide situé dans la cave à pieds (voir la figure VII.19) que le modèle stochastique en masses réparties qui ne prend absolument pas en compte la physique interne des habillages (qui ont beaucoup de résonances dynamiques dans cette zone) semble mieux prédire les mesures. La cavité acoustique à cet endroit a été construite en maillage compatible avec la structure habillée, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de maillage acoustique reproduisant la forme de la planche de bord. On en conclut qu'une grande partie de l'erreur de modélisation commise dans la cavité acoustique est mise en évidence par l'*apparente bonne prédiction* d'un modèle ne respectant pas la physique (dans la zone de fréquences considérée).

VII.5.3 Vibratoire

Même si l'on ne dispose pas de mesures sur le tablier, on peut voir que le modèle fondé sur la théorie des structures floues permet de mettre en évidence en BF les écarts engendrés par une

modélisation des habillages par masse ajoutée. La figure VII.14 montre le graphe de la réponse en fréquence entre le support moteur droit en \mathbf{Z} et un point du tablier pour la même direction (on a choisi ce point de telle sorte qu'il soit sur la normale au plan). On s'aperçoit que la modélisation par masses réparties qui ne fait que doubler la masse volumique du tablier provoque un décalage fréquentiel important de plusieurs modes de tablier. Ceci ne correspond pas à la physique observée et n'apparaît pas avec le modèle d'habillage fondé sur la théorie des structures floues qui découple particulièrement la masse dans la bande de fréquences d'intérêt. Si l'on regarde maintenant la figure VII.22, on voit que la majeure partie de l'erreur de modélisation due aux masses réparties est prise en compte avec le modèle d'habillage fondé sur la théorie des structures floues.

VII.6 Résumé du chapitre

On a présenté dans ce chapitre une estimation *sur plan* des paramètres moyens du modèle simplifié d'habillage fondé sur la théorie des structures floues. Des comparaisons modélisation/essais ont été effectuées à la fois pour le modèle avec habillage flou et le modèle précédent avec habillage en masses réparties. Une synthèse est proposée à la fin du chapitre.

Conclusion

1 Synthèse des travaux effectués

Dans ce travail de recherche, l'objectif était de développer un modèle simplifié destiné à modéliser le comportement de structures complexes insonorisantes (habillages) constituées d'assemblages de divers matériaux (poro-élastiques, bitumeux, etc.) afin d'améliorer la prédiction en basses et moyennes fréquences ($[0,400]$ Hz) de modèles complexes numériques de véhicules en vibroacoustique. Jusqu'à présent, des approximations avaient été introduites afin de rendre les modèles exploitables par les services d'ingénierie. En particulier, les habillages étaient modélisés par un ajout de masses réparties ce qui ne rendait pas compte de la dynamique interne des habillages réels. Le modèle simplifié d'habillage que nous avons proposé est fondé sur la théorie des structures floues et permet de prendre en compte les degrés de liberté dynamiques internes des habillages. En contre-partie de ces simplifications, des incertitudes de modélisation sont introduites. Nous avons construit un modèle probabiliste afin de les prendre en compte. Le modèle simplifié de l'habillage ainsi développé est implémenté dans un modèle vibroacoustique d'automobile.

Le modèle moyen réduit modélisant le système vibroacoustique est constitué

- (1) des matrices réduites relatives au comportement dynamique de la structure,
- (2) des matrices réduites relatives au comportement dynamique de la cavité acoustique,
- (3) de la matrice de couplage vibroacoustique et
- (4) des matrices et coefficients associés issus du modèle simplifié réduit de l'habillage.

Le modèle simplifié moyen de l'habillage a été construit à partir d'un élément élastoacoustique qui constitue une extension de la théorie des structures floues. En ce qui concerne le modèle simplifié réduit probabiliste de l'habillage, on a utilisé une approche non paramétrique pour prendre en compte les incertitudes dans le modèle moyen simplifié de l'habillage tout en conservant les coefficients associés déterministes.

Pour la validation du modèle simplifié probabiliste d'habillage, nous avons élaboré une méthodologie d'identification (1) des paramètres moyens du modèle simplifié moyen et (2) des paramètres

de dispersion contrôlant le niveau d'incertitude du modèle simplifié réduit probabiliste de l'habillage. Afin d'identifier le modèle moyen, nous avons utilisé une base de données expérimentale et résolu un problème d'optimisation. Le dispositif expérimental était composé d'une structure faite avec un cadre élastique suspendu par des élastiques et sur lequel une plaque nue ou habillée était boulonnée. On a mesuré des FRF vibratoires sous la plaque et on a recalé les paramètres du modèle moyen d'habillage en utilisant l'énergie vibratoire de la plaque. Un des avantages de la théorie est que les paramètres contrôlant les aspects couplage et acoustique du modèle d'habillage sont les mêmes que les paramètres contrôlant l'aspect structure. Un second dispositif expérimental vibroacoustique n'a donc pas été nécessaire pour recalibrer ces paramètres. Une application directe d'un calcul vibroacoustique sans recalage a toutefois été confrontée à un *calcul de référence* effectué par un logiciel du commerce. Les paramètres de dispersion du modèle réduit probabiliste de l'habillage ont été identifiés intrinsèquement à partir d'une référence numérique dans le but d'éviter que les incertitudes de modélisation de la structure nue supportant l'habillage ne perturbent l'identification.

En ce qui concerne l'application industrielle du modèle d'habillage simplifié, on a comparé les modèles vibroacoustiques moyens et probabilistes d'un véhicule (*avec le modèle simplifié d'habillage pour l'habillage de tablier et l'habillage de plancher avant*) avec une base de données expérimentale. Cette base de données est constituée de mesures de FRF vibroacoustiques et acoustiques en divers points du véhicule pour une série de 40 véhicules pris en sortie de chaîne de montage au hasard. Les véhicules étaient tous différents mais possédaient tous les mêmes habillages de tablier et de plancher avant. Le fait de prendre en compte la physique interne de l'habillage permet d'obtenir des prévisions plus robustes aux incertitudes. En effet, dans les bandes de fréquences où les habillages possèdent une forte dynamique interne, on remarque pour les prévisions vibroacoustiques que les zones de confiance sont plus étroites avec le modèle simplifié de l'habillage qu'avec le modèle en masses réparties. Il semblerait de plus qu'une grande partie de l'erreur de modélisation commise dans la cavité acoustique soit mise en évidence par le modèle prenant en compte la dynamique interne des habillages. Pour des prédictions vibratoires, on voit que la majeure partie de l'erreur de modélisation due aux masses réparties sur la répartition des modes structure pour les intervalles de fréquences d'intérêt est prise en compte avec le modèle d'habillage fondé sur la théorie des structures floues.

2 Perspectives

Il n'a pas été possible pour des raisons pratiques de mesurer des FRF vibratoires sous les habillages. Une voie d'amélioration de la méthode d'estimation *sur plan* serait donc de monter une

expérience où l'on pourrait accéder à plusieurs points sous les habillages. Cette manipulation serait à faire pour tous les types d'habillage et pour tous les types de disposition d'habillage dans un véhicule. On pense notamment aux différentes configurations de présence d'habillage selon la diversité des véhicules (*diversité au sein d'un même modèle, diversité au sein des catégories de modèles*). Une base de données réutilisable serait donc à disposition de l'ingénierie dès les avant-projets.

Dans la comparaison expérimentale, seule l'influence des habillage du tablier et habillage du plancher avant a été étudiée. Il serait intéressant de pousser plus loin la modélisation aux différents autres habillages de moindre importance vibroacoustique basses fréquences.

Concernant les paramètres de dispersion du modèle stochastique de la structure couplée à la cavité, on a utilisé des résultats d'identification existant qui correspondent à un véhicule différent de celui utilisé dans ce présent travail et dont le modèle d'habillage était en masses réparties. Bien que la complexité sur la cavité couplée à la structure (*et donc les niveaux d'incertitude*) entre ces deux modèles soit équivalente, il serait intéressant de mener à nouveau cette identification avec la méthode proposée au chapitre VI et les modèles d'habillages simplifiés pré-identifiés.

Une voie d'amélioration possible des modèles numériques vibroacoustiques en général serait d'utiliser la théorie des structures floues pour modéliser des pièces d'*habillage au sens large* (sièges, capot, face avant, pare-chocs, planche de bord) qui sont reliés à la structure maîtresse du véhicule par des attachements discrets.

Annexe A

Formules utiles

A.1 Calcul vectoriel

On reprend les mêmes notations que dans la table des notations. On a l'identité suivante :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla \{ \nabla \cdot \mathbf{u} \} - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) \quad . \quad (\text{A.1})$$

Formule de Green

On définit \mathbf{n} comme la normale *extérieure* au domaine Ω .

$$- \int_{\Omega} \nabla^2 \mathbf{u} \delta \mathbf{u} \, dx = \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \nabla \delta \mathbf{u} \, dx - \int_{\partial \Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{u} \, ds \quad . \quad (\text{A.2})$$

A.2 Primitives utiles

Pour $u > 0$ et $\xi \in]0; 1[$ on a les primitives suivantes (voir Abramovitz and Stegun [\[1\]](#)) :

$$\int \frac{u^2 - 1}{(u^2 - 1)^2 + 4\xi^2 u^2} du = \frac{-1}{4\sqrt{1 - \xi^2}} \ln \left[\frac{u^2 + 2\sqrt{1 - \xi^2}u + 1}{u^2 - 2\sqrt{1 - \xi^2}u + 1} \right] \quad , \quad (\text{A.3})$$

$$\int \frac{u}{(u^2 - 1)^2 + 4\xi^2 u^2} du = \frac{1}{4\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \arctan \left[\frac{u^2 + 2\xi^2 - 1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} \right] \quad , \quad (\text{A.4})$$

$$\int \frac{u^2(u^2 - 1 + 4\xi^2)}{(u^2 - 1)^2 + 4\xi^2 u^2} du = u - \frac{1}{4\sqrt{1 - \xi^2}} \ln \left[\frac{u^2 + 2\sqrt{1 - \xi^2}u + 1}{u^2 - 2\sqrt{1 - \xi^2}u + 1} \right] \quad . \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Paramétrage de la densité modale et évolution fréquentielle des coefficients du modèle simplifié de l’habillage

B.1 Définition d’un paramétrage pour la densité modale moyenne d’un habillage réel

Comme nous l’avons signalé dans le sous-paragraphe II.6.4, la densité modale $\underline{n}(\omega)$ ne peut pas être nulle pour $\omega \geq \Omega_c + \Delta\Omega$ ou ne peut pas tendre vers 0 lorsque $\omega \rightarrow +\infty$ (voir par exemple l’étude bibliographique mathématique Ollivry [109] et Courant and Hilbert [32]). Comme l’habillage peut être le plus souvent assimilé à des assemblages de coques, on propose ici une densité modale moyenne dont le comportement asymptotique est similaire à celui des coques minces, c’est-à-dire est asymptotiquement constant et présentant un maximum local. Ce maximum local est atteint pour $\omega = \Omega_R$, la résonance d’épaisseur (voir Ollivry [109], Weyl [160], Weyl [161], Ivrii [70], Gol’denveizer [61], Gol’denveizer [62] et Gol’denveizer *et al.* [63]). Pour tout $\omega \geq 0$, on introduit donc la densité modale paramétrée suivante :

$$\underline{n}(\omega) = \begin{cases} 0 & , \text{ pour } 0 \leq \omega < \Omega_c \quad , \\ \underline{n}_\infty(\omega)\omega^{4\alpha} / [(\omega^2 - \tilde{\omega}_R^2)^2 + \eta^2\tilde{\omega}_R^2\omega^2]^\alpha & , \text{ pour } \omega \geq \Omega_c \quad , \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

avec α un réel positif, \underline{n}_∞ la densité modale asymptotique pour $\omega \rightarrow \infty$ que l’on écrit,

$$\underline{n}_\infty = \varepsilon \underline{n}_0(\omega) \quad , \quad (\text{B.2})$$

où $\underline{n}_0(\omega)$ est donné par l'équation suivante,

$$\underline{n}_0(\omega) = \frac{n_i + n_f}{2} + \frac{n_i - n_f}{2} \tanh \left[a \left(\omega - \frac{\omega_i + \omega_f}{2} \right) \right] , \quad (\text{B.3})$$

avec ε un réel positif, n_i et n_f deux réels positifs tels que $n_i < n_f$, a un réel et ω_i et ω_f deux réels positifs tels que $\omega_i < \omega_f$. Le paramètre $\tilde{\omega}_R$ est défini par

$$\tilde{\omega}_R = \Omega_R \sqrt{1 - \frac{\eta^2}{2}} , \quad (\text{B.4})$$

où η est un réel positif tel que $0 < \eta < \sqrt{2}$ qui s'écrit,

$$\eta = \sqrt{2 - 2\sqrt{1 - (\varepsilon)^{1/\alpha}}} . \quad (\text{B.5})$$

Un exemple de graphe de $\omega \mapsto \underline{n}(\omega)$ est donné à la figure B.1.

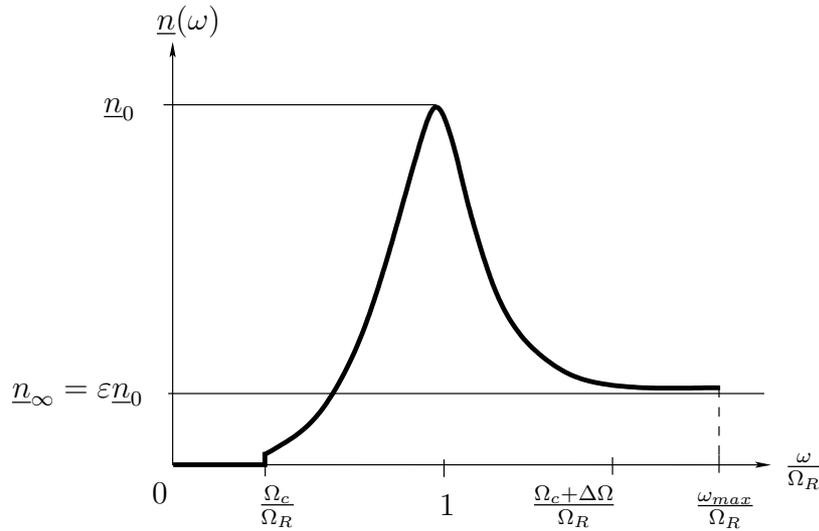


FIG. B.1 – Schéma de principe de la densité modale paramétrée

B.2 Exemple d'évolution fréquentielle des coefficients du modèle simplifié de l'habillage pour un habillage réel

Dans ce paragraphe on montre l'évolution fréquentielle des coefficients \underline{a}_R^s , \underline{a}_I^s , \underline{a}_R^a , \underline{a}_I^a , \underline{a}_R^c et \underline{a}_I^c définis au paragraphe II.4 par les équations (II.107) à (II.112), pour un ensemble de valeurs des

Ω_c	$0.01 \text{ rad} \times \text{s}^{-1}$
Ω_R	$2\pi \times 120 \text{ rad} \times \text{s}^{-1}$
n_i	0.008824 s^{-1}
n_f	0.00015 s^{-1}
ω_i	$2\pi \times 133 \text{ rad} \times \text{s}^{-1}$
ω_f	$2\pi \times 200 \text{ rad} \times \text{s}^{-1}$
a	$-0.008 \text{ rad}^{-1} \times \text{s}$
α	0.5
ε	0.21
$\underline{\nu}$	1
$\underline{\mu}$	$5.712 \text{ kg} \times \text{m}^{-2}$

TAB. B.1 – Exemple de valeurs pour les paramètres d'un habillage réel

paramètres définis dans le tableau B.1. La figure B.2 montre la densité modale $\underline{n}(\omega)$ définie par l'équation (B.1). Les figures B.3 à B.8 montrent les graphes des *coefficients d'habillage*.

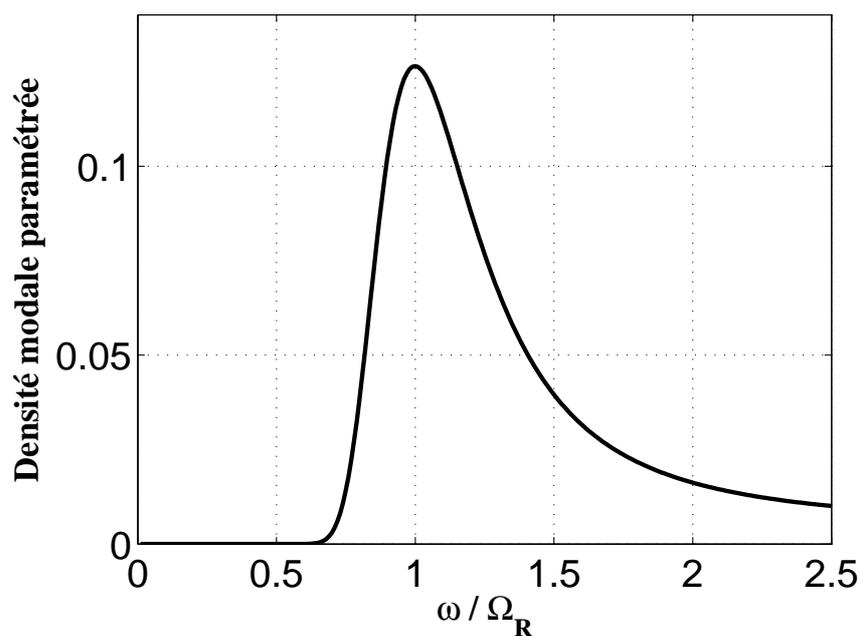


FIG. B.2 – Densité modale paramétrée

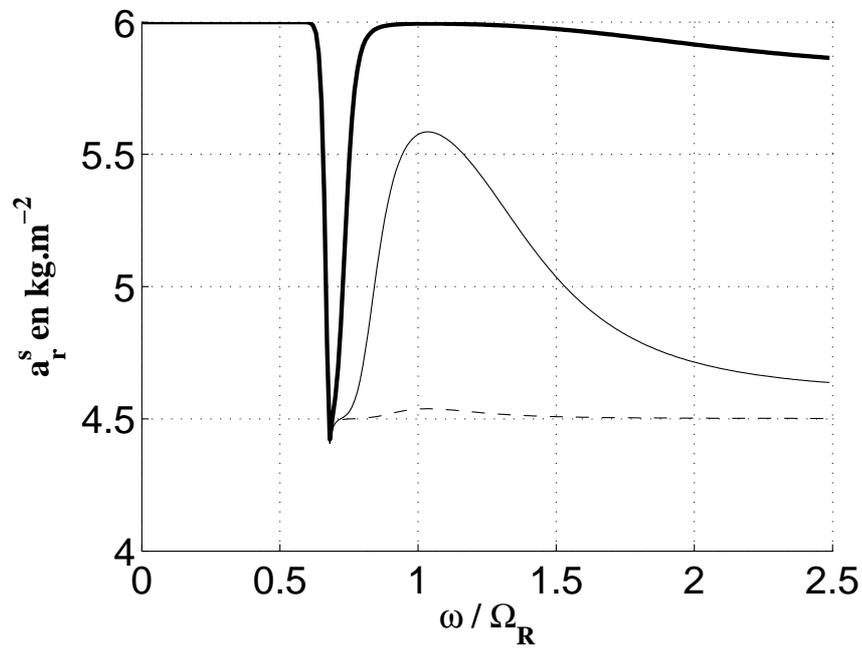


FIG. B.3 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_R^s(\omega)$, avec $\underline{\xi}(\omega) = 0.1$ (épais), $= 0.01$ (fin), $= 0.001$ (pointillé)

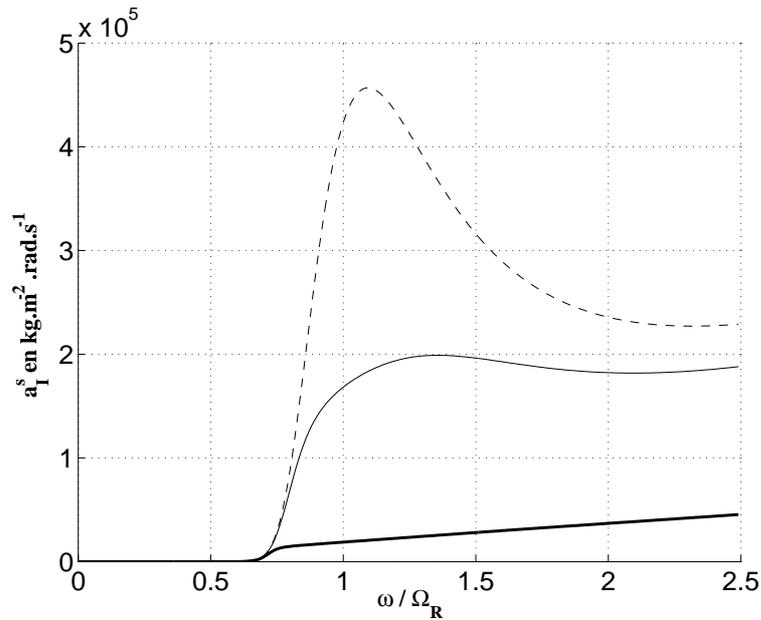


FIG. B.4 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_I^s(\omega)$, avec $\underline{\xi}(\omega) = 0.1$ (épais), $= 0.01$ (fin), $= 0.001$ (pointillé)

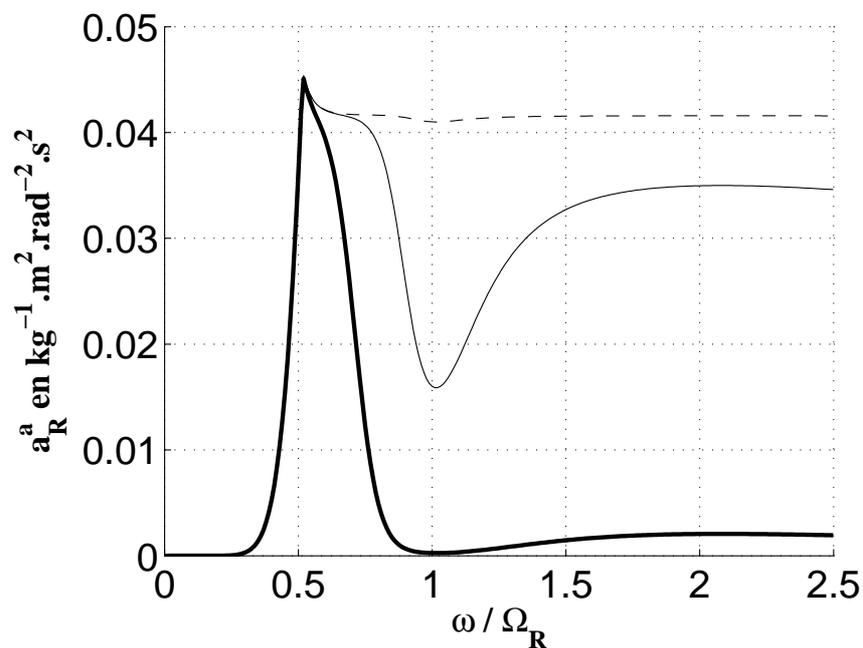


FIG. B.5 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_R^a(\omega)$, avec $\underline{\xi}(\omega)=0.1$ (épais), $=0.01$ (fin), $=0.001$ (pointillé)

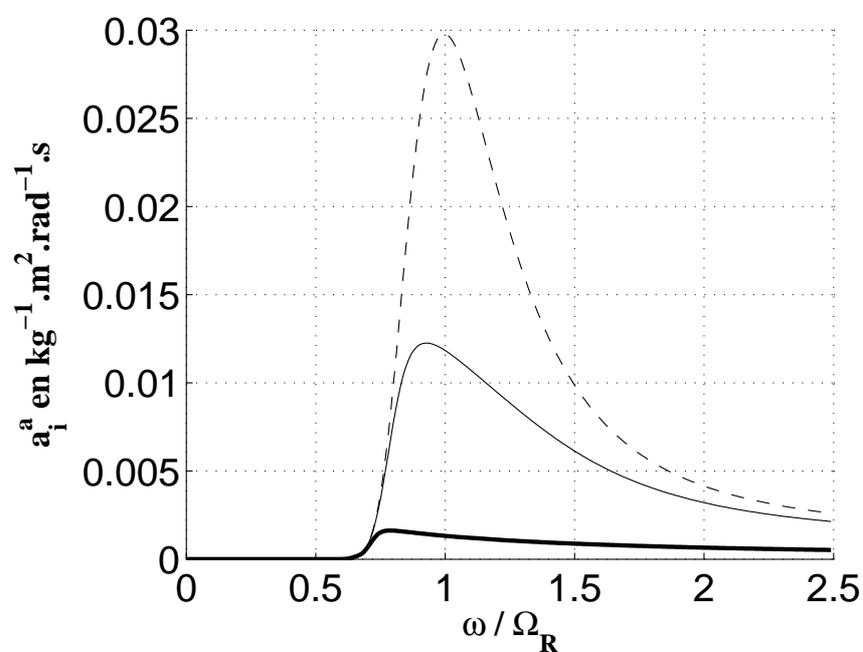


FIG. B.6 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_I^a$, avec $\underline{\xi}(\omega)=0.1$ (épais), $=0.01$ (fin), $=0.001$ (pointillé)

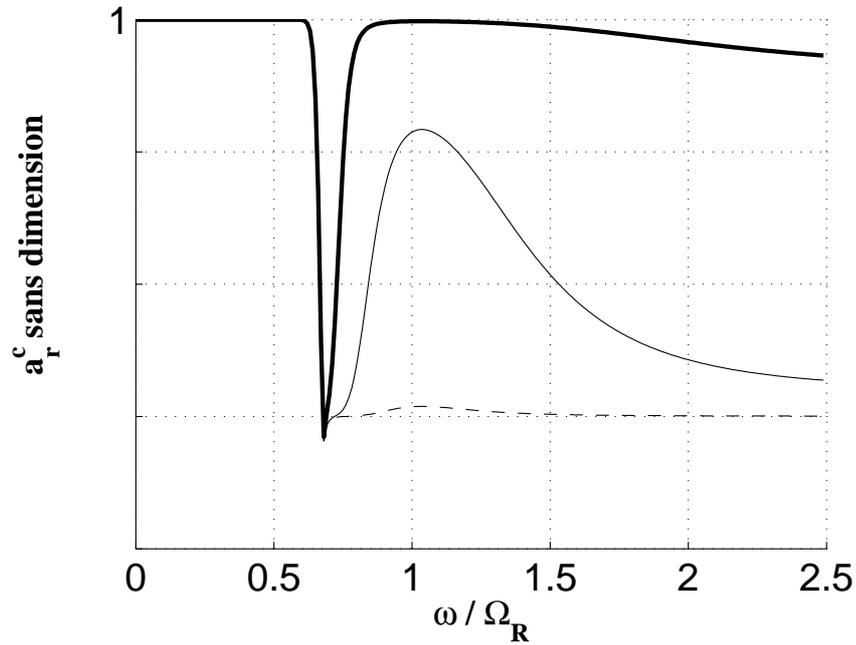


FIG. B.7 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_R^c(\omega)$, avec $\underline{\xi}(\omega)=0.1$ (épais), $=0.01$ (fin), $=0.001$ (pointillé)

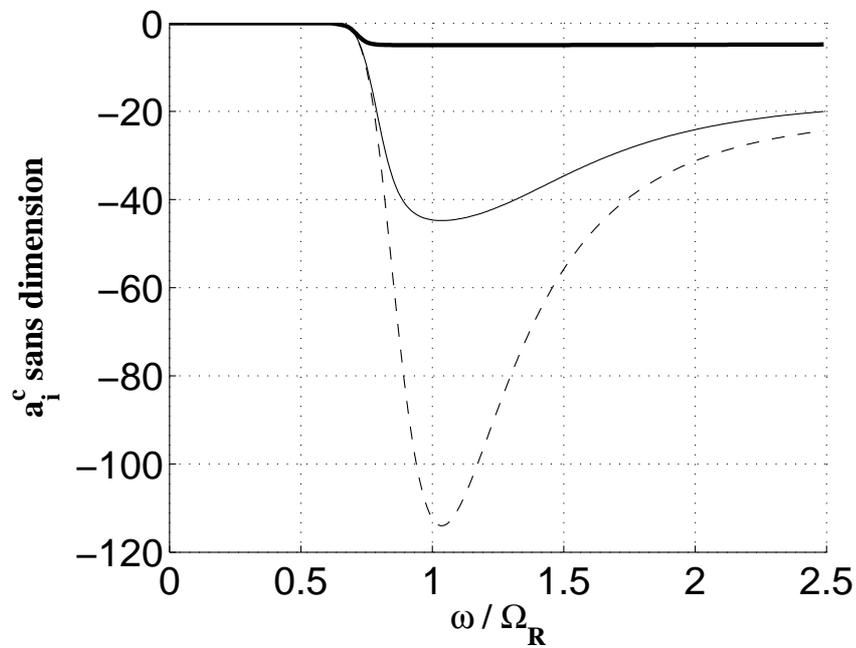


FIG. B.8 – Graphe de $\omega \mapsto \underline{a}_I^c(\omega)$, avec $\underline{\xi}(\omega)=0.1$ (épais), $=0.01$ (fin), $=0.001$ (pointillé)

Annexe C

Validation du calcul algébrique par intégration numérique

On a validé les calculs algébriques des coefficients du modèle simplifié de l'habillage en les comparant aux valeurs obtenues par une intégration numérique.

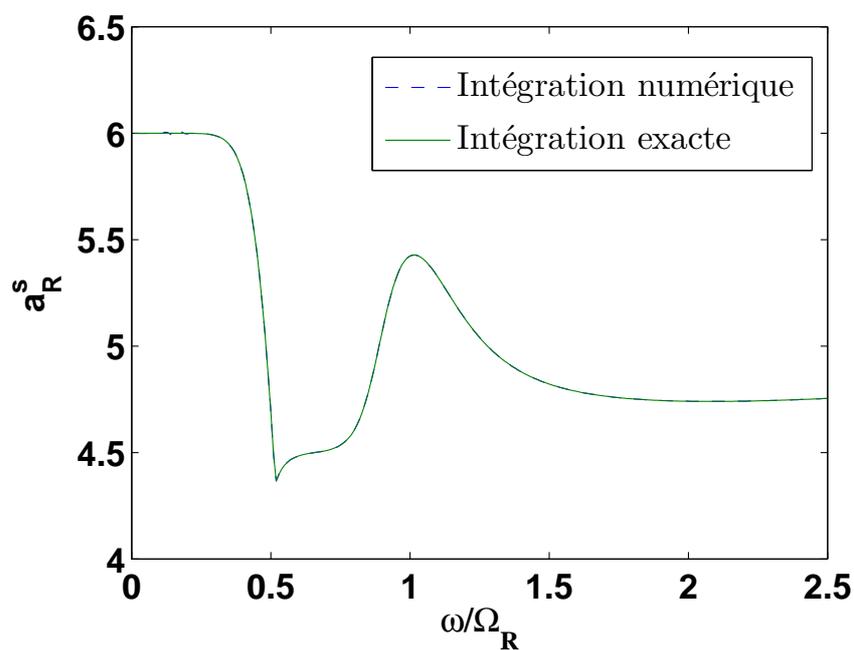
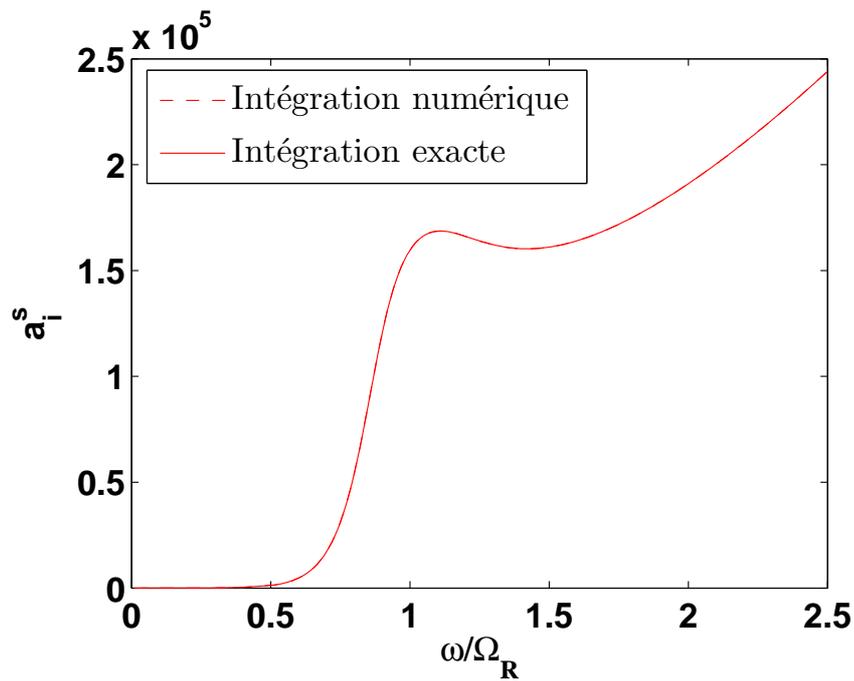
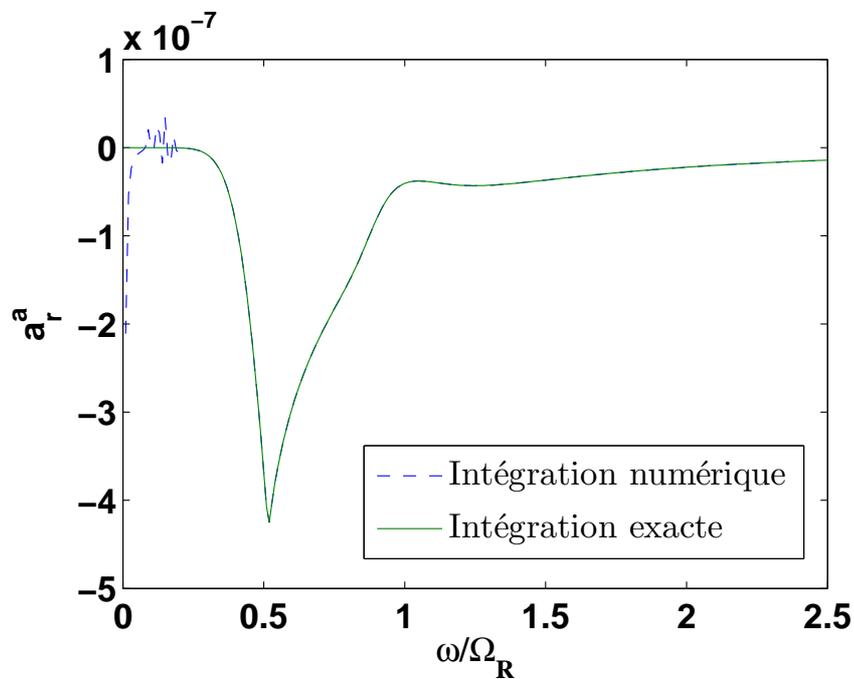
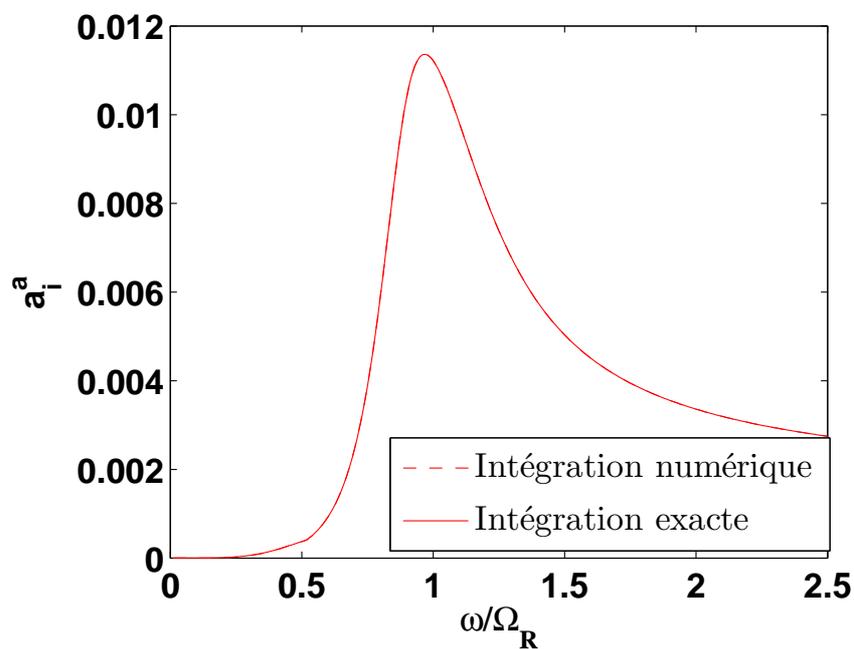
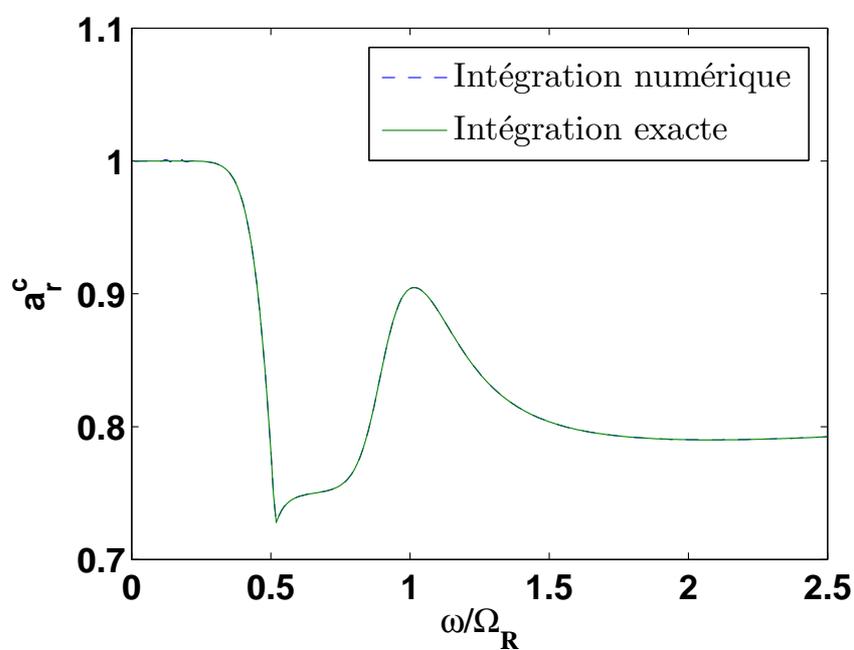


FIG. C.1 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_R^s(\omega)$ numérique et algébrique superposés

FIG. C.2 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_I^s(\omega)$ numérique et algébrique superposésFIG. C.3 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_R^a(\omega)$ numérique et algébrique superposés

FIG. C.4 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_7^a(\omega)$ numérique et algébrique superposésFIG. C.5 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_7^c(\omega)$ numérique et algébrique superposés

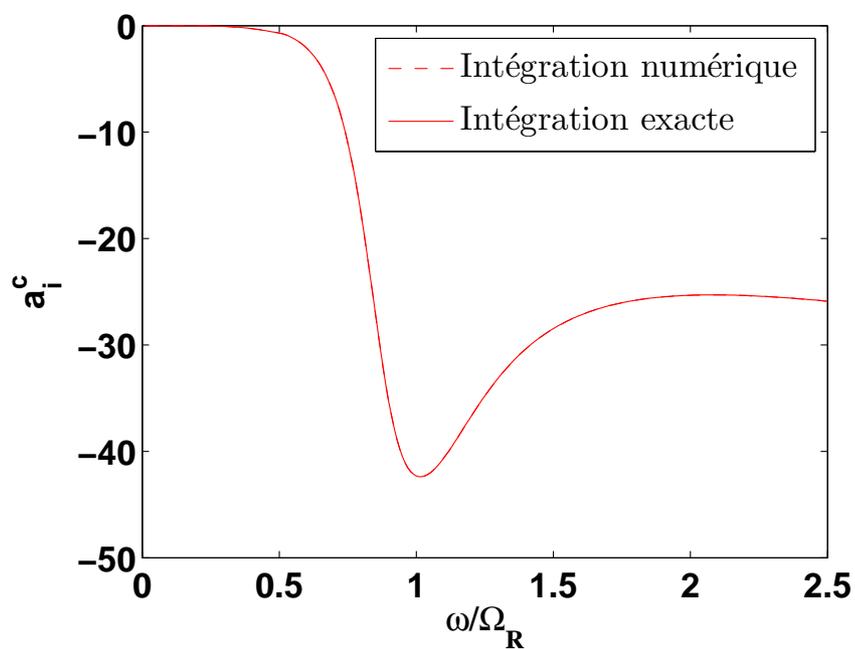


FIG. C.6 – Graphes de $\omega \mapsto \underline{a}_j^c(\omega)$ numérique et algébrique superposés

Annexe D

Calcul des matrices $[\underline{C}^s]$, $[\underline{B}^s]$ et $[\underline{B}^a]$ à partir d'un logiciel classique de calcul par les éléments finis

D.1 Introduction

D.1.1 Rappel des notations

Ce chapitre d'annexe complète le chapitre III. On y explique l'obtention des matrices $[\underline{C}^s]$, $[\underline{B}^s]$ et $[\underline{B}^a]$ du modèle simplifié moyen de l'habillage.

La discrétisation du champ de déplacement s'écrit d'après l'équation (III.4).

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, \omega) \simeq \mathbf{u}^{m_s}(\mathbf{x}, \omega) = [\mathbb{N}^s(\mathbf{x})]\underline{\mathbf{u}}^s(\omega) \quad . \quad (\text{D.1})$$

La discrétisation du champ de pression acoustique s'écrit d'après l'équation (III.9),

$$p(\mathbf{x}, \omega) \simeq p^{m_a'}(\mathbf{x}, \omega) = [\mathbb{N}^a(\mathbf{x})]\underline{\mathbf{p}}(\omega) \quad . \quad (\text{D.2})$$

D.1.2 Problème à résoudre

Ces trois matrices sont obtenues numériquement à partir du calcul de la matrice de couplage vibroacoustique *classique* effectué par un logiciel classique de calcul par les éléments finis. Les équations de définition (III.14), (III.15), (III.16) et (III.17) de ces quatre matrices peuvent s'écrire

en considérant l'interface de couplage $\Gamma \sim \Gamma_s$ entre la structure habillée et la cavité acoustique,

$$\langle [\underline{\mathbb{C}}] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq c(\delta \mathbf{u}^s, p) = \int_{\Gamma} (\delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}^s(\mathbf{x})) p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.3})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{C}}^s] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq c^s(p, \delta \mathbf{u}^s) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.4})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{B}}^s] \underline{\mathbf{u}}^s(\omega), \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle \simeq b^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) = \int_{\Gamma} (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) (\mathbf{n}^s(\mathbf{x}) \cdot \delta \mathbf{u}^s(\mathbf{x})) ds(\mathbf{x}) \quad , \quad (\text{D.5})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{B}}^a] \underline{\mathbf{p}}(\omega), \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle \simeq b^a(p, \delta p) = \int_{\Gamma} p(\mathbf{x}) \delta p(\mathbf{x}) ds(\mathbf{x}) \quad . \quad (\text{D.6})$$

On remarque en comparant les équations (D.3) et (D.4) que l'obtention de la matrice $[\underline{\mathbb{C}}^s]$ est immédiate si on connaît la matrice $[\underline{\mathbb{C}}]$ sur l'interface Γ . Il reste à expliciter les matrices $[\underline{\mathbb{B}}^s]$ et $[\underline{\mathbb{B}}^a]$ en fonction de la matrice $[\underline{\mathbb{C}}]$.

D.2 Exemple de calcul formel pour la matrice $[\underline{\mathbb{B}}^s]$

On rappelle que la normale à la surface Γ est le vecteur \mathbf{n} (voir figure I.1). La forme bilinéaire $b^s(\mathbf{u}^s, \delta \mathbf{u}^s) \simeq b^s(\mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^s \underline{\delta \mathbf{u}}^s)$ associée à l'équation (D.5) peut s'écrire formellement en utilisant l'équation (D.3),

$$b^s(\mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^s \underline{\delta \mathbf{u}}^s) = c(\mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \langle \mathbb{N}^s \underline{\delta \mathbf{u}}^s, \mathbf{n} \rangle) \quad . \quad (\text{D.7})$$

On peut écrire d'une part,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \langle \mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbf{n} \rangle \langle \mathbb{N}^s \underline{\delta \mathbf{u}}^s, \mathbf{n} \rangle ds &= \int_{\Gamma} \langle \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \rangle \langle \underline{\delta \mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \rangle ds \quad , \\ &= \int_{\Gamma} \langle [(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n}) \otimes (\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n})] \underline{\mathbf{u}}^s, \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle ds \quad , \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

en utilisant le fait que $\langle C^T \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, C \mathbf{v} \rangle$ et $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \langle \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \rangle = \langle (\boldsymbol{\alpha} \otimes \mathbf{u}) \mathbf{v}, \boldsymbol{\beta} \rangle$. D'autre part, l'équation (D.3),

$$c(\mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^a \underline{\delta \mathbf{p}}) = \int_{\Gamma} \langle \mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbf{n} \rangle \mathbb{N}^a \underline{\delta \mathbf{p}} ds \quad , \quad (\text{D.9})$$

permet d'écrire,

$$\begin{aligned} c(\mathbb{N}^s \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^a \underline{\delta \mathbf{p}}) &= \int_{\Gamma} \langle \underline{\mathbf{u}}^s, \mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \rangle \mathbb{N}^a \underline{\delta \mathbf{p}} ds \\ &= \int_{\Gamma} [\mathbb{N}^a \otimes (\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n})] \underline{\mathbf{u}}^s \underline{\delta \mathbf{p}} ds \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.10})$$

Les équations (D.3) et (D.5) s'écrivent en utilisant les équations (D.10) et (D.8)

$$\langle [\underline{\mathbb{C}}]^T \underline{\mathbf{u}}^s, \underline{\delta \mathbf{p}} \rangle = \int_{\Gamma} \left[\mathbb{N}^a \otimes \left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) \right] \underline{\mathbf{u}}^s \underline{\delta \mathbf{p}} ds \quad . \quad (\text{D.11})$$

$$\langle [\underline{\mathbb{B}}^s] \underline{\mathbf{u}}^s, \underline{\delta \mathbf{u}}^s \rangle = \int_{\Gamma} \left\langle \left[\left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) \otimes \left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) \right] \underline{\mathbf{u}}^s, \underline{\delta \mathbf{u}}^s \right\rangle ds \quad , \quad (\text{D.12})$$

On en déduit la discrétisation des matrices $[\underline{\mathbb{C}}]$ et $[\underline{\mathbb{B}}^s]$,

$$[\underline{\mathbb{C}}]^T = \int_{\Gamma} \mathbb{N}^a \otimes \left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) ds \quad , \quad (\text{D.13})$$

$$[\underline{\mathbb{B}}^s] = \int_{\Gamma} \left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) \otimes \left(\mathbb{N}^{sT} \mathbf{n} \right) ds \quad . \quad (\text{D.14})$$

D.3 Obtention des matrices réduites $[\underline{C}^s]$, $[\underline{B}^s]$ et $[\underline{B}^a]$

D.3.1 Introduction

On rappelle les équations (III.27) et (III.28) qui définissent les relations entre les vecteurs $\underline{\mathbf{u}}^s(\omega)$ et $\underline{\mathbf{q}}^s(\omega)$ (respectivement $\underline{\mathbf{p}}(\omega)$ et $\underline{\mathbf{q}}^a(\omega)$) des déplacements de la structure (respectivement des pressions acoustiques) exprimés dans la base des coordonnées globales et dans la base des coordonnées généralisées où $[\underline{\Phi}^s]$ (respectivement $[\underline{\Phi}^a]$) sont les modes élastiques de la structure (respectivement les modes acoustiques de la cavité à parois rigides),

$$\underline{\mathbf{u}}^s(\omega) = [\underline{\Phi}^s] \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \quad , \quad (\text{D.15})$$

$$\underline{\mathbf{p}}(\omega) = [\underline{\Phi}^a] \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \quad . \quad (\text{D.16})$$

Le vecteur $\underline{\mathbf{u}}^s$ est de dimension m_s ; le vecteur $\underline{\mathbf{p}}(\omega)$ est de dimension m_a ; la matrice $[\underline{\Phi}^s]$ est de dimension $m_s \times n_s$; la matrice $[\underline{\Phi}^a]$ est de dimension $m_a \times n_a$. Dans les équations (D.15) et (D.16), les vecteurs sont définis pour toute la structure et pour toute la cavité acoustique. Pour le calcul des matrices d'habillage, il suffit de connaître leur restriction sur l'interface de couplage Γ . On définit donc les vecteurs $\underline{\mathbf{u}}^{s'}(\omega)$ et $\underline{\mathbf{p}}'(\omega)$ par

$$\underline{\mathbf{u}}^{s'}(\omega) = [\underline{\Phi}^s]' \underline{\mathbf{q}}^s(\omega) \quad , \quad (\text{D.17})$$

$$\underline{\mathbf{p}}'(\omega) = [\underline{\Phi}^a]' \underline{\mathbf{q}}^a(\omega) \quad , \quad (\text{D.18})$$

où $[\underline{\Phi}^s]'$ et $[\underline{\Phi}^a]'$ sont les matrices de passage dans la base modale des degrés de liberté (déplacements et pression) appartenant à l'interface Γ .

On travaille dans le cas de maillages compatibles entre la structure et la cavité acoustique. Les éléments finis de la structure comportent des noeuds à six degrés de liberté dont on ne garde que les trois translations. Les noeuds fluides ne possèdent qu'un seul degré de liberté de pression acoustique. On a donc, sur l'interface Γ , la relation suivante entre m_s' ($m_s' \leq m_s$) et m_a' ($m_a' \leq m_a$) le nombre de degrés de liberté structure et fluide respectivement,

$$m_s' = 3m_a' \quad . \quad (\text{D.19})$$

L'expression du vecteur des normales unitaires aux noeuds structure est donnée par

$$\vec{n}' = \begin{bmatrix} \begin{cases} n_x^1 \\ n_y^1 \\ n_z^1 \end{cases} \\ \begin{cases} n_x^2 \\ n_y^2 \\ n_z^2 \end{cases} \\ \vdots \\ \begin{cases} n_x^{m_a'} \\ n_y^{m_a'} \\ n_z^{m_a'} \end{cases} \end{bmatrix} , \quad (\text{D.20})$$

avec, par exemple au noeud α ,

$$\vec{n}'^{\alpha} = n_x^{\alpha} \vec{e}_1 + n_y^{\alpha} \vec{e}_2 + n_z^{\alpha} \vec{e}_3 \quad ,$$

où \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{e}_3 sont les vecteurs de la base orthonormée du repère global.

D.3.2 Calcul de la matrice généralisée $[\underline{C}^s]$

La matrice de couplage de l'habillage sur la partie fluide-structure $[\underline{C}^s]$ exprimée dans la base modale se calcule à partir des modes $[\underline{\Phi}^s]'$ et $[\underline{\Phi}^a]'$ et de la matrice de couplage $[\underline{C}^s]$ exprimée dans la base globale. Son expression est donnée par,

$$[\underline{C}^s] = [\underline{\Phi}^s]'^T [\underline{C}^s] [\underline{\Phi}^a]' \quad . \quad (\text{D.21})$$

D.3.3 Calcul de la matrice généralisée $[B^s]$

Sur l'interface de couplage Γ , la condition de couplage s'écrit pour tout noeud α de la structure confondu avec le noeud β de la cavité acoustique,

$$\langle \vec{\underline{u}}_\alpha^{s'}, \vec{\underline{n}}' \rangle = \underline{p}_\beta' \quad . \quad (\text{D.22})$$

On construit la matrice $[\Phi_{\text{proj}}^s]'$ des degrés de liberté structure de l'interface projetés sur les normales aux noeuds exprimée dans la base modale, de dimension $m_a' \times n_s$ et qui est telle que,

$$[\Phi_{\text{proj}}^s]' = \begin{bmatrix} \langle \vec{\underline{U}}_1^{\alpha_1}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_1} \rangle & \langle \vec{\underline{U}}_2^{\alpha_1}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_1} \rangle & \dots & \langle \vec{\underline{U}}_{n_s}^{\alpha_1}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_1} \rangle \\ \langle \vec{\underline{U}}_1^{\alpha_2}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_2} \rangle & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{\underline{U}}_1^{\alpha_{m_a'}}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_{m_a'}} \rangle & \dots & \dots & \langle \vec{\underline{U}}_{n_s}^{\alpha_{m_a'}}, \vec{\underline{n}}'^{\alpha_{m_a'}} \rangle \end{bmatrix} , \quad (\text{D.23})$$

où, pour des soucis de clarté de présentation, on a défini la famille de vecteurs $(\vec{\underline{U}}_j^{\alpha_i})_{ij}$ qui sont tels que, pour $j \in \{1, \dots, n_s\}$ l'indice des modes élastiques de structure et $i \in \{1, \dots, m_a\}$ l'indice des noeuds α_i appartenant à l'interface de couplage Γ ,

$$\vec{\underline{U}}_j^{\alpha_i} = [\Phi^s]_{\alpha_{ix}j}' \vec{\underline{e}}_1 + [\Phi^s]_{\alpha_{iy}j}' \vec{\underline{e}}_2 + [\Phi^s]_{\alpha_{iz}j}' \vec{\underline{e}}_3 \quad , \quad (\text{D.24})$$

avec α_{ix} (respectivement α_{iy} et α_{iz}), l'indice du noeud α_i correspondant au degré de liberté de translation suivant $\vec{\underline{e}}_1$ (respectivement $\vec{\underline{e}}_2$ et $\vec{\underline{e}}_3$).

On remarque que l'équation (D.14) s'obtient directement à partir de l'équation (D.13) car les maillages sont compatibles. Puis, afin de calculer la matrice réduite $[B^s]$, il suffit de projeter la matrice de couplage physique $[\underline{C}^s]$ à gauche par les modes élastiques de structure et à droite par les modes $[\Phi_{\text{proj}}^s]'$ définis dans l'équation (D.23), ce qui donne,

$$[B^s] = [\Phi_{\text{proj}}^s]'^T [\underline{C}^s] [\Phi_{\text{proj}}^s]' \quad . \quad (\text{D.25})$$

D.3.4 Calcul de la matrice généralisée $[B^a]$

On construit le vecteur $[\underline{\Phi}_{\text{augm}}^a]'$, de dimension $3m_a' \times n_a$, pour tout noeud fluide β_k de l'interface Γ confondu avec le noeud structure α_{ℓ_k} , tel que

$$[\underline{\Phi}_{\text{augm}}^a]' = \begin{bmatrix} p_1^{\beta_1} \vec{n}_x^{\alpha_{\ell_1}} & \cdots & p_{n_a}^{\beta_1} \vec{n}_x^{\alpha_{\ell_1}} \\ p_1^{\beta_1} \vec{n}_y^{\alpha_{\ell_1}} & & p_{n_a}^{\beta_1} \vec{n}_y^{\alpha_{\ell_1}} \\ p_1^{\beta_1} \vec{n}_z^{\alpha_{\ell_1}} & & p_{n_a}^{\beta_1} \vec{n}_z^{\alpha_{\ell_1}} \\ \vdots & & \vdots \\ & p_j^{\beta_k} \vec{n}_x^{\alpha_{\ell_k}} & \\ \vdots & p_j^{\beta_k} \vec{n}_y^{\alpha_{\ell_k}} & \vdots \\ & p_j^{\beta_k} \vec{n}_z^{\alpha_{\ell_k}} & \\ \vdots & & \vdots \\ p_1^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_x^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} & & p_{n_a}^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_x^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} \\ p_1^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_y^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} & & p_{n_a}^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_y^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} \\ p_1^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_z^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} & \cdots & p_{n_a}^{\beta_{m_a'}} \vec{n}_z^{\alpha_{\ell_{m_a'}}} \end{bmatrix}, \quad (\text{D.26})$$

où par souci de clarté de rédaction, la famille des $(p_j^{\beta_k})_{kj}$ représente le degré de liberté de pression acoustique du noeud fluide β_k , avec $k \in \{1, \dots, m_a'\}$ l'indice des noeuds fluide de l'interface Γ , exprimé sur le mode acoustique j avec $j \in \{1, \dots, n_a\}$ et qui est tel que,

$$p_j^{\beta_k} = [\underline{\Phi}^a]_{kj}' \quad . \quad (\text{D.27})$$

Cette matrice vérifie par blocs la condition de couplage fluide-structure à l'interface Γ donnée par l'équation (D.22).

On suit le même raisonnement que dans le paragraphe D.3.3 qui consiste à utiliser

- (1) l'expression de la matrice de couplage fluide-structure en coordonnées physiques restreinte à l'interface Γ et
- (2) le fait que les maillages soient compatibles pour en déduire que la matrice de couplage de l'habillage sur la partie fluide-fluide $[B^a]$ exprimée dans la base modale est donnée par,

$$[B^a] = [\underline{\Phi}_{\text{augm}}^a]'^T [\underline{C}^s] [\underline{\Phi}_{\text{augm}}^a]' \quad . \quad (\text{D.28})$$

Annexe E

Algorithme de résolution du système des équations aléatoires

PRE-TRAITEMENT

OBTENTION DES MATRICES DU MODELE MOYEN VIBROACOUSTIQUE

Préparation du fichier d'instructions NASTRAN

Spécifier les ALTER pour la sortie des matrices précisées dans le bloc suivant.
Utiliser le USET U4 pour les DDL de la structure (observation et excitation).
Utiliser le USET U6 pour les DDL du fluide (observation et excitation).

Récupération des matrices au format binaire NASTRAN *.bin

LamaS.bin Table des données modales structure
LamaF.bin Table des données modales fluide
MatRAHH.bin Matrice de couplage vibroacoustique généralisée
bgpdt.bin Table des noeuds (coordonnées globales, position DDL, type de noeud)
U4.bin Coordonnées généralisées de la structure (observables et excitations)
U6.bin Coordonnées généralisées du fluide (observables et excitations)
uset.bin Numéro des sets de noeuds
fuzzyBs.bin Matrice d'habillage en coordonnées généralisées
fuzzyBa.bin Matrice d'habillage en coordonnées généralisées
fuzzyCs.bin Matrice d'habillage en coordonnées généralisées
MatRB2hhS.bin Matrice d'amortissement visqueux
MatRK4hhS.bin Matrice d'amortissement structural
Gpsnt.bin Table des normales d'éléments SHELL

Relecture des binaires et passage du format *.bin au format *.mat

LamaS.mat Conversion de la table LamaS
LamaF.mat Conversion de la table LamaF
MatRAHH.mat Conversion de la matrice MatRAHH
bgpdt.mat Conversion de la table Bgpdt
fuzzy.mat Conversion des matrices Bs, Ba et Cs
DataObs.mat Matrice des modes restreints aux DDL observés (structure et fluide)
DataObsName.mat Label du noeud et direction d'observation (accélération ou pression)
DataExci.mat Vecteur des excitations unitaires (structure et fluide)
DataExciName Labels des noeuds et directions des excitations (force ou débit volumique)
MatRB2.mat Conversion de la matrice MatRB2hhS
MatRK4.mat Conversion de la matrice MatRK4hhS
Gpsnt.mat Conversion de la table Gpsnt

(TRAITEMENT)

TRAITEMENT

SOLVEUR STOCHASTIQUE

Lecture des données d'entrée

Chemins d'accès, amortissements visqueux forfaitaires η_s et η_f ,
fréquences, troncature modale, paramètres de dispersion :

$$\delta_{M_s}, \delta_{D_s}, \delta_{K_s}, \delta_{B_s}, \delta_{M_a}, \delta_{D_a}, \delta_{K_a}, \delta_{B_a}, \delta_C, \delta_{C_s}.$$

Masse et raideur généralisées structure et fluide.

Matrice de couplage vibroacoustique. Position des DDL d'excitation et d'observation.

Appel de la routine de résolution du système des équations aléatoires.

Factorisation des matrices du modèle moyen vibroacoustique

$$\begin{aligned} [M_s] &= [L_{M_s}]^T [L_{M_s}], [D_s] = [L_{D_s}]^T [L_{D_s}], [K_s] = [L_{K_s}]^T [L_{K_s}], [B_s] = [S_{B_s}]^T [S_{B_s}], \\ [M_a] &= [L_{M_a}]^T [L_{M_a}], [D_a] = [L_{D_a}]^T [L_{D_a}], [K_a] = [L_{K_a}]^T [L_{K_a}], [B_a] = [L_{B_a}]^T [L_{B_a}], \\ [C] &= [U][L_C]^T [L_C], [C_s] = [U_s][L_{C_s}]^T [L_{C_s}]. \end{aligned}$$

Génération des matrices germes

$$\begin{aligned} &[G_{M_s}(\delta_{M_s}, \theta_k)], [G_{D_s}(\delta_{D_s}, \theta_k)], [G_{K_s}(\delta_{K_s}, \theta_k)], [G_{B_s}(\delta_{B_s}, \theta_k)], \\ &[G_{M_a}(\delta_{M_a}, \theta_k)], [G_{D_a}(\delta_{D_a}, \theta_k)], [G_{K_a}(\delta_{K_a}, \theta_k)], [G_{B_a}(\delta_{B_a}, \theta_k)], \\ &[G_C(\delta_C, \theta_k)], [G_{C_s}(\delta_{C_s}, \theta_k)]. \end{aligned}$$

Construction des matrices aléatoires

$$\begin{aligned} [M_s(\delta_{M_s}, \theta_k)] &= [L_{M_s}]^T [G_{M_s}] [L_{M_s}], [D_s(\delta_{D_s}, \theta_k)] = [L_{D_s}]^T [G_{D_s}] [L_{D_s}], \\ [K_s(\delta_{K_s}, \theta_k)] &= [L_{K_s}]^T [G_{K_s}] [L_{K_s}], [B_s(\delta_{B_s}, \theta_k)] = [S_{B_s}]^T [G_{B_s}] [S_{B_s}], \\ [M_a(\delta_{M_a}, \theta_k)] &= [L_{M_a}]^T [G_{M_a}] [L_{M_a}], [D_a(\delta_{D_a}, \theta_k)] = [L_{D_a}]^T [G_{D_a}] [L_{D_a}], \\ [K_a(\delta_{K_a}, \theta_k)] &= [L_{K_a}]^T [G_{K_a}] [L_{K_a}], [B_a(\delta_{B_a}, \theta_k)] = [L_{B_a}]^T [G_{B_a}] [L_{B_a}], \\ [C(\delta_C, \theta_k)] &= [U][L_C]^T [G_C] [L_C], [C_s(\delta_{C_s}, \theta_k)] = [U_s][L_{C_s}]^T [G_{C_s}] [L_{C_s}]. \end{aligned}$$

Assemblage du modèle réduit vibroacoustique stochastique

$$\begin{bmatrix} [A^s(\omega)] + \underline{a}^s(\omega)[B^s] & [C] + \underline{a}^c(\omega)[C^s] \\ \omega^2 \{ [C]^T + \underline{a}^c(\omega)[C^s]^T \} & [A^a(\omega)] + \underline{a}^a(\omega)[B^a] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^s(\omega) \\ \mathbf{Q}^a(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{f}}^s(\omega) \\ \underline{\mathbf{f}}^a(\omega) \end{bmatrix}.$$

Calcul de la solution stochastique en coordonnées généralisées

$$\mathbf{Q}(\theta_k; \omega) = [A(\theta_k; \omega)]^{-1} \underline{\mathbf{f}}(\omega).$$

Calcul de la solution stochastique

$$\mathbf{U}^s(\theta_k; \omega) = [\Phi^s] \mathbf{Q}^s(\theta_k; \omega) \quad , \quad \mathbf{P}(\theta_k; \omega) = [\Phi^a] \mathbf{Q}^a(\theta_k; \omega).$$

Calcul de l'indicateur I^ℓ avec $\ell = s$ ou a

$$I^\ell(n_r, n_s, n_a) = \int_{\mathbb{B}} \|\mathbf{Q}^\ell(\omega, \theta_k)\|^2 d\omega.$$

(POST-TRAITEMENT)

Boucle de Monte Carlo sur θ_k

Boucle sur la fréquence ω

Références

- [1] **Abramovitz, M. and Stegun, I. (1972)**. *Handbook of mathematical functions* (Dover, New York, USA).
- [2] **Allard, J.-F. (1994)**. *Propagation of Sound in Porous Media : Modelling Sound Absorbing Materials* (Chapman and Hall, London, United Kingdom).
- [3] **Allard, J.-F., Champoux, C. and Depollier, C. (1987)**. “Modelization of layered sound absorbing materials with transfer matrices”, *Journal of the Acoustical Society of America* **82**, 1792–1796.
- [4] **Allard, J.-F. and Daigle, G. (1994)**. “Propagation of Sound in Porous Media : Modeling Sound Absorbing Materials”, *Journal of the Acoustical Society of America* **95**, 2785.
- [5] **Allen, J. and Vlahopoulos, N. (2001)**. “Accounting for manufacturing variability in interior noise computations”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [6] **Alt, N., Wiehagen, N. and Schlitzer, W. (2001)**. “Interior noise simulation for improved vehicle sound”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [7] **Argyris, J. and Mlejnek, H. (1991)**. *Dynamics of Structures* (North Holland, Amsterdam, Netherlands).
- [8] **Arnst, M., Clouteau, D. and Bonnet, M. (2005)**. “Identification of probabilistic structural dynamics model : application to Soize’s nonparametric model”, in Proceedings of EUROODYN05, International Conference in Structural Dynamics, 4-7 September, CDROM ISBN 90-5966-033-1 (Millpress, Paris, France).
- [9] **Aslanyan, A. and Lidskii, V. (1974)**. “Distribution des fréquences propres des coques minces élastiques”, *Nauka En Russe*.

- [10] **Aslanyan, A. and Tulovskii, V. (1973)**. “Asymptotic distribution of the eigenfrequencies of elastic shells”, *Soviet Physics Doklady* **18**, 120.
- [11] **Atalla, N., Hamdi, M. A. and Panneton, R. (2001)**. “Enhanced weak integral formulation for the mixed (u,p) poroelastic equations”, *Journal of the Acoustical Society of America* **109**, 3065–3068.
- [12] **Atalla, N. and Panneton, R. (1996)**. “The effects of multilayer sound-absorbing treatments on the noise field inside a plate backed-cavity”, *Journal of Noise Control Engineering* **44**, 235–243.
- [13] **Atalla, N., Panneton, R. and Debergue, P. (1998)**. “A Mixed Displacement-Pressure Formulation for Poroelastic Materials”, *Journal of the Acoustical Society of America* **104**, 1444–1452.
- [14] **Atalla, N., Sgard, F. and Amedin, C. K. (2006)**. “On the modeling of sound radiation from poroelastic materials”, *Journal of the Acoustical Society of America* **120**, 1990–1995.
- [15] **Bardot, A., Bohineust, X., Stawicki, C. et Giardi, H. (1993)**. “Identification et calcul par éléments finis des couplages acoustiques basse fréquence de véhicules”, *SIA Conférences : calcul scientifique*, 29–36.
- [16] **Bathe, K.-J. and Wilson (1976)**. *Numerical method in finite element analysis* (Prentice Hall, New York, USA).
- [17] **Bjaoui, K. (1999)**. *Estimation des paramètres d'une structure floue pour des jonctions continues*. Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers.
- [18] **Blaise, A., Lesueur, C., Gotteland, M. and Barbe, M. (1991)**. “On sound transmission into an orthotropic infinite shell : Comparison with Koval’s results and understanding of phenomena”, *Journal of Sound and Vibration* **150**, 233–243.
- [19] **Blanc, A. and Bernhard, R. (2005)**. “Variation in subcomponents and assembled products”, in International INCE Symposium : Managing uncertainties in noise measurement and prediction, 27 - 29 June (Le Mans, Sarthe, France).
- [20] **Bourgine, A. (1973)**. *Sur une approche statistique de la dynamique vibratoire des structures*. Thèse de doctorat, Paris Sud, Orsay, France.
- [21] **Brown, K. (1984)**. “Measurement of modal density : an improved technique for use on lightly damped structures”, *Journal of Sound and Vibration* **96**, 127–132.

- [22] **Burnett, M. and Young, W. (2008)**. “Modal correlation and updating of a vehicle body-in-white”, in Proceedings of ISMA08, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDRom ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).
- [23] **Capiez Lernout, E. and Soize, C. (2004)**. “Nonparametric Modeling of Random Uncertainties for Dynamic Response of Mistuned Bladed Disks”, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **126**, 610–618.
- [24] **Capiez Lernout, E., Soize, C., Lombard, J.-P., Dupont, C. and Seinturier, E. (2005)**. “Blade Manufacturing Tolerances Definition for a Mistuned Industrial Bladed Disks”, *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* **127**, 621–628.
- [25] **Carcattera, A. and Akay, A. (2004)**. “Transient energy exchange between a primary structure and a set of oscillators : Return time and apparent damping”, *Journal of the Acoustical Society of America* **115**, 683–696.
- [26] **Chabas, F., Desanti, A. and Soize, C. (1986)**. “Probabilistic structural modeling in linear dynamical analysis of complex mechanical systems. II. Numerical analysis and applications”, *La Recherche Aérospatiale (English edition)* **5**, 49–67.
- [27] **Chabas, F. and Soize, C. (1987)**. “Modeling mechanical subsystems by boundary impedance in the finite element method”, *La Recherche Aérospatiale (English edition)* **5**, 59–75.
- [28] **Chae, C., Song, S., Kim, K., Jang, H., Kim, S. and Cho, Y. (2001)**. “Dynamic characterization of foam materials and its application to modeling of automotive seat-passenger system”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [29] **Chebli, H. and Soize, C. (2004)**. “Experimental validation of a nonparametric probabilistic model of nonhomogeneous uncertainties for dynamical systems”, *Journal of the Acoustical Society of America* **115**, 697–705.
- [30] **Chen, C. (2006)**. *Vibration et vibroacoustique des panneaux composites sandwich en présence d’incertitudes - Expérimentation et validation du modèle*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée.

- [31] **Chen, C., Duhamel, D. and Soize, C. (2006)**. “Probabilistic approach for model and data uncertainties and its experimental identification in structural dynamics : Case of composite sandwich panels”, *Journal of Sound and Vibration* **294**, 64–81.
- [32] **Courant, R. and Hilbert, D. (1953)**. *Methods of mathematical physics*, volume II (Interscience, New York, USA).
- [33] **Coyette, J., Lielens, G. and Meerbergen, K. (2005)**. “Efficient procedures for handling random distributed excitations in a vibro-acoustic context”, in International INCE Symposium : Managing uncertainties in noise measurement and prediction, 27 - 29 June (Le Mans, Sarthe, France).
- [34] **Coyette, J., Lielens, G., Van den Nieuwenhof, B., Bertolini, C., Gaudino, C., Misaji, K. and Ide, F. (2007)**. “From body in white to trimmed body models in the low frequency range : a new modeling approach”, in Proceedings of SAE 07, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 15-17 May, CDROM ISBN (St. Charles, Illinois, USA).
- [35] **Coyette, J. and Van den Nieuwenhof, B. (2005)**. “Sources of uncertainties in vibroacoustic simulations”, in International INCE Symposium : Managing uncertainties in noise measurement and prediction, 27 - 29 June (Le Mans, Sarthe, France).
- [36] **Cushieri, J. M. and Feit, D. (2000)**. “Influence of circumferential partial coating on the acoustic radiation from a fluid-loaded shell”, *Journal of the Acoustical Society of America* **107**, 3196–3207.
- [37] **Dautray, R. and Lions, J.-L. (1992)**. *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology* (Springer-Verlag, Berlin, Germany).
- [38] **Direction Scientifique de la Résistance des Structures (1987)**. “Analyse énergétique statistique =S.E.A., Etude bibliographique 1975-1986”, Technical Report 72/3454 RY 166 R, ONERA, Châtillon, France.
- [39] **Dubigeon, S. (1998)**. *Mécanique des Milieux Continus* (Tech et Doc, Nantes, France).
- [40] **Duchereau, J. and Soize, C. (2006)**. “Transient dynamics in structures with non-homogeneous uncertainties induced by complex joints”, *Mechanical Systems and Signal Processing* **20**, 854–867.

- [41] d’Udekem, D., Acher, F., Liu, W., Shu, K. and Shahidi, B. (2008). “Efficient analysis of a fully-trimmed car body using modal approaches”, in Proceedings of Noise-Con 2008, 28-31 July (Dearborn, Michigan, USA).
- [42] Durand, J.-F. (2007). *Modélisation de Véhicules en Vibroacoustique Numérique avec Incertitudes de Modélisation et Validation Expérimentale*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée.
- [43] Durand, J.-F., Gagliardini, L. and Soize, C. (2004). “Nonparametric modeling of the variability of vehicle vibroacoustic behavior”, in Proceedings of the SAE 05, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 16-19 May, CDROM ISBN 0-7680-1657-6 (Traverse City, Michigan, USA).
- [44] Durand, J.-F., Gagliardini, L. and Soize, C. (2004). “Random uncertainties modelling for vibroacoustic frequency response of cars”, in Proceedings of ISMA04, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 20-22 September, CDROM ISBN 90-73802-82-2 (Leuven, Belgium).
- [45] Durand, J.-F., Gagliardini, L. and Soize, C. (2005). “Nonparametric modeling of vibroacoustic coupling interface uncertainties”, in Proceedings of EURO DYN05, International Conference in Structural Dynamics, 4-7 September, CDROM ISBN 90-5966-033-1 (Paris, France).
- [46] Durand, J.-F., Gagliardini, L. et Soize, C. (2005). “Robustesse des modèles numériques du comportement vibroacoustique des véhicules vis-à-vis des incertitudes de modélisation”, Compte-rendu du CFM05, Congrès Français de Mécanique, 22-26 août, CDROM ISBN 85-85769-03-03 (Troyes, Aube, France).
- [47] Durand, J.-F., Gagliardini, L. and Soize, C. (2008). “Structural-acoustic modeling of automotive vehicles in presence of uncertainties and experimental identification and validation”, *Journal of the Acoustical Society of America* **24**, 1513–1525.
- [48] Fahy, F. J. (1987). *Sound and Structural Vibration Radiation, Transmission and Response* (Academic Press, London, United Kingdom).
- [49] Faverjon, B. and Soize, C. (2004). “Equivalent acoustic impedance model. Part 1 : experiments and semi-physical model”, *Journal of Sound and Vibration* **276**, 571–592.
- [50] Faverjon, B. and Soize, C. (2004). “Equivalent acoustic impedance model. Part 2 : analytical approximation”, *Journal of Sound and Vibration* **276**, 593–613.

- [51] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2007)**. “Modeling sound-insulation layers in vibroacoustics systems”, in Proceedings of USD07, International Conference on Uncertainty in Structural Dynamics, 11-13 June (Sheffield, United Kingdom).
- [52] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2007)**. “Probabilistic modeling sound-insulation layers in vibroacoustic systems with a non parametric model of uncertainties”, in USNCCM09, US National Congress on Computational Mechanics, 22-26 July (San Francisco, USA).
- [53] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2008)**. “Experimental identification of a stochastic computational model for an uncertain vibroacoustic system”, in WCCM8, World Congress on Computational Mechanics, 30 June-4 July, CDROM ISBN 978-84-96736-55-9 (Venice, Italy).
- [54] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2008)**. “Identification of a sound-insulation layer modelled by fuzzy structure theory - experimental validation”, in Proceedings of ISMA08, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDROM ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).
- [55] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2008)**. “Stochastic computational dynamical model of uncertain structure coupled with an insulation layer modelled by a fuzzy structure - theory and experimental validation”, in Proceedings of EURODYN08, International Conference in Structural Dynamics, 7-9 July, CDROM ISBN (Southampton, United Kingdom).
- [56] **Fernandez, C., Soize, C. and Gagliardini, L. (2009)**. “Fuzzy structure theory modeling of sound-insulation layers in complex vibroacoustic uncertain systems - theory and experimental validation, *accepted for publication in 2008*”, *Journal of the Acoustical Society of America* .
- [57] **Friis, L. and Ohlrich, M. (2008)**. “Vibration modeling of structural fuzzy with continuous boundary”, *Journal of the Acoustical Society of America* **123**, 718–728.
- [58] **Friis, L. and Ohlrich, M. (2008)**. “Vibration modeling of structural fuzzy with continuous boundary by including two-dimensional spatial memory”, *Journal of the Acoustical Society of America* **124**, 192–202.
- [59] **Garrelick, J. (1997)**. “The modeling of a continuous structure as a fuzzy”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 613–615.

- [60] **Gholub, G. and Van Loan, C. (1989)**. *Matrix Computations, second edition* (The John Hopkins University Press).
- [61] **Gol'denveizer, A. L. (1970)**. “Sur la densité des fréquences de vibration d'une coque mince élastique”, *PMM* **34**, 952–956, en Russe.
- [62] **Gol'denveizer, A. L. (1976)**. *La théorie des coques minces élastiques, deuxième édition* (Nauka, Moscou, Russie), traduction anglaise de la première édition, Pergamon Press, 1961.
- [63] **Gol'denveizer, A. L., Lidskii, P. and Tovstik, P. (1979)**. “Vibrations libres des coques minces élastiques”, *Nauka* En Russe.
- [64] **Gradshtein, I. S. and Ryzhik, I. (2000)**. *Table of Integrals, series, and products*, 6th edition (Academic Press, San Diego, USA).
- [65] **Guelfand, I. and Vilenkin, N. (1967)**. *Les distributions, tome 4. Applications de l'analyse harmonique* (Dunod, Paris, France).
- [66] **Guerich, M. and Hamdi, M. A. (1999)**. “A numerical method for vibro-acoustic problems with incompatible finite element meshes using b-spline functions”, *Journal of the Acoustical Society of America* **105**, 1682–1694.
- [67] **Guyader, J. and Lesueur, C. (1978)**. “Acoustic transmission through orthotropic multilayered plates, part. I. Plate vibrations modes”, *Journal of Sound and Vibration* **58**, 51–86.
- [68] **Hamdi, M. A., Mebarek, L., Omrani, A. and Atalla, N. (2000)**. “An efficient formulation for the analysis of acoustic and elastic waves propagation in Porous-Elastic Materials”, in Proceedings of ISMA00, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 16-18 September (Leuven, Belgium).
- [69] **Hamdi, M. A., Zhang, C., Mebarek, L., Anciant, M. and Mathieux, B. (2005)**. “Analysis of vibroacoustic performances of a fully trimmed vehicle using an innovative sub-system solving approach facilitating the cooperation between carmakers and sound-package suppliers”, in Proceedings of EURO DYN05, International Conference in Structural Dynamics, 4-7 September, CDROM ISBN 90-5966-033-1 (Paris, France).
- [70] **Ivrii, V. Y. (1983)**. “On the asymptotics of a spectral problem connected with the Laplace-Beltrami operator on a manifold with a boundary”, *Func. Anal. Appl.* **17**.

- [71] **Jaouen, L., Brouard, B., Atalla, N. and Langlois, C. (2005)**. “A simplified numerical model for a plate backed by a thin foam layer in the low frequency range”, *Journal of Sound and Vibration* **280**, 681–698.
- [72] **Jayachandran, V. and Bonilda, M. (2005)**. “On managing uncertainty in acoustic predictions during product development”, in International INCE Symposium : Managing uncertainties in noise measurement and prediction, 27 - 29 June (Le Mans, Sarthe, France).
- [73] **Jaynes, E. T. (1957)**. “Information theory and statistical mechanics”, *Physical Review* **106**, 620–630.
- [74] **Jaynes, E. T. (1957)**. “Information theory and statistical mechanics”, *Physical Review* **108**, 171–190.
- [75] **Julien Mignon, H. (2001)**. “Rapport d’essai et calcul, Démarche de modélisation numérique des insonorisants, PROJET CHEF”, DPTA/DMFV/ACV/BMF/VV/01.043.
- [76] **Junger, M. C. and Feit, D. (1993)**. *Sound, Structures, and Their Interaction* (originally published in 1972, Acoustical Society of America, New York, USA).
- [77] **Kang, Y.-J. and Bolton, J. (1995)**. “Finite element modeling of isotropic elastic porous materials coupled with acoustical elements”, *Journal of the Acoustical Society of America* **98**, 635–343.
- [78] **Kang, Y.-J. and Bolton, J. (1996)**. “A finite element model for sound transmission through foam-lined double-panel structures”, *Journal of the Acoustical Society of America* **99**, 2755–2765.
- [79] **Kapur, J. N. and Kesavan, H. K. (1992)**. *Entropy Optimization Principles with Applications* (Academic Press, San Diego, USA).
- [80] **Kompella, M. and Bernhard, R. (1996)**. “Variation of structural-acoustic characteristics of automotive vehicles”, *Noise Control Engineering Journal* 93–99.
- [81] **Lalor, N. and Priebisch, H.-H. (2007)**. “The prediction of low- and mid-frequency internal road vehicle noise : a literature survey”, *Journal of Automobile Engineering* **221**, 245–269.
- [82] **Landau, L. and Lifchitz, E. (1992)**. *Fluid Mechanics* (Pergamon Press).

- [83] Langley, R. S. and Bremner, P. (1999). “A hybrid method for the vibration analysis of complex structural-acoustic systems”, *Journal of the Acoustical Society of America* **105**, 1657–1671.
- [84] Lee, D., Hwang, W. and Kim, C. (2001). “Noise sensitivity analysis of an engine mount system using the transfer function synthesis method”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [85] Lesueur, C., Poumerol, G. and Blaise, A. (1995). “Vibroacoustic response of composite multilayered plate coupled to a rectangular cavity and excited by white noise and a turbulent boundary layer”, *Acta Acustica* **3**, 153–167.
- [86] Lielens, G., Van den Nieuwenhof, B. and Coyette, J. (2008). “An energy-based updated modal approach for the efficient analysis of large trimmed models”, in Proceedings of Acoustics’08, 29 June-4 July (Paris, France).
- [87] Lin, Y. K. (1997). “On the standard deviation of change-in-impedance due to fuzzy subsystems”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 616–618.
- [88] Lionnet, C. and Lardeur, P. (2005). “A hierarchical approach to study the variability of interior noise levels in passenger cars”, in International INCE Symposium : Managing uncertainties in noise measurement and prediction, 27 - 29 June (Le Mans, Sarthe, France).
- [89] Mac Coy, J. J. (1994). “The theory of fuzzy structures - a statistical continuum mechanics interpretation”, in The 127th Meeting of the Acoustical Society of America, MIT, 6-10 June (Cambridge, Massachusetts, USA).
- [90] Mac Coy, J. J. and Steinberg, B. Z. (1997). “Addressing complexity in structural acoustic fuzzy structures and effective impedance theories”, *Computers and Structures* **65**, 403–421.
- [91] Maidanik, G. and Becker, K. (1998). “Various loss factors of a master harmonic oscillator coupled to a number of satellite harmonic oscillators”, *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, 3184–3194.
- [92] Maidanik, G. and Becker, K. (1999). “Characterization of multiple-sprung masses for wideband noise control”, *Journal of the Acoustical Society of America* **106**, 3109–3118.
- [93] Maidanik, G. and Becker, K. (1999). “Criteria for designing multiple-sprung masses for wideband noise control”, *Journal of the Acoustical Society of America* **106**, 3119–3127.

- [94] **Maidanik, G. and Becker, K. (2003)**. “Dependence of the induced loss factor on the coupling forms and coupling strengths : linear analysis”, *Journal of Sound and Vibration* **266**, 15–32.
- [95] **Maidanik, G. and Becker, K. (2004)**. “Induced noise control”, *Journal of Sound and Vibration* **277**, 1041–1058.
- [96] **Maidanik, G. and Becker, K. (2006)**. “Replacement of a summation by an integration in structural acoustics”, *Journal of Sound and Vibration* **291**, 323–348.
- [97] **Maidanik, G. and Dickey, J. (1995)**. “An impulse function for a fuzzy structure”, *Journal of the Acoustical Society of America* **97**, 1460–1476.
- [98] **Maidanik, G. and Dickey, J. (1996)**. “Design criteria for the damping effectiveness of structural fuzzies”, *Journal of the Acoustical Society of America* **100**, 2029–2033.
- [99] **Meirovitch, L. (1990)**. *Dynamics and Control of Structures* (John Wiley and Son Ltd).
- [100] **Mencik, J.-M. (2002)**. “Formulation de la réponse dynamique d’une structure maîtresse couplée à un système annexe et formulation locale du comportement énergétique des structures vibrantes”, Ph.D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et Université de Sherbrooke.
- [101] **Mencik, J.-M. and Berry, A. (2005)**. “A theoretical formulation of the dynamical response of a master structure coupled with elastic continuous fuzzy subsystems with discrete attachments”, *Journal of Sound and Vibration* **280**, 1031–1050.
- [102] **Mencik, J.-M. and Berry, A. (2006)**. “A diffusion model for a one-dimensional structure, coupled with an auxiliary system”, *Journal of Sound and Vibration* **294**, 894–915.
- [103] **Moeller, M., Thomas, R., Maruvada, H., Chandra, N. and Zebrowski, M. (2001)**. “An assesment of a FEA NVH CAE body model for design capability”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [104] **Monet Descombey, J., Thuong, O., Zhang, C. and Hamdi, M. (2008)**. “Presentation of an efficient method for solving large coupled vibro-acoustic systems including porous elastic components”, in Proceedings of ISMA08, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDROM ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).

- [105] **Moore, J. A. and Lyon, R. H. (1982)**. “Resonant porous material absorbers”, *Journal of the Acoustical Society of America* **72**, 1989–1999.
- [106] **Morand, H.-P. and Ohayon, R. (1995)**. *Fluid-Structure Interaction : applied numerical methods* (John Wiley and Son Ltd).
- [107] **Natke, H. G. and Y. Ben Haim (1996)**. “Uncertainty : models and measures”, in Proceedings of the International Workshop in Mathematical Research, 22-24 July (Akademie-Verlag, Lambrecht, Germany).
- [108] **Ohayon, R. and Soize, C. (1998)**. *Structural Acoustics and Vibration, Mechanical Models Variational Formulations and Discretization* (Academic press, San Diego, USA).
- [109] **Ollivry, J.-P. (1996)**. “Quelques aspects mathématiques de l’étude des fréquences propres de vibration de certains corps élastiques”, Technical Report RTI 15/2894 RN 004 R, ONERA, Châtillon, France.
- [110] **Panneton, R. and Atalla, N. (1996)**. “Numerical prediction of sound transmission through finite multilayer systems with poroelastic materials”, *Journal of the Acoustical Society of America* **100**, 346–354.
- [111] **Panneton, R. and Atalla, N. (1997)**. “An efficient finite element scheme for solving the three-dimensional poroelasticity problem in acoustics”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 3287–3298.
- [112] **Photiadis, D. M., Bucaro, J. A. and Houston, B. H. (1997)**. “The effect of internal oscillators on the acoustic response of a submerged shell”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 895–899.
- [113] **Picard, P. (2007)**. *Hasard et probabilités - Histoire, théorie et applications des probabilités* (Vuibert, Paris, France).
- [114] **Pierce, A. D. (1989)**. *Acoustics : An Introduction to its Physical Principles and Applications* (Acoust. Soc. Am., Publications on Acoustics, originally published in 1981, McGraw-Hill, New York, USA, Woodbury).
- [115] **Pierce, A. D. (1994)**. “Mass per unit natural frequency as a descriptor of internal fuzzy structure”, in The 127th Meeting of the Acoustical Society of America, MIT, 6-10 June (Cambridge, Massachusetts, USA).

- [116] **Pierce, A. D. and Sparrow, V. W. (1995)**. “Backscattering from a baffled finite plate strip with fuzzy attachments”, *Journal of the Acoustical Society of America* **98**, 1527–1533.
- [117] **Pierce, A. D., Sparrow, V. W. and Russell, D. A. (1995)**. “Fundamental Structural-Acoustic Idealizations for Structures with Fuzzy Internals”, *Journal of Vibration and Acoustics* **117**, 339–348.
- [118] **Rochat, J. L. and Sparrow, V. W. (1994)**. “The effects of fuzzy attachments on compressional and shear waves in a plate”, in The 127th Meeting of the Acoustical Society of America, MIT, 6-10 June (Cambridge, Massachusetts, USA).
- [119] **Rubinstein, R. (1964)**. *Simulation and the Monte Carlo Methods* (Chapman and Hall).
- [120] **Russel, D. A. (1995)**. “The theory of fuzzy structures and its application to waves in plates and shells”, Ph.D. thesis, Pennsylvania State University.
- [121] **Russell, D. and Sparrow, V. (1992)**. “Acoustic scattering from a fluid loaded plate with an attached structural fuzzy”, in The 123rd meeting of the Acoustical Society of America, 11-15 May (Salt Lake City, Utah, USA).
- [122] **Russell, D., Sparrow, V. and Soize, C. (1994)**. “A mathematical formulation for modeling the type i fuzzy parametres for a continuous line fuzzy attachment”, in The 127th Meeting of the Acoustical Society of America, MIT, 6-10 June (Cambridge, Massachusetts, USA).
- [123] **Sakai, T., Terada, T., Ono, S., Kamimura, N., Gielen, L. and Mas, P. (2001)**. “Development procedure for interior noise performance by virtual vehicle refinement, combining experimental and numerical component”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).
- [124] **Schedlinski, C., Wagner, F., Bohnert, K., Küsel, M., Clasen, D., Stein, C., Glandier, C., Kaufmann, M. and Tijs, E. (2008)**. “Computational model updating for coupled fluid-structure-analyses of passenger cars”, in Proceedings of ISMA08, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDROM ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).
- [125] **Scigliano, R. and Lardeur, P. (2008)**. “Numerical assessment of booming noise intra variability through a hierarchical approach”, in Proceedings of ISMA08, Internatio-

- nal Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDROM ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).
- [126] **Serfling, R. (1980)**. *Approximations Theorems of Mathematical Statistics* (John Wiley and Sons, New York, USA).
- [127] **Shannon, C. (1948)**. “A mathematical theory of communication”, *Bell System Technology Journal* 379–423 and 623–659.
- [128] **Soize, C. (1986)**. “Probabilistic structural modeling in linear dynamical analysis of complex mechanical systems. I. Theoretical elements”, *La Recherche Aéronautique (English edition)* 5, 23–48.
- [129] **Soize, C. (1993)**. *Méthodes mathématiques en analyse du signal*, Enseignement de la Physique (Masson, Paris, France).
- [130] **Soize, C. (1993)**. “A model and numerical method in the medium frequency range for vibroacoustic predictions using the theory of structural fuzzy”, *Journal of the Acoustical Society of America* 94, 849–865.
- [131] **Soize, C. (1995)**. “Vibration damping in low-frequency range due to structural complexity. A model based on the theory of fuzzy structures and model parameters estimation”, *Computers and Structures* 58, 901–915.
- [132] **Soize, C. (1996)**. “Estimation of the fuzzy substructure model parameters using the mean power flow equation of the fuzzy structure”, in Proceedings of the ASME Noise Control and Acoustic Divisions, volume 1, 28–30, nCA-Vol. 22, pp. 23-30 also published in *Journal of Vibration and Acoustic*, 120(1), pp. 279-286, 1998.
- [133] **Soize, C. (1998)**. “Estimation of the fuzzy substructure model parameters using the mean power flow equation of the fuzzy structure”, *Journal of Vibration and Acoustics* 120, 279–286.
- [134] **Soize, C. (2000)**. “A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics”, *Probabilistic Engineering Mechanics* 15, 277–294.
- [135] **Soize, C. (2001)**. “Maximum entropy approach for modeling random uncertainties in transient elastodynamics”, *Journal of the Acoustical Society of America* 109, 1979–1996.
- [136] **Soize, C. (2001)**. “Nonlinear dynamical systems with nonparametric model of random uncertainties”, *Uncertainties in Engineering Mechanics* 1, 1–38.

- [137] **Soize, C. (2001)**. “Transient responses of dynamical systems with random uncertainties”, *Probabilistic Engineering Mechanics* **16**, 363–372.
- [138] **Soize, C. (2003)**. “Random matrix theory and nonparametric model of random uncertainties in vibration analysis”, *Journal of Sound and Vibration* **263**, 893–916.
- [139] **Soize, C. (2003)**. “Uncertain Systems in the Medium-Frequency Range”, *Journal of Engineering Mechanics* **129**, 1017–1027.
- [140] **Soize, C. (2005)**. “A comprehensive overview of a non-parametric probabilistic approach of model uncertainties for predictive models in structural dynamics”, *Journal of Sound and Vibration* **288**, 623–652.
- [141] **Soize, C. (2005)**. “Probabilistic Models for Computational Stochastic Mechanics and Applications”, in the 9th International Conference of Structural Safety and Reliability ICOSAR’05 (Millpress, Rotterdam, Netherlands).
- [142] **Soize, C. (2005)**. *Probabilités et Modélisation des Incertitudes* (Université de Marne-la-Vallée).
- [143] **Soize, C. (2005)**. “Random matrix theory for modeling uncertainties in computational mechanics”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **194**, 1333–1366.
- [144] **Soize, C. and Bjaoui, K. (2000)**. “Estimation of fuzzy structure parameters for continuous junctions”, *Journal of the Acoustical Society of America* **107**, 2011–2020.
- [145] **Soize, C., Capiez Lernout, E., Durand, J.-F., Fernandez, C. and Gagliardini, L. (2008)**. “Probabilistic model identification of uncertainties in computational models for dynamical systems and experimental validation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198**, 150–163.
- [146] **Soize, C. and Chebli, H. (2003)**. “Random Uncertainties Model in Dynamic Substructuring Using a Nonparametric Probabilistic Model”, *Journal of Engineering Mechanics* **129**, 449–457.
- [147] **Sol, A. and Van Herpe, F. (2001)**. “Numerical prediction of a whole car vibro-acoustic behavior at low frequencies”, in Proceedings of the SAE 01, Noise and Vibration Conference and Exhibition, 30 April-3 May, ISBN 0-7680-0775-5 (Traverse City, Michigan, USA).

- [148] Sparrow, V. (1991). “Soize’s theory of structural fuzzy : an examination of fundamental assumptions”, in The 121st meeting of the Acoustical Society of America, 29 April-3 May (Baltimore, Maryland, USA).
- [149] Sparrow, V. W. and Buehrle, R. D. (2001). “Fuzzy Structure Analysis of Aircraft Panels in Nastran”, *AIAA paper 2001-1320* .
- [150] Sparrow, V. W. and Buehrle, R. D. (2002). “Uncertain structural dynamics of aircraft panels and fuzzy structures analysis”, *Journal of the Acoustical Society of America* **112**, 2347–2347.
- [151] Strasberg, M. and Feit, D. (1994). “Vibration damping of large structures induced by attached small substructures each with multiple degrees of freedom”, in The 127th Meeting of the Acoustical Society of America, MIT, 6-10 June (Cambridge, Massachusetts, USA).
- [152] Strasberg, M. and Feit, D. (1996). “Vibration damping of large structures induced by attached small resonant structures”, *Journal of the Acoustical Society of America* **99**, 335–344.
- [153] Szechenyi, E. (1971). “Modal densities and radiation efficiencies of unstiffened cylinders using statistical methods”, *Journal of Sound and Vibration* **19**, 65–81.
- [154] Van den Nieuwenhof, B., Lielens, G., Coyette, J., Acher, F. and d’Udekem, D. (2008). “Efficient analysis of large trimmed configurations using modal approaches”, in Proceedings of ISMA08, International Conference on Modal Analysis Noise and Vibration Engineering, 15-17 September, CDROM ISBN 9789073802865 (Leuven, Belgium).
- [155] Wang, J., Lu, T., Woodhouse, J., Langley, R. and Evans, J. (2005). “Sound transmission through lightweight double-leaf partitions : theoretical modelling”, *Journal of Sound and Vibration* **286**, 817–847.
- [156] Weaver, R. L. (1996). “The effect of an undamped finite degree of freedom “fuzzy” substructure : Numerical solution and theoretical discussion”, *Journal of the Acoustical Society of America* **100**, 3159–3164.
- [157] Weaver, R. L. (1997). “Mean and mean-square responses of a prototypical master/fuzzy structure”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 1441–1449.
- [158] Weaver, R. L. (1997). “Multiple-scattering theory for mean responses in a plate with sprung masses”, *Journal of the Acoustical Society of America* **101**, 3466–3474.

- [159] **Weaver, R. L. (1998)**. “Mean-square responses in a plate with sprung masses, energy flow and diffusion”, *Journal of the Acoustical Society of America* **103**, 417–427.
- [160] **Weyl, H. (1913)**. “Über die Randwertaufgabe der Strahlungstheorie und asymptotische Spektralgesetze”, *J. reine Angew. Math.* **143**, 177–202.
- [161] **Weyl, H. (1915)**. “Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalteten elastischen Körpers”, *Rend. Circ. Mat. Palermo* **39**, 1–50.
- [162] **Wood, L. and Joachim, C. (1987)**. “Interior noise scatter in four-cylinder sedans and wagons”, *International Journal of Vehicle Design* **8**, 428–438.
- [163] **Zienkewicz, O. and Taylor, R. (1989)**. *The Finite Element Method*, fourth edition (Mac Graw-Hill, New York, USA).

Titre : Modélisation et validation expérimentale des complexes insonorisants pour la prévision vibroacoustique numérique basse et moyenne fréquences des automobiles.

Résumé : Dans cette recherche, on construit un modèle simplifié en basses et moyennes fréquences de complexes insonorisants (*habillages*) de l'industrie automobile à partir d'un élément élastoacoustique stochastique. Le modèle simplifié moyen est issu d'une extension de la théorie des structures floues et dépend de trois paramètres physiques : densité modale, amortissement et masse participante. Le modèle simplifié stochastique qui prend en compte les incertitudes de modèle et de données est construit en utilisant une approche probabiliste non paramétrique et dépend de trois paramètres de dispersion. Le modèle simplifié de l'habillage est implémenté dans un modèle vibroacoustique stochastique industriel d'automobile. Deux problèmes inverses sont résolus à l'aide d'une base de données expérimentales sur véhicules construite en parallèle et permettent d'identifier les paramètres du modèle complet. L'analyse des résultats permet de valider les développements théoriques et la méthodologie proposée.

Mots-Clefs : Théorie des structures floues, vibroacoustique numérique, structures complexes, incertitudes, approche probabiliste non paramétrique, expérimentations.

Title : Modelling and experimental validation of complex sound-insulation layers for computational low- and medium-frequency vibroacoustics of cars.

Abstract : This research aims at developing a simplified low- and medium-frequency model for automotive sound-insulation layers based on a stochastic elastoacoustic element. The mean simplified model comes from an extension of the fuzzy structures theory and depends on three physical parameters : modal density, damping and participating mass. A nonparametric probabilistic approach is used to build the uncertainty-accounting stochastic simplified model. This model takes into account the modeling and system parameters uncertainties and depends on three dispersion parameters. The *insulation* simplified model is then implemented in an industrial stochastic vibroacoustic model of a car. An experimental database of tests on vehicles has been concomitantly carried out and has led to inverse problems allowing the identification of the simplified model parameters to be performed. The analysis of these results shows the validation of the theory and the relevance of the proposed methodology.

Keywords : Theory of fuzzy structures, computational structural-acoustics, complex structures, uncertainties, nonparametric probabilistic approach, tests.

Discipline : Mécanique

Laboratoire : Laboratoire Modélisation et Simulation Multi-Echelle, Université Paris-Est, 5 Boulevard Descartes, 77454 Marne-La-Vallée Cedex 04