



**HAL**  
open science

# Contributions à la modélisation des interfaces imparfaites et à l'homogénéisation des matériaux hétérogènes

Shui-Tao Gu

► **To cite this version:**

Shui-Tao Gu. Contributions à la modélisation des interfaces imparfaites et à l'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Autre [cond-mat.other]. Université Paris-Est, 2008. Français. NNT : 2008PEST0239 . tel-00470541

**HAL Id: tel-00470541**

**<https://theses.hal.science/tel-00470541>**

Submitted on 6 Apr 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**UNIVERSITE DE PARIS-EST**

Année 2008

**THESE**

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE PARIS-EST**

**Discipline : Mécanique**

présentée par

**Shui-Tao GU**

Titre

**Contributions à la modélisation des interfaces  
imparfaites et à l'homogénéisation des matériaux hétérogènes**

soutenue le 15 février 2008  
devant le jury composé de

G. GEYMONAT	Président
J. F. GANGHOFFER	Rapporteur
C. VALLEE	Rapporteur
F. KRASUCKI	Examineur
J.-F. SHAO	Examineur
V. PENSEE	Examineur
Q.-C. HE	Directeur de Thèse

# Remerciements

En tout premier lieu, je tiens à adresser mes plus vifs remerciements à mon directeur de thèse Qi-Chang HE, qui a dirigé cette thèse avec énormément de patience et beaucoup d'enthousiasme et qui m'a témoigné de sa confiance et de son aide scientifique. Sans lui, la thèse n'aurait jamais vu le jour.

Ensuite, je remercie également Vincent PENSEE de m'avoir donné des encadrements au long du travail de thèse et d'avoir accepté de participer au jury pour juger mon travail.

Je remercie très chaleureusement Messieurs Jean-François GANGHOFFER et Claude VALLEE qui ont accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de thèse, pris le temps d'examiner avec une grande attention mon travail et apporté des critiques constructives.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur Giuseppe GEYMONAT qui a accepté de présider le jury de thèse et à Madame François KRASUCKI et Monsieur Jian-Fu SHAO qui ont accepté de participer au jury et de juger mon travail.

Je voudrais remercier les deux directeurs successifs du Laboratoire de Mécanique (LAM), Christian SOIZE et Guy BONNET, de m'avoir accueilli et offert des conditions de travail très appréciables et un bon environnement de recherche scientifique.

Je voudrais adresser mes remerciements à tous les autres membres du LAM et à tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin. Je conserverai un très bon souvenir des trois années consacrées à cette thèse.

En particulier, je remercie de tout mon coeur ma famille qui m'a soutenu tout au long de mes études. Je n'oublie pas ma femme Huai-En ZHOU qui m'a toujours épaulé avec son amour et sa patience.

# Résumé

En mécanique des matériaux et des structures, l'interface entre deux composants matériels ou deux éléments structuraux est traditionnellement et le plus souvent supposée parfaite. Au sens mécanique, une interface parfaite est une surface à travers laquelle le vecteur de déplacement et le vecteur de contrainte sont tous les deux continus. L'hypothèse des interfaces parfaites est inappropriée dans de nombreuses situations en mécanique. En effet, l'interface entre deux corps ou deux parties d'un corps est un endroit propice aux réactions physico-chimiques complexes et favorable à l'endommagement mécanique. L'intérêt pour les interfaces imparfaites devient depuis quelques années grandissant avec le développement des matériaux et structures nanométriques dans lesquels les interfaces et surfaces jouent un rôle prépondérant.

A partir de la configuration de base où une interphase de faible épaisseur sépare deux phases, ce travail établit trois modèles d'interface imparfaite généraux qui permettent de remplacer l'interphase par une interface imparfaite dans les cas de la conduction thermique, de l'élasticité linéaire et de la piézoélectricité sans perturber les champs en questions à une erreur fixée près. La dérivation de ces modèles est basée sur le développement de Taylor et sur une approche originale de géométrie différentielle indépendante de tout système de coordonnées. Les trois modèles généraux permettent non seulement de mieux appréhender certains modèles phénoménologiques d'interface imparfaite mais aussi de décrire les effets d'interface que les modèles existants ne sont pas en mesure de prendre en compte.

Les modèles d'interface imparfaite établis sont appliqués dans la détermination des propriétés effectives thermiques, élastiques et piézoélectriques d'un matériau composite constitué d'une matrice renforcée par des particules ou fibres enrobées d'une interphase. La méthode utilisée pour rendre compte des effets des interfaces imparfaites sur les propriétés effectives repose sur une condition d'équivalence énergétique qui ramène un matériau hétérogène avec interfaces imparfaites à un matériau hétérogène avec interfaces parfaites.

**Mots-Clés** : Interphase ; Interface imparfaite ; Conduction thermique ; Elasticité linéaire ; Piézoélectricité ; Matériaux composites ; Micromécanique

**Title : Contributions to the modeling of imperfect interfaces and to the homogenization of heterogeneous materials**

## Abstract

In mechanics of materials and structures, the interface between two material components or two structural elements is traditionally and the most often assumed to be perfect. In mechanics, a perfect interface is a surface through which the displacement and stress vectors are continuous. The assumption of the perfect interfaces is inappropriate in many situations in mechanics. Indeed, the interface between two bodies or two parts of a body is a place propitious to complex physicochemical reactions and vulnerable to mechanical damage. The interest in imperfect interfaces has become for a few years growing with the development of nanometric materials and structures in which the interfaces and surfaces play a preponderant role.

Starting from the basic configuration where an interphase of thin thickness separates two phases, this work establishes three general models of imperfect interface which make it possible to replace the interphase by an imperfect interface in the cases of thermal conduction, linear elasticity and piezoelectricity without disturbing the fields in questions to within a fixed error. The derivation of these models is based on the development of Taylor and an original coordinate-free approach of differential geometry. The three general models make it possible not only to get a better understanding of certain phenomenological models of imperfect interface but also to describe the effects of interface which the existing models are not able to take into account.

The established models of imperfect interface are applied to determining the thermal, elastic and piezoelectric effective properties of composite materials consisting of a matrix reinforced by particles or fibers coated with an interphase. The method used to account for the effects of imperfect interfaces on the effective properties rests on an energy equivalency which brings back a heterogeneous material with imperfect interfaces to a heterogeneous material with perfect interfaces.

**Key words** : Interphase ; Imperfect interface ; Thermal conduction ; Linear elasticity ; Piezoelectricity ; Composite materials ; Micromechanics

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>7</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>9</b>
<b>I Préliminaires à l'étude des interfaces imparfaites courbées</b>	<b>12</b>
<b>1 Éléments de base de la géométrie différentielle</b>	<b>13</b>
1.1 Définitions . . . . .	13
1.1.1 Courbes planes et surfaces . . . . .	13
1.1.2 Vecteur normal et espace tangent . . . . .	14
1.1.3 Opérateurs de projections . . . . .	15
1.1.4 Champs superficiels et courbes . . . . .	15
1.2 Opérateurs différentiels sur une courbe plane et sur une surface . . . . .	17
1.2.1 Gradients tangentiel et normal . . . . .	17
1.2.2 Divergences tangentielle et normale . . . . .	19
1.2.3 Dérivées tangentielles des fonctions composées et théorème de divergence . . . . .	20
1.3 Tenseur de Weingarten et courbures . . . . .	21
1.3.1 Variation du vecteur normal unitaire . . . . .	21
1.3.2 Courbure d'une courbe plane . . . . .	22
1.3.3 Courbures d'une surface . . . . .	22
1.4 Courbes et surfaces parallèles . . . . .	23
<b>2 Relations de compatibilité d'Hadamard</b>	<b>26</b>
2.1 Saut de la dérivée d'une fonction scalaire . . . . .	27
2.2 Saut de la dérivée d'une fonction vectorielle . . . . .	28

2.3	Saut de la dérivée d'une fonction tensorielle . . . . .	30
2.4	Sauts des dérivées élevées . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Interfaces parfaites thermique, mécanique et piézoélectrique</b>	<b>32</b>
3.1	Interface thermique parfaite . . . . .	32
3.2	Interface mécanique parfaite . . . . .	33
3.3	Interface piézoélectrique parfaite . . . . .	36
<b>II</b>	<b>Modélisation des interfaces imparfaites</b>	<b>37</b>
<b>4</b>	<b>Interfaces imparfaites thermiques</b>	<b>38</b>
4.1	Schéma de modélisation et équations de base . . . . .	39
4.2	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$ . . . . .	40
4.2.1	Dérivation du modèle . . . . .	40
4.2.2	Dérivation des opérateurs $P_1$ et $Q_1$ . . . . .	44
4.2.3	Matériaux isotropes et homogènes . . . . .	45
4.2.4	Cas Extrêmes . . . . .	46
4.3	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^{N+1})$ avec $N \geq 2$ . . . . .	48
4.3.1	Dérivation du modèle . . . . .	48
4.3.2	Dérivation des opérateurs $P_r$ et $Q_r$ . . . . .	53
4.3.3	Matériaux Isotropes et homogènes . . . . .	55
4.4	Matériaux hétérogènes . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Interfaces imparfaites élastiques</b>	<b>58</b>
5.1	Schéma de modélisation et équations de base . . . . .	59
5.2	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$ . . . . .	60
5.2.1	Forme générale du modèle . . . . .	60
5.2.2	Dérivation des expressions de $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{g}_1$ . . . . .	61
5.2.3	Matériaux isotropes . . . . .	64
5.2.4	Cas extrêmes . . . . .	66
5.3	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^{N+1})$ avec $N \geq 2$ . . . . .	68
5.3.1	Forme générale du modèle . . . . .	68
5.3.2	Dérivation des expression de $\mathbf{f}_r$ et $\mathbf{g}_r$ . . . . .	70

5.3.3	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^4)$ . . . . .	72
5.4	Matériaux hétérogènes . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Interfaces imparfaites piézoélectriques</b>	<b>78</b>
6.1	Schéma de modélisation et équations de base . . . . .	78
6.2	Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$ . . . . .	81
6.2.1	Forme générale du modèle . . . . .	81
6.2.2	Expressions des fonctions $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ . . . . .	82
6.2.3	Matériaux isotropes transverses . . . . .	86
6.2.4	Cas extrêmes . . . . .	89
 <b>III Propriétés effectives de matériaux hétérogènes avec inter-</b>		
<b>faces imparfaites</b>		<b>93</b>
<b>7</b>	<b>Méthodes d'Homogénéisation</b>	<b>94</b>
7.1	Relations de base de la micromécanique . . . . .	94
7.1.1	Conduction thermique . . . . .	95
7.1.2	Elasticité . . . . .	96
7.1.3	Piézoélectricité . . . . .	98
7.2	Méthode de l'inclusion équivalente . . . . .	100
7.2.1	Problème de conduction thermique . . . . .	101
7.2.2	Problème d'élasticité . . . . .	103
7.2.3	Problème de piézoélectricité . . . . .	106
<b>8</b>	<b>Conductivité thermique effective d'un composite à inclusions sphériques</b>	
	<b>avec interface imparfaite</b>	<b>109</b>
8.1	Position du problème . . . . .	109
8.2	Conductivité de l'inclusion équivalente . . . . .	110
8.3	Conductivité effective . . . . .	113
<b>9</b>	<b>Propriétés élastiques effectives d'un composite à inclusions sphériques</b>	
	<b>avec interface imparfaite</b>	<b>117</b>
9.1	Position du problème . . . . .	117
9.2	Module de compressibilité effectif . . . . .	118

9.2.1	Module de compressibilité de l'inclusion équivalente . . . . .	118
9.2.2	Module effectif et applications . . . . .	123
9.3	Module de cisaillement effectif . . . . .	126
9.3.1	Module de cisaillement de l'inclusion équivalente . . . . .	126
9.3.2	Module effectif et applications . . . . .	132
<b>10</b>	<b>Propriétés piézoélectriques effectives d'un composite fibreux avec inter-</b>	
	<b>faces imparfaites</b>	<b>135</b>
10.1	Position du problème . . . . .	135
10.2	Propriétés de l'inclusion équivalente . . . . .	137
10.3	Propriétés effectives et applications . . . . .	142
	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>148</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>149</b>
<b>A</b>	<b>Modèles d'interface imparfaite thermique d'ordres <math>0(h^3)</math> et <math>0(h^4)</math></b>	<b>159</b>
A.1	Modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre $0(h^3)$ . . . . .	159
A.2	Modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre $0(h^4)$ . . . . .	161

# Table des figures

1-1	Une courbe plane $\mathbb{R}^2$ et une surface dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	14
1-2	Courbes parallèles . . . . .	23
2-1	Relations d'Hadamard . . . . .	27
4-1	Remplacement d'une interphase par une interface imparfaite : (a) Milieu 1/Interphase 0/Milieu 2; (b) Milieu 1/Interface Imparfaite/Milieu 2 . . . .	39
5-1	Schéma de modélisation : (a) phase 1/interphase 0/medium 2; (b) phase 1/interface imparfaite/phase 2 . . . . .	58
6-1	Schéma de modélisation : (a) phase 1/interphase 0/medium 2; (b) phase 1/interface imparfaite/phase 2 . . . . .	80
7-1	Conditions de vecteur flux de chaleur homogène au contour . . . . .	95
7-2	Conditions de gradient de température homogène au contour . . . . .	96
7-3	Conditions de contrainte homogène au contour . . . . .	97
7-4	Conditions de déformation homogène au contour . . . . .	98
7-5	Schéma du processus de remplacement d'une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème de conductivité . . . . .	101
7-6	Schéma du processus de remplacement d'une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème d'élasticité . . . . .	104
7-7	Schéma du processus de remplacement d'une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème de piézoélectricité . . . . .	107

8-1	Détermination de la conductivité de l'inclusion équivalente : microstructure étudiée. . . . .	111
8-2	Evolution du rapport $k^*/k^{(2)}$ en fonction de $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$ pour $\delta = 0.001$ .	115
8-3	Evolution du rapport $k^*/k^{(2)}$ en fonction de $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$ pour $\delta = 0.01$ .	116
8-4	Evolution du rapport $k^*/k^{(2)}$ en fonction de $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$ pour $\delta = 0.1$ .	116
9-1	Composite sphérique élastique avec l'interface imparfaite . . . . .	119
9-2	Evolution du rapport $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0,001$ .	124
9-3	Evolution du rapport $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0,01$ .	125
9-4	Evolution du rapport $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0,1$ .	125
9-5	Evolution du rapport $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0.001$ .	133
9-6	Evolution du rapport $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0.01$ .	134
9-7	Evolution du rapport $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$ en fonction de $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$ pour $\delta = 0.1$ .	134
10-1	Détermination des propriétés piézoélectriques effectives : microstructure étudiée. . . . .	136
10-2	Evolution du module $C_{44}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.001$ .	144
10-3	Evolution du module $C_{44}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.01$ .	145
10-4	Evolution du module $M_{11}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.001$ .	145
10-5	Evolution du module $M_{11}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.001$ .	146
10-6	Evolution du module $\Pi_{15}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.001$ .	146
10-7	Evolution du module $\Pi_{15}^*$ en fonction du module $\Pi_{15}^{(0)}$ pour $\delta = 0.01$ .	147

# Notations

## Notations tensorielles

$a$	scalaire,	$\cdot$	produit contracté d'ordre un,
$\mathbf{a}$	vecteur,	$:$	produit contracté d'ordre deux,
$\mathbf{A}$	tenseurs d'ordre deux,	$\otimes$	produit tensoriel,
$\mathbb{A}$	tenseurs d'ordre quatre,	$\otimes^S$	produit tensoriel symétrisé,
$\mathbf{I}$	tenseur identité d'ordre deux,	$\delta_{ij}$	symbole de Kronecher,
$\mathbb{I}$	tenseur identité d'ordre quatre,	$\mathbf{n}$	vecteur normal.

## Calcul tensoriels

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_i b_i, & (\mathbf{A}\mathbf{b})_i &= A_{ij} b_j, & (\mathbf{A}\mathbf{B})_{ij} &= A_{ik} B_{kj}, \\
 \mathbf{A} : \mathbf{B} &= A_{ik} B_{ki}, & (\mathbb{A} : \mathbf{B})_{ij} &= A_{ijkl} B_{lk}, & (\mathbb{A} : \mathbb{B})_{ijkl} &= A_{ijmn} B_{nmkl}, \\
 (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ij} &= a_i b_j, & (\mathbf{A} \otimes \mathbf{b})_{ijk} &= A_{ik} b_j, & (\mathbf{A} \odot \mathbf{B})_{ij} &= A_{kj} B_{ik}, \\
 (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{ik} B_{jl}, & (\mathbf{A} \underline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= A_{il} B_{jk}, & (\mathbf{A} \overline{\otimes} \mathbf{B})_{ijkl} &= \frac{1}{2} (A_{ik} B_{jl} + A_{il} B_{jk}).
 \end{aligned}$$

## Paramètres matériels

$\mathbb{C}$	tenseur de rigidité	$\Pi$	tenseur de piézoélectricité
$\mathbb{S}$	tenseur de souplesse	$\mathbf{M}$	tenseur de diélectricité
$\mathbf{K}$	tenseur de conductivité thermique		
$\lambda, \mu$	constantes de Lamé	$\mu^*$	module de cisaillement homogénéisé
$\kappa$	module de compressibilité	$\kappa^*$	module de compressibilité homogénéisé
$k$	conductivité	$k^*$	conductivité homogénéisé

## D'autres notations

$u$	champ de déplacement
$\varepsilon$	tenseur de déformation
$\sigma$	tenseur de contrainte de Cauchy
$e$	champ électrique
$d$	champ de déplacement électrique
$q$	champ de flux de chaleur
$h$	champ de gradient de température
$L$	tenseur de courbure

# Introduction générale

En mécanique des matériaux et des structures, l'interface entre deux composants matériels ou deux éléments structuraux est traditionnellement et le plus souvent supposée parfaite. Au sens mécanique, une interface parfaite est une surface à travers laquelle le vecteur de déplacement et le vecteur de contrainte sont tous les deux continus. L'hypothèse des interfaces parfaites est inappropriée dans de nombreuses situations en mécanique. En effet, l'interface entre deux corps ou deux parties d'un corps est un endroit propice aux réactions physico-chimiques complexes et favorable à l'endommagement mécanique. Par exemple, dans un matériau composite constitué d'une matrice renforcée par des particules ou fibres, les liaisons entre la matrice et les hétérogénéités (particules ou fibres) sont assurées dans la plupart de cas par l'intermédiaire de zones de transition de très faible épaisseur, qui ne peuvent en principe pas être considérées comme des interfaces parfaites ([25], [71]). L'importance des effets des interfaces imparfaites sur le comportement mécanique des matériaux et des structures a été reconnue depuis longtemps ([76], [44], [23], [45], [57], [67], [68], [69], [97], [88], [33]). Mais, l'intérêt pour les interfaces imparfaites devient depuis quelques années grandissant avec le développement des nanotechnologies. Ceci s'explique par le fait que, dans un matériau ou une structure nanométrique, le rapport entre l'aire des interfaces (ou surfaces) et le volume est tellement grand que les effets interfaciaux et surfaciques affectent de façon déterminante le comportement du matériau ou de la structure ([27], [24], [99]).

La modélisation des interfaces et surfaces ainsi que de leurs effets sur le comportement mécanique et physique des matériaux et des structures reste un sujet largement ouvert malgré un grand nombre de travaux de recherche les concernant ([1], [58]). D'un point de vue mécanique, les études sur les surfaces et interfaces solides étaient dans une large mesure fragmentaires et empiriques avant le travail pionnier de Gurtin et Murdoch [37]. Dans ce dernier, en se basant sur les concepts et méthodes de la mécanique des milieux

continus, Gurtin et Murdoch ont élaboré une approche systématique et rigoureuse pour décrire la cinématique, la dynamique et les lois de comportement des surfaces et interfaces matérielles. La théorie de Gurtin et Murdoch a ensuite été développée et étendue par eux-mêmes et leurs collaborateurs ([77], [38], [39], [40], [41], [42], [78]) mais aussi par d'autres chercheurs (voir par exemple [90], [91], [98]), se révélant très utile pour modéliser les effets d'interface et de surface dans les matériaux et structures nanométriques.

Une autre approche systématique et rigoureuse pour obtenir des modèles d'interface imparfaite est basée sur l'analyse asymptotique. Cette approche, étroitement liée à certaines techniques d'homogénéisation, a été initiée par Sanchez-Palencia [84] et Pham Huy et Sanchez-Palencia [81] dans le contexte de conduction thermique. Elle a été ensuite développée et généralisée par d'autres auteurs ([18], [64] ; [62], [16], [34], [63], [35] ; [46], [14], [47], [9], [10], [11]). Nous nous référons aux articles récents de Rubin et Benveniste [83] et Benveniste [9] pour plus de références.

La configuration de base utilisée par l'approche asymptotique pour établir des modèles d'interface imparfaite est une interphase d'épaisseur  $h$  très petite située entre deux phases. Dans les travaux de Sanchez-Palencia [84], Pham Huy et Sanchez-Palencia [81] et de certains autres auteurs (par exemple, Caillerie [18], Klarbring [62], Benveniste et Miloh [14]), l'interphase étant supposé faiblement ou fortement conductrice dans le cas de conduction et très rigide ou très souple dans le cas élastique, des modèles d'interface imparfaite ont été dérivés à l'aide d'un développement asymptotique formel. La méthode employée par Hashin ([46], [47]) repose sur le développement de Taylor et les résultats qu'il a obtenus sont différents dans le sens qu'ils sont valables pour une interphase dont la conductivité ou la rigidité est quelconque. A notre avis, l'approche asymptotique initialement proposée par Bövik et Olsson [17] et Bövik [16] et récemment étendue par Benveniste ([9], [10], [11]) est à la fois mathématiquement rigoureuse et physiquement claire. Basée sur le développement de Taylor, cette dernière approche consiste à remplacer l'interphase par une interface imparfaite en exigeant que ce remplacement ne perturbe les champs en dehors de la zone de l'interphase et dans la zone de l'interphase qu'à une erreur fixée près.

L'objectif du travail de thèse présenté dans ce mémoire est triple. Tout d'abord, en s'inspirant des travaux de Gurtin et Murdoch [37] et aussi de ceux de He [49], il vise à développer une méthode de géométrie différentielle indépendante de tout système de coordonnées et efficace pour étudier les phénomènes de surface et d'interface. Ensuite, il a pour

but de développer et généraliser l'approche susmentionnée de Bøvik et Benveniste par :

- (a) l'obtention d'un modèle d'interface imparfaite générique et compact pour les phénomènes de transport linéaires (conduction thermique, conduction électrique, diffusion, ...);
- (b) la dérivation d'un modèle d'interface imparfaite générique et compact dans le cas de l'élasticité linéaire;
- (c) la construction d'un modèle d'interface imparfaite piézoélectrique du degré de précision  $0(h^2)$ .

Enfin, il a pour objectif de proposer une méthode permettant de prendre en compte les effets des interfaces décrites par les modèles d'interface imparfaite thermique, élastique et piézoélectrique dans l'homogénéisation des matériaux hétérogènes. Dans ce qui suit, nous montrons comment ces objectifs sont atteints à travers la présentation des problèmes à résoudre, des méthodes de résolution utilisées et des nouveaux résultats obtenus.

Ce mémoire est structuré en 3 parties. La première partie, comportant trois chapitres, consiste à résumer les éléments de base d'une théorie de géométrie différentielle indépendante de tout système de coordonnées curvilignes et à établir les relations d'Hadamard pour les fonction scalaire, vectorielle et tensorielle. La deuxième partie, constituant la partie centrale de ce mémoire et comprenant trois chapitres, porte sur la dérivation des modèles d'interface imparfaite thermiques, élastiques et piézoélectriques. Dans cette partie, nous étudions d'abord les situations générales et discutons ensuite des cas particuliers importants. La troisième partie, constitué de quatre chapitres, propose une méthode de prise en compte des effets des interfaces imparfaites dans la détermination des propriétés effectives des matériaux composites et illustre cette méthode dans les cas thermique, élastique et piézoélectrique. A la fin de ce mémoire, nous en tirons des conclusions générales et présentons les perspectives importantes.

# Première partie

## Préliminaires à l'étude des interfaces imparfaites courbées

# Chapitre 1

## Eléments de base de la géométrie différentielle

Dans ce chapitre, nous introduisons les outils mathématiques principaux nécessaires à l'étude des interfaces imparfaites courbées de dimension 1 ou 2. Ainsi, les éléments de base de la géométrie différentielle sont rappelées et notamment les opérateurs différentiels de surface fréquemment utilisés dans la suite de ce mémoire sont définis. Nous notons que l'approche retenue est celle proposée par Gurtin et Murdoch [30], poursuivie par eux et leurs collaborateurs [1] [31] et développée entre autres par He [37] [38]. Cette approche est qualifiée d'intrinsèque au sens qu'elle est indépendante de tout système de coordonnées. En particulier, sa mise en forme matricielle ou sa mise en application numérique peut être effectuée à l'aide d'un système de coordonnées cartésiennes, ce qui est souvent un gage de simplicité et facilité. Dans ce qui suit, nous nous plaçons dans un espace euclidien  $\mathbb{R}^k$  de dimension  $k$  ( $= 2, 3$ ).

### 1.1 Définitions

#### 1.1.1 Courbes planes et surfaces

En géométrie différentielle, les courbes et les surfaces sont décrites de façon paramétrique ou implicite. Malgré le fait que ces façons sont localement équivalentes, la description paramétrique est de loin plus répandue que la description implicite. Dans les études qui suivent, la dernière est adoptée pour deux raisons. D'abord, elle nous permet de décrire d'une manière unifiée les courbes planes nécessaires à l'étude des problèmes

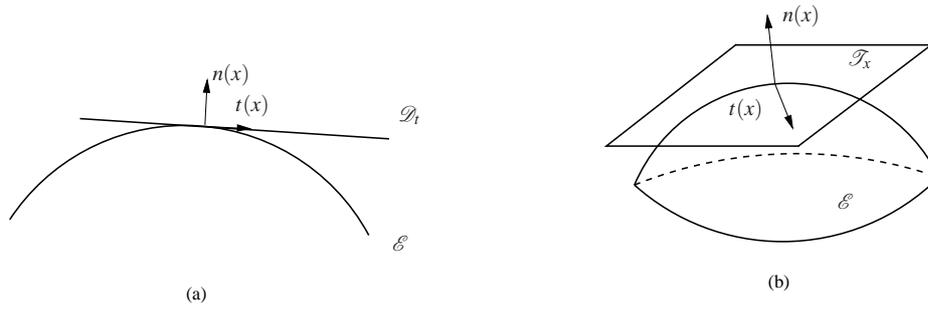


FIG. 1-1 – Une courbe plane  $\mathbb{R}^2$  et une surface dans  $\mathbb{R}^3$ .

bidimensionnel (2D) et les surfaces indispensables à l'investigation des problèmes tridimensionnels (3D). Ensuite, elle est directement liée à la méthode numérique "level set" qui est très efficace pour traiter les phénomènes surfaciques et interfaciaux.

Considérons une fonction scalaire  $g$  définie dans  $\mathbb{R}^k$ , qui est supposée au moins deux fois continûment différentiable, i.e.  $g \in \mathcal{C}^2$ . L'ensemble

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k | g(\mathbf{x}) = z\} \quad (1.1)$$

représente une surface (resp. une courbe plane) de niveau  $z$  lorsque  $k = 3$  (resp.  $k = 2$ ). Dans la suite, sans perte de généralité, nous posons  $z = 0$ .

### 1.1.2 Vecteur normal et espace tangent

En faisant l'hypothèse que la fonction  $g$  a de plus la propriété  $\nabla g(\mathbf{x}) \neq 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ , le vecteur unitaire  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  normal à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  est défini par

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}. \quad (1.2)$$

L'espace  $\mathcal{T}_x$  tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  est par définition le sous-espace vectoriel de dimension  $k - 1$  donné par

$$\mathcal{T}_x = \{\mathbf{t} \in \mathbb{R}^k | \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{t} = 0\}. \quad (1.3)$$

Dans le cas où  $\mathcal{E}$  est une courbe plane ( $k = 2$ ), l'espace tangent  $\mathcal{T}_x$  est la droite  $\mathcal{D}_x$  tangente à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$ . Lorsque  $\mathcal{E}$  est une surface ( $k = 3$ ), l'espace tangent  $\mathcal{T}_x$  représente le plan tangent à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$ . Ces deux situations sont illustrées par la FIG 1-1.

### 1.1.3 Opérateurs de projections

Maintenant, nous introduisons deux opérateurs de projection orthogonaux complémentaires définis en tout point  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{E}$  par

$$\mathbf{P}^\perp(\mathbf{x}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad (1.4)$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{I} - \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (1.5)$$

où  $\mathbf{I}$  est le tenseur identité du second ordre. Ces deux opérateurs jouent un rôle fondamental dans nos études. Géométriquement,  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  projette tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$  sur l'espace tangent  $\mathcal{T}_x$  de  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$  alors que  $\mathbf{P}^\perp(\mathbf{x})$  projette  $\mathbf{v}$  sur la droite normale de  $\mathcal{E}$  dirigée suivant  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  et passant par  $\mathbf{x}$ . Donc, tout vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$  peut se décomposer de façon unique en une composante normale  $\mathbf{v}_n$  et une composante tangentielle  $\mathbf{v}_T$  :

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_T, \quad \mathbf{v}_n = \mathbf{P}^\perp \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_T = \mathbf{P} \mathbf{v}. \quad (1.6)$$

Les opérateurs  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{P}^\perp$  étant des projecteurs orthogonaux, ils vérifient donc les relations suivantes :

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}, \quad (\mathbf{P}^\perp)^2 = \mathbf{P}^\perp, \quad (\mathbf{P})^T = \mathbf{P}, \quad (\mathbf{P}^\perp)^T = \mathbf{P}^\perp, \quad \mathbf{P}\mathbf{P}^\perp = \mathbf{P}^\perp\mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (1.7)$$

Les deux opérateurs qui viennent d'être introduits peuvent être aussi utilisés pour décomposer un tenseur d'ordre supérieur à 1 à l'aide de l'identité  $\mathbf{P}^\perp + \mathbf{P} = \mathbf{I}$ . Par exemple, pour un tenseur  $\mathbf{A}$  du second ordre, nous pouvons écrire

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^\perp + \mathbf{P})\mathbf{A}(\mathbf{P}^\perp + \mathbf{P}) = \mathbf{P}^\perp\mathbf{A}\mathbf{P}^\perp + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}^\perp\mathbf{A}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^\perp. \quad (1.8)$$

### 1.1.4 Champs superficiels et courbes

Un champ typique intervenant dans l'étude des surfaces ou des interfaces est un champ tensoriel  $\mathbf{T}$  du second ordre défini sur une surface courbée (ou une courbe plane)  $\mathcal{E}$ , qui, évalué en un point  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ , correspond à une transformation linéaire  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  du plan tangent  $\mathcal{T}_x$  dans  $\mathbb{R}^k$  ( $k = 2$  ou  $3$ ). Un tel champ est plus difficile à traiter par rapport à un champ tensoriel  $\mathbf{A}$  du second ordre typiquement intervenant en mécanique des milieux continus, qui, évalué en un point  $\mathbf{x}$ , est une transformation linéaire  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$  de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}^k$ . Une façon

efficace de surmonter cette difficulté est celle proposée par Gurtin et Murdoch [30] (voir aussi Murdoch [1] et Gurtin et al. [31]). L'idée essentielle de Gurtin et Murdoch [30] est d'assimiler  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  à une transformation linéaire de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}^k$  à condition de demander que  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  annihile tout vecteur normal à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$ . Cette demande est facilement satisfaite moyennant le projecteur tangent  $\mathbf{P}$ . Nous présentons ci-dessous les notions de base due à Gurtin et Murdoch [30]. Pour alléger la présentation, nous nous limitons au cas où  $\mathcal{E}$  est une surface. Quand  $\mathcal{E}$  est une courbe plane, les notions présentées s'appliquent par analogie si le mot "surface" et "superficiel" sont remplacés respectivement par les mots "courbe plane" et "courbe".

Soit un champ tensoriel  $\mathbf{T}$  du second ordre défini sur  $\mathcal{E}$ . Par définition,  $\mathbf{T}$  est un *champ superficiel* si et seulement si

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.9)$$

pour tout point  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ . Cela revient à dire que  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  annihile tout vecteur normal  $\alpha\mathbf{n}(\mathbf{x})$  avec  $\alpha \in \mathbb{R}$  ou que tout vecteur normal  $\alpha\mathbf{n}(\mathbf{x})$  appartient à l'espace noyau de  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ . Pour un champ tensoriel quelconque  $\mathbf{H}(\mathbf{x})$  du second ordre défini sur  $\mathcal{E}$ , le champ  $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x})$  est superficiel, car  $\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ . De plus, un champ tensoriel  $\mathbf{T}$  défini sur  $\mathcal{E}$  est superficiel si et seulement si

$$\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}(\mathbf{x}). \quad (1.10)$$

pour tout point  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ . Pour avoir une idée précise sur la forme matricielle d'un champ superficiel  $\mathbf{T}$ , considérons le cas spécial où  $\mathcal{E}$  est une surface plane dont le vecteur normal  $\mathbf{n}$  coïncide avec le vecteur  $\mathbf{e}_3$  d'une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ . Relative à cette dernière, la matrice de  $\mathbf{T}$  a la forme

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

Un champ superficiel  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  défini sur  $\mathcal{E}$  est dit *tangentiel* si et seulement si  $[\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{a}] \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$  pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  et tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ , à savoir

$$\mathbf{T}^T(\mathbf{x})\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.12)$$

Il est immédiat que tout champ tensoriel superficiel symétrique est nécessairement tangen-

tiel. Ensuite, un champ superficiel est qualifié de normal si et seulement si  $\mathbf{P}(\mathbf{x})[\mathbf{T}(\mathbf{x})\mathbf{a}] = \mathbf{0}$  pour tout  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$  et tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ , i.e.

$$\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (1.13)$$

Reprenons l'exemple d'une surface plane de normale  $\mathbf{e}_3$ . Dans ce cas, un champ superficiel tangentiel  $\mathbf{T}$  prend la forme

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & 0 \\ T_{21} & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

alors qu'un champ superficiel normal  $\mathbf{T}$  a la matrice

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.15)$$

De façon générale, tout tenseur superficiel  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$  peut être décomposé de façon unique en une partie tangentiel et une partie normale comme suit

$$\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{T} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{T}^T \mathbf{n}). \quad (1.16)$$

En effet, utilisant la définition du projecteur tangent  $\mathbf{P}$ , nous pouvons écrire

$$\mathbf{T} = (\mathbf{P} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{T} + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n})\mathbf{T} = \mathbf{P}\mathbf{T} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{T}^T \mathbf{n}).$$

## 1.2 Opérateurs différentiels sur une courbe plane et sur une surface

### 1.2.1 Gradients tangentiel et normal

Soit  $\Psi$  une fonction de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^k$  ou  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ . Cette fonction est supposée suffisamment régulière. La (première) variation de  $\Psi$  en  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^k$  due à un incrément  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^k$

attribué à  $\mathbf{x}$  est définie par [95]

$$\delta\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\tau}\Psi(\mathbf{x} + \tau\mathbf{v}) \Big|_{\tau=0}. \quad (1.17)$$

Si la fonction est au moins une fois continûment différentiable, nous pouvons alors écrire

$$\delta\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (1.18)$$

où  $\nabla\Psi$  désigne le gradient habituel de  $\Psi$ .

Ensuite, nous considérons une variété  $\mathcal{E}$  de dimension  $k - 1$  dans l'espace ambiant  $\mathbb{R}^k$ . Quand  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  et quand la variation  $\mathbf{v} \in \mathcal{T}_{\mathbf{x}}$ , nous avons  $\mathbf{v} = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{v}$ . Dans ce cas,

$$\delta\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot [\mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{v}] = \nabla_{\mathcal{E}}\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \quad (1.19)$$

où  $\nabla_{\mathcal{E}}\Psi$  est la dérivée tangentielle de  $\Psi$  définie par

$$\nabla_{\mathcal{E}}\Psi(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (1.20)$$

Le gradient  $\nabla_{\mathcal{E}}\Psi$  est également dite surfacique ou courbe suivant que  $\mathcal{E}$  est une surface ou une courbe. Il est clair que  $\nabla_{\mathcal{E}}\Psi$  est un champ superficiel. De façon complémentaire, si  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  et si la variation  $\mathbf{v}$  appartient la droite normale à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$ , nous pouvons écrire  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$  et

$$\delta\Psi_{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \nabla_n\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} \quad (1.21)$$

où  $\nabla_n\Psi$  est la dérivée normale de  $\Psi$  donnée par

$$\nabla_n\Psi(\mathbf{x}) = \nabla\Psi(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}^{\perp}(\mathbf{x}). \quad (1.22)$$

Le gradient  $\nabla\Psi$  se décompose uniquement comme suit :

$$\nabla\Psi = \nabla_{\mathcal{E}}\Psi(\mathbf{x}) + \nabla_n\Psi. \quad (1.23)$$

Suivant que  $\Psi$  représente une fonction scalaire  $f$ , une fonction vectorielle  $\mathbf{f}$  ou une fonction

$\mathbf{T}$  du second ordre, la décomposition précédente prend les formes respective :

$$\nabla f = \nabla f \cdot \mathbf{P} + \nabla f \cdot \mathbf{P}^\perp = \nabla_\mathcal{E} f + \nabla_n f, \quad (1.24)$$

$$\nabla \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{P} + \nabla \mathbf{f} \cdot \mathbf{P}^\perp = \nabla_\mathcal{E} \mathbf{f} + \nabla_n \mathbf{f}, \quad (1.25)$$

$$\nabla \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} \cdot \mathbf{P} + \nabla \mathbf{T} \cdot \mathbf{P}^\perp = \nabla_\mathcal{E} \mathbf{T} + \nabla_n \mathbf{T}. \quad (1.26)$$

## 1.2.2 Divergences tangentielle et normale

Les divergences tangentielle et normale d'un champ vectoriel  $\mathbf{f}$  ou un champ tensoriel  $\mathbf{T}$  du second ordre défini sur une variété (surface ou courbe plane)  $\mathcal{E}$  sont également importantes pour nos études. D'abord, notons que la divergence de  $\mathbf{f}$  et celle de  $\mathbf{T}$  admettent les décompositions suivantes :

$$\operatorname{div} \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} : \mathbf{I} = \nabla \mathbf{f} : \mathbf{P} + \nabla \mathbf{f} : \mathbf{P}^\perp = \operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{f} + \operatorname{div}_n \mathbf{f},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \mathbf{I} = \nabla \mathbf{T} : \mathbf{P} + \nabla \mathbf{T} : \mathbf{P}^\perp = \operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{T} + \operatorname{div}_n \mathbf{T}. \quad (1.27)$$

Ci-dessus,  $\operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{f}$  et  $\operatorname{div}_n \mathbf{f}$  représentent les divergences tangentielle et normale de  $\mathbf{f}$  ;  $\operatorname{div} \mathbf{T}$  et  $\operatorname{div}_n \mathbf{T}$  désignent les divergences tangentielle et normale de  $\mathbf{T}$ . Précisément, elles sont définies par

$$\operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} : \mathbf{P}, \quad \operatorname{div}_n \mathbf{f} = \nabla \mathbf{f} : \mathbf{P}^\perp, \quad (1.28)$$

$$\operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \mathbf{P}, \quad \operatorname{div}_n \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \mathbf{P}^\perp. \quad (1.29)$$

C

Soit un champ vectoriel  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  défini sur  $\mathcal{E}$ , l'opérateur divergence tangential (courbe ou surfacique) est défini par :

$$\operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{tr} \nabla_\mathcal{E} \mathbf{f}(\mathbf{x}). \quad (1.30)$$

et l'opérateur divergence se décompose

$$\operatorname{div} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_\mathcal{E} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \operatorname{div}_n \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (1.31)$$

avec  $\operatorname{div}_n \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbf{P}^\perp$ .

De la même façon, pour un champ tensoriel  $\mathbf{T}(\mathbf{x})$ , il vient :

$$\operatorname{div} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) + \operatorname{div}_{\mathbf{n}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) \quad (1.32)$$

avec  $\operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}) : \mathbf{P}(\mathbf{x})$  et  $\operatorname{div}_{\mathbf{n}} \mathbf{T}(\mathbf{x}) = \nabla \mathbf{T}(\mathbf{x}) : \mathbf{P}^{\perp}(\mathbf{x})$ .

### 1.2.3 Dérivées tangentielles des fonctions composées et théorème de divergence

Dans la suite, nous serons souvent amenés à calculer les dérivées tangentielles des fonctions. Soient  $\varphi$  un champ scalaire,  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  deux champs vectoriels et  $\mathbf{T}$  un champ tensoriel définis sur une variété  $\mathcal{E}$  dans  $\mathbb{R}^k$ . En partant des définitions précédentes des dérivées tangentielles et en faisant appel aux notations indicielles, nous pouvons sans difficulté établir les formules suivantes [37] et [77] :

$$\nabla_{\mathcal{E}}(\varphi \mathbf{f}) = \varphi \nabla_{\mathcal{E}} \mathbf{f} + \mathbf{f} \otimes \nabla_{\mathcal{E}} \varphi, \quad (1.33)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{E}}(\varphi \mathbf{f}) = \varphi \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \nabla_{\mathcal{E}} \varphi, \quad (1.34)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{E}}(\varphi \mathbf{T}) = \varphi \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{T} + \mathbf{T} \nabla_{\mathcal{E}} \varphi, \quad (1.35)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{E}}(\mathbf{f} \otimes \mathbf{g}) = (\operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{f}) \mathbf{g} + (\nabla_{\mathcal{E}} \mathbf{f}) \mathbf{P} \mathbf{g}, \quad (1.36)$$

$$\operatorname{div}_{\mathcal{E}}(\mathbf{T}^T \mathbf{f}) = \mathbf{f} \cdot \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{T} + \mathbf{T} : \nabla_{\mathcal{E}} \mathbf{f}. \quad (1.37)$$

Soit  $\mathbf{q}$  un champ vectoriel défini sur  $\mathcal{E}$  qui est tangentiel au sens que  $\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = 0$  pour tout  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  et soit un champ tensoriel superficiel tangentiel  $\mathbf{T}$  défini sur  $\mathcal{E}$ . Pour appliquer le théorème de convergence à  $\mathbf{q}$  et à  $\mathbf{T}$ , nous considérons un sous-domaine quelconque  $\Sigma \subseteq \mathcal{E}$  dont la frontière est désignée par  $\partial\Sigma$ . Dénotant par  $\boldsymbol{\nu}(\mathbf{x})$  le vecteur unitaire tangent à  $\Sigma$  mais normal à  $\partial\Sigma$  en  $\mathbf{x} \in \partial\Sigma$ , alors le théorème de divergence appliqué à  $\mathbf{q}$  et à  $\mathbf{T}$  s'écrit

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\nu} d\ell = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{q} dS, \quad (1.38)$$

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{T} \boldsymbol{\nu} d\ell = \int_{\Sigma} \operatorname{div}_{\mathcal{E}} \mathbf{T} dS. \quad (1.39)$$

Si  $\Sigma$  est une surface, le membre gauche de chacune de ces expressions est une intégrale curviligne et son membre droit est une intégrale surfacique. Si  $\Sigma$  est une courbe plane,

le membre gauche de chacune de ces expressions est une intégrale définie avec les deux extrémités de  $\Sigma$  comme les bornes inférieure et supérieure alors que son membre droit est une intégrale curviligne. En particulier, le membre gauche de chacune de ces expressions précédentes est égal à zéro quand  $\Sigma$  est une courbe plane ou surface fermée.

## 1.3 Tenseur de Weingarten et courbures

### 1.3.1 Variation du vecteur normal unitaire

Les principales propriétés locales essentielles d'une courbe plane ou d'une surface  $\mathcal{E}$  se découlent naturellement de l'étude de la variation du vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  de  $\mathcal{E}$  engendrée par un incrément tangentiel  $\delta\mathbf{x}$  d'un point  $\mathbf{x}$  de  $\mathcal{E}$ . Pour déterminer cette variation, nous calculons d'abord le gradient de  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ . En utilisant (1.2) et (1.5), il vient que

$$\nabla\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|} - \frac{(\nabla g(\mathbf{x}) \otimes \nabla g(\mathbf{x})) \nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|^3} = \mathbf{P} \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}. \quad (1.40)$$

Sous l'hypothèse que  $g$  est  $\mathcal{C}^2$ , le Hessien  $\nabla^2 g$  de  $g$  est symétrique. Calculons maintenant la variation de  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  en  $\mathbf{x}$  produite par un incrément tangentiel  $\delta\mathbf{x} \in \mathcal{T}_x$  :

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = \nabla\mathbf{n}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x} = \mathbf{P} \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|} \delta\mathbf{x} = \mathbf{P} \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|} \mathbf{P}\delta\mathbf{x} \quad (1.41)$$

où nous avons utilisé le fait que  $\mathbf{P}\delta\mathbf{x} = \delta\mathbf{x}$ . Définissant le tenseur de Weingarten  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  par (voir, par exemple, He et al. [49] et [51])

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = -\mathbf{P} \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|} \mathbf{P}, \quad (1.42)$$

la variation  $\delta\mathbf{n}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x})$  s'exprime simplement par

$$\delta\mathbf{n}(\mathbf{x}, \delta\mathbf{x}) = -\mathbf{L}(\mathbf{x})\delta\mathbf{x}. \quad (1.43)$$

En fait, à un signe près, le tenseur de Weingarten  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  correspond au gradient tangentiel de  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , i.e.

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathcal{E}}\mathbf{n}(\mathbf{x}). \quad (1.44)$$

La définition explicite et compacte du tenseur de Weingarten  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  indique clairement que :  
(i) il est symétrique ; (ii) il est un champ superficiel tangentiel. A l'aide de l'expression de  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ , nous pouvons montrer les formules suivantes :

$$\nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{L} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{L}, \quad (1.45a)$$

$$\nabla \mathbf{P} : \mathbf{P} = \mathbf{n} \operatorname{tr} \mathbf{L}, \quad (1.45b)$$

$$\nabla \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{L}^2 + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{L} \cdot \mathbf{P}, \quad (1.45c)$$

$$\nabla \mathbf{L} : \mathbf{P} = \mathbf{n} \operatorname{tr} \mathbf{L}^2 + \mathbf{P} \cdot \nabla \mathbf{L} : \mathbf{P}, \quad (1.45d)$$

où le produit tensoriel  $\mathbf{L} \otimes \mathbf{n}$  est défini par  $(\mathbf{L} \otimes \mathbf{n})_{ijk} = L_{ik}n_j$ .

### 1.3.2 Courbure d'une courbe plane

S'agissant d'une courbe plane  $\mathcal{E}$ , le tenseur de Weingarten  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  de cette dernière est un tenseur de rang 1. La courbure  $\kappa(\mathbf{x})$  de  $\mathcal{E}$  se calcule par [93] :

$$\kappa(\mathbf{x}) = \operatorname{Tr}[\mathbf{L}(\mathbf{x})] = \frac{\nabla^2 g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|} : \mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (1.46)$$

En réalité,  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  admet la représentation simple :

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \kappa(\mathbf{x})\mathbf{P}(\mathbf{x}). \quad (1.47)$$

### 1.3.3 Courbures d'une surface

Pour une surface  $\mathcal{E}$ , nous définissons la courbure moyenne  $\hat{\kappa}$  et la courbure de Gauss  $\hat{K}$  via son tenseur de Weingarten :

$$\hat{\kappa}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\mathbf{L}(\mathbf{x})); \quad [\mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{a}] \times [\mathbf{L}(\mathbf{x})\mathbf{b}] = \hat{K}(\mathbf{x})(\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{T}_x. \quad (1.48)$$

Les valeurs propres  $\hat{c}_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2$ ) de  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ , appelées courbures principales de  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x}$ , sont reliées à  $\hat{\kappa}(\mathbf{x})$  et  $\hat{K}(\mathbf{x})$  par [95] et [49] :

$$\hat{c}_1(\mathbf{x}) = \hat{\kappa}(\mathbf{x}) - \sqrt{\hat{\kappa}^2(\mathbf{x}) - \hat{K}(\mathbf{x})}, \quad \hat{c}_2(\mathbf{x}) = \hat{\kappa}(\mathbf{x}) + \sqrt{\hat{\kappa}^2(\mathbf{x}) - \hat{K}(\mathbf{x})} \quad (1.49)$$

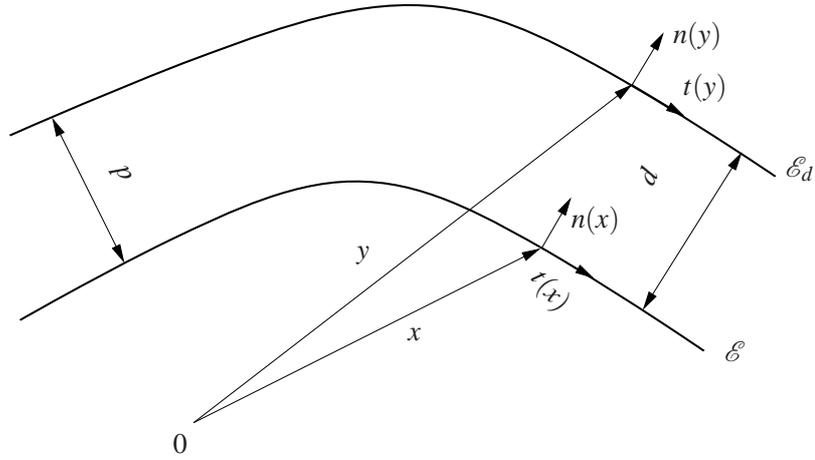


FIG. 1-2 – Courbes parallèles

Les rayons de courbure principaux  $\hat{r}_i(\mathbf{x}) = 1/\hat{c}_i(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2$ ) sont quelquefois utilisés à la place des courbures principales  $\hat{c}_i(\mathbf{x})$ .

## 1.4 Courbes et surfaces parallèles

A partir d'une courbe plane ou une surface  $\mathcal{E}$  donnée par (1.1), nous pouvons construire une courbe plane ou une surface  $\mathcal{E}_d$  par

$$\mathcal{E}_d = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k \mid \mathbf{y} = \mathbf{x} + d\mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathcal{E}\} \quad (1.50)$$

où  $d$  est une constante scalaire. La courbe plane ou surface  $\mathcal{E}_d$  est parallèle à  $\mathcal{E}$  et sa distance orientée à  $\mathcal{E}$  est égale à  $d$  (FIG 1-2). Les propriétés locales de  $\mathcal{E}_d$  sont déterminées par celles de  $\mathcal{E}$  et la distance  $d$ . En effet, le vecteur unitaire  $\mathbf{n}(\mathbf{y})$  normal à  $\mathcal{E}_d$  en  $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_d$  colinéaire au vecteur unitaire  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  normal à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$  si

$$1 - d\hat{c}_i(\mathbf{x}) \neq 0 \quad (i \neq 1, 2). \quad (1.51)$$

Pour voir ceci, nous partons de la définition (1.50) et calculons la variation de  $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_d$  due à un incrément  $\delta \mathbf{x} \in \mathcal{T}_x$  :

$$\delta \mathbf{y} = \delta \mathbf{x} + d\delta \mathbf{n}(\mathbf{x}, \delta \mathbf{x}) = \delta \mathbf{x} - d\mathbf{L}(\mathbf{x})\delta \mathbf{x} = [\mathbf{P}(\mathbf{x}) - d\mathbf{L}(\mathbf{x})]\delta \mathbf{x}. \quad (1.52)$$

Comme  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  est un champ superficiel, il s'ensuit de l'équation précédente que le vecteur  $\delta \mathbf{y}$  tangent à  $\mathcal{E}_d$  en  $\mathbf{y} \in \mathcal{E}_d$  est parallèle au vecteur  $\delta \mathbf{x}$  à  $\mathcal{E}$  en  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$ . De plus, si la condition (1.51) est vérifiée, il existe une correspondance univoque entre  $\delta \mathbf{y}$  et  $\delta \mathbf{x}$ . Donc, sous la condition (1.51), nous pouvons écrire

$$\mathbf{n}(\mathbf{y}) = \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad (1.53)$$

où  $\mathbf{y} = \mathbf{x} + d\mathbf{n}(\mathbf{x})$ .

Une implication importante de l'égalité (1.53) est que

$$\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \quad (1.54)$$

Pour prouver cette relation, nous notons d'abord que  $\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  est la dérivée directionnelle de  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  dans la direction  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ , i.e.

$$\nabla \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}[\mathbf{x} + d\mathbf{n}(\mathbf{x})] - \mathbf{n}(\mathbf{x})}{d}.$$

Ensuite, l'introduction de l'égalité (1.53) dans le membre droit de cette équation donne immédiatement la relation (1.54). Cette dernière signifie que la dérivée directionnelle normale du champ vecteur normal unitaire défini dans un domaine feuilleté composé de courbes ou surfaces parallèles est nulle. Ce fait sera exploité de façon récurrente dans nos études ultérieures des interphases. À l'aide de (1.53), (1.54) et l'expression (1.42) du tenseur, nous pouvons obtenir les formules suivantes :

$$\mathbf{P}(\mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad (1.55)$$

$$\nabla \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad (1.56)$$

$$\nabla \mathbf{L}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}^2. \quad (1.57)$$

Nous nous proposons maintenant d'établir l'expression du tenseur de Weingarten  $\mathbf{L}(\mathbf{y})$

de  $\mathcal{E}_d$  en  $\mathbf{y}$  en fonction de  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$  et  $d$ . Par définition, nous avons

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{n}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{P}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{L}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{P}(\mathbf{y}).$$

En vertu de (1.53), (1.55) et (1.50), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{x}) &= -\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\mathbf{P}(\mathbf{y}) = -\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot\frac{\partial\mathbf{y}}{\partial\mathbf{x}}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{y}) \\ &= -\nabla_{\mathbf{y}}\mathbf{n}(\mathbf{y})\cdot[\mathbf{I} + d\nabla_{\mathbf{x}}\mathbf{n}(\mathbf{x})]\cdot\mathbf{P}(\mathbf{y}) \\ &= \mathbf{L}(\mathbf{y}) - d\mathbf{L}(\mathbf{y})\mathbf{L}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Soit finalement

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{L}(\mathbf{y})[\mathbf{P}(\mathbf{x}) - d\mathbf{L}(\mathbf{x})]. \quad (1.58)$$

Si la condition (1.51) est vérifiée, le tenseur  $\mathbf{P}(\mathbf{x}) - d\mathbf{L}(\mathbf{x})$  est une transformation inversible de  $\mathcal{T}_x$  dans  $\mathcal{T}_x$ , ce qui nous permet d'exprimer

$$\mathbf{L}(\mathbf{y}) = [\mathbf{P}(\mathbf{x}) - d\mathbf{L}(\mathbf{x})]^{-1}\mathbf{L}(\mathbf{x}). \quad (1.59)$$

Cette relation implique que  $\mathbf{L}(\mathbf{y})$  possède les mêmes directions principales que  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ . Autrement dit, les directions principale de courbure de  $\mathbf{L}(\mathbf{y})$  sont identiques à celles de  $\mathbf{L}(\mathbf{x})$ .

Quand  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_d$  sont deux courbes planes parallèles, nous déduisons de (1.59) la relation entre les courbures  $\kappa(\mathbf{x})$  et  $\kappa(\mathbf{y})$  :

$$\kappa(\mathbf{y}) = \frac{\kappa(\mathbf{x})}{1 - d\kappa(\mathbf{x})}. \quad (1.60)$$

Quand  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_d$  sont deux surfaces parallèles, il s'ensuit de (1.59) que

$$\widehat{c}_1(\mathbf{y}) = \frac{\widehat{c}_1(\mathbf{x})}{1 - d\widehat{c}_1(\mathbf{x})}, \quad (1.61)$$

$$\widehat{c}_2(\mathbf{y}) = \frac{\widehat{c}_2(\mathbf{x})}{1 - d\widehat{c}_2(\mathbf{x})}, \quad (1.62)$$

qui expriment courbures principales  $\widehat{c}_1(\mathbf{y})$  et  $\widehat{c}_2(\mathbf{y})$  de  $\mathcal{E}_d$  en fonction des courbures principales  $\widehat{c}_1(\mathbf{x})$  et  $\widehat{c}_2(\mathbf{x})$  de  $\mathcal{E}$ .

# Chapitre 2

## Relations de compatibilité d'Hadamard

Dans les études ultérieures des interfaces imparfaites, nous allons fréquemment avoir affaire à des fonctions continues partout mais dérivables seulement presque partout. Un prototype de ces dernières est une fonction continue  $\Psi$  (scalaire, vectorielle ou tensorielle) définie dans un domaine  $\Omega$  de dimension  $k = 3$ , dont la dérivée existe et continue en tout point de  $\Omega$  excepté sur une surface  $\Gamma \subset \Omega$ . L'objet de ce chapitre est de fournir l'expression explicite pour le saut de la dérivée de  $\Psi$  à travers  $\Gamma$  suivant que  $\Psi$  est une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle. Cette expression pour le saut de la dérivée de  $\Psi$  est appelée "relation de compatibilité d'Hadamard" du fait qu'elle a été pour la première fois établie par Hadamard dans son fameux traité "Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique". En mécanique, la meilleure référence sur le sujet est, à notre avis, un article de synthèse écrit par Hill [54] il y a 45 ans. Dans ce chapitre, la présentation des relations de compatibilité d'Hadamard et la façon de les démontrer s'inspirent largement du cours de He [38].

En accord avec le chapitre précédent, la surface  $\Gamma$  séparant  $\Omega$  en deux sous-domaines  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  (FIG2-1) est caractérisée par une fonction scalaire  $g$  définie dans  $\mathbb{R}^3$  :

$$\Gamma = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid g(\mathbf{x}) = 0 \} . \quad (2.1)$$

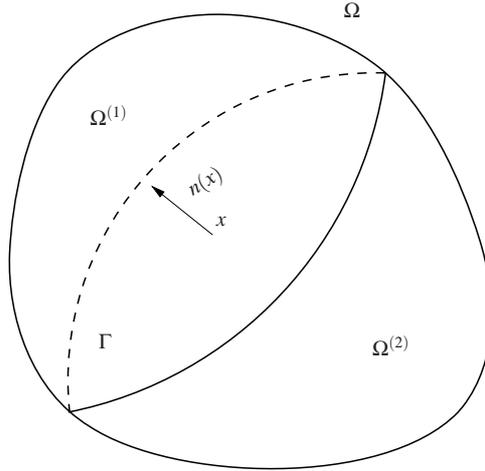


FIG. 2-1 – Relations d’Hadamard

Le vecteur unitaire normal à  $\Gamma$  est déterminé par

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla g(\mathbf{x})}{\|\nabla g(\mathbf{x})\|}. \quad (2.2)$$

## 2.1 Saut de la dérivée d’une fonction scalaire

Soit une fonction scalaire  $\varphi$  définie par

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (2.3)$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.4)$$

où  $\varphi^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) sont deux fonctions scalaires continûment différentiables dans  $\Omega = \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)} \cup \Gamma$ . Considérant deux points voisins  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sur  $\Gamma$ , le développement de Taylor permet d’écrire

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{y}) = \varphi^{(1)}(\mathbf{x}) + \nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + 0(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2), \quad (2.5)$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{y}) = \varphi^{(2)}(\mathbf{x}) + \nabla\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + 0(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2). \quad (2.6)$$

En tenant compte de la condition de continuité (2.4), la différence  $\varphi^{(2)}(\mathbf{y}) - \varphi^{(1)}(\mathbf{y})$  donne

$$[\nabla\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{x})].(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2). \quad (2.7)$$

Divisons les deux membres de cette égalité par  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  et calculons leurs limites lorsque  $\mathbf{y}$  tend vers  $\mathbf{x}$ . Il en résulte que

$$[\nabla\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{x})].\mathbf{t}(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.8)$$

où  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \lim_{\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{x}} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) / \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  est par définition un vecteur unitaire tangent à la surface  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}$ . L'équation (2.8) indique que  $\nabla\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{x})$  est un vecteur normal à la surface  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}$ . Il s'ensuit

$$\nabla\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.9)$$

où  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  est le vecteur normal unitaire de l'interface  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}$  et  $\alpha$  est un scalaire. Quand  $\alpha \neq 0$ , l'équation (2.9) constitue la relation d'Hadamard pour une fonction scalaire qui n'est pas dérivable sur  $\Gamma$ . Nous montrons ainsi que le saut à travers une surface  $\Gamma$  de la dérivée d'une fonction scalaire  $\varphi$  continue partout mais dérivable presque partout est normale à la surface.

Par ailleurs, l'utilisation de la décomposition (1.6) et le fait que la discontinuité du  $\nabla\varphi$  soit portée par le vecteur normal (2.9) à  $\Gamma$  permettent d'écrire

$$\nabla_S\varphi^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla_S\varphi^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.10)$$

Cette équation montre que le gradient de surface  $\nabla_S\varphi(\mathbf{x})$  est cependant continu à travers l'interface  $\Gamma$ .

## 2.2 Saut de la dérivée d'une fonction vectorielle

Nous considérons maintenant une fonction vectorielle  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  définie par

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.12)$$

où  $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x})$  ( $i = 1, 2$ ) sont deux fonctions vectorielles continûment différentiables dans  $\Omega$ .

Appliquons le développement de Taylor aux fonctions  $\mathbf{f}^{(i)}$  :

$$\mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2), \quad (2.13)$$

$$\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{y}) = \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) + \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) + o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2), \quad (2.14)$$

où  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  sont deux points voisins de  $\Gamma$ . En prenant considération (2.12), le calcul de  $\mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{y})$  conduit à

$$\left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = o(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2). \quad (2.15)$$

Divisant les deux membres de cette égalité par  $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$  et calculant leurs limites lorsque  $\mathbf{y}$  tend vers  $\mathbf{x}$ , nous obtenons

$$\left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{m}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.16)$$

où le vecteur  $\mathbf{m}$  est un vecteur unitaire tangent à  $\Gamma$  en  $\mathbf{x}$  comme ayant été défini dans le paragraphe précédent. Il s'ensuit que le plan tangent  $\mathcal{T}_x$  appartient à l'espace de noyau  $\text{Ker} \left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right]$  du tenseur  $\nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x})$ . D'après un théorème bien connu de l'algèbre linéaire, nous savons en même temps que

$$\dim \left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right] = \dim \{ \text{Ker} \left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \} \quad (2.17)$$

$$+ \dim \{ \text{Im} \left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right] \}, \quad (2.18)$$

où  $\text{Im} \left[ \nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) \right]$  désigne l'espace d'image. Ainsi, nous en déduisons que le tenseur  $\nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x})$  est au maximum de rang 1 et a la forme

$$\nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.19)$$

où  $\mathbf{a}$  est un vecteur. Si  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{f}$  n'est pas dérivable sur  $\Gamma$  et (2.19) est la relation d'Hadamard pour une fonction vectorielle.

Il est immédiat que, même lorsque  $\nabla \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) \neq \nabla \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x})$  sur  $\Gamma$ , le gradient de surface

est continu :

$$\nabla_S \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) = \nabla_S \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.20)$$

ce qui implique aussi

$$\operatorname{div}_S \mathbf{f}^{(1)}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_S \mathbf{f}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.21)$$

## 2.3 Saut de la dérivée d'une fonction tensorielle

La démarche suivie pour établir la condition d'Hadamard pour une fonction vectorielle permet d'établir des relations similaires pour une fonction tensorielle d'ordre supérieur. Considérons une fonction tensorielle  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  définie par

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (2.22)$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.23)$$

où  $\mathbf{F}^{(1)}$  et  $\mathbf{F}^{(2)}$  sont deux fonctions tensorielle continûment différentiables dans  $\Omega$ . Alors, nous pouvons montrer que

$$\nabla \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{A}$  est un tensor du même ordre que  $\mathbf{F}$ . Quand  $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{F}$  n'est pas dérivable sur  $\Gamma$  et (2.24) correspond à la relation d'Hadamard pour une fonction tensorielle. De cette relation, nous tirons directement que

$$\nabla_S \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = \nabla_S \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div}_S \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) = \operatorname{div}_S \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (2.26)$$

## 2.4 Sauts des dérivées élevées

Les relations qui viennent d'être établies montrent que la dérivée d'une fonction continue au travers d'une surface  $\Gamma$  peut être discontinu mais son dérivée surfacique est toujours continue. En exploitant ce fait par récurrence, nous pouvons prouver de façon générale

que la dérivée tangentielle (ou surfacique) d'ordre quelconque d'une fonction continue (scalaire, vectorielle ou tensorielle) est continue au travers d'une surface  $\Gamma$ .

Par exemple, considérant la fonction scalaire  $\varphi$  définie par (2.3) et (2.4) où  $\varphi^{(i)}$  sont supposées deux fois continûment différentiables dans  $\Omega$ , nous pouvons alors écrire

$$\nabla_{\mathcal{S}}(\nabla_{\mathcal{S}}\varphi^{(1)}) = \nabla_{\mathcal{S}}(\nabla_{\mathcal{S}}\varphi^{(2)}) \text{ sur } \Gamma, \quad (2.27)$$

ce qui implique encore que

$$\Delta_{\mathcal{S}}\varphi^{(1)} = \Delta_{\mathcal{S}}\varphi^{(2)} \text{ sur } \Gamma \quad (2.28)$$

où  $\Delta_{\mathcal{S}}$  est le laplacien de surface défini par

$$\Delta_{\mathcal{S}}\varphi^{(i)} = \nabla_{\mathcal{S}}(\nabla_{\mathcal{S}}\varphi^{(i)}):**P**. \quad (2.29)$$

# Chapitre 3

## Interfaces parfaites thermique, mécanique et piézoélectrique

Considérons de nouveau une interface  $\Gamma$  séparant deux domaines distincts  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$ . Cette interface est dite parfaite vis-à-vis d'une quantité physique si elle est continue au travers de  $\Gamma$ . Ce chapitre a pour double objectif de définir les interfaces parfaites au sens thermique, mécanique ou piézoélectrique et d'appliquer les relations d'Hadamard à ces trois phénomènes.

D'un point de vue mécanique, si le vecteur déplacement et le vecteur contrainte sont continus au travers d'une interface, celle-ci sera dite parfaite. En se basant sur cette définition, les conditions d'Hadamard établies au chapitre précédent permettent d'établir les conditions de continuité des dérivées de la grandeur observée.

### 3.1 Interface thermique parfaite

Par définition, l'interface  $\Gamma$  entre  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  est une interface thermique parfaite si le champ de température  $\theta$  et la composante normale du champ de flux de chaleur  $\mathbf{q}$  dans  $\Omega$  sont continus au travers de  $\Gamma$ . Plus précisément, nous définissons  $\theta$  et  $\mathbf{q}$  par

$$\theta(\mathbf{x}) = \begin{cases} \theta^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \theta^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (3.2)$$

avec

$$\theta(\mathbf{x}) = \theta^{(1)}(\mathbf{x}) = \theta^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.3)$$

$$q_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = q_{\mathbf{n}}^{(1)}(\mathbf{x}) = q_{\mathbf{n}}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.4)$$

où  $q_{\mathbf{n}} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  et  $q_{\mathbf{n}}^{(i)}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ .

Supposons que  $\theta^{(i)}$  défini dans  $\Omega^{(i)}$  est dérivable. Alors, la relation d'Hadamard (2.9) implique

$$\nabla\theta^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla\theta^{(1)}(\mathbf{x}) = \alpha\mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.5)$$

En vertu de la relation (2.10), nous écrivons

$$\nabla_S\theta^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla_S\theta^{(1)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.6)$$

Les deux relations précédentes montrent qu'au travers d'une interface parfaite  $\Gamma$ , le gradient de température est généralement discontinu mais sa partie tangentielle est continue. Les mêmes résultats peuvent être obtenus pour le flux normal de chaleur. Pour voir que les relations (3.4) et (3.6) sont complémentaires, nous les exprimons à l'aide des opérateurs de projection  $\mathbf{P}^\perp$  et  $\mathbf{P}$  :

$$\mathbf{P}^\perp(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}^{(2)}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^\perp(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{q}^{(1)}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\theta^{(2)}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}) \cdot \nabla\theta^{(1)}(\mathbf{x}),$$

où  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Par analogie, nous pouvons définir et traiter les interfaces parfaites pour les autres phénomènes de transport tels que la conduction électrique et la diffusion.

## 3.2 Interface mécanique parfaite

L'interface  $\Gamma$  séparant  $\Omega$  en  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  est une interface mécanique parfaite si le champ de déplacement  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  est continu au travers de  $\Gamma$  et si le champ de contrainte  $\sigma(\mathbf{x})$  est tel que le vecteur de contrainte  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})$  est continu au travers de  $\Gamma$ . Nous

précisons  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  et  $\sigma(\mathbf{x})$  par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (3.7)$$

$$\sigma(\mathbf{x}) = \begin{cases} \sigma^{(1)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(1)} \\ \sigma^{(2)}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^{(2)} \end{cases}, \quad (3.8)$$

avec

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_n^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{t}_n^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{t}_n^{(i)} = \sigma^{(i)} \cdot \mathbf{n}$ .

L'utilisation de la relation d'Hadamard (2.19) conduit directement aux égalités suivantes :

$$\nabla \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_u(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.11)$$

$$\nabla \mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{x}) - \nabla \mathbf{t}^{(1)}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_t(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.12)$$

Avec (2.20), nous avons aussi

$$\nabla_S \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \nabla_S \mathbf{u}^{(2)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.13)$$

Le même résultat peut être obtenu pour le champ de vecteur contrainte  $\mathbf{t}^{(2)}(\mathbf{x})$ .

Introduisant le tenseur de déformation infinitésimale

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}^{(i)} + (\nabla \mathbf{u}^{(i)})^T],$$

nous déduisons aisément de (3.11) que

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\mathbf{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}[\mathbf{a}_u(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{n}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}(\mathbf{x}) \otimes \mathbf{a}_u(\mathbf{x})] \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (3.14)$$

Cette relation a la conséquence que

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S^{(2)}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varepsilon}_S^{(1)}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (3.15)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}_S^{(i)}$  est le tenseur de déformation surfacique (ou tangentielle) défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}_S^{(i)}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \cdot \boldsymbol{P}. \quad (3.16)$$

La relation (3.14) ou (3.15) formule le fait bien connu en mécanique : au travers d'une interface parfaite  $\Gamma$ , les composantes tangentielles du tenseur de déformation sont continues alors que ses composantes normales sont discontinues.

Il convient d'introduire deux opérateur de projection d'ordre 4, i.e.

$$\mathbb{P} = \boldsymbol{P} \overline{\otimes} \boldsymbol{P}, \quad \mathbb{P}^\perp = \boldsymbol{I} \overline{\otimes} \boldsymbol{I} - \mathbb{P}, \quad (3.17)$$

où le produit tensoriel  $\overline{\otimes}$  est défini par  $(\boldsymbol{A} \overline{\otimes} \boldsymbol{B})_{ijkl} = (A_{ik}B_{jl} + A_{il}B_{jk})/2$  pour deux tenseurs  $\boldsymbol{A}$  et  $\boldsymbol{B}$  du second ordre. Alors, les relations (3.10) et (3.15) s'écrivent

$$\mathbb{P}^\perp(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}^\perp(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad (3.18)$$

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{P}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad (3.19)$$

où  $\boldsymbol{x} \in \Gamma$ . Dans le cas spécial où  $\Gamma$  est une interface plane dont le vecteur normal  $\boldsymbol{n}$  coïncide avec le vecteur  $\boldsymbol{e}_3$  d'une base orthonormée  $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ , les relations (3.10) et (3.14) peuvent s'exprimer symboliquement sous les formes :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ * & * & * \end{bmatrix}, \quad (3.20)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{\sigma}^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.21)$$

où le symbole "\*" désigne une valeur non nulle. Nous voyons que les composantes de déformation dans le plan  $\Gamma$  sont continues alors que les composantes de contraintes normales au plan  $\Gamma$  sont continues. Donc, nous pouvons dire que les relations (3.10) et (3.14) sont complémentaires et duales.

### 3.3 Interface piézoélectrique parfaite

La piézoélectricité est un phénomène couplé. L'interface  $\Gamma$  séparant  $\Omega$  en  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$  est une interface parfaite piézoélectrique si elle l'est pour la conduction électrique et si elle l'est aussi sur le plan mécanique. Comme la conduction électrique est physiquement similaire et mathématiquement identique à la conduction thermique, les définitions et les formules présentées dans les deux sections précédentes doivent être réunies pour une interface parfaite piézoélectrique à condition de remplacer la température  $\theta$  et le flux de chaleur  $\mathbf{q}$  respectivement par le potentiel électrique  $\varphi$  et le déplacement électrique  $\mathbf{d}$ . Afin d'éviter la redondance, nous ne les répétons pas ici.

## Deuxième partie

# Modélisation des interfaces imparfaites

# Chapitre 4

## Interfaces imparfaites thermiques

Quand deux solides sont en contact ou collés ensemble, une zone de transition mince existe entre eux. Elle a des propriétés mécaniques et physiques très différentes de celles des solides et se comportent comme une interphase. En particulier, elle perturbe la conduction thermique et donne naissance souvent à une résistance thermique. Le travail présenté dans ce chapitre consiste à remplacer la zone de transition d'une certaine épaisseur  $h$  (en général très petite par rapport aux dimensions des solides) par une interface imparfaite à épaisseur nulle. La modélisation d'une interphase comme une interface imparfaite a été d'abord initiée par Sanchez-Palencia [84] et Pham Huy and Sanchez-Palencia [81] utilisant une approche asymptotique dans ce cas de conduction thermique. Cette approche a été ensuite étendue par Klarbring [62] au contexte de l'élasticité linéaire. L'approche que nous élaborons dans la suite pour modéliser une interphase comme une interface imparfaite s'inspire de celle proposée par Bövik [16], Hashin ([46], [47]), Benveniste ([9], [10], [11]). Notre approche a l'avantage d'être indépendante de tout système de coordonnées. En particulier, elle ne fait pas appel aux coordonnées curvilignes principales.

Ce chapitre se divise en quatre sections. D'abord, nous décrivons l'idée de base permettant le remplacement d'une interphase par une interface. Ensuite, nous dérivons un modèle générique d'interface imparfaite dont le degré d'approximation correspond à  $0(h^2)$  au sens du développement de Taylor. Dans un troisième temps, nous établissons un modèle générique d'interface imparfaite dont le degré de précision est de  $0(h^{(N+1)})$  avec  $N \geq 2$ . Enfin, nous examinons le cas d'une interphase constituée d'un matériau hétérogène suivant son épaisseur.

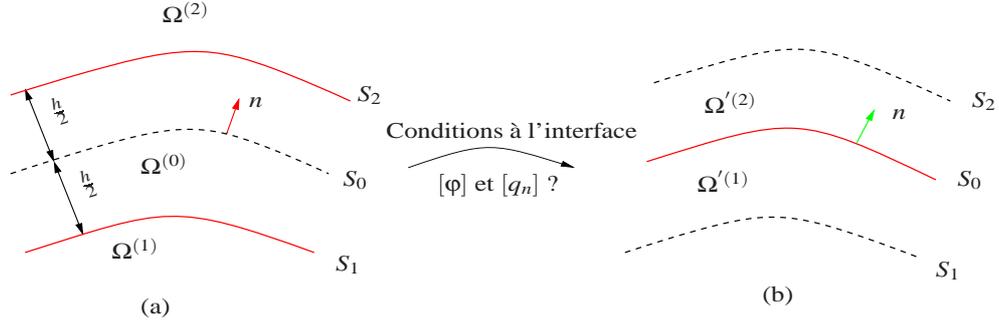


FIG. 4-1 – Remplacement d’une interphase par une interface imparfaite : (a) Milieu 1/Interphase 0/Milieu 2 ; (b) Milieu 1/Interface Imparfaite/Milieu 2.

## 4.1 Schéma de modélisation et équations de base

Dans la FIG. 4-1(a), une interphase d’épaisseur uniforme  $h$ , appelée la phase 0, se trouve entre deux matériaux, nommés par les phases 1 et 2. La phase 0 est parfaitement collée aux phases 1 et 2 à travers les surfaces  $S_1$  et  $S_2$ . Pour la conduction thermique, le fait que les interfaces  $S_1$  et  $S_2$  sont parfaites implique que la composante normale  $q_n$  du flux de chaleur et la température  $\varphi$  sont continues à travers  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\varphi^{(0)}|_{S_1} = \varphi^{(1)}|_{S_1}, \quad \varphi^{(0)}|_{S_2} = \varphi^{(2)}|_{S_2}, \quad (4.1a)$$

$$q_n^{(0)}|_{S_1} = q_n^{(1)}|_{S_1}, \quad q_n^{(0)}|_{S_2} = q_n^{(2)}|_{S_2}. \quad (4.1b)$$

Les trois phases 0, 1 et 2 sont supposées individuellement homogènes et linéaires. La loi de Fourier pour la conduction thermique dans les trois phases s’écrit alors

$$\mathbf{q}^{(i)} = \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{h}^{(i)} \quad (4.2)$$

où  $\mathbf{K}^{(i)}$  est le tenseur de conductivité de la phase  $i$  ( $= 0, 1, 2$ ) qui est symétrique et définie positive,  $\mathbf{q}^{(i)}$  correspond au vecteur flux de chaleur de la phase  $i$  et  $\mathbf{h}^{(i)}$  est le négatif du gradient de la température  $\varphi^{(i)}$  de la phase  $i$ , i.e.

$$\mathbf{h}^{(i)} = -\nabla\varphi^{(i)}. \quad (4.3)$$

En régime stationnaire, la conservation de l'énergie en absence de source de chaleur se traduit par

$$\operatorname{div} \mathbf{q}^{(i)} = 0. \quad (4.4)$$

Dans la configuration de la FIG. 4-1(b) où l'interphase a été éliminée, la phase  $i$  ( $= 1$  et  $2$ ) est prolongée de la surface  $S_i$  jusqu'à la surface  $S_0$  qui est géométriquement la surface médiane de l'interphase et où est localisée l'interface imparfaite. Les propriétés de cette dernière restent à déterminer et doivent être telles que les sauts de la composante normale  $q_n$  du flux de chaleur et de la température  $\varphi$  à travers l'interphase dans la configuration (a) sont, à une erreur fixée près, identiques aux sauts de  $q_n$  et  $\varphi$  à travers la zone limitée par les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  dans la configuration (b).

## 4.2 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$

### 4.2.1 Dérivation du modèle

Dans cette section, nous construisons un modèle d'interface imparfaite thermique en demandant que les développements de Taylor utilisés ne dépassent pas l'ordre  $0(h^2)$ . Le modèle d'interface ainsi obtenu sera qualifié d'ordre  $0(h^2)$ .

Dans la FIG. 4-1(a), la température  $\varphi^{(0)}$  évaluée sur la surface milieu  $S_0$  peut s'exprimer en fonction de la température  $\varphi^{(0)}$  et de ses dérivées évaluées sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  par le développement de Taylor :

$$\varphi^{(0)}|_{S_0} = \varphi^{(0)}|_{S_1} + \frac{h}{2} \nabla \varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_1} + 0(h^2), \quad (4.5a)$$

$$\varphi^{(0)}|_{S_0} = \varphi^{(0)}|_{S_2} - \frac{h}{2} \nabla \varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} + 0(h^2). \quad (4.5b)$$

En soustrayant l'équation (4.5b) à (4.5a), nous aboutissons à

$$\varphi^{(0)}|_{S_2} - \varphi^{(0)}|_{S_1} = \frac{h}{2} (\nabla \varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_1} + \nabla \varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_2}) + 0(h^2). \quad (4.6)$$

En tenant compte des conditions de continuité (4.1a), nous obtenons

$$\varphi^{(0)}|_{S_2} - \varphi^{(0)}|_{S_1} = \varphi^{(2)}|_{S_2} - \varphi^{(1)}|_{S_1}. \quad (4.7)$$

Ainsi, nous en déduisons que

$$\varphi^{(2)}|_{S_2} - \varphi^{(1)}|_{S_1} = \frac{h}{2}(\nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_1} + \nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_2}) + 0(h^2). \quad (4.8)$$

Cette équation fournit le saut du champ de température à travers l'interphase  $\Omega^{(0)}$  dans la configuration de FIG. 4-1(a).

Rappelons que notre objectif est de remplacer l'interphase par une interface imparfaite appropriée. Ceci implique l'élimination de phase 0 dans la configuration finale décrite par la FIG. 4-1(b). Donc, les dérivées normales  $\nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_1}$  et  $\nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_2}$  dans (4.8) doivent être exprimées en fonction de certaines quantités définies dans les phases 1 et 2. Pour réaliser ceci, comme la dérivée normale  $\nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}$  n'est pas continue à travers  $S_i$ , il est nécessaire de l'exprimer au préalable en terme de certaines quantités continues à travers  $S_i$ . Dans la section suivante, nous montrons que la dérivée du champ de température  $\nabla_n\varphi$  dans la direction normale à une surface quelconque est une fonction linéaire du flux normal de chaleur  $q_n$  et de la dérivée tangentielle du champ de température  $\nabla_s\varphi$  :

$$\nabla_n\varphi = \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = P_1(\nabla_s\varphi, q_n; \mathbf{K}) \quad (4.9)$$

où la fonction  $P_1$  est définie par

$$P_1(\nabla_s\varphi, q_n; \mathbf{K}) = -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s\varphi \quad (4.10)$$

avec le tenseur de conductivité  $\mathbf{K}$  comme un paramètre,  $\nabla_s\varphi = \mathbf{P} \cdot \nabla\varphi$  et

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}}. \quad (4.11)$$

Remarquons que  $q_n$  et  $\nabla_s\varphi$  sont deux quantités continues à travers une interface parfaite quelconque. A l'aide de la formule (4.9), nous pouvons donc écrire

$$\begin{aligned} \nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_1} &= P_1(\nabla_s\varphi^{(0)}, q_n^{(0)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} = P_1(\nabla_s\varphi^{(1)}, q_n^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} \\ \nabla\varphi^{(0)} \cdot \mathbf{n}|_{S_2} &= P_1(\nabla_s\varphi^{(0)}, q_n^{(0)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} = P_1(\nabla_s\varphi^{(2)}, q_n^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

En introduisant l'équation (4.12) dans l'équation (4.8), nous obtenons

$$\varphi^{(2)}|_{S_2} - \varphi^{(1)}|_{S_1} = \frac{h}{2} \left[ P_1(\nabla_s \varphi^{(1)}, q_n^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} + P_1(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_n^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} \right] + 0(h^2). \quad (4.13)$$

Pour le flux normal de chaleur, une dérivation semblable à celle conduisant à (4.13) nous donne

$$q_n^{(2)}|_{S_2} - q_n^{(1)}|_{S_1} = \frac{h}{2} \left[ Q_1(\nabla_s \varphi^{(1)}, q_n^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} + Q_1(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_n^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} \right] + 0(h^2). \quad (4.14)$$

Dans cette équation, la fonction  $Q_1$  exprime la dérivée du flux normal de chaleur  $\nabla_n q_n$  dans la direction normale à une surface en termes de  $\nabla_s \varphi$  et  $q_n$  :

$$\nabla_n q_n = Q_1(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}) = \text{div}_s(\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \text{div}_s(\mathbf{s} q_n) \quad (4.15)$$

où le tenseur  $\mathbf{S}$  est calculé par

$$\mathbf{S} = \mathbf{K} - \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{K})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}}. \quad (4.16)$$

Pour clarté, la dérivation de la formule (4.15) est reportée à la section suivante.

Considérons maintenant la configuration de la FIG. 4-1(b) dans laquelle l'interface imparfaite  $S_0$  séparant les phases 1 et 2 est imparfaite. Dans ce qui suit, les quantités évaluées sur la surface  $S_0$  mais du côté de la phase 2 sont indiquées par un exposant "(+)" alors que celles évaluées sur la surface  $S_0$  mais du côté de la phase 1 portent un exposant "(-)". Avec ces notations, le développement de Taylor permet d'écrire

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}|_{S_1} &= \varphi^{(-)} - \frac{h}{2} \nabla \varphi^{(-)} \cdot \mathbf{n} + 0(h^2), \\ \varphi^{(2)}|_{S_2} &= \varphi^{(+)} + \frac{h}{2} \nabla \varphi^{(+)} \cdot \mathbf{n} + 0(h^2). \end{aligned} \quad (4.17)$$

En faisant appel à la formule (4.9), nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \nabla \varphi^{(-)} \cdot \mathbf{n} &= P_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}), \\ \nabla \varphi^{(+)} \cdot \mathbf{n} &= P_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

En combinant (4.17) et (4.18), nous avons le saut

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)}|_{S_2} - \varphi^{(1)}|_{S_1} &= \varphi^{(+)} - \varphi^{(-)} \\ &+ \frac{h}{2} \left[ P_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + P_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] + 0(h^2). \end{aligned} \quad (4.19)$$

En même temps, en insérant (4.17) et en négligeant les termes d'ordre égal ou supérieur à  $0(h^2)$ , il vient que

$$\varphi^{(2)}|_{S_2} - \varphi^{(1)}|_{S_1} = \frac{h}{2} \left[ P_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + P_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] + 0(h^2). \quad (4.20)$$

En comparant (4.20) avec (4.19), nous en déduisons le saut de la température que l'interface imparfaite  $S_0$  doit avoir :

$$\begin{aligned} [\varphi] &= \frac{h}{2} \left[ P_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + P_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ &- \frac{h}{2} \left[ P_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + P_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] + 0(h^2), \end{aligned} \quad (4.21)$$

où  $[\bullet] = \bullet^{(+)} - \bullet^{(-)}$  désigne le saut à travers la surface imparfaite  $S_0$  dans la configuration de la figure 4-1(b).

De façon similaire, nous pouvons dériver le saut du flux normal de chaleur que l'interface imparfaite  $S_0$  doit satisfaire :

$$\begin{aligned} [q_n] &= \frac{h}{2} \left[ Q_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + Q_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ &- \frac{h}{2} \left[ Q_1(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + Q_1(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] + 0(h^2). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les équations (4.21) et (4.22) caractérisent l'interface imparfaite  $S_0$  dans la configuration biphasée de la figure 4-1(b). Pour faciliter leur utilisation ultérieure, il convient de les écrire explicitement en y introduisant les expressions des fonctions  $P_1$  et  $Q_1$  :

$$\begin{aligned} [\varphi] &= -\frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(1)} \cdot \mathbf{n}} \right) q_n^{(-)} + \left( \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{n}} \right) q_n^{(+)} \right] \\ &- \frac{h}{2} \left[ (\mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(1)}) \cdot \nabla_s \varphi^{(-)} + (\mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(2)}) \cdot \nabla_s \varphi^{(+)} \right] + 0(h^2), \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$[q_n] = \frac{h}{2} \left\{ \operatorname{div}_s \left[ \left( \mathbf{S}^{(0)} - \mathbf{S}^{(1)} \right) \cdot \nabla_s \varphi^{(-)} \right] + \operatorname{div}_s \left[ \left( \mathbf{S}^{(0)} - \mathbf{S}^{(2)} \right) \cdot \nabla_s \varphi^{(+)} \right] \right\} \quad (4.24)$$

$$- \frac{h}{2} \left\{ \operatorname{div}_s \left[ \left( \mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(1)} \right) q_n^{(-)} \right] + \operatorname{div}_s \left[ \left( \mathbf{s}^{(0)} - \mathbf{s}^{(2)} \right) q_n^{(+)} \right] \right\} + 0(h^2).$$

Le modèle d'interface thermique imparfaite venant d'être construit est une approximation d'ordre  $0(h^2)$  de l'interphase  $\Omega^{(0)}$  dans la configuration triphasée de la figure 4-1(a). Ce modèle dépend à la fois des propriétés de l'interphase et des solides que cette dernière lie et fait intervenir des opérateurs différentiels de surface.

### 4.2.2 Dérivation des opérateurs $P_1$ et $Q_1$

Afin d'établir les expressions explicites des opérateurs  $P_1$  et  $Q_1$  utilisées ci-dessus, nous rappelons qu'étant donnée une surface quelconque  $S$ , le gradient du champ de température  $\nabla\varphi$  évaluée sur  $S$  admet la décomposition unique suivante :

$$\nabla\varphi = \nabla_s\varphi + \nabla_n\varphi. \quad (4.25)$$

La loi de Fourier étant appliquée, le flux normal de chaleur est lié à  $\nabla\varphi$  par

$$q_n = \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -(\mathbf{K} \cdot \nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} \quad (4.26)$$

En utilisant (4.25) dans (4.26), nous obtenons

$$q_n = -(\mathbf{K} \cdot \nabla_s\varphi) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{K} \cdot \nabla_n\varphi) \cdot \mathbf{n} \quad (4.27)$$

Comme

$$(\mathbf{K} \cdot \nabla_n\varphi) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla\varphi) \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}) \nabla\varphi \cdot \mathbf{n}, \quad (4.28)$$

les formules (4.9), (4.10) et (4.11) en résultent.

Concernant la dérivation de l'expression de  $Q_1$ , rappelons d'abord que dans le chapitre 1 sur la géométrie différentielle, nous avons montré que le vecteur normal unitaire  $\mathbf{n}$  défini dans un domaine formé de feuilletés parallèles a la propriété spécifique

$$\nabla\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}. \quad (4.29)$$

En vertu de celle-ci, nous avons

$$\nabla_n q_n = \nabla(q_n) \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{q} : \mathbf{P}^\perp = \text{div}_n \mathbf{q}. \quad (4.30)$$

Cette formule signifie que la dérivée du flux normal de chaleur  $q_n$  dans la direction normale est égale à la divergence normale du vecteur de flux de chaleur  $\mathbf{q}$ . En même temps, la décomposition

$$\text{div} \mathbf{q} = \nabla \mathbf{q} : \mathbf{P} + \nabla \mathbf{q} : \mathbf{P}^\perp = \text{div}_s \mathbf{q} + \text{div}_n \mathbf{q} \quad (4.31)$$

est valable. La substitution de cette équation l'équation d'équilibre (4.4) conduit à

$$\text{div}_n \mathbf{q} = -\text{div}_s \mathbf{q}. \quad (4.32)$$

En utilisant la loi de Fourier (4.2) et la décomposition (4.25), nous calculons

$$\text{div}_s \mathbf{q} = \nabla \mathbf{q} : \mathbf{P} = -\nabla(\mathbf{K} \cdot \nabla \varphi) : \mathbf{P} = -\nabla(\mathbf{K} \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla \varphi) : \mathbf{P} - \nabla(\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla \varphi) : \mathbf{P}. \quad (4.33)$$

Dans cette formule,

$$\nabla(\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla \varphi) = \nabla[\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}(\nabla \varphi \cdot \mathbf{n})] \quad (4.34)$$

En tenant compte de l'expression (4.9) de  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$ , l'équation (4.34) devient

$$\nabla(\mathbf{K} \cdot \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla \varphi) = -\nabla \left[ \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} q_n + \frac{(\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{K})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla \varphi \right] \quad (4.35)$$

La substitution de (4.35) dans (4.33) et la prise en compte de (4.32) conduisent à la formule (4.15) avec (4.16).

### 4.2.3 Matériaux isotropes et homogènes

Le modèle d'interface imparfaite thermique établi ci-dessus est général : les phases et l'interphase sont anisotropes et hétérogènes. Dans cette sous-section, nous nous intéressons au cas le plus simple mais aussi le plus important, où les phases et l'interphase sont isotropes et individuellement homogènes. Dans ce cas, nous avons simplement

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x})\mathbf{I}, \quad k(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^{i=2} \chi^{(i)}(\mathbf{x})k^{(i)}, \quad (4.36)$$

où le scalaire  $k^{(i)}$  est conductivité de la phase  $i$  ( $= 0, 1, 2$ ) et  $\chi^{(i)}(\mathbf{x})$  est la fonction caractéristique de la phase  $i$  telle que  $\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = 1$  si  $\mathbf{x} \in \Omega^{(i)}$  et  $\chi^{(i)}(\mathbf{x}) = 0$  si  $\mathbf{x} \notin \Omega^{(i)}$ . Avec (4.36), il est immediate que

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = k, \quad \mathbf{s} = \mathbf{n}, \quad \mathbf{S} = k\mathbf{P}. \quad (4.37)$$

Ces donnent les interprétations du vecteur  $\mathbf{s}$  et du tenseur  $\mathbf{S}$  dans le cas isotrope.

D'après les définitions (4.10) et (4.15), les fonctions  $P_1$  et  $Q_1$  sont déterminées par

$$P_1(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}) = -\frac{1}{k} q_n, \quad (4.38)$$

$$Q_1(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}) = k \operatorname{div}_s(\nabla_s \varphi) + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}, \quad (4.39)$$

où  $\mathbf{L} = -\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{P}$  est le tenseur de Weingarten.

En introduisant les expressions (4.37), (4.38) et (4.39) dans (4.23) et (4.22), nous obtenons finalement

$$[\varphi] = \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(0)}} \right) q_n^{(-)} + \left( \frac{1}{k^{(2)}} - \frac{1}{k^{(0)}} \right) q_n^{(+)} \right] + 0(h^2), \quad (4.40)$$

$$[q_n] = \frac{h}{2} \left[ (k^{(0)} - k^{(1)}) \operatorname{div}_s(\nabla_s \varphi^{(-)}) + (k^{(0)} - k^{(2)}) \operatorname{div}_s(\nabla_s \varphi^{(+)}) \right] + 0(h^2). \quad (4.41)$$

Ces deux formules définissent le modèle d'interface imparfaite thermique pour les phases et l'interphase isotropes et individuellement homogènes.

#### 4.2.4 Cas Extrêmes

Dans cette sous-section, nous examinons les formes particulières que prennent le modèle d'interface imparfaite général construit ci-dessus dans deux cas extrêmes. Tout d'abord, il s'agit du cas où l'interphase a une conductivité largement inférieure à celle de chacune des phases. Ensuite, nous sommes concernés par le cas où l'interphase possède une conductivité largement supérieure à celle de chacune des phases. Pour bien traduire mathématiquement ce que signifient les mots "largement inférieure" et "largement supérieure", nous utilisons un petit paramètre positif adimensionnel  $\epsilon \ll 1$  et distinguons deux situations :

**Cas 1** - *Interphase faiblement conductrice* :

$$h = \epsilon h_0, \quad \mathbf{K}^{(0)} = \epsilon \mathbf{K}_0^{(0)}, \quad \mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}_0^{(1)}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_0^{(2)}; \quad (4.42)$$

**Cas 2** - *Interphase fortement conductrice* :

$$h = \epsilon h_0, \quad \mathbf{K}^{(0)} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{K}_0^{(0)}, \quad \mathbf{K}^{(1)} = \mathbf{K}_0^{(1)}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_0^{(2)}. \quad (4.43)$$

Dans (4.42) et (4.43),  $h_0$ ,  $\mathbf{K}_0^{(0)}$ ,  $\mathbf{K}_0^{(1)}$  et  $\mathbf{K}_0^{(2)}$  sont des valeurs de référence qui faciliteront notre analyse.

Dans le cas 1, l'insertion dans (4.23) des expressions de  $h$ ,  $\mathbf{K}^{(0)}$ ,  $\mathbf{K}^{(1)}$  et  $\mathbf{K}_0^{(2)}$  données par (4.42) nous conduit à

$$[\varphi] = -\frac{h_0}{2} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}_0^{(0)} \cdot \mathbf{n}} (q_n^{(+)} + q_n^{(-)}) + 0(h) = -\frac{h}{2} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} (q_n^{(+)} + q_n^{(-)}) + 0(h). \quad (4.44)$$

Notons que le développement ci-dessus contient un terme non nulle d'ordre inférieur à  $0(h)$  et qu'il n'est pas allé jusqu'à l'ordre  $0(h^2)$  comme dans le modèle d'interface imparfaite général. L'introduction des expressions de (4.42) dans (4.24) fournit

$$[q_n] = 0(h). \quad (4.45)$$

En négligeant les termes d'ordre égal à et supérieur à  $0(h)$  dans (4.45) et (4.44) (ou en demandant que  $h$  tend vers zéro), nous pouvons écrire

$$q_n = q_n^{(+)} = q_n^{(-)} \quad \text{ou} \quad [q_n] = 0, \quad (4.46)$$

$$[\varphi] = -h \frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}}. \quad (4.47)$$

Les équations (4.46) et (4.47) signifient que le flux normal de chaleur  $q_n$  est continu et proportionnel au saut de la température  $[\varphi]$  à travers l'interface. Ces deux équations caractérisent le modèle d'interface imparfaite thermique le plus utilisé. La dérivation de ce modèle montre clairement qu'il s'applique cas d'une interphase très mince et faiblement conductrice. En particulier, si l'interphase est isotrope, (4.47) se simplifie :

$$[\varphi] = -h \frac{q_n}{k^{(0)}} \quad (4.48)$$

Dans le cas 2, la prise en compte des expressions de (4.42) dans (4.23) et (4.24) donne

$$[\varphi] = 0(h), \quad (4.49)$$

$$[q_{\mathbf{n}}] = \frac{h}{2} \{ \operatorname{div}_s [\mathbf{S}^{(0)} \cdot (\nabla_s \varphi^{(-)} + \nabla_s \varphi^{(+)})] \} + 0(h). \quad (4.50)$$

En négligeant les termes d'ordre égal à et supérieur à  $0(h)$ , il vient que

$$\varphi = \varphi^{(-)} = \varphi^{(+)} \quad \text{ou} \quad [\varphi] = 0, \quad (4.51)$$

$$[q_{\mathbf{n}}] = h \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi). \quad (4.52)$$

Ces expressions veulent dire que la température est continue à travers l'interface mais le flux normal de chaleur subit un saut qui est lié au gradient tangentiel de la température. Dans le cas d'une interphase isotrope et homogène, la formule (4.52) se réduit à

$$[q_{\mathbf{n}}] = h k^{(0)} \operatorname{div}_s (\nabla_s \varphi) = h k^{(0)} \Delta_s \varphi, \quad (4.53)$$

où  $\Delta_s \varphi = \operatorname{div}_s (\nabla_s \varphi)$  est le Laplacien surfacique. Rappelons la formule  $\Delta_s \varphi = \operatorname{div}_s (\nabla_s \varphi) = \nabla^2 \varphi : \mathbf{P} + (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) \operatorname{tr} \mathbf{L}$  montrant que  $\Delta_s \varphi = \operatorname{div}_s (\nabla_s \varphi) = \nabla^2 \varphi : \mathbf{P}$  si l'interface est une surface minimale au sens que sa courbure moyenne est égale à zéro ou  $\operatorname{tr} \mathbf{L} = 0$ . Le modèle d'interface imparfaite isotrope défini par (4.51) et (4.53) a été employé par Cheng et Torquato [20] [21], Benveniste et Miloh [13] [74] et Lipton [67], [68].

### 4.3 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^{N+1})$ avec

$$N \geq 2$$

#### 4.3.1 Dérivation du modèle

Dans la section précédente, nous avons établi un modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^2)$ . Ce modèle permet de remplacer de façon satisfaisante une interphase entre deux solides par une interface imparfaite si l'épaisseur  $h$  de l'interphase est très petite par rapport aux dimensions des solides. Par contre, quand  $h$  devient modérée, un modèle d'interface imparfaite d'ordre supérieur à  $0(h^2)$  est nécessaire. Dans cette section,

en nous inspirant du travail de Benveniste [10], nous construisons un modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 2$  à l'aide d'une approche indépendante de tout système de coordonnées.

Dans la figure 4-1(a), les développements de Taylor de  $\varphi^{(0)}|_{S_0}$  basés sur la valeur et les dérivées de  $\varphi^{(0)}$  évaluées sur les surfaces  $S_1$  et  $S_2$  s'écrivent :

$$\varphi^{(0)}|_{S_0} = \varphi^{(0)}|_{S_2} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r (\nabla^r \varphi^{(0)} \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r})|_{S_2} + 0(h^{N+1}), \quad (4.54)$$

$$\varphi^{(0)}|_{S_0} = \varphi^{(0)}|_{S_1} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (\nabla^r \varphi^{(0)} \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r})|_{S_1} + 0(h^{N+1}), \quad (4.55)$$

où  $\nabla^r$  désigne la dérivée d'ordre  $r$ ,  $\bullet^r$  le produit contracté  $r$  fois,  $\otimes^r$  le produit tensoriel d'ordre  $r$  et  $\nabla^r \varphi^{(0)} \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r}$  la dérivée normale d'ordre  $r$  de  $\varphi^{(0)}$ . Pour alléger les notations, il convient d'utiliser  $\nabla_n^r$  pour dénoter la dérivée normale d'ordre  $r$  d'une fonction scalaire, vectorielle ou tensorielle dans la suite. Ainsi, en soustrayant l'équation (4.55) de (4.54), il vient que

$$\varphi^{(0)}|_{S_2} - \varphi^{(0)}|_{S_1} = \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \nabla_n^r \varphi^{(0)}|_{S_1} - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r \nabla_n^r \varphi^{(0)}|_{S_2} + 0(h^{N+1}). \quad (4.56)$$

Dans la dérivation du modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^2)$ , la dérivée normale  $\nabla_n \varphi^{(0)}$ , qui n'est pas continue à travers les interfaces  $S_1$  et  $S_2$ , a été exprimée en fonction de la dérivée tangentielle  $\nabla_s \varphi^{(0)}$  et du flux normal de chaleur  $q_n^{(0)}$  qui sont par contre continus à travers  $S_1$  et  $S_2$ . Pour la même raison et de façon similaire, nous montrons dans la sous-section suivante que la dérivée  $\nabla_n^r \varphi$  d'ordre  $r$  du champ de température dans la direction normale à une surface quelconque peut s'exprimer en fonction du flux normal de chaleur  $q_n$  et de la dérivée tangentielle du champ de température  $\nabla_s \varphi$  :

$$\nabla_n^r \varphi = \nabla^r \varphi \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r} = P_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}). \quad (4.57)$$

Dans cette expression, la fonction  $P_r$  est déterminée par deux formules de récurrence :

$$P_N = -\frac{Q_{N-1}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \mathbf{L}^r \cdot \nabla_s P_{N-1-r} \quad (4.58)$$

$$Q_N = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \left[ \begin{array}{c} \sum_{k=0}^{N-1-r} \frac{(N-1-r)!}{(N-1-r-k)!} \nabla_s (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L}^k \cdot \nabla_s P_{N-1-r-k}) : \mathbf{L}^r \\ - \nabla_s (\mathbf{s} Q_{N-1-r}) : \mathbf{L}^r \end{array} \right] \quad (4.59)$$

avec les définitions

$$P_0 = \varphi \text{ et } Q_0 = q_n. \quad (4.60)$$

Dans ces formules,  $\mathbf{L}$  est le tenseur de Weingarden, le tenseur  $\mathbf{S}$  est défini par (4.16) et le vecteur  $\mathbf{s}$  est caractérisé par (4.11). Dans la sous-section suivante, nous prouvons également que la dérivée normale  $\nabla_n^r q_n$  d'ordre  $r$  du flux normal de chaleur peut être calculée à l'aide de la fonction  $Q_r$  définie par (4.59) comme suit :

$$\nabla_n^r q_n = \nabla^r q_n \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r} = Q_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}). \quad (4.61)$$

L'application de la formule (4.57) à  $\varphi^{(0)}$  permet d'écrire

$$\nabla_n^r \varphi^{(0)} |_{S_i} = P_r(\nabla_s \varphi^{(0)}, q_n^{(0)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_i} = P_r(\nabla_s \varphi^{(i)}, q_n^{(i)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_i}, \quad (4.62)$$

où la continuité de  $\nabla_s \varphi^{(i)}$  et  $q_n^{(i)}$  est évoquée dans la deuxième égalité. L'introduction de cette équation à l'équation (4.54) aboutit à

$$\begin{aligned} \varphi^{(2)} |_{S_2} - \varphi^{(1)} |_{S_1} &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} P_r(\nabla_s \varphi^{(1)}, q_n^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_1} \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_n^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_2} + 0(h^{N+1}). \end{aligned} \quad (4.63)$$

De façon similaire, nous pouvons obtenir le saut du flux normal de chaleur correspondant :

$$\begin{aligned} q_n^{(2)} |_{S_2} - q_n^{(1)} |_{S_1} &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} Q_r(\nabla_s \varphi^{(1)}, q_n^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_1} \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_n^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)}) |_{S_2} + 0(h^{N+1}). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Maintenant, considérons la configuration de la figure 4-1(b). En utilisant le développement de Taylor, nous avons

$$\varphi^{(1)} |_{S_1} = \varphi^{(-)} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r \nabla_n^r \varphi^{(-)} + 0(h^{N+1}), \quad (4.65)$$

$$\varphi^{(2)}|_{S_2} = \varphi^{(+)} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \nabla_n^r \varphi^{(+)} + 0(\hbar^{N+1}), \quad (4.66)$$

$$q_{\mathbf{n}}^{(1)}|_{S_1} = q_{\mathbf{n}}^{(-)} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \frac{1}{r!} (-1)^r \nabla_n^r q_{\mathbf{n}}^{(-)} + 0(\hbar^{N+1}), \quad (4.67)$$

$$q_{\mathbf{n}}^{(2)}|_{S_2} = q_{\mathbf{n}}^{(+)} + \sum_{r=1}^N \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \nabla_n^r q_{\mathbf{n}}^{(+)} + 0(\hbar^{N+1}). \quad (4.68)$$

La prise compte de ces expressions dans les celles de  $P_r$  et  $Q_r$  conduit à

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r P_r(\varphi^{(1)}, q_{\mathbf{n}}^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \sum_{p=1}^{N-r} \frac{1}{p!} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^p (-1)^p \nabla_n^p \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] + 0(\hbar^{N+1}), \end{aligned} \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_{\mathbf{n}}^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \sum_{p=1}^{N-r} \frac{1}{p!} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^p \nabla_n^p \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] + 0(\hbar^{N+1}), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(1)}, q_{\mathbf{n}}^{(1)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_1} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \sum_{p=1}^{N-r} \frac{1}{p!} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^p (-1)^p \nabla_n^p \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] + 0(\hbar^{N+1}), \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(2)}, q_{\mathbf{n}}^{(2)}; \mathbf{K}^{(0)})|_{S_2} &= \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \\ &+ \left(\frac{\hbar}{2}\right)^r \sum_{p=1}^{N-r} \frac{1}{p!} \left(\frac{\hbar}{2}\right)^p \nabla_n^p \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] + 0(\hbar^{N+1}). \end{aligned} \quad (4.72)$$

A partir des définitions (4.57) et (4.61) des opérateurs  $P_r$  et  $Q_r$ , nous obtenons

$$\nabla_n^r \varphi^{(-)} = P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}), \quad \nabla_n^r \varphi^{(+)} = P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \quad (4.73)$$

$$\nabla_n^r q_{\mathbf{n}}^{(-)} = Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_{\mathbf{n}}^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}), \quad \nabla_n^r q_{\mathbf{n}}^{(+)} = Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_{\mathbf{n}}^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \quad (4.74)$$

$$\nabla_n^p \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] = P_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}) \quad (4.75)$$

$$\nabla_n^p \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] = P_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(2)}) \quad (4.76)$$

$$\nabla_n^p \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] = Q_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}) \quad (4.77)$$

$$\nabla_n^p \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] = Q_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(2)}) \quad (4.78)$$

où  $P_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)})$  ou  $Q_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)})$  désigne la dérivée normale composée d'une dérivée normale d'ordre  $r$  dans la phase 0 suivie d'une dérivée normale d'ordre  $p$  dans la phase  $i$ . En introduisant les notations

$$\begin{aligned} P_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}) &= P_r^{(0)}(\nabla_s \varphi, q_n), & Q_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}) &= Q_r^{(0)}(\nabla_s \varphi, q_n), \\ P_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(i)}) &= P_r^{(i)}(\nabla_s \varphi, q_n), & Q_r(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(i)}) &= Q_r^{(i)}(\nabla_s \varphi, q_n), \\ P_{r,p}(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)}) &= P_{r,p}^{(0,i)}(\nabla_s \varphi, q_n), & Q_{r,p}(\nabla_s \varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)}) &= Q_{r,p}^{(0,i)}(\nabla_s \varphi, q_n), \end{aligned} \quad (4.79)$$

nous avons les formules de composition :

$$P_{r,p}^{(0,i)} = P_p^{(i)} \circ P_r^{(0)}, \quad Q_{r,p}^{(0,i)} = Q_p^{(i)} \circ Q_r^{(0)}. \quad (4.80)$$

Nous n'avons pas les relations de récurrence pour les termes mixtes  $P_{r,p}^{(0,i)}$  et  $Q_{r,p}^{(0,i)}$  jusqu'à maintenant. Donc pour calculer les terme mixtes, il faut utiliser la relation (4.80).

En combinant les équations (4.63)-(4.78) et en utilisant la condition de consistance identique à celle sur laquelle est basée la construction du modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^2)$ , nous déduisons les sauts :

$$\begin{aligned} [\varphi] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) - (-1)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \left[ P_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - (-1)^r P_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \\ &\quad + \sum_{r=1}^N \sum_{p=r}^{N-r} \left(\frac{h}{2}\right)^{r+p} \frac{1}{r!} \frac{1}{p!} \left[ \begin{array}{l} (-1)^p P_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}) \\ - (-1)^r P_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(2)}) \end{array} \right] + 0(h^{N+1}), \end{aligned} \quad (4.81)$$

$$\begin{aligned}
[q_n] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) - (-1)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\
&- \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} \left[ Q_r(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - (-1)^r Q_r(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \\
&+ \sum_{r=1}^N \sum_{p=r}^{N-r} \left(\frac{h}{2}\right)^{r+p} \frac{1}{r!} \frac{1}{p!} \left[ \begin{array}{l} (-1)^p Q_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(1)}) \\ - (-1)^r Q_{r,p}(\nabla_s \varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(2)}) \end{array} \right] + 0(h^{N+1}).
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Ces deux équations sont les conditions générales caractérisant le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 1$ .

### 4.3.2 Dérivation des opérateurs $P_r$ et $Q_r$

Le point de départ pour la dérivation des expressions de  $P_r$  et  $Q_r$  est les deux formules de récurrence de base :

$$P_r = \nabla P_{r-1} \cdot \mathbf{n}, \quad Q_r = \nabla Q_{r-1} \cdot \mathbf{n}. \tag{4.83}$$

Pour démontrer celles-ci, il suffit de faire appel aux définitions  $P_r = \nabla^r \varphi \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r}$  et  $Q_r = \nabla^r q_n \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r}$  et au fait que  $\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$  est valable pour les surfaces parallèles en questions.

Appliquant la première formule de (4.83), nous calculons d'abord  $P_2$  comme suit :

$$P_2 = \nabla P_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right) \cdot \mathbf{n} \tag{4.84}$$

où l'expression (4.10) de  $P_1$  a été utilisée dans la deuxième égalité. Dans la suite, sauf mention contraire, nous faisons l'hypothèse que les phases et l'interphase sont individuellement homogènes. Sous cette hypothèse et du fait que  $\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ , nous avons

$$\nabla \left[ \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \right] \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \nabla \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = 0. \tag{4.85}$$

Par conséquent,

$$P_2 = -\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \nabla q_n \cdot \mathbf{n} - \mathbf{s} \cdot \nabla (\nabla_s \varphi) \cdot \mathbf{n}.$$

Dans cette expression,

$$\nabla (\nabla_s \varphi) \cdot \mathbf{n} = \nabla (\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi) \cdot \mathbf{n} = \nabla \varphi \cdot \nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{P} \cdot \nabla^2 \varphi \cdot \mathbf{n}.$$

Or,  $\nabla \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = -(\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} - \mathbf{n} \otimes (\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}) = 0$ . Ainsi,

$$\nabla (\nabla_s \varphi) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot \nabla^2 \varphi \cdot \mathbf{n} = \mathbf{P} \cdot [\nabla (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) - \nabla \varphi \cdot \nabla \mathbf{n}] = \nabla_s (\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{L} \cdot \nabla_s \varphi. \quad (4.86)$$

En tenant compte des définitions de  $Q_1$  et  $P_1$ , nous arrivons à la forme finale de  $P_2$  :

$$P_2 = -\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} Q_1 - \mathbf{s} \cdot (\nabla_s P_1 + \mathbf{L} \cdot \nabla_s \varphi). \quad (4.87)$$

Nous constatons que les expressions (4.10) et (4.87) de  $P_1$  et  $P_2$  vérifient la formule générale (4.58) avec (4.60). Nous procédons maintenant à prouver celle-ci par récurrence.

Supposons tout d'abord que (4.58) est valable pour calculer  $P_{N-1}$ , à savoir

$$P_{N-1} = -\frac{Q_{N-2}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-2-r}.$$

En vertu de la première relation de (4.83), il vient que

$$P_N = \nabla P_{N-1} \cdot \mathbf{n} = -\nabla \left[ \frac{Q_{N-2}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} + \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-2-r} \right] \cdot \mathbf{n}.$$

Or,

$$\nabla \left( \frac{Q_{N-2}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \nabla Q_{N-2} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \nabla Q_{N-1},$$

$$\begin{aligned} & \nabla \left( \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-2-r} \right) \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla (\mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-2-r}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} [(r+1) \mathbf{L}^{r+1} \cdot \nabla P_{N-2-r} + \mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-1-r}] \\ &= \mathbf{s} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \mathbf{L}^r \cdot \nabla P_{N-1-r}. \end{aligned}$$

Ainsi, la formule de récurrence (4.58) est prouvée.

Il est facile de vérifier que l'expression (4.15) de  $Q_1$  est dérivable de la formule générale (4.59) avec (4.60). Cette formule peut être également démontrée par récurrence.

A l'aide de (4.58) et (4.59) et au vu de (4.80), les calculs de  $P_{r,p}$  et  $Q_{r,p}$  se font

facilement. Par exemple,

$$P_{1,1}(\varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)}) = -\frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \left[ \operatorname{div}_s(\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s(\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right] \quad (4.88)$$

$$+ \mathbf{s}^{(0)} \cdot \nabla_s \left[ \frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} + \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right] - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \mathbf{L} \cdot \nabla_s \varphi,$$

$$Q_{1,1}(\varphi, q_n; \mathbf{K}^{(0)}, \mathbf{K}^{(i)}) = \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) \right] \quad (4.89)$$

$$+ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \mathbf{L} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}$$

$$- \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{s}^{(0)} \operatorname{div}_s(\mathbf{S}^{(i)} \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla_s \varphi) \right] \quad (4.90)$$

$$+ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{s}^{(0)} \operatorname{div}_s(\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right] - \nabla_s(\mathbf{s}^{(0)} q_n) : \mathbf{L}.$$

Dans l'annexe, nous détaillons les modèles d'interface imparfaite thermique d'ordres  $0(h^3)$  et  $0(h^4)$ .

### 4.3.3 Matériaux Isotropes et homogènes

Dans la sous-section précédente, le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 1$  est valable pour les phases et l'interphase anisotropes et individuellement homogènes. Dans cette sous-section, ce modèle général est particularisé dans le cas où les phases et l'interphase deviennent isotropes. Ceci implique que l'expression (4.36) de  $\mathbf{K}$  et les expressions de  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{S}$  données par (4.37) s'appliquent. Il en résulte que les formules de récurrence se simplifient et deviennent

$$P_N = -\frac{Q_{N-1}}{k}, \quad (4.91)$$

$$Q_N = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \left[ \sum_{p=0}^{N-1-r} k \nabla_s(\mathbf{L}^p \cdot \nabla_s P_{N-1-r-p}) : \mathbf{L}^r + Q_{N-1-r} \operatorname{tr} \mathbf{L}^{r+1} \right] \quad (4.92)$$

avec  $P_0 = \varphi$  et  $Q_0 = q_n$ .

Le modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^{N+1})$  pour les phases et l'interphase isotropes est caractérisé par les équations (4.81) et (4.82) dans lesquelles les fonctions  $P_r$ ,  $Q_r$ ,  $P_{r,p}$  et  $Q_{r,p}$  sont calculées à l'aide de (4.91), (4.92) et (4.80). En particulier, pour

expliciter le modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^3)$ , nous avons besoin de

$$P_1 = -\frac{q_n}{k}, \quad Q_1 = \operatorname{div}_s(k\nabla_s\varphi) + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}, \quad (4.93)$$

$$P_2 = -\frac{1}{k}Q_1 = -\frac{1}{k}[\operatorname{div}_s(k\nabla_s\varphi) + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}], \quad (4.94)$$

$$P_{1,1}^{(0,i)} = -\frac{1}{k^{(0)}}[\operatorname{div}_s(k^{(i)}\nabla_s\varphi) + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}], \quad (4.95)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = \operatorname{div}_s \left[ k\nabla_s \left( -\frac{q_n}{k} \right) \right] + \operatorname{div}_s(k\mathbf{L}\cdot\nabla_s\varphi) + \nabla_s(k\mathbf{P}\cdot\nabla\varphi) : \mathbf{L} \\ + \operatorname{div}_s(k\nabla_s\varphi) \operatorname{tr} \mathbf{L} + q_n (\operatorname{tr} \mathbf{L})^2 + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}^2. \end{aligned} \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned} Q_{1,1}^{(0,i)} = \operatorname{div}_s \left[ k^{(0)}\nabla_s \left( -\frac{q_n}{k^{(i)}} \right) \right] + \operatorname{div}_s(k^{(0)}\mathbf{L}\cdot\nabla_s\varphi) + \nabla_s(k^{(0)}\mathbf{P}\cdot\nabla\varphi) : \mathbf{L} \\ + \operatorname{div}_s(k^{(i)}\nabla_s\varphi) \operatorname{tr} \mathbf{L} + q_n (\operatorname{tr} \mathbf{L})^2 + q_n \operatorname{tr} \mathbf{L}^2. \end{aligned} \quad (4.97)$$

## 4.4 Matériaux hétérogènes

Dans l'établissement du modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 2$ , les phases et l'interphase sont supposées individuellement homogènes. Donc, les formules de récurrence (4.58) et (4.59) ne sont valables que sous cette hypothèse. Dans cette section, nous discutons de la démarche à suivre pour construire les modèles d'interface imparfaite quand les phases et l'interphase sont toutes hétérogènes. Cette discussion est importante au vu du rôle joué par les matériaux "graduels" dans les technologies actuelles.

Notons tout d'abord que, dans la dérivation du modèle d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^{N+1})$ , l'hypothèse n'a pas été faite sur l'homogénéité individuelle des phases et de l'interphase. Par conséquent, les expressions (4.10) et (4.15) des fonctions  $P_1$  et  $Q_1$  restent applicables dans le cas hétérogène. A partir de celles-ci, nous déterminons  $P_r$  et  $Q_r$  ( $r \geq 2$ ) à l'aide des formules de base (4.83). Ainsi, nous obtenons, par exemple,

$$P_2 = -\frac{Q_1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}} - \mathbf{s}\cdot(\nabla_s P_1 + \mathbf{L}\cdot\nabla_s\varphi) - q_n \nabla \left( \frac{1}{\mathbf{n}\cdot\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}} \right) \cdot \mathbf{n} - (\nabla\mathbf{s}\cdot\mathbf{n})\cdot\nabla_s\varphi, \quad (4.98)$$

$$\begin{aligned}
Q_2 = & \operatorname{div}_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s P_1) + \operatorname{div}_s (\mathbf{S} \cdot \mathbf{L} \cdot \nabla_s \varphi) + \nabla_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} - \operatorname{div}_s (\mathbf{s} Q_1) \\
& - \nabla_s (\mathbf{s} q_n) : \mathbf{L} + \operatorname{div}_s [(\nabla \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_s \varphi] - \operatorname{div}_s [(\nabla \mathbf{s} \cdot \mathbf{n}) q_n]. \tag{4.99}
\end{aligned}$$

Ci-dessus, les termes  $\nabla[1/(\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n}$ ,  $(\nabla \mathbf{s} \cdot \mathbf{n})$  et  $\nabla \mathbf{S} \cdot \mathbf{n}$  ne sont généralement pas nuls, puisque les propriétés des phases et de l'interphase varient suivant la direction normale. Quand ces matériaux sont tous isotropes, nous avons en particulier  $\nabla \mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ .

En utilisant la même procédure, nous pouvons calculer explicitement  $P_r$  et  $Q_r$  ( $r \geq 3$ ). Mais, nous n'avons pas trouvé de formule de récurrence comme dans le cas des matériaux individuellement homogènes.

# Chapitre 5

## Interfaces imparfaites élastiques

Les interfaces imparfaites apparaissent et ont des effets importants dans de nombreuses situations en mécanique. En particulier, la prévision des propriétés effectives des matériaux composites (multicouches, fibreux ou à inclusions) nécessitent souvent la prise en compte des effets d'interfaces imparfaites. Les deux modèles d'interface imparfaite les plus répandus sont le modèle de ressort linéaire et le modèle d'interface cohérente linéaire. Le premier consiste à supposer qu'à travers une interface, le vecteur de contrainte est continu alors que le vecteur de déplacement subit un saut proportionnel au vecteur de contrainte. Le second est de postuler qu'à travers une interface, le vecteur de déplacement est continu alors que le vecteur de contrainte est discontinu à cause de la présence des contraintes surfaciques dans l'interface, qui sont proportionnelles aux déformations surfaciques de la dernière et doivent vérifier les équations d'Young-Laplace. Ces deux modèles

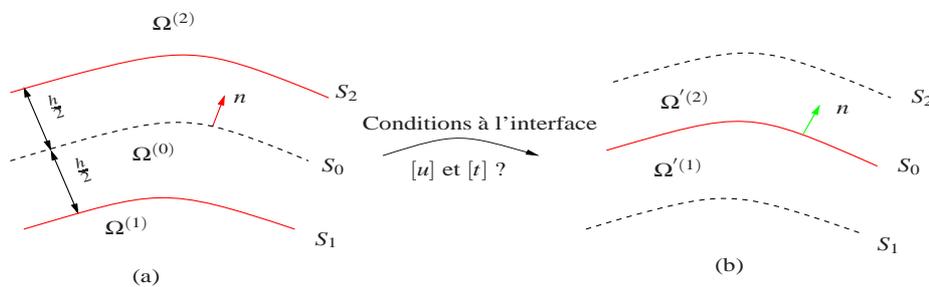


FIG. 5-1 – Schéma de modélisation : (a) phase 1/interphase 0/medium 2; (b) phase 1/interface imparfaite/phase 2

ont été initialement proposés et formulés en se basant sur des considérations phénoménologiques [44] [45] [37] [77]. Ils ont été ensuite justifiés par une approche asymptotique (Klarbring [62]; Benveniste et Miloh [14]; Benveniste [9]). Outre les deux modèles venant d'être mentionnés, il en y a d'autres, par exemple, le modèle e glissement libre [36].

Dans ce chapitre, inspirés des travaux de Bövik [16] et Benveniste [9], nous développons une approche pour modéliser une interphase entre deux solides par une interface imparfaite. En comparaison avec les méthodes utilisées par Bövik [16] et Benveniste [9], notre approche est indépendante de tout système de coordonnées et conduit à un modèle d'interface imparfaite élastique dont le degré de précision  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 1$  pouvant être fixé en fonction de l'application envisagée.

## 5.1 Schéma de modélisation et équations de base

Le schéma de modélisation (FIG. 5-1) est similaire à celui utilisé pour l'établissement des modèles d'interface imparfaite thermique dans le chapitre précédent. Le vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  et le vecteur de contrainte  $\mathbf{t}$  remplacent respectivement la température  $\varphi$  et le flux normal de chaleur  $q_n$ . Dans la configuration de FIG. 5-1(a), l'interface  $S_1$  entre le phase 1 et l'interphase 0 et l'interface  $S_2$  entre le phase 2 et l'interphase 0 sont parfaites. Donc, nous avons la continuité du vecteur de déplacement et la continuité du vecteur de contrainte à travers  $S_1$  et  $S_2$  :

$$\mathbf{u}^{(0)}|_{S_1} = \mathbf{u}^{(1)}|_{S_1}, \quad \mathbf{u}^{(0)}|_{S_2} = \mathbf{u}^{(2)}|_{S_2}, \quad (5.1a)$$

$$\mathbf{t}^{(0)}|_{S_1} = \mathbf{t}^{(1)}|_{S_1}, \quad \mathbf{t}^{(0)}|_{S_2} = \mathbf{t}^{(2)}|_{S_2}, \quad (5.1b)$$

où le vecteur de contrainte  $\mathbf{t}^{(i)}$  est donné par  $\mathbf{t}^{(i)} = \boldsymbol{\sigma}^{(i)} \cdot \mathbf{n}$  avec  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$  étant le tenseur de contrainte de Cauchy.

Les phases 1 et 2 et l'interphase sont linéairement élastiques et en général anisotropes. Leur comportement est donc caractérisé par la loi de Hooke :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbb{C}^{(i)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (5.2)$$

où  $\mathbb{C}^{(i)}$  ( $i = 0, 1, 2$ ) est le tenseur de rigidité et  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$  est le tenseur de déformation infinitésimale défini par

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \frac{1}{2}[\nabla \mathbf{u}^{(i)} + (\nabla \mathbf{u}^{(i)})^T]. \quad (5.3)$$

En absence de forces volumiques, les équations d'équilibre prennent la forme

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{0}. \quad (5.4)$$

Dans la configuration de FIG. 5-1(b), l'interphase  $\Omega^{(0)}$  est éliminée et remplacée par une interface imparfaite  $S_0$ . Comme dans le cas thermique, le problème principal à résoudre est de déterminer les conditions dont l'interface imparfaite  $S_0$  doit être dotée afin que l'interface imparfaite  $S_0$  soit équivalente à l'interphase à une erreur fixée près.

## 5.2 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$

### 5.2.1 Forme générale du modèle

La procédure conduisant à l'établissement du modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^2)$  est analogue à celle donnant lieu à sa contrepartie thermique. Pour éviter la répétition, nous nous contentons ci-dessous de donner directement les expressions définissant le modèle élastique. Au préalable, nous introduisons deux fonctions  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  permettant de calculer les dérivées normales des vecteurs de déplacement et de contrainte :

$$\nabla_n \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) \quad (5.5a)$$

$$\nabla_n \mathbf{t} = \nabla \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}). \quad (5.5b)$$

Les arguments de  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  sont la dérivée tangentielle  $\nabla_s \mathbf{u}$  du vecteur de déplacement et le vecteur de contrainte  $\mathbf{t}$ , qui sont continus à travers une interface. Le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}$  joue le rôle d'un paramètre et est évalué dans la phase ou l'interphase où  $\nabla_s \mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  sont évalués. Les expressions explicites de  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  seront fournies dans la sous-section prochaine.

A l'aide des formules (5.5a) et (5.5b), le modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^2)$  est formellement caractérisé par

$$[\mathbf{u}] = \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ - [\mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{array} \right\} + 0(h^2), \quad (5.6)$$

$$[\mathbf{t}] = \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ - [\mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{array} \right\} + 0(h^2). \quad (5.7)$$

Ci-dessus,  $[\bullet] = \bullet^{(+)} - \bullet^{(-)}$  représente le saut à travers l'interface imparfaite  $S_0$  dans la configuration de la FIG. 4-1(b).

### 5.2.2 Dérivation des expressions de $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{g}_1$

Décomposons d'abord le gradient  $\nabla \mathbf{u}$  du vecteur de déplacement comme suit :

$$\nabla \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} + \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\perp = \nabla_s \mathbf{u} + \nabla_n \mathbf{u} \otimes \mathbf{n} \quad (5.8)$$

où  $\nabla_s \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}$  et  $\nabla_n \mathbf{u} = \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ . En tenant compte de la loi de Hooke et de cette décomposition, le vecteur de contrainte s'exprime par

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (\mathbb{C} : \nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = [\mathbb{C} : (\nabla_n \mathbf{u} \otimes \mathbf{n})] \cdot \mathbf{n} + [\mathbb{C} : \nabla_s \mathbf{u}] \cdot \mathbf{n}. \quad (5.9)$$

Dans cette formule,

$$[\mathbb{C} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\perp)] \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u} = \mathbf{Q} \cdot \nabla_n \mathbf{u} \quad (5.10)$$

où

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n} \quad (5.11)$$

est le tenseur acoustique qui est inversible en vertu de la définie positivité de  $\mathbb{C}$ . Dénotant l'inverse de  $\mathbf{Q}$  par  $\mathbf{F}$ , à savoir,

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q}^{-1}, \quad (5.12)$$

et introduisant (5.10) dans (5.9), il en résulte que

$$\nabla_n \mathbf{u} = \mathbf{f}_1 (\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C})$$

avec

$$\mathbf{f}_1 (\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u} \quad (5.13)$$

où

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}) \quad (5.14)$$

est un tenseur d'ordre 3. Nous constatons que la détermination explicite de  $\mathbf{f}_1$  nécessite essentiellement l'inversion du tenseur acoustique  $\mathbf{Q}$ .

L'utilisation de l'expression explicite (5.13) de  $\mathbf{f}_1$  dans (5.6) donne

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= \frac{h}{2} \left[ \left( \mathbf{F}^{(0)} - \mathbf{F}^{(1)} \right) \cdot \mathbf{t}^{(-)} - \left( \mathbf{\Lambda}^{(0)} - \mathbf{\Lambda}^{(1)} \right) : \nabla_s \mathbf{u}^{(-)} \right] \\ &+ \frac{h}{2} \left[ \left( \mathbf{F}^{(0)} - \mathbf{F}^{(2)} \right) \cdot \mathbf{t}^{(+)} - \left( \mathbf{\Lambda}^{(0)} - \mathbf{\Lambda}^{(2)} \right) : \nabla_s \mathbf{u}^{(+)} \right] + 0(h^2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Ensuite, décomposons la divergence du tenseur de contrainte :

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} + \nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P}^\perp. \quad (5.16)$$

Il est à noter que

$$\nabla_n \mathbf{t} = \nabla \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \nabla (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n} = \nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P}^\perp \quad (5.17)$$

du fait que  $\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$ . En tenant compte des équations d'équilibre  $\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ , nous obtenons

$$\nabla_n \mathbf{t} = -\nabla \boldsymbol{\sigma} : \mathbf{P} = -\operatorname{div}_s \boldsymbol{\sigma}. \quad (5.18)$$

En y introduisant la loi de comportement et la décomposition (5.8), l'équation (5.18) devient

$$\nabla_n \mathbf{t} = -\operatorname{div}_s [\mathbb{C} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})] - \operatorname{div}_s [\mathbb{C} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\perp)]. \quad (5.19)$$

Or,

$$\operatorname{div}_s [\mathbb{C} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\perp)] = \operatorname{div}_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot (\nabla_n \mathbf{u})] = \operatorname{div}_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_1]. \quad (5.20)$$

Finalement, nous avons

$$\nabla_n \mathbf{t} = \nabla \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{g}_1 (\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C})$$

avec

$$\mathbf{g}_1 (\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) = -\operatorname{div}_s (\mathbb{C} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_1]. \quad (5.21)$$

La prise en considération de l'expression (5.13) de  $\mathbf{f}_1$  dans cette équation donne

$$\mathbf{g}_1 (\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) = -\operatorname{div}_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\mathbb{\Theta} \cdot \mathbf{t}), \quad (5.22)$$

où le tenseur  $\mathbb{A}$  d'ordre 4 et le tenseur  $\mathbb{\Theta}$  d'ordre 3 sont définis par

$$\mathbb{A} = \mathbb{C} - (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbb{\Lambda}, \quad \mathbb{\Theta} = (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbb{F}. \quad (5.23)$$

L'introduction de (5.22) dans (5.7) nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}] &= \frac{h}{2} \left\{ \operatorname{div}_s [(\mathbb{A}^{(1)} - \mathbb{A}^{(0)}) : \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}] + \operatorname{div}_s [(\mathbb{\Theta}^{(1)} - \mathbb{\Theta}^{(0)}) \cdot \mathbf{t}^{(-)}] \right\} \\ &+ \frac{h}{2} \left\{ \operatorname{div}_s [(\mathbb{A}^{(2)} - \mathbb{A}^{(0)}) : \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}] + \operatorname{div}_s [(\mathbb{\Theta}^{(2)} - \mathbb{\Theta}^{(0)}) \cdot \mathbf{t}^{(+)}] \right\} + 0(h^2). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Les équations (5.15) et (5.24) caractérisent explicitement le modèle d'interface imparfaite élastique du degré d'approximation  $0(h^2)$ .

Avant d'étudier des cas particuliers, nous montrons que le tenseur  $\mathbb{A}$  d'ordre 4 défini par la première formule de (5.23) est un des opérateurs d'interface introduits par Hill [55]. En effet, la prise en compte de (5.12) et (5.14) dans la définition de  $\mathbb{A}$  nous permet d'écrire

$$\mathbb{A} = \mathbb{C} - \mathbb{C} : \mathbb{B} : \mathbb{C} \quad (5.25)$$

avec

$$\mathbb{B} = \frac{1}{2} [\mathbf{F} \overline{\otimes} (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) + (\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}) \overline{\otimes} \mathbf{F}]. \quad (5.26)$$

Nous savons que le tenseur  $\mathbb{B}$  d'ordre 4 donné par (5.26) et le tenseur  $\mathbb{A}$  calculé par (5.25) vérifient les relations suivantes (voir He [51]) :

$$\mathbb{B} : (\mathbb{P}^\perp : \mathbb{C} : \mathbb{P}^\perp) = (\mathbb{P}^\perp : \mathbb{C} : \mathbb{P}^\perp) : \mathbb{B} = \mathbb{P}^\perp, \quad (5.27)$$

$$\mathbb{A} : (\mathbb{P} : \mathbb{S} : \mathbb{P}) = (\mathbb{P} : \mathbb{S} : \mathbb{P}) : \mathbb{A} = \mathbb{P}, \quad (5.28)$$

où  $\mathbb{S} = \mathbb{C}^{-1}$  et les projecteurs complémentaires  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{P}^\perp$  ont été définis dans la première partie de cette thèse par  $\mathbb{P} = \underline{\mathbf{P}} \otimes \overline{\mathbf{P}}$  et  $\mathbb{P}^\perp = \underline{\mathbf{I}} \otimes \overline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{P}} \otimes \overline{\mathbf{P}}$ . Au sens de (5.27) et (5.28), nous pouvons écrire  $\mathbb{B} = (\mathbb{P}^\perp : \mathbb{C} : \mathbb{P}^\perp)^{-1}$  et  $\mathbb{A} = (\mathbb{P} : \mathbb{S} : \mathbb{P})^{-1}$ . D'une façon générale, les tenseurs  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{S}$ ,  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  sont interconnectés par Hill [55]

$$\mathbb{C} : \mathbb{B} + \mathbb{A} : \mathbb{S} = \mathbb{B} : \mathbb{C} + \mathbb{S} : \mathbb{A} = \underline{\mathbf{I}} \otimes \overline{\mathbf{I}}. \quad (5.29)$$

Les formules (5.25) et (5.26) montrent clairement que les tenseurs  $\mathbb{A}$  et  $\mathbb{B}$  ont les symétries mineures et majeure d'un tenseur élastique habituel. Il est aussi important de noter que  $\mathbb{A}$  transforme un tenseur surfacique en un autre tenseur. Par conséquent,  $\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u} = \mathbb{A} : [\nabla_s \mathbf{u} + (\nabla_s \mathbf{u})^T]/2 = \mathbb{A} : \boldsymbol{\varepsilon}_s$  correspond à un tenseur de contrainte surfacique.

Concernant le tenseur  $\Theta$  d'ordre 3 déterminé par la deuxième formule de (5.23), il est intéressant de remarquer que les termes qui le font intervenir dans (5.24) peuvent s'écrire sous une autre forme différente mais équivalente. En fait, nous avons

$$\Theta \cdot \mathbf{t} = \Theta \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (\mathbb{C} : \mathbb{B}) : \boldsymbol{\sigma} = (\mathbb{C} : \mathbb{B}) : \boldsymbol{\sigma}_n, \quad (5.30)$$

où  $\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbb{P}^\perp : \boldsymbol{\sigma}$  est une quantité continue à travers une interface parfaite. Cette expression nous permet d'en déduire

$$\Theta \otimes^s \mathbf{n} = \mathbb{C} : \mathbb{B}, \quad (5.31)$$

où  $(\Theta \otimes^s \mathbf{n})_{ijkl} = (\Theta_{ijk} n_l + \Theta_{ijl} n_k)/2$ . De façon similaire, concernant le tenseur  $\Lambda$  d'ordre 3 défini par (5.14), nous pouvons obtenir

$$\mathbf{n} \otimes^s \Lambda = \mathbb{B} : \mathbb{C}, \quad (5.32)$$

où  $(\mathbf{n} \otimes^s \Lambda)_{ijkl} = (n_i \Lambda_{jkl} + n_j \Lambda_{ikl})/2$ .

### 5.2.3 Matériaux isotropes

Le modèle d'interface imparfaite présenté ci-dessus est général au sens que les phases et l'interphase peuvent être anisotropes et hétérogènes. Maintenant, nous détaillons ce modèle dans le cas particulier le plus important où les matériaux en question sont isotropes et homogènes.

Quand les phases et l'interphase sont isotropes, le tenseur de rigidité prend la forme

$$\mathbb{C} = \lambda \mathbf{I} \otimes \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{I} \quad (5.33)$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé. A partir des définitions (5.11), (5.12), (5.14) et (5.23), nous calculons

$$\mathbf{Q} = (\lambda + 2\mu) \mathbf{P}^\perp + \mu \mathbf{P}, \quad (5.34)$$

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P}^\perp + \frac{1}{\mu} \mathbf{P}, \quad (5.35)$$

$$\mathbf{\Lambda} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{I} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{n}), \quad (5.36)$$

$$\mathbf{\Theta} = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} + \frac{2\mu}{\lambda + 2\mu} \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{P}, \quad (5.37)$$

$$\mathbf{\mathbb{A}} = \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} + 2\mu \mathbf{P} \underline{\otimes} \mathbf{P}. \quad (5.38)$$

Ces expressions permettent de préciser les fonctions

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P}^\perp \cdot \mathbf{t} + \frac{1}{\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{t} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{n} \operatorname{div}_s \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{u}, \quad (5.39)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 = & - \operatorname{div}_s \left[ \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P} \operatorname{div}_s \mathbf{u} + 2\mu (\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P}) \right] \\ & - \operatorname{div}_s \left[ \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P} + \mathbf{P}^\perp \right) \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{P} \cdot \mathbf{t}) \right]. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Dans ces formules,  $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{P}$  représente le tenseur de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$  et  $\operatorname{div}_s \mathbf{u}$  correspond à la trace de  $\boldsymbol{\varepsilon}_s$ , i.e.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbb{P} : \boldsymbol{\varepsilon}, \quad \operatorname{div}_s \mathbf{u} = \operatorname{tr} \boldsymbol{\varepsilon}_s. \quad (5.41)$$

Par conséquent, les sauts ont les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}] &= \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \mathbf{P}^\perp + \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(1)}} \right) \mathbf{P} \right] \cdot \mathbf{t}^{(-)} \\
&\quad - \frac{h}{2} \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \mathbf{n} \operatorname{div}_s \mathbf{u}^{(-)} \\
&\quad + \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) \mathbf{P}^\perp + \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(2)}} \right) \mathbf{P} \right] \cdot \mathbf{t}^{(+)} \\
&\quad - \frac{h}{2} \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) \mathbf{n} \operatorname{div}_s \mathbf{u}^{(+)} + 0(h^2), \tag{5.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}] &= -\frac{h}{2} \operatorname{div}_s \left[ \left( \frac{2\mu^{(0)}\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\mu^{(1)}\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \mathbf{P} \operatorname{div}_s \mathbf{u}^{(-)} + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) \boldsymbol{\varepsilon}_s^{(-)} \right] \\
&\quad - \frac{h}{2} \operatorname{div}_s \left[ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \mathbf{P}(\mathbf{t}^{(-)} \cdot \mathbf{n}) \right] \\
&\quad - \frac{h}{2} \operatorname{div}_s \left[ \left( \frac{2\mu^{(0)}\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\mu^{(2)}\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) \mathbf{P} \operatorname{div}_s \mathbf{u}^{(+)} + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) \boldsymbol{\varepsilon}_s^{(+)} \right] \\
&\quad - \frac{h}{2} \operatorname{div}_s \left[ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) \mathbf{P}(\mathbf{t}^{(+)} \cdot \mathbf{n}) \right] + 0(h^2). \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Remarquons que, jusqu'à présent, nous n'avons pas fait l'hypothèse que les phases et l'interphase sont individuellement homogènes. Quand une telle hypothèse est faite, la formule (5.42) prend la même forme alors que (5.43) se simplifie car les constantes matérielles peuvent sortir de l'opérateur différentiel  $\operatorname{div}_s$ .

## 5.2.4 Cas extrêmes

Comme ce que nous avons fait pour la conduction thermique, nous considérons deux cas extrêmes :

**Cas 1** - *Interphase très rigide* :

$$h = \epsilon h_0, \quad \mathbb{C}^{(0)} = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{C}_0^{(0)}, \quad \mathbb{C}^{(1)} = \mathbb{C}_0^{(1)}, \quad \mathbb{C}^{(2)} = \mathbb{C}_0^{(2)}; \tag{5.44}$$

**Cas 2** - *Interphase très souple* :

$$h = \epsilon h_0, \quad \mathbb{C}^{(0)} = \epsilon \mathbb{C}_0^{(0)}, \quad \mathbb{C}^{(1)} = \mathbb{C}_0^{(1)}, \quad \mathbb{C}^{(2)} = \mathbb{C}_0^{(2)}. \tag{5.45}$$

Ci-dessous,  $\epsilon$  est un paramètre adimensionnel positif très petit alors  $h_0$ ,  $\mathbb{C}_0^{(0)}$ ,  $\mathbb{C}_0^{(1)}$  et  $\mathbb{C}_0^{(2)}$

sont des valeurs de référence pour notre analyse asymptotique.

Dans le cas 1, à partir des définitions (5.11), (5.12), (5.14) et (5.23), nous pouvons écrire

$$\mathbf{F}^{(0)} = \epsilon \mathbf{F}_0^{(0)}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(0)} = \mathbf{\Lambda}_0^{(0)}, \quad \mathbf{\Theta}^{(0)} = \mathbf{\Theta}_0^{(0)}, \quad \mathbb{A}^{(0)} = \frac{1}{\epsilon} \mathbb{A}_0^{(0)}, \quad (5.46)$$

$$\mathbf{F}^{(i)} = \mathbf{F}_0^{(i)}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(i)} = \mathbf{\Lambda}_0^{(i)}, \quad \mathbf{\Theta}^{(i)} = \mathbf{\Theta}_0^{(i)}, \quad \mathbb{A}^{(0)} = \mathbb{A}_0^{(i)}, \quad (5.47)$$

où  $i = 1, 2$ . L'insertion de ces expressions dans les équations (5.15) et (5.24) nous conduire à conclure que

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad (5.48)$$

$$[\mathbf{t}] = -h \operatorname{div}_s(\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}), \quad (5.49)$$

où les termes d'ordres égal et supérieur à  $\mathbf{0}(h)$  sont négligés. Ces deux relations caractérisent en fait le modèle d'interface cohérente largement utilisé pour décrire les effets de surface et d'interface dans les matériaux nanométriques ([26], [27]).

Dans le cas 2, les expressions dans (5.46) sont remplacées par

$$\mathbf{F}^{(0)} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{F}_0^{(0)}, \quad \mathbf{\Lambda}^{(0)} = \mathbf{\Lambda}_0^{(0)}, \quad \mathbf{\Theta}^{(0)} = \mathbf{\Theta}_0^{(0)}, \quad \mathbb{A}^{(0)} = \epsilon \mathbb{A}_0^{(0)}. \quad (5.50)$$

En introduisant ces expressions et (5.47) dans (5.15) et (5.24), nous en déduisons que

$$[\mathbf{t}] = \mathbf{0}, \quad (5.51)$$

$$[\mathbf{u}] = h \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{t}, \quad (5.52)$$

où les termes d'ordres égal et supérieur à  $\mathbf{0}(h)$  ne sont pas pris en compte. Ces deux relations correspondent à celles définissant le modèle d'interface du type ressort qui est souvent utilisé pour étudier les matériaux hétérogènes (voir, par exemple, Duan et al [28], Lipton R. [66]).

L'interface imparfaite définie par (5.48) et (5.49) est une membrane collée à deux solides. L'équation (5.48) traduit la continuité du vecteur de déplacement et l'équation (5.48) provient de l'équilibre de la membrane. Pour voir ce dernier point, nous écrivons l'équation (5.48) sous la forme

$$[\mathbf{t}] = -\operatorname{div}_s \boldsymbol{\sigma}_s \quad (5.53)$$

avec

$$\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbb{C}_s^{(0)} : \boldsymbol{\varepsilon}_s, \quad \mathbb{C}^{(s)} = h\mathbb{A}^{(0)}. \quad (5.54)$$

Ci-dessus, (5.53) est la fameuse équation d'Young-Laplace et (5.54) est la loi de Hooke pour la membrane. Quand l'interphase est isotrope, le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^{(s)}$  est déterminé à l'aide de (5.38) par

$$\mathbb{C}^{(s)} = \lambda_s \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} + 2\mu_s \mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{P}. \quad (5.55)$$

avec

$$\lambda_s = \frac{2\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} h\lambda^{(0)}, \quad \mu_s = h\mu^{(0)}. \quad (5.56)$$

L'interface imparfaite définie par (5.51) et (5.52) est équivalent un ressort reliant deux solides. Il convient d'écrire l'équation (5.52) sous la forme

$$[\mathbf{u}] = \mathbf{K}^{(s)} \cdot \mathbf{t} \quad (5.57)$$

avec

$$\mathbf{K}^{(s)} = h\mathbf{F}^{(0)}. \quad (5.58)$$

Si l'interphase est isotrope, nous utilisons (5.35) pour obtenir

$$\mathbf{K}^{(s)} = \frac{h}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} \mathbf{P}^\perp + \frac{h}{\mu^{(0)}} \mathbf{P}.$$

Les discussions que nous venons d'effectuer montrent clairement que l'approche asymptotique permet non seulement d'établir de nouveaux modèles d'interface imparfaite mais aussi de mieux appréhender les modèles d'interface imparfaite existants qui ont été initialement proposés en se basant sur des considérations intuitives.

## 5.3 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^{N+1})$ avec

$$N \geq 2$$

### 5.3.1 Forme générale du modèle

Comme dans le cas thermique, quand l'épaisseur  $h$  d'une interphase entre deux solides devient modérée, un modèle d'interface imparfaite élastique dont le degré d'approximation

est supérieur à  $0(h^2)$  est nécessaire. Dans cette section, nous développons un modèle général d'interface imparfaite dont le degré de précision est de l'ordre de  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 2$  pouvant être fixé selon le besoin. Le problème principal à résoudre dans la construction de ce modèle général est de déterminer les dérivées normales supérieures du vecteur de déplacement et du vecteur de contrainte sur une surface en fonction de certaines quantités continues à travers cette dernière. Dans un premier temps, nous exprimons formellement ces dérivées par

$$\nabla_n^r \mathbf{u} = \nabla^r \mathbf{u} \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r} = \mathbf{f}_r(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}), \quad (5.59)$$

$$\nabla_n^r \mathbf{t} = \nabla^r \mathbf{t} \bullet^r \mathbf{n}^{\otimes r} = \mathbf{g}_r(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}). \quad (5.60)$$

Ci-dessus,  $\nabla_n^r \mathbf{u}$  et  $\nabla_n^r \mathbf{t}$  sont les dérivées normales d'ordre  $r$  respectivement du vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  et du vecteur de contrainte  $\mathbf{t}$ . Les fonctions  $\mathbf{f}_r$  et  $\mathbf{g}_r$  avec  $r \geq 2$  seront déterminées dans la sous-section suivante.

Moyennant les formules (5.59) et (5.60), le modèle général d'interface imparfaite d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 1$  est complètement caractérisé par

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} [\mathbf{f}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}) - (-1)^r \mathbf{f}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} [\mathbf{f}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) - (-1)^r \mathbf{f}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \\ &\quad + \sum_{r=1}^N \sum_{p=r}^{N-r} \left(\frac{h}{2}\right)^{r+p} \frac{1}{r!} \frac{1}{p!} \begin{bmatrix} (-1)^p \mathbf{f}_{r,p}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)}) \\ - (-1)^r \mathbf{f}_{r,p}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) \end{bmatrix} + 0(h^{N+1}), \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}] &= \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} [\mathbf{g}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}) - (-1)^r \mathbf{g}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &\quad - \sum_{r=1}^N \left(\frac{h}{2}\right)^r \frac{1}{r!} [\mathbf{g}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) - (-1)^r \mathbf{g}_r(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \\ &\quad + \sum_{r=1}^N \sum_{p=r}^{N-r} \left(\frac{h}{2}\right)^{r+p} \frac{1}{r!} \frac{1}{p!} \begin{bmatrix} (-1)^p \mathbf{g}_{r,p}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)}) \\ - (-1)^r \mathbf{g}_{r,p}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) \end{bmatrix} + 0(h^{N+1}). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Dans ces expressions,  $\mathbf{f}_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(i)})$  ou  $\mathbf{g}_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(i)})$  représentent la dérivée normale résultant d'abord d'une dérivée normale d'ordre  $r$  dans la phase 0 et ensuite

d'une dérivée normale d'ordre  $p$  dans la phase  $i$ . Ils se satisfont aux relations suivantes

$$\mathbf{f}_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(i)}) = \mathbf{f}_p^{(i)} \circ \mathbf{f}_r^{(i)} \text{ et } \mathbf{g}_{r,p}(\bullet, \bullet; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(i)}) = \mathbf{g}_p^{(i)} \circ \mathbf{g}_r^{(i)} \quad (5.63)$$

Nous n'avons pas obtenu les relations de récurrence pour les termes mixtes  $\mathbf{f}_{r,p}$  et  $\mathbf{g}_{r,p}$ . Mais nous pouvons utiliser les relations (5.63) enfin d'obtenir les expressions des termes mixtes  $\mathbf{f}_{r,p}$  et  $\mathbf{g}_{r,p}$ .

### 5.3.2 Dérivation des expressions de $\mathbf{f}_r$ et $\mathbf{g}_r$

Les définitions de  $\mathbf{f}_r$  et  $\mathbf{g}_r$  et le fait que  $\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 0$  nous permettent immédiatement d'obtenir deux formules de base :

$$\mathbf{f}_r = \nabla \mathbf{f}_r \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{g}_r = \nabla \mathbf{g}_r \cdot \mathbf{n}. \quad (5.64)$$

A partir de celles-ci et sous hypothèse que les phases et l'interphase sont individuellement homogènes, nous obtenons les formules de récurrence :

$$\mathbf{f}_N = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-1} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r} \cdot \mathbf{L}^r), \quad (5.65)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_N = & - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} [\nabla_s (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-1-r}] : \mathbf{L}^r \\ & - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-1-r} \frac{(N-1-r)!}{(N-1-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^r, \end{aligned} \quad (5.66)$$

avec les définitions

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{u} \quad \text{et} \quad \mathbf{g}_0 = \mathbf{t} \quad (5.67)$$

Il est direct de vérifier que ces formules de récurrence fournissent effectivement les expressions (5.13) et (5.21) de  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  quand  $N = 1$ .

Les formules (5.65) et (5.66) restent à démontrer par récurrence. Supposons qu'elles sont vraies pour  $N - 1$ , c'est-à-dire que

$$\mathbf{f}_{N-1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-2} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r} \cdot \mathbf{L}^r),$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{N-1} &= - \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-1-r}] : \mathbf{L}^r \\ &\quad - \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-2-r} \frac{(N-2-r)!}{(N-2-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^r. \end{aligned}$$

En accord avec (5.64), nous pouvons écrire

$$\mathbf{f}_N = \nabla \mathbf{f}_{N-1} \cdot \mathbf{n} = \nabla [\mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-2} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r} \cdot \mathbf{L}^r)] \cdot \mathbf{n},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_N &= \nabla \mathbf{g}_{N-1} \cdot \mathbf{n} = - \nabla \left\{ \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} [\nabla_s (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-2-r}] : \mathbf{L}^r \right\} \cdot \mathbf{n} \\ &\quad - \nabla \left\{ \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-2-r} \frac{(N-2-r)!}{(N-2-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^r \right\} \cdot \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Dans ces deux expressions,

$$\begin{aligned} &\nabla [\mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-2} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r} \cdot \mathbf{L}^r)] \cdot \mathbf{n} \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-1} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} [(r+1) \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r} \cdot \mathbf{L}^{r+1} + \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r} \cdot \mathbf{L}^r] \\ &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_{N-1} - \mathbf{\Lambda} : \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r} \cdot \mathbf{L}^r) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\nabla \left\{ \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-2-r}] : \mathbf{L}^r \right\} \cdot \mathbf{n} \\ &= \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \{ (r+1) \nabla_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-2-r}] : \mathbf{L}^{r+1} + \nabla_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-1-r}] : \mathbf{L}^r \} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} [\nabla_s (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{f}_{N-1-r}] : \mathbf{L}^r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \nabla \left\{ \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-2-r} \frac{(N-2-r)!}{(N-2-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^r \right\} \cdot \mathbf{n} \\
&= \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} (r+1) \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-2-r} \frac{(N-2-r)!}{(N-2-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^{r+1} \\
&+ \sum_{r=0}^{N-2} \frac{(N-2)!}{(N-2-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-2-r} \frac{(N-2-r)!}{(N-2-r-k)!} \left[ \begin{array}{c} (k+1) \nabla_s \mathbf{f}_{N-2-r-k} \cdot \mathbf{L}^{k+1} \\ + \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \end{array} \right] \right) \right] : \mathbf{L}^r \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \nabla_s \left[ \mathbb{C} : \left( \sum_{k=0}^{N-1-r} \frac{(N-1-r)!}{(N-1-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} \cdot \mathbf{L}^k \right) \right] : \mathbf{L}^r
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons prouvé les formules (5.65) et (5.66).

Quand les phases et l'interphase sont isotropes, l'utilisation des expressions (5.35), (5.36) et (5.33) de  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{\Lambda}$  et  $\mathbb{C}$  dans (5.65) et (5.66) nous donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_N &= \left( \frac{1}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P}^\perp + \frac{1}{\mu} \mathbf{P} \right) \cdot \mathbf{g}_{N-1} \\
&- \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \left[ \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{n} (\nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r} : \mathbf{L}^r) + \mathbf{n} \cdot \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r} \cdot \mathbf{L}^r \right],
\end{aligned} \tag{5.68}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_N &= - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \nabla_s \left[ \begin{array}{c} \left( \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P} + \mathbf{P}^\perp \right) \mathbf{n} \cdot \mathbf{g}_{N-1-r} \\ + (\mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_{N-1-r}) \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes (\mathbf{P} \cdot \mathbf{g}_{N-1-r}) \end{array} \right] : \mathbf{L}^r \\
&- \sum_{r=0}^{N-1} \frac{(N-1)!}{(N-1-r)!} \nabla_s \left[ \begin{array}{c} \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \mathbf{P} \left( \sum_{k=0}^{N-1-r} \frac{(N-1-r)!}{(N-1-r-k)!} \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} : \mathbf{L}^k \right) \\ + \mu \left[ \mathbf{P} \cdot \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} \cdot \mathbf{L}^k + (\mathbf{P} \cdot \nabla_s \mathbf{f}_{N-1-r-k} \cdot \mathbf{L}^k)^T \right] \end{array} \right] : \mathbf{L}^r.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

### 5.3.3 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^4)$

Le modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^4)$  est celui le plus important ayant le degré d'approximation supérieur à  $0(h^2)$ . La raison est qu'il a un lien très étroit avec la théorie des plaques et des coques quand l'interphase est très rigide par rapport aux phases. Dans cette sous-section, nous détaillons ce modèle en appliquant les formules générales (5.61), (5.62), (5.65) et (5.66).

Il résulte de (5.61), (5.62) que

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &- [\mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}) + \mathbf{f}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)})] \end{aligned} \right\} \\
&- \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{f}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) - \mathbf{f}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &+ [\mathbf{f}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) - \mathbf{f}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{h^2}{4} [\mathbf{f}_{1,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) - \mathbf{f}_{1,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] \\
&+ \frac{h^3}{48} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{f}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{f}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &- [\mathbf{f}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{f}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{h^3}{16} [\mathbf{f}_{1,2}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{f}_{1,2}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] \\
&- \frac{h^3}{16} [\mathbf{f}_{2,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{f}_{2,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] + \mathbf{0}(h^4),
\end{aligned} \tag{5.70}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &- [\mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}) + \mathbf{g}_1(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)})] \end{aligned} \right\} \\
&- \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{g}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) - \mathbf{g}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &+ [\mathbf{g}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) - \mathbf{g}_2(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{h^2}{4} [\mathbf{g}_{1,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) - \mathbf{g}_{1,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] \\
&+ \frac{h^3}{48} \left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{g}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}) + \mathbf{g}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)})] \\ &- [\mathbf{g}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{g}_3(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)})] \end{aligned} \right\} \\
&+ \frac{h^3}{16} [\mathbf{g}_{1,2}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{g}_{1,2}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] \\
&- \frac{h^3}{16} [\mathbf{g}_{2,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(2)}) + \mathbf{g}_{2,1}(\nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbb{C}^{(1)})] + \mathbf{0}(h^4).
\end{aligned} \tag{5.71}$$

Les expressions explicites des fonctions  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  ont été fournies précédemment. Quant aux autres fonctions intervenant dans les deux équations ci-dessus, nous obtenons leurs

expressions explicites en appliquant les formules de récurrence (5.65) et (5.66) :

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_2 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_1 - \mathbf{\Lambda} : (\nabla_s \mathbf{f}_1 + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}) \\
&= \mathbf{F} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t})] - \mathbf{\Lambda} : [\nabla_s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}] \\
\mathbf{f}_{1,1}^{(0,i)} &= \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{g}_1^{(i)} - \mathbf{\Lambda}^{(0)} : (\nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}) \\
&= \mathbf{F}^{(0)} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta}^{(i)} \cdot \mathbf{t})] - \mathbf{\Lambda}^{(0)} : [\nabla_s (\mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_2 &= -\operatorname{div}_s [\mathbb{A} : (\nabla_s \mathbf{f}_1 + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} - \operatorname{div}_s (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{g}_1) - \nabla_s (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \\
&= -\operatorname{div}_s [\mathbb{A} : (\nabla_s \{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u} \} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\
&\quad - \operatorname{div}_s \{ \mathbf{\Theta} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t})] \} - \nabla_s (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1,1}^{(0,i)} &= -\operatorname{div}_s [\mathbb{A}^{(0)} : (\nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\
&\quad - \operatorname{div}_s (\mathbf{\Theta}^{(0)} \cdot \mathbf{g}_1^{(i)}) - \nabla_s (\mathbf{\Theta}^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \\
&= -\operatorname{div}_s [\mathbb{A}^{(0)} : (\nabla_s \{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\
&\quad - \operatorname{div}_s \{ \mathbf{\Theta}^{(0)} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta}^{(i)} \cdot \mathbf{t})] \} - \nabla_s (\mathbf{\Theta}^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_3 &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{g}_2 - \mathbf{\Lambda} : (\nabla_s \mathbf{f}_2 + 2\nabla_s \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2) \\
&= \mathbf{F} \cdot \left\{ \begin{aligned} &-\operatorname{div}_s [\mathbb{A} : (\nabla_s \{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u} \} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ &-\operatorname{div}_s \{ \mathbf{\Theta} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t})] \} - \nabla_s (\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{aligned} \right\} \\
&\quad - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \{ \mathbf{F} \cdot [-\operatorname{div}_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t})] - \mathbf{\Lambda} : [\nabla_s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}] \} \\
&\quad - 2\mathbf{\Lambda} : [\nabla_s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u}) \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{1,2}^{(0,i)} &= \mathbf{f}_1^{(i)} \circ \mathbf{f}_{1,1}^{(0,i)} \\
&= \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{g}_2^{(i)} - \Lambda^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_2^{(i)} + 2\nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \\
&= \mathbf{F}^{(0)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(i)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ & -\operatorname{div}_s \left\{ \Theta^{(i)} \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) \right] \right\} - \nabla_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{aligned} \right\} \\
&\quad - \Lambda^{(0)} : \nabla_s \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{F}^{(i)} \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) \right] \\ & -\Lambda^{(i)} : \left[ \nabla_s \left( \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right] \end{aligned} \right\} \\
&\quad - 2\Lambda^{(0)} : \left[ \nabla_s \left( \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_{1,2}^{(0,i)} &= \mathbf{f}_1^{(i)} \circ \mathbf{f}_2^{(0)} \\
&= \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{g}_{1,1}^{(0,i)} - \Lambda^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_{1,1}^{(0,i)} + \nabla_s \mathbf{f}_1^{(0)} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \\
&= \mathbf{F}^{(0)} \cdot \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ & -\operatorname{div}_s \left\{ \Theta^{(0)} \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) \right] \right\} - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{aligned} \right\} \\
&\quad - \Lambda^{(0)} : \nabla_s \left\{ \begin{aligned} & \mathbf{F}^{(0)} \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) \right] \\ & -\Lambda^{(0)} : \left[ \nabla_s \left( \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right] \end{aligned} \right\} \\
&\quad - \Lambda^{(0)} : \left[ \nabla_s \left( \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \left( \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_3 &= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_2 + 2\nabla_s \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] - 2\nabla_s \left[ \mathbb{A} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_1 + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&\quad - 2\nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 - \operatorname{div}_s (\Theta \cdot \mathbf{g}_2) - 2\nabla_s (\Theta \cdot \mathbf{g}_1) : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2 \\
&= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A} : \nabla_s \left\{ \mathbf{F} \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) \right] - \Lambda : \left[ \nabla_s (\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \Lambda : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right] \right\} \right] \\
&\quad - 2\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \Lambda : \nabla_s \mathbf{u} \right\} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&\quad - 2\nabla_s \left[ \mathbb{A} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \Lambda : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 \\
&\quad - \operatorname{div}_s (\Theta \cdot \left\{ \begin{aligned} & -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \Lambda : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] - \nabla_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ & -\operatorname{div}_s \left\{ \Theta \cdot \left[ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) \right] \right\} - \nabla_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{aligned} \right\}) \\
&\quad - 2 \left[ \nabla_s (\Theta \cdot \left\{ -\operatorname{div}_s (\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) \right\}) : \mathbf{L} + \nabla_s (\Theta \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{1,2}^{(0,i)} &= \mathbf{g}_1^{(i)} \circ \mathbf{g}_{1,1}^{(0,i)} \\
&= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_2^{(i)} + 2\nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] - 2\nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&\quad - 2\nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 - \operatorname{div}_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{g}_2^{(i)}) - 2\nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{g}_1^{(i)}) : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2 \\
&= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^{(i)} \cdot [-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})] \\ -\Lambda^{(i)} : \left[ \nabla_s (\mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right] \\
&\quad - 2\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&\quad - 2\nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 \\
&\quad - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(i)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ -\operatorname{div}_s \left\{ \Theta^{(i)} \cdot [-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})] \right\} - \nabla_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{array} \right\}) \\
&\quad - 2 \left[ \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \{-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})\}) : \mathbf{L} + \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{g}_{2,1}^{(0,i)} &= \mathbf{g}_1^{(i)} \circ \mathbf{g}_2^{(0)} \\
&= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_{1,1}^{(0,i)} + \nabla_s \mathbf{f}_1^{(0)} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&\quad - \nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_1^{(0)} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} - \nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \mathbf{f}_1^{(i)} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&\quad - 2\nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 - \operatorname{div}_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{g}_{1,1}^{(0,i)}) - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{g}_1^{(0)}) : \mathbf{L} \\
&\quad - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{g}_1^{(i)}) : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2 \\
&= -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}^{(0)} \cdot [-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})] \\ -\Lambda^{(0)} : \left[ \nabla_s (\mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right] \\
&\quad - \operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&\quad - \nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(0)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&\quad - \nabla_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L}^2 \\
&\quad - \operatorname{div}_s (\Theta^{(0)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} -\operatorname{div}_s \left[ \mathbb{A}^{(0)} : \left( \nabla_s \left\{ \mathbf{F}^{(i)} \cdot \mathbf{t} - \Lambda^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u} \right\} + \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L} \right) \right] - \nabla_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ -\operatorname{div}_s \left\{ \Theta^{(0)} \cdot [-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})] \right\} - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{array} \right\}) \\
&\quad - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \{-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t})\}) : \mathbf{L} \\
&\quad - \nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \{-\operatorname{div}_s (\mathbb{A}^{(i)} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s (\Theta^{(i)} \cdot \mathbf{t})\}) : \mathbf{L} - 2\nabla_s (\Theta^{(0)} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L}^2
\end{aligned}$$

Ces formules sont très lourdes. Leur interprétation physique de chaque terme dans ces formules est loin d'être facile. A cause de cette difficulté, la portée du modèle d'interface

imparfaite d'ordre  $0(h^4)$  n'est pas clarifiée pour l'instant.

## 5.4 Matériaux hétérogènes

Dans l'établissement du modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^2)$ , les phases et l'interphase n'étaient pas contraintes à être homogènes. Par contre, dans la construction du modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^{N+1})$  avec  $N \geq 2$ , nous avons fait l'hypothèse que les phases et l'interphase sont individuellement homogènes. Pour relaxer cette hypothèse, nous pouvons procéder de la façon suivante.

A partir des expressions de  $\mathbf{f}_1$ , nous calculons

$$\mathbf{f}_2 = \nabla \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{n} = \nabla [\mathbf{F} \cdot \mathbf{t} - \mathbf{\Lambda} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P})] \cdot \mathbf{n}.$$

Comme les phases et l'interphase sont hétérogènes, nous avons

$$\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \neq 0, \quad \nabla \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{n} \neq 0, \quad \nabla \mathbb{A} \cdot \mathbf{n} \neq 0, \quad \nabla \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{n} \neq 0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_2(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) &= (\nabla \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t} + (\nabla \mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{n}) : \nabla_s \mathbf{u} - \mathbf{F} \cdot \text{div}_s(\mathbb{A} \cdot \nabla_s \mathbf{u}) - \mathbf{F} \cdot \text{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t}) \\ &\quad - \mathbf{\Lambda} : \nabla_s(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) + \mathbf{\Lambda} : \nabla_s(\mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u}) - \mathbf{\Lambda} : (\nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{L}). \end{aligned} \quad (5.72)$$

D'une manière similaire, nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_2(\nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}) &= -\text{div}_s[(\nabla \mathbb{A} \cdot \mathbf{n}) : \nabla_s \mathbf{u}] - \text{div}_s[(\nabla \mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{t}] \\ &\quad - \text{div}_s[\mathbb{A} : [\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{t}) \cdot \mathbf{P}]] + \text{div}_s[\mathbb{A} : \nabla_s(\mathbf{\Lambda} : \nabla_s \mathbf{u})] \\ &\quad - \text{div}_s[\mathbb{A} : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{L})] - \nabla_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u}) : \mathbf{L} \\ &\quad + \text{div}_s[\mathbf{\Theta} \cdot \text{div}_s(\mathbb{A} : \nabla_s \mathbf{u})] + \text{div}_s[\mathbf{\Theta} \cdot \text{div}_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t})] - \nabla_s(\mathbf{\Theta} \cdot \mathbf{t}) : \mathbf{L} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Les fonctions  $\mathbf{f}_N$  et  $\mathbf{g}_N$  ( $N \geq 3$ ) peuvent être déduites en suivant la même démarche.

# Chapitre 6

## Interfaces imparfaites piézoélectriques

### 6.1 Schéma de modélisation et équations de base

Un champ électrique se produit dans certains corps sous l'action d'une force mécanique. Réciproquement, ces certains corps se déforment lorsque nous leur appliquons un champ électrique. Ce phénomène, appelé la piézoélectricité, a été découvert en 1886 par Pierre et Jacques Curie. Nous nous référons au livre de Nye [80] pour plus de détails sur la piézoélectricité.

Les matériaux piézoélectriques jouent un rôle important dans la fabrication des capteurs et actionneurs. En particulier, les matériaux composites piézoélectrique sont largement utilisés dans les technologies modernes. Dans la prédiction des propriétés effectives de ces composites, les interfaces entre différentes phases sont souvent supposées parfaites. En réalité, à cause de la fabrication et des effets physico-chimiques, l'hypothèse des interfaces parfaites n'est pas acceptable dans de nombreuses situations. Dans une étude sur les composites fibreux piézoélectriques, Benveniste [6] considère l'existence d'une interphase mince entre la matrice et les fibres. La modélisation des interfaces imparfaites piézoélectriques s'appuie essentiellement est essentiellement basée sur le modèle d'interface imparfaite du type ressort proposé de façon phénoménologique [88] et [97].

Dans ce chapitre, nous développons une approche rigoureuse pour construire des modèles d'interface imparfaites piézoélectriques. Cette approche est une extension des méthodes élaborées dans les deux chapitres précédents à la prise en compte des effets couplés

dans les matériaux piézoélectriques.

La loi de comportement des matériaux piézoélectriques linéaires est définie par (voir, par exemple, [82] [80])

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\Pi}^T \cdot \mathbf{e}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{d} = \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}. \quad (6.2)$$

Dans ces deux relations,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  est le tenseur de déformation infinitésimales qui est lié au vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  par

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} \left[ \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right], \quad (6.3)$$

$\boldsymbol{\sigma}$  est le tenseur de contrainte de Cauchy qui doit satisfaire aux équations d'équilibre

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}, \quad (6.4)$$

en absence de force volumique,  $\mathbf{e}$  est le champ électrique qui est dérivé d'un potentiel électrique  $\varphi$  par

$$\mathbf{e} = -\nabla \varphi \quad (6.5)$$

et  $\mathbf{d}$  est le déplacement électrique qui doit vérifier l'équation de Maxwell

$$\operatorname{div} \mathbf{d} = 0 \quad (6.6)$$

en absence de charge électrique. Dans (6.1) et (6.1),  $\mathbb{C}$  représente le tenseur de rigidité,  $\boldsymbol{\Pi}$  le tenseur de piézoélectricité et  $\mathbf{M}$  le tensor diélectrique. Ces tenseurs ont les symétries suivantes :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{klij}, \quad \Pi_{ijk} = \Pi_{ikj}, \quad M_{ij} = M_{ji}. \quad (6.7)$$

Donc, en général,  $\mathbb{C}$ ,  $\boldsymbol{\Pi}$  et  $\mathbf{M}$  comportent respectivement 21, 18 et 6 constantes matérielles. De plus,  $\mathbb{C}$  et  $\mathbf{M}$  sont définis positifs.

Comme dans les deux chapitres précédents, le schéma de modélisation considéré est une interphase piézoélectrique d'épaisseur uniforme  $h$ , appelée phase 0, entre deux solides piézoélectriques, dénotés comme étant les phases 1 et 2 (Fig. 7.1). Dans la configuration (a), l'interface  $S_1$  entre la phase 1 et l'interphase et l'interface  $S_2$  entre la phase 2 et

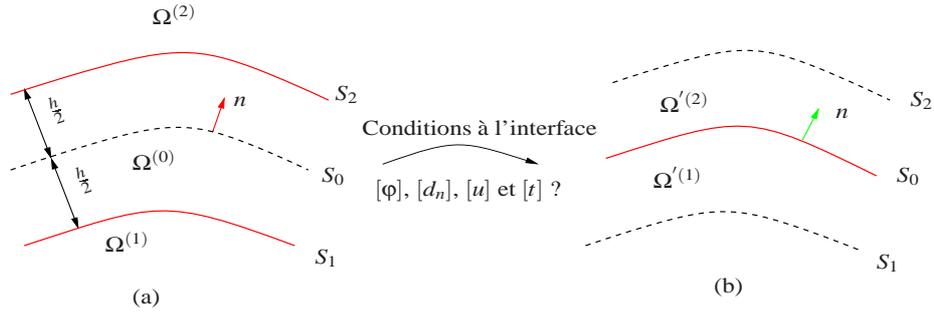


FIG. 6-1 – Schéma de modélisation : (a) phase 1/interphase 0/medium 2; (b) phase 1/interface imparfaite/phase 2

l'interphase sont parfaites. Donc, à travers les interfaces  $S_1$  et  $S_2$ , nous avons

$$\varphi^{(0)}|_{S_1} = \varphi^{(1)}|_{S_1}, \quad \varphi^{(0)}|_{S_2} = \varphi^{(2)}|_{S_2}, \quad (6.8)$$

$$d_{\mathbf{n}}^{(0)}|_{S_1} = d_{\mathbf{n}}^{(1)}|_{S_1}, \quad d_{\mathbf{n}}^{(0)}|_{S_2} = d_{\mathbf{n}}^{(2)}|_{S_2}, \quad (6.9)$$

$$\mathbf{u}^{(0)}|_{S_1} = \mathbf{u}^{(1)}|_{S_1}, \quad \mathbf{u}^{(0)}|_{S_2} = \mathbf{u}^{(2)}|_{S_2}, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{t}^{(0)}|_{S_1} = \mathbf{t}^{(1)}|_{S_1}, \quad \mathbf{t}^{(0)}|_{S_2} = \mathbf{t}^{(2)}|_{S_2}, \quad (6.11)$$

où  $d_{\mathbf{n}}^{(0)} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{n}$  est le déplacement électrique normal. Dans ce chapitre, nous allons établir un modèle général permettant le remplacement de l'interphase par une interface imparfaite dans la configuration (b).

Il est intéressant de noter que, quand le tenseur piézoélectrique  $\mathbf{\Pi}$  traduisant le couplage électricité-élasticité est égal à zéro, nous retrouvons les équations de base rappelées dans les deux chapitres précédents. En effet, la conduction électrique est mathématiquement identique à la conduction thermique. Mais, dans ce chapitre, nous nous contentons de construire le modèle d'interface imparfaite piézoélectrique d'ordre  $0(h^2)$  et d'examiner les cas extrêmes physiquement parlants. Les modèles d'interface imparfaite piézoélectrique du degré de précision supérieur à  $0(h^2)$  sont caractérisés par des relations complexes. Ils ne seront pas développés dans cette thèse.

## 6.2 Modèle d'interface imparfaite d'ordre $0(h^2)$

### 6.2.1 Forme générale du modèle

Le raisonnement sur lequel s'appuie la dérivation du modèle d'interface imparfaite piézoélectrique d'ordre  $0(h^2)$  est similaire à celui utilisé pour établir le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^2)$ . Nous ne le répéterons pas ici. L'écriture finale du modèle piézoélectrique nécessite simplement les dérivées normales de  $\varphi$ ,  $d_n$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$ . Ces dérivées seront exprimées en fonction de  $\nabla_s \varphi$ ,  $d_n$ ,  $\nabla_s \mathbf{u}$  et  $\mathbf{t}$  :

$$\begin{aligned}\nabla_n \mathbf{u} &= \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{A}(\nabla_s \varphi, d_n, \nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{M}), \\ \nabla_n \varphi &= \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = \mathcal{B}(\nabla_s \varphi, d_n, \nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{M}), \\ \nabla_n d_n &= \nabla d_n \cdot \mathbf{n} = \mathcal{C}(\nabla_s \varphi, d_n, \nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{M}), \\ \nabla_n \mathbf{t} &= \nabla \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{D}(\nabla_s \varphi, d_n, \nabla_s \mathbf{u}, \mathbf{t}; \mathbb{C}, \mathbf{\Pi}, \mathbf{M}),\end{aligned}\tag{6.12}$$

avec les tenseurs matériels  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbf{\Pi}$  et  $\mathbf{M}$  comme étant les paramètres.

Ensuite, le modèle d'interface imparfaite piézoélectrique d'ordre  $0(h^2)$  est formellement caractérisé par les relations gouvernant les sauts  $[\mathbf{u}]$ ,  $[\varphi]$ ,  $[d_n]$  et  $[\mathbf{t}]$  à travers l'interface dans la configuration (b) de la figure 7.1 :

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_n^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{A} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_n^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}, \mathbf{\Pi}^{(1)}, \mathbf{M}^{(1)} \right] \end{array} \right\} \\ &+ \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_n^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{A} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_n^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}, \mathbf{\Pi}^{(2)}, \mathbf{M}^{(2)} \right] \end{array} \right\} + 0(h^2),\end{aligned}\tag{6.13}$$

$$\begin{aligned}[\varphi] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_n^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{B} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_n^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}, \mathbf{\Pi}^{(1)}, \mathbf{M}^{(1)} \right] \end{array} \right\} \\ &+ \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{B} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_n^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{B} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_n^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}, \mathbf{\Pi}^{(2)}, \mathbf{M}^{(2)} \right] \end{array} \right\} + 0(h^2),\end{aligned}\tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}
[d_{\mathbf{n}}] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_{\mathbf{n}}^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{C} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_{\mathbf{n}}^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}, \mathbf{\Pi}^{(1)}, \mathbf{M}^{(1)} \right] \end{array} \right\} \\
&+ \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{C} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_{\mathbf{n}}^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{C} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_{\mathbf{n}}^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}, \mathbf{\Pi}^{(2)}, \mathbf{M}^{(2)} \right] \end{array} \right\} + 0(h^2),
\end{aligned} \tag{6.15}$$

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}] &= \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_{\mathbf{n}}^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{D} \left[ \nabla_s \varphi^{(-)}, d_{\mathbf{n}}^{(-)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(-)}, \mathbf{t}^{(-)}; \mathbb{C}^{(1)}, \mathbf{\Pi}^{(1)}, \mathbf{M}^{(1)} \right] \end{array} \right\} \\
&+ \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_{\mathbf{n}}^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(0)}, \mathbf{\Pi}^{(0)}, \mathbf{M}^{(0)} \right] \\ -\mathcal{D} \left[ \nabla_s \varphi^{(+)}, d_{\mathbf{n}}^{(+)}, \nabla_s \mathbf{u}^{(+)}, \mathbf{t}^{(+)}; \mathbb{C}^{(2)}, \mathbf{\Pi}^{(2)}, \mathbf{M}^{(2)} \right] \end{array} \right\} + 0(h^2).
\end{aligned} \tag{6.16}$$

Pour expliciter ce modèle, il reste à obtenir les expressions explicites des fonctions dans les quatre équations précédentes.

### 6.2.2 Expressions des fonctions $\mathcal{A}$ , $\mathcal{B}$ , $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$

Les gradients  $\nabla\varphi$  et  $\nabla\mathbf{u}$  admettent les décompositions :

$$\nabla\varphi = \mathbf{P} \cdot \nabla\varphi + \mathbf{P}^\perp \cdot \nabla\varphi = \nabla_s \varphi + (\nabla_n \varphi) \mathbf{n}, \tag{6.17a}$$

$$\nabla\mathbf{u} = \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{P} + \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}^\perp = \nabla_s \mathbf{u} + \nabla_n \mathbf{u} \otimes \mathbf{n}. \tag{6.17b}$$

Le vecteur de contrainte peut s'exprimer en fonction de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et  $\mathbf{e}$  via la loi de comportement (6.1) :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n}. \tag{6.18}$$

En introduisant les décompositions (6.17a) et (6.17b) dans l'équation précédente, nous obtenons

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \cdot \mathbb{C} : \nabla_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \nabla_s \varphi + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \nabla_n \varphi. \tag{6.19}$$

En même temps, la composante normale du vecteur de déplacement électrique est calculée par (6.2) :

$$\begin{aligned} d_n &= \mathbf{d} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}) \cdot \mathbf{n} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}) \cdot \mathbf{n} \\ &= (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}) : \nabla_s \mathbf{u} + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \nabla_n \varphi. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dans les équations (6.19) et (6.20), il y a seulement  $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$  qui sont discontinues à travers une interface parfaite. Donc, à partir de ces deux équations, nous pouvons déduire les expressions explicites des fonctions  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$ .

En divisant les deux côtés de l'équations (6.20) par  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ , il vient que

$$\nabla_n \varphi = -\frac{d_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}) : \nabla_s \mathbf{u}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}. \quad (6.21)$$

L'insertion de (6.21) dans (6.19) conduit à l'équation

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right] : \nabla_s \mathbf{u} \\ &+ \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right] \cdot \nabla_n \mathbf{u} \\ &+ \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right] \cdot \nabla_s \varphi - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} d_n. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Afin de exprimer  $\nabla_n \mathbf{u}$ , nous calculons l'inverse du tenseur du second ordre dans le deuxième terme du membre droit :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right]^{-1} \\ &= \mathbf{F} - \frac{[\mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n})] \otimes [\mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})]}{1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{F} \cdot (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n})}, \end{aligned} \quad (6.23)$$

où  $\mathbf{F} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})^{-1}$  a été déjà défini par (5.12). En multipliant les deux côtés de l'équation (6.22) par  $\mathbf{G}$ , nous obtenons

$$\mathcal{A} = \nabla_n \mathbf{u} = A^t \cdot \mathbf{t} + A^{d_n} d_n + A^u : \nabla_s \mathbf{u} + A^\varphi \cdot \nabla_s \varphi \quad (6.24)$$

avec

$$\begin{aligned}
A^t &= \mathbf{G}, & A^{d_n} &= \mathbf{G} \cdot \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}, \\
A^u &= -\mathbf{G} \cdot \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{C}) + \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right] \odot \mathbf{P}, \\
A^\varphi &= -\mathbf{G} \cdot \left[ \mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T - \frac{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right] \cdot \mathbf{P}.
\end{aligned} \tag{6.25}$$

En utilisant (6.24) dans (6.21), nous avons

$$\mathcal{B} = \nabla_n \varphi = B^t \cdot \mathbf{t} + B^{d_n} d_n + B^u : \nabla_s \mathbf{u} + B^\varphi \cdot \nabla_s \varphi \tag{6.26}$$

avec

$$\begin{aligned}
B^t &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \cdot A^t, & B^{d_n} &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \cdot A^{d_n} - \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}, \\
B^u &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \cdot A^u + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \odot \mathbf{P}, & B^\varphi &= \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \cdot A^\varphi - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{P}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Ensuite, nous décomposons la divergence  $\text{div } \mathbf{d}$  comme suit :

$$\text{div } \mathbf{d} = \nabla \mathbf{d} : \mathbf{P} + \nabla \mathbf{d} : \mathbf{P}^\perp = \text{div}_s \mathbf{d} + \nabla \mathbf{d} : \mathbf{P}^\perp. \tag{6.28}$$

Il résulte de cette décomposition et de l'équation de Maxwell (6.6) que

$$\nabla \mathbf{d} : \mathbf{P}^\perp = -\text{div}_s \mathbf{d}. \tag{6.29}$$

De plus, du fait que  $\nabla \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}$ , nous avons  $\nabla_n d_n = \nabla d_n \cdot \mathbf{n} = \nabla \mathbf{d} : \mathbf{P}^\perp = -\text{div}_s \mathbf{d}$ . Avec la loi (6.2), cette dernière relation s'écrit encore sous la forme

$$\begin{aligned}
\nabla_n d_n &= -\text{div}_s \mathbf{d} = -\text{div}_s (\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}) \\
&= -\text{div}_s (\mathbf{\Pi} : \nabla_s \mathbf{u}) - \text{div}_s [(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u}] \\
&\quad + \text{div}_s (\mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi) + \text{div}_s (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} \nabla_n \varphi)
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Dans cette équation, nous avons déjà obtenu les expressions explicites (6.24) et (6.26)

pour  $\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  et  $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}$ . L'introduction de ces expressions dans (6.30) donne

$$\mathcal{C} = \nabla_n d_{\mathbf{n}} = \operatorname{div}_s [C^t \cdot \mathbf{t} + \operatorname{div}_s C^{dn} d_{\mathbf{n}} + C^u : (\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{P}) + C^\varphi \cdot \mathbf{P} \cdot \nabla \varphi] \quad (6.31)$$

avec

$$\begin{aligned} C^t &= -(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^t + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \otimes B^t, \\ C^{dn} &= -(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^{dn} + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) B^{dn}, \\ C^u &= -(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^u + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \otimes B^u - \mathbf{\Pi} \odot \mathbf{P}, \\ C^\varphi &= -(\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^\varphi + (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \otimes B^\varphi + \mathbf{M} \cdot \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Pour trouver l'expression de la fonction, nous faisons appel à la formule (5.18) et à la loi (6.1). Ainsi,

$$\begin{aligned} \nabla_n \mathbf{t} &= -\operatorname{div}_s \boldsymbol{\sigma} = -\operatorname{div}_s (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{e}) \\ &= -\operatorname{div}_s [\mathbb{C} : \nabla_s \mathbf{u}] - \operatorname{div}_s [(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \nabla_n \mathbf{u}] \\ &\quad - \operatorname{div}_s (\mathbf{\Pi}^T \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n} \nabla_n \varphi). \end{aligned} \quad (6.33)$$

La substitution des expressions (6.24) et (6.26) de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  dans cette équation aboutit à

$$\mathcal{D} = \nabla_n \mathbf{t} = \operatorname{div}_s (D^t \cdot \mathbf{t} + D^{dn} d_{\mathbf{n}} + D^u : \nabla_s \mathbf{u} + D^\varphi \cdot \nabla_s \varphi) \quad (6.34)$$

où

$$\begin{aligned} D^t &= -(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^t - (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes B^t, \\ D^{dn} &= -(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^{dn} - (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) B^{dn}, \\ D^u &= -(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^u - (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes B^u - \mathbb{C} \odot \mathbf{P}, \\ D^\varphi &= -(\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot A^\varphi - (\mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{n}) \otimes B^\varphi - \mathbf{\Pi}^T \cdot \mathbf{P}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Enfin, nous examinons le cas particulier où  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}$ . Dans ce cas, il est immédiat de la formule (6.23) que  $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ . En posant  $\mathbf{\Pi} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{G} = \mathbf{F}$  dans les expressions de  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$

and  $\mathcal{D}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \mathbf{F} \cdot [\mathbf{t} - (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}) : \nabla_s \mathbf{u}], \\ \mathcal{B} &= -\frac{d_{\mathbf{n}}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}, \\ \mathcal{C} &= \operatorname{div}_s (\mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s \left[ (\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}) \left( \frac{d_{\mathbf{n}}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla_s \varphi}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}} \right) \right], \\ \mathcal{D} &= -\operatorname{div}_s (\mathbb{C} : \nabla_s \mathbf{u}) - \operatorname{div}_s \{ (\mathbb{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{F} \cdot [\mathbf{t} - (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}) : \nabla_s \mathbf{u}] \}.\end{aligned}$$

Nous constatons que les expressions de  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{D}$  correspondent à celles de  $\mathbf{f}_1$  et  $\mathbf{g}_1$  dans le modèle d'interface imparfaite élastique d'ordre  $0(h^2)$  alors que les formules de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  sont mathématiquement identiques à celles de  $P_1$  et  $Q_1$  dans le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^2)$ . Ces coïncidences étaient attendues et constituent une vérification pour notre modèle d'interface imparfaite piézoélectrique d'ordre  $0(h^2)$ .

### 6.2.3 Matériaux isotropes transverses

Dans un matériau isotrope, l'effet piézoélectrique ne peut pas se produire. Donc, la particularisation du modèle d'interface imparfaite piézoélectrique établi ci-dessus doit se faire dans un cas anisotrope.

Nous supposons qu'une interphase isotrope transverse est située entre deux phases qui sont elles-mêmes isotropes transverses. De plus, leurs axes d'isotropie transverse sont supposés coïncidents. Soit  $\mathbf{m}$  le vecteur unitaire définissant l'axe d'isotropie de l'interphase et des deux phases. Il convient d'introduire deux opérateurs de projection complémentaires du second ordre

$$\mathbf{P}_1^\perp = \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad \mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{m} \otimes \mathbf{m}, \quad (6.36)$$

et deux opérateurs de projection complémentaires du quatrième ordre

$$\mathbb{P}_1 = \mathbf{P}_1 \underline{\otimes} \mathbf{P}_1, \quad \mathbb{P}_1^\perp = \mathbb{I} - \mathbb{P}_1. \quad (6.37)$$

Alors, les tenseurs matériels  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{\Pi}$  et  $\mathbf{M}$  ont les formes invariantes suivantes [15] [101]

[85] :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &= (C_{11} - C_{12})\mathbb{P} + 2C_{44}\mathbb{P}^\perp + C_{12}\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_1 \\ &+ C_{13}(\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_1^\perp + \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}_1) + (C_{33} - 2C_{44})\mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}_1^\perp, \end{aligned} \quad (6.38)$$

$$\mathbb{\Pi} = \Pi_{31}\mathbf{m} \otimes \mathbf{P}_1 + (\Pi_{33} - 2\Pi_{15})\mathbf{m} \otimes \mathbf{P}_1^\perp + 2\Pi_{15}\mathbf{m}.\mathbb{I}, \quad (6.39)$$

$$\mathbb{\Pi}^T = \Pi_{31}\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{m} + (\Pi_{33} - 2\Pi_{15})\mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{m} + 2\Pi_{15}\mathbb{I}.\mathbf{m}, \quad (6.40)$$

$$\mathbf{M} = M_{11}\mathbf{P}_1 + M_{33}\mathbf{P}_1^\perp.$$

Il est également utile d'écrire les matrices  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{\Pi}$  et  $\mathbf{M}$ . Pour ceci, nous nous plaçons dans une base orthonormée  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  avec  $\mathbf{e}_3 = \mathbf{m}$ . Par rapport à cette base, nous avons alors

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}, \quad (6.41)$$

$$\mathbb{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{15} & 0 \\ \Pi_{31} & \Pi_{31} & \Pi_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.42)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_{11} & 0 & 0 \\ 0 & M_{11} & 0 \\ 0 & 0 & M_{33} \end{bmatrix}. \quad (6.43)$$

En résumé, nous avons 5 constantes élastiques, 3 constantes piézoélectriques et 2 constantes diélectriques.

Le tenseur  $\mathbf{G}$  défini par (6.23) prend la forme

$$\mathbf{G} = \frac{1}{C_{11}}\mathbf{P}^\perp + \frac{M_{11}}{M_{11}C_{44} + \Pi_{15}^2}\mathbf{P}_1^\perp + \frac{2}{C_{11} - C_{12}}\mathbf{P}_2^\perp \quad (6.44)$$

avec

$$\mathbf{P}_2^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}^\perp - \mathbf{P}_1^\perp. \quad (6.45)$$

Ensuite, nous calculons les différentes quantités nécessaires aux expressions explicites des fonctions  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  comme suit :

$$\begin{aligned} A^t &= \frac{1}{C_{11}} \mathbf{P}^\perp + \frac{M_{11}}{M_{11}C_{44} + \Pi_{15}^2} \mathbf{P}_1^\perp + \frac{2}{C_{11} - C_{12}} \mathbf{P}_2^\perp, \\ A^{dn} &= \frac{\Pi_{15}}{M_{11}C_{44} + \Pi_{15}^2} \mathbf{m}, \\ A^u &= - \left( \mathbf{P} \otimes \mathbf{n} + \frac{C_{13} - C_{12}}{C_{11}} \mathbf{n} \otimes \mathbf{P}_1^\perp + \frac{C_{12}}{C_{11}} \mathbf{n} \otimes \mathbf{P} \right), \\ A^\varphi &= - \frac{\Pi_{31}}{C_{11}} \mathbf{n} \otimes \mathbf{m}; \end{aligned} \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} B^t &= \frac{\Pi_{15}}{M_{11}C_{44} + \Pi_{15}^2} \mathbf{m}, & B^{dn} &= - \frac{C_{44}}{M_{11}C_{44} + \Pi_{15}^2} \\ B^u &= 0, & B^\varphi &= 0; \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\begin{aligned} C^t &= - \frac{\Pi_{31}}{C_{11}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}, & C^{dn} &= - \mathbf{n}, \\ C^u &= \frac{(C_{13} - C_{12} + C_{11}) \Pi_{31} - C_{11} (\Pi_{33} - 2\Pi_{15})}{C_{11}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{P}_1^\perp \\ &\quad + \frac{\Pi_{31} (C_{12} - C_{11})}{C_{11}} \mathbf{m} \otimes \mathbf{P} - \Pi_{15} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{P} \otimes \mathbf{m}), \\ C^\varphi &= \frac{(M_{33} - M_{11}) C_{11} + \Pi_{31}^2}{C_{11}} \mathbf{P}_1^\perp + M_{11} \mathbf{P}; \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$D^{\mathbf{t}} = - \left[ \frac{C_{11} - C_{12}}{C_{11}} \mathbf{P}^\perp \otimes \mathbf{n} + (\mathbf{P} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{P}) + \frac{C_{12}}{C_{11}} \mathbf{I} \otimes \mathbf{n} + \frac{C_{13} - C_{12}}{C_{11}} \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{n} \right], \quad (6.49)$$

$$D^{d\mathbf{n}} = 0,$$

$$\begin{aligned} D^{\mathbf{u}} = & \left[ \frac{C_{11} - C_{12}}{2} (\mathbf{P}_1 \overline{\otimes} \mathbf{P}^\perp + \mathbf{P}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{P}_1) - (C_{11} - C_{12}) \mathbf{P}^\perp \otimes \mathbf{P}^\perp \right. \\ & + \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{13} - C_{12})}{C_{11}} \mathbf{P}^\perp \otimes \mathbf{P}_1^\perp + \frac{C_{12}(C_{13} - C_{12})}{C_{11}} \mathbf{P}^\perp \otimes \mathbf{P} \\ & + C_{44} (\mathbf{P}_1^\perp \overline{\otimes} \mathbf{P}^\perp + \mathbf{P}^\perp \underline{\otimes} \mathbf{P}_1^\perp) + \frac{C_{12}(C_{13} - C_{12})}{C_{11}} \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_1^\perp \\ & + \frac{C_{12}^2}{C_{11}} \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P} + \frac{C_{13}(C_{13} - C_{12})}{C_{11}} \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}_1^\perp + \frac{C_{13}C_{12}}{C_{11}} \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P} \\ & - [C_{12} (\mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}^\perp) + C_{13} (\mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}^\perp + \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{P}_1^\perp) \\ & + (C_{11} - 2C_{44}) \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{P}_1^\perp + C_{44} (\mathbf{P} \overline{\otimes} \mathbf{I} + \mathbf{I} \underline{\otimes} \mathbf{P}) \\ & \left. + (C_{11} - C_{12} - C_{44}) (2\mathbf{P}_1 \overline{\otimes} \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}^\perp \overline{\otimes} \mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_1 \underline{\otimes} \mathbf{P}^\perp) \right], \\ D^\varphi = & \frac{\Pi_{31}(C_{11} - C_{12})}{C_{11}} (\mathbf{P}^\perp \otimes \mathbf{m} - \mathbf{P}_1 \otimes \mathbf{m}) \\ & + \frac{C_{13}\Pi_{31} - C_{11}(\Pi_{33} - 2\Pi_{15})}{C_{11}} \mathbf{P}_1^\perp \otimes \mathbf{m} + -2\Pi_{15} (\mathbf{P} \hat{\otimes} \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{P}). \end{aligned}$$

Si nous posons  $\Pi_{15} = \Pi_{31} = \Pi_{33} = 0$ , les expressions précédentes permettent d'obtenir les modèles d'interfaces imparfaite élastique et thermique dans le cas isotrope transverse.

## 6.2.4 Cas extrêmes

Comme nous l'avons vu dans les deux chapitres précédents, les discussions d'un modèle général d'interface imparfaite par rapport à certains cas extrêmes permettent d'une part de mieux l'appréhender et d'autre part d'obtenir des modèles particuliers qui sont importants d'un point de vue pratique. Dans cette sous-section, nous examinons les quatre cas extrêmes suivants, qui semblent physiquement fondés :

**Cas 1** - *Interphase très rigide et fortement conductrice* :

$$\begin{aligned} h &= \epsilon h_0, & \mathbb{C}^{(0)} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbb{C}_0^{(0)}, & \mathbf{M}^{(0)} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbf{M}_0^{(0)}, & \mathbf{\Pi}^{(0)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, \\ \mathbb{C}^{(i)} &= \mathbb{C}_0^{(i)}, & \mathbf{M}^{(i)} &= \mathbf{M}_0^{(i)}, & \mathbf{\Pi}^{(i)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(i)}, & (i &= 1, 2); \end{aligned}$$

**Cas 2** - *Interphase très rigide et faiblement conductrice* :

$$\begin{aligned} h &= \epsilon h_0, & \mathbb{C}^{(0)} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbb{C}_0^{(0)}, & \mathbf{M}^{(0)} &= \epsilon \mathbf{M}_0^{(0)}, & \mathbf{\Pi}^{(0)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, \\ \mathbb{C}^{(i)} &= \mathbb{C}_0^{(i)}, & \mathbf{M}^{(i)} &= \mathbf{M}_0^{(i)}, & \mathbf{\Pi}^{(i)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, & (i &= 1, 2); \end{aligned}$$

**Cas 3** - *Interphase très souple et fortement conductrice* :

$$\begin{aligned} h &= \epsilon h_0, & \mathbb{C}^{(0)} &= \epsilon \mathbb{C}_0^{(0)}, & \mathbf{M}^{(0)} &= \frac{1}{\epsilon} \mathbf{M}_0^{(0)}, & \mathbf{\Pi}^{(0)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, \\ \mathbb{C}^{(i)} &= \mathbb{C}_0^{(i)}, & \mathbf{M}^{(i)} &= \mathbf{M}_0^{(i)}, & \mathbf{\Pi}^{(i)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, & (i &= 1, 2); \end{aligned}$$

**Cas 4** - *Interphase très souple et faiblement conductrice* :

$$\begin{aligned} h &= \epsilon h_0, & \mathbb{C}^{(0)} &= \epsilon \mathbb{C}_0^{(0)}, & \mathbf{M}^{(0)} &= \epsilon \mathbf{M}_0^{(0)}, & \mathbf{\Pi}^{(0)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, \\ \mathbb{C}^{(i)} &= \mathbb{C}_0^{(i)}, & \mathbf{M}^{(i)} &= \mathbf{M}_0^{(i)}, & \mathbf{\Pi}^{(i)} &= \mathbf{\Pi}_0^{(0)}, & (i &= 1, 2); \end{aligned}$$

Ci-dessus,  $\epsilon$  est un paramètre adimensionnel très petit et  $h_0$ ,  $\mathbb{C}_0^{(0)}$ ,  $\mathbf{M}_0^{(0)}$ ,  $\mathbf{\Pi}_0^{(0)}$ ,  $\mathbb{C}_0^{(i)}$ ,  $\mathbf{M}_0^{(i)}$  et  $\mathbf{\Pi}_0^{(i)}$  sont quantités de référence.

Dans le cas 1, le modèle d'interface imparfaite piézoélectrique se réduit à

$$[\varphi] = 0, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad (6.50)$$

$$[d_{\mathbf{n}}] = h \operatorname{div}_s \left\{ \left[ \mathbf{M}^{(0)} - \frac{(\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \right] \cdot \nabla_s \varphi \right\}, \quad (6.51)$$

$$[\mathbf{t}] = -h \operatorname{div}_s \{ \mathbb{A}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} \}. \quad (6.52)$$

Ces quatre relations sont en fait la combinaison de celles caractérisant les modèles d'interface imparfaite cohérente thermique et élastique. Il est à noter qu'aucun terme piézoélectrique n'intervient dans ces relations. Donc, l'effet piézoélectrique n'est pas présent dans ce modèle particulier.

Concernant le cas 2, les relations décrivant les sauts deviennent

$$[d_{\mathbf{n}}] = 0, \quad [\mathbf{u}] = \mathbf{0}, \quad (6.53)$$

$$[\varphi] = h \left\{ + \left\{ \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \mathbf{G}^{(0)} \cdot \left[ (\mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^{(0)}) + \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \right] \right\} : \nabla_s \mathbf{u} \right\}, \quad (6.54)$$

$$[\mathbf{t}] = -h \operatorname{div}_s \{ \mathbb{C}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} + (\boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}) [\varphi] / h \} \quad (6.55)$$

$$- h \operatorname{div}_s \left[ (\mathbb{C}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{G}^{(0)} \cdot \left( \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}) d_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{n} \cdot \mathbb{C}^{(0)} : \nabla_s \mathbf{u} \right) \right].$$

Ci-dessus, les deux premières équations impliquent la continuité du déplacement électrique normal  $d_n$  et la continuité du vecteur de déplacement  $\mathbf{u}$  à travers l'interface; les deux dernières équations caractérisent le saut du potentiel électrique  $[\varphi]$  et le saut du vecteur de contrainte  $[\mathbf{t}]$  à travers l'interface. Contrairement au cas 1 où l'interphase est fortement conductrice, des termes de couplage interviennent dans les expressions de  $[\varphi]$  et  $[\mathbf{t}]$ . En posant  $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ , nous retrouvons le modèle d'interface imparfaite électrique de Kapitza et le modèle d'interface imparfaite cohérente élastique comme nous nous y attendions.

Quant au cas 3, nous en déduisons du modèle général d'interface imparfaite piézoélectrique les relations suivantes :

$$[\varphi] = 0, \quad [\mathbf{t}] = \mathbf{0}, \quad (6.56)$$

$$[\mathbf{u}] = h \mathbf{G}^{(0)} \cdot \left( \mathbf{t} - [\boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \nabla_s \varphi] \cdot \mathbf{n} + \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi)}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \right), \quad (6.57)$$

$$[d_n] = -h \operatorname{div}_s [(\boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{u}] / h] + \operatorname{div}_s (\mathbf{M}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi) \quad (6.58)$$

$$+ h \operatorname{div}_s \left( (\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \frac{(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\mathbf{u}] / h - \frac{[(\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n})] \cdot \nabla_s \varphi}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \right).$$

Les deux premières relations montrent la continuité du potentiel et la continuité du vecteur de contrainte à travers l'interface. Les deux dernières équations contiennent des termes de couplage et caractérisent les sauts  $[\mathbf{u}]$  et  $[d_n]$ . Quand  $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ , nous avons les relations décrivant le modèle d'interface cohérente électrique et le modèle d'interface élastique du

type "ressort".

Enfin, dans le cas 4, les sauts à travers l'interface sont définis par

$$[\mathbf{u}] = \frac{h}{2} \left\{ \mathbf{G}^{(0)} \cdot [\mathbf{t}^{(+)} + \mathbf{t}^{(-)}] + \mathbf{G}^{(0)} \cdot \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} [d_n^{(+)} + d_n^{(-)}] - \frac{\mathbf{G}^{(0)} \cdot (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)T} \cdot \mathbf{n}) \otimes (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)})}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} : \nabla_s [\mathbf{u}^{(+)} + \mathbf{u}^{(-)}] \right\}, \quad (6.59)$$

$$[\varphi] = \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\mathbf{u}] - \frac{h}{2} \left\{ \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} [d_n^{(+)} + d_n^{(-)}] - \frac{\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\Pi}^{(0)}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} : \nabla_s [\mathbf{u}^{(+)} + \mathbf{u}^{(-)}] \right\}, \quad (6.60)$$

$$[d_{\mathbf{n}}] = - (\boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) \cdot [\mathbf{u}], \quad [\mathbf{t}] = - (\boldsymbol{\Pi}^{(0)} \cdot \mathbf{n}) [\varphi]. \quad (6.61)$$

Contre toute attente, la composante  $d_n$  du déplacement électrique et le vecteur de contrainte  $\mathbf{t}$  ne sont pas continus à travers l'interface. Quand  $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{0}$ , nous retrouvons le modèle d'interface imparfaite électrique associé à une interphase faiblement conductrice et le modèle d'interface imparfaite élastique associé à une interphase très souple.

## Troisième partie

# Propriétés effectives de matériaux hétérogènes avec interfaces imparfaites

# Chapitre 7

## Méthodes d'Homogénéisation

Dans les méthodes d'homogénéisation classiques, les interfaces sont supposées parfaites. Ainsi, si l'on souhaite déterminer les propriétés effectives d'un composite avec interfaces imparfaites, il est nécessaire de pouvoir incorporer les modèles d'interfaces développés dans la partie précédente.

Dans ce chapitre, on rappelle tout d'abord certaines définitions de base micromécanique. Dans une seconde section, on présente la méthode de l'inclusion équivalente due à [30]. La démarche permet, en se basant sur un principe d'équivalence en énergie, de remplacer l'ensemble "inclusion et interface imparfaite" par une inclusion équivalente munie d'une interface parfaite. Cette substitution étant réalisée, toutes les méthodes d'homogénéisation classique peuvent être utilisées. On présente le principe général de détermination de la conduction thermique, des propriétés élastiques et piézoélectriques de l'inclusion équivalente.

### 7.1 Relations de base de la micromécanique

Dans cette première section, il s'agit de rappeler la définition des grandeurs moyennes dans les milieux hétérogènes. On s'intéresse successivement à la conduction thermique et aux comportements élastique et piézoélectrique. Pour chaque cas, le lemme de Hill-Mandel est rappelé.

On considère un volume  $\Omega$  occupé par un matériau hétérogène. Le contour du domaine  $\Omega$  est noté  $\partial\Omega$ .

## 7.1.1 Conduction thermique

### Vecteur flux de chaleur homogène au contour

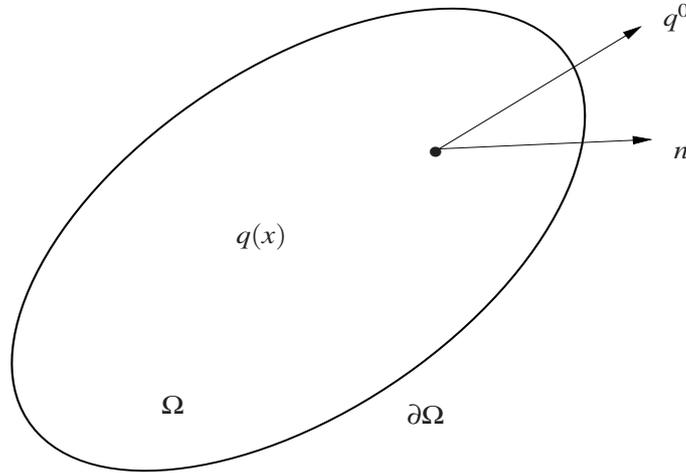


FIG. 7-1 – Conditions de vecteur flux de chaleur homogène au contour

On impose un vecteur flux de chaleur homogène sur  $\partial\Omega$  (Fig 7-1) :

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \mathbf{q}^0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (7.1)$$

où  $\mathbf{q}^0$  est un vecteur constant. Il en résulte aisément que la moyenne volumique de  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  est donnée par

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{q}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{\Omega} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{x} d\Omega = \mathbf{q}^0 \quad (7.2)$$

### Gradient de température homogène au contour

Appliquons des conditions aux limites de type gradient de température homogène sur  $\partial\Omega$  (7-2) :

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = -\mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (7.3)$$

où  $\mathbf{h}^0$  est un vecteur constant. On montre alors que la moyenne volumique de  $\mathbf{h}(\mathbf{x})$  est donnée par

$$\langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{h}(\mathbf{x}) d\Omega = \mathbf{h}^0 \quad (7.4)$$

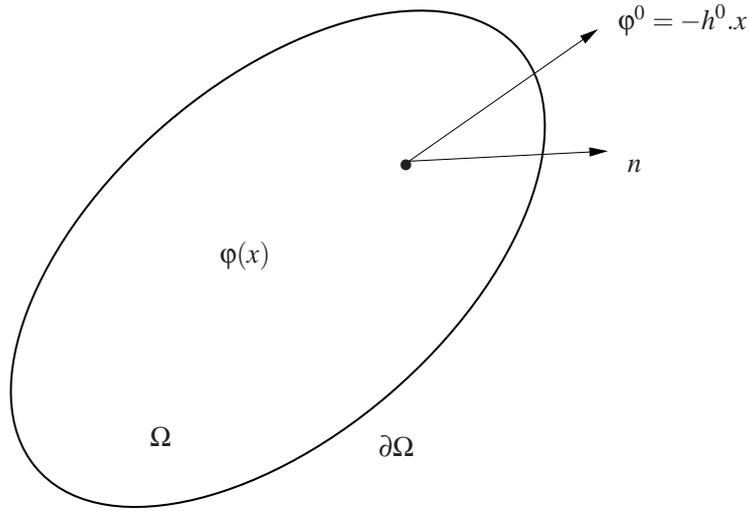


FIG. 7-2 – Conditions de gradient de température homogène au contour

### Lemme de Hill-Mandel

Pour tout gradient de température  $\mathbf{h}$  *cinématiquement admissible* (CA) et pour tout vecteur flux de chaleur  $\mathbf{q}$  *statiquement admissible* (SA), nous avons

$$\langle \mathbf{h} : \mathbf{q} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{h} \rangle_{\Omega} : \langle \mathbf{q} \rangle_{\Omega} \quad (7.5)$$

si

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \langle \mathbf{q} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{n})(\varphi - \langle \mathbf{h} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{x}) dS = 0 \quad (7.6)$$

### 7.1.2 Elasticité

#### Contraintes homogènes au contour

Considérons les conditions aux limites homogènes en contraintes sur  $\partial\Omega$  (Fig 7-3) :

$$\mathbf{t}^0(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (7.7)$$

où  $\boldsymbol{\Sigma}$  est un tenseur constant. On en déduit que la moyenne volumique de  $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$  est donnée par :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{t}^0 \otimes \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes \mathbf{t}^0) dS = \boldsymbol{\Sigma} \quad (7.8)$$

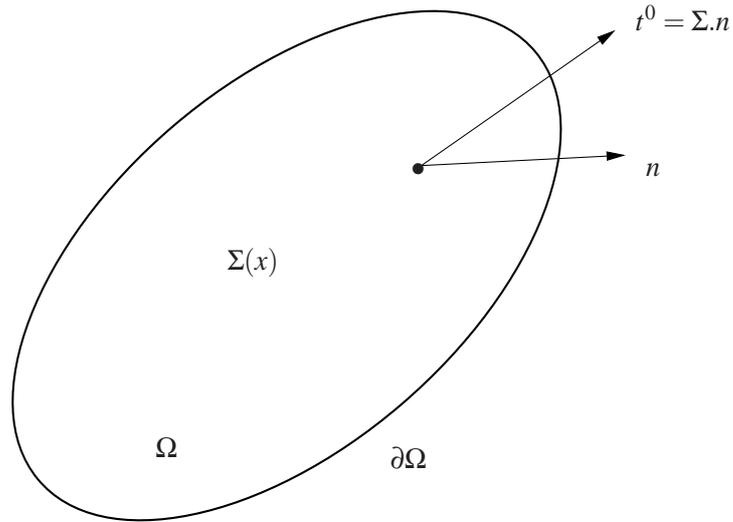


FIG. 7-3 – Conditions de contrainte homogène au contour

La moyenne volumique de  $\varepsilon(\mathbf{x})$  est définie par

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega$$

### Déformation homogènes au contour

Applique les conditions aux limites homogènes en, déformations sur  $\partial\Omega$  (Fig 7-4) :

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{E}.\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (7.9)$$

où  $\mathbf{E}$  est un tenseur constant. La moyenne volumique de  $\varepsilon(\mathbf{x})$  est alors donnée par :

$$\langle \varepsilon(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \varepsilon(\mathbf{x}) d\Omega = \frac{1}{2\Omega} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u}^0 \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{u}^0) dS = \mathbf{E} \quad (7.10)$$

La moyenne volumique de  $\sigma(\mathbf{x})$  est définie par

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \sigma(\mathbf{x}) d\Omega$$

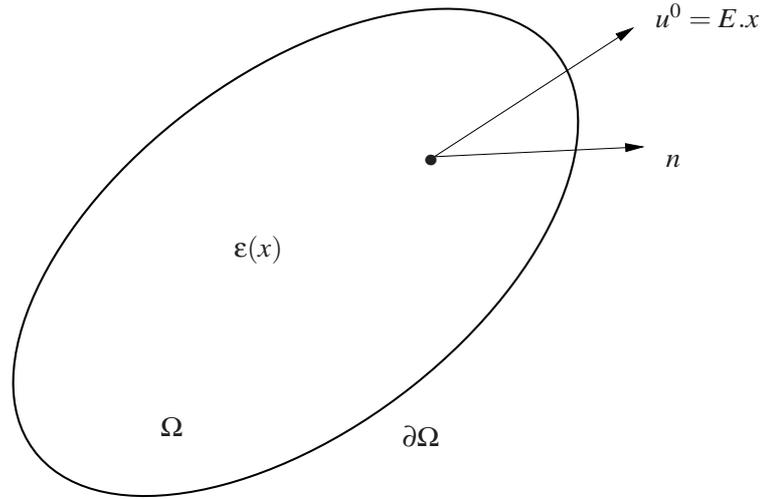


FIG. 7-4 – Conditions de déformation homogène au contour

### Lemme de Hill-Mandel

Pour tout champ de déformation  $\varepsilon$  CA et pour tout champ de contrainte  $\sigma$  SA, nous avons

$$\langle \varepsilon : \sigma \rangle_{\Omega} = \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} : \langle \sigma \rangle_{\Omega} \quad (7.11)$$

si

$$\int_{\partial\Omega} (\mathbf{t} - \langle \sigma \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{u} - \langle \varepsilon \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{x}) dS = 0 \quad (7.12)$$

### 7.1.3 Piézoélectricité

#### Champs statiques homogènes au contour

Imposons des conditions aux limites statiques homogènes sur le contour, cela revient à appliquer un champ de contrainte et un champ de déplacement électrique homogènes sur  $\partial\Omega$  :

$$(\mathbf{t}^0(\mathbf{x}), d_n^0(\mathbf{x})) = (\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}), \mathbf{d}^0 \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

où  $\Sigma$  et  $\mathbf{d}^0$  sont respectivement un tenseur et un vecteur constants. on montre alors les relations de moyenne :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega = \Sigma \quad (7.13)$$

$$\langle \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{d}(\mathbf{x}) d\Omega = \mathbf{d}^0 \quad (7.14)$$

Et par définition, les moyennes volumiques de  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x})$  et de  $\mathbf{e}(\mathbf{x})$  s'écrivent :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega$$

$$\langle \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{x}) d\Omega$$

### Champs cinématiques homogènes au contour

Les conditions aux limites cinématiques homogènes consiste à imposer un champ de déplacement et un champ électrique uniforme :

$$(\mathbf{u}^0(\mathbf{x}), \varphi^0(\mathbf{x})) = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \mathbf{e}^0 \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega$$

où  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{e}^0$  sont respectivement un tenseur et un vecteur constants. Dans ce cas, les relations suivantes peuvent être établies :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) d\Omega = \mathbf{E} \quad (7.15)$$

$$\langle \mathbf{e}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{e}(\mathbf{x}) d\Omega = \mathbf{e}^0 \quad (7.16)$$

Par définition, on a :

$$\langle \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega$$

$$\langle \mathbf{d}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \mathbf{d}(\mathbf{x}) d\Omega$$

### Lemme de Hill-Mandel [?]

Pour tous champs de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}$  et d'électricité  $\mathbf{e}$  CA et pour tous champs de contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  et de déplacement électrique  $\mathbf{d}$  SA, nous avons

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} : \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} \quad \text{et} \quad \langle \mathbf{e} : \mathbf{d} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{e} \rangle_{\Omega} : \langle \mathbf{d} \rangle_{\Omega} \quad (7.17)$$

si

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{t} - \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{u} - \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{d} \cdot \mathbf{n} - \langle \mathbf{d} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{n})(\varphi - \langle \mathbf{e} \rangle_{\Omega} \cdot \mathbf{x})] dS = 0 \quad (7.18)$$

## 7.2 Méthode de l'inclusion équivalente

Dans ce qui suit, on détaille la démarche permettant la substitution d'une inclusion avec interface imparfaite par une inclusion équivalente munie d'une interface parfaite. Le principe de la méthode présentée est dû à Duan et al. [30], [31] et repose sur une équivalence en énergie que l'on explicite pour la détermination des propriétés de conceptions thermique, élastique et piezoélectrique.

Commençons par expliquer le principe général de cette méthode en considérant le problème de conduction thermique illustré par la figure 7-5. Ainsi, supposons que l'on plonge une hétérogénéité dans un milieu infini et homogène (matrice) et appliquons un chargement de type température ou flux imposé à l'infini. Il s'agit de calculer l'énergie thermique dans trois cas :

1. soit  $w_0$  l'énergie en l'absence d'inclusion ;
2. la présence de l'inclusion constituée du matériau de conductivité  $\mathbf{K}^{(1)}$ , avec interface imparfaite (fig. 7-5a), entraîne une modification de l'énergie. Celle-ci est maintenant donnée par :

$$w_{(a)} = w_0 + \Delta w; \quad (7.19)$$

3. enfin, en présence d'une inclusion, constituée d'un matériau de conductivité  $\mathbf{K}^{(eq)}$ , avec interface parfaite (fig. 7-5b), l'énergie s'écrit :

$$w_{(b)} = w_0 + \Delta w_{eq}. \quad (7.20)$$

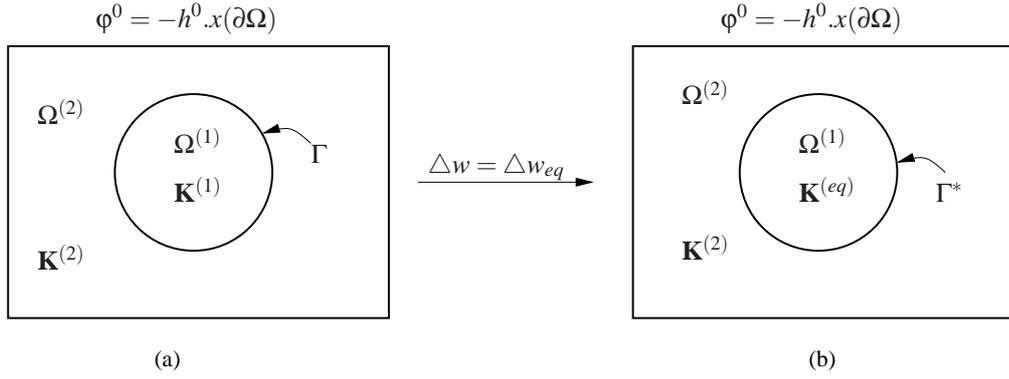


FIG. 7-5 – Schéma du processus de remplacement d’une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème de conductivité

L’objectif de la procédure de substitution est de déterminer  $\mathbf{K}^{(eq)}$  telle que les énergies  $w_{(a)}$  et  $w_{(b)}$  soient identiques, i.e. :

$$\Delta w = \Delta w_{eq} \quad (7.21)$$

Il s’agit d’expliciter cette équation pour les trois problèmes étudiés (thermique, élastique et piézoélectrique).

### 7.2.1 Problème de conduction thermique

Considérons tout d’abord le modèle illustré par la figure 7-5a où  $\Omega^{(2)}$  est un milieu infini et  $\Omega^{(1)}$  une inclusion dans  $\Omega^{(2)}$ . On note  $\Gamma$  l’interface imparfaite entre  $\Omega^{(1)}$  et  $\Omega^{(2)}$ , au travers de laquelle le flux normale et la température sont discontinus. Des conditions aux limites en température uniforme sont imposées :

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = -\mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (7.22)$$

L’énergie thermique du milieu est donnée par :

$$w = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{q} \cdot \mathbf{h} dV \quad (7.23)$$

En utilisant la loi de Fourier (4.2) et la condition d'équilibre (4.4), il vient :

$$w = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\varphi \mathbf{q}) dV = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q_{\mathbf{n}} \varphi dS \quad (7.24)$$

où l'on a fait appel au théorème de divergence. En y injectant les conditions aux limites (7.22), l'équation précédente s'écrit :

$$w = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} q_{\mathbf{n}}^{(2)} \varphi^0 dS \quad (7.25)$$

En remarquant que  $\partial\Omega^{(2)} = \partial\Omega \cup \Gamma$  et en utilisant de nouveau le théorème de la divergence, on obtient aisément :

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{h}^0 \cdot \int_{\Omega^{(2)}} \mathbf{q}^{(2)} dV - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q_{\mathbf{n}}^{(2)} \varphi^0 dS \quad (7.26)$$

Finalement, en injectant la loi de Fourier (4.2) dans la première intégrale de (7.26), il vient :

$$w = \frac{\Omega}{2} \mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h}^0 + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\varphi^{(2)} q_{\mathbf{n}}^0 - \varphi^0 q_{\mathbf{n}}^{(2)}) dS \quad (7.27)$$

En notant que le premier terme de cette équation correspond à l'énergie dans le volume en l'absence d'hétérogénéités, on identifie le terme

$$\Delta w = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\varphi^{(2)} q_{\mathbf{n}}^0 - \varphi^0 q_{\mathbf{n}}^{(2)}) ds \quad (7.28)$$

Il s'agit maintenant de déterminer le terme  $\Delta w_{eq}$  intervenant dans (7.21) et correspondant au supplément d'énergie due à la présence de l'hétérogénéité dans le problème représenté à la figure 7-5b. Rappelant que dans ce problème, l'interface  $\Gamma^*$  entre la matrice  $\Omega^{(2)}$  et l'inclusion  $\Omega^{(1)}$  est parfaite, on en déduit que la loi de comportement dans chaque phase peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h} \text{ dans } \Omega^{(2)} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{K}^{(1)} \cdot \mathbf{h} = \mathbf{K}^{(2)} \cdot (\mathbf{h} - \mathbf{h}^*) \text{ dans } \Omega^{(1)} \end{aligned} \quad (7.29)$$

où  $\mathbf{h}^*$  est gradient de température libre équivalent à la notion de déformation libre introduite par Mura [75].

L'énergie thermique dans le milieu est donnée par

$$w = \frac{\Omega}{2} \langle \mathbf{q} \cdot \mathbf{h} \rangle \quad (7.30)$$

d'où, en utilisant le lemme de Hill-Mandel (7.5) et en introduisant (7.29), il vient :

$$w = \frac{\Omega}{2} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h}_0 - \frac{1}{2} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \langle \mathbf{h}^* \rangle_{\Omega^{(1)}} \quad (7.31)$$

et l'on identifie aisément le supplément d'énergie :

$$\Delta w_{eq} = -\frac{1}{2} \mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{K}^{(2)} \cdot \langle \mathbf{h}^* \rangle_{\Omega^{(1)}} \quad (7.32)$$

A l'instar de Chen et Wang [19], on peut exprimer  $\mathbf{h}^*$  sous la forme

$$\mathbf{h}^* = \left[ \mathbf{K}^{(2)} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(eq)})^{-1} \cdot \mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{S}^{Esh} \right]^{-1} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h}^0) \quad (7.33)$$

où  $\mathbf{S}^{Esh}$  est le tenseur d'Eshelby pour le problème de conduction (cf. p. ex. [48]). En injectant l'expression (7.33) de  $\mathbf{h}^*$  dans (7.32), on déduit l'expression de  $\Delta w_{eq}$  sous la forme :

$$\Delta w_{eq} = \frac{V_{eq}}{2} (\mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{K}^{(2)}) \cdot \left[ \mathbf{K}^{(2)} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(eq)})^{-1} \cdot \mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{S}^{Esh} \right]^{-1} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h}^0) \quad (7.34)$$

Finalement, en insérant les expressions (7.28) de  $\Delta w$  et (7.34) de  $\Delta w_{eq}$  dans (7.21), on obtient l'équation permettant de déterminer la conductivité de l'inclusion équivalente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{V_{eq}} \int_{\Gamma} (\varphi^{(2)} q_n^0 - \varphi^0 q_n^{(2)}) dS \\ & = (\mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{K}^{(2)}) \cdot \left[ \mathbf{K}^{(2)} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(eq)})^{-1} \cdot \mathbf{K}^{(2)} - \mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{S}^{Esh} \right]^{-1} \cdot (\mathbf{K}^{(2)} \cdot \mathbf{h}^0) \end{aligned} \quad (7.35)$$

## 7.2.2 Problème d'élasticité

La démarche qui vient d'être détaillée pour la détermination de la conduction thermique est maintenant étendue à un composite à phases élastiques linéaires. Le problème étudié est présenté à la figure 7-6. Il s'agit d'établir la relation d'équivalence en énergie permettant de déterminer les propriétés élastiques  $\mathbb{C}^{(eq)}$  de l'inclusion équivalente.

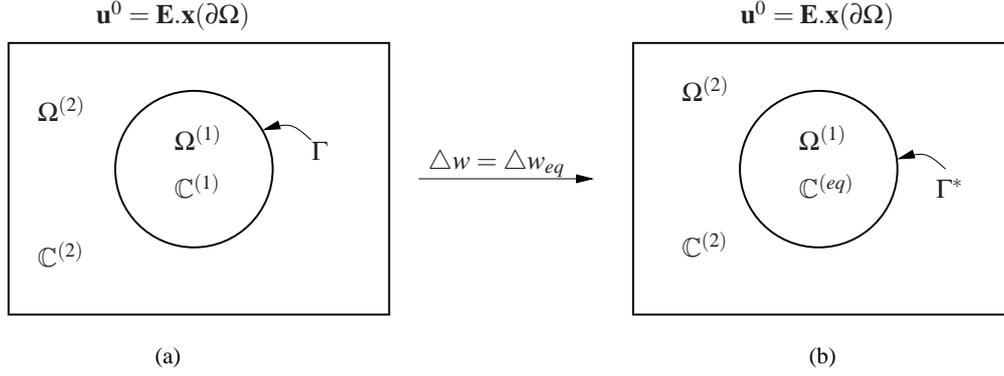


FIG. 7-6 – Schéma du processus de remplacement d’une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème d’élasticité

Des conditions aux limites de type déformation uniforme sont imposées sur le contour  $\partial\Omega$  :

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (7.36)$$

Tout d’abord, calculons l’énergie élastique dans le milieu comportant une inclusion avec interface imparfaite (Fig. 7-6-a), celle-ci s’exprime par :

$$w = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} dV. \quad (7.37)$$

En utilisant la définition du tenseur de déformation (5.3) et en invoquant le théorème de la divergence, on déduit :

$$w = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \sigma_{ij} u_i n_j dS. \quad (7.38)$$

Du fait que  $\partial\Omega^{(2)} = \partial\Omega \cup \Gamma$ , et en utilisant les conditions aux limites (7.36), il vient :

$$w = \frac{1}{2} E_{ij} \int_{\Omega^{(2)}} \sigma_{ij}^{(2)} dV + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} u_i^0 \sigma_{ij}^{(2)} n_j dS. \quad (7.39)$$

Par ailleurs, en injectant la loi de comportement élastique de la phase 2, on déduit :

$$w = \frac{\Omega}{2} E_{ij} C_{ijkl}^{(2)} E_{kl} + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u_i^0 \sigma_{ij}^{(2)} n_j - \Sigma_{ij} u_k^{(2)} n_l) dS. \quad (7.40)$$

Le premier terme de l’énergie élastique qui vient d’être calculé correspond à l’énergie élastique en l’absence d’hétérogénéités. Il est donc aisé d’identifier le second terme au

supplément d'énergie  $\Delta w$  du à la présence de l'inclusion :

$$\Delta w = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (u_i^0 \sigma_{ij}^{(2)} n_j - \Sigma_{ij} u_i^{(2)} n_j) dS. \quad (7.41)$$

Etudions maintenant le problème de la figure 7-6 -b; l'interface  $\Gamma^*$  entre le matrice  $\Omega^{(2)}$  et l'inclusion  $\Omega^{(1)}$  étant supposée parfaite, on écrit de façon classique la loi de comportement dans chaque phase :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon} \text{ dans } \Omega^{(2)} \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbb{C}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbb{C}^{(2)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \text{ dans } \Omega^{(1)} \end{aligned} \quad (7.42)$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  est la déformation libre dans l'inclusion. L'énergie élastique de déformation est donnée par :

$$w = \frac{\Omega}{2} \langle \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle \quad (7.43)$$

ce qui, à l'aide du lemme Hill-Mandel (7.11), s'écrit :

$$w = \frac{\Omega}{2} \langle \mathbb{C}^{(2)} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^*) \rangle : \mathbf{E} = \frac{\Omega}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{(2)} : \mathbf{E} - \frac{1}{2} \mathbf{E} : \mathbb{C}^{(2)} : \langle \boldsymbol{\varepsilon}^* \rangle_{\Omega^{(eq)}}. \quad (7.44)$$

En rappelant que la déformation libre  $\boldsymbol{\varepsilon}^*$  peut être exprimée en fonction de la déformation macroscopique  $\mathbf{E}$  par la relation (cf. p. ex. [75], [100], [79]) :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = [\mathbb{C}^{(2)} : (\mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(eq)})^{-1} : \mathbb{C}^{(2)} - \mathbb{C}^{(2)} : \mathbb{S}^{Esh}]^{-1} : (\mathbb{C}^{(2)} : \mathbf{E}) \quad (7.45)$$

où  $\mathbb{S}^{(Esh)}$  est le tenseur d'Eshelby, et en injectant (7.45) dans (7.44), on déduit l'expression du supplément d'énergie  $\Delta w_{eq}$  :

$$\Delta w_{eq} = \frac{V_{eq}}{2} (\mathbf{E} : \mathbb{C}^{(2)}) : [\mathbb{C}^{(2)} : (\mathbb{C}^{(eq)} - \mathbb{C}^{(2)})^{-1} : \mathbb{C}^{(2)} + \mathbb{C}^{(2)} : \mathbb{S}^{(Esh)}]^{-1} : (\mathbb{C}^{(2)} : \mathbf{E}). \quad (7.46)$$

Finalement, en introduisant l'expression de  $\Delta w$  donnée par (7.41) et celle de  $\Delta w_{eq}$  fournie par (7.46) dans la condition (7.21), on obtient une équation dont les propriétés élastiques de l'inclusion équivalente  $\mathbb{C}^{(eq)}$  sont solutions.

### 7.2.3 Problème de piézoélectricité

En suivant par exemple [72] et [73], on introduit de nouvelles variables qui vont nous permettre de réécrire les équations constitutives de la piézoélectricité sous une forme condensée. Ces variables sont définies par :

$$U_M = \begin{cases} u_m & \text{pour } M(=m) = 1, 2, 3 \\ \varphi & \text{pour } M = 4 \end{cases} \quad (7.47)$$

$$Z_{Mn} = \begin{cases} E_{mn} & \text{pour } M(=m) = 1, 2, 3 \\ -e_n & \text{pour } M = 4 \end{cases} \quad (7.48)$$

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{pour } J(=j) = 1, 2, 3 \\ d_i & \text{pour } J = 4 \end{cases} \quad (7.49)$$

$$\rho_J = \begin{cases} f_j & \text{pour } J(=j) = 1, 2, 3 \\ -\rho & \text{pour } J = 4 \end{cases} \quad (7.50)$$

$$F_{iJMn} = \begin{cases} K_{ijmn} & \text{pour } J, M = 1, 2, 3 \\ \Pi_{nij} & \text{pour } J = 1, 2, 3, M = 4 \\ \Pi_{ijn} & \text{pour } J = 4, M = 1, 2, 3 \\ -M_{ij} & \text{pour } J, M = 4 \end{cases} \quad (7.51)$$

Ainsi, les équations (6.1) et (6.2) peuvent être écrites sous la forme

$$\Sigma_{iJ} = F_{iJMn} Z_{Mn} \quad (7.52)$$

et les équations (6.4) et (??) deviennent

$$\Sigma_{iJ,i} = -\rho_J. \quad (7.53)$$

Il est fréquent d'identifier les coefficients  $F_{iJMn}$  aux composantes  $F_{sS}$  d'une matrice  $9 \times 9$ . La règle habituelle d'échange d'indices est la suivante

$$\begin{aligned} (11) &\rightarrow 1, (22) \rightarrow 2, (33) \rightarrow 3, (23) \rightarrow 4, (13) \rightarrow 6, \\ (12) &\rightarrow 6, (14) \rightarrow 7, (24) \rightarrow 8, (34) \rightarrow 9, \end{aligned} \quad (7.54)$$

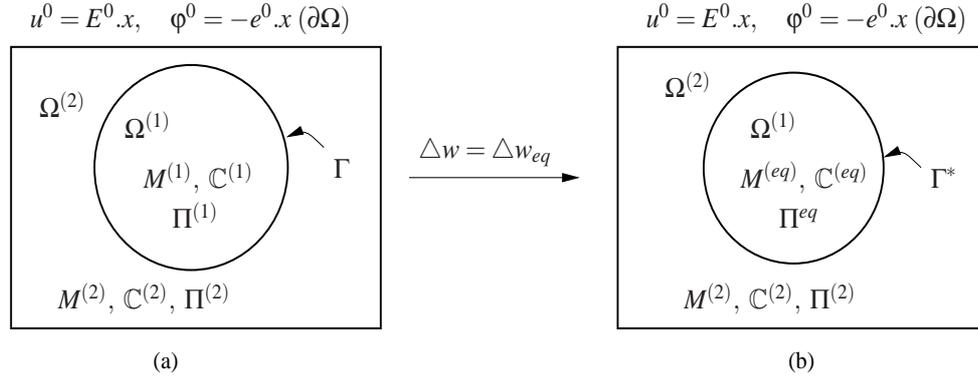


FIG. 7-7 – Schéma du processus de remplacement d’une inclusion avec une interface imparfaite par une inclusion avec une interface parfaite pour le problème de piézoélectricité

et elle permet d’écrire l’équation (7.52) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & \Pi_{11} & \Pi_{21} & \Pi_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} & \Pi_{13} & \Pi_{23} & \Pi_{33} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} & \Pi_{14} & \Pi_{24} & \Pi_{34} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} & \Pi_{15} & \Pi_{25} & \Pi_{35} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} & \Pi_{16} & \Pi_{26} & \Pi_{36} \\ \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} & \Pi_{14} & \Pi_{15} & \Pi_{16} & -M_{11} & -M_{12} & -M_{13} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \Pi_{23} & \Pi_{24} & \Pi_{25} & \Pi_{26} & -M_{12} & -M_{22} & -M_{23} \\ \Pi_{31} & \Pi_{32} & \Pi_{33} & \Pi_{34} & \Pi_{35} & \Pi_{36} & -M_{13} & -M_{23} & -M_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \\ -e_1 \\ -e_2 \\ -e_3 \end{pmatrix} \quad (7.55)$$

On notera que les équations (7.52) et (7.53) ont une structure mathématique similaire à celles de l’élasticité, cette remarque nous permet de proposer une analogie et d’écrire  $\Delta w$  dans le problème de la figure 7-7-a sous la forme

$$\Delta w = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (U_i^0 \Sigma_{ij}^{(2)} n_j - \Sigma_{ij}^{(0)} U_i^{(2)} n_j) dV \quad (7.56)$$

en référence à l’équation (7.41).

De la même façon, le supplément d’énergie  $\Delta w_{eq}$  dans le problème de la figure 7-7-b

est donné par

$$\Delta w_{eq} = \frac{V_{eq}}{2} (\mathbf{Z}^0 \cdot \mathbf{F}^{(2)}) \cdot [\mathbf{F}^{(2)} \cdot (\mathbf{F}^{(eq)} - \mathbf{F}^{(2)})^{-1} \cdot \mathbf{F}^{(2)} + \mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{S}]^{-1} \cdot (\mathbf{F}^{(2)} \cdot \mathbf{Z}^0) \quad (7.57)$$

où  $\mathbf{Z}$  est une matrice colonne  $9 \times 1$ ,  $\mathbf{F}$  une matrice  $9 \times 9$ , et  $\mathbf{S}$  est une matrice  $9 \times 9$  représentant le tenseur d'Eshlby piézoélectrique et définie dans [72] et [73].

L'introduction des expressions (7.56) de  $\Delta w$  et (7.57) de  $\Delta w_{eq}$  dans la condition d'équivalence en énergie (7.21) permet de déterminer les propriétés piézoélectriques de l'inclusion équivalente.

# Chapitre 8

## Conductivité thermique effective d'un composite à inclusions sphériques avec interface imparfaite

Ce chapitre est consacré à la détermination de la conductivité thermique effective d'un composite à inclusions sphériques avec interface imparfaite. La résolution de ce problème repose sur l'utilisation de la méthode d'inclusion équivalente présentée au chapitre précédent et du modèle d'interface proposé au chapitre 5.

Le chapitre est décomposé en trois parties. Après avoir présenté le problème, on déterminera les propriétés de l'inclusion équivalente. La conductivité effective du composite sera ensuite calculée en s'appuyant sur le schéma autocohérent généralisé. Dans cette dernière partie, les résultats obtenus pour plusieurs épaisseurs d'interface sont comparés au modèle à trois phases qui est ici la solution de référence, et au modèle proposé par Hashin [46].

### 8.1 Position du problème

On considère un VER d'un matériau biphasique constitué d'inclusions sphériques (phase 1) plongées dans une matrice (phase 2). Les matériaux constitutifs sont supposés obéir à la loi de Fourier isotrope .

Sur le contour extérieur  $\partial\Omega$  du VER, des conditions aux limites en température uni-

forme sont imposées ; celles-ci s'écrivent :

$$\varphi^0(\mathbf{x}) = -\mathbf{h}^0 \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (8.1)$$

A l'échelle macroscopique, le composite est supposé satisfaire à la loi de Fourier et être isotrope, la loi de comportement macroscopique est ainsi donnée par

$$\langle \mathbf{q}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = k^* \langle \mathbf{h}(\mathbf{x}) \rangle_{\Omega} = k^* \mathbf{h}^0. \quad (8.2)$$

Par ailleurs, on suppose que l'interface entre les inclusions et la matrice est imparfaite. Les sauts de température et de débit normal sont régis par les conditions (4.23) et (4.24). En introduisant l'hypothèse d'isotropie des matériaux, (4.23) et (4.24) s'écrivent sous la forme :

$$[\varphi] = \frac{h}{2} \left[ \left( \frac{1}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(0)}} \right) q_{\mathbf{n}}^{(-)} + \left( \frac{1}{k^{(2)}} - \frac{1}{k^{(0)}} \right) q_{\mathbf{n}}^{(+)} \right] \quad (8.3)$$

$$[q_{\mathbf{n}}] = \frac{h}{2} \left[ (k^{(0)} - k^{(1)}) \nabla(\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi^{(-)}) : \mathbf{P} + (k^{(0)} - k^{(2)}) \nabla(\mathbf{P} \cdot \nabla \varphi^{(+)}) : \mathbf{P} \right] \quad (8.4)$$

## 8.2 Conductivité de l'inclusion équivalente

La méthode de l'inclusion équivalente a été présentée de façon générale pour le problème de conduction au chapitre précédent. Le point essentiel réside dans le calcul du supplément d'énergie  $\Delta w$  due à la présence de l'inclusion avec interface imparfaite dans un milieu infini constitué de la matrice. On considère donc la microstructure de la figure 8-1, c'est à dire une inclusion  $\Omega_1$  de rayon  $R$  plongée dans un milieu infini. On adopte un repère cartésien dont l'origine coïncide avec le centre de l'inclusion et, au contour, des conditions aux limites de type (8.1) sont imposées avec

$$\mathbf{h}^0 = H \mathbf{e}_3. \quad (8.5)$$

La forme générale du champ de température dans chaque phase est donnée, par exemple, par Torquato [92] :

$$\varphi^{(i)} = A^{(i)} H x_3 - \frac{B^{(i)}}{r^3} H x_3 \quad (8.6)$$

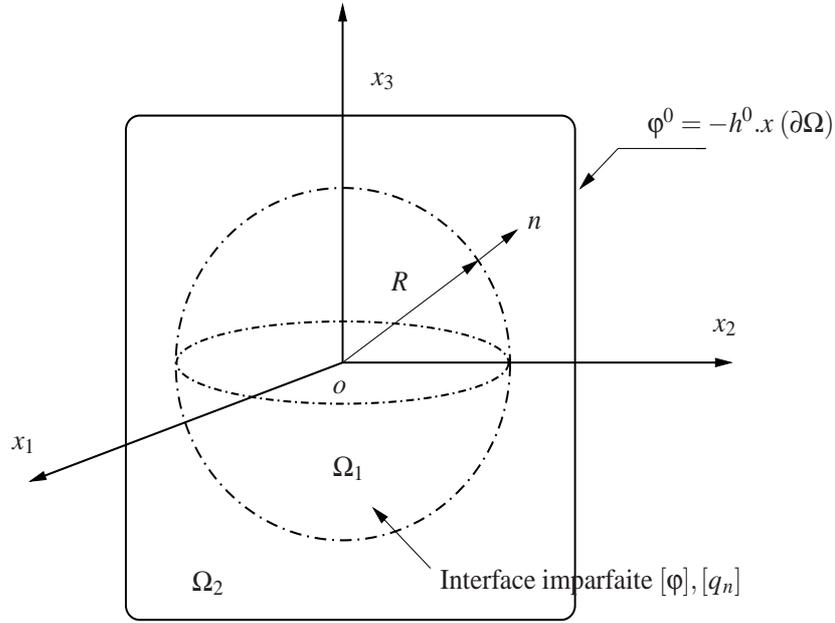


FIG. 8-1 – Détermination de la conductivité de l'inclusion équivalente : microstructure étudiée.

où  $A^{(i)}$  et  $B^{(i)}$  sont des paramètres déterminés par les conditions aux limites et aux interfaces, l'exposant  $i = 1, 2$  est relatif au milieu concerné et enfin

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \quad (8.7)$$

La température devant être finie au centre de l'inclusion ( $r = 0$ ), on en déduit directement que  $B^{(1)}$  doit être nul,

$$B^{(1)} = 0. \quad (8.8)$$

Des conditions aux limites sur le contour  $\partial\Omega$  ( $r \rightarrow \infty$ ), il vient que

$$A^{(2)} = -1. \quad (8.9)$$

L'introduction de (8.8) et (8.9) dans la forme générale (8.6) implique que les champs de

température dans chacun des milieux s'écrivent :

$$\varphi^{(2)} = -Hx_3 - \frac{B^{(2)}Hx_3}{r^3}, \quad (8.10a)$$

$$\varphi^{(1)} = A^{(1)}h^0x_3. \quad (8.10b)$$

Les deux paramètres  $A^{(1)}$  et  $B^{(2)}$  vont être déterminés à l'aide des conditions de saut sur l'interface.

En utilisant (8.10a), le flux de chaleur dans les milieux 1 et 2 est défini par

$$\mathbf{q}^{(2)} = -k^{(2)}\nabla\varphi^{(2)} = -k^{(2)}\left(-\mathbf{H} - \frac{B^{(2)}\mathbf{H}}{r^3} + 3\frac{B^{(2)}\mathbf{x}}{r^5}\mathbf{H}\cdot\mathbf{x}\right), \quad (8.11a)$$

$$\mathbf{q}^{(1)} = -k^{(1)}\nabla\varphi^{(1)} = -k^{(1)}A^{(1)}\mathbf{H} \quad (8.11b)$$

d'où l'on déduit le flux normal de chaque côté de l'interface

$$q_n^{(+)} = \mathbf{q}^{(2)}(R) \cdot \mathbf{n} = -k^{(2)}\left(-\frac{1}{R} + 2\frac{B^{(2)}}{R^4}\right)Hx_3 \quad (8.12a)$$

$$q_n^{(-)} = \mathbf{q}^{(1)}(R) \cdot \mathbf{n} = -k^{(1)}A^{(1)}\frac{Hx_3}{R} \quad (8.12b)$$

Le saut de température au travers de l'interface est donné en substituant  $q_n^{(+)}$  et  $q_n^{(-)}$  par leurs expressions (8.12a) dans l'équation (8.3), il vient :

$$[\varphi] = \frac{h}{2}\frac{Hx_3}{R}\left[-k^{(1)}A^{(1)}\left(\frac{1}{k^{(1)}} - \frac{1}{k^{(0)}}\right) - k^{(2)}\left(\frac{1}{k^{(2)}} - \frac{1}{k^{(0)}}\right)\left(-1 + 2\frac{B^{(2)}}{R^3}\right)\right]. \quad (8.13)$$

De la même façon, en remplaçant dans (8.4),  $\varphi^{(+)}$  et  $\varphi^{(-)}$  définis d'après (8.10a), par

$$\varphi^{(+)} = \varphi^{(2)}(R) = -Hx_3 - \frac{B^{(2)}Hx_3}{R^3}, \quad (8.14a)$$

$$\varphi^{(-)} = \varphi^{(1)}(R) = A^{(1)}h^0x_3, \quad (8.14b)$$

l'expression du saut de flux normal au travers de l'interface est obtenu sous la forme :

$$[q_n] = \frac{h}{2}\frac{Hx_3}{R^2}\left[-A^{(1)}(k^{(0)} - k^{(1)}) + 2(k^{(0)} - k^{(2)})(1 + \frac{B^{(2)}}{R^3})\right]. \quad (8.15)$$

Ainsi, les conditions de discontinuités à l'interface,

$$\begin{cases} [q_{\mathbf{n}}] = q_{\mathbf{n}}^{(2)} - q_{\mathbf{n}}^{(1)} \\ [\varphi] = \varphi^{(2)} - \varphi^{(1)} \end{cases} \quad (8.16)$$

s'écrivent explicitement :

$$\begin{cases} -1 - \frac{B^{(2)}}{R^3} - A^{(1)} = \frac{h}{2R} \left[ -A^{(1)} \left( 1 - \frac{k^{(1)}}{k^{(0)}} \right) + \left( 1 - \frac{k^{(2)}}{k^{(0)}} \right) \left( 1 - 2\frac{B^{(2)}}{R^3} \right) \right] \\ k^{(2)} \left( 1 - 2\frac{B^{(2)}}{R^3} \right) + k^{(1)} A^{(1)} = \frac{h}{2R} \left[ -A^{(1)} (k^{(0)} - k^{(1)}) + 2(k^{(0)} - k^{(2)}) \left( 1 + \frac{B^{(2)}}{R^3} \right) \right] \end{cases} \quad (8.17)$$

et permettent de déterminer les paramètres  $A^{(1)}$  et  $B^{(2)}$  et donc de connaître l'expression du champ de température et de flux de chaleur dans l'ensemble du milieu.

La connaissance du champ de température et de flux de chaleur est nécessaire à la détermination de la conductivité de l'inclusion équivalente par l'utilisation de la condition (7.35) d'équivalence en énergie. Le membre de gauche de (7.35) s'écrit

$$\int_{S_{12}} (\varphi^{(+)} q_{\mathbf{n}}^{(0)} - \varphi^{(0)} q_{\mathbf{n}}^{(+)}) dS = \int_{S_{12}} -3k^{(2)} B^{(2)} \frac{(Hx_3)^2}{R^4} dS = -2\pi k^{(2)} H^2 B^{(2)} \quad (8.18)$$

après avoir fait appel à (8.5), (8.10a) et (8.11a) et avec  $q_{\mathbf{n}}^{(0)} = k^{(2)} Hx_3/R$ . Le membre de droite de (7.35) est lui obtenu aisément du fait de l'hypothèse d'isotropie des matériaux. On notera que le tenseur d'Eshelby associé à ce problème est donné par  $\mathbf{S} = \frac{1}{3}\mathbf{I}$ . Finalement, il vient :

$$k^{(eq)} = \frac{1 - 2\frac{B^{(2)}}{R^3}}{1 + \frac{B^{(2)}}{R^3}} k^{(2)} \quad (8.19)$$

où l'on rappelle que  $B^{(2)}$  est solution du système (8.17).

### 8.3 Conductivité effective

Ayant déterminé la conductivité de l'inclusion équivalente, la conductivité effective du composite est déterminée par l'étude classique d'un composite biphasique avec interface parfaite. De ce fait, à ce stade, tous les schémas d'homogénéisation classiques peuvent être utilisés. On fait ici le choix du schéma autocohérent généralisé et il vient que la

conductivité effective du matériau composite avec interface imparfaite est donnée par :

$$k^* = k^{(2)} + \frac{c_0}{1/(k^{(eq)} - k^{(2)}) + (1 - c_0)/3k^{(2)}} \quad (8.20)$$

où  $c_0 = c(1 + h/2R)^3$  est la fraction volumique d'inclusion équivalente qui intègre la moitié de l'épaisseur de l'interface de manière à être cohérent avec le modèle d'interface construit.

Dans ce qui va suivre, il s'agit de comparer le résultat (8.20) à celui fourni par le modèle à trois phases (matrice, interface et inclusion) qui est la solution de référence de ce problème, et à celui issu de l'utilisation du modèle d'interface proposé par Hashin [46]. Ainsi, commençons par rappeler l'expression de la conductivité effective correspondant à chacun de ces modèles.

Le problème de conduction thermique avec une microstructure de type trois phases a, par exemple, été traité par Hashin [45]. La conductivité effective est donnée par :

$$k^* = k^{(2)} + \frac{c(1 + \delta)^3}{1/(k^{(10)} - k^{(2)}) + (1 - c(1 + \delta)^3)/3k^{(2)}} \quad (8.21)$$

avec  $\delta = h/R$  et

$$k^{(10)} = k^{(0)} + \frac{c_1}{1/(k^{(1)} - k^{(0)}) + (1 - c_1)/3k^{(0)}} \quad (8.22)$$

où  $c_1 = (R/(R + h))^3$ .

Hashin [46] a proposé un modèle d'interface différent de celui utilisé ici et l'a appliqué au même problème. Le résultat obtenu est

$$k^* = k^{(2)} + \frac{c}{1/(\varkappa - k^{(2)}) + (1 - c)/(3k^{(2)})} \quad (8.23)$$

avec

$$\varkappa = \frac{1 - 2 [1 - (k^{(0)}/k^{(1)}) \delta]}{1 + (k^{(1)}/k^{(0)}) \delta} k^{(1)} \quad (8.24)$$

Les figures 8-2, 8-3 et 8-4 proposent une comparaison des modèles précités pour différentes épaisseurs de l'interface, caractérisées par le paramètre  $\delta$  déjà introduit, en fonction du contraste de conductivité entre l'interface et la matrice.

La fraction volumique d'inclusion est fixée à  $c = 0,4$  et le contraste de conductivité entre l'inclusion et la matrice est  $k^{(2)}/k^{(1)} = 0,1$ . La figure 8-2 montre que pour une faible épaisseur d'interface ( $\delta = 0,001$ ), les trois résultats coïncident. Pour des épaisseurs

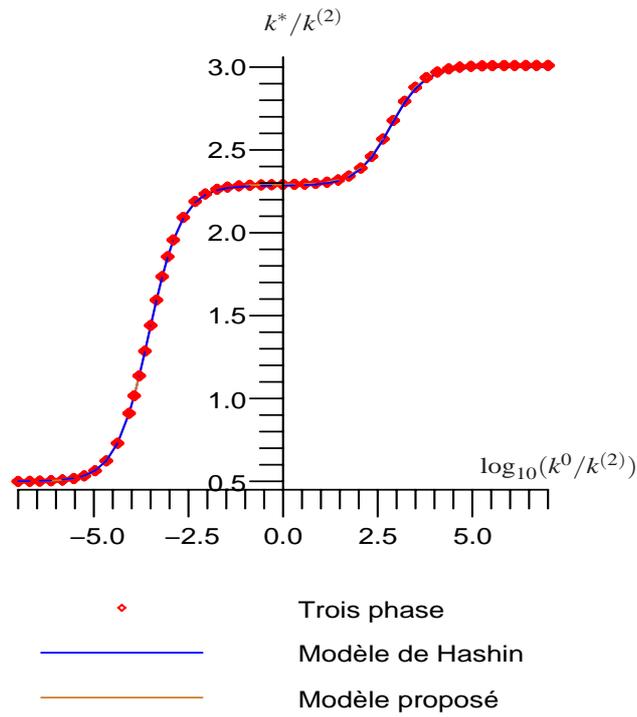


FIG. 8-2 – Evolution du rapport  $k^*/k^{(2)}$  en fonction de  $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$  pour  $\delta = 0.001$ .

d'interface plus importantes  $\delta = 0,01$  (Fig. 8-3) et  $\delta = 0,1$  (Fig. 8-4), les résultats diffèrent notamment pour des interfaces de conductivité élevée. On notera cependant que le modèle proposé reste plus proche de la solution de référence (modèle à trois phases) que celui présenté par Hashin [46].

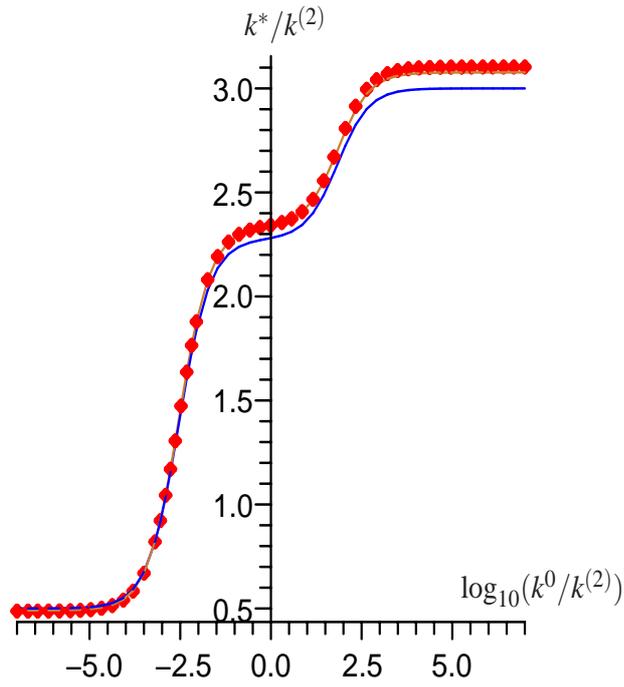


FIG. 8-3 – Evolution du rapport  $k^*/k^{(2)}$  en fonction de  $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$  pour  $\delta = 0.01$ .

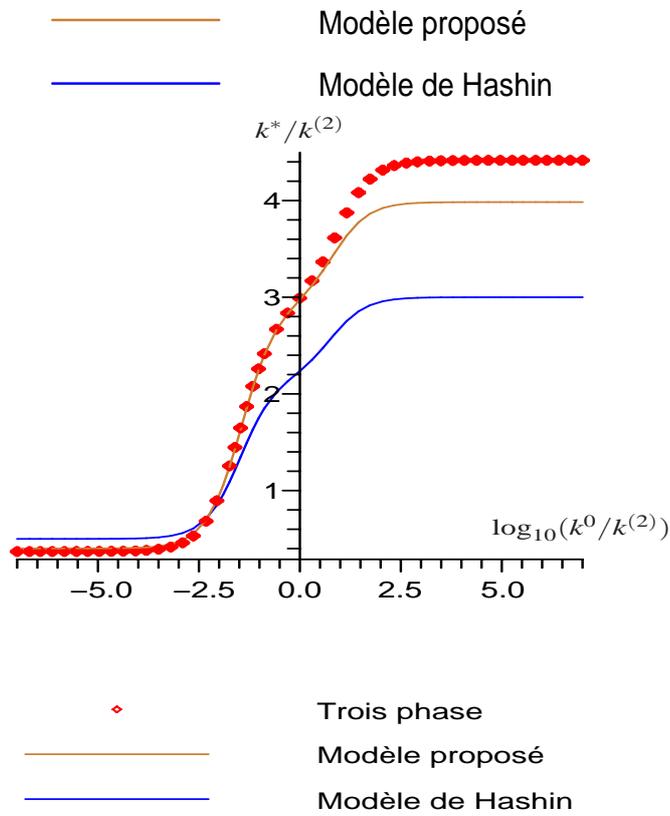


FIG. 8-4 – Evolution du rapport  $k^*/k^{(2)}$  en fonction de  $\log_{10}(k^{(0)}/k^{(2)})$  pour  $\delta = 0.1$ .

# Chapitre 9

## Propriétés élastiques effectives d'un composite à inclusions sphériques avec interface imparfaite

Dans ce chapitre, on se propose de déterminer les propriétés élastiques d'un matériau comportant des inclusions sphériques avec interfaces imparfaites. On fera appel à la méthode de l'inclusion équivalente et au modèle d'interface imparfaite construit au chapitre 6.

Ce chapitre se décompose en trois parties. Après avoir présenté le problème dans la première partie, la seconde est dédiée à la détermination du module de compressibilité effectif et la troisième est consacrée au module de cisaillement effectif. Dans les deux cas, on commence par déterminer le module correspondant de l'inclusion équivalente, puis le module effectif est obtenu en utilisant le schéma autocohérent généralisé. Les résultats obtenus sont comparés avec le modèle à trois phases qui est ici la solution de référence.

### 9.1 Position du problème

Soit le VER d'un matériau hétérogène constitué d'une matrice (phase 2) renforcée par des inclusions sphériques de rayon  $R$  (phase 1). Les matériaux constitutifs sont supposés isotropes, élastiques linéaires. Le tenseur de rigidité de chaque phase s'écrit :

$$\mathbb{C}^{(i)} = 3\kappa^{(i)}\mathbb{J} + 2\mu^{(i)}\mathbb{K} \quad (9.1)$$

avec

$$\mathbb{J} = \frac{1}{3} \mathbf{I} \otimes \mathbf{I}, \quad \mathbb{K} = \mathbb{I} - \mathbb{J} \quad (9.2)$$

et où  $\kappa^{(i)}$  est le module de compressibilité de la phase  $i$  et  $\mu^{(i)}$  est le module de cisaillement de la même phase. Des conditions aux limites uniformes en déformations sur le bord  $\partial\Omega$  du VER sont imposées :

$$\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (9.3)$$

A l'échelle macroscopique, le composite est supposé élastique linéaire et isotrope, la loi de comportement s'écrit :

$$\langle \sigma(\mathbf{x}) \rangle = \mathbb{C}^* : \langle \varepsilon \rangle = \mathbb{C}^* \cdot \mathbf{E} \quad (9.4)$$

où le tenseur de rigidité effectif  $\mathbb{C}^*$  est défini par

$$\mathbb{C}^* = 3\kappa^* \mathbb{J} + 2\mu^* \mathbb{K} \quad (9.5)$$

avec  $\kappa^*$  le module de compressibilité effectif et  $\mu^*$  le module de cisaillement effectif. Par ailleurs, l'interface entre les inclusions et la matrice est supposée imparfaites.

L'objectif est de déterminer les propriétés effectives  $\kappa^*$  et  $\mu^*$ . Celles-ci sont classiquement obtenues en résolvant deux problèmes d'élasticité. Dans ce qui suit, on déterminera tout d'abord les propriétés  $\kappa^{(eq)}$  et  $\mu^{(eq)}$  de l'inclusion équivalente. Il nous suffira ensuite d'appliquer le schéma autocohérent généralisé pour déduire les propriétés élastiques effectives.

## 9.2 Module de compressibilité effectif

### 9.2.1 Module de compressibilité de l'inclusion équivalente

Il s'agit tout d'abord de déterminer le module de compressibilité de l'inclusion équivalente. Pour ce faire, on considère la microstructure représentée à la figure 9-1, celle-ci est constituée d'une inclusion sphérique  $\Omega_1$  de rayon  $R$ , plongée dans un milieu infini ayant les propriétés de la matrice (phase 2). Sur le contour des conditions aux limites uniforme hydrostatiques sont imposées :

$$\mathbf{u}^{(0)} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x} = E \mathbf{x} \text{ avec } E = \text{tr } \mathbf{E} / 3 \quad (9.6)$$

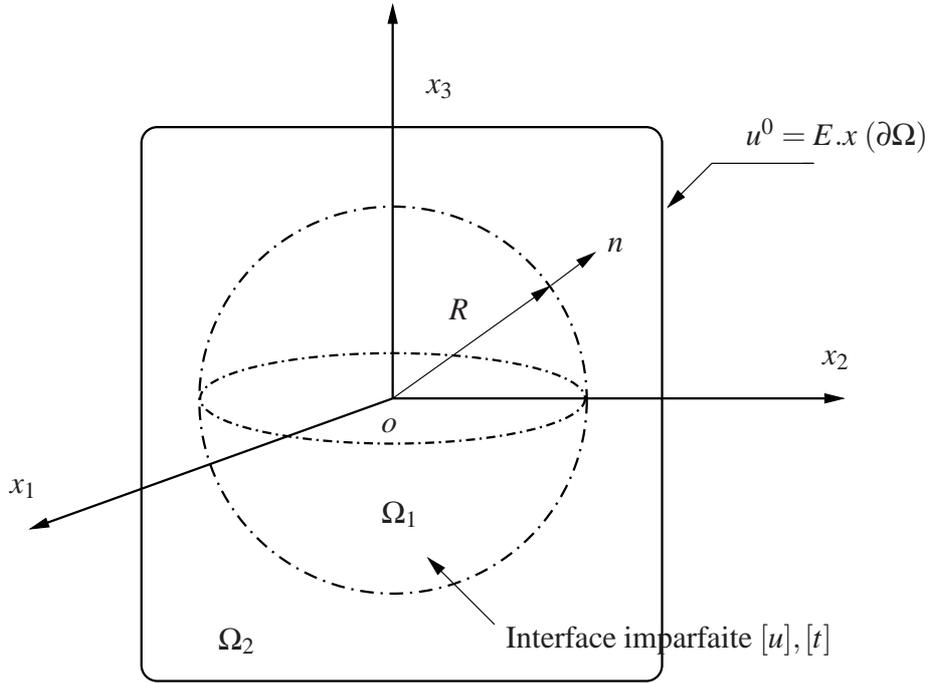


FIG. 9-1 – Composite sphérique élastique avec l'interface imparfaite

Sous ces conditions, la forme générale du champ de déplacement est donnée par exemple par Love [70] :

$$\mathbf{u} = a^{(i)} E \mathbf{x} - \frac{b^{(i)}}{r^3} E \mathbf{x} \quad (9.7)$$

où  $a^{(i)}$  et  $b^{(i)}$  sont les paramètres qui seront déterminés par les conditions aux limites et à l'interface.

Les conditions aux limites (9.6) sur la surface  $\partial\Omega$  ( $r \rightarrow \infty$ ) conduisent à

$$a^{(2)} = 1 \quad (9.8)$$

et du fait que le déplacement  $\mathbf{u}$  doit être fini au centre de l'inclusion ( $r = 0$ ), on déduit :

$$b^{(1)} = 0. \quad (9.9)$$

En introduisant (9.8) et (9.9) dans (9.7), le champ de déplacement dans chaque phase

peut être réécrit sous la forme :

$$\mathbf{u} = E\mathbf{x} - \frac{A}{r^3}E\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_2 \quad (9.10a)$$

$$\mathbf{u} = BE\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_1 \quad (9.10b)$$

où les paramètres  $A$  et  $B$  vont être déterminés par les conditions sur l'interface.

La dérivation du champ de déplacement fourni par (9.10a) induit :

$$\nabla \mathbf{u}^{(2)} = E \left[ \left(1 - \frac{A}{r^3}\right) \mathbf{I} + 3\frac{A}{r^3} \mathbf{P}^\perp \right], \quad (9.11a)$$

$$\nabla \mathbf{u}^{(1)} = BE\mathbf{I} \quad (9.11b)$$

et l'on en déduit l'expression du champ de déformation

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = E \left[ \left(1 - \frac{A}{r^3}\right) \mathbf{I} + 3\frac{A}{r^3} \mathbf{P}^\perp \right], \quad (9.12a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = BE\mathbf{I}. \quad (9.12b)$$

La loi de comportement locale caractérisée par le tenseur de rigidité (9.1) fournit le champ de contrainte dans chaque phase

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \left[ 3\kappa^{(2)}\mathbf{I} + 2\mu^{(2)}\frac{A}{r^3}(-\mathbf{I} + 3\mathbf{P}^\perp) \right] E, \quad (9.13a)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = 3\kappa^{(1)}BE\mathbf{I} \quad (9.13b)$$

et le champ de vecteur contrainte

$$\mathbf{t}^{(2)} = \left( 3\kappa^{(2)}\mathbf{I} + 4\mu^{(2)}\frac{A}{r^3} \right) E\mathbf{n}, \quad (9.14a)$$

$$\mathbf{t}^{(1)} = 3\kappa^{(1)}BE\mathbf{n}. \quad (9.14b)$$

Il s'agit ensuite d'exprimer les champs de gradient de déplacement et de vecteur contraintes au voisinage de l'interface, afin d'expliciter les conditions d'interface (5.42)

et (5.43). Il vient :

$$\nabla \mathbf{u}^{(+)} = \nabla \mathbf{u}^{(2)}(R) = E \left[ \left( 1 - \frac{A}{R^3} \right) \mathbf{I} + 3 \frac{A}{R^3} \mathbf{P}^\perp \right], \quad (9.14c)$$

$$\nabla \mathbf{u}^{(-)} = \nabla \mathbf{u}^{(1)}(R) = BE\mathbf{I} \quad (9.14d)$$

et

$$\mathbf{t}^{(+)} = \mathbf{t}^{(2)}(R) = \left( 3\kappa^{(2)}\mathbf{I} + 4\mu^{(2)}\frac{A}{R^3} \right) E\mathbf{n}, \quad (9.15a)$$

$$\mathbf{t}^{(-)} = \mathbf{t}^{(1)}(R) = 3\kappa^{(1)}BE\mathbf{n}. \quad (9.15b)$$

En introduisant (9.14c) et (9.15a) dans (5.42) et (5.43), on a :

$$[\mathbf{u}] = \frac{h}{2} \left[ 3\kappa^{(1)} \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) - 2 \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) \right] BE\mathbf{n} \quad (9.16)$$

$$+ \frac{h}{2} \left[ \begin{array}{l} \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)}\frac{A}{r^3}) \\ - 2 \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) \left( 1 - \frac{A}{r^3} \right) \end{array} \right] E\mathbf{n}$$

et

$$\begin{aligned} [\mathbf{t}] = & -\frac{h}{2} E\mathbf{n} \operatorname{tr} \mathbf{L} \left[ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) 3B\kappa^{(1)} \right. \\ & + \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)}\frac{A}{r^3}) \\ & + \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) 2B \\ & + \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) 2 \left( 1 - \frac{A}{R^3} \right) \\ & \left. + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})B + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(2)}) \left( 1 - \frac{A}{R^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Finalement, les paramètres  $A$  et  $B$  sont solutions du système d'équations fourni par les conditions aux interfaces :

$$\begin{cases} [\mathbf{u}] = \mathbf{u}^{(2)}(R) - \mathbf{u}^{(1)}(R) \\ [\mathbf{t}] = \mathbf{t}^{(2)}(R) - \mathbf{t}^{(1)}(R) \end{cases}. \quad (9.18)$$

En injectant (9.10a), (9.14a), (9.16) et (9.17) dans les équations du système (9.18), celles-ci s'écrivent

$$\begin{aligned}
& \left(1 - \frac{A}{R^3}\right) - B \\
&= \frac{\delta}{2} \left\{ \left( \frac{1}{k^{(0)} + \frac{4}{3}\mu^{(0)}} - \frac{1}{k^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(2)}} \right) \left[ 3k^{(2)} + 4\mu^{(2)} \frac{A}{R^3} \right] \right. \\
&+ \left( \frac{1}{k^{(0)} + \frac{4}{3}\mu^{(0)}} - \frac{1}{k^{(1)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}} \right) 3k^{(1)}B \\
&- 2 \left( \frac{k^{(0)} - \frac{2}{3}\mu^{(0)}}{k^{(0)} + \frac{4}{3}\mu^{(0)}} - \frac{k^{(2)} - \frac{2}{3}\mu^{(2)}}{k^{(2)} + \frac{4}{3}\mu^{(2)}} \right) \left(1 - \frac{A}{R^3}\right) \\
&\left. - 2 \left( \frac{k^{(0)} - \frac{2}{3}\mu^{(0)}}{k^{(0)} + \frac{4}{3}\mu^{(0)}} - \frac{k^{(1)} - \frac{2}{3}\mu^{(1)}}{k^{(1)} + \frac{4}{3}\mu^{(1)}} \right) B \right\}
\end{aligned} \tag{9.19}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left[ 3k^{(2)} + 4\mu^{(2)} \frac{A}{R^3} \right] - 3k^{(1)}B \\
&= \delta \left[ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) 3B\kappa^{(1)} \right. \\
&+ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)} \frac{A}{r^3}) \\
&+ \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) 2B \\
&+ \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) 2 \left(1 - \frac{A}{R^3}\right) \\
&\left. + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})B + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(2)}) \left(1 - \frac{A}{R^3}\right) \right]
\end{aligned} \tag{9.20}$$

où  $\delta = \frac{h}{R}$ .

A ce stade, tous les champs sont connus de façon explicite dans le milieu, il est alors possible de déterminer le module de compressibilité de l'inclusion équivalente en exploitant la condition d'équivalence en énergie (7.21) où  $\Delta w$  est donné par (7.41) et  $\Delta w_{eq}$  est fourni par (7.46).

Le calcul de  $\Delta w_{eq}$  nécessite de rappeler que le tenseur d'Eshelby associé à ce problème s'écrit sous la forme

$$\mathbb{S}^{esh} = \frac{3\kappa^{(2)}}{3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)}} \mathbb{J} + \frac{6(\kappa^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{5(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)})} \mathbb{K} \tag{9.21}$$

l'introduction de l'équation (9.21) dans l'équation (7.45) et en utilisant les conditions aux limites définies par (9.6), on déduit

$$\Delta w_{eq} = 2\pi R^3 (E)^2 \frac{1}{\left[ \frac{1}{3(\kappa^{(eq)} - \kappa^{(2)})} + \frac{1}{3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)}} \right]}. \quad (9.22)$$

La détermination de  $\Delta w$  est réalisée en substituant les expressions (9.13a) de  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ , (9.10a) de  $\mathbf{u}^{(2)}$  et (9.6) de  $\mathbf{u}^{(0)}$  et en introduisant  $\boldsymbol{\sigma}^{(0)} = 3\kappa^{(2)}E\mathbf{I}$  dans (7.41). Après intégration, on a :

$$\Delta w = 2\pi R^3 (E)^2 (4\mu^{(2)} + 3\kappa^{(2)}) \frac{A}{R^3}. \quad (9.23)$$

En injectant dans la condition  $\Delta w = \Delta w_{eq}$  les équations (9.22) et (9.23), on obtient le module de compressibilité  $\kappa^{(eq)}$  de l'inclusion équivalente

$$\kappa^{(eq)} = \kappa^{(2)} + \frac{(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)})}{3\left(1 - \frac{A}{R^3}\right)} \frac{A}{R^3} \quad (9.24)$$

où  $A$  est solution du système d'équation (9.18).

## 9.2.2 Module effectif et applications

Le module de compressibilité de l'inclusion équivalente étant donné par (9.24), il s'agit de déterminer le module de compressibilité effectif du matériau hétérogène avec interface imparfaite. Rappelons que l'ensemble inclusion et interface imparfaite étant remplacés par une inclusion équivalente, nous sommes ramenés à l'étude d'un matériau hétérogène avec interface parfaite. On choisit alors de déterminer le module de compressibilité effectif en utilisant le schéma autocohérent généralisé. Ainsi, en s'appuyant sur le résultat de Christensen et Lo [22], le module de compressibilité effectif est donné par :

$$\kappa^* = \kappa^{(2)} + \frac{c_0}{\frac{1}{\kappa^{(eq)} - \kappa^{(2)}} + \frac{3(1-c_0)}{3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)}}} \quad (9.25)$$

où  $c_0 = c(1 + h/2R)^3$  est la fraction volumique d'inclusion équivalente.

Le modèle à trois phases (inclusion, interphase et matrice) est le résultat de référence de ce problème, il est donc intéressant de comparer (9.25) avec celui-ci. Le module de

compressibilité fournit par le modèle à trois phases est donné par (cf. p. ex. [52]) :

$$k^* = k^{(2)} + \frac{c(1 + \delta)^3}{\frac{1}{k^{(01)} - k^{(2)}} + \frac{3(1 - c(1 + \delta)^3)}{3k^{(2)} + 4\mu^{(2)}}} \quad (9.26)$$

avec

$$\kappa^{(01)} = \kappa^{(0)} + \frac{c_1}{\frac{1}{\kappa^{(1)} - \kappa^{(0)}} + \frac{3(1 - c_1)}{3\kappa^{(0)} + 4\mu^{(0)}}} \quad (9.27)$$

où  $c_1 = R/(R + h)$ . Les figures (9-2), (9-3) et (9-4) proposent une comparaison entre

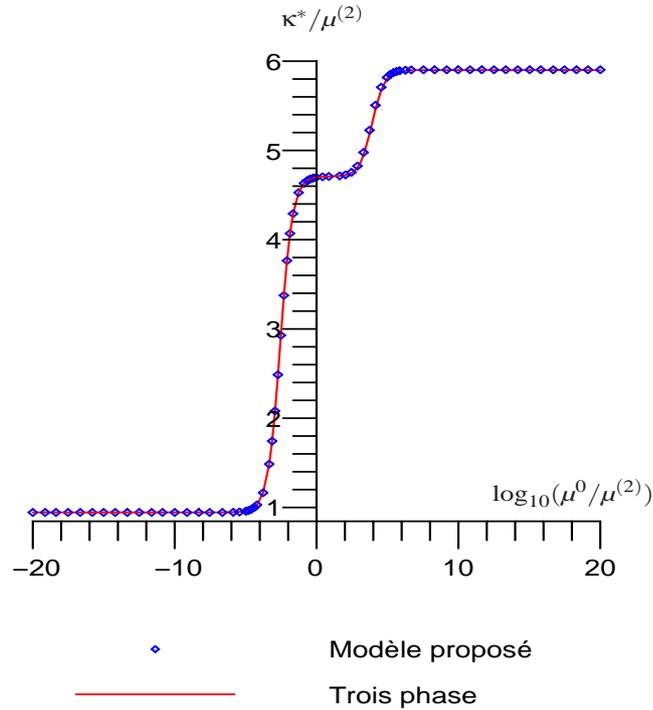


FIG. 9-2 – Evolution du rapport  $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}})$  pour  $\delta = 0,001$ .

les modules de compressibilité donnés par (9.25) et (9.26) pour différentes épaisseurs d'interphase. Les coefficients de poisson considérés sont  $\nu^{(1)} = 0.2$ ,  $\nu^{(2)} = 0.35$ , et  $\nu^{(0)} = 0.3$ ; le contraste entre les modules de cisaillement des phases 1 et 2 a été fixé à  $\frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(2)}} = 10$  et la fraction volumique d'inclusions a été prise égale à  $c = 0.4$ . Les figures (9-2), (9-3) montrent que les deux résultats se confondent lorsque  $\delta = 0,001$  et  $\delta = 0,01$ . Les mêmes résultats diffèrent légèrement lorsque  $\delta = 0,1$  (cf. Fig 9-4) et notamment pour des interphases plus rigides que la matrice.

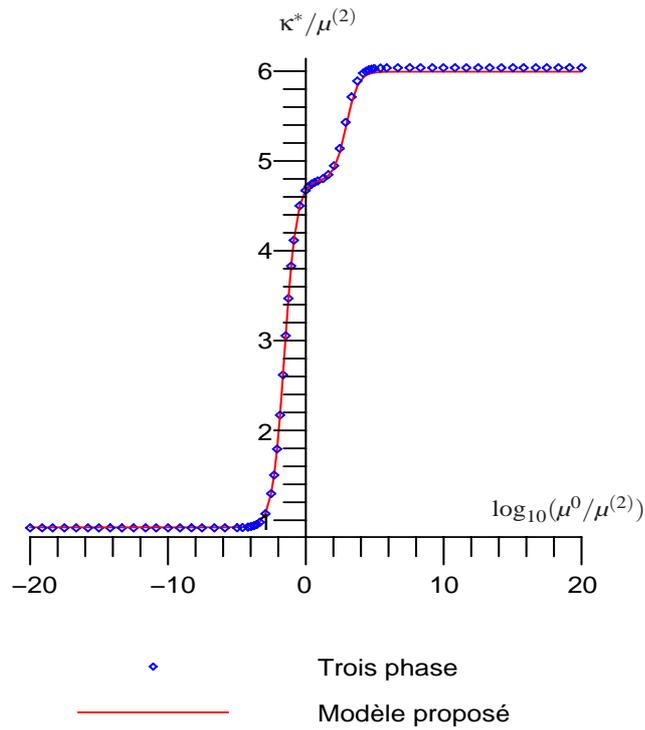


FIG. 9-3 – Evolution du rapport  $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}}\right)$  pour  $\delta = 0,01$

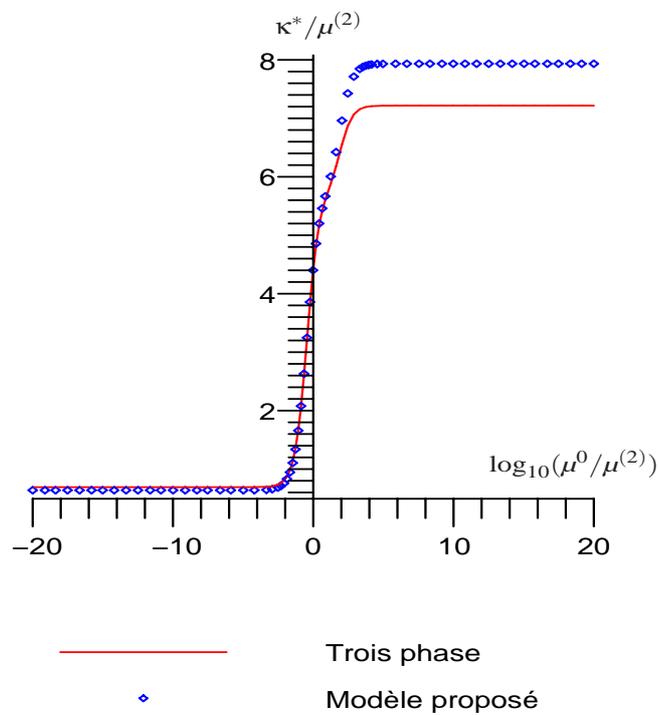


FIG. 9-4 – Evolution du rapport  $\frac{\kappa^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}}\right)$  pour  $\delta = 0,1$ .

## 9.3 Module de cisaillement effectif

### 9.3.1 Module de cisaillement de l'inclusion équivalente

Il s'agit maintenant de déterminer le module de cisaillement de l'inclusion équivalente. Pour ce faire, on considère de nouveau la microstructure représentée à la figure 9-1 et on impose cette fois des conditions aux limites de type cisaillement simple :

$$u_x^0(\mathbf{x}) = Ex, \quad u_y^0(\mathbf{x}) = -Ey, \quad u_z^0(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega \quad (9.28)$$

où  $E$  est une constante non-nulle. La forme générale du champ de déplacement dans le milieu est fourni, par exemple, par Christensen et Lo [22] :

$$u_r^{(i)} = U_r^{(i)}(r) \sin^2 \theta \cos 2\gamma, \quad u_\theta^{(i)} = U_\theta^{(i)}(r) \sin \theta \cos \theta \cos 2\gamma, \quad u_\gamma^{(i)} = U_\gamma^{(i)}(r) \sin \theta \sin 2\gamma, \quad (9.29)$$

où l'on a introduit un système de coordonnées sphériques, tel que

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}, \quad \tan \theta = \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}, \quad \tan \varphi = \frac{x_1}{x_2} \quad (9.30)$$

et où  $U_r^{(i)}(r)$ ,  $U_\theta^{(i)}(r)$  et  $U_\gamma^{(i)}(r)$  sont des fonctions scalaires définies par

$$\begin{aligned} U_r^{(i)}(r) &= A^{(i)}r - \frac{6\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}B^{(i)}r^3 + 3\frac{C^{(i)}}{r^4} + \frac{5-5\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}\frac{D^{(i)}}{r^2} \\ U_\theta^{(i)}(r) &= A^{(i)}r - \frac{7-4\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}B^{(i)}r^3 - 2\frac{C^{(i)}}{r^4} + 2\frac{D^{(i)}}{r^2} \\ U_\gamma^{(i)}(r) &= -U_\theta^{(i)}(r) \end{aligned} \quad (9.31)$$

avec  $A^{(i)}$ ,  $B^{(i)}$ ,  $C^{(i)}$  et  $D^{(i)}$  des constantes à déterminer par les conditions aux limites et par les conditions de discontinuité du vecteur déplacement et du vecteur contrainte à travers l'interface entre le matrice et l'inclusion et  $\nu^{(i)}$  est le coefficient de Poisson de la phase  $i$  ( $i = 1, 2$ ). De façon équivalente, le champ de déplacement (9.29) peut être exprimé dans le système de coordonnées cartésiennes comme suit :

$$\begin{aligned} u_k^{(i)} &= E_{ik}n_i \left( A^{(i)}r - B^{(i)}\frac{7-4\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}r^3 + 2\frac{C^{(i)}}{r^2} - 2\frac{D^{(i)}}{r^4} \right) \\ &+ E_{ij}n_in_jn_k \left( \frac{7-10\nu^{(i)}}{1-2\nu^{(i)}}B^{(i)}r^3 + \frac{3}{1-2\nu^{(i)}}\frac{C^{(i)}}{r^2} + 5\frac{D^{(i)}}{r^4} \right) \end{aligned} \quad (9.32)$$

En utilisant le fait que le déplacement est nécessairement fini au centre de l'inclusion ( $r = 0$ ), on obtient :

$$C^{(1)} = 0 \quad \text{et} \quad D^{(1)} = 0. \quad (9.33)$$

Par ailleurs, les conditions aux limites sur le contour  $\partial\Omega$  ( $r \rightarrow \infty$ ) permettent de déduire :

$$A^{(2)} = 1 \quad \text{et} \quad B^{(2)} = 0. \quad (9.34)$$

En introduisant (9.33) et (9.34) dans (9.32), on obtient une expression du champ de déplacement dans chacune des phases

$$u_k^{(2)} = E_{ik}n_i \left( r + 2\frac{C^{(2)}}{r^2} - 2\frac{D^{(2)}}{r^4} \right) + E_{ij}n_in_jn_k \left( \frac{3}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^2} + 5\frac{D^{(2)}}{r^4} \right) \quad (9.35a)$$

$$u_k^{(1)} = (A^{(1)}r - \frac{7-4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^3)E_{ik}n_i + \frac{7-10\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^3E_{ij}n_in_jn_k \quad (9.35b)$$

Par dérivation, le champ de gradient de déplacement s'écrit, dans la matrice :

$$\begin{aligned} u_{k,l}^{(2)} &= E_{kl} \left( 1 - 2\frac{D^{(2)}}{r^5} + 2\frac{C^{(2)}}{r^3} \right) + E_{ik}n_in_l \left( 10\frac{D^{(2)}}{r^5} - 6\frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \\ &+ E_{ij}n_in_jn_kn_l \left( -\frac{15}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} - 35\frac{D^{(2)}}{r^5} \right) + E_{il}n_in_k \left( \frac{6}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} - 10\frac{D^{(2)}}{r^5} \right) \\ &+ \left( \frac{3}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} + 5\frac{D^{(2)}}{r^5} \right) E_{ij}n_in_j\delta_{kl} \end{aligned} \quad (9.36)$$

et dans l'inclusion :

$$u_{k,l}^{(1)} = (A^{(1)} - \frac{7-4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2)E_{il} - 2\frac{7-4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2E_{ik}n_in_l \quad (9.37a)$$

$$+ 2\frac{7-10\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2E_{il}n_in_k + \frac{7-10\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2E_{ij}n_in_j\delta_{kl} \quad (9.37b)$$

On en déduit le champ de déformation dans chaque phase,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{kl}^{(2)} &= E_{kl} \left( 1 - 2\frac{D^{(2)}}{r^5} + 2\frac{C^{(2)}}{r^3} \right) + \frac{1}{2} (E_{ik}n_in_l + E_{il}n_in_k) \left( 20\frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{12}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \\ &+ E_{ij}n_in_jn_kn_l \left( -\frac{15}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} - 35\frac{D^{(2)}}{r^5} \right) + \left( \frac{3}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3} + 5\frac{D^{(2)}}{r^5} \right) E_{ij}n_in_j\delta_{kl} \end{aligned} \quad (9.38)$$

$$\varepsilon_{kl}^{(1)} = (A^{(1)} - \frac{7 - 4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2) E_{il} + \frac{7 - 10\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 E_{ij} n_i n_j \delta_{kl} \quad (9.39)$$

$$- \frac{6\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 (E_{il} n_i n_k + E_{ik} n_i n_l) \quad (9.40)$$

La loi de comportement de chaque phase, caractérisée par le tenseur de rigidité  $\mathbb{C}^{(i)}$  défini par (9.1), conduit à l'expression du champ de contrainte :

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^{(2)} = & \kappa^{(2)} (-6 E_{ij} n_i n_j \frac{C^{(2)}}{r^3}) \delta_{kl} + 2\mu^{(2)} \{ E_{kl} \left( 1 - 2 \frac{D^{(2)}}{r^5} + 2 \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \\ & + (E_{ik} n_i n_l + E_{il} n_i n_k) \left( 10 \frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{6\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \\ & + E_{ij} n_i n_j n_k n_l \left( -\frac{15}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} - 35 \frac{D^{(2)}}{r^5} \right) \\ & + \left( \frac{5 - 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} + 5 \frac{D^{(2)}}{r^5} \right) E_{ij} n_i n_j \delta_{kl} \} \end{aligned} \quad (9.41)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{kl}^{(1)} = & \kappa^{(1)} (21 B^{(1)} r^2 E_{ij} n_i n_j) \delta_{kl} + 2\mu^{(1)} \{ (A^{(1)} - B^{(1)} \frac{7 - 4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} r^2) E_{il} \\ & - \frac{6\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 (E_{il} n_i n_k + E_{ik} n_i n_l) + \frac{4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 E_{ij} n_i n_j \delta_{kl} \} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Et le champ de vecteur contrainte dans le milieu en découle :

$$\begin{aligned} t_k^{(2)} = & -6\kappa^{(2)} \frac{C^{(2)}}{r^3} E_{ij} n_i n_j n_k + 2\mu^{(2)} \left[ \left( -20 \frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{-10 + 2\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) E_{ij} n_i n_j n_k \right. \\ & \left. + E_{kl} n_l \left( 1 + 8 \frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{2(1 + \nu^{(2)})}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \right] \end{aligned} \quad (9.43)$$

$$\begin{aligned} t_l^{(1)} = & 21\kappa^{(1)} B^{(1)} r^2 E_{ij} n_i n_j n_l \\ & + 2\mu^{(1)} \left[ \left( A^{(1)} - \frac{7 + 2\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 \right) E_{il} n_i - \frac{2\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 E_{ij} n_i n_j n_k \right] \end{aligned} \quad (9.44)$$

L'introduction des différents champs dans les conditions d'interface (5.15) et (5.24)

conduisent à la condition de saut de déplacement :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{u}] = & \frac{h}{2} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} [21\kappa^{(1)} B^{(1)} R^2 \right. \\
& + 2\mu^{(1)} (A^{(1)} - \frac{7 + 4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2)] \\
& + \left( \frac{1}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} [-6\kappa^{(2)} \frac{C^{(2)}}{R^3} \\
& + 2\mu^{(2)} (1 - 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{-8 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3})] \\
& + \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(1)}} \right) 2\mu^{(1)} (A^{(1)} - \frac{7 + 2\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \\
& + \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(2)}} \right) 2\mu^{(2)} (1 + 8 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{2(1 + \nu^{(2)})}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3}) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n}] \\
& - \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} (-A^{(1)} + \frac{21 - 24\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2) \\
& \left. - \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} (-1 + 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{4 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3}) \right\} \tag{9.45}
\end{aligned}$$

et à celle de saut de contraintes :

$$\begin{aligned}
[\mathbf{t}] = & -\frac{h}{R} \left\{ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) [21\kappa^{(1)} B^{(1)} R^2 \right. \\
& + 2\mu^{(1)} (A^{(1)} - \frac{7 + 4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2)] [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - 2\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n})] \\
& + \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) [-6\kappa^{(2)} \frac{C^{(2)}}{R^3} \\
& + 2\mu^{(2)} (1 - 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{-8 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3})] [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - 2\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n})] \\
& + \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}} \right) (-A^{(1)} + \frac{21 - 24\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - 2\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n})] \\
& + \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}} \right) (-1 + 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{4 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3}) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} - 2\mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n})] \\
& + (\mu^{(0)} - \mu^{(1)}) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} (-3A^{(1)} + \frac{35 - 32\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2) + 4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} (A^{(1)} - \frac{14 - 14\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2)] \\
& \left. + (\mu^{(0)} - \mu^{(2)}) [\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} (\frac{4 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} + 16 \frac{D^{(2)}}{R^5} - 3) + 4(\mathbf{n} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} (1 - 7 \frac{D^{(2)}}{R^5} - \frac{3}{1 - 2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3})] \right\} \tag{9.46}
\end{aligned}$$

Finalement, les paramètres  $A^{(1)}$ ,  $B^{(1)}$ ,  $C^{(2)}$  et  $D^{(2)}$  sont solutions de (9.18) qui conduit

dans le cas présent aux quatres équations suivantes :

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{3}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} + 5 \frac{D^{(2)}}{R^5} \right) - \frac{7-10\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \\
&= \frac{h}{2R} \left\{ \left( \frac{1}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}} \right) \left[ \begin{aligned} & -6\kappa^{(2)} \frac{C^{(2)}}{R^3} \\ & +2\mu^{(2)} \left( 1 - 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{-8+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} \right) \end{aligned} \right] \right. \\
&+ \left( \frac{1}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{1}{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}} \right) \left[ \begin{aligned} & 21\kappa^{(1)} B^{(1)} R^2 \\ & +2\mu^{(1)} \left( A^{(1)} - \frac{7+4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \right) \end{aligned} \right] \\
&- 2\mu^{(2)} \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(2)}} \right) \left( 1 + 8 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{2+2\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} \right) \\
&- 2\mu^{(1)} \left( \frac{1}{\mu^{(0)}} - \frac{1}{\mu^{(1)}} \right) \left( A^{(1)} - \frac{7+2\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \right) \\
&- \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}} \right) \left( -1 + 12 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{4+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} \right) \\
&- \left. \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}} \right) \left( -A^{(1)} + \frac{21-24\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \right) \right\} \tag{9.47}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( 1 - 2 \frac{D^{(2)}}{R^5} + 2 \frac{C^{(2)}}{R^3} \right) - \left( A^{(1)} - \frac{7-4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \right) \\
&= \frac{h}{R} \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\mu^{(2)}}{\mu^{(0)}} - 1 \right) \left( 1 + 8 \frac{D^{(2)}}{R^5} + \frac{2+2\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{R^3} \right) \\ & + \left( \frac{\mu^{(1)}}{\mu^{(0)}} - 1 \right) \left( A^{(1)} - \frac{7+2\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} R^2 \right) \end{aligned} \right] \tag{9.48}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\mu^{(2)} \left( 1 + 8 \frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{2+2\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) - 2\mu^{(1)} \left( A^{(1)} - \frac{7+2\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 \right) \\
&= -\frac{h}{R} \left\{ \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}} \right) \left[ \left( -1 + \frac{4+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} + 12 \frac{D^{(2)}}{r^5} \right) \right] \right. \\
&+ \left( \mu^{(0)} - \mu^{(2)} \right) \left[ -3 + \frac{4+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} + 16 \frac{D^{(2)}}{r^5} \right] \\
&+ \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)}+2\mu^{(2)}} \right) \left[ -6\kappa^{(2)} \frac{C^{(2)}}{r^3} + 2\mu^{(2)} \left( 1 - 12 \frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{-8+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}} \frac{C^{(2)}}{r^3} \right) \right] \left. \right\} \\
&- \frac{h}{R} \left\{ \left( \frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}} \right) \left[ -A^{(1)} + \frac{21-24\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 \right] \right. \\
&+ \left( \mu^{(0)} - \mu^{(1)} \right) \left[ -3A^{(1)} + \frac{35-32\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 \right] \\
&+ \left. \left( \frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)}+2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)}+2\mu^{(1)}} \right) \left[ \kappa^{(1)} 21 B^{(1)} r^2 + 2\mu^{(1)} \left( A^{(1)} - \frac{7+4\nu^{(1)}}{1-2\nu^{(1)}} B^{(1)} r^2 \right) \right] \right\} \tag{9.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -6\kappa^{(2)}\frac{C^{(2)}}{r^3} + 2\mu^{(2)}\left(-20\frac{D^{(2)}}{r^5} + \frac{-10 + 2\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3}\right) - \left[21\kappa^{(1)} - 2\mu^{(1)}\frac{2\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}}\right]B^{(1)}r^2 \\
& = -\frac{h}{R}\left\{-2\left(\frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(2)}\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}\right)\left(-1 + \frac{4 + 4\nu^{(2)}}{1 - 2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^2} + 12\frac{D^{(2)}}{r^4}\right)\right. \\
& + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(2)})\left[2 - 14\frac{D^{(2)}}{r^5} - \frac{6}{1 - 2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^2}\right] \\
& - 2\left(\frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + 2\mu^{(2)}}\right)\left[\begin{array}{c} -6\kappa^{(2)}\frac{C^{(2)}}{r^3} \\ +2\mu^{(2)}\left(1 - 12\frac{D^{(2)}}{r^3} + \frac{-8+4\nu^{(2)}}{1-2\nu^{(2)}}\frac{C^{(2)}}{r^3}\right) \end{array}\right] \\
& - \frac{h}{R}\left\{-2\left(\frac{2\lambda^{(0)}\mu^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{2\lambda^{(1)}\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}\right)\left[-A^{(1)} + \frac{21 - 24\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2\right]\right. \\
& + 2(\mu^{(0)} - \mu^{(1)})\left[\left(2A^{(1)} - \frac{28 - 28\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2\right)\right] \\
& \left. - 2\left(\frac{\lambda^{(0)}}{\lambda^{(0)} + 2\mu^{(0)}} - \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + 2\mu^{(1)}}\right)\left[\kappa^{(1)}21B^{(1)}r^2 + 2\mu^{(1)}\left(A^{(1)} - \frac{7 + 4\nu^{(1)}}{1 - 2\nu^{(1)}}B^{(1)}r^2\right)\right]\right\} \\
\end{aligned} \tag{9.50}$$

Les champs de déplacement et de contraintes étant entièrement connus après la résolution du système constitué par les quatres équations (9.47), (9.48), (9.49) et (9.50), il est maintenant possible d'utiliser (7.21) de manière à déterminer le module de cisaillement de l'inclusion équivalente. Il s'agit de calculer  $\Delta w_{eq}$  donné par (7.46), il vient :

$$\Delta w_{eq} = \frac{4\pi R^3 \epsilon^2}{3} \frac{1}{\left[\frac{1}{2(\mu^{(eq)} - \mu^{(2)})} + \frac{3(\kappa^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{5(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)})\mu^{(2)}}\right]}$$

et  $\Delta w$  donné par (7.41). En utilisant les conditions aux limites (9.28) et en introduisant les champs de déplacement (9.36) et de contraintes (9.41), on obtient :

$$\Delta w = \frac{4\pi\epsilon^2 R^3}{3} \left\{ -\frac{12}{5}\kappa^{(2)} + \mu^{(2)}\frac{-52 + 68\nu^{(2)}}{5(1 - 2\nu^{(2)})} \right\} \frac{C^{(2)}}{R^3}$$

L'égalisation de  $\Delta w_{eq}$  fourni par (9.3.1) et de  $\Delta w$  donné par (9.3.1) permet de déduire

l'expression du module de cisaillement de l'inclusion équivalente. On a

$$\mu^{(eq)} = \mu^{(2)} + \frac{1}{2 \left( \frac{1}{a} - \frac{3(\kappa^{(2)} + 2\mu^{(2)})}{5(3\kappa^{(2)} + 4\mu^{(2)})\mu^{(2)}} \right)}$$

avec

$$a = \left\{ -\frac{12}{5}\kappa^{(2)} + \mu^{(2)} \frac{-52 + 68\nu^{(2)}}{5(1 - 2\nu^{(2)})} \right\} \frac{C^{(2)}}{R^3}$$

où  $C^{(2)}$  est obtenu par la résolution du système constitué par (9.47), (9.48), (9.49) et (9.50).

### 9.3.2 Module effectif et applications

Le module de cisaillement de l'inclusion équivalente étant déterminé, nous sommes ramenés à l'étude classique d'un biphasé. Nous choisissons de déterminer le module de cisaillement effectif en utilisant le modèle autocohérent généralisé. En suivant [22],  $\mu^*$  est solution de l'équation :

$$A\left(\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}\right)^2 + B\left(\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}\right) + C = 0 \quad (9.55)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= -[126c^{7/3} - 252c^{5/3} + 50(7 - 12\nu^{(2)} + 8\nu^{(2)2})c](1 - \frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}) \\ &\quad + 4(7 - 10\nu^{(2)})[-7 + 5\nu^{(2)} - 2\frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}(4 - 5\mu^{(2)})] \\ B &= [252c^{7/3} - 504c^{5/3} + 150(3 - \nu^{(2)})\nu^{(2)}c](1 - \frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}) \\ &\quad - 3(7 - 15\nu^{(2)})[-7 + 5\nu^{(2)} - 2\frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}(4 - 5\mu^{(2)})] \\ C &= -[126c^{7/3} - 252c^{5/3} + 25(7 - \nu^{(2)2})c](1 - \frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}) \\ &\quad - (7 + 5\nu^{(2)})[-7 + 5\nu^{(2)} - 2\frac{\mu^{eq}}{\mu^{(2)}}(4 - 5\mu^{(2)})] \end{aligned} \quad (9.56)$$

où  $c$  est la fraction volumique d'inclusion.

Le modèle à trois phases (inclusion, interphase et matrice) étant la solution de référence, il est intéressant de le comparer le résultat solution de (9.55). Le module de

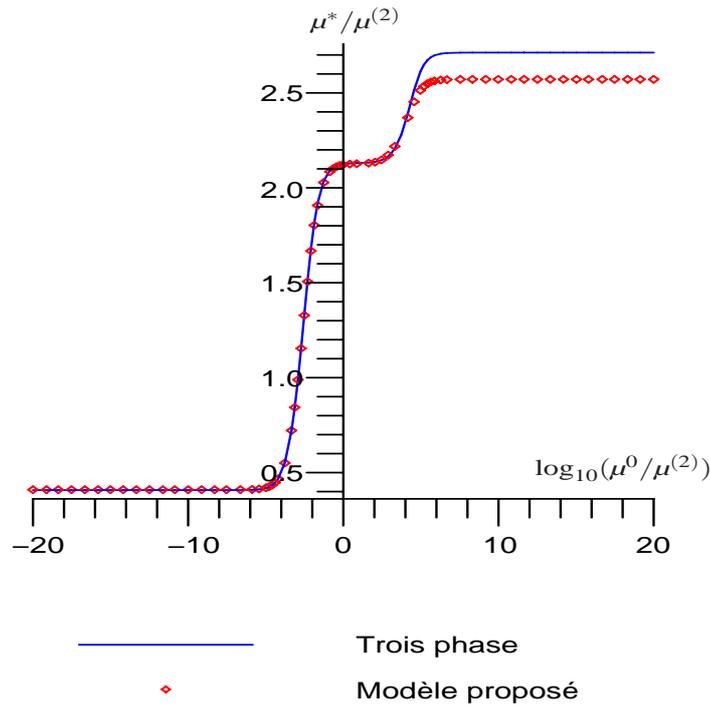


FIG. 9-5 – Evolution du rapport  $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}}\right)$  pour  $\delta = 0.001$

cisaillement effectif fourni par le modèle à trois phases est solution d'une équation du même type que (9.55) avec des coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  définis dans Hervé et Zaoui [52] en posant  $n = 3$ .

La comparaison des deux modèles est fournie par les figures 9-5, 9-6 et 9-7 pour trois épaisseurs d'interphase. Les propriétés élastiques utilisées sont  $\nu_1 = 0.2$ ,  $\nu_2 = 0.35$ ,  $\nu_0 = 0.3$  et  $\mu_1 = 10GPa$ . Le contraste entre les modules de cisaillement des phases 1 et 2 est  $\mu^{(1)}/\mu^{(2)} = 10$  et la fraction volumique d'inclusion est égale à 0,4.

Les résultats montrent de nouveau une bonne concordance entre les deux modèles notamment à faible épaisseur d'interphase (Fig. 9-5). Lorsque l'épaisseur augmente, on constate un bon accord pour des interphases souples (Fig. 9-6 et 9-7), les résultats sont légèrement différents pour des interphases plus rigides. Dans ces derniers cas, il serait nécessaire d'utiliser un modèle d'interface d'ordre plus élevé.

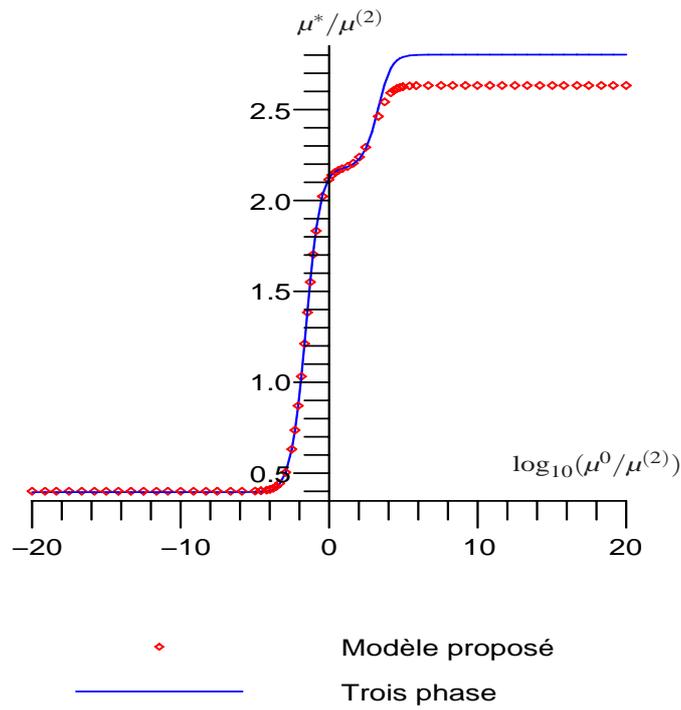


FIG. 9-6 – Evolution du rapport  $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}}\right)$  pour  $\delta = 0.01$

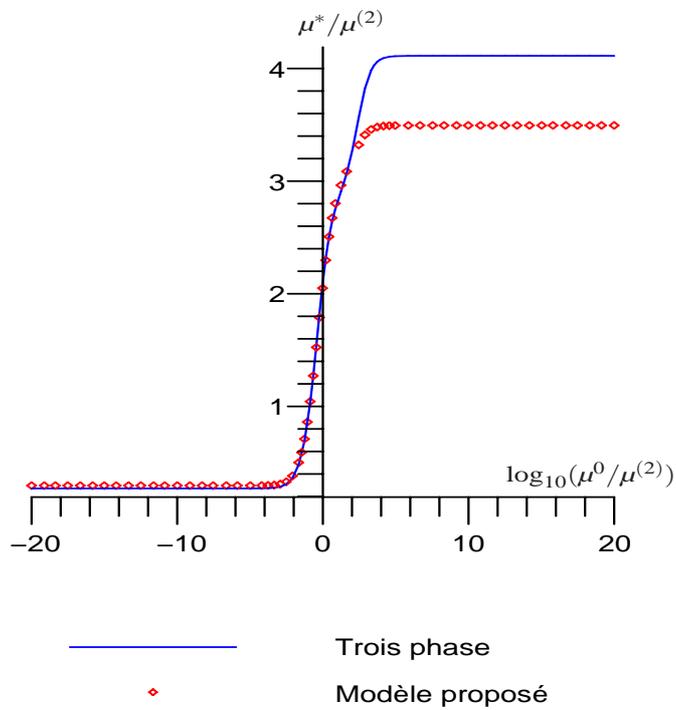


FIG. 9-7 – Evolution du rapport  $\frac{\mu^*}{\mu^{(2)}}$  en fonction de  $\log_{10}\left(\frac{\mu^{(0)}}{\mu^{(2)}}\right)$  pour  $\delta = 0.1$

# Chapitre 10

## Propriétés piézoélectriques effectives d'un composite fibreux avec interfaces imparfaites

Dans ce dernier chapitre, il s'agit de déterminer les propriétés piézoélectriques d'un matériau composite à fibres avec interfaces imparfaites. On utilise la méthode de l'inclusion équivalente et le modèle d'interface établi au chapitre 7.

Ce chapitre est découpé en trois sections. après avoir présenté le problème dans la première section, on détermine les propriétés de l'inclusion équivalente. dans la troisième section, les propriétés effectives sont calculées et comparées avec celles issues du modèle à trois phases.

### 10.1 Position du problème

On considère un VER d'un matériau biphasique (Fig. 10-1) constitué d'inclusions cylindriques (phase 1) plongées dans une matrice (phase 2). Les deux matériaux constitutifs étant supposés piézoélectriques linéaires, leur comportement est décrit par les équations (6.1) et (6.2). En outre, la direction longitudinale de la fibre, notée  $\mathbf{m}$ , est parallèle à la direction  $x_3$ ; ainsi  $\mathbf{m} = (0, 0, 1)^T$ .

Le problème couplé est résolu en imposant des conditions aux limites de type déformation et champ électrique uniformes au contour. En suivant Benveniste [5], [7] et [8], le chargement électromécanique est décomposé en :

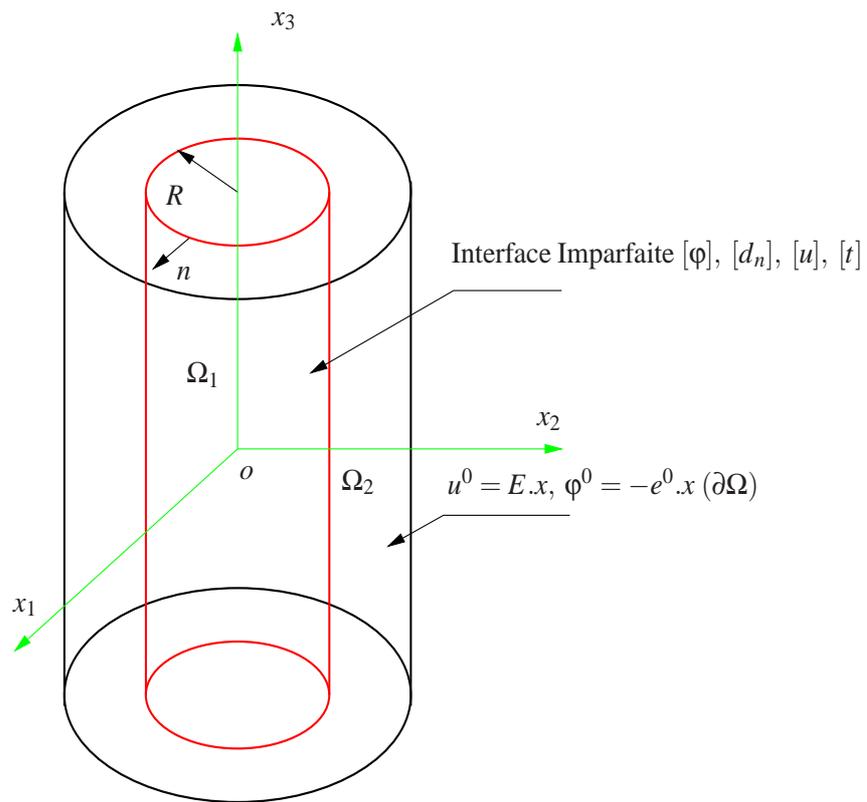


FIG. 10-1 – Détermination des propriétés piézoélectriques effectives : microstructure étudiée.

- un premier problème où l'on impose une déformation plane uniforme et un champ électrique uniforme dans la direction  $\mathbf{m}$  :

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \varphi^0 = -e_3^0 x_3 \quad (10.1)$$

- un second problème consistant à imposer une déformation antiplane et un champ électrique uniforme dans une direction perpendiculaire à la fibre :

$$\begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{13} \\ 0 & 0 & E_{23} \\ E_{13} & E_{23} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \varphi^0 = -e_1^0 x_1 - e_2^0 x_2 \quad (10.2)$$

Comme l'a montré Benveniste [5], le premier problème se ramène à un problème purement élastique tel que celui étudié au chapitre précédent. On se consacre donc à l'étude du second problème qui va nous permettre de déterminer les modules piézoélectriques effectifs  $C_{44}^*$ ,  $M_{11}^*$  et  $\Pi_{15}^*$ .

Enfin, on suppose que l'interface entre la matrice et l'inclusion est imparfaite et est décrite par les équations (6.13), (6.14), (6.15) et (6.16).

## 10.2 Propriétés de l'inclusion équivalente

En considérant les conditions aux limites (10.2), les composantes non nulles du champ de déplacement et du potentiel électrique s'écrivent :

$$\begin{aligned} u_3^{(r)} &= w^{(r)}(x_1, x_2) \\ \varphi^{(r)} &= \varphi^{(r)}(x_1, x_2) \end{aligned} \quad (10.3)$$

où  $r = 1, 2$  fait référence à la phase considérée. On en déduit en utilisant leurs définitions que le tenseur de déformation et le champ électrique sont donnés par :

$$\varepsilon^{(r)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & w_{,1}^{(r)} \\ 0 & 0 & w_{,2}^{(r)} \\ w_{,1}^{(r)} & w_{,2}^{(r)} & 0 \end{bmatrix}, \quad e_i = - \begin{bmatrix} \varphi_{,1}^{(r)} \\ \varphi_{,2}^{(r)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

et les lois d'état (6.1) et (6.2) permettent de déterminer les composantes non nulles des champs de contrainte et de déplacement électrique :

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^{(r)} &= C_{44}^{(r)} w_{,2}^{(r)} + \Pi_{15}^{(r)} \varphi_{,2}^{(r)} \\
\sigma_{13}^{(r)} &= C_{44}^{(r)} w_{,1}^{(r)} + \Pi_{15}^{(r)} \varphi_{,1}^{(r)} \\
d_2^{(r)} &= \Pi_{15} w_{,2}^{(r)} - M_{11}^{(r)} \varphi_{,2}^{(r)} \\
d_1^{(r)} &= \Pi_{15} w_{,1}^{(r)} - M_{11} \varphi_{,1}^{(r)}
\end{aligned} \tag{10.5}$$

Il s'agit maintenant de déterminer  $w^{(r)}$  et  $\varphi^{(r)}$  qui, par les équations d'équilibre et de Maxwell, vérifient :

$$\Delta w^{(r)} = 0, \quad \Delta \varphi^{(r)} = 0 \tag{10.6}$$

Les champs  $w^{(r)}$  et  $\varphi^{(r)}$  peuvent être exprimés à partir de la partie réelle de deux fonctions potentielles complexes  $\Psi^{(r)}(z)$  et  $\Phi^{(r)}(z)$  telles que

$$w^{(r)} = \operatorname{Re} \Psi^{(r)}(z), \quad \varphi^{(r)} = \operatorname{Re} \Phi^{(r)}(z) \tag{10.7}$$

où  $z = x_1 + ix_2$ . Dans des régions annulaires,  $\Psi^{(r)}(z)$  et  $\Phi^{(r)}(z)$  peuvent être développées en série de Laurent :

$$\Psi^{(r)}(z) = a^{(r)*} \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k^{(r)} z^k, \quad \Phi^{(r)}(z) = b^{(r)*} \ln z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k^{(r)} z^k \tag{10.8}$$

où  $a^{(r)*}$ ,  $b^{(r)*}$ ,  $a_k^{(r)}$  et  $b_k^{(r)}$  sont des constantes complexes à déterminer. Sans perte de généralité, on choisit  $\Psi^{(r)}(z)$  et  $\Phi^{(r)}(z)$  telles que  $E_{13} = 0$ ,  $e_1 = 0$  et on se limite à deux termes dans la série de Laurent, il vient :

$$\Psi^{(r)} = i \left( A_{-1}^{(r)} \frac{1}{z} + A_1^{(r)} z \right), \quad \Phi^{(r)}(z) = i \left( B_{-1}^{(r)} \frac{1}{z} + B_1^{(r)} z \right), \quad z \in \Omega^{(r)} \tag{10.9}$$

où les constantes réelles  $A_{-1}^{(r)}$ ,  $A_1^{(r)}$ ,  $B_{-1}^{(r)}$  et  $B_1^{(r)}$  doivent être déterminées. Pour ce faire, on va utiliser les conditions aux limites et à l'interface.

Du fait que le déplacement et le potentiel électrique sont finis au centre de la fibre ( $|z|=0$ ), on déduit immédiatement :

$$A_{-1}^{(1)} = B_{-1}^{(1)} = 0 \tag{10.10}$$

Par ailleurs, les conditions aux limites sur le contour imposent :

$$\varepsilon_{23}^{(2)} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = E_{23}, \quad e_2^{(2)} \Big|_{|z| \rightarrow \infty} = e_2^0 \quad (10.11)$$

et l'on a :

$$A_1^{(2)} = -2E_{23}, \quad B_1^{(2)} = e_2^0 \quad (10.12)$$

L'injection de  $w^{(r)}$  et  $\varphi^{(r)}$  dans (10.5) permet de déterminer les expressions du champ de vecteur contrainte et du déplacement électrique normal dans chaque phase. On obtient :

$$\begin{aligned} t_3^{(2)} &= -\frac{x_2}{r} \left( C_{44}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{r^2} - 2C_{44}^{(2)} E_{23} + \Pi_{15}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{r^2} + \Pi_{15}^{(2)} e_2^0 \right) \\ d_n^{(2)} &= -\frac{x_2}{r} \left( \Pi_{15}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{r^2} - 2\Pi_{15}^{(2)} E_{23}^0 - M_{11}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{r^2} - M_{11}^{(2)} e_2^0 \right) \end{aligned} \quad (10.13)$$

et

$$\begin{aligned} t_3^{(1)} &= \frac{x_2}{r} \left( -C_{44}^{(1)} A^{(1)} - \Pi_{15}^{(1)} B^{(1)} \right) \\ d_n^{(1)} &= \frac{x_2}{r} \left( -\Pi_{15}^{(1)} A^{(1)} + M_{11}^{(1)} B^{(1)} \right) \end{aligned} \quad (10.14)$$

Les champs qui viennent d'être déterminés sont ensuite insérés dans les conditions d'interface (6.13), (6.14), (6.15) et (6.16) en faisant appel aux opérateurs  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  définis pour les matériaux isotropes transverses. Finalement les équations (6.13), (6.14), (6.15) et (6.16) conduisent respectivement à

$$\begin{aligned} &\frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} - A_1^{(2)} = -A^{(1)} \\ &+ \frac{h}{2R} \left[ \left( \frac{M_{11}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{M_{11}^{(1)}}{M_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \Pi_{15}^{(1)2}} \right) \left( -C_{44}^{(1)} A^{(1)} - \Pi_{15}^{(1)} B^{(1)} \right) \right. \\ &- \left( \frac{M_{11}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{M_{11}^{(2)}}{M_{11}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)2}} \right) \left( \frac{C_{44}^{(2)} A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2C_{44}^{(2)} E_{23} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Pi_{15}^{(2)} B_{-1}^{(2)}}{R^2} + \Pi_{15}^{(2)} e_2^0 \right) \right. \\ &+ \left( \frac{\Pi_{15}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{\Pi_{15}^{(1)}}{M_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \Pi_{15}^{(1)2}} \right) \left( -\Pi_{15}^{(1)} A^{(1)} + M_{11}^{(1)} B^{(1)} \right) \\ &\left. - \left( \frac{\Pi_{15}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{\Pi_{15}^{(2)}}{M_{11}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)2}} \right) \left( \frac{\Pi_{15}^{(2)} A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2\Pi_{15}^{(2)} E_{23} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{M_{11}^{(2)} B_{-1}^{(2)}}{R^2} - M_{11}^{(2)} e_2^0 \right) \right] \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} - B_1^{(2)} = -B^{(1)} \\
& + \frac{h}{2R} \left[ \left( \frac{\Pi_{15}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{\Pi_{15}^{(1)}}{M_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \Pi_{15}^{(1)2}} \right) \left( -C_{44}^{(1)} A^{(1)} - \Pi_{15}^{(1)} B^{(1)} \right) \right. \\
& - \left( \frac{\Pi_{15}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{\Pi_{15}^{(2)}}{M_{11}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)2}} \right) \left( \begin{aligned} & C_{44}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2C_{44}^{(2)} E_{23} \\ & \left. + \Pi_{15}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} + \Pi_{15}^{(2)} e_2^0 \right) \right. \\
& - \left( \frac{C_{44}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{C_{44}^{(1)}}{M_{11}^{(1)} C_{44}^{(1)} + \Pi_{15}^{(1)2}} \right) \left( -\Pi_{15}^{(1)} A^{(1)} + M_{11}^{(1)} B^{(1)} \right) \\
& \left. + \left( \frac{C_{44}^{(0)}}{M_{11}^{(0)} C_{44}^{(0)} + \Pi_{15}^{(0)2}} - \frac{C_{44}^{(2)}}{M_{11}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)2}} \right) \left( \begin{aligned} & \Pi_{15}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2\Pi_{15}^{(2)} E_{23} \\ & \left. - M_{11}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} - M_{11}^{(2)} e_2^0 \right) \right] \tag{10.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \Pi_{15}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} + \Pi_{15}^{(2)} A_1^{(2)} - M_{11}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} - M_{11}^{(2)} B_1^{(2)} \right) = \left( -\Pi_{15}^{(1)} A^{(1)} + M_{11}^{(1)} B^{(1)} \right) \\
& - \frac{h}{2R} \left\{ \left[ \left( \Pi_{15}^{(0)} - \Pi_{15}^{(1)} \right) A^{(1)} + \left( \Pi_{15}^{(0)} - \Pi_{15}^{(2)} \right) \left( -\frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2E_{23} \right) \right] \right. \\
& \left. - \left[ \left( M_{11}^{(0)} - M_{11}^{(1)} \right) B^{(1)} + \left( M_{11}^{(0)} - M_{11}^{(2)} \right) \left( -\frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} + e_2^0 \right) \right] \right\} \tag{10.17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left( C_{44}^{(2)} \frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} + C_{44}^{(2)} A_1^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)} \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} + \Pi_{15}^{(2)} B_1^{(2)} \right) \\
& = \left( -C_{44}^{(1)} A^{(1)} - \Pi_{15}^{(1)} B^{(1)} \right) - \frac{h}{2R} \left\{ \left( C_{44}^{(0)} - C_{44}^{(1)} \right) A^{(1)} \right. \\
& + \left( C_{44}^{(0)} - C_{44}^{(2)} \right) \left( -\frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} - 2E_{23} \right) \\
& \left. + \left[ \left( \Pi_{15}^{(0)} - \Pi_{15}^{(1)} \right) B^{(1)} + \left( \Pi_{15}^{(0)} - \Pi_{15}^{(2)} \right) \left( -\frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} + e_2^0 \right) \right] \right\} \tag{10.18}
\end{aligned}$$

Ces quatre équations (10.15), (10.16), (10.17), et (10.18) permettent de déterminer les quatre constantes  $A_1^{(1)}$ ,  $A_{-1}^{(2)}$ ,  $B_1^{(1)}$ ,  $B_{-1}^{(2)}$ .

Les champs sont à ce stade, entièrement connus, il est alors possible d'utiliser la condition (7.21) de manière à déterminer les propriétés de l'inclusion équivalente. Il s'agit de calculer  $\Delta w_{eq}$  donné par (7.57) et de  $\Delta w$  donné par (7.56).

Le supplément d'énergie  $\Delta w_{eq}$  est obtenu en utilisant les définitions suivantes de  $\mathbf{Z}^0$ ,

$\mathbf{F}^{(2)}, \mathbf{F}^{(eq)}$

$$\mathbf{Z}^0 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}E_{23}^0 \\ 0 \\ 0 \\ -e_2^0 \end{bmatrix} \quad (10.19)$$

$$\mathbf{F}^{(2)} = \begin{bmatrix} 2C_{44}^{(2)} & 0 & 0 & \sqrt{2}\Pi_{15}^{(2)} \\ 0 & 2C_{44}^{(2)} & \sqrt{2}\Pi_{15}^{(2)} & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\Pi_{15}^{(2)} & -M_{11}^{(2)} & 0 \\ \sqrt{2}\Pi_{15}^{(2)} & 0 & 0 & -M_{11}^{(2)} \end{bmatrix}; \quad (10.20)$$

$$\mathbf{F}^{(eq)} = \begin{bmatrix} 2C_{44}^e & 0 & 0 & \sqrt{2}\Pi_{15}^e \\ 0 & 2C_{44}^e & \sqrt{2}\Pi_{15}^e & 0 \\ 0 & \sqrt{2}\Pi_{15}^e & -M_{11}^e & 0 \\ \sqrt{2}\Pi_{15}^e & 0 & 0 & -M_{11}^e \end{bmatrix} \quad (10.21)$$

et, pour une inclusion cylindrique, le tenseur d'Eshelby s'écrit :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (10.22)$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \Delta w_{eq} = & \frac{\pi R^2 l / 2}{C_{44}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^e M_{11}^e + C_{44}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)2} + \Pi_{15}^e{}^2 + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)}} \\ & * [8(-C_{44}^{(2)2} M_{11}^{(2)} - C_{44}^{(2)2} M_{11}^e + C_{44}^e C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)} + C_{44}^e C_{44}^{(2)} M_{11}^e \\ & - \Pi_{15}^{(2)2} C_{44}^{(2)} - 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(e)2} C_{44}^{(2)} + 2\Pi_{15}^{(2)2} C_{44}^e) E_{23}^2 \\ & + 8(C_{44}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} + C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} - 2C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^e M_{11}^{(2)} - C_{44}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^e \\ & - \Pi_{15}^{(2)} \Pi_{15}^e{}^2 + C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)3}) E_{23} e_2^0 \\ & + 2(-\Pi_{15}^e{}^2 M_{11}^{(2)} - C_{44}^e M_{11}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)2} + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} \\ & - C_{44}^{(2)} M_{11}^e M_{11}^{(2)} - 2\Pi_{15}^e{}^2 M_{11}^e + C_{44}^e M_{11}^{(2)2} + M_{11}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)2}) e_2^0] \end{aligned} \quad (10.23)$$

On peut montrer que  $\frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2}$  et  $\frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2}$ , solutions du système (10.15), (10.16), (10.17), et

(10.18), peuvent être obtenus sous la forme :

$$\frac{A_{-1}^{(2)}}{R^2} = aE_{23} + be_2^0, \quad \frac{B_{-1}^{(2)}}{R^2} = cE_{23} + de_2^0$$

où  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  sont les fonctions des paramètres des matériaux. Cette remarque permet d'écrire le supplément d'énergie  $\Delta w$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Delta w = & \frac{\pi R^2 l}{2} \{ E_{23}^0 e_2^0 [-4bC_{44}^{(2)} + (2a - 4d)\Pi_{15}^{(2)} - 2cM_{11}^{(2)}] \\ & + E_{23}^{02} (-4aC_{44}^{(2)} - 4c\Pi_{15}^{(2)}) + e_2^{02} (2b\Pi_{15}^{(2)} - 2dM_{11}^{(2)}) \} \end{aligned} \quad (10.24)$$

En posant l'égalité entre  $\Delta w_{eq}$  donné par (10.23) et  $\Delta w$  fourni par (10.24), on obtient un système de trois équations duquel on déduit les modules piézoélectriques  $\Pi_{15}^e$ ,  $C_{44}^e$  et  $M_{11}^e$  de l'inclusion équivalente. Ces équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} & \frac{2}{C_{44}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^e M_{11}^e + C_{44}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)2} + \Pi_{15}^{e2} + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)}} \\ & (-\Pi_{15}^{e2} M_{11}^{(2)} - C_{44}^e M_{11}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)2} + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} \\ & - C_{44}^{(2)} M_{11}^e M_{11}^{(2)} - 2\Pi_{15}^{e2} M_{11}^e + C_{44}^e M_{11}^{(2)2} + M_{11}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)2}) = 2b\Pi_{15}^{(2)} - 2dM_{11}^{(2)} \end{aligned} \quad (10.25)$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{C_{44}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^e M_{11}^e + C_{44}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)2} + \Pi_{15}^{e2} + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)}} \\ & (-C_{44}^{(2)2} M_{11}^{(2)} - C_{44}^{(2)2} M_{11}^e + C_{44}^e C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)} + C_{44}^e C_{44}^{(2)} M_{11}^e \\ & - \Pi_{15}^{(2)2} C_{44}^{(2)} - 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} C_{44}^{(2)} + \Pi_{15}^{(e)2} C_{44}^{(2)} + 2\Pi_{15}^{(2)2} C_{44}^e) = -4aC_{44}^{(2)} - 4c\Pi_{15}^{(2)} \end{aligned} \quad (10.26)$$

$$\begin{aligned} & \frac{8}{C_{44}^e M_{11}^{(2)} + C_{44}^e M_{11}^e + C_{44}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)2} + \Pi_{15}^{e2} + 2\Pi_{15}^e \Pi_{15}^{(2)} + C_{44}^{(2)} M_{11}^{(2)}} \\ & (C_{44}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} + C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^{(2)} - 2C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^e M_{11}^{(2)} - C_{44}^e \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^e \\ & - \Pi_{15}^{(2)} \Pi_{15}^{e2} + C_{44}^{(2)} \Pi_{15}^{(2)} M_{11}^e + \Pi_{15}^{(2)3}) = -4bC_{44}^{(2)} + (2a - 4d)\Pi_{15}^{(2)} - 2cM_{11}^{(2)} \end{aligned} \quad (10.27)$$

### 10.3 Propriétés effectives et applications

Les propriétés de l'inclusion équivalente étant obtenues, le problème se ramène à l'étude d'un composite biphasique avec interface parfaite. Pour le problème de Piézoélectricité, on adopte le schéma autocohérent généralisé proposé par Jiang et al. [59]. Ainsi, les modules  $M_{11}^*$ ,  $\Pi_{15}^*$  et  $C_{44}^*$  sont solutions d'un système constitué de quatre équations dont seulement

trois sont indépendantes. Les quatre équations s'écrivent :

$$\begin{aligned}
& 2[R_1^2(1 - P_1) + R_2^2 P_1](C_{44}^c Q_4 - \Pi_{15}^c Q_2) - 2(R_2^2 - R_1^2)P_2(C_{44}^c Q_3 - \Pi_{15}^c Q_1) \\
& = Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3 \\
& - (R_2^2 - R_1^2)P_3(C_{44}^c Q_4 - \Pi_{15}^c Q_2) + [R_1^2(1 - P_4) + R_2^2 P_4](C_{44}^c Q_3 - \Pi_{15}^c Q_1) = 0 \\
& - [R_1^2(1 - P_1) + R_2^2 P_1](\Pi_{15}^c Q_4 + M_{11}^c Q_2) + (R_2^2 - R_1^2)P_2(\Pi_{15}^c Q_3 + M_{11}^c Q_1) = 0 \\
& 2(R_2^2 - R_1^2)P_3(\Pi_{15}^c Q_4 + M_{11}^c Q_2) - 2[R_1^2(1 - P_4) + R_2^2 P_4](\Pi_{15}^c Q_3 + M_{11}^c Q_1) \\
& = Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3
\end{aligned} \tag{10.28}$$

où  $R_1$  et  $R_2$  sont tels que  $c = (R_1/R_2)^2$  et où les paramètres  $P_i$  et  $Q_i$  sont donnés par :

$$\begin{aligned}
P_1 &= \frac{(C_{44}^{(2)} + C_{44}^{(e)})M_{11}^{(2)} + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^{(e)})\Pi_{15}^{(2)}}{2(C_{44}^{(2)}M_{11}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)^2})} \\
P_2 &= \frac{\Pi_{15}^{(e)}M_{11}^{(2)} - \Pi_{15}^{(2)}M_{11}^{(e)}}{2(C_{44}^{(2)}M_{11}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)^2})} \\
P_3 &= \frac{C_{44}^{(e)}\Pi_{15}^{(2)} - \Pi_{15}^{(e)}C_{44}^{(e)}}{2(C_{44}^{(2)}M_{11}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)^2})} \\
P_4 &= \frac{(M_{11}^{(2)} + M_{11}^{(e)})C_{44}^{(2)} + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^{(e)})\Pi_{15}^{(2)}}{2(C_{44}^{(2)}M_{11}^{(2)} + \Pi_{15}^{(2)^2})}
\end{aligned} \tag{10.29}$$

$$\begin{aligned}
Q_1 &= (C_{44}^{(2)} - C_{44}^*)R_1^2(P_1 - 1) + (C_{44}^{(2)} + C_{44}^*)R_2^2 P_1 \\
& + (\Pi_{15}^{(2)} - \Pi_{15}^*)R_1^2 P_3 + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^*)R_2^2 P_3 \\
Q_2 &= (C_{44}^{(2)} - C_{44}^*)R_1^2 P_2 + (C_{44}^{(2)} + C_{44}^*)R_2^2 P_2 \\
& + (\Pi_{15}^{(2)} - \Pi_{15}^*)R_1^2(P_4 - 1) + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^*)R_2^2 P_4 \\
Q_3 &= (\Pi_{15}^{(2)} - \Pi_{15}^*)R_1^2(P_1 - 1) + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^*)R_2^2 P_1 \\
& - (M_{11}^{(2)} - M_{11}^*)R_1^2 P_3 - (M_{11}^{(2)} + M_{11}^*)R_2^2 P_3 \\
Q_4 &= (\Pi_{15}^{(2)} - \Pi_{15}^*)R_1^2 P_2 + (\Pi_{15}^{(2)} + \Pi_{15}^*)R_2^2 P_2 \\
& - (M_{11}^{(2)} - M_{11}^*)R_1^2(P_4 - 1) - (M_{11}^{(2)} + M_{11}^*)R_2^2 P_4
\end{aligned} \tag{10.30}$$

Les résultats obtenus sont comparés avec un modèle à trois phases obtenus de façon itérative en utilisant (10.28), (10.29) et (10.30) deux fois :

- pour obtenir les propriétés de l'ensemble inclusion + interphase, noté 10, en faisant les remplacements  $e \leftrightarrow 1$ ,  $2 \leftrightarrow 0$  et  $* \leftrightarrow 10$ .

– pour obtenir les propriétés effectives par le remplacement  $e \leftrightarrow 10$ .

Les deux modèles sont comparés en considérant les paramètres matériaux suivants :

$$C_{44}^{(1)} = 35.3 \text{ Gpa}, C_{44}^{(0)} = \frac{C_{44}^{(1)}}{2}, C_{44}^{(2)} = \frac{C_{44}^{(1)}}{10}$$

$$\Pi_{15}^{(1)} = 10 \text{ C/m}^2, \Pi_{15}^{(2)} = \frac{\Pi_{15}^{(1)}}{10}$$

$$M_{11}^{(1)} = 15.1 \text{ nC}^2/\text{Nm}^2, M_{11}^{(0)} = \frac{M_{11}^{(1)}}{2}, M_{11}^{(2)} = \frac{M_{11}^{(1)}}{10}$$

$$c = 0.4.$$

Les Fig 10-2, 10-3, 10-4, 10-5, 10-6 et 10-7 présentent les évolutions des modules  $C_{44}^*$ ,  $M_{11}^*$  et  $\Pi_{15}^*$  en fonction de  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour deux épaisseurs d'interphase  $\delta = \frac{h}{R_1} = 0.001$  et  $\delta = 0.01$ . Ces résultats montrent une très bonne concordance entre les deux modèles.

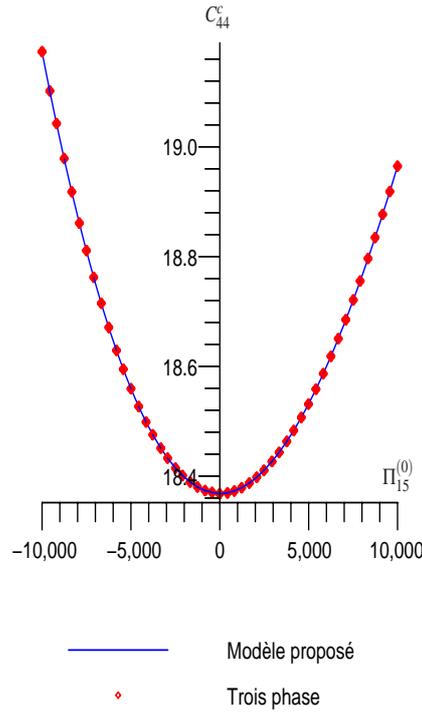


FIG. 10-2 – Evolution du module  $C_{44}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.001$ .

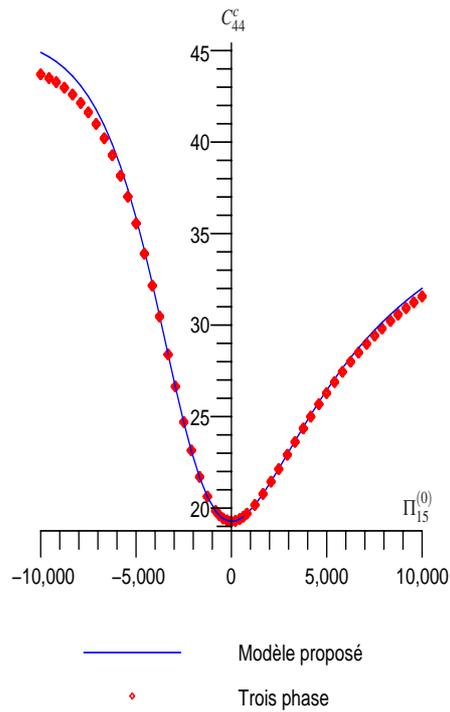


FIG. 10-3 – Evolution du module  $C_{44}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.01$ .

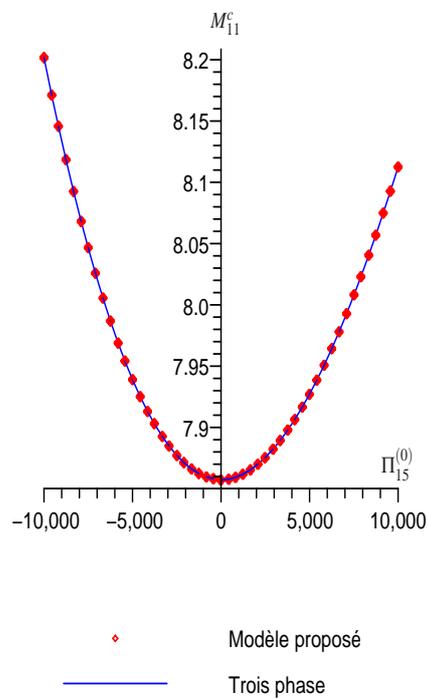


FIG. 10-4 – Evolution du module  $M_{11}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.001$ .

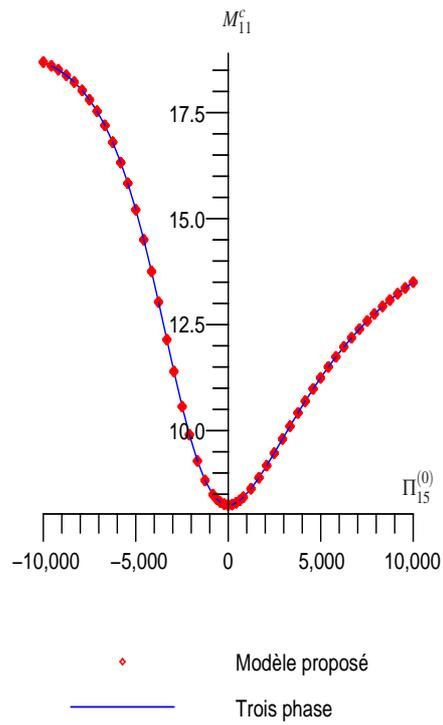


FIG. 10-5 – Evolution du module  $M_{11}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.001$ .

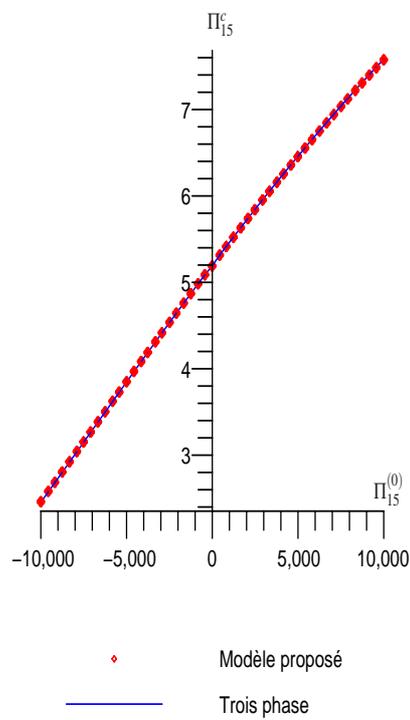


FIG. 10-6 – Evolution du module  $\Pi_{15}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.001$ .

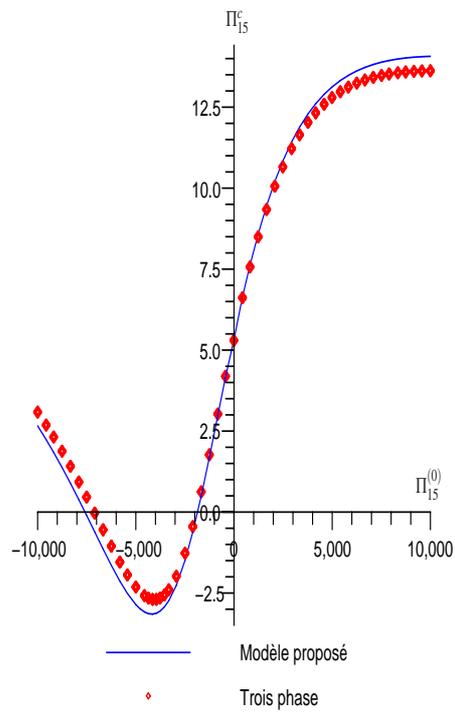


FIG. 10-7 – Evolution du module  $\Pi_{15}^*$  en fonction du module  $\Pi_{15}^{(0)}$  pour  $\delta = 0.01$ .

# Conclusion générale et perspectives

Ce travail de thèse contribue à la modélisation des interfaces imparfaites et des effets de ces dernières en mécanique des matériaux et des structures. Cette contribution est triple :

- Tout d'abord, une approche systématique et indépendante de tout système de repère a été élaborée pour modéliser les interfaces courbées. L'avantage principal de cette approche est qu'elle ne fait appel à aucun système de coordonnées curvilignes et peut se traduire facilement dans un système de coordonnées cartésiennes. Par conséquent, elle est tout à fait compatible avec la méthode "level-set" qui est numériquement très puissante pour traiter les phénomènes de surface et d'interface.
- Ensuite, à partir de la configuration de base où une interphase d'épaisseur  $h$  uniforme est située entre deux phases, ce travail a abouti à l'établissement : (i) d'un modèle d'interface imparfaite thermique dont le degré de précision est de  $0(h^N)$  avec  $N \geq 1$  quelconque ; (ii) d'un modèle d'interface imparfaite élastique dont le degré d'approximation est de  $0(h^N)$  avec  $N \geq 1$  arbitraire ; (iii) d'un modèle d'interface imparfaite piézoélectrique qui est exact à une erreur  $0(h)$  ou  $0(h^2)$  près. L'idée sur laquelle repose la construction de ces trois modèles est de demander que le remplacement de l'interphase par une interface imparfaite ne perturbe pas les champs en question dans la zone de l'interphase et en dehors de celle-ci à une erreur fixée près. Cette idée a été réalisée grâce au développement de Taylor. Par rapport aux résultats existants dans la littérature sur la modélisation des interfaces imparfaites, les expressions compactes caractérisant le modèle d'interface imparfaite thermique avec  $N \geq 1$  quelconque à l'aide des formules de récurrence sont nouvelles ; le modèle d'interface imparfaite élastique tridimensionnel avec  $N \geq 3$  a été établi pour la première fois ; le modèle d'interface imparfaite piézoélectrique n'a jamais été proposé.
- Enfin, les effets des interfaces imparfaites ont été pris en compte par l'utilisation de

la méthode d'inclusion équivalente dans la détermination des propriétés effectives thermiques, élastiques et piézoélectriques des matériaux composites à inclusions et à fibres. Ceci constitue une validation des modèles d'interface imparfaite établis.

Ces résultats contribuent en fait au développement de la mécanique des surfaces et des interfaces.

A l'issue de ce travail de thèse, de nouvelles perspectives sont ouvertes. Notamment, nous pouvons citer les suivantes :

- Le modèle d'interface imparfaite élastique du degré de précision  $0(h^4)$  a été explicité mais son interprétation n'est pour l'instant pas complète du fait que de nombreux termes interviennent dans le modèle. Une interprétation complète du modèle devra être surtout effectuée quand l'interphase est très rigide par rapport aux phases qu'elle relie.
- Les modèles d'interface imparfaite appliqués à l'homogénéisation des matériaux hétérogènes sont seulement du degré de précision  $0(h^2)$ . Il sera très utile pour certains cas de faire intervenir les modèles d'interface imparfaite du degré de précision plus élevé que  $0(h^2)$  dans l'homogénéisation des matériaux hétérogènes avec interfaces imparfaites.
- Les modèles d'interface imparfaite du degré de précision  $0(h^2)$  ont été appliqués à des inclusions sphériques ou cylindriques dans une matrice. D'un point de vue micromécanique, il sera très important de traiter des inclusions sphéroïdales et ellipsoïdales dans une matrice
- Les modèles d'interface établis sont tous linéaires. Quand une interphase non linéaire se trouve entre phases non linéaires, le problème de dériver un modèle d'interface reste entièrement ouvert. L'extension de l'approche développée dans ce travail à la résolution de ce problème sera une des perspectives les plus importantes.
- L'approche élaborée dans ce travail pour établir des modèles d'interface imparfaite pourra être utilisée pour développer une théorie générale des plaques et une théorie générale des coques. En particulier, ces théories permettront de retrouver la théorie classique des plaques de Kirchhoff-Love et la théorie classique des coques de Koiter.

# Bibliographie

- [1] A. W. Adamson and A. P. Gast, *Physical Chemistry of Surfaces*, 6th Edition, Wiley-Interscience, 1997.
- [2] Y. Benveniste, "The effective mechanical contact between the constituents", *Mechanics of Materials*, 1985, **4**, 197-208.
- [3] Y. Benveniste, "Stress fields in composites with coated inclusions", *Mechanics of Materials*, 1989, **7**, 305-317.
- [4] Y. Benveniste, "Exact results in the micromechanics of fibrous piezoelectric composites exhibiting pyroelectricity", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2006, **441**, 59-81.
- [5] Y. Benveniste, "On the micromechanics of fibrous piezoelectric composites", *Mechanics of Materials*, 1994, **18**, 183-193.
- [6] Y. Benveniste, "A micromechanics model for coated-fiber piezoelectric composites", *Materials and Control in Smart Structures, Ed. by H.T. Banks, SPIE Proceedings, Orlando, Florida*, 1994, 403-419.
- [7] Y. Benveniste, "Correspondence relations among equivalent classes of heterogeneous piezoelectric solids under anti-plane mechanical and in-plane electrical fields", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1995, **43**, 553-571.
- [8] Y. Benveniste, "Piezoelectric inhomogeneity problems in anti-plane shear and in-plane electric fields-how to obtain the coupled fields from the uncoupled dielectric solution", *Mechanics of Materials*, 1997, **25**, 59-65.
- [9] Y. Benveniste, "A general interface model for a three-dimensional curved thin anisotropic interphase between two anisotropic media", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, **54**, 708-734.

- [10] Y. Benveniste, "An  $O(hN)$  interface model of a three-dimensional curved interphase in conduction phenomena", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2006, **462**, 1593-1617.
- [11] Y. Benveniste and G. Baum, "An interface model of a graded three-dimensional anisotropic curved interphase", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2007, **463**, 419-434.
- [12] Y. Benveniste and G. J. Dvorak, "Uniform fields and universal relations in piezoelectric composites", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1992, **40**, 1295-1312.
- [13] Y. Benveniste and T. Miloh, "Neutral inhomogeneities in conduction phenomena", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1999, **4**, 197-208.
- [14] Y. Benveniste and T. Miloh, "Imperfect soft and stiff interfaces in two-dimensional elasticity", *Mechanics of Materials*, 2001, **33**, 309-323.
- [15] J. P. Boehler, *Applications of Tensor Functions in Solid Mechanics*, Springer, 1987.
- [16] P. Bovik, "On the modelling of thin interface layers in elastic and acoustic scattering problems", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1994, **47**, 17-42.
- [17] P. Bovik and P. Olsson, "Effective boundary conditions for the scattering of two-dimensional SH waves from a curved thin elastic layer", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1992, **439**, 257-269.
- [18] D. Caillerie, "Sur le comportement limite d'une inclusion mince de grande rigidite", *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris A*, 1978, **287**, 675-678.
- [19] C. H. Chen and Y. C. Wang, "Effective thermal conductivity of misoriented short-fiber reinforced thermoplastics", *Mechanics of Materials*, 1996, **23**, 217-228.
- [20] H. Cheng and S. Torquato, "Effective conductivity of periodic arrays of spheres with interfacial resistance", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1997, **453**, 145-161.

- [21] H. Cheng and S. Torquato, "Effective conductivity of dispersions of spheres with a superconducting interface", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1997, **453**, 1331-1344.
- [22] R. M. Christensen and K. H. Lo, "Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1979, **27**, 315-330.
- [23] O. Coussy, *Mécanique des Milieux Poreux*, Ed. Technip, Paris, 1991.
- [24] S. Cuenot, C. Frétiigny, S. Demoustier-Champagne, and B. Nysten, "Surface tension effect on the mechanical properties of nanomaterials measured by atomic force microscopy", *Physical Review B*, 2004, **69**, 165410-1-165410-5.
- [25] P. Delhaes, *Fibers and Composites (World of Carbon)*, CRC, 2003.
- [26] H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang and B. L. Karihaloo, "Eshelby formalism for nano-inhomogeneities", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 2005, **461**, 3335-3353.
- [27] H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang and B. L. Karihaloo, "Size-dependent effective elastic constants of solids containing nano-inhomogeneities with interface stress", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2005, **53**, 1574-1596.
- [28] H. L. Duan, J. Wang, Z. P. Huang and Z.Y. Luo, "Stress concentration tensors of inhomogeneities with interface effects", *Mechanics of Materials*, 2005, **37**, 723-736.
- [29] H. L. Duan, Jiao Y., X. Yi, Z. P. Huang and J. Wang., "Solutions of inhomogeneity problems with graded shells and application to core-shell nanoparticles and composites", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2006, **54**, 1401-1425.
- [30] H. L. Duan, X. Yi, Z.P. Huang and J. Wang, "A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part I : Theoretical framework", *Mechanics of Materials*, 2007, **39**, 81-93.
- [31] H. L. Duan, X. Yi, Z.P. Huang and J. Wang, "A unified scheme for prediction of effective moduli of multiphase composites with interface effects. Part II : Application and scaling laws", *Mechanics of Materials*, 2007, **39**, 94-103.

- [32] J. D. Eshelby, "Micromechanics of crystal interfaces in polycrystalline solid phases of porous media : fundamentals and application to strength of hydroxyapatite biomaterials", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1957, **241**, No. 1226, 376-396.
- [33] A. Fritsch, L. Dormieux, C. Hellmich and J. Sanahuja, "The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems", *Journal of Materials Science*, 2007, **42**, 1573-4803.
- [34] J. F. Ganghoffer and J. Schultz, "Geometrically non-linear modelling of contact problems involving thin elastic layers", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996, **44**, 1103-1127.
- [35] G. Geymonat, F. Krasucki and S. Lenci, "Mathematical analysis of a bonded joint of soft thin adhesive", *Mathematics and Mechanics of Solids*, 1999, **4**, 201-225.
- [36] F. Ghahremani, "Effect of grain boundary sliding on anelasticity of polycrystals", *International Journal of Solids and Structures*, 1980, **16**, No.9, 825-845.
- [37] M. E. Gurtin and A. I. Murdoch, "A continuum theory of elastic material surfaces", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1975, **57**, No.4, 291-323.
- [38] M. E. Gurtin, *Thermomechanics of Evolving Phase Boundaries in the Plane*, Oxford University Press, 1993.
- [39] M. E. Gurtin, "The dynamics of solid-solid phase transitions. I. Coherent interfaces", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1993, **123**, 305–335.
- [40] M. E. Gurtin and P. Cermelli, "The dynamics of solid-solid phase transitions.II. Incoherent interfaces", *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1994, **127**, 41–99.
- [41] M. E. Gurtin, J. Weissmüller and F. Larché, "A general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium", *Philosophical Magazine*, 1998, **75**, No.5, 1093-1109.
- [42] M. E. Gurtin, *Configurational Forces as Basic Concepts of Continuum Physics*, Springer, 1999.

- [43] P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Springer, 1974.
- [44] Z. Hashin, "Thermoelastic properties of fiber composites with imperfect interface", *Mechanics of Materials*, 1990, **8**,333-348.
- [45] Z. Hashin, "Thermoelastic properties of particulate composites with imperfect interface", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1991, **39**,No. 6, 745-762.
- [46] Z. Hashin, "Thin interphase/imperfect interface in conduction", *Journal of Applied Physics*, 2001, **89**, No.4, 2261-2267.
- [47] Z. Hashin, "Thin interphase/imperfect interface in elasticity with application to coated fiber", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2002, **50**, 2509-2537.
- [48] H. Hatta and M. Taya, "Effective thermal conductivity of a misoriented short fiber composite", *Journal of Applied Physics*, 1985, **58**, No.7, 2478-2486.
- [49] Q. C. He, J. J. Telega and A. Curnier, "Unilateral contact of two solids subject to large deformations : formulation and existence results", *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1996, **452**, 2691-2717.
- [50] Q. C. He, "Variational and microstructure-independent relations for piezoelectric composites", *Journal of Materials Science and Technology*, 2004, **20**, 69-72.
- [51] Q. C. He, *Mécanique de l'interface*, Cours de DEA de l'Université de Marne-la-Vallée, 2006.
- [52] E. Hervé and A. Zaoui, "n-layered inclusion-based micromechanical modeling", *International Journal of Engineering Science*, 1993, **31**, No. 1, 1-10.
- [53] E. Hervé and A. Zaoui, "Elastic behaviour of multiply coated fibre-reinforced composites", *International Journal of Engineering Science*, 1995, **33**, No. 10, 1419-1433.
- [54] R. Hill, "Discontinuity relations in mechanics of solids", *Progress in Solid Mechanics*, In : *Sneddon, I.N., Hill, R. (Eds.)*,1961, Vol 2, 246-276.
- [55] R. Hill, "Interfacial operators in the mechanics of composite media", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1983, Vol 31, 347-357.

- [56] M. Hori and S. Nemat-Nasser, "Universal bounds for effective piezoelectric moduli", *Mechanics of Materials*, 1998, **30**, 1-19.
- [57] J. H. Huang, R. Furuhashi and T. Mura, "Frictional sliding inclusions", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1993, **41**, 247-265.
- [58] H. Ibach, *Physics of Surfaces and Interfaces*, Springer, 2006.
- [59] C. P. Jiang and Y. K. Cheung, "An exact solution for the three-phase piezoelectric cylinder model under antiplane shear and its application to piezoelectric composites", *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**, 4777-4796.
- [60] C. P. Jiang, Z. H. Tong and Y. K. Cheung, "A generalized self-consistent method for piezoelectric fiber reinforced composites under antiplane shear", *Mechanics of Materials*, 2001, **33**, 295-308.
- [61] M. T. Kamali and H. M. Shodja, "A semi-analytical method for piezocomposite structures with arbitrary interfaces", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2005, **194**, 4588-4604.
- [62] A. Klarbring, "Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method", *International of Engineering Science*, 1991, **29**, 493-512.
- [63] A. Klarbring and A. B. Movchan, "Asymptotic modelling of adhesive joints", *Mechanics of Materials*, 1998, **28**, 137-145.
- [64] K. Lemrabet, "Le problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ ", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris A*, 1987, **304**, 151-154.
- [65] S. F. Li, *Introduction to Micromechanics and Nanomechanics Lecture Notes*, University of California.
- [66] R. Lipton, "Composites with imperfect interface", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1996, **452**, 329-358.
- [67] R. Lipton, "Variational methods, bounds and size effects for composites with highly conducting interface", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1997, **45**, 361-384.

- [68] R. Lipton, "Reciprocal relations, bounds, and size effects for composites with highly conducting interface", *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 1997, **57**, 342-363.
- [69] R. Lipton, "Bounds for the effective conductivity of a composite with an imperfect interface", *Proceedings : Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2001, **2010**, 1501-1507.
- [70] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publications, New York, 1926.
- [71] S. Mazumdar, *Composites Manufacturing : Materials, Product, and Process Engineering*, CRC, 1926.
- [72] Y. Mikata, "Determination of piezoelectric Eshelby tensors in transversely isotropic piezoelectric solids", *International Journal of Engineering Science*, 2000, **38**, 605-641.
- [73] Y. Mikata, "Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion", *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**, 7045-7063.
- [74] T. Miloh and Y. Benveniste, "On the effective conductivity of composites with ellipsoidal inhomogeneities and highly conducting interfaces", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1999, **455**, 2687-2706.
- [75] T. Mura, *Micromechanics of defects in solids*, Springer, 1982.
- [76] T. Mura, I. Jasiuk and B. Tsuchida, "The stress field of a sliding inclusion", *International Journal of Solids and Structures*, 1985, **21**, 1165-1179.
- [77] A. I. Murdoch, "A thermodynamical theory of elastic material interfaces", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1976, **29**, No.3, 245-275.
- [78] A. I. Murdoch, "Some fundamental aspects of surface modelling", *Journal of Elasticity*, 2005, **80**, 245-275.
- [79] S. Nemat-Nasser and M. Hori, *Micromechanics : Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1999.
- [80] J. F. Nye, *Physical Properties of Crystals : Their Representation by Tensors and Matrices*, Oxford University Press, USA, 1985.

- [81] H. Pham Huy and E. Sanchez-Palencia, "Phénomènes de transmission à travers des couches minces de conductivité élevée", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1974, **47**, 284-309.
- [82] C. Z. Rosen, B. V. Hiremath and R. E. Newnham, *Piezoelectricity*, AIP Press, 1992.
- [83] M. B. Rubin and Y. Benveniste, "A Cosserat shell model for interphases in elastic media", *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, **52**, 1023-1052.
- [84] E. Sanchez-Palencia, "Comportement limite d'un problème de transmission à travers une plaque faiblement conductrice", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris A*, 1970, **270**, 1026-1028.
- [85] J. Schröder and D. Gross, "Invariant formulation of the electromechanical enthalpy function of transversely isotropic piezoelectric materials", *Archive of Applied Mechanics*, 2004, **73**, 533-552.
- [86] P. Sharma and S. Gani, "Size-dependent Eshelby's tensor for embedded nano-inclusions incorporating surface/interface energies", *Journal of Applied Mechanics*, 2004, **71**, 663-671.
- [87] L. X. Shen and S. Yi, "An effective inclusion model for effective moduli of heterogeneous materials with ellipsoidal inhomogeneities", *International Journal of Solids and Structures*, 2001, **38**, 5789-5805.
- [88] H. M. Shodja, S. M. Tabatabaei and M. T. Kamali, "A piezoelectric-inhomogeneity system with imperfect interface", *International Journal of Engineering science*, 2006, **44**, 291-311.
- [89] G. A. Somorjai, *Introduction to Surface Chemistry and Catalysis*, Wiley-Interscience, 1994.
- [90] D. J. Steigmann and R. W. Ogden, "Plane deformations of elastic solids with intrinsic boundary elasticity", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1997, **453**, 853-877.
- [91] D. J. Steigmann and R. W. Ogden, "Elastic surface-substrate interactions", *Proceedings of the Royal Society of London A*, 1999, **455**, 437-474.
- [92] S. Torquato, *Random Heterogeneous Materials*, Springer, 2001.

- [93] V. A. Toponogov, *Differential Geometry of Curves and Surfaces : A Concise Guide*, Birkhäuser Boston, 2005.
- [94] G. Valiron, *Classical Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Math Science Pr, 1987.
- [95] C. C. Wang and M. Bowen, *Introduction to Vectors and Tensors*, Springer, 1976.
- [96] J. Wang, H. L. Duan, Z. Zhang and Z. P. Huang, "An anti-interpenetration model and connections between interphase and interface models in particle-reinforced composites", *International Journal of Mechanical Sciences*, 2005, **47**,701-718.
- [97] X. Wang and Z. Zhong, "Three-dimensional solution of smart laminated anisotropic circular cylindrical shells with imperfect bonding", *International Journal of Solids and Structures*, 2003, **40**, 5901-5921.
- [98] J. Weissmueller and J. W. Cahn, "Mean stresses in microstructures due to interface stresses : a generalization of a capillary equation for solids," *Acta Materialia*, 1997, **45**, 1899-1906..
- [99] F. J. Yang, "Size-dependent effective modulus of elastic composite : Spherical nanocavities at dilute concentrations", *Journal of Applied Physics*, 2004, **95**, 3516-3520.
- [100] A. Zaoui, *Matériaux Hétérogènes et Composites*, Cours de l'Ecole Polytechnique, 2000.
- [101] Q. S. Zheng, "Theory of representations for tensor functions : unified invariant approach to constitutive equations", *Applied Mechanics Reviews*, 1994, **47**, 545-587.

# Annexe A

## Modèles d'interface imparfaite thermique d'ordres $0(h^3)$ et $0(h^4)$

### A.1 Modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre $0(h^3)$

Le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^3)$  s'écrit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 [\varphi] = & \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + P_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ P_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + P_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & - \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) - P_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ + \left[ P_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - P_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^2}{4} \left[ P_{1,1}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) - P_{1,1}^{(0,1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) \right] + 0(h^3)
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned}
 [q_n] = & \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + Q_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ Q_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + Q_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & - \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) - Q_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ + \left[ Q_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - Q_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^2}{4} \left[ Q_{1,1}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) - Q_{1,1}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) \right] + 0(h^3)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

où

$$P_1 = -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi$$

$$Q_1 = \operatorname{div}_s(\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s(\mathbf{s} q_n)$$

$$\begin{aligned} P_2 &= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot Q_1 - \mathbf{s} \cdot (\nabla_s P_1 + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}) \\ &= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\operatorname{div}_s(\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s(\mathbf{s} q_n)] - \mathbf{s} \cdot \left[ \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right] \\ P_{1,1}^{(0,i)} &= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left[ \operatorname{div}_s(\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s(\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right] \\ &\quad - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \left[ \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_2 &= \{ \operatorname{div}_s [\mathbf{S} \cdot (\nabla_s P_1 + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L})] + \nabla_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \} - [ \operatorname{div}_s (\mathbf{s} Q_1) + \nabla_s (\mathbf{s} q_n) : \mathbf{L} ] \\ &= \left[ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] + \nabla_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \right] \\ &\quad - [ \operatorname{div}_s (\mathbf{s} \{ \operatorname{div}_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s} q_n) \}) + \nabla_s (\mathbf{s} q_n) : \mathbf{L} ] \\ Q_{1,1}^{(0,i)} &= \left[ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] + \nabla_s (\mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \right] \\ &\quad - \left[ \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(0)} \{ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \}) + \nabla_s (\mathbf{s}^{(0)} q_n) : \mathbf{L} \right] \end{aligned}$$

## A.2 Modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre

$0(h^4)$

Le modèle d'interface imparfaite thermique d'ordre  $0(h^4)$  s'écrit par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
 [\varphi] = & \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + P_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ P_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + P_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & - \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) - P_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ + \left[ P_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - P_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^2}{4} [P_{1,1}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) - P_{1,1}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)})] \\
 & + \frac{h^3}{48} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_3(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) + P_3(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ P_3^{(2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) + P_3^{(1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^3}{16} \left\{ \begin{array}{l} \left[ P_{1,2}^{(0,1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) + P_{1,2}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) \right] \\ - \left[ P_{2,1}^{(0,1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) + P_{2,1}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) \right] \end{array} \right\} + 0(h^4)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

$$\begin{aligned}
 [q_n] = & \frac{h}{2} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) + Q_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ Q_1(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) + Q_1(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & - \frac{h^2}{8} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) - Q_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ + \left[ Q_2(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) - Q_2(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^2}{4} [Q_{1,1}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) - Q_{1,1}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)})] \\
 & + \frac{h^3}{48} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_3(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(0)}) + Q_3(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(0)}) \right] \\ - \left[ Q_3^{(2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}; \mathbf{K}^{(2)}) + Q_3^{(1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}; \mathbf{K}^{(1)}) \right] \end{array} \right\} \\
 & + \frac{h^3}{16} \left\{ \begin{array}{l} \left[ Q_{1,2}^{(0,1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) + Q_{1,2}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) \right] \\ - \left[ Q_{2,1}^{(0,1)}(\varphi^{(-)}, q_n^{(-)}) + Q_{2,1}^{(0,2)}(\varphi^{(+)}, q_n^{(+)}) \right] \end{array} \right\} + 0(h^4)
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

où

$$\begin{aligned}
P_3 &= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot Q_2 - \mathbf{s} \cdot (\nabla_s P_2 + 2\nabla_s P_1 \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2) \\
&= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ \operatorname{div}_s [\mathbf{S} \cdot (\nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L})] + \nabla_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \right] \\ & - [\operatorname{div}_s \{ \mathbf{s} [\operatorname{div}_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s} q_n)] \} + \nabla_s (\mathbf{s} q_n) : \mathbf{L}] \end{aligned} \right\} \\
&- \mathbf{s} \cdot \left[ \begin{aligned} & \nabla_s \left( \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\operatorname{div}_s (\mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s} q_n)] - \mathbf{s} \cdot [\nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}] \right) \\ & + 2\nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right) \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,2}^{(0,i)} &= P_1^{(i)} \circ P_{1,1}^{(0,i)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot Q_2^{(i)} - \mathbf{s}^{(0)} \cdot (\nabla_s P_2^{(i)} + 2\nabla_s P_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2) \\
&= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ \operatorname{div}_s [\mathbf{S}^{(i)} \cdot (\nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L})] + \nabla_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \right] \\ & - [\operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} \{ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \}) + \nabla_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) : \mathbf{L}] \end{aligned} \right\} \\
&- \mathbf{s}^{(0)} \cdot \left[ \begin{aligned} & \nabla_s \left( \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n)] \right. \\ & \left. - \mathbf{s}^{(i)} \cdot [\nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}] \right) \\ & + 2\nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{1,2}^{(0,i)} &= P_1^{(i)} \circ P_2^{(0)} \\
&= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot P_{1,1}^{(0,i)} - \mathbf{s}^{(0)} \cdot (\nabla_s P_{1,1}^{(0,i)} + \nabla_s P_1^{(0)} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s P_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2) \\
&= \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ \operatorname{div}_s [\mathbf{S}^{(0)} \cdot (\nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L})] + \nabla_s (\mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi) : \mathbf{L} \right] \\ & - [\operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(0)} \{ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \}) + \nabla_s (\mathbf{s}^{(0)} q_n) : \mathbf{L}] \end{aligned} \right\} \\
&- \mathbf{s}^{(0)} \cdot \left[ \begin{aligned} & \nabla_s \left( \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot [\operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n)] \right. \\ & \left. - \mathbf{s}^{(0)} \cdot [\nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}] \right) \\ & + \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \end{aligned} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_3 &= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s P_2 + 2\nabla_s P_1 \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] + 2\nabla_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s P_1 + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \quad (\text{A.5}) \\
&+ 2\nabla_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 - \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} Q_2 \right) + 2\nabla_s \left( \mathbf{s} Q_1 \right) : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{s} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \right] \\
&= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S} \cdot \nabla_s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} q_n \right) \right] \\ - \mathbf{s} \cdot \left[ \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right] \\
&+ 2 \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right\} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&+ 2\nabla_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 \\
&- \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] + \nabla_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L} \right] \\ - \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} \left\{ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} q_n \right) \right\} \right) + \nabla_s \left( \mathbf{s} q_n \right) : \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right) \\
&- 2 \left[ \nabla_s \left( \mathbf{s} \left\{ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s} q_n \right) \right\} \right) : \mathbf{L} + \nabla_s \left( \mathbf{s} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{1,2}^{(0,i)} &= Q_1^{(i)} \circ Q_{1,1}^{(0,i)} \quad (\text{A.6}) \\
&= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s P_2^{(i)} + 2\nabla_s P_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] + 2\nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s P_1^{(i)} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&+ 2\nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 - \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(0)} Q_2^{(i)} \right) + 2\nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} Q_1^{(i)} \right) : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \right] \\
&= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(i)} q_n \right) \right] \\ - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \left[ \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right] \\
&+ 2 \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&+ 2\nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 \\
&- \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(i)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] + \nabla_s \left( \mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L} \right] \\ - \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(i)} \left\{ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(i)} q_n \right) \right\} \right) + \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(i)} q_n \right) : \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right) \\
&- 2 \left[ \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left\{ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) - \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(i)} q_n \right) \right\} \right) : \mathbf{L} + \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \right]
\end{aligned}$$

$$Q_{2,1}^{(0,i)} = Q_1^{(i)} \circ Q_2^{(0)} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s P_{1,1}^{(0,i)} + \nabla_s P_1^{(0)} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s P_1^{(i)} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&+ \nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s P_1^{(0)} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} + \nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s P_1^{(i)} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 \\
&- \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(0)} Q_{1,1}^{(0,i)} \right) + \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} Q_1^{(0)} \right) : \mathbf{L} + \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} Q_1^{(i)} \right) : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \right] \\
&= \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} \cdot \left[ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right] \\ - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \left[ \nabla_s \left( -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right) + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right] \\
&+ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} \cdot \mathbf{L} + \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} \cdot \mathbf{L} + 2\nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L}^2 \right) \right] \\
&+ \nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(0)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} \\
&+ \nabla_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] : \mathbf{L} + 2\nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L}^2 \\
&- \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left\{ \begin{array}{l} \left[ \operatorname{div}_s \left[ \mathbf{S}^{(0)} \cdot \left( \nabla_s \left\{ -\frac{q_n}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{K}^{(i)} \cdot \mathbf{n}} - \mathbf{s}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi \right\} + \nabla_s \varphi \cdot \mathbf{L} \right) \right] + \nabla_s \left( \mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi \right) : \mathbf{L} \right] \\ - \left[ \operatorname{div}_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left\{ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right\} \right) + \nabla_s (\mathbf{s}^{(0)} q_n) : \mathbf{L} \right] \end{array} \right\} \right) \\
&- \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left[ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(0)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(0)} q_n) \right] \right) : \mathbf{L} \\
&- \nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} \left[ \operatorname{div}_s (\mathbf{S}^{(i)} \cdot \nabla_s \varphi) - \operatorname{div}_s (\mathbf{s}^{(i)} q_n) \right] \right) : \mathbf{L} - 2\nabla_s \left( \mathbf{s}^{(0)} q_n \right) : \mathbf{L}^2 \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$