



HAL
open science

Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques

Guy P. Brousseau

► **To cite this version:**

Guy P. Brousseau. Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques. Mathématiques [math]. Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 1986. tel-00471995v1

HAL Id: tel-00471995

<https://theses.hal.science/tel-00471995v1>

Submitted on 9 Apr 2010 (v1), last revised 10 Aug 2010 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

PRÉSENTÉE A
L'UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I

POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR d'ÉTAT ES SCIENCES

PAR
Guy BROUSSEAU

**THÉORISATION DES PHÉNOMÈNES
D'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES**

Soutenue le 2 décembre 1986 devant la Commission d'examen :

MM. P. DAMEY, Professeur **Président**
J. COLMEZ, Professeur honoraire
J. ESTERLE, Professeur
J. DHOMBRES, Professeur à l'Université de Nantes **Examineurs**
B. MALGRANGE, Correspondant de l'Académie des sciences
G. VERGNAUD, Directeur de recherche au C.N.R.S.

Je remercie le jury de cette thèse :

Bernard MALGRANGE a distrait de ses recherches en mathématiques un temps précieux pour regarder fonctionner le séminaire de didactique. Ses indications m'ont permis d'éclaircir mes idées et d'améliorer les textes que je préparais, sa caution m'a donné le courage de les présenter.

Gérard VERGNAUD s'est intéressé depuis des années à ce travail. Il m'a convaincu des liens qui unissent fondamentalement la psychologie cognitive et la didactique. Sa solidité, ses conseils, ses analyses, son exemple, ses critiques, ses encouragements aussi, ont été pour moi, un soutien incomparable.

Je suis redevable à Pierre DAMEY qui m'a permis de bénéficier de la chaleur et des moyens de l'IREM de Bordeaux, à Jean ESTERLE qui a accepté de rapporter pour l'Université de Bordeaux-I, et à Jean DHOMBRES qui, en acceptant de participer à ce jury, consent à souligner les apports de l'épistémologie et de l'histoire des mathématiques à la didactique.

Je n'aurais pu entreprendre ni poursuivre de prendre l'enseignement des mathématiques comme champ d'études scientifiques sans quelques rencontres que j'évoque avec émotion.

Depuis 1960, Lucienne FELIX m'a encouragé et prodigué son appui, son aide, ses conseils et son affection. Aux moments les plus difficiles sa confiance m'a permis de persévérer.

Instituteur, j'ai été passionné par ses livres, apprenti en mathématiques, j'ai été fasciné par ses aperçus pénétrants et par le contact direct qu'elle établit avec les plus grands.

*Observateur de l'enseignement, je suis constamment **provoqué** par l'originalité et la sagacité de ses remarques.*

Je ne saurais dire à quel point la confiance que m'a témoigné A. LICHNEROWICZ a été décisive pour moi, ni combien l'attention qu'il a bien voulu prêter à mes premières tentatives m'a été précieuse.

René LABORDERIE m'a fortement épaulé à un moment crucial.

Jean COLMEZ m'a recruté et m'a guidé pendant de nombreuses années. Parmi tant de leçons que j'ai reçues de lui, une des plus importantes est celle de son courage, de son audace et de sa ténacité pour obtenir les moyens dont nous avons eu besoin : l'IREM, le contrat de l'école Michelet, le 3ème cycle... mais la plus précieuse est celle de la solidité et de la chaleur qu'il apporte dans ses amitiés.

Je veux remercier ensuite ceux qui ont pris part directement au travail de rédaction : Nadine BROUSSEAU pour l'annexe sur les décimaux et Jacques PERES pour deux passages du Chapitre Ia.

Régis GRAS s'est intéressé à mon analyse de l'espace explicatif et Harassons RATSIMBA-RAJOHN a collaboré aux analyses factorielles que j'évoque.

Merci à tous ceux qui ont participé à la réalisation matérielle de l'ouvrage, à Françoise DEL MORAL et à Nicole BERGERIE qui ont accepté d'assurer la frappe dans des conditions très difficiles, à Michèle DEMIS et au personnel de l'imprimerie de l' I. R. E. M. de Bordeaux.

Cette thèse reflète un travail accompli avec l'aide d'un grand nombre de personnes que je veux associer dans ma gratitude.

En premier lieu, tous les maîtres, qui depuis 1972 ont enseigné à l'école Jules Michelet de Talcrce. Il n'était pas facile d'accepter les contraintes liées aux recherches et en particulier le regard qui était porté sur leur travail. Sans leur dévouement aux élèves et au projet commun, sans leur compétence et leur honnêteté professionnelles et sans leur amicale collaboration, rien n'aurait été possible. Tous méritent ma gratitude, chacun pour une contribution spécifique et personnelle et particulièrement la directrice de l'école maternelle et le directeur de l'école élémentaire, pour leur vigilance et leur engagement.

Je veux aussi remercier ceux des administrateurs qui ont eu à connaître le projet et qui l'ont soutenu en prenant des risques, simplement pour remplir leur mission. Il y en a eu plus qu'on ne pourrait le croire et à des niveaux très différents. Tous les inspecteurs de l'éducation qui se sont succédés dans la circonscription, et qui ont eu à s'accommoder d'une singularité aussi gênante et délicate, ont su trouver des solutions pour l'aider à survivre. Je soupçonne leurs difficultés et ma gratitude en est d'autant plus grande.

Mes travaux du Groupe des 16 de l'IREM, pilier des recherches et des actions au niveau élémentaire, composé des Professeurs d'Écoles Normales de la région, ont été une source permanente de questions et de défis. Que tous soient sûrs de mon attachement à leur aventure, leur apport est visible dans la bibliographie.

Mes collaborateurs du 3ième Cycle ont tous fortement marqué mon travail et leurs enseignements m'ont été très utiles.

Dans un domaine aussi peu prometteur pour une carrière que la didactique des mathématiques, un étudiant ne peut qu'avoir une forte personnalité, un solide enthousiasme et souvent une expérience déjà riche. J'en ai bénéficié et on trouvera dans ces pages les traces de nos travaux communs.

Ma reconnaissance s'étend à toute la communauté des didacticiens, aussi bien à ceux que j'ai malmenés qu'aux autres. Sans leurs travaux, sans leur opiniâtre désir de comprendre et d'explorer les phénomènes d'enseignement, ces prolégomènes seraient de bien peu d'intérêt. Dans ce domaine je ne peux pas taire l'importance des longues discussions durant tant d'années avec Yves CHEVALLARD et André ROUCHIER mais comment arrêter la liste avant Nicolas BALACHEFF, Alain MERCIER, Régine DOUADY et tous ceux qui me sont proches et avant Georges GLAESER qui s'est consacré à la didactique et qui m'a fait l'amitié de critiquer méticuleusement certains textes.

SOMMAIRE

-o0o-

INTRODUCTION	P. 1
<i>Bibliographie</i> de l'introduction	30,
CHAPITRE I : PROBLÈMES DE DIDACTIQUE CENTRÉS SUR UNE NOTION MATHÉMATIQUE : L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX	35
® Problèmes d'enseignement des décimaux	36
1. L'enseignement des décimaux dans les années 60 en France	39
2. L'enseignement des décimaux dans les années 70 en France	53
3. Quelques problèmes de l'enseignement des décimaux .75 Problèmes de didactique des décimaux	
1. Introduction	82
2. Conception générale d'un processus d'enseignement	83
3. Analyse du processus et de sa réalisation	103
4. Analyse d'une situation : L'épaisseur d'une feuille	131
5. Questions de didactique des décimaux	152
6. Conclusion	166
<i>Bibliographie</i> du Chapitre 1	169
CHAPITRE II : PROBLÈMES DE DIDACTIQUE CENTRÉS SUR L'ÉLÈVE : LÉS ÉCHECS ÉLECTIFS	173
1. Approche globale et statistique, les échecs électifs en mathématiques	174
0 Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques	175
0 Plan d'études et méthodes	181
0 Conclusion de l'approche statistique	191
2. Approche clinique	196
0 Introduction	196
0 Exemple d'analyse de situation	197
0 Étude du cas de Gaël	216
0 Conclusion	274
0 Bibliographie du Chapitre II	279

CHAPITRE III : FONDEMENTS ET MÉTHODES DE LA DIDACTIQUE

DES MATHÉMATIQUES	281
0 Objet des études en didactique	282
0 Phénomènes de didactique	288
0 Éléments pour une modélisation	295
0 Cohérence et incohérences de la modélisation envisagée : les paradoxes du contrat didactique	314
0 Modélisation des situations didactiques	326

CHAPITRE IV : QUESTIONS DE MÉTHODOLOGIE

1. L'observation des activités didactiques	365
2. Méthode de contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicatif	391
3. A propos d'ingénierie didactique : l'étude d'une situation	399

CHAPITRE V : COURTES ÉTUDES DE DEUX PROBLÈMES PRATIQUES DANS LE

CADRE DE LA THÉORIE DES SITUATIONS

DIDACTIQUES	433
1. L'enseignement de l'énumération	434
2. L'enseignement de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace	447

VOLUME ANNEXE :

– Les décimaux dans la scolarité obligatoire	p. 1 à 279
– Textes divers	
0 Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques	1 à 30
0 Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques	31 à 64
0 The fragility of knowledge	65 à 97
0 Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels ?	98 à 111
0 Documents internes	112 à 118

Le texte ci-après plonge ses racines dans **plus de** vingt ans d'activités qui sont aussi difficiles aujourd'hui à présenter qu'à oublier.

Il est possible qu'un jour il s'avère utile de rapporter l'histoire détaillée de ces expériences afin d'analyser les circonstances qui ont présidé à l'apparition de tel ou tel concept et de reconstituer la chaîne des questions, des observations et des réponses qui ont justifié le rejet d'un point de vue ou l'acceptation d'un autre.

Mais tel n'est pas l'objet du présent travail et nous nous contenterons d'un bref rappel car il s'agit plutôt ici d'extraire de ces expériences quelques remarques utiles aux débats du moment. Ces débats sont de trois ordres :

- d'abord les débats sur l'utilité comparée, pour l'enseignement des mathématiques, des innovations, des réflexions, des expériences, des recherches ou des théorisations de nature didactique ou d'autres,
- ensuite les débats sur la constitution même d'une théorie de la didactique, ses concepts et ses fondements,
- enfin les débats plus proprement méthodologiques.

Nous présenterons nos observations suivant ce plan, mais il est clair que ces débats sont liés de façon dialectique et que leur séparation ne peut être qu'artificielle.

De plus, il y a encore dans ce domaine, un décalage choquant entre les minuscules fragments de réalité qui peuvent être objectivement décrits et reproduits, et la déprimante complexité des concepts qui se proposent pour les expliquer.

C'est pourquoi l'ambition d'insérer nos remarques dans un vaste tableau d'ensemble paraîtra présomptueuse à beaucoup. Circonstance aggravante, le problème central sera celui de la théorisation, les deux autres, l'utilité et la méthodologie, s'articulant autour de lui.

Quelqu'un jugeant décousue cette collection de travaux et insuffisants nos efforts pour les amalgamer, estimera même notre projet prétentieux et manqué.

Mais je sais à quel point une oeuvre visée théorique peut être stimulante et utile à ceux-là même qu'elle ne convainc pas, même si elle doit être finalement rejetée, à condition qu'elle soit assez **vaste**, assez plausible pour résister un temps. Pendant quinze ans, j'ai nourri mes travaux de la critique et de la compréhension de certaine théorie, la seule à ma disposition. Je n'y croyais pas, mais elle s'imposait à moi car elle représentait très bien ce que l'on pouvait croire, ce que j'avais cru moi-même et qui m'aurait sans doute longtemps embarrassé s'il ne s'était pas trouvé un AUTRE pour l'écrire. Car il est plus facile de faire face à un texte qu'à un tissu d'opinions diffuses.

L'acceptation de servir à mon tour d'appui et à la réflexion de mes lecteurs est la seule raison pour laquelle, après beaucoup d'hésitations, je livre aujourd'hui une étude aussi imparfaite.

LA THÈSE FONDAMENTALE

1 La thèse fondamentale que (ouvrage vise à soutenir) affirme donc que :

pour produire, améliorer, reproduire, décrire, et comprendre les situations d'enseignement des mathématiques, il est devenu nécessaire - et possible - de théoriser cette activité d'enseignement en tant qu'objet original d'études et non pas en tant que simple conjonction de faits théorisables uniquement dans des domaines autonomes comme la pédagogie, la sociologie, la psychologie, les mathématiques, la linguistique ou l'épistémologie.

@ C e t t e thèse peut paraître trivialement fausse.

Par exemple, parce que l'ensemble des pratiques d'enseignement semblent la contredire. Jusqu'à ce jour, de nombreux décideurs et professeurs produisent, gèrent, améliorent, reproduisent, comprennent les situations d'enseignement sans l'aide d'aucune véritable théorisation, avec le simple secours des concepts et des pratiques professionnelles, l'amélioration consistant éventuellement en une "simple" rationalisation de ces pratiques.

L'examen, même superficiel, de l'évolution récente de ces pratiques et les nombreux travaux relatifs aux résultats de cette méthode empirique en montrent les limites.

Inversement, cette thèse peut paraître comme banalement vraie : puisque l'enseignement des mathématiques pose des problèmes culturels, sociaux et économiques, étudions-le ; l'objet d'étude est identifié : puisque chacun peut reconnaître "à l'oeil nu" une leçon de mathématiques et ses protagonistes.

Il est évident que pour améliorer l'enseignement, il faut pouvoir comparer, non seulement ses résultats, mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus et que ces conditions doivent être connues comme reproductibles.

Cette reproductibilité implique une description, non pas naïve, de toutes les conditions observées, mais sélective reposant sur un choix pertinent de variations possibles aux effets reconnus. La reproductibilité implique donc la compréhension des phénomènes fondamentaux, c'est-à-dire du tissu de relations attestées constituant la théorie et permettant de choisir des conditions d'enseignement, d'en expliquer les effets et de les prévoir. La nécessité paraît évidente, puisque l'objet d'étude et le champ d'application coïncident dans "la leçon de mathématiques" ; la collection des déclarations qui lui sont associées constituerait donc une "théorie" donc l'existence serait ainsi assurée.

4. Il faut réfuter ce raisonnement : l'étude des phénomènes, liés à l'activité d'enseignement dans ce qu'ils ont de spécifique de la connaissance enseignée, constitue de facto un champ scientifique mais il faut franchir une étape de plus pour ériger ce champ au statut d'objet d'une théorie.

Tous les spécialistes penseront pouvoir indiquer à propos d'une leçon par exemple, les uns, son contenu cognitif, d'autres, les intentions du professeur, ou les résultats et les difficultés des élèves, encore d'autres, les conditions pédagogiques ou les particularités de la communication... et chacun pourra relever une collection de faits du point de vue de sa discipline. La question est de savoir si le contrôle de la situation d'enseignement peut être obtenue par la conjonction naturelle de connaissances déterminées compréhensibles, analysables dans ces domaines indépendants, ou bien s'il exige de plus un savoir propre pour conjuguer ces apports et la création de concepts spécifiques irréductibles à cette conjonction.

Dans ce dernier cas l'enseignement des mathématiques devient le référent d'un objet théorique qui doit être déterminé par une définition interne placée au coeur d'un ensemble de relations : une théorie - la thèse affirme la seconde occurrence contre la première.

PROLÉGOMÈNES à UNE THÉORISATION :
HISTOIRE D'UN PROCESSUS EMPIRIQUE DE
RECHERCHE DE 1960 à 1978

Il est indispensable avant de discuter cette thèse de présenter brièvement la suite des expériences qui ont étayé ma propre conviction. Ce résumé nous permettra par la suite de nous référer à certains textes et résultats anciens plus ou moins bien publiés mais qu'il est inutile d'inclure dans le corps du présent travail.

Il semblera peu académique d'extraire cette histoire et ces réflexions personnelles du tissu des notions et concepts qui ont traversé le champ de la didactique depuis ces trente dernières années. Le lecteur curieux trouvera en annexe une présentation:; ':générale et: un peu superficielle je le reconnais -- qui fait: le point: (en 1982) sur ces questions et montre leurs relations avec les disciplines connexes.

©Origine

Un petit ouvrage pour les instituteurs que j'ai écrit en 1963 (grâce aux encouragements de L. FELIX) et publié chez DUNOD [6] (grâce à l'appui de A. LICHNEROWICZ) montre mon **enthousiasme** pour l'organisation bourbachique des **mathématiques** ainsi que mon adhésion aux conceptions didactiques et épistémologiques **de l'époque :**

- leçons non **verbales** de C. GATTEGNO ;
- **parti-pris de donner directement du sens aux écritures formelles, usage des dessins et flèches de G. PAPY ;**

– **lourde insistance sur des pratiques et des matériels "isomorphes" comme moyen d'abstraction. Ces matériels étaient semblables à ceux que Z. DIENES (que je n'avais pas lu et qui n'était pas traduit ni publié en français) allait préconiser ;**

– subtile progression où toujours **les concepts nouveaux** sont introduits implicitement avant d'être reconnus, symbolisés, formulés puis expliqués, puis réappliqués et enfin rappelés périodiquement. Cet ordre en permet éventuellement la définition mais seulement à la fin de l'étude. Cette méthode permet de concilier un contrôle axiomatique rigoureux des notions et des théorèmes et les nécessités d'une familiarisation préalable dans des exemples particuliers. Bien que ces définitions ne soient jamais explicitement proposées aux enfants ni même aux maîtres (voir la reproduction en note de l'avertissement au lecteur" de ce livre, lignes 14 à 28 et la table des matières) [6] elles sont toujours très fidèlement conformes à la présentation et à l'ordre de BOURBAKI.

Parmi toutes les innovations que contenait ce petit livre, celle qui me paraissait la plus importante et en même temps la plus sujette à caution, était justement cet ordre. Comment observer s'il facilitait vraiment ou non les acquisitions ? Ce fut l'une de mes premières recherches.

2 Étude d'une progression_

Comme les leçons n'étaient qu'évoquées dans ce texte, MM. DERAMECOURT et HOUZIAU réalisèrent les 80 fiches nécessaires qui furent utilisées dans une quinzaine de classes de Dordogne sous leur contrôle [25]. Nos moyens ne nous permettaient d'obtenir et de traiter que les pourcentages de réussite et d'abstention dans chaque classe.

J'avais utilisé, pour construire ma progression, un système de matrice assez complexe qui me permettait de tenir compte des diverses conditions de dépendance que je croyais devoir respecter, aussi bien entre les différents concepts **engagés** dans des leçons successives, qu'entre les formes de connaissances sous lesquelles ils se présentaient. Par exemple, on peut voir [6] que

l'égalité était introduite successivement et avec des sens différents, égalité de longueurs de baguettes, de poids, d'ensembles, de sommes de longueurs, de prix etc...

Je préparai donc pour chaque type de dépendance que j'espérais tester, une matrice indiquant tous les **couples** de leçons qui se trouvaient ainsi liées a priori. Par exemple, des couples d'étapes didactiques d'un même concept :

introduction/schématisation
ou formulation/application ou
application/réapplication... ou
introduction/généralisation
ou des couples de leçons liées axiomatiquement
ou des ensembles de leçons ayant trait à la même notion
mathématique.

Ces matrices (30 x 30) devaient pouvoir se superposer à la matrice des corrélations observées de façon à voir si les valeurs des coefficients de corrélation pour les couples repérés différaient des autres (par un test non paramétrique tel que le randomization test par exemple). On pouvait penser que les classes qui avaient moins bien réussi une première leçon (relativement à leur moyenne) devaient être handicapées pour la deuxième en cas de dépendance didactique. Après un gros travail (que je repris plus tard avec Mme FRANCHI-ZANETACCHI [30], je m'aperçus

- que très peu de corrélations "leçon I - leçon J" étaient significatives : il n'y en avait guère plus que ce que le seuil choisi laissait espérer si toutes les leçons avaient été indépendantes (8 % au seuil de 5 %),

- que l'essentiel des variations s'exprimait par les taux d'abstentions.

- mais que la variance inter-classe était significativement faible, c'est-à-dire que les résultats variaient de façon assez semblable d'une façon à une autre dans **toutes les classes.**

Deux dépendances seulement pouvaient être déclarées observées :

- l'une liait entre elles les leçons qui utilisaient les mêmes procédés de schématisation,
- l'autre :liait **NÉGATIVEMENT** une application d'une notion et- sa réapplication : la seconde application était d'autant mieux réussie que la première était ratée.

Ces deux derniers résultats m'apparurent comme la preuve que les maîtres manipulaient les difficultés des **exercices** à volonté, par exemple en fonction de la nouveauté des propositions que je leur faisais, ou bien pour maintenir une certaine réussite dans la classe. Mais cette transgression des conditions de l'expérience ne m'apparut pas tout de suite comme la marque qu'une autre règle plus importante s'imposait à eux ; ce n'est que beaucoup plus tard que je parvins à mieux distinguer ce qui relevait de leur arbitraire, ou de leur personnalité de ce qui faisait l'objet de mes observations. En tout cas, j'en déduisis qu'il fallait abandonner l'espoir d'utiliser cette méthode d'analyse globale statistique sur un champ aussi vaste tant que le détail des processus d'enseignement ne serait pas mieux connu. Ne pouvant conclure sur la valeur des choix didactiques que j'avais faits, même les plus systématiques, je crus mes résultats sans valeur et je renonçai à les publier.

3 Étude des motivations et du sens.

Pour cela les leçons elles-mêmes devaient- faire l'objet d'une refonte. D'ailleurs l'introduction des notions nouvelles et du formalisme faisait craquer les méthodes classiques d'enseignement et leur justification. Les méthodes traditionnelles telles quelles ou reformulées par DIENES, permettaient bien d'obtenir certains comportements de la part des élèves- mais les maîtres ne pouvant plus s'appuyer sur un lot culturel d'exercices collaient aux définitions formelles et/ou aux manuels et n'étaient plus en mesure de leur donner de façon économique un sens correct.

Je commençai donc à reprendre tous mes objectifs d'enseignement

- en me demandant à **chaque** instant : "**pourquoi** l'élève fait-il cela ? Que peut-il lui arriver s'il **ne** le fait pas, qui **va** le gêner et aussi l'orienter vers **une autre** manière **de**

répondre, quel sens aura cette réponse si **on la** lui fournit **toute** faite, **que peut-on gagner** à ce qu'il cherche lui-même **son adaptation au problème ?**

- en **cherchant** quelles relations **au** milieu **pouvaient** le mieux **donner une adéquation, une motivation** et **un** sens correct aux connaissances qu'il s'agissait d'enseigner.
- et en observant à l'aide des mêmes instruments la forme que prenaient ces connaissances dans les réponses des élèves.

Pourquoi par exemple un élève écrirait-il "=" entre deux écritures ? Il faudrait qu'il dispose de deux manières "a" et "b" de désigner une même chose, comme 3 et 2+1 par exemple ; et que ces deux écritures lui soient assez familières sinon ce signe ne serait plus fonctionnellement symétrique (ce serait le signe d'une attribution ou d'une définition). Mais alors pour-quoi écrire cette égalité si on connaît déjà les renseignements qu'elle apporte ? Ce ne peut être que pour le dire à quelqu'un d'autre, et quelqu'un qui l'ignore (et pour qui ce sera en effet une attribution).

Il faudrait que l'élève soit obligé de révéler à un autre que ce que d'autres appellent "a" n'est autre que ce qu'il connaît bien déjà sous le nom de "a".

Il faut donc un premier' groupe social dans lequel quelque chose s'appelle "a" et un autre dans lequel cette même chose s'appelle "b", puis qu'un membre de ces groupes ait besoin soudain EN L'ABSENCE D'UN RÉFÉRENT de désigner ou de demander cette chose à un membre de l'autre groupe. L'in-formation "a=b" est la réponse qui dénoue cette situation et seul peut la donner un traducteur, qui connaît bien les deux langues, (mais qui n'aurait pas eu sans ce problème l'occasion d'écrire la formule qui serait ainsi restée implicite). Pour que la situation soit comprise et donne du sens au message il faut qu'elle soit susceptible de se produire régulièrement. De plus, pour que le signe "=" puisse être doté d'un signifié il faut que son apparition ne soit pas automatique entre deux noms de choses et par conséquent que d'autres symboles relationnels

constituent un paradigme à " $a=b$ ", par **exemple** " $a / = b$ " ou " $a < b$ ".

Bien sûr il n'est pas nécessaire de vivre personnellement **de façon** répétée cette situation **de traduction pour** en faire l'expérience mentale et c'est pourquoi il est possible "d'expliquer" verbalement le sens du signe "égale" à un élève, ou de lui suggérer par un inventaire exemplaire des occasions de le mettre, ou simplement en exigeant qu'il le mette quand on le lui dit, pour qu'il en prenne l'habitude.

Ces questions : "pourquoi l'enfant ferait-il cela, est-ce une raison valable pour lui ? Et du point de vue du savoir ?" Et la tentative d'y répondre par l'agencement des rapports directs de l'élève avec un milieu physique et social va être le moteur de toute une série à partir de 1966.

4 Cadre théorique.

En 1972, je propose à l'A.P.M. un petit texte [10] dans lequel, tirant les conséquences de ce mode d'approche, je propose un cadre théorique pour l'analyse et l'organisation des situations d'enseignement.

Outre l'évident souci de rationaliser la description des situations d'enseignement, ce texte montre deux tendances :

- d'une part, le rôle du maître est limité à la présentation et à la mise en scène des situations qui sont supposées produire d'elles-mêmes l'apprentissage, par adaptation de l'élève à un milieu physique ou social agencé de façon appropriée et spécifique,
- d'autre part, il est très nettement proposé de distinguer trois catégories de situations qui correspondent à des fonctionnements du savoir supposés différents et irréductibles **les uns** des autres.

Ce cadre doit permettre la recherche systématique des conditions motivantes pour la mise en oeuvre de chaque notion mathématique, leur classement et leur examen progressif.

Il peut s'appliquer aux situations d'enseignement les plus diverses et produit pour l'enseignant et le chercheur des gerbes de questions et de critiques mais en même temps, il ouvre des possibilités de concevoir des situations nouvelles en permettant de réutiliser des éléments de solutions connues (communications, preuves, etc...). Il permet aussi de hiérarchiser les questions à poser à l'expérience.

Cette possibilité va être exploitée avec toute une équipe de professeurs des écoles normales de la région, sur l'ensemble des notions enseignées dans les différents niveaux de l'école primaire :

- l'enseignement des opérations sur les entiers naturels [13]
- l'enseignement des probabilités [8]
- l'enseignement de la logique et l'introduction à l'écriture symbolique
- puis l'enseignement des rationnels et des décimaux (dont l'étude sera présentée plus loin)
- l'enseignement de la Géométrie [20]
- et à nouveau celui des nombres naturels et de la numération.

Il s'agit d'abord, sur la plupart des sujets, de concevoir des situations conformes au maximum d'exigences de motivations et ensuite de montrer qu'elles sont réalisables dans des classes et qu'elles provoquent bien les apprentissages attendus.

5 **Écoles** Jules Michelet de Talence

Très vite, il faut se rendre à l'évidence : les leçons sont très longues à mettre au point et souvent très complexes. Il faudra une école spéciale où les maîtres auront du temps pour discuter leur réalisation et accepteront a priori de se laisser observer.

La mise en place de ce projet prend 3 ans et les conditions obtenues vont renforcer dans un premier temps la mise entre parenthèse de l'action du maître et la centration sur l'élève et ses conditions d'apprentissage [32][38].

Cependant, le pari est gagné : oui, il est possible de réaliser des leçons en se fondant sur les considérations de motivation et d'épistémologie proposées dans la théorie, oui ces leçons fonctionnent, les enfants apprennent et ces apprentissages par adaptation les séduisent comme ils séduisent les observateurs et les maîtres aussi.

Enfin, la plupart des "situations" mises au point dans cette école, sont reprises dans de nouveaux textes pour l'enseignement, dans les manuels, dans les programmes, dans d'autres recherches... Cette production d'ingénierie ne cesse d'augmenter, de se transformer, de s'enrichir et de s'organiser.

6 Apprentissage par adaptation : Étude d'une leçon.

La réalisation d'une leçon soulève toujours autant de questions auxquelles il faut répondre, que cette réponse soit fournie pour une raison "scientifique" ou par un choix arbitraire plus ou moins rationnel. Mais quelles sont les questions qui méritent l'énorme investissement d'une expérience sérieuse ?

La question qui me parut alors la plus fondamentale fut la mise en évidence de l'influence des principales conditions d'adaptation nouvelles que je proposais (action, communication, validation) sur les apprentissages, en dehors de l'influence cognitive du maître (que j'appellerais aujourd'hui situations quasi-isolées).

Je commençais par l'étude des situations d'action et de ces modèles implicites qui s'y développeraient.

Pour cela je mets alors à l'étude une leçon, la course à vingt, qui, du point de vue scolaire, servait de base à un enseignement de la division pour de grands élèves et au cours de laquelle trois phases distinctes correspondaient bien aux trois **types** de conditions.

Avec MM. LAMARQUE et MAYSONNAVE [35.37] j'observe l'évolution des connaissances "implicites" des élèves et **la vitesse d'apparition de** certains "théorèmes". Je **compare**

cette vitesse à celle que je prévois à l'aide de divers modèles stochastiques d'apprentissage. Aucun de ceux qui conviennent pour la course à 7 ne convergent assez rapidement pour expliquer les progrès dans la course à 20, ces résultats vont dans le sens des thèses cognitives d'ARBIB et de NELSON contre celle des néobehavioristes (SUPPES).

Les changements de types de situations **d'apprentissage** semblent favoriser les acquisitions, cependant en présentant avec M. RESTÉS [41] une situation de communication dans une vingtaine de groupes d'élèves, nous mettons en évidence que la formulation des connaissances dans des circonstances non didactiques n'améliore pas leur acquisition.

La présentation dans dix classes de la leçon entière et l'étude de la phase de "validation" avec Mme LAMARQUE et MM. GUILLE-PHOTIN et ROL [36] nous convainc de la possibilité d'une reproduction très stable des effets de ces conditions qui laissent pourtant la plus grande liberté aux élèves. Une analyse statistique de ces comportements et des conditions qui les provoquent est donc envisageable. Elle est néanmoins extrêmement coûteuse et je me convaincs assez vite que les réponses probantes qu'elle peut apporter à des questions aussi générales seront très difficiles à communiquer aux maîtres.

7 Modélisation - prévision et expérience.

Il m'apparut important de m'assurer sur un exemple que la méthode expérimentale pouvait être utilisée. Il s'agissait de recueillir les résultats d'une classe, relativement à une tâche, puis de modéliser cette tâche et une autre assez différente mais comportant les mêmes paramètres afin de prévoir les résultats de cette classe sur cette nouvelle tâche.

Pour diverses raisons, j'ai choisi comme première tâche le calcul des multiplications de nombres entiers par la méthode actuellement utilisée en France (et due à FIBONACCI) la seconde étant le calcul par la méthode dite "per gelosia". Cette modélisation, assez simple [12] permettait de penser qu'il

pourrait y avoir intérêt avec certains élèves à préférer la seconde méthode. Tout changement culturel de cette importance étant très difficile, il était nécessaire d'établir les faits très sérieusement.

De plus, je trouvais intéressant, en même temps que l'on étudiait les moyens d'adapter les élèves à **la connaissance**, de montrer qu'on pouvait essayer d'adapter les connaissances aux élèves.

Il ne s'agissait bien sûr que de l'usage des procédures d'un même algorithme, mais je voyais des arguments formels qui me permettaient d'espérer traiter les théorèmes de mathématiques de manière semblable [13].

Les considérations d'ergonomie qui servaient de base à ces raisonnements commençaient à tenir une place importante dans mon analyse des situations d'enseignement. Leur exposé [14] permet de poser quelques questions fondamentales sur la méthodologie des modèles en didactique mais aussi sur les apprentissages eux-mêmes.

Je montai une préexpérience qui permit de déterminer la taille de l'échantillon :

Pour obtenir des effectifs d'erreurs suffisants, je dus présenter une épreuve assez longue à plus de 600 élèves (*) [23]. Je ne pus monter convenablement que la deuxième partie de l'expérience, mais la préexpérience permettait déjà d'observer les avantages annoncés ; détail troublant, les résultats étaient meilleurs que prévus ! Plusieurs années plus tard Y.M. BEAUJOUAN et H. BROUSSEAU [5] confirmèrent la tendance mais ils montrèrent aussi l'importance capitale de la position du maître vis-à-vis de l'expérience. Cette variable peut effacer complètement les facteurs purement ergonomiques (résultat bien connu). Je persiste à penser que ce genre de méthode est parfaitement utilisable dans les cas où l'intérêt de la question justifie une expérience de taille suffisante.

(*) **épreuve reprise dans le D.E.A de D. COQUIN**

Processus d'apprentissage des algorithmes de calcul numérique.

Les différents processus que j'ai conçus et étudiés visent tous à obtenir finalement que l'enfant utilise le **procédé qu'on veut** lui enseigner comme solution "**optimale**" - **du point de vue** de la fiabilité et de la rapidité d'exécution - d'un problème où la manipulation des informations mathématiques joue un rôle décisif. Il s'agit toujours pour l'enfant de remplacer une procédure par une autre.

Le fait de posséder plusieurs méthodes et de pouvoir éventuellement revenir à une décomposition archaïque des tâches à accomplir permet de leur donner du sens du fait que la situation qu'elles résolvent de façon fonctionnelle est la même.

L'apprentissage de la procédure de calcul rend nécessaire une véritable exploration de la structure mathématique des naturels car dans les deux exemples principaux traités il s'agit d'engendrer l'écriture de nombres assez grands de façon à pouvoir raisonner sur eux en abandonnant la représentation concrète des quantités.

Exemple 1 : $(\mathbb{N}, +)$ Il s'agit pour l'enfant d'indiquer le cardinal d'un ensemble (supérieur à 50) au moment où il ne connaît que quelques cardinaux inférieurs à 20. Il invente la partition et une écriture qui définit la somme de plusieurs nombres.

La recherche d'équivalences de sommes conduit en même temps à la découverte des propriétés de l'addition et à la mise en place d'un algorithme de plus en plus simple à mesure que le répertoire des propriétés et des théorèmes de base (tables) s'accroît et de plus en plus général à mesure que l'on applique à des nombres plus grands, ou à des bases différentes [15-17]-

Exemple 2 : (\mathbb{N}, \times) Pour indiquer le cardinal d'ensembles trop grands (plus de 400 objets) ou présentés de façon favorable (produits de classes équipotentes) l'enfant invente une écriture qui définit le produit de deux nombres).

La mise en ordre de ces produits, la recherche des équivalences conduit l'enfant à chercher l'écriture de N de ce produit. Dès la première tentative il y parvient par divers procédés (sommés, procédé à la russe...) qui vont se perfectionner (décomposition en sommes de produits connus, abandon du support concret, découverte du calcul sur les puissances) pour aboutir à une méthode standard (per gelosia ou à l'italienne suivant les capacités des enfants à calculer de tête).

Ces processus sont tels qu'à chaque instant la signification de l'algorithme est nécessaire pour son accomplissement U5].

9 La méthode "spirale"; progression didactique

Une certaine évolution se produit au cours de ces travaux dans ma conception des progressions, en grande partie à cause d'une meilleure connaissance des travaux de PIAGET mais aussi comme suite aux observations quotidiennes des leçons projetées.

La problématique de l'apprentissage par l'adaptation imposait de rechercher pour chaque activité proposée à l'élève, qu'elle provoque chez lui la création d'une connaissance visée en réponse à ces circonstances. Il est rarement possible d'obtenir d'un coup, dans ces conditions, un savoir correct, achevé et définitif. Au contraire, cette connaissance est le plus souvent locale, particulière et de plus, liée indûment, par les circonstances choisies, à d'autres connaissances, elles aussi provisoires et incorrectes. Elle doit donc évoluer afin de s'inscrire dans une genèse visant à terme le savoir culturel correct.

Il ne m'était plus possible de supposer que l'on pouvait séparer le projet d'enseignement en deux tâches indépendantes : la construction d'un plan d'ensemble qui pouvait être simplement calqué sur l'organisation axiomatique des connaissances **mathématiques**, puis l'étude "**pédagogique**" des meilleures manières **d'enseigner chaque paragraphe du discours du savoir. A moins**, comme DIENES et peut-être un instant PIAGET, de croire à

une miraculeuse unicité formelle entre la **métamathématique**, les **mathématiques**, l'épistémologie, la **psychologie** cognitive, la psychologie génétique et la didactique, qui aurait permis **au plan bourbachique de servir à la fois de modèle** dans **tous** ces secteurs.

Nos observations sur notre processus **d'enseignement** de la multiplication montraient :

- que les acquisitions faites sur la base des découvertes des enfants étaient un peu plus lentes que leurs acquisitions par les méthodes classiques, mais qu'elles étaient mieux comprises et plus sûres, pour une proportion plus grande d'enfants,
- mais qu'elles ne mettaient pas l'enfant à l'abri des pertes de sens par conditionnement ou par "autoconditionnement",
- surtout qu'elles pouvaient résister très fortement aux tentatives ultérieures de modification, même dans des conditions très favorables, à cause justement de leur caractère personnel et bien adapté et de l'augmentation des occasions d'apprentissage,
- et aussi que les dépendances entre les acquisitions n'apparaissent toujours pas clairement.

Adaptation aux possibilités de l'enfant et habitude de l'enfant de s'adapter aux situations d'une part, adaptation au projet social et aux connaissances visées d'autre part. Comment concilier ces deux axes d'adaptation ?

Une représentation métaphorique en vogue consistait à envisager la progression de l'élève comme une spirale ; les différents concepts à acquérir étaient représentés par des axes issus de l'origine, censés porter les états successifs des connaissances des élèves. Une spire représentait une séquence d'enseignement plus ou moins longue, au cours de laquelle les concepts visés étaient rencontrés dans un état encore imparfait ; mais polir chacun d'eux, elle permettait un petit progrès et l'accès à la spire suivante. Cette métaphore servait à dissimuler les divergences entre ceux qui espéraient pouvoir obtenir l'apprentissage par des pas aussi petits qu'il est nécessaire et ceux qui pensaient que comme pour les stades piagétien, des étapes et des mûrissements sont indispensables.

Les contradictions réapparaissent dès lors qu'il s'agissait **d'évaluer** les résultats de l'enseignement ; l'évaluation des étapes **intermédiaires dans la théorie des petits pas impliquant une théorie de l'acquisition "fragmentaire", et donc une hypothèse 'épistémologique sur la "fragmentation". Les instruments classiques** de cette évaluation, telle la taxonomie de BLOOM [3] et les modèles de GUILFORD et d'AUSUBÉL) n'ont jamais reçu de confirmation expérimentale. Les réactions de l'exigence d'évaluation formelle sur la pratique des enseignants en fonction des théories didactiques et des théories d'apprentissage en vogue pouvaient être anticipées à partir de ces remarques. Cette étude [19] constitue ma première tentative d'analyse systémique.

Un espoir un peu insensé, né sans doute d'une confiance excessive dans le projet piagétien, faisait agir certains pédagogues à l'époque, comme s'il existait pour chaque concept une genèse naturelle, obligatoire, universelle, unique et peut-être inéluctable si elle n'était pas contrariée. Il m'apparut au contraire qu'en même temps qu'on devait chercher la ou les genèses possibles, il fallait déterminer les conditions qui présidaient à leur mise en place et montrer leur caractère de nécessité. Ce qui impliquait non seulement des observations des comportements des élèves dans des circonstances variées, mais aussi une prise en charge de l'ensemble de ces circonstances et de leurs -effets PREVISIBLES sur les adaptations. Cette position conduit à déterminer de nouveaux objets d'études [24].

10 Méthodologie : la méthode "spirale" dans la recherche.

Ce type de travaux devient très vite extrêmement complexe et très difficile à rapporter.

La préparation de chaque_leçon d'un processus qui peut en comporter plus de trente, peut durer de 20 à 60 heures et plus, étalées sur plusieurs années. Elle fait intervenir d'abord un très grand nombre de considérations dont toutes ne sont pas de simple bon sens, bien établies ou liées aux hypothèses de la théorie, puis d'une année à l'autre, les observations et les réactions du maître et des enfants.

Le compte rendu de ces réflexions, auxquelles participent **des groupes** de personnes et celui des raisons des **choix** retenus deviennent très vite impossibles. L'équipe n'a pas le moyen à la fois :

- **de faire évoluer assez vite les points de vue pour produire des** leçons originales, solides du **point de vue de** leur conception théorique, assurées par des expérimentations répétées et communicables aux maîtres

- et de décrire minutieusement les étapes et les raisons de cette évolution. A l'époque, ce genre de réflexion "théorique a priori", sur les dispositifs d'enseignement, passait très mal. Seuls les comportements d'élèves paraissaient probants et intéressants.

C'est vers cette époque (1976) que P. GRÉCO qui suivait avec sympathie nos réflexions, commença à émettre l'hypothèse que le nombre de variables qu'il convenait de manipuler était trop grand pour être maîtrisé et que ces études étaient irrémédiablement condamnées à rester dans le domaine de l'innovation et de l'observation.

Pourtant, chaque réalisation et chaque observation de leçon sont l'occasion de mettre à l'épreuve les conceptions théoriques et la technologie didactique qui s'y attache, les méthodes d'étude et d'analyse, les résultats expérimentaux déjà obtenus et la formulation pour les maîtres des propositions d'enseignement.

Les conceptions théoriques se précisent et se complexifient rapidement, conduisant à des questions qui, bien que clairement posées, ne peuvent être étudiées indépendamment les unes des autres, parce que l'on ne peut entreprendre autant d'expériences qu'il le faudrait. La principale difficulté vient de ce qu'à chaque instant, il vaut mieux tirer le meilleur parti **pédagogique** des actions en cours que de faire un choix pour des raisons de recherche alors que la qualité des résultats de l'enseignement serait douteuse. Nous donnerons un exemple de cette imbrication des problèmes dans notre étude sur les **(décimaux)**. Nous appelons "spirale" cette méthode de planification

des recherches qui se différencie d'un simple pragmatisme, par la prise en charge, à chaque étape, des réflexions spécifiques à chacun des axes : le long de chaque axe, la filiation des choix et des idées doit rester nette et scientifique - bien qu'adaptée à chaque étape - aux nécessités et aux contingences de l'observation.

11. Les probabilités et l'idée de hasard.

Du point de vue de l'enseignement primaire, le calcul des probabilités est à l'opposé du calcul numérique élémentaire. Certes, plusieurs novateurs tentent de s'appuyer sur l'axiomatisation récente de ce domaine pour introduire un enseignement précoce très souhaitable - de cette notion. Mais les traces des difficultés historiques trop récentes, accréditent l'idée qu'une genèse des modèles probabilistes est incontournable. Certes, on peut faire faire des règles de trois aux enfants en assimilant la proportion dans un ensemble des objets d'une certaine classe, la fréquence d'apparition d'un évènement dans une suite d'expériences et sa probabilité dans une expérience à venir. Mais quel intérêt cela a-t-il si, devant une situation réelle, ils ne peuvent faire aucune conjecture utile et aucune anticipation correcte ? Nous avons entrepris depuis, une étude épistémologique [9] et quelques expériences simples. Deux ont montré que les enfants étaient sensibles 'à des différences de probabilités et observaient les distributions de fréquences mais qu'ils les utilisaient mal, en fonction de raisonnements faux [8] [26]. Après la recherche d'une situation fondamentale qui consistait à déterminer. si deux urnes donnaient une boule blanche avec des probabilités différentes, nous avons réalisé une suite de 31 leçons où les enfants progressaient par une dialectique entre des hypothèses sur le contenu de la bouteille d'une part, les prévisions sur ce qui devait sortir des urnes d'une autre part, et enfin de la lecture et la comparaison des résultats passés [44]. Là, les enfants ont paru dégager de façon correcte, **la notion de probabilité, de fréquence et de convergence en probabilités.**

C'est du moins **ce que l'observation clinique de leur comportement collectif laissait voir.**

Mon test, très bref et certainement beaucoup trop sévère, proposé aux deux classes expérimentales et à un groupe témoin, ne mit en évidence des différences **significatives que** sur très peu de questions, autres que celles qui étaient voisines de l'expérience. Naïveté ? Nous aurions voulu faire une interrogation clinique, mais nous n'avons pas eu le temps dans la période qui séparait la fin de l'expérience de la dispersion des élèves. Le bilan pédagogique était loin d'être négatif - y compris sur le calcul numérique ! - mais il aurait fallu, à l'époque, d'autres résultats et/ou d'autres moyens pour emporter la conviction.

Les résultats scientifiques, les connaissances nouvelles sur le développement cognitif des élèves furent assez maigres et l'avancement de la didactique ne pouvait guère être apprécié. Pourtant, j'y ai personnellement puisé la conviction qu'une réflexion épistémologique était indispensable, en même temps que l'étude de didactique, que les modèles faux spontanés des élèves devaient être attaqués et non contournés, qu'un travail de fixation culturelle et sociale était nécessaire aux élèves et donc que les trois dialectiques fondamentales ne suffisaient pas.

12 Étude de la création d'un code à l'école maternelle.

Depuis le début, l'idée que l'on pourrait faire l'économie d'une certaine verbalisation préalable des acquisitions me tentait. Était-il possible de susciter l'apparition de modèles implicites par des situations d'action, puis, au moment où ils seraient établis de façon fonctionnelle et stable, de rendre nécessaire leur "désignation" en même temps que leur identification par des situations de communication ?

Ce n'était pas une hypothèse bien nouvelle et elle tentait régulièrement beaucoup de pédagogues depuis le **développement** du rôle de la formalisation dans les sciences. C. GATTÉGNO a poursuivi cette voie depuis 1947 et a produit encore récemment

des **propositions** remarquables.

Il ne s'agissait pas, pour nous, **de reprendre la vieille voie** empiriste sensualiste dénoncée par **AEBLI** [1]. J'étudiai **d'abord avec** H. RATSIMBA-RAJOHN, **les procédés** ostensifs d'introduction des notions nouvelles [40] dans les classes et dans les manuels. Nous avons montré leur caractère illusoire.

Par contre, le fait de pouvoir proposer aux élèves des situations d'action susceptibles de produire des conceptions et des modèles non verbalisés puis "indépendamment" (après, avant -ou en même temps) des situations de communication ou d'expression susceptibles de susciter les formulations et la création ou l'appropriation de nouveaux codes laissait envisager des dispositifs de recherche et de moyens d'enseignement nouveaux :

- "définir" ou donner du sens à un concept sans être prisonnier de la formulation qu'en donne le maître à l'élève et qui repose sur une "construction" préalable, culturelle ou didactique
- étudier directement les propriétés de modèle d'une représentation quelconque, graphique,... métaphore, formelle, etc...
- examiner les différentes formes d'association et d'accommodation des deux types d'introduction : action et formulation dans divers ordres d'introduction : par exemple, prise de contrôle du sens par la formulation et la reformulation ou au contraire par l'expérience et l'action ; etc...

La confrontation de la logique du discours avec celle de la situation promettait d'être intéressante. J'essayai alors d'appliquer ces moyens didactiques à l'enseignement des mathématiques à des enfants sourds, (**avec** l'aide d'un jeune professeur de l'I.N.J.S de GRADIGNAN); sans échec mais sans succès évident car la tentation ostensive était **trop** forte et les difficultés de communication aux élèves des règles des situations retenues conduisirent le professeur à rechercher le secours direct des moyens visuels.

Presque malgré moi, j'ai dû étudier cette question h propos de l'enseignement à l'école maternelle dès 1974. J'avais eu l'imprudence de publier avec L. FÉLIX et Y. LAMOUREUX le résultat d'expériences d'introduction des schémas et des symboles à l'école maternelle. Ce texte (dû en grande partie à L. FÉLIX) avait provoqué chez les maîtres de la région, un usage assez immodéré de liens, de schémas et surtout des symboles. Il était temps de faire des expériences précises et d'observer ce que ces hypothèses pouvaient apporter à la connaissance de la genèse de la fonction symbolique chez l'enfant, et à la didactique de la logique).

L'étude débute en 1976 par la conception d'un processus fondamental que j'étudiai d'abord avec J.M DIGNEAU [29], procédé qui prétend faire voir ce qu'il définit ou introduit. Ce procédé s'appuie sur l'évidence de la correspondance entre un concept et un objet maternel ou une situation. Exemple : montrer un carré pour définir le carré, puis avec j. PERES [39]. Le processus suivait le schéma classique : "action" puis "formulation", puis "validation" et "institutionnalisation" et l'observation clinique répétée de mêmes phénomènes, pour la première fois, dans leur intégralité, permit de rassembler, sur ce problème des résultats très nombreux et très importants pour moi^(*). Après une phase de familiarisation avec une trentaine d'objets et avec leur nom, les enfants sont invités à se souvenir de ceux d'entre eux que l'on a placés, la veille, dans une boîte. Le jeu réussit très bien, plusieurs fois, avec trois ou quatre objets, quand, tout d'un coup, la maîtresse en place une douzaine dans la boîte. les enfants voient qu'ils ne vont pas réussir. Ils sont invités néanmoins à essayer et à chercher une solution. Ce "saut informationnel" qui disqualifie une méthode ancienne (la mémoire) doit provoquer et donner du sens à "l'intention" d'une autre méthode (le dessin de la collection).

(*) Grâce, en particulier, aux observations minutieuses de G.JOUSSON et à la collaboration des maîtresses de l'école maternelle.

13 Le saut informationnel.

Le saut informationnel consiste, **après avoir trouvé une situation fondamentale faisant "fonctionner" une notion, à choisir d'abord les valeurs de ses variables de telle manière que les connaissances antérieures des élèves permettent d'élaborer des stratégies efficaces et** d'explorer les caractéristiques de la situation, contraintes, objectifs, règlement..., puis sans modifier les règles du jeu, à changer les valeurs des variables de façon à rendre beaucoup plus grande la complexité de la tâche à accomplir. De nouvelles stratégies doivent être établies qui demandent la construction de nouvelles connaissances. Les nouvelles valeurs sont choisies de façon à rendre maximum le rapport entre l'efficacité de la nouvelle connaissance par rapport à ses concurrentes. Le saut peut fonctionner à condition que la deuxième situation soit comprise et acceptée. Elle ne peut l'être que par référence à la première. Avant le transfert de solutions ou son rejet, se pose celui du transfert des questions ou la reconnaissance des situations qui le permettent. Une des hypothèses fortes de nos travaux avance que la connaissance d'une notion prend une partie de son sens dans celle des situations où elle intervient comme solution. Mais on peut supposer aussi que la compréhension d'une question n'est possible que si l'élève imagine au moins quelque manière d'y répondre. Ce qui rend impossible le saut informationnel ; J.M. DIGNEAU fit l'hypothèse que les enfants -pouvaient ne .;donner aucun sens au même jeu, dès lors qu'ils ne pouvaient pas envisager de le résoudre. Et de fait, le saut était d'importance. Il fallait que les enfants imaginent de dessiner chacun de façon spécifique, tous les objets présents dans la boîte et qu'ensuite, ils interprètent leur propre message, reconnaissent leurs dessins, identifient les objets... Comment pouvaient-ils anticiper les conditions d'une telle activité, faire un diagnostic des erreurs, encore plus complexe que la solution elle-même, et se corriger en fonction des contraintes d'une tâche qu'ils n'ont jamais accomplie et que l'on se refuse à leur montrer, même une seule fois ? La thèse de J.M. DIGNEAU est correcte, **mais il est 'un fait, que chaque année, pendant plus de 10 ans, les** enfants ont franchi le pas, au grand étonnement des maîtres eux-mêmes.

Pour peu que des éléments de solution figurent dans la culture, que la situation permette les expériences et les ajustements et que l'attente sereine mais "active" des maîtres soit. suffisante, les enfants peuvent maîtriser des situations beaucoup plus ouvertes qu'on ne croit.

Le saut informationnel est possible dans un intervalle suffisant pour permettre, dans de nombreux cas, les dialectiques situation/connaissances et connaissance ancienne/connaissance nouvelle envisagées dans le cadre théorique [14][21].

L'étude de la mémorisation des répertoires montra déjà de grandes différences entre les enfants. Assez rapidement, les enfants adaptaient leurs comportements à la question posée et désignaient des "listes" d'objets à l'aide de listes de dessins où devaient intervenir les traits distinctifs mis en oeuvre pour identifier les objets et leur représentation plus ou moins analogique, certains traits ne pouvant absolument pas être représentés de façon "analogique" (la matière, par exemple).

La mise au point "naturelle" des procédures qui avaient précédemment fait l'objet de tant d'exercices formels inintelligibles pour les enfants (représentation de l'appartenance, d'une bijection; ...) montrait que nous avons résolu le problème didactique initial. J. PERES observa alors avec une grande minutie le fonctionnement des différents types de situations et leur influence sur l'apprentis-sage [39]

- très faible influence sur la phase d'action individuelle et il l'explique
- très grande influence de la communication, notamment du rôle de récepteur et du changement de rôle
- importance de la suspension de la pratique communicative et du passage aux débats de validation.

Il décrit surtout la nature même de ces évolutions et l'effet de situations particulières sur la structuration logique par les enfants de l'ensemble qu'ils manipulent.

Dans la construction du code se révèlent de façon fine, les modes **d'acquisition** prélogique de l'enfant tels que les décrit A. WERMUS [43]. Mais l'analyse des centrations sur les composantes contextuelles des prédicats amalgamés qui déterminent les objets, celle des décantations qui s'en suivent et celle de leurs relations avec le développement des préfoncteurs logiques, s'éclaire par l'effet des conditions que nous pouvons imposer aux collections : les traits distinctifs et les traits oppositifs apparaissent dans des stratégies différentes et paraissent avec des propriétés logiques différentes. Ce sujet est actuellement à l'étude.

14 Méthodologie de l'observation des faits didactiques.

Les problèmes de méthodologie paraissaient alors en bonne voie de solution. Nous pouvions décrire les divers aspects de l'activité didactique à l'aide d'un grand nombre de méthodes appropriées.

Celles qui tendaient à décrire et analyser les résultats obtenus par les élèves étaient celles qui se développaient le plus rapidement : les analyses statistiques diverses et les observations cliniques des élèves, les analyses génétiques (qui consistent à mettre en évidence des décalages importants dans le moment de l'acquisition des différents aspects d'une notion) permettent d'identifier les difficultés auxquelles la didactique doit faire face.

Mais il est déjà clair à cette époque (1970 à 1979) que ce sont les interactions maître-élève-milieu relatives au savoir qui doivent être l'objet de l'étude et non pas seulement le comportement "terminal" des élèves.

Divers procédés dérivés de la linguistique, notamment l'analyse du discours, paraissaient d'autant plus prometteurs que l'approche définie en 1970 (*) donnait la possibilité d'organiser les situations de communications appropriées (maître-élève mais aussi élève-élève ou maître-maître). Certaines de ces situations de communications ont été beaucoup réutilisées, aussi bien pour l'enseignement que pour la recherche [34].

(*) cf. annexe

Un exemple permettra de comprendre la méthode. 11 s'agissait de savoir dans quelle mesure la connaissance des événements qui se sont déroulés dans une classe est utile pour la gestion d'une activité didactique par le maître

et si ces événements sont conscients et analysables à l'aide des concepts professionnels utilisés spontanément par les maîtres. Le dispositif consistait à combiner des successions de maîtres dans une même classe : même maître ou maîtres différents, avec ou sans communication d'informations entre eux... L'observation des effets de ces variables sur la conduite des leçons était facilitée par la comparaison de classes parallèles.

L'enregistrement vidéo des classes et des communications entre maîtres devait faciliter l'analyse de ce qui retenait l'attention de l'enseignant et de ce qui lui échappait. Ce travail ne put être achevé à cause de l'inadéquation des méthodes d'analyse envisagées qui entraînaient un travail énorme. Il apparut pourtant clairement qu'avoir affaire au même enseignant au cours de l'apprentissage d'une même notion joue un rôle important dans la relation didactique.

Cette influence est d'autant plus importante que le maître a :

- un meilleur souvenir des faits passés,
 - une exigence plus forte à l'égard des élèves quant à ces souvenirs
 - ce qui conduit à donner des statuts différents aux événements de la classe
 - une meilleure cohérence et une meilleure régularité dans le traitement des informations qui surgissent de l'activité de la classe. Cette influence n'est pas uniformément positive et n'est pas une fonction croissante des variables énumérées ci-dessus. Il semble que certains équilibres soient favorables entre : ce qui est introduit comme nouveauté et ce qui est rappelé, ce qui est régulier et ce qui est aléatoire ou irrégulier, ce qui doit être appris et ce qui peut être oublié...
- ce qui doit être reconnu comme une **application** et ce qui doit être analysé comme un objet indépendant, etc...

Nous avons bien rodé à l'école Jules Michelet les méthodes d'expérimentation et d'observation des classes. Les phénomènes **paraissaient** bien reproductibles sous la condition de **donner** une description des obligations créées **par la situation**, assez précise **pour** qu'il soit possible de les interpréter en termes de jeu didactique [33]. Si bien que je pus faire vers 1977 un tour d'horizon relativement optimiste - encore bien incomplet [18] -

15 La dépendance entre les activités didactiques.

Le seul point vraiment noir qui subsistait et qui était pourtant fondamental, c'était celui de la liaison entre les apprentissages. Certes, des méthodes statistiques existaient et l'analyse factorielle des correspondances réveillait des espoirs déçus par l'analyse hiérarchique à la GUTTMANN. Plusieurs d'entre nous s'étaient attelés à la tâche d'adapter ces analyses aux problèmes spécifiques de la didactique. Dans la problématique exposée plus haut, j'étudiai divers processus à l'aide de divers coefficients de dépendance, notamment les processus d'apprentissage du calcul numérique avec G. VINRICH en utilisant le coefficient d'implication de J. LOEVINGER [42] auquel, par la suite, R. GRAS parvint à donner une distribution théorique, base de l'analyse implicative qu'il continue à développer [31].

Diverses méthodes d'agrégation de données étaient utilisées concurremment. Cependant, plusieurs circonstances nous laissaient insatisfaits.

a) Les dépendances prévues et utilisées par les maîtres ou par les créateurs de méthodes ainsi que celles qui paraissaient les plus crédibles, n'étaient guère attestées dans nos observations.

Pour en avoir le coeur net, nous avons utilisé avec D. COQUIN, une hiérarchie d'objectifs très précise, bien opérationnalisée [24], et nous avons soumis les liens les plus "rationnels" à l'expérience, avec, pour résultats des indépendances très surprenantes.

b) Les dépendances que nous **observions grâce au recueil de tous les résultats de tous les élèves de l'école Michelet, se**

pliaient mal à nos tentatives d'explication et ne paraissaient pas régulières. Surtout, elles ne semblaient pas très liées par le contenu cognitif et donc par les facteurs proprement didactiques, ce qui était pour nous très décevant.

c) Les liaisons assez bien établies par des expériences convaincantes comme celles qu'a attestées F. PLUVINAGE avec sa méthode d'ANAFAC des questionnaires à modalités, restent toujours par définition très locales. Ces résultats sont précieux mais portent sur les liaisons entre les comportements d'élèves et ne se proposent pas de donner d'indications sur les circonstances didactiques elles-mêmes.

d) Avec A. BESSOT et F. RICHARD, nous avons organisé une expérience où, après avoir identifié les variables de la situation fondamentale, nous avons montré que l'action qu'elles avaient sur les apprentissages, était conforme aux calculs. Là aussi, la méthode marche, mais elle demande de grands efforts pour des résultats très locaux.

CONCLUSION

La théorisation didactique paraît alors en bonne voie. Un colloque réunit à BORDEAUX en 1975 les chercheurs intéressés à traiter ce champ comme un domaine scientifique [45] qu'ils suggèrent de désigner comme "épistémologie expérimentale". Sur ma proposition, nous préférons assumer l'étiquette un peu méprisée de "didactique" pour montrer notre désir d'améliorer l'enseignement par le moyen de ce que nous pouvons en comprendre.

Il est très clair cependant que

- l'objet de la didactique, c'est-à-dire la part des phénomènes d'enseignement qu'elle se propose de théoriser,
- les concepts fondamentaux qui doivent permettre de décrire cet objet et de formuler les questions pertinentes auxquelles il répond,
- la **méthode de preuve** spécifique attachée **à ces questions** restent à identifier et à clarifier.

Ces questions se posent alors par le biais de la reproductibilité : ce que la didactique peut prendre en charge de décrire, c'est ce qu'elle peut prétendre voir se reproduire sous certaines conditions qu'elle explicite. Mais qu'est-ce que la reproductibilité didactique ? La répétition des observations et des résultats ? Mais si tout le système est organisé pour la reproduction d'un phénomène, peut-on encore l'analyser comme un système physique non intentionnel ?

Nous n'allons pas raconter comment l'étude des sauts informationnels conduit à celle des obstacles épistémologiques, comment celle de la dépendance conduit à celle de la reproductibilité ni comment l'observation des échecs électifs amena à l'étude du contrat didactique et des phénomènes qui lui sont liés. Il est préférable de présenter directement l'état actuel des concepts fondamentaux et de leur articulation réciproque.

Cependant, la théorie et la mise en évidence des relations envisagées entre ses éléments concrètement significatifs et les observables, ne seront exposées qu'au chapitre 3, car il nous apparaît indispensable de montrer d'abord de façon précise comment, en se centrant sur la notion mathématique ou sur l'élève, il est possible d'accéder à ce que les professeurs appellent couramment la réalité de l'enseignement grâce à ces concepts fondamentaux.

BIBLIOGRAPHIE DE L'INTRODUCTION

- (1) **AEBLI H. -:**
Didactique psychologique. Delachaux et Niestlé **1966.**
- (2) BERTHELOT R.
La multiplication. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (3) BLOOM :
Taxonomie des objectifs pédagogiques. Presses de l'Université du Québec.
Traduction en français 1975.
- (4) BRIAND J., TEULE-SENSACQ P. et VINRICH G. : La
division. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (5) BROUSSEAU H. et BEAUJOUAN Y. :
Étude des phénomènes liés à un changement de méthode de calcul.
Mémoire de maîtrise de Psychologie. Université de Tours 1982.
- (6) BROUSSEAU G.
Mathématiques du cours préparatoire et école maternelle grande section.
Dunod 1969.

BROUSSEAU G.
Les 30 leçons du C.P. au C.M. I.R.E.M. de Bordeaux 1970.
- (7) BROUSSEAU G.
L'enseignement des probabilités au niveau élémentaire. Cahier 11.
I.R.E.M. de Bordeaux 1972.
- (9) BROUSSEAU G. : Activités pour la formation des maîtres en
probabilités. Cahier 11. I.R.E.M. de Bordeaux.
- (10) BROUSSEAU G. : Processus de mathématisation. Bulletin de
l'A.P.M.E.P. 1972.
- (11) BROUSSEAU G. : L'apprentissage des opérations dans les entiers
naturels. Cahier 13 I.R.E.M. de Bordeaux 1973.

- (12) **BROUSSEAU G. Peut-on améliorer le calcul des nombres naturels ? Actes du Congrès International des Sciences de l'Éducation. Paris 1973.**
- (13) BROUSSEAU G.
Eudes sur l'apprentissage des algorithmes. "Notes sur l'apprentis-sage des opérations dans les naturels". Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (14) BROUSSEAU G. Recherches sur l'enseignement du calcul numérique. Séminaire de Recherche INRD-P-SERP. Orléans 1973.
- (15) BROUSSEAU G.
Étude sur l'apprentissage des algorithmes. "Construction de formules dans (N, X) au C.E.1. et dans $(N, +)$ au C.P. Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (16) BROUSSEAU G. et Collaborateurs : Recherches sur l'analyse du discours. Cahier 15. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (17) BROUSSEAU G. et GABINSKI P. : Étude sur la théorie des automates et son application à la didactique des mathématiques. I.R.E.M. de Bordeaux 1976.
- (18) BROUSSEAU G. L'observation des activités didactiques. Revue française de pédagogie 1978.
- (19) BROUSSEAU G. Évaluation et théories de l'apprentissage en situations scolaires. Proceedings of the ICME V. Campinas 1979.
- (20) BROUSSEAU G.
Étude de questions d'enseignement ; un exemple : la géométrie. Compte rendu du séminaire de didactique des mathématiques de l'IMAG n°45 Grenoble 1983.
- (21) BROUSSEAU G.
Les obstacles épistémologiques et les problèmes en didactique en mathématiques. Revue recherche en didactique des mathématiques **1983.**

- (22) BROUSSEAU G. :
Tendances originales des recherches en didactique des mathématiques. Journal fur Mathematik Didaktik 1983.
- (23) **COQUIN D. : Algorithmes et sous algorithmes. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1978.**
- (24) COQUIN D. :
 Décomposition et synthèse d'une notion mathématique en vue de son enseignement et ordre d'acquisition. Thèse de 3^ocycle. I.R.E.M. de Bordeaux 1982.
- (25) DERAMECOURT G., HOUZIAU F. : Enseignement de la mathématique au C.P. - CRDP 1969.
- (26) DERAMECOURT G. Étude des probabilités au C.E. Cahier 13. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (27) DERAMECOURT G. : L'addition au C.P. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (28) DERAMECOURT G. : La multiplication au C.E. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (29) DIGNEAU J.M. : Création d'un code à l'école maternelle, étude d'un saut informationnel. Mémoire de D.E.A.. I.R.E.M. de Bordeaux 1980.
- (30) FRANCHI-ZANNETTECCI M.P. : La construction de séquences d'activités d'enseignement en mathématique. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1978.
- (31) GRAS R. :
 Contribution à l'étude expérimentale et à l'analyse de certaines acquisitions cognitives et de certains objectifs didactiques en mathématiques. Thèse d'état. Université de Rennes 1979.
- (32) Groupe de Recherche sur l'Enseignement Élémentaire : Brochure de présentation du groupe scolaire Jules Michelet et du Centre **pour l'Observation** de l'I.R.E.M. **de** Bordeaux 1975.
- (33) KONE F. : Analyse de situations didactiques à l'aide de la théorie des jeux. Mémoire de D.E.A. I.R.E.M. de Bordeaux 1980.

- (34) LABORDE C. : **Langue** naturelle et écriture **symbolique**. **Thèse d'état**.
Université de Grenoble 1982.
- (35) LAMARQUE A.M. et G. :
Influence de diverses conditions didactiques sur la découverte stratégie par des enfants de 9 à 11 ans. Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1973.
- (36) LAMARQUE A., GUILLE-PHOTIN G., ROL R. : Étude de l'influence des conditions de validation sur l'apprentissage d'un algorithme dans l'expérience "Qui dira 20". Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1975.
- (37) MAYSONNAVE J. :
Expérience d'apprentissage d'une stratégie pour la course à 7 par une série de parties contre un moniteur. Cahier 11. I.R.E.M. de Bordeaux 1972.
- (38) ORUS BAGUENA P. : Rapport sur l'école Jules Michelet. Brochure rédigée en espagnol 1986.
- (39) PERES J. :
Document pour les enseignants : construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle. I.R.E.M. de Bordeaux 1985.
- (40) RATSIMBA-RAJOHN H. :
Étude de deux méthodes de mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité en vue de l'élaboration de situations didactiques. Thèse de 3^o cycle I.R.E.M. de Bordeaux 1981.
- (41) RESTES M. :
Étude de l'influence des communications sur les acquisitions dans des groupes d'enfants du C.M. 1^{ère} année. Diplôme de psychologie scolaire. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.

- (42) **VINRICH G.** Dépendances didactiques. Revue Mathématique et Sciences Humaines **1977**.
- (43) WERMUZ A. : Esquisse d'un modèle des activités cognitives. Université de Genève Section de psychologie. Vol. 32 n°3.4. 1978.
- (44) L'Enseignement des Probabilités et des Statistiques : Compte rendu de la 26ème rencontre de la CIEAEM. I.R.E.M. de Bordeaux 1974.
- (45) Actes du Colloque sur l'analyse de la didactique des mathématiques Bordeaux. I.R.E.M. de Bordeaux 1975.

CHAPITRE I

PROBLÈMES DE DIDACTIQUES CENTRES SUR UNE NOTION MATHÉMATIQUE ; L'ENSEIGNEMENT DES DÉCIMAUX

- A
 - 1. L'enseignement des décimaux dans les années 60
 - 2. L'enseignement des décimaux dans les années 70
 - 3. Quelques problèmes de l'enseignement des décimaux

- B.
 - 1. Introduction
 - 2. Conception générale d'un processus d'enseignement
 - 3. Analyse du processus et de sa réalisation
 - 4. Analyse d'une situation : l'épaisseur des feuilles de papier
 - 5. Questions de didactique des décimaux
 - 6. Conclusions

Comparer, mesurer, reproduire des longueurs, des masses ou des volumes sont des activités considérées comme tout à fait fondamentales, et, en conséquence, elles doivent être apprises dans les premières années de la scolarité, tout de suite après celles qui consistent à classer, ranger, dénombrer ou reproduire des collections finies. Ces activités mettent en œuvre des êtres mathématiques, les *rationnels* ou les *rationnels décimaux*. En prenant en considération la structure mathématique qui les définit et en régit l'emploi, il est possible de réorganiser ces apprentissages autour d'un projet théorique dans lequel les acquisitions des élèves sont identifiées par les connaissances qui s'y révèlent, ordonnées et justifiées par la place que ces dernières tiennent actuellement dans le corps des connaissances scientifiques.

Or, c'est bien parce qu'il existe des pratiques sociales familières correspondantes et dont l'origine plonge dans la nuit des temps qu'on peut entreprendre un tel projet; car si les résultats paraissent clairs, les actions assurées, les méthodes évidentes, les propriétés utiles, ces activités sont souvent en réalité, à y bien réfléchir, d'une très grande complexité, ainsi d'ailleurs que les concepts, dits élémentaires, qui y sont engagés. Les rapports entre ces théories et ces pratiques restent très mystérieux dès lors qu'on veut les traduire en *comportements* des sujets qui accomplissent ces activités, en *modifications* de ceux qui les apprennent ou en *décisions* de ceux qui les enseignent.

C'est pourquoi l'objet de cette étude apparaîtra à certains excessivement présomptueux.

Il s'agit, en effet, d'étudier les conditions dans lesquelles ces comportements ou ces appropriations peuvent apparaître, ainsi que les rapports qu'entretiennent les conceptions mathématiques — dont ces comportements sont l'indice — avec certains caractères des *situations* qui les accompagnent.

Le nombre des variables auquel on peut s'attendre justifierait tous les pessimismes car un tel projet ne peut pas faire l'économie d'une *mise en expérience* de ces rapports,

selon une méthodologie éventuellement spécifique, pas plus que celle d'un investissement théorique initial.

De plus la finalité de ces observations est, bien entendu, de permettre une organisation et un contrôle de ces situations à des *fins d'enseignement*, ce qui nous conduit à essayer de repérer *le champ des choix possibles* plutôt qu'à nous borner à l'observation et à la comparaison des pratiques actuelles de l'enseignement des rationnels et des décimaux.

Notre texte s'alimente d'un ensemble d'activités et de recherches dans le champ ainsi découpé et qui ont pris naissance en 1974 au sein de l'IREM de Bordeaux (l'ensemble des personnes concernées par ce travail comprenant : les étudiants et les enseignants du 3^e cycle de didactique des Mathématiques, des instituteurs de l'école Michelet pour l'observation et les professeurs d'école normale de la région). Notre texte ne constitue pas un compte rendu de recherches et à fortiori d'une recherche unique.

Il nous a paru d'ailleurs nécessaire d'introduire le lecteur aux débats de didactique par une voie différente de la présentation académique habituelle des travaux scientifiques.

Nous avons commencé par l'analyse de curricula typiques des années 60 et 70 et de l'effet épistémologique de la réforme de 70 sur les conceptions des élèves et des maîtres relativement aux décimaux. Nous avons voulu faire cette première étude dans le langage et dans l'esprit qui étaient ceux des époques considérées, de façon à ménager au lecteur un accès familier à la fois à l'objet observé, aux phénomènes et aux débats, c'est-à-dire à la situation actuelle des problèmes abordés par la didactique des mathématiques.

Cette analyse sera suivie par l'examen des résultats et celui des alternatives ouvertes à cette méthode, par diverses théories de l'apprentissage de l'enseignement ou du développement.

Cet exemple introductif permettra donc aussi d'attester des phénomènes dont certains seront étudiés expérimentalement dans la suite du texte.

A un moment où un certain nombre d'États s'appêtent à adopter le système métrique, il m'a paru assez opportun d'examiner avec quelques détails à quel enseignement on est parvenu dans le pays qui le premier en a adopté l'usage.

Cette présentation ne va pas sans risques, en particulier celui de la confusion avec le discours pédagogique classique

en usage dans les échanges professionnels, ou avec les articles polémiques fondés seulement sur des opinions. On ne manquera pas de me reprocher de revenir à ce genre au moment même où nous manifestons notre désir d'installer la didactique comme champ scientifique.

Mais il ne faut pas se tromper sur ce mode de présentation : une telle analyse n'a été possible que par l'existence du travail expérimental évoqué plus haut et qui sera présenté dans la deuxième partie de cette étude. Quelques termes ou quelques idées anachroniques n'échapperont pas au lecteur averti.

Il faut qu'il soit clair, par exemple, que notre analyse un peu rapide de la position de Diénès, si elle s'appuie sur des observations assez longues, s'autorise surtout de l'existence d'une autre théorie des processus de genèse des concepts mathématiques. Cette intériorisation active et dialectique se substitue à l'intériorisation immédiate de Diénès pour amener le caractère interactif des connaissances que notre partie expérimentale aura pour but de faire fonctionner et d'observer.

« Dans les sciences plus qu'ailleurs on est amené à confondre la connaissance telle qu'on la transmet et la connaissance telle qu'on la crée ». Cette opinion de Bachelard(*) rend indispensable l'analyse historique et épistémologique de la notion de rationnel et de décimal. Celle-ci nous donnera des exemples de fonctionnement des concepts dans diverses situations et nous permettra d'en relever les caractéristiques et d'étudier celles qui donnaient leur signification aux notions. Nous identifierons principalement la nature des obstacles qui s'opposent à l'évolution des connaissances.

Il conviendra alors d'essayer de reconnaître ceux de ces obstacles qui sont constitutifs du concept et le type de situations qui leur sont associées.

Mais dans cette partie aussi seront engagés, comme dans la première, des instruments conceptuels déjà élaborés et non exposés préalablement. Divers projets de genèse du concept pourront être envisagés. L'étude *des possibilités de les réaliser* mettra en évidence les problèmes théoriques

(*) *Essai sur la connaissance approchée*, VRIN.

ou pratiques ainsi soulevés. Nous aboutirons alors à formuler des choix au sujet de la mise en expérience d'un processus didactique réalisant ce projet d'enseignement. Nous analyserons ensuite les enseignements qu'elle fournit sur les différentes questions posées.

Nous ne donnerons pas d'autre but à cette étude que de présenter l'enseignement des rationnels et des décimaux en tant qu'objet d'études et source de questions de didactique, mais nous discuterons en temps voulu des problèmes scientifiques ou méthodologiques qui s'imposent.

L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 60 EN FRANCE :

Au début des années 60, les « nombres décimaux » ainsi que les « fractions ordinaires » très simples sont inscrits au programme des quatrième et cinquième années d'école élémentaire (CM1 : 9-10 ans et CM2 : 10-11 ans).

Description d'un curriculum :
Voici le résumé d'une méthode exposée dans un ouvrage très répandu depuis 1936 et qui présente bien des pratiques stables et courantes chez les maîtres de l'époque (arithmétique nouvelle au cours moyen de R. Jolly - Fernand Nathan).

La leçon d'introduction (p. 12, 6ème leçon : durée 1h) :
a) L'ouvrage évoque des mesurages de longueur avec un mètre pliant. L'enseignant les fera réaliser — à moins qu'il fasse lire le texte ou commenter les images seulement. On ne trouve aucun commentaire sur les difficultés pratiques de cette activité ni sur les particularités du dénombrement d'unités à l'aide d'une graduation.
b) Il énumère les « sous-multiples » du mètre — qui sont en réalité les « multiples » de la plus petite unité présentée : le millimètre.
c) Il fait écrire le résultat de cette opération sous la forme d'un « nombre décimal ». A cette occasion, le mot « entier » apparaît pour la première fois dans le cursus scolaire pour distinguer un « nombre » sans partie décimale, par opposition à « nombre décimal » qui comprend une partie entière,

une partie décimale et l'indication d'une unité — ainsi les nombres entiers ne sont pas des décimaux.

d) L'analyse de cette écriture — placée dans un tableau — n'est rien d'autre qu'un exercice familier de numération avec un changement de nom pour les têtes de colonnes.

e) Toutefois, ce changement de vocabulaire conduit à une nouveauté car la justification du nom de ces sous-unités se fait par référence à l'unité principale. Ainsi, au « groupement par dix » des études de numérations, se substitue une « division par dix » de la construction des graduations du mètre. On ne peut pas savoir si cette « division » s'effectue géométriquement, ni comment : il suffit sans doute que le résultat coïncide avec la division dans les naturels et cette partie n'est l'occasion d'aucune question, d'aucun problème, d'aucune action pour l'élève qui ne partage ni ne divise rien.

f) L'ouvrage donne quelques exemples d'emploi du mot « unité » — qui désigne ici l'*objet* matériel reporté — mais indique seulement par un titre : « changement d'unité » qu'il faut expliquer aux enfants comment faire des conversions d'unités.

g) En fait, le véritable contenu de la leçon est indiqué par les exercices écrits : recopier le tableau de numération et y placer des nombres, exprimer des longueurs données en mètres et en ses sous-multiples et « dessiner une droite » de longueur donnée!

Le système métrique. Les problèmes :

a) Cette leçon est suivie de 7 autres — où l'on apprend, toujours uniquement à propos de longueurs et à travers des problèmes pratiques, à faire l'addition, la soustraction et la multiplication par un entier des nombres décimaux — et d'une leçon de révision présentant le tableau des multiples et des sous-multiples du mètre, intitulée « numération des longueurs ».

b) Pour chacune des autres grandeurs, sauf pour les angles : capacités (2 leçons), poids (5 leçons), monnaies (3 leçons), les leçons d'introduction sont calquées sur le même modèle.

c) 11 leçons seront consacrées à l'étude d'autres grandeurs : surfaces, volumes, densités, vitesses et aux « système de mesure » correspondants.

d) Toutes ces leçons sont suivies d'applications où il s'agit,

le plus souvent, de calculer des prix, des longueurs, des surfaces, des volumes etc... et où les décimaux sont utilisés quotidiennement.

Les opérations dans les décimaux :

Le manuel propose d'apprendre la multiplication d'un nombre décimal par 10, 100, 1000, puis par un naturel, puis celle d'un nombre entier par un nombre décimal et enfin celle de deux nombres décimaux.

Il faut noter que dans le produit d'un décimal par un entier, le changement d'unité permet de prouver la validité de la règle. Par contre, dans le produit d'un nombre entier par un nombre décimal, ce dernier perd l'indication de l'unité qui ne peut plus être changée. La règle est donnée sans preuve. La vérification — établie dans un cas particulier, à l'aide d'une fraction : $\frac{2}{1}$ remplaçant 0,5 — est empruntée à une pratique courante car aucune théorie n'a été faite encore à ce sujet.

L'étude de la division — définie comme une opération concrète : on divise un gâteau — suit un plan qui atteste ici aussi le souci de coller, à la fois, à des représentations mentales qui permettent de la comprendre et à l'exécution de tâches progressivement plus complexes. L'ordre des leçons — division d'un naturel, puis d'un décimal (mesures) par 10, 100, 1000, division entre naturels et quotient décimal, division à dividende, puis à diviseur décimaux, enfin division de décimaux — suggère d'expliquer chaque étape de l'algorithme par les précédentes mais ces explications ne figurent pas.

La justification de la division par un décimal, qui perd à nouveau l'indication de l'unité et son caractère de « mesure » (*), s'appuie sur la propriété établie sur les naturels et étendue sans commentaires aux décimaux de l'invariance du quotient dans la multiplication du dividende et du diviseur par un même nombre. Une leçon spéciale est consacrée à la division d'un dividende par un diviseur plus grand que lui.

(*) Le mot « mesure » sera employé dans tout ce paragraphe, non pas dans un sens mathématique mais dans le sens courant que lui donnait l'ouvrage étudié.

Les fractions décimales :

Elles sont introduites, juste avant les fractions ordinaires, comme une écriture nouvelle du décimal déjà étudié. Les 5 leçons qui leur sont consacrées consistent à reformuler les règles de calcul des décimaux en termes d'opérations sur les fractions.

Il devient clair à cette occasion que c'est la théorie des écritures et non des êtres mathématiques qui est enseignée. Ainsi $3/10$ est une fraction décimale mais $1/2$, $2/5$, $3/5$ etc... sont des « fractions ordinaires » !

Les justifications et les preuves :

Contrairement à d'autres ouvrages de la même époque (*) qui se contentent d'énoncer et de faire appliquer les règles, ce manuel tente de les justifier soit par une vraie preuve, soit par un exemple, soit par une vérification. Même dans les cas où la preuve n'est pas possible, la présentation du texte suggère que l'élève peut et doit comprendre. « Le quotient » de 2 nombres quelconques est toujours un décimal soit « exact » soit « approché ».

Aucune étude n'est faite d'un rationnel non décimal. L'élève doit arrêter la division lorsqu'il a obtenu une précision raisonnable dans le contexte. Cette convention n'est même pas énoncée, elle est pratiquée de fait.

Analyse des choix caractéristiques de ce curriculum et de leurs conséquences :

Conception dominante du décimal scolaire en 1960 :

Cette méthode peut être considérée comme typique de celle de l'époque au moins par les traits suivants :

- a) le décimal est toujours l'expression d'une « mesure » (au sens non mathématique);
- b) ces mesures s'effectuent dans le système métrique;
- c) le décimal est défini en tant que nombre naturel muni d'une indication d'unité et d'une virgule qui repère le chiffre de cette unité;

(*) Par exemple Bodart-Bréjaud chez F. Nathan.

d) les algorithmes de calcul sont présentés comme étant les mêmes que pour les naturels, complétés seulement d'une procédure relative à la virgule.

Conséquences sur le produit dans les décimaux :

Ces choix ont des conséquences que l'on peut apercevoir :

a) Pas de décimal opérateur :

L'écriture 3,25 n'a aucun sens si le type de mesure effectuée n'est pas accompagné de l'unité indiquée. L'emploi des décimaux sera donc limité aux cas couverts par l'ancienne dénomination de « nombre concret ».

b) Le produit n'a pas de sens :

Il sera donc presque impossible à un élève de donner directement un sens à l'opération qui consiste à multiplier quel-que chose par un décimal :

« 3,25 m x 4 » peut se ramener à une addition, comme dans les naturels; mais pas « 4 m x 3,25 » si 3,25 n'est pas obtenu par une évaporation de l'unité. Ce ne sont pas des artifices comme ceux que nous avons signalés qui peuvent abaisser l'obstacle. Des équivalences du genre :

$$4 \text{ m} \times 3,25 = 3,25 \text{ m} \times 4 \text{ » sont inconcevables;}$$

ainsi que :

$$7,25 \text{ m} \times 4,38 = 7,25 \times (4 + 0,3 + 0,008)$$

$$= 7,25 \times 4 + 7,25 \times 0,3 + 7,25 \times 0,08.$$

Le produit ne peut plus être interprété à l'aide de la

représentation dans les naturels qui a servi de définition. Pour continuer à donner du produit de 2 décimaux une représentation « concrète », c'est-à-dire conforme à la conception décrite plus haut (*Conception dominante du décimal scolaire en 1960*), il faut en restreindre l'emploi, soit aux cas de « mesures-produits », par exemple la surface d'un rectangle, soit à celui des isomorphismes de mesures, par exemple le prix d'une quantité non discrète, le poids d'un volume donné d'un corps homogène etc...

c) Mesures-produit et dimensions :

En fait, dans le cas des mesures-produit, par exemple la surface du rectangle, on écrit :

$$2,5 \times 3,25 = 8,125 \text{ seulement si on a choisi convenable-}$$

ment l'unité de surface (le rectangle ayant pour longueur l'unité choisie pour le premier nombre et pour largeur celle choisie pour le second).

Il n'existe pas de moyen de justifier à priori cette formule plutôt que celle-ci :

$$2,5 \times 3,25 = 812,5 \text{ ou celle formée avec toute autre valeur.}$$

d) Proportions :

Le cas des isomorphismes de mesures est plus favorable. L'une des mesures agit sur l'autre comme un ensemble d'opérateurs multiplicatifs tout en restant une mesure. Il exige toutefois une nouvelle interprétation du produit de deux nombres soit construite et si possible englobe l'ancienne, celle utilisée par Al Kwarismi au IX^e siècle pour unifier la notion de nombre : $a \times b$ est le nombre qui est à « b » comme « a » est à « 1 ».

Les timides tentatives que l'on peut observer pour détacher le décimal de sa fonction de résultat d'une mesure restent tout à fait formelles :

— substitution de noms plus généraux (unités, dixièmes, centièmes), ... à ceux spécifiques du système métrique et prolongeant les dénominations dans les naturels (dizaines, centaines, etc...);

— rejet du nom de l'unité avant ou après le nombre 3,25 m ou m : 3,25 au lieu de $3^m,25$ (depuis 1945).

La suppression, pure et simple, de la mention de l'unité, à partir d'une certaine leçon et sans avertissement — l'évaporation — telle qu'on la verra utilisée systématiquement après la réforme de 1970, est franchement abusive mais ne se produit que furtivement, la pression des mathématiciens pour faire isoler les êtres, dont ils théorisent la structure, n'étant pas très forte à cette époque.

Les deux représentations des décimaux :

C'est pourquoi on peut constater que les rapports et les proportions (à l'intérieur d'une même grandeur — nombres abstraits) sont toujours exprimés, s'ils ne le sont pas entiers, en fractions (ordinaires ou décimales) ou en pourcentages. On pourrait supposer que cette spécialisation du vocabulaire n'est qu'une trace de l'histoire, mais il est probable qu'il lui correspond des représentations distinctes : d'une part, les décimaux représentant des mesures munis d'une addition et du produit par un naturel, d'autre part les fractions, bien qu'apparemment définies elles aussi à partir de la mesure (la tarte que l'on coupe et dont on prend quelques parts) sont employées comme des rapports.

Le bon fonctionnement des raisonnements va donc dépendre de la facilité avec laquelle les élèves pourront passer, en une situation de résolution de problème, de l'une à l'autre de ces représentations. La capacité à substituer l'une des formulations à une autre au cours d'une interrogation, n'est qu'un indice que l'élève pourrait effectuer ces changements de point de vue. Nous ferons plus loin l'historique de ces rapports.

L'ordre des décimaux :

a) Mais en fait, ces décimaux scolaires sont restés des entiers naturels. Dans toutes les mesures il existe un sous-multiple insécable, un atome au-dessous duquel toutes les valeurs subliminaires se confondent. Même si la définition laisse entendre que toutes les unités de grandeur peuvent être divisées en dix, ces divisions ne sont jamais — dans l'ensemble élémentaire — poursuivies impunément au-delà de l'utile ou du raisonnable, même à travers la fiction commerciale du calcul de la division. Cette tendance s'exprimera nettement dans les commentaires des programmes de 1970 où le décimal est introduit comme mesure du cardinal d'ensembles finis : « le millier étant choisi comme unité, la population d'une ville de 10850 habitants s'exprime par le nombre décimal 10,850 ».

b) Dans ces conditions, les décimaux restent munis d'un ordre discret, celui des naturels : beaucoup d'élèves auront du mal avec cette définition à imaginer un nombre compris entre 10,849 et 10,850. D'ailleurs, ce genre de questions n'est jamais posé à l'époque et ne peut se résoudre que par un apprentissage d'algorithme ou en « imaginant » une nouvelle sous-unité. Mais comment ?

c) Les comparaisons et les sommes de décimaux ne seront souvent correctes que si ces derniers sont écrits avec le même nombre n de chiffres après la virgule, c'est-à-dire s'ils sont présentés dans le même D_n (ensemble de décimaux tels que $10^n D_n \in \mathbb{N}$) et donc s'ils interprètent comme des naturels (*).

(*) Ce modèle a été étudié avec précision par M.L. Izorche : « Les réels en classe de 2nde ». Mémoire de D.E.A. Bordeaux I. 1978.

Les emboîtements de ces \mathbb{D}_n ($\mathbb{D}_0 \subset \mathbb{D}_1 \subset \mathbb{D}_2 \dots \subset \mathbb{D}_n$) seront malaisés dès que la situation se compliquera, surtout pour \mathbb{D}_0 , l'ensemble des naturels, car nous avons vu que si les décimaux sont au fond des naturels, les entiers ont été déclarés ne pas être des décimaux!

L'approximation :

a) La distinction entre partie entière et partie décimale découle de la pratique de la mesure et de l'évaluation surtout dans les calculs où l'opération sur les parties entières donnent l'ordre de grandeur. Cette distinction est bien utile car 0,31; 3,1; 31... ont tendance à s'identifier (il suffit de choisir son unité).

b) Mais alors, le décimal ainsi coupé en deux, sera tenté de suivre certaines règles pour la partie entière et d'autres pour la partie décimale. Par exemple 3,9 sera inférieur à 3,12 (puisque $9 < 12$) (37% des élèves de CM2 : I.N.R.P., 1979) ou bien encore $2,3 \times 2,3$ donnera mentalement 4,9.

c) Les décimaux seront identifiés avec les parties décimales et donc inférieurs à 1. Les élèves hésitent à trouver un décimal ayant un seul chiffre après la virgule et supérieur à 0,9)...

d) Cette idée que la mesure conduit à fournir un nombre, « approché » mais « qui compte » et un petit bout négligeable s'ancrera fortement, surtout à l'occasion de la division qui fournit des suites visiblement infinies qu'il faut enfouir sans procès puisqu'elles n'ont pas de statut possible.

e) Et lorsque plus tard, un étudiant considère dans un problème une série $\sum a_n$ à termes positifs, dont le terme général tend vers zéro et pense qu'elle converge, est-ce parce qu'il remonte l'implication d'un théorème connu, ou plutôt parce que subsiste quelque part l'idée que $(\forall \epsilon \exists n \forall p > n \implies a_p < \epsilon)$ veut dire que $\exists n \forall p > n \implies a_p = 0$ par référence à la représentation des décimaux qu'il a appris dès l'enfance ?

Influence des idées pédagogiques sur cette conception :

Appréciation des résultats :

A cette époque, ces difficultés n'apparaissent pas ou sont tenues pour mineures. L'enseignement de l'arithmétique ne

présente pas de difficultés pour le maître et pas beaucoup pour la plupart des enfants. Et s'il y a en mathématique un enseignement qui ne prête à aucune discussion et ne présente aucune difficultés c'est celui des décimaux. Il est d'ailleurs si profondément associé à l'usage du système métrique et aux mesures évoquées dans les problèmes scolaires, qu'on ne voit pas alors comment on pourrait l'enseigner autrement ou ne pas réussir à l'enseigner.

Il faut expliquer cette opinion pour comprendre réellement les conditions de l'enseignement des décimaux à cette époque.

Méthodes classiques :

Tout d'abord, aucune des théories pédagogiques de l'époque ne prétend ni ne peut fournir de variantes qui donneraient une alternative à la conception dominante du décimal scolaire de 1960. Des contenus sont supposés être constitués et organisés selon les règles de leur discipline et la pédagogie n'est que l'art de les communiquer. Elle est supposée n'avoir pas de prise ou d'effet sur eux.

Considérons d'abord les plus anciennes :

— Les méthodes dogmatiques conduisent à faire d'abord les règles puis à les faire appliquer.

— Les méthodes maintiennent par questions et réponses et simulent une redécouverte de la règle.

— Les méthodes actives insistent sur l'importance du temps consacré à l'activité de l'élève et surtout l'activité manuelle, par rapport au temps d'écoute ou d'apprentissage formel, mais ces activités sont, soit des manipulations illustrant un discours introductif soit des exercices. Prisonnières de l'idéologie de la main qui modèle l'esprit, elles ne trouvent qu'accidentellement des situations-problèmes efficaces.

— Le courant empiriste sensualiste influence les manuels à moins que ce ne soit l'inverse, et ceux-ci se gonflent d'illustrations colorées.

Toutes ces méthodes respectent les principes suivants :

a) Aucune connaissance n'est introduite qui ne puisse être, soit admise immédiatement, soit définie ou expliquée à l'aide des acquisitions antérieures.

b) Chaque définition ou explication doit être formulable

et justifiable — sinon formulée — dans le langage de la science enseignée — ou au moins dans son expression culturelle la plus répandue.

c) Chaque « enseignement » donne lieu à un apprentissage identifiable et contrôlable, et, à la limite, seul est enseigné ce qui peut être appris.

d) Les acquisitions entreprises se prolongent et se justifient par l'usage — importance et fréquence — qui en est fait dans les leçons antérieures.

Optimisation :

Ces principes conduisent naturellement à une conception de l'optimisation de l'enseignement qui implique principalement que :

a) Chaque leçon doit viser le maximum d'acquisition (le débit) compatible avec les capacités d'apprentissage des élèves.

b) L'apprentissage d'un concept doit donc se faire sous une forme qui utilise au mieux les connaissances antérieures et les modifie le moins possible.

c) Il doit demander le minimum de temps et doit se rentabiliser par un usage ultérieur assez fréquent dans des applications d'intérêt pratique.

La leçon d'introduction que nous avons minutieusement relatée ne semble pas satisfaire la condition (a) mais c'est parce qu'au fond, la plupart des faits ne sont énoncés là que pour en justifier l'emploi quotidien ultérieur et non pour être appris immédiatement.

Autres méthodes :

a) D'autres méthodes ayant pour objet la recherche d'une meilleure motivation des élèves, conduisent à une réorganisation plus ou moins profonde de l'apprentissage. Cependant, sauf accidentellement ici encore, ces motivations, principalement centrées sur le milieu (école moderne de Freinet), ou sur les centres d'intérêt pour l'enfant (Decroly) ou même purement arbitraires sont d'ordre exogène par rapport à la connaissance et sans pertinence avec elle.

b) L'ordre des acquisitions paraît susceptible d'être totalement bouleversé par rapport à celui que nous avons exposé et que respectent à peu près les autres.

c) Mais en réalité, la rupture de l'ordre des acquisitions et le choix de situations familiales et stimulantes n'affecte guère les acquisitions elles-mêmes ni leur signification.

En effet, lorsqu'un problème nouveau se pose à l'élève : — ou bien le contexte lui permet la construction d'une solution sans qu'il y ait à utiliser la référence à une acquisition antérieure;

— ou bien, après échec et enquête auprès des adultes, il lui apparaît qu'il existe une technique de résolution.

Dans le premier cas, l'enseignement doit instaurer, sans motivation, un procès d'identification de la question qui a été posée, de ce qui a été découvert et qui doit s'organiser après coup en un savoir à réappliquer et donc à apprendre. Dans le second, la technique doit être apprise et il faut s'inquiéter de reconnaître les conditions dans lesquelles on pourra la réemployer.

Dans les deux cas, les connaissances les savoirs, les emplois et les justifications sont ceux de la conception dominante. D'ailleurs, passé le moment de la découverte qui retient principalement l'attention des utilisateurs de ces méthodes (peut-être parce qu'elle implique plus directement le maître), l'apprentissage continue par un effort solitaire et empirique de l'élève qui doit répondre à des fiches « auto-correctives » d'une conception proche de l'enseignement programme (fichier C.E.L.).

d) Le problème principal de la didactique consistera à trouver des situations réellement spécifiques des différentes conceptions des décimaux et d'organiser à la fois ces situations et ces conceptions pour rendre possible une genèse artificielle des savoir-faire, des savoir-dire et des savoirs.

L'apprentissage des « mécanismes » et du « sens » :

Séparation de ces apprentissages et leur cause :

La courte analyse qui précède met en évidence la conception qui prévaut à cette époque de l'apprentissage des savoir-faire, et principalement des algorithmes dans la construction de la connaissance, conception qui, elle, joue un rôle dans la création et le fonctionnement des représentations des décimaux.

Cet apprentissage est conçu en deux parties que l'on peut viser séparément :

— l'apprentissage de l'algorithme que les maîtres appellent « mécanisme » de l'opération, et

— celui dit du « sens » de ce mécanisme, c'est-à-dire la connaissance des occasions de l'« appliquer » :

- Le premier relève des techniques d'apprentissage classique et, à la limite, du conditionnement;

- L'autre ne peut s'apprendre, à travers la répétition des exemples et des applications dans des problèmes, que par la grâce de mystérieux transferts que « l'élève effectue si, et seulement si, il a une intelligence suffisante ».

Certains ouvrages font des tentatives pour ramener l'enseignement du sens à celui d'un mécanisme par d'habiles classifications des situations (recherche du nombre de parts, recherche de la valeur d'une part pour la division par exemple) par l'identification de démarches spéciales (la règle de trois), voire par la recherche d'indices linguistiques de l'opération à effectuer (« il manque », « il reste », « on retranche »... pour reconnaître la soustraction).

Ces tentatives conduisent à rejeter certains problèmes, certaines formulations, et donc contribuent à modeler la conception dominante.

Cette séparation entre ce qui peut être enseigné formellement pour être appliqué « mécaniquement » et ce qui ne peut pas l'être — entre la forme et le « sens » — joue un rôle fondamental dans l'enseignement. Elle résulte à première vue de ce qu'elle est le résultat extrême de la négociation didactique étudiée par M. Verret (Le temps des études. 1974) et par laquelle le savoir enseigné se constitue en une transposition didactique du savoir pratiqué.

En effet cette négociation didactique conduit à distinguer, dans ce qu'a été vécu naturellement par l'élève comme une réponse normale à des situations intentionnelles, ce qui est objet de connaissance, de ce qui ne l'est pas, ce qui était un « problème » de ce qui était une hésitation stupide, ce qui était une adaptation banale de ce qui était un apprentissage, ce qui doit être appris de ce qui peut être oublié. Nous entreprendrons plus loin l'étude théorique de ce phénomène important mais nous pouvons tout de suite en observer le fonctionnement dans ce cas précis.

Les Algorithmes :

Un algorithme est une suite finie d'instructions effectuées permettant d'obtenir sur une classe donnée de problèmes, un résultat défini. Lors de son emploi, c'est une procédure de décision, mais le fait important réside en ce que l'algorithme peut être déterminé à l'avance, l'exécution de la n-ième instruction ne dépend d'aucune circonstance non prévue à la (n - 1)-ième, d'aucune nouvelle prise d'information, d'aucune nouvelle décision, d'aucune interprétation, donc d'aucun sens que l'on devrait leur attribuer. C'est pourquoi l'exécution d'un algorithme peut atteindre une grande fiabilité et une grande vitesse d'exécution.

La détermination d'un algorithme permet de hiérarchiser les tâches complexes dans lesquelles il apparait et de raisonner sur elles. Un grand nombre d'activités et d'équilibres peuvent être décrits comme des algorithmes et paraissent donc relever d'une exécution mécanique ou d'un « automatisme » selon une expression erronée mais courante chez les maîtres.

L'enseignement des algorithmes :

Très utiles et répandus dans les sciences et les techniques (et d'autant plus qu'ils sont plus complexes), les algorithmes sont tentants pour le professeur car :
— ils peuvent être appris soit directement dans la forme où ils seront utilisés soit par une complexification naturelle (insertion de sous-algorithmes) ;
— ils peuvent être enseignés sans recours au sens qu'ils sont d'ailleurs chargés de rejeter, donc par des méthodes formelles : application répétée, récitation...
— leur acquisition peut être contrôlée ;
— la non-acquisition permet des décisions didactiques simples, dans un contrat clair, où la responsabilité de l'élève peut être engagée à priori ;

— leur utilité peut être éprouvée puisque leur mise en œuvre est identifiable dans leurs applications ;
— ils assurent après l'apprentissage, dans l'exécution des tâches, des phases de bonne fiabilité, de grande vitesse et confiance.

Ils jouent d'ailleurs un grand rôle dans la justification des modèles d'apprentissage par conditionnement auxquels se réfèrent implicitement ou explicitement les maîtres.

En fait l'usage d'un algorithme est, par rapport à l'activité mentale, comme la partie visible d'un iceberg. Dans de nombreux cas qui servent de référence métaphorique aux théories pédagogiques qui les préconisent, les algorithmes sont acquis par un processus tout différent de ces apprentissages formels : ils sont le résultat d'une adaptation des sujets, progressive ou par sauts, mais où le sens et les caractères des situations jouent un rôle très important. D'une certaine manière, apprendre séparément les algorithmes de calcul et leurs conditions d'emploi est une activité comparable à celle qui consisterait à apprendre des citations et l'occasion de les placer. Elle est concevable en littérature académique mais ne permet pas d'apprendre une langue.

Cette méthode conduit à rendre inutiles — non fonctionnelles — les explications et la compréhension, en ce sens qu'en cas d'erreur ou d'incertitude elles ne servent jamais à rectifier l'algorithme. Seules alors peuvent servir des aides mnémotechniques, c'est-à-dire arbitraires par rapport au contenu. C'est ainsi que les motivations à exécuter une tâche peuvent devenir non pertinentes, et donc se plier à des exigences plus pédagogiques.

On les voit donc disparaître dans certains ouvrages (Bodard déjà cité), ou n'y jouer qu'un rôle secondaire, de telle sorte que l'explication est devenue à son tour une nouvelle connaissance juxtaposée aux autres. Et si seuls les meilleurs peuvent l'apprendre, c'est qu'elle n'est pas indispensable. Elle doit donc être considérée comme un autre savoir, indépendant du savoir-faire..., un luxe superflu en première urgence.

Ainsi, les préoccupations pédagogiques des années soixante ne prenaient pas en considération le contenu dans la conception des situations d'enseignement et même tendaient à le rejeter en tant que savoir organisé pour n'en retenir que l'aspect connaissance des faits et algorithmes (*).

En conclusion de cette étude on peut admettre que la méthode que nous avons présentée est bien typique de celles

(*) Cette tendance d'ailleurs été constatée expérimentalement par E. Filhol dans une recherche sur l'enseignement de la numération où il a montré que les maîtres ne prévoient les résultats de leurs élèves et ne les faisaient progresser que sur les objectifs de bas niveau taxonomiques.

qui étaient utilisées dans les années 60. Nous ferons l'économie ici de toute vérification aussi bien historique, par l'analyse des manuels, qu'expérimentale, par l'analyse des résultats des élèves des classes qui auraient conservé (elles sont nombreuses) ces méthodes : En effet ces méthodes, obtenues par l'effet des « variables pédagogiques » ne sont pas naturellement exclusives; chaque ouvrage, chaque maître les conjugue selon des formules qui changent d'une leçon à une autre.

Seule l'uniformité des résultats et leur peu de dispersion peuvent attester de l'exactitude de notre déclaration initiale : les variables pédagogiques évoquées plus haut sont sans grand effet sur la conception qu'ont les élèves d'un concept comme les décimaux. Nous ne ferons ces observations qu'après avoir examiné les réformes des années 70.

L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX DANS LES ANNEES 70 :

Les réformes des années 70, en France en particulier, s'inscrivent en quelque sorte en réaction contre l'état que nous venons de décrire mais, pour s'exprimer ou se justifier, elles vont devoir s'appuyer sur certaines des conceptions antérieures. L'enseignement des décimaux n'est pas au centre de la lutte à laquelle se livrent les novateurs et parfois leurs adversaires, mais il est d'autant plus intéressant d'examiner sur eux la trace des idées nouvelles — dont nous ne ferons pas ici l'inventaire.

Description d'un curriculum :

Examinons les exercices proposés dans le « journal de mathématiques » de N. Picard (CM1, fascicule II et CM2 1976) et dont certains sont commentés dans « Agir pour abstraire » du même auteur (*).

Léçon d'introduction :

L'élève mesure des surfaces limitées par les lignes d'un

(*) Mme. N. Picard a contribué à diffuser en France les idées de Z. Diènes à qui elle a emprunté nombre de ses idées. Chargée de recherches à l'INRDP, elle a représenté, pour les maîtres, de 66 à 70, les tendances des réformes souhaitées.

réseau en dénombrant les mailles. L'unité de surface est le nom donné à cette maille (« L'unité d'aire est un petit triangle » mes. 3) (*). On lui fait alors remplacer ce dénombrement par un recouvrement des figures avec des « pièces » d'un système inspiré des multibases de Diénès : A couvre une maille, B en couvre 2, C \longrightarrow 2^2 , D \longrightarrow 2^3 , E \longrightarrow 2^4 , F \longrightarrow 2^5 , G \longrightarrow 2^6 . Après échanges pour avoir le minimum de pièces de chaque sorte, le résultat est transcrit dans un tableau où la surface — un naturel — est écrite en base 2. L'élève est alors invité à dessiner une surface M d'aire 11011. « Quand A est l'unité » puis à mesurer cette aire en prenant E « comme unité ». L'unité est devenue une des pièces et par le jeu des échanges la classe d'équivalence des figures de même aire et de même type (ces termes et ces remarques ne figurent pas dans le texte). Pour indiquer que dans cette opération matérielle, il a changé d'unité, l'élève doit mettre, dans le tableau, un chapeau sur le nom de la pièce choisie et une virgule après le nombre de pièces.

Après échanges, on obtient le même tableau que dans l'énoncé — avec en plus la virgule et le chapeau. Les changements d'unité se font à l'intérieur d'un même système. On ne remplace pas un réseau à mailles carrées par un autre à mailles hexagonales par exemple.

Autres bases. Décomposition :

Le même genre de travail est fait en base 3 puis en base 10. Des exercices viennent rappeler que pour multiplier un nombre par la base, il suffit de décaler les chiffres d'un rang vers la gauche.

Il apparaît dans le compte rendu de l'activité du maître qui accompagne ces exercices (agir pour abstraire p. 215), que dans un dialogue très maïeutique, les enfants ont été conduits à transcrire ce tableau :

G	F	E	D	C	B
1	1	0	0	1	1

en légalité : $S = 2f + 1f + f/8 + f/16$

(*) Mes. i fait référence à l'indexation des fiches utilisées par l'auteur.

Les commentaires de N. Picard sur la situation sont insuffisants pour connaître la signification exacte de ce comportement. f/8 et f/16 ont été « trouvés spontanément ». Mais c'est la première fois qu'une écriture ainsi décomposée apparaît. Le maître fournit un exemple en disant : « Écrivons en mathématique ce qu'il a dit ». Aussitôt les « f » peuvent disparaître :

$$S = 2 + 1 + 1/8 + 1/16.$$

L'auteur signale toutefois que l'écriture à virgule n'est comprise que lorsque les enfants placent le nombre dans un tableau. Les exercices se font en différentes bases mais les élèves n'effectuent pas de changements de base : ils ne réécrivent pas une aire donnée en base deux, en base trois. Les opérations d'addition et de multiplication par un naturel dans les nombres à virgule (base 2) sont étudiées dans le même type de situations (mesure d'aires à l'aide de pièces), puis, après échanges, dénombrement direct dans la base de numération.

Les opérations :

L'étude de l'ordre des nombres à virgules utilise une toute autre représentation : il s'agit de « numéroter » des livres de bibliothèque. Les livres sont désignés par des lettres, A, B, C... mais pour des raisons qui ne sont pas évoquées, le bibliothécaire assigne, à chaque nouveau livre, une place déterminée entre deux autres déjà placés. Par exemple F entre B et C « Il s'agit de trouver un code pour F », sous-entendu :

1) pour indiquer la position par rapport aux livres déjà placés, 2) mais qui ne change pas quand de nouveaux livres sont placés, tout en gardant la propriété (1).

Cette « numération » ne permet sûrement pas de compter les livres placés.

En fait, le problème n'est pas posé, la solution est donnée aussitôt, (« voici un moyen ») non pas sous forme d'une méthode pratique qui n'engendrerait que quelques codes, (ceux correspondant à des introductions au hasard) mais

sous celle d'un algorithme générateur de la graduation entière, c'est-à-dire de tous les codes ayant un chiffre après la virgule, puis deux..., conformément au modèle évoqué plus haut dans *L'ordre des décimaux*.

Les opérateurs. Les problèmes :

a) Immédiatement après, vient la préparation classique au produit de deux décimaux sans indication d'unité. L'auteur introduit une numération du rang des chiffres à l'aide des entiers (\mathbb{Z})...3,2,1,0, $\bar{1}$, $\bar{2}$,... La multiplication par 10, 100, 1000 consiste à déplacer les chiffres dans le tableau d'un rang vers la gauche. L'opération est justifiée par l'échange de pièces — le modèle reste nécessaire — d'un rang contre celle d'un rang immédiatement supérieur.

La division (de quoi ? des nombres, des nombres-mesures, ... des unités!?) consiste en l'algorithme inverse :

$$123,35 = 12335 : 100$$

b) Alors, le produit de deux décimaux — dont on ne sait pas à quelle occasion on peut avoir à le faire — est interprété en termes « d'opérateurs » :

$$\begin{aligned} 123,35 \times 4,3 &= [12335 : 100] \times [43 : 10] (*) \\ &= [12335] ((: 100) \cdot (x 43) \cdot (: 10)) \dots \text{etc} \\ &= [12335] ((x 43) \cdot (: 100) \cdot (: 10)) \end{aligned}$$

Nous traduisons ici par des nombres entre crochets les nombres qui expriment des mesures et entre parenthèses ceux qui sont associés à des « opérateurs » représentés dans le texte par les flèches (Le point représente la « composition » de ces flèches et nous avons ainsi distingué 3 « produits » : l'opération interne \times , l'opération externe $[]$ $()$ et la composition d'applications qui sont confondus dans le texte). Cette interprétation de $[43]$ « nombre concret » en l'opérateur $(x 43)$ a été préparée dans les naturels par de nombreux exercices sur ce que l'auteur appelle « les machines ». Il n'est proposé aucune situation-problème où la multiplication de deux décimaux pourrait prendre un sens.

c) La division est exposée selon l'ancien schéma : remarque

(*) Pour $[12335] (: 100) \times [43] (: 10)$

est faite que dans les naturels et pour la division euclidienne:

$$a \div b = ka \div kb = \frac{a}{b} \div \frac{a}{b} \quad (\text{si } h \text{ divise } a \text{ et } b)$$

La propriété est étendue aux décimaux.

(d) En dehors de ces leçons d'introduction et d'études et auxquelles sont consacrées 32 fiches sur 131 au CM1 et 58 sur 149 au CM2. Aucune autre allusion n'est faite aux décimaux (ni applications ni usage) sauf dans l'étude de l'encadrement d'une aire (Mes. 44 à 51).

Approximation :

Dans un premier exercice les élèves peuvent constater que l'encadrement de l'aire d'une surface connexe, mais non composée d'une juxtaposition d'atomes, dépend de la position du quadrillage utilisé pour le dénombrement et qui s'est substitué aux pièces. Mais cette aire existe-t-elle dans ce cas ? Puis ils calculent l'aire de la surface bordée par les lignes du quadrillage, d'abord avec une unité, puis avec une autre six fois plus petite. Le partage de l'unité est donc suggéré mais les deux quadrillages sont présentés en même temps et la situation ne diffère pas formellement des précédentes (dénombrements avec groupements).

Dans les exercices suivants (Mes. 50 et 51), l'encadrement de l'aire (?) d'une surface à l'aide de quadrillage plus fins est supposé suggérer la poursuite de la précision.

Analyse de ce curriculum :

Cette présentation appelle quelques remarques :

Les aires :

L'introduction est conforme aux conceptions antérieures, mais le recours aux surfaces est habile car il rend plus claires les différences entre les divers objets d'une même classe, à laquelle la mesure attribue la même valeur. Toutefois l'usage du matériel et la règle des échanges plaquent un exercice de numération inutile et qui renforce l'aspect de dénombrement imposé par la restriction à certaines figures, un sacrifice à l'idéologie de la manipulation.

La virgule :

La virgule et le chapeau ne portent aucune information lorsque le nombre est écrit dans un tableau, ce qui est toujours le cas dans la première partie du travail. L'écriture « mathématique » décomposée sous forme de polynôme aurait vraiment pu servir de base à une étude correcte du décimal. Mais cet épisode paraît assez fortuit et sans lendemain, l'auteur semble ne s'intéresser qu'à la transcription.

L'ordre :

L'étude de l'ordre des décimaux est réellement une innovation qui répondait, nous l'avons vu, à une insuffisance des méthodes antérieures, mais en quoi les raisonnements effectués ou les propriétés énoncées à propos du numérotage engagent-ils les décimaux-mesures déjà introduits ? Ou si ce sont des « nombres » nouveaux comment en concevoir la somme par exemple ?

Identification et évaporation :

a) Ces êtres n'ont en commun avec les autres que la manière dont on les écrits. Leurs représentations sont distinctes, isolées et cohabitent sans rapport — autre que formel. Pour raisonner sur l'ordre des « nombres à virgule » — mesure, il faut se souvenir de l'algorithme du rangement des livres. Aucune activité ne permet à une représentation nouvelle d'englober les deux précédentes (on aurait pu, par exemple, définir une distance entre les repères puis une mesure de ces « segments »).

b) Cependant c'est à partir de ces leçons que le décimal perd toute référence à une unité donnée. La virgule conserve un sens cependant, lorsqu'il s'agit de comparer ou d'additionner des nombres décimaux : elle indique le chiffre de l'unité utilisée pour chacun et qui est supposée être la *même*, même si on ignore laquelle (cette explication n'est ni demandée, ni fournie aux élèves).

Lorsque les nombres proposés n'ont rien à voir entre eux, et qu'il n'y a aucune raison de supposer que c'est la même unité qui a été utilisée, la disparition sans avertissement de l'indication de l'unité, fait, qu'au moment où la virgule pourrait porter effectivement et utilement l'information convenue, elle en porte une autre, on ne sait laquelle.

c) Or, l'identification entre le décimal-mesure et le décimal-grammes, ne la facilite pas. Aussi ne se fait-elle que de façon sur leur différence de statut, renforcée par l'usage des diagrammes, tout à fait formelle. Chaque conception hérite des propriétés et des règles établies dans l'autre par la magie de l'identité d'écriture. C'est pourquoi il était nécessaire d'utiliser le décimal — ni mesure, ni opérateur — comme pont formel : Toute représentation dans un exemple concret, non seulement n'apporterait aucune preuve de la légitimité de l'héritage, mais encore ferait obstacle à son fonctionnement (par plaisanterie nous avons appelé ce processus l'évaporation de l'unité).

d) Cette identification est un des problèmes fondamentaux de la création du sens des décimaux. Elle a été totalement négligée dans les études sur l'enseignement. Nous l'étudierons dans le cas des rationnels où elle ressemble beaucoup mieux à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual.

Produit :

Pour la notion de produit, rien de nouveau non plus, mais il apparaît clairement que la compréhension — sans parler de la signification — du calcul du produit repose sur la capacité d'identifier un nombre « concret » : $[43 : 100]$ avec un opérateur ($\times 43$) . ($: 100$).

En conclusion, le décimal est toujours introduit pour représenter une mesure faite avec une unité assez petite et exprimée à l'aide d'un autre multiple.

Ce décimal là est toujours un naturel « concret ». Par contre, le système métrique a été rejeté comme signifié principal du décimal. Son étude occupe une place excessive-ment modeste (un exercice de présentation pour chaque grandeur : longueurs, surfaces, volumes, masses). Les algorithmes de calcul sont présentés de façon classique même si la justification du calcul joue un rôle beaucoup plus important et s'appuie sur un formalisme assez lourd (non mathématique mais faisant l'objet d'un apprentissage prolongé : les machines).

Ainsi, les caractères relevés comme typiques des méthodes des années 60 sont, pour la plupart, conservés dans ces ouvrages présentés comme très novateurs.

Etude d'un curriculum typique des années 70 :

Le manuel le plus répandu à la suite de la réforme de 70 fut probablement celui de Mme Touyarot (Itinéraire mathématique — Nathan 1976).

Les choix :

Les choix sur les questions qui nous intéressent y sont les mêmes : introduction comme mesure de cardinaux finis avec changements d'unités puis « évaporation » de l'indication de l'unité, ce qui permet, dans la comparaison de deux naturels et dans celle de deux décimaux d'avoir deux algorithmes différents — fournis sans justification — pour ranger dans le même ordre des nombres qui sont toujours considérés comme des naturels.

Propriétés des opérations :

Alors que les propriétés des opérations dans les naturels sont fondées explicitement sur l'examen d'une représentation (les opérations ensemblistes — mais les termes de « réunion » et « d'intersection » ne sont pas prononcés), celles de ces opérations dans les décimaux sont simplement empruntées aux précédentes, attestant qu'avec cette représentation, il n'y a plus ni problème, ni débat, ni même nouveauté. Le décimal n'existe plus comme être mathématique mais seulement comme transcription d'un être déjà connu.

Produit :

Pour le produit de deux décimaux, l'élève est invité à constater que « un paquet de sucre contient 168 morceaux de sucre donc 1,68 centaines de morceaux; 28 paquets de sucre contiennent 1,68 x 28 centaines de morceaux ». D'autre part ces « 2,8 dizaines de paquets de sucre contiennent bien 16,8 x 2,8 centaines de morceaux de sucre puisque une dizaine de paquets de sucre en contient 16,8 centaines de morceaux. Donc : (évaporation)

$$16,8 \times 2,8 = 1,68 \times 28$$

Opérateurs :

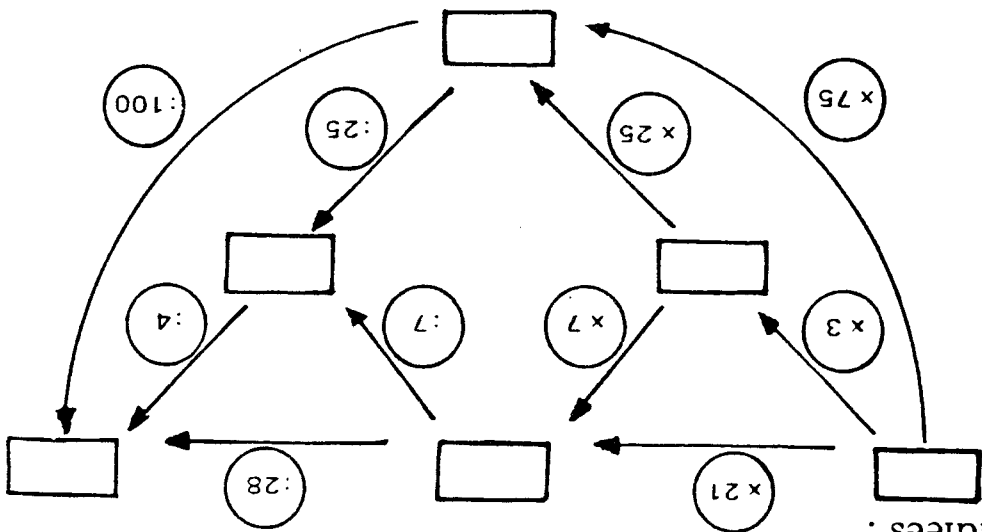
Beaucoup plus tard, le décimal opérant dans les naturels puis dans les décimaux est défini comme une application :

(x 2,5), ce qui permet de présenter les données de problèmes relatifs à la règle de trois.

Les fractions :

Elles sont définies ensuite comme opérateur réduit d'une chaîne d'opérateurs elle-même présentée sans référence à une situation-problème quelconque. Elles « s'utiliseront » plus loin.

L'ouvrage revient alors sur la notion de décimal pour montrer qu'une fraction (opérateur) peut parfois, par décomposition et recomposition, être « égale » à un opérateur décimal. Curieusement, dans cet ouvrage, où pourtant ne figurent que très peu d'exercices dans les bases non décimales, l'expression « nombre à virgule » se substitue au mot « décimal » très fréquemment et sans raison apparente. Par exemple pour « établir » que $\frac{21}{28} = \frac{75}{100}$ on procède par une démonstration pénible et illustrée d'un nouveau type de diagramme dont les conventions n'ont pas été étudiées :



Mais on ne sait pas d'où vient que $\frac{75}{28} = 0,75$ ($\times \frac{100}{75} =$ (x 75) . (: 100) = 75 : 100, nous retrouvons le même obstacle), ni pourquoi pour obtenir le même « résultat », il suffit de diviser 21 par 28 en écrivant à droite du dividende autant de zéros qu'il est nécessaire pour obtenir finalement un reste nul. (Pour la circonstance, le discours s'émaille d'inconnues : x,y,z pour la première fois dans le cours). On trouve seulement un exercice d'approximation pour expliquer et prendre en compte les cas où la division « ne se termine pas » ($\frac{11}{10}$).

Conclusion :

Cet ouvrage éclectique conserve le canevas ancien et l'illustre de tous les apports nouveaux de l'époque. Les problèmes sont nombreux et très variés. L'enseignant ne sait lesquels choisir et ne voit pas bien comment la solution de l'un facilitera pour l'élève la résolution d'un autre. Ce qui veut dire qu'il n'y reconnaît pas les contenus d'apprentissage auxquels il est habitué. Le vocabulaire est lui aussi le résultat d'une négociation de circonstances : quelques termes nouveaux, rattachés à des objets anciens. Mais qu'un obstacle se présente comme dans la démonstration du paragraphe précédent et le langage mathématique reparaît avec tout l'arsenal des innovations didactiques de cette époque. Il témoigne clairement d'une négociation difficile dont nous allons maintenant examiner les conditions.

Les idées pédagogiques de la réforme :

La réforme vise les contenus :

Contrairement aux mouvements pédagogiques antérieurs, la réforme des années 70 visait principalement à modifier le contenu, la formulation, l'organisation et l'ordre d'introduction des connaissances mathématiques enseignées. Si elle était accompagnée souvent de prises de positions pédagogiques aucune ne lui était spécifique. Ayant constaté qu'à part quelques compléments et changements de vocabulaire la conception de l'enseignement des décimaux n'avait pas fondamentalement changée, on serait tenté d'en inférer que les difficultés des élèves devraient être les mêmes.

Or nous allons voir qu'au contraire la modification des contenus conduisit à celle de la conception de l'apprentissage, à la réorganisation des activités des élèves et à celle de l'enseignement des mathématiques.

Cette réforme prétendit avant tout être celle des contenus :

- les connaissances mathématiques avaient été réorganisées et unifiées;
- le vocabulaire avait donc changé, on avait de nouvelles exigences quant à la rigueur, le champ d'application des mathématiques s'était élargi en partie grâce à la fécondité de cette réorganisation;

— l'unification devait permettre une meilleure efficacité de l'enseignement en lui permettant d'apprendre, moins pour résoudre plus mais surtout pour apprendre à apprendre. C'est pourquoi elle fut demandée, promue et animée par les mathématiciens. Mais la conception même de cette unification portait en elle des hypothèses sur le fonctionnement des mathématiques, en tant que « théorie des structures » (*). Celles-ci, détachables du contenu « peuvent être conçues indépendamment de la nature des ensembles de base ».

Remarquons : dans cet article d'ailleurs, l'auteur insiste, à travers deux exemples, sur l'importance pour une science neuve de se placer dans le domaine proprement mathématique de la déduction totale, position en rupture avec la méthode de l'inductive, l'abstraction extensive et l'accumulation de faits expérimentaux qui prédominent dans les sciences encore jeunes. Il conclut : « Nos modes de connaissance sont bien mathématiques, à eux sont indissolublement liés nos pouvoirs », ce qui à la fois justifie socialement le projet de la réforme et lui donne son fondement psychologique et scientifique.

Ainsi, puisque les mathématiques sont un moyen de fabriquer la connaissance, apprendre les mathématiques c'est apprendre à apprendre. Pour beaucoup, les nouvelles mathématiques sont donc organisées comme un langage formel dont la *sémantique* est la théorie des structures dont on peut exhiber la synthèse et qui s'applique dans différents domaines en subissant des adaptations relevant de la *pragmatique* (conception structuraliste). Cette conception permet-tait d'espérer des apprentissages séparés contrairement à ce que permettaient de penser les travaux de Piaget.

L'enseignement des structures :

Si l'on veut accepter le pari d'organiser l'acquisition de ces mathématiques par les enfants il faut donc dire comment ces structures peuvent s'approprier d'emblée. En effet, l'économie du projet structuraliste consiste à refuser d'inscrire le sens des structures dans une histoire du sujet en

(*) Cf. remarques sur les mathématiques et la réalité de LICHNE-ROWICZ 1967 (In : Logique et connaissance scientifique p. 477) p. 474-485. Encyclopédie de la Pléiade. NRF 1969.

interaction avec des situations trop riches ou trop nombreuses où ces structures s'englueraient et prendraient des significations et des limitations trop particulières. De plus, les idées pédagogiques de l'époque conduisent à rejeter une étude scolastique du discours mathématique.

Ce problème a reçu plusieurs tentatives de réponse. Nous ne retiendrons que celle proposée par Diénès que nous considérons comme la plus représentative et la plus explicite. Nous signalerons, toutefois, une manière de s'y dérober fréquemment observée.

Elle consistait :

— en s'appuyant sur les travaux de Piaget à penser que justement l'épistémologie génétique montrait l'apparition non pas de connaissances élémentaires mais de structures entières et, cela, dans une genèse qui procédait du général au particulier; — et à conclure, avec une référence douteuse aux idées de Rogers que l'activité des sujets et leur développement naturel conduisaient aux appropriations fondamentales visées, à condition que l'on n'y fasse pas obstacle par une didactique normative intempestive. Cette position ne fournissait pas de pratiques didactiques « communicables » mais justifiait beaucoup d'expériences « pédagogiques sauvages » (*) qui prétendaient rejeter les « méthodes traditionnelles ».

Par contre, Diénès, propose explicitement une solution qu'il illustre de nombreuses leçons et de matériels nouveaux (**).

Le processus, qu'il appelle « psychodynamique » se déroule, généralement en six étapes :

- étape ludique;
- jeux structurés;
- jeux isomorphes et abstraction;
- schématisation et formulation;
- symbolisation et formalisation;
- axiomatisation.

mais s'accompagne de phénomènes comme, par exemple, celui de la généralisation.

(*) Selon une terminologie de l'INRDP.

(**) MAUDET : Etude et critique du processus psycho-dynamique selon Diénès. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux 1979.

L'interprétation que nous allons en donner n'est pas entièrement conforme aux écrits de l'auteur, elle est une tentative d'approche de celle que les enseignants ont pu lui donner dans le contexte des idées de l'époque. Elle correspond en tout cas, à la plupart des exercices et des situations d'enseignement se référant à lui et que j'ai pu observer. a) Un jeu structure est un jeu dans lequel l'enfant agit selon des règles qui lui sont fournies soit formellement, soit par le contexte. La plupart du temps ces règles sont celles de la structure à découvrir.

Le cas typique est celui des groupes. Le didacticien choisit une réalisation dans un groupe, par exemple le groupe de Klein comme groupe de transformation d'un certain ensemble (par exemple quatre positions d'une poupée qui culbute, tourne et roule). Le maître présente cet ensemble, invite l'élève à effectuer les transformations, à les chercher toutes, à trouver celle qui, appliquée à ceci, donne tel résultat, celle par quoi peut-on remplacer cette autre, etc. Ces activités sont directement calquées sur des activités mathématiques et correspondent à des solutions d'équations, à des recherches de propriétés, etc.

Le mot « jeu » est utilisé dans le sens où on l'utilisait à l'époque en pédagogie. Il signifie que la situation est inhabituelle, dégagée d'obligations d'apprentissage, d'exigences scolaires, qu'on peut y prendre des libertés, qu'elle met en œuvre l'imagination, qu'on peut faire des découvertes, se les dire. Bien que l'élève soit mis devant le problème d'atteindre un objectif dans le cadre de règles qui lui sont données, la situation didactique n'est généralement pas organisée comme un jeu ordinaire, ni telle que le joueur ait plusieurs occasions d'essayer les diverses stratégies qu'il pourrait mettre en concurrence. Le terme « jeux » recouvre donc ici aussi bien des situations authentiquement ouvertes que des exercices très banals d'imitation et de reproduction de tâches. La situation mathématique est un cadre dans lequel s'insèrent des activités et non pas un moyen intellectuel qui commande le choix d'une stratégie optimale dans une situation-problème d'utilité familière.

Dans ces conditions les motivations seront encore exogènes, ne mettant pas en rapport le contenu en tant

que solution d'une situation reconnue intéressante.

b) Dans l'étape des jeux isomorphes, le maître propose, successivement, à ses élèves plusieurs jeux réalisant la même structure. Ceux-ci, doivent reconnaître d'eux mêmes entre ces jeux, les correspondances d'objet à objet, de relation à relation qui leur ont permis de transporter de l'une à l'autre de ces situations problèmes, comportements, propriétés et méthodes. Aux yeux du didacticien ces transferts sont déjà tenus pour la preuve que l'élève a pu établir entre les réalisations, une relation qui constitue l'appréhension encore implicite de l'isomorphisme, modulo la structure choisie et dont on prendra conscience dans la phase suivante.

c) L'abstraction consiste alors à identifier, en tant qu'objet de connaissance la « structure commune » à divers jeux isomorphes. La structure est ici l'ensemble des propriétés qui indépendamment des particularités de chaque exemple les régissent tous. Le didacticien doit donc produire un ensemble de réalisations présentant une « variabilité » convenable pour limiter la finesse de la structure abstraite. La recherche de la structure la plus fine doit être, elle, érigée en règle permanente, les réalisations formant la sémantique de la structure conformément à la définition de Carnap. Mais les raisons de cette recherche, du choix des exemples, et, de l'usage de cette structure ne sont pas accessibles à l'élève de sorte que pour lui il y a bientôt un contrat assez clair : il lui faut reconnaître ce que le professeur a caché dans les jeux, décoder son intention didactique selon une règle uniforme : chercher les ressemblances et les différences. Il faut remarquer que cette étape, contrairement aux précédentes n'appelle aucune décision nouvelle de la part de l'enseignant, elle ne comporte le plus souvent aucune situation-problème spécifique : elle apparaît comme une réponse, entièrement à la charge de l'élève, donnée aux étapes antérieures qui en sont à la fois la condition nécessaire et suffisante.

C'est à mon avis l'existence du contrat didactique qui assure le fonctionnement du processus, et non une quelconque loi de la genèse de la connaissance. L'abstraction n'est pas fatale. En effet les commerçants n'ont jamais abstrait les structures de modules qui règlent leurs échanges permanents parce qu'ils n'avaient pas de motivation à le faire.

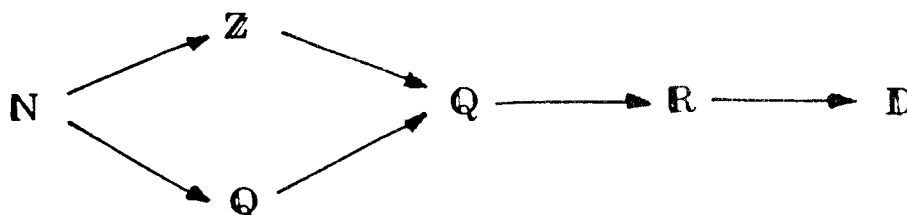
(d) La schématisation et la formulation de la structure poursuit le processus d'identification et de mise à jour. Diènes ne prévoit pas de situations générales spécifiques. Diènes ne prévoit pas de situations générales spécifiques de cette étape (ce qui se conçoit bien s'énoncerait-il clairement ?) mais la représentation par un graphe est souvent envisagée comme une expression simplifiée mais naturelle et directe de la pensée de l'enfant. Figurer les objets par des points et les opérateurs par des flèches s'apprend par l'usage de l'imitation, comme un langage.

(e) La symbolisation est la transcription dans un nouveau langage des propriétés représentées à l'étape précédente. L'axiomatisation est l'étape de réorganisation de la connaissance acquise, du choix des propriétés fondamentales de la mise en place des structures les unes par rapport aux autres; cette position étant bien entendu celle assignée par l'état actuel des connaissances mathématiques (qui doivent donc s'identifier, se figer, en « mathématique moderne » pour devenir une référence didactique). Cette étape se déroule elle aussi suivant la démarche précédente jeux libres, avec règles isomorphes, formalisation...

Et ainsi apparaît la nature de ce processus psychodynamique. La connaissance n'est pas organisée comme une réponse adaptable, adéquate, économique et personnelle à des situations-problèmes, elle est fournie toute armée par la culture qui en assure la validité et l'utilité future et ne laisse à l'élève que la possibilité d'adhérer. Elle est seulement un peu cachée suivant une fiction régulière conventionnelle et simple. Ce que l'élève doit faire pour la découvrir est supposé être le fonctionnement de la connaissance dans toutes les situations didactiques ou non. La méthode de Diènes est un langage de communication avec les élèves, un mode de codage didactique de la connaissance qui est supposé ne pas en modifier la nature (conformément à ce qu'affirme Bruner) et c'est un contrat didactique avec les élèves, pour le décodage des messages. Certes cette méthode d'exposition promet d'être très lente et de ne convenir qu'à des exemples très simples.

(g) C'est pourquoi elle est reprise par le processus de généralisation et son antagoniste la particularisation : Une fois connus les axiomes d'une structure, il est possible d'en

abandonner certains, ou d'en arrêter d'autres et ainsi d'admettre le débat constitutif de la science. Diénès donne comme exemple de ce processus le schéma suivant :



Processus psychodynamique et pratique pédagogique

Le contrat dont nous parlions plus haut s'appuie sur une fiction épistémologique et psychologique très répandue (à l'époque) et reprend des pratiques professionnelles bien établies :

a) Les comportements des élèves sont supposés être essentiellement empiriques : leurs rapports répétés avec la « réalité » des situations didactiques font surgir les structures qui y sont incluses comme la « gestalt » dans la perception. Ce processus d'abstraction s'interprète parfaitement dans la théorie des traces mémorielles.

b) L'acceptation du modèle empiriste pour rendre compte du fonctionnement de l'élève s'appuie sur une *position traditionnelle* fondamentalement réaliste et presque platonicienne des enseignants : la réalité a des structures que l'homme découvre, le professeur est porté à simuler la nature en cachant les structures qu'il veut enseigner, la découverte étant une lecture du monde.

c) La technique des jeux isomorphes correspond à la *pratique ancienne* de la répétition des problèmes pour en enseigner la résolution (en les classant autour de types qu'il faut reconnaître). Sur ce point, la méthode nouvelle peut ainsi s'opposer à l'ancienne et en même temps s'y substituer sans modifier sensiblement les pratiques.

d) La position ancienne devait séparer l'apprentissage du savoir-faire et celui du sens. La nouvelle permet d'espérer fondre les deux car elle assure au professeur que la signification de la structure qui est finalement apprise et les algorithmes qui y sont attachés n'est rien d'autre que l'ensemble des réalisations qu'elle décrit et, inversement, l'abstraction se produit fatalement par le processus même qui engendre la mémorisation. Mais en fait la « structure » va se substituer aux savoir-faire et l'apprentissage du sens

encore plus négligé. On assistera même à la disparition des problèmes.

e) Le structuralisme triomphant des années 70 assure, quant à lui, l'utilité et la fécondité de ces acquisitions.

f) La didactique de Diènés satisfait en même temps des conditions qui paraissent, auparavant, contradictoires : pour chaque structure la construction précède l'analyse et le maître entend que l'on procède du concret à l'abstrait, de la manipulation et de l'action à la réflexion, du jeu à l'étude puis à l'application. Mais on peut commencer par enseigner les structures les plus générales donc les plus simples pour finir par les plus particulières et les plus complexes.

g) La reformulation en langage mathématique (isomorphisme, réalisation,...) ou mathématique des phénomènes psychologiques ou didactiques est conforme au projet pan-mathématique qu'exprimait plus haut Lichnerowicz et conforme aussi à un usage Piagétien. Elle joue un grand rôle dans l'émergence d'une première « théorie » didactique dont la valeur n'a pas besoin de s'enraciner dans l'expérience, selon ses propres schémas, autrement que par une reconnaissance, in situ, dans le travail d'enseignement : la théorie est vraie parce que l'enseignement qu'elle décrit, marche. h) Un revers de cette conception a été qu'elle a déchargé les enseignants de la responsabilité d'assurer certaines étapes en « garantissant » les résultats de la méthode par des lois psychologiques.

Par exemple les problèmes, au sens classique ont disparu en tant que pratiques et en tant qu'objectifs : il ne s'agissait guère que d'applications que l'acquisition des structures devait rendre possibles le moment venu.

i) D'autre part la position de Diènés n'était pas incompatible avec la plupart des théories pédagogiques que nous avons évoquées plus haut. De plus, Diènés a pris des positions intéressantes mais indépendantes de sa théorie didactique.

Influence sur l'enseignement des décimaux du processus psychodynamique et critique

Revenons à l'enseignement des décimaux et reprenons notre analyse des modifications dues à la réforme, à la lumière de ces données.

A la référence du système métrique et aux pratiques qui lui sont liées, on a préféré présenter différentes bases, d'abord la base 2 où le nombre des unités différentes est plus rapidement croissant et les manipulations plus simples. Les conditions de la reproduction d'activités de numération sont facilitées mais aucun problème nouveau n'apparaît et ces réifications ne sont que des répétitions.

De plus, les vrais problèmes de la mesure : le caractère non discret, la recherche d'une unité et d'un moyen de comparaison et de report, l'encadrement, les erreurs, tous ont été gommés au départ et renvoyés à une entrée ultérieure et solennelle. Les activités ne se réfèrent plus, ni à une utilité pratique, ni à une justification théorique explicite ou construction. Il est révélé à l'élève que puisqu'il a fait telle tâche, il vient de découvrir telle propriété. La structure, qu'un observateur juge présente, dans la situation-problème, est réputée être entrée dans les acquisitions de l'élève par le fait même de son succès à l'épreuve comme si le labyrinthe dans lequel on a placé un rat était connu de lui en tant que tel dès qu'il en est sorti une ou deux fois.

Je ne crois pas que Diénès ait dit ou pensé ainsi, mais rien dans sa « théorie » didactique ne permet au professeur de prendre en compte les comportements des élèves, de les expliquer et de les prévoir, lorsqu'ils sont « erronés » et d'y adapter les situations d'enseignement. Par exemple, c'est la confiance dans la providence ou dans la prévoyance des hommes ou de celle de l'enseignant qui permet aux élèves d'admettre que les décimaux mesure héritent de certaines propriétés des décimaux-repères. On ne peut rien dire de la signification de la réussite ou de l'échec de l'élève.

Conceptions et situations

Ce n'est pas le lieu ici de faire une critique systématique de l'œuvre si intéressante de Diénès mais il faut bien voir l'obstacle principal sur lequel elle bute et qui est celui de l'engagement de la connaissance dans l'action finalisée. Une « structure mathématique » prend sa signification dans l'emploi qui en est fait, dans la fonction qu'elle joue, dans la constitution des autres, et surtout dans les problèmes qu'elle a permis de résoudre. C'est au niveau du concept qu'il faut l'envisager. L'analogie de fonction dans un même

problème n'est pas, bien évidemment garante qu'il existe un isomorphisme entre les structures qui la présentent, mais surtout, l'observation entre deux cas d'un isomorphisme n'est aucunement garante d'un fonctionnement analogue de deux situations.

Le structuralisme, instrument fécond pour la recherche, devient dans l'enseignement, une magie trompeuse.

En fait, les travaux de Diènes, s'ils ont bien installé le contenu au centre du débat d'enseignement, ne conduisent pas le didacticien à questionner les mathématiques pour y chercher, au-delà des *structures*, les *concepts* et au-delà des concepts, éventuellement les *conceptions* qui pourraient se forger chez un sujet dans des *situations* historiques ou didactiques particulières. L'analyse de ces conceptions, qu'il faudra que l'élève possède ou évite, est inséparable de celle de la famille des situations-spécifiques où elles prennent leur fonction et leur utilité. Toutes les deux sont inévitables dans toute entreprise qui prétendrait, à la fois fournir une théorie dotée de ses méthodes de confrontation (probablement spécifiques aussi) et de techniques didactiques continuellement contrôlables par les enseignants. Les travaux de Diènes ne conduisent pas, et par voie de conséquence serions-nous tentés de dire, à interroger les *comportements* des élèves, non seulement en tant que réponse à une sollicitation didactique mais surtout en tant que source d'informations sur les questions théoriques de didactique.

Et c'est pourquoi peut-être, après ces deux longues études de pratiques d'enseignement on a l'impression de savoir si peu de choses sur les décimaux, sur les diverses conditions de leurs genèses et même de leur emploi ainsi que sur les comportements attestés ou possibles des élèves à leur sujet.

Quelques résultats en 1979

Hypothèse

D'autres méthodes sont apparues à la suite de la réforme. Bien que leur étude conduirait à préciser le champ des « variables » sur lesquelles jouent les didacticiens de cette période, nous ne la poursuivrons pas ici : d'une part, leur impact a été relativement plus faible, d'autre part, elles

agissaient dans le sens que nous avons indiqué, parfois même de façon excessive. Nous estimons finalement que la conception est restée la même que dans les années 1960.

Illustration

Nous n'avons pas rapporté ici des travaux qui ont permis de mettre en évidence les phénomènes que nous avons signalés mais pour illustrer leur permanence, nous relevons ci-dessous quelques résultats d'une enquête récente de l'I. N. R. P. sur le comportement de près de 900 élèves* en les disposant de façon à illustrer les caractéristiques de la conception des décimaux que nous avons décrite plus haut.

a) Techniques... Nous pouvons observer ainsi que les points sur lesquels les différences significatives apparaissent sont ceux que nous avons signalés : notre hypothèse n'est pas contredite.

Exercices sur IN	% réussite	Exercices correspondants dans ID	% réussite
ENCADREMENTS			
19225 et 499425	64	6,137 et 728,32	49
134900	56	57,05	50
340090	56	0,583	47
ORDRE			
INRDP (1977)	72	8 nombres	26
		- selon la partie entière	74
		- qui ont même partie entière	28
CHANGEMENTS D'ECRITURES			
Passage de l'écriture en chiffres à l'écriture en lettres			
176 et 5077	85	1,047 m	61
12075320	74	0,049 m	63
		16,84 m	85
ADDITIONS			
4325128 + 92042 + 104095	89	45,25 + 0,3451 + 3092,048	89
SOUSTRATIONS			
315426 - 42975	61	1241,39 - 327,043	60
MULTIPLICATIONS			
7485 × 374	60	54,15 × 3,02	66
DIVISIONS			
8359 par 39	69	74,19 par 3,4	52

* Institut National de Recherche Pédagogique (unité de recherche mathématique sur l'élémentaire). Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire. T. 1 : comportement des élèves (1979).

b) Conversions dans le système métrique.

Effectif : 940

4,15 m ²	←	dm ²	29%
3 m ²	←	l	22%
5,25 l	←	cl	74%
0,13 t	←	kg	40%
2h 25 mn	←	mn	53%

c) Il est intéressant de rapprocher de ces résultats sur les techniques, ceux qui ont été obtenus à propos de la proportionnalité. Il s'agissait de calculer les proportions pour 12, 4 et 10 personnes d'une recette connue pour 6 personnes.

Effectif 947 :	12	4	10
personnes	personnes	personnes	personnes
Proportions correctes (y compris une fraction)	15	9	5
Deux proportions correctes (pourcentages)	50	24	19
Une proportion correcte	4	10	12
Donne les proportions	12	12	13
pour une personne	12	12	13
Autres solutions fausses	19	45	51

Ce résultat est entièrement conforme à ceux obtenus par Alain Mercier* qui a montré que le formalisme des opérateurs (des machines) tendait à faire disparaître l'usage de la notion de rapport, surtout en tant qu'invariant dans une application linéaire, au bénéfice d'un calcul fonctionnel en général mal assimilé. La recherche de la proportion pour une personne correspond au début de cette procédure : elle devrait fournir la fonction linéaire qu'il faut appliquer aux valeurs de l'ensemble départ, mais, la valeur obtenue reste une mesure et l'élève en reste là.

Ces résultats sur les naturels sont valides pour les déci-

* Mercier A. : Etude des notions « opérateur » « machine » mémoire de D.F.A. soutenu en novembre 1978. Université de Bordeaux.

maux. Ils montrent peut-être que les élèves, bien qu'entraînés à la technique des opérateurs, n'ont jamais été beaucoup confrontés avec les problèmes que rencontrent les naturels dans ce rôle.

d) Les problèmes numériques :

Voici les pourcentages de réussite à quelques exercices, un peu complexes il est vrai, (avec usage de diagrammes, de tableaux de péage, de tarifs etc.) mais basés sur des calculs numériques dans \mathbb{N} ou dans \mathbb{D} .

Calcul de la distance entre deux villes	15%
Calcul du prix de l'essence	0,8%
Calcul d'un tarif postal	48 à 54%
Calcul de distances sur une carte routière	14%
Sur des problèmes plus classiques de pourcentages, les réussites sont de l'ordre de	30 à 45%

e) D'ailleurs les auteurs concluent :

« En ce qui concerne les acquis traditionnels sur les techniques opératoires, les comparaisons qui ont pu être faites avec des enquêtes plus anciennes montrent que, contrairement à une opinion répandue, « le niveau ne baisse pas ». Les élèves d'aujourd'hui savent aussi bien faire des opérations qu'il y a vingt ans, et ont, de plus, la maîtrise d'outils que ne connaissaient pas leurs aînés. »

En revanche, les élèves du CE2 et du CM2 ont des difficultés pour résoudre des problèmes : il s'agit là de réinvestir leurs savoir-faire techniques dans des situations où ils soient pertinents. Cette faible disponibilité d'outils par ailleurs bien maîtrisés, constitue l'information la plus claire des résultats et renvoie aux multiples aspects de ce qui pour les enfants fait difficulté dans la résolution des problèmes.

Variables

D'autres études, que nous ne rapportons pas ici, montrent en fait que l'effet de variables telles que le nombre des chiffres maniés, le nombre des chiffres de la partie entière, la présence de zéros intercalés près de la virgule, l'égalité des nombres de chiffres après la virgule, ... joue un rôle conforme au modèle.

QUELQUES PROBLÈMES DE L'ENSEIGNEMENT DES DECIMAUX

L'examen détaillé mais quelque peu naïf des pratiques des vingt dernières années nous a permis — d'une part d'identifier les difficultés que les élèves rencontrent dans l'apprentissage des décimaux, — d'autre part de reconnaître les difficultés des conceptions didactiques classiques ou nouvelles à trouver une prise sur les résultats insuffisants.

Pour pallier à un échec dans l'acquisition d'une connaissance, la pratique habituelle consiste à renforcer l'apprentissage par des répétitions, la multiplication des exercices, l'adjonction d'explications et de méta-discours dans les objectifs d'enseignement, ... et même de procédés didactiques ou mnémotechniques, ce qui a pour conséquence d'alourdir et d'allonger l'enseignement. Il faut donc en conséquence et en réaction à la fois, l'alléger en renvoyant à plus tard l'apprentissage de ce qui est considéré comme secondaire et en ne retenant que l'essentiel, le fondamental, les algorithmes pour les uns, les structures pour les autres. Nous pensons que ces principes conduisent à des décisions qui peuvent rendre impossible la conception de situations capables de donner un sens convenable aux notions enseignées et donc d'en hypothéquer l'emploi et, de toute manière, ils empêchent la fabrication de situations didactiques nouvelles dans le domaine de l'innovation, de l'invention. Nous nous proposons maintenant de poser le problème différemment et, anticipant sur les apports de la deuxième partie de cet article, d'esquisser les problèmes qui seront étudiés par la suite.

PROBLÈMES D'ENSEIGNEMENT ET PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

Pour comprendre les difficultés de l'enseignement des décimaux, il ne faut pas se borner à examiner les dysfonctionnements de l'apprentissage.

Le schéma classique, dans lequel l'apprentissage est la mise en mémoire d'une connaissance qui va s'appliquer, a permis une approche économique de la didactique. Il s'agit de décomposer l'organisation de l'enseignement en sous-tâches pouvant se concevoir indépendamment et s'exécuter séquentiellement. Chaque sous-tâche a pour fonction de permettre de :

- définir la connaissance visée, la réorganiser sous la forme la plus adaptée à sa communication ou à son apprentissage, la faire apprendre au sens de mémoriser sous cette forme et montrer comment on l'applique;
- placer cette sous-tâche dans un domaine de savoirs constitués ou sous contrôle d'une activité spécialisée : la discipline mathématique, les théories de la communication ou de l'apprentissage, ou de l'enseignement etc... Une utilisation naïve de ce schéma permet essentiellement aussi une décomposition des responsabilités et des contrats dans le déroulement de l'enseignement et fournit donc un cadre à l'interprétation des difficultés, des erreurs et des échecs. L'erreur est interprétée comme l'indice du non-fonctionnement d'une des séquences prévues, d'un écart entre un projet et sa réalisation : le savoir a été mal appris, mal retenu, ou mal appliqué, ou mal compris, mal relié aux autres savoirs... Les difficultés sont celles de l'élève ou celles de l'enseignant, ... ou celles de l'enseignement : les objectifs sont mal précisés, mal communiqués, les moyens sont insuffisants, les résultats mal évalués... etc.

Nous nous proposons ici d'essayer une autre approche : l'apprentissage est une adaptation de l'élève à une situation-problème nouvelle (*). Les difficultés qu'il rencontre sont donc fondamentales pour provoquer cette adaptation. De plus, elles peuvent être constitutives du nouveau savoir, c'est-à-dire être indispensables à sa compréhension (**). Ces difficultés sont celles que portent en elles la conception antérieure de l'élève et la situation-problème choisie les a seulement révélées. La nouvelle conception apparaît parce qu'elle est une solution à ces difficultés. Elle est une rééquilibration des systèmes de réponse de l'élève (*) soit qu'elle

(*) PIAGET : « Théorie de l'équilibration ».

(**) BACHELARD : « Notion d'obstacles épistémologiques dans la formation de l'esprit scientifique ».

lève les contradictions portées par les anciennes conceptions, soit qu'elle apporte des simplifications substantielles.

Dans cette perspective (à laquelle nous nous référons souvent et que nous étudierons à nouveau), ce qui est, ailleurs, interprété comme une difficulté des élèves dans un apprentissage, devient alors une difficulté pour une ancienne conception à être remplacée par une nouvelle — lorsqu'elle est en difficulté dans la situation-problème présentée.

Autrement dit, pour comprendre l'apprentissage des décimaux, il faut chercher *quelles sont les situations-problèmes* dans lesquelles ils sont de façon évidente une meilleure solution que les autres structures, en particulier celles déjà connues de l'enfant.

Il s'agit donc maintenant d'un couple de *problèmes mathématiques* (eux-mêmes formés d'un couple situation-conception) à comparer selon des critères à déterminer. On peut espérer mathématiser aussi cette comparaison en l'interprétant en termes d'économie sur les variables à déterminer. C'est la direction dans laquelle doit s'avancer la didactique aujourd'hui.

EPISTEMOLOGIE ET MATHÉMATIQUES.

Ce point de vue ne permet pas de rendre bien indépendantes la recherche et l'étude des conceptions particulières relatives au concept de décimal et la détermination des situations qui pourraient leur être associées. C'est pourquoi il n'y a pas encore de méthodes très naturelles de recherche. C'est seulement après coup qu'on peut mettre à l'épreuve le choix des variables pertinentes et acquérir la conviction qu'il est bon.

La méthode la plus tentante consiste à prendre les changements de couples « situation-conception » là où ils se sont produits pour l'humanité, c'est-à-dire dans l'histoire. L'étude de la genèse des concepts constitue la méthode la plus féconde de l'épistémologie moderne.

Nous savons que nos connaissances ne nous permettent pas encore de fabriquer et de contrôler des transpositions didactiques satisfaisantes pour un usage éducatif. Il n'est pas question, de toute manière, de réintroduire la méthode historique dans l'enseignement mais de comprendre les

mécanismes de production des savoir, qui nous intéressent en termes de *conditions reproductibles*. L'autre méthode intéresse plus spécialement les mathématiciens et consiste en une étude a priori des différentes manières de constituer des notions. L'explicitation des contraintes auxquelles on a obéi consciemment, ou non, peut, elle aussi, fournir des indications intéressantes. Nous allons conjuguer ces deux méthodes pour la recherche des questions auxquelles la construction des décimaux est une réponse adéquate.

Dans la mesure où ces réflexions ne servent qu'à la constitution du problème épistémologique qui sera mis en expérience et où nous ne cherchons pas à conclure directement sur la foi d'opinions didactiques conscientes ou non, nous pouvons les accepter tous les deux, concurremment et conjointement.

LA DÉTERMINATION DES CONCEPTIONS ET DES SITUATIONS.

Anticipant sur les résultats de l'étude théorique à venir dans la deuxième partie de cet article nous allons rapidement passer en revue les questions qui se posent et les choix qui peuvent s'ouvrir.

Pour construire les décimaux il suffit de considérer l'ensemble \mathbb{D}^+ engendré en adjoignant à \mathbb{N} un élément d tel que $10d = 1$ et de poser que l'ensemble obtenu est muni d'opérations qui prolongent celles de \mathbb{N} en gardant les mêmes propriétés fondamentales.

En considérant $\mathbb{N} \mid d \mid$ avec $10d = 1$ on obtient un codage prolongeant celui de \mathbb{N} , et tout élément $x \in \mathbb{D}$ s'écrit sous la forme $x = \sum a_i 10^i$ $i \in \mathbb{Z}$. Alors ayant conservé tout ce que l'on désirait, on peut montrer que \mathbb{D}^+ est totalement ordonné (contrairement à $\mathbb{N} \mid x \mid$) par la relation $a \leq a' \iff \exists a'' \in \mathbb{N} \mid d \mid$ tq $a' - a = a''$, dense et archimédien. Les seuls éléments de $\mathbb{N} \mid d \mid$ sont les multiples des diviseurs de d . Mais pour tout nombre décimal a il existe un décimal a' qui peut jouer le rôle d'inverse de a avec la précision ϵ quelconque voulue :

$$0 < 1 - aa' < \epsilon$$

On peut alors montrer que \mathbb{D}^+ est dense dans \mathbb{Q}^+ et que \mathbb{R}^+ est le complété de \mathbb{D}^+ .

Cette construction est celle qui décrit le mieux la construction directe que nous avons décrite comme étant typique en 1960. (Il faudra dire en quel sens).

Nous verrons qu'elle correspond assez bien, d'une certaine façon, au processus que l'on peut prêter au travail de Simon Stevin qui construisit les décimaux pour unifier la notion de nombres rationnels et radicaux en particulier, à la suite d'études sur les fonctions polynômes (Les multinômes).

Malgré cela, cette construction, comme d'ailleurs toutes celles que l'on a avancées à priori, fait disparaître les problèmes que la structure est chargée de résoudre.

Elle correspond certes à la meilleure récupération des connaissances antérieures des propriétés de \mathbb{N} , mais ne favorise pas une rupture qui permettrait de bien différencier \mathbb{D} de \mathbb{N} . Elle ne permet pas surtout de maîtriser la notion d'homothétie et de l'identifier avec les nombres déjà construits.

F. Colmez a montré dans une série d'expériences du type des nôtres qu'aujourd'hui les élèves confrontés à des problèmes d'invention des moyens de mesure, reconstruisent sans difficulté des décimaux-mesure selon un schéma qui n'est pas éloigné de celui que nous avons adopté.

DE L'ORDRE DISCRET A L'ORDRE DENSE.

Si on veut fonder \mathbb{D}^+ contre \mathbb{N} il faut donc une situation où l'on a besoin que chaque élément ait un inverse, et où on a besoin d'un ordre dense. Selon que l'on choisira certaines situations, certains ordres de grands \mathbb{Q}^+ ou seulement \mathbb{R}^+ , \mathbb{Q}^+ est une structure très incommode pour la mesure, pour les calculs pratiques de sommes et de différences, pour des comparaisons, donc pour la topologie de la droite. Peut-être est-il plus favorable de fabriquer \mathbb{D}^+ pour pallier aux insuffisances de \mathbb{Q}^+ plutôt que de \mathbb{N} ?

Il pourrait ainsi apparaître clairement que \mathbb{D}^+ est une approche d'une structure connue (et non pas « quelque chose »). Mais en fait pourquoi pas une non-approche des nombres algébriques ? Historiquement ce n'est pas \mathbb{Q} que \mathbb{D} est chargé d'approcher. R. Douady a longuement étudié une réalisation didactique dans cette voie (Voir article *infra*).

DE LA MESURE AUX HOMOTHETIES DE D .

Il est finalement relativement facile d'obtenir l'usage des décimaux-mesure, en tant que semi groupe additif à opérateurs naturels. Nous avons vu que la notion d'application linéaire de D dans D l'est moins, et surtout la désignation de ces applications linéaires à l'aide de nombres précédemment utilisés pour les mesures. Il y a là une opération qui correspond à l'identification d'un espace vectoriel avec son dual et qui appelle des situations et des processus appropriés. Comment concevoir cela à un niveau élémentaire ? Est-il possible dans ce rôle de faire l'économie de l'étude de \mathbb{Q} en tant qu'ensemble des opérateurs archimédiens ? C'est seulement dans (\mathbb{Q}^+) que le produit de deux rationnels prendrait tout son sens. L'approche de ces opérateurs à l'aide des opérateurs décimaux est-il un problème différent par le sens de celui posé au paragraphe précédent ?

DE LA STRUCTURE AUX REPRESENTATIONS.

Comment passer de cette terminologie mathématique à des conceptions d'élèves ? Est-il possible de constituer une représentation efficace et correcte de la notion de décimal, qui constitue un sens des algorithmes permettant leur usage ?

On peut imaginer — et l'histoire l'atteste — qu'il existe des représentations différentes pour les décimaux.

Par exemple : R_1 : 0,3 est « ce qui multiplié par 10 est égal à 3 »

R_2 : 0,3 est « 3 fois la dixième partie de 1 »

Pourrons-nous en choisir une autre, que la représentation dominante, et l'enseigner pour en observer les effets ?

Nous verrons que si on fait réellement fonctionner la pensée mathématique-créatrice des élèves, il faut aussi accepter que des conceptions transitoires éventuellement fausses se créent chez eux. Comment peut-on provoquer leur rejet ou leur abandon ?

DES CONCEPTIONS AUX SITUATIONS.

Comment élaborer des situations qui fassent réellement fonctionner une notion ? C'est-à-dire qu'on ne peut pas

répondre sans mettre en œuvre cette notion et sans lui donner un sens. De quels paramètres dépendent qualitativement les procédures qui attestent l'usage de cette notion ? Comment rendre une assimilation (au sens de Piaget) nécessaire, quand une accommodation (id) est-elle indispensable ?

Voici quelques unes des questions spécifiques qui se posent à propos de la didactique des décimaux et auxquelles nous essayerons d'apporter des éléments de réponses. A travers cette étude se posent d'autres questions plus générales comme par exemple celle de la reproductibilité en didactique, ou même de la possibilité de réaliser des expériences scientifiques. Nous essaierons de les aborder aussi.

Nous avons analysé en détail différentes manières d'enseigner les nombres décimaux utilisées en France pendant les vingt dernières années, notamment celles qui ont suivi la réforme des années 70. Nous avons montré que les résultats scolaires n'étaient guère affectés par les variations qui opposaient les différentes méthodes, et qu'ils présentaient toujours certaines faiblesses. Nous avons émis l'hypothèse que ce fait était dû aux déficiences des conceptions didactiques en usage et de leurs bases épistémologiques. Le manque d'études dans ce domaine — notamment en ce qui concerne l'analyse des situations d'enseignement, des processus d'apprentissage, de la tâche du maître — conduit les différentes pratiques à obéir à une même conception des décimaux.

Pour pouvoir être étudiées expérimentalement, les *problèmes d'enseignement* doivent finalement s'exprimer par des choix théoriques qui se traduisent eux-mêmes par des méthodes réalisables.

Il s'agit d'abord, dans cette deuxième partie, de montrer qu'il existe de véritables alternatives à la conception dominante de \mathbb{D} , et par là, de mettre en évidence certains de ces choix didactiques qui s'offrent à l'enseignant.

Nous présenterons donc une expérience conçue en relation avec une analyse mathématique, historique et épistémologique des différentes conceptions des nombres naturels et des nombres décimaux, en détaillant les principales caractéristiques des processus et des situations qui rendent les élèves capables d'acquiescer ces conceptions. Afin de contrôler cette approche théorique, le même processus a été reproduit huit fois avec les mêmes maîtres et cinq fois avec des maîtres différents. Nous avons tenté de mettre en évidence le rôle des variables de commande et la part des décisions didactiques dans l'évolution du processus qui ne se présente pas comme une méthode optimale du point de vue éducatif.

Cet essai d'« épistémologie expérimentale » permettra de chercher de nouveaux critères pour analyser les processus d'enseignement.

Ces critères seront signalés à l'occasion, et de courtes études des quelques questions de didactique, parmi les plus importantes, seront insérées dans le cours du récit. Car nous souhaitons aussi, à cette occasion, entamer un débat sur les rapports qu'entretiennent les problèmes d'enseignement avec les domaines scientifiques connexes déjà constitués, d'une part, et avec *les problèmes de didactique*, d'autre part. Nous insisterons sur la complémentarité des deux aspects — phénoménotechnique et scientifique — de la didactique.

2. Conception générale d'un processus d'enseignement des décimaux

2.1. *Conclusions de l'étude mathématique*

2.1.1. *Axiomatique et choix didactiques implicites*

Il existe bien des manières de définir mathématiquement ou de construire les décimaux. Elles diffèrent par le choix de ce que l'on considère connu comme objets mathématiques et comme méthode de démonstration, mais leur résultat est le même, en ce sens qu'il existe un moyen de montrer l'équivalence, l'isomorphisme des structures obtenues. Chacune de ces constructions axiomatiques est dans le champ des mathématiques; par contre, l'étude de ce qui fait leurs différences, les raisons des choix, de ce qui est admis ou non, de ce qui est important ou non, facile ou non... ne relève pas des mathématiques. Une construction axiomatique est chargée implicitement d'options épistémologiques, de présupposés didactiques qu'il faut se garder de croire nécessaires au même titre que les conclusions mathématiques, mais par lesquels il faut bien passer pour obtenir un discours qui permet de communiquer la notion. Deux méthodes diffèrent par le choix des axiomes et des règles de production des théorèmes.

2.1.2. *Transformations du discours mathématique*

Il existe aussi des procédés formels qui transforment un discours mathématique en un autre relevant de la même axiomatique. Ces procédés affectent plus ou moins profondément le discours :

— la logique permet le changement de l'ordre des énoncés, diverses présentations des implications, (condition néces-

saire ou condition suffisante mises en évidence) le regrou-
pement en énoncés généraux, l'éclatement en lemmes et
corollaires etc.

— la réthorique suggère ses figures de pensée, l'antithèse,
la comparaison, la répétition* jusqu'à l'hypotypose et
pourquoi pas la prosopopée** et nous ajouterons l'illustra-
tion, l'exemple, le commentaire etc.

— la grammaire et la stylistique permettent les reformula-
tions en langage plus simple, le remplacement des termes
par leur définition, le choix des synonymes etc. sans parler
des procédures de présentations chères à Cagné (1980).

Ces divers procédés appliqués de façon presque auto-
matique fournissent toujours un discours, un exposé que
l'on peut espérer plus simple, plus clair, plus redondant...
et donc plus intelligible, plus assimilable que le discours
mathématique initial. Ce point de vue alimente un certain
nombre de recherches qui, malgré tout leur intérêt, n'ont
pas réussi à montrer que ces procédés agissaient de façon
spécifique et différenciée selon les notions et sur les acqui-
sitions des élèves. Comme les méthodes pédagogiques dont
nous avons étudié les effets dans l'article précédent, ces
procédés ont en commun de ne pas remettre en cause, de ne
pas interroger la construction mathématique elle-même.

2.1.3. *Métamathématique et heuristique*

Il existe un langage spécialisé dans la description et la
comparaison de ces méthodes; il fonctionne dans le discours
des mathématiciens, dans leurs commentaires, dans leurs
cours et leurs confidences. À côté des termes authenti-
quement mathématiques parfois utilisés de façon métapho-
rique, des indispensables termes métamathématiques (qui
décrivent le langage mathématique) et de certains termes
paramathématiques, (considérés comme clairs bien que
n'étant pas définis) on trouve essentiellement des concepts
heuristiques : généralisation, synthèse, analyse, problèmes
tels que les présente Polya dans ses ouvrages, ce langage,
plutôt descriptif et classifiant chez certains de ses continua-

* Ici, le lecteur complaisant voudra bien insérer les 43 principales
figures dont il trouvera la liste par exemple au mot «figure» dans le
«dictionnaire alphabétique et analogique de la langue française»
de Robert.

** Cf. Lucienne Félix.

teurs, permet néanmoins de s'interroger sur les différentes constructions d'une notion à partir de ses motivations.

2.1.4. Extensions et restrictions

Prenons, par exemple, une construction directe des décimaux \mathbb{D} :

* Considérons, dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, la relation d'équivalence \sim $(a,n) \sim (b,p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p = b \cdot 10^n$, la classe de (a,n) étant notée $\frac{a}{10^n}$

* $\mathbb{D} = \mathbb{Z} \times \mathbb{N} / \sim$ est muni d'opérations stables par passage au quotient : $(a,n) + (b,p) = (a \cdot 10^p + b \cdot 10^n, n+p)$
 $(a,n) \times (b,p) = (a \cdot b, n+p)$

qui prolongent les opérations dans \mathbb{N} , identifié à $(\mathbb{N}, 0) \subset \mathbb{D}$

* \mathbb{D} est ordonné par $(a,n) \leq (b,p) \Leftrightarrow a \cdot 10^p \leq b \cdot 10^n$

* Alors $(\mathbb{D}, +, \times, \leq)$ est un anneau commutatif unitaire intègre et totalement ordonné.

Cette méthode est typique d'une catégorie de constructions qui consistent à prendre une structure connue, ici \mathbb{Z} et à en faire *une extension*, qui lui rajoute des éléments. Nous avons esquissé dans l'article précédent une construction de \mathbb{D}^+ par une extension de \mathbb{N} qui procédait par *l'adjonction* d'un seul élément et tel que $10d = 1$. Toutes les puissances de cet élément, leurs produits et leurs sommes avec un nombre fini des autres engendrent \mathbb{D}^+ . Bien que produisant le même résultat, cette méthode permet de mieux «voir» que l'on a ajouté le moins de choses possibles à \mathbb{N} , et ce que l'on a ajouté. Par contre, elle exige une prise de conscience de ce qui représente toutes les opérations possibles d'un élément avec les autres, c'est-à-dire le semi-anneau des polynômes à coefficients naturels $\mathbb{N}[x]$. Elle suppose connue une structure plus complexe.

Il existe une autre catégorie de constructions qui procède à l'inverse par restriction. On a déjà défini une structure générale, par exemple \mathbb{Q} , et l'on se restreint à ne prendre qu'une partie de ses éléments. *Exemple* : les décimaux sont les rationnels exprimables par une fraction décimale.

$$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{D} \text{ tq } (\exists p \text{ tq. } x \cdot 10^p \in \mathbb{Z})\}$$

Il existe bien d'autres méthodes fondées sur d'autres motivations mathématiques (problèmes d'ordre ou de topologie par exemple). Nous n'en rendons pas compte ici mais le lecteur pourra consulter Ermel (1981).

2.1.5. Motivations mathématiques

On peut aussi imaginer beaucoup d'autres extensions de \mathbb{N} . Pourquoi celle-là ? que permet-elle de résoudre que les autres ne permettraient pas ? Il est trop tôt pour chercher une situation précise qui rendrait nécessaire la création et l'usage des décimaux, mais c'est là qu'il faudra en venir. Certains problèmes ne peuvent trouver de solutions dans certains ensembles parce que ceux-ci ne sont pas assez riches : par exemple, on ne trouve pas dans \mathbb{N} de nombre tel que : (1) $a \times 3 = 2$, ou bien tel que $7 + a = 5$ (2).

Or, il peut arriver, dans certains domaines ou dans certaines applications que de telles équations aient, à l'évidence, toujours une solution : par exemple, on peut toujours partager une longueur en trois parties égales, même si elle mesure 2 m. Alors, on veut représenter par un nombre la longueur ainsi obtenue. Il faut donc construire une extension (ici de \mathbb{N}) dans laquelle ces équations sont toujours résolubles, \mathbb{Q} pour (1), \mathbb{Z} pour (2) ou tout autre structure qui les contiendrait.

On aurait pu construire \mathbb{R} , les réels, pour que toute suite de Cauchy y soit convergente ou \mathbb{C} , les complexes, pour que tout polynôme à une indéterminée non constante et à coefficients dans \mathbb{C} , y ait au moins une racine.

Et pourquoi une restriction ? Lors du plongement d'un ensemble A dans une extension B , tous les éléments de A ont toutes les propriétés communes aux éléments de B , mais l'inverse n'est pas vrai et les éléments de B peuvent avoir « perdu » des propriétés intéressantes. Par exemple, « n'est le successeur de 17 » a une solution dans \mathbb{N} et dans \mathbb{D} . Ainsi \mathbb{D} hérite des facilités de calcul que l'on trouve dans \mathbb{N} , mais \mathbb{Q} les a perdues, en particulier pour les différences, les comparaisons, le calcul sur les intervalles. Il arrive donc que l'on ait pu construire, par un moyen ou par un autre, un ensemble B satisfaisant pour y trouver la solution d'un problème, mais tel que les calculs ou les raisonnements y soient pénibles. On cherche alors un sous-ensemble, une

restriction A de B, tel que tout élément de B puisse être représenté, approché par un élément de A sur lequel les calculs seront plus faciles :

\mathbb{D} approche \mathbb{Q} ou \mathbb{R} parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie.

Des problèmes de ce genre se rencontrent très fréquemment en mathématique où l'on veut souvent étudier tous les objets engendrés par un système générateur ou au contraire chercher un système générateur commode pour un ensemble donné.

Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle — qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques.

2.1.6.

Cette remarque nous amène à observer que les méthodes heuristiques d'analyse ne prennent pas vraiment en charge les situations d'emploi ou de création des mathématiques. Elles ignorent, entre autre, le sujet, le groupe social et leur histoire.

2.2. *Conclusions de l'étude épistémologique.*

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. Cette étude ne pouvait pas prendre place dans ce chapitre. Nous allons seulement en extraire quelques conclusions.

2.2.1. *Différentes conceptions des décimaux.*

a) Le « décimal » de l'antiquité qui sert exclusivement au

restriction A de B, tel que tout élément de B puisse être représenté, approché par un élément de A sur lequel les calculs seront plus faciles :

\mathbb{D} approche \mathbb{Q} ou \mathbb{R} parce que, pour tout réel, quelle que soit la tolérance que l'on s'accorde, il existe toujours un décimal dont la distance à ce réel soit inférieure à la tolérance choisie.

Des problèmes de ce genre se rencontrent très fréquemment en mathématique où l'on veut souvent étudier tous les objets engendrés par un système générateur ou au contraire chercher un système générateur commode pour un ensemble donné.

Puisque le fait de plonger un ensemble dans une extension change ses « propriétés » et celles de ses éléments que l'on peut désormais utiliser, nous pouvons nous attendre à de grandes difficultés et à des résistances au changement d'emploi lorsque l'habitude jouera un rôle — qu'il s'agisse d'habitudes psychologiques ou culturelles. C'est un des principaux obstacles épistémologiques que l'on rencontre en mathématiques.

2.1.6.

Cette remarque nous amène à observer que les méthodes heuristiques d'analyse ne prennent pas vraiment en charge les situations d'emploi ou de création des mathématiques. Elles ignorent, entre autre, le sujet, le groupe social et leur histoire.

2.2. Conclusions de l'étude épistémologique.

Pour organiser une genèse expérimentale qui donne un sens convenable à la notion de décimal, il faut faire une étude épistémologique afin de mettre en évidence les formes sous lesquelles le décimal s'est manifesté et leur statut cognitif. Cette étude ne pouvait pas prendre place dans ce chapitre. Nous allons seulement en extraire quelques conclusions.

2.2.1. Différentes conceptions des décimaux.

a) Le « décimal » de l'antiquité qui sert exclusivement au

mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires hiérophyghiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles ont franchi divers obstacles... (passage à la forme $\frac{m}{1}$, m naturel quelconque ; puis à $\frac{m}{n}$, n strictement inférieur à m ; puis à $\frac{m}{n}$, n et m quelconques, etc.). Bien peu de ces propriétés sont reconnues, même si elles sont utilisées. Je dirai — en empruntant ce terme à Y. Chevallard (1981) — que le décimal est alors une *notion protomathématique* : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwazmi, (780-850), qui unit le calcul des naturels avec celui des rapports « géométriques » et qui introduit l'emploi de la numération de position décimale, permet l'émergence du décimal — outil mathématique d'approche, non plus des grands nombres, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec Stevin (1585) d'authentiques applications.

Le décimal devient alors une *notion parathématique* : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme un objet d'étude. (Abd el Jaouad, 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. L'écriture des fractions décimales dans l'œuvre d'Al Uqlidisi est identique à la nôtre

et pourtant le concept n'est pas repris par les contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Mais il n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition, les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1350 en produit une ébauche.)

c) C'est après Simon Stevin (1585) que le décimal accède au statut de *notion mathématique*. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et les multinomies — les fonctions polynômes — pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Le décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, la constitution de tables. Leur rôle conceptuel reste le plus caché. Pour Stevin, «les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres (réels) parce que toutes sont approchables par les nombres décimaux; il n'a pas écrit cette phrase, mais tout se passe comme s'il l'avait pensée.

Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissante et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert, 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait Stevin ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.2.2. Rapports dialectiques de ID et de \mathbb{Q}

L'analyse épistémologique fournit d'autres indications:

Les progrès de ID se sont nourris de ceux de \mathbb{Q} puis de \mathbb{R} en une dialectique difficile à résumer : il sera sans doute

indispensable de poser des problèmes qui appelleraient la construction d'une sur-structure telle que \mathbb{Q} ou \mathbb{R} , et peut-être de la construire effectivement pour donner à \mathbb{D} sa signification (Douady, 1980).
 Par exemple, il nous paraît difficile de concevoir que la notion de rapport puisse être directement approchée par les rapports décimaux.

2.2.3. Types d'objets réalisés

Les situations dans lesquelles \mathbb{D} ou \mathbb{Q} sont employés, diffèrent profondément par la nature des objets mathématiques qui réalisent ces structures et dont on s'occupe. A l'origine, \mathbb{Q}^+ et \mathbb{D}^+ étaient réalisés comme ensemble des images dans un système de mesure; ce qui était explicite, écrit, qui avait un statut, c'était le semi-groupe ordonné $(\mathbb{Q}^+, +, \leq)$ muni des opérateurs naturels. Les propriétés de corps de \mathbb{Q} étaient utilisées implicitement mais non reconnues.

La traduction des faits historiques en langage moderne nous fait commettre quelques abus mais nous gagnerons en concision. Ainsi, à côté des rapports naturels (multiples, sous-multiples), des Pythagoriciens utilisaient certains rapports privilégiés (épimères, épimores, émiolés...) mais ils ne les utilisaient qu'en géométrie et les calculs à leurs propos étaient pénibles; ils ne les assimilaient sûrement pas aux fractions. Un instant, Euclide a rejeté ces distinctions barbares, mais cette initiative est restée presque sans lendemain et même Archimède n'a pas vraiment connu les fractions que nous appelons « Archimédiennes ». La construction de $\mathbb{L}(\mathbb{Q}^+)$ en tant qu'ensemble de rapports ou d'opérateurs, munis des opérations de groupe, et son identification avec \mathbb{Q}^+ va prendre plus de mille ans (de -400 à +850). A la fin de cette période, les rapports fonctionnent implicitement comme des applications mais il faudra encore six cents ans au moins (1585) avant que \mathbb{Q}^+ ne devienne explicitement un ensemble de fonctions traitées comme des nombres.

2.2.4. Différents sens du produit de 2 rationnels

Ainsi, par exemple, l'opération de multiplication de deux fractions peut recevoir des interprétations différentes

dont beaucoup sont apparues à des époques parfois éloignées et que nous présentons dans le tableau 1.

Ce tableau est à rapprocher du canevas que nous donnons au paragraphe 2.4. et de l'étude des niveaux de connaissance sur la composition de deux applications linéaires rationnelles au paragraphe 3.1.5.

On peut donc s'attendre à ce que les conceptions correspondantes, que l'on a la possibilité de confondre aujourd'hui dans les calculs, se présentent en fait dans des situations différentes et par conséquent qu'elles ne soient pas d'emblée conçues de la même façon et au même âge*.

2.2.5. Nécessité de l'étude d'épistémologie expérimentale

Mais il est peu probable que toutes les distinctions, tous les obstacles, toutes les situations particulières continuent à subsister. Par exemple, prendre le dixième — décimer — consistait, dans l'antiquité, à ranger les éléments puis à compter 1,2,3,... et à retenir le dixième. Ainsi ne pouvait-il y avoir qu'un dixième, pas 2! Il est donc nécessaire de se livrer à une étude d'épistémologie génétique et expérimentale par le moyen d'enquêtes et d'expériences comparables à celles que nous allons rapporter.

Il y a un équilibre à trouver entre un enseignement «historique» qui restaurerait une forêt de distinctions et des points de vue périmés dans laquelle se perdrait l'enfant, et un enseignement direct de ce que l'on sait aujourd'hui être une structure unique et générale, sans se soucier d'unifier les conceptions de l'enfant, nécessairement et naturellement différentes. La recherche des conditions d'un tel équilibre est un des grands problèmes qui se pose actuellement à la didactique. C'est une des ambitions de cet article de faire avancer la réflexion dans cette direction.

2.2.6. Obstacles culturels

Il faut ajouter que la didactique des décimaux a une longue histoire. Depuis Stevin, qui l'envisageait avec une certaine ingénuité et des principes bien arrêtés, jusqu'à la décision, pour les Etats Unis, d'adopter le système métrique,

* Nous reviendrons plus loin sur cette question précise aux paragraphes 3.1.4. et 5.3.5. Voir aussi Vergnaud (1976).

Tableau I

Opérateur naturel X	$n \times U ; n \times L ; n \times M \times M$ X a le sens de $n \times L = L + L + \dots + L$						
Naturels opérant sur des fractions mesure	$n \times \frac{a}{U} = \frac{a}{U} + \frac{a}{U} + \dots + \frac{a}{U}$ $n \times \frac{a}{U} = \frac{n \times a}{U}$; ou $n \times \frac{a}{U} = \frac{a}{U} \times n$ naturel pas nécessairement quelconque. n scalaire opérant sur des fractions.						
X	$\frac{a}{n} \times U = n \times \frac{a}{U}$						
Rapport de naturels invariant dans une transformation implicite	$\frac{a}{b} = \frac{M}{L}$ $\frac{a}{b} * U = \frac{M}{L} * U$ [$\frac{a}{b}$ mesure de L avec l'unité M] deux expr. par des nombres $\frac{a}{b}$ rapport de la mesure de L à celle de M quelle que soit L forme proportionnelle de (n L ; m L et L).						
Applications linéaires rationnelles	$\frac{a}{b} \times L = \frac{b}{a} (L)$ [désigne l'image de L par application linéaire $\frac{b}{a}$] $(\frac{a}{b} \times \frac{m}{n})(U) = \frac{b}{a} (L) = \frac{b}{a} (\frac{m}{n} U)$ L = n L alors $(\frac{b}{a} \times n)$ est le nombre que mesure L, extension de l'application $\frac{b}{a}$ aux fractions mesure						
Opérateurs rationnels	$(\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p})(L) = \frac{m}{n} (\frac{q}{p} L)$ $\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$						
Rationnel	$\frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p}$ (m et p rationnels « abstraits ») après identification						

et donc un système décimal de mesure, en passant par sa première apparition dans l'enseignement populaire en France après 1792, cette didactique a changé, non seulement de forme mais aussi, corrélativement, d'inspiration et même de signification politique. Ces significations politiques et culturelles pèsent toujours sur son enseignement et se constituent parfois en véritables obstacles (Brousseau, 1976).

2.3. Conclusions de l'étude didactique

L'analyse épistémologique fournit en outre un grand nombre des variantes de conditions, de méthodes, de sens. La difficulté consiste à regrouper ces variantes et à en hiérarchiser les caractères en fonction de leur importance *présumée* pour la reproduction et le contrôle des situations pouvant provoquer l'apparition du savoir.

2.3.1. Principes

Nous allons laisser cette question ouverte, et selon notre projet, montrer comment produire un processus. Les genèses artificielles que nous envisageons de construire devront faire fonctionner la notion de décimal de façon à simuler les différents aspects actuels du concept. Il ne s'agit pas de reproduire le processus historique mais de produire des effets similaires par d'autres moyens. La phénoménoteknique épistémologique consiste à faire, sur *certain*s points, des choix très différents de ceux que suggérerait l'histoire, et de restaurer, par l'exercice des règles et des principes que l'on a pu découvrir, un processus néanmoins équivalent.

L'expérience épistémologique porte sur les effets et les corrections que ces modifications produisent sur l'ensemble du système.

Mais cette expérience se glisse dans une activité d'enseignement. Elle doit être compatible avec elle, se plier à ses exigences et subir d'inévitables transpositions didactiques.

Nous allons donc placer désormais notre réflexion dans ce cadre didactique.

2.3.2. Objectifs de l'enseignement des décimaux

a) Examinons les objectifs classiques de l'enseignement

des décimaux. Il s'agit de rendre les élèves capables de résoudre les problèmes classiques et pratiques, mettant en œuvre les opérations et l'ordre des décimaux, ce qui implique l'emploi de mesures décimales (et sexagésimales), une maîtrise convenable des situations comprenant des applications linéaires décimales (et rationnelles) : échelles, changement d'unités, pourcentages, placements de fonds, vitesse, volumes, surfaces, densités...

Dans la plupart de ces problèmes, les enfants sont invités à présenter ou à désigner leur résultat dans les termes de la situation proposée. Par exemple, « le prix de vente en francs du transistor est... ? » Puis à exprimer ce résultat dans \mathbb{Q}^+ par une formule (par exemple $\frac{280}{4} \times \frac{3}{4}$) puis à reproduire un décimal raisonnablement proche de ce résultat. Le calcul consiste essentiellement à passer de \mathbb{Q}^+ à \mathbb{D}^+ . Aucune explication n'est écrite; la justification consiste dans la décomposition du calcul final en une suite de calculs intermédiaires « simples », c'est-à-dire appartenant au repertoire reconnu des occasions d'utiliser cette opération.

b) Le curriculum s'adresse à des élèves d'au moins 9-10 ans et d'au plus 12-13 ans qui peuvent avoir appris les opérations sur les décimaux en référence avec l'usage du système métrique. Il vise fondamentalement les mêmes objectifs. Ceci implique la possibilité de faire tous les calculs usuels avec les décimaux (et avec les fractions). Mais il devra favoriser la reprise théorique qui conduira les élèves vers 13-14 ans à réorganiser de façon définitive la notion de décimal et à l'utiliser sous sa forme mathématique actuelle (exemple : $1,394 \cdot 10^{-4}$), en particulier celle qui est utilisée sur les machines à calculer.

2.3.3. Conséquences : Types de situations

Si l'on veut obtenir que les élèves aient la possibilité, non seulement d'appliquer des méthodes et de produire des solutions, mais aussi d'en comprendre et d'en discuter le bien-fondé, il faut rendre possible cette attitude réflexive, en leur donnant l'usage d'un vocabulaire, même simplifié, et d'une théorie, même non satisfaisante, des applications linéaires et de leurs propriétés.

a) Notre étude épistémologique permet de comprendre que, pour qu'une théorie puisse être institutionnalisée, il

est nécessaire qu'au préalable, elle ait fonctionné comme telle dans des débats scientifiques et dans des discussions entre élèves, comme moyen d'établir des preuves ou d'en rejeter. Ce processus correspond à la troisième étape de notre analyse, celle où la notion est maniée comme notion mathématique. Nous appelons situations de «*validation*» et «*d'institutionnalisation*» les situations didactiques qui permettent de simuler ce processus.

b) Mais pour que ces théories aient un sens pour celui qui les utilise, il «*faut*» qu'elles aient préalablement fonctionné comme solution à un problème posé à chaque élève dans des conditions qui lui permettent, soit de trouver lui-même cette solution, ou plus exactement de la construire (éventuellement progressivement), soit de l'emprunter toute faite, de lui-même, entre plusieurs qu'il pouvait envisager sans qu'une intention didactique ou une pression culturelle l'y contraigne en se substituant à son jugement. Nous disons alors que la théorie fonctionne comme un modèle implicite et nous appelons *situations «d'action»* les situations didactiques qui permettent l'apparition de cette théorie dont le statut est alors dans la classe celui d'une notion protomathématique.

c) Pour que le vocabulaire soit acquis, et que les termes aient du sens, il «*faut*» qu'ils servent suffisamment à exprimer et à communiquer des informations dans des situations qui en justifient l'emploi et le contrôlent. De telles *situations dites de «formulation»* permettent l'acquisition des modèles explicites et de langages qui, dans le cas où ils ne sont pas encore des notions mathématiques, se voient ainsi conféré un statut de notions paramathématiques (l'ostension et l'usage y tiennent lieu de définition).

2.3.4. Nouveaux objectifs

Les objectifs comprendront donc des connaissances, des savoir-faire, un vocabulaire et des acquisitions théoriques. Ces objectifs ne peuvent être indépendants; un certain équilibre s'établit entre eux dès lors qu'on veut respecter leurs fonctions réciproques dans une genèse authentique. D'ailleurs, un savoir théorique, non justifié, serait perdu et n'aurait pas de sens et une pratique excessive sans débats, conduirait à des apprentissages par condi-

tionnement et prématurés qui feraient obstacle aux étapes ultérieures.

Ainsi, dans la phase finale, l'élève devra calculer dans le demi-corps \mathbb{Q}^+ et en particulier dans le demi-groupe $(\mathbb{Q}^+ - \{0\}, \times)$. Les domaines d'application choisis conduisent à envisager tous les types de réalisations que nous avons évoqués au paragraphe précédent.

On pourrait estimer que le fait que les élèves peuvent s'expliquer le produit de deux décimaux se présentant tous les deux sous la forme d'opérateurs ou d'applications linéaires est un bon test de l'acquisition de la structure visée (Rouchier 1980).

Exemples: 1. Quelle est la distance parcourue en 4,25 tours par un disque de 0,38 m de périmètre ? (1 opérateur, 1 longueur).
4,25 \times 0,38 égal à 4 fois 0,38 plus 2 dixièmes de fois 0,38 plus $\frac{1}{5}$ de fois 0,38

$$\text{C'est aussi } \frac{425}{100} \times 0,38$$

2. On estime que la répartition normale d'un budget logement est la suivante :
loyer : 0,68
charges : 0,18
chauffage : 0,14
La part de revenu qu'une personne a prévue de consacrer à son logement est 0,23. Quelle est la part de ce revenu que cette personne consacre au chauffage ? (2 opérateurs).

Mais cette hypothèse reste à vérifier expérimentalement. Il faudrait que la réussite à ces exercices domine hiérarchiquement toutes les autres, c'est-à-dire les implications des recherches sur les rapports entre ces organigrammes d'objets, les hiérarchies de connaissances et les implications d'acquisitions retiennent l'attention de nombreux chercheurs depuis une quinzaine d'années (Gras, 1980).
Malgré le grand intérêt de ces travaux, on n'a pas encore pu en tirer des conclusions décisives.

2.3.5. Options

Nous avons finalement retenu les options principales suivantes sur lesquelles nous reviendrons plus tard :

- a) L'acquisition des décimaux-mesure suivra un processus distinct de celui visant les décimaux-application. Ils se succéderont dans cet ordre.
- b) Dans les deux cas, les décimaux seront présentés

comme des rationnels, simple réécriture des fractions décimales. Les rationnels seront donc construits les premiers dans les deux étapes. Cela n'est pas très original pour les opérateurs. Par contre, pour les mesures, cela va à l'encontre des habitudes culturelles les mieux établies.

c) Les fractions décimales-mesures seront choisies par les élèves pour approcher les rationnels à cause des facilités de calcul qu'elles présentent.

Les problèmes topologiques exigent justement de nombreuses comparaisons et des calculs d'intervalles. Ils mettront de plus, en évidence, les propriétés de l'ordre naturel de \mathbb{Q} et de \mathbb{D} qui s'opposent à celles de \mathbb{N} .

d) Cette approche topologique ne sera pas reproduite dans l'étude des applications linéaires rationnelles. Il s'agit bien d'une option : nous avons montré dans une autre partie de la recherche* que nous ne rapportons pas ici qu'une telle approche est possible.

e) Nous tenterons de faire acquérir, ou fonctionner, s'ils sont acquis, les modèles implicites avant d'en provoquer la formulation ou l'analyse. Nous admettons que les enfants possèdent un modèle implicite de la proportionnalité dans \mathbb{N} .

f) Les sommes et les différences d'applications rationnelles bien que rencontrées, ne seront pas théorisées ni institutionnalisées.

g) Nous expliciterons les autres options au cours de l'exposé des situations.

2.4. *Le canevas du processus*

2.4.1.

Ce canevas est formulé en termes mathématiques visiblement exclus du vocabulaire des élèves et organisé comme un exposé où les définitions et les théorèmes se succèdent

* Il s'agissait d'approcher à l'aide d'une fonction linéaire qui représentait la probabilité — en tant que moyen de prévoir une fréquence théorique — une application statistique attribuant des effectifs observés correspondant à des nombres de tirages. L'approche des statistiques par ces applications «probabilité» est traitée par des méthodes similaires en 33 séances. Les élèves suivent une démarche expérimentale et de redécouverte. Cf. «L'enseignement des probabilités à l'école élémentaire» IREM de Bordeaux - 1974.

de façon classique. Cela pourrait faire croire que tout exposé du même genre, c'est-à-dire articulé comme un discours de mathématique, pourrait constituer un canevas. Il n'en est rien. Il représente en fait une suite de questions et de problèmes qui tendent à constituer une genèse : la question de rang n naît des problèmes rencontrés avec les solutions trouvées à la question de rang $n - 1$, ou des conséquences et développements de ces solutions. Un tel canevas ne peut pas être obtenu automatiquement comme séquence de l'analyse mathématique et épistémologique. Il faut s'assurer constamment de la capacité de la conception générale à permettre l'invention, l'organisation et le déroulement des situations locales.

Cet aller et retour, cette dialectique entre la conception du processus et celle des situations est inévitable à cause de la nature même de la didactique.

L'articulation à partir de la connaissance seule ne suffit pas à déterminer le sens donné aux acquisitions par les situations spécifiques choisies.

Il est classique d'analyser les curricula à rebours pour mettre en évidence les implications entre les objectifs terminaux et les objectifs subordonnés. Le lecteur ne sera pas surpris que nous l'ayons utilisé dans ce texte. Malgré nos mises en doute répétées de la possibilité de déterminer les acquisitions indépendamment des situations qui les produisent, nous allons utiliser le même procédé dans la représentation des activités, au chapitre suivant. Ce procédé augmentera peut-être les difficultés du lecteur à comprendre quelles sont réellement les connaissances des élèves qui sont disponibles au moment de la leçon, mais nous espérons ainsi le conduire à prendre mieux conscience, à la fois de la nécessité de préciser les conditions du déroulement des situations et du rôle de l'histoire du sujet dans ses acquisitions. Si notre tentative est un échec, nous conseillons au lecteur de lire les paragraphes dans l'ordre chronologique.

2.4.2. *La phase II : Du mesurage aux homothéties de D^+*

a) Suivant ces options dans la phase finale, nous prévoyons une *identification* institutionnalisée, c'est-à-dire raisonnée et convenue de (\mathbb{Q}^+, \times) (mesure) et $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+, 0)$

impliquant en particulier l'utilisation systématique des applications inverses dans le calcul du rapport de deux décimaux (Phase II . 7 : 2 séances).

b) Il aura fallu pour cela être capable de manier *la composition* et *la décomposition* des applications rationnelles en effaçant le rôle des couples objet-image pour pouvoir fournir diverses décompositions d'une même application. Nous avons retenu d'exposer les situations d'introduction de cette phase (II . 6 (3 séances) : «composition de 2 applications linéaires» où les élèves utilisent un pantographe. Cette étude ne peut se dérouler elle-même convenablement si les fractions et les décimaux n'ont pas été identifiés comme ensemble d'applications *opérant* sur les fractions et les décimaux-mesure.

c) Au cours de la phase II . 5 (2 séances) : les enfants cherchent à donner un sens au produit de 2 fractions ou de deux décimaux. Ils y parviennent en interprétant l'un comme application linéaire opérant sur l'autre. A cette occasion, les élèves récupèrent le vocabulaire traditionnel décrivant le «produit» d'un rationnel par un rationnel opérateur (par exemple prendre une fraction d'un nombre, un pourcentage, etc.) et ils formalisent et institutionnalisent le calcul des images par les éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^+)$ qu'ils pratiquaient déjà dans la phase précédente mais avec des méthodes très diverses, non fixées, voire par tâtonnements. Les rapports entre multiplier, diviser, agrandir, rapetisser font l'objet d'un débat.

L'introduction de ces applications linéaires va occuper les 3 phases précédentes qu'il vaut mieux exposer dans leur ordre naturel.

d) La phase II. 1 (2 séances) consiste à demander aux élèves «d'agrandir» un puzzle, morceau par morceau, sans préciser autrement ce que veut dire «agrandir» et de façon à ce que tel côté qui mesurait 4 cm en mesure 7. Nous exposerons cette situation de façon détaillée (Par. 3.2.). Les élèves s'acharnent à essayer divers moyens de calculer les longueurs-images mais seul, celui qui (implicitement) fait correspondre la somme des images à l'image de la somme permet un remontage satisfaisant du puzzle. Ce que les enfants construisent «empiriquement», est un ensemble de quelques couples et n'a pas de nom. «L'application

linéaire $\frac{7}{7}$ » s'inscrit seulement dans les schémas d'action du sujet.

Déjà, pourtant il faut trouver l'image de longueurs décimales et fractionnaires.

e) La phase II. 2 (1 séance) reproduit une situation presque identique à la précédente. L'agrandissement d'une mosaïque régulière repose les mêmes problèmes; les côtés ont des longueurs décimales. Dans les débats, l'image 1 émerge comme moyen d'établir les autres images ainsi que la division d'un décimal par 10^n , $n \in \mathbb{N}$.

f) La phase II.3 (2 séances) commence par une situation identique. On considère un dessin de bateau et 6 photographies de ce dessin obtenues avec des agrandissements différents. Chaque élève cherche à prévoir de sa place les longueurs de tous les segments reproduits sur une des photos. Ils peuvent aller vérifier le résultat de leurs prévisions et éventuellement les reprendre (Il y a des «agrandissements» et des «rapetissements»). Puis de nouvelles photographies apparaissent et il s'agit de trouver le moyen de désigner et de ranger les photos pour gagner dans un jeu de communication (assez semblable à celui que nous exposerons au paragraphe 4.1. dans la leçon «épaisseur d'une feuille de papier»). C'est naturellement l'image de 1 qui sert à désigner les photos et à les ordonner. Ainsi, les élèves ont été conduits à identifier, à désigner des applications linéaires à l'aide des nombres décimaux. Mais ces nombres restent attachés à une des photos, à un ensemble de valeurs. Le jeu reprend mais le modèle est changé à chaque fois. Le calcul d'images devient familier, le vocabulaire et les discussions portent sur les agrandissements et les rapetissements (ce qui implique le débat ultérieur que nous avons signalé plus haut). En conclusion, les élèves déclarent savoir désigner les applications linéaires (de \mathbb{Q}^+ dans \mathbb{Q}^+ et de \mathbb{D}^+ dans \mathbb{D}^+).

g) Il est temps de proposer quelques situations où des applications non linéaires viennent se glisser comme solutions «obligées»? aux applications linéaires (phase II.4., 2 séances).

A cette occasion, les élèves prennent connaissance des pratiques et des langages dans le domaine des «échelles» et dans celui du commerce (taxes, remises en pourcentage, etc.)

2.4.3. La phase I : Des mesures rationnelles aux mesures décimales

Dans La phase II, au lieu de définir directement les opérateurs rationnels comme composés d'opérateurs naturels (qui ne sont pas alors des applications), méthode dont nous avons signalé les difficultés et les contradictions, nous avons admis l'existence de \mathbb{Q}^+ et de \mathbb{D}^+ en tant qu'ensembles d'arrivée des mesures. L'objet de la phase I est donc de construire un tel ensemble : les enfants créent et expérimentent des nombres nouveaux pour mesurer diverses grandeurs.

a) La phase I.1. permet aux élèves d'inventer d'abord les «rationnels» (act. 1 séance) par une méthode de passage au quotient sur l'ensemble des couples de rationnels (activité 1, 4 séances). Nous analyserons longuement cette première activité : «mesure de l'épaisseur d'une feuille de papier» pour bien montrer l'évolution du statut de ces rationnels. (Paragraphe 4.).

b) Ils apparaissent comme solution à une situation favorable, sans statut cognitif. Cette solution pose des problèmes d'identification car elle peut prendre bien des formes équivalentes. Les élèves sont donc conduits à un débat : «ces objets nouveaux sont-ils des nombres ?» c'est le moteur de l'activité 2 (5 séances) qui amène les enfants à les identifier, à les additionner, les soustraire, les multiplier et les diviser par un naturel, les comparer et les ranger.

Les fractions sont alors reconnues comme des nombres nouveaux englobant les nombres déjà connus, mais dont certaines propriétés sont différentes.

c) Dans la phase I.3., pour mesurer d'autres grandeurs, capacités, poids, longueurs, les élèves utilisent ces mêmes nombres et passent de la conception d'une définition des fractions par *commensuration* à une *définition constructive* (cette phase sera commentée au paragraphe V, elle n'est pas essentielle dans le processus).

d) La phase I.4 « \mathbb{D} moyen d'étude de \mathbb{Q} » comprend 7 séances. Les propriétés nouvelles qui sont recherchées dans les rationnels pour fabriquer des mesures sont surtout des propriétés topologiques : on veut, entre deux nombres rationnels, pouvoir en placer toujours un nouveau et on veut pouvoir mesurer tous les intervalles obtenus. Grâce à un jeu convenable de bataille navale où ils lanceront des filets de plus en plus fins (des filtres) pour cerner des « poissons » ra-

tionnels, les enfants vont donc explorer la structure topologique de \mathbb{Q}_+ (cette activité sera présentée elle aussi au paragraphe 3.3.). Mais il se trouve que parmi toutes les opérations que l'on peut faire avec les rationnels sous leur forme fractionnaire, les plus longues, les moins faciles, sont justement les comparaisons et les sommes ou les différences. De telle sorte que, pour des raisons d'efficacité, les enfants vont très vite choisir d'eux-mêmes, parmi les fractions rationnelles, certaines — les décimales — qui permettent à la fois des calculs rapides et une représentation commode — une approche — des mesures rationnelles.

e) Phase I.5. Construction et étude de \mathbb{D} . (6 séances). Ces fractions décimales se prêtent à une écriture simplifiée qui permet d'étendre les règles du calcul (addition, soustraction, multiplication par un scalaire) de \mathbb{N} à \mathbb{D} au prix de modifications mineures (activité 6).

f) Phase I.6 (4 séances). Densité de \mathbb{D} dans \mathbb{Q} — Division — Approche d'un rationnel par un décimal. Evidemment, tous les rationnels ne sont pas décimaux, mais on peut approcher n'importe lequel d'entre eux d'aussi près que l'on veut avec des décimaux.

Cette approche, organisée, standardisée et institutionnalisée va permettre de convertir en décimal le résultat d'une division d'un rationnel par un naturel et donnera implicitement la méthode de la division des décimaux par des entiers.

g) Dans cette partie I, les nombres sont maniés par les enfants comme des mesures. La construction comporte donc des limitations de sens qu'il faudra respecter (cf. paragraphe 3.3.).

Les seuls opérateurs utilisables sont les naturels, on saura multiplier ou diviser par 2,3... mais pas par $2/7$ ni 2,5. (cet apprentissage sera l'objet de la 2ème partie). Et ces opérateurs ne sont pas introduits comme des objets mathématiques. Ils fonctionnent comme un modèle implicite de linéarité emprunté à \mathbb{N} . Ils serviront au plus à exprimer les rapports scalaires naturels que l'on utilisera au cours des calculs.

La méthode a été conçue de telle sorte que le fait pour les élèves d'avoir déjà appris à utiliser les décimaux pour les mesurages, et à faire les opérations ou non, ne modifie

pas sensiblement le processus. Cela ne veut pas dire qu'il faudra faire semblant d'ignorer ce qu'on sait déjà, ni qu'on va reprendre une connaissance acquise en rejetant son sens ancien et y substituant un sens «nouveau».

3. Analyse du processus et de sa réalisation

3.1. Le pantographe

3.1.1. Introduction des pantographes : La réalisation de la phase 2.6.

Le pantographe est un parallélogramme articulé utilisé sur les planches à dessiner pour produire des figures homothétiques d'une figure donnée. Les appareils utilisés dans cette activité sont des jouets de plastique beaucoup moins précis que les appareils professionnels — et c'est précisément cette particularité qui sera utilisée. Ils sont susceptibles selon le réglage, de produire quelques homothéties décimales bien précises : 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 4 ; et leurs inverses (un autre modèle peut produire $1 \frac{1}{2}$; 2 ; $2 \frac{1}{4}$; $2 \frac{1}{2}$; $2 \frac{3}{4}$; 3 ; $3 \frac{1}{2}$; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 10).

Dans la séance d'introduction, les élèves apprennent du maître, banalement, comment se servir de l'appareil : la ventouse ne doit pas bouger, ni le papier, la pointe suit le modèle, le crayon dessine l'image... Ils s'essayent à agrandir et à rapetisser des dessins personnels puis mettent en commun leurs observations et leurs hypothèses :

- On peut «agrandir» ou «rapetisser» en échangeant la pointe et le crayon
- L'image ne change pas de forme quelle que soit la manière dont on dispose le pantographe
- L'agrandissement varie suivant les pantographes ou suivant le choix des trous de montage
- Si le pantographe ne forme pas un parallélogramme, la transformation est déformée.
- A certaines longueurs, le pantographe fait correspondre d'autres ; à la somme des longueurs, il fait correspondre la somme des images.
- Le pantographe effectue des agrandissements bien connus, les élèves reconnaissent les noms des agrandissements sur les trous... etc.

3.1. I. : Exemples de situations didactiques différentes fondées sur ce schéma de situation

a) *L'exposé banal basé sur l'ostension* : le maître montre l'appareil, montre ses effets magiques, enseigne le mode d'emploi, présente les différents calculs possibles : calcul d'image, de modèle et d'agrandissement et fait reproduire des exercices.

b) *La méthode heuristique (de redécouverte)*, voisine de celle que nous venons d'évoquer ci-dessus. Elle donne des résultats collectifs assez rapides et est convenable si les élèves ont l'habitude de la recherche individuelle et des débats, mais sans aucun projet autre que de «dire des choses intéressantes», une telle méthode tourne souvent court.

c) Une méthode active et mainteintive : chaque élève a son pantographe ; une suite de questions lui sont posées pour lui faire énoncer successivement les différentes propriétés ou corriger les erreurs qu'il a commises.

d) Un processus plus élaboré comprenant plusieurs phases :

- une phase d'action : le maître annonce aux élèves que dans un moment il choisira une longueur entre 1 et 15 cm : chaque élève (ou groupe de 2) devra prévoir la longueur correspondante transformée par son pantographe. Cette prévision fera l'objet d'un pari, puis d'une épreuve : on vérifiera avec l'appareil si la valeur annoncée est exacte. En attendant ce moment, les élèves peuvent s'entraîner à prévoir : ils cherchent les images de quelques nombres et vérifient. Ils peuvent venir parler dès qu'ils pensent avoir découvert la loi et s'en sentent assez sûrs.

— Une phase de validation : les résultats concrets sont assez imprécis et présentent des écarts parfois troublants avec le modèle ; d'autre part, il est facile de monter un pantographe faux. Le jeu oppose donc plusieurs groupes : il s'agit, pour chacun, de deviner si les pantographes des autres — et qui sont cachés — font ou non des agrandissements corrects — et lesquels. Pour cela, chaque groupe demande à un autre de lui montrer des images de différents segments ou figures (qu'il choisit) données par son appareil. Lorsqu'un groupe croit avoir deviné l'agrandissement donné par ce pantographe caché, il annonce sa conclusion. Si cette conclusion paraît fautive à un des autres groupes (qui n'ont pas plus ce pantographe) celui-ci prend position contre cette conclusion. Alors s'engage un débat où il faut prouver aux autres élèves que les assertions de l'adversaire sont fausses et que les siennes sont vraies, en ne recourant que le plus tard possible à la preuve contingente. (Cette preuve consiste à montrer le pantographe caché et ce qu'il produit). Une règle de prise de parole et un système de points laissent à chaque groupe le choix entre des décisions qui consistent à accepter ou à refuser les preuves produites par l'adversaire ou à demander de nouvelles informations (de nouvelles images) (Brousseau, 1979). Certains élèves obtiennent ainsi la conviction que, si le pantographe donne le même agrandissement d'un segment quelconque dans toutes les positions, l'application doit être (est nécessairement) linéaire car alors l'image de la somme est la somme des images.

3.1.II. Place de cette situation dans le processus.

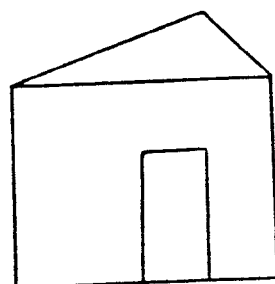
Avec peu de modifications, cette situation du pantographe pourrait être prise comme situation initiale dans l'étude des applications linéaires. Mais alors les hypothèses que font les élèves pour interpréter les agrandissements du puzzle (cf. par. 3.2.) avec de simples translations $(x \rightarrow x + a)$ seraient envisagées moins sérieusement. Elles seraient rejetées presque sans examen, puisque l'appareil fournirait la bonne image. Au lieu de construire le modèle et de prévoir le résultat satisfaisant, les conditions voulues, il suffirait de le découvrir comme une loi de la nature. Or, le modèle additif est un obstacle résistant à la mise en place du modèle multiplicatif et doit pouvoir lui être oppo-

sé dans des situations ouvertes, ce choix devant se faire sur des critères rationnels et intellectuels.

3.1.2. Compositions d'applications (2 séances)

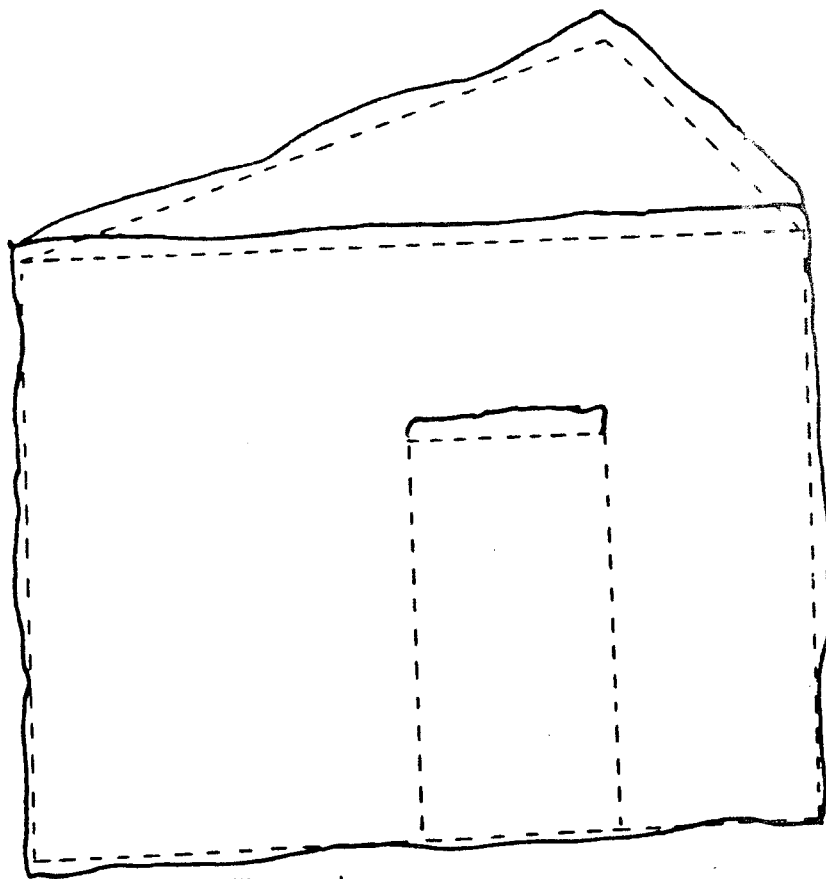
- D'abord les élèves, par groupe de 2, doivent construire l'image d'une figure simple, que l'on obtient par deux agrandissements successifs (par exemple $\times 2,5$ suivi de $\times 1,5$). L'image la plus «jolie» et «correcte» l'emportera après vérification. La consigne est donnée de telle façon, qu'il est clair, que la manière d'obtenir cette image n'importe pas, c'est seulement le résultat qui compte.

En fait, la manipulation réelle produit un agrandissement tellement erroné qu'il est nécessaire de retracer les segments à la règle et les mesurer, en calculant leur longueur (Fig. 1).



le modèle

figure 1 : image obtenue avec un pantographe



l'image obtenue —
l'image homothétique - - - (X3)

Alors la pointe et le crayon étant guidés tous les deux convenablement, on peut « prouver » que l'agrandissement est correct. Les élèves doivent donc être convaincus (implicitement) que la composition de deux applications linéaires conserve les formes.

3.1.III : Rapports théorie mathématique/pratique.

Les 2 dernières situations-problèmes du paragraphe 3.1.I. sont un exemple correct des fonctions que doivent remplir d'abord une théorie, (une structure ou une connaissance mathématique) par rapport à une manipulation : cette théorie doit fournir un modèle qui permet la prévision, de manière plus simple, plus économique, plus précise, que la pratique, et non une complication inutile. Et c'est parce qu'on veut prévoir qu'il faut exiger des mathématiques qu'elles soient non contradictoires. Elle reçoit de cette pratique un certain type de preuve et de justification et à son tour, elle sert de preuve (intellectuelle) à la pratique.

- La 2ème séance consiste à proposer aux élèves de prévoir les segments de nombreux segments formant une image (au sens commun) obtenue ainsi par une composition d'homothétie. Ils possèdent les dimensions du modèle et à leur demande — soit les longueurs des segments correspondants dans chacun des agrandissements — soit les décimaux désignant les applications linéaires (en fait l'image de 1)

Exemple :

1er dessin				
		4		
	× 3		12	
2ème dessin				
			× 1,5	
3ème dessin				5,25

il faut calculer pour le troisième dessin les images des longueurs 2,5 ; 6 ; 2 ; 5,1 ; 14,6 ; 2,25 sur le premier. Dans le calcul de cette image ils emploient diverses procédures :

P0) La plus longue, par linéarité et en calculant les intermédiaires, est la trace des premières découvertes : de moins en moins d'élèves s'accrochent à la définition initiale qui conduit aux calculs suivants ou $\frac{3,75}{2,5}$ est assez dissuasif :

1er dessin				
				2,5
				2,5
			12 : 4 = 3	
			3 × 2,5 = 7,5	
		2,5		
		1		
				3,75
				3,75
				$\frac{2,5}{2,5} = 1,5$
				7,5
				7,5 × 1,5 = 11,25
				11,25
2ème dessin				
3ème dessin				

P₁) Par linéarité directe, sans calculs intermédiaires, le premier et le troisième dessin :

$$\begin{array}{l} 4 \longrightarrow 12 \longrightarrow 12 \times 1,5 = 18 \\ 1 \longrightarrow 18 : 4 = 4,5 \\ 2,5 \longrightarrow 2,5 \times 4,5 = 11,25 \end{array}$$

P₂) Par la composition des deux applications linéaires avec un calcul intermédiaire

$$2,5 \xrightarrow{\times 3} 7,5 \xrightarrow{\times 1,5} 11,25$$

P₃) Par l'utilisation directe de la composée des deux applications,

$$\begin{array}{l} \xrightarrow{} \xrightarrow{\times 4,5} 11,25 \\ 2,5 \xrightarrow{} \xrightarrow{} 4,5 \\ 1 \xrightarrow{} \xrightarrow{} 9 \\ \xrightarrow{} \xrightarrow{} \end{array}$$

cette composée étant calculée une fois pour toutes, d'une manière ou d'une autre.

Dans cette situation, il est très avantageux d'utiliser implicitement le fait que la composée des deux homothéties est une homothétie, de la calculer, et l'utiliser pour obtenir l'image finale de chaque segment du modèle.

Comme précédemment, les images sont réellement accrochées au tableau, chaque élève fait une prévision, va la contrôler lui-même, revient, la corrige si elle est fautive et cherche à modifier son calcul ou son système de prévision.

Le remplacement de deux similitudes par une seule est apparu dans les comportements en tant que solution de la situation-problème. Mais les différentes procédures témoignent de niveaux cognitifs différents : Dans la procédure P₀, l'élève a effectué une composition d'applications mais rien ne permet de penser qu'il s'est intéressé à l'application composée. Celle-ci est présente pour un observateur, dans la situation au sens habituel, elle ne l'est pas dans la procédure P₀ ; elle l'est dans la situation-problème car elle est la connaissance caractéristique du passage d'une solution moins bonne à une solution meilleure du point de vue de la complexité des calculs.

3.1.IV. : Différents «niveaux de connaissance» relatifs à la composition des applications linéaires.

Ces niveaux dépendent à la fois des comportements qui manifestent la connaissance et des types de situations qui provoquent ces comportements. La classification en niveaux tend à permettre d'expliquer a priori leurs différences par des différences de complexité entre les situations, entre les procédures ou entre les modèles cognitifs qui les caractérisent. Ces différences de complexité sont fondées sur

des informations d'origine mathématique, épistémologique, psychologique qui doivent se justifier de façon intrinsèque dans l'analyse de la situation ou du processus didactique.

Expérimentalement, l'existence de tels niveaux peut se manifester par des indices que nous évoquerons plus loin (par. 5.3.5.) et dans certains cas particuliers, importants par ce que G. Vergnaud a appelé «niveaux de complexité psychogénétique».

a) Pour mémoire, nous pourrions noter Niveau (0) celui que révèle la procédure P_0 : la structure est agie.
 b) Niveau (1) : c'est celui que révèle le remplacement dans l'action d'une suite de similitudes par une seule (procédure P_1). On peut supposer que ce comportement n'est possible que si le sujet a un modèle, encore implicite peut-être, qui lui permet d'admettre ce remplacement, lequel peut apparaître sans que le sujet ait la possibilité de reconnaître, de formuler, de considérer comme un objet d'étude et a fortiori de justifier ce remplacement autrement que par des preuves contingentes.

c) Niveau (2) : un premier pas est franchi si un élève dit : «j'ai les pantographes $\times 2,5$ et $\times 0,25$ alors je calculerai les images avec une seule application » : $\times 0,625$ celle-ci est obtenue après calculs sur des longueurs particulières (Procédure P_2).
 d) Niveau (3) : S'il dit : « Avec les deux pantographes que vous me donnez : $\times 4,5$ et $\times 1/3$, je prévois que l'agrandissement sera $\times 4,5 \times 1/3$ un autre pas est franchi. La vérification est possible par le calcul (procédure P_3).

e) Niveau (4) : L'élève dit : « on devrait toujours pouvoir remplacer l'action des deux ou de plusieurs pantographes par l'action d'un seul que l'on peut calculer en faisant le produit des deux premiers ».
 f) Niveau (5) : considérer que les mêmes propriétés pourraient valoir dans d'autres domaines et acquérir des formulations spécialisées : « prendre une fraction de ... — un pourcentage... » demande en extension, et recevoir un statut culturel nouveau sans changer beaucoup du point de vue mathématique. Par contre, le calcul des mesure-produits affecte la conception même de la notion de fraction et doit être traité à part à ce stade (voir à ce sujet (Vergnaud et Al (1979) ; Rouchier (1980)).
 g) Niveau (6) : bien que certaines remarques antérieures aient permis à l'élève de mettre en difficulté sinon en doute, le modèle suivant né de la pratique des naturels :

agrandir _____ multiplier (ou ajouter)
 diminuer _____ diviser (ou soustraire)

et bien qu'il ait remarqué que $\left(\frac{1}{3} \times \frac{3}{1}\right)$ était le même opérateur que $\left(\frac{3}{1} \times \frac{1}{3}\right)$ sur les entiers (Phase II.3), l'obstacle que constitue ce modèle ainsi que tous ceux bâtis sur l'usage de N est loin d'être franchi.

Ainsi les élèves ne savent pas directement ce que signifie 3,2 — 3 — 3 : 3 ni calculer l'image correspondante, bien qu'ils aient les moyens de découvrir.

Il est clair que le jeu qui peut conduire les élèves à identifier les différentes manières de désigner les « similitudes », à unifier les méthodes de calcul exige qu'ils s'occupent non plus d'une ou de quelques applications mais de toutes. Il faudra un débat intellectuel, et seul un jeu social convenable peut promouvoir de telles problématiques et conduire à se poser la question. « est-ce que tout pantographe a un inverse ». Au niveau 6, l'élève peut s'occuper de certaines propriétés des opérations dans la mesure où ces propriétés servent une action.

Il y a un saut de complexité très important entre les situations qui, comme celle du pantographe, conduisent à utiliser le fait que cet inverse existe et celles qui conduisent à se poser la question, surtout si l'on veut que cette question se pose pour des raisons mathématiques (ce serait utile de le savoir) et non didactiques et formelles et que ces raisons apparaissent aux yeux de l'élève.

h) Niveau (7) : L'étape suivante consiste à faire fonctionner cette opération comme moyen d'analyse. Par exemple, en se rendant compte que toutes les applications rationnelles peuvent s'exprimer comme composées d'une application entière et de l'inverse d'une application entière. Exemple : $(\times 3/4) = (\times 3) \cdot (\times \frac{1}{4})$

Les calculs dans ce système assurent la possibilité d'établir de véritables théorèmes sur les rationnels comme celui que demandait de façon un peu abrupte Mme Touyarot (Brousseau 1980, p. 36)

Exemple de question : « Pour passer d'un modèle à son image, j'ai utilisé l'application linéaire $\times 4/7$; quelle est l'application linéaire qui permet de passer de l'image au modèle ? Pouvez-vous le prouver à un camarade sans calculer aucune image ? »

Cette étape permet de rechercher et de trouver comment résoudre tous les cas de divisions des décimaux au sens le plus général. Les élèves ont la possibilité de mettre au point la technique de la division dans un des niveaux de connaissance précédents, sans avoir recours à la composition d'applications linéaires, mais avec des sens différents : implicitement, lors de l'encadrement des rationnels-mesure (par exemple dans la phase I.5, puis I.7), pour calculer l'image dans certaines homothéties ($\times \frac{1}{4}$) par exemple, phase II.3.), par la recherche de l'image au moyen de l'application réciproque ou de la composition de deux applications exceptionnelles évidentes à cause du contexte. Par exemple, pour calculer $3,25 \times 1,25$ sans avoir recours à la composition, l'élève recherche quelle est l'application équivalente à $\times 1,25$, qui, il le sait, fait correspondre à $1,25 \rightarrow 1$ — ce qui le conduit péniblement à rechercher une fraction décimale équivalente à $\frac{100}{125}$ c'est-à-dire $\frac{800}{1000} = 0,8$. On effectue alors $3,25 \times 0,8$.

Il est clair que ces procédés, même s'ils sont apparus une ou deux fois dans le comportement, ne méritent pas à ce moment-là d'être érigés en méthodes et de faire l'objet d'apprentissages. Les élèves peuvent les produire une fois, en situation, grâce à un investissement exceptionnel et au support sémantique qui en découle. Ce serait une

méprise complète de vouloir faire détacher cette "procédure" de son contexte et de l'ériger directement en méthode à coups d'exercices.

C'est le niveau (7) qui permet la solution raisonnable et contrôlée de ces problèmes.

i) Niveau (8) : il consiste à prendre conscience de l'étape 7, à la prendre comme objet d'étude à la décrire de façon à la formaliser, en utilisant un langage algébrique et une théorie mathématique axiomatisée. L'intérêt d'une telle aventure peut être une classification des structures numériques. Une telle construction entrerait bien dans les intentions des réformateurs des années 70, pour la classe de 4ème (élèves de 13-14 ans). Mais en l'absence d'un contrat didactique clair avec les élèves au sujet de l'enjeu de l'activité mathématique, tous les niveaux épistémologiques que nous venons de détailler étaient confondus et la tentative vouée à l'échec dans la plupart des cas.

Une pratique comparable, courante, dans l'enseignement élémentaire, consiste pour le maître à "exploiter" le genre de situations didactiques présente plus haut, en institutionnalisant immédiatement la découverte d'un élève : « Vous avez découvert tel objet (affirmation implicite du fait qu'il a un caractère général) ; il s'appelle "composé de deux applications", sous-entendu il a un statut cognitif et culturel, reconnaissez-le, utilisez-le, dans les exercices suivants... ».

Cette pratique court-circuite tout le travail mathématique et même le nie ; elle revient à affirmer implicitement qu'il suffisait d'y penser pour transformer un concept protomathématique en notion mathématique. Certes, ce procédé didactique fonctionne et on peut légitimement l'employer localement. Mais nous sommes fondés à penser que le rejet de son emploi systématique est nécessaire pour changer fondamentalement les rapports du "sujet-s'appréhendant" avec la connaissance.

3.1.V : sur la recherche en didactique.

Parmi les conditions qui confèrent à la situation-problème ses propriétés didactiques (voir paragraphe 5.2.2), figurent :

- la possibilité pour chaque élève d'avoir un nombre suffisant d'occasions de changer de niveau de connaissances,

- des pénalisations implicites des procédures les plus complexes, elles-mêmes dues à une connaissance plus simple, par l'intermédiaire de coûts d'exécution et de probabilités d'erreurs plus élevés.

La situation où l'élève doit prévoir l'image donnée par la composition de deux applications, possède ces propriétés.

Le problème qui se pose au didacticien est alors un problème de faisabilité : il faut prévoir dans la situation du pantographe un minimum de dessins et de segments par dessin, il existe un maximum d'opérations, compatible avec le temps disponible, et la motivation des élèves. L'intersection est-elle vide ? il faut obtenir une évolution plus rapide, généralement en diminuant l'incertitude de l'élève, soit par un apport d'information soit par le choix d'une situation plus fermée. Dans quelle mesure le sens des acquisitions en est-il affecté ? Seule l'expé-

rimentation peut répondre. Mais elle peut apporter beaucoup plus d'informations sur l'effet de ces conditions : Il est possible dans certains cas de s'aider d'études a priori, de « calculs des situations ». Par exemple, on peut ici comparer les coûts des diverses stratégies en nombre d'opérations à effectuer (mentales ou écrites).

	P_0	P_1	P_2	P_3
coût d'un résultat	$2D + 2M$	$D + M$	$2M + \frac{2D}{n}$	$\frac{D}{n} + M$
fiabilité d'un résultat	$d^2 \cdot m^2$	$d \cdot m$	$d^2 \cdot m^2$	$d \cdot m$

D : coût d'une division

M : coût d'une multiplication

d : proba (division juste)

m : proba (mult. juste)

n : nombre de segments

On peut s'essayer à prévoir l'effet de celles de ces variables que l'on peut faire varier (D , M en choisissant la grandeur des nombres, n). Nous appellerons variables didactiques les variables de commande dont on montrera qu'elles ont un effet important — qualitatif — sur les évolutions de procédures.

En s'aidant d'autres considérations, on peut formuler certaines hypothèses : par exemple, la méthode P_1 conduit à P_3 plus rapidement que P_2 .

L'observation de deux classes (50 élèves), telle que nous la pratiquons régulièrement au Centre pour l'observation de l'école Jules Michelet de Talence, permet, par de simples χ^2 de tester des hypothèses de ce genre, pour peu que la prise d'information ait lieu au moment où les effectifs du choix sont suffisants pour chaque méthode.

Nous en donnerons quelques exemples au paragraphe 5.

3.1.3. Résumé de la suite du processus (2 séances)

Les activités, qui suivent les deux que nous avons décrites plus haut, ont pour objet de provoquer les modifications de sens détaillées ci-dessus du niveau 1 au niveau 7.

Le processus tend à amener les élèves à se poser des questions mathématiques à propos des propriétés des compositions : Est-ce que

$x \cdot 2 \cdot ((x 1,5) \cdot (2,5))$ est la même application que $x (2 \times (1,5 \times 2,5))$? Que signifie (3), quels autres noms peut-on lui donner? (la définition de l'égalité de deux applications fonctionne ici comme moyen de preuve). Quels agrandissements peut-on obtenir par composition de deux pantographes (puis de 3, etc.), pris dans un certain ensemble, par exemple $(x 2; x 3; x 4; x 7; x 10)$. Quelle est la réciproque de $x \frac{4}{7}$, etc. Que produit $x \frac{7}{4} \times \frac{3}{5}$. Un des buts de ces activités consiste à intéresser les élèves à la recherche des propriétés des objets dont ils s'occupent, ou à s'intéresser à des curiosités, comme par exemple, les situations où il faut choisir entre deux modèles d'augmentations de prix par somme ou alors par composition. Par exemple: $x (1 + 0,03 + 0,05)$ et $x (1 + 0,03) (1 + 0,05)$.

Bien sûr, chaque étape pose un problème spécifique qui appelle le choix de situations elles aussi spécifiques. Toutefois, un certain nombre de concepts de didactique et de tours de mains dont nous parlerons au chapitre suivant, permettent d'en produire et d'estimer leur adéquation. La plupart d'entre elles relèvent du schéma de la validation. L'habitude de ce genre de situations qui, au début, suit des règles précises, permet aux élèves d'instaurer et de conduire des débats sans que les règles soient explicitées chaque fois et d'en choisir des sujets.

L'activité finale consiste à identifier les fractions-mesures, les fractions-applications linéaires et les rapports, à unifier les expressions et les applications particulières produites au cours du processus, et à les reformuler dans le langage nouveau commun.

3.1.VI : Limites des processus de reprise

Cette réorganisation "après coup" de la connaissance est une activité fondamentale à laquelle on serait tenté de voir un bon entraîneur aux mathématiques pour les élèves (Brousseau 1976); mais il n'est pas prouvé que cette transposition de la genèse historique en genèse didactique soit si intéressante. H.Ratsimba-Rajohn (1981) a montré que, contrairement à ce qu'on pourrait attendre et malgré un choix convenable des situations, dans certains cas, le modèle le plus ancien, celui dans lequel les autres prennent leur source et leur justification, sort renforcé d'un processus destiné à le faire remplacer par un autre, même si l'élève sort convaincu que le nouveau modèle est meilleur et si les situations lui donnent une grande supériorité. Le conditionnement par la répétition de l'emploi n'est pas effacé par la signification du processus. Aussi, l'étude des caractéristiques des situations didactiques ne peut pas plus être rabattue sur l'épistémologie qu'elle ne peut l'être sur la psychologie.

3.2. Le puzzle

3.2.1. La situation problème

La première situation d'étude des applications linéaires proposée aux élèves est la suivante.

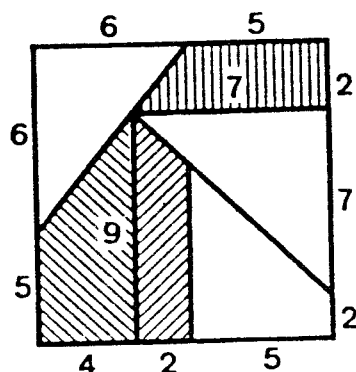


fig. 2

Consigne: « Voici des puzzles (Exemple : Tan-gran, fig. 2) vous allez en fabriquer de semblables, plus grands que les modèles, en respectant la règle suivante : le segment qui mesure quatre centimètres sur le modèle devra mesurer sept centimètres sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle ».

Déroulement: Après une brève concertation par équipes, les élèves se séparent. Le maître a affiché au tableau une représentation agrandie des puzzles complets.

Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 centimètres à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer et jamais à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat évidemment, c'est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation ; vérifications, certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile ! Le maître n'intervient que pour encourager et constater les faits, sans exigences particulières. Certains enfants produisent, par retouches successives, un puzzle qui reproduit grossièrement la forme du modèle. D'autres se tirent d'affaire en découpant un grand carré : les raccordements sont impeccables. Le maître invité, ainsi que les autres groupes d'élèves, à constater le succès, suggère dans ce cas aux compétiteurs de former avec le modèle une figure (fig. 3) qui ne peut pas être reproduite avec l'image (fig. 4) il est assez facile en

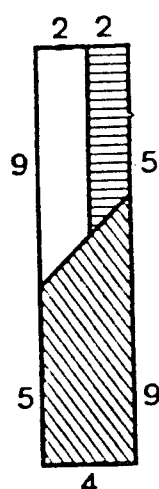


fig. 3 : modèle

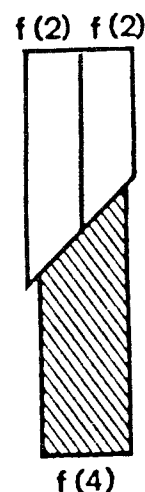


fig. 4 : image

général de trouver 3 côtés, a, b, c, tels que $a + b = c$ et $f(a) + f(c) \neq f(c)$. Ceci amène souvent les élèves à remarquer la nécessité de réaliser la condition caractéristique de la linéarité. Divers processus sociaux et intellectuels se conjuguent pour rendre difficile la remise en cause du modèle. On peut assister à des manifestations affectives extrêmement vives : disputes, acharnement, pleurs, menaces.

Lorsque les enfants admettent qu'il doit y avoir une autre loi et se mettent à la chercher, les choses vont beaucoup plus vite, surtout si l'un d'eux, ou le maître dispose les longueurs dans le tableau (fig. 5).

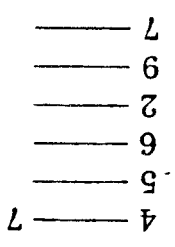


Fig. 5

Ils trouvent d'abord l'image de 8 : 4 → 7 alors 8 → 14, qui ne sert pas et curieusement, cette idée n'est pas contestée, comme si dès que l'autre modèle est rejeté, celui-ci s'imposait. « Il faudrait l'image de 1 » « Oui, ça permettrait de trouver toutes les autres » « pour cela, il faut partager 4 en 4 parties, il faut diviser 7 en quatre aussi ». Le modèle de commensuration qui leur est enseigné leur permettrait d'écrire directement : 4 fois l'image de 1 mesure 7, l'image de 1 est donc 7/4 (voir par. 4.2.6.). Ils ne l'utilisent pas spontanément. Ils calculent par des procédés du genre suivant :

$$7 = \frac{40}{70} = \frac{280}{280} : 4 = \frac{40}{70} = \frac{20}{35} = \frac{100}{175} = 1,75$$

alors $\frac{350}{100} : 2 = \frac{100}{175} = 1,75$ etc. Il est sûr que ces calculs ne peuvent

avoir lieu que parce que la fraction-mesure est connue. On observe peu de remarques à ce moment sur la nécessité d'avoir des segments tels que $f(a) + f(b) = f(c)$ dès lors que $a + b = c$. Ces calculs permettent enfin le succès dûment constaté par la construction effective.

3.2.2. Résumé de la suite du processus

La leçon suivante consiste à proposer de chercher l'image — dans la même situation — d'une longueur fractionnaire. Les enfants peuvent vérifier leurs prévisions pour des fractions simples en utilisant les puzzles construits.

Pour enseigner le calcul de l'image des décimaux, le maître introduit à nouveau une situation semblable à celle du puzzle; il s'agit d'agrandir et de reproduire une pièce en T qui par juxtaposition, produira une mosaïque. Cette fois, les remarques sur la relation fonda-

mentale abondent et le modèle linéaire est adopté d'emblée mais on aurait tort de supposer qu'il s'est définitivement installé, car, dans une activité ultérieure (6 séances plus tard) les élèves accepteront sans sourciller l'idée que les applications $x \rightarrow 2,2x$, $x \rightarrow x+5$ et $x \rightarrow 2x+3$, sont toutes les trois des applications linéaires (des « agrandissements » comme les autres). Et il faudra aussi les distinguer des fonctions quadratiques (Ex. : côté \rightarrow surface du carré) pour qu'ils utilisent systématiquement le critère fondamental afin de s'assurer dans chaque cas du bien fondé de l'emploi de la linéarité.

Le lecteur aura remarqué que dans cette première séance sur le puzzle, l'agrandissement n'a pas besoin d'avoir de nom. Les activités suivantes vont multiplier ces agrandissements et lorsqu'il faudra les comparer, trouver ceux qui sont équivalents, les ranger, la domination par l'image de 1 sera choisie consciemment. Alors la question « est-ce que les agrandissements sont des nombres » sera posée comme elle l'a été pour les fractions-mesures, et laissée sans réponse officielle.

3.2.1 : Fondements affectifs et sociaux de la preuve mathématique

Cette situation du puzzle est du même type didactique que celle du pantographe mais la prévision correcte s'y heurte, de façon beaucoup plus dramatique, à un obstacle épistémologique : la pregnance du modèle additif.

Il est essentiel que le maître ait pu, au préalable, donner à ses élèves l'habitude d'accepter de chercher leurs solutions dans la situation — problème et non d'essayer d'interpréter les indices qu'il pourrait leur fournir. Il aura besoin de tout son crédit de « neutralité cognitive » pour pouvoir soutenir les élèves au niveau affectif sans interrompre les processus psychologiques et sociaux qui doivent s'accomplir. De prime abord, la situation leur paraît parfaitement innocente, familière et sans mystère : chacun a le temps de se faire une idée et de s'investir personnellement dans une tâche matérielle qui va engager sa responsabilité à l'égard de l'équipe. Le suspense est tout-à-fait modéré, mais il existe tout de même. Le scandale éclate dans un ciel serein ça ne marche pas ! Il faut que ça marche ! Les convictions se heurtent et s'expriment selon les caractères et positions sociales au sein de l'équipe. C'est alors que commence le processus scientifique, il faut chercher la cause, s'obstiner. Il ne sert à rien de séduire ou d'intimider l'opposant, il faut se convaincre, convaincre, prouver. L'équipe éclate en écoles : les uns contrôlent le travail fait, d'autres veulent agrandir le carré, le doubler et couper un petit bout. Les amitiés sont à rude épreuve, les mises en doute sont reçues comme des trahisons, les « faibles » mettent en doute la compétence des « forts ». Rien à faire, la rhétorique devra céder le pas à la preuve scientifique et intellectuelle, seul moyen honorable de se rendre à l'« adversaire ». Lorsque, l'obstacle franchi, la solution apparaîtra à chacun démystifiante, contingente, banale, et même un peu désenchantée, chacun se la sera appropriée, et aura triomphé, non pas

de ses camarades, mais de lui-même, tout le monde a gagné sans que le maître ait besoin de tirer aucune leçon. Le mérite d'abandonner une idée qu'on trouve fausse est aussi grand que celui d'en trouver directement une juste, l'obstination est aussi nécessaire que le renoncement à l'obstination. Les enfants ont été conduits à prendre plus passion-nément le parti de la vérité.

Nous avons constaté qu'ils tirent aussi le plus grand plaisir de ces jeux, comparables sur bien des points aux jeux sportifs. Ce plaisir les conduira à aimer les mathématiques et à leur donner la signification humaine et philosophique qu'elles n'auraient pas pu prendre. Le maître doit gérer l'investissement affectif, le désir de ses élèves et les leçons de ce type sont de nature à leur faire, non seulement accepter, mais demander éventuellement des exercices ou des entraînements. Nous n'avons pas décrit le système très complexe qui régit ses interventions, non plus strictement didactiques, mais dont l'importance n'échappera pas au lecteur. A.N. Perret Clermont (1979 et 1980) étudie cette construction de l'intelligence dans l'intégration sociale et N. Balacheff (1980) observe de façon fine les conduites de preuves des élèves de divers niveaux.

3.3. Approche décimale des rationnels (5 séances)

Ces situations font partie de la phase II.4 qui intervient dès que les élèves ont construit l'ensemble des rationnels munis des opérations, addition, soustraction, produit et division par un naturel et ordre.

3.3.1. Localisation d'un rationnel dans un intervalle naturel

Le joueur A choisit une fraction comprise entre 0 et 10 (sans la dire à haute voix). Il l'écrit sur un papier qu'il met dans sa poche.

Le joueur B cherche à deviner dans quel intervalle de naturels consécutifs se trouve cette fraction. Pour cela, il a le droit de poser des questions, par exemple :

« est-ce que ta fraction se trouve entre 7 et 9 ? »

A n'a le droit de répondre que par « oui » ou par « non ». B pose des questions jusqu'à ce qu'il ait trouvé les 2 entiers consécutifs entre lesquels se trouve la fraction. La maîtresse n'intervient dans cette phase que si les enfants font appel à elle, soit pour arbitrer un conflit, soit pour apporter des précisions ou des renseignements.

Le jeu oppose d'abord des équipes, puis très vite des élèves 1 à 1 qui choisissent en même temps deux fractions et se posent mutuellement des questions à tour de rôle. Le jeu est suivi d'une mise en commun des observations.

Il conduit les enfants à manier le langage désignant les intervalles

de N et leurs intersections, éventuellement. Assez rapidement, la recherche d'un nombre minimum de questions conduit à une stratégie de partitions linéaires successives en intervalles à peu près égaux.

Ex. [0, 5] ? R : oui ; [0, 3] ? R : non ; [3, 4] ? R : non

de sais : [4, 5] ? R : oui ; [4, 5] ? R : non ; [0, 3] ? R : non ; [3, 5] ? R : oui ; [0, 3] ? R : non » de s'assurer de [3, 5] ? Le jeu en

équipe conduit à des explications intéressantes.

Dans les phases antérieures, les élèves avaient remarqué que les entiers correspondaient à certaines fractions mais cette activité demande l'usage systématique du plongement de N dans \mathbb{Q} .

3.3.2. Intervalles rationnels

Le maître demande aux élèves de chercher des fractions, par exemple entre 3 et 4. La comparaison leur fournit le moyen d'en trouver beaucoup :

$3 = \frac{12}{4}$ $4 = \frac{16}{4}$ alors $\frac{13}{4}$, $\frac{14}{4}$, $\frac{15}{4}$ répondent à la question. Il introduit alors de nouvelles règles au jeu précédent : on va essayer de continuer le jeu en essayant d'encadrer la fraction de l'adversaire dans l'intervalle le plus petit possible (sans préciser d'abord).

Remarque : Une année, ce jeu s'est appelé le « jeu du radar » (connu aussi sous le titre : « jeu de l'explorateur ») car la fraction de l'adversaire était un avion qu'il fallait localiser le mieux possible avec un faisceau radar de plus en plus étroit, mais cette « justification » n'a été proposée qu'une fois et n'aide pas beaucoup les enfants.

La difficulté consiste autant à trouver des fractions entre deux autres, qu'à comparer celle qu'on a choisie de celles du « filet » de l'adversaire.

Après quelques essais, la méthode du jeu s'éclaire un peu mais il faut se mettre d'accord sur ce que veut dire intervalle plus petit. Les élèves discutent, dessinent une droite. Séance *difficile* : la règle du jeu est difficile à apprendre et nécessite de nombreux calculs — l'enjeu n'est pas évident, cette activité consomme du « capital-plaisir » lors de la première séance. Les enfants s'arrêtent d'eux-mêmes dès le premier encadrement inférieur à 1 et comparent les longueurs des intervalles. Dans la séance suivante, certains peuvent poursuivre et raffiner une fois leur partition. Les enfants n'ont le temps que d'accomplir 2 parties. Cependant déjà, des encadrements décimaux apparaissent bien que les enfants voient que les calculs de l'adversaire sont facilités. C'est une faiblesse du jeu, car les élèves ne comprennent pas d'eux-mêmes qu'on n'a aucun intérêt à compliquer le calcul de l'adversaire. Dès que la question est réglée par une mise au point collective, les parties se déroulent beaucoup plus vite et les dénominateurs des fractions s'enflent : $99/10$ est attrapée sous la forme $9900/1000$. Encadrée dans un intervalle très petit : $1/100\ 000$ la fraction $22/7$ n'est pas encore attrapée. Une discussion animée s'installe : on ne pourra jamais l'attraper ! disent les uns... mais si ! pourquoi ? Certains donnent la raison : parce que 10, 100, 1000... ne sont pas multiples de 7, mais bien peu sont convaincus et le maître paraissant intéressé mais ignorant ou neutre, le problème reste ouvert pour le moment.

3.3.3. Suite du processus

Les fractions décimales dont nous nous sommes servis dans le jeu précédent, peuvent être placées très vite sur une droite graduée. Cette

activité permet d'établir une relation avec les nombres à virgules (les décimaux) si les élèves les connaissent déjà et avec les longueurs. Sinon, le maître introduit l'écriture décimale. Est-ce que ce sont des nombres ? discussions assez courtes, les élèves déduisent les calculs sur les décimaux de ceux sur les fractions...

Le jeu de la localisation reparait à la fin de cette série de leçons : où se trouve $\frac{221}{35}$? mais il prend aussi la forme : on veut partager 4319 entre 29. Les élèves « redécouvrent » la division dans les entiers et la prolongent.

Voici ci-contre le tableau final dressé par la classe et qui présente le travail effectué et les améliorations apportées. La disposition de la division a été perfectionnée.

3.4. Expérimentation du processus 3.4.1. Remarques méthodologiques

La méthode que nous avons utilisée pour identifier les problèmes d'enseignement des décimaux et pour observer le fonctionnement des concepts de didactique est bien connue en physique et en technologie empirique : c'est celle des « comparaisons à résultats constants ».

Après avoir identifié un certain nombre de variables ou d'options que l'on croit susceptibles d'agir de façon significative, on réalise des expériences basées sur des choix différents avec l'intention de les comparer, indépendamment de l'idée que l'on se fait de l'intérêt de ces choix pour l'enseignement.

La méthode expérimentale classique consiste à organiser alors en plan d'expérience les différents choix et à conclure au vu des variations des résultats statistiques.

Elle ne convient pas à notre propos :

— d'une part, elle n'est pas déontologiquement recevable. Aucun professionnel ne peut accepter, a priori d'enseigner « pour voir », en se désintéressant du résultat.

— d'autre part, elle n'est pas possible ; par fonction, le système éducatif réagit à ses propres résultats en modifiant ses conditions d'enseignement et donc, la base de la comparaison, fondée sur l'identité des conditions, est caduque et par conséquent, elle exige l'analyse des réactions du système éducatif et donc, celle des conditions d'enseignement.

Ces comparaisons « à résultats constants » portent sur les conditions d'obtention et les moyens mis en œuvre pour contrôler les résultats, et non sur les résultats eux-mêmes : nous cherchons à savoir si les mêmes résultats sont plus

Tableau II

Ce que nous avons cherché	Ce que nous avons fait								
<p>1. Je cherche les entiers Je cherche combien de fois 35/35 est contenu dans 221/35 $6 < 221/35 < 7$</p> <p>2. Je cherche les 1/10 Je cherche combien de fois 1/10 est contenu dans 11/35 $6,3 < 221/35 < 6,4$</p> <p>3. Je cherche les 1/100 Je cherche combien de fois 1/100 est contenu dans 5/350 $6,31 < 221/35 < 6,32$</p> <p>4. Je cherche les 1/1 000</p>	<p>$221 \div 35 = 6$ reste 11</p> <p>$11/35 - 1/10$ $110/350 - 35/350 = 75/350$ $75/350 - 35/350 = 40/350$ $40/350 - 35/350 = 5/350$ on l'enlève 3 fois</p> <p>$5/350 - 1/100$ $50/3 500 = 15/3 500$ on peut l'enlever 1 fois</p> <p>$15/350 - 1/1 000$ $150/3 500 - 35/3 500 = 115/3 500$ ici les enfants proposent d'écrire etc... parce qu'ils se rendent compte que «c'est toujours pareil».</p>	<p>Une fillette propose alors de rem- placer les soustractions successives par une division, ce qui est fait aussitôt par les enfants.</p> <p>Cette même fillette demande alors si on ne pourrait pas mettre toutes ces divisions dans une seule.</p> <p>IV – Division. Algorithme</p> <p>6,31</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> $35 \times 6 = 210$ $35 \times 3 = 105$ </div> <table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: right;"> <tr><td>221</td></tr> <tr><td>210</td></tr> <tr><td>0110</td></tr> <tr><td>105</td></tr> <tr><td>0050</td></tr> <tr><td>350</td></tr> <tr><td>15</td></tr> </table> </div>	221	210	0110	105	0050	350	15
221									
210									
0110									
105									
0050									
350									
15									

ou moins coûteux à obtenir selon divers choix. De très nombreuses raisons, que nous n'exposerons pas ici, plaident en faveur de ce procédé.

Il faut rompre néanmoins avec certaines routines de la recherche fondamentale : ainsi, au lieu de comparer des processus peu différents pour observer l'effet d'une modification des conditions, en maintenant toutes les autres constantes, il est préférable, au contraire, de produire des processus très différents en faisant varier des conditions jugées importantes. Cependant, pour rendre possible l'enseignement, c'est-à-dire pour réaliser et conduire ces situations concurrentes, nous avons vu que nous étions amenés à répondre à de nombreuses questions et à faire de nombreux choix. Ces questions et ces choix forment le tissu que les concepts et les théories didactiques ont à charge de décrire en même temps que de fournir les moyens d'analyser les réalisations obtenues.

3.4.2. La situation expérimentale

a) Le curriculum a été conçu et préexpérimenté au cours de la période 1974-1976 (à la suite de tentatives qui ont débuté en 1971-1972) avec la collaboration de Mme Liorens et Mme Brousseau, institutrices, dans deux classes de CM2* à l'école J. Michelet de Talence, où se trouve implanté le centre d'observation de l'IREM de Bordeaux. Il a été présenté sous forme d'une suite de textes comparables à celui du chapitre 4 et d'un film réalisé par l'OFRAFEM en collaboration avec M. C. Prouteau. Sa communicabilité a été éprouvée au même niveau à l'École Normale de Pau (5 classes), à l'École Normale de Périgueux (3 classes), à Orléans, la Source (1 classe) et 3 fois au CM1*.

b) La population
Nous allons rendre compte de sa reproduction dans 2 classes de CM2 de l'école J. Michelet pendant 3 ans, (d'octobre 1977 à juin 1980) par Mmes N. Brousseau et D. Greslard : les effectifs étaient de ce fait 54, 50 et 47 enfants.

c) Techniques
Nous nous assurons de la « reproduction » effectuée du processus dans son ensemble. A l'intérieur de ce processus, nous aménageons des modifications des conditions et nous comparons les efforts nécessaires à l'obtention des mêmes résultats. Le recueil d'un grand nombre d'observations dans des conditions déterminées permet l'étude expérimentale classique de certaines questions de didactique dont nous parlerons au paragraphe 5.

* CM1 : Cours moyen 1ère année, enfants de 9-10 ans.
CM2 : Cours moyen 2ème année, enfants de 10-11 ans.

3.4.3. Les résultats scolaires

Les résultats que nous présentons ont été choisis parmi tous ceux qui ont été recueillis de façon à montrer, autant que possible, quel est le niveau des élèves en fin d'année sur les différentes catégories mathématiques d'exercices. Dans le tableau V, nous donnons donc tous les résultats obtenus au cours des différents CAS (contrôles de l'année scolaire), tous ceux figurant aux TAS (tests d'acquisitions scolaires) et certains résultats à des contrôles, aussi tardifs que possible, dans les catégories où, ni les CAS ni les TAS ne présentent de questions.

Le TAS est un test QCM étalonné à l'échelon national et porte sur les acquisitions en français aussi bien qu'en mathématique. Il permet de contrôler que les résultats de l'école expérimentale ne s'écartent pas significativement des résultats nationaux.

Le CAS est une liste d'exercices, correspondant aux objectifs de l'expérience, parmi lesquels sont choisis ceux constituant l'épreuve de fin de chaque année (les questions peuvent donc différer d'une année à l'autre).

Rappelons que ces résultats sont donnés à titre indicatif et que le curriculum n'a pas été choisi de façon à produire les effets scolaires maxima. Les seules exigences déontologiques de l'expérience étant que :

- i) les maîtres cherchent à obtenir les meilleurs résultats dans les conditions qu'on leur a proposées.
- ii) les résultats obtenus sont au moins aussi bons que ceux produits par les autres méthodes.

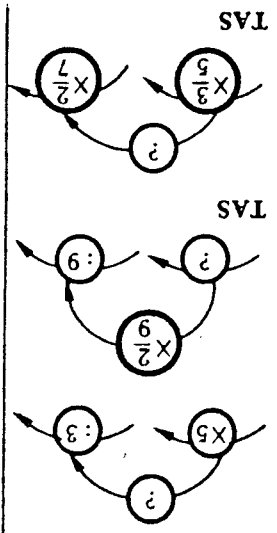
Le tableau ci-après montre que les exigences ont été satisfaites. Il n'est pas question de tirer argument scientifique de différences entre des méthodes dont on sait bien qu'elles peuvent être produites par des conditions fort variées que nous n'avons pas les moyens de contrôler.

Tableau V : LES RESULTATS SCOLAIRES CAS - TAS

I - Mesure

FRACTIONS		DECIMAUX	
Enoncés		Enoncés	
Résultats en %		Résultats en %	
Années	Effectifs	Années	Effectifs
77-78	54	77-78	54
78-79	50	78-79	50
79-80	47	79-80	47
<p>Ranger du plus petit au plus grand les nombres suivants : $1\ 109$; $0,802$; $1,019$; $\frac{1\ 000}{4}$; $\frac{50}{4}$ (CAS 78)</p> <p>CAS : contrôles d'acquisition scolaires passés en fin d'année scolaire</p>		<p>Entourer le plus petit des nombres suivants et mets une croix sous le plus grand : $8,709$; $8,09$; $8,079$; $8,90$; $8,097$ CAS 80</p> <p>$0,12 < 0,097 < 0,107$; $0,12 < 0,097 < 0,107$; $0,097 < 0,107 < 0,12$; $0,097 < 0,107 < 0,12$</p> <p>TAS : tests d'acquisitions scolaires (cocher la bonne réponse)</p>	
<p>Placer les fractions suivantes sur une droite : $\frac{75}{160}$; $\frac{450}{50}$; $\frac{75}{50}$; $\frac{50}{50}$ (contrôle du 4-2-78 et février 79)</p>		<p>Place sur la droite graduée les nombres suivants : $2,2$; $2,63$; $2,04$</p> <p>Place sous chaque niche le nombre qui correspond : $(c'était : 0,8 ; 3,7 ; 8,5)$ CAS 80</p>	
<p>III - Encadrements</p>		<p>III - Encadrements</p>	
<p>Ecrire 3 fractions comprises entre : $\frac{5}{10}$ et $\frac{10}{25}$ (comp. 1er février)</p>		<p>Ecris un nombre décimal entre $1,2$ et $1,3$.</p> <p>Peux-tu écrire un décimal entre $3,14 < 3,15$ CAS 79</p> <p>Ecrire 5 nombres décimaux entre $1,019$ et $1,021$ CAS 78</p>	
62	62	62	62
78,5	77,7	84,5	77,7
70	70	70	70
72	72	72	72
50	50	50	50
50	50	50	50
52	52	52	52
70	70	70	70
90	90	90	90
67	67	67	67
53	53	53	53
33	33	33	33

		IV - Transformations				
Fractions → décimal Ecrire sous forme de nombre à virgule $\frac{123}{100} ; \frac{12}{25} ; \frac{2}{125}$ (CAS 78)	56		Passage de l'écriture en lettre → en chiffre Ecris en chiffres : quarante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes ; trente cinq centièmes. CAS 80 Ecris sous forme de nombre décimal : quarante huit unités sept dixièmes ; douze unités trois centièmes ; deux cents unités huit millièmes ; quatre vingt neuf millièmes ; six cent quarante huit centièmes CAS 79	79	80	
					80	
Equivalence Ecrire 3 fractions égales à $15/25$ (comp. I. 1978-1979) Quelle est la série exacte de fractions équivalentes : $\frac{2}{3} ; \frac{4}{5} ; \frac{6}{7} / \frac{2}{3} ; \frac{4}{6}$ $\frac{6}{9} / \frac{2}{3} ; \frac{4}{9} ; \frac{16}{81}$ (TAS)	65,5	82,5				
	50,5	54	62,5			
		V - Additions				
Calculer : $\frac{84}{10} + \frac{425}{100} + 7 + \frac{3}{5}$ (composition I)	24	38	52	Effectuer : $12,04 + 108,974$ CAS 78 - CAS 80 $2\,763 + 554,65$ CAS 79 $0,07 + 0,05 + 0,01 = 0,013$ $0,07 + 0,05 + 0,01 = 1,3$ $0,07 + 0,05 + 0,01 = 0,13$ Cocher la bonne réponse TAS (Test d'acquisition scolaire)	82,5	90
					89	
				84,5	75	82
		VI - Soustractions				
Calculer : $5/8 - \frac{24}{100}$	57,5	69	71	Effectuer : $8,043 - 7,95$ CAS 78 $273,08 - 67,5$ CAS 79	65,5	
					78,5	



75
75,5
90
93,5
87
82,5

I - Opérateurs

PRODUITS

Effectuer :
 50,25 : 33,5 (CAS 78)
 491,4 : 0,7 (CAS 79)
 50,25 : 33,5 (CAS 80)
 0,17342 : 0,0017342 =
 1000
 100
 10000
 (TAS) (cocher la bonne réponse):

67,5
64
62
75

VIII - Divisions

Effectuer :
 17,03 x 4,507
 CAS 78
 2,6 x 30,5
 CAS 79
 2,68 x 30,9
 CAS 80
 10000 x 0,042 42
 420 420
 4200 4200
 (TAS) (cocher la bonne réponse):

53,5
66
62

89
67

VIII - Multiplications

8,14 - 7,956
 CAS 80
 1 - 0,991 = 0,009
 1 - 0,009 = 0,091
 1 - 0,001 = 0,099
 (TAS) (cocher la bonne réponse)

47
45
45

87

2 - Applications courantes

Un fromage contient 45 % de matière grasse.

C : 64
R : 45,5

Trouve la masse de matière grasse contenue dans 250 g de ce fromage.

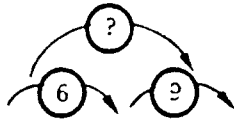
Quelle distance représentent 12 cm sur une carte à l'échelle 1/5000000 ? La distance entre 2 villes est de 35 km. Quelle sera la distance entre ces 2 villes sur la carte

C : 79,5
R : 53

CAS 78

DIVISIONS

1 - Opérateurs



TAS

63,5

75

75,5

2 - Applications courantes

Un casier de douze bouteilles coûte 56,40 F. Quel est le prix d'une bouteille ?
CAS 80

C : 95
R : 72

Un casier de dix bouteilles coûte 36,50 F. Quel est le prix d'une bouteille ?
CAS 78 - CAS 79

79 C : 93
R : 82

Un marchand de fruits et légumes a acheté au marché un lot de 14 kg d'oranges pour 20 F. A quel prix lui revient 1 kg d'oranges ? Donne ta réponse sous forme de fraction puis au centime près.
CAS 78

C : 79,5
R : 53

C* : opérations posées et explications correctes.
R : résultat.

II - Problèmes

<p>Sur un cadran d'horloge, la grande aiguille tourne de 5/12 de tours. Quelle est la durée de cette rotation ?</p> <p>25 mn <input type="checkbox"/></p> <p>5 mn <input type="checkbox"/></p> <p>un quart d'heure <input type="checkbox"/></p> <p>TAS 37,5</p> <p>Sur le plan au $\frac{1}{200}$ d'un appartement, les dimensions de la salle de séjour en murs sont de 35 et 20. Les dimensions réelles en m sont : 2,35 et 2,20 <input type="checkbox"/> 70 et 40 <input type="checkbox"/> 7 et 4 <input type="checkbox"/></p> <p>TAS (cocher la bonne réponse).</p>	<p>26</p> <p>31</p> <p>27</p>	<p>Maman a payé 25,20 un bifteck de 900 g. Quel est le prix du kilo ? Combien aurait-elle payé 350 g de bifteck ?</p> <p>C : 55,5 R : 28</p> <p>Sur une carte routière 4,5 cm représente une distance de 9 km. Quelle est l'échelle de cette carte ?</p> <p>R : 18,5</p> <p>CAS 78</p> <p>A 40 F le kg combien coûte un rigot de 1500 g ?</p> <p>CAS 78 - CAS 79</p> <p>A 40 F le kg, combien coûte un roi de 3550 g ?</p> <p>CAS 1980</p> <p>Colette veut acheter des pommes. Elle a le choix entre 4 cartons, A, B, C, D, présentés en sachets de poids différents :</p> <table border="1" data-bbox="470 616 782 907"> <tr> <td></td> <td>A</td> <td>B</td> <td>C</td> <td>D</td> </tr> <tr> <td>poids du sachet (kg)</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>prix du sachet (F)</td> <td>2,30</td> <td>5</td> <td>6,9</td> <td>10,5</td> </tr> </table> <p>49</p> <p>Quelle est la carte-goutte la plus intéressante ? (Celle qui revient le moins cher au kg).</p> <p>CAS 78 - CAS 79</p>		A	B	C	D	poids du sachet (kg)	1	2	3	5	prix du sachet (F)	2,30	5	6,9	10,5	<p>C : 45 R : 43</p> <p>C : 58 R : 53,5</p> <p>64</p> <p>C : 31 R : 18,5</p> <p>55,5</p>
	A	B	C	D														
poids du sachet (kg)	1	2	3	5														
prix du sachet (F)	2,30	5	6,9	10,5														

3.4.4. Reproductibilité — Obsolescence

a) La reproductibilité doit être envisagée d'abord à travers la stabilité des résultats à des exercices comparables, proposés au cours de chacune des trois années de l'expérience principale, dans des conditions comparables.

Une grande latitude ayant été laissée aux maîtres pour ajuster leur enseignement, on retrouve seulement 40 exercices commun aux trois années (sur 75 posés chaque année) : 21 ont été posés en cours des processus, 8 figurent dans les contrôles de fin d'année et 11 que nous traiterons à part, appartiennent au TAS.

L'examen du tableau VI permet d'observer :

— une assez bonne stabilité des résultats aux contrôles annuels malgré, selon l'opinion des maîtres, des différences importantes entre les niveaux des élèves des différentes promotions : les résultats ne diffèrent pas significativement d'une année à l'autre. Par contre une bonne corrélation entre ces exercices montre qu'ils sont très comparables.

Tableau VI

% de réussites	années			XY t de student r corrélation	XZ t r	YZ t r		
	X 77-78	Y 78-79	Z 79-80					
effectif des élèves	54	50	47					
exercices r = 21	m	65,93	75,23	76,05	t	1,57 NS	1,98 NS	NS
	σ	20,21	18,08	11,75	r	0,97 S.001	0,67 S.001	0,64 S.001
contrôle annuel r = 8	m	73,25	77,50	72,50	t	0,65 NS	NS	NS
	σ	11,46	14,17	10,12	r	0,75 S.05	0,80 S.02	0,47 NS

— Les résultats aux exercices en cours d'apprentissage

eux de différences significatives. Les corrélations sont excellentes : au prix d'une correction linéaire, les pourcentages pourraient presque être confondus. L'examen des corrélations partielles permet d'éliminer, dans une certaine mesure, l'influence de la « nature des exercices ». Alors que les deux premières années restent fortement corrélées, la troisième ne l'est plus :

$$(r_{xz/y} = -0,055(\text{NS}); r_{xz/y} = 0,26(\text{NS}); r_{xy/z} = 0,95(\text{S}))$$

b) L'observation du graphique de contingence montre, qu'en fait, une correction quadratique serait plus indiquée car les résultats des exercices ayant eu la première année les pourcentages de réussite les plus faibles : 5 exercices au-dessous de 50% font l'objet d'une amélioration importante les années suivantes : 3 au-dessous de 50 la 2ème année, et seulement 2 entre 50 et 60 la 3ème. Seuls les exercices proposés en cours de processus sont dans ce cas, mais ne sont pas caractérisés par un type d'opérations mathématiques.

c) L'hypothèse de reproduction du même processus doit être envisagée principalement contre les deux suivantes :

1. Celle d'une « amélioration », au moins locale, comme celle que nous venons de signaler et dont l'effet, visible ici, est un resserrement de la dispersion des résultats (l'écart type des exercices diminue fortement d'une année à l'autre).

2. Celle d'une obsolescence des situations didactiques. Nous entendons par obsolescence le phénomène suivant : les maîtres, d'une année à l'autre, ont de plus en plus de mal à reproduire les conditions susceptibles d'engendrer chez leurs élèves, à travers peut-être des réactions différentes, une même compréhension de la notion enseignée. Au lieu de reproduire des conditions, qui, tout en produisant le même résultat laissent libres les trajectoires, ils reproduisent au contraire une « histoire », un déroulement semblable à celui des années précédentes, par des interventions qui, même discrètes, dénaturent les conditions didactiques garanties d'une signification correcte des réactions des élèves : les comportements obtenus sont apparemment

ment les mêmes mais les conditions dans lesquelles ils ont été obtenus en modifient le sens, plus proche du comportement culturel.

L'enfant puise alors les informations nécessaires à l'établissement de ses réponses, moins dans l'analyse de la situation et la compréhension du problème (qui lui est proposé) que dans les indications « pédagogiques » qui lui sont fournies d'instant en instant, selon un contrat didactique implicite indépendant du contenu. (Brousseau 1979). Ce processus présente l'avantage de réaliser l'institutionnalisation de la connaissance : l'élève prend connaissance des questions qu'on veut lui poser, des réponses qu'on attend de lui, de leur statut culturel... etc.

La situation didactique envisagée initialement comme une situation d'adaptation de l'élève dans une situation-problème est devenue en fait une situation de communication d'un savoir institutionnalisé avec les inconvénients que l'on connaît pour la compréhension et l'acquisition.

Les travaux de E. Filloy permettent de prévoir que certains objectifs de haut niveau taxonomique échappent au contrôle des maîtres et donc aux corrections didactiques. On peut espérer que l'obsolescence, si elle se produit, entraînera d'une part, une évolution des questions choisies par le maître dans le sens d'une augmentation du nombre des problèmes formés et d'autre part une diminution des réussites sur les questions les plus ouvertes.

On peut noter des tendances dans les sens indiqué en observant, par exemple, dans le tableau VII, l'évolution des pourcentages de réussite aux opérations et en les comparant à ceux des structures problèmes. Ces tendances ne sont pas significatives.

d) Sans rapporter ici plus longuement les moyens du même ordre par lesquels on l'obtient, nous accepterons cette conclusion : si l'expérience a reproduit les conditions prévues — ce que l'observation clinique et d'autres statistiques ont à charge de déterminer — elle a produit sensiblement les mêmes résultats. C'est pourquoi nous rapportons ces résultats au processus que nous étudions, quelle que soit l'année qui fournisse l'information étudiée dans le tableau.

se produit habituellement).

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

La relation d'ordre et ses manifestations, rangements, re-
pérages, encadrements ont des taux de réussite qui sont
du même niveau que les opérations (contrairement à ce qui
opérations précédentes.

a) Comparaisons externes

3.4.5. Brefs commentaires

En rapprochant, sous réserve des remarques précédentes,
ces résultats sur II de ceux des tableaux de la première par-
tie de l'article (Brousseau 1980, p. 47) on peut remarquer
qu'ils leur sont assez comparables, sans leur être inférieurs,
sur les objectifs considérés comme fondamentaux par les
maîtres (opérations). Ils s'échelonnent dans le même ordre
de réussite entre 60 et 90%.

On peut attribuer les fluctuations à des différences entre
les questions posées.

De même, on assiste, ici comme là, à une importante bais-
se des réussites dans les « Problèmes ».

b) Comparaisons internes : les décimaux

L'analyse factorielle des résultats indique que le mode de
questionnement (TAS ou CAS) est le premier facteur de
dispersion des élèves et des questions. Les opérations sur
les décimaux sont raisonnablement acquises. Les diffé-
rences entre les réussites aux additions et aux soustractions
ont tendance à s'effacer, sauf pour les TAS qui présentent
des difficultés spécifiques (1 - 0,09 etc). De même, la
réussite est à peu près la même aux multiplications et aux
divisions et en moyenne 10 à 15% inférieure à celle des

Résultats

opérations	m	72	77,4	77,2
	o	12,8	11,08	10,97
problèmes	m	73,8	73,7	67,2
	o	8,13	17,43	5,87
		78	79	80

Tableau VII

Nombre de contrôles

opérations	19	15	15
problèmes	7	1	1
	78	79	80

La conception des décimaux en tant qu'application linéaire est bien acquise : les opérations sont posées à bon escient (compréhension de 80 à 95 %) et bien réussies.

Les situations et problèmes sont moins bien réussis et c'est la compréhension des situations qui est en cause.

c) Les rationnels. Les rangements, repérages et encadrements sont un peu mieux réussis dans les rationnels que dans les décimaux et les résultats sont honorables. Il faut voir là l'effet de renforcement du modèle initial dont nous avons parlé : les fractions servent à établir les règles de comparaison des décimaux. Leur connaissance est renforcée.

Ce phénomène se produit aussi pour la soustraction des fractions qui est utilisée au début de l'approche des rationnels (65 %) alors que l'addition l'est beaucoup moins (40 %) mais dans ce dernier exercice, c'est la présence du 7 qui a fait baisser les résultats.

L'utilisation des opérateurs et du symbolisme fonctionnel est efficace malgré un apprentissage finalement très court sur ce sujet (75 à 90 %).

d) Le fait que la réussite aux exercices sur les décimaux soit assez comparable à la réussite aux exercices correspondants sur les rationnels, est un indice nouveau et positif d'un fonctionnement mieux contrôlé du concept.

e) L'analyse du processus ne sera pas faite ici. La principale question qui nous intéresse (voir paragraphe 5.4.) exigerait l'examen du nombre d'exercices et de leçons et celui des dépendances et des implications entre les résultats des élèves. Cet examen doit porter sur leurs comportements d'erreurs et non seulement, comme ici, sur leurs réussites à propos de situations relevant de niveaux taxonomiques plus élevés.

4. Analyse d'une situation : l'épaisseur d'une feuille de papier

4.1. Description de la situation didactique : séance 1 (phase I.1)

4.1.1. Préparation du matériel et des lieux

L'enseignant a disposé :

— sur une table devant les enfants : 5 tas d'environ 200 feuilles de même format, de même couleur, mais d'épaisseurs différentes (par exemple, des feuilles de polycopie, de bristol etc.) placés dans un ordre quelconque.

Certaines différences d'épaisseur ne doivent pas pouvoir être appréciables au simple toucher. Le maître ne cherche pas à « savoir » ces épaisseurs à l'avance : il n'y a pas de « bonne mesure » à découvrir. — sur une autre table au fond de la classe 5 autres tas de 200 feuilles des mêmes types de papier placés dans un ordre différent qui servira pendant la phase 2.

— 10 pieds à coulisse en plastique (2 par groupe de 5 enfants)

— Un rideau ou un paravent permet de partager la classe en 2.

4.1.2. 1ère Phase : Recherche d'un code (durée 20 à 25 mn)

La maîtresse place les enfants par équipes de quatre ou cinq.

a) Présentation de la situation — Consigne

— « Voyez ces feuilles que j'ai préparées dans ces boîtes A, B, C, D, E. Dans un même tas, toutes les feuilles ont la même épaisseur mais d'un tas à l'autre, les épaisseurs ne sont peut-être pas les mêmes. Pouvez-vous sentir ces différences ? »

Quelques feuilles de chaque tas circulent dans la classe — les enfants les touchent, les comparent. « Comment fait-on dans le commerce pour distinguer les différentes qualités de papiers ? » (d'après le poids).

— Objectif

« Vous allez essayer d'inventer un autre moyen pour désigner et reconnaître ces différents types de papier, et pour les distinguer seulement d'après leur épaisseur.

Vous êtes groupés par équipes concurrentes. Chaque équipe va réfléchir pour trouver un moyen de désigner les épaisseurs des feuilles. Dès que vous en aurez trouvé un, vous l'essayeriez dans un jeu de communication.

Vous pouvez faire des essais avec le papier et ces instruments appelés « pieds à coulisse » (les doubles décimètre suffiraient mais le pied à coulisse a été déjà utilisé) ».

b) Déroulement et remarques

Les enfants essaient presque tous de mesurer l'épaisseur d'une seule feuille afin d'obtenir immédiatement la désignation cherchée. Il font des remarques du genre : « c'est beaucoup trop fin, une feuille n'a pas d'épaisseur » ou « c'est beaucoup plus petit qu'un millimètre », ou « ce n'est pas possible de mesurer une feuille ! »

Il y a souvent à ce moment-là une phase de désarroi, de déconfort même des enfants. Puis ils demandent à la maîtresse s'ils peuvent prendre plusieurs feuilles. Très vite alors, ils font des essais de mesure avec 5 feuilles, 10 feuilles, jusqu'à ce qu'ils obtiennent une épaisseur suffisante pour la mesurer au pied à coulisse ou avec le double décimètre. Alors, ils échangent des systèmes de désignation tels que :

— 10 feuilles 1 mm

60 feuilles 7 mm

ou

— 31 = 2 mm (le maître fera remarquer lors de la discussion que

cet emploi du signe égal n'est pas correct)

Dans l'une des équipes, les enfants ont refusé le pied à coulisse et ont établi ce système de désignation : A = TG B = TF D = M

A, B, C, étant le nom des différents types de papier, TG, TF, M voulant dire : très gros, très fin, moyen. Dans cette phase, le maître intervient le moins possible. Il ne fait de remarques que s'il s'aperçoit, que, dans les groupes, les enfants ne respectent pas — ou simplement ont oublié — la consigne.

Les enfants peuvent se lever, aller chercher des feuilles, les changer, etc.

Lorsque la plupart des équipes a trouvé un système de désignation (et que les cinq enfants de chacune sont d'accord avec ce système ou ce code) ou si le temps est écoulé, le maître passe à la phase suivante : le jeu de communication, et ceci même si toutes les équipes n'ont pas encore trouvé.

4.1.3. 2ème Phase : jeu de communication (10 à 15 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

« Pour éprouver le code que vous venez de trouver, vous allez faire un jeu de communication. Vous verrez au cours de ce jeu, si la désignation des épaisseurs de feuilles que vous avez inventée vous permet de reconnaître le type de feuille désignée.

— Les enfants d'une même équipe vont se séparer en 2 groupes (de 2 émetteurs et de 3 récepteurs, suivant qu'ils sont 4 ou 5 dans l'équipe) : un groupe d'émetteurs et un groupe de récepteurs.

— Tous les groupes émetteurs vont se placer d'un même côté du rideau. Tous les groupes récepteurs de l'autre.

— Les émetteurs vont choisir un des types de papier placés sur la première table (A ou B, ou C ou D ou E) (que les récepteurs ne voient pas grâce au rideau). Ils vont envoyer à leurs récepteurs un message qui devra permettre à ceux-ci de trouver le type de papier choisi. Les récepteurs utilisent les tas de papier disposés sur la deuxième table au fond de la classe pour trouver le type de papier choisi par les récepteurs.

Quand les récepteurs ont trouvé, ils deviennent émetteurs (après vérification avec les émetteurs). Des points seront attribués aux équipes dont les récepteurs auront bien trouvé le type de papier choisi par les émetteurs ».

b) Déroulement et remarques

Dès le début du jeu, la maîtresse met en place le rideau qui sépare émetteurs et récepteurs.

La maîtresse :

- fait passer les messages des émetteurs aux récepteurs
- reçoit les réponses des récepteurs
- va contrôler que cette réponse est conforme au choix des émetteurs et constate, avec toute l'équipe, l'échec ou la réussite.

Tous les messages sont écrits sur une même feuille — que nous pourrions appeler ici « carnet de messages » (fig. 1) — qui circule entre les émetteurs et les récepteurs d'une même équipe — cette feuille porte le numéro de l'équipe. De plus, les émetteurs notent sur une autre feuille — que nous pourrions appeler « fiche de contrôle » — et qu'ils gardent, le type de papier qu'ils ont choisi à chaque jeu afin que la maîtresse puisse constater la réussite ou l'échec.

Remarque : Il est clair que la maîtresse n'a pas introduit de vocabulaire superflu comme « carnet de messages » « fiche de contrôle »... ni d'exigences formelles à propos de la présentation des messages — que les enfants devraient apprendre à respecter. Il n'y a pas eu de consigne générale à ce sujet, seulement des aides et des corrections particulières auprès des enfants mal inspirés.

(1)

numéro de l'équipe	1	E : 10 = 1 mn	1er jeu	1	feuille de contrôle
1er jeu : message émis					
réponse	R : D	réussi	3ème jeu	3 A	
2ème jeu : message émis	E : 21 = 1 mn				
réponse	R : B	réussi			
3ème jeu : message émis	E : 8 = 2 mn				
réponse	R : A	réussi			

carnet de messages

Si certaines équipes n'étaient pas arrivées à faire des messages efficaces, la maîtresse aurait organisé une nouvelle phase de concertation, par équipe, pour la recherche d'un code (même consigne que dans la première phase).

Mais ce fait ne s'est jamais produit (sur 8 expériences identiques). Les enfants sont arrivés à faire 2 ou 3 parties de jeu.

Pendant ce jeu, on observe 3 attitudes différentes chez les enfants :

- certains choisissent un nombre de feuilles dont ils mesurent l'épaisseur
- certains choisissent une épaisseur et comptent le nombre de feuilles
- d'autres cherchent au hasard épaisseur et nombre de feuilles

On remarque aussi que les enfants choisissent de préférence les types de feuilles d'épaisseur extrême : les plus fines ou les plus épaisses pour faciliter le travail de leurs camarades.

4.1.4. 3ème Phase : Résultat des jeux et des codes (20 à 25 mn) (confrontation)

a) Présentation de la situation et consigne

Pour cette phase, les enfants reprennent leur place en équipes de 5 comme pour la 1ère phase de la séance. La maîtresse annonce une comparaison des résultats et prépare le tableau à double entrée : (équipes) X (types de papier) dans lequel elle inscrira les messages échangés et les points obtenus par les équipes (voir tableau I CM2 b 1977) au fur et à mesure de leur compte rendu.

b) Déroulement et remarques

A tour de rôle, chaque équipe envoie un « représentant » qui lit les messages à haute voix, explique le code choisi et indique le résultat du jeu.

Les différents messages sont comparés et discutés par les enfants. Comme ils sont souvent très différents, la maîtresse leur demande d'adopter un code commun.

Exemple : 10 = 1 mm

TF

60 feuilles 7 mm

Après discussion, la classe entière a décidé de marquer :

10 f ; 1 mm

60 f ; 7 mm

Lorsque tous les messages sont inscrits, les enfants observent le tableau et font spontanément des remarques du type : « ça, ça ne va pas » ou « ici, c'est bien » etc.

Ces remarques pourraient être classées en 4 catégories :

1ère catégorie :

Si les feuilles sont de type différent, à un même nombre de feuilles doivent correspondre des épaisseurs différentes.

Exemples du tableau I :

19 f ; 3 mm → Type A	}	« ça ne va pas »
19 f ; 3 mm → Type B		
19 f ; 2 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
19 f ; 2 mm → Type D		

2ème catégorie :

Pour un même type de feuilles, au même nombre de feuilles correspond la même épaisseur

Exemple du tableau I :

30 f ; 2 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
30 f ; 3 mm → Type C		

3ème catégorie :

S'il y a 2 fois plus de feuilles, l'épaisseur est 2 fois plus grande.

Exemple du tableau I :

30 f ; 3 mm → Type C	}	« ça ne va pas »
15 f ; 1 mm → Type C		

et les enfants rajoutent « on aurait dû trouver » :

30 f ; 3 mm	parce que	x2 (15 f ; 1 mm) x2
15 f ; 1 mm		

4ème catégorie :

Des différences sur le nombre de feuilles ne doivent pas correspondre à des différences égales de mesures :

Exemple :

19 f : 3 mm } « ça ne va pas parce qu'une feuille ne peut pas mesurer 1 mm »

A la fin de la séance, le maître propose aux enfants de reprendre l'examen de ce tableau à la prochaine séance de vérifier collectivement les mesures par la manipulation et de les rectifier si c'est nécessaire.

Remarque : La présentation des opérations effectuées sur les nombres dans la recherche de couples équivalents à l'aide de flèches n'a aucun caractère formel ni obligatoire, c'est une « manifestation familière de l'emploi des opérateurs naturels auquel les enfants sont habitués.

4.1.5. Résultats

Les enfants savent tous mesurer l'épaisseur d'un certain nombre de feuilles de papier, écrire le couple correspondant et rejeter un type de papier ne correspondant pas à une écriture qui leur est donnée. La plupart est alors capable de mettre en œuvre une stratégie de comparaison et en conclusion d'accepter un type de papier comme correspondant à une mesure. Quelques-uns ont formulé cette stratégie. La plupart des enfants peut analyser un tableau de mesures et signaler des incohérences en se servant implicitement du modèle linéaire.

4.2. Comparaison d'épaisseurs et couples équivalents (Activité 1, Séance 2)

4.2.1. Préparation du matériel et des lieux

Le matériel est le même que pour la séance 1 : les tas de feuilles disposés de la même manière, les pieds à coulisse.

4.2.2. 1ère phase (25 à 30 mn)

a) Présentation de la situation — Consigne

La maîtresse demande aux enfants de reprendre l'examen du tableau réalisé au cours de la 1ère séance.

Cette observation se fait d'abord silencieusement, pour que les enfants puissent repérer les incompatibilités les plus évidentes de certaines mesures. Puis la maîtresse leur propose de relever les erreurs qu'ils ont vues, ligne après ligne (pour chaque type de papier).

b) Déroutement et remarques

Les enfants, après observation, et sur leur demande, viennent à tour de rôle au tableau pour montrer les « messages » qui leur apparaissent inexacts et proposent éventuellement une correction.

Ces corrections sont discutées par l'ensemble des enfants. S'ils sont tous d'accord, la correction est faite sinon, ils proposent de vérifier par une manipulation : ils recomptent le nombre de feuilles indiquées dans le message et font la mesure. Après vérification collective, le nouveau message est adopté et inscrit sur le tableau (cette manipulation est faite par groupes : 2 groupes vérifient un message, 2 autres, un autre message... etc). Il est arrivé souvent que lorsque le même type de papier est mesuré par des groupes d'enfants différents ces groupes ne trouvent pas des mesures compatibles. Ceci est dû souvent aux erreurs de lecture ou au fait que les enfants ont plus ou moins tassé les feuilles. Ils s'en rendent compte très vite et le disent.

Il est arrivé également pour des types de papier d'épaisseurs très voisines que les mesures trouvées ne permettent pas de reconnaître de quel papier il s'agit. C'est au cours de cette phase que les enfants se sont rendu compte qu'ils ont plus de chance de distinguer des épaisseurs de papier voisines en prenant un plus grand nombre de feuilles. En effet, 15 ou 20 feuilles seulement de papiers d'épaisseurs très voisines ont des mesures si proches que les enfants ne peuvent pas les distinguer avec précision. C'est alors qu'ils proposent souvent de mesurer l'épaisseur de 50, 80 ou 100 feuilles.

Exemples de remarques d'enfants (ces exemples sont pris dans le tableau II)

10 f ; 2 mm
et 5 f ; 1 mm pour le type B, c'est bien.

Un enfant ajoute :

$x3 \left(\begin{array}{l} 5 f ; 1 mm \\ 15 f ; 3 mm \end{array} \right) x3$

Ces trois mesures : 5 f ; 1 mm — 10 f ; 2 mm et 15 f ; 3 mm sont donc conservées.

Par contre dans la ligne du type C, les mesures :

12 f ; 1 mm

et 8 f ; 1 mm sont contestées et rejetées par les enfants qui proposent de les refaire.

Autre exemple (tableau II)

Equipes	Type C	Type D	Conclusions des enfants
1	100 f ; 8 mm	100 f ; 11 mm	1) D > C (D est plus épais que C)
2	12 f ; 1 mm	10 f ; 1 mm	2) D > C (D est plus épais que C)
3	8 f ; 1 mm		3) C > D (C est plus épais que D)
4		14 f ; 1 mm	

Les deux premières conclusions ne correspondent pas à la 3ème —
 les enfants décident de conserver la 1ère conclusion car ils voient
 que sur 100 feuilles, il y a 3 mm de différence alors qu'avec 8 f.
 14 f, 12 f, il n'y a pas de différence de mesure.
 Ils disent aussi qu'une différence de 3f (12-8) ou de 2 f (14-12)
 ne change pas la mesure (ils vérifient par une manipulation).

4.2.3. 2ème phase : finition du tableau : recherche des
 valeurs manquantes (20 à 25 mn)

a) Présentation de la situation — consigne

Les enfants remarquent que certains types de papier n'ont pas été
 choisis au cours du jeu de communication et qu'il manque des me-
 sures.
 La maîtresse propose alors aux enfants de compléter le tableau en
 mesurant les types de papier manquant.

b) Déroulement et remarques

Les enfants se partagent le travail par groupes de 5 non plus
 concurrents mais coopérants et pas forcément les mêmes que dans la
 séance précédente (plusieurs groupes prennent le même type de papier
 et vérifient ensuite la comparabilité des mesures)

Exemple pour le type C :

$$\left. \begin{array}{l} 12 \text{ f} : 1 \text{ mm} \\ 96 \text{ f} : 8 \text{ mm} \end{array} \right\} \times 8$$

Quand tous les enfants sont d'accord, les nouvelles mesures sont
 inscrites dans le tableau (tableau III). A la fin de cette phase, le ta-
 bleau est donc entièrement corrigé et complet. Il y a plusieurs mes-
 sages compatibles pour chaque type de papier.

4.2.4. 3ème phase : jeu de communication (15 mn)

— La maîtresse propose aux enfants de refaire le jeu de communica-
 tion de la 1ère activité en tenant compte de toutes les remarques et
 corrections qu'ils ont faites (grand nombre de feuilles, tassement
 du papier...)
 — Le jeu est donc repris une fois à la grande satisfaction des enfants
 qui réussissent tous, même si on ajoute un ou deux nouveaux types
 de papier.

4.2.5. Résultats

Ces enfants savent adapter le nombre des feuilles choisies aux
 besoins de la discrimination de leurs épaisseurs (augmenter le nom-
 bre de feuilles lorsque les épaisseurs sont très voisines). Ils savent
 trouver par le calcul, des couples correspondants au même type de
 papier. Tous savent maintenant utiliser le modèle linéaire pour ana-
 lyser un tableau. Une partie d'entre eux est capable d'utiliser des rela-
 tions de voisinage entre les couples. Un grand nombre d'enfants a été
 conduit à juger des déclarations et à argumenter lui-même.

EXEMPLES DE 1^{er} TABLEAU DE MESSAGES (non corrigé)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	19 f ; 3 mm	10 f ; 2 mm	20 f ; 4 mm	
B	19 f ; 3 mm		4 f ; 1 mm	15 f ; 2 mm
C	19 f ; 2 mm	30 f ; 2 mm	100 f ; 8 mm	30 f ; 3 mm 15 f ; 1 mm 20 f ; 2 mm
D	19 f ; 2 mm 12 f ; 1 mm		100 f ; 9 mm	
E			9 f ; 4 mm	13 f ; 5 mm 7 f ; 3 mm

Tableau III - classe de CM2 b (1977)

type des feuilles	équipe 1	équipe 2	équipe 3	équipe 4
A	48 f ; 9 mm			
B			10 f ; 2 mm	5 f ; 1 mm 15 f ; 3 mm
C	100 f ; 8 mm	12 f ; 1 mm 96 f ; 8 mm	8 f ; 1 mm 64 f ; 8 mm 12 f ; 1 mm	
D	100 f ; 11 mm	10 f ; 1 mm 100 f ; 10 mm		14 f ; 1 mm 154 f ; 11 mm
E	23 f ; 10 mm	10 f ; 4 mm 8 f ; 3 mm	6 f ; 2 mm	

a) *Analyse de la tâche des élèves : Émetteurs*

La tâche d'émetteur est bien plus légère que celle de récepteur : on ne doit compter que les feuilles du tas choisi et prendre soin de bien les mesurer. Le désir d'avoir des nombres simples et corrects conduit à choisir un nombre de feuilles tel

- que l'épaisseur soit aussi voisine que possible d'un nombre entier de millimètres
- que les erreurs dues au tassement des feuilles restent faibles
- que le nombre de feuilles à compter reste assez faible.

Une analyse plus approfondie ou une pratique répétée conduirait l'émetteur à choisir :

4.3.1. La situation-problème

4.3. Analyse de la situation : le jeu

Les enfants savent trouver des couples équivalents. Ils savent comparer les épaisseurs de feuilles (beaucoup avec 2 méthodes). Ils ont une stratégie de rangement des couples, d'après ces comparaisons. Ils savent désigner l'épaisseur d'une feuille de papier à l'aide d'une fraction et trouver des fractions égales.

Ils ne savent pas trouver l'égalité de 2 fractions dans le cas général. *Remarque* : Ces savoir-faire sont constatés en situations. Il n'est pas possible à ce moment-là de détacher une question du contexte et de la poser de façon indépendante. On ne pourra donc pas encore s'appuyer sur ces résultats en tant que connaissances « acquises » et identifiées comme telles par l'enfant.

4.2.7. Résultats

Après avoir vérifié que les élèves savaient reconnaître des feuilles désignées par leur épaisseur : (48 ; 9) par exemple, l'enseignant demande de trouver d'autres écritures pour désigner chaque épaisseur, puis de ranger les feuilles de la plus mince à la plus épaisse (25 f ; 7 mm) qu'il faut ranger avec les autres.

En fin de séance, l'enseignant expose aux élèves une méthode d'écriture de l'épaisseur d'une feuille : (50 ; 4) désigne un tas de 50 feuilles qui mesure 4 mm d'épaisseur, l'épaisseur d'une de ces feuilles s'écrit $\frac{50}{4}$ que l'on lit : « quatre cinquantièmes de millimètres ». Il vérifie par des exercices que cette information est transmise.

La distinction entre l'épaisseur d'une feuille et la désignation d'un tas de feuilles est essentielle mais difficile et ne sera apprise que progressivement.

4.2.6. Résumé de la suite de la séquence (Séance 3)

- un nombre de feuilles assez grand pour que la différence entre leur épaisseur et l'épaisseur d'un même nombre de feuilles du type le plus voisin soit assez nette par exemple, excède 1 mm (tassement éliminé)
- un nombre de feuilles tel que le coût de l'opération soit minimum (Le coût de l'opération est évalué en coût du comptage des feuilles et en prix des erreurs par tentative. Le coût des erreurs dépend de l'erreur relative par l'intermédiaire de la probabilité d'erreur qu'elle engendre).

Ce point a mérité une étude mathématique qui n'est pas publiée ici.

b) Analyse de la tâche des élèves : Récepteurs

La tâche des récepteurs est plus lourde. S'ils « appliquaient » un algorithme rationnel, ils devraient pour interpréter le message (60 f ; 7 mm)

- compter 60 feuilles de chaque type de papier
- mesurer l'épaisseur de ces 5 tas de 60 feuilles
- comparer: les tas dont la mesure serait la plus proche de 7 mm seraient retenus.

En fait, cette procédure, si elle était systématiquement appliquée, ferait perdre le bénéfice essentiel de la situation : les enfants peuvent (doivent) éliminer certaines hypothèses en utilisant l'expérience qu'ils ont acquise dans la première phase et en mettant en œuvre une représentation (un modèle implicite) de l'épaisseur. Dans cette phase d'action, des relations, des appréciations, des opérations, encore floues, incomplètes, approximatives, vont s'éprouver, se clarifier, se complexifier avant même d'être formulables.

Exemple : « 60 f ; 7 mm, c'est du (papier) fin, c'est pas du A, on avait trouvé pour A (3 f ; 1 mm » — Sous-entendu 60 f de A feraient bien plus de 7 mm...

Si les enfants se trompent dans leurs hypothèses, ils peuvent s'en apercevoir sans trop de retard et sans autre sanction qu'une petite perte de temps. La représentation permet d'anticiper, d'économiser des tentatives, elle est contrôlée par l'action, sans la conditionner complètement, ni être conditionnée par elle. Elle commande toutefois ces décisions d'action car une fois écartés les « papiers » improbables, il faut retenir les autres. « C donne pour 30 f. 2 mm

et D aussi, on ne peut pas savoir. Tiens remesure... Si 30 f de C font un peu moins que 2 ça doit être D... Il faudrait plus de feuilles... »

Pour les récepteurs, deux messages ont tendance à être équivalents s'ils permettent la même discrimination parmi les papiers, donc s'ils sont voisins topologiquement.

Il est nécessaire que chaque enfant soit tour à tour émetteur et récepteur.

Même si tous les enfants n'acquerraient pas une égale aisance dans le raisonnement sur les épaisseurs, tous acquerraient une bonne connaissance des conditions que devra satisfaire le modèle qu'on choisira : ce qu'il devra permettre.

4.3.2. La situation didactique

a) Analyse de la tâche du maître : phase 1

Dans les deux premières phases, la tâche du maître la plus importante ne consiste pas à contrôler le contenu et le déroulement des réflexions des enfants : il ne doit pas intervenir, qu'il entende une proposition intéressante ou une déclaration fautive. C'est la situation qui doit exercer ces feedback nécessaires. Il n'est plus — provisoirement — le gardien de la vérité, le garant, le recours, le destinataire obligé et final de toutes les interventions des enfants.

b) Il doit — par son attitude — convaincre les enfants de sa neutralité à l'égard de leurs appréciations de la situation afin qu'ils renoncent à tirer de lui les informations et les aides qu'ils ne doivent tirer que d'eux-mêmes.

Neutralité mais pas indifférence : il reçoit avec un égal intérêt toutes les suggestions et les renvoie avec conviction sans en modifier le contenu mais il essaie de les rendre réalistes. Le maître renvoie les enfants à la situation mais s'attache à accroître leur investissement, leur désir de réussir. Il facilite la solution des problèmes subalternes, surveille le respect des règles et des consignes qu'il précise et répète à l'occasion, résout les problèmes d'organisation, aide l'évolution favorable des conflits dans les groupes. Il veille à ce que tous s'investissent et concourent au résultat cherché. Pour cela, il s'intéresse beaucoup au résultat final qu'il enregistre, participant aux succès, comme aux déceptions, heureux

avec les uns, encourageant les autres, dans une sorte d'esprit « bon sportif ».

Ici comme là, ce sont les efforts qui sont éducatifs et non les buts marqués.

En particulier, le décompte des points des équipes ne donne lieu à aucune déclaration de sa part, les équipes se défient d'une leçon à l'autre. Les points servent à déterminer les stratégies pendant le jeu, pas à classer les gens après le jeu.

c) La phase 3 de la 1ère activité est une phase de confrontation (ce n'est pas une situation de validation formelle). Là encore, le maître est un conducteur de jeu qui fait jouer mais ne joue pas lui-même. Pour tous les enfants, les problèmes qu'il réussit à faire résoudre par ses exigences : formulations claires, renseignements précis... sont ceux qui empêcheraient le fonctionnement de la situation. Il n'a pas d'exigences « externes ». Il laisse arriver à leur formulation correcte les déclarations fausses ou absurdes, il laisse aux autres le temps de formuler leur jugement. Il ne confirme pas une déclaration correcte avant que tous se soient déclarés d'accord.

Il encourage les minoritaires à exprimer leurs réserves, clarifie les débats même s'il ne peut pas les résoudre.

4.3.3. Le maintien des conditions d'ouverture et leur rapport avec la signification du savoir

Dans les situations de recherche, la pédagogie classique conduit le maître à « exploiter » immédiatement ou presque la « bonne » déclaration. Il parle avec le premier ou un des premiers « qui trouvent ». Finalement les échanges concernent 20 % des enfants (les plus « vifs »). Pour que ces échanges soient compris des autres, les questions posées doivent être telles que 80 % d'entre eux seraient capables d'y répondre presque directement, s'ils avaient le temps nécessaire : les questions seront donc assez fermées et la recherche consistera en une sorte d'épreuve de vitesse mettant à l'honneur les algorithmes. Ainsi, 60 % des enfants participent par procuration. Quant aux 20 % qui ne sauraient pas répondre, il ne s'agit jamais pour eux de chercher, mais d'apprendre un savoir tout fait, qu'ils devraient posséder, qu'il est même « honteux » de ne pas posséder, puisqu'il

ne s'agit finalement ici que de savoir « qui l'a » ou « qui ne l'a pas ». Donc, pour 80 % des enfants, la recherche est une situation sanctionnée négativement où l'accent est mis sur le savoir : devoir chercher est l'aveu d'une faiblesse qui ne pardonne pas. Devoir apprendre est le fait d'une minorité défavorisée et méprisée.

Les situations que nous proposons ne doivent pas être conduites de la même façon.

Les questions sont souvent plus ouvertes, en ce sens que le nombre des enfants capables d'y répondre directement est très faible : presque tous ont à chercher. Les échanges vont concerner 80 % des élèves sur des problèmes que moins de 20 % d'entre eux peuvent résoudre directement. Le maître maintient la situation ouverte en n'exploitant pas les idées. Il se contente de les faire prendre en considération. Le fait d'être le premier à avoir une idée perd un peu de l'importance.

Les enfants qui ont trouvé plus vite doivent apprendre à faire partager leur conviction sans la sécurité de la validation par l'adulte. Ainsi, la recherche et l'apprentissage devient l'affaire principale de la majorité.

Ces situations sont délicates à conduire : la voie y est ouverte à un champ d'attitudes sociales très diverses. Le maître a appris à contrarier les actions de diversions ; certains enfants égarent l'opinion des autres pour avoir le temps de chercher eux-mêmes, accaparent l'attention, ne respectent pas la recherche des autres, etc... C'est toute la fonction et l'usage du savoir et de la vérité qui s'apprennent à ce moment-là. Certains enfants, habitués à un statut dans la classe et à un contrat didactique classique, vivent mal les changements subits de mode d'action didactique du maître comme l'absence de sécurité, de valorisation immédiate, la dépendance par rapport à l'action ou à l'opinion d'autrui, etc. Pour les enfants et même pour les parents, le maître a dû parfois faire provisoirement le médiateur des changements, souvent profonds, qu'il avait provoqués. De toute façon, les changements fréquents de types d'interventions utilisées favorisent les évolutions en douceur et l'adaptation des attitudes malgré leur diversité.

L'évolution s'opère correctement dans la mesure où on parvient à faire en sorte que les relations avec l'objet de

l'étude, et les relations avec les autres sujets apprenant deviennent sources de plaisir et enjeu du désir. Les prises de décisions, les actions, les échanges, les jugements... doivent devenir d'abord des occasions d'une jubilation fondamentale de la classe. Le maître est conduit à renoncer à l'objet unique du désir des enfants.

Le savoir, l'alibi symbolique d'une lutte entre les enfants, doit pouvoir devenir l'objet d'une activité libidinale.

La relation maître-élève s'efface ainsi devant les relations enfant-savoir, enfant-milieu-savoir et enfant-autrui-savoir.

4.3.4. *Le contrat didactique*

Le maître est la mémoire de référence de la classe. Il se souvient des conventions, des accords et des faits pertinents. Il les rappelle à bon escient. C'est par ce rôle qu'il commande et contrôle les apprentissages.

Enfin, le maître représente le savoir des adultes. Lorsqu'il fournit des informations sur ce sujet (par exemple : Activité 1 — Séance 3 — Phase 3). Les enfants, qui ont leur propre système, peuvent comprendre la notation en cours et ses avantages — ou son équivalence — avec le système qu'ils ont construit, et l'adopter, non pas librement mais consciemment (situations d'institutionnalisation).

Bien sûr, les éventuels changements de notations ou de vocabulaire coûtent aux enfants et aux maîtres.

C'est pourquoi les conditions d'apprentissages ont un caractère critique et dépendent essentiellement du contrat didactique.

A aucun moment au cours de cette première activité, le maître n'indique qu'il faut apprendre quelque chose. A aucun moment, il ne fait répéter une activité en ayant convenu avec les enfants qu'elle devrait être sue, connue, apprise. (Cela viendra plus tard peut-être) et en reconnaissant qu'une phase n'était pas justifiée par d'autres raisons.

En fait, la phase 1 de la 1ère séance : « recherche de couples équivalents », doit permettre à tous les enfants d'effectuer la recherche d'au moins deux couples équivalents à un couple donné, de comparer deux couples une dizaine de fois au moins, d'expliquer une équivalence au moins une fois, d'entendre plusieurs méthodes de comparaisons. Tout cela dans une situation de contrôle collectif. Mais le

contrat passé avec eux n'est pas « vous devez apprendre et savoir faire ceci pour pouvoir répondre à la question suivante comme je le veux », mais « vous devez faire ceci pour pouvoir participer au défi suivant ». L'apprentissage de la recherche de couples d'équivalence se poursuit dans la phase 2 et plus loin, il n'est pas nécessaire de l'« achever » dès la phase 1. De plus, cela exigerait le plus souvent la *formula-tion* d'une méthode de recherche comme par exemple : on peut multiplier ou diviser les deux termes du couple par un même nombre, « ou pire » deux couples sont équivalents si « immanquablement » à ce moment-là on devra dire, ou une sottise, ou une phrase incompréhensible. D'ailleurs, ces formulations de méthodes ne sont que rarement économiques à long terme. Nous le refusons catégoriquement ici.

La solution de la situation de la phase 2 : rangement des épaisseurs, n'est pas plus compliquée si l'on ne sait pas chercher des équivalents, puisque l'enfant réfléchit dans la représentation de la situation :

— en nombre de feuilles et épaisseurs des tas — au lieu d'appliquer un algorithme sur l'écriture de l'épaisseur d'une feuille.

Tout apprentissage *formel* (convenu, institutionnel) à ce moment, serait lourdement hypothéqué de contresens. Par contre il faut que le maître vérifie que tous les élèves ont bien réfléchi, choisi et calculé un couple nouveau... au besoin au tableau, avec l'aide des autres.

— Ceci ne veut pas dire qu'il n'y a pas d'apprentissages ni d'apports d'information. La phase 3 de la 3ème séance montre un exemple d'apport d'information. Il s'agit de conventions à enregistrer et à utiliser. Ces conventions seront désormais de règle et le maître « exigera » leur emploi dans les communications « publiques » des enfants. En fait, il exercera une pression croissante au fur et à mesure de la banalisation de la convention, sans refuser de comprendre, surtout au début, d'autres formulations.

4.4. Analyse des variables didactiques. Choix du jeu

4.4.1. Le type de situation

Nous ne reviendrons pas sur le caractère fondamentale-ment *cybernétique* de la situation de communication :

Le codage le plus économique, si on admet que l'on peut augmenter à volonté le nombre des types de papiers, consiste à les désigner à l'aide d'un couple, nombre de feuilles, épaisseur en millimètre — Remarquons toutefois que la situation de recherche de code n'est pas répétée. Il n'y a pas de dialectique de la formulation des couples. Le code est mis en place de façon presque immédiate. La situation de communication ne fonctionne donc pas beaucoup en situation d'apprentissage, elle sert seulement à donner « du sens » à la phase d'action des émetteurs et des récepteurs. Le caractère « optimal » du message n'a fait l'occasion d'aucun commentaire avec les enfants. Il nous assure seulement une bonne acceptation de leur part.

4.4.2. *Le choix des épaisseurs : modèle implicite*

Par contre la composante « action » de la situation est l'occasion de la création d'un modèle implicite du système des épaisseurs.

Pourquoi, puisqu'il s'agit finalement de mesurer des longueurs, n'avoir pas choisi des objets de longueurs appréciables ? L'enfant possède à cet âge une représentation efficace des « longueurs » comprises entre 1 mm et 50 mm. C'est-à-dire qu'il peut les comparer, les mettre bout à bout, les partager, et au besoin les évaluer (c'est-à-dire leur faire correspondre approximativement un entier à l'aide des systèmes d'unités en usage).

Mais justement, cette représentation est assez efficace pour permettre de résoudre la plupart des situations pratiques sans qu'il soit nécessaire d'utiliser de système numérique nouveau : perception, mesurage entier, etc.

L'enfant peut imaginer ou effectuer des opérations sur des « longueurs » : somme, différence, sans utiliser de modèle, de représentation.

Par exemple, il peut indiquer la longueur désirée d'une baguette en envoyant une ficelle de « longueur » égale.

L'activité mathématique peut alors au mieux traduire, transcrire « la réalité » supposée préexister.

Comme en géométrie, le modèle implicite dont disposent les enfants est si riche qu'il commande toutes les décisions. Lorsqu'il ne parvient pas à résoudre une situation, la théorie mathématique qui pourrait lui suppléer est alors

trop complexe pour être construite à ce moment. Si on utilise ce modèle implicite, la théorie mathématique construite, ici, le mesurage, n'apparaît jamais que comme une complication, une exigence supplémentaire ou superflue. Elle doit être guidée, contrôlée par « l'intuition », elle four- nit au mieux des renseignements plus précis... etc.

Nous avons donc choisi pour la variable didactique « grandeur des objets », un domaine mettant en défaut le modèle implicite naturel sans toutefois exclure des mani- pulations.

Avec des longueurs de quelques centimètres de millimètres, on peut « concevoir » les opérations visées mais sûrement pas les percevoir ni les effectuer directement. Certaines sont mêmes rarement inconcevables comme partager une de ces longueurs (un cheveu en quatre ; dans le sens de la longueur). Nous verrons que cette impossibilité est voulue pour d'autres raisons. Le nombre qui mesure l'épaisseur de- vient alors le moyen — le seul « concret » d'appréhender cette épaisseur, de construire les expériences de comparai- sons, de prévoir la somme, etc... La représentation mathé- matique a été réintégrée dans son rôle fondamental de théo- rie en construction, dans son rapport dialectique avec le constructeur et avec la situation.

De plus, l'enrichissement de cette représentation va pou- voir être contrôlé si, dans un premier temps, on favorise le développement du modèle implicite en rendant inutile l'explication des méthodes (de comparaison par exemple). On pourra provoquer une phase de formulation (Activité 1 — Séance 2) puis de formalisation progressive dans le mo- dule 4., au moment opportun pour chaque notion : avant que le modèle implicite ne soit trop efficace, assez tôt pour être utile, mais assez tard pour avoir du sens ; assez tôt pour que le sens attribué au langage soit indispensable à l'action et à sa formulation, assez tard pour que les concepts formu- lés ne soient pas isolés les uns des autres, mais fonctionnent ensemble.

4.4.3. Du modèle implicite à l'explication

Le modèle implicite développé par les enfants dans la 1ère séance comprend une approche de la relation d'équi- valence algébrique fondamentale (nombre de feuilles du

tas 1 \times épaisseur du tas 2 = nombre de feuilles du tas 2 \times épaisseur du tas 1, mais sûrement pas sous cette forme), sous la forme d'un ensemble d'applications linéaires de N dans N .

Cette application est approchée par ses propriétés :

— la première remarque des enfants signifie qu'ils veulent des applications différentes pour des feuilles perçues comme différentes (injection de l'ensemble des applications dans l'ensemble des types de papiers).

Remarquons qu'il n'est pas réaliste de la part des enfants de vouloir que des applications différentes indiquent des types de papiers différents : ils ont des exemples sous les yeux où pour un même type de papier, et pour un même nombre de feuilles, on obtient des épaisseurs différentes, et où cependant le message a marché. Il suffit d'avoir des résultats suffisamment voisins les uns des autres et suffisamment éloignés des autres résultats.

— Cependant cette exigence est formulée : il semble que l'on voudrait un nombre par type et un type par nombre. En fait, ce sont seulement les résultats scandaleux qui sont rejetés ;

« 30 f ; 2 mm ; 30 f \rightarrow 3 mm quelqu'un se trompe ! » (ces résultats ne sont pas algébriquement équivalents, ni topologiquement assez voisins).

— C'est seulement ensuite que la linéarité est formulée, par sa propriété caractéristique de conserver les rapports. Les enfants relèvent les couples qui contrarient cette propriété et l'énoncent ensuite.

Remarque : S'il n'y avait pas eu des tentatives un peu variées, avec la liberté de prendre le nombre de feuilles qu'on veut, des rapports simples ne seraient pas apparus. Si le jeu n'avait pas été rapide, un peu anarchique, bon enfant, les contradictions non plus ne seraient pas apparues.

Il faut remarquer que le modèle explicite n'apparaît pas comme une formulation positive des propriétés connues à l'occasion de leur existence. Les couples qui obéissent à la loi implicite ne donnent lieu à aucune remarque : ce sont les couples qui ne lui obéissent pas, qui, par l'accident qu'ils révèlent, rendent la formulation nécessaire : comme une théorie, le modèle se révèle par ses contradictions — apparentes ou réelles — avec l'expérience et non par ses accords.

Il faut voir dans ce fait un phénomène tout à fait général et important qui contredit formellement certaines théories didactiques empiristes, comme par exemple le processus psychodynamique de Dienes : ce ne sont pas les ressemblances (les isomorphismes) entre les situations rencontrées qui sont le moteur principal des « abstractions » non plus que la transcription ou la schématisation des structures ne sont la clé de la formulation. La simple familiarité, même active, avec des situations bien structurées, ne suffit jamais à provoquer une mathématisation. Au contraire, les problèmes posés par une situation à la mise en œuvre d'un modèle (implicite ou explicite) préexistant, ou par une théorie à la prise d'une décision, provoquent l'évolution, la reprise ou le rejet et la formulation des théories.

Cette dialectique caractérise la plupart des mathématisations.

Ici, la situation initiale (1^{ère} séance, phases 1 et 2) peut être envisagée sans modèle initial particulier (dénombréments et mesures entières — homothéties de \mathbb{N}). Sa résolution conduit à un langage et à des méthodes peu satisfaisants du point de vue logique. La résolution de ce problème théorique (phase 3) exige de nouvelles « expériences » et confrontations (2^{ème} séance) qui amènent la réduction des contradictions et l'usage d'un modèle en partie explicite. Surtout en ce qui concerne la technique de mesurage des feuilles de papiers et un peu aussi la relation d'équivalence fondamentale entre les écritures.

Avec la 3^{ème} séance, commence une autre étape : la mise à l'épreuve du système de mesure. Permet-il de reconnaître l'écriture de l'épaisseur d'une des feuilles connues, de la distinguer de l'écriture d'une nouvelle épaisseur ? Ici, le codage devient à nouveau l'objet de l'étude des enfants avec la formulation de l'équivalence, la création des classes d'équivalences et l'étude de la compatibilité de la relation d'ordre sur les couples avec la relation d'équivalence : les conclusions doivent être les mêmes, quels que soient les couples qui servent d'équivalence.

La désignation des classes par une « traction » (le mot n'est pas obligatoirement prononcé), l'écriture de l'égalité des classes, sont des informations apportées par la maîtresse comme des conventions sociales (à respecter pour être

compris des autres) et comme une conclusion didactique, une confirmation implicite de la validité de la démarche de la classe.

Les enfants pensent que les types de feuilles peuvent se ranger par ordre croissant d'épaisseur. La théorie qu'ils ont construite permet ce rangement alors que leurs sens ne le peuvent pas, et tout de même ils peuvent avoir des confirmations assez concrètes de leurs inférences — leur théorie fonctionne comme une vraie théorie.

Elle pose de nouveaux problèmes car la méthode de comparaison n'apparaît pas valable pour n'importe quel couple et elle a recours à la fois :

— aux relations algébriques qui permettent de ramener la comparaison de $(40 ; 6)$ avec $(20 ; 4)$ à celle de $(40 ; 6)$ avec $(40 ; 8)$ ou encore de ramener $(30 ; 4)$ et $(20 ; 2)$ à $(30 ; 4)$ et $(40 ; 4)$

— et aux relations topologiques qui permettent de comparer par exemple $(19 ; 3)$ et $(10 ; 2)$ car $(19 ; 3)$ est moins épais que $(20 ; 4)$ — Commentaire des enfants : « avec une feuille de plus, le tas fait 1 mm de plus, et comme une feuille ne mesure pas 1 mm... ».

Il se trouve que la construction générale de cette séquence suit le modèle d'une construction axiomatique des rationnels — assez moderne (couples, passage au quotient). Il n'est pas niable que la connaissance d'une telle axiomatique a permis de l'envisager comme solution aux problèmes de didactiques des décimaux que nous nous posions. Il serait faux de croire que ce choix a précédé l'analyse didactique. Si nous avions été conduits à choisir un autre domaine des variables didactiques et une autre genèse, les couples auraient pu perdre toute signification, l'équivalence tout intérêt, la construction aurait pu alors coïncider *localement* avec une autre axiomatique classique ou non.

De toute manière, laisser apparaître la trace de cette architecture dans l'activité des enfants sous une forme quelconque, serait sans intérêt pour eux.

5. Questions de didactique des décimaux

5.1. Les objets du discours de didactique

Le discours de didactique porte sur quatre niveaux d'objets :

1. Le niveau des faits contingents : c'est la description des productions effectives du maître ou du système éducatif : objectifs déclarés, informations fournies, consignes, etc. Les productions effectives des élèves, les comportements, les résultats, les réactions du milieu etc.

2. Le niveau de la situation didactique. Il s'agit d'interpréter les décisions du maître, les comportements de l'élève, leurs motivations, etc. en discernant contre quels autres comportements ceux qui sont attestés ont été choisis, et de les relier en stratégies, en modèles de comportement, d'erreurs, si possible explicatifs des « jeux » et des contrats respectifs et réciproques des partenaires. Cette analyse met en évidence les variables qui assurent la reproductibilité de la situation, à travers certaines différences entre les faits observés.

3. Le niveau de l'analyse du concept et de ses genèses. Il s'agit alors de déterminer l'ensemble des situations qui sont susceptibles de faire fonctionner une notion, en lui conférant les différents sens qui déterminent le concept correspondant. Seules, les différences de situations qui affectent le concept, sont dans le champ de la didactique, elles sont le fait de variables à déterminer dans chaque cas. 4. Le niveau des faits et des débats de didactique où sont produits les concepts, les méthodes et les moyens d'analyse nécessaires aux niveaux précédents.

Chaque niveau a ses méthodes propres, d'études et de preuve — et ses problèmes de méthodologie — qui font considérer une expérience de didactique comme une expérience d'épistémologie expérimentale et la font distinguer d'une expérience d'enseignement.

Les interactions de ces quatre niveaux sont évidentes mais la façon dont s'articulent les problèmes d'enseignement et les questions de didactique n'apparaît pas encore bien claire à beaucoup, ainsi que la façon dont s'opposent et se complètent le point de vue scientifique et la phénoménotechnique didactique. C'est pourquoi il nous faut revenir sur le

processus que nous venons de décrire de façon très détaillée, pour montrer comment il peut être le lieu où peuvent s'éprouver et s'actualiser les questions qui nous intéressent.

5.2. Quelques concepts de didactique

5.2.1. Les composantes du sens

La définition du sens d'une notion est, nous l'avons dit, un des problèmes centraux de la didactique. Ce qui précède nous permet maintenant d'entrevoir comment nous proposons de le résoudre : il s'agira de *recenser* et de *classer* toutes les situations où cette notion apparaît engagée, soit comme solution, nécessaire ou non, optimale ou non, soit dans l'énoncé, soit dans les comportements des protagonistes du jeu didactique. Ainsi, la notion apparaît dans son fonctionnement et dans ses rapports avec les différents secteurs des mathématiques. On peut identifier diverses conceptions particulières qui permettent de résoudre une classe de situations, alors qu'elles suggèrent des réponses fausses sur une autre, et dont la réunion constitue le concept.

Recensons les critères que nous avons utilisés pour choisir le processus étudié. Ils constituent une première approche des composantes du sens des décimaux et permettent d'engendrer une bonne partie des situations cherchées.

1. Le type mathématique de problèmes : algébriques, topologiques ou d'ordre.

2. Le type d'objets mathématiques qui réalisent la notion et à propos desquels le problème se pose explicitement : le décimal image d'une *mesure*, le décimal *scalaire* ou rapport opérant dans un ensemble de mesures, le décimal-proportion, le décimal-opérateur linéaire dans un espace vectoriel, etc... (cf. Tableau I).

3. Le type de structure mathématique concurrente de ID dans la situation proposée, celle contre laquelle se définit ou se justifie ID (ce peut être \mathbb{N} , \mathbb{Q} , ou \mathbb{R}) comme seule ou comme meilleure solution.

4. Le type de situation didactique d'après les manifestations de connaissance, situations d'action, de formulation, de validation, d'institutionnalisation : le décimal y apparaît respectivement comme règle d'action, comme

langage, comme système de preuves ou comme savoir culturel. Cette classification produit aussi les fonctions de \mathbb{Q} : calculs, algorithmes, désignation, représentation, objet d'étude, moyen de preuve, théorie...

5. Le domaine de réalisation de la situation (banque, commerce, physique...etc.) et le statut scientifique : nécessité mathématique, loi physique, convention sociale.

6. Le type de présentation formelle du langage exprimentant les décimaux et les caractères informationnels qui l'opposent à des solutions voisines : décimaux v.s. sexagésimaux ou v.s. binaire (caractères de numération).

7. La fréquence avec laquelle la situation est susceptible de se présenter.

8. Le type d'engendrement de \mathbb{D} ou de la partie utilisée : — type d'opérations utilisées et caractères de la distribution des fréquences d'emploi sur les décimaux employés.

9. Le statut didactique ou cognitif de la notion dans les comportements du sujet pratiqués par la situation. Voir ce que nous avons appelé dans le paragraphe II, les niveaux de connaissance.

10. Le type de représentation ou de définition, commentation ou fractionnement par exemple. (voir ci-dessus 5.3.1.)

11. Le type d'organisation axiomatique des savoirs implicites et explicites du sujet.

12. Le type d'opération ou de relation mathématique solution de la situation : rangements, encadrements (entre deux entiers, entre deux fractions, entre deux décimaux à un ordre de grandeur près), repérage (placer, trouver un nombre dans un intervalle), transformations (fractions \Leftrightarrow décimaux \Leftrightarrow sexagésimaux, changements d'unités, écriture scientifique, décomposition polynomiale, chiffres \Leftrightarrow lettres), sommes (de mesure, addition, translations, composition de translations), différences (idem, décimal opposé), produits (mesure \times opérateur naturel ou décimal, mesure \times mesure, opérateur \times opérateur, mesure dérivée etc... tableau II), division (partage, division, multiplication par un inverse, composition, mesure par un rapport, etc...).

Toutes les distinctions ne sont pas d'égale importance et la liste n'est pas exhaustive. Il resterait à réorganiser cet ensemble de situations pour favoriser des analyses moins lourdes.

5.2.2. *Les propriétés didactiques d'une situation-problème*

a) le terme « situation » désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve l'élève, les relations qui l'unissent à son milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution. Une situation est une situation-problème qui nécessite une adaptation, une réponse de l'élève. En particulier, si la nécessité de cette réponse a fait l'objet d'une consigne précise, si l'élève a un projet, un objectif déclaré, nous aurons une « situation-problème stricte » (ou formelle), et même un « problème » si le milieu est réduit à un énoncé et si aucune contrainte matérielle, due à certains aspects physiques de la situation, ni à aucune condition psychologique ou sociale, n'en modifie l'interprétation. Une *situation didactique* est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d'enseigner, un enseignant. En général, on peut distinguer, dans une situation didactique, au moins une situation-problème et un contrat didactique.

b) Quelles conditions font d'une situation-problème une situation d'apprentissage ou une situation d'enseignement ? R. Douady (1980) en propose une liste qui correspond bien en première approche, à celle que j'ai voulu satisfaire dans le processus proposé ci-dessus et que je ne peux pas exposer ici. L'analyse et la théorisation des situations conduit à raffiner et à allonger cette liste, à construire les indices qui permettent d'objectiver et d'étudier les critères trop intuitifs, comme le font Bessot et Richard (1979). C'est un problème central de didactique aussi bien pour l'analyse que pour la réalisation de tels processus, et qui n'a pas encore reçu la place qui lui revient (malgré quelques publications anciennes mais presque confidentielles dont (Brousseau, 1970).

5.2.3. *Situations-Connaissances-Comportements*

Chaque situation-problème appelle de la part de l'élève des comportements qui sont l'indice d'une connaissance. Cette correspondance fondamentale, établie, cas par cas, est justifiée par l'interprétation des situations-problèmes en termes de jeu, et des comportements, en termes d'in-

dices de stratégies dont il faut montrer le caractère adapté dans le modèle ou la représentation attribuée à l'élève. Le tableau VIII a pour objet de montrer que les différents types de situation, produits par l'étude des conditions didactiques d'apprentissage, donnent bien des comportements distincts selon les formes de connaissance. Nous avons depuis (Brousseau 1970) utilisé un modèle à quatre classes dont les noms ont varié selon les nuances qui distinguaient les cas étudiés :

(1) Procédure (ou modèle implicite d'action, ou schéma d'action) (2) Savoir implicite équivalent à un énoncé; propriété ou relation (3) Savoir explicite (4) langage (code, système formel...). Parfois les classes 2 et 3 étaient fondues. Ce système pourrait être rapproché, dans une certaine mesure, de celui de Skemp (1976) et Skemp/Herscovics/Byers (1980).

(1) témoignage d'une compréhension instrumentale, (2) d'une compréhension intuitive (3) d'une compréhension formelle et (4), peut-être d'une compréhension formelle. Il est dommage qu'Herscovics, qui avait eu en 1976 une longue conversation à ce sujet avec Skemp et moi à Karlsruhe n'ait pas examiné cette correspondance.

Nous ne reprenons pas ici les caractères bien connus des situations d'action, de formulation et de validation (Brousseau 1970).

Les situations d'institutionnalisation sont celles par lesquelles on fixe conventionnellement et explicitement le statut cognitif d'une connaissance ou d'un savoir. L'institutionnalisation est interne si un groupe fixe librement ses conventions, selon un processus quelconque qui en fait un système quasi isolé. Elle est externe si elle emprunte ses conventions à une culture : c'est la situation la plus fréquente dans la didactique classique.

5.3. Retour sur certains caractères du processus

5.3.1. Insuffisances du processus

Nous avons insisté à plusieurs reprises sur le fait que nous ne considérons pas le curriculum comme une méthode à proposer aux enseignants. Il convient d'expliquer pourquoi. a) La principale raison réside dans la difficulté à com-

Tableau VIII – Comportements observés selon le type de situations et le type de connaissances

Types de situations de connaissances	situations d'action	situation de formulation sous contrôle d'une situation d'action	situation de preuve (ou de validation)	situation d'institutionnalisation
procédure	savoir-faire. Mecture en œuvre la procédure, la choisir de préférence à une autre.	description détaillée désignation.	justification de la procédure pertinente (elle peut s'appliquer) adéquate, correcte, optimale.	canonisation d'une procédure en algorithme (terme dû à A. Rouquier).
modèle implicite propriété relation représentation.	faire des choix, prendre des décisions motivées par la connaissance en question (sans pouvoir «formuler» ce savoir)		preuves contingentes expérimentales par exhaustivité.	
savoir énoncé théorie	appliquer un savoir (le savoir pourrait être formulé).	énoncé de la propriété ou de la relation. reformulation plus «correcte».	preuve démonstration traduction plus convaincante organisation axiomatisation.	canonisation d'une théorie, d'un savoir transposition didactique (Chevallard 1980).
langage.	emploi d'un langage pour exprimer. Le comportement manieste un découpage en objets correspondants aux signes et aux mots.	emploi d'un langage d'un système formel d'une formulation pour communiquer savoir dire.	justification d'un mot d'un langage, d'un modèle formel (pertinence, adéquation, optimisation) définitions. Activités métalinguistique.	choix de définitions conventions linguistiques et grammaticales.

muniquer toutes les informations nécessaires. En particulier celles relatives aux règles auxquelles le maître doit s'astreindre à obéir. Elles sont fort différentes de celles auxquelles les enseignants ont été habitués et reposent sur une conception didactique très « nouvelle », sur des modes d'évaluation, et même sur une sensibilité nouvelle dans les rapports maître-élève. Il serait probablement dommageable aux enfants de leur enseigner de la manière classique chaque pas de cette longue genèse et d'institutionnaliser des comportements provisoires.

b) D'ailleurs, les nécessités de l'expérience d'épistémologie ont conduit à des choix qui seraient au moins prématuré de proposer aux enseignants : par exemple, nous ne savons pas provoquer et contrôler le franchissement des obstacles épistémologiques, ou simplement des reprises, ce qui est indispensable pour remplacer le modèle du gonflement régulier des connaissances compatibles. Ou encore, nous avons choisi une représentation du décimal-mesure très éloignée de ce que suggère l'histoire.

c) Enfin, le processus présente des imperfections notoires du même genre que celles que nous reprochions aux méthodes classiques — par exemple, l'évaporation de l'unité dans la première phase (voir Brousseau 1980 p.33) — et qui sont l'objet d'études. La définition par commentation ne rend guère à l'élève la notion de fraction plus disponible que l'ancienne définition.

Par exemple dans la phase II. 1., les élèves éprouvent des difficultés à écrire l'image de 1 dans l'application linéaire qui à 4 fait correspondre 7, bien qu'ils sachent que cette image reportée 4 fois forme un segment de 7 cm : l'image est $7/4$.

L'effort de définition des fractions-mesure est probablement assez stérile du point de vue culturel etc. Nous allons examiner maintenant quelques unes de ces questions.

5.3.2. Retour sur le décimal-mesure

Une étude épistémologique du mesurage et de ses fonctions a montré qu'il joue un rôle important dans l'émergence des décimaux (par l'intermédiaire des sexagésimaux). Ce rôle est lié à diverses situations où il s'agit de représenter,

de communiquer ou de prévoir le résultat de certaines manipulations de la vie courante ; contrôle de la conservation, comparaisons, reproduction de quantités égales, partages. Dans ces situations, les valeurs des variables physiques et leurs rapports avec les caractéristiques humaines sont essentiels. Ainsi, on distingue dans la plupart des civilisations trois fonctions « unités » :

— l'unité à « compter » (C). Les quantités plus grandes qu'elle doivent de toute façon être fractionnées, pour leur transport ou leur évaluation en parts égales que l'on peut compter. L'unité (C) est la plus grande de celles que l'homme peut manier commodément.

— l'unité à « fractionner » (f). Les quantités qui lui sont inférieures peuvent être manipulées « en un coup ». Leur fractionnement en un grand nombre de parts égales que l'on dénombre est moins économique qu'un partage direct.

— l'unité de « précision » (S), la plus petite que l'on prenne en considération.

En général, $S \ll f \ll C$ et $10 \leq \frac{C}{f} \leq 60$

On peut observer à ce sujet le rôle assez effacé en pratique du « déca » et des « déci » par rapport aux « hecto » ou au « kilo ».

La pratique de quantités dans l'intervalle $[f, c]$ sert de modèle à l'identification du dénombrement et de certaines fractions.

Le système d'écriture a aussi pour objet de ramener les « mesures » des quantités les plus familières dans l'intervalle naturel le mieux connu.

Les négociations historiques entre ces exigences ont produit divers systèmes dont certains, trop bien adaptés, n'ont pu évoluer. On ne peut guère espérer aller au-delà de l'usage que les Babyloniens puis les astronomes faisaient des sexagésimaux.

Mais cette étude permet de comprendre tout le parti qu'on pourrait tirer de cette problématique dans une perspective dialectique où la pratique du mesurage, l'usage du système décimal de mesure et l'introduction des décimaux seraient dissociés et non pas étroitement confondus, comme c'est le cas actuellement en France. Il serait pour cela très utile de reprendre les études et les observations de F.Colmez

(1974) et de les examiner dans cette perspective « économique » que permet le théorie des situations.

5.3.3. Remarques sur le nombre d'éléments qui permet d'appréhender un ensemble

Il est possible d'engendrer toutes les opérations de la logique binaire à l'aide de systèmes comprenant de une opération (l'incompatibilité de Sheffer) jusqu'à seize. Les systèmes que l'on utilise communément en comprenant quatre ou cinq. Il est fréquemment avantageux, pour appréhender un ensemble, de l'engendrer à partir d'un nombre restreint d'éléments qui deviendront particulièrement familiers. Ce nombre doit être assez petit pour que tous les éléments générateurs puissent être considérés ensemble (moins de 10), et assez grand pour que l'engendrement des éléments plus rares, mais courants, ne soit pas trop long, et pour que le système puisse supporter un nombre suffisant de relations distinctes.

C'est ainsi que d'après Youschkevitch (1976) Abu-i-Wafa, vers 961-976, « engendre » les fractions à l'aide d'un système de fractions « prononçables » en arabe comprenant lui-même les fractions principales : numérateur 1 dénominateur de 2 à 10, les fractions composées de la forme $\frac{m}{n}$, $m < n \leq 10$, les fractions unifiées : produits de la forme

$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} \dots \frac{1}{1} \cdot \frac{m}{p}$, celles dont le dénominateur comprend des facteurs premiers supérieurs à 10 sont impronçables (Il choisit ce système qui remonte à la plus haute antiquité à Bagdad alors que Al Uglidisi a inventé les décimaux à Damas 10 ans plus tôt).

C'est ainsi, enfin, que les enfants ont procédé au cours préparatoire avec les naturels.

Or ici nous avons choisi d'introduire d'un coup un ensemble beaucoup plus vaste de fractions : tous les dénominateurs jusqu'à 50, tous les numérateurs de 1 à 20 ont des probabilités d'apparitions voisines. Aucune fraction ne joue de rôle privilégié.

Il ne semble pas que cette méthode, qui s'oppose aux habitudes culturelles (qui favorisent toujours $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$) ait rencontré de difficulté spéciale, au contraire, elle

semble avoir favorisé le raisonnement sur une fraction quelconque. Il est vraisemblable qu'on ne pourrait pas introduire de la même façon la notion de rapport.

5.3.4. Fractionnement et commensuration

Le système culturel actuel fournit pour les rationnels, en gros la définition suivante :

a) *Définition 1* : (par fractionnement)

Une fraction est restée comme au XVII^{ème} siècle (d'Alembert) « *une ou plusieurs parties d'un entier partagé en plusieurs parties égales ainsi que la moitié, le tiers, les deux tiers...* » Ce « un » est malencontreux et rend difficile la conception de fractions plus grandes que l'unité : $\frac{a}{b}$ c'est donc le résultat d'une opération matérielle qui consiste à partager *des* entiers et non seulement *un* entier en *b* parties que l'on peut comparer et déclarer égales, puis à prendre un nombre *a* de ces parties.

C'est une définition constructive. Elle se réfère à la manière de construire l'objet défini.

Elle est bien adaptée à la *construction d'une grandeur correspondant* à un nombre donné (une unité étant donnée), sauf dans les cas où on ne connaît pas de moyen pratique d'effectuer concrètement les opérations nécessaires.

Par exemple, on ne peut pas fabriquer un poids d'or qui soit les $\frac{2}{3}$ du poids d'une bague donnée, si on refuse de la détruire (mais on peut partager un poids égal de pâte à modeler en trois par tâtonnements). Dans ces cas où : soit la division n'est pas concevable, soit la comparaison n'est pas possible, (ou bien le résultat n'est pas défini, ou le dénombrement impossible) la définition fonctionne, non comme une représentation de la réalité ou comme une théorie, mais comme un système symbolique auquel il est vain de chercher une signification concrète. Par exemple, cette définition n'est directement d'aucun secours s'il s'agit d'attribuer un nombre à une grandeur donnée. A moins de laisser paraître le procédé de fabrication.

b) La définition utilisée dans le curriculum est bien différente.

Définition 2 : (par commensuration)

Une quantité (si elle existe) sera les $\frac{a}{b}$ d'un entier si

en la reportant b fois (en en prenant b identiques à elle-même) on obtient a entiers.

Cette définition suppose d'abord que la grandeur existe, et les opérations qu'elle évoque sont beaucoup plus fréquemment et facilement effectuables (multiplier). Elle ne dit pas comment construire $3/4$. Elle n'est pas constructive, mais elle fournit un algorithme de reconnaissance : elle permet de dire si telle grandeur, est ou non, les $3/4$ de telle autre. Encore faut-il pouvoir « reporter plusieurs fois » ou disposer de plusieurs exemplaires des grandeurs évoquées.

c) Ces deux définitions mathématiquement équivalentes correspondent en fait à des conceptions différentes des fractions et des décimaux, en ce sens qu'elles ne sont pas pertinentes, ou plus efficaces, ou mieux adaptées, sur les mêmes situations-problèmes. Selon les valeurs attribuées de l'unité, rapport des dimensions de l'objet à celle de l'unité choisie, présence ou non d'un partage ou de la mesure d'une subdivision, il est possible de bloquer l'utilisation de l'une ou de l'autre, ou de les rendre plus ou moins coûteuses en nombre d'actions élémentaires, ou de contrarier le contrôle de l'incertitude du résultat, ou d'augmenter les probabilités d'erreurs.

Le tableau IX résume une étude théorique que l'on trouvera dans Ratsimba-Rajohn (1981). Il indique celle des deux conceptions que les valeurs de ces variables rendent plus efficaces. Il apparaît qu'elles sont assez complétement différentes et que la définition constructive est largement la plus fréquemment utile. Il existe d'autres conceptions que nous n'étudierons pas ici.

d) M. Ratsimba-Rajohn a montré que la stabilité et l'homogénéité des comportements sur un ensemble assez varié d'exercices permettait de parler de deux représentations différentes et dans une certaine mesure incompatibles : il a proposé à un échantillon d'élèves du premier cycle du secondaire des situations bloquant successivement l'une ou l'autre. Il a observé un pourcentage d'élèves capables de pratiquer les deux définitions, très faible par rapport à ce que les probabilités de réussite à chaque épreuve aurait laissé prévoir.

VARIABLES D'UNE SITUATION DIDACTIQUE DE MESURAGE
SERVANT A L'EVALUATION DE L'ESPERANCE DE COUT.

Variables de commande	situation problème	1. Grandeur de U l'unité choisie, par rapport aux valeurs de référence : S ₁ : seuil de perception ou S ₂ : seuil de précision utile f : unité « à fractionner » (commodément et fréquemment) p : unité « à reporter » ou servant à dénombrer
		2. Rapport de la grandeur de □ l'objet, à celle de U. — $\frac{\square}{U} \ll 1$ $\frac{\square}{U} \cong 1$ $\frac{\square}{U} \gg 1$ — « meilleur » attracteur de l'intervalle $\frac{\square}{U} - S_2$, $\frac{\square}{U} + S_2$ Ex : $\frac{3}{5}$ ou $\frac{59}{57}$
		3. Les conditions de « comparaison » : — un à un (Roberval) un à n (graduation) directe ou indirecte (tare)...
		4. Les conditions d'ajustement : — possibilité de fractionnement matériel — possibilités de report nombre maximum de reports... etc (Espace disponible)
		5. Type d'activité : — réalisation d'un objet de grandeur donnée ou mesurage d'un objet
	contrat didactique	1. Conventions au sujet des exigences de la mesure — précision utile (action) convenue (communication) : fractions usuelles, décimales, etc...
		2. Valeur de la réussite, coût de l'erreur ou de l'échec...
		3. Nombre de tentatives permises — Types de rétroactions — ouverture de sa situation
		4. Variables du contrat relatif à l'apprentissage : temps, nombre d'occasion, ... etc
	Variables liées	1. Nombre de reports pour une précision donnée
2. Nombre de fractionnements effectifs		
3. Nombre de comparaisons		
4. Densité relative des points de mesurage facile ou complexe		
Variables Cultu. relles	Distributions de fréquence sur les valeurs des variables de la situation problème — en milieu scolaire (variable plus ou moins ajustable), dans le milieu culturel (libre)	

Tableau 9

5.4. Questions de méthodologie de la recherche en didactique (sur les décimaux)

Le regroupement des situations en modèles, conceptions, représentations, niveaux etc. pose le problème de savoir ce qui est équivalent et ce qui ne l'est pas, ce qui est différent et ce qui ne l'est pas, puis ces distinctions faites, d'observer éventuellement des relations d'implications internes aux modèles — synchroniques — et des relations entre modèles — diachroniques.

5.4.1. Les modèles d'erreurs

M. L. Izoche (1977) a montré que les erreurs et les réussites des élèves s'expliquaient si on leur attribuait le modèle suivant : en présence de plusieurs décimaux (d_j) , on cherche n le plus petit par exemple tel que pour tout d_j , $d_j \times 10^n \in \mathbb{N}$ et on identifie avec \mathbb{N} , l'ensemble \mathbb{D}_n des décimaux tels que $10^n \cdot \mathbb{D}_n \subset \mathbb{N}$. L'enfant raisonne et opère sur \mathbb{D}_n comme sur \mathbb{N} . F. Léonard et C. Grisvard (1981) ont produit, sur un problème d'ordre, un modèle de comportement un peu plus précis rendant compte du fonctionnement indépendant de la partie entière et de la partie décimale. Ces études sont basées sur l'effondrement concomitant de certaines réussites d'ensemble puis sur une hiérarchie de comportements individuels : elles montrent que le modèle souffre peu d'exceptions. Cependant lorsque l'explication porte sur des modifications de probabilités d'erreurs et non sur des modèles déterministes, (supposant que le même élève fait toujours la même erreur) la méthode est rarement satisfaisante.

On pourrait espérer que l'analyse factorielle des correspondances ou l'analyse hiérarchique vont faire apparaître les regroupements de questions et les regroupements d'élèves qui correspondent à ces modèles. Cette méthode est utilisée systématiquement par plusieurs chercheurs mais elle est d'un emploi délicat et l'interprétation s'arrête habituellement aux tous premiers facteurs principaux.

5.4.2. Les niveaux de complexité

Si on observe chez les élèves un décalage suffisant dans le temps, entre la maîtrise de deux questions appartenant

à première vue à un même concept, on peut inférer qu'il existe, entre leurs solutions ou les conceptions qui les commandent, des différences de complexité suffisantes pour former des niveaux psychogénétiques différents. L'analyse génétique qui découle de ce principe a apporté beaucoup d'observations précieuses de la part de G. Vergnaud (1976) G. Ricco (1978) et A. Rouchier (1980) et de leurs collaborateurs. Il faut pourtant, soit renoncer à s'approcher trop des phénomènes didactiques qui peuvent introduire des décalages d'origine arbitraire et didactique, soit redéfinir une méthodologie spécifique. En particulier, la formalisation de cette notion de niveau, bien que tentée à plusieurs reprises, présente des difficultés.

5.4.3. *L'observation systématique* des différences de comportements, liés à des modalités ou à des conditions didactiques différentes, a été rendue possible par l'utilisation astucieuse de l'analyse des correspondances dans la méthode des questionnaires à modalités de F. Pluinage (1977) et a produit des observations intéressantes sur la proportionnalité.

5.4.4. *Dépendances et implications*

En didactique, ce sont moins les proximités ou les distances qui sont intéressantes, que les dépendances disymétriques qui évoquent l'implication. Régis Gras (1979) a donc étudié des méthodes hiérarchiques et d'analyses factorielles basées sur un indice d'implication améliorant celui de J. Loevinger. Mais l'implication elle-même évoque une transitivité assez souvent absente en fait, et il faut produire un concept spécifique plus raffiné avant d'en tirer un indice statistiquement satisfaisant.

Peut-être l'analyse des dépendances diachroniques entreprise sur des processus comme celui dont nous disposons conduira-t-elle à ce résultat.

CONCLUSION

Dans ces deux articles, nous avons essayé de présenter les problèmes d'enseignement des décimaux sans détruire le tissu dans lequel ils s'insèrent. Et cela nous a conduits insensiblement à traduire ces problèmes d'enseignement en problèmes de didactique plus ou moins généraux, et à enchaîner les questions jusqu'à la méthodologie de la recherche. Ne nous sommes-nous pas égarés en route ? Nous avons dû résumer ou exclure de nombreuses études trop particulières ou trop centrifuges... alors de quelle unité peut se targuer la didactique, quel est son champ, ses rapports avec l'enseignement ? En quoi avons-nous avancé par rapport à nos premières observations ?

L'enseignement des décimaux, comme celui de la numération pose à mes yeux un problème didactique difficile et primordial.

D'une part, leur usage est si répandu, si commode et si banal que les enfants le rencontrent très tôt, sous leur forme achevée, actuelle. Quelle que soit la forme de l'apprentissage, c'est l'habitude et l'emploi familier qui réglera la signification du concept.

Nous avons vu les insuffisances de cette conception « machinale » et la nécessité de placer cet usage sous le contrôle d'une compréhension et même, dès que possible, d'un savoir rationnel. Seule, la résolution de certaines situations-problèmes peut donner cette conception claire, cette compréhension et ce savoir. Mais ces problèmes sont d'une complexité assez grande et il ne semble guère possible de les proposer aux élèves au moment voulu, trop précoce.

D'autre part, il est impensable de retarder l'enseignement des décimaux ou de les approcher par une genèse trop longue ou qui conduirait à des pratiques insolites. Enfin, au moment où pourraient se faire les reprises et les accommodations nécessaires, dans l'enseignement secondaire, on n'a plus de temps à consacrer à cette question subalterne.

Nous avons ainsi un problème d'enseignement sans solution. Il en existe d'autres qui conduisent à des contradictions semblables.

D'une façon générale, de tels problèmes sont, sinon résolus, du moins traités par une négociation didactique, dont

on sait peu de choses encore, mais qui ne suit que de très loin le discours classique. Dans ce discours, toutes les réussites sont perçues comme des fonctions monotones des variables : à une extrémité ce qui est bon, à l'autre ce qui est mauvais. Potentiellement, l'enseignant a tout pouvoir.

Quels sont les rôles réciproques de l'habitude et de la compréhension dans l'acquisition et dans le fonctionnement d'une notion ? Comment ce rôle évolue-t-il ? Quels sont les résultats que l'on peut s'attendre à voir varier, si un meilleur compromis est obtenu ? La traduction de ce débat en une liste d'hypothèses falsifiables, susceptibles d'être étudiées expérimentalement, demande la création de notions nouvelles. C'est le prix que doit payer la didactique pour accéder à un statut scientifique sans cesser d'être une théorie des faits didactiques et de contrôler sa technique. Les problèmes d'enseignement sont des problèmes de décisions. Ils doivent recevoir une réponse, même provisoire, coûte que coûte. Cette réponse ne peut pas être une réponse « pour voir ». L'enseignant ne peut pas s'engager à tirer toutes les conséquences logiques d'un choix et de s'y tenir quoiqu'il arrive. Aussi les problèmes ne donnent-ils pas beaucoup de prix à la méthode expérimentale, ils sont des indices à interpréter. Dans la mesure où elles sont spécifiques du contenu, certaines questions de l'enseignant peuvent être des questions à une « science didactique » qui parviendrait à sursoir à la nécessité des décisions. Quels sont les résultats des élèves ? Quelles décisions peuvent les améliorer ? Quelles alternatives se présentent ? Comment fabriquer d'autres méthodes, comment en choisir une ? Comment la gérer, la conduire ? la communiquer ? Quels indices faut-il surveiller ? Elles le peuvent à condition toutefois de subir une subtile modification du point de vue du vocabulaire et des méthodes : quelles situations et quels comportements correspondent à une appropriation convenable d'un concept ? Quels sont les comportements erronés qui apparaissent et leur signification ? Quelles sont les variables qui sont susceptibles d'agir sur les appropriations, quelles hypothèses peuvent expliquer les bons ou les mauvais résultats ?

Toutefois, la plupart des choix qui apparaissent comme critiqués pour l'enseignant ne fournissent pas de bonnes

questions de didactique (Par exemple, faut-il adopter le manuel de Dupond ou celui de Durand ?) La recherche en didactique peut-elle se contenter de fournir des réponses là où elle peut les assurer par une étude scientifique, en laissant le soin et la responsabilité à l'enseignant seul, de décider de l'importance ou de la pertinence de l'information et de l'usage qu'il peut en faire ? Il faudra toujours que quel- qu'un rapporte les conclusions à un processus d'enseignement bien précis et choisisse une réponse optimale. De toute façon, toute étude « in vivo » de l'apprentissage en situation scolaire, devra s'inscrire dans une activité d'enseignement dont il faudra bien contrôler les variables. Par conséquent, la didactique scientifique n'échappera pas à la phénoméno-technique didactique. Il faut qu'elle prenne en charge la totalité des interactions des systèmes en présence et qu'elle traite de ce qui peut-être isolé et qui est spécifique du contenu (sans lui être réductible). Elle doit donc produire des processus, non comme proposition optimale aux enseignants, mais comme objet d'étude. Nous espérons que cet article a indiqué qu'elle pourra parvenir à le faire.

- AEBLI H. : *Didactique psychologique*, Delachaux et Niestle, 1959.
- BACHELARD G. : *La formation de l'esprit scientifique*, Vrin. *Essai sur la connaissance approchée*, Vrin.
- BROUSSEAU G. : « L'observation des activités didactiques », in *Revue française de pédagogie*, No 45, 1978. « Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques », in *Compte rendu du colloque international CIAIEM*, 1976.
- BUISSON P. : « Evaluation-sondage dans le 1er cycle (12-16 ans) », in *Educational Studies in mathematics*. Vol. 6, No 4, march 1976.
- DELAATRE P. : *Système, structure, fonction, évolution*, Maloine-Doïn éditeurs, 1971.
- DIENES W. : *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*, O.C.D.L., 1970.
- DIENES et JEEVES : *Pensée et structure*, O.C.D.L., 1976.
- GLAESER G. : *Didactique expérimentale - Cours de 3ème cycle*, I.R.E.M. de Strasbourg, 1979.
- I.N.R.P. : *Evaluation comparée de quatre types d'organisation à l'école élémentaire* (FOUCAMBERT J. mars 1977-février 1979). *Enquête sur l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire*. Tome 1 : Comportement des élèves, 1979.
- IZORCHE M.L. : *Les réels en classe de seconde - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1977*. Université de Bordeaux.
- LICHNEROWICZ : « Les mathématiques et la réalité », in *Logique et connaissance scientifique*, p. 474-485. Encyclopédie de la Pléiade, NRF, 1969.
- MAUDET C. : *Etude critique du processus psychodynamique selon Diènes - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1979*. Université de Bordeaux.
- MERCIER A. : *Etude des notions « opérateur » « machine » - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1978*. Université de Bordeaux.
- PIAGET J. : *Introduction à l'épistémologie génétique*, T. 1 et 2, P.U.F., 1974. *L'équilibration des structures cognitives*, P.U.F., 1975.
- PLUVINAGE F. : *Difficultés des exercices scolaires en*

* * *

mathématiques - Thèse de doctorat d'état soutenue en sept. 1977 à l'Université de Strasbourg.

SALIN M.H. : Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire - Mémoire de D.E.A. soutenu en novembre 1976. Université de Bordeaux.

VERGNAUD G., ROUCHIER A., et al. : Rapport de recherches D.G.R.S.T. — problèmes multiplicatifs, 1979. Acquisition des « structures multiplicatives » dans le 1er cycle du 2nd degré. Publication IREM - d'Orléans et Centre d'Étude des Processus Cognitifs et du Langage. E.H.E.S.S. - C.N.R.S. Paris - avec le concours de la D.G.R.S.T. - Ed. IREM d'Orléans. Collection « Recherche » No 2, mars 1979.

VIENNOT L. : *Le raisonnement spontané en dynamique élémentaire*, Hermann, 1979.

BIBLIOGRAPHIE DU CHAPITRE I (2)

- ABD EL JAOUAD (1978) Vers une épistémologie des décimaux
Bulletin de l'Association Tunisienne des Sciences Mathématiques
 No. 50 (1-27)
- (1980) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire*. Cycle
 préparatoire 1 volume. Cycle élémentaire 2 volumes. Collection
 Ermel — O.C.D.L. Ed.
- N. BALACHEFF (1980) *Elaboration d'explications par des élèves de*
6ème à propos d'un problème combinatoire (analyse et protocoles)
 IMAG Université de Grenoble. Rapport de Rech. no. 224
- G. BROUSSEAU (1970) *Processus de Mathématisation*. In, *la Mathé-*
matique à l'École Élémentaire, APMEP. Paris 1972. (428-442)
- G. BROUSSEAU (1979) « Evaluation et théories de l'apprentissage
 en situations scolaires ». In « *Educacion matematica en las ame-*
ricas » — UNESCO
- G. BROUSSEAU (1980) *Problèmes de l'enseignement des décimaux*.
Recherches en Didactique des Mathématiques I.1. pp. 11-59
- Y. CHEVALLARD (1980) « *La transposition didactique* » Cours de
 l'École d'Été de Didactique des Mathématiques, Chamrousse,
 (à paraître)
- F. COLMEZ (1974) Document d'accompagnement du film « Mesure »
Mesure I et II film RTS — Melun-Bordeaux
- M. DESJARDINS — J.C. HETU (1974) « *Activités mathématiques*
 dans l'enseignement des fractions » Les presses de l'Université du
 Québec.
- R. DOUADY (1980) *Approche des nombres réels en situation d'ap-*
prentissage scolaire. In, *Recherches en didactique des Mathéma-*
tiques I.1 (77-112)
- E. FILLOY *Experimentacion en el area de matematicas del 5º Grado*
 de Educacion primaria 77-78 *Medicion y sistemas de Numeracion*
 — *Seccin Matematica Educativa del CIEA de IPN*.
- GAGNE—BRIEN—PAQUIN (1980) « *Les principes fondamentaux de*
l'apprentissage » éd. H.R.W. Montréal.
- GONSETH (1936) *Les mathématiques et la réalité* - Paris - Alcan
- R. GRAS (1980) « *Deux méthodes d'analyse de données didactiques :*
Classification implicite et classification hiérarchique — applica-
tion à une situation réelle » Publication de l'IREM de Rennes.
- G. GUITTEL (1975) « *Histoire comparée des numérations écrites* »
 Flammarion.
- K. HART (1980) *From whole numbers to fractions and decimals*. In,
Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol. I.1. (61-75)
- N. HERSCOVICS (1980) *Constructing meaning for linear equations*.
 A problem of representation. In, *Recherches en Didactique des*
Mathématiques. I.3. (351-385).
- F. LEONARD - C. GRISVARD (1981) « *Sur deux règles implicites*
 utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs ». In,
bulletin APMEP (327) (47-60).
- PERRET - CLERMONT A.N. (1979) *La construction de l'intelli-*
gence dans l'interaction sociale. P. Lang, Berne.

- OVAERT et al (1976) *Philosophie et calcul de l'infini*. F.Maspéro, (Ed.)
- F. PLUVINAGE - C. DUPUIS (1980) « *La proportionnalité et son utilisation* » IRMA — Université Louis Pasteur. Strasbourg.
- H.RATSIMBA-RAJOHN (1981) « *Etude didactique à l'aide de la théorie des jeux, des représentations et de deux stratégies des mesures rationnelles : la commensuration et le fractionnement de l'unité* ». Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques IREM. Université de Bordeaux.
- G.RICCO (1978) *Le développement de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 12 ans*. Travaux du Centre d'Etudes des processus cognitifs et du langage no. 11. EHESS — CNRS — Paris.
- F.RICHARD et A.BESSOT (1979) *Commande de variables dans une situation didactique pour provoquer l'élargissement de procédures en vue d'étudier le rôle du schéma*. Thèse de 3ème cycle de Didactique des Mathématiques. IREM, Université de Bordeaux.
- A.ROUCHIER et al (1980) « Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs ». *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 1.2. (225-275)
- M.SCHUBAUER-LEONI/PERRET-CLERMONT (1980) Interactions Sociales et représentations symboliques dans le cadre de problèmes additifs — *Recherches en Didactique des Mathématiques* 1.3. (297-350)
- R.SKEMP (1976) Relational and instrumental understanding. *Mathematics teaching*, 77 (20-26)
- S. STEVIN (1585) *La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes 1585*. (Manustrit) 1634 (première édition). Oeuvre mathématique de Simon Stevin augmentée par Albert Girard 1634.
- G.VERGNAUD — C.DURAND (1976) « Structures additives et complexité psychogénétique » *Revue française de pédagogie* no. 36 (28-43)
- G.VERGNAUD, J.BENHADJ, A.DUSSOURT (1979) « La coordination de l'enseignement des mathématiques entre le cours moyen 2ème année et la classe de 6ème ». *Recherches Pédagogiques*, no.102, INRP.
- H.WHITNEY (1968a) The mathematics of physical quantities. Part I : Mathematical models for measurement. *The American Mathematical Monthly* 75 (115-138).
- H.WHITNEY (1968b) The mathematics of physical quantities. Part II: Quantity. Structures and Dimensional Analysis. *The American Mathematical Monthly* 76 (227-256).
- A.P.YOUSCHKEVITCH (1976) « *Les mathématiques arabes* » (VIIè et XVè siècles) VRIN.

CHAPITRE II

PROBLEMES DE DIDACTIQUE CENTRES SUR L'ELEVE : LES ECHECS ELECTIFS

- 1. Approche globale et statistique**
 - . Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques
 - . Plan d'études et méthodes
 - . Conclusion de l'approche statistique

- 2. Approche clinique**
 - . Introduction
 - . Exemple d'analyse de situation
 - . Etude du cas de Gaël
 - . Conclusion

APPROCHE GLOBALE ET STATISTIQUE DES
ECHECS ELECTIFS EN MATHEMATIQUES

Le présent paragraphe résume les résultats obtenus depuis 1976 avec l'aide de onze étudiantes de troisième année d'orthophonie. Ces recherches se poursuivent aujourd'hui dans le cadre du C.N.R.S. Ces résultats sont modestes malgré les efforts qu'ils ont demandés, ils paraîtront dérisoires à certains ; c'est peut-être pourquoi je n'hésiterai pas à insister sur les raisons qui nous obligeaient à les rechercher. Peut-être n'est-il pas inintéressant parfois de pénétrer dans les coulisses des recherches.

Je me suis intéressé aux problèmes des échecs en mathématiques en 1975, quelque temps après les grandes réformes de 1970 ; le docteur Dubois avait constaté, dans les fiches d'orthophonie de l'hôpital Saint-André et de divers organismes, le faible nombre des mentions « dyscalculie ». Une enquête rapide auprès des maîtres lui avait donné des explications divergentes (1) : certes, pour certains les nouvelles méthodes, mieux adaptées aux enfants faibles, permettaient d'effacer les échecs, mais pour d'autres, c'était la diminution des exigences précises sur les points traditionnellement difficiles : les problèmes et parfois le calcul. En fait, la plupart avaient changé peu de chose dans leur pratique quotidienne, et les difficultés demeuraient les mêmes, mais étaient appréciées différemment.

Il y avait là un indice intéressant ; si la *proportion des enfants reconnus par l'institution comme échouant en mathématiques avait varié au cours du temps* Q_0^2 , on devait pouvoir trouver des facteurs dont elle pouvait dépendre et, par-là, mieux comprendre les causes de la mise en échec.

Préalable méthodologique.

A première vue, le travail est simple à planifier : il faut trouver ou créer un corpus important d'études de cas précis et détaillés, puis l'analyser. Ces études peuvent suggérer des facteurs nouveaux à étudier et si les épreuves qui leur correspondent sont de passation assez facile, il devient moins cher d'étudier ces facteurs séparément et par des méthodes statistiques ; avec le risque toutefois de ne trouver aucune différence avec la population parente. En fait, cet empirisme comporte de nombreux aléas et surtout il est très difficile de rassembler une population susceptible d'être étudiée, de sorte que les travaux dont nous rendons compte avaient seulement pour but de définir une ou des méthodes sûres de détermination et de détection des enfants en échec en vue de préparer un plan ultérieur de recherche, engageant des moyens plus importants.

1. Q_0 : les questions qui font l'objet de l'étude en cours sont signalées dans le texte et numérotées. Ici, la question Q_0 est : la proportion des élèves qui échouent en mathématiques varie-t-elle au même niveau d'une année à l'autre — et une même année d'un niveau à l'autre.

La première tâche des études de ce genre est de justifier le procédé utilisé pour identifier les enfants en échec en donnant une définition précise de la notion d'échec, à l'aide de critères opératoires et fidèles. Il faut alors réunir un échantillon assez nombreux d'enfants correspondant à cette définition, ne devant tout de même pas trop s'écarter d'un *profil commun* [Q3].

De plus, il est indispensable de s'assurer que la population ainsi isolée est relativement stable dans le temps : *les difficultés de ces enfants doivent être durables* [Q1] (le sont-elles ?).

La deuxième tâche consiste à lui trouver *des caractères communs* (nous dirons « symptômes ») *autres que ceux qui ont servi à la constituer. Ces caractères existent-ils ?* [Q3] (dans quel domaine les chercher ?).

C'est seulement dans ces conditions qu'on pourra espérer mener à bien la troisième tâche : identifier les *causes* et observer des effets communs aux échecs en mathématiques.

Si cette population se révèle alors trop hétérogène pour avoir une stabilité suffisante et un profil, des caractères, des causes ou des effets communs, il faut se résigner à la fragmenter. Mais il est clair que ce que l'on gagne ainsi en homogénéité, on le perd en intérêt général et surtout en facilité d'étude car, plus la population étudiée représente une fraction faible de la population d'ensemble, plus son étude sera chère et difficile.

Il peut donc arriver, lorsque toutes ces conditions ne peuvent être remplies que l'on doive renoncer à ériger le concept banal d'échec électif en objet scientifique.

Définitions et caractères fondamentaux de l'échec en mathématiques.

Une première enquête bibliographique conduite par Florence Moras et Christine Molia ([2] 76 tome 1) a permis de comparer les définitions, les symptômes et les causes étudiées à l'époque.

La première restriction, qui a semblé indispensable à la plupart des auteurs, consiste à distinguer les enfants qui ne sont en échec qu'en mathématiques, nous les dirons en *échec électif*, de ceux qui sont en *échec scolaire plus ou moins global*. Il paraît raisonnable de chercher d'abord les causes d'un échec au niveau de ses caractères communs les plus généraux. Un échec global n'est sans doute pas seulement un échec en mathématiques plus un échec en français mais peut être un échec scolaire. Ainsi, pour l'enfant en échec électif en mathématiques, l'apprentissage dans les autres matières : langage, écriture, lecture... se déroule normalement. Seule l'activité mathématique est perturbée. Ce point de vue peut être contesté, en particulier si l'on suppose que tous les enfants en échec, électif ou non, en mathématiques, ont le même genre de difficultés et la même manière d'échouer et, par conséquent, pourraient relever du même type d'intervention rééducative.

C'est pourquoi certains auteurs ajoutent un deuxième critère de restriction, celui de la *spécificité du trouble* : il s'agit de distinguer les élèves qui échouent d'une manière qualitativement différente par rapport aux autres élèves et en particulier par rapport aux élèves en échec global. Evidemment, de telles difficultés, spécifiques des enfants en échec, seraient aussi spécifiques des mathématiques ou d'une partie des mathématiques. Il reste à savoir si de tels échecs spécifiques existent et dans ce cas si *les élèves en échec électif ont une (ou plusieurs) manières particulières de ne pas réussir et qui les distinguerait des enfants non en échec ou en échec global* [Q2].

Un troisième type de restriction a été envisagé dans la mesure où l'échec était accompagné d'autres troubles et selon que la difficulté en mathématiques paraissait les précéder (caractère primitif) ou en être la conséquence (caractère secondaire). Cela revient à admettre implicitement que certains facteurs ont une influence sur les difficultés en mathématiques. Il s'agit principalement de la déficience mentale, des perturbations scolaires profondes (absentéisme, malmenage pédagogique, relations troubles avec un maître), de troubles affectifs primitifs ou secondaires à l'échec, de perturbations de la structuration spatiale. Très souvent, ces distinctions ne s'appuient pas sur des observations sérieuses et assez nombreuses, elles témoignent simplement de l'intérêt qu'a pris l'auteur à les solliciter ou à les écarter pour traiter les cas concrets qui lui étaient soumis.

Le mot « *dyscalculie* » a été avancé (3) pour caractériser des échecs *électifs, spécifiques, non explicables* directement par une déficience mentale générale ou des perturbations scolaires évidentes. Il a souvent été repris par la suite dans des acceptations diverses et souvent fantaisistes.

Avant d'aller plus loin, il convient de remarquer que ces « définitions » théoriques — classiques — n'évoquent nullement *le procédé* utilisé pour objectiver les critères qu'elles évoquent (tests : lesquels ? opinions ? jugement ?), non plus que *la source du diagnostic* d'échec (les élèves ? les maîtres ? les parents ? l'observateur ? le milieu médical ?), non plus que le *niveau scolaire* ou l'âge auquel apparaissait l'échec, ou son *ancienneté* au moment de l'observation. Tout se passe comme si on croyait qu'un échec en mathématiques est un fait si évident qu'il peut être repéré de façon équivalente par toutes les sources, par toutes les méthodes, à tout moment ! On ne peut rejeter *a priori* l'hypothèse que *les diverses sources ou méthodes décèleraient des échecs différents et « fonctionnant » de manière différente*.

La question méritera d'être étudiée [Q4].

Etat des travaux en 1976.

L'enquête bibliographique initiale ([2] 76 tome 1) nous a montré l'état lacunaire et douteux des connaissances de l'époque sur ce sujet.

Les symptômes de dyscalculie sont très nombreux (22 distincts chez neuf auteurs principaux³) et très variés (tableau 1) mais il n'y a accord sur aucun d'eux, et même aucun accord entre les auteurs (le désaccord estimé par le Q de Cochran est significatif à .01). Parmi ces auteurs, bien peu indiquent leur méthode de choix des cas en la rapportant à un étalonnage quelconque.

Une analyse hiérarchique du tableau indiquant les symptômes invoqués par chaque auteur, permet de rapprocher les symptômes choisis par les mêmes auteurs (avec l'indice de Sokal et Michener). On obtient ainsi le dendrogramme du tableau 1.

Il signifie que, dans l'ensemble, les chercheurs s'intéressaient à deux grandes catégories de variables : d'une part, celles qui concernent *la perception et la représentation*, d'autre part, celles qui décrivent *la conception ou l'exécution des actions*. Dans chaque catégorie, on trouve des variables proprement mathématiques accompagnées de variables plus psycho-physiologiques à l'aide desquelles on essayait de les approcher.

Ceci témoigne, me semble-t-il, d'une interprétation précise de l'échec électif :

— d'une part, il est dû à un trouble d'une fonction *instrumentale* ou psychomotrice ou affective, et périphérique, qu'on pourra donc rééduquer — et non à celui d'une fonction centrale liée à la connaissance elle-même ;

— d'autre part, l'apprentissage scolaire déclenche ou révèle un trouble existant *de façon latente*.

Nous reviendrons sur l'origine de ces hypothèses.

D'ailleurs, les causes invoquées étaient :

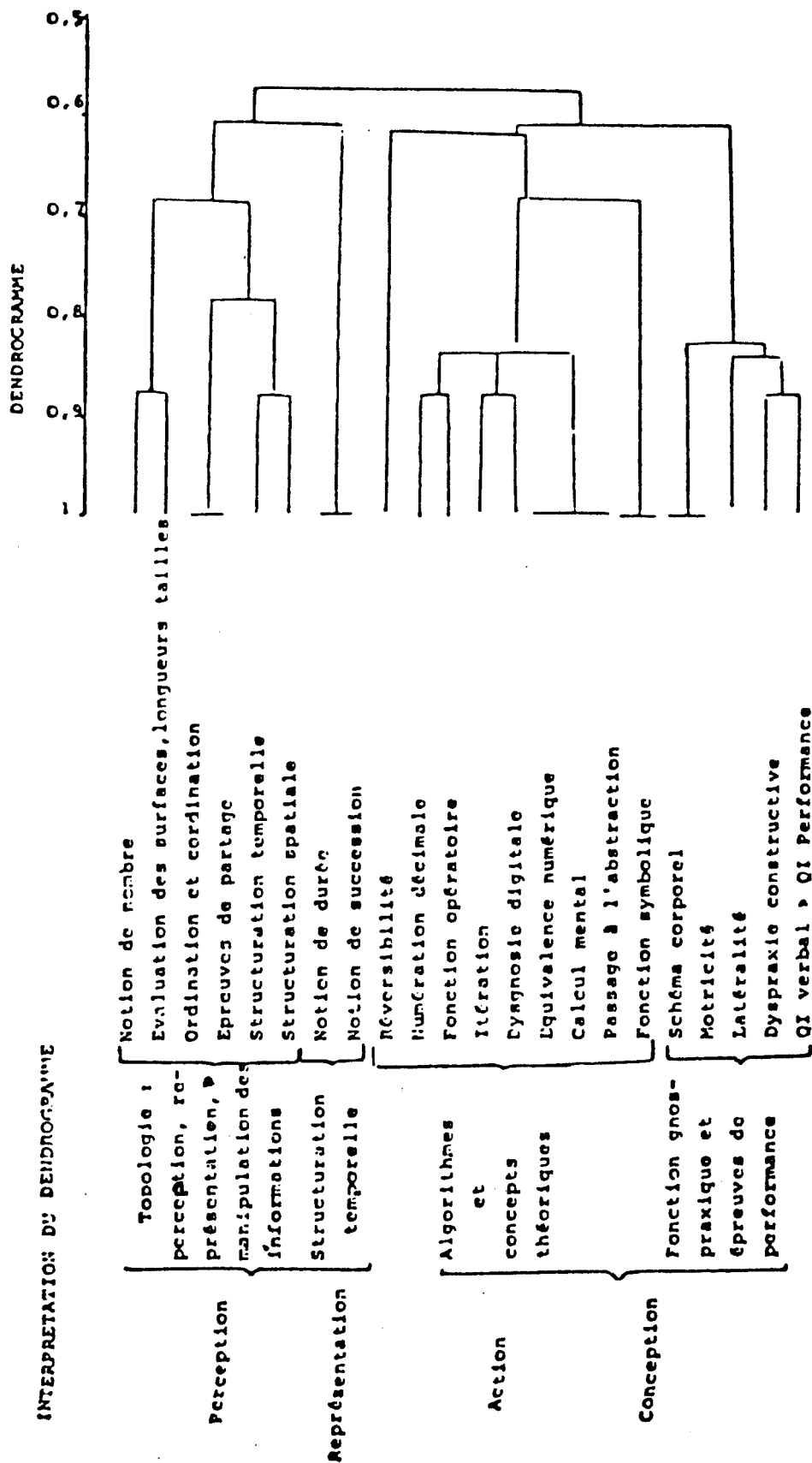
- propres à l'enfant : déficits organiques d'origine centrale, syndromes corticaux, dyspraxies, dysgnosies, infirmité motrice cérébrale, épilepsie, déficit intellectuel, rigidité intellectuelle, dyslexie et troubles du langage, du schéma corporel, de la fonction symbolique, spatiaux, temporels ;
- liées à l'environnement (troubles affectifs ou vie scolaire).

Dans tous les cas, les causes étaient seulement liées aux symptômes par des considérations de convenance (du genre suivant : puisqu'en apprenant à compter on se sert de ses doigts, les dysgnosies « ont » une incidence sur le développement de la fonction du nombre) mais non par des preuves expérimentales.

Enfin, le nombre de cas de dyscalculie rapportés dans la littérature de l'époque de façon convenable est infime : 11 en tout [Hasaerts Van Gertruyden (6)].

3. Ce sont : Hasaerts van Gertruyden, Dugas et Guillarme, Chabanneau et Pasarello, Devic et Périch, Jaulin-Mannoni, Lauriol, Ginet, Gibello et Koppel.

TABLEAU 1. — Symptômes évoqués (1976).



En reprenant les données recueillies par M^{me} Bourrel en 1977 (7), M^{lles} Berrocq-Irrigoin, Dupuch et Fruchard et moi (2 novembre 1977) avons pu établir que les enfants en échec électif et les enfants en échec global se distribuaient différemment sur diverses variables affectives et psychologiques (tableau 2) mais seulement en fait à cause des troubles relationnels (le X^2 est significatif à .01).

TABLEAU 2. — *Echecs et troubles psycho-affectifs.*

Nombre observé, Nombre théorique, % observé dans sa catégorie	Débilité		Troubles psychomoteurs		Troubles Langage		Dyslexie Dysorthographe		Troubles relationnels		TOTAL
Enfants en échec global	43 18,2	42 17,7	33 13,9	134 14,4	16 6,7	10 4,2	73 30,9	61 25,8	71 30	89 37,7	236 100
Enfants en échec électif en maths	21 17,2	22 18	19 15,5	18 14,7	0 0	6 4,9	18 14,7	30 24,5	64 52,4	46 37,7	122 100
Total	64		52		16		91		135		358

On peut dire que *les enfants en échec électif en mathématiques ont plus souvent des troubles relationnels que les enfants en échec global.*

Nous avons repris dans la même étude les données recueillies par trois orthophonistes lyonnaises (8) qui avaient fait passer un bilan orthophonique composé de 16 épreuves à 64 élèves en échec en mathématiques pris parmi 307 (20 % d'échecs). Ces épreuves étaient celles de M^{me} Borrel-Maisonny (langage : sériation, réalisation, compréhension ; lecture : des syllabes, des mots, silencieuse, de « ver-sage » ; de rythme : en reproduction, en identification ; de mémoire motrice), des figures de Rey (copie, mémoire), des chiffres de Berny (copie et mémoire) et deux épreuves de Piaget (raisonnement : classification, sériation)⁴.

A aucune des épreuves pour lesquelles il existe un étalonnage (rythme, mémoire) il n'a été possible de mettre en évidence une différence significative. Et les échecs dans la plupart des autres sont si peu nombreux qu'on peut douter qu'il y en ait là aussi.

Notre analyse factorielle des correspondances de leurs données montrait nettement deux groupes d'élèves discriminés par les épreuves de langage (fig. 1). En supposant que le groupe qui réussit mieux les épreuves de langage est celui des enfants en échec électif (G1 : 21 élèves : 6,8 %, l'autre G2 : 14 % étant les enfants en échec global), ce qui resterait à prouver, on peut conclure qu'aucune des épreuves autres que celles du langage n'est spécialement mieux réussie que les autres par ces enfants ; dans l'ensemble, ils ont des résultats en mathématiques significativement meilleurs que les élèves en échec global, ils sont un peu meilleurs aux épreuves de raisonnement classification, en copie des chiffres de Berny, un peu « moins meilleurs » en reproduction des chiffres de Berny ou en identification de rythme.

4. Ces auteurs, empêtrés dans des différences entre écoles publiques et privées — dont elles semblaient d'ailleurs tirer des conclusions illogiques — et en l'absence d'une connaissance même élémentaire des statistiques, ne tiraient guère parti de leurs données et ne concluèrent rien.

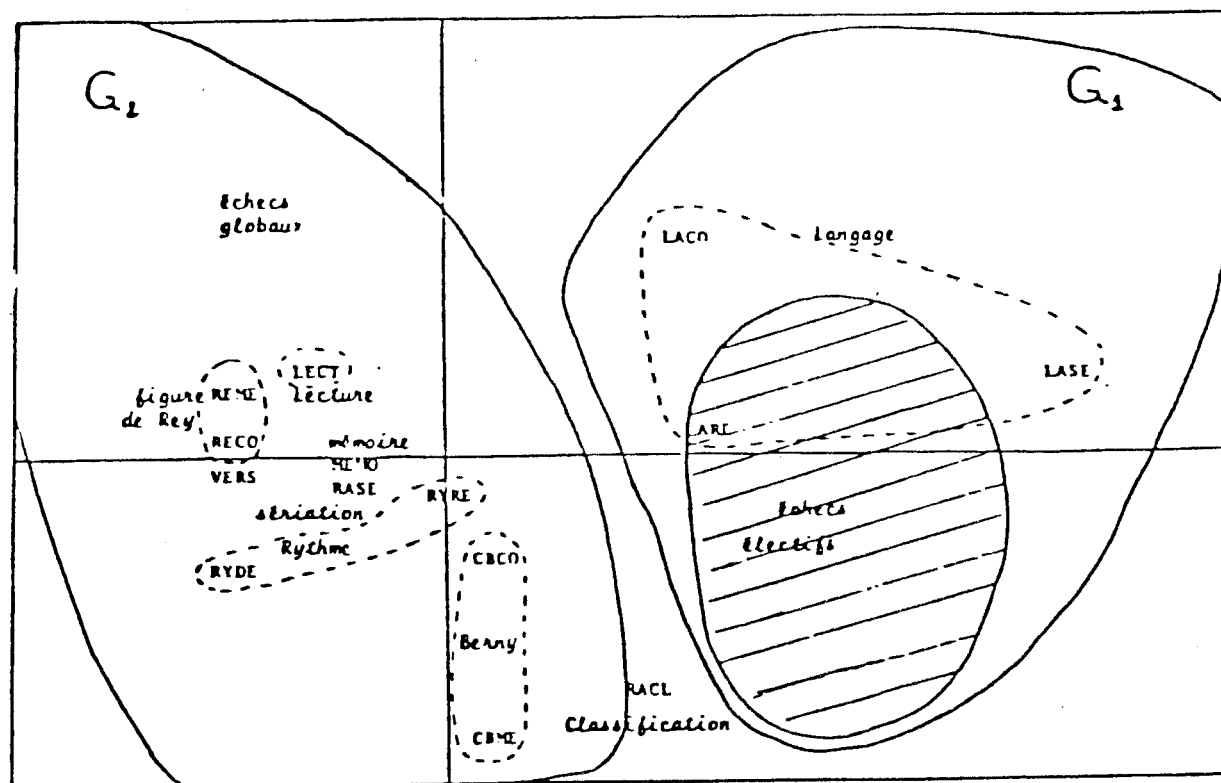


FIG. 1.

Code Nom de la variable

LASE : Langage-Sériation
 LARE : Langage-Réalisation
 LACO : Langage-Compréhension
 LECT : Lecture des syllabes
 LECT : Lecture des mots
 LECT : Lecture silencieuse
 RACL : Raisonnement-Classification
 RASE : Raisonnement-Sériation

Code Nom de la variable

CBCO : Chiffres de Barny en copie
 CBME : Chiffres de Berny en mémoire
 VERS : Versage
 RYRE : Rythme en reproduction
 RYDE : Rythme en identification
 RECO : Figure de Rey en copie
 REME : Figure de Rey en mémoire
 MEMO : Mémoire motrice

Ma conviction restait donc qu'aucune de ces variables n'est franchement liée d'une manière quelconque aux échecs scolaires en mathématiques et en particulier aux échecs électifs.

Plan d'études et méthodes.

Nous avons donc alors décidé de nous centrer sur *l'échec électif* en mathématiques, et non sur l'échec tout court, avec l'espoir d'observer plus facilement des traits vraiment spécifiques. Ce choix nous paraissait d'autant plus judicieux qu'on voulait s'intégrer aux conditions accompagnant l'échec en mathématiques : les pressions exercées par le milieu parental ou scolaire sont plus importantes sur un enfant qui « doit pouvoir réussir en mathématiques puisqu'il réussit ailleurs » (donc « puisqu'il n'est pas sot »...) que sur un enfant en échec global.

Il fallait dans un premier temps :

— mettre au point *une méthode de détection* en vue de l'enquête statistique ultérieure (qui devrait réclamer de plus gros moyens) et déterminer l'ordre de grandeur des populations et des valeurs à comparer pour déterminer le plan d'expérience à venir ;

— explorer par des *observations cliniques* des variables relatives au processus même d'élaboration et de fonctionnement de la connaissance mathématique, et si possible imaginer des nouvelles *épreuves* pour les évaluer.

La méthode de détection devait être peu coûteuse : même un test très simple, à passation collective, devient très lourd dès que l'on doit choisir les six élèves que l'on veut étudier parmi cent à examiner. C'est pourquoi nous avons décidé d'étudier dans un premier temps la *source d'information* que constituent les *maîtres* : stabilité, valeur prédictive, homogénéité par niveaux et par écoles, composantes, etc. Ce choix est légitime car c'est le maître qui constate le plus souvent l'échec de l'enfant, qui le signale à la famille. Le questionnaire devait permettre d'analyser comment le maître tient compte, dans son jugement direct, non seulement des résultats bruts de ses élèves, mais aussi de leur aptitude à apprendre, de leurs manifestations d'intérêt, de son pronostic, etc.

Dans un deuxième temps, on constituait un *échantillon* plus petit comprenant tous les *enfants en échec électif* détectés (E.E.E.), un nombre égal d'enfants en échec global et un nombre égal d'enfants en réussite globale. On vérifiait auprès de ces enfants, avec un test d'acquisition par exemple, la valeur prédictive de la méthode de détection par la source « maîtres », et on pouvait peut-être déjà trouver des caractères communs du comportement en mathématique des E.E.E.

Parallèlement, les *observations cliniques* allaient être organisées dans le cadre d'une action favorable à l'enfant, c'est-à-dire dans celui d'une *rééducation*. Elles seraient accompagnées d'enregistrements (transcrits), d'épreuves diverses, de discussions du cas, elles-mêmes enregistrées (et transcrites) et enfin des comptes rendus détaillés permettant des analyses ultérieures.

Nous ne parlerons pas ici des difficultés matérielles et déontologiques de l'approche de ces enfants, mais c'est un point très important.

Etude de la méthode de détermination de la population en échec électif.

SOURCE « MAITRES ».

— Le questionnaire demandait au maître son opinion sur les résultats, les facilités d'apprentissage et l'intérêt manifesté de chacun de ses élèves, à propos des mathématiques, du français et des autres matières. Plus tard, on lui demandait

Les échecs électifs en mathématiques

aussi de déclarer pour chaque enfant « s'il a des difficultés particulières en mathématiques alors qu'il en a beaucoup moins ou pas du tout ailleurs » (échec électif déclaré).

— En janvier 1977, le questionnaire fut proposé initialement à 49 maîtres appartenant à 13 écoles et leurs réponses concernaient 1 104 enfants de tous les niveaux du primaire:

Il fut proposé en juin 1977 à 45 maîtres de 9 écoles (774 enfants) et, en mars 1978, à 35 maîtres de 6 écoles (783 enfants).

Nous avons essayé de conserver la plus grande intersection possible entre ces populations pour permettre une étude longitudinale (138 enfants). L'énorme déperdition montre la difficulté de mener ce genre d'enquêtes, difficultés que nous n'évoquerons pas ici.

Sans entrer dans le détail, donnons les résultats les plus saillants pris parmi ceux rapportés dans les fascicules ([2] 77 tome 2) et dans ([2] 78 tome 1), ([2] 78 tome 3), ([2] 78 tome 2) et ([2] 79 tome 2).

Les élèves étaient classés dans diverses catégories par une relation définie arbitrairement et qui a donné pour les différentes composantes de la population des pourcentages très stables (tableau 3).

TABLEAU 3. — Stabilité dans le temps des proportions entre les diverses populations.

	échec global	échec électif maths	échec électif français	réussite globale	N
janvier 77	16 %	5,6 %	12 %	66,5 %	1104
juin 77	13,9 %	6,9 %	6,5 %	73,5 %	774
mars 78	16,3 %	6 %	9,2 %	69,1 %	783

D'une façon générale, les moyennes des appréciations données par les maîtres pour les différentes variables ne varient pas (ces variables ont entre elles des relations que nous évoquons plus loin et qui elles aussi sont stables).

Mais les résultats estimés par les maîtres sont significativement meilleurs en mathématiques qu'en français et ceci de façon stable. Ils sont d'ailleurs corrélés assez fortement. Le nombre des échecs électifs en français est lui aussi plus élevé.

Ces pourcentages sont homogènes : ils ne varient pas significativement d'un niveau scolaire à un autre, c'est un fait qui nous a surpris : on aurait pu s'attendre, par exemple, à ce que le nombre des enfants en échec électif augmente avec

l'âge des enfants, ce n'est pas le cas. Tout se passe comme si les rapports entre les différents statuts étaient des caractéristiques constantes, donc régulées, du fonctionnement scolaire.

Le pourcentage des enfants en échec électif ne varie pas non plus avec l'effectif des classes, ni même significativement d'un établissement à l'autre (sauf en janvier 1977).

Nous avons pu ainsi nous faire une idée des composantes du « jugement » des maîtres (dans notre questionnaire); elles aussi très stables : d'abord les matières principales sont opposées aux autres, et aux manifestations d'intérêt (30 % d'inertie). (Ces dernières questions sont utilisées par le maître pour se récupérer d'un jugement trop négatif sur les élèves en échec global). Ensuite les mathématiques sont opposées au français (17 à 20 %) et enfin les résultats aux facilités d'apprentissage suivent et amplifient toujours le jugement sur les résultats.

Mais examinons l'évolution du statut des élèves qui ont été concernés par deux ou par trois questionnaires : la stabilité des paramètres de l'estimation des maîtres n'implique pas celle des statuts des élèves :

— A l'intérieur d'une même année scolaire, entre janvier et juin on obtient le tableau de stabilité suivant (tableau 4).

TABLEAU 4. — Instabilité des E.E.E.

Janvier \ Juin	Autres	Echecs électifs	I
Echecs électifs	37	16	53
Autres	675	16	691
I	712	32	744

Il est clair que les deux tris ne sont pas indépendants, que le pourcentage des enfants en échec électif en mathématiques a significativement augmenté (de 4,3 à 7,12 %) et que les deux populations sont inégalement stables.

Compte tenu des possibles erreurs de détection (la fréquence des erreurs de détection est comprise entre 0,1 et 0,3), 20 à 50 % des enfants en échec électif en janvier le restent en juin.

Dans l'ensemble, les maîtres estiment que le niveau en français s'améliore dans le courant de l'année scolaire et qu'au contraire, le niveau mathématique baisse. La population en échec électif en français est plus stable et diminue.

L'étude des appréciations portées sur les élèves en échec électif montre que certains d'entre eux le deviennent par suite d'une amélioration de leur niveau estimé en français, d'autres au contraire, parce qu'ils vont éprouver de nouvelles difficultés en mathématiques. On pourrait retenir l'idée qu'il pourrait y avoir aussi deux types d'échecs à manifestations saisonnières et qualitativement différents : les échecs sur les contenus anciens au moment des révisions du premier trimestre, les échecs sur les contenus nouveaux du second trimestre. Mais pour les étudier, il faudrait construire des épreuves particulières. Et pour l'instant on conserve d'abord l'ensemble de la population.

En comparant maintenant l'évolution sur les deux années consécutives (janvier 1977, juin 1977, mars 1978) on obtient les résultats suivants :

Les appréciations des maîtres différents sont toutes globalement corrélées (au seuil de .01) (voir tableau 5).

TABLEAU 5. — Corrélations entre les appréciations des maîtres.

		Mathématiques		Français	
		janv. 77	juin 77	janv. 77	juin 77
maîtres différents	mars 78	$r = 0,38$	$r = 0,48$	$r = 0,59$	$r = 0,64$
	juin 77	$r = 0,75$		$r = 0,79$	

Il faut remarquer que les corrélations sont bien meilleures en français qu'en mathématiques, lorsqu'il y a changement de maîtres. Ce point est important, il montre que l'appréciation des résultats de mathématiques, contrairement à une idée répandue, obéit à un consensus moins bien établi, moins universel que l'appréciation en français. Les enfants y subissent donc des poussées moins cohérentes. Les corrélations entre les appréciations des facilités d'apprentissage et de l'intérêt manifesté sont corrélées elles aussi à .01. Cela ne veut pas dire que les valeurs attribuées à chaque enfant sont les mêmes, mais que les divergences d'opinions sont peu nombreuses et peu importantes.

Les effectifs des élèves de chaque catégorie sont assez faibles et, comme prévu, insuffisants pour conclure dans cette préexpérience : il est inutile par conséquent de chercher la distribution des 146 élèves (dont 22 ont redoublé) sur les 64 types d'évolutions possibles entre les quatre statuts étudiés : NE (non-échec)

EEF (échec électif en français), EEM (échec électif en mathématiques), EG (échec global). Toutefois, l'examen des matrices de transition donne une idée de la stabilité de ces groupes dans le temps : tableau 6, à titre d'exemple :

TABLEAU 6. — Stabilité des statuts scolaires.

janvier 1977 mars 1978	IG	EEM	EEF	NE	
EG	3	2	5	11	21
EEM	1	1	0	9	11
EEF	2	0	3	5	10
NE	6	4	11	83	104
	12	7	19	108	146

Par exemple, on voit que sur 7 élèves en EEM en janvier 1977, 4 ne sont plus en échec en mars 1978, 2 sont en échec total. Entre juin 1977 et mars 1978, 67,8 % des enfants ne changent pas de statut scolaire : la population la plus instable est E EEM.

Ceci tendrait à montrer que si les pourcentages d'enfants en échec électif sont stables à l'école primaire d'une année à l'autre, ils ne concernent pas les mêmes enfants

SOURCE D'INFORMATION « ENFANTS ».

— Le test d'acquisition scolaire choisi, malgré de nombreux inconvénients, était celui du Centre de psychologie appliquée pour les niveaux CE 1, CE 2, CM 1, CM 2. Il comprend un test mathématique de 32 à 40 questions et un test de langue française (vocabulaire, conjugaison, lecture, grammaire, expression, fonction des mots).

— Nous avons pu vérifier sa stabilité globale et son étalonnage global au cours de la période 1975-1979 sur des populations de 200 à 500 élèves par niveau.

— Nous nous sommes assurés de la corrélation qu'il pouvait avoir avec le travail ou les résultats de l'année scolaire, tels qu'ils sont obtenus par les maîtres

de l'école Jules-Michelet de Talence (2 classes par niveau)⁵ $r = 0,58$. Ce qui est assez bon, compte tenu du fait que le TAS est un QCM, ce qui introduit par définition un bruit important (voir [2] 77 tome 1).

Nous avons proposé ce test à un échantillon de 66 enfants répartis comme l'indique le tableau 7.

TABLEAU 7. — Echantillon de la préexpérience.

		Niveau				
		CE ₁	CE ₂	CM ₁	CM ₂	
statut scolaire	EEM	6	7	5	5	23
	E global	3	4	2	3	12
	N échec	6	12	6	7	31
		15	23	13	15	66

Le statut des enfants indiqué est celui fourni par le questionnaire aux maîtres qui a servi à former l'échantillon. Il est clair que les effectifs sont trop faibles pour qu'on puisse tirer des conclusions très précises sur les populations de chaque niveau, d'autant que les questions posées aux différents niveaux sont différentes.

Nous avons pu toutefois faire quelques comparaisons dans chaque niveau en regroupant les questions de mathématiques selon des critères classiques : numération, opérations, logique. Mais il s'agissait surtout de mettre au point les méthodes de traitement (cf. [2] 78 tome 2). Nous donnerons plus loin des résultats obtenus sur l'échantillon en vraie grandeur.

— Le test passé, nous avons réparti les élèves suivant l'écart de leurs résultats d'ensemble en mathématiques et en français dans trois groupes : NET (non en échec au TAS), EET (échec électif d'après les TAS) et EGT (échec global d'après les TAS en essayant divers critères (février 1978).

Ceci nous a permis de comparer la classification du questionnaire et celle du TAS : tableau 8.

L'effectif est trop faible pour conclure mais on ne peut pas rejeter l'hypothèse que les deux classifications sont indépendantes !

5. L'école Jules-Michelet de Talence est un établissement doté d'un statut et d'équipements spéciaux pour permettre l'observation clinique des classes.

TABLEAU 8. — Comparaison des statuts
d'après le questionnaire aux maîtres et d'après le TAS (préexpérience).

Q \ TAS		EGT	EET	NET	
Q	NE	4	5	22	31
	EE	3	5	14	22
	EG	5	3	4	12
		12	13	40	65

Ceci pourrait être dû :

- soit au fait que les deux sources sont très imprécises et les moyens de détection trop bruyants ;
- soit qu'elles mesurent des échecs de type différent.

Quoiqu'il en soit, il n'était pas prudent de ne faire confiance qu'à la détection des EEE par l'intermédiaire des maîtres dans l'expérience en vraie grandeur. Il fallait conjuguer les deux sources sur l'ensemble de l'échantillon, ce qui allait alourdir sensiblement la recherche. On peut toutefois rassurer le lecteur : cette expérience en vraie grandeur nous a permis d'établir la valeur des questionnaires aux maîtres. Voici les tableaux obtenus avec 502 élèves du CM 1 et diverses définitions :

TABLEAU 9. — Comparaison TAS/Maîtres (expérience).

Q \ TAS	EG	EE	NE	I
EG	30	11	49	90
EE	13	15	87	64
NE	23	18	256	297
	66	44	392	502

($\chi^2 = 499$ sign. .01)

Q \ TAS	EG	EE	RT	I
EG	30	11	4	45
EE	13	15	36	64
RT	1	4	40	45
	44	30	80	154

($\chi^2 = 67$ sign. .01)

Première étude des réponses au test d'acquisitions scolaires.

Cette analyse très résumée et très sommaire porte sur une partie des données recueillies dans le cadre de l'A.T.P. du C.N.R.S.⁶ qui a suivi les travaux rapportés ci-dessus. Le questionnaire et le TAS concernent 289 élèves de CM 1 de 14 classes (juin 1978) (cf. [2] 79 tome 2).

6. A.T.P. : Action Thématique Programmée du Centre national de la recherche scientifique.

— La distribution de 42 questions du TAS sur les pourcentages de réussite montre trois groupes de questions (tableau 10). Q 1 : mal réussi et sur lequel beaucoup d'élèves se sont abstenus de répondre ; Q 2 : dont les taux de réussite se distribuent normalement ; Q 3 : exercices mieux réussis que les autres. L'analyse du contenu mathématique de ces questions par des méthodes que nous n'exposons pas ici semble fournir les indications suivantes :

Q 1 : numération, bases, petits nombres,

Q 3 : calcul, grands tableaux, diagrammes.

TABLEAU 10. — Histogramme des questions par pourcentage de réponses justes.

	C			D				A			
	21	27,20	33,40	39,60	45,80	52	58,20	64,40	70,60	76,80	83
7			21	23	3	5	4	9		16	1
10			27	26	6	8	13	15			2
11			34	33	29	14	25	24			12
18				39	37	22	30	28			17
19					40	35	31	38			20
						36		42			22
											23

Q_1
 Q_2
 Q_3

— L'analyse factorielle fait apparaître les faits suivants (entre bien des phénomènes que nous ne soulignerons pas ici) (fig. 2 : premier plan factoriel).

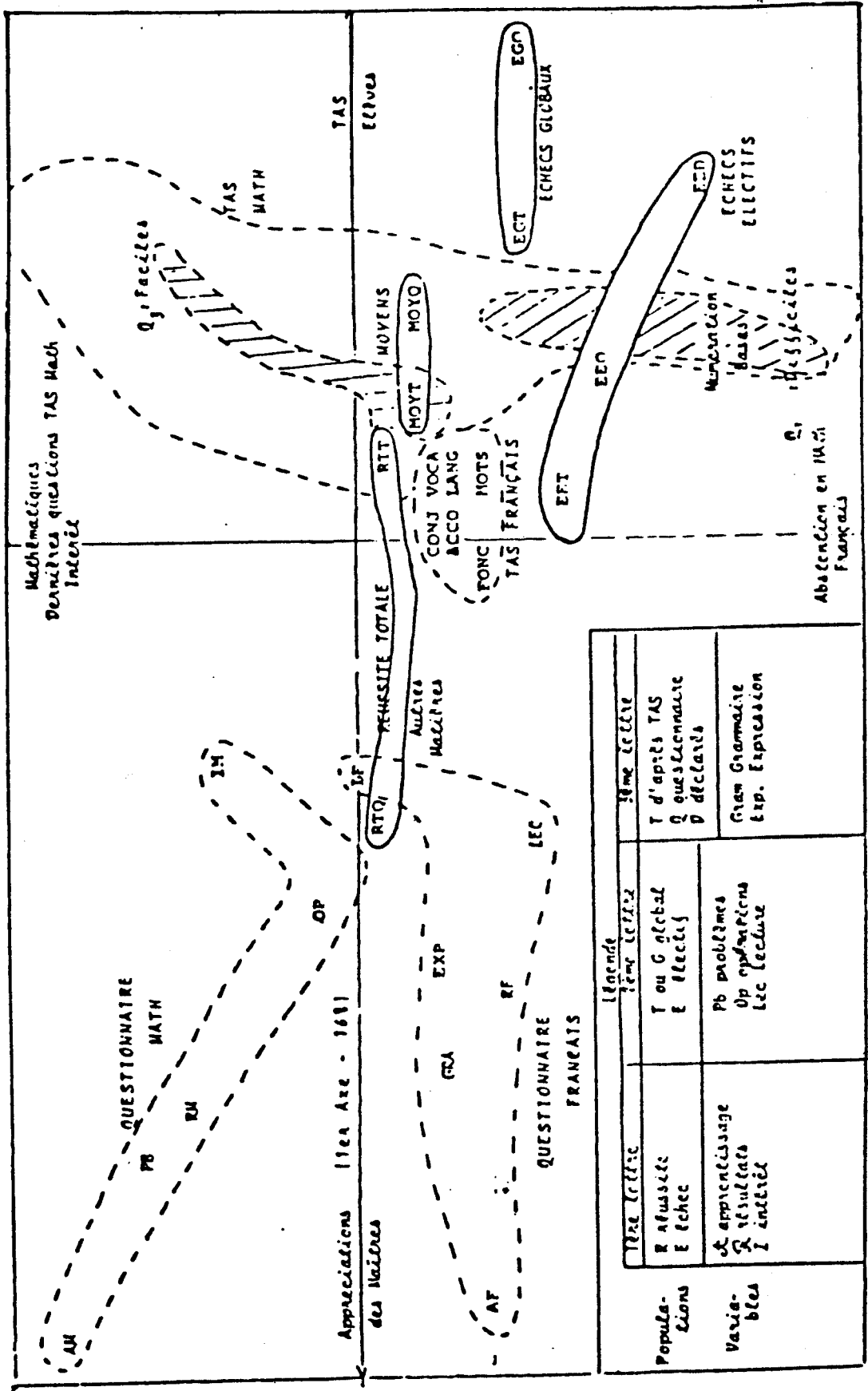


Fig. 2. - Position des variables dans le premier plan factoriel.

- Les sources « maître » et « élèves » donnent des renseignements assez différents. Néanmoins, toutes les variables « échecs électifs » sont dans la même région, assez proches, et ceci est vrai pour les sept premiers facteurs. (La variable calculée sur le questionnaire se trouve entre le résultat des tests et le jugement des maîtres.) Par conséquent, on peut désormais utiliser le questionnaire et le jugement des maîtres pour former une population en échec électif aux TAS.
- Les trois populations : échec électif en mathématiques, échec global et réussite globale se séparent bien dans les premiers plans factoriels : on peut dire que les trois groupes d'enfants *ont des comportements différents même en mathématiques*. L'analyse de ces comportements se poursuit actuellement et fait apparaître ceux qui sont plus caractéristiques des enfants en échec électif : les élèves en échec

électif *s'abstiennent de répondre aux questions mathématiques du TAS*, et ceci significativement plus que les autres enfants. C'est d'ailleurs probablement ce qui explique sans doute la proximité des questions du groupe Q 1 : numération et bases. Ils répondent de moins en moins bien ou s'abstiennent de plus en plus au cours du questionnaire (ce phénomène se produit plus pour eux que pour les enfants en échec global).

- Ils réussissent plutôt mieux les épreuves comportant des opérations et des algorithmes que les petits problèmes (mais les enfants en échec global ne réussissent pratiquement que les opérations).
- Ils réussissent assez mal les épreuves de numération (en base 4 et en base 10).
- Pas de comportement très spécifique relativement au langage mathématique, légère tendance à y être un peu moins habiles.
- Le caractère « moderne » ou « ancien » des questions paraît sans effet.

— Les élèves en échec électif sont moins motivés dans l'ensemble, même en français ; ceci dit, leur intérêt se porte presque exclusivement sur le français.

— L'appréciation des maîtres est plus proche des résultats au TAS en français qu'en mathématiques.

En français, les appréciations des maîtres sont plus dispersées que les résultats aux TAS, très voisins les uns des autres.

En mathématiques, la dispersion des résultats du test est beaucoup plus importante qu'en français ; par contre, celle des appréciations est du même ordre (mais dans une direction orthogonale).

Les résultats aux tests en mathématiques sont corrélés avec l'opposition français-mathématiques dans l'opinion des maîtres.

En première approche l'intérêt explique plus l'étalement des questions de mathématiques que les variables d'apprentissage et résultats, ou les sous-domaines problèmes et opérations.

Les maîtres reprochent aux EEE plus leurs difficultés d'apprentissage que leurs résultats, et l'opposition qu'ils font entre mathématiques et français correspond plus à des différences de comportements en mathématiques qu'à une réelle opposition entre les matières.

Conclusions de l'approche statistique.

1. Les échecs ou les difficultés des élèves doivent ils être analysés du point de vue des connaissances elles-mêmes ? C'est dans cette mesure qu'ils pourront être traités par des décisions didactiques, c'est-à-dire relatives à l'enseignement par opposition à des interventions non spécifiques, purement pédagogiques, ou psychologiques, ou autres.

La question se pose non seulement pour un grand domaine de connaissances comme les mathématiques, mais aussi ensuite pour des secteurs plus restreints comme les nombres, la numération, les problèmes... etc. Cette question est fondamentale : elle revient à se demander quels sont les objets de la didactique, non plus à la façon banale des enseignants : "que faut-il enseigner et comment ?", mais dans une problématique scientifique : "de quoi dépendent les acquisitions des savoirs ?"

Il faut donc examiner quelle est l'influence des difficultés ou des échecs dans des secteurs limites, échecs que nous appelons électifs, sur des échecs globaux ou dans des secteurs plus larges.

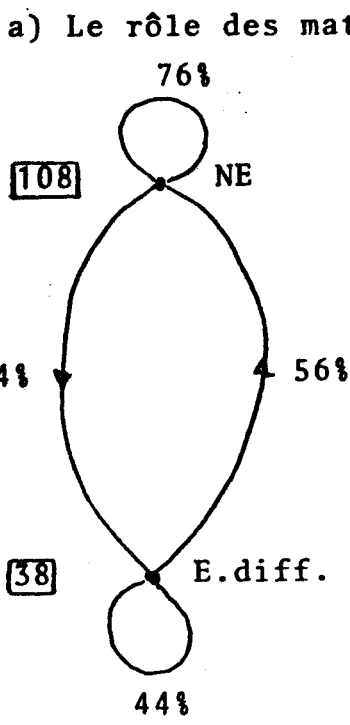


Diagramme 1.

a) Le rôle des mathématiques dans la mise en échec : sur 146 élèves d'école primaire, une épreuve détermine que 38 sont en difficultés (D) ou en échec en janvier 1977.- en mars 1978 - 44 % seulement des élèves en échec le sont restés tandis que les autres 56 % avaient rejoint les élèves normaux, et que 24 % des élèves non en échec en 1977, le deviennent en 1978 (diagramme 1). Or, si l'on distribue les élèves en difficultés, en 3 catégories : Echecs Electifs en Français (EEF), Echec Electif en mathématiques (EEM) et Echec Scolaire Général (EG), (diagramme 2) il apparaît que moins de la moitié des élèves "normaux" (NE) qui entrent en échec (24 %) le font directement (10 %), alors que 14 % rencontrent d'abord un échec électif.:

1/3 d'entre eux en Français (5 %) et près de 2 fois plus en mathématiques (9 %).

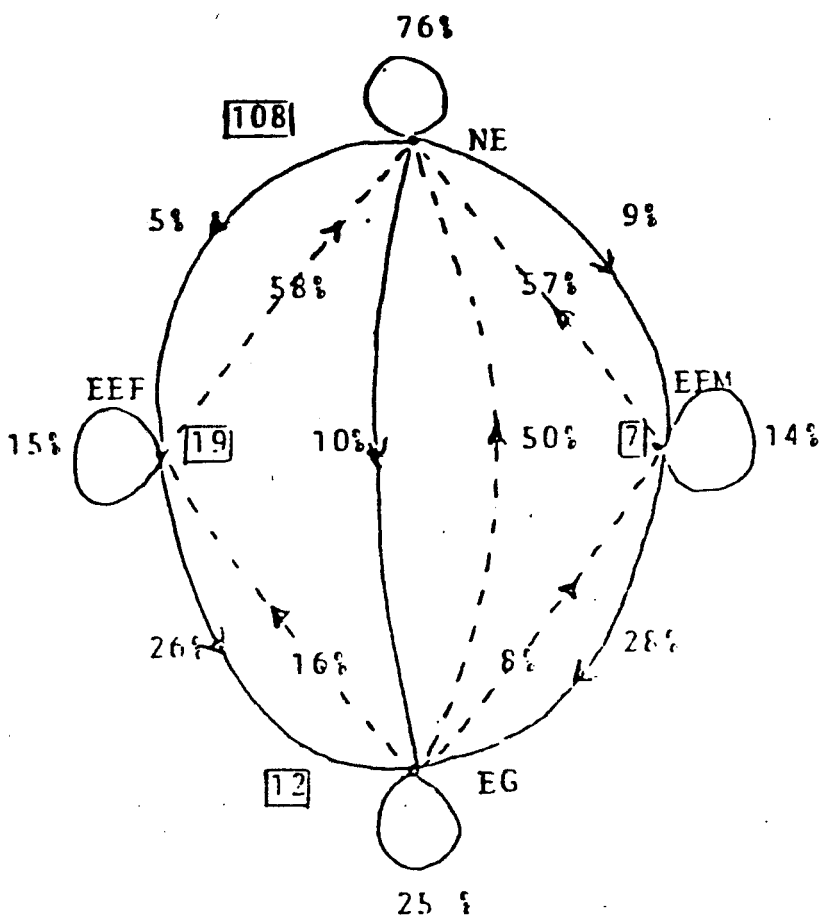


Diagramme 2.

On peut penser que l'entrée en échec en même temps sur toutes les matières est due à des causes qui ne font guère intervenir le contenu des savoirs enseignés, mais que l'entrée en échec électif est due à des causes spécifiques (Conclusion 1)

Les trois cinquièmes des élèves en échec relèveraient donc de cette analyse. Pour tempérer cette opinion, il faut observer toutefois que le passage des élèves de l'échec global à la normale se fait principalement de façon directe, et cela concerne 50 % des enfants en échec général. A peine 16 % font des progrès sélectivement en mathématiques et 8% des progrès en Français :
.../...

Actuellement ce seraient les actions non spécifiques ou conjuguées qui réussiraient le mieux. Mais cette très faible circulation entre les classes d'échec (0 % dans les deux sens entre EEF et EEM), par rapport à la stabilité interne des groupes et à l'instabilité inter-groupes conduit à rejeter l'hypothèse que les enfants en échec électif suivraient le même sort que les enfants en échec général.

Il faut bien admettre que les élèves en échec électif sont plus facilement en échec général. Les EEF échouent en mathématiques 3 fois plus et les EEM échouent en Français 5 fois plus que les élèves normaux.

Donc, s'il faut examiner de près l'acquisition des savoirs, il y a peu de chances d'expliquer entièrement ces échecs par des considérations limitées à ces savoirs.

D'ailleurs l'instabilité interne des groupes en EE, surtout en mathématiques montre qu'au niveau de l'école primaire, l'échec électif n'est pas encore enkysté. C'est une des raisons pour lesquelles nous avons choisi de l'observer à ce moment-là au cours de sa genèse.

b) La spécificité des comportements.

Un autre argument pour étudier l'échec en mathématiques résulte d'une étude plus fine des résultats des élèves aux épreuves de mathématiques : les élèves en Echec Général, ceux en Echec Electif et ceux en réussite générale ne s'y comportent pas de la même manière. Par exemple les EEE s'abstiennent davantage de répondre et sont moins motivés que les autres, même en français !, ils réussissent mieux que les autres les épreuves consistant en des algorithmes ou des opérations et réussissent plus mal les épreuves de numération...

L'échec électif tend donc à devenir spécifique, ce qui signifie que l'élève en échec électif échoue d'une façon différente sur des questions particulières et qu'il lui faudra des interventions elles aussi spécifiques (Conclusion 2).

On comprend que les études statistiques sont ici très vite limitées par des questions de coût.

.../...

2. Les élèves en difficulté élective en mathématiques auraient-ils d'autres troubles, psychologiques, affectifs ou d'une fonction instrumentale ou périphérique... qui expliqueraient l'échec et auxquels on pourrait remédier sans faire appel à la connaissance elle-même ?

Parmi une assez longue liste de tels troubles (psychomoteurs, temporels, fonction symbolique, langage, schéma corporel, rigidité... dysgnosie, etc...) les seuls dont la corrélation avec l'EE nous paraisse à peu près établi sont les troubles relationnels: Les élèves en échec électif ont plus souvent des troubles relationnels que les élèves en échec global. (Conclusion 3).

Il nous est vite apparu que la voie de recherche était trop empirique et trop coûteuse.

3. Les caractéristiques des maîtres et leur façon de travailler peuvent-elles expliquer les échecs ?

Les quelques questions que nous avons étudiées dans cette direction ont fait apparaître des faits curieux :

La corrélation entre les appréciations des maîtres sur les mêmes élèves est assez faible : l'appréciation des résultats de mathématiques n'obéit pas à un consensus aussi bien établi qu'en Français. Par contre, les pourcentages d'élèves des différentes catégories ne varient pas significativement d'un niveau scolaire à un autre, d'une école à une autre.

On pourrait s'attendre à ce que le nombre d'enfants en échec électif augmente avec l'âge de l'élève - ce n'est pas le cas -.

Tout se passe comme si les rapports entre les différents statuts étaient des caractéristiques constantes donc régulées du fonctionnement scolaire (Conclusion 4)

4. Nous venons d'évoquer l'ébauche d'une étude statistique des systèmes en présence : les maîtres, les élèves, les connaissances, le milieu - et d'en montrer les limites. Nous aurions pu continuer par la revue des apports considérables -

qui concernent les interactions de deux des systèmes en présence : "maître-élève" ou "élève-connaissance" voire "élève-milieu"... cependant, les résultats que nous venons de rappeler indiquaient qu'il fallait reprendre ces travaux, quelle qu'en soit l'origine, sur la base d'analyses spécifiquement didactiques : il fallait étudier les rapports, les régulations maître-élève-milieu (comprenant le plus souvent une situation problème) dans ce qu'ils avaient de spécifique de la connaissance visée.

5. Conclusion. Une série s'observations cliniques d'enfants en échec à l'occasion de soutiens assez longs a permis de mieux lire ce que nous suggéraient nos résultats :

1°) C'est au coeur de l'activité cognitive qu'il faut observer la genèse de la réussite ou de l'échec

2°) Chaque connaissance se construit lors de la prise du contrôle par l'élève d'une situation spécifique de cette connaissance. Selon ce que ce contrôle exige de l'élève, la connaissance recevra un sens plus ou moins correct, riche, etc...

3°) Mais la partie la plus délicate concerne la dévolution par le maître à l'élève de ces situations "d'apprentissage", les interventions didactiques qui l'accompagnent (car elles aussi sont souvent spécifiques du savoir visé) et les pressions qu'elles expriment. Cette dévolution passe en général par une négociation d'une sorte de "contrat idéal" en ce sens qu'il ne peut jamais être réellement explicité, ni achevé, ni respecté.

Approche clinique des échecs électifs en mathématiques.

1. Introduction.

Nous avons étudié neuf cas, dont cinq pendant les trois premières années. La plupart de ces observations n'ont été possibles que grâce à l'existence du statut spécial de l'école Jules Michelet car il est difficile concrètement de rencontrer des enfants en échec électif à partir de la clientèle des orthophonistes.

Chacun de ces cas a été suivi par une orthophoniste de 3ème année. Elle rédigeait in extenso, en s'aidant des enregistrements audio-visuels, les protocoles d'intervention auprès des élèves, ainsi qu'un compte rendu assez détaillé des séances de préparation et d'analyse de l'équipe. Cette petite équipe était composée du psychologue scolaire (J. PERES), du cadreur-régisseur (qui était en même temps le directeur de l'école J. Michelet), de l'intervenant (M. CASTELLI ou moi-même, dans la plupart des cas) et de deux autres observateurs.

La hiérarchie des objectifs et les méthodes mises en oeuvre pour s'assurer d'une certaine objectivité et du respect des règles déontologiques qui s'imposent, sont exposées dans [2, 1978, tome IV, AMIRAULT C. CHERET M.].

Dans chaque cas, l'enfant a suivi huit séances (20 dans un seul cas) de une heure consacrée en partie au soutien, en partie au diagnostic, et en partie (variable) à des activités assez proches d'une rééducation. Chaque cas a fait l'objet d'un mémoire où sont consignées les analyses a priori, les interventions, les précisions et les conclusions "à chaud".

Les comptes rendus témoignent des échecs comme des réussites et des hésitations des chercheurs autant que de celles des praticiens (aux rôles interchangeable ici). Certains ont été repris ensuite (après au moins trois ans) et les séances les plus importantes ont été réanalysées et les bandes vidéo révisionnées, pour essayer de dégager

les faits essentiels de l'intervention.

Pour le mémoire, la méthode d'appui des déclarations était l'attestation : il fallait que chaque fait énoncé s'appuie sur des indices assez nombreux repérés dans le texte des protocoles, et que l'observateur recherche si des indices contraires n'étaient pas présents.

Lors de l'analyse a posteriori, nous avons tenté la confrontation des faits ainsi établis avec les hypothèses que nous émettions.

Il s'agissait si possible de trouver des caractères communs à ces différents échecs électifs, de les différencier et de les expliquer en apportant la preuve que l'intervention avait agi sur les variables déclarées avec un effet observable ! Ambitieux programme dont nous allons examiner le succès dans le meilleur cas de réussite, celui de Gaël.

La méthode principale est l'analyse des situations dont nous allons d'abord donner un exemple "critique".

2. La méthode d'analyse des situations : un exemple.

Analysons par exemple la rééducation décrite par F. JAULIN-MANNONI dans "Le Pourquoi en Mathématiques" : la rééducation de Nadine.

L'auteur étudie dans cet ouvrage diverses rééducations relatives à la notion de produit et applique des théories générales d'apprentissage à l'enseignement de la commutativité.

1. Résumé de la rééducation (voir "texte en notes")

Dans la première séance des huit consacrées à Nadine, F. JAULIN-MANNONI associe le mot "fois" à des représentations de dessins identiques. La 2ème séance familiarise l'enfant avec l'ensemble produit : (objets - couleurs) et ses dispositions spatiales ; et permet d'associer

.../...

à celles-ci des expressions de la forme "n fois a" (par exemple : 3 fois 6).

F. JAULIN-MANNONI reprend dans la troisième séance des circonstances tout-à-fait identiques à la deuxième.

La 4ème séance a pour objet l'apprentissage de l'association de certaines dispositions à des dessins et des changements de disposition aux changements de dessins. A la fin de cette séance, la rééducatrice constate que l'enfant a des difficultés avec la conservation des quantités, allant jusqu'à la perte de cette notion de conservation. Nadine sait reproduire des actions, mais n'arrive à aucune constatation.

La séance suivante reproduit les activités de la précédente sans que le problème soit résolu. Les 6ème et 7ème séances ne sont pas rapportées.

Dans la 8ème séance, l'enfant énonce la commutativité et la justifie uniquement par l'apprentissage des tables. Elle généralise la propriété à d'autres opérations comme la soustraction mais ne recourt pas à des vérifications.

2. Etude de la première séance

A. Première séquence

Item (1)

x Les faits.

La rééducatrice demande : "dessine 3 fois a"

L'enfant écrit : a - a - a ...

x Commentaire

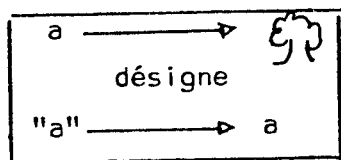
La rééducatrice pense que le mot "dessine" suffit à signifier à l'enfant qu'on veut obtenir d'elle non pas trois copies de la lettre "a", mais 3 reproductions du dessin désigné par la lettre "a".

Pour obtenir la réponse que fait Nadine, elle aurait sans doute demandé : "écris" trois fois a"

Or, en l'absence de toute motivation ou signification, on peut admettre que l'enfant qualifie la calligraphie de dessin.

Nous ignorons si une activité préalable permettrait de comprendre le rapport signifiant - signifié de la lettre a avec le dessin d'un arbre. En l'absence de cette activité et d'une discrimination entre

écrit (non prononcé) et dessine, rien n'indique à l'enfant que l'on se trouve en présence de plusieurs objets : un arbre (un vrai), un dessin (symbolique), une lettre qui le désigne, le phénomène [a] qui désigne le dessin en vertu d'une convention de désignation, le phénomène [a] qui désigne la lettre elle-même et que l'on pourrait écrire "a" ou désigner par "la lettre a".



La confusion n'a rien de surprenant. Mais elle n'est pas relevée par la rééducatrice. L'enfant peut supposer qu'elle a bien répondu.

Or, il y a une manière très simple de lever cette ambiguïté, manière qui consisterait à redonner la consigne dans un langage directement compréhensible et qui aurait pu être : "je ne t'ai pas demandé d'écrire trois fois la lettre a, mais de dessiner trois fois ce que j'appelle "a" ".

Item (2)

* Les faits

"Dessine trois fois Nadine" demande la rééducatrice.

L'enfant dessine alors 3 personnages.

F. Jaulin-Mannoni ne précise pas si ce sont trois dessins différents que fait l'enfant.

* Commentaire

Le mot "Nadine" ne se dessine pas, mais s'écrit.

S'il est fréquent que les enfants et les maîtres utilisent des termes de dessin pour les lettres seules (fais un s, dessine les pleins....) ils associent toujours au mot le terme "écrit". Il est clair pour Nadine que "dessine" ne peut être associé à l'écriture du mot "Nadine", puisque l'objet "Nadine" est représentable par un dessin.


La réaction aurait été la même si on avait dit : "dessine trois bonshommes ou trois chiens" Le rapport signifiant-signifié est clair mais renvoie à un objet réel unique, ce qui va d'ailleurs fausser la situation.

.../...

Il n'y a toujours pas de renforcements. L'enfant peut penser qu'elle a bien répondu. Elle n'a aucune raison de faire une comparaison entre le premier et le deuxième item ; et de plus elle n'apprend rien de ce second item.

Item (3)

x Les faits

La rééducatrice : "voici René  Dessine 3 fois René".
L'enfant dessine 3 bonshommes.

x Commentaire

Nous retrouvons ici le même exercice que précédemment, mais le signifié est devenu un dessin et le signifiant le nom d'un personnage absent.

L'enfant a-t-il tiré parti de l'item précédent en en "transférant" le rapport signifiant-signifié ? Nous pensons que non. Posée d'emblée, la question (3) : "dessine 3 fois René" aurait conduit à la réponse (3) pour les raisons invoquées ci-dessus (dessiner René n'est pas la même chose qu'écrire "René")

La discrimination repose sur la distinction entre "écris" et "dessine" un mot.

Aucune opinion n'est communiquée à l'enfant dans son travail, mais tout lui laisse penser que ce que la rééducatrice attend de lui correspond à ce qu'il dit.

Si F. Jaulin-Mannoni avait dit : "fait trois dessins de Nadine ou de René", cela aurait eu le même sens, et le mot "fois" disparaissait : Donc le mot "fois" est là de façon superflue comme une bizarrerie de langage, mais il n'a aucune raison pour apparaître comme signifiant une opération véritable.

Item (4)

x Les faits.

Nous revenons à (1) qui n'est toujours pas compris :
"dessine 3 fois a"
Nadine écrit a - a - a -

.../...

* Commentaire.

Il est clair que rien n'est venu changer l'interprétation donnée par l'enfant en première consigne.

Et ceci malgré un fait nouveau : la rééducatrice a posé 2 fois de suite la même question, or généralement c'est une indication signifiant que la réponse donnée n'est pas celle attendue.

Il est possible que si l'on reposait la même question à Nadine, elle répondrait correctement. Si tel était le cas, cela prouverait que sa réponse fautive était seulement due à l'ambiguïté de la question ou au fait qu'on ne lui a donné aucune correction concernant les erreurs précédentes.

Il nous semble difficile de croire qu'à l'âge de Nadine, on ne puisse pas concevoir l'usage d'une désignation par une lettre ; et si tel était le cas pour Nadine, il est alors étonnant qu'elle puisse l'apprendre de cette façon.


L'enfant peut très bien penser que l'activité porte sur le nombre 3, puisque jusqu'à présent, il n'y a eu aucun Feed Back lui permettant de s'apercevoir qu'elle s'est trompée.

Nadine n'a même rien appris. La seule chose qu'elle ait faite, c'est de dessiner trois fois un signe, ce qui pour elle n'a pas de sens.

Cela va prendre du sens à partir du moment où elle va comprendre que ce n'était peut-être pas cela qui lui était demandé. Et à travers ce que la rééducatrice a dit, elle va chercher à comprendre ce qu'il fallait effectivement faire.

Item (5)

* les faits.

La rééducatrice : voici a :  Dessine 3 fois a"
Nadine dessine 3 bonshommes.

* Commentaire.

La question est la même qu'en (3) et elle appelle visiblement la même réponse. L'enfant sent intuitivement qu'elle a commis une erreur quelque part au cours des questions précédentes.

La seule différence entre les item (3) et (5) réside dans le changement de désignation : "a" a remplacé "René".

Cette réponse est celle qui indique à l'enfant sur quoi portait le problème ; c'est sur l'usage de la lettre a. Si Nadine

n'était pas capable de concevoir la lettre comme symbole d'un dessin, elle ne pourrait pas simplement à partir de cette 5ème question, savoir ce qu'elle va devoir répondre à la question suivante (6) et elle pourrait de nouveau dessiner 3 bonshommes.

Item (6)

* Les faits.

Retour à (1) : "dessine 3 fois a"

L'enfant dessine 3 arbres.

* Commentaire.

Lorsqu'on lui demande pour la troisième fois : "dessine 3 fois a" Nadine pourrait supposer que ce qu'elle avait fait tout d'abord (a - a - a) était correct. Mais devant l'insistance de la rééducatrice, elle modifie sa réponse.

La rééducatrice a d'autre part dû désigner l'arbre pour montrer que la question n'était pas la même qu'en (5). Et c'est la seule différence entre les items (5) et (6).

Or, c'est une règle couramment pratiquée de façon implicite suivant les rééducateurs : il s'agit de poser deux fois la même question avec une petite différence et les réponses doivent se différencier sur ce qui différencie les questions.

En appliquant ce simple principe, Nadine peut modifier sa réponse et passer du dessin du bonhomme au dessin de l'arbre.

- Discussion de cette 1ère séquence et de la remarque de l'auteur.

a) *Décision initiale de la rééducatrice de ne pas lever l'ambiguïté.*

Il est exact que cette représentation symbolique comporte des ambiguïtés que le contexte devrait lever en partie.

F. Jaulin-Mannoni a raison lorsqu'elle dit "dans les situations où l'incompréhension tient à ce que l'enfant ne saisit pas ce non dit, nous ne pensons pas qu'on gagne à le verbaliser ou à l'explicitier".

Mais cela n'implique pas que l'on ait quelque intérêt à maintenir une ambiguïté fortuite lorsqu'elle n'est la source d'aucune réflexion ou prise de conscience intéressante.

F. Jaulin-Mannoni aurait pu préciser : "j'appelle cet arbre a, ou bien j'appelle ce dessin a, b... Dessine 3 fois a"

Et devant la première erreur (1), il aurait fallu rectifier tout de suite (si la confusion s'était tout de même produite) : "je ne te demande pas d'écrire trois fois la lettre a, mais 3 fois ce que représente "a". Et l'ambiguïté aurait été levée.

Une ambiguïté n'a d'intérêt que dans la mesure où elle est source de questions intéressantes qui vont faire progresser l'enfant.

b) *Règle d'apprentissage utilisée par la rééducatrice.*

Aucun problème général n'est posé ; la rééducation se déroule question par question et les questions ne sont pas enchaînées les unes aux autres. Ainsi l'enfant ne peut rien investir et résoudre en donnant une signification globale à son action.

F. Jaulin-Mannoni introduit pour des raisons que nous ignorons une codification avec des lettres, sans que l'enfant puisse soupçonner les rapports entre ces lettres et les objets. Et c'est ce qui bloque l'enfant.

Les questions posées sont pour l'enfant pratiquement indépendantes les unes des autres et ne peuvent être considérées comme dépendantes que dans la mesure où Nadine peut saisir l'intention didactique de la rééducatrice, comme nous l'avons vu précédemment.

En aucun cas, la représentation de symbole par une lettre n'apparaît comme motivée.

Chaque question est supposée suffisamment simple pour que l'enfant y réponde tout de suite et directement. Donc aucune ne concerne vraiment l'objet de l'apprentissage (il n'y a d'ailleurs pour aucune ni apport d'information ni renforcement direct). L'apprentissage est supposé se faire à travers un rapprochement de questions entre elles, rapprochement consécutif à l'indication indirecte qu'une réponse était fautive.

Le point sur lequel porte l'apprentissage est à construire à partir des questions voisines (c'est ce qui est parfois appelé "exercices structuraux") par une analyse de ressemblances et de différences formelles. La bonne réponse est progressivement associée à la question à partir d'une réponse quelconque de l'enfant par des substitutions successives. Chaque substitution est justifiée par le sens de chaque question, mais l'association elle-même : question - bonne réponse est obtenue formellement. Elle n'est dotée d'aucune signification particulière à moins que l'enfant ne la connaisse déjà, ou ne la reconnaisse.

.../...

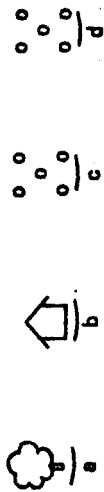
OBSERVATION DE NADINE


Nadine est une enfant dyspraxique dont les troubles ont été dépiétés très tôt (avant 7 ans) car elle n'arrivait pas à apprendre à compter.

La rééducation lui a permis d'échapper à la classe de perfectionnement. Au moment de l'observation suivante, elle a 9 ans et est en CE₂. Nous l'avons suivie par la suite jusqu'en CM₁, où elle a pu suivre normalement en classe.

PREMIERE SEANCE (*)

Dans un premier temps, nous travaillons le mot « fois » sous la forme :

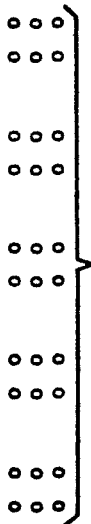
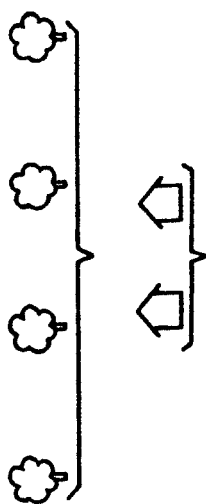


- (1) « Dessine 3 fois a » elle écrit : a a a.
- (2) Nous lui demandons : « dessine 3 fois Nadine » : elle dessine 3 personnages.
- (3) Puis : « Voici René ». Dessine 3 fois René : elle dessine 3 bonshommes.
- (4) Nous revenons à (1) qui n'est toujours pas compris.
- (5) « Voici a :  ». Dessine 3 fois a : elle dessine 3 bonshommes.
- (6) Retour à (1). Elle dessine 3 arbres.

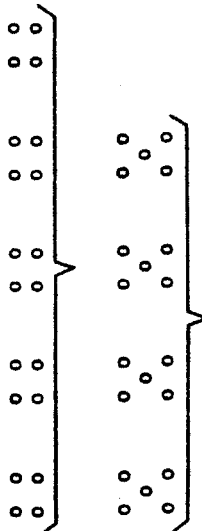
(*) Il ne s'agit bien entendu pas de la « première séance » de rééducation, puisque nous connaissons Nadine depuis plusieurs années.

Remarque : Tout code, toute représentation symbolique comporte un non dit sur lequel il faut être d'accord si on veut se comprendre. Dans les situations où l'incompréhension tient à ce que l'enfant ne saisit par ce non dit, nous ne pensons pas qu'on gagne à le verbaliser ou à l'explicitier. Nous aurions pu « montrer » à Nadine ce que nous attendions d'elle en lui demandant de dessiner 3 fois a, il n'est pas certain qu'elle aurait compris, il est probable aussi qu'elle aurait de toutes manières oublié. En lui proposant : « Dessine 3 fois Nadine », nous lui fournissions une situation dont elle saisit les données implicites (puisque elle n'a pas l'idée d'écrire « Nadine, Nadine, Nadine »). A partir de là, il est possible de revenir par étapes à la situation initiale qui prend pour elle un sens.

(7) Après avoir demandé de dessiner (4 fois b), (2 fois c), (3 fois d), nous lui proposons les dessins suivants en lui demandant à quelle consigne ils correspondent :



Nous introduisons également des nombres qui n'ont pas été représentés en (1) sous la forme :



etc.
Elle n'a aucune difficulté à réussir ces exercices.

(8) Nous lui donnons 12 pions en lui demandant de trouver comment on pourrait les disposer en tas pour avoir des situations ainsi exprimables en termes de « fois ». Elle semble comprendre la consigne : « tu fais des tas, il faut que ce soit comme tout à l'heure, que tu puisses écrire « fois », mais ne parvient pas à trouver de solutions.

(9) Nous dessinons 4 objets (une maison, un arbre, une fleur, un soleil) et nous disposons de 6 couleurs. Elle énumère tous les dessins possibles en suivant l'ordre : maison rouge, arbre rouge, fleur rouge, soleil rouge, maison bleue, etc.
Nous les exécutons au fur et à mesure sur des papiers mobiles que nous lui donnons ensuite en vrac en en retirant un. Elle trouve quel est celui qui manque.

Tout se passe comme si la rééducatrice jouait à : "devinez à quoi je pense". Et la rareté des Feed-Backs, la faiblesse de la quantité d'informations approtée à chaque fois, l'ambiguïté de la question justifie cette opinion.

Ce type d'apprentissage est du conditionnement : il résulte d'un enseignement formel qui ne dépend pas du contenu. L'enseignant connaît ce qu'il veut enseigner et il va faire associer ce contenu à des questions posées, en approuvant les bonnes réponses et en désapprouvant les mauvaises. C'est l'apprentissage skinnérien (cf Skinner : Behavior of organisms - New York - 1938) dont le schéma est le suivant : information - question - réponse - renforcement.

Si l'on renforce suffisamment les bonnes réponses, on obtient celles-ci comme réponses privilégiées.

La séquence information - question - réponse - renforcement peut-être retrouvée au second degré ainsi que nous l'avons montré plus haut : les items (1), (2), (3) apportent à l'enfant une information amorphe (c'est-à-dire sans question posée). Cette information fera l'objet d'une réanalyse si une question est posée.

Le quatrième item est un renforcement négatif au premier item puisque la rééducatrice pose deux fois la même question, la première réponse ayant été fausse. Mais l'enfant ne sait toujours pas quelle est la question proposée à son apprentissage.

La question se présente sous une forme indirecte dans l'item (5) et sera alors susceptible de fournir des informations sur ce qui est l'objet de la question : sous entendu "voici a dans un cas légèrement différent, dessine 3 fois a".

Dans ce cas, la réponse est à chercher parmi les réponses déjà données et la question ressemble assez à la question initiale. Elle n'en diffère que par un détail : la réponse demandée. Et la réponse effective de l'enfant apparaît en (6).

Cette méthode d'apprentissage relève du conditionnement pur et simple alambiqué de surcroît par des ruses sans objet quant au fond.

Par contre, ce qui à chaque instant est appris à l'enfant est de décoder les intentions didactiques plus que la situation envisagée et revient à "devinez ce à quoi je pense".

Et l'enfant répond par association, non parce que cela correspond à une question qu'elle se poserait, ou parce que c'est la meilleure solution à un problème, mais parce que c'est la meilleure solution à son problème qui est celui de savoir ce que pense la rééducatrice.

c) *Qu'a appris Nadine ?*

Nous ne pensons pas que Nadine ait appris quelque chose sur le rôle de la lettre par rapport au dessin.

Elle a simplement joué à : "devinez ce que je pense".

d) L'erreur mathématique.

Quel était donc l'intérêt d'introduire les lettres a, b... ? Quel rapport avaient-elles avec le mot "fois" ? F. Jaulin-Mannoni ne le précise pas.

Elle aurait pu dire : dessine 3 arbres, 3 maisons, 3 groupes de 5 objets.... On aurait vu alors si l'enfant savait faire cela ou non.

Mais elle veut introduire le mot "fois" à partir de l'activité de l'enfant. Peut-être ne peut-elle pas dire "dessine une fois 3 arbres" puis "dessine 3 fois cinq objets", "dessine une fois ce bonhomme" parce que de telles expressions ne sont pas d'usage courant en France et parce qu' l'expression "dessine une fois ces 3 arbres" met trop en évidence que le mot "fois" se rapporte à l'action et non à son résultat.

Peut-être aussi la lettre servira-t-elle de variable, variable qui permettra de passer "progressivement" (!) d'un objet à un groupe d'objets ou à un nombre. Cette lettre devient l'occasion d'un transfert d'activités et de significations.

Cette initiative va avoir des conséquences fâcheuses sur la validité de la connaissance enseignée car dans cette première séquence s'est glissé une erreur grave qui va se révéler dans la deuxième partie de la séance de rééducation.

B. DEUXIEME SEQUENCE*Item (7)** Les faits.

"Après avoir demandé de dessiner (4 fois b) (2 fois c) (3 fois 6) nous lui proposons les dessins suivants en lui demandant à quelle con-
signe ils correspondent...."

.../...

x Commentaire

Les séquences qui consistent à dessiner 4 fois b (4 maisons) 2 fois c (2 fois 5 jetons), 3 fois 6 obéissent aux mêmes règles d'apprentissage par conditionnement et transfert de désignation.

Elles induisent d'ailleurs une première erreur. Le signe 6 ne désigne pas une collection de six jetons de la même façon que la lettre a désigné le dessin d'un arbre. Le signe 6 désigne le cardinal ou une certaine propriété de la collection mais non la collection elle-même.

L'erreur plus grave que nous avons évoquée antérieurement est la suivante : il y a les objets représentés par des dessins et les dessins eux-mêmes. Il faut différencier ce que l'on compte :

exemple : Nous dessinons 3 arbres ; nous obtenons trois dessins. Si ces 3 arbres représentent le même arbre unique et bien déterminé, il y a un seul arbre et trois dessins du même arbre.

Il faut différencier : dessiner un arbre trois fois (c'est toujours le même arbre) et 1 fois trois arbres (ce sont des arbres différents).

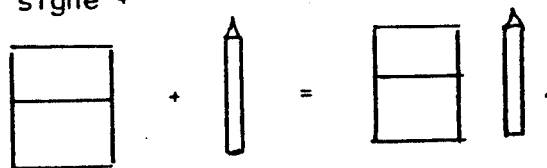
Quand l'enfant dessine 4 fois c, si c est un dessin de 5 jetons, on peut supposer que chaque jeton de l'ensemble c représente un vrai jeton différent des autres et que le dessin de 5 jetons représente effectivement 5 jetons. En dessinant 4 fois c, ce que nous obtenons est un ensemble de 20 dessins de jetons qui représentent en réalité 5 jetons.

Dessiner 4 fois c, ce n'est pas le multiplier par 4. Et l'enfant peut d'autant moins le croire que la rééducatrice a pris comme exemple fondamental sa propre représentation à elle.

Il est peu probable qu'après de tels exemples l'enfant puisse concevoir une manipulation et une formulation correctement associées.

x Les références.

Nous avons relevé ce type d'erreur en ce qui concerne le fait de "compter" en plusieurs endroits dans les ouvrages de F. Jaulin-Mannoni dessinait (in "rééducation pratique du calcul") une gomme et un crayon reliés par un signe +, ceci étant égal à une gomme et un crayon non reliés par un signe +



.../...

Si nous considérons les objets, nous ne voyons pas pourquoi il serait nécessaire de les dessiner deux fois en les reliant par le signe =
Si ce sont les dessins des objets, on ne voit pas très bien l'utilité du signe + entre eux et à quoi il peut correspondre comme opération.

Si on peut le supprimer d'un côté de l'égalité et pas de l'autre, c'est qu'il ne signifie rien.

Si maintenant, ce que F. Jautin-Mannoni semble laisser entendre, gomme et crayon sont là pour représenter des nombres, ils concrétisent des variables, et ceci est faux : la preuve en est que $1 + 6$ n'est pas égal à 16.

F. Jautin-Mannoni commet une erreur identique sur ce qu'est "compter". Lorsque l'enfant dessine deux fois c, la réponse obtenue (2 fois c) ne sera pas égale à 2 fois 5. En effet quand nous disons il y a deux fois 5, cela ne signifie pas qu'il y ait deux fois le nombre 5, mais qu'il y a 5 objets, puis 5 autres objets différents des premiers. C'est seulement là que nous aurons $2 \text{ fois } 5 = 10$. Sinon, nous retrouvons le "fois" quand on dit : j'ai mis mon manteau 2 fois (ce qui ne fait pas 2 manteaux).

Compter plusieurs fois la même chose, ce n'est pas compter plusieurs choses.

Ainsi, sur le sens du mot "fois", F. Jautin-Mannoni introduit une erreur capitale. Tout ce qu'elle peut annoncer, c'est une pratique. Nadine va essayer de deviner ce qu'on attend d'elle. Elle va dessiner 2 fois 5. Mais si on lui demande d'établir une situation de référence et de rassembler 2 fois 5 objets, nous ne voyons pas pourquoi elle ne mettrait pas 2 fois les mêmes 5 objets : 2 fois 5, ça fait 5. Si Nadine ne le fait pas, c'est parce qu'elle a du bon sens et non pas parce qu'on lui a appris ce que veut dire 2 fois 5.

item (8)

x Les faits

Nous lui donnons 12 pions en lui demandant de trouver comment on pourrait les disposer en tas pour avoir des situations ainsi exprimables en termes de "fois".

Nadine semble comprendre la consigne : "tu fais des tas, il faut que ce soit comme tout à l'heure, que tu puisses écrire "fois" " mais ne parvient pas à trouver de solution.

.../...

* Le commentaire

Ainsi que nous le prévoyions ci-dessus (11.4.1) Nadine ne peut pas associer une situation réelle au sens compris du mot "fais".

Comment pourrait-elle faire plusieurs fois le même tas ? Si on lui avait dit "fais 4 tas de 5" elle aurait pu le faire.

Commentaires sur l'apprentissage.

F. Jaulin-Mannoni semble croire que la vue d'une situation suffise à ce qu'elle puisse être reproduite.

Et la seule chose à comprendre en ce qui concerne le "n fois x" est une organisation des objets dans l'espace.

Si Nadine avait compris formellement ce que veut dire le terme "fois", il n'est pas sûr qu'elle aurait su répondre à cette question (8)

C. TROISIEME SEQUENCE

Item (9)

* Les faits.

"Nous dessinons 4 objets (une maison, un arbre, une fleur, un soleil) et nous disposons de 6 couleurs. Elle énumère tous les dessins possibles en suivant l'ordre, maison rouge, arbre rouge, fleur rouge, soleil rouge, maison bleue..."

Nous les exécutons au fur et à mesure sur des papiers mobiles que nous lui donnons ensuite en vrac en en retirant un. Elle trouve quel est celui qui manque.

* Commentaire.

F. Jaulin-Mannoni change complètement de méthode d'apprentissage. Elle va maintenant remonter à la structure de l'ensemble produit qui dans une présentation moderne sert de base à la présentation du produit des naturels : le produit de 2 nombres naturels a et b est le cardinal (axb) d'un ensemble produit de 2 ensembles qui ont respectivement pour cardinal a et b.

Nadine montre qu'elle maîtrise très bien un ensemble produit comportant 24 éléments, en réussissant le jeu de l'objet caché (jeu de Dienès).

.../...

3. COURTE ETUDE DES AUTRES SEANCES ET COMMENTAIRES

A. DEUXIEME SEANCE

Dans cette seconde séance, l'ensemble produit introduit au cours de la première va fonctionner comme structure pour guider les questions posées à l'élève. Cette seconde séance représente un renversement total par rapport à la première.

Item (1)

Les objets dont on parle sont non seulement parfaitement distincts, mais encore désignés chacun par un couple de caractères qui eux, concrétisent des groupements possibles (6 fois 4 ou 4 fois 6)

Item (2)

Les problèmes posés sont à la fois corrects du point de vue mathématique et motivés en ce sens que l'enfant formule un pronostic ou une prévision donnés sans voir le tas, d'après la structure de l'ensemble produit et qui peut être vérifiée après coup.

Item (3)

Du point de vue de l'apprentissage, cette situation permet de restaurer un sens correct à l'expression "6 fois 3, 3 fois 6", et il ne semble pas que Nadine rencontre des difficultés à effectuer ces actions de groupements ainsi que nous l'avions pensé.

Si elle a rencontré des difficultés à la séance précédente, c'est sans doute à cause de la bizarrerie de la situation.

Le dessin des groupements obtenus est réalisé par Nadine sans difficulté, même dans le cas où il s'agit d'anticiper le résultat d'une opération complexe tel le passage de [A] à [B] (voir annexe p 161-162 le détail).

Nadine ne sait pas faire l'opération inverse. Elle a su dire que $3 \text{ fois } 6 = 6 \text{ fois } 3$, mais non que $6 \text{ fois } 3 \text{ égal à } 3 \text{ fois } 6$.

Commentaire.

La seconde séance consiste en une activité dans laquelle l'ensemble produit fonctionnera comme structure. F. Jaulin-Mannoni ne vapas parler à Nadine "d'ensemble produit", ni lui demander ce qu'il y a à l'intersection d'une ligne et d'une colonne.

L'enfant regroupe et semble voir les différentes manières d'envisager la structure de l'ensemble produit, ce qui est le but de ces manipulations.

Cependant, nous ferons remarquer que le pourquoi de ces

activités échappe totalement à l'enfant. F. J. Mannoni lui demande "devine" et le seul moyen de répondre pour Nadine est, non pas une adéquation à un projet, mais une devinette : chercher ce qu'il faut répondre en tenant compte de ce qui a été approuvé.

Ce problème est simplifié par le fait qu'il y a une structure : si il y avait 24 objets différents, il serait très difficile à l'enfant de reconnaître ceux qui ont été cochés.

Nadine utilise ici une propriété fondamentale de la classification qui est l'économie d'informations : elle dispose de 4 objets et de 6 couleurs donc doit mémoriser 10 informations et avec celles-ci retrouver les 24 possibilités.

C. TROISIEME SEANCE.

Items (1) (2) (3)

La rééducatrice reprend le travail fait au cours de la deuxième séance. L'échec de Nadine sur le troisième item ne semble pas lui paraître inquiétant. Elle espère sans doute, en reprenant la manipulation qui a échoué, obtenir la réponse souhaitée : si une transformation permet de disposer le même ensemble de 3 tas de 6 en 6 tas de trois, elle doit permettre de passer d'un groupement de 6 tas de 3 en 3 tas de 6.

En fait, Nadine a su dire que 3 tas de 6 équivalaient à 6 tas de 3 parce que cela correspondait aux sens des activités antérieures, mais dès qu'il s'agit de faire une abstraction réfléchissante, c'est-à-dire conclure sur la réversibilité de 2 transformations, elle échoue. Nadine perd même la possibilité de répondre à nouveau correctement dans le cas d'une seule transformation, dès qu'elle a dû examiner la composition qui est le résultat de deux fois la même transformation.

Au cours de ces trois premiers items, F. Jaulin-Mannoni reprend sous des formes diverses ce qui avait été fait au cours de la deuxième séance en y rajoutant denouveaux habillages (items 2.3) avec des objets identifiés individuellement.

Item (4)

Les objets sont maintenant représentés par des allumettes. Ainsi, les propriétés marginales forme-couleur qui permettaient l'identification de chaque objet disparaissent. Dès ce moment, l'enfant échoue au passage d'une disposition à l'autre. On peut supposer que Nadine ne réussissait jusqu'à présent que par une représentation mentale de l'ensemble objet par objet.

F. Jaulin-Mannoni veut justifier la commutativité en deman-

dant à l'enfant de la constater. Mais si on demande à Nadine cette constatation, elle n'a rien à prouver et doit donc apprendre sans qu'il y ait nécessité de compréhension : on lui interdit alors de se comporter en mathématicienne.

D'autre part, le fait de transporter des allumettes d'un endroit à un autre ne constitue pas une preuve de la commutativité de la multiplication. Car si Nadine ne sait pas par avance que le nombre des allumettes se conserve au cours des déplacements (dans le plan) que les objets vont se conserver en tant que qualités, elle ne pourra rien constater.

Le raisonnement que devra faire Nadine s'appuie sur la notion de conservation et la possibilité ensuite de déduction.

Si l'enfant est capable de faire cette déduction, il possède alors la notion de commutativité.

C'est seulement lorsque la commutativité est utilisée comme preuve que nous savons si un enfant possède ou pas cette notion.

La notion de conservation acquise, il est possible de constater, donc de conclure, mais rien ne peut assurer que l'enfant ait appris quelque chose sur la commutativité.

Pour vérifier si cette commutativité est acquise, il faut alors que la conservation ne soit pas évidente : l'enfant prouvera alors la commutativité par cette conservation.

Item (5)

L'échec de Nadine est très compréhensible. On ne peut pas suivre individuellement 24 objets. Par contre, il est possible d'énumérer 6 (couleurs) puis 4 (formes) objets; et avec la structure produit-individualiser dans sa tête chacun des 24 objets avec seulement 10 étiquettes. Tout l'intérêt de la deuxième séance consistait justement à faire fonctionner l'ensemble produit comme un moyen d'économiser de l'information. Mais au cours de cette 3ème séance, il faudrait que Nadine définisse chaque objet avec un couple de nombres : le 2ème objet de la 3ème colonne (2 ; 3).....

Item (6)

Pour obtenir à nouveau de bonnes réponses, F. Jaulin-Mannoni instaure aussitôt des marges : les allumettes représentent diverses familles. C'est un simple moyen d'énumérer des allumettes. Mais il bloque l'enfant. Il est évident que séparer des familles durant un voyage est une situation que Nadine n'est pas prête à accepter sans réaction affective.

F. Jaulin-Mannoni recommence alors l'opération avec des familles de marguerites.

Commentaires.

Au cours de cette séance, les mêmes exercices sont repris plusieurs fois ; ils sont de plus, moins bien réussis en général à la deuxième ou 3ème fois qu'à la première.

Probablement parce que les concrétisations successives de la structure perturbent davantage pour Nadine cette structure, qu'elles ne la mettent en évidence.

F. Jaulin-Mannoni semble utiliser davantage une théorie de l'apprentissage empruntée à la Gestalt psychologie ou à Piaget. Une structure mathématique apparaît à l'élève par abstraction à travers plusieurs exemples isomorphes présentés successivement, à condition de faire suffisamment varier d'un exemple à l'autre tout ce qui n'est pas caractéristique de la structure.

F. Jaulin-Mannoni change ainsi la signification des objets que Nadine manipule. Mais les sens ainsi constitués n'ont pas de rapport avec cette structure (puisque'ils sont arbitraires et peuvent changer d'une fois à l'autre). Le véritable sens d'une structure serait une régularité au niveau des problèmes posés et dont elle est une bonne solution.

Or pour Nadine, l'obstacle se situe dans le fait qu'elle ne peut maîtriser les transformations dans l'espace d'un ensemble de 24 objets indistinguables. Elle a besoin d'une structuration ou d'une identification. Et les fleurs n'apportent aucune facilitation, si ce n'est dans la mesure où elles permettent une séparation à laquelle ne sera liée aucune affectivité.

D. QUATRIEME SEANCE.

La 4ème séance nous apparaît comme une pure séance de conditionnement basée sur la répétition des transformations associée à des stimuli gestuels. Nadine apprend à recopier un ensemble de 30 jetons disposés en 6 groupes de cinq en les disposant en 5 groupes de 6 et réciproquement.

Mais à nouveau, l'apprentissage a été effectué au détriment du sens. Ces alignements de dessins de jetons représentent si peu de vrais jetons que Nadine ne leur attribue même pas la notion de conservation des quantités. Ce sont des représentations purement formelles.

Contrairement à ce que semble affirmer F. Jaulin-Mannoni "la distribution des ensembles les uns sur les autres" ne fonctionne

.../...

pas comme un schème opératoire.

Nadine a dessiné, mais rien ne permet de penser qu'elle a intériorisé ce dessin en tant que représentation d'une transformation d'un même ensemble. En particulier, ce n'est pas "la transitivité de la bijection" (!!!) (cette locution n'a pas de sens, à moins que cela ne signifie que la composition de deux bijections est une bijection) qui n'est pas comprise par Nadine ; c'est la bijection elle-même puisque le cardinal n'est même pas invariant dans cette bijection.

Donc les transformations que fait l'enfant n'ont pas de sens pour elle.

E. CINQUIEME SEANCE.

Nous voyons apparaître ce qui était finalement l'objet de toute l'étude et Nadine comprend que la rééducatrice a voulu lui faire dire que :

- d'une part, deux dispositions "qu'elle appelle "inverses" l'une de l'autre s'appellent par exemple respectivement 6 fois 4 et 4 fois 6.

- D'autre part, si elle compte combien il y a d'objets elle trouve les mêmes résultats

- ensuite, les renforcements obtenus au cours de la rééducation prouvent que ces 2 principes doivent toujours être vrais.

Autrement dit, c'est parce que 6 fois 4 et 4 fois 6 font 24 que : $6 \text{ fois } 4 = 4 \text{ fois } 6$.

La conservation des quantités par rapport aux transformations de l'ensemble ne jouent aucun rôle dans le résultat pour Nadine.

Il y a eu finalement apprentissage par conditionnement d'un savoir déjà acquis, mais non construction et découverte d'un savoir.

F. SIXIEME, SEPTIEME, HUITIEME SEANCES.

Elles vont être consacrées à la poursuite de cet apprentissage, mais Nadine ne connaîtra pas le moyen de contrôler l'application de ce qu'elle vient d'apprendre.

Elle le généralise abusivement au cours de la 8ème séance sans pouvoir imaginer non seulement une expérience qui pourrait lui prouver si elle a tort ou raison, mais sans imaginer non plus qu'elle devrait concevoir elle-même cette expérience, et que finalement tous ces savoirs qu'on lui transmet doivent s'appuyer sur une compréhension et une adhésion dont elle a la responsabilité.

4. CONCLUSION

.....

L'analyse des situations d'enseignement permet de proposer toute une gamme d'explications qui tendent à justifier les décisions du maître et les comportements de l'élève. Dans l'exemple ci-dessus, nous avons choisi les plus simples - parmi celles qui prennent en compte toutes les interventions significatives des deux protagonistes. Nous avons ainsi montré que rien d'essentiel ne distinguait la rééducation de Nadine d'un conditionnement classique. La part de choix et de décisions laissées à l'enfant était minime, malgré une certaine habileté mathématique de l'intervenante.

La rééducation ainsi proposée est en contradiction totale avec les principes énoncés dans la première partie de l'ouvrage où l'auteur déclare : "on ne saurait communiquer à autrui quelque chose qu'il ne doit pas recevoir, mais construire". Nous avons fait apparaître ici qu'il n'y avait pas construction mais suggestion.

Nous étudierons plus loin les moyens de réaliser son programme.

Il est toutefois utile de rappeler à ce propos que la difficulté de faire coller un discours théorique à une réalité assez fuyante devrait retenir les chercheurs comme les professeurs de faire des déclarations fracassantes. Dans son ouvrage, F. JAULIN-MANNONI s'autorisait de l'existence de 20 % d'élèves en échec en mathématiques (mais nous savons qu'il y a seulement environ 10 % d'élèves en échec électif au départ) pour critiquer sans nuances les pratiques "traditionnelles".

.../...

3. Etude du cas de Gaël

Gaël : 8 ans 1/2, élève de CE1 qu'il redouble. QI Verb. : 101 ; QI Perfo. : 102.

Profil scolaire : Eveillé, intelligent — résultats très faibles en mathématiques. C'est le plus jeune d'une famille unic et attentive. Gaël a tendance à se laisser « traiter en petit enfant » par ses parents et ses deux aînés.

En classe, il trouve quand il y a quelque chose de nouveau à découvrir mais « ne sait rien » en travail individuel. Erreurs nombreuses en numération : il écrit 631 pour 73 ou $845 = 80 + 4 + 5$; en calcul, il inverse les nombres et les chiffres (7 pour 3, 6 pour 6, et 13 pour 31 par exemple).

Profil psychologique : Le Rorschach fait ressortir certaines tendances à la rigidité, à la viscosité, à adhérer au détail, une difficulté à adopter une stratégie nouvelle, une certaine immaturité affective, un besoin de soutien et d'appui protecteur. Il révèle que Gaël trébuche

lourdement devant la menace et qu'il adopte un comportement de stupeur et de confusion opératoire devant un objet anxiogène. De façon plus générale, Gaël paraît bien adapté socialement, sans tendance à l'opposition ou au repliement. Son adaptabilité est en échec lorsque la relation interpersonnelle exige l'expression de sentiments un peu intimes ; il est capable d'activité méthodique.

Profil didactique : L'étude a montré plus précisément des difficultés sur la numération, et avec la représentation intuitive, la représentation intériorisée, la représentation formelle, le rapport au « réel », et des comportements particuliers d'absences, de blocages et parfois, au contraire, de jubilation pendant le travail en mathématiques.

1. PREMIERE SEANCE

1.1. Soutien et observation : Les voitures rouges.

A la question "sais-tu qu'est-ce que tu n'as pas bien réussi cette semaine, et qu'est-ce que tu as bien su faire" l'intervenant n'obtient que des réponses évasives. L'enfant prend son cahier et tous les deux examinent les travaux de la semaine. Ils choisissent finalement pour l'expliquer un problème que Gaël a fait faux et dont l'énoncé est :

Dans un parking il y a 57 voitures. 24 de ces voitures sont rouges - trouver le nombre de voitures du parking qui ne sont pas rouges".

Gaël réfléchit un instant puis déclare : "je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse" Il pose en colonne l'opération $57 + 24$ et trouve 81. C'est exactement ce qu'il avait fait dans la semaine. Il semble donc que Gaël maîtrise l'addition qu'il doit manier fréquemment mais il ne se pose aucune question sur l'opportunité de son emploi, il se couvre de l'autorité de la maîtresse pour justifier un emploi automatique de l'opération. Il ne tient aucun compte des corrections faites en classe.

L'intervenant déclare, sans insister toutefois comme une remarque générale, qu'il faut aussi savoir quand il faut faire une addition, une soustraction ou autre chose, et plutôt encourageant, il propose à Gaël de dessiner les voitures "mais pas toutes, car ce serait trop long".

Gaël dessine donc un rectangle et écrit 57 au milieu.

I (l'intervenant) questionne :

- "Est-ce qu'il y a toutes les voitures ?

G. : Il y a toutes les voitures qui ne sont pas rouges

I : il n'y a que les voitures qui ne sont pas rouges ?

G : il y a toutes les voitures et elles ne sont pas rouges.

L'intervenant aurait pu continuer : où sont

.../...

les rouges ?... mais il était clair que l'enfant n'avait pas de représentation correcte de la situation, le mettre en contradiction formelle n'aurait servi qu'à l'embarrasser.

I : Si on changeait le nombre de voitures, ça pourrait changer l'opération ?

G affirme : oui !"

Il est clair que Gaël appelle "opération" le triplet de nombres et non le type "addition" par opposition à "soustraction". L'intervenant espérait que Gaël pourrait avoir en tête cette question. (faire une addition ou une soustraction N). Dans ce cas, il aurait essayé de savoir si l'enfant était capable de construire un problème équivalent avec de tous petits nombres pour lesquels le dessin aurait été plus vite fait. Le fait que Gaël ne comprenne pas la question d'emblée interdit que l'on poursuive dans ce sens. I demande à Gaël de dessiner les cinquante sept voitures une par une et les fait disposer par lignes de 20.

I : "Est-ce que tu as dessiné toutes les voitures du parking ?

G : non.

I : on te dit "dans un parking, il y a 57 voitures. Dessine le parking. Est-ce que dans ce parking il y a 57 voitures ?

G : oui

I : Est-ce que toutes les voitures dont on te parle sont dans ce parking ?

G : non, il y a aussi des voitures rouges"

I lui fait remarquer qu'il faut bien faire attention au texte car il y a un point après "57 voitures". Gaël admet alors que les rouges sont dans le parking mais pense devoir les dessiner car elles ne figurent pas sur son schéma.

(On observé ici ses difficultés à envisager qu'il n'y a qu'un ensemble de voitures, avec deux propriétés : être dans le parking, et être rouge. Pour lui, la 2ème propriété nécessite un 2ème ensemble, et s'il admet que le 2ème ensemble possède aussi la 1ère propriété, il ne conçoit pas encore qu'il soit une partie de l'ensemble de départ. Est-ce parce qu'il n'a pas analysé l'énoncé ou parce qu'il

.../...

ou parce qu'il ne peut pas utiliser l'opération d'inclusion ?

I explique que les 24 rouges font partie de "ces" voitures, les 57 du départ et Gaël doit les peindre en rouge sur son schéma. Dans cette phase l'action de Gaël est complètement guidée par l'intervenant. Ils vérifient que le dessin concorde bien avec l'énoncé, puis Gaël doit trouver toutes les voitures qui ne sont pas rouges. Il en compte 31. L'intervenant demande :

I : "si je te dis que ce n'est pas juste, crois-tu que j'aie raison ?

G : je ne sais pas

I : Qu'est-ce que tu ferais pour savoir si j'ai raison ?

G : je recompterais"

Et il en trouve 33.

I : "Alors, qu'est-ce qui est juste, 31 ou 33 ? comment faire pour savoir ?

G : Il faut compter

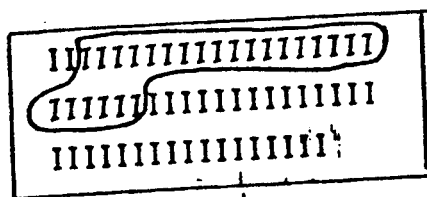
I : Il n'y a pas un autre moyen ?"

Pas de réponse.

Son dessin étant assez concret et lui permettant de donner une réponse, Gaël n'essaie pas ou ne pense pas à utiliser une opération pour vérifier sa réponse, puisqu'il peut compter autant de fois qu'il le veut. Son dessin est un appui sûr, auquel il peut se référer, tandis que l'opération fait appel à certains mécanismes abstraits et comporte une réversibilité que Gaël ne semble pas avoir acquise, à savoir le passage par la soustraction pour retrouver les deux termes de l'addition.

Gaël recompte à nouveau : "33"

I entoure les voitures rouges, fait observer à Gaël



qu'on a donc 24 rouges et 33 pas rouges et demande :

- Alors combien y-a-t-il de voitures ?

- Je fais 24, et puis 33 ?

.../...

Gaël pose une addition $24 + 33 = 57$.

I : "c'est bien ce qu'on te demandait ? Peux-tu répondre à la question de l'énoncé ?

G : non."

Pour la plupart des enfants la réponse demandée doit être le résultat d'une opération, et le résultat est ce qui se trouve à un endroit précis dans la disposition de ce que l'on écrit. Cette habitude fait obstacle à l'identification du résultat cherché dans une égalité considérée comme une relation.

I : "mais si ! tu as écrit ce qu'on demande.

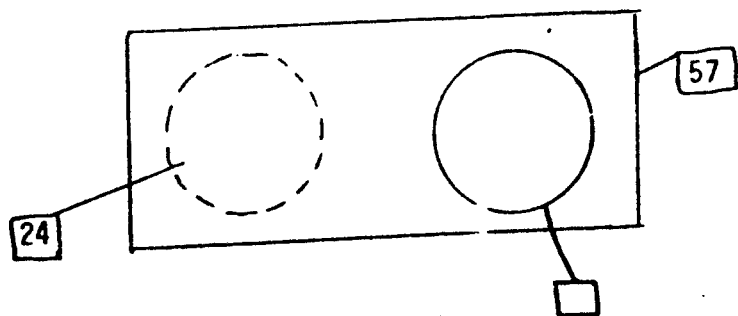
G est étonné ; à la demande de l'intervenant il relit l'énoncé.

I : "combien y-a-t-il de voitures pas rouges ?.

En s'aidant du dessin, il lui fait dire qu'il n'y en a que 33 et lui demande comment il a trouvé, Gaël répond "en calculant" puis rectifie "en dessinant". I lui explique que le calcul "ça sert à trouver sans qu'on soit obligé de tout dessiner" et Gaël avoue que c'est ce qu'il ne sait pas faire.

L'intervenant entreprend de faire utiliser à Gaël la représentation symbolique en usage dans sa classe, dans une perspective de soutien.

Gaël doit dessiner l'endroit du parking dans lequel on a mis les voitures rouges, puis les autres et il met des étiquettes.



I : si je compte les rouges, j'arrive à ?

G : 24

I : Et si je continue à compter les autres, j'arrive à ?

G : 57.

.../...

I écrit alors $\begin{array}{r} 24 \\ + \dots \\ \hline 57 \end{array}$, de façon à ce que Gaël ne fasse pas la soustraction pour trouver 33 mais essaie de déterminer le nombre qui, additionné à 24, donne 57, ce qu'il fait facilement.

Au cours de cette première phase commencent à apparaître certains caractères très fréquents chez les enfants en difficulté : difficulté à donner du sens à la question posée et à mettre en oeuvre des stratégies de contrôle de sa réponse, recours à des recettes, etc...

Pour bien mettre en évidence la nature des difficultés de Gaël et s'assurer qu'il ne va pas à nouveau tirer des conclusions automatiques de cette séquence l'intervenant propose deux autres problèmes voisins.

Un premier avec des voitures formant deux ensembles disjoints clairement identifiés dans l'énoncé. Il suffit d'additionner leur nombre pour avoir le total. Ce que Gaël réussit rapidement.

Un autre comparable au premier, avec 8 voitures dont 3 rouges. Gaël dessine un rond avec 8 voitures, 8 puis refait son dessin pour y inclure les 3 rouges



et lorsqu'on lui demande combien ne sont pas rouges, il répond 11. Une nouvelle fois, il a appliqué d'autorité l'opération qu'il connaît avant de réfléchir. En peignant en rouge les 3 voitures, comme précédemment, il découvre alors le résultat.

Il faut préciser que dans la classe de Gaël la soustraction n'a pas été introduite comme moyen obligatoire pour trouver une différence. Souvent l'addition a trou a été utilisée. Ce procédé tend à obliger l'enfant à sortir d'un automatisme formel qui associe une opération mathématique à une opération matérielle. (+ si j'ajoute, - si je retranche) et à se centrer sur l'ensemble qu'il s'agit de compter et sur ses relations avec les autres données.

2 - Epreuve de la quantification de l'inclusion.

Cette incompréhension dont fait preuve Gaël lors de l'exercice peut tout simplement renvoyer à des causes psychogénétiques ; l'enfant est encore trop jeune pour effectuer le raisonnement nécessaire. Résoudre un tel problème où il s'agit de prendre en considération pour les comparer à la fois le tout et la partie suppose un type d'opération logique dont Piaget a montré le caractère complexe⁽¹⁾. La quantification de l'inclusion qui sous-tend la compréhension du problème des voitures n'est en effet construite par l'enfant qu'aux alentours de 7-8 ans. Il fallait donc d'abord s'assurer si Gaël possédait un schème opératoire et nous décidons alors sur le champ de lui faire passer le test des billes de couleurs. Cette épreuve très connue, utilisée par Piaget dans l'ouvrage cité consiste à présenter à l'enfant 8 perles en bois dont 5 sont rouges et 3 vertes⁽²⁾. Il s'agit pour le sujet de juger s'il y a plus de perles en bois ou plus de perles rouges et de justifier sa réponse. L'épreuve est passée avec succès par Gaël⁽³⁾ et l'on est en droit de penser que les échecs répétés de l'enfant dans l'utilisation de la relation d'inclusion ne renvoie pas à des carences sur le plan de l'accession aux structures logico-mathématiques.

.../...

(1) cf. Piaget

(2) cf. Piaget

(3) "G : Il y a plus de billes en bois que de billes rouges !

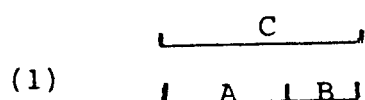
I : pourquoi ?

G : parce que en bois c'est tout (il montre l'ensemble des billes) et les rouges c'est quelques-unes !"

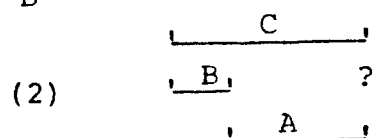
3 - Test de la commutativité

Nous avons alors décidé de présenter à Gaël une autre épreuve opératoire utilisée par Gréco dans une recherche sur la genèse de l'opération de commutativité⁽¹⁾

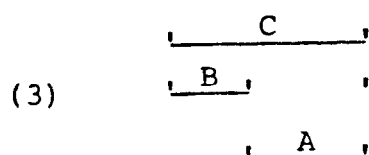
. On présente à l'enfant un jeu de réglettes disposé de la façon suivante (1). Le sujet peut constater que $A + B = C$



. On place alors la réglette B à la place de A (2) et on demande à l'enfant d'indiquer par une trace où sera l'extrémité de la réglette A quand on la placera à la suite de B



. Gaël dit immédiatement : "ça s'arrêtera pareil qu'avant" et dessine un trait dans le prolongement de l'extrémité de C (3)



. La réponse de l'enfant caractérise les sujets ayant atteint le stade opératoire⁽²⁾ et ceci ne nous surprend nullement.

.../...

(1) cf. Gréco

(2) cf. Gréco

Etant donné l'âge de l'enfant et sa réussite à l'épreuve précédente,⁽¹⁾ Ce qui par contre est intéressant et peut nous apporter des informations c'est l'attitude de Gaël lorsque nous mettons en doute son jugement par des objections du genre "mais un enfant diaspit tout à l'heure que ça s'arrêtera avant, etc..." Aussitôt Gaël revient sur ses affirmations :

G : "c'est peut-être vrai..."

I : qu'en penses-tu exactement ?

G : "je ne sais pas !"

Ce type de conduite lors de cette épreuve caractérise des enfants que Gréco situe dans un stade intermédiaire (pré-opératoire) et où les structures du sujet sont seulement en voie de constitution. Les compensations ne sont alors qu'incomplètes ou fragiles. Cela ne peut être le cas de Gaël. Il semblerait que sans doute, sa soudaine absence de conviction à partir d'une simple contre-proposition renvoie plutôt à son attitude générale vis-à-vis d'autrui lorsque sa propre connaissance est mise en jeu. Le sentiment de nécessité qui pour Piaget est le révélateur du fonctionnement d'une structure opératoire disparaît ici sans qu'on puisse incriminer une fragilité des constructions logiques du sujet mais renvoie directement pensons-nous, à la manière d'être avec autrui.

.../...

(1) La réussite à l'épreuve d'inclusion suppose nécessairement que l'enfant ait le stade opératoire et puisse très facilement maîtriser la relation de commutativité.

Analyse de la première séance.

Parmi les questions posées par le comportement de Gaël, il en était une qu'il fallait rapidement régler. Toute activité mathématique est sous-tendue par les schèmes opératoires du sujet qui, selon Piaget, ne sont pas appris au sens strict mais construits au cours du développement⁽¹⁾. Dans le cas du problème des voitures rouges et non rouges il était, nous l'avons vu, tout à fait nécessaire de s'assurer si Gaël possédait bien les structures opératoires d'inclusion.

Avec les résultats obtenus au cours de l'épreuve des perles, nous savons au moins que les échecs répétés de Gaël dans la compréhension du problème ne peuvent être expliqués par des carences au niveau des structures logico-mathématiques du sujet. Manifestement il possède les schèmes opératoires nécessaires à la solution du problème proposé. Comment dès lors expliquer son comportement au cours de la séance ?

La réponse ne peut être simple dès lors qu'on prend comme objet une relation entre un sujet singulier dont le rapport actuel au monde est le résultat d'une longue histoire et une situation didactique elle-même fort complexe.

Dans cette perspective, l'épreuve de Gréco peut nous donner quelques éléments de départ. Ce qui surprend d'emblée c'est l'impossibilité pour Gaël de soutenir une conviction face au démenti d'un autre. Une contre-proposition suffit à provoquer l'expectative là où tout laisse à penser qu'un sentiment de nécessité existait. Ainsi apparaît une caractéristique de l'enfant que nous avons déjà rencontrée au cours de l'examen psychologique, et sur un plan plus général : la fuite d'un affrontement

(1) cf. Piaget "Apprentissage et développement EEG..."

possible, l'évitement à tout prix du conflit par le refuge dans des positions de dépendance et de soumission.

Il nous semblait que cela pouvait ne pas être sans effet dans les rapports de Gaël avec la connaissance mathématique.

Sur le plan de la connaissance, il existe en effet une attitude où la dépendance offre le bénéfice non négligeable d'une sécurité : la connaissance c'est toujours la connaissance d'un autre qu'il s'agit simplement de s'approprier, alors on supprime le risque d'être mis soi-même en question dans un débat sur la vérité. Il n'y a plus à rendre raison de ce que l'on tient pour vrai autrement qu'en invoquant l'autorité à laquelle on se réfère (Gaël dit "ce qu'on m'a appris", ce que la maîtresse dit "qu'il faut faire").

Mais cette attitude se paie d'une incapacité à concevoir un processus de construction où la connaissance pourrait être le résultat d'une confrontation avec le réel et d'une série de décisions où le sujet devient l'auteur de son propre savoir. La connaissance mathématique peut alors ne plus avoir d'autre sens que celui d'une activité ritualisée où l'on répète des modèles.

Les situations du type de celles que les élèves rencontrent habituellement en classe présentent pour la plupart un certain caractère de fermeture. Par exemple, le maître pose un problème et tous les enfants doivent trouver la solution, - la même - de sorte que dès qu'un élève produit publiquement cette solution la recherche des autres est arrêtée, de plus c'est le maître qui déclare que telle solution est bonne de sorte que chaque élève n'a qu'une seule occasion de tenter de produire la bonne solution par problème. Ainsi chacune de ces situations fonctionne comme un test et l'apprentissage doit se faire ailleurs - lors de la correction et des explications qui l'accompagnent par

.../...

exemple - et par d'autres moyens que la tentative et l'observation des effets de sa propre décision. Enfin et en partie en conséquence, souvent la solution ne peut être envisagée que si l'enfant possède déjà une représentation de la situation qui lui permet de mettre en scène les objets cognitifs dont il s'agit, de plus la vérification de la validité de la réponse et les explications du maître font appel à cette même représentation, à la connaissance achevée qui produit la réponse. Autrement dit, cette situation d'apprentissage ne donne une occasion de décider ou de tenter une décision - donc d'apprendre - qu'à ceux qui savent déjà l'essentiel. Dans ces situations l'élève ne peut acquérir la bonne représentation de la situation, que d'un coup, à force de rapprocher des tests semblables par une sorte de renforcement d'associations convenables.

Les situations de ce type ne sont guère favorables à une modification des rapports avec les données du problème ou avec les objets de la connaissance chez des enfants comme Gaël.

Pour augmenter et enrichir les relations des élèves avec la situation, un procédé classique consiste à leur demander de représenter, de dessiner les éléments dont il s'agit - c'est ce qui a été fait au cours de cette séance et l'on a pu voir que le dessin correct exige lui aussi cette même représentation qui justement est absente. Il est assez clair ici que si la schématisation peut faire peut-être progresser une représentation mentale, elle ne peut pas la créer.

* Au contraire, la répétition de situations-problèmes dont le maître attend qu'elles déclenchent la compréhension tend à mettre l'enfant lui aussi dans une situation d'attente un peu anxieuse et de passivité, où les activités ont un caractère rituel et presque magique. On peut voir cette réaction tout au long de la dernière séance : Je vais faire comme j'ai appris avec la maîtresse... quand il compte il récite soigneusement : je pose, je retiens... les dizaines... il indique les

.../...

diverses étapes. Il fait des représentations plus ou moins analogiques et essaye de dessiner des choses qui ressemblent à des voitures. Mais le fait de rester très près du figuratif, loin de donner la signification escomptée à l'opération elle-même semble être récupéré par l'enfant comme un moyen de mettre à distance le raisonnement portant sur les objets.

Quand l'intervenant lui demande :

- As-tu dessiné les rouges ? il répond : "non, les noires seulement" et c'est vrai, il n'a pas dessiné les rouges (en rouge). Il reste centré sur son dessin sans lui faire jouer un rôle de représentation à contrôler par les indications de l'énoncé. Et quand on lui demande de repasser en rouge les traits représentant les autos rouges, il en oublie le nombre et l'intervenant doit l'arrêter à 25. De façon générale les nombres n'ont pour lui qu'une importance très secondaire. Il dit 50, et il compte 31, puis 33, il oublie... il reconnaît s'être trompé de bonne grâce... avec détachement.

Une approche classique des enfants en difficulté consiste à identifier les erreurs ou les fautes qu'ils commettent et si elles se répètent à les interpréter comme des anomalies du développement de l'élève, ou comme des carences dans leurs acquisitions auxquelles il convient de remédier parce "qu'elles vont rendre l'enfant incapable d'accéder aux mathématiques".⁽¹⁾

Par exemple ici, on repèrerait que Gaël écrit souvent 2 au lieu de 5 ou écrit 21 pour 12 et on identifierait là une insuffisance de structuration spatiale voire des troubles de la perception spatio-temporelle. De même les difficultés de Gaël à confronter le dessin et le texte de l'énoncé pourraient se ranger parmi les accidents de la fonction symbolique.

.../...

(1) cf. F. Jaulin-Mannoni 1965 p. 13

Cette analyse classique permet de chercher des remèdes à ces troubles sous la forme d'exercices "du même type" au sens de ces fonctions : exercices de structuration spatiale...etc. Elle s'oppose à celle de l'enseignant qui consiste à rechercher les exercices de "même type" dans la catégorie qui traite du même sujet mathématique avec le même point de vue didactique : écriture de chiffres, dictée de nombres, problèmes de soustraction. En ce sens, la première apparaît comme thérapeutique par rapport à la seconde. L'approche que nous tentons ici est très différente, il s'agit d'agir au niveau des situations même d'apprentissage, d'en manipuler les caractéristiques pour obtenir les changements d'attitudes souhaités. Nous utilisons pour cela une "théorie des situations" dont nous parlerons plus loin et qui prend en compte comme objet principal les conditions du milieu qui rendent nécessaires et plausibles les comportements des sujets et les manifestations des connaissances.

Gaël n'a avec la connaissance - du moins celle dont il est question en classe - qu'un rapport superficiel. L'évitement du problème et la mise à distance débouchent sur des actions stéréotypées, purement "didactiques" c'est-à-dire centrées sur le rapport avec le maître, sans mobilisation des schèmes assimilateurs qu'il a pourtant à sa disposition. Gaël s'accommode de relations institutionnalisées qui n'appellent de sa part que des rites qui ne l'engagent pas.

Ce que nous pouvons alors penser c'est que toute l'attitude de Gaël au cours de cette 1ère séance est la conséquence d'un accord entre la situation didactique habituelle de la classe telle qu'il la perçoit et son rapport défensif à la connaissance dont nous parlions plus haut.

On ne peut donc soutenir que la situation didactique que Gaël rencontre habituellement est l'unique raison de ses échecs en mathématique, on ne comprendrait pas pourquoi d'autres enfants qui ne sont pas mieux armés sur le plan cognitif réussissent. Nous pouvons simplement penser que cette situation lui convient dans la mesure où elle lui permet d'échapper à la construction des connaissances.

Et il peut d'autant mieux y échapper que sa manière d'être avec les adultes, cette attitude sociale particulière faite de gentillesse et de soumission qui désarme la critique lui permet de se prémunir contre toute forme de conflit avec le maître.

Car, si les situations didactiques habituelles permettent des apprentissages dans les conditions de fermeture dont nous avons parlé et donc sans qu'il y ait à proprement parler un débat sur le savoir, c'est que celui-ci est remplacé par un autre type de débat; celui qui porte sur l'élève apprenant. Apprendre mal, ne pas savoir, faire telle erreur etc, c'est se heurter à la volonté du maître, c'est entrer en conflit avec lui. Dès lors l'enfant ne peut échapper à ce conflit, aux difficultés de toutes sortes qu'il entraîne, qu'en construisant quelque chose qui va tenir lieu de connaissance, d'apprentissage.

Or, Gaël disions-nous, échappe à ce débat dans la mesure où il désamorce tout conflit par une absence totale d'agressivité. Dans ce état sur l'élève, le conflit se nourrit en effet de lui-même ; à l'agressivité du maître répond habituellement une autre agressivité de l'enfant qui alimente en retour l'agressivité du maître, etc... le sujet ne pouvant se soustraire à cette situation qu'en produisant des résultats attendus. Gaël pour sa part ne rentre pas dans ce jeu, son attitude de profonde soumission désamorce toute hostilité ("il est toujours prêt à reconnaître ses erreurs et il en est navré" dit le maître")

PROJETS POUR LA SEANCE SUIVANTE

L'ensemble des analyses que nous pouvons faire nous conduit à envisager le type d'intervention pour la 2ème séance ; il va s'agir essentiellement d'introduire une rupture dans les conceptions qu'a Gaël d'une situation didactique en lui⁰⁷ proposant une situation qui va exiger de lui des anticipations, des prévisions, des prises de responsabilité, c'est-à-dire un investissement de l'objet de la connaissance. Pour cela, sur le même sujet mathématique nous allons lui proposer ce que nous appelons une situation d'action. .../...

C'est seulement s'il s'avérait que Gaël ne peut entrer dans ce type de rapport à la connaissance que nous chercherions d'autres voies.

Commentaire : Topaze et l'élève récalcitrant.

Pour mettre en scène un certain nombre de concepts didactiques, nous allons commencer par commenter, un peu lourdement peut-être, un exemple célèbre de situation d'enseignement : la première scène de "Topaze".

Topaze, il dicte en se promenant
 "Des moutons... des moutons... étaient en sûreté...
 dans un parc ; dans un parc. (Il se penche sur l'épaule de l'élève et reprend) Des moutons... moutons...
 (l'élève le regarde, ahuri) Voyons mon enfant, faites un effort. Je dis moutons. Étaient (il reprend avec finesse) étai-eennt. C'est-à-dire qu'il n'y avait pas qu'un moutonne. Il y avait plusieurs moutonsse.

L'élève le regarde perdu...

Dans cette scène ironique et attendrie, Pagnol souligne avec une pertinence presque cruelle quelques caractéristiques fréquentes de telles situations.

Le maître veut obtenir un certain comportement de son élève - ici il faut écrire correctement sous la dictée le mot "moutons". Ce comportement signifie que l'élève a correctement interprété une situation - ici la phrase - qu'il a reconnu un problème, au moins implicitement - moutons prend-il un s ou non ? - et qu'il l'a résolu par l'application d'une connaissance éventuellement pratique - ici la règle du pluriel des noms.

Or ici l'élève ne résoud pas le problème d'orthographe qui lui est posé et Topaze ne se résoud pas à accepter cette situation.

.../...

C'est que le comportement attendu n'est pas seulement une information sur l'état de l'élève c'est aussi la matière sur laquelle va s'exercer la suite de l'activité du maître.

Que le texte produit contienne trop de fautes trop banales et il deviendra impossible d'en tirer aucune "leçon" raisonnable. Pour le maître cette faute subalterne d'accor doit être éliminée tout de suite. Mais il ne se résoud ni à indiquer carrément la correction, ni à expliciter ses exigences : (par exemple par un avertissement du genre "faites attention !"). Il transforme alors le test d'orthographe en mini-situation d'apprentissage. Et que fait-il ? il essaye d'obtenir tout de même le bon comportement mais en changeant le problème. Sa deuxième lecture transforme totalement la situation, un élève conscient du dilemme : "singulier ou pluriel" aurait trouvé sa réponse en résolvant un simple problème de phonétique. Il est bien évident qu'alors son comportement n'aurait eu ni la même signification ni la même valeur.

Hélas, l'élève n'entre pas dans ce nouveau jeu. Il souligne par son air ahuri qu'il ne comprend pas pourquoi son professeur s'exprime d'une manière aussi extravagante.

Et Topaze est contraint d'expliquer sa pauvre ruse et de se justifier : "...un seul moutonne.., plusieurs moutonsse". Il fournit à la fois le choix ouvert entre les réponses possibles, c'est-à-dire la matière d'une leçon sans doute cent fois rabachée et la solution dans le cas présent. L'élève reconnaît enfin en même temps le problème et sa réponse. Il s'est contenté d'identifier le désir du professeur à travers le voile transparent d'un déguisement didactique.

Ainsi nous voyons comment Topaze propose une suite de situations qui toutes tendent à produire le même comportement mais qui lui donnent des significations complètement différentes, de moins en moins riches ou coûteuses en investissement et en connaissances,

pour l'élève. Il y a là une sorte de négociation: Topaze essaie d'obtenir le comportement de l'élève "au meilleur prix" c'est-à-dire avec la situation qui lui donnera la meilleure signification et tout montre ici que l'élève se contentera d'attendre que Topaze lui propose le contrat qui exige de lui le minimum d'effort.

En quoi, sans ces conditions pourrait consister l'apprentissage escompté ? Le comportement correct est obtenu grâce au choix final par le maître d'une situation qui, dans le système de l'élève appelle la réponse attendue, c'est-à-dire par le recours à une connaissance déjà acquise, même si elle n'a rien à voir avec la connaissance nouvelle visée. On peut donc supposer que l'espoir d'un apprentissage repose sur la croyance qu'un conditionnement s'opèrera à force d'associer des occasions pertinentes - ici "s ou pas d's ? - a des réponses correctes obtenues avec de moins en moins d'indications.

Les moyens d'obtenir des réponses (correctes) par un arsenal de situations sur lesquelles s'opèrent les choix au cours de la négociation de professeur constituent la matière même de son expérience d'enseignant. L'écheveau mal contrôlé des significations que produisent ces situations constituent de son côté une espèce de "pensée pour enfants". Et Pagnol souligne à quel point ce dédale raffiné infantilise son Topaze, adulte dérisoire face à son élève absent.

2. DEUXIEME SEANCE

L'intervenant présente à Gaël les buts de la séance : Il s'agit de lui enseigner ce qu'il n'a pas su faire la dernière fois et qu'un enfant de son âge devrait réussir, lui aussi réussira bientôt.

Mais cet enseignement prendra la forme d'un jeu. Cette déclaration liminaire n'a guère d'effet, le mot "jeu" a dû être souvent employé pour annoncer de simples exercices.

Le matériel est constitué de ronds et de triangles de petite et grande tailles. Il fait compter le nombre de pièces à Gaël, qui en trouve 52, et lui dit d'écrire le nombre sur une feuille. Puis, pour s'assurer qu'il y en a bien 52, l'intervenant recompte mais en lui faisant remarquer qu'il utilise des tas de 10 : une pile de 10 triangles. Puis on ajoute une pile de 10 ronds (=36); puis une autre (46) puis une pile de 6 ronds, total 52 pièces.

Une fois que les pièces sont comptées, on les enfouit dans un sac que l'on ferme, et le jeu consiste à se rappeler ce qu'il y avait dans le sac.

L'intervenant demande à l'enfant s'il sait ce qu'il y avait, à quoi celui-ci répond : "des triangles", puis hésite et ajoute : "des carrés, (il n'y en a pas)... des ronds" puis à la demande de l'intervenant il dessine



- on a compté qu'il y avait combien de pièces ?
questionne l'intervenant.

- 26

- 26 ?

- non, 52.

- Qu'est-ce que j'ai compté 26 ?

Gaël ne se souvient plus. Il réfléchit longuement mais il faut lui rappeler que c'étaient des triangles.

Puis, on lui explique qu'on va jouer aux devinettes :

- Qu'est-ce que tu crois que je vais te demander ?

- Combien il y a de rondes

- Non

- Alors on peut regarder dans le sac si tu ne sais pas. Mais avant de défaire et de regarder, il faut parier.

.../...

Tu sais ce que ça veut dire ?

Gaël dit que parfois il parie 1 franc avec son père qu'il arrive le premier au bout du bassin à la piscine.

Le jeu consiste donc à parier combien il y a de ronds, à écrire le nombre supposé, et si la vérification confirme l'hypothèse, c'est gagné.

Premier pari : Gaël affirme qu'il y a 10 pièces rondes.

Vérification : il y en a 26. Il sourit et constate avec l'intervenant qu'il a perdu son pari.

(Dès ce premier pari, et cela se confirmera dans la suite du jeu, on constate que le nombre "10" joue un rôle particulier pour Gaël. Il a retenu que l'intervenant avait rangé les pièces par piles de 10 et peut-être cece a-t-il contribué à ce premier choix, mais nous verrons plus loin que ce n'est pas la seule raison.)

L'intervenant propose que l'enjeu soit désormais un caramel, Gaël sourit.

Après ce premier échec, ils décident de recommencer. Mais Gaël a déjà oublié le début de la séance, ne se souvient plus ce qu'ils ont commencé à compter et croit que ce sont les ronds. L'intervenant lui fait donc réécrire le nombre de pièces : 52, compter les grands ronds : 19. Il vérifie ce dernier nombre en faisant à nouveau une pile de 10 et une pile de 9, puis ils mettent tout dans le sac et le ferment.

Gaël écrit sur sa feuille :

52	19
----	----

- Qu'est-ce qu'il faut faire ? demande I.
- Trouver combien il y a de triangles
- Oui... Il y avait des carrés ?
- Non, que des triangles et des ronds.

(Lorsque l'enfant avait répondu la première fois qu'il y avait des carrés, il avait probablement dit cela au hasard, n'ayant pas bien observé les différentes pièces, trop occupé qu'il était à les compter et ayant du mal à prendre du recul pour savoir ce qu'il comptait).

De toute façon, cette première scène confirme la difficulté de Gaël à prendre en compte les données et même les consignes.

Il s'agit cette fois-ci de chercher ce qui n'est pas "les gros ronds", c'est-à-dire le nombre de petits ronds

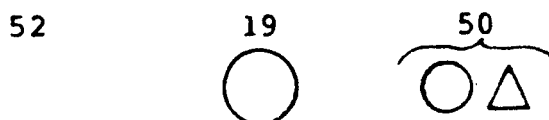
.../...

et de triangles, les deux à la fois.

Gaël réfléchit : "les triangles, y en a beaucoup..." puis répond au hasard 50.

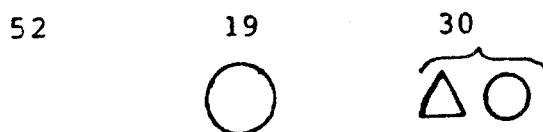
Il écrit 52 19 50

L'intervenant lui fait confirmer qu'il s'agit des triangles et des petits ronds et dessine sous les chiffres ce qu'ils représentent d'après Gaël :



Il dit alors comme un résumé qu'on a 50 d'un côté et que si on y ajoute les gros ronds, on arrive à 52, puis il lui demande s'il tient son pari. Gaël se rétracte alors car il constate que pour aller de 50 à 52, il n'y aurait pas beaucoup de gros ronds, "il n'y en a plus que 2".

Il rectifie donc son choix et annonce 30, puis écrit :



Pour vérifier, il sort les objets du sac, en compte 33 et s'exclame : "j'y étais presque !" (Il est important de remarquer qu'il est vraiment resté au niveau de jeu des essais et erreurs et qu'à chaque fois il tente sa chance, mais petit à petit, on voit apparaître certains efforts de raisonnement).

L'intervenant profitant d'une circonstance favorable a certes introduit un moyen fondamental de vérification a priori des valeurs envisagées et provoqué ainsi une contradiction entre ce que l'enfant prévoit et constate et une première prise en charge de la situation. Il y avait un risque qu'en sortant ainsi de sa neutralité encourageante l'intervenant ne replonge Gaël dans sa dépendance vis-à-vis de l'adulte et ne le conduise à chercher ses réponses dans les questions de l'intervenant. Mais cette observation de l'intervenant était faite en tant que résumé de ce que venait de faire et dire Gaël, résumé que l'adulte s'adressait à lui-même, sans même poser de question. L'observation était

.../...

si évidente pour l'enfant qu'il n'y a pas détecté d'intention à son égard. L'intervenant s'est empressé d'accepter sans commentaire la proposition suivante.

"C'est mieux, déclare l'intervenant, mais tu n'as pas encore gagné, on recommence ?

Gaël accepte car on devine qu'il voudrait bien gagner. Il écrit à nouveau 52, compte les petits ronds (7) met toutes les pièces dans le sac et doit deviner le nombre d'éléments qui ne sont pas des "petits ronds".

Il réfléchit tout haut :

"Il y a 52... comme il y a 7 petits ronds..." Il rit car il essaie d'ajouter 7 à quelque chose pour obtenir 52 et sent qu'il est sur la bonne voie. Il écrit 42 (remarquons que c'est $52 - 10$) et parie. Mais il vérifie d'abord en comptant sur ses doigts $42 + 7$, constate son erreur, raye 42, et reprenant le même processus de réflexion, inscrit 49 (dernier nombre évoqué $42 + 7$) il ne peut pas aller plus loin et parie.

On ressort tous les jetons du sac, l'intervenant les lui fait empiler par 10, il y en a 45 (qui ne sont pas des petits ronds). Gaël raye 49 et écrit 45, ce qui donne :

52 7 ~~42~~ ~~49~~ 45

I déclare : "il y a un truc... mais il faut le trouver".

Le résultat envisagé est pris pour la première fois dans une relation nécessaire (il existe une stratégie qui permet de gagner à coup sûr) qui exprime une condition nécessaire.

L'anticipation commence à fonctionner ainsi que l'examen a priori de plusieurs solutions possibles. Le nombre de données que Gaël prend en compte a soudain beaucoup augmenté, et il ne peut accomplir qu'une fois le cycle : choix, vérification anticipée, rejet, nouveau choix. Le pari est une période de relâchement de la tension, un moment agréable où on fait semblant de réfléchir, on hésite un peu, puis on se décide, on tape solennellement dans la main de l'intervenant. Alors avec un peu d'excitation fébrile, on ouvre le sac, on compte, on compare le nombre trouvé à sa prévision sous l'oeil froncé et dubitatif de l'intervenant à la fois désolé, encourageant et comiquement impuissant. Les paris doivent rester assez denses pour

.../...

entretenir le plaisir de l'enfant, ce sont eux la véritable gratification.

Le 4ème pari a pour enjeu à nouveau un carambar (hypothétique). Cette fois-ci on compte les petits triangles : 13, mais on les range dans un sac à part, dans lequel on va mettre aussi celui où sont les autres pièces.



Comme auparavant, Gaël parle à mi-voix lorsqu'il calcule : "là 52, là 13". Il compte sur ses doigts, ralentit à 10, puis continue jusqu'à 13, et répond "42". Mais il recompte longuement et rectifie : "41".

Pour vérifier, l'intervenant vide le premier sac, c'est-à-dire étale sur la table les 13 triangles et pose l'autre sac à côté, fermé.

- Si tu as gagné, dit-il, on en a 41 là (il montre le sac fermé), et en comptant tout on aura J

- 52.

Partant de 41, Gaël compte donc les 13 petits triangles : "42, 43..." et obtient 54.

Comme on n'a pas ouvert le sac, il a encore le droit de changer d'avis et l'intervenant le laisse chercher.

Gaël était en train d'oublier la méthode de vérification (ou peut-être était-il en train d'essayer de compter à rebours, ce qui exigerait de compter à la fois ce qu'on enlève et le résultat : 1 - 51, 2-50 ; 3-49 - mais c'est peu probable).

L'intervenant a suggéré opportunément à nouveau la méthode de vérification et en a facilité la mise en oeuvre, mais Gaël n'a pas pris cela comme une indication nouvelle car il peut considérer la méthode comme déjà convenue et son problème principal, à ce moment-là c'est de compter

correctement et d'avoir une stratégie de choix des nombres à essayer.

Gaël sourit, semble se souvenir de quelque chose qu'il a appris antérieurement, et compte sur ses doigts, de 13 à 52.

Mais en cours de route il s'arrête car il s'aperçoit qu'il n'a pas retenu combien il avait compté jusque là, et essaie une autre méthode :

"Ah, là il y a 13, j'enlève 10, il reste 3 et dans l'autre il y a ... 45... Il y a 52, j'enlève 10, il reste 40...5, 45 !" (peut-être $42 + 3$?)

Vérifions ! A nouveau, ce résultat s'avère inexact et l'intervenant lui suggère d'essayer un autre nombre. Il choisit 40, ajoute 13 (en comptant tous les triangles un par un) et se voyant si près du but s'exclame : "ah, j'ai déjà une preuve !" mais laquelle ?

Il essaie ensuite 31. I écrit tous les nombres qui ne vont pas, et à côté le résultat obtenu en ajoutant 13, ce qui successivement :

41	54
40	53
31	44
43	56
33	46
42	55
34	47.

Maintenant la méthode de vérification fonctionne bien, le fait de pouvoir compter les objets de la partie connue a différencié les fonctions des trois nombres : le nombre cherché - celui sur lequel on parie et à partir duquel on compte - le nombre des objets de la partie connue que l'on compte (au lieu d'additionner), le nombre total d'objets qui est le nombre final qu'on doit trouver.

On peut douter que cet algorithme soit acquis en tant que solution générale des problèmes de soustraction mais il va aider à explorer les relations invariantes par translation et permettre par là d'aboutir à une méthode de solution et de régler quelques problèmes de numération et de structure primaire des naturels. Il permet surtout un investissement

.../...

des termes de la relation à comprendre.

Observons la stratégie. Tous se passerait bien si Gaël possédait parfaitement la numération à rebours ou la soustraction de 1, car il commence avec 41 qui donne un résultat trop grand. Il essaye une autre méthode, correcte, mais qu'il ne maîtrise pas du tout en ce moment et essaye 45 qui l'éloigne du but cherché alors il corrige et choisit 40 (le seul nombre qu'il peut facilement placer au voisinage de 41 et plus petit que lui). On peut penser qu'il utilise un principe de correction : "si un nombre plus grand m'éloigne un plus petit me rapproche" qui implique qu'il postule à la monotonie de l'application. Et 40 donne un résultat excitant, il est tout près. On peut penser que pour Gaël le résultat confirme la validité de l'intuition : "la preuve" et que de surcroît il voit qu'il faut enlever 1 à 40. Ce qui impliquerait qu'il pressent que une correction de 1 dans les choix corrige le total de 1 dans le même sens. Le théorème va fonctionner pour 2 dans quelques instants. Il ne fonctionnerait probablement pas pour 8 ou 10. Mais Gaël ne sait pas trouver le nombre qui précède 40 - il enlève une dizaine et ajoute une unité : 31 - échec. Retour à la stratégie précédente : l'encadrement, Gaël va augmenter le nombre inférieur 31...33...34... et diminuer le nombre supérieur 43...42... même si les nombres supérieurs restent plus grands que 40 la stratégie peut aboutir... qu'en est-il ?

Cette fois il a utilisé avec succès le théorème de conservation des différences dans la transposition :

$t(a) - t(b) = a - b$ ou la différence entre les deux résultats totaux est égale à la différence entre les nombres essayés. $52 - 50 = 2$ alors (le nombre cherché) $- 37 = 2$ ou encore si ajouter 13 à 37 produit 50 pour atteindre 52 c'est-à-dire $50 + 2$, il faut ajouter 13 à $37 + 2$ (c'est-à-dire si $t(a) = t(b) + 2$ alors $a = b + 2$ avec $t(a) = 52$ $t(b) = 50$ $b = 37$), mais seulement parce qu'il n'y avait pas à soustraire en changeant de dizaine. Nous reviendrons sur cette difficulté.

Le premier succès à l'exercice est salué comme il convient par un bavardage libre au cours duquel Gaël déclare qu'il voudra rejouer au jeu du sac et apprendre à trouver, à deviner. L'intervenant lui propose "tout de suite"

G : "oui", I : "avec des petits nombres alors parce que tu es fatigué".

.../...

- Il y a 7 pièces, des triangles et des rectangles.

Gaël compte 3 triangles et range le tout dans le sac.

- Combien y-a-t'il de rectangles ? demande I.

- 7

- Non, sept en tout...

- Combien il y a de rectangles ? Il y en a 3,

déclare Gaël

- On parle ?

L'enfant hésite, se pose des questions

- tu pourrais les dessiner pour deviner...

Il dessine 3 triangles, puis avant de dessiner les rectangles, annonce :

- quatre

I lui dit de les dessiner mais il ne se souvient plus de la forme et doit la palper à travers le sac pour se la remémorer, puis il recompte après avoir fait ses rectangles.

(Ce dernier épisode de l'observation est important, car il montre, accrues par la fatigue les difficultés de Gaël à associer à un nombre ce qu'il représente. Il a bien observé les différentes classes d'éléments, il a compté les éléments, mais il semble se heurter à une barrière lorsqu'il passe d'une notion à l'autre. C'est ce passage laborieux qui cause en grande partie ses hésitations : il reste souvent du côté des classes d'éléments, et lorsque, enfin, il découvre une voie pour les dénombrer, il ne sait plus quel était son point de départ).

Une des sources de difficultés peut venir de la proximité des nombres, ici 4 et 3. Aussi nous avons pris soin dans le matériel de la séance de prévoir des cardinaux des parties assez différents : 45 - 7 puis 39 - 13 (sauf pour la phase initiale 26 - 26 et c'était une erreur 33 - 19)

.../...

Discussion de la 2^{ème} séance

a) Observation des difficultés de Gaël

Cette séance a mis en évidence des difficultés assez anciennes de Gaël avec le dénombrement : difficulté d'attribution durable d'un cardinal à une collection, difficulté de manier plusieurs nombres à la fois surtout si les collections ne sont pas visibles mais même si elles le sont

* avec la numération "rôle privilégié" du nombre 10 qui intervient fréquemment hors de propos comme un nombre fétiche. A ce sujet, on peut remarquer ceci : le rôle privilégié que joue le nombre 10 dans la numération, dans le calcul des sommes ou différences avec retenues ou dans la multiplication doit apparaître comme essentiellement magique à un enfant qui n'entre pas dans le jeu.

surtout

difficulté à "passer les dizaines" dans le compte à rebours et donc à ranger les noms des nombres.

Il est clair aussi que nous avons pu observer d'autres difficultés comme par exemple celle bien naturelle, à soutenir son attention à certains moments mais nous ne nous en occuperons pas pour l'instant.

b) Effets de la séance

Avons-nous la possibilité de répondre à certaines questions que nous nous sommes posées avant cette séance ?

* Il semble tout d'abord que Gaël soit tout à fait capable de rentrer dans une situation d'action. Il a progressivement accepté des règles du jeu qui consistent à prendre en charge un objectif et les moyens de vérifier soi-même qu'on l'a atteint, à hasarder des solutions, à les confronter à un état du milieu. Il a progressivement investi la recherche d'une bonne solution, rejetant de lui-même les contradictions, les solutions inadéquates. Il a pris plaisir au jeu de la prévision et de la vérification même lorsqu'il n'a pas gagné.

* Il s'est engagé volontiers dans la voie de l'anticipation. Ce dernier point est très important à plus d'un titre.

.../...

L'anticipation est le premier pas vers la création d'une théorie et le passage à des rapports expérimentaux ; le sujet renonce au mode procédural, aux seules interactions directes avec le milieu, à la méthode des essais et des erreurs et prend de la distance par rapport à ses actions, cette attitude réflexive le conduit au mode déclaratif.

L'anticipation repose sur l'existence d'un modèle au moins implicite, juste ou faux sur lequel elle se fonde et que l'expression peut mettre à l'épreuve. Ici, le modèle est la relation nombre connu + nombre essayé = 52 et il paraît assez sûr à Gaël pour lui permettre rapidement une simulation de l'expérience (Il n'est pas remis en cause du moins du point de vue de sa validité).

Il est intéressant de noter que Gaël a bien franchi aussi le pas de l'anticipation : nous avons voulu qu'il s'intéresse à la matérialité des données de l'énoncé, nous avons mis en scène les collections dont il s'agit avec un cérémonial insolite et captivant de façon à augmenter la charge affective perceptive et sensorielle de la recherche de la solution, or l'investissement dans l'application est d'une certaine façon antagoniste de l'investissement dans l'action en ce sens qu'elle en suppose le refus au moins provisoire. Ici Gaël doit renoncer aux plaisirs de l'action, de la décision, du pari, du jeu, pour les remplacer par des calculs et des simulations. Mais on peut remarquer toutefois que l'anticipation hérite dans une certaine mesure des motivations associées à la situation qu'elle simule. Gaël expérimente ses prévisions avec un petit frisson de plaisir qui rappelle celui qu'il éprouve au moment des paris.

Enfin la considération successive de plusieurs prévisions possibles au cours d'un même pari et le fait de les écrire va permettre l'examen en même temps des divers choix, et par conséquent le choix d'une stratégie reposant sur la structuration de cet univers des possibles.

Le passage d'une prévision "contingente" où le sujet ne conçoit pas d'autre issue à la situation que celle qu'il envisage à une prévision des possibles est une étape indispensable pour l'émergence d'une "prévision" du nécessaire où l'issue est prévue, parmi d'autres pour des raisons logiques, mathématiques, ou autres mais théoriques.

Gaël est donc capable d'entrer dans toutes ces phases de la dialectique de l'action, de produire et d'éprouver des modèles implicites même si, comme nous le verrons ci-dessous, c'est avec une efficacité assez faible encore. Il est probable qu'il accomplit naturellement cette activité, ce qui explique le développement normal qu'on observe chez lui. Ses attitudes stéréotypées que l'on observe en classe et sa tendance à chercher des solutions faciles dans l'interprétation des suggestions de l'adulte sont donc un effet de sa manière d'utiliser la situation didactique.

Nous avons pu voir ici que cette situation n'est pas inéluctable, le choix d'une situation appropriée a bien produit la rupture que nous avons envisagée, avec les efforts prévus. Bien sûr cette rupture "accidentelle" n'a pas encore changé Gaël ni ses rapports avec la connaissance. Elle a été obtenue en partie en s'appuyant sur son défaut majeur, le désir de séduire l'adulte et d'entretenir avec lui des rapports affectifs et ludiques. Il faudrait que ce jeu avec la connaissance puisse s'instaurer régulièrement et se poursuivre dans les circonstances didactiques ordinaires. Il n'est pas question en effet de demander à la maîtresse de Gaël de beaucoup modifier sa méthode pédagogique qui convient à beaucoup d'autres enfants et qui doit sans doute offrir des occasions similaires de fonctionnement correct, occasions qui ne sont pas saisies par Gaël.

c) Projets.

Il faudra donc étudier les moyens d'engager Gaël dans cette voie et de lui donner le goût et les moyens d'assurer son apprentissage.

Il reste aussi beaucoup à faire pour lui faire acquérir la maîtrise des situations de soustraction et leur donner du sens.

Gaël n'a aucun mal à envisager la position des ensembles en présence. Il parvient sans difficulté à isoler les triangles et les "non triangles" et à les inclure dans la classe de départ, que les "non-triangles" soient clairement une propriété commune ou non (carrés et ronds...)

On pourrait supposer qu'il lui suffirait d'associer à ces opérations ensemblistes les opérations numériques correspondantes, inverses l'une de l'autre, l'addition et la soustraction.

* Certaines méthodes didactiques consistent alors à illustrer l'un et l'autre cas par un ensemble d'exemples et de problèmes, suffisant pour suggérer les champs d'application de chacun. Dans ces méthodes, les procédures de calcul, le modèle implicite, la théorie ne changent pas au cours de l'apprentissage ; il s'agit d'associer une structure mathématique déjà faite à des situations supposées déjà comprises ou compréhensibles et ce sont ces situations qui constituent le sens des opérations mathématiques.

Ces méthodes reposent sur des conceptions de la signification et de l'apprentissage assez anciennes et très discutées. En simplifiant beaucoup on peut les résumer ainsi :

* Le signifié d'une connaissance ou d'une théorie est constitué de l'ensemble de ses réalisations, c'est-à-dire des situations objectives dans lesquelles elle se trouve vérifiée. Donner du sens à une structure c'est lui trouver des applications, des occasions de s'en servir.

* Pour apprendre une connaissance théorique il faut la constituer à partir de connaissances déjà acquises et par un discours ou des moyens logiques (ou mathématiques ou scientifiques ou rationnelles, etc...) eux-mêmes déjà connus, ou en fait "l'apprendre" toute faite directement (au sens de la mettre en mémoire) par exemple comme un algorithme. Donner du sens à une telle connaissance reviendra à lui faire correspondre des problèmes ou des situations où elle est réalisée, c'est-à-dire où les objets dont elle parle sont présents et où les relations qu'elle envisage entre eux sont vraies. L'enseignement consistera à produire des conditions conduisant à associer les deux après avoir mémorisé l'un et l'autre.

* Généralement, dans beaucoup de cas le processus d'apprentissage se ramènera, bien qu'avec des justifications diverses, à des conditionnements : soit que l'on parte de la théorie pour lui chercher des applications ou que l'on parte des cas pour faire abstraire la structure, ou les deux.

Cette association se fait mal car l'interprétation de la situation ne se produit que si l'on possède le schème théorique complet et inversement la théorie s'entend mal si elle n'a pas de justification ni de fonction explicative ou descriptive. L'adaptation miraculeuse et anhistorique de la théorie aux pratiques souhaitées fait obstacle à des apprentissages partiels, il faut apprendre la théorie sous sa forme définitive et correcte, adaptée aux exemples complexes et achevés auxquels elle doit s'appliquer. Le mieux que l'on puisse faire sera de découper la théorie en fragments simples et de chercher des situations simplifiées où ces seuls fragments prendront valeur de théorie ou d'algorithme... toujours parfaitement adapté. Mais que l'on fragmente ou non on en revient à devoir associer deux connaissances déjà "achevées" apprises ou constituées indépendamment l'une de l'autre.

Pour pallier aux difficultés de l'apprentissage de cette association (non motivée pour l'élève et qui repose entièrement sur une décision didactique) l'enseignant peut raffiner la méthode par la mise en oeuvre d'illustrations (manipulations, schémas, discours mnémotechniques destinés à souligner l'association, mais qui ne font pas avancer l'un ou l'autre.

Ici, on pourrait "enseigner" à Gaël les éléments qui lui manquent : faire un schéma, identifier dans une situation le schéma convenable, concrétiser la soustraction par la répétition de manipulations et l'association d'un discours approprié... j'enlève je retranche... etc...

* Nous cherchons ici au contraire à faire construire et apprendre une théorie à Gaël en suivant un autre processus, historique celui-là. Nous expliquerons ce processus dans un autre chapitre mais on peut voir tout de suite en quoi il va différer des méthodes classiques.

Nous allons considérer une autre composante du sens

.../...

de la soustraction, telle qu'est constituée par toutes les procédures plus primitives qui ont permis d'obtenir le même résultat dans des conditions particulières sans que soit mise en oeuvre une théorie préalable ou un transfert conventionnel de connaissance - mais seulement des schèmes opératoires variables, et adaptables.

Par exemple, pour retirer 5 de 57 on peut compter à rebours en repérant éventuellement sur les doigts pour s'arrêter au bout de 5 : 56 55 54 53 52. Certes c'est plus compliqué comme procédure, mais l'enfant peut se référer de façon très étroite à ce que représentent les nombres et les noms des nombres au cours du dénombrement. C'est donc plus économique (ou plus primitif/en ce qui concerne les connaissances théoriques). C'est en tout cas impraticable s'il s'agit de retirer 39 de 57.

On peut prétendre dans le schéma théorique qu'il est logiquement équivalent de retirer a ou b de c dès lors que $a + b = c$ mais il est clair que ce n'est pas vrai dans le cas présent : pour retirer 52 de 57, il faut "inventer" un autre système et compter de 52 à 57 en comptant sur les doigts ou autrement ce qui manque :

52	53	54	55	56	57	
	"	1	2	3	4	5

Il est bien connu que dès que les objets ne sont plus concrètement présents, ces procédures échouent car l'élève ne sait jamais s'il faut "compter 1 avec 52 ou avec 53". Bien sûr dans les méthodes classiques d'enseignement, le maître ne manquait jamais d'examiner "tous les sens" de la différence : ce qui manque, ce qui reste, ce qui est en trop... ou en moins... etc... mais toujours à plat comme les facettes d'un même savoir, et sans se soucier de l'adaptation de ces points de vue ni de leur place dans une genèse de la communication.

La méthode qu'utilise Gaël ici est différente et basée sur une meilleure connaissance de l'ensemble ordonné des naturels et de leurs ordres de grandeurs. Pour trouver ce qu'il faut ajouter à 39 pour obtenir 59, elle consiste à prendre un nombre voisin du résultat et sur lequel les calculs sont simples par exemple 20, puis à corriger à l'aide du théorème de conservation des différences :

$39 + 20 = 59$, qui dépasse 57 de 2 alors il suffit d'ajouter

.../...

20 - 2 = 18. Cette méthode est très utilisée en calcul mental. Evidemment elle n'est pas une "méthode" pour Gaël, elle n'est pas utilisable dans n'importe quel genre de situations, elle n'est pas reconnue pour telle, elle n'est même pas une connaissance : Gaël serait bien incapable de dire à son père ce qu'il a appris au cours de la 2ème séance. Il faudra tout un processus pour le conduire à un objet de connaissance à la fois efficace, bien conscient et bien maîtrisé sur le plan théorique.

Et pourtant cette méthode se heurte à des difficultés anciennes de Gaël avec la numération. Nous pourrions croire que nous voyons ici comment un défaut d'acquisition d'une notion ancienne peut rendre impossible une activité essentielle pour comprendre une notion nouvelle. En fait, non, nous sommes en présence d'une véritable situation d'apprentissage de la numération. Si Gaël a peu de prise sur la situation en tant qu'occasion d'apprendre la soustraction puisqu'il ignore les intentions de l'intervenant et où se trouve l'objet de son désir didactique, il est clair pour lui qu'il bute sur la possibilité de compter certains nombres (trouver le prédécesseur de 40). C'est ce qui l'empêche de mettre en oeuvre une stratégie efficace. Pas de doute que lorsqu'il trouve, après un autre raisonnement, 39, cette réponse vient prendre sa place aussi comme réponse à la question : "quel est le prédécesseur de 40 ?".

On pourrait tout de suite "didactifier" cette partie de l'apprentissage : reconnaître la difficulté, rappeler les moyens de la surmonter, réexpliquer, faire des exercices de comptage à rebours, etc... nous ne le ferons pas. Mais pour bien repérer le caractère didactique des difficultés de Gaël, nous avons ménagé une courte séquence de ce type en fin de la séance suivante.

* Pour revenir à un plan d'apprentissage de la soustraction d'autres stratégies peuvent apparaître dans d'autres conditions (avec d'autres nombres) mais avec la même situation de base :

par exemple de 39 à 40 - 1, de 40 à 50 - 10, 10 et 1 onze et de 50 à 57 : 7, 11 et 7 : 18. Cette méthode, la plus répandue en calcul mental, s'appuie, elle aussi, à la fois sur l'ordre et sur la numération décimale. Elle devient plus efficace

.../...

pour de plus grandes différences. L'algorithme habituel peut apparaître comme un raccourci de la précédente ou comme le résultat d'un autre raisonnement. L'apprentissage pourra s'organiser en une présentation fréquente de la même situation didactique où ne varieront que certaines conditions favorisant la constitution de ces stratégies. La possibilité de remplacer une par une autre va leur conférer une certaine équivalence (du point de vue du sens) le choix de l'une ou de l'autre dépendant de sa commodité ou de son efficacité. Ces stratégies mobilisent tous les schèmes fondamentaux de la somme et de la différence. L'ordre de leur apparition constitue une genèse (bonne ou mauvaise) du concept et lui donne un sens.

Nous n'évoquerons pas ici les processus de formulation de validation de l'institutionnalisation qui permettent l'émergence de la soustraction en tant que théorie à la disposition de l'enfant.

La recherche de problèmes relevant des schèmes relève des mêmes processus qui seront étudiés plus loin.

Ainsi dans la 3^{ème} séance nous allons reprendre la même situation.

3. TROISIEME SEANCE

L'intervenant reprend donc sans modification le jeu de devinettes de la dernière fois : il y a 56 pièces que Gaël compte et met dans un sac, après avoir écrit le nombre sur une feuille. L'intervenant retire ensuite 10 gros ronds du sac, les fait compter par Gaël puis les enfouit avec le premier sac dans un second. Il s'agit de savoir combien il y a de pièces dans le petit sac intérieur.

Gaël réfléchit, compte jusqu'à dix et répond : "cinq !" L'intervenant lui montre les 10 ronds puis secoue le petit sac et lui demande s'il croit vraiment qu'il n'y en a que 5, Gaël sourit, cligne des yeux et secoue la tête, exprimant qu'il se rend bien compte qu'il a fait une erreur. En fait, Gaël vient de reproduire son mode de réponse habituel ; il compte jusqu'à dix, comportement stéréotypé, puis puisqu'il faut bien répondre, dit n'importe quoi.

L'intervenant n'accepte pas cette réponse. En classe, le maître ne peut pas avoir cette exigence têtue envers chaque élève pour chaque problème.

Alors Gaël poursuit à mi-voix, "56... il y en a 10 alors... (il compte jusqu'à 40), j'en suis à quarante, et on enlève 10,... ça fait quarante !" En fait, il n'a pas changé de procédure, il a simplement donné un nombre plus plausible conformément à l'attente exprimée par l'adulte. Le fait de devoir retirer 10, le nombre magique, contribue peut-être à un désarroi.

L'intervenant alors, lui rappelle le principe de la vérification de leurs affirmations pendant la séance précédente "nous faisons un pari et nous vérifions si nous avons raison"... sans dire, bien sûr, quelle opération était utilisée. Pendant ce temps, l'enfant réfléchit en riant, puis s'exclame :

- 46 !

Il semble évident qu'il est sûr de sa réponse. On pourrait penser qu'il a suffi de rappeler les conditions de la situation, pour rendre possible un contrôle de sa réponse, et donc l'apparition d'une réponse correcte. On pourrait aussi

.../...

penser que Gaël a joué un jeu plus subtil lâchant des réponses provisoires pour gagner le temps d'achever sa réflexion ou même simulant ses difficultés habituelles en taquinant l'intervenant. En tout cas, cette scène montre bien le besoin de Gaël de "meubler le silence".*

I : "Pourquoi dis-tu que ça fait 46 ?" continue l'intervenant un peu interloqué par la rapidité de la réponse

G. : "Parce que je sais qu'à 10 on enlève 5, alors ça fait 4 et puis il reste 6 alors ça fait 46."

I : !!!

Sans doute faut-il traduire ainsi cette réponse : à 5 dizaines, on enlève une dizaine (formulé à l'envers), il en reste 4. Dans 56, il y a 5 dizaines et 6 unités, ces 6 unités rajoutées aux quatre dizaines on obtient 46.

Ici Gaël utilise à plein les ressources de la numération pour effectuer sa soustraction selon le schéma suivant $56 - 10 = (50 + 6) - 10 = (50 - 10) + 6 = 40 + 6 = 46$. Il est vrai que cette méthode donne dans ces conditions une procédure plus simple que celle qui aurait été nécessaire lors de la séance précédente :

$$\begin{aligned} 52 - 7 &= (50 + 2) - 7 = (50 + 2) - (2 + 5) = (50 + 2 - 2) - 5 \\ &= (50 - 5) = (40 + 10) - 5 = 40 + (10 - 5) = 40 + 5 \\ &= 45 \end{aligned}$$

Et déjà cependant Gaël éprouve des difficultés à formuler sa demande.

Cette difficulté se manifeste par l'incapacité à désigner l'ordre des nombres qu'il énonce et par l'apparition d'une inversion d'une relation (à 10 on enlève 5 au lieu de à 5 on enlève 1 dizaine). Souvent tout se passe avec Gaël comme s'il abordait les relations en deux temps : d'abord la relation binaire et la paire qu'elle lie, puis l'identification du couple. De même, par exemple, dans 21, il appréhende d'abord la paire, puis le couple (2,1), c'est-à-dire 2 "trucs" et 1 "machin", puis, si nécessaire, l'ordre 2 dizaines et 1 unité, c'est-à-dire 20 et 1.

Après avoir expliqué sa réponse (46) Gaël va la vérifier. Mais auparavant, I lui demande si l'on ne peut pas savoir combien il y a de morceaux sans ouvrir le sac.

Réponse de Gaël : "ah non, on peut pas savoir..."

.../...

I lui rappelle alors la méthode utilisée la fois précédente, lorsqu'on considérait que le sac contenait un certain nombre de pièces et qu'à ce nombre on ajoutait les éléments dispersés sur la table : si l'on ne s'était pas trompé, on obtenait le nombre de pièces total. Gaël utilise donc cette méthode et s'aperçoit qu'effectivement, il ne s'est pas trompé. Pour être tout-à fait sûrs du résultat, ils vont vider le sac et compter toutes les pièces après avoir parié, mais Gaël dit qu'il n'est pas "tout à fait sûr" de gagner.

Ils comptent chacun une partie des pièces, l'intervenant faisant des piles de 10 éléments. Lorsqu'à eux deux ils ont dénombré 40 morceaux, Gaël s'arrête et dit :

"Ah, je sais que j'ai perdu"

mais l'intervenant lui conseille de continuer et il s'aperçoit en fin de compte que son résultat était exact.

Un observateur pourrait d'abord s'étonner de voir que Gaël a oublié ce qui avait constitué la clé, le moteur de l'anticipation lors de la séance précédente. Mais nous savons qu'une des difficultés de Gaël provient de ce qu'il ne se souvient pas de ce qu'il a fait précédemment en mathématiques. De plus, la suggestion avait été faite par l'intervenant; Gaël s'était contenté de s'en saisir pour réaliser son projet de prévision de façon plus satisfaisante (pour l'intervenant) par soumission au désir de l'adulte. Celui-ci, d'ailleurs, n'avait rien fait pour attirer l'attention de l'enfant sur ce procédé. Dans le contrat didactique c'était, pour l'un comme pour l'autre, un moyen, pas un objet de connaissance "à apprendre". Il est donc, d'une certaine manière satisfaisant de contrôler "l'innocuité" d'une suggestion non institutionnalisée.

Si le moyen de contrôle avait été "enseigné" il y aurait eu danger de le voir utilisé comme moyen systématique de trouver la solution, et même sous la forme la plus évoluée, d'addition à trou, c'eut été dommage et sans doute raté d'ailleurs pour la création du sens.

Mais il est clair que par contre Gaël fait immédiatement son affaire de la prévision, du pari et de la vérification. Pour lui, il serait très décevant "qu'on puisse savoir à l'avance" même la preuve par conséquent est douteuse,

et Gaël entretient le suspense ("Ah... je sais que j'ai perdu") jusqu'au dernier moment.

I : "Est-ce que tu crois que tu saurais trouver si on faisait autre chose ?

G : Peut-être mais j'en suis pas sûr (ne prenons pas de risques !)

Ils prennent les petits ronds et remettent tout le reste dans le sac. Gaël est d'accord pour dire qu'il y a toujours 56 éléments dans le sac, et l'enfant fournit la réponse suivante :

"là, je crois avoir trouvé. Là on fait 50 et puis là, y'en a 6, si on enlève 5 à 6 ça sera ceux-là (il montre les petits ronds) et puis y reste un alors ça fera 51".

Dans ce dernier raisonnement, apparemment l'enfant a mis mentalement de côté 5 piles de 10 et a gardé les 6 éléments "unités" auxquels il a pu retrancher 5. Mais que serait-il advenu s'il y avait eu par exemple 7 petits ronds ?

L'intervenant lui fait écrire son résultat (51) et lui demande de le prouver, sans compter.

Gaël : "là y a 5, ça reste toujours pareil"

I : 5 quoi ? 5 dizaines ?

G : oui, ça, si on enlève 6, y en aura 5 d'enlevés, non si on enlève 5 y en aura plus qu'un, les 5 je les mets là (petits ronds), il reste 1 (sac) et là 5.

(L'enfant a donné un certain caractère immuable aux 5 dizaines : "ça reste toujours pareil". Dans 56, il y a 50 et 6. Si on enlève 6 (à 56) et qu'on enlève 5, il reste 1, donc il s'occupe de ces 6 éléments-là, rassuré car il sait que les 50 autres n'ont à subir aucune opération).

L'intervenant le ramène à l'autre méthode de vérification, ajoutant 5 aux 51 supposés être dans le sac.

I : "Qu'est-ce qu'on fait là, 51 et puis ?..."

G : "ça y est, j'ai tout compris, comme y en a 51, on compte et on trouve le même nombre"

Il paraît vraiment satisfait car il a retrouvé l'algorithme utilisé la fois précédente et y assimile la possibilité de preuve.

Mais il est vraisemblable que cette fois, il a perçu l'intention didactique - à travers l'insistance de l'intervenant.

Le compte à rebours "le passage des dizaines"

Pour donner l'occasion à Gaël de s'exercer aux comptes à rebours et surtout au franchissement des nombres ronds de dizaines, l'intervenant utilise le même jeu.

Il y a toujours 56 éléments dans le sac, mais il en sort certains (un par un, au début) et à un moment il dit "top" et l'enfant doit dire combien il reste dans le sac.

Pour lui faire bien comprendre la règle du jeu, il prend le sac ne sort aucune pièce et dit top. L'enfant répond 56. Puis il en enlève une et dit top. Gaël hésite puis déclare "55". L'intervenant continue, en retire 2, Gaël ne se trompe toujours pas et dit "53", mais lorsqu'on en enlève 3 autres, il répond 40. Ils parient alors un caramel, Gaël compte à partir de 40 en ajoutant tous les éléments qui sont hors du sac. Arrivé à 46, il dit qu'il a gagné.

L'intervenant lui fait remarquer qu'il y en avait 56 puis ils recommencent. Lorsqu'il y a 50 pièces dans le sac, il en enlève 3, mais l'enfant ne semble pas suivre l'action.

(Décidément, tant qu'on était dans la même dizaine, de 56 à 50, il n'y avait pas de problème pour compter à reculons, mais la difficulté se situe au niveau du changement de dizaines auquel se heurte Gaël).

Gaël est un peu perdu, mais finit par découvrir la solution et désigne successivement les 3 derniers éléments en comptant : 49, 48, 47.

Le jeu se poursuit, avec un "top" à 43 qui ne pose aucun problème, puis on en enlève 3. Gaël répond : 39.

Il parie, vérifie en ajoutant 3 à 39 puis se demande : "il y a pas 39, alors qu'est-ce que ça peut bien être ?"

Il compte à rebours et trouve 40, nombre confirmé par la vérification.

Le jeu se poursuit ainsi quelques minutes, mais l'intervenant ôte ensuite les éléments par dizaines et Gaël

.../...

n'a alors aucune difficulté à donner le résultat, terminant ainsi la séance sur un succès.

Commentaires sur la 3ème séance

1. Appréciation des résultats.

La reprise du "jeu" des sacs avec des données un peu plus simples il est vrai a permis à Gaël de retrouver le schéma initial et de produire des raisonnements attendus. Nous avons retrouvé aussi chez lui les difficultés et les erreurs déjà connues. La répétition de situations de ce genre permettrait sans aucun doute de le conduire progressivement à corriger ses erreurs d'écriture des chiffres, à bien connaître la numération décimale et à donner du sens aux problèmes de soustraction. D'autant plus que l'intervenant a su développer avec Gaël une relation agréable. Nul doute que pour faire plaisir à l'adulte Gaël identifiera ce qui lui fait plaisir, manifestera les comportements attendus et simulera les acquisitions voulues. Le temps de lier des relations affectives qui ne reposent plus sur le contrat didactique ou de les rompre. Mais cette remarque et ce que nous avons observé dans cette séance au sujet des rapports de Gaël avec la certitude montrent qu'il serait assez vain de poursuivre dans cette direction.

2. Observations et analyses.

L'attitude d'évitement de Gaël face à la certitude qui en soi est surprenante, devient plus compréhensible si on la met en relation avec tout ce qui particularise ses démarches cognitives.

Depuis le début des interventions, nous avons été frappés par cette profonde tendance de Gaël à donner des réponses spontanées plus ou moins plausibles. Il semble incapable de suspendre quelque temps des réactions très impulsives afin de réfléchir, de rassembler des informations, de construire lentement les inférences nécessaires. Bref, on retrouve souvent cette difficulté à entrer dans des processus secondarisés.

.../...

Ce que nous pouvons admettre c'est qu'en l'absence de déficit sur le plan opératoire, une telle attitude a un sens du point de vue du sujet : à travers elle, il poursuit une satisfaction ou évite un déplaisir. Ce qui est mis à distance par ce comportement durant les apprentissages c'est bien le champ de la certitude. Nous avons plus haut remarqué combien il était malaisé de lui faire quitter le domaine du possible pour celui du nécessaire.

. Fuir la maîtrise totale de la connaissance par l'évitement de tout raisonnement au profit de réponses données au hasard c'est en effet rester, pour Gaël dans le domaine de l'incertitude. Cette tendance est si forte que, sûr du résultat, il tente encore par un véritable déni d'abolir le caractère de certitude de son raisonnement "Ah je me suis trompé !"

Nous nous trouvons alors devant un des points les plus délicats d'une intervention didactique de ce type. L'échec en mathématique apparaît ici avec sa signification symptomatique c'est-à-dire qu'il renvoie à l'organisation totale du sujet et à l'équilibre actuel de ses investissements.

Dès lors, si l'intervention prend l'aspect d'une rééducation au sens strict, visant la disparition du symptôme par la mise en oeuvre de stratégies diverses : aider l'enfant à utiliser des raisonnements etc... on court le risque d'un échec ; le contre-investissement de l'enfant va jouer et l'intervenant sera impuissant à modifier profondément les conduites d'évitement du sujet. Il est également possible d'entraîner des décompensations dans la mesure où ces attitudes jouent leur rôle de défense contre l'angoisse.

Faut-il alors adopter une approche clinique qui tendrait à déterminer le sens inconscient des conduites d'évitement que traduisent probablement les démarches de Gaël dans le domaine mathématique ? Mais une telle approche est particulièrement malaisée. Elle le serait dans le cadre d'une thérapie analytique où toute forme d'inhibition intellectuelle se révèle un symptôme particulièrement complexe et largement surdéterminé. Elle l'est d'autant plus dans le cadre d'une intervention où le matériel à travers les textes projectifs reste fragmentaire et où tout ce qui a trait à l'histoire du sujet ainsi qu'aux relations intra familiales nous reste inconnu pour la majeure partie.

.../...

Les seules hypothèses quant au sens à donner au symptôme s'appuieraient uniquement sur l'investigation psychologique faite avant la première séance. Nous pourrions mettre en effet en relation ce que Rorschach et le CAT nous avaient révélé avec les caractères symptomatiques du comportement de Gaël ; les conduites de stupeur et de profond bouleversement devant certaines planches chez un enfant par ailleurs bien équilibré nous avaient conduit à l'interprétation d'une angoisse et d'une culpabilité très forte face à la curiosité liée à l'activité sexuelle des parents. On pourrait, et des références à la théorie psychanalytique nous y autoriseraient reconnaître dans les conduites d'évitement de Gaël, une signification latente liée à la scène primitive ; demeurer dans l'incertitude sur le plan des démarches de la pensée, c'est s'assurer contre l'angoisse de (re)connaître la sexualité des parents et d'affronter les pulsions sadiques liées à cette connaissance.

Mais quand bien même cette interprétation serait vraie, elle ne nous serait d'aucune utilité. Notre projet n'est nullement de travailler avec l'enfant à l'élucidation du conflit oedipien ; dans un champ psychothérapique le projet didactique disparaît.

C'est donc dans le domaine de l'apprentissage mathématique que nous resterons, mais nous considérerons le fonctionnement mental que nous avons repéré dans ses rapports avec l'organisation globale et s'ingérant dans l'équilibre économique de l'enfant. Il s'agit, non d'apprendre l'enfant à raisonner, mais de lui donner au sein d'activités mathématiques dont nous allons parler, l'occasion de réinvestir cette fonction.

3. Projets d'interventions.

a) Situations à présenter à l'élève.

Quels sont les moyens didactiques que nous connaissons et qui permettent de faire fonctionner des raisonnements. Il ne s'agit pas pour l'instant de leur contenu ou de leurs méthodes, mais de leur motivation et surtout de leur contrôle par la conviction.

.../...

Techniquement, la conviction des élèves s'éprouve, se manifeste, s'affirme et se conforte dans les quatre grands types de situations didactiques. (que nous étudierons au chapitre 3), sous une forme différente spécifique à chacune : dans les situations d'action c'est par les décisions ou par la confiance dans les anticipations qu'elle s'exprime ; dans les situations de formulation, le fait de communiquer ou d'exprimer une idée ne témoigne pas toujours d'une grande conviction à son endroit, mais précisément l'objectivation qu'elle constitue joue un rôle essentiel dans l'élaboration de la conviction par la distance qu'il permet d'instaurer entre ce qui est dit et ce qui est perçu entre une proposition et sa valeur de vérité implicite. Les situations de recherches en classes dont on nous a dit qu'elles provoquaient chez Gaël une bonne participation et des trouvailles intéressantes ont probablement ce caractère : Gaël peut dire ce qui lui passe par la tête le maître triera ce qu'il veut, donc il peut dire des choses qu'il "voit" vraies sans affirmer qu'elles le sont.

Les situations où s'expriment et s'éprouvent les jugements et les preuves sont les situations de validations. Il entre dans la convention de cette situation que les sujets échangent des opinions à propos d'un fait et s'engagent à son sujet. En général, les situations de ce genre que nous proposons mettent en présence un proposant et un opposant qui sont tous les deux des élèves, afin qu'ils élaborent un système de preuve - une théorie - fondée sur la conviction intime et non sur l'autorité. C'est que la recherche de la vérité est une activité exigeante, il faut y tenir assez pour refuser de se laisser convaincre par autre chose que son propre jugement sans jamais refuser toutefois d'examiner aucun argument. Il faut résister à l'autorité, à la séduction, à la rhétorique, à l'intimidation, à la convention sociale, etc... Et lorsqu'il s'avère que son opinion est fautive, il faut aussitôt aller à résipiscence, se dédire et résister là aussi aux mêmes difficultés. Difficultés légitimes et qui tendent à l'établissement de vérités assez stables dont rendent compte par une sorte d'engagement personnel et social les personnes qui les professent.

Dans les situations d'institutionnalisation de la connaissance au contraire des précédentes, la conviction personnelle est supplée, secourue ou supplantée par la référence à une norme extérieure au sujet, sa conviction devient seulement adhésion fondée.

Quelles sont les situations les plus appropriées au cas de Gaël, et lesquelles pourront lui être proposées ?

Une méthode classique consisterait à "exploiter" la situation d'action que nous avons créée dans les séances deux et trois, c'est-à-dire à pousser Gaël à prendre parti, à formuler des déclarations, à les affirmer, à les retirer, dans une relation duelle avec l'adulte. L'intervenant tirant à chaque instant une morale des actions de Gaël ou la lui faisant tirer. Par exemple, il répèterait des situations de pari en insistant : "il faut être sûr ! es-tu certain ?..." Nous savons que cette méthode ne peut aboutir.

D'autre part, l'intervenant étant seul avec Gaël, ne pourra pratiquement pas organiser de véritables situations de validation dans lesquelles l'enfant aurait à s'affirmer devant un égal. Il devra les simuler - et peut-être ceci vaut-il mieux dans la mesure où une certaine identification pourrait aider Gaël à sortir de son alternative. Mais il y a un danger, dans le sens de ses tendances, de rester avec l'adulte dans une relation superficielle et ludique écartant toute possibilité d'un débat sur la connaissance. Les attitudes ludiques sciemment utilisées par l'intervenant pour "justifier" les débats risquent d'être "récupérées" pour reproduire le dilemme fondamental signalé plus haut. Il faudra donc que l'intervenant accomplisse une nouvelle modification du "contrat didactique" en réintroduisant des exigences. En fait, il serait souhaitable d'obtenir une suite de ruptures ; alternativement l'intervenant se présenterait soit comme un partenaire, un complice dans un jeu, soit comme un interlocuteur qui attend quelque chose de lui, et qui dit quoi. Il paraît évident toutefois que l'objet de l'enseignement doit rester caché pour éviter l'adhésion immédiate et la soumission dont nous avons parlé. Nous allons revenir sur le jeu auquel doit se livrer l'intervenant afin de faire multiplier et varier les positions de Gaël à propos de la certitude et de l'incertitude.

Mais déjà, si l'on reprend le jeu des paris, on pourrait peut-être échapper à la récupération à laquelle nous avons fait allusion sans que soit exigé un changement d'attitude de l'intervenant : en multipliant les paris et le nombre des données en présence. De cette façon, même si Gaël prend quelques calculs comme occasions de s'évader de l'exigence d'exactitude, on peut parier qu'il ne les fera pas tous faux pour peu que ses connaissances le lui permettent.

En ce qui concerne le contenu il serait utile de continuer l'étude de la numération, de plus la suite naturelle du processus engagé à propos de la soustraction va conduire à la construction et à l'usage d'un système de symbolisation des quantités en présence. Nous analyserons de ce point de vue les situations retenues après les avoir présentées.

Dans le cas de Gaël, quelle position ce partenaire peut-il occuper ? Nous savons combien Gaël est dépendant du climat affectif, à quel point son attitude est déterminée par celle de l'autre. Une attitude de trop grande neutralité affective le rejette aussitôt dans des réactions stéréotypées de fausse activité intellectuelle, une trop grande connivence lui permet d'entrer dans des attitudes ludiques où il peut faire l'enfant. Trouver la bonne distance est primordial, ce que l'intervenant vise c'est une complicité de bon aloi où intervient sans cesse la médiation de la connaissance et ses exigences propres.

fort bien en comptant à rebours. L'intervenant lui fait donc noter son résultat : 6, et rajouter le nom de la couleur pour se souvenir de ce dont il s'agit. Même processus pour les jaunes, mais parvenu aux rouges, il hésite : y en avait-il 9 ou 10 au départ ? Il opte pour 9, tout comme il pense qu'il y avait 6 bleus. L'intervenant lui suggère de vérifier en recomptant les objets et d'écrire pour ne plus oublier :

9 bleu	10 vert	10 rouge
		6 jaune

Ils remettent ensuite le tout dans le sac et recommencent. (On s'aperçoit que Gaël est continuellement sous le contrôle de l'intervenant qui intervient souvent et décide pour lui, mais il essaie de retrouver la situation de jeu, semblant vouloir échapper à cette relation didactique).

(L'aspect de jeu reste malgré tout apparent, bien qu'on note une prépondérance de l'opération et une mise à distance de l'activité ludique proprement dite : A chaque essai, Gaël doit faire 4 anticipations).

Le jeu des estimations a exactement la même structure que le jeu précédent mais les données sont des 4-uplets et la réponse aussi : par exemple au premier essai il faut effectuer :

$$(9 ; 10 ; 6 ; 10) - (1 ; 0 ; 2 ; 4) = (8 ; 10 ; 4 ; 6)$$

Pour l'enfant l'opération se présente comme une suite de trois soustractions, mais Gaël doit bien garder en mémoire les quantités par catégories : bleu, rouge, jaune, vert.

Par rapport au jeu précédent, cette augmentation de la complexité (compensée en partie par le choix de petits nombres) va rapidement poser un problème d'ordonnement des opérations et donc le classement des représentations données.

Mais il s'agit seulement de jeux "introductifs. Ils sont l'occasion de faire entrer progressivement en scène les éléments de représentations symbolique dans des conditions qui leur donnent un sens déterminé, mais il est supposé que ces représentations soient connues de Gaël et la situation donne un sens conventionnel. Par exemple l'intervenant va faire faire un tableau qui évidemment préfigure la numération et qui résoud ce problème,

dès l'essai suivant. Gaël sait parfaitement utiliser ce tableau d'ailleurs mais une partie du discours de l'intervenant va porter sur la justification du tableau qui va prendre ainsi une signification explicitée et convenue avec l'enseignant.

S'il avait attendu que Gaël se rende compte lui-même de la nécessité de faire un tel tableau et le propose, il est probable qu'il aurait été déçu : Gaël peut parfaitement se tirer d'affaire avec la notation même désordonnée du premier essai, il aurait fallu des conditions beaucoup plus dures (nombre de côté, élevé, grande fréquence des mouvements de pièces, nombres plus grands) pour justifier et provoquer l'invention d'une présentation de comptable. Le gain cognitif d'une telle situation aurait été bien faible par rapport à l'énergie et à la motivation qu'il aurait fallu y engloutir.

2ème essai.

L'intervenant propose à Gaël de décider à l'avance combien d'objets il va enlever du sac. Gaël retire 7 objets puis détermine très exactement la quantité d'éléments de chaque couleur restant dans le sac, en regardant les chiffres inscrits sur la feuille, auxquels il retranche les objets étalés sur la table.

L'intervenant lui propose ensuite une "façon d'écrire qui économise du temps" c'est-à-dire un tableau qui se présente ainsi :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout	9	10	6	10
Enlève				
Reste				

- Quand on compte tout, combien y a-t-il de bleus ? questionne l'intervenant

- 9

- Où vas-tu l'écrire ?

Gaël indique la case et complète ainsi toute la ligne, réalisant "l'économie d'écriture".

Cette séance, du point de vue didactique, est manifestement une phase de transition destinée à mettre en place le décor d'une nouvelle situation d'apprentissage. Le domaine de cette nouvelle situation est celui du jeu du marchand qui vend et qui réapprovisionne son magasin, il s'agit de tenir sa comptabilité, les règles sont, du côté de la comptabilité celles du jeu des paris où une stratégie de base a été utilisée plusieurs fois. L'objectif c'est une prévision correcte, les moyens de contrôles pouvant être l'inventaire ou seulement le "contrôle de la comptabilité" par addition et "balance", le tout plus ou moins fréquent. La méthode de solution visée comme but de l'apprentissage est le calcul de la soustraction ou l'addition à trou, Sur des nombres assez grands, cette méthode est bien meilleure, pour l'action, bien plus efficace que les stratégies actuellement parfaitement maîtrisées par Gaël au niveau de la preuve. Mais pour permettre des discussions justificatives le jeu comporte une surdétermination : la manière d'emballer les objets suit une règle qui pourra servir de modèle à la base 10. Il s'agit d'une numération hybride (de position mais avec des rapports différents entre les unités. Cette surdétermination didactique s'appuie sur des conventions un peu arbitraires mais justifiées. Mais de cette façon Gaël va devoir constamment faire des calculs de transformations d'unités.

Il est bien évident que toute cette période est une phase d'institutionnalisation didactique. Tout en simulant un jeu connu qui demande la participation de l'enfant à un niveau "subalterne" par rapport aux "nouveautés" introduites, le maître communique les règles d'un jeu nouveau... à venir. Dans les situations ordinaires en classe, le jeu ne vient jamais sinon sous la forme d'un très fermé exercice d'application.

Et Gaël ne s'y trompe pas, à mesure que le nombre des interventions didactiques augmente, il passe progressivement de son attitude vivante et souriante à une autre plus sérieuse, plus concentrée. Consciencieusement, il se met à la tâche. Appliqué mais toujours gentil et

.../...

même amical il entre dans sa position d'élève qui apprend sous la houlette de son maître. Il est temps de rompre ce contrat confortable et dangereux pour Gaël et d'échanger les positions de l'intervenant et de l'élève.

3. Jeu du menteur.

Ils renouvellent le jeu mais cette fois-ci c'est l'intervenant qui retire les objets du sac et, par ailleurs, il inclut un nouvel élément dans la règle : on joue au menteur. Comme Gaël ne sait pas de quoi il s'agit l'intervenant explique :

- "je vais retirer des objets, et quand j'auri fini je dirai : il y a tant de verts, tant de bleus, etc... (dans le sac), et si je me trompe, tu me dis "menteur". Si j'arrive à mentir, je gagne, mais si tu réussis à m'attraper quand je mens, tu gagnes !"

Ils font une première tentative ; l'intervenant sort un petit tas d'objets et affirme :

- "il reste 6 bleus dans le sac.

A sa demande, l'enfant écrit le chiffre sur le tableau et vérifie en comptant à rebours, partant de 10 et ôtant tous les objets bleus en vue. Il est d'accord avec le chiffre annoncé.

- "il reste 6 rouges déclare ensuite l'intervenant".

- "6 rouges, répète Gaël, 6, 7, 8, 9 (il rajoute les rouges étalés sur la table) : menteur !

Gaël a dit ce mot avec à la fois un peu de gêne et beaucoup de plaisir. Il sourit. Il lui a fallu de l'audace bien qu'il sache que la convention autorisait cette licence. Sous la fiction du jeu, Gaël rentre dans l'autre rôle, celui de cet interlocuteur : intérieur dont nous avons parlé. Il ne resterait plus qu'à laisser à Gaël le choix de la position pour obtenir quelque chose qui ressemblerait tout à fait au jeu de la bobine.

Vérification faite, oui Gaël a raison et l'intervenant est pris. Remarquons que son "erreur" était une malignité et pour Gaël la détection de cette erreur est devenue un jeu, une recherche de complicité et d'accord et non pas une agression. Il y a là plus qu'une nuance entre la

.../...

signification classique de l'erreur et celle symbolique, qu'elle prend ici. Peut-être plus tard Gaël pourra-t-il traquer lui-même ainsi sa propre "malignité".

Ils continuent de même avec les autres couleurs et l'enfant ne se trompe pas, mais au fur et à mesure, il n'a pas inscrit sur le tableau les objets enlevés et les objets restants. L'intervenant lui conseille de récapituler : pour les rouges, le chiffre annoncé était 6 et Gaël avait dit "menteur". A ce six, il rajoute les 3 qui sont sur la table, ce qui confirme son jugement. Mais ne sait plus comment faire pour obtenir 10 rouges en tout. Il faut l'aider :

- "Combien y en-a-t-il en tout ?
- 10
- Et là làmbien ? (sur la table)
- 3
- Alors il en reste...
- 7"

Remarquons aussi que si Gaël ne cesse pas de faire les "petites erreurs" que nous lui connaissons, l'intervenant se garde bien d'en faire le procès et se contente de les faire rectifier.

A mesure que la situation devient plus complexe et que les occasions d'examiner des différences ou d'effectuer des soustractions se multiplient, Gaël développe des stratégies qui vont servir de signifié à l'opération et les met en oeuvre avec de plus en plus de facilité. Ainsi, pour contrôler la validité de l'affirmation " $10-3 = 6$ ", il effectue $6 + 3 = 9$.

(Maintenant Gaël ne présente plus, comme auparavant, la même attitude d'échec face à la soustraction, cette sorte de refus qui semblait apparaître dans les premières séances. Il la manipule actuellement plus facilement, mais sans toutefois pouvoir toujours l'utiliser de façon systématique chaque fois que c'est nécessaire ou tout au moins plus utile. Ainsi, quand il a 10 et 3, il sait qu'il faut "faire 10-3" pour trouver ce qui "reste" (but de la soustraction), mais lorsqu'il avait 6, puis 9, et qu'il voulait 10, le problème lui semblait totalement différent).

L'intervenant lui fait ensuite compléter la

ligne des "enlevés" mais il se trompe et écrit 5 jaunes au lieu de 5 verts, ce que l'intervenant lui fait rectifier, avant de lui demander comment, si on n'avait pas rectifié, on se serait rendu compte de l'erreur.

Le tableau est le suivant :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout	9	10	6	10
Enlevés	3	3	1	5
Reste	6	7	5	5

Gaël n'arrive pas à fournir l'explication demandée, mais peut-être est-ce dû au fait qu'il a le tableau complet sous les yeux. Peut-être, s'il n'avait eu en vue que la colonne :

jaune
6
5
5

aurait-il pu justifier plus facilement l'erreur. Il faut donc lui donner la solution.

La vérification que nous signalions plus haut fonctionne implicitement, mais elle n'est pas perçue comme un fait par Gaël, elle n'est vraisemblablement pas susceptible d'être formulée par lui, et a fortiori il ne peut pas la mobiliser comme preuve, même à l'intention d'un interlocuteur bienveillant et attentif.

Ainsi, on comprend mieux pourquoi il était nécessaire que l'intervenant propose l'addition comme moyen de vérification de la soustraction - Gaël ne l'aurait probablement pas inventé.- pourquoi il n'était pas gênant de l'introduire puisque ce moyen n'était pas proposé comme objet à apprendre, qu'il avait un rôle et une signification évidents dans la situation et qu'il était donc seulement mis à la disposition de Gaël.

- et comment Gaël s'est approprié ce moyen et l'a intégré à ses procédures. Il suffira peut-être désormais de créer des situations favorables à cette explication pour voir évoquer les rapports entre l'addition et la soustraction. De telles situations supposent que l'on ait rejeté au moins provisoirement les moyens effectifs de preuve : le recours au dénombrement et par conséquent que l'on

.../...

opère sur les systèmes symboliques.

L'intervenant va s'employer immédiatement à préparer cette nouvelle phase en attestant la séparation entre le système des collections sur lesquelles on agit et celui des écritures avec lequel on parle de ce qu'il advient deux collections dans le premier. Cette "attestation" consiste à donner les moyens à Gaël et à lui-même de rappeler éventuellement cette situation plus tard.

4. Symbolisation par des étiquettes.

Ils en viennent à un nouveau jeu : des groupes d'objets sont figurés par des papiers. L'intervenant va mettre dans un sac des papiers qui représenteront les objets que Gaël mettra dans l'autre sac : par exemple, il écrit 6 verts sur un papier et Gaël met 6 objets verts dans le sac. Il fait ainsi un certain nombre de papiers

<u>verts</u> 6	<u>verts</u> 4	<u>rouges</u> 5	<u>rouges</u> 7	<u>verts</u> 3	<u>jaunes</u> 9	<u>jaunes</u> 3	<u>rouges</u> 5
-------------------	-------------------	--------------------	--------------------	-------------------	--------------------	--------------------	--------------------

et ils emplissent chacun leur sac, puis les échangent, Gaël tenant alors celui qui contient les papiers.

- "Est-ce que tu peux dire combien il y a d'objets rouges dans mon sac ?" demande l'intervenant. "Je ne te le laisse pas ouvrir, mais tu peux ouvrir le tien".

- Alors là c'est sûr que je sais ! répond Gaël en ouvrant son sac, souriant.

Il trouve un premier papier :

<u>rouges</u> 7

 et déclare :

- 7 rouges !
- C'est tout ?

Il vérifie alors tous les petits papiers et additionne les chiffres inscrits sur tous ceux indiquant la couleur rouge : $7 + 5 + 5 = 17$.

Il écrit 17 sous le tableau précédent, puis compte les autres couleurs et inscrit également le résultat trouvé :

	bleu	rouge	jaune	vert
Tout				
⋮				
	0	17	12	13

.../...

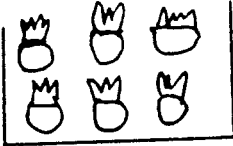

Lorsque l'intervenant lui demande s'il est sûr des résultats qu'il vient de trouver, l'enfant se montre un peu hésitant et préfèrerait vérifier. Ils recomptent tous les deux ensemble. Pour les verts, il explique: "6 et 3, 9. Et 4... Si on a 4, on enlève une unité (pour la rajouter à 9) ça fait 10 et comme là on en a enlevé une, ça fait 3, alors ça fait 13".

Puis l'intervenant écrit le nombre d'objets qu'il va enlever (théoriquement) : 10 de chaque couleur, et Gaël sans hésitations, trouve le nombre qu'il restera dans chaque série.

5. Présentation du jeu du marchand.

Plutôt qu'une autre manipulation, l'intervenant lui propose ensuite un nouveau dessin : il s'agit de sacs contenant 25 voitures, puis un carton de 6 sacs de 25 voitures. Il fait un tableau.

(Cette manipulation vise à introduire des variations de rapports didactiques avec Gaël, en lui donnant la possibilité de les contrôler, de maîtriser la situation).

 (cartons de 6 sacs)	 (sacs de 25 voitures)	(voitures seules)
2	5	0
	(17)	

"Dans une pièce, il y a 2 caisses, 5 sacs et 0 voiture seule. Combien y-a-t-il de sacs de voitures ?"

- 5, répond Gaël

- Il y a 5 sacs tout seuls, mais il y en a dans les cartons. Si on aligne tous les sacs, il y en a combien ?

Gaël trouve alors la solution, mais lorsque l'intervenant lui demande si le nombre de voitures a changé, il répond que oui... En fait, lorsqu'il explique sa réponse, il a plutôt voulu dire que c'est le nombre de sacs "sortis" qui a changé. Suit une explication de l'intervenant pour lui montrer que le nombre de sacs n'a pas changé, mais il pense

.../...

toujours qu'il n'y a plus le même nombre de voitures.

L'intervenant s'éloigne alors du sujet et termine la séance en le faisant compter à rebours, ou de 2 en 2, ... ce que Gaël réalise fort bien : (57, 56, 55...)
(0, 2, 4, 6, ...)

Comportements attendus au cours de ces situations : incertitude et connaissance.

Gaël répugne à renoncer aux charmes de l'incertitude. Pour comprendre COMMENT une telle attitude peut bloquer des acquisitions et comment les situations que nous proposons sont susceptibles d'opérer, il est utile d'examiner de plus près les rapports qui s'établissent entre connaissance et incertitude dans une situation d'enseignement.

Une connaissance se manifeste par une décision, ou plutôt par un choix entre plusieurs décisions, ou entre plusieurs opinions. Pour qu'un élève ait la possibilité de mettre en oeuvre une connaissance, il faut donc lui offrir des situations qui puissent avoir plusieurs issues selon les choix qu'il fera lui-même en fonction de ses connaissances. La signification de cette connaissance est faite comme nous l'avons dit de l'éventail des issues envisageables qu'elle a permis de rejeter. Lorsqu'une connaissance permet d'éliminer toutes les issues sauf une, elle permet une décision certaine. Mais il arrive que les connaissances du sujet laissent subsister plusieurs issues, avec peut-être quelques préférences qu'on peut traduire en probabilité de choisir chaque issue. Nous dirons alors que la situation présente pour le sujet une certaine incertitude, plus ou moins grande selon le nombre des issues et leur caractère d'égalité de probabilités. L'apprentissage d'une connaissance se manifeste par une diminution de l'incertitude dans les situations où elle est engagée (on peut même évaluer la quantité d'information que représente une connaissance par la variation d'incertitude qu'elle apporte).

En général, l'apprentissage se produit dans une situation, motivé par le désir du sujet de diminuer son incertitude.

Ainsi on peut comparer les situations didactiques à des jeux. Le maître communique à l'élève une situation problème qui met en scène les objets dont il s'agit et indique ce qui correspond aux règles : c'est-à-dire les moyens qu'il est permis d'utiliser pour obtenir tous les états possibles du jeu. Il fixe certains objectifs c'est-à-dire des résultats qu'il faut obtenir en agissant conformément aux règles avec explicitement ou implicitement, un enjeu. Bien sûr les caractères de ce jeu didactique peuvent beaucoup varier selon les sujets et les types de pédagogie choisis. En particulier selon que l'on considère que le maître doit préalablement communiquer les stratégies de résolution ou que c'est l'élève qui doit les produire comme moyen de s'adapter. Mais au bout du compte à un moment donné, l'activité de l'élève va consister, devant une situation problème qui présente a priori pour lui une certaine incertitude, à la réduire en choisissant une solution : L'élève ne fait pas de mathématiques s'il ne résout pas de problèmes.

Mais il serait faux de croire que l'acceptation des règles et la réduction de l'incertitude est la seule manifestation de la connaissance et de l'acquisition. L'augmentation de l'incertitude par la recherche de situations, de questions ou de règles nouvelles est un mouvement inverse qui répond dialectiquement au précédent.

Dans cette phase, la recherche de nouveaux problèmes répond à des motivations apparemment différentes.

Pour comprendre la profonde unité de cette quête des connaissances, examinons du côté du sujet la fonction à laquelle elle répond.

Tout d'abord l'absence d'incertitude ne peut pas être une position stable. D'une certaine façon, le sujet se définit, existe, a ses propres yeux, face à un milieu par les modifications qu'il lui fait subir. Un milieu qui ne lui donne aucune occasion d'action - c'est-à-dire de décision ou de choix, le nie en fait comme sujet autonome. C'est le cas en particulier des situations fermées. A l'inverse, mais pour la même raison, le choix purement aléatoire n'est pas une expression du sujet et ne lui donne pas non plus d'existence. On peut donc imaginer que le sujet recherche toujours des situations soit relativement ouvertes qu'il réduit par l'exercice de la création de connaissance et de son pouvoir de décision et d'action, soit relativement fermées et qu'il ouvre par la considération de nouvelles variables ou de nouvelles règles.

La psychanalyse donne une analyse plus profonde sur ce phénomène et permet de comprendre les rapports de la connaissance considérée comme objet symbolique avec les motivations du sujet.

Nous reviendrons au chapitre III sur le modèle de la chaîne du sens introduit FREUD (le jeu du Fört da) et repris par LACAN.

.../...

5. CONCLUSIONS DE L'ETUDE DU CAS DE GAËL

Il reste encore quatre séances où l'intervenant continue de lutter pour introduire de plus en plus de difficultés et pour mettre Gaël dans l'obligation de les surmonter. Chaque relation est gérée sur le même principe. Les progrès ne sont pas spectaculaires, mais il semble bien après coup que cette quatrième séance ait été décisive. La rencontre qui s'est nouée avec l'intervenant et une certaine prise de conscience des difficultés à éviter ont suffi à déclencher une nouvelle attitude chez Gaël.

La suite a montré que l'enfant s'est bien intégré dans sa classe et a rapidement comblé ses lacunes.

Les buts généraux des interventions étaient les suivants :

a) Dans un premier temps, établir un climat de confiance ; une relation duelle agréable et prenant néanmoins en compte les difficultés en cause.

b) Dans un deuxième temps, prendre appui sur cette relation pour proposer à Gaël des *situations didactiques* convenables où la connaissance n'est pas à prendre dans le discours ni dans le désir du maître, mais dans une relation avec le milieu. Ces interactions doivent être motivées par le désir de l'enfant lui-même et le conduire à prendre en charge les décisions spécifiques de la connaissance à maîtriser : tâtonner, décider, chercher...

c) Dans un troisième temps, par de nouvelles ruptures du contrat didactique il s'agit de le conduire à donner du « prix » à la vérité et à la préférer éventuellement au confort d'un consensus : à choisir par exemple la vérification, malgré l'angoisse de constater son erreur. Il ne s'agit évidemment pas de faire un discours moralisateur à ce sujet, mais d'obtenir ces comportements de manière effective. Nous avons cherché à l'habituer à se définir, à se reconnaître, à se plaire dans la position de constructeur de la connaissance et de responsable de sa conviction, devant les faits ou devant autrui. Nous avons voulu le conduire à ne plus vivre l'activité mathématique comme « la découverte de son erreur », « la reconnaissance de l'échec », « la mise en évidence de son péché », ou encore comme « le regard porté dans la chambre des parents » mais comme un exercice équilibrant, libérateur et fondateur du « moi ».

Ces formulations ne doivent pas tromper le lecteur, il ne s'agit pas de psychothérapie mais de didactique, c'est-à-dire d'activités spécifiques organisées intentionnellement en vue de l'acquisition des connaissances précises. Mais il faut être conscient de la dimension psychologique de ces interventions.

CONCLUSIONS DE L'APPROCHE CLINIQUE

Du point de vue des rééducations, si nous avons obtenu quelques succès (Gaël, Guillaume) ou demi-succès (Cyrille, Marc, Odile), nous avons eu aussi des échecs :

Jérôme : que nous avons suivi au cours de deux années (10 ans et 11 ans) et dont nous ignorions les activités nocturnes de prédélinquant et de jeune "caïd", et Nathalie : 10 ans elle aussi et qui terminait les séances rivée dans un mutisme buté et réprobateur.

Mais aucun caractère commun n'apparaissait entre tous ces cas, sinon peut-être l'importance de leurs problèmes psycho affectifs.

L'intervenant pris dans une relation difficile et les observateurs surpris par les échecs massifs de l'élève ont tendance à concentrer leur attention sur les caractéristiques de l'enfant et non pas sur les conditions des situations qu'ils affrontent.

. Situations a-didactiques.

En première approche pourtant nous avons remarqué deux types de réactions opposées qui nous ont paru importantes. Ces réactions ne peuvent s'observer que si l'enfant a accepté une activité où il engage sa responsabilité et où il peut savoir par lui-même s'il a réussi ou échoué. En constatant que les résultats ne sont pas conformes à leurs prévisions, certains enfants pâlisent et se troublent ; ils lisent ce résultat comme un échec personnel et prennent une attitude de découragement et de culpabilité. Même s'ils se remettent bravement au travail, leur comportement montre que la situation est vécue sur le mode introverti.

D'autres, au contraire, semblent s'éveiller soudain : il arrive quelque chose d'imprévu, d'intéressant ; l'échec personnel est dépassé, minimisé, au profit de la curiosité et de l'ouverture vers l'extérieur.

Ces deux façons opposées de réagir aux situations d'apprentissage (c'est-à-dire où la relation avec l'adulte n'est pas en cause directement), sont relativement stables chez les sujets, dans le temps, et dans des secteurs étendus de problèmes différents.

.../...

Les enfants en échec électif que nous avons rencontrés appartenaient tous à la première catégorie.

. Situations didactiques.

La deuxième remarque est venue en opposant les comportements de Gaël à ceux de Cyrille dans leurs rapports avec l'intervenant. Tous deux voulaient éviter une relation qu'ils vivaient comme conflictuelle. Mais ils le faisaient avec des stratégies diamétralement opposées. L'obligation de prendre la responsabilité de produire sa propre réponse à une question posée par un adulte est une expérience pénible pour les enfants en échec : il y a au moins deux manières de l'éviter :

L'une consiste à la prendre excessivement au sérieux, à la dramatiser autant que possible selon un mode que nous qualifierons métaphoriquement "d'obsessionnel" (type Cyrille). L'autre consiste au contraire à s'évader le plus possible en simulant plus ou moins adroitement une participation minimale (type Gaël).

Toute question met les enfants du premier type dans une situation inquiétante, même dangereuse, et les renvoie à la situation originelle. Pour échapper à cette grave agression, il faut qu'ils referment cette question tout de suite, n'importe comment, au besoin en l'ignorant totalement. En s'appuyant sur le contrat didactique, ils n'acceptent une question que s'ils ont déjà la réponse en leur possession. Ils exigent du professeur de transformer les solutions en algorithmes, d'avoir les critères d'emploi des algorithmes et des signes rassurants qu'ils sont en bonne voie..., l'assurance qu'en mémorisant tout ce qu'on a dit en classe, ils pourront immédiatement répondre à cette situation horrible. Et plus ils apprennent, et plus ils ont de réponses à produire et moins ils ont de chances de trouver la bonne...

Pour les autres, rien n'est grave, rien n'est sérieux, tout est théâtre. Dans les phases collectives, ils entrent dans le jeu, répondent avec les autres, prennent des risques, le professeur est convaincu que ce sont des enfants éveillés qui ont compris, peut-être même répondent-ils juste sur le moment, mais lorsqu'ils sont interrogés personnellement, par écrit par exemple, ils ne savent plus, ils n'ont pas appris, pas retenu, ils ne sont pas concernés, n'ont pas thésaurisé. Ils sont agréables et pas contrariants, mais ils ne sont pas là en personne et finalement n'apprennent pas.

.../..

Les uns et les autres à leur manière, évitent la confrontation avec la situation d'apprentissage.

Les premiers pèsent beaucoup, directement sur la gestion du contrat didactique et tendent rapidement à le pétrifier. Les seconds sont beaucoup plus difficiles à détecter dans les classes. Le professeur ne s'aperçoit souvent que trop tard que ces élèves "intelligents" et éveillés ont raté leur première composition, puis la seconde, etc... incompréhensiblement, ne savent rien.

Voici les conclusions provisoires qui pouvaient être tirées de ces travaux en 1980 :

" Le contrat didactique.

Au cours d'une séance ayant pour objet l'enseignement à un élève d'une connaissance déterminée (*situation didactique*), l'élève interprète la situation qui lui est présentée, les questions qui lui sont posées, les informations qui lui sont fournies, les contraintes qui lui sont imposées, en fonction de ce que le maître reproduit, consciemment ou non, de façon répétitive dans sa pratique de l'enseignement. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce qui, dans ces habitudes, est spécifique des connaissances enseignées : nous appelons « *contrat didactique* » l'ensemble des comportements (spécifiques) du maître qui sont attendus de l'élève et l'ensemble des comportements de l'élève qui sont attendus du maître.

Présent dans cette question, ce « contrat » régit les rapports du maître et de l'élève au sujet des projets, des objectifs, des décisions, des actions et des évaluations didactiques. C'est lui qui, à chaque instant, précise les positions réciproques des participants au sujet de la tâche et précise la signification profonde de l'action en cours, de la formulation ou des explications fournies ; « que faut-il savoir faire », « à quoi voit-on qu'on a réussi » que faut-il faire si on n'a pas réussi, qu'est-ce qu'il fallait savoir pour réussir, qu'est-ce qu'il faut dire, qu'est-ce qu'on aurait pu faire d'autre, qu'est-ce qui aurait été une erreur, qu'est-ce qu'il faut apprendre, comment apprendre, comment se rappeler, etc. C'est lui qui fixe explicitement le rôle de la connaissance, de l'apprentissage, de la mémoire, etc.

Il est la règle de décodage de l'activité didactique par laquelle passent les apprentissages scolaires. On peut penser qu'à chaque instant, les activités d'un

.../...

enfant dans un processus dépendent du *sens* qu'il donne à la situation qui lui est proposée, et que ce sens dépend beaucoup du résultat des actions répétées du contrat didactique.

Le contrat didactique se présente donc comme la trace des exigences habituelles du maître (exigences plus ou moins clairement perçues) sur une situation particulière. Ce qui est habituel ou permanent s'articule plus ou moins bien avec ce qui est spécifique de la connaissance visée ; certains contrats didactiques favoriseraient le fonctionnement spécifique des connaissances à acquérir et d'autres non, et certains enfants liraient ou non les intentions didactiques du professeur et auraient ou non la possibilité d'en tirer une formation convenable.

Est-ce que certains contrats didactiques n'empêcheraient pas certains enfants d'entrer dans le processus d'apprentissage [Q 5] ?

Les causes des échecs seraient alors à chercher dans le rapport de l'élève au savoir et aux situations didactiques et non dans ses aptitudes ou dans ses caractéristiques permanentes générales.

Ces contrats didactiques révèlent l'idée que se font les professeurs et les élèves du fonctionnement des mathématiques (de leur création, de leur usage, etc.). En choisissant une situation didactique (c'est-à-dire une situation problème, des objectifs pour l'élève, des informations, des objectifs pour le maître, etc.) pour enseigner une certaine connaissance, le professeur fabrique, qu'il le veuille ou non, une image souvent très déformée des situations réelles (culturelles, historiques, etc.) dans lesquelles fonctionne (a été découverte, utilisée) cette connaissance. Ce sont les circonstances dans lesquelles les connaissances sont employées qui leur donnent leur signification. Ainsi, une connaissance mathématique n'a pas la même signification pour un élève et pour un mathématicien. Nous appelons « *transposition didactique* » le passage de l'une à l'autre.

(*La théorie des situations didactiques* a pour objet de fournir les moyens de contrôler ces transpositions didactiques.) La transposition didactique dépend fondamentalement des conceptions qu'ont les professeurs au sujet de la pensée mathématique. Dans leur activité d'enseignement, les professeurs sont donc obligés d'utiliser de façon plus ou moins explicite une sorte de théorie de la connaissance, d'épistémologie des mathématiques. Ces conceptions, à usage strictement professionnel, n'ont généralement pas de caractère scientifique (ni même consistant), même si localement elles sont la trace de théories plus ou moins récentes. Nous appelons « *pensée mathématique scolaire* » ces pseudo-théories.

Le maître enseigne cette « philosophie » en même temps que les mathématiques et comme elle n'est pas une bonne description de l'appropriation des connaissances, peut-elle expliquer certains échecs ?

On trouve un bon exemple de telles erreurs dans le livre de M^{me} Jaulin-Mannoni (11), *Le Pourquoi en mathématiques*. La première partie est une théorie

très intéressante de la compréhension où l'on trouve beaucoup d'idées justes. La seconde présente des cas de rééducation — effort méritoire —, mais on voit par exemple comment un tel discours essaie de s'adapter, dans le cas de Nadine, à un parfait conditionnement. On trouvera l'analyse de cette rééducation dans ([2] 77 tome 3).

Toujours dans les travaux de ces trois dernières années, nous avons préparé la voie à l'étude de ces nouvelles hypothèses en prenant en compte l'ensemble de ces interactions et de ces systèmes et en utilisant des études théoriques des situations et des processus didactiques, et nous avons en particulier mis au point pour cela un matériel d'étude : « Les tours d'Haoï » ([2] 77 tome 2) et (9) (10).

En guise de conclusion.

Dans les observations dont nous venons de rendre compte, nous avons — comme la plupart des chercheurs qui nous avaient précédés — mis d'abord au premier plan le profil de l'élève et les facteurs personnels provoquant l'échec, ou liés à ses effets, cet échec étant presque toujours considéré comme un phénomène pathologique lié à l'élève.

Cette conception correspond bien à la plus forte *des trois modalités de réponses à l'échec* : dans la première les parents réagissent à l'inquiétude que leur causent les difficultés de leurs enfants par *des pressions* sur l'enfant lui-même : injonctions, sanctions diverses, cours particuliers, examens médico-psycho-pédagogiques, rééducation... De la même manière, les maîtres sont entraînés à réduire les insuffisances excessives par des interventions d'enseignement décidées en fonction d'objectifs à court terme tendant à imposer à l'enfant un itinéraire transparent aux contrôles. Les pressions sont d'autant plus fortes que l'élève a pu donner la preuve qu'il réussit bien dans d'autres matières.

Mais la mise en cause de l'élève est peut-être une entreprise aussi vaine que celle qui consisterait à analyser l'eau qui est sortie d'un seau percé pour voir en quoi elle diffère de l'eau qui est restée dans le seau. La mise en cause de l'institution scolaire, en tant qu'exécutant du contrat d'enseignement, des méthodes pédagogiques, des professeurs, de leur formation... constitue la seconde modalité. Nous avons montré l'intérêt que nous y prenons.

La troisième consiste en la remise en cause du contrat lui-même (pourquoi enseigner tant — ou si peu — de mathématiques, pourquoi la sélection par les mathématiques, pourquoi la sélection tout court, etc.).

Chacune de ces trois modalités de réponses sont aussi soutenues par des hypothèses sur différentes causes des échecs en mathématiques mais très peu sont accompagnées d'une méthode de recherche utilisable.

Je me suis longtemps demandé si ces hypothèses sur l'origine instrumentale de certaines difficultés en calcul n'étaient pas complaisamment accueillies principalement parce qu'elles justifiaient certaines interventions souhaitées des parents et probablement utiles aux enfants (pour d'autres raisons) mais lucratives pour d'autres. On peut de même s'étonner de la persistance et du retour périodique de déclarations tonitruantes manifestement fausses ou excessives imputant à l'école la responsabilité de phénomènes qui notoirement impliquent la société tout entière.

Aucune forme de difficultés scolaires ne semble provoquer autant de réactions passionnées ni susciter autant de préjugés que l'échec en mathématiques.

Curieusement, à côté d'une masse de publications et de textes d'opinion, la rareté des ouvrages objectifs est frappante, comme si la complexité de la tâche ou la résistance des forces à l'œuvre avaient inhibé toute recherche scientifique.

Il est vrai que les systèmes dont le fonctionnement ou le dysfonctionnement est susceptible de jouer un rôle dans ce phénomène sont nombreux, et en interactions complexes : l'enfant, les parents, les maîtres, l'école, la société, la discipline peuvent être impliqués au cours d'approches très diverses : cognitives, psychologiques voire psychanalytiques, pédagogiques ou sociologiques. Les enjeux économiques de ces relations sont parfois importants et ont contribué à développer un enchevêtrement de jugements de valeurs subjectifs qui égarent l'observateur.

Si cette complexité peut stimuler l'imagination des innovateurs désireux d'aider les enfants en difficulté ou des polémistes, elle peut légitimement décourager le chercheur qui peut redouter la stérilité d'une hypothèse trop restrictive ou les aléas d'un terrain en proie à l'idéologie.

Nous espérons toutefois que les recherches actuelles permettront bientôt d'orienter un peu le débat. "

Bibliographie.

1. Chauvet. Le Bars. Le Léon. — *Pédagogie moderne de la mathématique et dyscalculie*. Mémoire d'orthophonistes. Bordeaux, 1973.
2. *Etude de la détection des enfants en difficultés électives en mathématiques en vue d'analyses statistiques*. — Mémoires d'orthophonie dirigés par G. Brousseau. Institut de recherches sur l'enseignement des mathématiques. Université de Bordeaux I et Centre de phono-audiologie de Bordeaux II.
1976, tome 1 : Moras (F.), Molia (C.). — *Etude des échecs en mathématiques à travers quelques articles relatifs à la dyscalculie*.
1977, tome 1 : Berrocq-Irigoin (M.), Dupuch (M.-A.), Fruchard (C.). — *Elaboration d'un questionnaire*.
1977, tome 2 : Berrocq-Irigoin (M.), Dupuch (M.-A.), Fruchard (C.). — *Monographie d'un enfant en difficultés*.
1978, tome 1 : Dugué (C.). — *Etude critique de la détection dans le cadre de l'institution scolaire*.

Les échecs électifs en mathématiques

- 1978, tome 2 : Trolonge (D.). — *Comparaison des questionnaires aux maîtres et du test d'acquisition scolaire.*
- 1978, tome 3 : Chateau (F.). — *Analyse comparée et étude longitudinale du questionnaire.*
- 1978, tome 4 : Amirault (C.), Cheret (M.). — *Monographies de deux enfants en difficultés.*
- 1979, tome 1 : Mora (M.). — *Monographie de deux enfants en difficulté.*
- 1979, tome 2 : Bonaïs (M.). — *Détection des enfants en échec électif au CM1.*
3. Dugas et Guillaume. — Introduction à l'étude des difficultés en calcul chez l'enfant. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1970, n° 1-2.
4. Laffon. — *Vocabulaire de psychopédagogie et de psychiatrie de l'enfant.* Paris, P.U.F., 1963.
5. Gibello (B.). — Dysharmonies cognitives et dyscalculies. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1973, n° 6.
6. Hasaerts Van Gertruyden. — La dyscalculie chez l'enfant. Diagnostic différentiel. *Revue de neuro-psychiatrie infantile*, 1975, n° 10-11.
7. Bourrel (M.-J.). — *Echec en calcul à travers 570 dossiers. Place des troubles relationnels au père.* Mémoire pour le C.E.S. de psychiatrie.
8. Deveyle (P.), Frison (L.) et Gauthier (I.). — *Recherche d'une concordance entre l'échec en mathématiques et les résultats du bilan orthophonique (dyscalculie).* Mémoire pour le C.C. d'orthophonie, Lyon, 1973.
9. Eyraguibel (J.-), Brousseau (G.). — Appareillage de mesure automatique des stratégies d'apprentissage. Application à un jeu logique : les tours d'Hanoi. In : *Mesures - régulation automatisme*, n° 1, 1978.
10. Gabinski (P.), I.R.E.M. de Bordeaux. — *Etude sur des situations d'acquisition des modèles récursifs et l'appropriation du concept de récurrence : Etat des travaux (à paraître).*
11. Jaulin-Mannoni (F.). — *Le pourquoi en mathématiques.* E.S.F., 1978.

CHAPITRE III

FONDEMENTS ET METHODES DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

- . **Objet des études en didactique**
- . **Phénomènes de didactique**
- . **Eléments pour une modélisation**
- . **Cohérence et incohérences de la modélisation
envisagée : les paradoxes du contrat didactique**
- . **Modélisation des situations didactiques**

"La didactique des mathématiques" étudie les activités didactiques, c'est-à-dire les activités qui ont pour objet l'enseignement, évidemment dans ce qu'elles ont de spécifique aux mathématiques.

Les résultats, dans ce domaine, sont de plus en plus nombreux ; ils portent sur les comportements cognitifs des élèves, mais aussi sur les types de situations mis en oeuvre pour leur enseigner et sur tous les phénomènes auxquels la communication du savoir donne lieu. La production ou l'amélioration de moyens d'enseignement trouve dans ces résultats bien plus que des objectifs ou des moyens d'évaluation, elle y trouve un appui théorique, des explications, des moyens de prévision et d'analyse, des suggestions, voire des dispositifs et des méthodes.

OBJET DES ETUDES EN DIDACTIQUE

Quel est l'objet de ces études ? Un examen même très superficiel permettra de mieux en comprendre l'intérêt et même la nécessité.

Le savoir mathématique et la transposition didactique.

Le savoir constitué se présente sous des formes diverses, par exemple sous forme de questions et de réponses. La présentation axiomatique est une présentation classique des mathématiques.

En plus des vertus scientifiques qu'on lui connaît, elle paraît merveilleusement adaptée à l'enseignement. Elle permet à chaque instant de définir les objets que l'on étudie à l'aide des notions précédemment introduites et, ainsi, d'organiser l'acquisition de nouveaux savoirs à l'aide des acquisitions antérieures. Elle promet donc à l'étudiant et à son professeur un moyen d'ordonner leur activité et d'accumuler dans un minimum de temps un maximum de "savoirs" assez proches du "savoir savant". Evidemment, elle doit

être complétée par des exemples et des problèmes dont la solution exige leur mise en oeuvre.

Mais cette présentation efface complètement l'histoire de ces savoirs, c'est-à-dire la succession des difficultés des questions qui ont provoqué l'apparition des concepts fondamentaux, leur usage pour poser de nouveaux problèmes, l'intrusion de techniques et de questions nées des progrès des autres secteurs, le rejet de certains points de vue trouvés faux ou maladroits, et les innombrables querelles à leur sujet. Elle masque le "vrai" fonctionnement de la science, impossible à communiquer et à décrire fidèlement de l'extérieur, pour mettre à sa place une genèse fictive. Pour en rendre plus facile l'enseignement, elle isole certaines notions et propriétés du tissu d'activités où elles ont pris leur origine, leur sens, leur motivation et leur emploi. Elle les transpose dans le contexte scolaire. Les épistémologues appellent **transposition didactique** cette opération. Elle a son utilité, ses inconvénients et son rôle, même pour la construction de la science. Elle est à la fois inévitable, nécessaire et en un sens, regrettable. Elle doit être mise sous surveillance.

Le travail du mathématicien

- Avant de communiquer ce qu'il pense avoir trouvé, un chercheur doit d'abord le déterminer : il n'est pas facile de distinguer, dans le labyrinthe des réflexions, celles qui sont susceptibles de devenir un savoir nouveau et intéressant pour les autres ; les démonstrations obtenues sont rarement celles des conjectures envisagées ; tout un réaménagement des connaissances voisines, antérieures ou nouvelles, doit être entrepris.

- Il faut aussi supprimer toutes les réflexions inutiles, la trace des erreurs commises et des cheminements erratiques. Il faut cacher les raisons qui ont conduit dans cette direction et les conditions personnelles qui ont présidé à la réussite, problématiser habilement les remarques même un peu banales, mais éviter les trivialités... Il faut encore chercher la théorie la plus générale dans laquelle les résultats restent valables... Ainsi, le producteur du savoir dépersonnalise et décontextualise le plus possible ses résultats.

.../...

- Ce travail est indispensable pour que le lecteur puisse prendre connaissance de ces résultats et se convaincre de leur validité sans faire lui-même le même cheminement pour leur découverte, tout en bénéficiant des possibilités qu'ils offrent pour leur utilisation.

- D'autres lecteurs alors, transforment à leur tour ces résultats, les reformulent, les appliquent, les généralisent, si tels sont leurs besoins. Ils les détruisent à l'occasion, soit en les identifiant à des savoirs déjà connus, soit en les incluant dans des résultats plus forts, en les oubliant simplement... et voire en les montrant faux. Ainsi l'organisation des connaissances dépend, dès leur origine, des exigences imposées à leur auteur par leur communication. Elle ne cesse pas d'être ensuite modifiée pour les mêmes motifs au point que leur sens change assez profondément : la transposition didactique se déroule en grande partie dans la communauté scientifique et se poursuit dans les milieux cultivés (la noosphère plus exactement). Le fonctionnement de cette communauté est basé sur les rapports qu'entretiennent l'investissement et la reprise personnels et contextuels de questions mathématiques et le rejet de cet investissement pour la production d'un texte du savoir aussi objectif que possible.

Le travail de l'élève.

Le travail intellectuel de l'élève doit être par moments comparable à cette activité scientifique. Savoir des mathématiques, ce n'est pas seulement apprendre des définitions et des théorèmes, pour reconnaître l'occasion de les utiliser et de les appliquer ; nous savons bien que faire des mathématiques implique que l'on s'occupe des problèmes. On ne fait des mathématiques que lorsqu'on s'occupe de problèmes mais on oublie parfois que résoudre un problème n'est qu'une partie du travail ; trouver de bonnes questions est aussi important que leur trouver des solutions. Une bonne reproduction par l'élève d'une activité scientifique exigerait qu'il agisse, qu'il formule, qu'il prouve, qu'il construise des modèles, des langages, des concepts, des théories, qu'il les échange avec d'autres, qu'il reconnaisse celles qui sont conformes à la culture, qu'il lui emprunte celles qui lui sont utiles, etc...

.../...

- Pour rendre possible une telle activité, le professeur doit donc imaginer et proposer aux élèves des situations qu'ils puissent vivre et dans lesquelles les connaissances vont apparaître comme la solution optimale et découvrable aux problèmes posés.

Le travail du professeur.

Le travail du professeur est dans une certaine mesure inverse du travail du chercheur, il doit produire une **recontextualisation** et une **repersonnalisation** des connaissances. Elles vont devenir la connaissance d'un élève, c'est-à-dire une réponse assez naturelle, à des conditions relativement particulières, conditions indispensables pour qu'elles aient un sens pour lui. Chaque connaissance doit naître de l'adaptation à une situation spécifique, car on ne crée pas les probabilités dans le même genre de contexte et de rapports avec le milieu que ceux dans lesquels on invente ou utilise l'arithmétique ou l'algèbre.

- Le professeur doit donc simuler dans sa classe une micro-société scientifique s'il veut que les connaissances soient des moyens économiques pour poser de bonnes questions et pour trancher des débats, s'il veut que les langages soient des moyens de maîtriser des situations de formulation et que les démonstrations soient des preuves.

- Mais il doit aussi donner les moyens à ses élèves de retrouver dans cette histoire particulière qu'il leur a fait vivre, ce qu'est le **devoir** culturel et communicable qu'on a voulu leur enseigner. Les élèves doivent à leur tour **redécontextualiser** et **redépersonnaliser** leur savoir et ceci de façon à identifier leur production avec le savoir qui a cours dans la communauté scientifique et culturelle de leur époque.

- Bien sûr, il s'agit d'une simulation, qui n'est pas plus la "vraie" activité scientifique que le savoir présenté de façon axiomatique n'est pas le "vrai" savoir.

.../...

Quelques questions préliminaires naïves et fondamentales

Cette évocation de la communication du savoir paraît assez classique. Elle appelle pourtant quelques remarques et soulève des questions intéressantes.

- Tout d'abord, l'accent y est mis fortement sur toutes les activités sociales et culturelles qui conditionnent la création, l'exercice et la communication du savoir et des connaissances.

- L'approche classique considère comme centrale l'activité cognitive du sujet qui doit d'abord être décrite et comprise de façon relativement indépendante. Elle suppose ensuite, au moins implicitement, que les connaissances sur la connaissance nécessaires à l'enseignement, doivent d'abord s'établir elles aussi de façon indépendante, par exemple, par la mathématique et l'épistémologie. Il en est de même pour les connaissances sur les rapports sociaux spécifiques de l'éducation, etc... L'approche classique consiste alors à tirer des conséquences pour l'enseignement de ces savoirs préalables: Elle le fait directement, c'est-à-dire avec le seul appui de réflexions "naïves".

- Il y a là plus qu'une nuance : les savoirs importés de disciplines fondamentales permettent-ils à eux seuls, sans modifications et indépendamment les uns des autres, d'expliquer des phénomènes d'enseignement et de produire de façon contrôlée des modifications désirées ? Faut-il, au contraire, créer des concepts nouveaux, un champ de connaissances et de méthodes proches pour étudier les situations didactiques ?

- Une des hypothèses fondamentales de la didactique consiste à affirmer que seule l'étude globale des situations qui président aux manifestations d'un savoir, permet de choisir et d'articuler les connaissances d'origines différentes, nécessaires pour comprendre les activités cognitives du sujet, ainsi que la connaissance qu'il utilise et la façon dont il la modifie.

- Une deuxième hypothèse, plus forte, consiste à dire que l'étude première des situations (didactiques) devrait finalement

.../...

permettre de dériver ou de modifier les concepts nécessaires actuellement importés des autres champs scientifiques :

- Existe-t-il une "variété didactique" des concepts de sens, de mémoire, de structure, de décimal, etc., inconnue en linguistique, en psychologie ou en mathématique ?

- L'enseignement, lui aussi, est conçu comme un projet social : celui de faire approprier à un élève un savoir constitué ou en voie de constitution. Ce point de vue remet au centre des préoccupations d'enseignement les débats culturels et politiques sur le savoir mais en les traitant plutôt comme des objets d'études faisant partie des situations, que comme des préalables philosophiques.

- L'apprentissage n'est-il pas un acte essentiellement individuel ? Est-il nécessaire de le replacer dans un contexte aussi vaste pour le comprendre ? L'enseignement individuel n'est-il pas une sorte de condition optimale que seules des conditions économiques empêchent de réaliser ?

- Même en admettant que des savoirs sur les situations de mise en oeuvre, d'appropriation et d'enseignement des connaissances peuvent jouer un certain rôle technique, en tant que moyen pour l'enseignement, il reste une question importante : une fois élevé au rang d'objets culturels, ces savoirs ne vont-ils pas perturber profondément la communication et peut-être même la construction du savoir ? Ce dernier est fondé, nous l'avons vu, sur le rejet et l'oubli des circonstances qui l'ont provoqué.

- Pourquoi la possession du savoir lui-même, jointe à des connaissances générales de sciences humaines, à un peu de bon sens et bien sûr, à des qualités pédagogiques qu'aucun enseignement ne saurait vraiment développer, ne suffirait-elle pas pour tous les professeurs, avec tous les élèves, comme elle le fait avec quelques-uns ?

Ensuite, on peut se demander dans quelle mesure cette référence au fonctionnement de la recherche est bien nécessaire et pertinente pour l'étude de l'apprentissage et surtout de l'enseignement.

.../...

Jusqu'à quel point y a-t-il une ressemblance et sous quelles conditions ?

Il semble qu'une bonne théorie épistémologique accompagnée d'une bonne ingénierie didactique soient indispensables pour répondre à ces questions.

La didactique étudie la communication des savoirs et tend à théoriser son objet d'étude, mais elle ne peut relever ce défi qu'à deux conditions :

- *mettre en évidence des phénomènes spécifiques que les concepts originaux qu'elle propose paraissent expliquer.*
- *indiquer les méthodes de preuves spécifiques qu'elle utilise pour cela.*

Ces deux conditions sont indispensables pour que la didactique des mathématiques puisse connaître de façon scientifique son objet d'étude et donc permettre des actions contrôlées sur l'enseignement.

PHENOMENES DE DIDACTIQUE

Des phénomènes liés au contrôle de la transposition didactique ont pu être mis en évidence dans des cadres très différents : le même phénomène peut régir l'intimité d'une leçon particulière ou concerner toute une communauté pendant des générations.

- Identifier ces phénomènes revient à construire un "modèle" des protagonistes en présence, des relations et des contraintes qui les lient et à montrer que le jeu de ces contraintes produit bien des effets et le déroulement observés.

- Il est plus commode dans un texte relativement court de prendre des exemples déjà connus des lecteurs que d'exposer dans leur complexité les cas réellement traités.

L'effet "Topaze" et le contrôle de l'incertitude.

La première scène du célèbre "Topaze" de Marcel Pagnol illustre un des processus fondamentaux : Topaze fait une dictée à

.../...

un mauvais élève. Ne pouvant accepter trop d'erreurs trop grossières et ne pouvant pas non plus donner directement l'orthographe demandée il "suggère" la réponse en la dissimulant sous des codages didactiques de plus en plus transparents : "...des moutons étaient réunis dans un parc..." il s'agit d'abord pour l'élève d'un problème d'orthographe et de grammaire..." des moutonsses étai-hunt... le problème est complètement changé ! Devant les échecs répétés, Topaze mendie une marque d'adhésion et négocie à la baisse les conditions dans lesquelles l'élève finira par mettre ce "s". On devine qu'il pourrait continuer en exigeant la récitation de la règle, puis en la faisant copier un certain nombre de fois. L'effondrement complet de l'acte d'enseignement est représenté par un simple ordre : mettez un "s" à "moutons" : le professeur a fini par prendre à sa charge l'essentiel du travail.

- La réponse que doit donner l'élève est déterminée à l'avance, le maître choisit les questions auxquelles cette réponse peut être donnée. Evidemment les connaissances nécessaires pour produire ces réponses changent leur signification aussi. En prenant des questions de plus en plus faciles, il essaie d'obtenir la signification maximum pour le maximum d'élèves. Si les connaissances visées disparaissent complètement : c'est "l'effet Topaze". Le contrôle du sens à travers les changements de questions est sous le contrôle des connaissances des maîtres dans la discipline enseignée mais le choix des situations d'apprentissage et leur gestion habituellement laissés au "bon sens" des professeurs sont actuellement l'objet d'actives recherches tant théoriques que d'ingénierie didactique.

L'effet "Jourdain" ou le malentendu fondamental.

L'effet "Jourdain" - ainsi nommé par référence à la scène du "Bourgeois Gentilhomme" où le maître de philosophie révèle à Jourdain ce que sont la prose ou les voyelles - est une forme d'effet Topaze.

Le professeur, pour éviter le débat de connaissance avec l'élève et éventuellement le constat d'échec, admet de reconnaître l'indice d'une connaissance savante dans les comportements ou dans

.../...

les réponses de l'élève, bien qu'elles soient en fait motivées par des causes et des significations banales.

Tout le comique de la scène est basé sur le ridicule de cette sacralisation répétée d'activités familières dans un discours savant.

Exemple : L'élève à qui l'on faisait faire des manipulations un peu étranges avec des pots de yaourt ou des images colorées se voyait déclarer "tu viens de découvrir un groupe de Klein".

- D'une façon moins grossière, le désir d'insérer la connaissance dans des activités familières peut conduire le professeur à substituer à la problématique véritable et spécifique, une autre, par exemple métaphorique ou métonymique et qui ne donne pas un sens correct à la situation. Souvent les deux problématiques sont présentes, juxtaposées et le professeur essaie d'obtenir "le meilleur" compromis.

- Certaines méthodes pédagogiques axées sur les préoccupations de l'enfant provoquent souvent cet effet, mais la réforme des années 60 et l'usage des structures mathématiques qu'elles ont proposé ont été évidemment aussi une puissante incitation à ce jeu.

- En même temps, l'idéologie structuraliste lui offrait une justification épistémologique. Il s'agit alors d'un double effet "Jourdain" : le premier au niveau des relations de l'élève avec le professeur : l'élève traite un exemple et le maître y voit la structure. Le second au niveau des relations des didacticiens ou des mathématiciens avec le professeur. Les premiers plaquent une justification philosophique et scientifique sur la pratique du second et la sacralisent, la reconnaissance de la structure est l'activité scientifique.

.../...

Le glissement métacognitif⁽¹⁾

Lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, le professeur peut être conduit à se justifier et pour continuer son action, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique.

- Cet effet peut se composer plusieurs fois, concerner toute une communauté et constituer un véritable processus échappant au contrôle de ses acteurs. L'exemple le plus frappant est probablement celui qui concerne l'usage des graphes dans les années 60 pour enseigner les structures, méthode à laquelle s'est attaché le nom de G. PAPY.

- A la fin des années trente, la théorie des ensembles quitte sa fonction scientifique initiale pour devenir moyen d'enseignement afin de satisfaire les besoins qu'ont les professeurs d'une métamathématique et d'un formalisme fondamental. De ce fait, ils sont obligés d'inviter des étudiants à un contrôle sémantique de cette théorie (dite alors "naïve"). Pour éviter les erreurs, il ne suffit pas d'appliquer des axiomes, il faut savoir de quoi on parle et connaître les paradoxes attachés à certains usages pour les éviter. Ce contrôle diffère assez du contrôle mathématique habituel, plus "syntaxique". Cet usage déjà didactique de la théorie des ensembles rendra possible pour les autres théories un exposé axiomatique dont la négociation sera plus classique.

- Ce moyen d'enseignement devient l'objet d'enseignement pour des enfants de plus en plus jeunes. Le contrôle sémantique est confié à un "modèle" qui remonte à Euler⁽²⁾⁽³⁾ et qui fait appel à des graphes divers. Le "modèle" n'est alors qu'un moyen d'enseignement métaphorique car il n'est pas en fait un modèle correct. Mais par le fait des difficultés d'enseignement, ce moyen devient à son tour objet d'enseignement et se surcharge de conventions, de langages spécifiques à leur tour enseignés et expliqués à chaque étape de diffusion. Dans ce processus, plus l'activité d'enseignement produit de commentaires et de conventions, moins les étudiants peuvent contrôler les situations qui leur sont proposées.

(1) cf. article ANNEXE 2

(2) Lettres à une Princesse d'Allemagne

(3) cercles d'Euler, diagrammes de Venn, "patates" de Papy

● C'est l'effet de "glissement métacognitif". Il serait naïf de croire que le bon sens aurait permis d'échapper aux conséquences assez extravagantes auxquelles ce processus a conduit. La force des effets didactiques est incoercible dès lors que le professeur ne peut se soustraire à l'obligation d'enseigner coûte que coûte. Plus le public engagé dans la négociation est vaste et plus le processus échappe au contrôle "naïf".

D'ailleurs le bon sens, comme n'importe quel autre facteur correcteur, ne peut jouer un rôle dans les processus sociaux sans la médiation d'une structure sociale adéquate. Il existe des preuves que ce type "d'erreurs" n'est pas l'effet de la bêtise ni dans la plupart des cas celui de l'ignorance de la discipline mathématique ; il l'est à peu près dans la mesure où la maladie est imputable à des erreurs de comportement - "s'il est permis d'utiliser une métaphore hardie.

L'usage abusif de l'analogie

L'analogie est un excellent moyen heuristique lorsqu'elle est utilisée sous la responsabilité de celui qui en fait usage. Mais son utilisation dans la relation didactique en fait un redoutable moyen de produire des effets "Topaze". C'est pourtant une pratique naturelle : si des élèves ont échoué dans leur apprentissage, il faut leur donner une nouvelle chance sur le même sujet. Ils le savent. Même si le professeur dissimule le fait que le nouveau problème ressemble à l'ancien, les élèves vont chercher - c'est légitime - les ressemblances pour transporter - toute faite - la solution qu'on leur a déjà donnée. Cette réponse ne signifie pas qu'ils la trouvent idoine pour la question posée mais seulement qu'ils ont reconnu à des indices, peut-être tout à fait exogènes et non contrôlés, que le professeur voulait qu'ils la produisent.

o Ils obtiennent la solution par une lecture des indications didactiques et non pas un investissement du problème. Et ils y ont intérêt car après plusieurs échecs sur des problèmes semblables mais non identifiés, non reconnus, le professeur s'appuiera sur ces analogies soudain renouvelées, pour reprocher à l'élève sa

.../...

résistance opiniâtre (cet effet est utilisé par R. DEVOS dans son sketch des deux bouts d'un bois). "Ça fait un bout de temps que je vous le dis !"

Le vieillissement des situations d'enseignement

Le professeur rencontre des difficultés à reproduire la même leçon, bien qu'il s'agisse de nouveaux élèves : la reproduction exacte de ce qu'il a dit ou fait précédemment n'a pas le même effet et le plus souvent les résultats sont moins bons, mais il éprouve aussi et peut-être par conséquent, une certaine réticence à cette reproduction. Il éprouve un besoin assez fort de changer au moins la formulation de son exposé ou de ses instructions, les exemples, les exercices, et si possible la structure même de la leçon. Ces effets augmentent avec le nombre des reproductions et sont d'autant plus forts que la leçon comprend plus d'interactions entre le maître et l'élève : les leçons comprenant un exposé suivi d'exercices ou une simple instruction suivie d'une situation d'apprentissage ne demandant pas d'intervention du professeur vieillissent moins vite. Cet effet a été observé directement à l'Ecole Jules Michelet de Talence dans de nombreux cas où les maîtres étaient engagés à reproduire une leçon déterminée. Mais les efforts de renouvellement tentés par les enseignants dans le cas où ils sont libres dans leur travail sont un indice aussi sûr et aisément observables.

Ce phénomène, comme les précédents, peut être observé au niveau d'une classe mais aussi dans l'ensemble du système éducatif et entre autres partenaires : les programmes et les instructions ministérielles (ou les curricula dans d'autres pays) sont le moyen à peu près unique d'explicitation des exigences didactiques du corps social envers les professeurs et le moyen de convenir de la répartition des tâches entre eux.

En regard de la complexité des mécanismes à contrôler, ces textes généralement assez courts et qui doivent laisser ouvert l'essentiel des questions pertinentes apparaissent comme tout-à-fait inadéquats. Leurs modifications périodiques apparaissent, elles, complètement dérisoires, qu'on les compare entre elles ou qu'on

.../...

les compare à l'importance que semblent leur accorder les professeurs et l'administration. Les textes pour l'école primaire, depuis les années 1890, n'offrent que des différences minimales sur l'essentiel et ne diffèrent que sur des nuances.

Les modifications de programmes sont l'objet de projections des désirs des professeurs pour le renouvellement de leurs situations didactiques en réponse au vieillissement de leur cours.

La disproportion énorme entre cet investissement de la nouveauté et la stabilité étonnante des pratiques d'enseignement est aussi un indice des contraintes qui interviennent dans la régulation du vieillissement : le temps de réponse à toute modification du système éducatif est très élevé et les rétroactions très faibles et aléatoires. La meilleure garantie contre la dérive est donc une inertie importante. Mais l'activité d'enseignement elle-même réclame un investissement personnel intense de la part du professeur et cet investissement ne peut se maintenir que s'il est renouvelé. La reproduction exige donc un certain renouvellement qui risque de compromettre les reproductions futures. Les moyens de l'équilibre n'étant pas connus, le système tend à faire porter le renouvellement sur des facteurs qui n'ont pas beaucoup d'influence sur l'objet principal de l'enseignement : les modifications de programmes obéissent à des processus semblables à ceux de la mode par rapport à l'habillement.

Cette question du vieillissement et de l'effet du temps didactique^(*) soulève une question essentielle pour la didactique : Qu'est-ce qui est réellement reproduit au cours d'une leçon ? Un professeur qui reproduit la même histoire, la même succession des mêmes activités et des mêmes déclarations de sa part et de la part des élèves, a-t-il reproduit le même fait didactique qui ont produit les mêmes effets du point de vue du sens ?

.../...

(*) L'objet de recherches de Y. CHEVALLARD et A. MERCIER

Cette question est étudiée dans l'article "Didactique des décimaux": l'obsolescence des situations, puis reprise par M. ARTIGUE dans sa thèse sur la reproductibilité.

Il n'existe pas de moyen naïf de différencier une bonne reproduction d'une leçon - qui donne dans les mêmes conditions un déroulement identique et aussi un même sens aux connaissances acquises par l'élève - d'une mauvaise reproduction de cette leçon - qui dans les mêmes conditions, donne un "déroulement" identique mais un sens différent aux connaissances acquises. Dans le deuxième cas, la similitude du déroulement est obtenue par des interventions discrètes mais répétées du professeur qui transforment toute la situation sans affecter apparemment son "histoire".

Savoir ce qui est reproduit dans une situation d'enseignement est justement l'objet de la didactique, ce n'est pas un résultat d'observation, mais celui d'une analyse s'appuyant sur la connaissance des phénomènes qui définissent ce qu'ils laissent invariant.

ELEMENTS POUR UNE MODELISATION

Ces différents phénomènes peuvent être observés aussi bien dans des relations particulières entre deux personnes que dans des relations beaucoup plus complexes impliquant des organismes et des centaines de personnes.

Est-il possible de "modéliser" tout un système éducatif par un système "enseignant" défini par quelques-unes des relations qu'il entretient avec un système "enseigné" qui représente lui, des centaines d'élèves dont la diversité semble justement la première source des difficultés des enseignants. C'est un pari incontournable du processus de théorisation.

Les problèmes que soulèvent les approches systémiques dont cette méthode se rapproche seront discutés dans le paragraphe 5.

La forme dans laquelle nous avons décrit rapidement ces phénomènes prépare leur modélisation. Il s'agit maintenant d'identifier les relations fondamentales qu'il faut retenir.

Il convient toutefois de s'abstenir encore d'une formalisation excessive et prématurée. Une formulation plus rigoureuse interviendra à une étape ultérieure.

Situation didactique, situation a-didactique

Dans la conception la plus générale de l'enseignement, le savoir est une association entre les bonnes questions et les bonnes réponses. L'enseignant pose un problème que l'élève doit résoudre : si l'élève répond, il montre par là, qu'il sait, sinon, se manifeste un besoin de savoir qui appelle une information, un enseignement. A priori, toute méthode qui permet de mémoriser les associations favorables est acceptable.

La maïeutique socratique limite ces associations à celles que l'élève peut effectuer lui-même. Cette restriction a pour objet de garantir la compréhension du savoir par l'élève, puisqu'il le produit. Mais on est alors conduit à supposer que l'élève possédait déjà ce savoir, soit qu'il l'ait depuis toujours (réminiscence), soit qu'il le construise lui-même par son activité propre et isolée. Tous les procédés où le maître ne donne pas lui-même la réponse, sont acceptables pour accoucher l'élève de ce savoir.

Le schéma socratique peut être perfectionné si on suppose que l'élève est capable de tirer son savoir de ses propres expériences, de ses propres interactions avec son milieu, même si ce milieu n'est pas organisé à des fins d'apprentissage : l'élève apprend en regardant le monde (hypothèse empiriste-sensualiste) ou en faisant des hypothèses parmi lesquelles son expérience lui permet de choisir (hypothèses a-prioristes) ou encore dans une interaction plus complexe faite d'assimilations et d'accommodations telles que PIAGET les décrit.

L'élève apprend en s'adaptant à un milieu qui est facteur de contradictions, de difficultés, de déséquilibres, un peu comme le fait la société humaine. Ce savoir, fruit de l'adaptation de l'élève, se manifeste par des réponses nouvelles qui sont la preuve de l'apprentissage.

Ce processus psycho-génétique piagétien est à l'opposé du dogmatisme scholastique. L'un ne semble rien devoir à l'intention didactique, alors que l'autre lui doit tout. En attribuant à l'apprentissage "naturel" ce qui repose sur l'art d'enseigner selon le dogmatisme, la théorie de PIAGET risque de soulager le maître de toute responsabilité didactique : ceci constitue un paradoxal retour à une sorte d'empirisme ! Mais un milieu sans intentions didactiques est manifestement insuffisant à induire chez l'élève toutes les connaissances culturelles que l'on souhaite qu'il acquière.

La conception moderne de l'enseignement va donc demander au maître de provoquer chez l'élève les adaptations souhaitées, par un choix judicieux, des "problèmes" qu'il lui propose. Ces problèmes, choisis pour que l'élève puisse les accepter doivent le faire agir, parler, réfléchir, évoluer de son propre mouvement. Entre le moment où l'élève accepte le problème comme sien et celui où il produit sa réponse, le maître se refuse à intervenir comme proposeur de connaissances qu'il veut voir apparaître. L'élève sait bien que le problème a été choisi pour lui faire acquérir une connaissance nouvelle mais il doit savoir aussi que cette connaissance est entièrement justifiée par la logique interne de la situation et qu'il peut la construire sans faire appel à des raisons didactiques. Non seulement il le peut, mais il le doit aussi car il n'aura véritablement acquis cette connaissance que lorsqu'il sera capable de la mettre en oeuvre de lui-même dans des situations qu'il rencontrera en dehors de tout contexte d'enseignement et en l'absence de toute indication intentionnelle. Une telle situation est appelée situation a-didactique^(*). Chaque

(*) En ce sens que disparaît d'elle l'intention d'enseigner (elle est toujours spécifique du savoir). Une situation pédagogique non spécifique d'un savoir ne serait pas dit a-didactique mais seulement non didactique.

connaissance peut se caractériser par une ou des situations a-didactiques qui en préserve le sens et que nous appellerons situation fondamentale. Mais l'élève ne peut pas résoudre d'emblée n'importe quelle situation a-didactique, le maître lui en ménage donc qui sont à sa portée. Ces situations a-didactiques aménagées à des fins didactiques déterminent la connaissance enseignée à un moment donné et le sens particulier que cette connaissance va prendre du fait des restrictions et des déformations ainsi apportées à la situation fondamentale.

Cette situation ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation a-didactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible. Pour cela, il communique ou s'abstient de communiquer, selon le cas, des informations, des questions, des méthodes d'apprentissage, des heuristiques, etc... L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation plus vaste est la situation didactique.

L'élève ne distingue pas d'emblée, dans la situation qu'il vit, ce qui est d'essence a-didactique et ce qui est d'origine didactique. La situation a-didactique finale de référence, celle qui caractérise le savoir, peut être étudiée de façon théorique mais, dans la situation didactique, pour le maître comme pour l'élève, elle est une sorte d'idéal vers lequel il s'agit de converger : l'enseignant doit sans cesse aider l'élève à dépouiller dès que possible la situation de tous ses artifices didactiques pour lui laisser la connaissance personnelle et objective.

Le contrat didactique est la règle du jeu et la stratégie de la situation didactique. C'est le moyen qu'a le maître de la mettre en scène. Mais l'évolution de la situation modifie le contrat qui permet alors l'obtention de situations nouvelles. De la même façon, la connaissance est ce qui s'exprime par les règles de la situation a-didactique et par les stratégies. L'évolution de ces stratégies requiert des productions de connaissances qui permettent à leur tour la conception de nouvelles situations a-didactiques.

.../...

Le contrat didactique n'est pas un contrat pédagogique général. Il dépend étroitement des connaissances en jeu.

Dans la didactique moderne, l'enseignement est la dévolution à l'élève d'une situation a-didactique, correcte, l'apprentissage est une adaptation à cette situation. Nous verrons plus loin que l'on peut concevoir ces situations comme des jeux formels et que cette conception favorise la compréhension et la maîtrise des situations d'enseignement.

Le contrat didactique

Ainsi, dans toutes les situations didactiques, le professeur tente de faire savoir à l'élève ce qu'il veut qu'il fasse. Théoriquement, le passage de l'information et de la consigne du professeur à la réponse attendue, devrait exiger de la part de l'élève la mise en oeuvre de la connaissance visée, qu'elle soit en cours d'apprentissage ou déjà connue. Nous savons que le seul moyen de "faire" des mathématiques, c'est de chercher et résoudre certains problèmes spécifiques et, à ce propos, de poser de nouvelles questions. Le maître doit donc effectuer non la communication d'une connaissance, mais la dévolution du bon problème. Si cette dévolution s'opère, l'élève entre dans le jeu et s'il finit par gagner, l'apprentissage s'opère.

- Mais si l'élève refuse ou évite le problème, ou ne le résoud pas ? Le maître a alors l'obligation sociale de l'aider et même parfois de se justifier d'avoir posé une question trop difficile.

- Alors se noue une relation qui détermine - explicitement pour une petite part, mais surtout implicitement - ce que chaque partenaire, l'enseignant et l'enseigné, a la responsabilité de gérer et dont il sera d'une manière ou d'une autre, responsable devant l'autre. Ce système d'obligations réciproques ressemble à un contrat. Ce qui nous intéresse ici est le **contrat didactique**, c'est-à-dire la part de ce contrat qui est spécifique du "contenu": la connaissance mathématique visée.

.../...

C'est pourquoi nous ne pouvons pas ici détailler ces obligations réciproques, d'ailleurs ce sont en fait **les ruptures du contrat** qui sont importantes. Mais examinons -en quelques conséquences immédiates.

- Le professeur est supposé créer des conditions suffisantes pour l'appropriation des connaissances, et il doit "reconnaître" cette appropriation quand elle se produit.

- L'élève est supposé pouvoir satisfaire ces conditions.

- La relation didactique doit "continuer" coûte que coûte.

- Le professeur assure donc que les acquisitions antérieures et les conditions nouvelles donnent à l'élève la possibilité de l'acquisition.

Si cette acquisition ne se produit pas, s'ouvre un procès à l'élève qui n'a pas fait ce que l'on est en droit d'attendre de lui mais aussi un procès au maître qui n'a pas fait ce à quoi il est tenu (implicitement).

Remarquons que ce jeu d'obligation n'est pas exactement un contrat :

D'abord, il ne peut pas être complètement explicitable, dès lors qu'il prétend porter sur le résultat de l'action d'enseigner. Il n'existe pas de moyens repérés et suffisants pour construire des savoirs nouveaux ou pour obtenir contre toute défense d'appropriation par l'élève les savoirs visés. Et si le contrat ne porte que sur les règles de comportement du professeur ou de l'élève, son respect scrupuleux condamnera la relation didactique à l'échec.

Il est nécessaire cependant que le professeur accepte la responsabilité des résultats et qu'il assure à l'élève les moyens effectifs de l'acquisition des connaissances. Cette assurance est fallacieuse mais indispensable pour lui permettre d'engager la responsabilité de l'élève. De même, il est nécessaire que l'élève accepte

.../...

la responsabilité de résoudre des problèmes dont on ne lui a pas enseigné la solution bien qu'il ne voie pas, a priori, les choix qui lui sont offerts et leurs conséquences, et qu'il soit donc dans un cas patent d'irresponsabilité juridique.

Nous verrons qu'un contrat de ce genre, totalement explicite, est voué à l'échec. En particulier les clauses de rupture et l'enjeu du contrat ne peuvent pas être décrits à l'avance. La connaissance sera justement ce qui résoudra les crises ~~nées~~ de ces ruptures; elles ne peuvent pas être pré-définies. Pourtant, au moment de ces ruptures, tout se passe comme si un contrat implicite liait l'enseignant et l'enseigné: surprise de l'élève qui ne sait pas résoudre le problème et qui s'insurge de ce que le maître n'ait pas su l'en rendre capable, surprise du maître qui estimait raisonnablement suffisantes ses prestations... révolte, négociation, recherche d'un nouveau contrat qui dépend du nouvel "état", des savoirs... acquis et visés.

Le concept théorique en didactique n'est donc pas le contrat (le bon, le mauvais, le vrai, ou le faux contrat) mais le processus de recherche d'un contrat hypothétique. C'est ce processus qui représente les observations et doit les modéliser et les expliquer.

Un exemple de la dévolution d'une situation a-didactique

Dans un jeu sur micro-ordinateur, de jeunes enfants (5 ans) doivent, avec le crayon optique, conduire un à un, des lapins dans un pré et des canards dans une mare. Les règles de la manipulation ne présentent pas de difficultés insurmontables à cet âge. Les enfants peuvent interpréter que la disparition puis la réapparition d'un animal à un autre endroit, correspond à un déplacement. Mais il s'agit bientôt d'autre chose que d'une manipulation selon la règle : le maître veut que l'élève pointe tous les lapins l'un après l'autre et une seule fois, avant de les diriger vers le pré, afin de développer chez lui l'énumération d'une collection. La suite des opérations à effectuer n'est pas donnée dans la consigne, elle est à la charge de l'élève. La dévolution de cette tâche se fait par étapes :

.../...

Première étape : Approche purement ludique.

Les élèves n'ont pas encore compris que parmi les issues du jeu, certaines sont souhaitables : tous les lapins vont dans le pré et dansent une petite ronde,

et d'autres sont non souhaitables : les lapins oubliés deviennent rouges et émettent un grognement.

Ils jouent, piquent les lapins et sont heureux de provoquer un effet, quel qu'il soit.

Deuxième étape : Dévolution d'une préférence.

Les élèves ont bien compris quel est l'effet souhaité (par exemple, on a supprimé tout effet des fausses manipulations) mais ils attribuent les résultats, bons ou mauvais, à une sorte de fatalité ou de hasard.

Ce genre d'interprétation est adéquat pour de nombreux jeux : à "la bataille" ou aux "petits chevaux", le plaisir naît de l'attente de ce que le sort réserve, alors que le joueur ne prend aucune décision.

Troisième étape : dévolution d'une responsabilité et d'une causalité.

Pour accepter une responsabilité dans ce qui lui arrive, l'élève doit considérer ce qu'il fait comme un choix parmi diverses possibilités puis envisager une relation entre les décisions qu'il a prises et leurs résultats.

A cette étape, les élèves peuvent, après coup, envisager que le déroulement du jeu aurait pu être différent. Cela suppose qu'ils peuvent se souvenir de certaines de leurs actions et plus précisément de ce qui, en elles, était pertinent ou non.

Cette dévolution est délicate : la plupart des enfants sont prêts à accepter du maître l'idée qu'ils sont responsables du résultat du jeu bien qu'ils soient incapables d'établir qu'ils auraient pu obtenir un meilleur résultat par un choix approprié de leur part, ce qui, formellement, est un cas flagrant d'irresponsabilité.

.../...

Si l'élève résoud assez vite le problème, le fait d'avoir accepté a priori le principe de sa responsabilité n'a été qu'un prologue nécessaire à l'apprentissage qui vient justifier après coup cette responsabilisation, en donnant à l'élève les moyens de l'assumer et, finalement, d'échapper à la culpabilité.

Mais pour l'élève qui ne peut pas franchir la difficulté de relier, par la connaissance, son action aux résultats obtenus, la responsabilisation doit être renégociée sous peine de provoquer des sentiments de culpabilité et d'injustices très vite préjudiciables aux apprentissages ultérieurs...

Quatrième étape : Dévolution de l'anticipation

La relation entre la décision et le résultat est envisagée avant la décision, l'élève prend à sa charge des anticipations qui excluent toute intervention occulte. Même si elle n'est pas encore entièrement maîtrisée, cette anticipation est considérée comme étant de la responsabilité cognitive du joueur et non pas seulement sa responsabilité sociale.

Cinquième étape : Dévolution de la situation a-didactique

Pour réussir, l'élève doit bien effectuer l'énumération d'une collection. Mais il ne suffit pas qu'il la produise une fois "par hasard". Il faut qu'il sache la reproduire à volonté dans des circonstances variées. Il faut qu'il soit conscient de ce pouvoir de reproduction et qu'il ait une connaissance, au moins intuitive, des conditions qui lui permettent de bonnes chances de réussite. L'élève doit reconnaître les jeux auxquels il vient d'apprendre à jouer. Mais ce qu'il sait faire ne lui a pas été nommé, identifié et surtout ne lui a pas été décrit comme une procédure "fixe". Ainsi, la dévolution ne porte pas sur l'objet de l'enseignement mais sur les situations qui le caractérisent. Cet exemple a été choisi pour bien distinguer les différentes composantes de la dévolution. L'énumération n'est pas un concept mathématique culturellement très pesant. Il n'intervient dans l'enseignement que beaucoup plus tard, avec des langages et problématiques différents. Ni le vocabulaire, ni les connaissances formelles ne viennent donc perturber l'objet de l'enseignement.

L'enfant, avant cet apprentissage, avait pu "énumérer" des collections en déplaçant les objets ou en les marquant de façon à toujours avoir une matérialisation commode de l'ensemble restant à énumérer.

Mais ici il doit effectuer la même tâche mentalement, ses représentations doivent s'étendre à un contrôle intellectuel beaucoup plus complexe: chercher un premier lapin facile à repérer, puis un autre, de telle façon à garder à l'esprit que ces deux sont déjà pris ; chercher un autre, assez voisin des premiers et formant avec eux une disposition (petit groupe, ligne...) permettant de ne pas les perdre "de vue" tout en cherchant un quatrième, qui entre à son tour dans la structure afin de ne pas reprendre un lapin déjà pris et de permettre de savoir s'il en reste encore... etc

Cette "tâche" ne peut pas être décrite comme une procédure, ni même "montrée" car : énumérer une collection devant un enfant ne lui donne aucune idée des moyens de contrôle qu'il doit acquérir.

Dans cet exemple, la dévolution de la situation a-didactique est peut-être observée indépendamment de la dévolution de l'objet d'enseignement (qui ne peut avoir lieu à ce moment). Ni le maître ni l'élève ne peuvent identifier ce qui est enseigné, ce qui est à connaître ou à savoir.

Un peu plus tard, les énumérations, en tant que productions peuvent devenir des objets d'étude pour l'élève. Il peut reconnaître celles qui sont semblables ou différentes, celles qui sont correctes ou celles qui échouent... concevoir et comparer des méthodes..... et connaître - après coup - l'objet d'enseignement, attaché au jeu des lapins. Il pourra aborder des problèmes d'énumération et de combinatoire plus proches des problèmes scientifiques et définir alors ce qu'il doit apprendre, ce qu'il doit résoudre et ce qu'on lui demande de savoir. Ces dévolutions d'objets d'études, d'objets de savoir et d'objets d'enseignement devraient pouvoir s'interpréter comme des dévolutions de situations a-didactiques d'un autre type.

.../...

L'épistémologie des professeurs.

Le professeur est alors conduit à expliciter une méthode de production de la réponse : comment répondre à l'aide des connaissances antérieures, comment comprendre, construire une connaissance nouvelle, comment "appliquer" les leçons, reconnaître les questions, comment apprendre, deviner, résoudre... etc. Il se réfère ainsi à une philosophie implicite des mathématiques ou à un modèle (comme la géométrie élémentaire) construit pour l'usage qui en est fait : résoudre les conflits du contrat didactique.

- Cette "épistémologie du professeur" (à usage professionnel) doit donc aussi être en fait celle de l'élève et de ses parents. Elle doit être présente dans la culture pour permettre aux justifications de fonctionner et d'être reçues. Le professeur n'est pas libre de la changer à sa guise. On comprend qu'elle a peu de chance d'être consistante, donc de servir de base à une théorie didactique.

- Pour les enseigner, un professeur doit donc réorganiser les connaissances afin qu'elles se prêtent à cette description, à cette "épistémologie". C'est le début du processus de **modification** des connaissances qui en change l'organisation, l'importance relative, la présentation, la genèse... en fonction des nécessités du contrat didactique. Nous avons appelé **transposition didactique** cette transformation

Remarquons qu'a priori, la pratique empirique de l'enseignement des mathématiques, quelle que soit la qualité scientifique des professeurs, ne les conduit pas spontanément à construire une simulation correcte de la genèse des notions. Au contraire, la tentation est grande d'économiser le double travail (de recontextualisation et de redécontextualisation) et de faire apprendre directement un texte du savoir : pour respecter les

.../...

autres obligations du contrat, des problèmes sont bien proposés aux élèves mais leur solution peut être trouvée par des procédés qui font l'économie et la connaissance spécifique de la notion (comme dans l'exemple de l'analogie). La solution est cachée sous une fiction didactique connue de l'élève et qui sert au moment de la négociation. Puisque le maître doit "prouver" à l'élève qu'il lui était possible de répondre et d'apprendre le savoir visé, il doit au moins pouvoir lui dire comment "a priori" Certes si la solution est articulée comme un texte mathématique, elle comprend la justification scientifique correcte du résultat mais beaucoup d'élèves obtiennent "la réponse non par le raisonnement mathématique souhaité", mais par le décodage de la convention didactique.

Illustration : l'effet "DIENES"

L'étude des conceptions de DIENES et des échos qu'elles ont éveillés chez les enseignants dans le cadre des réformes des années 70 est à ce sujet extrêmement démonstrative [cf. MAUDET et G. BROUSSEAU

Par son "processus psychodynamique" DIENES propose un modèle d'apprentissage fondé sur la reconnaissance des similitudes entre des "jeux structurés" puis sur la schématisation et la formalisation de ces "généralisations" guidées.

Il s'agit en fait d'une description et d'une systématisation de certaines pratiques d'enseignement déjà en usage, accompagnée d'une traduction en termes mathématiques : des problèmes semblables deviennent "isomorphes" et une généralisation un "passage au quotient". La théorie ensembliste et les structures fondamentales deviennent le moyen de décrire tous les éléments de la situation d'enseignement qui, en retour, les illustrent parfaitement.

Cette traduction implique une confusion systématique entre la structure de la situation (le jeu), la structure de la tâche, le processus intellectuel et la connaissance elle-même (en tant que structure mathématique). Elle conduit donc implicitement à ériger les fondements des mathématiques, tels qu'ils étaient conçus à l'époque, en un modèle universel, aussi bien

comme moyen de description et d'organisation des mathématiques (la logique), moyen de leur construction et de leur fonctionnement (épistémologie), moyen d'expliquer le fonctionnement psychologique de l'élève à leur sujet (psychologie cognitive), moyen de décrire le processus d'apprentissage et les étapes du développement d'une connaissance (épistémologie génétique) et enfin les moyens didactiques d'obtenir cet apprentissage.

L'épistémologie spontanée des professeurs se trouvait ainsi soudain justifiée, "sacralisée" par sa reformulation en termes "scientifiques" et réaccordée miraculeusement avec tous les domaines susceptibles de la contester. Ce fait fut une des causes du succès initial des propositions de DIENES.

Une telle didactique est indépendante des contenus. Elle conduit même le professeur à mettre l'accent sur les variables non pertinentes de la situation mathématique (celles qui ne les modifient pas) au détriment des conditions spécifiques ("principe de variabilité"). Et finalement, elle n'est qu'une méthode de présentation de savoirs favorisant leur mémorisation.

Le fait le plus évident dans l'utilisation de cette méthode est le suivant : seuls les prosélytes de la méthode sont susceptibles de la faire fonctionner avec succès. Tout usage "servile" des matériels DIENES conduit à des déceptions et à des échecs.

L'analyse en terme de contrat didactique peut proposer une explication à ce fait.

La méthode didactique de DIENES, en s'appuyant sur "le processus psychodynamique", ne laisse pas explicitement d'autre place à l'enseignant que le choix des matériels, la présentation des fiches, les encouragements d'usage... La méthode doit opérer par la vertu d'un processus interne du sujet inélucltable dès lors que ses conditions d'entrées sont satisfaites : présentation répétée de jeux structurés, demande de schématisation... etc. Elle délivre ainsi le maître de la responsabilité technique d'obtenir lui-même l'apprentissage espéré. Il peut présenter ses exercices, attendre, ... fournir éventuellement les réponses accompagnées d'une petite explication, envoyer à la fiche suivante, organiser le

jeu correspondant... mais le contrat d'enseignement ne le lie plus à l'évolution du comportement cognitif que le "jeu" est supposé prendre en charge. Au contraire, il doit laisser l'élève penser par lui-même. Or les jeux de DIENES ne sont pas très souvent satisfaisants parce qu'ils postulent que les règles proposées à l'élève (pour jouer) sont les mêmes que celles qu'il faut lui apprendre, la structure du jeu et celle qui "est" le savoir sont identiques ! Ainsi la compréhension de la règle, condition pour agir, exige préalablement, de la part de l'élève, la connaissance que l'on prétend lui enseigner. Si le maître enseignait d'abord la règle, le jeu se transformerait donc en exercice. Pour éviter cela, il essaie de faire deviner la règle - activité qui n'est pas théorisée dans le processus psychomathématique.

De nombreux travaux de l'auteur ayant pour objet l'amélioration des situations didactiques (dont certains sont évoqués plus loin) ont été conduits dans l'hypothèse que les échecs observés étaient dus à l'insuffisance théorique et pratique des jeux de DIENES.

Il semble pourtant que la cause déterminante soit la rupture dans la dévolution de toute négociation didactique à cause de la délégation faite par le professeur à un processus indépendant réputé suffisant. Le contrat d'enseignement peut subsister si le maître se soucie des résultats quantitatifs de l'élève mais l'articulation des connaissances et leur genèse restent ignorées. Au contraire, l'action "militante" d'un professeur décidé à montrer que la méthode est efficace le conduit à restaurer ce débat. L'insuffisance des situations dans la justification et la signification des connaissances visées n'empêche pas le discours du maître de leur donner un sens et une place suffisante pour un apprentissage. Il est exact toutefois que si les situations étaient incorrectes, aucune dévolution ne permettrait aux jeux de DIENES de produire la connaissance annoncée. Le problème reste ouvert pour de "bonnes" situations. Dans tous les cas, les méthodes d'enseignement de DIENES permettraient d'obtenir des résultats, mais pour des raisons différentes de celles avancées dans la théorie qui les accompagnait.

Cette analyse montre l'utilisation qui peut être faite

.../...

de la notion de contrat pour tenter d'expliquer un phénomène de didactique lié à l'épistémologie des professeurs. Problème important : Est-ce que toute méthode ou toute situation réputée efficace par le truchement d'une quelconque "loi psychologique" ou "didactique" qui délivrerait le professeur de la négociation didactique n'entraînerait pas le même effet ?

Plus le professeur serait assuré de la réussite par des effets indépendants de son investissement personnel et plus il échouerait ...! Nous appelons effet DIENES ce phénomène qui montre la nécessité d'intégrer les rapports maître-élève dans toute théorie didactique. Et cette conclusion renvoie à une question plus difficile : l'épistémologie des professeurs est-elle incontournable ?

Heuristique et didactique

Il est clair qu'on ne connaît pas les conditions à la fois nécessaires, minimales (pour donner le maximum de sens à l'activité de l'élève) et néanmoins suffisantes (pour lui permettre de satisfaire son contrat). On ne connaît pas d'épistémologie génétique effective qui permettrait l'économie de ces négociations de sorte que le maître et l'élève sont souvent réduits (inconsciemment bien sûr) à des expédients :

- la substitution de problème qui peut aboutir à l'effet Topaze ou plus froidement à l'effet Jourdain
- l'usage abusif de l'analogie, le glissement métacognitif, etc...

Or, le professeur, à côté des problèmes, doit donner des moyens de les résoudre (le savoir théorique par exemple) et rendre compte que les moyens déjà enseignés, permettraient bien de construire la solution. Il doit donc faire comme s'il savait comment, en partant de certains savoirs (enseignés) on fabrique des solutions à des problèmes nouveaux. Et un jour, il doit aussi s'expliquer sur ces moyens : comment on les retrouve, comment on les reconnaît...

Son action présuppose-t-elle une épistémologie ? Il va être obligé de la produire, de la livrer ! Pourquoi l'élève a-t-il fait une erreur ? Comment peut-il éviter les prochaines ? Comment trouver une solution ?

"L'algorithme" constitue un instrument de déblocage et de solution des conflits didactiques, en ce sens qu'il permet momentanément un partage clair des responsabilités. Le maître montre l'algorithme, l'élève l'apprend et "l'applique" correctement : sinon il doit s'exercer mais son incertitude est presque nulle. On lui affirme qu'il existe toute une classe de situations différentes dans lesquelles l'algorithme donne une solution (le conflit va reprendre quand il s'agira de choisir un algorithme pour un problème donné).

L'algorithme est pratiquement le seul moyen "officiel" de déblocage ; c'est-à-dire qu'il a fait l'objet de l'explicitation de méthodes d'enseignement qui le concernent. Et il sert de modèle unique ou presque à toutes les approches sous-culturelles de l'enseignement.

On doit donc s'attendre à ce que l'élève reçoive toutes les indications du professeur sur le même mode comme moyens "efficaces" de résoudre les problèmes (tels que des algorithmes) et ceci même si le professeur choisit de façon à ce qu'ils relancent la recherche de l'élève, l'encouragent, l'aident sans toucher à l'essentiel de ce qui doit rester à sa charge. Ainsi, les indications de type heuristique seront demandées, données et reçues au sein d'un malentendu, suggestions incertaines pour l'un, connaissances comparables aux algorithmes ou aux théorèmes de mathématiques pour l'autre. Avec cet Art de résoudre des problèmes, dont l'essentiel est fondé sur l'introspection, le maître voudrait apprendre à son élève à chercher ; lui, attend des algorithmes.

Mais ce que le maître voudrait présenter à l'élève comme des occasions de recherches typiques n'est qu'une collection d'objets culturels, de problèmes dont les solutions sont connues et répertoriées par l'heuristique. L'élève est donc fondé

.../...

à la recevoir sur le mode du savoir. En ce sens, comme GLAESER le souligne fortement, "l'heuristique ne peut pas s'enseigner puisque sa matière est la part imprévisible et créative de toute recherche de problème. On ne peut que donner un entraînement à l'heuristique qui habitue l'étudiant aux situations de recherche".

Mais alors le processus reste bloqué ! le professeur ne devrait pas, par exemple, faire usage des démarches de pensées inventoriées par POLYA^(*) et qu'il a lui-même reconnu avoir utilisées lors de ses succès de mathématicien.

Il n'y a pas grand danger pourtant à délivrer à l'occasion des informations !" ou des conseils... "Dessinez une figure, introduisez la notation appropriée, quelle est l'inconnue ? Connaissez-vous un problème qui se rattache à celui-ci ?... Énoncez-le différemment"... Reportez-vous aux définitions... (POLYA, commentaires). Au contraire, il s'agit d'habitudes à acquérir.

"Pour résoudre un problème vous devez successivement : comprendre le problème..." (POLYA^(*)). Le contrat glisse ; maintenant la recherche des informations ou des suggestions latérales devient un moyen didactique reconnu, bientôt peut-être exigible d'un élève qui prétend chercher et dont on met en doute l'activité réelle.

Alors le maître est appelé en retour à mettre au clair ces moyens, à les classer, à les identifier, à les définir, à répondre de leur efficacité. Il va donc peut-être choisir les problèmes qui permettront le mieux de les illustrer, de les appliquer, de les faire fonctionner, à titre d'exemple. Mais il ne peut pas restreindre les problèmes de mathématiques et ceux où l'application presque automatique d'un procédé annoncé à l'avance donne la solution. L'élève cherche alors quelle suggestion procédologique est la bonne. La boucle est accomplie, les "heuristiques" se sont substituées ou ont pris place à côté des théorèmes et des théories parmi les moyens entre lesquels il faut choisir pour résoudre un problème mais le problème reste et le contrat didactique aussi.

Pourquoi ne pas chercher des heuristiques du second ordre ?

(*) cf. POLYA "Comment poser et résoudre un problème ?"

Cette voie amorce un type de glissement (heuristique) récurrent comparable au glissement métacognitif. Il est possible d'identifier aussi un glissement métamathématique qui consiste à substituer à un problème mathématique un débat logique de sa solution et à lui attribuer toutes les sources d'erreurs.

Le processus que nous venons de décrire est donc une tendance résultant naturellement des nécessités du contrat didactique. Il est facile d'en trouver des exemples à plusieurs reprises dans l'histoire de l'enseignement. De même, il est clair qu'il n'a rien d'inéluctable : les réticences, puis les résistances, se font de plus en plus fortes au fur et à mesure que le glissement devient important. Il semble que, comme pour l'effet de glissement métacognitif, la seule force antagoniste soit la vigilance épistémologique.

Comme pour les analogies, l'usage - naïf ou systématique - des heuristiques est un excellent moyen de recherche des solutions de problèmes (l'heuristique étant le moyen par définition et par excellence) à condition d'être mise en oeuvre sous la responsabilité exclusive de son utilisateur. Tout crédit accordé a priori à une méthode particulière est un signe de déceptions souvent amères, qui la rend impropre au contrat didactique. Avec GLAESER, nous pouvons appeler "procédologie" "tout le répertoire de recettes éprouvées" (sur les stocks de problèmes classiques) que l'enseignement... inculque" et qui ne sont pas des théorèmes ou des métathéorèmes. (L'enseignement ne semble pas avoir pour mission explicite d'inculquer ces recettes, et nous préférons admettre qu'il le fait sous la pression du contrat didactique).

Par contre, je proposerai d'étendre le terme de "procédures algorithmiques qui apparaissent... comme sous-programmes d'une recherche heuristique" à tout ce qui, dans le contrat didactique, tend à jouer le même rôle, y compris les heuristiques ou les idées originales, lorsqu'elles sont présentées ou utilisées comme des recettes.

C'est la fonction et la présentation didactiques qui laissent ou enlèvent sa valeur à un procédé. Plus exactement, c'est la nature du contrat qui se noue à leur propos. Comme l'effet DIENES (pour le maître), l'affirmation à l'élève qu'il existe une méthode automatique (ou presque) pour établir une famille de résultats, même si c'est vrai, tend à le décharger de la responsabilité fondamentale du contrôle de son travail intellectuel, bloque donc la dévolution du problème, ce qui fait échouer le plus souvent l'activité (et de plus permet à l'élève de contredire et contester la méthode s'il le veut).

Il me paraît nécessaire de souligner ce que nous venons de montrer :

- qu'il n'y a pas de différence de nature entre un usage réservé et légitime de "l'heuristique normative" de POLYA, en vue de "l'éducation" mathématique et la fine procédologie du second ordre, seulement une différence de degré dans l'acceptation du glissement sous la pression du contrat (ou pour aller vers l'élève).
- il n'y a pas de raison de déclarer a priori illégitime, pour le maître, de donner des indications de cette nature [comme ce que nous avons appelé "l'épistémologie des professeurs"], on peut considérer qu'elles sont, en l'absence d'une authentique science de la didactique, une nécessité professionnelle inévitable.

Il est plus important de comprendre les conditions antagonistes qui influencent l'équilibre entre les tendances opposées (pas de renseignements - trop de renseignements).

Cette analyse soulève l'hypothèse suivante : l'heuristique pourrait n'être qu'une rationalisation fondée sur l'épistémologie des professeurs, une invention didactique pour les besoins du contrat, récupérée et développée par les mathématiciens en guise d'épistémologie spontanée.

COHERENCE ET INCOHERENCES DE LA
MODELISATION ENVISAGEE : LES PARA-
DOXES DU CONTRAT DIDACTIQUE.

Envisager l'enseignement comme la dévolution par le professeur à l'élève d'une situation d'apprentissage a permis de repérer certains phénomènes. La tentative de modéliser cette dévolution comme la négociation d'un contrat permet de les expliquer en grande partie et d'en prévoir d'autres.

L'aboutissement de cette démarche fera considérer le maître comme un joueur face à un système lui-même formé d'un couple de systèmes : l'élève et, disons pour l'instant, un "milieu" dénué d'intentions didactiques à son égard.

Dans le "jeu" de l'élève avec le milieu, les connaissances sont les moyens d'appréhender les règles et les stratégies de base, puis des moyens d'élaborer des stratégies gagnantes et d'obtenir le résultat cherché.

Dans le jeu du maître avec le système élève-milieu, le contrat didactique est le moyen d'établir les règles et stratégies de base puis de les adapter aux changements de jeux de l'élève.

A chaque connaissance, et peut-être à chaque fonction d'une connaissance, doivent correspondre des situations (des problèmes) spécifiques et probablement des contrats didactiques. L'évolution des joueurs et du jeu - à l'encontre des jeux à règles fixes - conduit à des remises en causes des connaissances et du contrat didactique.

Cette dialectique est à la base-même de la constitution des savoirs en tant qu'ils articulent le spécifique et le général. Avant d'approfondir et de systématiser cette modélisation, il est utile d'examiner sa cohérence. Cette étude permettra aussi de préciser les fonctions ou les relations qu'il convient de représenter (par des règles) et les difficultés de l'entreprise.

Ce paragraphe permettra d'exposer plus clairement la méthodologie de la didactique.

.../...

Envisager l'enseignement comme la dévolution à l'élève de la responsabilité de l'usage et de la construction du savoir, conduit à des paradoxes qu'il est utile de signaler.

Le paradoxe de la dévolution des situations

L'enseignant doit obtenir que l'élève résolve les problèmes qu'il lui propose afin de constater et de pouvoir faire constater qu'il a accompli sa propre tâche.

Mais si l'élève produit sa réponse sans avoir eu à faire lui-même les choix qui caractérisent le savoir convenable et qui différencient ce savoir de connaissances insuffisantes, l'indice devient trompeur. Ceci se produit en particulier dans le cas où le professeur a été conduit à dire à l'élève comment résoudre le problème posé ou quelle réponse donner. L'élève n'ayant eu à effectuer ni choix, ni essais de méthodes, ni modification de ses propres connaissances ou de ses convictions, n'a pas donné la preuve attendue de l'appropriation visée. Il n'en a donné que l'illusion. Le professeur a l'obligation sociale d'enseigner tout ce qui est nécessaire à propos du savoir. L'élève - surtout lorsqu'il est en échec - le lui demande.

Ainsi donc, plus le professeur cède à ces demandes et dévoile ce qu'il désire, plus il dit précisément à l'élève ce que celui-ci doit faire, plus il risque de perdre ses chances d'obtenir et de constater objectivement l'apprentissage qu'il doit viser en réalité.

C'est le premier paradoxe : ce n'est pas tout-à-fait une contradiction, mais le savoir et le projet d'enseigner vont devoir s'avancer sous un masque.

.../...

Ce contrat didactique met donc le professeur devant une véritable injonction paradoxale : tout ce qu'il entreprend pour faire produire par l'élève les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.

Mais l'élève est, lui aussi, devant une injonction paradoxale : s'il accepte que, selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc il n'apprend pas de mathématiques, il ne se les approprie pas. Si, au contraire, il refuse toute information de la part du maître, alors, la relation didactique est rompue. Apprendre, implique, pour lui, qu'il accepte la relation didactique mais qu'il la considère comme provisoire et s'efforce de la rejeter. Nous verrons plus loin de quelle manière.

Les paradoxes de l'adaptation des situations

Admettons que le sens d'une connaissance provient en bonne partie du fait que l'élève acquiert celle-ci en s'adaptant aux situations didactiques qui lui sont proposées (dévolues).

Nous admettrons aussi qu'il existe, pour toute connaissance, une famille de situations susceptible de lui donner un sens correct.

Dans certains cas, il existe quelques situations fondamentales accessibles à l'élève au moment voulu. Ces situations fondamentales lui permettent de fabriquer assez vite une conception correcte de la connaissance qui pourra s'insérer, le moment venu, sans modifications radicales, dans la construction de nouvelles connaissances.

Mais supposons qu'il existe des connaissances pour lesquelles les conditions ci-dessus ne sont pas réalisées : il n'existe pas de situations suffisamment accessibles, suffisamment efficaces et en nombre suffisamment petit pour permettre à des élèves d'âge quelconque d'accéder d'emblée,

.../...

par adaptation, à une forme du savoir que l'on puisse considérer comme correcte et définitive : il faut accepter des étapes dans l'apprentissage. Le savoir enseigné par adaptation dans la première étape sera provisoirement, non seulement approximatif, mais aussi en partie faux ou inadéquat.

L'enseignant se trouve alors devant de nouveaux paradoxes :

i) inadaptation à l'exactitude

Même si ce savoir enseigné au cours d'une première étape est nécessaire pour aborder une étape ultérieure, l'enseignant doit s'attendre à se voir reprocher les erreurs, par ses élèves et par les professeurs des niveaux supérieurs, à moins qu'une tradition ou qu'une négociation culturelles ne le disculpent.

Dans l'hypothèse envisagée, il existe une alternative : le professeur renonce à l'enseignement par adaptation : il enseigne directement un savoir conforme aux exigences scientifiques. Mais alors cette hypothèse implique qu'il doit renoncer à donner un sens à ce savoir et à l'obtenir comme réponse à des situations d'adaptation parce qu'alors les élèves le coloreront de significations fausses.

Le professeur a le choix entre enseigner un savoir formel et dénué de sens ou enseigner un savoir plus ou moins faux qu'il faudra rectifier.

Les choix intermédiaires pourront conjuguer les deux inconvénients et même les compliquer.

L'élève à qui l'on enseigne, d'une part, un savoir "savant" et à qui l'on présente, d'autre part, des situations de références inadéquates est à même de constater toutes sortes de contradictions et d'inadaptations entre ces deux objets d'enseignement. Les savoirs qu'il obtient en comprenant sont même faux ou différents de ceux qu'on prétend lui enseigner.

Les distinctions que l'on établit entre savoir théorique et savoir pratique ne sont souvent peut-être qu'une simple conséquence et une récupération de cette difficulté purement didactique. Ici, encore, l'élève est devant une injonction paradoxale ; il doit comprendre et apprendre ; mais pour apprendre il doit, dans une certaine mesure, renoncer à comprendre et pour comprendre, il doit prendre le risque de ne pas apprendre. Prendre comme objet d'enseignement le savoir et sa genèse (vraie ou fiction), et donc enseigner le savoir et son sens n'est pas une solution non plus.

ii) Inadaptation à une adaptation ultérieure.

La mémorisation de savoirs formels, largement dépouillés de sens, peut être très coûteuse en exercices d'apprentissages. Ces derniers ne doivent pas réintroduire trop de sens, ce qui augmente encore leur difficulté. La représentation que se fait l'élève du savoir mathématique et de son fonctionnement s'en trouve profondément perturbé. Plus l'élève a été entraîné aux exercices formels, plus il lui est difficile, plus tard, de restaurer un fonctionnement fécond des concepts ainsi reçus. "L'application" d'un savoir appris tout fait se produit mal parce que la logique de l'articulation des acquisitions qui le composent est uniquement celle du savoir lui-même et que le rôle des situations a été exclu a priori.

Examinons le choix inverse, celui d'une compréhension, provisoirement erronée, d'un savoir obtenu par adaptation à des problèmes "introductifs". Il faudra reprendre et modifier ce savoir.

Un nouveau paradoxe apparaît : si les élèves se sont bien adaptés aux situations qui leur sont proposées, ils ont mieux compris les raisons de leurs réponses et les rapports de leur savoir avec les problèmes, il sera donc plus difficile, par la suite, de changer ce savoir pour le rendre correct et pour le compléter.

.../...

Nous venons de montrer que pour certaines connaissances, il est assez prévisible que le savoir sera d'autant plus difficile à "reprendre" et à modifier qu'il aura été mieux appris, mieux compris et mieux conformé dans la première étape.

Ce fait tient sans doute à des raisons d'ordre psychologique : il est d'autant plus difficile à changer ses habitudes ou les opinions, qu'elles sont plus intimement liées à des activités plus personnelles plus nombreuses et plus anciennes.

Mais il pourrait tenir aussi à une raison plus directement épistémologique. La suradaptation du "savoir" à la solution d'une situation particulière n'est pas nécessairement un facteur favorable à la solution d'une situation nouvelle. Une différenciation trop forte, une dépendance trop grande par rapport aux "connaissances" directes et l'évolution devient impossible. Le savoir premier fait obstacle. Certains de ces obstacles sont inévitables et constitutifs du savoir - d'autres sont le résultat d'un surinvestissement didactique.

Ainsi, dans l'hypothèse d'un savoir inaccessible à tout élève par une adaptation assez courte à une situation fondamentale assez correcte, le professeur se trouve devant un nouveau paradoxe.

Qu'il choisisse un enseignement formel ou par adaptation, plus il insiste sur l'apprentissage des connaissances intermédiaires, plus il risque de contrarier les enseignements ultérieurs.

Inversement, s'il renonce à fixer, à institutionnaliser les acquisitions, même partielles, l'élève ne trouvera aucun appui lors des étapes suivantes. Dans certains cas,

.../...

mieux l'élève s'adapte à une situation didactique intermédiaire, plus il est inadapté à l'étape suivante.

Il est vraisemblable que c'est ce phénomène qui conduit les professeurs des niveaux supérieurs à n'utiliser les enseignements plus élémentaires que sous la forme de procédures ou d'algorithmes et, s'il faut toucher au sens, à le faire dans des situations avec un vocabulaire et des méthodes aussi différents que possible de ceux des niveaux précédents.

Les paradoxes de l'apprentissage par adaptation

i) Négation du savoir.

L'hypothèse que l'élève pourrait construire son savoir par une adaptation personnelle à une situation a-didactique est-elle consistante ?

Imaginons en effet que le professeur fasse dévolution à l'élève d'une source de questions auto-contrôlables^(*) ou d'un problème. Si l'élève résoud ce problème, il peut penser qu'il l'a fait par l'exercice normal de ses connaissances antérieures. Le fait d'avoir résolu le problème lui apparaîtra comme la preuve qu'il n'y avait rien de nouveau à apprendre pour cela. Même s'il est conscient d'avoir remplacé une stratégie ancienne et identifiée culturellement par une autre de son "invention", il lui sera bien difficile de déclarer que cette "innovation" est un savoir nouveau : quel besoin de l'identifier comme une méthode puisqu'elle semble pouvoir être produite facilement lorsque c'est nécessaire ? Comment un sujet seul pourrait distinguer dans toutes les décisions qu'il a prises celles qui sont détachables de la situation et qui pourront servir telles quelles dans d'autres
.../...

(*) c'est-à-dire telles que l'élève ne sait pas a priori y répondre, mais le pourra lorsqu'il aura une solution et qu'il saura si elle est exacte sans recours au maître.

situations, de celles qui sont purement conjoncturelles et locales.

Les conditions sociales d'un apprentissage par adaptation, en rejetant le principe de l'intervention des connaissances d'un tiers pour produire la réponse, tend à rendre impossible l'identification de cette réponse comme une nouveauté, donc comme correspondant à une acquisition de connaissances.

Le sujet banalise la question dont il connaît les réponses dans la mesure où il n'a pas les moyens de savoir si d'autres se la sont posée avant lui, si personne n'a su y répondre, si d'autres questions lui ressemblent ou lui sont liées en ce qu'elles pourront recevoir une réponse grâce à celle-ci... etc Il faut donc que quelqu'un d'extérieur vienne pointer ses activités et identifie celles qui ont un intérêt, un statut culturel. Cette institutionnalisation est en fait une transformation complète de la situation. Choisir certaines questions parmi celles que l'on sait résoudre, les placer au coeur d'une problématique qui confère aux réponses que ces questions appellent un statut de savoir plus ou moins important, les relier à d'autres questions et à d'autres savoirs, constitue finalement l'essentiel de l'activité scientifique. Et ce travail culturel et historique diffère totalement de ce qui semblait être laissé à la charge de l'élève et revient à l'enseignant. Il n'est donc pas le résultat d'une adaptation de l'élève.

D'une certaine façon, l'adaptation contredit l'idée de la création d'un savoir nouveau. Inversement, le savoir est presque la reconnaissance culturelle que la connaissance directe est impuissante à résoudre naturellement certaines situations (par adaptation).

ii) Destruction de sa cause.

Les situations permettant l'adaptation de l'élève sont le plus souvent par nature répétitives : l'élève doit pouvoir faire plusieurs

.../...

tentatives, investir la situation à l'aide de ses représentations, tirer des conséquences de ses échecs ou de ses succès plus ou moins fortuits...

L'incertitude dans laquelle il est plongé est à la fois source d'angoisse et de plaisir. La réduction de cette incertitude est le but de l'activité intellectuelle et son moteur. Mais connaître la solution à l'avance, c'est-à-dire avoir transformé des réponses satisfaisantes, mais locales, en méthode donnant la réponse dans tous les cas, détruit le caractère incertain de la situation qui se trouve alors vidée de son intérêt. Ainsi la connaissance prive l'élève du plaisir de chercher et de trouver une solution "locale". L'adaptation - par la connaissance - coïncide donc avec le renoncement à une incertitude somme toute agréable. L'adaptation de l'élève tend à détruire la motivation qui la produit comme elle tend à enlever tout sens à la situation qui la provoque.

Elle devrait donc s'arrêter très vite et, à la limite, ne pas se produire dès lors qu'un processus devient nécessaire.

L'image simple d'une adaptation à des perturbations extérieures n'est pas satisfaisante pour représenter le phénomène d'apprentissage. Elle ne laisse pas de place à deux éléments essentiels pour le maintien du processus :

- d'une part, la création d'une motivation intrinsèque qui relance l'élève dans la recherche d'une autre "occasion" de s'adapter sans la tentative d'adapter le milieu à lui-même
- d'autre part, l'adaptation interne du sujet sans perturbations extérieures et sans "activité" réelle (comme par exemple la résolution des contradictions internes du sujet nées de l'assimilation de schèmes nouveaux dont parle PIAGET)

.../...

Le paradoxe sur le comédien.

Le professeur peut-il échapper à la dévolution, à l'intention directe d'enseigner tel savoir particulier ? Peut-il échapper à la situation didactique. Après tout, il lui suffirait peut-être d'être mathématicien et de se comporter comme tel devant et avec l'élève. La participation progressive de ce dernier à cette activité pourrait lui permettre d'apprendre les mathématiques comme une activité culturelle directe, sans décalage de langage ou de méthode, sans transposition non plus. L'élève apprendrait les mathématiques comme il a appris sa langue maternelle. Le milieu culturel peut-il être "naturellement" enseignant sans être localement didactique ? Le système didactique peut-il être envisagé sans enseignant ?

Certes, de nombreux travaux ont montré le rôle important joué par le milieu familial social et culturel dans les différences de comportements et de réussite scolaire.

Il est vraisemblable que l'enfant peut apprendre beaucoup de choses dans la mesure où l'activité mathématique des membres de la famille se traduit par des débats et par des questions qui peuvent lui être accessibles ; il en retiendra notamment des méthodes, des exigences, des habitudes et un repérage des difficultés ; c'est-à-dire des renseignements de nature épistémologique. Mais lorsqu'un projet d'apprentissage personnel d'un savoir déterminé se dessinera, l'enfant redeviendra l'élève et le système fondamental réapparaîtra : l'un sera l'enseignant, l'autre l'enseigné et qu'il soit spontané ou institutionnel, le maître ne peut pas échapper à la dévolution du savoir.

Ce savoir dont le texte existe déjà n'est plus une production directe du maître, c'est un objet culturel, cité ou récité. Et sa reproduction au moment voulu est donc beaucoup plus comparable à une pièce de théâtre rejouée à l'intention de l'élève, puis par l'élève lui-même, qu'à une aventure vécue avec lui-même. Si l'élève vit son apprentissage, le maître, lui, est nécessairement un acteur, dès lors qu'il sait à l'avance ce qu'il veut enseigner. Il ne s'agit pas d'une métaphore : l'enseignant est réellement un acteur - avec ou sans texte - occupé à faire vivre une re-production du savoir à son élève.

Cette approche répond en partie à la question initiale, mais elle la transforme et la fragmente :

i/ Le maître doit-il "faire" les mathématiques qu'il veut enseigner, au sens où l'acteur devrait éprouver les sentiments qu'il veut faire partager au spectateur ?

ii/ Le maître doit-il refaire chaque fois son texte autour d'un canevas comme dans la comedia del arte, ou doit-il s'en tenir à un "texte" bien éprouvé ?

Sur le premier point, Diderot a formulé dans une étude célèbre le paradoxe inhérent à l'activité du comédien :

Plus l'acteur éprouve les émotions qu'il veut présenter, moins il est capable de les faire éprouver au spectateur car "observateur continu des effets qu'il produit, l'acteur devient en quelque sorte spectateur des spectateurs en même temps qu'il l'est de lui-même et peut ainsi perfectionner son jeu".

Ce paradoxe se prolonge au cas du professeur. S'il produit lui-même ses questions et ses réponses de mathématiques, il prive l'élève de la probabilité de le faire. Il doit donc laisser du temps, laisser des questions sans réponses, utiliser celles que l'élève lui donne et les intégrer dans sa propre démarche en leur laissant une place de plus en plus grande... Ce schéma idyllique peut se dérouler tant que le professeur fabrique un savoir nouveau mais si le savoir est déterminé à l'avance, cette "liberté" n'est plus qu'un jeu d'acteur et l'élève est convié à être un autre acteur, astreint à un texte ou tout au moins à un canevas, qu'il est censé ignorer. Certains schémas pédagogiques postulent la nécessité que le maître ignore lui-même le savoir à construire (transmettre) de façon à être mieux capable d'effectuer de façon convaincante le passage de l'ignorance au savoir. L'existence de ces schémas est la preuve de la pertinence de notre analyse. Il est aisé de montrer leur caractère illusoire (ce qui ne veut pas dire que toutes les entreprises de ce type échouent, mais qu'elles ne réussissent que sous d'autres conditions).

Ainsi que le montre notre étude [the fragility of knowledge G. BROUSSEAU - M. OTTE], le paradoxe de Diderot s'applique au

.../...

professeur de façon étendue et il est peut être plus fondamental et plus aigu que pour le comédien. Entre autres, l'explication de résistances des acteurs peut s'étendre à celles observées dans le monde des professeurs...

Le "paradoxe" au sens de Diderot est "une proposition absurde en apparence à cause qu'elle est contraire aux opinions reçues et qui néanmoins est vraie au fond" (Encyclopédie). Nous lui avons donné un sens plus étroit. Nos paradoxes sont des sortes de contradictions fonctionnelles entre un jeu apparemment exhaustif de décisions et leur finalité.

La résolution de ces paradoxes au même titre que l'explication des phénomènes observés, est l'un des buts d'une théorie des situations en même temps qu'un moyen de mettre à l'épreuve sa consistance.

MODELISATION DES SITUATIONS DIDACTIQUES

1. Moyens et méthodes

Il s'agit ici d'exposer l'instrument de la modélisation : le jeu, puis de discuter quels seront les rapports de ces "modèles" avec la réalité qu'ils décrivent.

Ces rapports ne sont pas ceux d'un original, qui serait le jeu fondamental comme modèle, avec sa copie, qui serait la réalité didactique, et où les difficultés seraient imputables aux écarts introduits par une "mauvaise" réponse des joueurs. Ces rapports, au contraire, laissent une place à la confrontation avec les observations et sont falsifiables. L'approche systémique ainsi proposée sera illustrée par une discussion des premiers sous-systèmes fondamentaux à prendre en considération. Nous montrerons que la nécessité de prendre en considération le milieu dans le jeu didactique de l'élève n'est pas une réification du modèle (les instruments du jeu) mais une nécessité interne.

Nous donnons alors quatre courts exemples illustrant la méthodologie: un, sur le statut des déclarations de didactique, le second sur la définition d'un objet de la didactique : la mémoire, le troisième plus concret donnera un plan d'étude d'une question : l'énumération. Le quatrième évoquera les types de résultats obtenus (course à 20).

"Situation fondamentale correspondant à une connaissance"

Modéliser une situation d'enseignement consiste à produire un jeu spécifique du savoir visé, entre les sous-systèmes : le système éducatif, le système élève, le milieu... etc. Il ne s'agit pas de décrire précisément ces sous-systèmes autrement que par les relations qu'ils entretiennent dans le jeu.

Avant de préciser le type de jeu qui sera utilisé, il faut identifier les deux grandes finalités de la modélisation :

i) - Au regard de la connaissance : le jeu doit être tel que la connaissance apparaisse sous la forme choisie, comme la solution, ou comme le moyen d'établir la stratégie optimale : est-ce que connaître telle propriété est le seul moyen de passer de telle stratégie à telle autre ? Pourquoi l'élève chercherait-il à remplacer celle-ci par celle là ?

.../...

Quelle motivation cognitive conduit à produire telle formulation d'une propriété ou telle démonstration ? Telle raison de produire ce savoir est-elle meilleure, plus juste, plus accessible ou plus efficace que telle autre ?

Ce genre de questions peut être posé a priori. Dans un premier temps, les réponses peuvent être puisées dans la logique du jeu, dans l'histoire des sciences ou dans l'analyse mathématique, ou didactique : le jeu spécifique d'un savoir doit en justifier l'emploi ou l'apparition, conformément à la didactique théorique.

ii) - Au regard de l'activité d'enseignement : le "jeu" doit permettre de représenter toutes les situations observées dans des classes - (sinon les déroulements particuliers) - même les moins "satisfaisantes" dès lors qu'elles parviennent à faire apprendre à des élèves une forme de savoir visé. Il doit pouvoir engendrer toutes les variantes, même les plus dégénérées. Elles seront obtenues par le choix des valeurs de certaines variables caractéristiques de ce jeu^(*).

Les concepts généraux de la didactique devraient permettre d'établir la signification relative de ces différentes variantes, d'expliquer et de prévoir leurs effets, sur le type de connaissance qu'elles font acquérir, sur le déroulement des activités d'enseignement qu'elles discriminent et sur la qualité de leur résultat.

Inversement, ils devraient permettre d'assortir une connaissance des conditions qui la justifient, qui la rendent nécessaire, sous ses différentes formes

Ajuster ces conditions en fonction de ce que nous savons de l'épistémologie, de la psychologie de l'enfant, de la linguistique, ou de la sociologie est un objectif raisonnable de la didactique.

.../...

(*) cf. ingénierie didactique.

Fournir un contrepoint expérimental aux réflexions des épistémologues ou des théoriciens de la connaissance est une ambition légitime. Mais il ne saurait être question de prétendre que toute activité de production de savoir est assimilable à un comportement "économique" dans un jeu explicitable. D'ailleurs, le savoir est toujours amplement surdéterminé. Il ne s'agit que de modèles, assumés comme tels.

La notion de jeu

Modéliser la notion vague de "situation" par celle de "jeu" exige une précision sur les sens accordés à ce mot. Ses cinq définitions principales ont toutes un rapport avec les éléments à présenter.

i) La première caractérise l'ensemble des relations, "l'hypo-système" à modéliser :

"Activité physique ou mentale, purement gratuite, généralement fondée sur la convention ou la fiction, qui n'a dans la conscience de celui qui s'y livre d'autre fin qu'elle même, d'autre but que le plaisir qu'elle procure" [Défin.1]

Cette définition met en scène essentiellement un joueur - capable d'éprouver du plaisir, de concevoir une fiction et d'établir des conventions et des relations avec un milieu non précisé. Il fournit une activité et son plaisir en dépend. Mais la définition insiste surtout sur le caractère quasi isolé du système ainsi évoqué. Pour le joueur - on admet qu'il puisse exister un "Deus ex machina" dont il ne doit pas avoir conscience- Pour lui donc, l'activité est gratuite. Mais comment concilier cette idée d'une action motivée par le plaisir et pourtant gratuite ? Est-ce que toutes les actions ne seraient pas finalement motivées par le plaisir ? Nous interpréterons la phrase dans le sens suivant :

Les décisions et les actions au cours du jeu ne sont réglées que par le plaisir que le joueur éprouve à les accomplir, en éprouve à leurs effets, mais la décision de se livrer au jeu lui-même n'est finalisée par aucun but. Nous reviendrons plus loin sur cette notion de gratuité.

A côté de ce premier sens, nous en trouvons quatre autres :

ii) Le jeu est "l'organisation de cette activité sous un système de règles définissant un succès et un échec, un gain et une perte" (LALANDE) (le "Game") [Défini. 2]

.../...

iii) C'est aussi, et nous utiliserons souvent le mot dans ce sens, "ce qui sert à jouer, les instruments du jeu", et éventuellement un des états du jeu déterminé par un assemblage particulier des instruments du jeu [Défini. 3]

iv) C'est parfois "la manière dont on joue" le "play". Dans les cas où il s'agira de procédures, nous préférerons les termes de "tactique" ou de stratégie [Défini. 4]

v) C'est enfin l'ensemble des positions entre lesquelles le joueur peut choisir dans un état donné du jeu (au sens 2 - et par extension, en mécanique par exemple, l'ensemble des positions possibles et donc les mouvements d'un système, d'un organe, d'un mécanisme que l'on a par ailleurs assujéti à respecter certaines contraintes [Défini. 5].

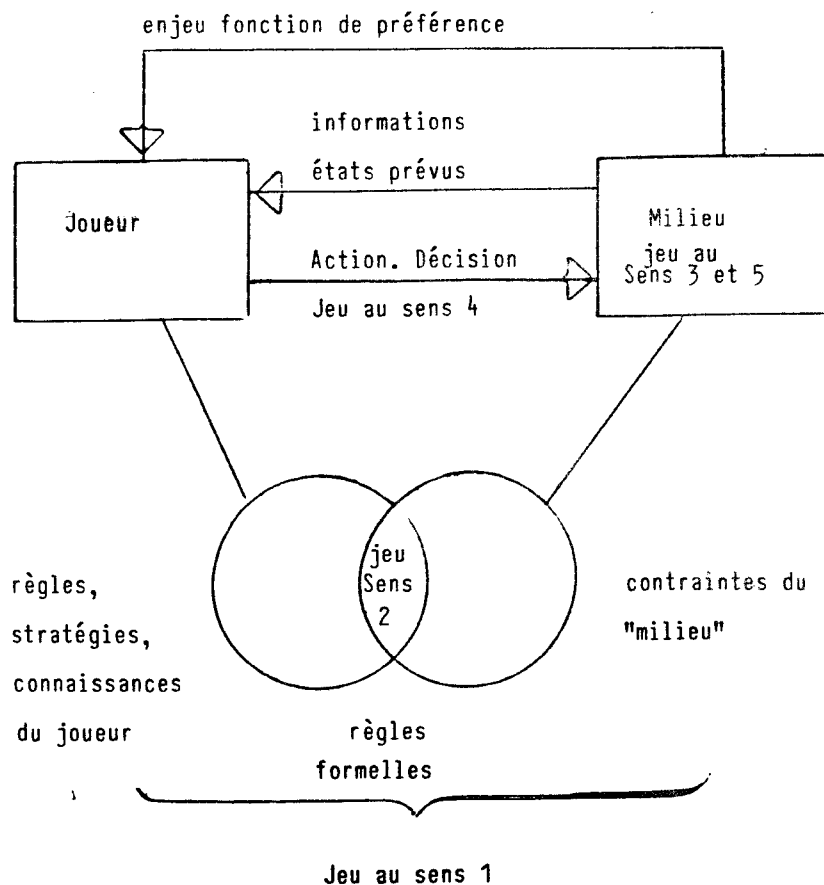


FIGURE 1.

.../...

Les relations entre les différents sens apparaissent sur la figure [1]. Rappelons que formellement, un "jeu" à k personnes (par exemple), est la structure définie par la donnée de :

1. un ensemble X de "positions" distinctes dans lesquelles peuvent se trouver les objets et les relations pertinentes.
2. une application Γ de $X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ qui, à tout état $x \in X$ fait correspondre l'ensemble $\Gamma(x)$ des positions permises entre lesquelles le joueur "au trait" peut choisir à partir de l'état x . Γ représente donc les règles.
3. Un état initial I et un ou des états terminaux F (tels que $\Gamma^{-1}(I) = \emptyset$ et $\Gamma(F) = \emptyset$).
4. un ensemble J de k joueurs et une application θ de $J \times X$ dans J qui, dans chaque état x de jeu, désigne le successeur au trait $\theta(j, x)$ du joueur j .
5. une fonction dite de gain, d'enjeu ou de préférence et qui est une application de A partie de X contenant F dans R .

Cette définition n'est pas générale et l'on peut rencontrer des exemples de jeux qui réclament une modélisation différente, sensiblement plus complexe : par exemple, elle convient pour le jeu d'échecs ou les petits chevaux, pas pour les jeux de rôles.

Elle suffit néanmoins pour définir quelques termes de didactique.

* Une partie est une suite finie d'états $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de X telle que $x_1 = I$, $x_n \in F$ et $\forall_i x_{i+1} \in \Gamma(x_i)$. Les "états permis" sont les positions de X qui peuvent figurer dans une partie (aux échecs, les états non permis s'appellent parfois une féérie).

* Une stratégie S est une application de $X \rightarrow X$ qui détermine le choix d'un joueur dans tous les états permis $S(x) \in \Gamma(x)$, puisqu'il y a k joueurs, k stratégies suffisent à déterminer une partie.

.../...

* Une tactique T_A sera une application d'une partie A de X dans X et telle que $x \in A, T_A(x) \in \Gamma(X)$. Une stratégie est donc une tactique définie sur X tout entier.

* Un état de "connaissance" d'un joueur C sera caractérisé par une application de X dans $\Gamma(X)$ telle que $(\forall x) (C(x) \subset T(x))$. Une "connaissance" (non vide) restreint strictement les choix des joueurs. (Cette définition est à rapprocher de celle de l'information).

* Une connaissance "déterminante" réduit à un seul état le choix du joueur dans un certain nombre d'états (resp. dans tous les états), et donc caractérise une tactique (resp. une stratégie).

Une acquisition de connaissances, par exemple sous l'effet d'une information reçue (ou d'un apprentissage), est une modification de l'état de connaissance : un couple (C, C') - en réalité $C(t), C'(t+\Delta t)$ puisqu'on évoque le temps.

Le plus souvent, suivant en cela la théorie de l'information, on considère que $C'(x) \subsetneq C(x)$, c'est-à-dire que la connaissance réduit l'incertitude du sujet en supprimant des possibilités de choix.

Mais il est nécessaire, pour modéliser les modifications de connaissances de l'élève, d'imaginer qu'il n'envisage pas à l'instant toutes les positions permises (bien qu'elles le soient par les règles, objectivement) et qu'une modification de son état de connaissance consiste non pas à réduire son incertitude mais au contraire à l'augmenter par la considération à l'instant $t + \Delta t$ de possibilités nouvelles ouvertes à son choix. Cette considération écarte l'usage strict de la théorie de l'information.

* Modèle d'action : Nous appellerons "modèle d'action" tout procédé de calcul engendrant une stratégie (ou une tactique).

De même, nous pourrions appeler représentation "ce" qui dans un jeu particulier, va engendrer les états de connaissance, ce qui va permettre de le prévoir.

.../...

J'ai utilisé ces définitions dans plusieurs cas et notamment dans l'étude des stratégies de mesurages avec H. RATSIMBA-RAJOHN. On en trouvera dans sa thèse une rédaction beaucoup plus détaillée avec plusieurs exemples intéressants, ainsi que dans la thèse de A. BESSOT et F. RICHARD.

Le premier avantage d'un modèle de ce genre est de permettre dans des cas précis, d'envisager a priori "toutes" les suites de réponses possibles et de les comparer du point de vue de leur efficacité.

Une stratégie gagnante fournit contre toute défense une partie de gain positif, mais on peut évaluer diverses caractéristiques

- son coût, par exemple le nombre de coups amenant la fin de la partie
- le gain qu'elle procure...

Une stratégie non gagnante à tout coup pourra être néanmoins meilleure qu'une autre du point de vue des risques de pertes qu'elle entraîne, des gains qu'elle permet d'espérer, etc...

La théorie des jeux permet alors d'étudier les dilemmes qui se présentent, en particulier dans le cas de la nature "contre" laquelle la plupart des exercices d'apprentissage fondamentaux sont envisagés, mais c'est le cas du maître.

La construction de modèles d'action permet d'aller beaucoup plus loin dans l'analyse de comportements possibles du sujet, comme nous le faisons dans plusieurs exemples (cf. thèse H. RATSIMBA-RAJOHN) L'étude de l'adéquation d'une situation à une connaissance vise donc à montrer que la stratégie optimale peut être engendrée par cette connaissance et pas par une autre. Réciproquement, il devient alors possible de faire des hypothèses sur les variables de la situation et sur leur influence sur les stratégies et sur les changements de stratégies (cf. thèse BESSOT-RICHARD)

Le sens d'une décision, d'un choix de l'élève peut être modélisé lui aussi, à l'aide de plusieurs composantes parmi lesquelles :

1. L'ensemble des choix envisagés par l'élève et rejetés par un choix retenu.
2. L'ensemble des stratégies possibles envisagées et exclues, en particulier la suite des choix ou des stratégies de remplacement envisagées par le sujet.
3. Les conditions mêmes du jeu qui paraissent déterminantes pour le choix retenu, en particulier l'espace des situations engendrées par les valeurs des variables pertinentes qui conservent à la décision un caractère d'optimalité, ou de validité, ou de pertinence.

..../...

Le jeu et la réalité

i) Ressemblance

Dans sa vie "réelle", le sujet organise ses actions selon ses intérêts, dans le cadre de règles inconnues et changeantes ; à l'opposé de ces activités sérieuses, professionnelles ou privées, se présentent les situations de jeu où il peut au contraire choisir ses règles, se livrer au plaisir, libérer des autres contraintes.

Pourtant on connaît de nombreux exemples où la description précise du fonctionnement de certaines relations sociales, financières, économiques, militaires, etc..... est éclairée et facilitée par sa transcription en termes de jeu ; la situation de jeu est souvent un bon modèle de situations réelles.

C'est pourquoi le jeu peut être un puissant dérivatif et un symbole de la vie : il lui ressemble ! En même temps, on peut se rendre maître des contraintes qui, dans la réalité, oppriment le joueur et cette liberté joue un rôle fondamental dans l'équilibration des frustrations qu'elles causent.

Examinons par exemple le jeu de la bobine rapporté par FREUD. L'enfant fait disparaître la bobine sous un meuble "fört", puis à volonté la fait réapparaître "da"....On voit bien les rapports que le jeu peut avoir avec les apparitions et les disparitions - non contrôlées et surtout non prévisibles - de la mère. Mais il serait erroné de croire que la bobine représente la mère et que l'enfant reproduit ou imite sans plus une relation de la vie courante.

Pour l'enfant, l'intérêt réside en ce que, dans le modèle, (dans le jeu) il commande les mouvements de la bobine alors que dans la vie il est sans pouvoir sur les apparitions de sa mère. Ce jeu de la bobine lui permet de revivre l'angoissante situation de la séparation avec sa mère : "fört" mais d'en contrôler l'effet émotif en suscitant à volonté la joie du retour "da". Certes, la reproduction du plaisir est liée au processus et il faut que la bobine disparaisse pour pouvoir réapparaître. Cependant, c'est le contrôle par l'enfant qui est la condition fondamentale. Une bobine "automatique" qui apparaîtrait à intervalles de temps réguliers ne jouerait pas le même rôle. Dès que l'enfant pourrait prévoir les réapparitions, le jeu cesserait de l'intéresser.

.../...

Une bobine qui ferait des apparitions aléatoires (qu'on ne peut ni commander ni prévoir) serait angoissante, trop "réaliste", c'est-à-dire trop près de la situation symbolisée de la mère. A moins qu'il ne découvre que la bobine réapparaîtra sûrement bientôt, qu'il la guette et qu'elle se montre effectivement pendant ce temps d'attente à un moment tout de même imprévu : dans ces conditions, il arrive que le bébé éclate de rire, surtout s'il découvre que quelqu'un commande la bobine avec malignité. Mais ce rire est une réaction de défense, à l'opposé du plaisir de la prise de contrôle des situations comme la dérision est opposée au pouvoir. Rires, mais rires de l'angoisse en passe d'être surmontée.

Le jeu est un symbole en ce sens qu'il ressemble "suffisamment" à la vie. Il sollicite du joueur le même genre de possibilité d'action, le même genre d'émotions, de motivations, et il s'en distingue parce qu'on y commande la plupart des conditions qui, dans la réalité, oppriment et échappent au joueur.

La ressemblance est le moyen de donner un sens à la différence.

ii) Dissemblance

On pourrait croire ainsi qu'on a justifié et expliqué la séparation fondamentale qui oppose le jeu à la vie, ou plus exactement le désir et la réalité, tout en permettant de les placer l'un par rapport à l'autre :

- le jeu conventionnel et symbolique jouant leur rôle à l'intérieur du jeu de la vie
- le jeu symbole de la vie...

Mais si l'on suit Lacan, le symbole créé pour équilibrer les frustrations et les tensions nées des relations avec l'objet du désir, hérite en fait de leur caractère frustrant. Par exemple, lorsque la bobine apparaît quand on le veut et où on le veut, la prise de contrôle est achevée et le jeu disparaît en tant que tel. Ainsi, le jeu qui reste un jeu par définition ne satisfait pas le joueur et crée le besoin d'une nouvelle partie, d'un nouveau jeu ou d'un nouveau symbole. Lacan dit que les relations avec le symbole doivent donc être elles-mêmes équilibrées par la création d'un nouveau symbole ; ainsi la chaîne du sens est ouverte.

Le jeu doit être, soit contrôlé totalement et donc rejeté comme objet de désir, soit reproduit sans fin. Ces deux caractères sont très importants :

- un "jeu" où le joueur commanderait toutes les issues, tous les résultats, et gagnerait à coup sûr, n'offrirait aucune incertitude, et laisserait la place à aucune simulation des incertitudes de son "modèle".

"Si un jeu compliqué n'est pas un jeu utilisable tel quel en classe,....un jeu analysé est un jeu mort" (A. Deledicq) - le jeu ne peut pas être purement gratuit. Il est nécessaire qu'il y ait, face au joueur un partenaire, un milieu, une loi de la nature qui s'oppose dans une certaine mesure à ce qu'il obtienne à tout coup le résultat voulu.

Approche systémique des situations d'enseignement

L'approche systémique des situations d'enseignement paraît indiquée dans la mesure où les sous-systèmes en présence : l'enseigné, le système éducatif, sont identifiables immédiatement en tant qu'acteurs.

Elle présente de l'intérêt dans la mesure où la considération des sous-systèmes dégagés permet, soit de simplifier sensiblement l'étude des problèmes posés, soit d'isoler certains de ces problèmes qui peuvent être résolus dans ces sous-systèmes. Elle se révèle indispensable si la totalité des phénomènes didactiques peut être prise en charge de cette façon et peut alors prétendre à fournir un fondement théorique.

Mais elle présente une certaine ambiguïté et il y a danger qu'elle ne soit que l'instrument d'une projection sur la réalité du modèle pensé par le chercheur.

L'approche (système) classique des situations d'enseignement met l'accent sur ces systèmes concrets, en présence (le maître, l'élève) et leurs fonctions, leurs propriétés. Elle conduit à examiner, à l'aide du modèle de fonctionnement social, la manière dont ces fonctions sont assurées et intériorisées. Les difficultés observées seront

.../...

alors imputées aux mauvaises réponses données aux besoins du système. Ce raisonnement constitue une réification, (BERGER et LUCKMANN 1966), c'est-à-dire que le schéma abstrait et la réalité "doivent" coïncider, et qu'il n'y a plus de place pour l'expérience et pour la falsification. Au contraire, la décomposition en sous-systèmes, envisagée ici, a pour objet la définition des jeux qui permettent de coordonner les stratégies opposées des partenaires en relation. Nous trouverons ainsi les jeux de l'élève avec son environnement didactique, relativement au savoir, les jeux du maître qui joue avec les jeux de l'élève... Il s'agit de postuler l'objet de l'étude didactique et de prouver son existence. La méthode apparaît, dès 1970, dans les travaux que nous regroupons ci-après, et s'améliore ensuite de façon empirique. Elle est très proche de celle préconisée par CROZIER et FRIEDBERG [1977] pour l'étude des systèmes sociaux et politiques :

"Si l'on peut... découvrir des stratégies suffisamment stables à l'intérieur d'un ensemble" (de personnes) et si l'on peut, d'autre part, découvrir les jeux, les règles du jeu et les régulations de ces jeux à partir desquelles ces stratégies peuvent être effectivement considérées comme rationnelles, on a à la fois, la preuve effective que cet ensemble peut être considéré comme un système et des réponses déjà précises sur son mode de gouvernement"⁽¹⁾.

Il serait encore naïf de croire que la construction de ces "systèmes d'action concret" qui articulent les jeux des acteurs en présence, selon CROZIER et FRIEDBERG, peut se passer de la confrontation permanente avec la réalité. Anticiper la pertinence des éléments retenus pour expliquer un phénomène, comporte évidemment le risque de s'enfermer dans les catégories préalables que l'on a acceptées comme point de départ parce qu'elles étaient conformes aux idées reçues. Et c'est seulement par un travail incessant d'analyse de la signification de nombreuses observations naturelles ou provoquées et d'exigences méthodologiques locales et globales que l'on peut relier ces observations aux hypothèses sur les jeux par rapport auxquels elles sont rationnelles et sur le système didactique qui contient ces jeux.

(1) L'acteur et le système p. 216

2. Les situations a-didactiques

Les sous-systèmes fondamentaux

i) Schémas classiques

En première approche, le jeu didactique met en relation un premier joueur: le système éducatif - le maître - porteur de l'intention d'enseigner une connaissance et un second joueur, l'enseigné, l'élève. Nous avons montré précédemment la nécessité du maître, réel ou intériorisé.

Est-il possible de définir le jeu didactique en se limitant à ces deux sous-systèmes ? Plusieurs schémas ont été proposés pour cela, celui de la communication dû à OSGOOD et celui du conditionnement scolaire dû à SKINNER.

Dans le schéma de la communication, le système éducatif est un émetteur d'informations, l'élève un récepteur qui décode les messages qu'il reçoit, à l'aide de son répertoire. L'enseignement consiste, à l'aide de messages formés uniquement avec le répertoire du récepteur - pour qu'ils soient intelligibles - de susciter la création de nouveaux éléments à joindre au répertoire (fig. 2). Il est clair que

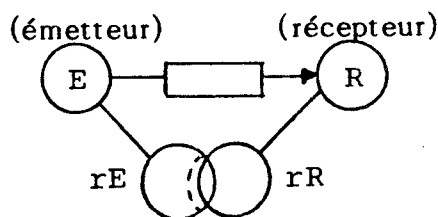


Figure 2

la règle qui s'impose à un maître qui adopterait ce modèle, serait de ne jamais introduire de connaissance nouvelle autrement que par une méthode de construction connue portant sur des concepts connus. Ce qui est communiqué, c'est seulement le savoir sous sa forme culturelle et pour les mathématiques, sous leur forme axiomatique. Ce modèle est insuffisant

pour de nombreuses raisons. Par exemple, il ne permet pas de définir le sens de ces messages mémorisés autrement que comme reformulation des messages antérieurs. Pourquoi ces messages seraient-ils mémorisés d'ailleurs ? Ces apprentissages par appréhension statistique où les sémantèmes les plus fréquemment proposés par l'émetteur s'insèrent peu à peu dans le répertoire du récepteur en modifiant celui-ci "...imaginés par A. MOLES (1967) p. 110) relèvent d'hypothèses empiristes sensualistes depuis longtemps réfutées.

.../...

Ce schéma suppose aussi que dans tout message qui lui sera adressé, l'élève reconnaîtra ce qui est un savoir nouveau à apprendre... quelle transparence !

Le schéma de l'apprentissage béhavioriste (fig. 3) répond à cet objection en proposant un schéma d'apprentissage composé de deux sous-systèmes : l'élève qui influence (nous dirons qui agit sur) le milieu, et le milieu qui "informe" ou sanctionne l'élève.

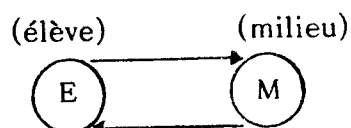


figure 3

L'élève, perturbé par l'influence du milieu, tente d'annuler ces sanctions par des modifications du milieu et/ou par des apprentissages qui le modifient, lui. Bien sûr, l'enseignant est une partie du milieu et peut même se substituer à lui. Ce schéma suppose que le savoir peut s'exprimer sous forme d'une liste de couples stimulus-réponse. Cette thèse a d'abord été réfutée par CHOMSKY-MILLER à propos de l'apprentissage de la langue naturelle qui a été reconnue comme ne pouvant être engendrée, au mieux, que par un automate fini et pas par un modèle stimulus-réponse. Malgré l'objection de SUPPES (pour tout automate fini, il existe un modèle S.R. qui lui est asymptotiquement équivalent), les considérations de NELSON et ARBIB sur la vitesse de convergence de ces modèles les a condamnés (1).

.../...

(1) BROUSSEAU-GABINSKI (1974) donne une présentation assez complète de cette question et une expérience (BROUSSEAU-MAYSONNAVE) apporte une vérification expérimentale qui consiste à comparer la vitesse d'apparition de certains théorèmes (en actes) chez des élèves de dix ans avec les prévisions d'un modèle stochastique d'apprentissage. L'accord est convenable dans le cas d'une situation simple (course à 7). Les enfants sont beaucoup plus rapides que ne le prévoit le modèle, quelques que soient les valeurs de ses paramètres de commande.

ii) Première décomposition proposée

Sans rejeter pour l'instant les réductions ci-dessus, il apparaît qu'il faut considérer deux type de jeux distincts :

a) Les jeux de l'élève avec le milieu a-didactique, qui permettent de préciser quelle est la fonction du savoir après et pendant l'apprentissage. Ces jeux sont évidemment spécifiques de chaque connaissance.

b) Les jeux du maître en tant qu'organisateur de ces jeux de l'élève. (en tant qu'ils sont aussi spécifiques du savoir visé). Ces jeux concernent au moins trois partenaires et généralement quatre : (le maître, l'élève, l'environnement immédiat de l'élève, le milieu culturel). Le jeu du maître (figure 4) dans chaque système d'action concret, définit et donne un sens au jeu de l'élève et à la connaissance.

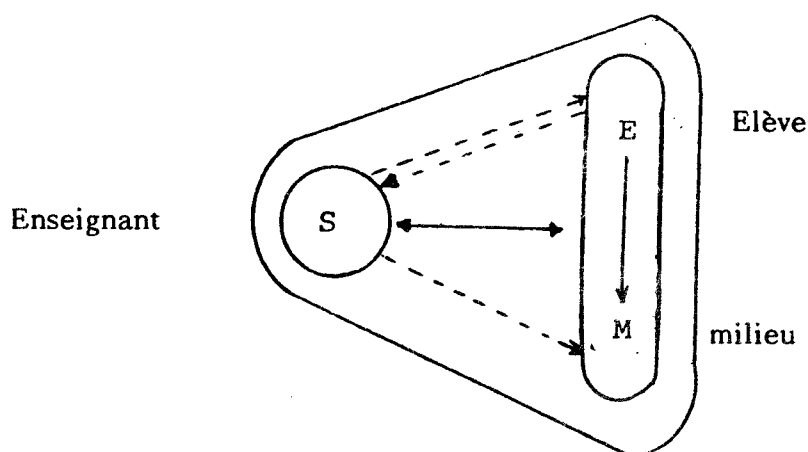


Figure 4

Il découle de cette définition que les deux types de jeux principaux du maître sont la dévolution que nous avons déjà présentée, et l'institutionnalisation. Dans la dévolution, le maître met l'élève en situation a-didactique ou pseudo a-didactique. Dans l'institutionnalisation, il définit les rapports que peuvent avoir les comportement ou les productions "libres" de l'élève avec le savoir culturel ou scientifique et avec le projet didactique : Il donne une lecture de ces activités et leur donne un statut. Ces deux genres de négociations sont bien distinctes. Les discussions qui précèdent ont bien fait pressentir pour le premier les éléments de choix, ses enjeux et ses règles, qui permettent de le modéliser en termes de jeux. Le second, beaucoup plus lié au contrat

.../...

didactique est l'objet de travaux en cours. Il est préférable d'y revenir après l'étude de la situation a-didactique.

iii) Nécessité du sous-système "Milieu a-didactique"

Ainsi, dans le cas général, la situation didactique ne peut être modélisée ni comme une simple communication, ni comme une simple interaction sociale. Il est nécessaire de faire intervenir un autre système.

Cette nécessité découle d'une des clauses du contrat didactique lui-même qui implique le projet de son extinction : il est sous-entendu, dès le début de la relation didactique, qu'un moment doit arriver où il se rompra. A ce moment, à la fin de l'enseignement, le système enseigné sera supposé pouvoir faire face, à l'aide du savoir appris, à des systèmes dénués d'intentions didactiques. Le savoir enseigné à l'élève est supposé lui donner alors la possibilité de LIRE ses relations avec ces systèmes comme des nouvelles SITUATIONS A-DIDACTIQUES et par ce moyen, leur apporter une réponse appropriée. Le MILIEU est le système antagoniste du système enseigné, ou plutôt, précédemment enseigné.

Cette lecture peut se faire en réalité de différentes manières, mais la cohérence exige que nous la modélisions sous forme de "jeux" reconnus semblables à ceux que l'élève connaît. Le système enseigné peut alors prendre des décisions soutenues par ses connaissances, et de plus, établir entre les deux situations, l'ancienne et la nouvelle, des relations de signification. Il peut, au contraire, lire ces situations a-didactiques sous forme de JEUX nouveaux appelant de nouvelles réponses sans référence avec celles qu'il connaît. Il peut, dans tous les cas, y voir l'occasion de se poser des questions nouvelles et, éventuellement encore, sans réponse pour lui.

Inversement, la situation didactique doit comprendre, réellement ou simplement évoquée, une représentation de ces rapports futurs. Elle doit donc inclure et mettre en scène un autre système, distinct du système éducatif et qui représentera "le milieu". Au fur et à mesure des progrès des élèves, cette représentation culturelle et didactique du milieu sera supposée se rapprocher de la "réalité" et les relations du sujet avec ce milieu devront s'appauvrir en intentions didactiques.

Il en résulte plusieurs conséquences :

- La relation didactique s'appuie toujours sur des hypothèses épistémologiques, conscientes ou non, explicites ou non et cohérentes ou non.

- L'analyse des relations didactiques implique la définition ou la reconnaissance de ces jeux "fondamentaux" et a-didactiques, mettant en présence un milieu et un joueur, ces jeux étant tels que le savoir - tel savoir précis - apparaîtra comme LE moyen de produire des stratégies gagnantes. Il faut pour cela disposer d'une forme particulière et très concrète de connaissances épistémologiques.

- A un moment donné de l'enseignement, l'élève se trouve engagé par son contrat didactique dans un rapport plus ou moins réel avec un milieu organisé (au moins en partie) par le système éducatif. Ce rapport a été organisé afin de justifier la production PERTINENTE par l'élève de comportements qui sont les indices de l'appropriation du savoir. C'est-à-dire que la réponse de l'élève ne doit pas être motivée par des obligations liées au contrat didactique mais par des nécessités a-didactiques de ses relations avec le milieu.

- Les relations de l'élève avec le milieu peuvent être conçues (en particulier par le système éducatif) comme jouant des rôles très différents :

- * Par exemple la situation a-didactique peut être incapable de provoquer aucun apprentissage. Toute la vertu didactique étant contenue dans le contrat didactique.

- * A l'opposé, les effets réciproques du milieu et de l'élève peuvent être attendus comme suffisants à eux seuls pour provoquer les adaptations et les apprentissages escomptés (nous parlerons alors de situation d'apprentissage au sens strict). Le système éducatif se borne alors à choisir, organiser et maintenir des rapports assurant la genèse de la connaissance du sujet. Le renvoi permanent de l'élève à l'interrogation du milieu ne lui laisse pas longtemps ignorer que le contrat pédagogique est vidé de tout contenu didactique.

- * Le cas général est intermédiaire évidemment et conjugue un contrat didactique et une situation a-didactique qui peut être aussi une situation d'apprentissage par adaptation.

iv) Statuts des concepts mathématiques

Nous avons vu que la production et l'enseignement des connaissances mathématiques demande un effort de transformation de ces connaissances en savoirs, une dépersonnalisation et une décontextualisation qui tendent à effacer les situations historiques (les jeux) qui ont présidé à leur apparition. Cependant, ces transformations ne font pas disparaître complètement leur caractère fondamental qui est de répondre à des questions : les questions - les motivations - changent, la plupart disparaissent du corps de la théorie mais subsistent sous la forme de problèmes. Il est assez clair pour la plupart des enseignants de mathématiques que seule la résolution de problèmes peut attester que l'élève a acquis, au moins en partie, les connaissances mathématiques visées. Le champ des problèmes relatifs à une connaissance ne cesse à son tour de se transformer au fur et à mesure de l'évolution de la théorie.

Il s'instaure une sorte de dialectique entre la capacité de la théorie mathématique à résoudre plus facilement le stock de problèmes existants et la capacité du stock de problèmes de faire fonctionner de façon non triviale les connaissances transmises. Cette dialectique repose sur un nécessaire équilibre entre l'activité scientifique qui tend à poser de nouvelles questions à résoudre, et ainsi augmente le champ des problèmes et des connaissances, et la communication de ces connaissances qui pousse à une meilleure organisation théorique qui diminue la complexité du champ. Cette réorganisation banalise alors les problèmes anciens et permet la réduction du champ des problèmes nécessaires à l'appréhension des connaissances théoriques qui peuvent alors poser de nouvelles questions.

Ce système d'actions et de rétroactions n'assure pas un développement "régulier" des mathématiques car un équilibre ne peut que se rompre dans ce domaine et provoquer les différents types d'activités. En tout cas, il montre que la correspondance entre problèmes et connaissance évolue, et n'est pas intrinsèque. Ce n'est que sous le contrôle d'une théorie de ces rapports que l'on pourra proposer à l'enseignement des situations a-didactiques.

D'autre part, si l'on considère l'évolution des connaissances

.../...

et des concepts mathématiques, il est courant de constater qu'elle obéit souvent à un schéma que le fonctionnement que nous venons d'exposer tend à justifier.

L'étape finale, celle qui met le concept sous le contrôle d'une théorie mathématique, permet de le définir exactement par les structures où il intervient et les propriétés qu'il satisfait. Seule cette étape lui donne son statut de concept mathématique et le met à l'abri des ambiguïtés et des "erreurs" - mais non des reprises et des mises à l'écart.

Cette étape est généralement précédée d'une période où le concept est un objet, familier, reconnu, nommé dont on étudie les caractéristiques et les propriétés mais que l'on n'a pas encore, pour diverses raisons, organisé et théorisé. Telles la notion de fonction au XIXème siècle ou celle d'équation au XVIème, ou celle de variable au XXème. Le fonctionnement et le rôle de ces concepts paramathématiques est assez différent de celui des concepts mathématiques. Les premiers sont plutôt des outils et les seconds des objets dans le sens où l'entend R. DOUADY dans sa thèse.

Mais on peut dire aussi en prenant "le point de vue plus formel, plus "systémique" qu'en l'absence de statut mathématique avéré, les termes utilisés sont des outils qui répondent à des besoins d'identification, de formulation et de communication, et que leur usage repose sur un contrôle sémantique. Les mathématiciens les utilisent bien, non parce qu'ils en possèdent une définition qui donnerait sur eux un contrôle "syntaxique", mais parce qu'ils "les connaissent bien" et qu'aucune contradiction qui obligerait à les mathématiser davantage n'est apparue à leur sujet. Cet usage paramathématique correspond à une certaine économie d'organisation théorique, donc d'économie pour la communication, l'enseignement et la résolution de problèmes. Il est très acceptable tant que les difficultés n'apparaissent pas : contradictions (les fondements des mathématiques à la fin du XIXème siècle) ou champ sémantique trop étendu (comme par exemple le concept de probabilité juste avant KOLMOGOROV). Mais l'étape paramathématique d'un concept est vraisemblablement précédée d'un autre que Y. CHEVALLARD a proposé d'appeler "protomathématique".

.../...

Il s'agit alors d'une certaine cohérence de fait dans les préoccupations des mathématiciens d'une époque, de points de vue, de méthodes, de choix de questions qui s'articulent très nettement en un concept aujourd'hui identifié mais qui, à l'époque, ne l'était pas.

Pour qu'on puisse parler de concept, il faut bien sûr que des indices suffisants témoignent que ces préoccupations convergentes n'étaient pas le simple fait du hasard ou de la nécessité mathématique, mais aussi celui d'un choix des mathématiciens de l'époque et que ces proximités de questions étaient perçues par eux comme liées, même s'ils ne possédaient aucun terme pour les identifier. Il ne s'agit donc pas de confondre des conceptions historiques au nom de leur identité mathématique. Par exemple, et en simplifiant beaucoup, Al KWARISMI s'occupait des rationnels mais pas vraiment des réels; par contre, STEVIN exposa toute la problématique des réels et le concept a donc atteint avec lui, le niveau protomathématique.

Cette hypothèse d'un objet de connaissance encore implicite mais réglant déjà les décisions dans un champ de questions, repose en fait sur la reconnaissance, a priori, de la possibilité d'interpréter les textes mathématiques à l'aide d'une sorte de représentation du travail du mathématicien. Elle implique donc la prise en charge, non seulement des mathématiques, de leur histoire et de leur épistémologie classiques, mais aussi d'une certaine part de la didactique, dans la mesure où elle prétend modéliser ce travail.

Types de situations

Bien qu'elle n'en soit ni l'original ni la copie, cette classification des différents statuts d'un concept mathématique correspond en fait assez bien à la différenciation des sous-systèmes de la situation a-didactique.

Il s'agit maintenant d'établir :

- . une classification des interactions du sujet avec le milieu a-didactique
- . une classification des types d'organisations de ce milieu
- . une classification des types de fonctionnement d'une connaissance
- . et une classification des modes d'évolution spontanée des connaissances.

Chaque classification devra se justifier assez clairement dans son propre domaine :

- par les différences importantes et évidentes entre les objets classés
- par la simplification qu'elle peut apporter dans leur description, leur analyse et leur compréhension

- par la pertinence de cette classification (et son importance par rapport à d'autres possibles) pour chaque domaine concerné
- par son caractère complètement exhaustif

Les classes obtenues doivent se correspondre et pouvoir s'organiser en un hyposystème. Par exemple, un certain type d'interaction est spécifique d'un type d'organisation sociale et matérielle, il favorise une certaine forme de connaissance et peut aussi la faire évoluer.

Ces hyposystèmes, ainsi identifiés, ont pour but de prévoir et d'expliquer certaines relations entre les interactions que l'on observe, (ou que l'on veut obtenir), les connaissances dont on constate ou vise l'acquisition, des contraintes créées par le milieu...etc. Ils sont donc un support pour produire des hypothèses falsifiables. Il n'est pas exigé qu'ils soient exclusifs, une même situation "réelle" pourra en présenter généralement plusieurs qui correspondront aux diverses composantes et aux divers savoirs en jeu. Ils sont supposés faire évoluer isolément les connaissances et les questions de l'élève, mais ils peuvent s'appuyer les uns sur les autres et s'articuler en processus ou en dialectiques organisées ou spontanées.

Rien n'obligera donc à les prendre comme une norme, un carcan où enfermer le fonctionnement de la connaissance et l'ingénierie didactique.

Ces conditions ne seront pas trivialement satisfaites, notamment la correspondance évoquée plus haut n'est pas assurée à l'avance, même s'il est possible de la soupçonner ou de la croire inévitable. Après coup, elle paraîtra évidente mais ses mises à l'épreuve expérimentales ont montré à quel point ces paris sont hasardeux.

Le caractère nouveau de l'objet d'étude rend difficile la perception de l'intérêt relatif des questions et la nécessité ou la contingence des réponses apportées.

i) Les interactions.

Les relations d'un élève avec le milieu peuvent être classées en au moins trois grandes catégories :

.../...

- Les échanges de jugements (3)
- Les échanges d'informations codées dans un langage, (2)
- Les échanges d'informations non codées ou sans langage: les actions et les décisions qui agissent directement sur l'autre protagoniste. (1)

Ces catégories sont emboîtées car un échange de jugements est un échange d'informations particulières, et celui-ci un type particulier d'action et de décisions. Elles le sont strictement.

[1]*

Il existe des interactions où le joueur exprime ses choix et ses décisions sans aucun codage linguistique, par des actions sur le milieu. Nous assimilerons à cette classe d'interactions celles où apparaissent des messages d'un codage si facile par rapport à l'action qu'il ne jouera aucun rôle dans le jeu. De même que celles où il existe des échanges de messages mais sans rapport avec la solution du problème. Par exemple, le joueur s'exprime ou entretient une conversation anodine avec un tiers sans en attendre de rétroaction.

Il peut arriver aussi que le "joueur" soit un couple d'élèves coopérant à la prise de décision commune après avoir échangé des informations et des jugements. Mais cette relation composite comporte une composante d'action bien identifiable à laquelle se superposent d'autres interactions ayant des finalités locales et temporaires. Si l'échange d'information n'est pas nécessaire à l'obtention de la décision, si les élèves partagent les mêmes informations sur le milieu, la composante "action" est prépondérante.

[2]

. De même, il existe des interactions où le joueur agit en émettant un message à l'intention du milieu antagoniste sans que ce message signifie l'intention d'émettre un jugement. Il ne s'agit pas seulement de classer dans cette catégorie les ordres, les questions, etc... mais aussi toutes les communications d'informations. Certes, la plupart des informations sont implicitement accompagnées d'une affirmation de validité. Mais dans la mesure où l'émetteur n'indique pas explicitement cette validité, s'il ne s'attend pas à être contredit ou appelé à vérifier son information, si le contexte ne donne pas une certaine importance à la question de savoir si l'information est vraie, comment et pourquoi ou si cette validité est susceptible d'être établie sans difficulté, alors le message sera classé comme simplement informatif.

* Ces numéros renvoient tous au même type d'hypothèse (1) Action, (2) Formulation, (3) Validation

L'information ainsi donnée est supposée changer au moins l'incertitude du milieu et en général son "état".

(3) . Il existe enfin des interactions telles que les messages échangés avec le milieu sont des assertions, des théorèmes, des démonstrations, émises et reçues comme telles. La différence entre une information et une affirmation de validité est suffisamment claire et importante en mathématiques pour qu'il soit inutile d'insister ici. Nous verrons plus loin que ces déclarations peuvent être elles-mêmes de différents types, selon qu'elles portent sur la validité syntaxique ou sur la validité sémantique de l'énoncé contenue dans l'assertion, selon qu'elles interviennent comme preuve, démonstration ou comme axiomes ou définitions. (on pourrait aussi évoquer la validité pragmatique, appréciation sur l'efficacité de l'énoncé)

Il n'est pas nécessaire de prouver ici l'importance pour l'enseignement de distinguer ces trois types de productions attendues de la part des élèves.

Ils sont désignés dans les travaux expérimentaux que cet essai théorique accompagne :

- le premier comme "actions" sous-entendu non compris les formulations ou les déclarations de validité qui peuvent les accompagner
- le second comme "formulation" sous-entendu sans débats de preuve
- le troisième - le terme n'est pas très heureux, mais il est utilisé depuis quatorze ans - comme "validation"

ii) Les formes de connaissances.

Les formes de connaissances qui contrôlent les interactions du sujet ont fait l'objet de nombreuses approches. Toutes tendent à opposer la forme la plus explicite et la mieux assumée du savoir, celles qui s'expriment sur le mode "déclaratif" par exemple (SKEMP), à des formes plus implicites : les représentations, les schèmes, les savoir-faire... qui s'expriment sur un mode plus "procédural". Nous y avons ajouté une composante plus strictement linguistique : les codes et langages qui contrôlent les formulations.

.../...

(3) En simplifiant un peu, les formes de connaissances qui permettent de "contrôler" explicitement les interactions du sujet relatives à la validité de ses déclarations, sont principalement ses savoirs exprimables et reconnus comme tels par le milieu. Ils sont organisés en théories, en démonstrations et définitions bien déterminées sous leur forme culturelle la plus achevée.

La distinction entre un savoir et une connaissance tient d'abord à leur statut culturel ; un savoir est une connaissance institutionnalisée, le passage d'un statut à l'autre implique toutefois des transformations qui les différencient et qui s'expliquent en partie par les relations didactiques qui se nouent à leur propos.

Mais nous admettrons en première approche, que les connaissances explicites et les savoirs interviennent de façon comparable dans le contrôle des jugements de "l'élève". Ils forment en quelque sorte le "code" à l'aide duquel il construit, justifie, vérifie et démontre ses déclarations de validité.

Cette justification se réfère à la fois à la conviction profonde de l'élève et à la convention sociale acceptée.

Les preuves et validations explicites sont supposées s'appuyer les unes sur les autres jusqu'à l'évidence, mais leur articulation n'est sûrement pas automatique. Les savoirs et les connaissances s'actualisent dans une activité de recherche ou de preuve selon des modalités que l'heuristique cherche à découvrir et que l'intelligence artificielle tente de reproduire. Pour l'instant, elles restent assez inaccessibles à l'analyse scientifique et a fortiori au sujet lui-même. On peut les supposer gérées elles aussi par des représentations, des schèmes épistémologiques ou cognitifs, des modèles implicites, etc... La différenciation des types de connaissance que nous tentons ne doit pas aller plus loin qu'il ne faut pour organiser le débat didactique avec l'élève. Vraisemblablement, l'activité mentale brise ces fragiles distinctions et unifie ces modes de contrôle en une pensée complexe.

Cependant, il est utile de conserver la distinction faite en logique entre l'énoncé considéré comme une expression bien formée ou comme un ensemble de réalisations et l'assertion qui enclot cet énoncé dans une déclaration métathéorique sur sa

.../...

validité, sur un domaine donné ou sa déductibilité d'un système d'axiome.

En généralisant cette distinction, un jugement est composé :

- d'une description ou modèle exprimé dans un certain "langage" ou (dans une certaine théorie) renvoyant éventuellement à "une réalité" (c'est-à-dire au dispositif du jeu en cours)
- et d'un jugement sur l'adéquation de cette description, sur son caractère de contingence ou de nécessité ou sur sa consistance au regard des connaissances du sujet ou du milieu.

Il est très important de ne pas confondre a priori les connaissances et les savoirs, objets d'une activité de construction de la part de l'élève avec les connaissances et savoirs en tant que moyens de construction et surtout avec les connaissances qui décrivent les rapports que nous cherchons ici à établir entre ces deux domaines. Même si elles paraissent se présenter sous un aspect unifié ou identique, ces distinctions sont bien évidentes dans les travaux sur la "pensée naturelle" que nous avons utilisés dans plusieurs recherches [WERMUZ].

(2) La formulation des descriptions et des modèles dont il est question est réglée par un tout autre type de code. Même si la théorie des langages permet d'unifier la construction d'un énoncé et la démonstration d'un théorème, le recours constant, dans l'activité mathématique, à la langue naturelle et à toutes sortes d'autres types de représentations tels les dessins ou les graphes, exige de distinguer pour eux des codes et des modes de contrôles propres.

(1) Les différents types de représentations ou les théorèmes en actes qui régissent les décisions du sujet ne sont pas très faciles à identifier, même lorsqu'ils paraissent formulables ou explicites par le sujet. Mais de nombreux travaux commencent à montrer comment les régularités de comportements peuvent donner un accès à ce type de "modèles implicites". L'importance qu'ils jouent dans les acquisitions reste un problème largement ouvert, trop souvent abordé de façon trop étroite. Il est certain que ces formes de connaissance ne fonctionnent ni de façon complètement indépendante, ni de façon complètement intégrée pour contrôler les interactions du sujet. L'étude des rapports qui s'établissent entre ces types de contrôles dans l'activité du sujet et du rôle qu'ils jouent dans les acquisitions, est un secteur de la psycho-

gie, essentiel pour la didactique, étude à laquelle la didactique prétend d'ailleurs contribuer.

iii) L'évolution de ces formes de connaissance : l'apprentissage

Les connaissances évoluent selon des processus complexes. Vouloir expliquer ces évolutions uniquement par les interactions effectives avec le milieu, serait certainement une erreur car très tôt, les enfants peuvent intérioriser les situations qui les intéressent et "opérer" avec leurs représentations "internes", des expériences mentales très importantes. Ils règlent ainsi aussi bien les problèmes d'assimilation (augmentation de schèmes déjà acquis par l'agrégation de faits nouveaux) ou d'accommodation (réorganisation des schèmes pour appréhender des questions nouvelles ou pour résoudre des contradictions). Mais l'intériorisation de ces interactions n'en change pas beaucoup la nature : le dialogue avec un opposant "intérieur" est certes moins roboratif qu'un vrai dialogue, mais c'est un dialogue. Existe-t-il des formes d'apprentissage et d'évolution des connaissances distinctes selon les types que nous venons d'exposer ? Les connaissances théoriques s'augmentent et se restructurent-elles comme les langages et comme les modèles implicites ? Quels rôles jouent les différentes formes de connaissances dans les acquisitions des divers types ?

En mathématique, il existe un mode "conventionnel" de croissance des connaissances par le jeu de définition d'objets nouveaux dont on inventorie les propriétés qui servent à poser de nouvelles questions qui introduisent des définitions, etc... Si ce mode "axiomatique et formel" ne peut pas être retenu comme modèle global, même en se restreignant aux savoirs, il ne peut pas être entièrement rejeté, au moins comme modèle local. Il ne peut pas toutefois être étendu à l'apprentissage des représentations.

A l'opposé, les modes d'apprentissage du genre stochastique, fondés sur la répétition, ne paraissent guère adaptés aux connaissances complexes (de haut niveau taxonomique). Les descriptions de l'acquisition du langage par les jeunes enfants (comme celle proposée par E. ALARCOS LLORACH^(*)) mettent en évidence que les productions propres du sujet (comme le babil) apparaissent spontanément, mais presque comme des exercices, qu'elles s'insèrent dans les relations avec le milieu et là s'ajustent naturellement ou sont corrigées par des interventions assez variées.

(*) dans le langage encyclopédie de la Pléiade

Les étapes de cette acquisition ne sont compréhensibles que par l'étude globale des relations du sujet avec son milieu. Par exemple, le passage du mot-phrase à la phrase composée de plusieurs mots n'est pas une simple concaténation.

Une discussion serrée de l'intérêt de distinguer des formes d'acquisitions spécifiques des différentes formes de savoir évoquées plus haut, sort du cadre de ce rapport. Pour l'essentiel, il n'apparaît pas de contradiction avec les modèles épistémologiques que PIAGET rattache à sa théorie de l'équilibration, ni avec les conceptions de BACHELARD. Au contraire, nous avons montré dans plusieurs études précises, que la classification des types de situations pouvait éclairer ces théories et les prolonger [*].

Il faut insister sur le caractère "dialectique" de ces processus: les conceptions antérieures des élèves et les problèmes qui leur sont posés par le milieu conduisent à de nouvelles conceptions et à de nouvelles questions dont le sens est fondamentalement local.

Un des principaux arguments en faveur des modes d'évolution différents pour les différents modes de connaissances est celui que nous avons avancé plus haut et qui s'appuie sur l'histoire des mathématiques et sur l'épistémologie : l'évolution des concepts protomathématiques, celle des concepts paramathématiques et celle des concepts déjà mathématisés est différente. Inversement, l'étude de l'évolution des connaissances des élèves, à condition qu'elle soit convenablement étayée par l'analyse des conditions portant sur les situations, peut apporter un éclairage intéressant sur les processus historiques et constituer une sorte d'épistémologie expérimentale. C'est ce que nous avons tenté de montrer dans de nombreux travaux expérimentaux. [**]

iv) Les sous-systèmes du milieu.

Le fait que les différents types d'interactions avec le milieu et que les différentes formes de connaissances se justifient a priori et indépendamment, permet déjà de discuter les particularités du milieu qui leur sont nécessaires.

Par les questions du genre "pourquoi l'élève ferait-il ou dirait-il ceci plutôt que cela ? que doit-il lui arriver s'il le fait ou s'il ne le fait pas ?" "Quel sens aura la réponse si on la lui fournit...?"

[*] Les obstacles épistémologiques - G. BROUSSEAU

[**] Problèmes de didactique des décimaux - G. BROUSSEAU

Il est possible de dégager les conditions les plus importantes que ces typologies imposent au milieu.

Cependant, ici encore les catégories sont assez évidentes :

(3) Le milieu comprend-il ou non un opposant (ou un proposant) auquel le sujet doit se confronter pour atteindre le but fixé dans un échange d'opinions ?

(2) Le milieu comprend-il un récepteur des messages que l'élève doit émettre pour atteindre le but visé ?

La réponse à ces deux questions détermine des dispositions du milieu, et des règles de jeux totalement différentes.

Examinons-la en soulignant que pour l'instant, le milieu dont il s'agit est un milieu réel et non pas invoqué ou simulé, et que le professeur est supposé ne pas intervenir. Il est clair dans ce cas que les conditions ci-dessus correspondent à des différences très importantes de l'organisation de la classe ou du milieu. Trouver à qui parler et sur quoi agir sont peut-être les problèmes principaux de l'élève.

v) Schéma de l'action.

La figure 1 symbolise le modèle général, mais aussi le schéma de l'action sans interlocuteur.

Elle permet déjà de fournir une grille de lecture d'une situation réelle d'enseignement.

- Le "partenaire" (le jeu) est-il perçu comme dénué d'intentions didactiques?
- A chaque coup, l'élève a-t-il à choisir effectivement un état parmi plusieurs possibilités. Sait-il entre lesquelles ?
- L'élève peut-il perdre ? le sait-il, connaît-il à l'avance l'état final (la classe des états finaux) en particulier l'état final gagnant.
- Connaît-il les règles précises du jeu sans connaître une stratégie gagnante. Peut-on lui enseigner les règles sans donner une solution ? (a-t-il une recherche de stratégie optimale à faire).
- La connaissance visée est-elle nécessaire pour passer de la stratégie

.../...

de base à une stratégie meilleure (ou optimale). Est-elle le moyen principal de ce passage ?

- L'élève peut-il recommencer ? L'anticipation est-elle "gratifiée" dans le jeu ?
- L'élève a-t-il une chance de trouver lui-même la stratégie cherchée. s'il l'emprunte (à un autre élève)
- Les "réponses" (a-didactiques) du système aux choix défavorables de l'élève sont-elles néanmoins pertinentes pour la construction de la connaissance (donne-t-elle des indications spécifiques de l'erreur) ?
- Les contrôles des décisions sont-ils possibles (l'élève est-il conduit à les noter, à les observer) ?
- Une attitude réflexive est-elle utile, nécessaire pour progresser dans la solution ?

Avec ces derniers points, nous approchons de conditions limites d'une situation d'action : considérer la validité d'une solution relève d'une situation de validation ; certes, un élève qui réfléchit naturellement à son jeu est dans une situation a-didactique effective d'action, mais il intériorise et simule en quelque sorte une situation de validation. Si l'enseignant est conduit à vouloir que l'élève ait cette position réflexive, l'incantation ("réfléchis ! regarde ce que tu as fait...") pourra ne pas suffire et le maître devra communiquer son désir didactique par le moyen d'une situation de validation.

L'ouverture que nous représentons en première approche par une incertitude au sens de la théorie de l'information est une des conditions les plus importantes ainsi mise en lumière. La distinction entre la situation didactique et la situation a-didactique permet de concevoir pour l'élève, des situations ouvertes d'enseignement de la pensée mathématique parce qu'elle est déjà "faite". La manipulation de cette ouverture au niveau d'une classe entière est un problème technique délicat, mais accessible : par exemple, faire en sorte que la recherche de chaque élève ne soit pas écrasée par le travail d'un autre est un problème didactique (et non de pédagogie).

.../...

Cette grille de lecture peut aussi servir à la conception de situations didactiques nouvelles. Chaque jeu proposé peut être examiné et comparé à ceux que l'on connaissait déjà. Il est possible de fixer des problèmes d'ingénierie, de classer des dispositifs connus et de regrouper du point de vue de cette modélisation, les productions semblables, d'en prévoir de nouvelles. Le problème essentiel qui demeure du domaine expérimental est celui de l'importance de la réalisation, ou non, des conditions ainsi proposées, comme découlant logiquement, ou systématiquement des possibilités du modèle.

Les variables qui apparaissent ainsi ont des raisons théoriques d'être pertinentes, et des calculs économiques de complexité, ou d'efficacité peuvent les préciser. La confrontation avec la contingence ou avec l'expérience telle qu'elle est pratiquée dans la plupart des recherches ci-après^(*) est incontournable.

Le modèle, à ce point de vue, joue son rôle depuis déjà dix ans, son efficacité est attestée par le nombre de situations d'enseignement originales qu'il ne cesse de produire.

Un exemple en est donné accompagné de réflexions méthodologiques dans le texte assez court [L'enseignement de l'énumération - Annexe 1).

Lorsque les propriétés d'une situation capable de justifier (ou de provoquer) la mise en oeuvre d'une connaissance spécifique sont mieux connues, il est possible d'étudier les possibilités qu'a la première de faire évoluer la seconde. Les variables didactiques sont celles qui influent sur l'apprentissage et dont l'enseignant peut choisir la valeur [Ingénierie - Recherche sur l'enseignement du calcul numérique]. De nombreux problèmes d'apprentissage ont été étudiés à l'aide de ce modèle, nous en donnons un exemple dans le paragraphe suivant [La course à vingt] et plusieurs sont évoqués dans les annexes.

vi) Schéma de la communication.

Le "milieu" comprend un système récepteur et/ou émetteur avec lequel le joueur échange des messages.

(*) Présentées en annexe.

Nous supposons ici que l'objet de ces messages n'est pas d'agir sur le récepteur (de le changer, de prendre du pouvoir sur lui, de le contraindre, etc...) mais d'agir par son intermédiaire sur le dispositif "milieu".

L'élève est toujours engagé dans un jeu avec un dispositif milieu dénué d'intentions didactique. S'il avait à la fois des informations et des moyens d'action suffisants pour choisir seul les états du "milieu", ses messages n'ayant aucune finalité dans le jeu pourraient être quelconques. Nous supposons aussi, pour l'instant qu'il n'y a qu'un seul joueur A. Le récepteur n'a pas d'autre enjeu que de servir le joueur B ne fait personnellement aucun choix.

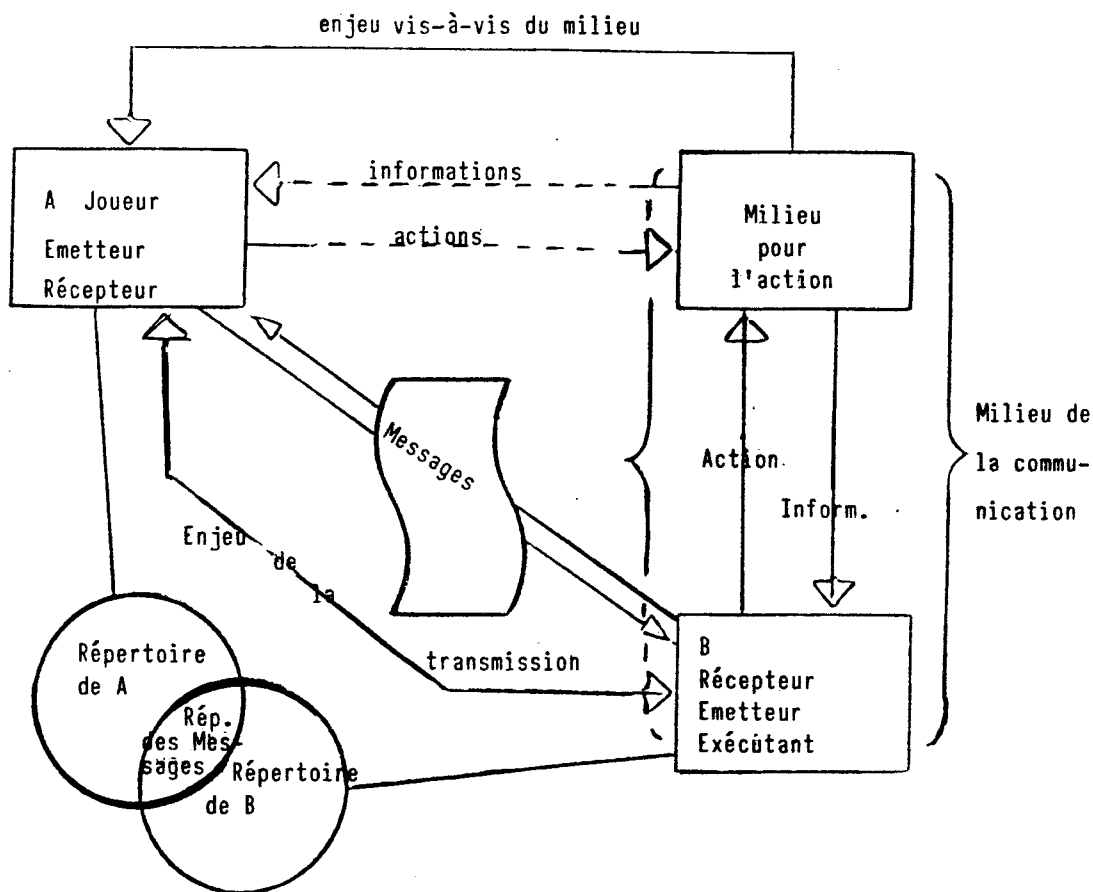


FIGURE 5

.../...

Les différents cas sont évidents :

- moyens d'action insuffisants. A doit décrire à B l'action qu'il devait effectuer et souvent aussi une partie du milieu pour que le message soit intelligible.
- informations insuffisantes pour A mais moyens suffisants, c'est B qui doit décrire le milieu et A, décoder la description et diriger l'observation.
- moyens d'action et informations insuffisantes pour A...

Dans le premier cas, par exemple pour A, le sens du message (le contenu information nécessaire au jeu) qu'il envoie à B, peut être représenté par le passage (le couple) des choix d'action que le jeu offre à B à celui choisi par A.

Dans le deuxième, c'est le passage des choix envisagés par A avant l'apport d'information de B à ceux qu'il envisage après.

Le fait que B soit aussi un joueur peut avoir une certaine importance, car il diminue la liberté de A donc le sens de son action. Il faut bien sûr qu'il coopère avec A. Le schéma n'est pas différent que les rôles soient bien identifiés ou indifférenciés (mais alors un joueur peut ne laisser à l'autre aucun choix à faire, aucune action).

Les messages échangés sont sous le contrôle des codes linguistiques, formels ou graphiques et donc les font fonctionner.

L'enjeu de la communication elle-même s'exprime par les rétroactions qu'exercent l'un sur l'autre les deux interlocuteurs, pour s'assurer qu'ils se sont compris. Leurs exigences porteront sur la conformité au code (minimal pour l'intelligibilité du message) l'ambiguïté, la redondance, le manque de pertinence (des informations superflues) et l'efficacité (les caractères d'optimalité) du message.

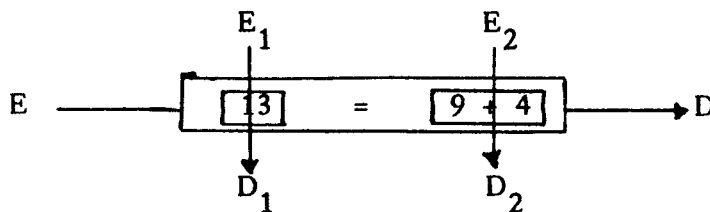
En combinant judicieusement un milieu (un jeu au sens 4) et des conditions convenables d'échange du message (portant sur le canal par exemple), il est possible d'influencer le type et le sens des messages obtenus du joueur.

Il est possible aussi de faire évoluer le code lui-même : passer d'une formulation en langue naturelle à un énoncé formel, ou des métaphores à des descriptions systématiques.

Ces résultats ont été obtenus dans plusieurs recherches, mais il faut s'attendre aussi à des déboires à cause de l'énorme capacité d'invention sémiologique des enfants.

Ce schéma de situations a-didactiques présente un certain intérêt pour donner du sens à (ou pour analyser le sens d')un message, une formule. Prenons un exemple tout-à-fait théorique et un peu provocateur : cherchons une organisation sociale (théorique) pour faire apparaître l'émission (par un enfant de 5 ou 6 ans pour fixer les idées) de la formule " $13 = 9 + 4$ " prise comme information (et non comme assertion). Il faut que l'émetteur E de la formule s'adresse à un destinataire D. Si D connaît la signification de 13 et celle de $9+4$ le message ne peut lui apporter éventuellement d'information que sur "=" paradigme d'un ensemble très restreint : $\{=, \approx, \}$ L'énoncé sera plus informatif si l'un des deux termes n'est pas connu du destinataire, par exemple si l'élève décrit conventionnellement un calcul. "9 est connu ainsi que 4, le résultat de leur somme est 13).

Mais si l'on considère que le premier terme est lui-même un message, le message doit être émis par un émetteur E_1 pour un destinataire D_1 afin de l'informer par exemple sur l'état d'un stock. $9 + 4$ est un message émis par E_2 à l'intention de D_2 dans un autre code pour l'informer sur l'état d'un autre stock ou du même, alors, le message complet informe D_1 que les deux messages 13 et $9 + 4$ désignent le même objet. Il ne reste plus qu'à trouver un jeu qui rende plausible ce fonctionnement de 6 personnes.



Pourquoi D aurait-il besoin de savoir si les deux messages en "langue 1" et en "langue 2" désignent ou non le même objet...

Ce type de raisonnement ne conduit pas toujours à un jeu utilisable en classe (c'est le cas ici), bien que des essais aient été faits, mais il est un moyen très efficace pour analyser le sens des productions des élèves et pour proposer des moyens de contrôle.

Des variantes sont aisément envisageables comme l'autocommunication qui conduit plus aisément pour la mise en mémoire, à des codes personnels. Les passages de l'oral à l'écrit, ou du graphe au discours ont été souvent observés et ont donné lieu à l'étude de l'influence de nombreuses variables [1]

Utiliser le langage mathématique de façon précise dans des communications délibérées entre élèves est certainement un des meilleurs résultats pédagogiques de ce type de situations. Il faut souligner l'importance :

- de la qualité du jeu avec le milieu afin d'assurer et de maintenir la pertinence et la richesse du discours des élèves
- de la fréquence d'emploi qu'il suscite dans les communications
- de la possibilité d'analyser les messages produits.

vii) Schéma de la validation explicite.

Les situations de communications convenables favorisent l'apparition de messages qui peuvent avoir une forme très proche du discours mathématique et qui sont concrètement significatifs pour un certain "milieu". Mais ces messages n'ont pas le sens d'un texte mathématique. Les situations de validation vont mettre en présence deux joueurs qui s'affrontent à propos d'un objet d'étude composé des messages et descriptions que l'élève a produits d'une part, et du milieu a-didactique qui sert de référent à ces messages d'autre part (figure 7).

Les deux joueurs sont alternativement un "proposant" et un "opposant"; ils échangent des assertions, des preuves et des démonstrations à propos de ce couple "milieu/messages". Ce couple est le nouveau dispositif, le "milieu" - le jeu au sens 4 - de la situation de validation. Il peut se présenter comme un problème accompagné de ses tentatives de solutions, comme une situation et son modèle, ou comme une "réalité" et sa description...

Alors que l'informateur et l'informé ont des rapports disymétriques avec le jeu (l'un sait une chose que l'autre ignore), le proposant

[1] cf. La création d'un code à l'école maternelle
et L'enseignement de la géométrie

et l'opposant doivent être dans des positions symétriques, aussi bien en ce qui concerne les informations et les moyens d'action dont ils disposent sur le jeu et sur les messages, qu'en ce qui concerne leurs rapports réciproques, les moyens de se sanctionner mutuellement et les enjeux vis-à-vis du couple milieu/message.

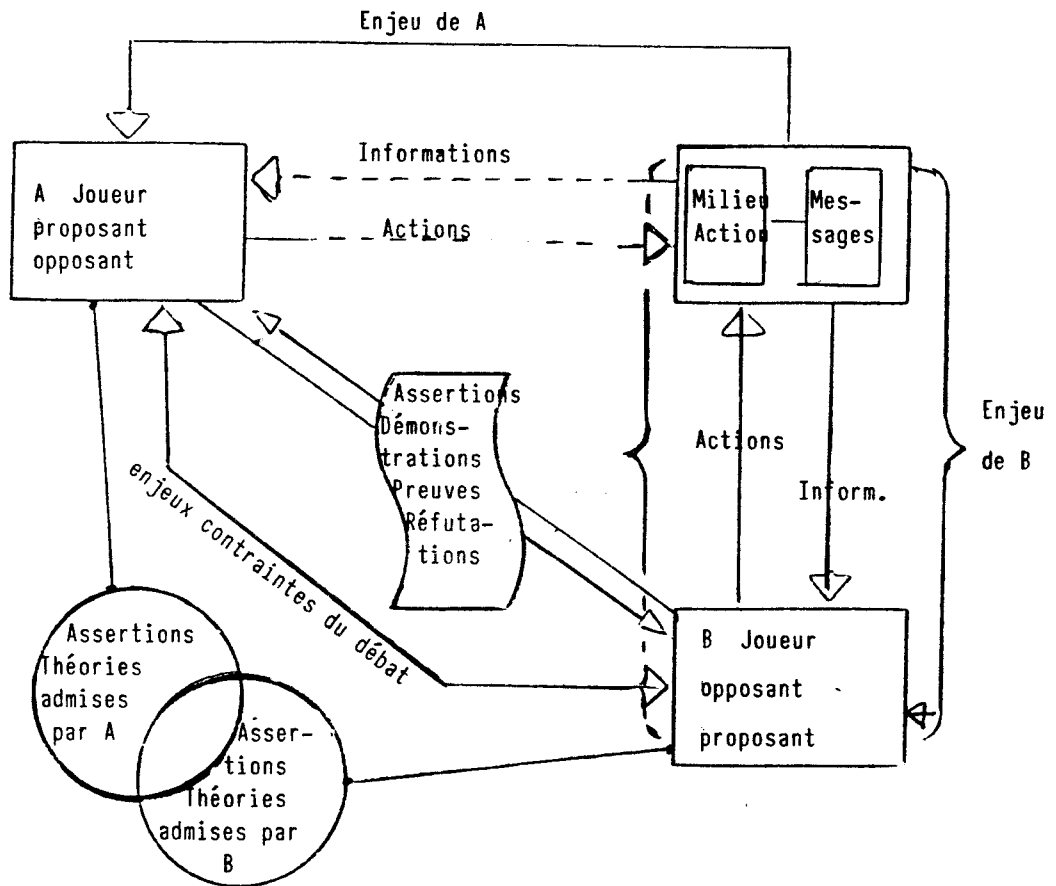


FIGURE 7

En particulier, l'un des deux joueurs ne doit pas avoir la possibilité d'obtenir l'accord de l'autre par des moyens "illégitimes" tels que l'autorité, la séduction, la réputation, etc...

La didactique se trouve devant le défi de produire des situations qui permettront à l'élève de mettre en oeuvre les savoirs et les connaissances mathématiques comme moyens effectifs de convaincre (et donc de se convaincre) tout en le conduisant à rejeter les moyens rhétoriques qui ne sont pas de bonnes preuves ou réfutations.

.../...

Le sens exact des déclarations de mathématiques est conditionné par cet éventail de choix : ce que dit un théorème c'est aussi ce qu'il contredit, ce que dit une démonstration c'est, non seulement ce qui est supposé admis par le proposant et l'opposant, mais aussi ce qui aurait pu être contesté. Le discours mathématique se construit en partie contre d'autres procédés d'acquisition de croyance et de connaissance et non seulement avec.

Précisons le jeu de la preuve.

"A" propose un énoncé, la déclaration d'une propriété dont la connaissance est utile pour maîtriser les rapports (de A ou de B) avec le milieu, l'enjeu fondamental est toujours de "gagner" à un certain jeu"

B, s'il veut s'en saisir et s'en servir, doit :

- soit soit "payer" A à chaque fois, c'est une reconnaissance de validité pragmatique
- soit "payer" A une fois pour toutes en acceptant la proposition comme vraie.

Mais il peut aussi engager le processus de réfutation s'il pense que la déclaration de A est fausse. Réfutation pragmatique : il peut "obliger" A à jouer un coup décevant de son énoncé. Si la déclaration est fausse et si la situation est correcte, le coup doit être perdant (ce n'est pas si facile à obtenir). C'est le dispositif faisant fonctionner le contre-exemple. Il peut obliger A à jouer son coup perdant aussi souvent qu'il a le trait (que c'est à lui de jouer) jusqu'à ce que A retire sa déclaration.

Réfutation intellectuelle. B peut aussi proposer à A un marché : il peut lui proposer une réfutation explicite de sa déclaration initiale, cette réfutation peut lui économiser une coûteuse obstination. Si A accepte (il paye un peu a priori), par exemple en se dessaisissant du trait, B devient alors à son tour proposant. A accepte la réfutation, ou la rejette... Les arguments sont toujours ceux que l'opposant peut recevoir - de même que dans toute communication le répertoire doit être celui du récepteur pour que le message soit compris. Ainsi se crée "de facto" une théorie, en tant qu'ensemble d'observations acceptées par les deux joueurs. Il peut arriver à chaque instant que l'un d'eux découvre qu'une connaissance n'est pas partagée alors qu'il croyait que son partenaire pouvait en disposer. Toutes les assertions de la

.../...

"théorie" sont ainsi susceptibles de se voir explicitées et remises en question. La théorie elle-même est un objet d'étude et de construction.

Les moyens techniques de ces démonstrations et les arguments peuvent être d'ordre sémantique - adéquation au "milieu", au problème - ou d'ordre syntaxique à plusieurs niveaux : articulation et validité mathématique, constitution logique et même formelle de l'argument. Mais aussi d'ordre épistémologique, ainsi que le montre LAKATOS^(*).

L'usage de situations de preuve restaure un environnement socio-culturel qui donne de l'épaisseur au discours mathématique. Les situations de validation peuvent aider le professeur, faire vivre dans sa classe une véritable petite société mathématique. Mais, en restaurant un sens, on prend le risque d'augmenter les difficultés de ceux qui n'entreront pas dans ce jeu, et pour qui le théorème et même les démonstrations ne sont que des savoirs comme d'autres à exhiber à l'occasion. Une situation de validation n'est pas, a priori, la meilleure situation d'apprentissage de savoirs institutionnalisés. Elle peut même susciter des obstacles didactiques et ressusciter des obstacles épistémologiques gênants. Elle est pourtant essentielle comme paradigme des autres situations mathématiques. Il est regrettable par exemple, que la géométrie enseignée dans l'enseignement secondaire n'utilise pas ces processus, alors qu'elle peut se justifier comme premier exemple de la pensée axiomatique en face d'un champ naturellement maîtrisé par d'autres moyens. La mathématisation donnée toute faite, est ici contradictoire avec l'objectif didactique annoncé [cf. L'enseignement de la Géométrie].

A côté de leurs propriétés épistémologiques ou didactiques, ces situations sociales peuvent présenter des avantages intéressants dans le domaine de la motivation des élèves - motivations assez souvent transférables.

Cette motivation peut se manifester, non seulement dans le

(*) I. LAKATOS, Preuves et réfutations - traduction LABORDE et BALACHEFF (Hermann)

cas où la situation est réellement organisée et effectivement vécue, mais aussi quand elle est simulée, racontée ou intériorisée.

Les élèves coopèrent dans la mesure où ils arrivent à partager le même désir d'atteindre une vérité.

Ils doivent recevoir, a priori, avec respect, le point de vue de leur opposant et défendre le leur sans fausse modestie, aussi longtemps qu'ils ne sont pas convaincus du contraire ; mais s'il leur apparaît qu'ils se sont trompés, ils doivent apprendre à changer immédiatement de position, sans amour propre déplacé et quel que soit le prix social.

Ces situations montrent l'enracinement profond de l'activité mathématique dans la pensée rationnelle et l'importance éducative de leur enjeu qui dépasse le simple domaine de l'apprentissage de connaissances. Dans les situations concrètes qui relèvent de ce modèle, lorsqu'elles sont exploitables, le caractère un peu formel de cette "compétition" disparaît. Les contraintes sont bien présentes mais n'apparaissent pas avec cette sécheresse. On peut se reporter aux nombreux exemples donnés en annexe (et particulièrement dans l'annexe 1) [Articles 2 et 3]

CHAPITRE IV

QUESTIONS DE METHODOLOGIE

1. L'observation des activités didactiques
2. Contrôle de l'analyse factorielle des correspondances par l'analyse de l'espace explicatif
3. L'étude d'une situation banale

Ce chapitre est composé de trois articles :

"L'observation des faits didactiques" (1978) fait une sorte d'inventaire des méthodes importées des disciplines voisines pour décrire les "faits d'observation" et propose les bases d'une méthode de modélisation que nous avons développée au chapitre III.

La didactique a fait un usage intensif des méthodes statistiques. En France, à la suite des travaux de F. PLUVINAGE et R. GRAS, l'analyse factorielle des correspondances s'est banalisée dans les études des résultats d'élèves avec parfois des difficultés pour distinguer les relations déjà introduites entre les caractères par le questionnaire de celles réellement dues au comportement des sujets. Le texte présenté est la première partie d'un article proposant une méthode de contrôle de ces phénomènes.

Le troisième article montre comment l'étude d'un problème banal peut conduire à la mise en évidence des variables pertinentes des situations dont il est le paradigme. Les connaissances de didactique déjà acquises peuvent permettre de hiérarchiser et de choisir celles de ces variables qu'il convient d'étudier (L'exemple choisi a été traité selon ce schéma par M. IMANA KATEMBERA dans sa thèse de 3ème cycle) et il est même possible de réaliser des modèles à confronter avec l'expérience. Un autre exemple - plus ancien - de l'usage de ces modélisations est reproduit dans les annexes (Peut-on améliorer le calcul des produits naturels ?). De nombreuses autres études de ce type qui ne sont pas rapportées ici témoignent de la faisabilité et de la fécondité du procédé. (en particulier l'étude des stratégies des élèves dans un problème de probabilités étudié avec P.L. HENNEQUIN en 1974).

Les deux derniers textes mettent l'accent sur deux points:

- sur la nécessité de faire de solides analyses a priori et de les confronter aux résultats afin que leur lecture échappe à une forte tendance générale à l'empirisme
- sur la nécessité de se concentrer sur les situations.

.../...

L'étude des comportements des élèves, s'il doit être le souci principal des enseignants, n'est pour le chercheur en didactique qu'un moyen de connaître sont objet d'étude : les situations.

L'amélioration des situations didactiques en fonction de la théorie des situations et des résultats des recherches systématiques est le lieu où s'articulent la méthodologie scientifique et la méthodologie au sens allemand - c'est-à-dire la description des méthodes d'enseignement.

Nous ne donnons ici aucun exemple de ce type de travail pourtant familier mais difficile à présenter actuellement.

L'OBSERVATION DES ACTIVITES DIDACTIQUES

Le but de cet article^(*) est double :

- soulever les questions qui me paraissent fondamentales de façon à favoriser la discussion et à permettre aux intervenants de centrer leurs propos ;
- donner des indications concrètes sur les pratiques actuelles afin d'illustrer et de faciliter la réflexion.

Les questions premières sont simples :

Observer **quoi ? pourquoi ? (ou pour quoi) comment ?**
Mais elles ne le sont qu'en apparence. Même l'ordre dans lequel on les pose prend une hypothèse sur la manière d'y répondre. On ne peut déterminer « quoi » si on ne sait pas « pourquoi » et souvent le « comment » guide le choix des « quoi ».

Je pense qu'il faudrait nous garder de séparer trop vite ces questions, nous risquerions de masquer la réalité profonde des phénomènes que nous voulons comprendre.

(*) Ce texte constituait le rapport introductif à la séance consacrée à l'observation lors d'un Colloque du C.N.R.S (avril 1977)

C'est pourquoi nous procéderons par des approches successives :

Tout d'abord s'imposent :

- une première délimitation de l'objet de l'étude (qu'est-ce qu'un fait didactique ?) ;
- une approche du rôle de l'observation dans les recherches en didactique (pourquoi observer ces faits ?) ;
- et une étude des conditions fondamentales des rapports entre l'observateur et les faits didactiques observés (comment les rendre possibles ?).

Nous pourrions alors pénétrer plus avant et voir :

- comment les types de recherches, l'ampleur et la généralité des faits que l'on vise, commandent le choix des variables observées, donc celui des dispositifs expérimentaux ;
- et comment les techniques d'analyse doivent s'adapter, à la fois, aux recherches et aux données recueillies.

La tentation est grande de faire un simple recensement des types de données — toujours les mêmes — et une liste des techniques de recueil d'analyse de ces données. Dans une troisième partie, nous y succomberons malgré les risques encourus :

Colin Power, dans un intéressant « recensement critique des études d'interaction dans les classes spécifiques » constate que, bien souvent, les observateurs se contentent alors d'utiliser les instruments existants à toute occasion, sans but et sans grand profit scientifique. En particulier, il remarque qu'on n'est pas parvenu à mettre au point une méthode correcte de remise en cause des modèles naïfs qui dominent la recherche en éducation. On ne doit donc pas être trop optimiste et il ne faut pas, par conséquent, être trop sévère ni trop exigeant a priori. La recherche dans ce domaine en est aux balbutiements.

Je crois que de nombreuses approches sont compatibles et qu'il faut se méfier des réductionnismes.

I. — LES CONDITIONS DE L'OBSERVATION DES FAITS DIDACTIQUES

1 — Les phénomènes didactiques

Nous pourrions définir la didactique comme un projet le plus souvent social de faire approprier à un sujet un savoir constitué ou en voie de constitution. Ce projet se manifestera par un contrôle et une modification intentionnelle des relations de l'élève avec son milieu. Seuls les phénomènes relatifs à un tel projet et qui réuniront les deux propriétés suivantes, seront dans le champ de la didactique :

- d'une part, le phénomène ne saurait être compris sans qu'on fasse intervenir la spécificité du savoir ;
- d'autre part, il ne saurait être traité sans sortir du domaine de ce savoir.

Il serait important de voir sur un exemple concret d'enseignement, comment se mêlent, se complètent et s'opposent les faits d'ordres divers : pédagogiques, psychologiques, épistémologiques, didactiques et sociologiques. Nous pourrions peut-être le faire en cours de discussion ; en attendant, voici un exemple assez sommaire : décider qu'on apportera de l'information à une élève lorsque son incertitude (subjective instantanée) deviendra trop forte (en supposant qu'on sache en voir les indices) et qu'inversement on étendra le champ des choix qui lui sont offerts lorsqu'elle deviendra trop faible n'est pas une décision didactique : elle peut être le fruit d'une théorie de l'apprentissage, ou une pratique éducative... Mais l'actualisation de cette décision dans un enseignement de mathématique conduira obligatoirement à interpréter à chaque instant les indices d'incertitude en se référant aux issues effectives de la situation — les

solutions — (par exemple en leur attribuant une probabilité) l'intervention étant elle-même une sélection du contenu de l'information apportée. Alors cette actualisation est dans le champ de la didactique :

Elle ne saurait être réalisée ni comprise sans référence aux connaissances mathématiques du maître et de l'élève au moment de l'action et ne pourrait non plus l'être entièrement sans qu'il soit fait appel au moins implicitement à une théorie de la connaissance, de l'apprentissage, à une métamathématique et une épistémologie sous-jacente.

Il faudra aussi distinguer, bien qu'on emploie le même mot, les faits « didactiques » et la « didactique », science si elle existe dont ils sont l'objet, comme on peut distinguer les objets physiques et la physique.

Les phénomènes didactiques seront donc constitués d'interactions entre trois types de systèmes régulateurs : le ou les élèves, le système éducatif et le milieu (ou la situation), interactions relatives à un système de connaissances déterminé (le mot « système » n'est pas employé dans le même sens dans ces deux occurrences).

On met trop souvent l'accent sur les interactions maître-élève et on les réduit à de simples communications. Il faut souligner fortement :

D'une part, que les interactions de bases sont celles de l'élève avec le milieu, pris aussi bien au sens général (milieu social, scolaire, etc.) qu'au sens particulier de situation (matériel qu'il manipule, questions posées, rapports définissant le statut de la vérité qu'il construit... etc.) ; le maître est conduit à contrôler toutes les sources scolaires d'informations et il se substitue à la plupart d'entre elles parce qu'il ne peut pas les faire interagir avec ses élèves de façon satisfaisante.

D'autre part, que les connaissances n'existent et n'ont de sens chez un sujet que parce qu'elles représentent une solution optimale dans un système de contraintes. Les relations du sujet avec son milieu, et particulièrement

les tensions créées par les divers feed-backs déterminent pour chaque acte des coûts à l'emploi, à l'essai, à l'apprentissage, des coûts à l'erreur, qui provoquent à leur tour l'apparition, l'évolution, la déformation, la disparition ou la reprise des concepts à travers équilibres, conflits et ruptures. L'activité didactique consiste à organiser ces contraintes, et à maintenir les conditions des interactions optimales.

De plus, l'élève, comme le système éducatif ont en commun deux caractéristiques : ils appréhendent le milieu à l'aide de systèmes de représentations qui font que leurs échanges sont traités comme des messages, de plus, ils sont capables d'anticiper et de finaliser leurs interactions qui prennent de ce fait, un caractère dialogique particulier.

Une suite d'interactions ne prend un sens en didactique que dans la mesure où elles se rapportent à un même projet (un chez le maître, un chez l'élève) à propos d'un concept dont elles constituent une genèse et dont elles fondent la signification. Seuls seront pertinents du point de vue didactique, ceux des traits relatifs aux systèmes en présence qui déterminent et expliquent cette suite d'interactions (nous reviendrons plus loin sur cet état de choses qui a pour conséquence de faire dépendre la définition des éléments synchroniques intéressants d'une analyse diachronique préalable). Pour bien marquer tout ce que ces suites d'interactions ont de particulier, j'utilise à leur sujet le terme de « dialectique » : les processus didactiques ont un caractère dialectique.

Les recherches en didactique ont pour but de décrire, classer, comprendre, expliquer, concevoir, améliorer, prévoir et permettre de reproduire de tels processus. Mais s'il y a une idée qui s'impose d'abord à chacun à ce propos, c'est le nombre très élevé de variables qui entrent en jeu dans ce type de phénomènes, et la complexité décourageante de leur mode d'action (justement à cause de son caractère dialectique).

Aussi, une des premières tâches consiste à isoler des sous-systèmes d'interactions : quelques traits de

l'élève, du maître, de la connaissance et du milieu, s'ils sont bien choisis, peuvent entrer ensemble et eux seuls, dans une explication d'une classe de phénomènes didactiques. Par exemple, l'apprentissage skinérien fournit un sous-système : le sujet est une mémoire, munie d'un dispositif de mise en mémoire dans des conditions données, que satisfait justement un système d'enseignement réduit à la présentation contrôlée d'informations à mémoriser, le savoir est supposé équivalent à une suite d'informations ou de comportements... etc.

Le plus souvent, pour isoler un sous-système, il est fait appel à un facteur qui permet de séparer ou d'opposer deux catégories de faits didactiques inexpliqués dans leur ensemble mais que l'on espère désormais explicables séparément.

Exemples : algorithme ou mécanisme opposé à raisonnement, déduction vs intuition, concret vs abstrait — directivité, non directivité... etc.

Il est très difficile de choisir un sous-système, qui ne laisse pas échapper l'essentiel : le sens du processus. S'il est assez simple et indépendant des autres sous-systèmes pour se laisser décrire et comparer à l'expérience, il est souvent superficiel et formel, s'il est complexe ou non indépendant des autres systèmes, il devient très difficile à caractériser, donc à observer ou à reproduire.

2 — L'Observation

« L'observation est un acte incluant l'attention volontaire et l'intelligence dirigée sur un " objet " pour en recueillir systématiquement des informations » propose J.M. de Ketele qui s'empresse de reconnaître que ce terme recouvre de nombreuses significations et de les étudier : comme processus en acte, objectif éducatif, méthode pédagogique, phase et composante de toute recherche (c'est le seul point que nous développerons ici) phase et composante du processus d'apprentissage

systématiquement orienté, technique de prise d'information et enfin comme résultat. Je ne rappellerai pas les querelles célèbres que ce concept d'observation et les questions connexes de méthodologie des sciences ont soulevé (Titchener et Baldwin... etc.). Je préfère proposer mon point de vue et que nous discutions sur le sujet qui nous occupe.

Ma pratique de la recherche en didactique m'a conduit à distinguer trois types principaux d'observations différents, à la fois par leurs buts et leurs méthodes sinon par leur sujet :

Prise d'informations codifiées

Il s'agit de la prise systématique d'informations précises à l'avance, dans le cadre d'une position théorique cohérente et explicite, ou mieux d'une hypothèse suffisamment et sincèrement douteuse, et ce dans des conditions réifiées et suivant une procédure standardisée.

Prise au sens le plus strict, l'observation consiste ici à constater la réaction des faits et à répondre par oui ou par non à une question posée d'avance. C'est le type d'observation vers lequel chacun tend :

Il est conçu comme le plus satisfaisant du point de vue scientifique — certains même refusent aux autres types ce statut.

Il est techniquement le plus facile à mettre en œuvre mais il est le plus difficile à rattacher convenablement à une décision didactique ou à un objet didactique théorique pertinent.

Il est souvent le plus décevant parce qu'il est toujours très fragmentaire à cause du nombre de variables.

De ce fait, il masque la presque totalité de la signification des processus observés.

Il ne permet de remettre en cause les conditions de l'observation ou la théorie engagée qu'à travers l'énorme machine de la recherche expérimentale. Compte tenu de la formidable complexité des problèmes, rien ne

prouve que cette machine assure effectivement une interaction suffisamment dense pour assurer un quelconque progrès. Certes, il est souhaitable d'accumuler des « faits » proprement établis mais il ne faut pas céder par empirisme à une téléologie scientifique de mauvais aloi.

Contrôle didactique et scientifique d'une recherche

Pour des raisons scientifiques et déontologiques, il faut donc que les observations de type précédent soient accompagnées d'observations ayant pour but de percevoir l'essentiel des événements observés, d'en restaurer la signification, le sens.

Ce deuxième type d'observations est tout à fait indispensable pour contrôler de façon assez immédiate la valeur didactique de l'activité en cours si la situation a été manipulée ou si le professeur, du fait de l'observation, n'en a pas seul la maîtrise, et a fortiori si un observateur est intervenant même ou seulement perçu.

Il est aussi nécessaire, à mes yeux, pour vérifier la pertinence des objets choisis en première approche, la validité scientifique de l'observation. C'est un moyen de contrôle de la recherche, de remise en cause des hypothèses, de recherche de nouveaux points de vue à soumettre à l'observation systématique. Le résultat de ce type d'observation est une « chronique ». Elle est construite immédiatement après les faits, à partir d'un maximum de notes, et d'enregistrements au sein d'un groupe expérimenté qui analyse les événements sommairement mais de divers points de vue et peut vérifier les points importants soulevés.

Comme celle du type précédent, elle engage une connaissance préalable des phénomènes et implicitement des choix, des hypothèses qu'il est nécessaire d'explicitier. Il est plus difficile qu'il ne paraît à réaliser et il est très difficile à utiliser de façon scientifique, mais il a une valeur irremplaçable comme moyen de préciser les conditions de l'expérience et de la rendre reproductible.

Préparation du chercheur et paradigme à sa recherche

Ainsi le contrôle didactique et scientifique dépend du regard de l'observateur. Ce regard il faut le former et l'entretenir par un troisième type d'observations : celles qui n'ont pas pour but la production d'un résultat relatif à l'objet de l'étude, mais, si j'ose dire, le réajustement du chercheur et le maintien pour lui d'un système de référence, d'un paradigme pour les traits retenus dans son travail. Tout chercheur en didactique devrait à mon avis avoir constamment « des enfants dans la tête » et pour cela regarder des classes, des apprentissages de toutes sortes, qu'ils aient, ou non, un rapport avec son sujet de recherche. De ce point de vue, l'observation devient presque une ascèse car rien n'émousse plus la vivacité des perceptions et l'ardeur à noter ce qui est saillant, que la répétition des observations (ce discours n'est contradictoire qu'en apparence).

Je ne ferai pas une distinction qui a un certain temps retenu mon attention : celle qui oppose l'observation aux fins de recherche et dont nous venons de parler, et l'observation aux fins de décision. La première aurait pour but de produire une déclaration sur la réalité, elle serait le fait de chercheurs que le résultat didactique n'intéresse qu'accessoirement et indirectement, tandis que la seconde aurait pour but de permettre l'action didactique elle-même, et serait l'apanage des professeurs ou des intervenants.

Nous allons voir pourquoi tôt ou tard, le chercheur devient intervenant ou prend l'intervention à son compte. De ce fait, il observe à des détails près de la même façon.

Pour observer un phénomène précis il faut réaliser une situation déterminée et par conséquent la réalisation didactique fait partie du dessein expérimental. Toute

expérience didactique fournit donc à la fois des documents pratiques pour la classe et des documents théoriques ou scientifiques. Mais dans cette activité sont engagés bien d'autres choix et d'autres décisions que celles envisagées du point de vue théorique. Réciproquement bien des questions, bien des occurrences constructibles dans la théorie ne seront pas réellement ouvertes dans l'expérience — c'est-à-dire n'auront pas de chance de se produire ou de ne pas se produire.

Une erreur classique consiste à profiter de l'observation pour transférer indûment des validations :

Les bons résultats pédagogiques de la leçon sont imputés à tort à la théorie et inversement, la théorie séduisante rehausse l'intérêt d'une leçon, en fait terne et quelconque, la part de l'action réellement expérimentée est camouflée.

L'utilisation d'une observation exige toujours un effort pour discerner ce qui était possible dans ce qui ne s'est pas produit et ce qui est nécessaire dans ce qui s'est produit. Cet effort est une construction scientifique.

La place et les techniques de l'observation, dans une science évoluent toujours de façon spécifique avec son développement.

On ne peut pas traiter actuellement des questions d'observation en didactique de façon générale. Il faut examiner les motivations de tous ordres. Elle n'est déterminée directement ni par l'objet de l'étude, ni par les données recueillies, ni par les méthodes d'analyse. Il faudrait examiner les questions et les connaissances du moment. Il faudrait faire un véritable survol des problèmes scientifiques du champ de la didactique et voir, dans chaque cas, la place et le rôle tenu par l'observation. Nous aborderons très modestement cette question au prochain paragraphe mais il me semble utile auparavant de persévérer encore un peu dans les études préalables et de regarder les conditions de l'observation.

3 — Conditions limites d'une observation en didactique des mathématiques

Contrôle des contraintes agissant sur l'observateur

Pour que les théories sur la didactique puissent échapper à des rapports purement idéologiques avec la réalité, il faut à mon avis, que le système de recherches qui les produit soit soumis à des contraintes convenables de la part de l'objet observé. C'est la responsabilité des chercheurs d'organiser ces contraintes : les contrôler ne signifie pas qu'il s'y soustrait quand ça l'arrange, mais au contraire qu'il s'y prête et s'en évade tour à tour dans des conditions déterminées.

Ces contraintes ont pour objet d'amener la théorie à se développer sans cesser d'être éprouvées :

- au regard de la signification et de l'efficacité didactique ;
- au regard de la communicabilité ;
- et à celui de la scientificité.

Certes, comme le dit Canghlem « une théorie n'est pas vraie parce qu'elle est efficace, mais elle est efficace parce qu'elle est vraie ».

Observer c'est donc d'abord organiser les rapports d'observation qui présentent des garanties sur le plan déontologique et scientifique.

Le dispositif expérimental doit prévoir l'organisation des relations de l'observateur avec son sujet (Bonboir, 1972).

Ces relations concernent les élèves, les maîtres, les autres chercheurs et sont de divers ordres : les contraintes scientifiques, techniques et institutionnelles. Elles sont souvent le prix qu'il faut payer pour rendre possible l'observation.

Elles mettent le chercheur dans l'obligation de tenir compte des problèmes sans l'obliger à les résoudre.

Mais il ne doit à aucun prix y avoir confusion des tâches du système éducatif avec celles du chercheur.

Une théorie du processus de recherche en didactique

Les théories mises en œuvre pour décrire le processus d'acquisition du savoir par les élèves sont souvent utilisables pour ce même processus chez le chercheur. Je transposerai donc les conceptions que j'ai utilisées à propos des élèves [] et dont on parlera peut-être lors de la discussion sur le « statut de l'observation et de l'activité expérimentale chez l'élève » (Colmez, Delacotte, Richard). Elles permettent de rassembler les conditions des échanges avec le milieu autour de trois types de dialectiques : la plus générale, la dialectique de l'action : le système a une interaction, effective avec le milieu, et pertinente au sujet du savoir construit ; cette nécessité et cette pertinence sont le fruit de conditions appropriées et caractéristiques sur les motivations, les actions et les informations accessibles. Ce processus aboutit à la création par le sujet d'un savoir-faire qu'il peut plus ou moins expliciter ou valider. Dans une dialectique de l'action où aucune formulation n'est nécessaire, il peut en apparaître une (ou non) mais elle ne sera régie que par les règles (de syntaxe ou autres) déjà intériorisées.

La dialectique de la formulation est un cas particulier de la précédente. Des conditions supplémentaires rendent nécessaire l'échange d'informations avec un autre sujet, d'où la création d'un langage et l'apparition d'un savoir.

La dialectique de la validation est à son tour, un cas particulier de la précédente. Les échanges concernent, non pas des informations, mais des assertions. Elle aboutit à la création d'un système de validation, donc d'une théorie, par un renvoi aux deux autres types de dialectiques (expérimentation et explicitation).

Dans le cas de la didactique, les dialectiques de l'action se produisent au niveau du système maître-élève ou au contact de l'observateur avec ce système. Le maître construit des régularités, des automatismes, des représentations des objets didactiques. Il perçoit une foule d'indices, dont il a conscience ou non, et agit en conséquence. En observant ces échanges, en y intervenant et en les pratiquant aussi, l'observateur fait de même. Il s'agit alors pour lui, si possible, d'analyser, de décrire, de modéliser ces actions, d'identifier les entrées, les états, les issues, etc. Il combine alors l'observation introspective, allospective et manipulée.

Des communications entre les maîtres réalisent des dialectiques de la formulation et peuvent révéler les informations dont ils se servent et leurs modalités d'action. On peut donc organiser des rencontres entre eux et les observer aussi. Mais en général, le discours pédagogique a un caractère fortement idéologique. Il est un indice de la réalité scolaire, il n'en est pas une théorie ; il remplit d'autres fonctions auprès du maître, sauf si un dispositif particulier par exemple :

— celui que nous avons mis en œuvre dans notre centre de l'IREM de Bordeaux — oblige ces communications à remplir une fonction précise et « asservie » pour rendre nécessaire l'apparition des variables didactiques étudiées.

Il faudra se garder de confondre les opinions didactiques, objets didactiques, avec les assertions du champ didactique, c'est-à-dire la chose observée et les conclusions de l'observation.

L'observateur devra organiser sa propre dialectique de la formulation, que ce soit dans des cours ou dans des débats avec des professionnels ou avec d'autres scientifiques. Mais s'il veut s'engager dans une dialectique de la validation, il devra fatalement intervenir sur les objets de son étude — si possible dans un processus expérimental —. Un débat scientifique implique que les théories soient éprouvées par des contraintes sur le système. On tirera d'autant plus d'informations — et plus pertinentes — de ces interactions qu'elles seront plus nombreuses et plus diversifiées.

Les théories ne surgissent pas d'un seul coup par une combinatoire d'observations naïves ou d'expériences cruciales mais par un lent travail réflexif et critique sur les pratiques mêmes de l'observation. Ce qui justifie pleinement les stratégies « en spirales » invoquées par les chercheurs en didactique.

Souvent, le but d'une recherche ou d'une observation est seulement de rendre possible une observation meilleure (plus fiable, plus précise... etc.).

Le processus de recherche apparaît alors comme dépendant de conditions limites diverses :

- importance et composition de l'équipe de recherche et insertion dans le système éducatif ;
- préalables expérimentaux, méthodologiques et théoriques ;
- ouverture minimum du champ sur lequel porte l'investigation... etc.

Mais les plus difficiles à réaliser sont les conditions institutionnelles.

Organisation d'un système d'observation

Sous la conduite du professeur Lichnerowicz, et avec le professeur Colmez, j'ai étudié ces conditions limites (cf. Brousseau 67 et Brousseau, Colmez, Becker 68). Les IREM me paraissent une réponse adéquate aux problèmes soulevés par l'observation, bien que peu d'entre eux aient pu réaliser l'ensemble des dispositifs préconisés. Les progrès sont lents mais réels et ils seraient impossibles dans d'autres structures.

Je renvoie les intéressés aux textes fondamentaux de l'IREM relatifs à la création de l'école Jules-Michelet pour l'observation, à ceux décrivant le fonctionnement des différents groupes du centre d'observation (informatique, didactique, technique, A.V.), des groupes de

recherche sur l'enseignement élémentaire et du séminaire de didactique du groupe d'enseignement (D.E.A., stages IDEN, PEN, etc.).

L'interface de l'IREM avec les Institutions n'a pas fait l'objet d'une description formelle. Il est néanmoins conçu comme un système comportant un certain nombre de jauges de contraintes. Il permet la réalisation des observations souhaitées et la circulation des demandes, l'évaluation des résultats et surtout la prise en charge et la hiérarchisation des problèmes.

Je considère que ces réalisations font partie intégrante de l'activité des chercheurs, comme ce serait le cas pour la conception d'un appareil nouveau de recherche en physique.

Il n'est pas nécessaire que la même personne contrôle un tel système. Mais si elle n'est pas impliquée dans un système de ce type, elle peut s'égarer très vite. L'observation est bien plus une entreprise collective qu'une activité personnelle. C'est pourquoi des débats comme ceux-ci sont très importants.

Méthode :

Le sujet d'une leçon étant fixé, les différentes équipes qui vont travailler à l'observation sont constituées : groupe didactique, groupe enregistrement, groupe chronique, groupe évaluation et observation.

Le groupe « didactique » a pour but d'adapter l'observation au travail de l'année et de la rendre compatible avec le programme officiel. Il veut susciter un phénomène de façon précise, reproductible, et l'observer. Il va donc déterminer d'une façon très précise les motivations attendues avec les consignes données par le maître, le temps de travail pour les enfants, le matériel utilisé. Ce matériel utilisé par le maître et les enfants obéit à certains impératifs : par exemple, il doit être assez grand pour être visible à l'écran de télévision. Le déroulement de la leçon est donné dans ses moindres détails sur la fiche didactique. Cette fiche est donnée à tous les

observateurs, avant la leçon, pour qu'ils en prennent connaissance.

Durant toute la leçon, le groupe « enregistrement » assure la retransmission son, image, repérage de séquences et l'enregistrement de tout ce qui se passe dans la salle.

Le groupe « chronique » rend compte de la leçon suivie depuis la salle (ou par l'intermédiaire du circuit fermé), sur une simple fiche d'observation.

Le groupe « évaluation et observation » est chargé d'établir les grilles d'observation et de les utiliser au cours de la leçon. Après la leçon, ce même groupe est chargé du dépouillement des résultats et du traitement immédiat des données. Ces grilles, différentes pour chaque séance d'observation, doivent permettre de repérer les différentes découvertes faites par les enfants et leur propagation au sein des groupes. Selon un code déterminé à l'avance, on y note les communications de l'émetteur, du récepteur, le contenu de la communication (verbale ou non verbale).

A la fin de la leçon, les travaux des enfants sont recueillis, les chroniques, les grilles d'observation sont rassemblées. Ces documents ajoutés aux bandes de magnétoscope et magnétophone constituent le matériel de base qui permettra de nombreuses analyses.

Conclusion

Nous avons essayé de répondre à un premier lot de questions relatives au « pourquoi », au « quoi » et au « comment », et de montrer que l'on ne peut espérer que les rapports observateurs/observés s'établissent naturellement et naïvement en dehors de la problématique scientifique. L'observation se construit « contre » le système observé.

Il reste maintenant à s'intéresser au « quoi », au « pourquoi » et au « comment ».

II. — PROBLEMES D'OBSERVATION EN DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES — TYPES D'OBSERVA- TION

1) Les problèmes d'observation sont toujours des problèmes d'adéquation des moyens aux objectifs. C'est pourquoi il faudrait tenter de les classer d'après les sujets de recherche. Mais nous ne pourrions pas aller très loin dans cette direction sans exposer les recherches elles-mêmes. Nous allons donc chercher d'abord des caractères distinctifs plus formels, relevant plus de l'observation des phénomènes éducatifs en général que de la didactique.

Il est normal alors de retrouver les grandes questions regroupées suivant les deux grands courants dialectiques de l'observation :

- d'un côté les problèmes bien connus d'expérimentation : formulation des hypothèses, définition des facteurs, plans d'expériences, tests problèmes de reproductibilité et de comparaisons de méthodes, etc. ;
- de l'autre, les problèmes de définition de choix des observables, de constitution, de recueil et d'analyse des produits de l'observation, de généralisabilité... etc.

Le premier point de vue est à la fois plus classique donc mieux connu, plus difficile à mettre en œuvre en didactique et moins prometteur que le second. Je partage à ce sujet le point de vue exposé par J. Cardinet dans « comparaison de méthodes pédagogiques ou analyse du système scolaire ». Je n'en parlerai donc pas ici aujourd'hui. Mais puisque l'observation se concrétise lors du recueil de ses produits nous allons commencer par étudier les méthodes de saisie des données.

2) L'observation, suivant les méthodes de saisie des données

Elles sont très variées, nous les rappelons pour mémoire.

Les types de Wrihstone (1960)

Elles sont limitées aux méthodes directes de choix des comportements et elles comportent :

Les techniques d'échantillonnage temporel (Time samples). Il s'agit de « contrôler dans de courtes périodes de temps l'apparition ou l'absence de formes de comportements objectivement définies » Inventaires, questionnaires d'observation (check-list) et grilles d'observation (schédule) qui diffèrent par l'existence d'un codage systématique.

Les techniques d'observation et de jugement (rating methods) : enregistrement de jugements sur des échelles d'évaluation : descriptives (rating scales) graphiques, de correspondance homme à homme, numériques... techniques de rangement, de comparaisons pairées et de choix forcé.

Ces méthodes ont un très grand succès :

Colin Power rapporte que 200 systèmes ont été développés, de façon jugée trop indépendante, pour analyser séparément, (hélas), les systèmes cognitifs, affectifs et (Flanders), les catégories d'échanges (transactions) intellectuels, (Eggleston 75). 73 de ces systèmes sont décrits dans *Mirror of Behavior* dont 8 spéciaux pour les classes scientifiques ; elles permettent de juger toutes sortes de variables mais principalement les qualités du maître ou de la classe. On a développé de même des grilles d'analyse du comportement (Fischer et Power) et du discours (Coulthar et Sinclair) « le plus souvent les utilisateurs se sont contentés de l'accord entre les observateurs et de la fidélité des observations comme marque de fiabilité », dit Power. La question de pertinence est souvent posée de façon sommaire.

Les classifications de De Landsheere et De Ketele

De Landsheere place l'observation dans un produit de 5 variables :

fonction (prédictive ou descriptive)
 mode (direct ou indirect)
 méthode (monographie, étude de cas (case study)
 méthode des cas (case method) l'étude (survey) l'enquête)
 le lieu (sur le terrain, en laboratoire)
 le temps (longitudinales et transversales)

De Ketele (1976) les classe plus finement suivant les caractéristiques fondamentales (systématique vs non, introspective vs allospective, narrative vs attributive). Le stimulus (objet perceptif ou évaluatif) la réponse (notation immédiate ou différée) la situation (naturelle ou créée, manipulée ou non) la place de l'observateur (participatif ou passif, perçu ou non), le temps (longitudinale continue ou ponctuelle, et transversale) enfin suivant les attributs qu'il classe en stimulus (signes ou catégories) exclusifs ou non, exhaustifs ou non, unidimensionnels ou pluridimensionnels.

Et en réponses : (unités recoupées ou non par l'observateur, échantillonnées ou non, échelles ordinales ou nominales).

3) Problèmes de sémiologie : la détermination des objets étudiés

C'est un des problèmes les plus délicats et les plus négligés.

Le découpage en actes et en séquences

Pour toutes ces méthodes il est nécessaire de découper le temps pour obtenir des séquences. Cela se fait soit arbitrairement (en tranches de trois secondes — par exemple) soit suivant le discours (par phrases) soit suivant un système plus complexe se référant au fonctionnement du maître par exemple.

Il faut que un intervalle de temps soit suffisamment long pour que les objets pertinents de l'observation y soient identifiables (le dit, l'intention...) et suffisamment court pour contenir le minimum d'interactions afin de

pouvoir assigner un même état aux différents systèmes en présence. Ce n'est pas toujours facile.

On peut aussi demander à des professionnels de proposer un découpage. On s'aperçoit que les observateurs découpent de la même façon des séquences importantes lorsqu'elles correspondent aux prévisions de la fiche didactique mais que l'accord ne subsiste pas au niveau d'un découpage fin. C'est que l'observateur « lit » le déroulement de l'activité didactique comme on lit un film, en le découpant en scènes pour reconstituer un sens à partir du texte avec des systèmes et des codes implicites. Comme telle l'observation relèverait autant de sémiologie que de l'analyse de systèmes, il s'agit d'étudier un langage. Le découpage décidé par le maître fonctionne comme le montage d'un film. Il crée des unités de sens, des « signes » qui ne devraient pas être analysés seulement suivant le découpage technique mais aussi suivant le sens créé. (Christian Metz, *Langage et cinéma*.)

Les traits, objets, relations et faits pertinents

Le découpage doit donc fournir des unités identifiables, susceptibles d'être un élément reconnaissable d'une séquence par exemple. Il doit donc exister une liste d'unités distinctes susceptibles de se produire à sa place. Nous dirons un paradigme de situations didactiques élémentaires. Deux situations sont distinctes à partir du moment où elles peuvent être opposées par au moins un trait (présent dans l'une, absent dans l'autre) pertinent. La distinction est pertinente si le remplacement d'une situation par l'autre est susceptible de changer la signification de la séquence (de façon régulière, non accidentelle).

Ainsi, la recherche des traits pertinents passe par l'analyse de leurs « dépendances » (des causalités) Vinrich. Deux moments peuvent différer non par un trait, mais par la présence ou l'absence d'un fait, d'un objet, d'une relation qui deviennent ainsi pertinents (signifiants si l'on veut) dans cette séquence. Il est clair que tous les faits ne sont pas pertinents dans un processus.

Dépendances, processus

On voit comment à partir d'un processus didactique entier on est conduit à interpréter le phénomène, et à partir des dépendances (souvent supposées) à désigner certains faits comme pertinents. Il est alors possible de combiner ces faits, de construire des automates qui reproduisent les processus observés.

Cette interprétation sémiologique de l'observation met en évidence qu'il est nécessaire de partir et de revenir au sens global des processus d'apprentissage, en observant et en combinant des faits isolés, même en très grand nombre, même en leur appliquant les méthodes puissantes de reconnaissance de forme, on n'a pas plus de chance de reconstituer un modèle didactique qu'on n'en aurait de construire la grammaire française à partir de l'étude des coefficients de Fourier de l'enregistrement d'une voix.

Ceci n'est pas sans avoir des conséquences méthodologiques dont nous avons déjà parlé plus haut.

Résultats

On essaie donc d'obtenir par des procédés objectifs les résultats d'observation suivants :

a) Un découpage du temps (de la leçon, ou des processus) en une suite d'étapes typiques (ou situations identifiées par leurs relations syntagmatiques et para-

b) Le discours (transcription) et l'interprétation de ce discours, (détermination des signes et leur articulation).

c) Une caractérisation des étapes et une référence à des types de situations. Ceci implique :

L'identification des éléments en présence et de leurs relations synchroniques : états des élèves, du maître, étape de la connaissance, objectif contractuel de la

séquence, usage prévu des productions de l'élève, comportements acceptés, informations connues ou ignorées, motivations, résultats de l'élève.

La construction de paramètres appropriés.

d) Une liste de conditions de succession de ces situations : conditions cognitives, affectives, linguistiques, informationnelles, matérielles — ce qui implique une étude des relations diachroniques entre les éléments des situations : successions de comportements, analyse des productions verbales, écrites, graphiques des élèves, dans leur dépendance...

e) Une liste de conditions de reproduction des processus observés.

Conditions optimales

Il s'agit alors de rechercher les modèles d'élèves, de maître, de projet didactique, de la connaissance mathématique, des processus d'apprentissage qui permettront d'expliquer ce qui s'est produit et les facteurs sur lesquels on peut agir pour faire apparaître des différences (éventuellement pour optimiser). Ceci appelle deux remarques que je soumets à votre réflexion. Le détour théorique et méthodologique proposé ici est nécessaire à l'amélioration de l'enseignement : les tentatives de procéder de façon empirique, pas à pas ou de ne jouer que sur un petit nombre de facteurs, ont échoué, c'est-à-dire ont donné des résultats moins bons. Les méthodes classiques sont localement optimales.

Par contre, on recherche trop exclusivement à recourir à des modèles quantitatifs. Il est très possible de raisonner mathématiquement sur des modèles qualitatifs dans la voie ouverte par Thom.

4) L'observation suivant les types de recherche

Je ne connais pas de classification des recherches qui donne une typologie des observations. Pour ma part, j'essaye de situer les recherches selon qu'elles portent principalement sur le fonctionnement ou les caractéristiques des systèmes en présence ;

- sur des processus eux-mêmes ;
- sur des facteurs de discrimination ou d'optimisation qui permettent d'expliquer et de classer les processus eux-mêmes.

Dans le premier cas on a des analyses d'automates : l'observation c'est le recueil des entrées et des sorties.

Dans le second cas on a des analyses de suites d'interactions d'automates, les observations portent sur des « super-signes » comme il est indiqué ci-dessus.

Dans le troisième cas, l'observation peut prendre des formes très différentes : comme on peut le voir dans nos travaux sur l'apprentissage des algorithmes, les variables informationnelles et les obstacles épistémologiques.

III. — ANALYSE DES DONNEES SUR LA DIDACTIQUE

Pour mémoire, je renverrai à :

1) **Les structures mathématiques des données** (Brousseau 70). Les données se présentent sous forme, soit de textes codés ou en langue naturelle, soit de tableaux à trois dimensions (sujets, variables observées, moments).

Un même corpus peut être interprété de diverses manières, ce qui permettra différents traitements.

Les travaux actuels portent sur les méthodes permettant de manipuler et de structurer les marges (sujets, variables...), soit a priori avant traitement ; soit a pos-

teriori d'après les résultats ; cela réclame la création de langages en vue du traitement Informatique.

2) Les méthodes d'analyse

Voici le plan d'un ouvrage en cours de réalisation à l'IREM de Bordeaux qui montre la variété des méthodes et de problèmes : Observation, Recueil des données, Gestion des données et recensements, Analyse des données, taxinomies et correspondances, Tests d'hypothèses, Méthodes bayésiennes et fiduciaires, Analyse des dépendances, méthodes ordinales, etc., Analyse du discours, simulations et modèles, évaluation et docimologie, modèles mathématiques de gestion didactique.

On y retrouvera la trace des deux tendances en analyse des données signalées jusqu'ici, la reconnaissance de formes (Benzecri), l'analyse de dépendance et le test d'hypothèse.

Je ne choisis pas entre les deux. Pas plus que je ne les considère comme de simples techniques. Les rapports d'application des mathématiques au mathématique, comme à l'extra-mathématique ne sont pas ce que l'on croit : une méthode est modifiée par sa mise en œuvre et un sujet d'étude déformé par la méthode utilisée, ou plutôt l'un et l'autre sont réciproquement constitutifs.

BIBLIOGRAPHIE

- BONBOIR. — Pédagogie correctrice (1970 ?).
- BROUSSEAU (G.). — 1967, Organisation du centre de recherche pour l'enseignement des mathématiques, Cahier du C.R.E.M., n° 4.
- BECKER (J.), BROUSSEAU (G.), COLMEZ (J.). — 1968, Rôle des Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques, Cahier du C.R.E.M., n° 6.
- BROUSSEAU (G.). — 1970, Observations et recherches en enseignement des mathématiques, Cahier de l'I.R.E.M. de Bordeaux, n° 4.
- BROUSSEAU (G.). — 1972, Processus de mathématisation, publication de l'A.P.M.
- BROUSSEAU (G.). — 1973, Peut-on améliorer le calcul des produits de nombres naturels, Actes du Congrès des Sciences de l'Éducation I.P.I.
- BROUSSEAU (G.). — 1973, Recherches sur l'enseignement du calcul numérique, Cahier de l'I.R.E.M. de Bordeaux, n° 15.
- BROUSSEAU (G.) et coll. — 1974, Recherche sur l'analyse du discours, Cahier de l'I.R.E.M., n° 15.
- BROUSSEAU (G.). — 1975, Qu'est-ce que la didactique des mathématiques ? Exemples de recherches en didactique, T. 1 du compte rendu du colloque sur l'analyse de la didactique des mathématiques de Bordeaux.
- BROUSSEAU (G.). — Le recueil et le traitement des résultats à l'école Jules-Michelet (1978, 39 p., Cahier 18, I.R.E.M. de Bordeaux).
- Publications du 3^e cycle de didactique des mathématiques (ouvrage collectif), 1976, Méthodes d'analyse quantitative en didactique des mathématiques, Fascicule 5, Tests d'hypothèses ; Fascicule 4, Taxinomie et correspondances.
- CARDINET (J.). — Comparaison de méthodes pédagogiques en analyse du système scolaire. Etudes pédagogiques.
- CARDINET (J.), TOURNEUR, ALLAL — 1976, The symmetry of generalizability theory : applications to educational measurement, Journal of educational measurement, vol. 13, n° 2.

- COLMEZ (F.). — Société des nombres (1978, article I.R.E.M. de Paris).
- DUSSAULT (G.), LECLERC (M.), BRUNELLE (J.), TURCOTTE (C.). — 1973, L'analyse de l'enseignement, Presses de l'Université du Québec.
- FAUCON (E.), RAYMOND (P.), VINCENTI (M.). — L'observation à l'école Jules-Michelet (1976, 30 p. Cahier 17, I.R.E.M. de Bordeaux).
- FOUCAULT (M.). — 1973, Naissance de la clinique, P.U.F.
- KETELE (M. de). — 1976, Processus éducatif, objet de l'observation psycho-pédagogique, Doctorat P.S.M. 321, Université de Louvain.
- LANDSHEERE (G. de). — 1970, Introduction à la recherche, Armand Colin.
- LEFEVRE (L.). — Méthode d'observation psycho-pédagogique, E.S.F.
- METZ (C.). — 1971, Langage et cinéma, Larousse.
- POWER (C.). — 1977, A critical review of science class room, Interaction studies, Studies In Science Education.
- REGNIER (A.). — 1974, La crise du langage scientifique, Anthropos.
- ROUANET (H.). — L'analyse des comparaisons systématiques dans un plan à un facteur aléatoire, introduction au programme VAR 3.
- SINCLAIR (J.) et COULTHARD. — 1975, Towards an analysis of discourse, The English used by teachers and pupils, Oxford University Press.
- THOM (R.). — 1972, Stabilité culturelle et morphogénèse, Reading Massachusetts.
- VINRICH (G.). — Dépendances didactiques, mémoire D.E.A. de didactique des mathématiques, nov. 1976.
- VERGNAUD (G.). — Essai de classification des situations d'apprentissage, Bulletin du C.E.R.P., 1964, XIII, n° 3, pp. 115-155.

METHODE DE CONTROLE DE L'ANALYSE FACTORIELLE DES CORRESPONDANCES PAR L'ANALYSE DE L'ESPACE EXPLICATIF

1. Critique de l'usage classique de l'analyse factorielle :

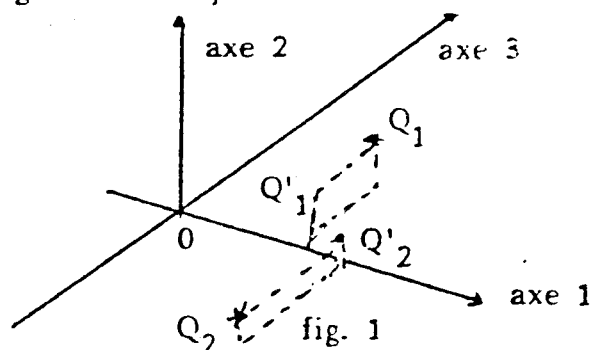
Considérons un ensemble Q de m questions binaires (les réponses sont 1 ou 0) posées à un ensemble E de n élèves. Les réponses, application $Q \times E$ dans $\{0,1\}$, forment une matrice booléenne R .

L'expérimentateur envisage d'interpréter les axes factoriels de R à l'aide par exemple, de certains caractères, binaires, attribués aux questions.

A. Pour cela, le plus souvent, il observe les questions qui contribuent le plus à cet axe et leur cherche des caractères communs. Rappelons que cette méthode est fondée sur le raisonnement suivant :

a) Deux questions apparaissent voisines si leur distance (du χ^2 pour l'ANAFAC) est faible, c'est-à-dire si les élèves ont eu tendance à répondre de la même manière à l'une et à l'autre.

et/ou b) Deux questions Q_1 et Q_2 apparaissent voisines si leurs projections Q'_1 et Q'_2 sur le plan $0 x_1 x_2$ étudié se fait dans une direction voisine de la direction du segment qui les joint c'est-à-dire si les différences de réponses à ces questions contribuent peu à différencier les élèves selon ces deux facteurs... Donc les différences entre ces questions importent peu dans la détermination des caractères de cet axe, en regard de ce qu'elles ont de commun (fig.1)



B. En première approche cette méthode permet d'attirer l'attention du chercheur sur un petit nombre de questions influentes et de simplifier la recherche de caractères communs. Mais il est clair que les effets résultant d'un caractère commun agissant peu mais sur un grand nombre de questions, risquent d'être sous-évalués. Pour corriger les hypothèses issues de ces observations locales et a posteriori, il est classique de considérer les caractères envisagés comme des élèves supplémentaires, dont les réponses à chaque question seraient la présence ou l'absence du caractère à cette question-là.

La position de cet élève fictif par rapport au nuage de questions indique dans quelle mesure ce caractère est ou non spécifique de l'axe étudié, cette fois en fonction de toutes les questions.

Exemple : Considérons la série de questions posées à élèves à propos de "l'apprentissage de l'énumération", par Blanca de VILLEGAS (fig.2)

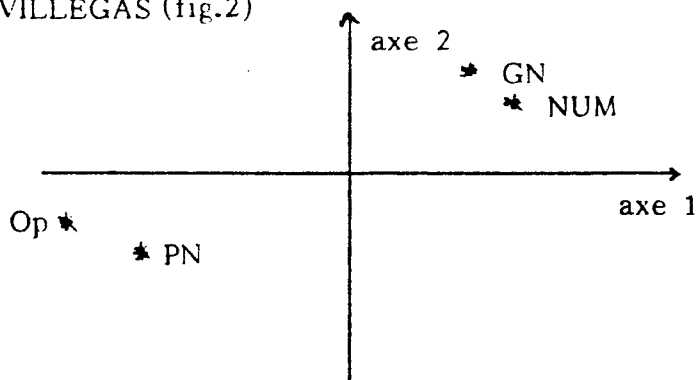


Fig. 2

L'examen de ces questions fait penser à un caractère opposant les questions, suivant la grandeur des nombres qui y figurent : "PN"; questions à petits nombres (abscisses négatives), GN : questions à grands nombres (abscisses positives). Un autre caractère se propose ainsi : OP : questions comportant une opération arithmétique, NUM : questions sur la numération. Peut-on donner une signification à cette proximité de PN avec DP ?

.../...

Elle paraît exprimer que les élèves qui sont caractérisés par un comportement commun aux questions "sur les opérations" sont aussi caractérisés par leur comportement sur les questions "à petits nombres". Après un examen plus approfondi des quatre hypothèses possibles (puisque les comportements sont binaires, l'échec aux opérations est lié à l'échec aux petits nombres, la réussite aux opérations est liée à l'échec aux petits nombres, etc...). On peut conclure par exemple que les élèves qui ne réussissent que les questions à petits nombres (et qui sont donc caractérisées par elles) sont ceux qui ont tendance à échouer dans les questions "sur les opérations".

C'est au moment du passage de la constatation interne au questionnaire à une conclusion plus universelle que le problème se pose : Peut-on en conclure que la méconnaissance de la numération joue un rôle dans l'échec au calcul des opérations ? Remarquons que la méthode classique d'ANAFAC ne donne aucun moyen de répondre à cette question ou de contrôler la validité d'une conclusion à ce sujet. Elle se borne à constater la proximité et à lui attribuer une certaine importance par rapport aux autres "explications", Peut-on aller plus loin ?

Deux hypothèses se présentent :

1. La première : La proximité est due au comportement des élèves : par exemple ceux qui sont caractérisés par un comportement de réussite aux questions comportant de grands nombres sont ceux qui ont tendance à réussir aux questions de numération ; mais l'hypothèse que ce sont les réponses des élèves qui déterminent la proximité implique que la projection du nuage des réponses sur le plan déterminé par les deux axes (GN-PN), et (OP, NUM) a une inertie importante, et un axe d'inertie Δ incliné par rapport à ces deux axes comme le montre par exemple la figure 3.

.../...

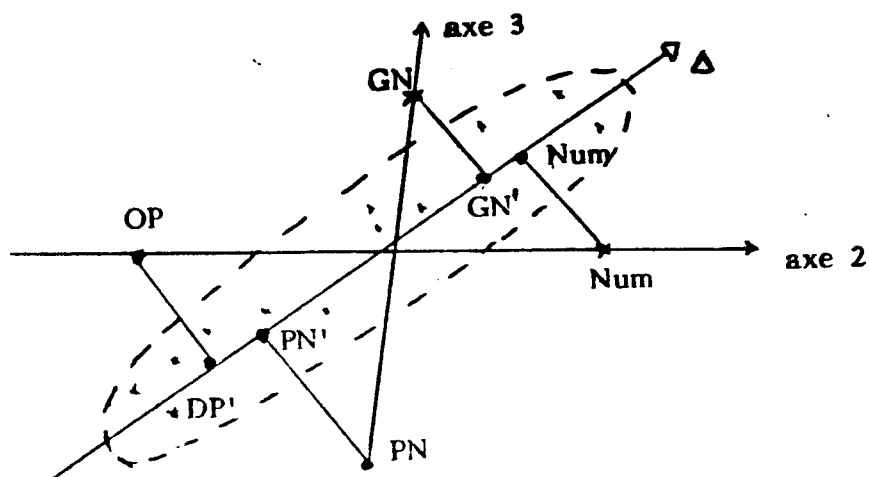


Fig. 3

Les projections sur Δ de GN et de NUM d'une part et celles de Op et PN d'autre part, sont voisines à cause de cette disposition du nuage, imprévisible en dehors de l'expérience.

Cette liaison peut jouer un plus ou moins grand rôle dans l'explication de l'inertie totale du questionnaire. Si l'on examine le premier plan principal, les projections de GN et de Num peuvent être plus ou moins proches. Exemple, sur la figure 4 où le plan (GN, PN), (OP, Num) est le deuxième plan principal.

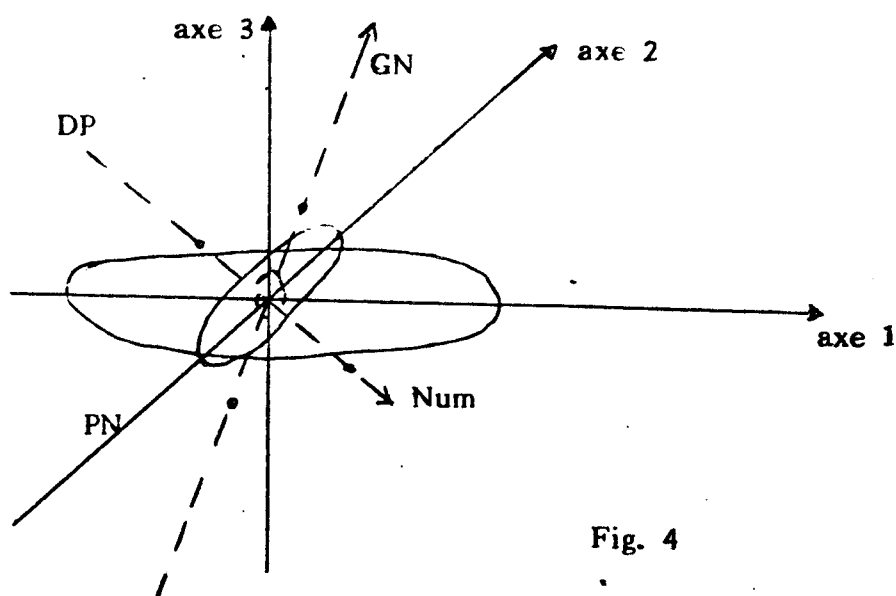


Fig. 4

La figure 3 est dans le plan formé par les axes 2 et 3.

2. Mais il peut se présenter une autre hypothèse : la proximité - attestée par les résultats - est due à un agencement malheureux du questionnaire : par exemple toutes les "opérations" portaient sur des "grands nombres"... de sorte que toute caractérisation par l'un impliquait une caractérisation par l'autre.

Dans ce cas on observera évidemment un extrême aplatissement du nuage contre l'une des bissectrices des axes (GN PN) et (OP Num) et si on considère ces derniers a priori comme orthogonaux comme dans le premier cas, on risque de conclure de la même manière : "Les élèves qui maîtrisent GN, maîtrisent les questions de numération". C'est exact ! mais cette déclaration ne caractérise que les questions de CE questionnaire. Elle n'a aucune portée générale, aucun fondement expérimental et elle était contenue dans les questions.

C'est ce qui risque de se passer souvent avec la pratique classique où des "élèves" supplémentaires représentent les caractères qui sont envisagés au coup par coup.

Il est donc indispensable d'examiner les liaisons des caractères a priori, et a posteriori afin de n'attribuer à l'observation que les variations de distance et non les distances elles-mêmes.

II. La méthode proposée.

Elle consiste :

1°) à établir pour tout caractère explicatif envisagé un vecteur binaire (éventuellement numérique) qui représente la présence ou l'absence de ce caractère pour chacune des questions posées (comme pour en faire un élève supplémentaire).

Et ceci, que le caractère soit envisagé a priori ou a posteriori.

.../...

On obtient ainsi pour les c caractères envisagés une matrice booléenne MA de dimension $c.m.$

2°) A faire une analyse factorielle de MA semblable à celle que l'on effectue sur R .

Avant la présentation du questionnaire, cette analyse permet à l'expérimentateur de s'apercevoir des liaisons introduites a priori par le choix des questions. Par exemple deux caractères ne peuvent pas être distingués parce qu'ils sont présents et absents en même temps. Il peut alors essayer en changeant son questionnaire, soit de supprimer celles de ces liaisons qui le gênent dans sa recherche afin d'obtenir des inerties comparables pour les facteurs qu'il veut étudier et qu'il considère comme également intéressants

ou, au contraire, de favoriser certains facteurs par des liaisons assumées. Il peut se former une idée des limites de son dispositif en regard des explications prévisibles.

Ce travail est un peu comparable à la constitution d'un plan d'expérience résultant de la détermination de variables contrôlées dans les statistiques classiques.

Mais cette analyse se fait aussi bien a posteriori sur tous les facteurs envisagés qu'a priori.

3°) A examiner la position relative de l'espace des résultats et de l'espace "explicatif".

La technique des variables supplémentaires plonge l'espace explicatif MA dans R . L'examen de la position des caractères envisagés par rapport aux axes d'inertie et au nuage des élèves et des questions est classique, mais il s'agit plus d'apprécier les transformations qu'ont subi ces positions par rapport à celles qui étaient prévues par MA :

Par exemple, la projection le long du premier axe principal de MA sur le premier plan principal de R peut écraser le nuage dans une zone trop petite : ce caractère ne peut pas alors être retenu pour expliquer la dispersion observée. Par

.../...

contre, un autre caractère, moins bien représenté dans le questionnaire et donnant une projection d'importance supérieure ou comparable pourra être pris en considération.

On peut ainsi mieux choisir parmi les caractères envisagés malgré un certain déséquilibre dans le questionnaire.

Si la projection de MA toute entière dans les premiers plans principaux de R est trop faible, c'est tout le système d'explication qui doit être reconsidéré.

Pour l'instant cet examen se fait "à l'oeil nu" par la confrontation des projections sur leurs plans principaux de l'espace MA d'une part et de l'espace R muni de MA comme élèves supplémentaires d'autre part.

Une méthode automatique réalisable sur ordinateur est à l'étude. Elle consiste à décomposer l'espace R en deux espaces supplémentaires MA et MB et à apprécier la part de l'inertie de R expliquée par MA.

Sur l'exemple que nous considérons plus haut on conclut que :

1°) Les caractères GN et PN ainsi que OP et Num sont "incompatibles" (non pas en principe mais dans le questionnaire tel qu'il est conçu. Ce fait n'était pas inéluctable).

2°) Les caractères GN et Num sont voisins dans la matrice de l'espace explicatif. Leur proximité dans R ne peut s'expliquer comme un résultat expérimental.

3°) Mais la projection de cette distance sur le premier plan principal n'est pas réduite. Il n'est pas déraisonnable de continuer à envisager l'hypothèse correspondante bien qu'elle n'ait pas pu s'exprimer dans ce questionnaire.

En résumé, la méthode proposée vise à recentrer l'analyse sur ce que l'expérience apporte à l'observateur comme informations nouvelles et expérimentales par rapport à celles qu'il utilise (trop souvent implicitement) dans son système explicatif. L'analyse factorielle des correspondances ne perd rien de ses principales qualités : elle stimule l'imagination du statisticien et relativise les liaisons locales qu'il observe mais complétée par l'analyse de l'espace explicatif, elle permet son meilleur contrôle de cette imagination.

Cette méthode est susceptible de s'appliquer à l'analyse d'inférence, et probablement à d'autres méthodes d'analyse de données.

A PROPOS D'INGENIERIE DIDACTIQUE

En didactique, un problème est une situation didactique particulière.

1. SITUATIONS DIDACTIQUES.1.1 - Présentation.

Une situation didactique est un ensemble de rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu (comprenant éventuellement des instruments ou des objets) et un système éducatif (le professeur) aux fins de faire approprier à ses élèves un savoir constitué ou en voie de constitution. La "détermination" préalable de ce savoir est exigée du système éducatif mais pas nécessairement sous la forme de comportement et d'objectifs opérationnalisés. En fait, dans la mesure où l'organisation d'une activité est intentionnelle et justifiée par son organisateur par la désignation d'un savoir dont l'apprentissage est visé et, même si elle échoue ou dévie dans son objectif, elle est un objet d'étude pour la didactique.

1.2 - Négociation de la situation didactique.

Ces rapports sont établis dans une négociation dont le résultat est vécu par le professeur et l'élève comme un contrat fixant à l'un comme à l'autre une sorte de règle du jeu qui laisse à chaque protagoniste un certain nombre de choix, de moyens d'actions, de moyens d'information et d'obligations, dont par exemple, un but.

Ce contrat permet de gérer et de découper le temps didactique en séquences de types variés :

.../...

Exemple 1 : Une séquence extrêmement classique comprend un apport d'information, un énoncé, une question d'élaboration d'une réponse par l'élève, une évaluation (ou renforcement), une décision didactique du professeur (le choix de la séquence suivante) etc...

mais on peut rencontrer d'autres types de séquences où les décisions sont prises différemment :

Exemple 2 : énoncé, élaboration de réponse, mise à l'épreuve, élaboration de questions, organisation de connaissances, recherche d'information, etc...

Les principaux types de pédagogies des mathématiques sont obtenus par la mise en avant de certaines des relations ou des exigences du contrat didactique avec souvent un écrasement de certaines autres relations.

1.3 - Modélisation des situations didactiques.

La modélisation des situations didactiques réelles par des "contrats formels" représentés par les règles d'un jeu a pour objet de permettre les comparaisons entre ces choix didactiques, la mise en évidence des cas dégénérés et de leurs effets, la production de situations appropriées répondant à des critères fixés à l'avance, l'analyse et la prévision de leurs effets.

Le but de ces études n'est pas de promouvoir une pédagogie : l'enseignement par objectif, programme, par redécouverte, heuristique ou rationnel, mais de rendre compte de leur fonctionnement et de permettre l'émergence d'une didactique à caractère scientifique.

2 - SITUATIONS-PROBLEMES.

(Les situations problématiques sont celles qui laissent le sujet en charge d'obtenir un certain résultat par la mise en oeuvre de choix ou d'action dont il a la responsabilité.

2.1 - Situations quasi-isolées

La première condition est que cette responsabilité n'est pas, pendant un certain temps, partagée avec le système éducatif (avec le maître). Elle peut l'être avec des condisciples par exemple, mais le système est provisoirement quasi-isolé du point de vue de l'information. La dévolution du problème à l'élève se fait le plus souvent par la communication d'un énoncé explicite mais le problème comme sens pour l'élève est composé de bien d'autres informations et de bien d'autres limitations. D'ailleurs le sens du problème pour le professeur est fort différent lui aussi.

La situation problématique la plus générale comprend,

- des relations d'interactions du sujet avec un milieu physique (un système non anticipateur, qui ne fait pas dépendre ses réponses d'intentions ou de finalités)

- des relations d'intercommunications avec d'autres sujets, ces relations elles-mêmes classées en trois catégories :

- . des relations de formulation qui ont pour objet la communication d'informations

- . des relations de preuves qui ont pour objet d'emporter la conviction d'un interlocuteur par des moyens minimaux

- . des relations d'institutionnalisation qui ont pour objet de poser des conventions.

Bien que ce qu'on désigne par "problème" dans l'enseignement ne mette traditionnellement en scène qu'un seul acteur effectif, l'élève (les autres pouvant être évoqués, simulés, intériorisés, etc...) il est possible de réaliser des problèmes par la mise en scène de partenaires divers.

2.2 - Modélisation des problèmes.

Dans ce cas, le problème se réduit à une interaction du sujet avec un milieu réel ou supposé introduit par la consigne. La règle, explicitement ou implicitement communiquée lui donne les moyens d'envisager

- . les divers états possibles du jeu X
- . l'état initial $i \in X$

.../...

. l'application de l'ensemble X des états du jeu vers l'ensemble des parties de E qui définissent les choix permis dans chaque cas $\Gamma = X \rightarrow q(X)$

$$x \rightarrow \Gamma(x)$$

. l'état final ou les états terminaux t

$$\Gamma(t) = \emptyset$$

. une fonction de préférence, définie au moins sur l'ensemble des états terminaux

. A chaque coup, le joueur effectue un choix c'est une application qui fait correspondre à l'ensemble des états permis dans un coup donné, un de ces états

. L'autre joueur : "le milieu" établit à son tour certains états du système qui, éventuellement, peuvent être lus par le sujet comme des informations, des rétroactions sur son action.

. L'alternance des coups est fixée par une fonction appelée le trait.

2.3 - Modélisation de l'élève.

Cette interprétation d'un problème permettra de mettre en évidence si c'est le cas

- quelles décisions doit prendre le sujet
- quelles anticipations il peut faire
- et s'il peut en observer et juger les effets
- combien de tentatives pourra-t-il faire... etc

Dans cette modélisation le sujet se manifeste par une suite de choix qui, avec les réactions du milieu constituent une partie.

L'interprétation des "procédures de résolutions" observées se fait par confrontation aux stratégies et aux tactiques que l'observateur peut imaginer, expliquer, et dont il peut étudier les caractéristiques.

Une stratégie est un ensemble de choix défini sur l'ensemble de tous les ensembles d'états permis à partir de chaque état possible du jeu et qui, à chacun d'eux, fait correspondre un état préféré - une stratégie étant déterminée, le comportement du joueur est fixé jusqu'à la fin de la partie - quelle qu'en soit l'issue.

.../...

Les connaissances du joueur, ou son information lui permettent de modifier les ensembles d'états de jeu qu'il prend en considération et de réduire les choix qu'il envisage. De cette façon, une représentation - une collection de connaissances - peut permettre au sujet, de réduire entièrement son "incertitude" en ne lui laissant accepter qu'une suite de décisions, sa solution. Mais on peut observer aussi des solutions à l'intérieur d'une représentation qui ne réduit pas entièrement l'incertitude du sujet qui prend alors une décision au "hasard". Les connaissances peuvent augmenter l'incertitude du sujet en lui faisant envisager de nouvelles possibilités non explicitées dans l'énoncé. M. Ratsimba-Rajohn a étudié la façon dont certaines connaissances s'organisent en conceptions (ou représentations) différentes en utilisant ce vocabulaire.

2.4 - Le sens.

Ce point de vue ne peut permettre la tentative de donner un "sens" aux activités de l'élève et à ses représentations et inversement aux situations didactiques. Dans le premier cas, ce sens est caractérisé par le couple formé du choix effectué et du paradigme des choix rejetés, par les conséquences prévisibles du choix et par divers caractères des stratégies retenues.

Le sens pour l'élève peut être évidemment différent du sens pour le maître, comme il peut être différent avant et après une acquisition. Il est bien sûr qu'il ne s'agit que d'une modélisation pour une approche. Le lecteur trouvera un exemple de l'utilisation de cette modélisation dans l'analyse clinique dans Gaël (Brousseau (1982)).

3 - UN EXEMPLE.

Avant de dégager de façon plus précise ce que nous attendons d'un problème, nous allons donner un exemple en montrant l'usage qui peut être fait de cette approche, non seulement pour décrire un problème, mais pour le modifier, pour en fabriquer de nouveaux.

.../...

3.1 - Un "problème" classique de soustraction.

Prenons un problème banal de ceux proposés couramment aux enfants de 6 à 8 ans.

(1) "12 tulipes ont poussé dans mon jardin, 7 sont rouges, les autres sont blanches. Combien y-a-t-il de tulipes blanches ?"

Ce problème est le plus souvent l'occasion, pour l'élève, d'une ou plusieurs des activités suivantes :

a) Il doit prendre 12 jetons, mettre 7 d'entre eux de côté et compter les autres.

a') Il doit dessiner 12 tulipes (ou douze traits), il doit en colorier (ou en rayer) 7. Il doit compter les autres. Il témoigne ainsi qu'il a su lire le texte et compris "la situation" (en particulier ce qu'il faut compter).

a") Il doit réciter mentalement sa table d'addition 7 et 1, 8 ; 7 et 2, 9... 7 et 5, 12, ou même une table de soustraction 12 moins 4, 8... et donner la réponse... 12 moins 5, 7... 12 moins 7, 5.

a''') Il faut compter à rebours sur ses doigts

12 11 10 9 8 7 6 5

1 2 3 4 5 6 7 (rarement utilisé aujourd'hui)

a''') Il doit calculer le complément : 8 9 10 11 12
(éventuellement sur ses doigts) 1 2 3 4 5

b) Il doit écrire une petite conclusion comme :
"Il y a 5 tulipes blanches", ou bien, plus difficile, mais plus rituel, "nombre de tulipes blanches : 5".

c) Il doit identifier une opération qui associe les données au résultat. Ici, il prétendra qu'il faut faire une soustraction.

d) Il doit désigner le résultat, d'abord à l'aide de cette opération : "12-7", puis directement "5" et écrire l'égalité "12-7=5". Dans son esprit c'est l'écriture de l'opération à faire et de son résultat et les signes prennent le sens ("je prends") 12 ("j'enlève") 7 ("je trouve") 5").

(-)

(=)

.../...

e) Il présente son travail au maître qui lui dit si l'ensemble de ses activités est satisfaisant, qui confirme le résultat (qui devient alors juste) ou l'infirme (faux) et le fait corriger en montrant éventuellement ce qu'il fallait faire.

Aucune activité autre que a, a', a'' ou a''' n'est nécessaire pour fournir une réponse à la question posée. Ainsi l'enfant répond à une situation didactique et selon un contrat implicite mais précis. En particulier, l'association entre cet énoncé et l'opération à effectuer (attendue, exigée) ne se fait que par l'interprétation verbale ad-hoc (on ôte quelque chose) rien ne permet d'anticiper les résultats d'un choix malheureux (même $7 + 5 = 12$ ne conviendrait pas).

Ce problème est cependant utilisé par les maîtres parmi bien d'autres du même type pour enseigner la soustraction.

3.2 - Transformation en situation-problème.

Comparons-le au suivant (le rôle des crochets sera expliqué plus loin). Les auteurs doivent faire ce qui est indiqué.

(2) Dans ce sac [^APaul] a placé [des cubes ^Ede plastique]
 [^BJacques] [^Vpeut] les compter s'il veut être sûr. [Il y en a [ⁿ52].
 [Paul retire de ce sac [^Dquelques pièces]], [^V2] [^BJacques] [^Vpeut]
 les compter. Il y en a [8] [^BJacques] alors essaye de deviner
 [combien de pièces il y a maintenant dans le sac].

- i/ Il écrit le nombre qu'il croit juste
- ii/ Il parie avec [Paul] qu'il a deviné juste
- iii/ [Paul] et [^V3] [^BJacques] [^Vpeuvent] compter alors
les pièces du sac et noter qui a gagné
- iiii/ [Paul] et [^PJacques] jouent [10] fois à ce jeu
Arriveront-ils à savoir deviner à chaque
coup ?

- Le fait que les enfants puissent effectivement manipuler les

.../...

objets évoqués ne constitue pas une différence fondamentale avec le premier énoncé mais désormais le fait est précisé (les versions a et a' le permettaient). Au contraire, le nombre relativement élevé de pièces 52 rend pénible la solution par le dessin (a') ou par dénombrement direct.

- Mais la réponse de Jacques est une anticipation sur les résultats d'une activité effectuable (et qui sera effectuée aussi longtemps qu'il sera nécessaire) et contrôlable par lui (décision).
- Jacques choisit une réponse en fonction des informations qu'il reçoit mais le caractère "expérimental" de cette réponse est reconnu par l'énoncé.
- Le prix à payer en cas d'erreur est faible et conventionnel il est là pour fournir une fonction de préférence entre les choix. Cela permet des démarches d'essai et d'erreur et des corrections successives.
- Mais en cas d'erreur, la tâche de vérification n'apporte guère d'information sur ce qu'il aurait fallu faire.

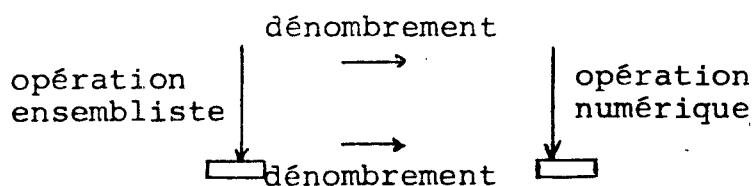


fig. 1

Car, comme dans le premier cas, la détermination du nombre de pièces restantes se fait par une voie (opération ensembliste puis, dénombrement) différente de l'opération mentale visée (dénombrements puis opérations numériques (fig. 1)).

- Les conditions et l'objectif de l'apprentissage sont fixées sans être formulés en terme de reproduction d'activité sans que soit évoqué le contenu de l'apprentissage, l'accent est mis sur le critère d'efficacité.

3.3 - Variables de la situation-problème, variables didactiques.

Les mots entre crochets peuvent être considérés en fait comme des variables à la disposition du maître qui peut en fixer les valeurs selon l'âge des enfants et l'étape de leur apprentissage.

Remplaçons [Paul] par le nom d'un élève quelconque ou par "je" si c'est le maître qui parle et désignons le premier personnage par A ; [Jacques] est B, et c'est un élève, non nécessairement différent de A. des cubes de plastique est un référentiel^E quelconque; [peut] peut être remplacé par [ne peut pas] qui ensemble constituent V_3 . [52] est le cardinal de E, appelons-le n, un entier naturel quelconque, quelques pièces est une partie quelconque D de E de cardinal δ . ici $\delta := [8]$. Le nombre de parties annoncées est N (ici $N = 10$).

Ces variables sont pertinentes à un âge donné dans la mesure où elles commandent des comportements différents. Ce seront des variables didactiques dans la mesure où en agissant sur elles, on pourra provoquer des adaptations, des régulations, des apprentissages.

Il est clair que le triplet (n, δ , N) joue un rôle important avec des enfants jeunes.

- pour n petit, $n \leq 5$ à partir de 6 ans

la représentation mentale est susceptible de fournir immédiatement la solution et rend inutile aussi bien les manipulations qu'a fortiori les écritures ou les calculs⁽¹⁾.

Pour n compris entre 10 et 30,

* si δ et $n - \delta$ ne sont pas trop petits (supérieurs à 5) le dessin ou le recours aux jetons permet des conclusions

...../....

(1) Ceci ne veut pas dire que l'enfant apprend directement les nombres par perception des "configurations" mais seulement qu'après 6 ans la reconnaissance ou les dénombrements sont très peu coûteux (cf. Fischer)

sûres avec l'exécution d'une tâche pas trop pénible nous dirons peu coûteuse (procédure a')

* si d est très petit par rapport à n par exemple $n : = 25$ $d : = 3$ (a''') les enfants peuvent :

a) compter par exemple sur leurs doigts à rebours

25	24	23	22	procédure a'''
	1	2	3	

ce qui leur pose éventuellement des problèmes de mise en correspondance :

25	24	23
1	2	3

mais la vérification est possible pour ceux qui "possèdent" les connaissances nécessaires. $22 + 3 = 25$.

b) Ce qui conduit souvent les enfants à utiliser directement la vérification comme moyen de recherche mais alors ils doivent

- . choisir un nombre plausible comme complément,
- . faire "la somme" ou plutôt compter jusqu'à épuisement des doigts représentant ce qui est enlevé
- . vérifier qu'ils obtiennent bien le nombre total
- . sinon recommencer (procédure a'')

* Si $(n-d)$ est très petit la recherche du complément est beaucoup plus "facile" l'enfant utilise le même procédé qu'en b ci-dessus : il compte à partir de la valeur d jusqu'à n (procédure a''')

Exemple : $d = 21$

21	22	23	24	25
	1	2	3	4

* Si n est grand et si d et $n-d$ sont assez grands aussi, l'élève peut "concevoir" l'opération qu'il pourrait faire mais y renoncer, par exemple parce qu'il prévoit qu'elle sera trop longue, trop coûteuse et donc peu fiable.

. l'élève peut aussi ne pas concevoir l'opération qu'il pourrait faire parce qu'il ne peut pas la conduire à son terme et qu'il conçoit mal ce qu'il ne peut pas accomplir. Nous pourrions discuter cette hypothèse et les rapports qu'elle a avec le passage chez l'enfant du contingent au nécessaire.

. L'élève peut aussi bien sûr effectuer quand il le connaît, un des algorithmes classiques de la "soustraction", écrite ou mentale qui s'appuient sur la base de numération

.../...

usuelle. Cette décomposition permet de ramener les calculs à effectuer dans le domaine où ils peuvent être faits sans dessin sans dénombrement et sans tâtonnements. Nous avons ici recensé 6 procédures, on peut en trouver d'autres.

3.4 - Domaines des procédures.

Les domaines que nous avons déterminés grossièrement ci-dessus à l'aide des variables (n et d) paraissent évidents. Mais pouvons-nous rendre compte de cette évidence à l'aide d'un calcul de coût, pour chacune d'entre elles ? Faisons-le à titre d'exercice

Coût du dessin: puisqu'il faut dessiner tous les objets, le coût de l'exécution sera par exemple de la forme

$$c = (\alpha + \beta)(n+d) + \beta(n-d) = \boxed{(\alpha + 2\beta)n + \alpha d}$$

avec α le prix du dessin ou de la suppression d'une barre
 β le prix du dénombrement d'une barre

On peut faire entrer en ligne de compte la fiabilité de l'opération et calculer l'espérance de la variable aléatoire "gain"

Si G est le gain dans un pari gagné

E la perte dans un pari perdu

N le nombre de parties jouées

k le nombre de parties gagnées

p_k la probabilité de gagner k parties N

X le gain au cours de N parties alors

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^N (kG - (N-k)E) p_k - Nc \\ &= \sum_{k=0}^N k p_k + E \sum_{k=0}^N k p_k - N \sum_{k=0}^N p_k - Nc \\ &= (G + E) \sum_{k=0}^N k p_k - N(E-c) \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = N [G p - E(1-p) + c]}$$

où p est la probabilité de réussite d'un calcul au cours d'un essai $p_k = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$

On peut supposer que p est une fonction affine de n et de d , comme c . Alors $E(X)_{(n,d)}$ la nappe qui représente

.../...

les coûts des problèmes est un plan (en posant $p = \theta c$ il vient

$$\frac{E(X)}{N} = N (G\theta + E\theta + 1) [an + bn] - E$$

coût de la recherche d'un complément: dans le cas où d est voisin de n , le coût est

$$C = 2 \alpha (n-d)$$

La fiabilité est très bonne, prenons-la égale à 1

$$\frac{E(X_2)}{N} = [G - \alpha(n-d)]$$

coût de la recherche "au hasard" ou par tâtonnements avec des nombres plausibles, si on admet que l'enfant cherche "sans mémoire" et peut faire plusieurs fois le même choix. Soit Y la V.A. nombre de tentatives pour trouver la valeur exacte. Supposons que l'élève cherche les nombres plausibles dans un intervalle de diamètre $2d$, et supposons qu'il fasse ses choix avec une probabilité uniforme.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2d} \cdot i \left(1 - \frac{1}{2d}\right)^{i-1} \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(2 - \frac{1}{2d}\right)^{i-1} = \frac{1}{2d} \sum_{i=1}^{\infty} i p^{i-1} \\ &= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \left(\sum_{i=1}^{\infty} p^i \right) = \frac{1}{2d} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d}{dp} \left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \right) \\ &= \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-p^{n+1}}{1-p} \right) = \frac{1}{2d} \frac{d}{dp} \frac{1}{1-p} = \frac{1}{2d} \cdot \frac{1}{(1-p)^2} \end{aligned}$$

$$E(Y) = 2d$$

Et le coût d'un calcul est $c = 2 \alpha d$ d'où

$$E(X) = 2 \alpha d \cdot E(Y) =$$

$$E(X) = 4 \alpha d^2$$

dans le cas où $n = 0$ ou $d = n$ il existe une procédure de coût nul.

Finalement, on peut après comparaison de ces différents coûts par des estimations des rapports entre le paramètre, dresser

.../...

une carte du domaine de meilleure efficacité des différentes procédures qui a l'allure de la figure 2.

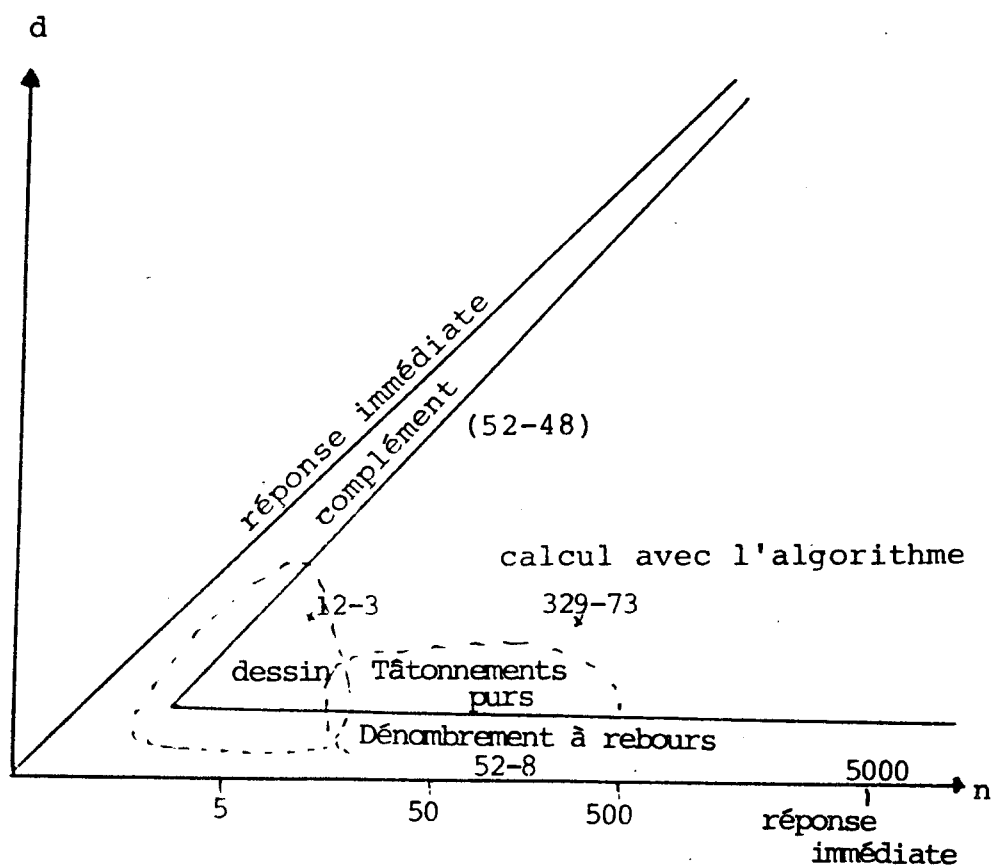


figure 2.

La procédure a''' fournit aux enfants un moyen de vérification anticipé qui modifie la situation. Celle-ci se présente alors comme si, après le choix d'un nombre, par exemple 42, avant que l'enfant parie, on lui disait : "si le nombre que tu dis est juste, il y a 42 pièces dans ce sac et 8 ici, si tu comptais les pièces, combien en trouverais-tu ? (50). La réponse est-elle juste ?"

En général, il n'est pas nécessaire de formuler la question de façon aussi précise ni même de la formuler du tout.

Cette procédure peut apparaître d'ailleurs, d'abord au moment de la vérification réelle comme moyen rapide pour l'un

.../...

des enfants de prouver que le pari de l'autre est perdu. L'intériorisation du procédé de vérification et son inclusion dans la méthode de recherche modifie la situation en ce sens que l'élève peut augmenter de façon décisive le nombre de ses tentatives à n et d constant. De ce fait, la quantité d'information qu'il aura à traiter sera plus grande et l'usage de relations nouvelles va se trouver économiquement justifiée dans des stratégies auxquelles la faible densité en essais de la situation initiale n'aurait pas laissé de possibilité d'apparaître.

3.5 - L'intervention de propriétés mathématiques et leur apprentissage sous la forme d'un modèle implicite.

Nous venons de voir que les différentes procédures ne sont pas équivalentes. On peut essayer de vérifier que les procédures effectives observées sont conformes aux prévisions dans les différents domaines de meilleure efficacité calculés. Mais le but de ces études est de permettre au maître de provoquer l'apparition de procédures nouvelles par le choix d'un problème dans un domaine nouveau ainsi que l'appropriation de propriétés mathématiques. Voici par exemple une suite de stratégies apparue dans la situation (52-8) décrite ci-dessus, chez un enfant qui utilisait la procédure de tâtonnements (Gaël). Nous les avons rangées par ordre croissant d'efficacité qui est l'ordre d'apparition observé (à partir de γ)

[α] Essais au hasard mais on peut essayer plusieurs fois le même nombre si on ne les marque pas ; et si on ne le range pas, la recherche d'un nouveau nombre devient vite coûteuse.

[β] Essais systématiques : on essaie les nombres les uns après les autres jusqu'à l'obtention de la bonne réponse :

35 (35 + 8 = 43 alors pas 35), 36, 44 (44 + 8 = 52) 44

Réponse.

[γ] Encadrement du résultat :

"le choix de 35 donne 43 qui est trop petit, alors 35 est trop petit". L'enfant choisit alors 48 par exemple, il oscille autour de la bonne réponse sans s'en approcher (l'enfant utilise ici implicitement la monotonie des translations).

.../...

[δ] Correction des encadrements : 43 est beaucoup plus petit que 52, 35 est beaucoup plus petit que le nombre cherché, 56 est trop grand, il faut prendre un nombre entre 35 et 48, plès près de 48 : on observe que les nombres proposés sont à l'intérieur de l'intervalle déterminés par les premiers nombres choisis.

[ϵ] Utilisation de la différence : 48 donne 56 qui est trop grand de 4, il faut prendre 48-4 (La procédure a ramené le problème à une procédure effectuable.)

Ces exemples montrent comment une propriété mathématique intervient comme moyen de résoudre un problème. Ici, ces propriétés sont mises en oeuvre implicitement (l'élève ne pourrait sans doute pas les formuler et encore moins les prouver).

β n'exige que la capacité de faire une liste. Curieusement, tous les enfants de 7 à 10 ans ne pensent pas ou ne savent pas utiliser les listes comme moyen de contrôler un dénombrement ou une procédure exhaustive. Peut-être est-ce parce que les désignations d'ensembles ont été introduites en tant que "savoirs" et les dénombrements en tant qu'activité automatique formelle et non en tant que moyen de solution de problèmes ou de contrôle d'une situation γ , V , X , étant le premier nombre choisi par l'élève (par exemple 35 Y étant le nombre visé d la différence (par exemple $Y = 52$ $d = 8$) et $f(X_1) = X_1 + d$ (par ex. $f(X_1) = 43$. Si $f(X_1)$ est trop petit (par ex. $43 < 52$) il faut prendre X_2 plus grand.

soit que le dernier nombre examiné (par exemple ici que 43 : l'élève choisit $48 > 43$

soit que x_1 : (ex : $38 > 35$)

mais sans que la correction tienne compte d'une estimation de la différence.

ϕ) est un perfectionnement de γ . La correction tient compte de l'encadrement du nombre visé entre deux images :

si $f(x_{n-1}) < Y$ et si $f(x_n) > Y$

alors X_{n+1} est chois entre x_{n-1} et x_n .

δ réclame le traitement d'un plus grand nombre de données (par exemple $35 \rightarrow 43 < 52$ et $48 \rightarrow 56 > 52$ alors le nombre suivant est choisi entre 35 et 48. Cette méthode conduit l'élève à

.../...

nouveau à une énumération, qui va solliciter et renforcer sa connaissance des nombres et de la numération (par exemple, pour trouver le prédécesseur de 40).

Le modèle implicite qui permet de contrôler cette procédure comprend la topologie de \mathbb{N} et un "théorème en acte" : la "translation est monotone".

e) ici la mesure des distances dans \mathbb{N} remplace la simple comparaison à un repère et la translation conserve les différences. Cette procédure peut être mise en place par économie et anticipation des résultats de la procédure précédente, ou par une systématisation suivie d'une description et d'une analyse si la situation didactique favorise les attitudes réflexives.

3.6 - La situation-problème comme situation d'apprentissage.

1°) Remarquons que chacune des procédures que nous venons d'étudier peut s'appuyer sur les précédentes en ce sens qu'elle en est un perfectionnement plus économique du point de vue de l'action et moins incertaine, en ce sens qu'elle réduit l'incertitude, le champ des possibles entre lesquels l'enfant hésite. Mais si la procédure la plus performante est oubliée ou si elle échoue pour une raison quelconque, la procédure précédente peut être utilisée et donner lieu à nouveau à la création de la suivante : l'apprentissage peut fonctionner à nouveau. Les connaissances qui sous-tendent ces procédures sont donc prises dans un paradigme où les unes peuvent remplacer les autres et leur servir de signification, de reformulation, de décomposition, d'explication...

Il est facile d'imaginer comment l'utilisation de cette situation et la manipulation des variables didactiques (n , d , N) peut permettre l'apprentissage de la soustraction, non pas tant en proposant aux élèves les connaissances, mais en leur proposant des situations qui leur donnent du sens en les rendant nécessaires ou utiles.

2°) Pour que l'élève "comprenne" l'énoncé, il ne suffit pas qu'il sache "interpréter" les mots qui y figurent, il faut aussi qu'il imagine une manière d'y répondre, "qu'il puisse envisager

.../..

une solution, au moins partielle à l'aide de ce qu'il sait déjà" (R. Douady 1980), qu'il ait ce que nous appelons, une stratégie de base, même si elle fait beaucoup de place au hasard (dans notre exemple α fait parfaitement l'affaire). On peut donc choisir un premier problème dans un domaine tel que la meilleure stratégie de l'élève puisse conduire au résultat, mais au prix d'un "effort" substantiel qui peut être évalué par son coût (dans lequel l'incertitude intervient). Puis, au fur et à mesure qu'apparaîtront des stratégies nouvelles et après que l'élève ait eu la satisfaction de voir son efficacité s'améliorer, le maître peut proposer des problèmes dans un nouveau domaine.

3°) Il est clair que pour que l'effort de construction d'une nouvelle stratégie vaille la peine, il faut qu'elle soit plus efficace que celle qu'elle va remplacer, ce qui implique d'une part, que l'on pense qu'elle va être utile "assez souvent" et que l'adaptation de connaissances qu'elle nécessite ne soit pas trop coûteuse.

En fait, cette adaptation n'est "bon marché" que dans le cas de ce que Piaget appelle une assimilation. Mais nous avons pu montrer ailleurs (Brousseau (1976) que la filiation des connaissances ou des théories ne pourrait pas être réduite seulement à une succession d'assimilations et d'apports de petites quantités d'informations (et ce, d'autant plus que l'on veut que les connaissances fonctionnent comme solutions de problèmes, que l'on veut que l'élève participe comme nous verrons plus loin et que c'est utile au choix des problèmes).

Le plus souvent, une nouvelle solution réclame une réorganisation des connaissances, un changement de point de vue... Dès lors, il y a intérêt à choisir les nouveaux problèmes de telle manière (c'est-à-dire dans un domaine tel) que la nouvelle solution associée à la connaissance visée soit beaucoup plus économique que l'ancienne. Ce qui oblige à renoncer à de petites progressions régulières le long des variables didactiques et à opter pour des sauts informationnels suffisants. Toutefois, si la stratégie de base devient vraiment trop visiblement inefficace ou impossible, le problème risque de n'avoir plus de sens pour l'élève (sous ma direction, ce problème a été étudié par

J.M Digneau (1980).

Nous dirons que la construction d'une nouvelle procédure se fait d'autant mieux que le problème se trouve au voisinage du point où l'efficacité relative de la stratégie correspondante est la plus élevée.

Cette efficacité relative est définie comme le rapport entre son coût et le coût de la meilleure des stratégies concurrentes. Elle peut s'évaluer même si l'on ne connaît pas les coûts eux-mêmes.

4°) La probabilité de créer ces nouvelles procédures est une fonction croissante du nombre d'occasions qui sont offertes à l'élève de le faire. On pourrait penser qu'il existe toujours un N assez grand pour amener cette probabilité aussi voisine de 1 qu'on le désire, mais ce n'est pas exact, et d'autres mécanismes didactiques doivent entrer en jeu - nous y reviendrons plus loin (tout de même on peut se rapporter à la querelle entre Chomsky et Skinner ou plus tard Suppes et Nelson).

5°) La possibilité d'organiser de tels processus a été étudiée à plusieurs reprises et à l'occasion de concepts mathématiques très divers. Il ne faudrait pas faire de ce procédé le modèle de tout apprentissage de connaissances, mais il est certain que son usage a été quelque peu ignoré ou négligé.

Les méthodes des études visant à rechercher un processus optimal sont évidentes mais extrêmement coûteuses, ce qui explique qu'elles soient si rares (voir cependant Bessot et Richard (1979)). La question de savoir si le processus fait partie de la connaissance et donc peut être proposé comme un objectif en soi, a été étudiée par M. Darce (1977) sans qu'il soit possible pour l'instant de se prononcer. Il est probable que les problèmes et surtout les processus de filiations tels que ceux que nous venons d'évoquer sont les moyens d'établir les rapports constitutifs des concepts et de leur fonctionnement, aussi bien de leurs rapports syntaxiques (structurels, logico-mathématiques) que fonctionnels (pragmatiques ou sémantiques) sans qu'on puisse les confondre. Au contraire, "l'oubli" des conditions d'acquisition de la connaissance doit faire partie du processus de détachement nécessaire à la connaissance (je ne dis pas "à l'abstrac-

.../...

tion", concept *ad-hoc* qui n'explique rien et qui est à la mathématisation ce que la vertu dormitive de l'opium a été à la thérapeutique de la morphine).

On peut toutefois penser que la représentation de la soustraction n'est pas réduite à la connaissance d'une stratégie de solution accompagnée de celle d'un prétendu sens de l'opération qui permettrait de l'appliquer, mais qu'elle comporte vraisemblablement la capacité de contrôler plusieurs stratégies en passant de l'une à l'autre selon les circonstances, c'est ce qui organise les connaissances en concept.

Remarquons bien qu'il n'y a pas de différence fondamentale entre la découverte d'une connaissance et sa mise en oeuvre par une "compréhension" de la situation. La tendance à l'économie favorise le recours à des "automatismes" qui sont accompagnés d'une perte du sens, c'est-à-dire la cessation d'envisager certains choix possibles. L'acquisition d'un "bon automatisme", c'est-à-dire d'un algorithme, permet un fonctionnement où le sujet ne fait aucun recours au sens (aux choix possibles, donc aux connaissances qui les commandent). La "compréhension" est en fait la possibilité de restaurer certains moyens de contrôles (par forcément les mêmes) et d'engendrer les alternatives à rejeter.

6°) Mais l'organisation d'un processus n'est pas "réduite" comme on pourrait le croire d'après cette partie de notre exposé au choix par le professeur d'une suite de problèmes dont la "résolution" va produire la connaissance comme une sorte de résidu d'activité. Il s'agira aussi de faire approprier par l'élève le processus de production des questions et des problèmes.

Au niveau le plus bas : la décision de "rejouer", de tenter une nouvelle fois de réussir, doit être remise à l'élève. Pour cela, il faut deux conditions :

- d'une part, que la situation-problème s'y prête. On exprime parfois cela en disant qu'elle doit être ouverte. Ce terme dont on a beaucoup usé n'a jamais été correctement éclairci et nous devons revenir sur le sens qu'il convient de lui donner ici.

- d'autre part, que le sujet "entre dans le jeu" ce

.../...

qui dépend de l'enjeu - non pas au sens de la récompense, mais au sens du désir, - et de la signification psychologique de la situation. Le terme de motivation ne convient pas très bien car il laisse penser que le désir du sujet serait un moteur qui puiserait sa source hors du procès de connaissance qui ne serait que consommateur de motivation. En fait, le jeu avec la situation-problème peut être producteur de la seule motivation authentique : une motivation endogène. Nous avons commencé à étudier ce phénomène avec F. Koné (1981). La gestion du désir de l'élève fait partie de l'analyse didactique des processus et de la tâche des professeurs (voir aussi G. Dumas "l'affectivité en mathématiques")

Exemple : Comparer les deux problèmes suivants A et B :

A : "démontrez que les trois hauteurs d'un (de tout) triangle sont concurrentes"

B : "dessinez un triangle dont vous tracerez les trois hauteurs en prenant bien garde de ne pas présenter un cas particulier (il faudra le prouver à ses camarades)"

Le défi, même implicite, est certes un moyen de "motiver" l'élève, mais je pense qu'il s'appuie beaucoup plus sur la structure de la situation créée que sur des attitudes psychologiques. Un défi sur une situation fermée n'a aucun sens et aucun effet.

A un niveau plus "élevé" du point de vue cognitif, mais de nature très comparable, la remise entre les mains de l'élève du pouvoir de "choisir" les questions qu'il va traiter - ou plutôt de les élaborer - va faire l'objet d'une négociation, celle du contrat didactique.

. Il est clair que ce ne peut être réglé par une simple décision pédagogique de proposer des situations ouvertes (décision qui ne dépendrait pas du contenu cognitif). La plupart des situations didactiques et des problèmes n'ont pas été choisis pour faire poser de nouvelles questions qu'il est nécessaire d'examiner; car dans ces conditions le choix du problème suivant ne peut relever que de la fantaisie du hasard ou de l'idéologie épistémologique (en particulier de l'épistémologie scolaire) et a les plus grandes chances de ne rien produire d'utile.

.../...

7°) L'étude des situations susceptibles de provoquer le démarrage d'une véritable dialectique scientifique et d'une authentique genèse d'un concept, sort du cadre de cette étude dans la mesure où l'on essaie de cerner la notion de problème au sens classique. Mais il n'y aurait pas d'obstacles insurmontables à considérer comme des problèmes d'un type nouveau les situations de communication, de preuve et d'institutionnalisation qui sont étudiées actuellement par de nombreux chercheurs, comme moyens de stimuler et de simuler les processus de genèse des connaissances en situation scolaire. Il faut bien remarquer que ces types de problèmes et les dialectiques qui s'y attachent n'ont que très rarement et très accidentellement été pris en considération par les promoteurs des pédagogies du problème. Or, il s'agit de faire intérioriser par le sujet tous les termes du procès de connaissance (aussi bien le "sur-moi" cognitif à qui il faut prouver ce que l'on croit, que l'interlocuteur intérieur à qui il faut parler le langage commun ou que le "moi" qui réclame sans cesse des actions, des décisions et des jugements pour "exister"). Il faut bien admettre que les "problèmes et les conditions qui s'y attachent ne sont qu'une partie, essentielle certes, mais insuffisante du processus.

De nombreux travaux par exemple ceux de LAKATOS, mais aussi ceux de POPPER et de BACHELARD montrent qu'il n'y a pas de procès standard qui produise toutes les connaissances, par voie royale - il faut vivre chaque aventure et les réductions ne sont pas plus évidentes que les productions.

8°) Evidemment, un même texte pourra être, selon l'âge ou le niveau des élèves, ou selon le contrat didactique, obtenu par le maître, soit un exercice, soit un problème d'application, soit un problème au sens classique, ou encore une situation de "découverte" etc... (Mais il est clair que le contrat ne permet pas de rattraper dans un problème une structure déficiente, un choix malheureux des valeurs des variables... etc). Mais examinons, toujours sur notre exemple comment ce contrat didactique peut à ce point changer la nature d'un problème par l'intervention de l'idéologie épistémologique du professeur.

.../...

Considérons un problème proposé explicitement ou implicitement comme problème d'application (au sens où l'entend Glaeser dans sa classification . Cela veut dire que l'on a déjà rencontré des problèmes déclarés semblables - par exemple comme problème introductif - et exhibé une solution, qu'on a érigé un problème "semblable" en "problème-type" - et il a été convenu qu'on allait devoir s'y référer. Et si l'élève ne sait pas faire le problème il est "convenu" qu'on rappellera le problème "type" et sa solution, ou l'explication qui l'aura accompagné pour faire à nouveau l'économie d'une recherche.

Exemple : "nous avons rencontré plusieurs fois ce genre de problèmes souviens-toi... par exemple... quelle opération avons-nous faite ? et ici qu'est-ce qu'il faut faire ... au lieu de ... nous avons ici quoi ? et on retranche quoi ?... applique la même méthode... fais un dessin..."

La règle qui s'impose dans ce discours, c'est qu'il y a une méthode, que l'on a apprise et qu'il faut "appliquer"... laquelle, pourquoi, quels sont les éléments à mettre en correspondance ? et cela devient "quelle opération faut-il faire ?" Quels sont les signes, les indicateurs qui peuvent me mettre sur la voie : la dernière leçon ? les mots inducteurs...

Le contrat didactique a imposé à l'élève une autre problématique et une incertitude exogène centrée sur les raisons "didactiques" du choix du problème, sur le désir du professeur etc... et pas du tout sur la question posée et les connaissances en jeu.

Ce fait est bien connu des professeurs qui, en réaction, doivent "jouer", par le choix des problèmes, à casser les idées fausses "les sous-compréhensions" dirait Pluvinage que leur contrat a pu produire.

Par exemple, je vous laisse découvrir la dialectique erreurs/corrections que peut engendrer la suite d'exercices suivants :

1. Quel est le plus grand décimal x tel que

$$105,001 > 57,3801 + x$$

même question avec $>$ supérieur strictement.

.../...

2. Encadrement à 10^{-5} près de 2,8
3. On sait que $3,25 \leq x < 3,28$
et que $27,11 \leq y < 27,12$

Quel est le meilleur encadrement pour $y - x$ et $\frac{y}{x}$ que vous pouvez trouver avec des décimaux à deux chiffres après la virgule.

4. $d \leq \frac{22}{21} < d + 10^{-3}$. Quel est le plus petit décimal s'il existe qui satisfait cette relation ? Le plus grand ? intervalle solution ? (suite de problèmes posés à des élèves-insituteurs).

Ce deuxième contrat, où chaque nouveau problème conduit à rejeter une erreur possible (peut-être est-ce le "contre-exemple" de Glaeser), est beaucoup plus proche d'une genèse d'un concept que le premier, mais il est tout aussi déformant que lui. L'analyse des différents types de contrats qui se nouent et des raisons de leurs succès et de leurs échecs est à peine commencée mais il est clair que l'analyse d'une situation-problème et son observation de façon quasi-isolée (du système éducatif) donne des renseignements précieux mais tout à fait insuffisants puisque le contrat change le sens du problème posé.

4. QU'EST-CE QU'UN PROBLEME ?

Nous reviendrons plus loin sur les questions que la didactique se pose actuellement à propos de ces questions. Mais il est temps peut-être de se demander maintenant si nous avons progressé dans la direction annoncée. Qu'est-ce qu'un problème ?

4.1 -

L'approche que nous venons de faire permet de répondre à peu près à cette question et même de la préciser. Il s'agit de savoir ce que le professeur ou le didacticien pense que doit être un problème pour l'élève. Il suffit de reprendre les conditions qui définissent les situations-problèmes et d'indiquer les limitations qui différencient le problème, de l'apport d'information, de l'exercice... etc...

On peut pour cela reprendre les conditions de R. Douady
(1980)

.../...

."L'énoncé est facile à comprendre" ce n'est pas toujours le cas des situations-problèmes qui sont basées sur des rapports sociaux inhabituels pour les élèves ou pour les maîtres, comme par exemple les situations de preuve variables, les situations de communications, ou les situations de débats de savoirs".

."La réponse n'est pas évidente" et nous ajouterons que le rapport entre le temps et les efforts consacrés à investir le problème, à saisir l'énoncé, à résoudre les problèmes matériels... et le temps et les efforts consacrés à sa solution doit être assez faible - largement inférieur à l'unité en tout cas.

."Une solution au moins partielle peut être envisagée à l'aide des connaissances acquises". L'élève possède une stratégie de base à laquelle il peut penser lui-même ou qui peut lui être rappelée sans inconvénient

. Mais ces méthodes de résolutions déjà connues ne sont pas satisfaisantes : elles sont trop longues, ou elles donnent des résultats incomplets, ou insuffisants etc... Nous ajouterons que le saut informationnel doit être supérieur à un certain seuil.

. La résolution et son contrôle dépendent de la maîtrise de certains concepts . soit non acquis encore, ou en tout cas non institutionnalisés

. soit tels que le contrat didactique ne les désigne pas de façon trop évidente à l'intérieur d'un paradigme assez vaste.

Cependant pour que le temps de résolution ne soit pas excessif il faut que l'incertitude au sujet de ces concepts ne soit pas trop faible : $I = \sum_{i \in I} f(i) \log_2 f(i) < s$ ou $f(i)$ est la fréquence avec laquelle le concept i se rencontre dans le processus didactique, I ensemble des concepts entre lesquels le choix paraît ouvert à l'élève. Ceci oblige :

- soit à en limiter le nombre par des indications didactiques

- soit chercher une situation problème telle que les rétroactions de la situation referment progressivement le choix des élèves, c'est-à-dire leur donne des informations pertinentes. Pour cela, les concepts doivent se manifester par des anticipations, voire des hypothèses et le nombre de tentatives doit

.../...

donc être suffisant.

Le temps consacré au problème et l'importance des connaissances acquises doivent être dans un rapport "raisonnablement faible".

R. Douady ajoute "le concept joue dans le problème le rôle qu'il joue dans les sciences ou les pratiques où il intervient de façon essentielle" certes, mais la transposition didactique est inévitable et le problème est plutôt de limiter certaines différences qu'elle produit. Or, ce résultat ne sera pas obtenu sans un minimum de compréhension de la manière dont fonctionne le problème pour le professeur.

4.2 -

Les objets de la didactique se manifestent pas les phénomènes

Ainsi, il faut s'interroger sur la fonction que joue le problème dans l'activité de l'enseignant et par rapport à lui - et peut-être tenter de le définir par cela.

* Parmi les questions et les "problèmes" que se posent ou que rencontrent les mathématiciens, il n'y en a seulement qu'une partie qu'ils considèrent certainement comme des problèmes de mathématiques: ce sont ceux qui peuvent se mettre sous la forme d'une conjecture formulée en langage mathématique ; ils s'en posent d'autres bien sûr, par exemple ceux où figurent des termes paramathématiques, qui suscitent leur intérêt et donnent lieu à des activités mathématiques qui ne sont pas de résolution de problème au sens strict.

La résolution d'un problème formulé dans le langage d'une théorie mathématique se ramène toujours à la démonstration d'un théorème (soit de cette théorie, soit d'un métathéorème) de sorte qu'un problème, à ce sens restreint, se ramène à l'établissement d'un théorème $A \Rightarrow B$.

En ce sens, l'enseignement d'une théorie mathématique et l'enseignement de la solution de la collection des problèmes/théorèmes qui la composent, sont devenus projets logiquement

.../...

équivalents. Faire que l'élève puisse résoudre tous les problèmes formulables dans une théorie peut être l'objectif maximal que se donne un professeur au sujet de cette théorie. On peut imaginer que l'élève tente d'atteindre cet objectif par des moyens d'apprentissages ne faisant aucunement appel au contenu cognitif de cette théorie, par exemple par conditionnement et par des procédés mnémotechniques. Nous aurions ainsi une sorte de degré zéro de l'acquisition où l'élève saurait tout des mathématiques sans faire aucunement des mathématiques, sans déduire, sans proposer de conjecture etc... Bien sûr, ce projet est "irréaliste", ne serait-ce que parce que la moindre théorie possède une infinité d'énoncés, mais ce n'est pas seulement pour des raisons d'économie qu'il faut concevoir autre chose. L'étude de l'engendrement d'une théorie (ou d'un ensemble de formules) avec des systèmes générateurs réduits et des règles de détachement (ou avec des algorithmes) est aussi dans la nature même des mathématiques.

On peut imaginer un élève qui n'a appris que les axiomes d'une théorie et qui, par un exercice "de sa pensée", en dérive naturellement la valeur de vérité de n'importe quel énoncé. On a, là encore, un degré extrême de l'apprentissage. L'élève possède, presque sans l'avoir appris, toutes les "habiletés mathématiques" : on lui énonce les axiomes et c'est tout. Curieusement, les deux degrés idéaux et extrêmes de l'apprentissage semblent réalisés dans le cas d'un algorithme. Par exemple, à l'aide d'un petit nombre d'énoncés (les formules de la table de Pythagore $a \cdot b = c$ $0 \leq a \leq 10$ $0 \leq b \leq 10$) et d'un algorithme (par exemple celui de la multiplication) l'élève peut décider la valeur de toute formule de la forme $a \cdot b = c$ a, b et $c \in \mathbb{N}$. C'est pourquoi cet apprentissage va servir de "modèle", au moins implicite, pour tous contrats didactiques spontanés que l'on a observés. Le modèle se présente ainsi :

a) une partie de la théorie est communiquée à l'élève, partie qui comprend un système d'axiomes, mais aussi des théorèmes fondamentaux, des définitions etc... c'est l'organisation théorique du cours. Imaginons que l'on choisisse une démonstration de chaque théorème de la théorie et que l'on regroupe toutes celles qui commencent de la même façon, on fait ainsi apparaître

.../...

des troncs communs, des embranchements... etc et les énoncés correspondants prennent valeur de théorèmes fondamentaux de certains secteurs. On peut aussi imaginer que l'on écrit tous les théorèmes sous la forme $(A \Rightarrow B)$ et que l'on mesure l'intérêt d'un théorème à l'aide d'une formule du genre $I(A \Rightarrow B) = f(A) \cdot (1-f(B))$ en notant $f(A)$ la fréquence avec laquelle la condition A se présente dans les énoncés de (cette formulation de) la théorie (ou d'un domaine d'application) $f(B)$ étant la fréquence de la condition nécessaire B . On ne retient que les plus "intéressants"...

b) Avec cette théorie communiquée, l'élève a la charge de dominer un certain champ de problèmes ou de théorèmes. On a pris l'habitude de considérer ce couple "théorie communiquée/champ de problèmes dominés" comme une caractéristique de la valeur organisationnelle d'un cours de la puissance d'une introduction déductive aussi bien que des capacités mathématiques d'un élève. (En ce sens les "problèmes" sont les théorèmes non enseignés et non trivialement engendrés par le "cours" et fonctionnent comme une cible. Le professeur va souhaiter donner le cours le plus réduit car il veut qu'une part substantielle reste à la charge de l'activité mentale de l'étudiant, mais aussi le plus efficace possible car il veut que le champ des problèmes dominés soit le plus vaste possible. L'élève va tenter de satisfaire cette exigence, soit en développant sa compréhension, ses capacités de validation, de preuve etc... soit en simulant leurs effets par des apprentissages par conditionnement, aussi bien de connaissances du cours que des problèmes-types... etc.

A première vue, il semble que le professeur et l'élève puissent collaborer. Ce n'est pas sûr du tout, car la situation que nous venons de décrire est en fait en équilibre instable en ce sens qu'aucun contrat stable n'est possible.

* Si le lot des problèmes-cibles ne change pas et n'est pas "trop gros", la réaction des maîtres pour "améliorer" les résultats des élèves, est d'augmenter la longueur du cours, et de le prolonger par des techniques appropriées (tours de mains, méthodes, heuristiques etc). Les élèves eux, augmentent la part du conditionnement qui, dans certains cas, finit par dévorer toute activité mathématique (les problèmes du BEPC en France

.../...

sont tous sur le même modèle). Un phénomène semblable se produit si le lot des problèmes est trivial, ou insuffisant par rapport à une théorie "trop" puissante qui transforme en simples calculs ce qui était considéré comme une "recherche noble". Il s'en est produit de ce genre lorsque des réformes de structure des théories et du cours a été introduite sans que le lot des "problèmes aux caractères didactiques appropriés" ait été prévu. Certains problèmes sont devenus triviaux, d'autres obsolettes. Il se produit la même chose lorsque l'introduction d'un nouveau point de vue "écrase" de vieux problèmes.

Par exemple, l'introduction de l'algèbre en 5ème et les problèmes d'arithmétique de l'enseignement élémentaire.

* Si le lot des problèmes devient trop nouveau ou trop dur, les résultats s'effondrent, et le résultat est le même si le cours devient trop bref, trop léger.

Y. Chevallard et J. Tonnelles ont montré l'utilisation qui est faite par les professeurs du 1er cycle du fait que les élèves doivent manipuler les identités remarquables sans avoir les moyens de contrôler qu'ils restent bien dans l'anneau de polynôme souhaité. La factorisation est utilisée comme un champ de problèmes pour "faire faire des mathématiques" aux élèves, même si le jeu est en fait "retrouvez ce que j'ai caché".

Il faut donc constamment rétablir un équilibre qui a tendance à se rompre, par des glissements qui renouvellent le stock des problèmes, et/ou l'organisation théorique et qui s'opposent à un apprentissage par conditionnement en favorisant son opposé... la compréhension ?...

On peut observer la trace des corrections qui tendent à rétablir un équilibre rompu, non seulement tout au long de la suite chronologique des programmes et instructions successives, mais aussi à l'intérieur d'un même curriculum.

La reprise ou non des mêmes questions mathématiques à des moments différents du cursus scolaire, montre comment, soit le conditionnement, soit la reprise théorique, font dis-

.../...

paraître un type de problèmes du champ visé :

Par exemple, les problèmes de "règle de trois" ne sont guère mieux réussis après l'étude de l'algèbre, des proportions et rapports, puis de la fonction linéaire et les étudiants ne savent pas à quel genre de théorie mathématique ils se rattachent Pourquoi ?

Les professeurs choisissent les problèmes de façon à maintenir une certaine entropie didactique qu'ils considèrent comme optimale

($E = f(e) \log_2(f(e)) + (1-f(e)) \log_2(1-f(e))$ où $f(e)$ est la fréquence des échecs des élèves). Pourquoi ? Quels pouvoirs ont-ils sur les erreurs ; les sous-compréhensions... Quand leur nombre s'accroît (M.H Salin 1976, N. Milhaud 1981)

4.3 - Didactique, heuristique et pédagogie de la découverte.

Dans un livre récent, Alain Bouvier^(*) oppose l'enseignement par le problème ou enseignement heuristique à la pédagogie par objectifs ou l'enseignement programmé et aux méthodes de redécouverte. Chacune de ces pédagogies met en avant, considère comme prioritaire, l'une des facettes du processus mathématique; l'enseignement heuristique aurait pour objet de développer l'aptitude des élèves à conjecturer et à prouver par les moyens caractérisés par J.L Higgins (Mathematics Teaching and Learning):

- . apprendre le contenu sous forme de problèmes
- . se centrer sur les questions qui incitent l'étudiant à utiliser diverses heuristiques
- . favoriser une certaine incertitude critique en considérant des alternatives c'est-à-dire des approches multiples aux solutions
- . encourager l'activité de l'étudiant.

Jusqu'ici les convergences avec les objectifs que permet de viser l'ingénierie didactique que nous avons évoquée plus haut sont assez évidentes, sauf toutefois sur un point : l'utilisation de ce que Higgins appelle "les heuristiques" et sur lesquelles il faut revenir. / ...

(*)

A. Bouvier continue : l'enseignement heuristique nécessite de la part du maître

- qu'il aide les élèves à formuler des problèmes
- qu'il favorise l'accès à l'information, qu'il fournisse des documents, réponde à certaines (c'est nous qui soulignons) questions et aide l'élève à se repérer

- qu'il pose des questions incitant à approfondir et à poursuivre - quels sont les problèmes qui se ressemblent ? pourquoi cela est-il vrai ? peut-on l'expliquer ? les solutions sont-elles les mêmes ?

- qu'il incite à des synthèses de résultats pour en estimer la portée.

Il s'agit nettement d'inciter le professeur à obtenir par d'autres moyens que les problèmes, mais grâce aux occasions qu'ils fournissent, les parties des processus de mathématisation qu'ils ne provoquent pas d'eux-mêmes. Cette liste de ce que le maître doit apporter est l'aveu de ce que la méthode ne permet pas de décider ni de contrôler. On voit nettement ici apparaître comme moteur une "épistémologie scolaire" que nous allons examiner aussi. Ensuite, Bouvier présente la nécessité de poser des problèmes qu'il dit "difficiles". Ceux qu'il donne en exemple présentent, en fait, la plupart des caractères des situations problèmes que nous avons énumérés et il est probable que ce sont les caractères qui sont recherchés. Mais lorsqu'il donne une suite d'exemples du même problème généralisé et reformulé à proposer à différents niveaux (du CM₁ à la terminale), et bien qu'il se défende de programmer une redécouverte, il montre explicitement l'intention de provoquer un processus dont il donne, sinon les étapes, du moins les éléments (observation, choix de critères, classification, émergence et formulation de problèmes, étude, résolution dans un cas particulier puis dans d'autres cas, observation, ... etc) et qui relève d'une conception épistémologique à examiner. Il apparaît clairement que l'enseignant aura à charge de "trouver et de proposer des situations où l'élève devra choisir des critères, prendre des décisions, se poser des problèmes" mais s'il considère ce projet comme un moyen d'atteindre ce but comme dans "l'enseignement par redécouverte"

.../...

s'il prévoit les effets de la situation, alors, il s'enferme avec l'élève dans "une séquence programmée" qui ne "diffère guère des méthodes traditionnelles et dogmatiques" comme le dit Higgins. Celui-ci signale que ce danger guette l'enseignement par les problèmes - qui n'est pas une pratique systématique des devinettes.

Ce texte montre clairement plusieurs phénomènes.

1. En jouant sur ce que la méthode proposée ou mise en avant peut produire et sur les obligations à la charge du maître, les différentes pédagogies peuvent facilement changer de casquette. Le prosélyte de chacune d'elles peut charger les autres des méfaits dont il veut se défendre. Ceci montre que ces méthodes n'assurent pas le contrôle de leurs propositions mais le remettent au bon sens du professeur, tout en s'attribuant les vertus qui "devraient" en découler.

2. Il apparaît un obstacle à la prise en charge du projet didactique dans son ensemble : Si le maître sait où il va, c'est de l'enseignement programmé, il doit donc, comme, et avec l'élève, partir à la découverte et se comporter de façon pragmatique, être comme un mathématicien ou un scientifique.

Cette attitude contradictoire qui veut que le professeur accepte et refuse à la fois la responsabilité et les moyens d'enseigner se rencontre très fréquemment aussi en pédagogie générale (Ecole moderne par exemple).

Mais il est clair que, d'une part, il est possible d'obtenir des situations didactiques, aussi ouvertes qu'il est nécessaire, du côté de l'élève et néanmoins fermées à terme du côté du professeur ; que, d'autre part, les interventions des professeurs sont aussi réductrices, qu'elles aient lieu dans le cadre d'une stratégie arrêtée à l'avance ou dans l'innocence d'un comportement "naïf" en fait commandé par une idéologie épistémologique. Au contraire, l'ignorance n'arrange rien. Ce qui est visé par cette attitude c'est de protéger la participation intellectuelle du maître contre des méthodes qui, comme celles que Bouvier présente, ne s'appuient pas sur une prise en charge théorique de l'ensemble du système didactique et qui de

.../...

ce fait, ne permettent pas de corriger leurs propres excès. Dans ces conditions, la place principale doit être réservée au professeur contre les "technologies" irresponsables. En fait, l'obstacle à l'étude scientifique du travail du professeur et à l'ingénierie didactique est un phénomène très complexe qui s'appuie sur un écheveau de justifications de toutes sortes.

Revenons à l'heuristique proprement dite, c'est-à-dire à l'étude des heuristiques, ces méthodes ou ces démarches de pensée qui conduisent à l'invention ou à la découverte.

Qu'il s'agisse d'heuristiques assez générales, opérations mentales, typiques, usuelles (généralisation, synthèse, analyse, recherche de cas particuliers, d'exemples, de contre-exemples) ou d'heuristiques beaucoup plus particulières comme les indications que donnent, par exemple, les professeurs de spéciales à leurs élèves pour les aider dans l'élimination de fausses notes lors des concours, il n'y a pas de doute qu'il y a là un "instrument" dont les mathématiciens et les élèves font usage (et qui est attesté par leur vocabulaire) et un objet d'études expérimentales. L'analyse des conditions dans lesquelles des élèves estiment avoir une réponse satisfaisante, celles qui, au contraire, relancent la recherche, l'étude des indices et des stratégies qu'ils utilisent est une partie essentielle de l'analyse des situations, nous l'avons vu. En ce sens, l'heuristique prend place dans la didactique dans la mesure où elle prend en charge les conditions dans lesquelles ces stratégies et ces démarches apparaissent. Cette condition me paraît indispensable pour assurer la reproductibilité et la nature même des faits établis, l'heuristique ne se suffit pas à elle-même, elle doit s'appuyer sur une épistémologie expérimentale, c'est aussi la condition qu'elle doit remplir pour venir en aide à la didactique.

Ce n'est pas le cas pour l'instant et il en résulte une impossibilité à atteindre le but que se fixe l'enseignement heuristique et surtout par exemple, l'enseignement des heuristiques. C'est le projet caché dans le deuxième alinéa de la citation de Higgins.

.../...

L'usage des heuristiques en didactique.

On peut en première approche assimiler une heuristique à un "théorème" qui ne serait pas toujours vrai. Si A alors B : A étant un ensemble d'indices, B étant (dans le meilleur des cas) une opération ou une méthode de résolution. Il est alors possible de caractériser l'intérêt de cette heuristique comme nous l'avons fait plus haut pour les théorèmes.

On désire que l'intérêt soit d'autant plus grand

1. que l'heuristique est plus souvent "vraie", c'est-à-dire que la fréquence des problèmes, où les indices A sont réalisés et où la procédure B conduit à la solution, est grande : I proportionnel à f (si A alors B)
2. que l'heuristique s'applique souvent : c'est-à-dire que les indices A sont souvent réalisés (occasions d'utiliser l'heuristique : I proportionnel à $f(A)$)
3. que la procédure B conduit moins souvent à la solution que les indices A soient réalisés ou non: I proportionnel à $1-f(B)$
4. que les événements "A réalisé" et "B conduit au résultat", sont plus éloignés de l'indépendance: I proportionnel par exemple

$$à f(A) - \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

$$I(\text{si A alors B}) = f(\text{si A alors B}) \cdot f(A) \cdot (1-f(B)) \cdot f(A) - \frac{f(A \cap B)}{f(B)}$$

Ces heuristiques sont-elles suffisamment "intéressantes" pour battre les démonstrations sur le terrain de la construction de la connaissance ? En tant que modèles implicites, il faut le croire puisqu'elles sont naturellement mises en oeuvre par les sujets, élèves de mathématiciens. Mais est-il nécessaire de les enseigner explicitement, de les institutionnaliser ?

Au moment de la résolution d'un problème que peut apporter à l'élève le recours systématique à un ensemble de procédés répertoriés d'avance ? N'est-ce pas une désertion devant le procès de savoir qu'il faut entreprendre à partir de ce dont il s'agit ?

.../...

On a pu voir par ailleurs comment la réduction à l'analyse formelle, ou logique, ou linguistique jouait le même rôle. Nous avons donné une critique explicite du processus psychodynamique de Dienes que nous avons rejeté en tant qu'épistémologie explicite pour les mêmes raisons (même si la recherche des ressemblances ou des analogies est une heuristique fructueuse)

Il ne faut pas déduire de ce qui précède que nous devrions bannir toute réflexion de ce type de notre enseignement. A titre privé, les heuristiques peuvent se révéler fort utiles - ne serait-ce que pour donner un "contenu négociable" aux phases de recherche individuelle. Il est des enfants qui appartiennent à des milieux où "chercher" est une activité mal vue, on cherche quand on ne sait pas, ou quand on a perdu ou oublié quelque chose et ce mot désigne une rêverie vague, dont on ne peut guère rendre compte - l'enseignement des heuristiques permet au professeur de combler ce vide et de négocier la recherche mais c'est toujours sur le même faux contact. Enseignées, les heuristiques peuvent s'évéler aussi pénibles et beaucoup moins fécondes que les démonstrations elles-mêmes.

Il y a tout de même certainement beaucoup à faire pour enrichir de ces heuristiques le stock des modèles implicites des enfants, mais il faut être conscients que l'institutionnalisation est une tentative de ramener l'enseignement des mathématiques au modèle des algorithmes et contribue souvent à vider les problèmes de leur sens. C'est une production de l'épistémologie scolaire hors du contrôle d'une théorie scientifique. Et que faire de John qui sait bien additionner et qui sait aussi chercher des cas particuliers, des ressemblances... etc, et qui ne comprend pas ses problèmes ? Allons-nous chercher des heuristiques du second ordre qui commanderaient les heuristiques du premier, comme le sens des opérations permet de combler le hiatus entre l'apprentissage d'un algorithme et son "application" ?

CHAPITRE V

**COURTES ETUDES DE DEUX PROBLEMES PRATIQUES DANS
LE CADRE DE LA THEORIE DES SITUATIONS DIDACTIQUES**

- 1. L'enseignement de l'énumération**
- 2. L'enseignement de la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace**

Etude de deux problèmes pratiques et fondamentaux dans le cadre de la théorie des situations et du contrat didactique

L'ENSEIGNEMENT DE L'ENUMERATION

I. INTRODUCTION ET RESUME.

Cet article a pour objet d'indiquer diverses formes d'intervention de la théorie des situations dans l'étude de problèmes pratiques d'enseignement. Ces exemples sont construits en utilisant diverses recherches dont certaines ne sont pas achevées, d'autres étant déjà anciennes. Il ne s'agit donc pas ici d'un compte rendu classique mais d'un exposé de questions et de méthodes.

Nous allons tout d'abord relever toute une famille de difficultés des élèves de différents niveaux à propos de différentes connaissances mathématiques, difficultés bien connues que l'enseignement ne résoud pas bien.

La construction de ce que nous appelons les situations fondamentales associées à ces différentes connaissances fait apparaître une condition commune capable de rendre compte des difficultés observées.

Cette première étape permet donc de formuler des hypothèses sur les causes des difficultés des élèves. Ces hypothèses peuvent être étudiées expérimentalement par différentes méthodes classiques de la psychologie cognitive mais aussi par des méthodes directes, tirées de la théorie des situations elle-même.

Nous proposerons alors l'explication qui apparaît la plus vraisemblable suivant les résultats que nous connaissons à ce jour.

Il apparaît alors qu'il est possible de la rattacher à une connaissance mathématique, ce qui permet d'utiliser à nouveau la théorie des situations, mais cette fois pour produire et étudier des séquences d'enseignement de cette connaissance, susceptibles de résoudre les problèmes d'apprentissage des élèves.

Les séquences d'enseignement produites "en application" de la théorie des situations sont généralement complexes et d'une conduite différente des leçons classiques. De sorte qu'ayant éventuellement résolu

.../...

un premier problème d'enseignement on en trouve un second dans la difficulté à communiquer cette solution à ceux qui doivent l'utiliser. La théorie des situations indique comment et sous quelles conditions les micro-ordinateurs ouvrent des possibilités entièrement nouvelles dans ce domaine.

Nous ne pourrions pas dans le cadre de cette communication assez courte donner un aperçu de la théorie des situations elle-même mais nous évoquerons ce qu'on attend dans le problème évoqué et nous résumerons la méthode d'analyse.

2. ETUDE DE QUELQUES DIFFICULTES D'ENSEIGNEMENT.

1°) A l'Université il est fréquent de voir des étudiants attendre la correction d'un exercice de combinatoire pour être sûrs que leur réponse est correcte. Alors que dans d'autres secteurs des mathématiques l'invention de la solution du problème est plus difficile pour eux que l'établissement de sa validité, lorsqu'il s'agit de dénombrements, curieusement les difficultés s'inversent. Certains étudiants ne savent pas comment se convaincre qu'ils ont bien compté tous les éléments et qu'ils ne les ont compté qu'une seule fois. On observe l'apparition de méthodes de reconnaissance de cas - par exemple pour distinguer les arrangements des combinaisons - fondées sur des caractéristiques formelles non pertinentes (ils disent par exemple : "c'est ordonné donc ce ne sont pas des combinaisons" alors que l'ordre dont ils tiennent compte est celui utilisé pour décrire un des objets à compter...).

D'autres utilisent tout à fait au hasard les formules qu'ils ont apprises.

2°) Dans l'enseignement secondaire les dénombrements posent aussi des problèmes difficiles aux élèves : écrire tous les termes d'un produit de polynômes en troisième année ou faire la liste de tous les éléments d'un ensemble qui ont une certaine propriété en première année ne va pas sans mal parfois même pour de bons élèves.

3°) A l'école élémentaire certains élèves n'arrivent pas à savoir quelle opération il convient de faire dans les problèmes même si les manipulations évoquées leur sont familières et s'il est clair qu'ils

.../...

les conçoivent parfaitement. Les maitres disent alors qu'ils n'ont pas le "sens des opérations" et essaient de le leur inculquer par la présentation répétée de problèmes que l'élève doit rapprocher des problèmes types. L'usage des caractères formels et des heuristiques douteuses est très répandu. Par exemple le maître justifiera une addition en soulignant dans l'énoncé le mot "ajoute". Puis dans un autre problème où le mot "ajoute" est encore utilisé, le maître modélisera la situation avec des petits nombres parce que la solution exige une soustraction mais si c'est d'une division qu'il s'agit il utilisera une autre métaphore.

4°) En première année d'école primaire on peut observer des enfants qui "savent compter" mais qui ne mettent pas en oeuvre ce savoir pour effectuer des tâches qu'ils comprennent bien pourtant et qui requièrent le comptage : Ils ne comptent qu'en réponse à une demande sociale bien précise et n'ont aucune idée de ce à quoi cette tâche sert ni ce qu'elle permet de maîtriser.

3. COMPARAISON DE CES DIFFICULTES

1°) Quoiqu'assez différents ces divers problèmes peuvent être rapprochés intuitivement, il s'agit chaque fois de dénombrer mentalement un ensemble qui n'est pas concrètement présent ou réalisé. Pour préciser ces ressemblances et les analyser il faut faire correspondre à chaque exemple, à chaque connaissance, sa situation fondamentale. C'est un jeu tel que la meilleure stratégie implique l'utilisation de la connaissance visée mais qui peut être investi sans que cette connaissance soit nécessaire : l'élève peut comprendre les règles et commencer à jouer ou même gagner SANS utiliser la connaissance qui commande la mise en place de la stratégie optimale. Dans le meilleur des cas la situations fondamentale permet la construction de la connaissance par l'élève lui-même au cours d'une suite de parties au cours desquelles il prend progressivement le contrôle du jeu. Cela implique naturellement que les enjeux soient connus sinon effectifs...

2°) Ainsi on peut se demander par exemple quelle est la SITUATION FONDAMENTALE de l'addition de naturels.

.../...

Il s'agira pour le joueur de produire le cardinal d'un ensemble alors qu'il ne peut en contrôler effectivement à chaque moment (pour quelque raison que ce soit) qu'une partie. Par exemple, il ne sait pas compter des nombres plus grands que 5, mais il dit "il y a cinq et puis cinq et puis deux." Ou encore l'élève doit pouvoir les compter appeler certaines catégories d'objets, une à la fois : la stratégie optimale consiste à constituer une partition de l'ensemble puis à s'assurer du nombre d'objets dans chaque classe, en s'assurant que l'on compte bien toutes les classes.

Formellement le jeu doit permettre à l'élève de vérifier personnellement sa réponse. Par exemple, la réponse proposée est matériellement réalisée puis une association un à un permet de constater l'égalité.

De plus, si l'on veut que l'élève EXPRIME la somme et ne se contente pas de l'utiliser, il faudra ménager une communication où l'émetteur pourra "interroger" la collection à compter et où le récepteur devra réaliser la collection équipotente sans voir le modèle. S'il s'agit de prouver le bon usage ou une propriété de la somme, ou de débattre d'une méthode de calcul, la théorie des situations exige d'autres types de conditions.

La comparaison des diverses situations correspondant aux problèmes ci-dessus (et que nous ne pouvons exposer ici) fait apparaître comme fondamental le contrôle mental par l'élève de l'ENUMERATION d'un ensemble.

Par exemple on peut observer de grandes difficultés chez des élèves du début du secondaire à mettre en oeuvre le contrôle de l'exhaustivité même pour des ensembles finis de très petit cardinal au cours de raisonnements très simples.

3°) Une énumération d'un ensemble est une injection de cet ensemble sur une section commençante de \mathbb{N} . Ce serait donc la possibilité de produire et de contrôler la production effective de telles énumérations qui ferait défaut aux élèves en difficultés sur les questions évoquées plus haut. Il est clair qu'il faut prendre le mot "contrôle" dans un sens fort, et que le contrôle mental va exiger la mise en oeuvre AU SERVICE de l'énumération des connaissances logiques de l'enfant.

Nous donnons en annexe de cet article le début de la description formelle de la situation fondamentale de l'énumération, évoquée dans une réalisation sur micro-ordinateur.

4. ETUDE DU ROLE DE LA CONNAISSANCE DE L'ENUMERATION DANS CES DIFFICULTES.

1°) Remarquons tout d'abord que l'énumération est une notion qui n'a pas de statut culturel en mathématique, même si on peut la rattacher à des concepts et à des théories très importants elle n'est nulle part traitée comme un objet de savoir.

. Est-ce pour cela qu'elle a échappé aux professeurs en tant qu'objet d'enseignement ?

Il est facile de constater qu'elle n'est jamais enseignée sous aucune forme après la première année de l'école primaire même implicitement et que même là elle n'intervient effectivement que dans le dénombrement de toutes petites collections (généralement moins de 20, au-delà le contrôle effectif de la collection par le maître lui-même devient presque impossible dans les conditions d'une classe.

2°) Ainsi l'hypothèse suggérée par notre analyse des situations serait la suivante :

i) Les élèves doivent passer très brutalement d'un contrôle perceptif de l'énumération de petites collections d'objets petits déplaçables mais immobiles à un contrôle complètement mental et verbal d'ensembles quelconques.

ii) Les professeurs ne disposent pas de situations d'enseignement qui leur permettraient de faire développer par leurs élèves des savoirs-faire, des anticipations, des stratégies dans des rapports expérimentaux avec le milieu. Ils ne disposent pas non plus de ce fait de moyens de négocier avec eux des contrats didactiques raisonnables à propos de ces questions ni même d'évoquer avec eux ce genre de difficultés.

iii) Ces conditions seraient une cause principale des difficultés observées.

3°) Il ne manque pas de moyens d'étudier ces hypothèses.

La méthode classique consiste à rechercher la preuve que ces difficultés sont bien dues à cette cause dans l'examen du

comportement d'un certain nombre d'élèves d'abord sur des questions scolaires du genre de celles que nous avons relevées plus haut puis dans des expériences diverses d'énumération. Il s'agirait alors de s'assurer que ce sont les mêmes élèves qui ont des difficultés avec les différentes situations relevant de la même connaissance. Plus finement des observations cliniques pourraient mettre en évidence des filiations des hiérarchies ou au contraire des différences.

Il faut bien constater que, surtout pour des questions de didactique qui concernent des notions aussi précises et dispersées dans le temps ces moyens sont difficiles à mettre en oeuvre pour des chances assez faibles a priori d'obtenir des réponses très nettes.

L'analyse de textes, l'observation de classes peuvent aussi apporter beaucoup d'informations précieuses.

Mais que ce soit pour la réalisation des expériences du premier type, pour interpréter les comportements des élèves ou comme paradigme des problèmes et situations dans le deuxième, il faudra réaliser des situations didactiques aux propriétés reconnues a priori. C'est justement ce que la théorie des situations produit le mieux.

Alors pourquoi ne pas essayer d'obtenir une preuve directe par l'étude de l'effet sur des élèves des différents types de situations d'énumération ?

5. LES DIFFICULTES DE LA COMMUNICATION AUX MAITRES DE NOUVELLES SITUATIONS DIDACTIQUES.

Supposons que nous arrivions à démontrer par quelques moyens les hypothèses énoncées ci-dessus. Les situations produites par l'ingenierie didactique appuyée sur la théorie des situations présentent généralement certaines caractéristiques :

- Pour permettre l'adaptation des élèves, elles doivent les conduire à prendre de nombreuses décisions, à en voir les conséquences, à les modifier etc...

- Pour permettre le fonctionnement du savoir, elles doivent autoriser diverses stratégies, correspondant aux différents points de vue, pertinents ou non, que les enfants peuvent avoir sur le sujet et répondre

.../...

à ces comportements par des réactions appropriées

- Irrémédiablement elles doivent exiger de l'élève un projet personnel et des relations sociales variées : communications, débats ou négociations avec d'autres élèves, avec le maître, etc...

Les situations qui satisfont ces conditions sont donc très complexes et difficiles à gérer. On les trouve rarement dans l'enseignement classique où le maître a généralement en charge de provoquer, de recevoir, de corriger et d'interpréter toutes les réponses significatives de chacun de ses élèves. Celles que la didactique a pu produire et qui sont gérables parce qu'elles assurent des autocorrections suffisantes sont le plus souvent encore plus difficiles à communiquer à un maître. De plus, chaque savoir est caractérisé par toute une famille de situations obtenues en faisant varier certaines conditions qui ont une influence sur le savoir produit. Ces situations très nombreuses et chacune très complexe, forment une famille elle-même subtilement structurée de sorte qu'il est bien difficile de les connaître, de les identifier, de les reproduire et de les utiliser facilement en leur conservant leurs propriétés.

L'arrivée des micro-ordinateurs dans les classes ouvre dans ce domaine de grandes possibilités d'amélioration : la partie de ces situations complexes qui consiste à recevoir de nombreuses décisions et à leur appliquer des feed backs diversifiés peut le plus souvent être confiée à l'appareil, de sorte que leur présentation aux élèves va s'en trouver considérablement simplifiée.

Le maître peut la découvrir comme le fera l'élève sans qu'il soit nécessaire de la décrire, de l'expliquer et de justifier pour qu'il puisse la concevoir. Il peut à volonté reprendre le point de vue de l'enseignement et examiner les variables et les variantes à la lumière de son expérience ou des résultats des recherches.

Le savoir visé s'en trouve beaucoup mieux défini et les rôles des élèves et du maître dans son acquisition mieux connus. Car les apports de la didactique ne se réduisent pas à ce qui peut se mettre dans l'ordinateur, et l'usage de l'appareil n'est qu'un moment du processus. Par exemple, tous les élèves peuvent prendre connaissance en même temps de la situation que l'ordinateur propose de maîtriser par la création d'un certain savoir. Chacun d'eux doit pouvoir, au moment voulu, venir tester ses stratégies ou ses solutions, mais l'ap-

prentissage se poursuit entre deux passages :

- chercher à comprendre la situation,
- élaborer ses stratégies,
- débattre avec d'autres élèves des questions soulevées,
- communiquer les solutions, etc...
- mémoriser certaines procédures,
- faire des exercices d'entraînement,

occupent la majeure partie du temps.

De la sorte, un seul appareil dans une classe peut améliorer considérablement les rapports de l'élève avec le savoir, avec son apprentissage et avec le maître.

6. REFLEXIONS METHODOLOGIQUES

Le rapprochement de difficultés à l'aide d'un concept mathématique commun, s'il est excitant, ne constitue pas un fait didactique. Il ne permet aucun diagnostic fondé et donc aucune ingénierie. Certes, dans un contexte professionnel, on pourrait multiplier les évaluations, décrire finement les modalités d'erreurs afin d'attirer l'attention des professeurs sur ce sujet, et proposer de mettre au programme un enseignement de l'énumération. (Ce qui serait assez difficile à réaliser car c'est un objet mathématique vraiment très marginal). Mais ces décisions n'auraient aucun fondement théorique.

1. Que faut-il dans cette circonstance, attendre d'une théorie didactique ?

D'abord, qu'elle justifie le rapprochement des difficultés. Le fait qu'il s'agisse de la même connaissance mathématique ne donne directement aucune indication. Il faut principalement établir des relations entre certaines circonstances communes et les difficultés rencontrées par les élèves. Il faudrait de plus que ces relations soient explicatives de la production de ces difficultés. Il faudrait aussi que ces circonstances soient assez spécifiques de la connaissance visée et des erreurs observées, sinon, il faudrait chercher une sorte de fermeture donnant une bonne correspondance entre une classe de situations et une classe d'erreurs relatives à une même connaissance.

Il faudrait ensuite qu'elle permette de prévoir les effets des variations de ces circonstances sur les difficultés des élèves et

.../...

par là d'établir expérimentalement la validité de ces explications.

Enfin qu'elle permette d'envisager des propositions de séquences d'enseignement dont les résultats seraient "garantis" par les connaissances de didactique ainsi établies.

2. Méthodes d'analyse.

La théorie des situations propose de réaliser ce programme par la méthode suivante :

a) Trouver une situation-problème fondamentale. Il s'agit :

a_1 - D'énoncer un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de l'énumération seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent).

a_2 - De faire apparaître les variables (de cette situation) dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée. De faire apparaître celles qui changent son statut cognitif :

- en tant que moyen de contrôle de l'action
- en tant que moyen de communication
- en tant que moyen de preuve
- en tant que savoir ou algorithme de référence.

a_3 - De s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variable tous les problèmes culturellement connus où l'énumération intervient.

b) Examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir cette situation fondamentale quasi isolée et les confronter aux observations.

b_1 - La comparaison des situations réellement utilisées dans les classes avec la situation fondamentale fait apparaître des différences dans les conditions réalisées et permet de les envisager a priori comme des causes d'échec.

b_2 - D'autres échecs vont provenir de l'interprétation

.../...

que l'élève fait de la situation-problème où des modifications de signification introduites au cours de la dévolution de l'énoncé du problème ou de la négociation du contrat didactique.

b_3 - D'autres difficultés peuvent apparaître causées par divers obstacles (épistémologiques, didactiques, etc...) ou par des ruptures de contrat, ou provoquées par des particularités de l'épistémologie spontanée des professeurs.

c) Il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement, puis comment ces situations peuvent être enchaînées en différents processus pour provoquer les acquisitions visées.

L'enseignement repose sur différentes conditions qui peuvent être étudiées elles aussi expérimentalement. Ces conditions de dépendance entre les situations peuvent concerner chez l'élève aussi bien les reconnaissances de celles-ci et de leurs moyens de contrôle que l'identification des savoirs en jeu.

3. La situation fondamentale de l'énumération.

A. Une réalisation de la situation de base.

A_0 - L'écran de l'ordinateur présente [2] secteurs

	1 [blanc]	(partie supérieure et
soit	1 [vert]	(partie inférieure : "le pré"
soit	1 [bleu foncé]	(partie inférieure : "la mare"

Dans le secteur blanc, disposés au hasard

soit	des lapins	jusqu'à [20] et des papillons [0]
soit	des canards	

en tout jusqu'à 40 animaux.

A_1 - Avec le crayon optique l'enfant doit pointer l'un après l'autre tous les animaux d'une même catégorie. A chaque premier pointage d'un animal, celui-ci remue [les oreilles ou la tête] et émet un "beep".

.../...

Lorsque l'enfant estime avoir pointé tous les animaux,
 il pointe | le pré
 | la mare

A ce moment, tous les animaux précédemment pointés vont un à un, dans l'ordre du pointage mais assez vite à l'endroit voulu. S'il reste des animaux non pointés dans la région supérieure, le jeu prend fin. S'il n'en reste pas, tous les animaux rassemblés dans la région-cible remuent la tête ou les oreilles - musiquette.

Si au cours de la phase de pointage un animal est pointé plus d'une fois, le jeu s'arrête net (ou bien les animaux déjà pointés vont au lieu voulu et le jeu s'arrête aussitôt)...

A_2 - Fonctions : Ce jeu de tri différé est très proche des tris simples, cependant sa fonction est très différente. Il s'agit de permettre la mise au point, par l'élève, d'aller d'un des dessins à l'autre, en les rencontrant tous et chacun une seule fois. Il doit aussi éventuellement tenir compte de la catégorie d'animaux qu'il est en train d'énumérer.

A_3 - Exemples de stratégies.

- Suivre ligne par ligne ou colonne par colonne, cette stratégie est d'autant plus évidente que le nombre d'animaux est plus grand...

- Prendre "l'animal" le plus voisin...

- Reconnaître un chemin, une forme...

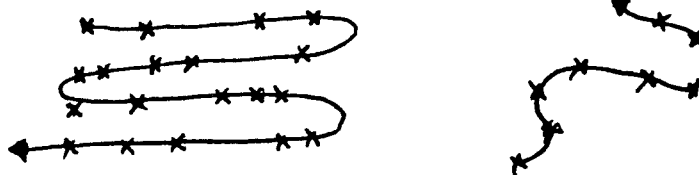
B. Variables et variantes.

B_1 - Le nombre d'animaux, leur taille, le nombre de classes, la distribution sur l'écran et sa densité.

Enumérer dans des conditions de "bruit" croissant peut conduire à développer des stratégies plus sûres et plus efficaces, mais très vite, le jeu se transforme en un jeu d'attention ou de concentration de peu d'intérêt pour les mathématiques.

On peut étudier les domaines qui vont favoriser l'exploration par lignes et colonnes et ceux qui conduiront à d'autres stratégies.

Exemples :



B_2 - La prise d'information : Totale ou partielle.

Exemple : l'enfant ne peut apercevoir tous les animaux à énumérer à la fois. Il doit déplacer une "fenêtre" de façon à explorer la totalité de l'écran... La taille de la fenêtre est une variable importante.

Cette disposition conduit l'élève à passer d'une stratégie d'énumération implicite et spontanée dépendant a posteriori des circonstances globales à une stratégie d'anticipation, locale, exigeant la construction mentale d'une représentation de la collection explorée.

B_3 - Déplacement des animaux.

Selon les types de déplacement et la vitesse on peut détruire toute possibilité d'énumération, suggérer ou renforcer certaines stratégies.

Exemple : Déplacements réguliers : chaque animal suit une trajectoire déterminée constituant un lacet localisé dans une petite portion de l'écran. Plusieurs animaux pouvant parcourir la même trajectoire. L'énumération se fait par trajectoire... Ainsi se dessine une méthode d'énumération plus complexe, classe par classe, à l'intérieur d'une énumération des classes.

B_4 - Objets distinguables - marquage des objets.

Si les animaux restent fixe, leur place suffit à les identifier, mais on peut prévoir de les rendre distinguables ou non. S'ils sont en mouvement, il est nécessaire de les distinguer par des traits divers (tâches, couleurs, accessoires...).

Le marquage des animaux déjà pointés (apparition d'un point sur l'animal par exemple) peut enlever tout intérêt au jeu (animaux fixes, tous visibles). mais il peut s'avérer indispensable dans d'autres cas :

Exemple : La fenêtre est fixe, les animaux défilent. L'enfant les pointe jusqu'à ce qu'il pense les avoir tous vus.

7. Conclusions

La situation d'énumération ci-dessus a été mise sur ordinateur par J. BRIAND qui a aussi étudié son utilisation dans les classes d'école maternelle. Il a rendu compte de ses observations dans son D.E.A.

Blanca DE VILLEGAS, puis Susy GAIRIN-CALVO développent le projet et l'étude des comportements des élèves du CP et du CE dans cette situation. Leurs études montrent que le contrôle de l'énumération est une des composantes essentielles, non seulement de la maîtrise de la numération, mais aussi de la compréhension par les élèves des opérations fondamentales.

BIBLIOGRAPHIE

BROUSSEAU Guy (1970) Processus de mathématisation
in La mathématique à l'école élémentaire - PARIS : Ed. Ass. des
Prof. de Math, 1972. pp. 428-442

BROUSSEAU Guy (1984) Le rôle central du contrat didactique dans
l'analyse et la construction des situations d'enseignement et d'appren-
tissage des mathématiques
in Proceedings of ICME, meeting ADELAIDE, 1984

EL BOUAZZAOUI Habiba (1982) L'enseignement de la numération au
cours préparatoire.
Thèse de 3ème Cycle BORDEAUX-I

BRIAND Joël (1985) Situation didactique et logiciel d'enseignement
(D.E.A BORDEAUX-I)

QUEVEDO DE VILLEGAS Blanca (1983) Les situations et les processus
dans l'apprentissage des nombres (D.E.A BORDEAUX-I)

L'ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE ELEMENTAIRE EN TANT QUE
MODELE DE L'ESPACE

Ⓐ La représentation de l'espace.

1. Exemple introductif, la manipulation du sens

Un exemple montrera comment le maître peut manipuler - ouvrir ou fermer - les situations d'enseignement et par où modifier le sens de la connaissance.

1. Nous modélisons les conditions du comportement de l'élève par des jeux dont il suit les règles mais qui lui laissent un certain choix pour des décisions dont il pourra observer ou ressentir les effets. Evidemment, des connaissances différentes exigent des jeux différents.

Dans ce modèle, le sens d'un comportement par l'élève est formé par le paradigme des possibilités qu'il envisage et parmi lesquelles ce comportement est choisi. Ce paradigme comprend en particulier les erreurs contre lesquelles la connaissance a été construite et les méthodes plus anciennes connues de l'élève et que le comportement choisi remplace.

[La signification d'une connaissance est l'association (conscience) de cette connaissance considérée comme signifiant avec un signifié (définition ou reformulation par exemple) et avec un référent].

2. Une des premières occasions qu'avait l'élève de se poser une vraie question et de faire une démonstration dans l'enseignement classique de la géométrie, était l'examen des points de concours des médiatrices des côtés d'un triangle. Le fait que la troisième doive passer par le point d'intersection des deux autres n'avait rien d'évident : non seulement il n'apparaissait pas comme nécessaire mathématiquement mais il n'apparaissait même pas non plus

.../...

comme réellement contingent à certains élèves qui devaient essayer deux ou trois cas pour constater une certaine tendance des trois points de concours effectivement obtenus à rester très voisins dans tous les cas. Cette obstination mystérieuse des faits appelait, pour les esprits curieux, un autre genre de preuve intellectuelle et irréfutable.

Encore fallait-il que la question soit posée avec un minimum de "mise en scène" et qu'un peu de temps soit laissé aux élèves pour chercher la réponse. L'énoncé du théorème, suivi aussitôt de la démonstration suivant un schéma classique ne donnait aucune place à aucune activité intellectuelle de l'élève, sinon réflexive (après coup).

Le résultat n'était même pas catastrophique, (s'il l'avait été l'enseignement se serait modifié un peu). Quelques élèves comprenaient, la plupart apprenaient la démonstration et beaucoup l'oubliaient, ou ne pouvaient pas se servir du résultat pour en établir un nouveau, l'existence de l'orthocentre par exemple. En fait, la situation pouvait n'avoir aucun sens pour eux, en l'absence d'incertitude s'ils ne se posaient aucune question, ils ne recevaient aucune information.

3. Si le maître posait réellement le problème, il avait peu de chances de voir un enfant inventer sa première démonstration à cette occasion.

D'ailleurs, même cette mise en scène ne permettait pas une approche "naïve". Le fait même de poser la question, dans les conditions dépouillées que l'on suppose (le triangle, deux médiatrices et leur intersection) indiquait à l'élève déjà aguerri que la réponse devait être "oui". Le maître ne pose pas habituellement ce genre de question si la réponse est "quelquefois oui, quelquefois non".

4. Les conditions de l'action.

Il faut donc que le maître pose, mais dissimule une

.../...

question telle que l'élève, bien qu'il n'en connaisse pas la réponse, puisse finir par l'obtenir par son activité propre.

Il est nécessaire qu'il puisse envisager des réponses et que parmi celles-ci, il retienne les bonnes. A moins de lui supposer une représentation très au point de la réalité (c'est-à-dire la coïncidence entre ses anticipations et les résultats) il faut qu'il puisse mettre en oeuvre plusieurs solutions successives, des actions, dont il pourra lui-même juger les effets... afin de corriger ses anticipations...

La théorie des situations n'est rien d'autre qu'une liste de conditions à satisfaire pour améliorer les chances de l'élève de parvenir à la solution dans de bonnes conditions, c'est-à-dire en évitant les pertes de sens intempestives : par exemple des conditions qui font paraître une réponse trop naturelle, trop "obligatoire" peuvent faire disparaître le sens, les raisons de son apprentissage : les élèves croiront la "savoir" puisqu'ils la "voient". A l'inverse des conditions qui font apparaître une réponse comme totalement inattendue ou miraculeuse justifie l'apprentissage mais diminue le sens de la connaissance.

Pour satisfaire le plus possible ces exigences "théoriques" il faut souvent de longues heures de réflexion et de débat et le recours à tout un arsenal technique qui forme l'essentiel de la recherche en didactique et dont la tradition occulte le résultat car il n'est pas d'usage d'expliquer longuement les caractères bons ou mauvais d'une situation. En voici une simple qui répond en grande partie à nos préoccupations.

5. Imaginez le scénario suivant :

Action.

Le maître demande de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC déjà dessiné : un peu effilé avec un angle obtus. Le cas que j'ai proposé semble assez particulier : ce triangle A'B'C' formé par les trois intersections est bien petit, sur tous vos dessins. Essayez de trouver des triangles XYZ tels que X'Y'Z' soient "plus grands". Les 6 points doivent rester à l'intérieur de la

.../...

feuille et le dessin doit être fait avec soin. L'ensemble de la classe devra juger qui a gagné." Ici la question n'est pas posée, aucune démonstration n'est demandée. L'élève est appelé à faire plusieurs dessins "différents" (le maître verra de quel ensemble le triangle scalène est vraiment générique). Il choisira ceux qui lui paraissent les plus favorables à son projet (triangles très petit avec deux angles très aigus par exemple) mais auparavant il aura développé le sentiment que ce n'est pas facile d'éloigner X' Y' et Z' les uns des autres, et aura acquis dans les phases d'anticipation une certaine expérience même si elle n'est pas formulable, des relations qui lient les éléments en présence. Il aura construit un "modèle implicite".

Cette consigne a-t-elle changé l'activité de l'élève ? a-t-il à cette occasion développé une opinion personnelle ? Cette opinion lui donne-t-elle la possibilité de faire des anticipations sur des actions à venir, ces anticipations sont-elles plus riches et plus justes ? Sa conviction est-elle plus assurée ? le nombre des élèves qui travaillent utilement est-il augmenté ? Pour l'instant, ils pourraient avoir surtout développé des idées fausses - par confiance en la parole du professeur par exemple. Et il n'y a guère de raison d'espérer que le "choix en commun des gagnants" remettent en question ces idées fausses.

Preuve.

Les tentatives terminées, imaginons une procédure de jugement. Après un rapide coup d'oeil sur les réponses des autres élèves, ceux qui pensent avoir gagné se rassemblent. Ce sont les "postulants". Ils vont gagner un point de la part de chaque personne qui reconnaîtra que le dessin choisi par eux est fait "avec soin". Ceux qui contestent cette reconnaissance forment les "compétiteurs", chaque compétiteur peut choisir d'attaquer le postulant de son choix.

Pour régler la contestation, les postulants communiquent les dimensions de leur triangle XYZ choisi, puis ils annoncent les dimensions d'un triangle qu'ils pensent pouvoir disposer à l'intérieur du triangle X' Y' Z' qui sera obtenu par le compétiteur s'il accepte le défi. Ce dernier devra

.../...

alors reproduire XYZ, puis construire X' Y' Z' - mais il peut faire plusieurs tentatives - et montrer qu'il a gagné, au besoin un tiers des élèves pourra être appelé à trancher la contestation.

Remarquons bien que cette étape doit être acceptée par les élèves comme le moyen social normal de faire reconnaître - ou de vendre - une méthode ou une connaissance : Il faut assurer un résultat sous certaines conditions. Mais il faut que "l'acheteur" ait l'emploi de cette méthode dans des conditions telles que si elle est mauvaise, il perde quelque chose, de façon ainsi à éviter la complaisance pour des résultats arbitraires ou douteux.

La formalisation de ces rapports est assez complexe : si le compétiteur abandonne, il donne "son" point (sa voix) au postulant et "adhère" à son opinion. A ce titre, il peut être attaqué à son tour et à nouveau changer de camp ; S'il gagne il prend tous les points éventuellement gagnés par le postulant, à condition de faire à son tour une "déclaration" qui s'oppose à celle de son compétiteur. Il apparaît clairement ici qu'une situation de compétition entre des opinions a été créée dans la classe avec une méthode de preuve de type pragmatique. On peut espérer voir baisser très vite les prétentions des postulants et même apparaître des déclarations subversives par rapport à l'énoncé : "je prévois un triangle dont tous les côtés ont une longueur nulle !" Mais nous n'aurons pas pour autant obtenu l'énoncé d'une preuve intellectuelle.

Une telle preuve devra remplacer et rendre inutile toutes les preuves pragmatiques, elle s'établira "contre" elle et non pas sur elle ! Il faut qu'un élève ait intérêt à déclarer "Je vais vous faire économiser des tentatives inutiles mes amis, si le dessin est bien fait les trois points X' Y' et Z' doivent être confondus".

Et là encore, il ne faut pas confondre une situation où l'élève a intérêt à savoir "la vérité" mais à ne pas la dire - comme dans les universités italiennes de la renaissance -

.../...

avec une situation où il doit en publier la preuve.

On peut par exemple instituer que si le postulant et le compétiteur peuvent tomber d'accord sans qu'il soit nécessaire de dessiner, ils se partagent le "prix" de l'expérience économisée, ou bien le vainqueur double son gain et le perdant garde la moitié de son avoir pour s'être laissé convaincre... Il n'existe pas de règles qui assurent l'émergence de la vérité et l'intervention du maître sera tout de même souvent nécessaire. Il serait très coûteux en temps et inutile de faire dépendre l'acquisition de chaque théorème d'un affrontement social. Cependant, on aperçoit sur cet exemple les possibilités offertes par un tel schéma de manipuler au moment opportun le sens donné par l'élève à la connaissance qu'il s'approprie. Si l'élève produit la réponse avant qu'une intervention du maître spécifique de la question traitée n'ait refermé le problème, on peut être assuré qu'il s'agit d'une réponse personnelle de sa part et qu'il en a éprouvé l'intérêt ou la nécessité dans un certain contexte.

Si l'on veut que l'élève comprenne ce que c'est qu'une preuve mathématique, il faut créer les conditions qui vont lui permettre d'en utiliser, et pas seulement à l'intérieur de situations déjà mathématiques pour imiter et reproduire ce qui lui a été montré, mais à la place d'autres genres de preuves, (preuve pragmatique ou sémantique) ou d'autres moyens d'entraîner la conviction des autres (le charisme, la rhétorique, la menace, la séduction...).

Il faudra peut-être plusieurs exemples - assez espacés toutefois - de fonctionnement de la classe en bureau d'ingénieur (la première phase ci-dessus) pour que le maître et les élèves puissent invoker l'action au lieu de devoir l'accomplir, ou imaginer la défense que la démonstration prévient.

Instutionnalisation.

Nous n'avons pas traité dans cet exemple introductif la question de la signification interne aux mathématiques du savoir visé : Aucun élève peut être n'aura l'idée a priori de tracer le cercle circonscrit à X Y Z, mais s'il utilise son compas

.../...

pour vérifier que "le dessin est fait avec soin" autrement qu'en suivant les actions du constructeur, il a de grandes chances de "le faire", sans "le savoir". Mais pour qu'il sache ce qu'il a fait, il faut une institutionnalisation du savoir. Ce peut être le fait du maître, ce peut être aussi le fait de l'élève, à condition qu'une bourse aux découvertes soit ouverte et l'incite à formuler ses observations :

"Je sais tracer le cercle qui passe par les sommets d'un triangle"

L'exemple que nous venons de donner montre les possibilités offertes par la mise en situation de l'élève.

Ici, deux questions se posent :

1°/ Cette nouvelle situation a-t-elle changé la signification des connaissances acquises par l'élève par rapport à la situation classique initiale ? L'acquisition se fait-elle mieux ?

2°/ Cette mise en situation peut-elle être réalisée de façon systématique, et peut-elle se faire sous le contrôle d'une théorie. Il est clair que cette théorie devra se confronter à ce que l'on sait déjà principalement en épistémologie et en psychologie cognitive.

2. La théorie des situations

1. Résumé de quelques concepts de la théorie.

i/ Nous venons de nous attarder sur un exemple simple afin de bien montrer l'articulation entre les exigences théoriques et la production de propositions didactiques. Nous avons fondé nos transformations de la situation sur une analyse des fonctions différentes que le savoir peut jouer. Il s'agit toujours de savoir à quel jeu l'élève doit jouer pour que les stratégies les plus efficaces impliquent l'usage du savoir qu'on veut lui enseigner ; il s'agit aussi que le jeu puisse lui être communiqué, et pour qu'il le comprenne, il faut en général qu'il puisse immédiatement mettre en oeuvre une stratégie "de base", qui

.../...

même si elle ne permet pas de gagner, permet de jouer et d'espérer gagner.

ii/ La fonction première du savoir sera donc de fournir des décisions, de permettre des choix au cours de l'action. Pour cela il n'est pas toujours nécessaire que le savoir s'exprime, se prouve, ni même soit formulable. Toute situation d'enseignement pourra être analysée du seul point de vue des actions que l'élève doit entreprendre, de leurs motivations, de rétroactions auxquelles elles sont soumises, des possibilités d'évolution des stratégies de l'élève et des représentations ainsi obtenues.

iii/ La seconde fonction du savoir est de permettre la description des situations, c'est-à-dire la formulation des représentations. Et la composante des situations d'apprentissage qui justifie cette formulation, c'est la communication, éventuellement l'autocommunication.

Les adaptations de l'élève et de son langage à ces situations sont très importantes. Elles se font assez mal dans les situations classiques en géométrie, ainsi que l'a montré C. Laborde en utilisant la situation fondamentale que j'avais étudiée comme dispositif expérimental.

iv/ La troisième fonction du savoir est d'appuyer la conviction du sujet par des preuves éventuellement organisées en théories. La composante de la situation qui justifie cette activité c'est le débat de la preuve, de la validité de ce qui a été avancé, doit être apportée à un égal, également informé. Cette situation qui fait surgir les problèmes et les questions aussi bien que les réponses, est assez différente de la situation de communication comme nous l'avons exprimé plus haut.

v/ La quatrième fonction du savoir est la référence culturelle, à l'échelon d'un petit groupe, d'une classe, d'un milieu de chercheurs ou d'enseignants ou de la société tout entière, les rapports sociaux utilisant des savoirs reposent

.../...

sur un tissu de conventions. La composante des situations d'enseignement qui règle cet aspect de la connaissance est l'institutionnalisation par laquelle un groupe donne un statut à ce qu'il a produit le plus souvent par rapport à ce qui est pratiqué dans la société : (Mon attention a été attirée sur le dernier point alors que j'étudiais l'institutionnalisation interne à la classe, par P. Boero et son équipe, si justement soucieuse de ces questions de référence historique, sociale et professionnelle).

Canonisation d'une procédure en algorithme, conventions et langage, références théoriques...

vi/ En précisant le jeu des acteurs en présence cette modélisation permet d'essayer de prévoir l'évolution des situations et des élèves et de décrire les conditions qui commandent cette évolution ; je ne fais que citer au passage à ce sujet, nos travaux sur les sauts informationnels et sur les obstacles épistémologiques.

vii/ Les paragraphes qui précèdent supposent un fonctionnement quasi isolé du ou des élèves en interaction ; le maître fait aux élèves la dévolution d'un problème, et la situation les change ! En fait, il s'instaure entre le maître et les élèves la négociation d'un contrat didactique dont l'étude se poursuit actuellement.

2. Usages de la théorie des situations.

a) Mise en évidence et prévision des difficultés des élèves en particulier des difficultés insoupçonnées bien qu'importantes. Les recherches en psychologie cognitive sont le plus souvent fondées sur l'hypothèse implicite que la connaissance elle-même est bien connue et que seule la connaissance du sujet doit être modélisée - en général par rapport à la connaissance culturelle prise comme référence - La représentation des connaissances par leurs situations caractéristiques permet de renouveler certaines études comme nous le montrons plus loin.

.../...

Réciproquement, les difficultés des élèves permettent d'identifier les variables caractéristiques de la situation, certaines pouvant être utilisées par le maître.

b) Explication de certaines difficultés insurmontables de l'enseignement ou des phénomènes aberrants (divers effets Topaze, Jourdain, glissement métacognitif, etc...)

Ces explications soulagent les maîtres de la responsabilité tous azimuts qui finalement aboutit souvent pour eux à une sorte d'irresponsabilité, d'impuissance et de stress.

c) Dans la négociation didactique, le maître doit s'appuyer sur les présupposés épistémologiques naïfs de l'élève. Il tente parfois de les modifier - et la géométrie joue un grand rôle dans ce domaine - la théorie des situations permet de raffiner sensiblement les rapports à ce sujet et de les expliciter simplement sans détails inutiles.

d) Production de situations communicables aux maîtres et reproductibles, donnant enfin dans ce domaine "un principe de réalité".

Possibilité de faire à l'élève la dévolution d'un problème assez propre et résistance accrue des maîtres aux effets réducteurs du sens.

Que faut-il attendre de cette théorie du point de vue scientifique ?

D'abord qu'elle justifie le rapprochement des difficultés des élèves. Le fait qu'il s'agisse de la même connaissance mathématique ne donne directement aucune indication. Il faut principalement établir des relations entre certaines circonstances communes et les difficultés rencontrées par les élèves. Il faudrait de plus que ces relations soient explicatives de la production des difficultés observées. Il faudrait aussi que ces circonstances soient assez spécifiques de la connaissance visée et des erreurs observées, sinon il faudrait chercher une sorte de fer-

.../...

meture donnant une bonne correspondance entre une classe de situations et une classe d'erreurs relatives à une même connaissance (et éventuellement une catégorie d'élèves) :

La méthode classique qui consiste à rechercher une telle preuve au niveau des comportements des élèves : par exemple en montrant que ce sont les mêmes étudiants qui ont des difficultés sur les différentes situations relevant de la même connaissance est ici peu pertinente. Ce qui suit montre qu'il lui existe une alternative qui permet de la remettre en question.

Il faudrait ensuite que cette théorie permette de prévoir les effets des variations de ces circonstances sur les difficultés des élèves et par là d'établir expérimentalement la validité de ces explications.

Enfin, qu'elle permette d'envisager des propositions de séquences d'enseignement dont les résultats seraient "garantis" par les connaissances de didactique ainsi établies.

3. Méthode d'analyse.

La théorie des situations propose de réaliser ce programme par la méthode suivante :

a) Trouver une situation-problème fondamentale. Il s'agit :

a_1 - D'énoncer un problème dont la solution nécessite l'emploi par l'élève de l'énumération seule (si possible sans que d'autres connaissances interviennent).

a_2 - De faire apparaître les variables (de cette situation) dont les changements de valeur provoquent des modifications qualitatives des stratégies optimales, ce qui indique une modification de la signification de la connaissance visée. De faire apparaître celles qui changent son statut cognitif :

- en tant que moyen de contrôle de l'action
- en tant que moyen de communication

.../...

- en tant que moyen de preuve

- en tant que savoir ou algorithme de référence...

a_3 - De s'assurer que la situation ainsi obtenue permet d'engendrer par ce système de variables tous les problèmes culturellement connus où l'énumération intervient.

b) Examiner les difficultés et les échecs des élèves que permet de prévoir cette situation fondamentale fonctionnant de façon quasi-isolée et les confronter aux observations.

b_1 - La comparaison des situations réellement utilisées dans les classes avec la situation fondamentale fait apparaître des différences dans les conditions réalisées et permet de les envisager a priori comme des causes d'échec.

b_2 - D'autres échecs vont provenir de l'interprétation que l'élève fait de la situation-problème ou des modifications de signification introduites au cours de la dévolution de l'énoncé du problème ou de la négociation du contrat didactique.

b_3 - D'autres difficultés peuvent apparaître, causées par divers obstacles (épistémologiques, didactiques, etc...) ou par des ruptures de contrat ou provoquées par des particularités de l'épistémologie spontanée des professeurs.

c) Il est alors possible de revenir à la situation fondamentale et d'étudier comment elle peut produire des situations d'apprentissage ou d'enseignement, puis comment ces situations peuvent être enchaînées en différents processus pour provoquer les acquisitions visées.

L'enchaînement repose sur différentes conditions qui peuvent être étudiées elles aussi expérimentalement. Ces conditions de dépendance entre les situations peuvent concerner chez l'élève, aussi bien les reconnaissances de celles-ci et de leurs moyens de contrôle, que l'identification des savoirs en jeu.

.../...

3. La situation fondamentale pour la géométrie élémentaire en tant que modèle de l'espace

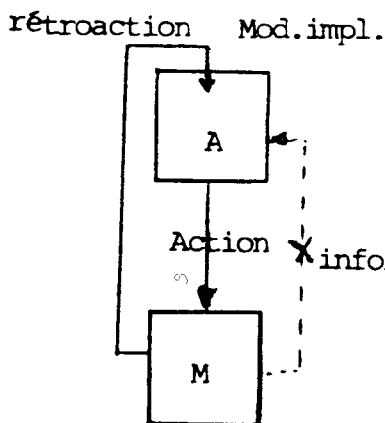
C'est celle du charpentier qui doit préparer et tailler au sol des bois qui devront s'ajuster exactement dans l'espace à 10 mètres du sol. Il faut qu'il ait une représentation et des techniques précises qui lui permettent d'anticiper le résultat de ses décisions. Mais alors que les seuls "textes" que se transmettaient les maîtres charpentiers étaient des dessins, le modèle ici dans l'enseignement devra être explicité et faire l'objet d'une élucidation, formellement, la situation sera donc la suivante :

1. La composante "action" des problèmes à résoudre.

i/ Les décisions à prendre.

[A] doit prendre une décision spatiale. Exemples :

- a) . Tirer une voiture à l'aide d'un fil pour la placer entre deux traits
- b) . Tracer une figure superposable à une autre
- c) . Choisir une route pour aller à un endroit donné
- d) . Déterminer la longueur d'une pièce de carton pour un puzzle
- e) . Enumérer (choisir une application d'une section commençante et N dans) les faces d'un polyèdre
- f) . Estimer la distance entre deux points
- g) . Prévoir la position finale d'un objet qui tourne ou qui bouge
- h) . Prévoir une représentation dans une projection centrale



ii/ Les contrôles de l'élève sur la situation.

Ces décisions sont faciles à prendre dans certaines circonstances familières :

parce qu'on voit les éléments de la situation
parce qu'on peut corriger au fur et à mesure

.../....

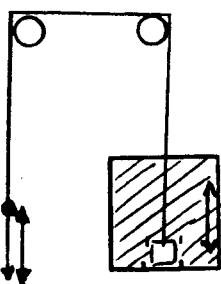
et parce qu'on peut juger immédiatement du résultat.

Mais dans d'autres circonstances, le contrôle continu de l'action n'est plus possible. Il faut alors se représenter la situation, et à partir d'informations partielles anticiper les résultats des actions envisagées. L'obligation de résoudre fréquemment des problèmes de ce type caractérisés par la mise en défaut des moyens perceptifs de contrôles et la suppression de certaines informations est une condition nécessaire de l'apparition de modèles implicites, ou de représentations.

iii/ Les limitations de l'information et/ou de l'action de l'élève, alors par exemple,

- a) * [A] ne voit pas la position de la voiture quand il tire le fil (elle est cachée sous une boîte)
- b) * La figure modèle se trouve loin du lieu de construction et la superposition n'aura lieu qu'après le travail
- c) * A ne connaît pas la topographie du pays
- d) * Le puzzle doit être agrandi et satisfaire certaines conditions
- e) Le polyèdre a une forme complexe et quand A le fait tourner pour compter les faces, il perd les repères de l'énumération.
- f) Les deux points sont inaccessibles... etc

iv/ Les modèles implicites qui permettent de résoudre maintenant ces problèmes sont les suivants :



- a) Le repérage du déplacement de la voiture par le repérage du déplacement de l'extrémité du fil. Si le fil tourne, la représentation doit annuler cette perturbation.
- b) Le choix des éléments de la figure pour la reproduction dépend de l'idée que A se fait de leur dépendance, c'est-à-dire des propriétés de la figure.
- c) La représentation mentale d'une région et une certaine stratégie des déplacements
- d) La conservation des rapports de distances et les applications de R^2 dans R^2 qui les conservent (les applications linéaires)

.../...

- e) La représentation mentale du polyèdre et sa structuration en volumes partiels, l'identification implicite des symétries...
- f) L'homogénéité de l'espace pour les homothéties.
- g) Selon les mouvements, l'isotropie de l'espace, par exemple
- h) La perspective par exemple.

2. Formulation des modèles.

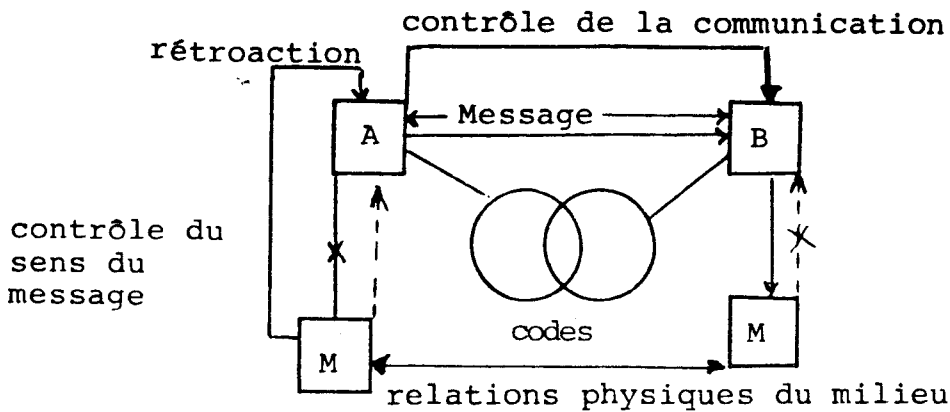
L'autocommunication peut conduire à l'usage de certains codes et un sujet déjà instruit d'un langage s'en sert pour "lire" la situation, même en l'absence de tout interlocuteur.

i/ Mais la situation générale de fonctionnement pour une représentation explicite, un langage, ou une schématisation, c'est la communication.

[A] doit demander à [B] d'effectuer pour lui certaines tâches, pour cela, il doit désigner les éléments qui l'intéressent, définir ceux qui sont inconnus de son interlocuteur, décrire et explicitier son modèle mental.

Bien sûr, la communication doit être vraie : A ne doit pas pouvoir résoudre son problème sans l'aide de B ou B sans A (A doit vouloir le résultat de l'action, B doit coopérer et avoir besoin de l'information,... etc)

Si le problème exige la création d'un code, la communication doit pouvoir avoir lieu plusieurs fois et il faut que A et B puissent se concerter entre les tentatives pour choisir des conventions de communication.



B peut être sollicité pour recueillir l'information ou pour effectuer l'action... Les conditions de la communication sont bien connues.

ii/ Dans le cas b, que j'ai étudié en 1975, A possède des cartons de formes géométriques simples, il doit obtenir de B une copie superposable, pour cela il doit lui envoyer des renseignements sous forme d'un message écrit, mais pas de figures ni de croquis.

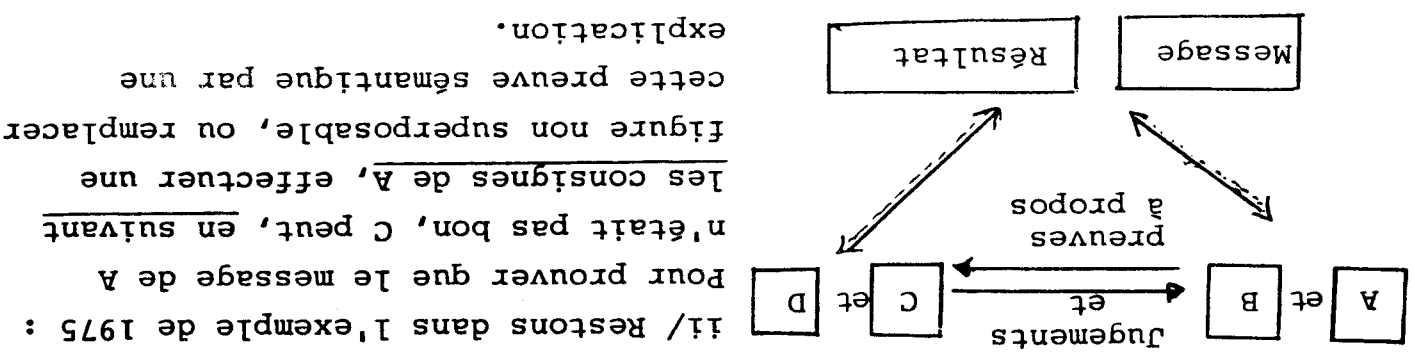
A et B possèdent un double décimètre, un compas, une paire de ciseaux, etc...

3. Preuve.

i/ L'explicitation d'un modèle mental va permettre son analyse, sa remise en cause, sa modification ou son rejet. Encore faut-il empêcher la correction empirique et organiser le débat.

A et B sont confrontés à des compétiteurs C et D du point de vue de l'action mais qui coopèrent pour la construction du savoir.

.../...



Le maître peut aussi avoir ajouté une clause qui tend à pénaliser les renseignements superflus.

Cette condition est nécessaire pour mettre en évidence les dépendances entre propriétés. Des lors on peut voir apparaître des théorèmes de géométrie.

Le maître peut alors instaurer de nouveaux jeux : recherche de messages minimaux permettant de faire construire les figures fondamentales, recherche de messages équivalents (qui définissent la même figure... etc.

Le sens est donné par la situation fondamentale qui permet à tout moment de revenir si c'est nécessaire à l'action.

4. Institutionnalisation.

Les conventions de langages, les définitions cano- niques, les propriétés fondamentales peuvent être indiquées au moment opportun par le maître, en référence à la culture. L'exposé général de la théorie figure dans un article de 1970 : Processus de Mathématisation.

Je ne discuterai pas ici le caractère fondamental de la situation ci-dessus : toutes les situations d'enseignement de la géométrie devraient pouvoir s'en déduire par fixation de variables et éventuellement dégénérescence de certaines conditions. J'ai donné un éventail d'exemples assez vaste.

a et g) sont des exemples tirés des ouvrages de l'Ecole Piaget BSI et modifiés en fonction de la théorie.

c) a été étudié pour la représentation de l'espace URBAIN par Grecia Galvez de Mexico en collaboration avec moi

d) est publié dans un article sur les décimaux en 1980

e) est tiré d'une étude de D. Lunkenbein

f) est une étude en cours à Bordeaux

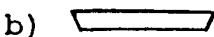
h) a été étudié par Thierry Bautier, en collaboration avec moi

b a été très utilisé par différents chercheurs, de Colette Laborde à E. Gallo.

Quelques observations de la situation fondamentale (b)

Les manipulations de cette situation ont permis diverses études qui toutes étaient centrées sur les comportements des enfants.

Par exemple, E. Gallo montre que, dans une communication invoquée, les élèves utilisent certains stéréotypes culturels, et que cet usage est sensible à certaines propriétés des figures. Nous avons trouvé dans la lère communication, l'usage, non seulement de stéréotypes, mais aussi de métaphores. C'est une "godasse" disait un enfant, pour la figure a) ci-jointe, la semelle mesure 9 cm, ... C'est une assiette b), une bassine c), ... etc



Ce procédé est très efficace, mais il ne résiste pas à un appauvrissement brutal du champ ; des parallélogrammes "voisins"⁽²⁾ posent non plus des problèmes de dénomination mais des problèmes de représentation, et les élèves découvrent que la donnée des quatre côtés d'un quadrilatère ne le déterminent pas. Les mots points, côtés, sommets, segment, se substituent par l'usage, à la demande du maître, aux mots "bord", "trait", "points", "pointe", etc...

.../...

Exemples de messages échangés par les élèves.

Exemple 1

B b.

E

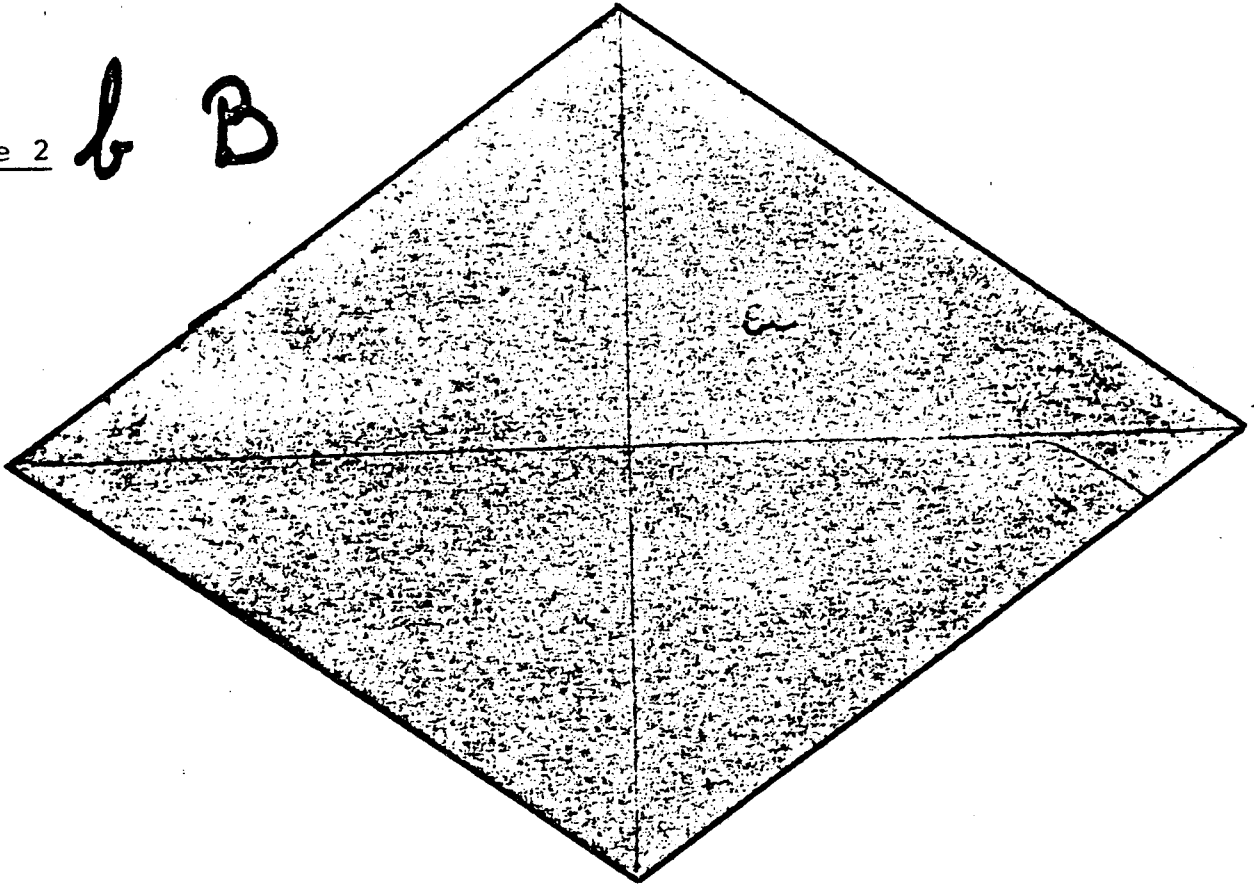
R
 me tre forme à quatre cotés. 2 de ses cotés sont
 égale 14.00. Les 2 autres autres sont égale 13, 2
 Les 2 cotés se retrouvent en diagonale (cette forme
 est un rectangle déformé

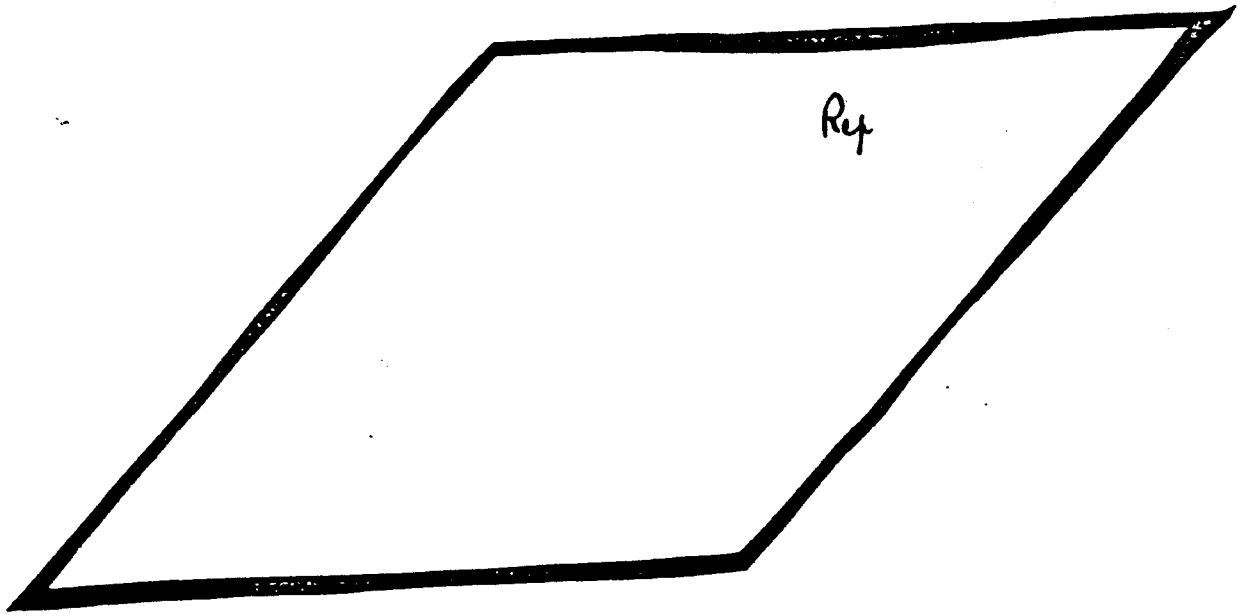
R. quel est les mesures des coins?

E 1 mm

Exemple 2

b B





Exemple 3

D d

Ⓔ C'est une sorte de ~~losange~~ losange, il y a quatre côtés. Les deux côtés qui sont face à face mesure 13, ^{cm} Les deux autres mesure 14 cm. il y a besoin d'un double décimètre mais pas besoin d'une équerre car les angles ne sont pas droits

R qu'est ce que s'est un losange?

Ⓔ F est une figure à 4 côtés non égaux, il y a 1 angle en haut, un en bas et 2 de chaque côté.

Il resterait à indiquer les conditions qui vont faire apparaître les autres éléments géométriques fondamentaux.

L'étude de l'identification et de la reconnaissance des figures géométriques relève tout à fait des travaux de WERMUZ []. La figure est traitée comme un prédicat amalgamé, un rectangle n'est reconnu comme tel que s'il est rectangle (R) non carré (\bar{C}), pas trop grand ni trop petit (T), de proportions moyennes (pas un ruban) (Prop) et s'il est présenté avec les bords parallèles au bord de la feuille (Pos). Ces composantes contextuelles sont inaccessibles à l'enfant tant qu'il n'a pas fait de centration sur elles (il peut différencier les rectangles, selon cette composante, par exemple rectangles "longs" et "moins longs") et qu'il ne les a pas décentrés (la composante fonctionne alors comme un nouveau prédicat : la proportion). La situation fondamentale permet de chercher les moyens de provoquer l'évolution de ce traitement des figures géométriques. Le problème maintenant est de savoir quelles caractéristiques, quelles variables de cette situation déterminent les représentations des élèves et leur évolution.

4. Les variables de la situation : la taille de l'espace

1. La variable la plus importante et la plus évidente de cette situation didactique est la taille des objets à traiter. Ces variations liées au coût pourraient être contenues. Les observations déjà accomplies dans ce secteur nous laissent penser que :

- la conception qu'ont les élèves des objets géométriques, le traitement qu'ils en font, dépend de leur taille
- les bornes d'utilisation de conceptions de divers objets géométriques coïncident, il y a ainsi plusieurs conceptions qui cohabitent dans la même niche.

Par exemple, la notion d'angle n'existe pratiquement pas pour des objets de petite taille. Les questions d'angle, report, désignation, variation, etc... sont traitées sous forme de mesures de segments dans des triangles. Mais la notion de droite non plus, il n'y a que des segments. Les "droites" et les angles apparaissent avec le repérage.

.../...

2. Méthodes pour la recherche des modèles spontanés et des représentations.

2.1. Recherche d'une hiérarchie des variables.

i/ Données : L'analyse de la situation fondamentale et la recherche de situations appropriées (demandant de la part de l'élève divers types de mise en oeuvre de la connaissance) ou de situations critiques ("cruciales" dans le langage d'A. Bell) permet d'obtenir une collection de questions.

Pour chaque question q_i sont notées les différentes modalités de réponses considérées comme caractéristiques : r_{ij} ainsi que la réussite ou l'échec t_i . Pour chaque question ou pour chaque modalité de réponse, les valeurs des variables de la situation fondamentale sont notées.

Par exemple la variable taille pourra être représentée par plusieurs lignes, v_k du genre :

v_{t1} : "déplacement minimum du corps de l'élève pour appliquer la modalité de réponse"

v_{t2} : "dimension de l'objet à traiter", etc... mais toute variable importante dont la valeur a été fixée dans les questions q_i peut être ainsi traitée.

Soit V l'ensemble des variables. Le tableau d'analyse a priori décrit de l'application $A : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ ou plus exactement l'application

$$A' : \left(\bigcup_{i,j} \{r_{ij}\} \cup \{t_i\} \right) \times \bigcup_{k,p} V_{k,p} \longrightarrow \mathbb{R}$$

ii/ Observations. Chaque élève $x \in X$ fournira la ligne $(x)_{ij}$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1. & \text{Si l'élève } x \text{ a présenté le comportement } j \\ & \text{à la question } i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit S le tableau des observations $(x_{ij})_{x \in X}$

L'analyse factorielle de A fournit une indication sur l'indépendance (ou non) des variables déterminées par l'ensemble des questions et sur les positions relatives, a priori, des variables et des questions. L'analyse factorielle de S , si possible éclatée contraint les questions, (ou les comportements) dans un sous-espace de \mathbb{R}^n ($n = \text{nombre d'élèves} + \text{nombre de colonnes}$) et fixe leurs distances (du χ^2) déterminées par les groupes d'élèves se comportant de la même façon.

.../...

Le plongement de A, en tant que sujets supplémentaires, dans S (c'est-à-dire sans contribuer à la détermination des axes factoriels mais en les plaçant par rapport à eux) et la transformation opérée par les contraintes liées aux observations permettant de déterminer lesquelles des variables de la situation sont le plus liées aux axes principaux d'inertie (on peut aussi examiner le rôle des valeurs) et par là présenter une hiérarchie de l'influence des variables sur les comportements via les questions posées. Il est d'usage de rechercher en même temps directement une hiérarchie par la méthode de Lhermann.

Ces méthodes sont puissantes mais lourdes et délicates à manipuler.

2.2. Recherche de la coïncidence des bornes des méthodes, pour identifier les conceptions.

Pour un même concept mathématique on peut choisir diverses questions de types divers et pour chaque type observer plusieurs valeurs d'une même variable. Après l'identification des différentes stratégies des élèves, r_{ij} , il s'agit de repérer pour chaque question, des intervalles de meilleure adaptation et des intervalles de meilleure efficacité de ces stratégies. Plusieurs méthodes sont possibles, depuis l'étude directe jusqu'à l'analyse décrite ci-dessus, sur le tableau $\{x \times q_i\} \times \{r_j\}$ en plaçant les valeurs de la variable étudiée en variable supplémentaires (par exemple).

Le résultat doit alors se présenter sous forme d'une suite où figurent les méthodes dominantes dans un intervalle par leur fréquence d'emploi ou par leur efficacité.

% d'emploi ou coefficient d'efficacité					Valeur de la variable V ₅ étudiée
	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	
Notion 1	M ₁	M ₁	M ₂	M ₃	M ₃
Notion 2	M' ₁	M' ₂	M' ₃	M' ₃	M ₄
Notion 3	M'' ₁	M'' ₁	M'' ₁		
Notion 4	M''' ₁	M''' ₂	M''' ₁	M''' ₂	M''' ₁
					etc...

Le tableau représente les assertions telles que "la méthode M₂ est la plus employée dans l'intervalle V₂ V₃ pour la situation 1.

Si les intervalles d'utilisation d'une méthode ont des bornes situées de façon aléatoire suivant les questions, ou s'ils ne sont pas connexes comme en 4, l'hypothèse que les stratégies de traitement du concept mathématique étudié dépendent de la variable en question est à rejeter (par les tests classiques). Sinon, s'il existe de nombreuses coïncidences, il est possible d'identifier des intervalles de meilleur fonctionnement (à étudier de façon clinique s'il y a lieu) de conceptions de l'élève pour ce concept.

2.3. La même méthode conduite maintenant avec plusieurs concepts peut conduire à la mise en évidence de conceptions relatives à des concepts géométriques différents, et qui ont les mêmes intervalles de cofonctionnement. On essaiera d'expliquer ces coïncidences par l'existence d'une représentation liant un concept et valide dans cet intervalle (niche informationnelle).

3. L'analyse en termes de situation permet de prévoir que l'on devrait trouver trois intervalles principaux de la variable didactique "taille". Et il devrait leur correspondre trois représentations différentes de l'espace. Elles ne devraient pas apparaître simultanément chez l'enfant, mais elles devraient subsister comme modèles implicites pour le traitement et le contrôle de situations familières concernant les relations sujet avec son milieu.

On peut prévoir qu'elles pourraient former un obstacle de nature ontogénétique et peut être épistémologique à la conception d'un espace homogène et isotrope, référent de la théorisation mathématique euclidienne et/ou affine.

L'enseignement classique semble pouvoir les ignorer sans doute pour diverses raisons : la question se règle naturellement, ou la culture ne traite pas ces questions d'initiation à la vie...

.../...

Voici quelques caractéristiques de ces trois "espaces" telles que les recherches en cours les font apparaître ou telles que la théorie des situations les laisse prévoir.

3.1. Micro-espace : c'est le théâtre de la manipulation de petits objets.

- Les déplacements, du sujet et des objets (rotations et translations surtout) sont si faciles et si précis qu'ils ne requièrent aucune "conceptualisation"
 - L'objet connu en soi
 - Pas de référence (mêmes raisons) les changements de points de vue sont gratuits
 - Homogène quasi-isotrope pour les objets, pas pour les figures
 - Pas d'"espace" entre les objets - Distance entre deux points si la droite est matérialisée... etc
 - Pas d'"angle" - des longueurs
 - Comparaisons de longueurs par coïncidence gratuite
 - Quelques problèmes de structuration des objets
- Quelles décisions sont économiques ?
Quel contrôle ?

3.2. Le Méso-espace.

L'espace des déplacements du sujet dans un domaine contrôlé par la vue. Objets fixes entre 0,5 et 50 fois la taille du sujet.

Un repère de référence par rapport auquel l'élève bouge.

Nécessite le recollement (de points de vue) de micro espaces, connexité mais pas d'intégration des angles sous contrôle de la "réalité" vue, mouvements

Topologie - Dimension 3.

La rédaction des paragraphes 3.1, 3.2 et 3.3. relatifs aux caractéristiques prévisibles des 3 types de représentations de l'espace, n'est pas achevée au jour prévu pour cette publication. Nous avons laissé seulement quelques notes. Se rapporter au texte définitif à paraître.

Pas homogène naturellement.

Pas isotrope.

Création intellectuelle de certaines figures non matérielles, droite... représentation mentale des déplacements, mais pas de représentation explicite.

Exercice.

L'armoire passe-t-elle dans l'escalier ?

3.3. Le Macro-espace.

Dimension 2

Recollement de "cartes" - Espace granuleux

Nécessité d'une représentation implicite des mouvements relatifs de 2 à 6 systèmes de références.

Mesures de longueurs très chères,
déplacements impossibles ou très chers

Mesures d'angles très faciles (bon marché)
et plus nécessaire

Homogène pour les translations,
pas pour les homothéties

Isotrope dans le plan.

Exemple d'exercices :

. Est-ce que la figure formée par ces quatre fanions est un rectangle ?

. Quelle longueur de corde pour rejoindre deux fanions ?

4. Conclusion.

Cette partie de l'exposé avait pour but de montrer comment la théorie des situations permet de reprendre l'analyse d'une question de psychologie cognitive. Elle permet aussi

.../...

de reposer les questions d'objectifs de l'enseignement. Ainsi l'homogénéisation de l'espace est un problème d'apprentissage pour l'enfant, comme il a été un problème technique et culturel avant Thalès, ne devons-nous pas en faire l'étude à l'école élémentaire ?

L'étude des processus possibles d'apprentissage et des curriculum pourrait être entreprise ici après les études annoncées. De nombreuses situations ont déjà été étudiées pour jalonner une genèse différente de la géométrie.

Toutefois il pourrait être intéressant de regarder très rapidement et très superficiellement, comment l'analyse en terme de situations traite les macro-phénomènes d'enseignement tels que les réformes.

ⓑ L'enseignement de la géométrie

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie "achevée" du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs. Elles devraient donc pouvoir s'expliquer par les contraintes diverses, culturelles, professionnelles, sociales qui s'exercent sur la société des enseignants. Il est indispensable pour une approche scientifique de ces phénomènes de distinguer ces contraintes mais surtout les processus par lesquels elles produisent des effets à long terme.

°
° °

① Classons ces contraintes selon leurs "sources", c'est-à-dire les milieux qui sont supposés les exercer :

Ainsi la noosphère des mathématiciens est intéressée à avoir des étudiants qui puissent transposer certaines questions en termes géométriques. Les scientifiques, physiciens, naturalistes, géographes, etc... se posent en utilisateurs de différents modèles géométriques.

La société dans son ensemble réclame que les élèves disposent de représentations géométriques et de techniques efficaces pour résoudre les "problèmes courants" liés à l'espace.

Les pédagogues et les psychologues insistent pour que l'enseignement soit adapté aux possibilités et aux besoins des élèves selon leurs capacités, leur âge et leur milieu...

Parmi ces contraintes bien peu sont susceptibles de s'exercer directement et réellement - c'est-à-dire à court terme en fonction de leur satisfaction effective - Toutes sont médiées par des circuits qui ne réagissent guère qu'à une appréciation essentiellement idéologique de la situation et ne la traitent qu'au niveau symbolique.

.../...

Par contre, les contraintes liées à la négociation didactique, celle qui lie le maître à l'élève à propos de chaque activité d'enseignement, s'exercent de façon répétée et impérieuse. Elles n'ont pas besoin d'être exprimées pour s'exercer.

De plus, lorsqu'il est nécessaire qu'elles s'expriment, sous forme de convention ou de décisions par exemple, elles doivent seulement être justifiées, vers l'extérieur, dans le langage ou l'idéologie de l'interlocuteur. Il est rarissime que cette justification explicite rencontre la justification effective et réelle.

La principale caractéristique de cette contrainte interne à l'activité d'enseignement c'est d'être localement stabilisée. Les corrections s'exercent dans des temps très courts et le professeur ne peut guère chercher ailleurs que dans sa propre action des moyens de les exercer.

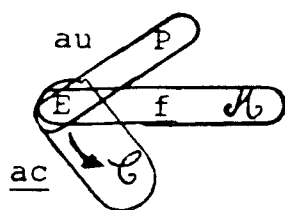
② Les contraintes se manifestent sous formes de "choix didactiques" du professeur concernant à la fois les rapports de l'élève à la connaissance, les conditions d'apprentissage et l'ordre d'introduction des notions.

Par exemple, le professeur, selon qu'il veut favoriser tel ou tel aspect de la relation didactique peut hésiter entre plusieurs présentations de son cours :

i/ La présentation académique, ou encyclopédique, a pour objet de permettre l'accès "immédiat" à toutes les connaissances présentées. Elle suppose que l'élève, utilisateur, dispose des connaissances lui permettant cette lecture et cette acquisition directe, ou en tout cas qu'il se charge de les réunir en suivant un processus à sa charge lui aussi.

Cette présentation installe d'emblée le rapport au savoir qui sera celui que l'élève doit atteindre à la fin de sa formation, et qui suppose que les acquisitions se font par l'exercice d'un "savoir-apprendre" à peu près invariable sur une famille de savoirs à peu près indépendants.

.../...



i
E

ii/ A l'opposé de ce point de vue, se situe la présentation axiomatique des savoirs. Elle a pour objet de permettre au professeur de ne jamais faire appel dans son cours à des notions qui n'auraient pas été introduites auparavant ou qui ne pourraient être définies ou prouvées au moment de leur utilisation. Elle prend en charge explicitement ce qui est supposé "connu" de l'élève et une manière de "construire" ou d'acquérir avec cela les connaissances nouvelles. Plus précisément elle suppose que les savoirs ne peuvent pas être acquis indépendamment les uns des autres et que les acquisitions elles-mêmes changent le savoir-apprendre de l'élève.

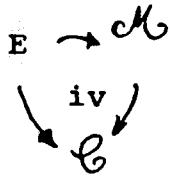
Ce point de vue axiomatique est particulièrement adapté au contrôle et à l'amélioration de la communication entre le professeur et l'élève. Il facilite la négociation du contrat didactique en ce sens qu'il tend à permettre au professeur de renvoyer l'élève soit à des enseignements antérieurs dont "l'acquisition" est à sa charge, soit à des conditions "d'acquisition" vraiment "universelles" et que l'élève ne saurait rejeter (La preuve de la validité de ce qu'il doit apprendre par exemple). Localement, le maître peut manipuler le débit des informations nouvelles qu'il apporte.

Le savoir ne réside plus seulement dans une collection de faits isolés mais dans une manière culturellement reconnue de les organiser.

iii/ Les deux premières présentations tendent à optimiser les rapports de l'élève soit avec la connaissance, soit avec le système éducatif sur la base de l'acquisition d'un corpus de savoirs. Mais s'il s'agit d'entraîner l'élève à une utilisation du savoir et ce à une fin autre que l'acquisition elle-même, il apparaît plus indiqué de suivre un ordre conforme à cette utilisation : celui des différentes étapes des actions qu'il faudra reproduire ou gérer.

Dans cette présentation "fonctionnelle" calquée sur un algorithme, il n'est fait appel aux connaissances théoriques qu'au moment où elles entrent en scène pour déterminer ce qu'il convient de faire.

Cette présentation est centrée sur l'optimisation directe du rapport de l'élève avec son milieu.



iv/ Une présentation "génétique" tend à montrer que les connaissances sont une réponse rationnelle à des problèmes légitimes, et permet ainsi un autre type d'articulation ou de compréhension des savoirs. La justification qu'elle en donne, interne, est tout à fait différente de la justification fonctionnelle par les techniques où on les utilise. Cependant elle traite assez bien des rapports entre l'activité intellectuelle du sujet, la connaissance et son action sur le milieu. L'introduction historique pourrait sembler de ce point de vue la plus proche de la genèse "vraie".



v/ Pour enseigner à l'élève une connaissance nouvelle, il est indispensable de s'appuyer sur ce qu'il connaît déjà mais il serait naïf de croire qu'il connaît ce qui lui a été enseigné et ne connaît que cela (et en particulier rien, si rien ne lui a été enseigné). Son activité personnelle lui fait développer des représentations et des modèles spontanés qui jouent un rôle décisif dans ses acquisitions. Il serait aussi naïf de croire que ces modèles spontanés vont s'adapter naturellement aux acquisitions nouvelles et évoluer sans heurt vers la connaissance scientifique.

L'exercice, la mise à l'épreuve, la modification des opinions anciennes de l'élève est une tâche ardue mais nécessaire à l'enseignement des connaissances nouvelles.

Si l'on admet qu'il existe une régularité, une certaine homogénéité des acquisitions de connaissances lors du développement de l'enfant - dues à des causes psychogénétiques et sociales profondes - et/ou si l'on admet qu'il existe une filiation épistémologique incontournable, constitutive, de ces connaissances il est possible de concevoir des présentations psychogénétiques et/ou épistémologiques du savoir.

vii/ Antagonistes à ces contraintes qui concernent le sujet épistémique, il en existe d'autres qui concernent l'adaptation de la présentation des connaissances à la diversité des caractères individuels des élèves et à leur insertion socio-culturelle présente ou projetée.

Ces diverses contraintes paraissent contradictoires l'ordre axiomatique, l'ordre fonctionnel ou algorithmique, l'ordre historique ou génétique ou psychopédagogique ne peuvent coïncider. Les choix seront des compromis et il est clair que l'on peut en observer en géométrie de très différents dans les diverses directions indiquées.

3 Pour montrer qu'un système agit sur les choix d'enseignement il ne suffit pas de montrer que tel milieu les influence ou les infléchit dans tel sens pour telle raison, car on risquerait de prendre le signe pour la chose elle-même. Il faut aussi expliquer les mécanismes régulateurs qui s'imposent aux acteurs et les contraignent à maintenir stables les caractères que l'on déclare sous influence.

°
° °

Stabilité malgré les perturbations, variations et corrections. Car les influences occasionnelles, même puissantes ont peu de chance de produire des effets positifs durables sur l'enseignement. La plupart des améliorations sont l'effet d'optimisations, et les nombreux choix qui produisent ces solutions optimales sont rarement des alternatives simples. Au contraire, ils doivent concilier des intérêts divergents, conjuguer des solutions paradoxales... Ces équilibres ne se maintiennent que dans la mesure où le système qui influence l'autre, surtout s'il l'influence intentionnellement, est soumis à des rétroactions du système influencé. De sorte que les influences qui sont les plus intéressantes pour l'analyse de l'enseignement sont celles qui se manifestent par des variations moindres que celles que l'on pourrait attendre d'un fonctionnement indépendant, ou encore celles pour lesquelles il apparaît rapidement des corrections appropriées

.../...

en réponse aux perturbations occasionnelles. Les influences les plus importantes sont celles qui concourent à la stabilité du système.

C'est sur elle que l'action didactique doit s'exercer pour des effets durables, mais il n'y a pas d'espoir d'obtenir une véritable ingénierie didactique sans la connaissance et le respect de ces régulations.

Par exemple, on pourrait penser que les déclarations de Dieudonné (1956) sur l'emploi de l'axiomatique d'Euclide dans l'enseignement, reprises et intégrées dans une demande de réformes plus globales, sont l'expression d'un désir du milieu scientifique et lorsque ces demandes aboutissent, on pourrait penser qu'il y a là l'indice d'une influence effective de ce milieu sur l'enseignement.

Mais on pourrait penser au contraire que l'importance de l'écart dénoncé dans ces déclarations entre les habitudes scolaires et les besoins des futurs mathématiciens est l'indice de leur indépendance naturelle : aucune tendance à importer dans l'enseignement des questions ouvertes ou des méthodes de travail, ou des présentations synthétiques empruntées à la recherche ne recevait naturellement de rétroactions positives de la part du système même si, à l'occasion le maître et les élèves en retiraient quelques satisfactions.

Le seul recours des mathématiciens contre cette indépendance a été de faire un détour par l'opinion publique qui a momentanément accédé à leur désir : les mathématiques enseignées devaient être non seulement "vraies" mais conformes à certaines attentes épistémologiques de mathématiciens professionnels.

La façon dont cette exigence va être satisfaite et trahie montre clairement ce qui, dans l'enseignement, est relativement arbitraire, donc variable de façon assez erratique et ce qui est corrigé par les contraintes et donc stable : la disparition quasi-totale de la géométrie sous sa forme classique à un moment donné dans les programmes, celle des figures dans les

.../...

manuels, ou les deux, montrent l'absence de toute nécessité locale dans ce domaine.

Par exemple, les relations des élèves avec l'espace lui-même, leur capacité à se diriger, à s'orienter à agir dans cet espace n'ont guère été affectées par ces réformes, de même semble-t-il, que leurs conceptions et leurs représentations les plus générales. On peut considérer que le fait, au demeurant assez évident, que l'enseignement ne joue presque aucun rôle dans cette acquisition (en particulier dans l'enseignement primaire) est ainsi établi.

On pourrait avancer que c'est le fait que ces acquisitions peuvent se produire naturellement qui rend inutile leur enseignement. Mais encore faudrait-il que ces acquisitions spontanées soient qualitativement et assurées pour tous les enfants. Est-ce le cas ? Il n'est pas facile de répondre car, pour mettre en évidence cette carence, il faut pouvoir proposer des "exercices" où clairement les conceptions géométriques des élèves sont en jeu mais dont la réussite ne nécessite pas d'acquisitions langagières ou théoriques, ce qui est déjà une preuve de l'inadaptation.

Aussi faut-il expliquer pourquoi l'enseignement de la géométrie est-il à ce point indépendant du développement cognitif de l'enfant, comme il l'est aujourd'hui du développement de la science et pourquoi il serait assujéti essentiellement à des nécessités didactiques et culturelles.

Cette dernière assertion me paraît singulièrement étayée par les faits suivants : l'essentiel des modifications, des réformes, des débats, des travaux se fait, soit dans le cadre d'une axiomatique déterminée (choisie pour les élèves), soit porte sur le choix d'une telle axiomatique. C'est la preuve que parmi toutes les contraintes que nous avons évoquées plus haut, seules celles intervenant sur la relation maître-élève sont vraiment prises en compte dans la recherche empirique de l'amélioration de l'enseignement.

Peut-être est-ce là effectivement le seul point faible du système et peut-être est-ce la seule voie

.../...

offerte à la recherche en didactique, j'en doute et la méthode que nous venons d'esquisser va permettre de poser ces questions différemment.

Mais aucune de ces modifications n'a d'effet vraiment décisif sur les phénomènes qu'elle prétend viser : la facilité de l'acquisition d'une vaste et solide culture géométrique.

En l'absence de feed-back, elles n'ont pu être vraiment adaptées aux besoins des professeurs.

La disparition momentanée de la géométrie classique dans l'enseignement français a fait apparaître me semble-t-il, sa véritable fonction didactique.

Conclusions

Depuis que la géométrie élémentaire est une théorie "achevée" du point de vue scientifique, les transformations que subit son enseignement sont entièrement des productions de l'activité didactique des professeurs.

1. Ces transformations changent l'organisation, le fonctionnement, le rôle, l'usage des connaissances (Transposition didactique) afin de satisfaire les contraintes du contrat didactique (analyses et preuves de cette assertion).

2. Cette "didactification" incontrôlée de la géométrie la rend impropre à d'autres fonctions que celles que lui a assignée l'épistémologie spontanée des professeurs. Il en résulte des "phénomènes didactiques" surprenants en particulier, lors des réformes.

3. L'ingénierie didactique et l'épistémologie expérimentale peuvent-elles remplacer la vigilance épistémologique "naturelle" (absente du fait de l'extinction de la recherche) et renouveler l'enseignement de la géométrie ?