



**HAL**  
open science

# Modélisation et simulation numérique pour la migration terrestre par équation d'ondes.

Caroline Baldassari

► **To cite this version:**

Caroline Baldassari. Modélisation et simulation numérique pour la migration terrestre par équation d'ondes.. Mathématiques [math]. Université de Pau et des Pays de l'Adour, 2009. Français. NNT : . tel-00472810

**HAL Id: tel-00472810**

**<https://theses.hal.science/tel-00472810>**

Submitted on 13 Apr 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PAU ET DES PAYS DE L'ADOUR

ÉCOLE DOCTORALE DES SCIENCES EXACTES ET DE  
LEURS APPLICATIONS

THÈSE DE DOCTORAT

présentée par

Caroline BALDASSARI

pour obtenir le grade de

DOCTEUR de l'Université de Pau et des Pays de l'Adour

Spécialité : Mathématiques Appliquées

---

# Modélisation et simulation numérique pour la migration terrestre par équation d'ondes

---

Soutenue le 17 Décembre 2009

**Après avis de :**

M. Stéphane LANTÉRI	Directeur de Recherche INRIA, INRIA Sophia Antipolis	Rapporteur
M. Robert VAN DER HILST	Professeur, Massachusetts Institute of Technology (USA)	Rapporteur

**En présence de :**

M. Stéphane LANTÉRI	Directeur de Recherche INRIA, INRIA Sophia Antipolis	Rapporteur
Mme. Hélène BARUCQ	Directrice de Recherche INRIA, INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Directrice de thèse
M. Abderrahmane BENDALI	Professeur, Université Paul Sabatier, Toulouse	Examinateur
M. Henri CALANDRA	Ingénieur de Recherche Expert, centre CSTJF TOTAL	Examinateur
M. Julien DIAZ	Chargé de Recherche INRIA, INRIA Bordeaux Sud-Ouest	Directeur de thèse
M. Rabia DJELLOULI	Professeur, California State University Northridge (USA)	Président du jury
M. David PARDO	Professeur, Basque Center for Applied Mathematics (ESPAGNE)	Examinateur
Mme. Jean ROBERTS	Directrice de Recherche INRIA, INRIA Rocquencourt	Examinatrice

**Equipe Projet INRIA Magique3D**, Institut National de Recherche en Informatique  
et en Automatique (INRIA)

**Laboratoire de Mathématiques Appliquées**, Unité Mixte de Recherche CNRS  
5142, Université de Pau et des Pays de l'Adour (UPPA)



Au lotissement et ses dépendances.



# Remerciements

Cette thèse a bénéficié pendant trois ans du support financier de TOTAL par le biais d'un contrat de recherche passé avec l'INRIA.

Je tiens, tout d'abord à remercier ma directrice de thèse Hélène Barucq qui a toujours su être présente à mes côtés. Sa disponibilité, sa rigueur scientifique et ses précieux conseils m'ont permis de progresser et de mener à bien ce projet. Je lui suis extrêmement reconnaissante de m'avoir fait participer à de nombreux congrès nationaux et internationaux. Ces expériences, très enrichissantes d'un point de vue scientifique, m'ont permis de faire face à ma (grande...) timidité. Je la remercie vivement pour la confiance qu'elle m'a témoignée durant la thèse et qu'elle continue de me donner.

Je remercie aussi très chaleureusement mon directeur de thèse Julien Diaz. Ses compétences scientifiques et ses encouragements dans les moments les plus difficiles ont été pour moi une aide inestimable. Merci également pour sa gentillesse, sa patience (étourdie oblige?) et pour le temps qu'il a toujours su prendre pour répondre à mes nombreuses questions!

Je suis très reconnaissante à Henri Calandra sans qui cette thèse n'aurait pas vu le jour. Je le remercie profondément pour m'avoir fait découvrir le "monde" industriel, ses avantages et ses inconvénients. Un grand merci pour ses conseils, pour les conditions de travail idéales qu'il m'a permis d'avoir chez TOTAL et pour m'avoir donné la possibilité de poursuivre mes recherches à ses côtés.

Je remercie vivement Bertrand Denel pour l'aide qu'il m'a apportée chez TOTAL par rapport aux aspects géophysiques, programmation et, n'oublions pas, BAHAMAS...

Je tiens à exprimer tout ma reconnaissance à Monsieur Stéphane Lantéri et à Monsieur Robert Van der Hiltz pour avoir accepté d'être les rapporteurs de cette thèse. Je les remercie pour leurs remarques et l'attention qu'ils ont apporté à mon manuscrit.

Monsieur Rabia Djellouli a accepté de présider ma soutenance, j'en suis très honorée et je l'en remercie vivement.

J'exprime également mes remerciements à Madame Jean Roberts pour sa participation à mon jury de thèse et ce malgré la neige parisienne du 17 Décembre 2009.

Je remercie également Monsieur Abderrahmane Bendali et Monsieur David Pardo pour avoir accepté d'être membre de mon jury.

Je tiens également à remercier les membres de l'équipe INRIA Magique3D pour leur soutien, leur aide et leur joie de vivre. Que demander de mieux que de travailler dans la bonne humeur? Merci à tous pour tous ces agréables moments que je qualifierai même de "magiques"... Merci particulier à Josy Baron pour m'avoir toujours facilité les tâches administratives. Ta présence lors de ma soutenance m'a beaucoup touchée.

Je remercie aussi toutes les personnes de TOTAL et en particulier les membres du département Méthodes et Techniques Sismiques (MTS) pour leur aide durant ces trois ans.

Un grand merci à tous les stagiaires, les thésards et nouveaux docteurs de TOTAL et du bureau 214 pour leur écoute et leur gentillesse. En particulier Pierre-Yves, Florian et son calme légendaire qui m'épatera toujours! Julie, les doctoriales et nos amis communs... JJ et sa légèreté suceptibilité!!

Rached, je te remercie pour toute ton aide et pour m'avoir supportée... surtout dans les derniers mois... Merci aussi, tout simplement, pour ton amitié!

Gilles, merci pour tes blagues (toutes! sans exception...). Tu sais vraiment toujours quoi dire pour remonter le moral!

Léna, comment pourrais-je oublier un jour nos péripéties de voyages? La dernière heure de bus en rentrant de Londres, le train pour Marseille et ses parties de tarots (arggg!!!)... Vă doresc o mulțime de fericire.

Anne-Gaëlle, je te remercie infiniment pour ton réconfort dans mes moments de doutes, pour ton sourire et ta bonne humeur. Que de bons moments passés en ta présence! Venise et l'apprentissage du vocabulaire indispensable pour vivre dans mon pays paternel..., Marseille et tes rêves farfelus... trop BIEN! Tu n'as pas pu être là le jour J mais tes encouragements à distance m'ont beaucoup touchée!

Véro et Cyril... Merci "mes petits". Merci de m'avoir supporter moi, mes tirages de langue et mes fameux codes ..... Un gros merci pour votre soutien, vos oreilles attentives à mes petits malheurs quotidiens, pour votre aide et vos longues explications... (au fait pourquoi u...? réponse en 2011?). Merci particulier à Cycy pour ses intuitions de dernière minute... deux fois la même question! chapeau! Je te souhaite d'avoir les mêmes visions pour ta soutenance et celle de Viviane...

Pour finir, mes deux compères Agnès et Roro. 8 ans, 5 ans... Que de souvenirs! On a commencé cette grande aventure ensemble et on la finit encore ensemble!!! Merci d'avoir été là quand j'en ai eu besoin et aussi pour avoir pu supporter mon caractère un peu spécial... Pour ma défense, je dirai que le vôtre n'est pas mal non plus :-)!

Merci à toute mon équipe de rugby pour m'avoir permis de me défouler et d'évacuer le stress!!

Merci aussi à mes amis du côté de Juillacq. Cela me faisait un bien fou de penser un peu à autre chose durant le week-end!!

Mes derniers remerciements s'adressent à toute ma famille, Kinder et la petite tribu... Je les remercie pour leur soutien et leurs encouragements surtout dans la dernière ligne

droite. Merci de vous être déplacés "en force" pour me supporter le jour de la soutenance : Conchez (merci à tous d'avoir su vous libérer de toutes vos occupations), Marraine et tonton Charles (merci aussi pour les corrections...), Titi (tu as beaucoup écrit pendant que je parlais mais je n'ai toujours pas vu tes notes!)... Une pensée particulière pour Paris et surtout pour tatie, je sais que tu regrettes énormément de n'avoir pas pu descendre mais il y a la vidéo! Je remercie également énormément mes petites mamies et parrain pour leur tendresse même si parfois mes sautes d'humeur n'étaient pas faciles à vivre! Maman, Papa merci de tout mon coeur pour TOUT... sans vous je ne serai pas là aujourd'hui... Et, enfin, ma grande (petite) soeur... Flo, tu as été sans doute la personne la plus importante pendant ces trois années. Je pouvais tout te confier, mes plus grands moments de doutes comme de joie (je sais qu'au fond de toi tu étais très impressionnée de mes beaux films...!) Pour tout cela MERCI!!!





# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>11</b>
<b>1 Les méthodes de propagation et de migration</b>	<b>15</b>
1.1 Les méthodes numériques les plus utilisées pour la propagation des ondes sismiques	17
1.1.1 L'équation des ondes acoustiques	17
1.1.2 L'approximation de Kirchhoff	18
1.1.3 Les propagateurs one-way	19
1.1.4 Les méthodes par différences finies	30
1.1.5 La méthode des éléments finis	33
1.2 La migration profondeur	35
1.2.1 La migration de Kirchhoff	35
1.2.2 La migration par équation d'ondes	36
<b>2 La méthode de Galerkin discontinue avec pénalité intérieure</b>	<b>39</b>
2.1 Les méthodes de Galerkin Discontinues (DG)	40
2.1.1 Notations et définitions	40
2.1.2 Le problème	41
2.1.3 Linéarité, coercivité et ordre d'approximation	43
2.1.4 Consistance et ordre d'approximation	43
2.1.5 Choix de la méthode DG appropriée	44
2.2 IPDG appliquée à l'équation des ondes	45
2.2.1 Discrétisation en espace	46
2.2.2 Discrétisation en temps	47
<b>3 Validation et analyse de performance de la IPDGM</b>	<b>49</b>
3.1 La méthode des éléments spectraux	51
3.2 Analyse de performance	54
3.2.1 Tests mono-dimensionnels	54
3.2.2 Tests 2D	60
3.2.3 Tests 3D	83

<b>4</b>	<b>Application à l'imagerie sismique</b>	<b>87</b>
4.1	Milieu bicouche . . . . .	87
4.2	Milieu composé de quatre couches . . . . .	88
4.3	Milieu composé de quatre couches et d'une surface pentée . . . . .	88
4.4	Milieu composé de quatre couches et d'une surface à deux pentes . . . . .	89
4.5	Milieu complexe à surface irrégulière . . . . .	89
4.5.1	Résultat de la propagation . . . . .	90
4.5.2	Image finale . . . . .	90
4.6	Milieu réaliste . . . . .	91
4.6.1	Résultat de la propagation . . . . .	91
4.6.2	Image finale . . . . .	91
4.7	Optimisation du code . . . . .	91
4.7.1	Adaptation du domaine de calcul . . . . .	91
4.7.2	Adaptation du maillage . . . . .	92
4.7.3	Combinaison des deux adaptations . . . . .	92
4.7.4	Adaptation de l'ordre des éléments . . . . .	93
4.8	Milieu "vel_dip " . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Ordre Local</b>	<b>117</b>
5.1	La technique de l'équation modifiée . . . . .	117
5.1.1	Le schéma saute-mouton . . . . .	118
5.1.2	Le schéma de l'équation modifiée ou schéma EM . . . . .	120
5.1.3	Premiers résultats numériques . . . . .	123
5.2	Adaptation de l'ordre en espace . . . . .	125
5.3	Pas de temps local . . . . .	126
5.3.1	Présentation de la méthode . . . . .	127
5.3.2	Discrétisation globale de l'équation auxiliaire . . . . .	128
5.3.3	Discrétisation locale de l'équation auxiliaire . . . . .	131
5.3.4	Résultats numériques . . . . .	135
5.4	Ordre local en temps . . . . .	137
5.4.1	Présentation de la méthode . . . . .	137
5.4.2	Etude numérique de la condition de stabilité . . . . .	147
5.4.3	Résultats numériques . . . . .	152
	<b>Annexe A. Mise en pratique de la méthode de Galerkin Discontinue</b>	<b>155</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>177</b>

# Introduction

L'exploration pétrolière a commencé il y a une centaine d'années et, aujourd'hui, pratiquement tous les bassins sédimentaires sont répertoriés. Cependant, le travail d'exploration est loin d'être achevé car on doit maintenant explorer des zones difficiles à imager, à la recherche de gisements plus petits que ceux qui ont déjà été découverts. Les milieux qui sont encore peu exploités sont des régions où le climat (dans la forêt tropicale par exemple) ou la géographie (dans des zones montagneuses par exemple) sont hostiles. On est donc confronté aux problèmes d'accessibilité qui peuvent compliquer considérablement la mise en oeuvre du forage, sans compter les difficultés que peut engendrer la prise en considération de l'environnement du milieu à explorer, comme par exemple la nécessité d'adapter le forage à la topographie du site si celui-ci est dans une zone montagneuse. Or, un forage coûte au minimum 3 à 4 millions d'euros s'il est réalisé sur terre dans une zone propice au forage, 20 à 60 millions d'euros s'il est effectué en mer et plus de 100 millions d'euros s'il est profond ou dans des zones difficiles. On comprend donc l'intérêt pour le secteur pétrolier de disposer de méthodes non invasives fournissant des images de la zone à explorer potentiellement, avant que le forage soit réalisé, afin de vérifier si le forage a des chances d'aboutir.

Pour localiser les pièges d'hydrocarbures, on effectue une sorte d'échographie du sous-sol en utilisant la sismique réflexion. Cette technique de base est aujourd'hui la plus employée et est la seule en mesure de fournir une image du sous-sol assez précise pour évaluer la probabilité d'y trouver des hydrocarbures. La sismique réflexion repose sur l'enregistrement des ondes réfléchies générées par la propagation artificielle d'ondes sismiques. Les récepteurs sont en mesure d'enregistrer les temps d'arrivée des ondes réfléchies ainsi que leur amplitude. On peut ainsi établir une carte du sous-sol dans laquelle on place les réflecteurs (interface entre deux milieux différents) grâce aux temps d'arrivée tandis que les amplitudes des champs réfléchis permettent de retrouver les caractéristiques des matériaux constituant le sous-sol. Le plus souvent, la carte obtenue représente les variations de vitesse de propagation dans le milieu, c'est ce que l'on appelle le modèle de vitesse qui est le résultat de la phase de traitement sismique. L'étape durant laquelle on positionne les réflecteurs est appelée migration et est le résultat de la résolution de l'équation des ondes qui est le modèle mathématique adapté pour représenter la propagation des ondes sismiques. On distingue alors plusieurs méthodes de migration, le distinguo se faisant au niveau de la méthode utilisée pour résoudre l'équation des ondes. Or, cette équation conduit à l'inversion de systèmes de très grande taille et pendant très longtemps, elle a été considérée comme

trop gourmande en moyens de calcul pour pouvoir être utilisée pour la migration. Il faut savoir en effet que la migration requiert la résolution de nombreuses équations d'ondes, ce qui sous-entend une puissance de calcul très importante tant au niveau du temps qu'au niveau de l'espace mémoire. C'est certainement pour cette raison que plusieurs méthodes de migration ont été développées à partir de la résolution d'une équation d'ondes simplifiée permettant d'appliquer des formules d'approximation simples et peu gourmandes en moyens de calcul. Citons par exemple les méthodes Phase-Shift ou Split-Step-Fourier dont nous donnerons un descriptif au chapitre 1. Toutefois, le calcul scientifique a fait des progrès impressionnants ces dernières années et on peut aujourd'hui envisager de résoudre l'équation des ondes complète par des techniques précises d'approximation comme les éléments finis, avec pour objectif la migration qu'on appelle dans ce cas Reverse Time Migration ou RTM.

Avant la réalisation des travaux qui sont présentés dans ce manuscrit, le code de migration de type RTM utilisé chez Total était basé sur une approximation de l'équation des ondes par des différences finies. Cette méthode d'approximation est basée sur des grilles de calcul régulières et elle conduit à des systèmes faciles à résoudre. Cependant, on peut observer des artefacts numériques, surtout quand le milieu de propagation est fortement hétérogène ou quand la grille utilisée est trop grossière. De plus, cette méthode ne permet pas de prendre en compte de façon précise la topographie du milieu car la grille régulière ne peut s'y adapter facilement. C'est une des motivations pour utiliser des éléments finis mais ce n'est pas la seule. En effet, les méthodes d'éléments finis permettent de résoudre de façon très précise l'équation des ondes et sont très flexibles car elles peuvent se combiner à différents ordres d'approximation, ce qui assure une parfaite adaptabilité aux caractéristiques physiques du milieu de propagation. Cependant, elles utilisent beaucoup de place mémoire, particulièrement en 3D et elles conduisent le plus souvent à une représentation implicite de la solution. On est donc confronté au problème d'inverser à chaque pas de temps une matrice de masse dont la taille est importante alors qu'une approximation par différences finies permet d'exprimer la solution de façon explicite. Pour pallier ce problème, on peut utiliser la technique de condensation de masse [1, 2] mais elle a pour inconvénient de pénaliser l'ordre de convergence de la méthode d'éléments finis utilisée : l'ordre de convergence de la formule de quadrature appliquée pour "diagonaliser" la matrice de masse est inférieur à l'ordre de la méthode d'éléments finis. Toutefois, en appliquant une formule de Gauss-Lobatto, on peut définir une méthode d'éléments finis, dite des éléments spectraux (SEM) dont l'ordre de convergence est le même que celui qu'on aurait sans faire de condensation de masse. La SEM a été appliquée avec succès à l'équation des ondes par [3, 4] et à des problèmes de géophysique par [5, 6, 7]. Seul bémol, la SEM repose sur des maillages en quadrangles en 2D qui deviennent difficiles à mettre en oeuvre en 3D en particulier quand il faut prendre en compte une topographie chaotée. Des travaux ont tout de même été réalisés pour appliquer la SEM pour des maillages en triangles [8] mais la mise en oeuvre d'éléments de haut degré reste compliquée et semble difficilement généralisable en dimension trois.

Ces dernières années, on a pu lire de nombreux travaux utilisant les méthodes de Galerkin discontinues (GDM) qui sont des méthodes d'éléments finis pouvant s'appuyer sur des maillages en triangles en 2D ou tétraèdres en 3D (maillages qui sont relativement faciles et rapides à obtenir avec les maillages existants). On peut ainsi espérer reproduire correctement la topographie du milieu car on attribue facilement une plus grande capacité d'adaptation aux triangles ou tétraèdres qu'aux quadrangles ou hexaèdres. De plus, les GDM peuvent s'appliquer sur des maillages non structurés, ce qui leur assurent une très grande flexibilité. Les GDM ont aussi l'avantage de fournir une représentation quasi-explicite de la solution car la matrice de masse est diagonale par blocs et, en s'appuyant sur des fonctions d'approximation discontinues, elles semblent bien conçues pour simuler des ondes dans des milieux fortement hétérogènes car elles sont parfaitement compatibles avec l'adaptation locale de l'ordre de l'élément fini utilisé. Enfin, ces méthodes sont parallélisables, ce qui les rend très performante pour résoudre des applications à l'échelle industrielle.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à une méthode de Galerkin discontinue particulière, la méthode de Galerkin discontinue avec pénalité intérieure (IPDGM) qui a été initialement appliquée à l'équation des ondes dans [9]. Notre objectif était de voir si cette technique était efficace et adaptée à la RTM. Mais avant cela, nous avons motivé notre choix en comparant, dans des configurations simples, la IPDGM avec la méthode des différences finies (FDM), la SEM ainsi qu'une méthode rapide utilisant le Generalized Screen Propagator (GSP) construit par M. de Hoop [10]. Nous avons choisi cette dernière car nous disposons dans l'équipe d'un code de simulation basé sur le GSP. Nous renvoyons le lecteur au chapitre 3 de ce manuscrit dans lequel nous concluons que la IPDGM est aussi performante en terme de précision que la SEM, qu'elle surpasse la FDM et le GSP. De plus, elle est plus flexible que la SEM car elle s'appuie sur des maillages en triangles ou tétraèdres pour lesquels on dispose de maillages efficaces et faciles à se procurer et elle autorise de choisir localement le degré de la fonction polynômiale d'interpolation. Concrètement, cette thèse a permis de développer un code de migration du type RTM, le code IPDGFem, basé sur une méthode d'éléments finis dont les performances ont été optimisées en mélangeant des éléments finis d'ordres différents. La mise en oeuvre de cette technique a été facilitée par l'utilisation d'éléments finis locaux qui sont particulièrement flexibles pour cela. On a ainsi amélioré les performances en temps de calcul et occupation de la mémoire, afin de garantir au code IPDGFem les meilleures chances de fournir des images 3D du sous-sol. Toujours dans l'objectif d'optimiser les performances de IPDGFem, nous avons étudié la question d'appliquer une discrétisation locale en temps, ce qui contribue, comme cela a été observé par Diaz et Grote [11], à limiter les effets de dispersion numérique en adaptant la taille du pas de temps à la taille des mailles en espace. De plus, en appliquant cette stratégie, on limite les calculs au minimum nécessaire à chaque région du maillage. Dans cette direction, nous n'avons obtenu que des résultats théoriques et numériques en 1D, les tests numériques à 2D étant en cours.

Ce manuscrit est organisé de la façon suivante. Le premier chapitre propose un état de

l'art sur les différentes méthodes utilisées pour résoudre le problème de propagation d'ondes (appelé problème direct) et pour effectuer la migration. Cette partie est, sans doute, un rappel pour les lecteurs géophysiciens. Pour les personnes issues du milieu mathématique comme moi, il constitue une petite initiation aux techniques de calcul utilisées dans le milieu pétrolier.

Le deuxième chapitre est quant à lui dédié aux méthodes de Galerkin discontinues et leurs différentes propriétés. On détaille la méthode que nous avons choisie d'utiliser pour l'application à l'imagerie sismique, la méthode de Galerkin Discontinue avec pénalité intérieure.

Dans le chapitre trois, nous comparons la IPDGM avec la méthode des différences finies, le modèle GSP et la SEM. Cela nous permet de justifier et valider notre choix de la IPDGM pour faire de la RTM. Nous effectuons aussi une analyse de performance de la IPDGM.

Le chapitre quatre est consacré à des résultats en imagerie sismique qui ont été obtenus grâce au propagateur du code IPDGFem. Les tests qui ont été réalisés montrent que le nouveau propagateur est tout à fait performant et qu'il permet d'imager des zones complexes. Il est notamment intéressant de voir que nous arrivons à imager des régions à partir de données synthétiques qui ont été obtenues par un autre code que IPDGFem.

Dans le chapitre cinq, nous nous intéressons à la technique des pas de temps locaux. Ce chapitre est plus dans la prospective que les autres, il ne traite que du cas 1D mais les résultats que nous avons obtenus sont très intéressants et encourageants. On peut voir qu'en appliquant cette stratégie, on ne perturbe pas l'ordre de convergence global de la méthode et que les résultats conservent le même degré de précision.

# Chapitre 1

## Les méthodes de propagation et de migration

A l'heure actuelle, les hydrocarbures restent une source d'énergie irremplaçable et les géologues et les géophysiciens continuent à rechercher les "pièges" susceptibles de renfermer du gaz et du pétrole. L'exploration pétrolière a commencé voilà plus de cent ans et à ce jour, pratiquement tous les bassins sédimentaires sont répertoriés. Cependant, les taux actuels d'extraction ne sont que de 30% et il faut donc chercher à comprendre l'organisation interne de ces bassins de manière à savoir si les conditions nécessaires à la formation et au piégeage des hydrocarbures sont remplies.

A cette fin, la technique de base la plus employée est la sismique-réflexion. Elle est aujourd'hui la seule en mesure de fournir une image du sous-sol assez précise pour évaluer la probabilité d'y trouver des hydrocarbures. Cependant, si le principe de la sismique-réflexion est simple, son utilisation pour créer et interpréter l'image des structures géologiques cachées est très complexe.

L'exploration pétrolière se fait en trois étapes : l'acquisition des données, leur traitement puis l'interprétation.

En sismique-réflexion, les données sont obtenues lors de campagnes d'acquisition sismique (cf. Fig. 1.1 et Fig. 1.2) qui soumettent le sous-sol à une excitation du type source explosive ou vibrante. Celle-ci engendre un champ d'ondes qui se propage et est réfléchi par les discontinuités du milieu (correspondant à un changement de vitesse). Le temps d'arrivée des ondes réfléchies est enregistré par des capteurs situés en surface. Ces enregistrements, appelés sismogrammes, représentent la réponse sismique du milieu pour le point de tir considéré. Lors d'une campagne sismique, l'expérience est répétée en déplaçant la source et les récepteurs sur la surface et les sismogrammes résultants sont constitués des enregistrements obtenus sur les récepteurs associés à un point de tir. On dit alors que l'on est dans le domaine des tirs communs. Cependant, les données peuvent être réarrangées en fonction de la distance source/récepteur (offset). Les sismogrammes sont alors tracés à partir des enregistrements obtenus sur les récepteurs ayant la même distance par rapport à la source. On dit que l'on est dans le domaine des offsets communs. Ces acquisitions peuvent se faire en mer ou sur terre et, dans le cas de la sismique marine, il faut prendre





FIG. 1.1 – Campagnes sismiques réelles marine et terrestre.

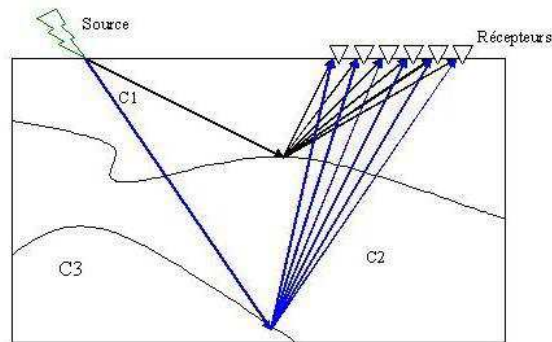


FIG. 1.2 – Descriptif de l'acquisition sismique.

en compte le fait que la source et les récepteurs sont en mouvement. Pour la sismique terrestre, c'est la topographie qui doit être considérée.

On procède ensuite au traitement et à l'interprétation des informations contenues dans les sismogrammes, dans le but de fournir une image la plus fidèle possible du sous-sol. Pour cela, on doit repositionner correctement en profondeur (ou en temps) les réflecteurs observés sur les traces sismiques des sismogrammes. C'est ce que l'on appelle la migration. Il existe de nombreuses techniques de migration qui ont toutes pour point commun la propagation/rétro-propagation du champ d'ondes et l'application d'une condition d'imagerie pour restituer les contrastes de propriétés du sous-sol. Il faut donc avoir des méthodes fiables, précises et rapides pour simuler la propagation des ondes dans le milieu pour se donner toutes les chances de créer une image correcte du milieu de propagation.

Les méthodes de migration permettent uniquement de localiser les différentes interfaces dans le milieu, ce qui constitue déjà une information importante. Les méthodes d'inversion sont plus élaborées car elles permettent de déterminer en plus les paramètres physiques du sous-sol [12]. Cependant elles sont plus lourdes à mettre en oeuvre et le problème inverse constitue aujourd'hui un vrai challenge dans le domaine pétrolier mais aussi dans d'autres domaines comme par exemple le secteur médical (détection de tumeurs cancéreuses du

sein) ou militaire (détection de mines).

Dans le processus de migration, l'étape capitale est la résolution de ce que l'on appelle le problème direct (i.e. la résolution de l'équation des ondes). Plus la méthode numérique utilisée est précise, plus l'image obtenue après migration est fiable. Dans ce chapitre, après un rappel sur l'équation des ondes acoustiques, nous dressons une liste des méthodes utilisées pour simuler le phénomène de propagation. Ainsi, nous détaillons les méthodes les plus couramment utilisées en ingénierie pétrolière comme la modélisation de Kirchhoff, la propagation par différence finies ou éléments finis. Après avoir vu leurs avantages et leurs inconvénients, nous décrivons comment ces différentes méthodes sont mises en place dans la migration.

## 1.1 Les méthodes numériques les plus utilisées pour la propagation des ondes sismiques

Dans cette section, nous décrivons les méthodes de calcul qui sont les plus utilisées pour simuler la propagation des ondes sismiques.

### 1.1.1 L'équation des ondes acoustiques

La propagation des ondes acoustiques est modélisée par l'équation scalaire du second ordre suivante :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.1)$$

où  $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \in ]0, T_f[$ ,  $T_f$  est le temps total de simulation,  $u(\mathbf{x}, t)$  est le champ d'ondes,  $c(\mathbf{x})$  est la vitesse de propagation des ondes dans le milieu et  $\Delta = \sum_{b \in \{x, y, z\}} \frac{\partial^2}{\partial b^2}$  est le laplacien de  $u$ .

Dans la suite de ce chapitre, nous faisons référence à cette équation en la nommant équation des ondes complète ou équation two-way.

En imagerie sismique, le domaine de Fourier est très utilisé car il permet de s'affranchir de la variable temps. En effectuant la transformée de Fourier en temps de l'équation two-way (1.1), on obtient alors l'équation d'Helmholtz :

$$\left[ \Delta + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] U(x, y, z, \omega) = 0 \quad (1.2)$$

où  $\omega$  est la variable duale de  $t$  et  $U$  est la transformée de Fourier de  $u$  selon  $t$ .

Cette équation peut être utilisée pour faire de la propagation mais elle sous-entend de repasser dans le domaine temporel via une transformée inverse de Fourier. Nous renvoyons aux travaux de thèse de M. Grigoroscuta [13] qui propose une méthode d'éléments finis qui semble très prometteuse pour l'imagerie sismique.

### 1.1.2 L'approximation de Kirchhoff

La méthode de Kirchhoff est une méthode asymptotique qui permet de calculer rapidement le champ d'ondes acoustiques. Si l'on considère l'équation d'ondes dans le domaine  $(x, y, z, \omega)$  :

$$\left[ \Delta + \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 \right] U(\mathbf{x}, \omega) = S(\mathbf{x}_0, \omega), \quad (1.3)$$

où  $U$  désigne la transformée de Fourier en temps de  $u$  selon  $t$  et  $S$  est une source située en  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ , la propagation générée par  $S$  peut s'écrire

$$U^{inc}(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Sigma} G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s}) S(\mathbf{x}_0, \omega) ds,$$

où  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s})$  est la fonction de Green au point  $\mathbf{x}$  issue de la source  $S$ ,  $\Sigma$  est une surface donnée et  $U^{inc}(\mathbf{x}, \omega)$  est le champ d'ondes incident. En considérant une source de la forme  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$ , une approximation haute fréquence de  $U^{inc}$  est donné par :

$$U^{inc}(\mathbf{x}, \omega) \approx G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s}) = G(\mathbf{s}, \omega; \mathbf{x}) = C(\omega)A(\mathbf{s}, \mathbf{x})e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})}, \quad (1.4)$$

où  $T(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  est le temps de parcours mis par l'onde pour parcourir le trajet entre la source et le point  $\mathbf{x}$  quelconque. Le terme  $A(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  est l'amplitude de l'onde le long du rayon et  $C(\omega)$  la signature de la fonction qui dépend de la dimension de l'espace. En 1D,  $C(\omega) = \frac{1}{i\omega}$ , en 2D,  $C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{-i\omega}}$  et en 3D,  $C(\omega) = 1$  [14].

Pour calculer  $T(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ , on résout l'équation Eikonale qui régit le temps de propagation :

$$(\nabla_x T(\mathbf{s}, \mathbf{x}))^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}. \quad (1.5)$$

Pour obtenir (1.5), il suffit d'injecter (1.4) dans (1.3) et de négliger les termes d'amplitude. Cette résolution peut se faire par des différences finies [15, 16], par la théorie des Graphes [17] ou par une représentation Hamiltonienne de l'équation [18]. Cependant, ces méthodes ne permettent pas de calculer l'amplitude  $A(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ . Une autre approche consiste à utiliser les équations de rais permettant le calcul des variables  $T(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  et  $A(\mathbf{s}, \mathbf{x})$ . Dans ce cas, on résout le système hamiltonien suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{2} \nabla \left( \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \right) \end{cases}$$

avec  $\|\mathbf{p}\|^2 = \|\nabla T\|^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})}$ . Le terme  $\mathbf{x}(\tau)$  est la trajectoire des rais. La première équation caractérise l'évolution de la tangente au rai et la seconde celle de la courbure du rai.

Le terme  $\mathbf{p}$  est le paramètre de rai et  $\tau$  son temps de parcours.

Lorsqu'une discontinuité (réflecteur) apparaît dans le modèle de vitesse, l'onde incidente arrivant en un point  $\mathbf{x}$  du réflecteur va se réfléchir en une onde dont l'amplitude est égale à l'amplitude de l'onde incidente multipliée par un coefficient de réflexion. Ce coefficient dépend de l'angle  $\theta$  avec lequel l'onde incidente arrive au point  $\mathbf{x}$  par rapport à la normale extérieure  $\mathbf{n}$  au réflecteur. Il vient alors que :

$$U(\mathbf{x}, \omega) = R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))U^{inc}(\mathbf{x}, \omega)$$

soit,

$$U(\mathbf{x}, \omega) = R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))C(\omega)A(\mathbf{s}, \mathbf{x})e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})} \quad (1.6)$$

où  $R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))$  est le coefficient de réflexion. Il faut noter que l'onde (ou rayon) vérifie la loi de Snell-Descartes c'est-à-dire que l'onde va se réfléchir avec le même angle  $\theta$ . La relation (1.6) est connue sous le nom d'approximation de Kirchhoff.

Grâce au théorème de représentation (voir par exemple [19] ou [20] pour une description plus mathématique) on peut écrire la valeur du champ d'ondes réfléchi et enregistré en un point  $\mathbf{r} = (x_r, z_r)$  sous la forme :

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \int_{\Sigma} \left[ \frac{\partial G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{r})}{\partial \mathbf{n}} U(\mathbf{x}, \omega) - G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{r}) \frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} \right] d\mathbf{x} \quad (1.7)$$

où  $\Sigma$  est le réflecteur,  $\mathbf{x}$  est un point de la surface  $\Sigma$  et  $\mathbf{n}$  est la normale extérieure à  $\Sigma$  au point  $\mathbf{x}$ .  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{r})$  est la fonction de Green au point  $\mathbf{x}$  pour une source placée en  $\mathbf{r}$ .

L'intérêt de la formule (1.7) est de donner une représentation exacte du champ d'ondes  $U$  via la fonction de Green. Il est tout à fait possible de calculer  $U$  en utilisant des éléments finis de frontière [20]. Le principal inconvénient de cette approche est de fournir un procédé de calcul très coûteux car la matrice de discrétisation est pleine, ce qui est un frein important à la mise en oeuvre 3D, même si les méthodes multipôles (cf. [21] et sa bibliographie) ont permis d'accélérer très significativement les calculs. De plus, cette représentation, fondée sur la fonction de Green n'est pas facile à adapter pour des milieux hétérogènes.

### 1.1.3 Les propagateurs one-way

Le calcul scientifique n'a bénéficié que très récemment des progrès spectaculaires qui ont été réalisés au niveau des calculateurs, ce qui explique qu'il y a encore dix ans, il n'était pas envisageable d'utiliser l'équation des ondes complète pour la migration. Ces trente dernières années, on a vu ainsi se développer différentes méthodes de calcul, plus ou moins précises, qui reposent toutes sur une équation plus simple provenant de l'approximation de l'équation complète. Ces approximations sont effectuées après avoir réécrit l'équation

des ondes en privilégiant une direction de propagation, en général la profondeur  $z$ . Plus précisément, on a :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

ce qui entraîne formellement :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}$$

ou encore :

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \Theta u \quad (1.8)$$

où  $\Theta$  est l'opérateur donné par :

$$\Theta : u \mapsto \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}. \quad (1.9)$$

On se ramène donc à résoudre une équation du premier ordre, dite équation one-way, et, bien évidemment, la principale difficulté réside dans la caractérisation de l'opérateur  $\Theta$ . Il s'avère qu'à chaque caractérisation, on peut associer une méthode de calcul.

Dans la suite de ce paragraphe, nous dressons un catalogue des méthodes les plus utilisées en imagerie sismique et en donnons les principaux avantages et inconvénients.

### 1.1.3.1 La méthode Phase-shift

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, on doit supposer que la vitesse de propagation ne dépend que de  $z$ . Dans ce cas, l'opérateur  $\Theta$  a exactement pour symbole  $\sigma(\Theta)$  donné par :

$$\sigma(\Theta) = i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} \quad (1.10)$$

où  $\omega$ ,  $k_x$  et  $k_y$  désignent respectivement les variables duales de  $t$ ,  $x$  et  $y$  via une transformée de Fourier.

La méthode Phase-Shift consiste alors à résoudre l'équation one-way dans le domaine de Fourier. On note  $U$  la transformée de Fourier partielle de  $u$ ,  $U$  vérifie donc :

$$\frac{\partial U}{\partial z} = i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} U$$

ce qui entraîne :

$$U := U(k_x, k_y, z, \omega) = U(k_x, k_y, 0, \omega) e^{i \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} z}.$$

Si on note  $\Delta z$  le pas de discrétisation en  $z$ , on en déduit la formule de représentation :

$$U(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = U(k_x, k_y, z, \omega) e^{\sigma(\Theta) \Delta z}. \quad (1.11)$$

Le champ d'ondes se calcule donc de façon très simple via la multiplication par un nombre complexe dont le module est égal à 1 mais dont la phase  $\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} \Delta z$  varie en fonction de  $z$ . En appliquant les règles de calcul des nombres complexes, il agit comme un terme additif sur la phase de  $U(k_x, k_y, z, \omega)$  d'où son nom d'opérateur Phase-Shift.

Cette méthode est inconditionnellement stable et fournit une solution exacte de l'équation one-way à condition que la vitesse soit invariante latéralement [22]. Elle fournit donc un procédé de calcul très rapide mais qui ne peut être appliqué dans des milieux où la vitesse varie dans toutes les directions.

### 1.1.3.2 La méthode Split-Step Fourier

Afin de prendre en compte des milieux où la vitesse varie latéralement, Stoffa *et al.* [23] ont proposé la méthode Split-Step Fourier (SSF) qui repose sur les mêmes idées que la méthode Phase-Shift en lui ajoutant une correction à chaque itération.

Rappelons que dans le cas où  $c$  ne dépend que de  $z$ ,  $\sigma(\Theta) = i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$ .

Introduisons  $c_0 := c_0(z)$  une vitesse de référence. On a alors :

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_0^2} \right)}$$

et la méthode Split-Step Fourier consiste à faire l'approximation :

$$\sigma(\Theta) \simeq i \left[ \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 - k_y^2} + \omega \sqrt{\left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_0^2} \right)} \right]. \quad (1.12)$$

Ainsi, en supposant connu  $U(k_x, k_y, z, \omega)$ , on va tout d'abord appliquer le Phase-Shift dans le milieu de référence :

$$U_1(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = e^{i\sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 - k_y^2} \Delta z} U(k_x, k_y, z, \omega).$$

Ensuite, on observe que le terme correcteur dans (1.12) ne dépend pas de  $k_x$  et  $k_y$ . On peut donc appliquer le Phase-Shift dans le domaine en espace. Pour cela, on applique la transformée de Fourier inverse à  $U_1$  ; on note  $u_1 = u_1(x, y, z + \Delta z, \omega)$  le résultat et on en déduit :

$$u(x, y, z + \Delta z, \omega) = e^{i\omega \left( \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_0^2} \right) \Delta z} u_1(x, y, z + \Delta z, \omega). \quad (1.13)$$

On peut ensuite passer à l'itération suivante en calculant  $U(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega)$  comme la transformée de Fourier en  $x$  et  $y$  de  $u(x, y, z + \Delta z, \omega)$ .

Cette méthode est bien évidemment plus coûteuse en calcul que la méthode Phase-Shift car elle requiert d'appliquer deux transformées de Fourier à chaque itération. De plus, si elle autorise des variations latérales de vitesse, l'approximation (1.12) n'est justifiée que si  $c - c_0$  est petit. On ne peut donc l'appliquer en cas de fortes variations de vitesse.

### 1.1.3.3 La méthode Fourier Finite Difference

Nous venons de voir que la méthode Phase-Shift (cf. §§ 1.1.3.1) et SSF (cf. §§ 1.1.3.2) ne sont valables que pour des milieux dans lesquels la vitesse varie peu latéralement. Cependant, elles peuvent imager des réflecteurs ayant des pentes pouvant aller jusqu'à  $90^\circ$ . Au contraire, comme nous le verrons dans la section 1.1.4, les méthodes par différences finies sont efficaces dans des milieux fortement hétérogènes mais sont limitées pour la prise en compte de réflecteurs dont la pente est proche de la verticale. Ristow et Rühl [24] ont proposé la méthode Fourier Finite Difference (FFD) qui combine les avantages des différentes méthodes.

Si on considère l'équation one-way dans le domaine  $(x, y, z, \omega)$ , il vient que

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z, \omega) = i\Theta_\omega u(x, y, z, \omega)$$

$$\text{avec } \Theta_\omega = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}, \quad c = c(x, y, z) \text{ et } \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Pour approcher  $\Theta_\omega$ , on décompose, comme pour la méthode Split-Step Fourier, la vitesse par une vitesse constante de référence et une vitesse qui varie soit,  $c(x, y, z) = c_{ref} + \delta c(x, y, z)$  et on considère l'opérateur  $\Psi$  qui est la différence entre l'opérateur  $\Theta_\omega$  utilisant la vitesse  $c$  et l'opérateur  $\Theta_\omega$  utilisant  $c_{ref}$  :

$$\Psi = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} - \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}. \quad (1.14)$$

Cet opérateur peut se réécrire :

$$\Psi \approx \left( \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{c_{ref}} \right) + \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{c_{ref}}{c} \right) \left[ \frac{\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}{a_1 + b_1 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} + \frac{\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}{a_2 + b_2 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} + \dots \right] \quad (1.15)$$

où  $a_i$  et  $b_i$  sont des paramètres qui dépendent de  $c_{ref}/c$ . Pour plus de détails sur leur calcul, on renvoie à l'annexe de [24].

En combinant (1.14) et (1.15) on obtient

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} &\approx \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{ref}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} + \left( \frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{c_{ref}} \right) \\ &+ \frac{\omega}{c} \left( 1 - \frac{c_{ref}}{c} \right) \left[ \frac{\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}{a_1 + b_1 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} + \frac{\frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}}{a_2 + b_2 \frac{c^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}} + \dots \right] \end{aligned} \quad (1.16)$$

Le premier terme de (1.16) est un opérateur Phase-Shift qui doit être appliqué dans le domaine  $(k_x, k_y, z, \omega)$ , le deuxième est la correction de Stoffa *et al.* (méthode SSF) à appliquer dans le domaine  $(x, y, z, \omega)$  et le troisième est une autre correction qui doit être aussi appliquée dans le domaine  $(x, y, z, \omega)$ . Par rapport à la méthode SSF, on ne fait que pousser plus loin l'approximation de la racine carrée (1.10).

Cette méthode, combinant à la fois les opérateurs de différences finies et de Phase-Shift, permet de manipuler de forts contrastes de vitesse. De plus, elle n'a pas de limitation en angle lorsque la vitesse ne varie pas.

#### 1.1.3.4 La méthode Phase-Shift Plus Interpolation

La méthode Phase-Shift Plus Interpolation (PSPI), introduite par Gazdag et Sguazzero en 1984 [25], est une autre possibilité pour prendre en compte les variations latérales de vitesse. Pour cela, on considère  $l$  vitesses de référence  $c_l$  dans chaque zone de calcul d'épaisseur  $\Delta z$ . Par exemple, pour  $l = 2$ ,  $c_1(z) = \min[c(z)]$  et  $c_2(z) = \max[c(z)]$ . On renvoie à [25] dans le cas où  $l > 2$ . Ensuite, on effectue une extrapolation Phase-shift avec chaque  $c_l$  pour obtenir plusieurs champs d'ondes  $U_l^*$ . Il ne reste plus qu'à effectuer une transformée de Fourier inverse suivant  $k_x$  et  $k_y$  et une interpolation pour obtenir le champ d'ondes final.

En résumé, l'algorithme de la méthode PSPI est le suivant :

1. Afin d'obtenir une meilleure précision pour les faibles pendages, on effectue une étape intermédiaire avant le calcul des  $U_l^*$ . Un décalage en temps est d'abord appliqué sur le champ d'ondes avec la vitesse exacte dans le domaine  $(x, y, z, \omega)$  :

$$u^*(x, y, z, \omega) = u(x, y, z, \omega) e^{\frac{i\omega}{c} \Delta z}. \quad (1.17)$$

Puis on effectue une transformée de Fourier suivant  $x$  et  $y$  ce qui donne le champ  $U^*(k_x, k_y, z, \omega)$ ;

2. on applique un Phase-Shift pour chaque vitesse  $c_l$  dans le domaine  $(k_x, k_y, z, \omega)$  :

$$U_l^*(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = U^*(k_x, k_y, z, \omega) e^{i \left( \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k_x^2 - k_y^2} - \frac{\omega}{c_l} \right) \Delta z}; \quad (1.18)$$



3. on effectue une transformée de Fourier inverse suivant  $k_x$  et  $k_y$  puis une interpolation des  $U_l^*$  [25] pour obtenir  $u(x, y, z + \Delta z, \omega)$ .

Cette méthode est inconditionnellement stable mais son efficacité dépend évidemment du nombre de vitesses  $c_l$  prises à chaque pas d'extrapolation. On imagine bien que dans le cas d'un milieu très hétérogène, il sera nécessaire de prendre un nombre très élevé de vitesses dans chaque tranche de calcul d'épaisseur  $\Delta z$ , ce qui devrait conduire à une méthode de calcul assez coûteuse même à 2D.

### 1.1.3.5 L'équation one-way paraxiale

Ici encore, on va se ramener à approcher le symbole  $\sigma(\Theta)$  de l'opérateur one-way.

Dans le cas où  $c := c(z)$ , on a vu que  $\sigma(\Theta) = i\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2}$  et on approche la racine carrée par des approximations de Padé :

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} \simeq \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N \left( \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)}{1 - \alpha_n^N \left( \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)} \right] \quad (1.19)$$

où  $N$  est l'ordre d'approximation,  $\beta_n^N, \alpha_n^N$  sont des coefficients réels vérifiant :

$$\begin{cases} \beta_n^N &= \cos^2 \left( \frac{n\pi}{2N+1} \right) \\ \alpha_n^N &= \frac{2}{2N+1} \sin^2 \left( \frac{2n}{2N+1} \right) \end{cases}$$

et,

$$\begin{cases} 0 < \beta_n^N &, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\} \\ 0 \leq \alpha_n^N \leq 1 &, \quad \forall n \in \{1, \dots, N\}. \end{cases}$$

L'équation one-way paraxiale correspondante devient alors :

$$\frac{\partial U}{\partial z}(k_x, k_y, z, \omega) = i \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N \left( \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)}{1 - \alpha_n^N \left( \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)} \right] U(k_x, k_y, z, \omega) \quad (1.20)$$

soit, en revenant dans le domaine spatial :

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, y, z, \omega) = i \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N (S_x^2 + S_y^2)}{1 - \alpha_n^N (S_x^2 + S_y^2)} \right] u(x, y, z, \omega) \quad (1.21)$$

avec  $S_x = \frac{c(x, y, z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial x}$  et  $S_y = \frac{c(x, y, z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial y}$ .

Cette méthode a été proposée par Claerbout. Les équations one-way paraxiales les plus connues sont les équations dites 15° et 45° qui correspondent respectivement aux cas  $N = 1$ ,  $\alpha_1^1 = 0$ ,  $\beta_1^1 > 0$  et  $N = 2$ ,  $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1/4$ ,  $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 1/4$ . Le degré correspond à la limite de validité de l'équation. Nous renvoyons à [26] pour l'analyse de ces équations et plus de détails sur leur domaine de validité.

A priori, les équations paraxiales sont plutôt résolues par différences finies [27] ou éléments finis [26]. Comme nous l'avons dit, elles ne sont valables qu'à l'intérieur d'un cône limité de propagation. De plus, elles peuvent aussi souffrir des inconvénients liés aux techniques de différences finies. Nous y reviendrons plus loin dans les sections 1.1.4 et 1.1.5.

### 1.1.3.6 Les équations one-way quantitatives

Les méthodes que nous venons de décrire ont toutes l'avantage de fournir une solution beaucoup plus rapidement que les méthodes numériques classiques (cf. §§ 1.1.4 et 1.1.5). Cependant, elles reposent toutes sur l'approximation de la racine carrée de l'opérateur d'Helmholtz et les approximations les plus simples ont pour effet de ne pas restituer correctement la dynamique du phénomène physique : l'amplitude du champ d'ondes calculé est erronée. Cela provient du fait que les approximations utilisées ne respectent pas l'équation de transport associée à l'équation des ondes. Plus précisément, on peut distinguer deux aspects dans la propagation : le temps de trajet et l'amplitude du champ d'ondes. Mathématiquement, on peut dissocier ces deux informations, après avoir effectué une approximation haute fréquence de l'équation des ondes dans le domaine de Fourier  $(x, y, z, \omega)$ . On obtient deux équations, la première est appelée équation Eikonale et s'écrit :

$$(\nabla T(\mathbf{x}))^2 = \frac{1}{c^2(\mathbf{x})} \quad (1.22)$$

où  $T(\mathbf{x})$  est le temps de trajet de l'onde, la deuxième équation s'appelle l'équation de transport et s'écrit :

$$2\nabla A(\mathbf{x})\nabla T(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x})\Delta T(\mathbf{x}) = 0 \quad (1.23)$$

où  $A(\mathbf{x})$  est l'amplitude de l'onde.

On peut alors montrer que les équations eikonales sont identiques mais pas les équations de transport. C'est de là que vient le calcul erroné de l'amplitude du champ d'ondes.

Cette remarque conduit Zhang *et al.* [28] à ajouter un terme correcteur à l'équation des ondes one-way. Ils obtiennent ainsi une équation de transport one-way équivalente à celle de l'équation des ondes complète. Il faut noter, cependant, que ceci n'est valable que pour des milieux dans lesquels la vitesse ne dépend que de  $z$ . On obtient alors de nouvelles équations one-way qui s'écrivent dans le domaine de Fourier :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial z} \pm i\sigma^c(\Theta) \right] U(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (1.24)$$

$$\text{où } \sigma^c(\Theta) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} + \frac{\omega^2}{2c^3 \left( \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2 \right)} \frac{\partial c}{\partial z}.$$

Ce calcul se justifie aussi en milieu hétérogène en appliquant le calcul pseudo-différentiel [29].

### 1.1.3.7 Le Generalized Screen Propagator

En 1996, M.V. de Hoop [10] utilise le formalisme des opérateurs pseudo-différentiels pour construire le Generalized Screen Propagator (GSP), qui généralise les résultats de Bremmer [30] à la  $nD$ ,  $n \geq 2$  et qui garde l'idée de projeter le champ d'ondes dans une direction privilégiée (dans notre cas, l'axe des  $z$ ). Le calcul pseudo-différentiel permet de dériver (microlocalement) un système d'équation one-way exact équivalent à l'équation des ondes complète et dans lequel le couplage entre ondes montantes et descendantes est pris en considération. Dans le cas d'une densité  $\rho$  variable, l'équation des ondes s'écrit sous la forme du système hyperbolique du premier ordre :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = 0 & \text{dans } ]0, T[ \times \mathbb{R}^3 \\ \frac{1}{c^2 \rho} \frac{\partial p}{\partial t} + \text{div } u = q & \text{dans } ]0, T[ \times \mathbb{R}^3 \\ p(0, \mathbf{x}) = 0 \text{ et } u(0, \mathbf{x}) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

où  $u = u(t, \mathbf{x}) = {}^t(u_x, u_y, u_z)$  est le vecteur vitesse dans le fluide,  $p = p(t, \mathbf{x})$  est la pression acoustique et  $q = q(t, \mathbf{x})$  est un taux d'injection par unité de masse. La solution est calculée sous forme d'un développement en série de Bremmer, ce qui revient à décomposer le problème en une succession de problèmes de scattering élémentaires. On renvoie aux thèses de J.H. Le Rousseau [31] et de F. Prat [32] pour plus de détails.

Nous avons à notre disposition un code de simulation qui résout (1.25) en utilisant un GSP. Ce code a été développé par F. Prat [32] et est doté de plusieurs options combinant GSP et approximation de Born ou équations paraxiales. Afin de mieux cerner les avantages à appliquer le GSP, la mise en oeuvre étant assez lourde, nous avons commencé par comparer le GSP aux méthodes Phase-Shift et Split-Step Fourier qui nous semblent plus faciles à appliquer. La comparaison a été faite seulement au niveau théorique.

- **Comparaison du modèle avec la méthode Phase-shift**

Le système (1.25) peut se réécrire sous la forme d'un système stationnaire dans lequel on privilégie la variable profondeur [32]. La densité est une constante normalisée et ne fait

que multiplier la vitesse  $c$  par cette même constante. On peut donc, afin de simplifier les écritures, la prendre égale à 1, et dans ce cas, on obtient :

$$(\mathbf{D}_z + L) \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1.26)$$

avec  $\mathbf{U} = {}^t(\hat{p}, \hat{u}_z)$ ,  $\mathbf{D}_z = \mathbf{I}_2 \partial_z$  et  $\mathbf{I}_2$  représente l'opérateur identité d'ordre deux. L'opérateur  $L$  est défini par :

$$L = i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{c^2} + \frac{1}{\omega^2} \Delta^2 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

où  $\Delta^2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$  et la source  $\mathbf{F}$  est donnée par  $\mathbf{F} = {}^t(0, \hat{q})$ .

On peut montrer [32] qu'il existe au moins un opérateur  $P$  tel que si  $\mathbf{V} = P\mathbf{U}$  alors  $\mathbf{V}$  est solution de :

$$(\mathbf{D}_z + i\omega\Lambda_0) \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{V} + \mathbf{G} \quad (1.28)$$

où  $\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \Gamma_0 & 0 \\ 0 & -\Gamma_0 \end{pmatrix}$  est un opérateur diagonal unique de symbole  $\gamma_0 = \sqrt{\frac{1}{c(x, y, z)} - \frac{|k'|^2}{\omega^2}}$

avec  $|k'|^2 = k_x^2 + k_y^2$ . La matrice d'opérateurs  $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_{++} & R_{+-} \\ R_{-+} & R_{--} \end{pmatrix}$ , avec  $\sigma(R_{++}) = \sigma(R_{--}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial_z \gamma_0}{\gamma_0}$ ,  $\sigma(R_{+-}) = \sigma(R_{-+}) = \frac{1}{2} \frac{\partial_z \gamma_0}{\gamma_0}$ , dépend de  $P$ .

Il faut donc résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} \partial_z V_+ + i\omega\Gamma_0 V_+ = (RV)_+ + G_+ \\ \partial_z V_- + i\omega\Gamma_0 V_- = (RV)_- + G_- \end{cases} \quad (1.29)$$

Si l'on considère, comme pour la méthode Phase-shift, que la vitesse est homogène,  $\partial_z \gamma_0 = 0$  et les termes de couplage  $(RV)_\pm$  disparaissent. Finalement, le système d'équation à résoudre (à l'intérieur de chaque couche homogène du milieu) est :

$$\begin{cases} \partial_z V_+ + i\omega\Gamma_0 V_+ = G_+ \\ \partial_z V_- + i\omega\Gamma_0 V_- = G_- \end{cases} \quad (1.30)$$

Pour cela, on applique un résultat démontré dans [32] qui fournit une représentation de  $V$  :

$$V_\pm(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = \exp \left( i \int_z^{z+\Delta z} A_\pm^0(\zeta) d\zeta \right) V_\pm(k_x, k_y, z, \omega) \quad (1.31)$$

où  $A_\pm^0 = \mp \omega \Gamma_0$ .

Il nous faut alors savoir comment représenter l'exponentielle d'un opérateur. Formellement l'exponentielle d'un opérateur  $B$  s'écrit comme un développement asymptotique :

$$e^B = \sum_{n \geq 0} \frac{B^n}{n!} = I + B + \Pi \quad (1.32)$$

où  $\Pi$  désigne un opérateur régularisant, ce qui entraîne,

$$\begin{aligned} \sigma(e^B) &= \sum_{n \geq 0} \frac{\sigma(B^n)}{n!} = 1 + \sigma(B) + \frac{\sigma(B^2)}{2} + \pi \\ &= e^{\sigma(B)} + \pi^* \end{aligned} \quad (1.33)$$

où les restes  $\pi$  et  $\pi^*$  représentent les symboles d'opérateurs régularisants.

Une approximation du symbole de l'exponentielle définie dans (1.31) est donc donnée par son symbole principal :

$$\sigma_P \left( \exp \left( \mp i\omega \int_z^{z+\Delta z} \Gamma_0(\zeta) d\zeta \right) \right) = \exp \left( \mp i\omega \left[ \sigma_P \left( \int_z^{z+\Delta z} \Gamma_0(\zeta) d\zeta \right) \right] \right). \quad (1.34)$$

De plus, la vitesse étant homogène i.e.  $c = cste$ ,  $\Gamma_0(\zeta) = \Gamma_0$ . On peut donc écrire que :  $\int_z^{z+\Delta z} \Gamma_0(\zeta) d\zeta = \Gamma_0 \int_z^{z+\Delta z} d\zeta$ , et donc :

$$\sigma \left( \int_z^{z+\Delta z} \Gamma_0(\zeta) d\zeta \right) = \sigma(\Gamma_0) \sigma \left( \int_z^{z+\Delta z} d\zeta \right) = \gamma_0 \Delta z. \quad (1.35)$$

En injectant (1.34) et (1.35) dans (1.31), la solution du système (1.30) est finalement donnée par :

$$V_{\pm}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) e^{\mp i\omega \gamma_0 \Delta z}. \quad (1.36)$$

On retrouve bien la formule utilisée dans la méthode Phase-shift (1.11) avec  $\Theta = Op(i\omega \gamma_0)$ .

### • Comparaison du modèle avec la méthode Split-Step Fourier

Ici, on ne suppose plus que la vitesse est homogène, elle peut varier dans toutes les directions. Le système à considérer est donc le système de la forme (1.29) en remplaçant  $\Gamma_0$  par  $\Gamma$ . Pour le résoudre, on utilise la même propriété que pour (1.31) ce qui donne :

$$V_{\pm}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) \exp \left( \mp i\omega \int_z^{z+\Delta z} \Gamma(\zeta) d\zeta \right) \quad (1.37)$$

où  $\sigma(\Gamma) = \gamma = \sqrt{u(x, y, z) - \frac{|k'|^2}{\omega^2}}$  et  $u(x, y, z) = \frac{1}{c(x, y, z)}$  est le vecteur lenteur.

De plus, on peut aussi approcher le symbole de la composée de deux opérateurs par son symbole principal. Ce dernier n'est rien d'autre que le premier terme du développement asymptotique soit encore le produit des symboles des deux opérateurs. On a donc :

$$\sigma_P \left( \int_z^{z+\Delta z} \Gamma_0(\zeta) d\zeta \right) = \sigma \left( \int_z^{z+\Delta z} d\zeta \right) \sigma(\Gamma_0) = \gamma_0 \Delta z. \quad (1.38)$$

Il vient donc, en combinant (1.34) et (1.38), que la solution du système (1.29) est donnée par :

$$V_{\pm}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) e^{\mp i \omega \gamma \Delta z}. \quad (1.39)$$

Or, si l'on suppose que, comme dans la méthode Split-Step Fourier,  $u$  peut se mettre sous la forme  $u(x, y, z) = u_0(z) + \delta u(x, y, z)$ , on peut écrire :

$$\gamma = \omega u \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 u^2}} = \omega u \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 (u_0^2 + 2u_0 \delta u + \delta u^2)}}$$

et, comme  $\delta u \ll u_0$  :

$$\begin{aligned} \gamma &\approx \omega u \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2}} = \omega u_0 \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2}} + \omega \delta u \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2}} \\ \gamma &\approx \gamma_0 + \frac{\gamma_0 \delta u}{u_0}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

En remplaçant dans (1.39) il vient que :

$$\begin{aligned} V_{\pm}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) &= V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) e^{\mp i \omega \left( \gamma_0 + \delta u \frac{\gamma_0}{u_0} \right) \Delta z} \\ &= V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) e^{\mp i \omega \gamma_0 \Delta z} e^{\mp i \omega \delta u \frac{\gamma_0}{u_0} \Delta z}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

De plus, si  $\frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2} \ll 1$  :

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= u_0 \sqrt{1 - \frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2}} = u_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{|k'|^2}{\omega^2 u_0^2} + \theta \right) \\ &\approx u_0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

où  $\theta$  est le reste du développement limité.

En utilisant cette approximation et en la remplaçant dans la seconde exponentielle de (1.41), on obtient :

$$V_{\pm}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = V_{\pm}(k_x, k_y, z, \omega) e^{\mp i\omega\gamma_0\Delta z} e^{\mp i\omega\delta u\Delta z}. \quad (1.43)$$

Finalement, en effectuant la transformée de Fourier inverse, on retrouve bien la formule (1.13) avec  $u_1(x, y, z + \Delta z, \omega) = TF^{-1}\left(V_-(k_x, k_y, z, \omega) e^{i\omega\gamma_0\Delta z}\right)$  et  $\frac{1}{c^2} - \frac{1}{c_0^2} = \delta u$ .  $TF^{-1}$  désignant la transformée de Fourier inverse suivant  $k_x$  et  $k_y$ .

Plusieurs variantes du modèle GSP comme le modèle GSP avec approximation de Born ou le couplage du GSP avec des équations paraxiales sont possibles. Le modèle GSP donne de très bons résultats dans un milieu à couches horizontales mais les résultats se dégradent si la vitesse varie latéralement. Ceci peut être corrigé en utilisant le modèle GSP-Paraxial [29]. Nous y reviendrons plus loin, au cours du chapitre 3 dédié à des comparaisons d'ordre numérique.

### 1.1.4 Les méthodes par différences finies

Nous avons supposé jusqu'alors que le champ d'ondes était connu de façon continu. Or, dans la pratique, cela n'est pas le cas. Il est mesuré de façon échantillonnée c'est-à-dire en des points espacés de  $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  en espace et  $\Delta t$  en temps. On introduit alors la notation  $\mathbf{x}_{ijk} = (x_i, y_j, z_k)$  avec  $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y, z_k = k\Delta z, \{i, j, k\} \in \mathbb{N}^3$  et  $t^n = n\Delta t$ . On note alors la solution calculée  $u_{ijk}^n$ .

La construction du schéma aux différences finies repose sur un développement de Taylor. Plus précisément, on part de : il existe  $\xi_1 \in ]t, t + \Delta t[$  tel que pour tout  $u$  suffisamment régulière,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t + \Delta t) = u(\mathbf{x}, t) &+ \Delta t \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \\ &+ \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_1)}{\partial t^4} \end{aligned} \quad (1.44)$$

et, il existe  $\xi_2 \in ]t - \Delta t, t[$  tel que

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t - \Delta t) = u(\mathbf{x}, t) &- \Delta t \frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} \\ &- \frac{\Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^3} + \frac{\Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial t^4}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

En sommant les deux égalités précédentes, on obtient que :

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} = \frac{u(\mathbf{x}, t + \Delta t) - 2u(\mathbf{x}, t) + u(\mathbf{x}, t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{24} \left( \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_1)}{\partial t^4} + \frac{\partial^4 u(\mathbf{x}, \xi_2)}{\partial t^4} \right).$$

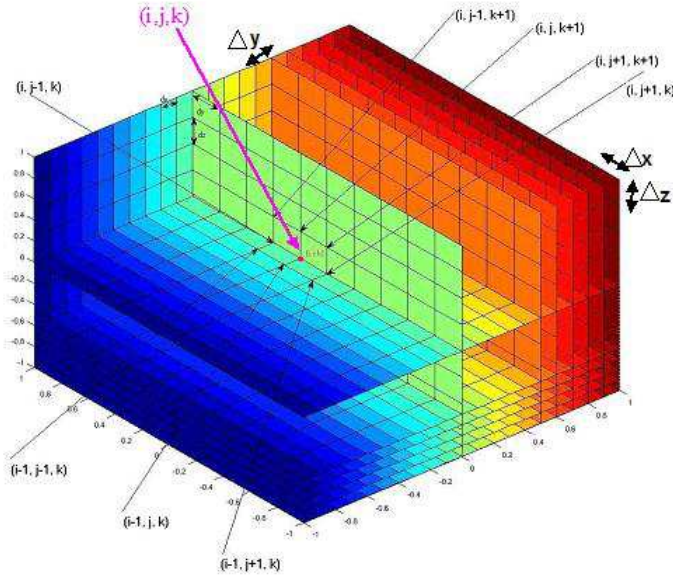


FIG. 1.3 – Discrétisation en espace.

On en déduit l'approximation d'ordre deux :

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{x}_{ijk}, t^n)}{\partial t^2} \simeq \frac{u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (1.46)$$

En procédant de façon similaire pour la discrétisation en espace, on obtient aussi :

$$\Delta u(\mathbf{x}_{ijk}, t^n) \simeq \frac{(u_{i+1jk}^n + u_{ij+1k}^n + u_{ijk+1}^n) - 6u_{ijk}^n + (u_{i-1jk}^n + u_{ij-1k}^n + u_{ijk-1}^n)}{\Delta h^2} \quad (1.47)$$

en posant  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta h$ . On a supposé ici que la grille est uniforme dans toutes les directions.

On obtient alors le schéma à 7 points suivant :

$$u_{ijk}^{n+1} = 2u_{ijk}^n - u_{ijk}^{n-1} + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta h^2} (u_{i+1jk}^n + u_{ij+1k}^n + u_{ijk+1}^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta h^2} (-6u_{ijk}^n + (u_{i-1jk}^n + u_{ij-1k}^n + u_{ijk-1}^n)). \quad (1.48)$$

Remarques :

1. Il est aussi possible d'exprimer le champ d'ondes au temps  $n - 1$  en fonction de celui aux temps  $n$  et  $n + 1$ . C'est ce schéma que l'on utilisera, plus tard, pour la Reverse Time Migration.



Ordre	$a_0$	$a_{\pm 1}$	$a_{\pm 2}$	$a_{\pm 3}$	$a_{\pm 4}$	$a_{\pm 5}$	$a_{\pm 6}$	$a_{\pm 7}$
2	-2	1						
4	$-\frac{5}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{12}$					
6	$-\frac{49}{18}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{20}$	$\frac{1}{90}$				
8	$-\frac{205}{72}$	$\frac{8}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{8}{315}$	$-\frac{1}{560}$			
14	$-\frac{266681}{88200}$	$\frac{7}{4}$	$-\frac{7}{24}$	$\frac{7}{108}$	$-\frac{7}{528}$	$\frac{7}{3300}$	$-\frac{7}{30888}$	$\frac{1}{84084}$

TAB. 1.1 – Coefficients du schéma en espace selon l'ordre p.

2. Des schémas d'ordre plus élevé peuvent être utilisés pour plus de précision. La formule générale de (1.47) est :

$$\Delta u(\mathbf{x}_{ijk}, t^n) \simeq \frac{\sum_{l=-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} a_l (u_{i+ljk}^n + u_{ij+lk}^n + u_{ijk+l}^n)}{\Delta h^2} \quad (1.49)$$

où  $p$  est l'ordre du schéma numérique et  $(a_l)_{-\frac{p}{2} \leq l \leq \frac{p}{2}}$  les coefficients donnés dans le tableau 1.1.

En théorie, tous ces schémas sont d'autant plus exacts que  $\Delta t$  et  $\Delta h$  sont petits et la stabilité n'est garantie que sous une condition CFL (Courant-Friedrich-Lévy) du type :  $\Delta t \leq \alpha_p \frac{\Delta x}{c}$  où  $\alpha_p$  est une constante liée au schéma et aux maillages. Toutefois, en raffinant trop les pas de temps par rapport aux pas d'espace, on peut observer que l'erreur numérique augmente, ce qui vient contredire la théorie. On parle alors de dispersion numérique.

Le schéma aux différences finies (1.48) permet d'exprimer le champ d'ondes numérique à un instant  $t$  donné, dans tout l'espace considéré. On peut aussi choisir de propager une onde pas à pas en profondeur c'est-à-dire que l'on va calculer le champ d'ondes à une profondeur  $z$  donnée, pour tous les pas de temps. Cette approche, moins naturelle que la première, est fondamentale en imagerie. En identifiant la variable profondeur à la variable temps ("k+1" remplace "n+1"), et en appliquant la même démarche que pour le schéma

précédent on obtient :

$$\begin{aligned}
u_{ijk+1}^n = & - (u_{i+1jk}^n + u_{ij+1k}^n + u_{i-1jk}^n + u_{ij-1k}^n + u_{ijk-1}^n) \\
& + 6u_{ijk}^n + \frac{\Delta x^2}{c^2 \Delta t^2} (u_{ijk}^{n+1} - 2u_{ijk}^n + u_{ijk}^{n-1}).
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Ici, on calcule le champ d'ondes à la profondeur  $k+1$  en fonction de ses valeurs estimées aux profondeurs  $k$  et  $k-1$ . Pour la rétro-propagation il suffit de modifier (1.50) pour calculer  $u_{ijk-1}^n$  en fonction des autres termes.

### 1.1.5 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est une méthode d'approximation qui repose, comme la méthode des différences finies, sur des grilles mais celles-ci ne sont pas nécessairement uniformes. On a donc une plus grande flexibilité et on peut, avec éventuellement une étape longue dédiée à la construction du maillage, espérer reproduire précisément la topographie du domaine de propagation. Une des caractéristiques de la méthode des éléments finis est de reposer sur une formulation variationnelle du problème. Supposons pour fixer les idées que le domaine de calcul, noté  $\Omega$ , est un borné de frontière  $\Gamma$  régulière. On considère le cas d'une cavité parfaitement conductrice, ce qui se traduit par la condition aux limites :  $u = 0$  sur  $]0, T_f[ \times \Gamma$  où  $T_f$  désigne le temps de simulation.

Si l'on suppose que  $u$  est assez régulière, en multipliant l'équation des ondes par une fonction  $\varphi \in H_0^1(\Omega)$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient la formulation variationnelle : trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u \varphi \, dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = 0, \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega). \tag{1.51}$$

Définissons maintenant un espace d'approximation : on cherche une approximation de  $u(\cdot, t)$  solution de (1.1) dans l'espace :

$$V^h := \{v \in C^0 \cap H_0^1(\Omega) : v|_K \in P^k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\} \tag{1.52}$$

où  $\mathcal{T}_h$  est un découpage de  $\Omega$  en éléments  $K$  (triangles, quadrangles à 2D, tétraèdres, hexaèdres à 3D) et  $P^k(K)$  est l'espace des polynômes de degré  $k$  sur  $K \in \mathcal{T}_h$ .

Le problème approché de (1.1) est alors : trouver  $u_h : ]0, T_f[ \times V^h \rightarrow \mathbb{R}$  tel que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} u_h \varphi_h \, dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx = 0, \quad \forall \varphi_h \in V^h(\Omega). \tag{1.53}$$

On note  $\mathbf{x}_i$  les noeuds du maillage pour  $1 \leq i \leq n$ . Soit  $\{v_i, 1 \leq i \leq n\}$  une base de  $V^h$  telle que  $v_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}$ . On cherche  $u_h \in V^h$  sous la forme :

$$u_h(\mathbf{x}, t) = \sum_{j=1}^n u_{h,j} v_j(\mathbf{x}).$$

On obtient alors :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^n u_{h,j} v_j \right) v_i dx + \int_{\Omega} c^2 \nabla \left( \sum_{j=1}^n u_{h,j} v_j \right) \cdot \nabla v_i dx = 0, \quad \forall v_i, 1 \leq i \leq n \quad (1.54)$$

et (1.54) est équivalent au système :

$$\mathcal{M} \frac{d^2 U_h}{dt^2} + \mathcal{K} U_h = 0 \quad (1.55)$$

où

- $U_h$  est le vecteur dont les composantes sont  $(u_{h,j})_{1 \leq j \leq n}$  ;
- la matrice  $\mathcal{M}$  est classiquement appelée matrice de masse. Elle a pour coefficients  $\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} v_i v_j dx$  et est donc symétrique ;
- la matrice  $\mathcal{K}$ , qui est appelée matrice de rigidité et qui a pour coefficients  $\mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} c^2 \nabla v_i \cdot \nabla v_j dx$ , est aussi symétrique.

La propagation des ondes se fait souvent dans des domaines dont la géométrie est complexe et aussi dont les propriétés physiques varient de telle sorte qu'un maillage structuré peut ne pas être adapté. Les éléments finis autorisent une géométrie théoriquement arbitraire (avec toutefois une restriction importante en pratique : il faut être capable de créer le maillage du domaine considéré, ce qui peut être difficile, en particulier en dimension trois). Ils permettent également de prendre en compte des variations parfois brutales des coefficients physiques. Le revers de la médaille est un coût supplémentaire par rapport aux méthodes de différences finies.

Un autre aspect lié au problème est le caractère non borné ou très grand du milieu de propagation. Le paramètre le plus important à considérer est la longueur d'onde qui peut être fixée par la source ou la condition initiale. Des domaines de quelques dizaines de longueurs d'onde sont un minimum pour représenter correctement les phénomènes. On entrevoit ainsi qu'un modèle typique aura environ plusieurs centaines de points dans chaque dimension, soit plusieurs millions de degrés de libertés en dimension trois.

Enfin, la simulation dans un domaine de grande taille requiert souvent des temps longs de calcul et conserver la précision aux temps longs demande un maillage (spatial et temporel) plus précis. Une technique pour remédier à cela est de monter en ordre d'approximation. Les schémas d'évolution temporelle les plus couramment employés pour la propagation des ondes sont explicites et ne demandent donc pas d'inversion de systèmes linéaires. Cependant, une difficulté particulière des éléments finis est que les éléments finis de Lagrange usuels conduisent à des matrices de masse pleines, qu'il faudra donc inverser. Une alternative consiste à utiliser la technique de condensation de masse (ou mass-lumping) qui permet d'approcher la matrice  $\mathcal{M}$  par une matrice diagonale en calculant ses coefficients par une formule de quadrature s'appuyant sur des noeuds correspondant exactement aux noeuds

du maillage. Dans le cas des éléments finis de Lagrange d'ordre  $l \geq 2$ , cette technique a pour conséquence de pénaliser l'ordre de convergence car les formules de quadrature adaptées sont d'ordre plus bas que la méthode d'éléments finis. En revanche, la méthode des éléments finis spectraux [7, 8] et de Galerkin discontinue avec pénalité intérieure [9] ont pour avantage de faire intervenir des matrices de masse diagonale (ou diagonale par blocs) par construction. L'ordre de convergence des méthodes est donc préservé. Nous étudierons plus en détails ces deux méthodes dans les chapitres 2 et 3 de ce mémoire.

## 1.2 La migration profondeur

Le principe de l'imagerie sismique repose sur deux étapes. La première, qui consiste à déterminer le champ de vitesse, est importante car l'efficacité des méthodes de propagation vues précédemment dépend de la précision du modèle de vitesse utilisé. En général le modèle de vitesse est obtenu après la tomographie en temps de trajet qui repose sur l'inversion des temps de trajets enregistrés lors de la campagne d'acquisition. Nous renvoyons à Bishop [33] et sa bibliographie pour plus de détails. La seconde étape est l'étape de migration. La migration peut être une migration temps pour laquelle l'image finale sera obtenue en fonction du temps ou une migration profondeur pour laquelle on aura une image en profondeur. Dans la migration temps, le modèle de vitesse doit varier lentement et c'est pourquoi elle est utilisée pour des bassins sédimentaires ou pour pointer le fond de l'eau lors des migrations marines. En revanche, lorsque l'on se trouve dans des régions complexes (failles pentées, fortes variations de vitesse, présence d'intrusions salines), la migration temps n'est plus assez efficace et l'on doit effectuer une migration profondeur. A l'heure actuelle, la baisse des réserves pousse les compagnies pétrolières à explorer des régions plus complexes pour lesquelles la migration profondeur est la plus adaptée et c'est pour cela que la suite de ce paragraphe sera consacrée à des méthodes de migration profondeur.

Il existe plusieurs techniques de migration qui peuvent être classées en deux grandes familles. On distingue les méthodes de migration de Kirchhoff et celles dites par équation d'ondes. En réalité, elles sont toutes basées sur l'équation des ondes et ne diffèrent que par l'approximation utilisée pour la résoudre.

### 1.2.1 La migration de Kirchhoff

La migration de Kirchhoff est basée sur la théorie des fonctions de Green et sur la solution intégrale de Kirchhoff de l'équation des ondes.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 1.1.2, la propagation vers le bas d'une source  $S$  de la forme  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s})$  peut s'écrire de la façon suivante :

$$U^{inc}(\mathbf{x}, \omega) \approx G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s}) = G(\mathbf{s}, \omega; \mathbf{x}) = C(\omega)A(\mathbf{s}, \mathbf{x})e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})}, \quad (1.56)$$

où  $U^{inc}(\mathbf{x}, \omega)$  représente le champ d'ondes incident,  $G(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s})$  est la fonction de Green au point  $\mathbf{x}$  causée par la source  $S$ ,  $T(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  est le temps de parcours mis par l'onde pour parcourir le trajet entre la source et le point  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  quelconque. Le terme  $A(\mathbf{s}, \mathbf{x})$  est l'amplitude de l'onde le long du rayon et  $C(\omega)$  la signature de la fonction qui dépend de la dimension de l'espace.

De plus, le champ d'ondes réfléchi sur une surface  $\Sigma$  et enregistré au niveau d'un récepteur  $\mathbf{r} = (x_r, y_r, z_r)$  peut s'écrire sous la forme :

$$U(\mathbf{x}, \omega) = \int_{\Sigma} U^{enr}(\mathbf{r}, \omega) \nabla G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{x}) \cdot \vec{\mathbf{n}} ds. \quad (1.57)$$

où  $U^{enr}(\mathbf{r}, \omega)$  est le champ d'ondes enregistré par un récepteur.

Si l'on considère le principe d'imagerie de Claerbout (1971), qui dit que :

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\omega} \frac{U(\mathbf{x}, \omega) U^{inc*}(\mathbf{x}, \omega)}{U^{inc}(\mathbf{x}, \omega) U^{inc*}(\mathbf{x}, \omega)}, \quad (1.58)$$

où  $R(\mathbf{x})$  est la réflectivité au point  $\mathbf{x}$ , on aboutit à l'équation de migration de Kirchhoff suivante :

$$R(\mathbf{x}) = \sum_{\omega} \sum_{x_s} \sum_{x_r} W \nabla G(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{x}) G^*(\mathbf{s}, \omega; \mathbf{x}) U^{enr}(\mathbf{r}, \omega) \quad (1.59)$$

avec  $W^{-1} = U^{inc} U^{inc*} = G(\mathbf{s}, \omega; \mathbf{x}) G^*(\mathbf{s}, \omega; \mathbf{x}) = |G_s|^2$ .

## 1.2.2 La migration par équation d'ondes

La migration par équation d'ondes se décompose en trois étapes :

1. la propagation du champ d'ondes généré par la source ;
2. la rétro-propagation du champ d'ondes enregistré par les réflecteurs ;
3. l'application d'une condition d'imagerie.

Le principe d'imagerie introduit par Claerbout en 1985 dit "*qu'une réflexion dans le sous-sol existe là où l'onde descendante coïncide en temps avec une onde montante*". L'outil mathématique le plus simple mettant en évidence cette coïncidence est le produit de corrélation.

On dénombre plusieurs méthodes de migration par équations d'ondes dont les principales sont détaillées dans la suite de cette section. Nous renvoyons le lecteur à [34] pour plus de détails sur ces méthodes.

### 1.2.2.1 Les migrations "one-way"

Les méthodes de migrations "one-way", comme leur nom l'indique, reposent sur l'équation (1.8). En effet, la première étape de la migration (i.e. la propagation de la source) est effectuée en résolvant l'équation one-way. Cela aboutit à :

$$U(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = U(k_x, k_y, z, \omega) e^{\sigma(\Theta)\Delta z}. \quad (1.60)$$

Dans la seconde étape, on doit effectuer la rétro-propagation du champ d'ondes enregistré au niveau des récepteurs. Ce champ correspond à des ondes se propageant du sous-sol vers la surface c'est-à-dire des ondes montantes. Cela revient alors à résoudre :

$$U(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = U(k_x, k_y, z, \omega) e^{-\sigma(\Theta)\Delta z}. \quad (1.61)$$

Pour obtenir l'image finale, on effectue la cross-corrélation des deux champs d'ondes ce qui dans le domaine fréquentiel revient à effectuer la multiplication du champ récepteur par le complexe conjugué du champ source. Ensuite, on somme sur toutes les fréquences puis sur les points de tirs.

Les deux premières étapes décrites ci-dessus peuvent être effectuées en utilisant les différentes méthodes du paragraphe (§§ 1.1.3), les migrations portant alors le même nom que la méthode de propagation correspondante.

### 1.2.2.2 La migration "two-way"

Dans cette méthode de migration aussi appelée Reverse Time Migration (RTM), on résout l'équation des ondes complète. Contrairement aux méthodes décrites précédemment, on ne propage pas le champ d'ondes par rapport à l'axe de la profondeur  $z$  mais par rapport à l'axe du temps  $t$ , c'est-à-dire, que l'on cherche quel est le champ d'ondes au temps  $t + \Delta t$  (ou  $t - \Delta t$ ) et non plus quel est le champ d'ondes à la profondeur  $z + \Delta z$  (ou  $z - \Delta z$ ).

La première étape de la migration consiste à créer le champ source en modélisant la propagation des ondes du temps  $t = 0$  au temps  $t = T_f$  où  $T_f$  est le temps de simulation. Le but de la seconde étape est de reconstruire le champ réfléchi par les réflecteurs qui a été enregistré au niveau des récepteurs. Pour cela, on doit effectuer une rétro-propagation des données des récepteurs. Or, la rétro-propagation peut être vue comme une propagation inverse, c'est à dire que l'on propage le champ enregistré par les récepteurs du temps  $t = T_f$  à  $t = 0$ . Cette équivalence est due au fait que l'équation des ondes est réversible en temps. Ensuite, dans la troisième étape, on fait la corrélation des deux champs pour tous les pas de temps. Une forte corrélation indique le lieu du réflecteur. En terme mathématique, la condition d'imagerie utilisée est :

$$I(x, y, z) = \int_0^{T_f} U_s(x, y, z, t) \cdot U_r(x, y, z, t) dt$$

où  $U_s$  et  $U_r$  sont respectivement le champ source propagé et le champ aux récepteurs retropropagé.

Pour résoudre l'équation two-way on peut utiliser des schémas aux différences finies (cf. §§ 1.1.4) ou bien des méthodes d'éléments finis (cf. §§ 1.1.5). Pendant de nombreuses années la RTM a été mise de côté en raison de son coût tant au niveau mémoire que temps de calcul. Aujourd'hui, grâce aux progrès de l'informatique et du calcul scientifique, elle est considérée comme la plus adaptée pour l'imagerie sismique.

## Chapitre 2

# La méthode de Galerkin discontinue avec pénalité intérieure

Les méthodes d'éléments finis sont des méthodes très efficaces pour l'approximation des équations aux dérivées partielles et elles ont l'avantage de s'appuyer sur des maillages dont la flexibilité permet de considérer des milieux dont la topographie est compliquée. Les approches les plus classiques font intervenir des approximations de Galerkin ce qui sous-entend que l'espace d'approximation est inclus dans l'espace des solutions. Avec [35], on a commencé à voir se développer les méthodes d'approximation de Galerkin discontinues pour lesquelles on utilise des espaces d'approximation plus grands. Cette stratégie a pour effet de diminuer le nombre de degrés de liberté par rapport à une approximation de Galerkin mais elle impose d'introduire des inconnues supplémentaires afin de restaurer les propriétés de continuité de la solution. L'intérêt de cette approche réside plutôt dans le fait qu'elle permet de faire des calculs localement ce qui conduit naturellement à la mise en oeuvre du calcul parallèle (voir par exemple [36] pour une mise en oeuvre pour les équations de Maxwell). Elles ont tout d'abord été introduites pour les équations hyperboliques puis appliquées aux équations elliptiques. La littérature fait état d'un nombre important de travaux sur le sujet et nous renvoyons au papier récent d'Arnold *et al.* [37] dans lequel on trouve une analyse mathématique générale des méthodes de Galerkin discontinues ainsi qu'une bibliographie détaillée.

Dans le cadre de cette thèse, nous avons choisi d'utiliser une méthode de type Galerkin discontinue qui fait intervenir un terme de pénalisation avec lequel on impose faiblement la continuité de la solution à la traversée de chaque élément intérieur. Pour cela, on utilise un espace d'approximation constitué de fonctions discontinues polynômiales par morceaux ce qui va faciliter en particulier l'adaptativité du maillage. La méthode que nous allons appliquer est appelée "Interior Penalty Discontinuous Galerkin Method" et par la suite, nous y ferons référence en utilisant l'acronyme IPDGM. Pour l'équation des ondes, elle a été étudiée par [38] où on y trouve notamment une analyse de la dispersion puis par [9] où on étudie plus particulièrement les propriétés de convergence. Très récemment, Grote et Schötzau [39] ont obtenu des résultats de stabilité en combinant la IPDGM avec un schéma



en temps “saute-mouton” d’ordre 2. Notre approche est différente de celle proposée par [36] pour les équations de Maxwell ou par [40] pour le système de l’élastodynamique écrit à l’ordre 1 car nous considérons une équation scalaire d’ordre 2 dans laquelle on doit contrôler la trace et la dérivée normale de la solution.

Dans la première section de ce chapitre, nous présentons de façon générale les méthodes de Galerkin discontinues et plus particulièrement celle que nous avons choisie à savoir la IPDGM. Ensuite, nous décrivons comment elle peut être appliquée à l’équation des ondes.

## 2.1 Les méthodes de Galerkin Discontinues (DG)

### 2.1.1 Notations et définitions

On considère un domaine convexe  $\Omega$ , un maillage  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  et les espaces d’éléments finis associés :

$$\begin{aligned} V^h &:= \{v \in L^2(\Omega) : v|_K \in P(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ \Sigma^h &:= \{\tau \in [L^2(\Omega)]^2 : \tau|_K \in \Sigma(K), \forall K \in \mathcal{T}_h\} \end{aligned} \quad (2.1)$$

où  $P(K) = P_p(K)$  est l’espace des polynômes de degré  $p \geq 1$  au moins dans  $K$  et  $\Sigma(K) = [P_p(K)]^2$ .

De plus, nous introduisons les notations :

- $H^l(\mathcal{T}_h)$  l’espace des fonctions dans  $\Omega$  dont la restriction sur  $K$  appartient à l’espace de Sobolev  $H^l(K)$ ,  $l \in \mathbb{N}$ . Les espaces d’éléments finis (2.1) sont alors des sous-espaces de  $H^l(\mathcal{T}_h)$  et  $[H^l(\mathcal{T}_h)]^d$  respectivement pour chaque  $l$ ;
- $v^\pm$  les traces d’une fonction  $v$  sur  $K^\pm$  dans  $H^1(\mathcal{T}_h)$ . Elles appartiennent à  $T(\Gamma) := \prod_{K \in \mathcal{T}_h} L^2(\partial K)$ , où  $\Gamma$  est l’union des faces de  $K \in \mathcal{T}_h$ . Les fonctions dans  $T(\Gamma)$  ont donc deux valeurs sur  $\Gamma^0 := \Gamma \setminus \partial\Omega$  et une valeur sur  $\partial\Omega$ ;
- $F_i$  une face interne associée à deux éléments  $K^+$  et  $K^-$  i.e  $F_i = \partial K^+ \cap \partial K^-$ ;
- $\mathcal{F}_i$  l’ensemble des faces internes ;
- $F_b$  une face frontière i.e  $F_b = \partial K \cap \partial\Omega$  ;
- $\mathcal{F}_b$  l’ensemble des faces frontières ;
- $\mathbf{n}^\pm$  les vecteurs normaux à  $K^\pm$ , orientés vers l’extérieur de  $K^\pm$ .

Pour chaque élément  $K$ , nous définissons :

- $h_K$ , le diamètre de  $K$  ;
- $\lambda_K$ , le diamètre maximum des sphères (ou cercle en 2D) contenues dans  $K$ .

Nous notons  $h = \min_K h_K$  le diamètre du plus petit élément du maillage. Nous supposons de plus qu’il existe une constante  $\sigma \geq 1$  telle que :

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\lambda_K} \leq \sigma.$$

Cette dernière condition nous impose de choisir des éléments qui ne sont pas trop aplatis.

Nous définissons ensuite le saut et la moyenne de  $q \in T(\Gamma)$ ,  $x \in F_i$  par :

$$[[q]] = q^+ \mathbf{n}^+ + q^- \mathbf{n}^- \quad \text{et} \quad \{\{q\}\} := (q^+ + q^-) / 2. \quad (2.2)$$

Pour  $x \in F_b$ , on note  $[[q]] := q\mathbf{n}$  et  $\{\{q\}\} := q$ , où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à  $F_b$ .

De la même façon, nous définissons le saut et la moyenne d'un vecteur  $\phi \in [T(\Gamma)]^2$  par :

- $[[\phi]] := \phi^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \phi^- \cdot \mathbf{n}^-$  et  $\{\{\phi\}\} := (\phi^+ + \phi^-) / 2$  pour  $x \in F_i$ ;
- $[[\phi]] := \phi \cdot \mathbf{n}$  et  $\{\{\phi\}\} := \phi$  pour  $x \in F_b$ .

Nous définissons aussi l'espace  $V(h) = V^h + H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H^2(\mathcal{T}_h)$ . Les semi-normes et les normes associées sont définies pour  $v \in V(h)$  par :

$$\begin{aligned} |v|_{1,h}^2 &= \sum_K |v|_{1,K}^2, \quad |v|_*^2 = \sum_{e \in \mathcal{E}_h} \|r_e([v])\|_{0,\Omega}^2, \\ |||v|||^2 &= |v|_{1,h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |v|_{2,K}^2 + |v|_*^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $r_e : [L^1(e)]^2 \rightarrow \Sigma^h$  est donné par :

$$\int_{\Omega} r_e(\phi) \cdot \tau \, dx = - \int_e \phi \cdot \{\tau\} \, ds, \quad \forall \tau \in \Sigma^h, \phi \in [L^1(e)]^2.$$

### 2.1.2 Le problème

Nous reprenons ici la même présentation que dans [37] que nous appliquons au problème :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $\Omega$  est un domaine convexe et  $f$  une fonction de  $L^2(\Omega)$ .

Nous avons choisi de considérer (2.4) car l'équation en volume correspond à la version stationnaire de l'équation des ondes (1.1) et on va donc ainsi décrire complètement les aspects liés à la discrétisation en espace. Pour  $f \in L^2(\Omega)$ , on peut montrer, en appliquant par exemple le théorème de Lax-Milgram, que le problème (2.4) admet une unique solution dans  $H_0^1(\Omega)$ . De plus, d'après la régularité intérieure des solutions de problèmes elliptiques, nous savons que  $u$  est  $C^\infty(\Omega)$  en supposant que  $\rho$  est  $C^\infty(\Omega)$ . On en déduit donc que  $u$  vérifie les conditions de transmission :

$$[[u]] = 0 \quad \text{et} \quad \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla u \right] \right] = 0.$$

En multipliant (2.4) par une fonction test  $v_h \in V^h$  et en intégrant sur  $K$ , on obtient :

$$\int_K \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla v_h - \int_{\partial K} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot n v_h = \int_K f v_h, \quad (2.5)$$

soit, en additionnant l'équation précédente pour tous les éléments  $K$  :

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot \nabla_h v_h - \int_{\Gamma} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] = \int_{\Omega} f v_h \quad (2.6)$$

où  $\nabla_h v$  est la fonction dont chaque restriction à chaque élément  $K \in \mathcal{T}_h$  est égale à  $\nabla v$ .

En utilisant les relations  $\int_{F_b} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] = \int_{F_b} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \right] \right] \{ \{ v_h \} \}$  et

$$\int_{F_i} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] = \int_{F_i} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \right] \right] \{ \{ v_h \} \} + \int_{F_i} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \right\} \right\} \llbracket v_h \rrbracket, \text{ on obtient :}$$

$$a(u, v_h) = \int_{\Omega} f v_h \quad (2.7)$$

$$\text{avec } a(u, v_h) = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot \nabla_h v_h - \int_{\Gamma} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \right] \right] \{ \{ v_h \} \} - \int_{\Gamma_0} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \right\} \right\} \llbracket v_h \rrbracket.$$

Nous n'utilisons pas la forme bilinéaire  $a$  pour résoudre (2.4) mais son approximation  $a_h$  définie de  $V^h \times V^h \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) : &= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h dx \\ &+ \int_{\Gamma} \left( \llbracket \hat{u}(u_h) - u_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h v_h \right\} \right\} - \left\{ \left\{ \hat{\sigma} \left( u_h, \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right) \right\} \right\} \cdot \llbracket v_h \rrbracket \right) ds \\ &+ \int_{\Gamma_0} \left( \{ \{ \hat{u}(u_h) - u_h \} \} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h v_h \right] \right] - \left[ \left[ \hat{\sigma} \left( u_h, \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right) \right] \right] \{ \{ v_h \} \} \right) ds \end{aligned} \quad (2.8)$$

où  $\hat{u} : H^l(\mathcal{T}_h) \rightarrow T(\Gamma)$  et  $\hat{\sigma} : (H^l(\mathcal{T}_h))^d \rightarrow (T(\Gamma))^d$  représentent respectivement des flux numériques scalaires et vectoriels et sont des approximations de  $u$  et  $\nabla u$  sur  $\Gamma$ . Dans le cas classique d'une approximation de Galerkin standard, l'espace d'approximation est constitué de fonctions globalement continues. Ainsi, en prenant pour flux  $u_h$  et  $\frac{1}{\rho} \nabla_h u_h$ , on retrouve que  $a_h$  coïncide avec la forme bilinéaire classique (2.7).

Le problème approché s'écrit alors : trouver  $u_h \in V^h$  tel que,  $\forall v_h \in V^h$  :

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} f v_h. \quad (2.9)$$

C'est le choix des flux numériques qui détermine la méthode DG utilisée. Nous ne détaillons pas ici les différents choix possibles (nous renvoyons pour cela à [37]) mais nous présentons les propriétés qu'ils doivent vérifier pour garantir la convergence et la stabilité de la méthode.

**Définition 2.1.1.** On dit que les flux numériques sont consistants si

$$\hat{u}(v) = v|_{\Gamma}, \quad \hat{\sigma}(v, \frac{1}{\rho} \nabla_h v) = \frac{1}{\rho} \nabla v|_{\Gamma}, \quad (2.10)$$

quelle que soit  $v$  une fonction de  $V^h$  satisfaisant les conditions de bords de Dirichlet et les conditions de transmission.

**Définition 2.1.2.** On dit que les flux numériques sont conservatifs si  $\hat{u}(\cdot)$  et  $\hat{\sigma}(\cdot, \cdot)$  sont déterminés de manière unique sur  $\Gamma$ .

**Définition 2.1.3.** Si  $\hat{\sigma}\left(u_h, \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h\right)$  est de la forme  $\hat{\sigma}_1\left(\frac{1}{\rho} \nabla_h u_h\right) - \gamma [[u_h]]$ , où  $\gamma : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  est donné par  $\eta_e h_e^{-1}$  sur chaque face,  $\eta_e > 0$ , la méthode DG sera dite méthode avec pénalisation intérieure.

### 2.1.3 Linéarité, coercivité et ordre d'approximation

**Propriété 2.1.4.** La forme bilinéaire  $a_h$  est bornée par :

$$a_h(w, v) \leq C_b |||w||| |||v|||, \quad \forall w, v \in V(h), \quad (2.11)$$

où la constante  $C_b$  ne dépend que de l'angle minimum de la décomposition  $\mathcal{T}_h$ , du degré des polynômes  $p$  (et de la constante de majoration de la fonction de pénalité pour les méthodes avec pénalisation intérieure).

**Propriété 2.1.5.** Propriété de coercivité ou de stabilité.

Les méthodes avec pénalisation vérifient :

$$a_h(v, v) \geq C_s |||v|||^2, \quad \forall v \in V^h, \quad (2.12)$$

pour  $\gamma$  suffisamment grand. La constante  $C_s$  est positive.

**Propriété 2.1.6.** Nous choisissons un interpolant continu aux interfaces des éléments. Il vient alors directement de (2.3) que :

$$|||u - u_I|||^2 = |u - u_I|_{1,h}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |u - u_I|_{2,K}^2 \leq C_a^2 h^{2p} |u|_{p+1,\Omega}^2. \quad (2.13)$$

Nous renvoyons à [37] pour les démonstrations de ces différentes propriétés.

### 2.1.4 Consistance et ordre d'approximation

**Définition 2.1.7.** La méthode est consistante si les flux sont consistants. On a alors  $a_h(u, v_h) = a(u, v_h)$ ,  $\forall v_h \in V^h$  et pour toute fonction  $u$  de  $V^h$  vérifiant les conditions de Dirichlet et de transmission.

**Définition 2.1.8.** La méthode est adjoint-consistante si les flux sont conservatifs. On a alors  $a_h(v_h, u) = a(u, v_h)$ ,  $\forall v_h \in V^h$  et pour toute fonction  $u$  de  $V^h$  vérifiant les conditions de Dirichlet et de transmission.

**Propriété 2.1.9.** Les méthodes qui sont consistantes, adjoint-consistantes et coercives convergent avec l'ordre optimal pour la norme  $||| \cdot |||$  :

$$|||u - u_h||| \leq Ch^p |u|_{p+1, \Omega} \quad (2.14)$$

et pour la norme  $L^2$  :

$$||u - u_h||_{0, \Omega} \leq Ch^{p+1} |u|_{p+1, \Omega}. \quad (2.15)$$

Nous renvoyons à [37] pour la démonstration de cette propriété.

**Remarque** Pour les autres méthodes c'est-à-dire les méthodes qui ne sont pas consistantes, il faut utiliser une procédure de superpénalité, c'est-à-dire ajouter un terme de pénalisation et considérer une nouvelle norme prenant en compte ce terme pour obtenir l'ordre optimal.

### 2.1.5 Choix de la méthode DG appropriée

Nous avons choisi de considérer des flux de la forme :

$$\hat{u} = \{\{u_h\}\} \text{ sur } \Gamma^0, \quad \hat{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \quad \text{et} \quad \hat{\sigma} = \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right\} \right\} - \gamma \llbracket u_h \rrbracket \text{ sur } \Gamma,$$

La fonction  $\gamma$  pénalise les sauts de  $u_h$  et  $v_h$  sur les arêtes (ou faces) de  $\mathcal{T}_h$  et est appelée fonction de pénalisation intérieure. Elle est définie sur chaque face  $F \in \mathcal{F}_h = \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_b$  par :

$$\gamma|_F := \alpha c_{max} h_{min}^{-1}, \quad (2.16)$$

où  $\alpha$  est un paramètre positif indépendant du maillage et du coefficient  $c_{max}$  défini pour  $x \in F$ , par :

$$c_{max|F}(x) = \begin{cases} \max(c_{|K^+}(x), c_{|K^-}(x)) & , \quad F \in \mathcal{F}_i, \quad F = \partial K^+ \cap \partial K^- \\ c_{|K}(x) & , \quad F \in \mathcal{F}_b, \quad F = \partial K \cap \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.17)$$

La fonction  $h_{min}$  est définie par :

$$h_{min|F} = \begin{cases} \min(h_{K^+}, h_{K^-}) & , \quad F \in \mathcal{F}_i, \quad F = \partial K^+ \cap \partial K^- \\ h_K & , \quad F \in \mathcal{F}_b, \quad F = \partial K \cap \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.18)$$

Notons aussi que pour assurer la coercivité de  $\gamma$ , il faut que :

$$\alpha > \frac{1}{2}p(p+1) \quad (2.19)$$

comme cela a été démontré dans [38].

On vérifie facilement que ces flux sont consistants et conservatifs. Le flux  $\hat{\sigma}$  contenant un terme de pénalisation, la forme bilinéaire  $a_h$  est coercive (cf. propriété 2.1.5), consistante (cf. définition 2.1.7), adjoint-consistante (cf. définition 2.1.8) et est définie par :

$$a_h(u_h, v) = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v \, dx - \int_{\Gamma} \left( \llbracket u_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h v \right\} \right\} + \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right\} \right\} \cdot \llbracket v \rrbracket \right) ds + \beta(u_h, v), \quad (2.20)$$

où

$$\beta(u_h, v) = \int_{\Gamma} \gamma \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v \rrbracket \, ds$$

est le terme de pénalité intérieure. De plus, la convergence de la solution est optimale (cf. propriété 2.1.9).

Cette méthode est appelée méthode IPDG (Interior Penalty Discontinuous Galerkin), elle a été introduite dans [41] pour la résolution de problèmes elliptiques et paraboliques et appliquée à l'équation des ondes par Ainsworth, Monk et Muniz [38] qui ont effectué l'analyse de dispersion puis par Grote, Schneebeli et Schötzau [9] qui ont prouvé sa convergence optimale.

## 2.2 IPDG appliquée à l'équation des ondes

Nous allons maintenant appliquer la méthode IPDG, référencée par la suite par IPDGM, au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right) = f & \text{dans } \Omega \times I \\ u(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_N \\ \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Gamma_{abs} \end{array} \right. \quad (2.21)$$

où  $I = ]0, T[$  est un intervalle de temps fini,  $f$  est une fonction de  $C^0(]0, T[, L^2(\Omega))$  et  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_{abs}$ . Le paramètre  $\rho$  est la densité du milieu et  $\mu$  est le module de compressibilité. On impose une condition de Dirichlet sur  $\Gamma_D$ , une condition de Neumann sur  $\Gamma_N$  et la plus simple des conditions aux limites absorbantes sur  $\Gamma_{abs}$ . Les conditions de

bord imposées dans le problème (2.21) peuvent s'écrire de façon plus générale :

$$\nu \frac{\partial u}{\partial t} + \zeta \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{sur} \quad I \times \partial\Omega$$

avec  $\nu = 0$  sur  $\Gamma_N$ ,  $\zeta = 0$  sur  $\Gamma_D$  et sur  $\Gamma_{abs}$ ,  $\nu = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$  et  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$ . On peut alors démontrer, en appliquant par exemple, la méthode des semi-groupes, que  $\forall f \in C^0([0, T[, L^2(\Omega))$ , le problème (2.21) admet une unique solution  $u$  telle que  $u \in C^0([0, T[, H^1) \cap C^1([0, T[, L^2)$ .

### 2.2.1 Discrétisation en espace

On multiplie la première équation de (2.21) par une fonction test  $v_h$  de  $V^h$ , on intègre sur  $K$  et on somme sur tous les éléments  $K$  pour obtenir :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} uv_h dx &+ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot \nabla_h v_h dx - \int_{\Gamma^0} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] - \int_{\Gamma_D} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] \\ &- \int_{\Gamma_N} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] - \int_{\Gamma_{abs}} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] = \int_{\Omega} f v_h. \end{aligned} \quad (2.22)$$

En utilisant les conditions  $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_{abs}$  et  $\nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_N$  on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} uv_h dx &+ \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} uv_h ds + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot \nabla_h v_h dx \\ &- \int_{\Gamma_D} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] - \int_{\Gamma^0} \left[ \left[ \frac{1}{\rho} \nabla_h u \cdot n v_h \right] \right] = \int_{\Omega} f v_h dx. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En utilisant les flux associés à la IPDGM, on obtient la formulation variationnelle :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} uv_h dx + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} uv_h ds + a_h(u_h, v_h), \quad (2.24)$$

où  $a_h$  est définie sur  $V^h \times V^h$  par :

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &:= \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h dx - \int_{\Gamma^0} \llbracket u_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h v_h \right\} \right\} ds - \int_{\Gamma^0} \llbracket v_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right\} \right\} ds \\ &+ \int_{\Gamma^0} \gamma \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v_h \rrbracket ds - \int_{\Gamma_D} \llbracket u_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h v_h \right\} \right\} ds \\ &- \int_{\Gamma_D} \llbracket v_h \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho} \nabla_h u_h \right\} \right\} ds + \int_{\Gamma_D} \gamma \llbracket u_h \rrbracket \cdot \llbracket v_h \rrbracket ds. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Nous supposons que la triangulation  $\mathcal{T}_h$  est composée de  $N_e$  éléments et nous notons  $K_m$  le  $m^{\text{ième}}$  élément de  $\mathcal{T}_h$ . Nous appelons élément de référence  $\hat{K}$  le segment  $[0, 1]$  en 1D, le triangle de sommet  $\hat{S}_1(0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1)$  en 2D ou le tétraèdre de sommet  $\hat{S}_1(0, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1, 0)$ ,  $\hat{S}_4(0, 0, 1)$ . Pour définir une base de  $V^h$ , on considère tout d'abord les fonctions de Lagrange  $(\hat{\varphi}_k)_{k=1, \dots, N_{fb}}$  de degré  $p$  qui forment une base de  $P_p(\hat{K})$ , où  $N_{fb}$  dépend à la fois de  $p$  et  $d$ . Nous définissons  $\Upsilon = \left\{ (\varphi_j)_{j=1, \dots, N_e * N_{fb}} \right\}$  l'ensemble des fonctions telles que :

$$\begin{cases} \varphi_{j|K_m} = \hat{\varphi}_k \circ F_{K_m}^{-1}, & j = N_{fb}(m-1) + k, \quad 1 \leq k \leq N_{fb} \\ \varphi_{j|K_n} = 0 & \text{si } n \neq m \end{cases} \quad (2.26)$$

où  $F_K$  est l'application vectorielle qui transforme l'élément de référence  $\hat{K}$  en l'élément  $K$ . De la même façon que pour une méthode d'éléments finis classique, on effectue la décomposition de  $u_h$  sur la base  $\Upsilon$  et on obtient le système linéaire :

$$\mathcal{M} \frac{d^2 U_h}{dt^2} + \mathcal{B} \frac{d U_h}{dt} + \mathcal{K} U_h = \mathcal{F}_h \quad (2.27)$$

où

- $U_h$  est le vecteur formé par les composantes de  $u_h$  dans la base  $\Upsilon$  ;
- la matrice  $\mathcal{M}$  est la matrice de masse diagonale par blocs. Elle a pour coefficients  $\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \varphi_i \varphi_j dx$  ;
- la matrice  $\mathcal{B}$  est nulle partout sauf pour les éléments de  $\Gamma_{abs}$  et est associée à la forme bilinéaire  $b_h$ . Elle a pour coefficients  $\mathcal{B}_{ij} = \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \varphi_i \varphi_j ds$  ;
- la matrice  $\mathcal{K}$  est la matrice de rigidité, symétrique associée à la forme bilinéaire  $a_h$ . Elle a pour composantes  $\mathcal{K}_{ij} = a_h(\varphi_i, \varphi_j)$  ;
- $\mathcal{F}_h$  est le vecteur source de composantes  $\mathcal{F}_i = \int_{\Omega} f \varphi_i dx$ .

Pour finir, on calcule les coefficients des matrices par intégration numérique exacte pour les polynômes de degré inférieur ou égal à  $p^2$ .

## 2.2.2 Discrétisation en temps

Considérons maintenant la question de la discrétisation en temps de l'équation (2.21). La construction du schéma en temps d'ordre 2 repose sur des développements de Taylor d'ordre 3 ou 4 selon que l'on considère la dérivée d'ordre 1 ou la dérivée d'ordre 2. Plus précisément, on a : il existe  $\xi_1 \in ]t - \Delta t, t + \Delta t[$  tel que :

$$\frac{\partial u_{h,i}(t)}{\partial t} = \frac{u_{h,i}(t + \Delta t) - u_{h,i}(t - \Delta t)}{2\Delta t} - \frac{\Delta t^2}{12} \frac{\partial^3 u_{h,i}(\xi_1)}{\partial t^3}$$



et il existe  $\xi_2 \in ]t - \Delta t, t + \Delta t[$  tel que :

$$\frac{\partial^2 u_{h,i}(t)}{\partial t^2} = \frac{u_{h,i}(t + \Delta t) - 2u_{h,i}(t) + u_{h,i}(t - \Delta t)}{\Delta t^2} - \frac{\Delta t^2}{24} \frac{\partial^4 u_{h,i}(\xi_2)}{\partial t^4}.$$

On a donc :

$$\frac{\partial u_{h,i}(t^n)}{\partial t} \simeq \frac{u_{h,i}^{n+1} - u_{h,i}^{n-1}}{2\Delta t} \quad (2.28)$$

où  $t_n = n\Delta t$  et  $u_{h,i}^n$  représente l'approximation de  $u_{h,i}(t^n)$  et

$$\frac{\partial^2 u_{h,i}(t^n)}{\partial t^2} \simeq \frac{u_{h,i}^{n+1} - 2u_{h,i}^n + u_{h,i}^{n-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.29)$$

Le schéma en temps et en espace que nous utilisons est alors :

$$\mathcal{M} \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{B} \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\Delta t} = -\mathcal{K}U_h^n + \mathcal{F}_h \quad (2.30)$$

soit encore,

$$\left( I + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B} \right) U_h^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} - \Delta t^2 \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}U_h^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B}U_h^{n-1} + \mathcal{M}^{-1} \mathcal{F}_h \quad (2.31)$$

où  $U_h^n$  représente l'approximation de  $U_h(t^n)$ .

Ce schéma est stable sous une condition CFL qui dépend du paramètre de pénalisation  $\gamma$ . Nous renvoyons par exemple à [39].

## Chapitre 3

# Validation et analyse de performance de la IPDGM

Dans ce chapitre, nous considérons le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left( \frac{1}{\rho} \nabla u \right) = S & \text{dans } \Omega \times I \\ u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times I \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma \times I \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $I = ]0, T[$  est un intervalle de temps fini et  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2, 3$ .  $S$  est un terme source,  $u_0$  et  $u_1$  sont les conditions initiales. Le paramètre  $\rho$  est la densité du milieu et  $\mu$  est le module de compressibilité. De plus,  $\mu = \rho c^2$ ,  $c$  désignant la vitesse de propagation des ondes. On impose une condition de bord de Dirichlet sur une partie de la frontière  $\Gamma_D$ . Le bord  $\Gamma = \partial\Omega \setminus \Gamma_D$  peut être composé de plusieurs morceaux sur lesquels on impose des conditions aux limites différentes. Par exemple, pour le domaine représenté sur la figure 3.1,  $\Gamma = \Gamma_N \cup \Gamma_{abs}$  et le champ d'ondes vérifie une condition de Neumann ( $u \cdot \mathbf{n} = 0$ ) sur  $\Gamma_N$  et une condition absorbante  $\left( \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0 \right)$  sur  $\Gamma_{abs}$ , le vecteur  $\mathbf{n}$  étant la normale extérieure à  $\Omega$ .

L'objectif de ce chapitre est d'analyser la performance de la IPDGM présentée dans le chapitre précédent. Pour cela, nous la comparons avec trois autres méthodes. La première est la méthode GSP dont nous avons parlé au chapitre 1 (§§ 1.1.3.7). Il s'agit d'une méthode asymptotique dont le principal avantage est de calculer la solution propagée très rapidement. La seconde est la méthode des différences finies (FDM) (chapitre 1, §§ 1.1.4) qui est encore à l'heure actuelle la méthode la plus utilisée dans l'ingénierie pétrolière. La troisième est une autre méthode d'éléments finis que nous présentons plus en détail dans

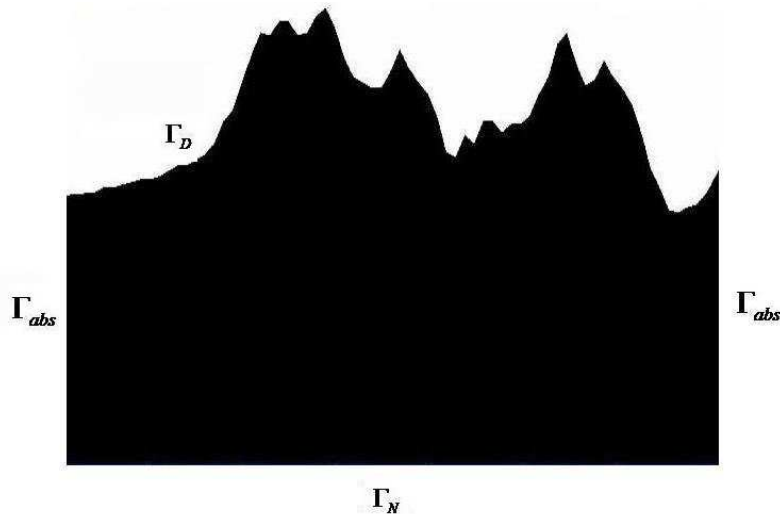


FIG. 3.1 – Exemple de domaine utilisé.

la deuxième section et que nous avons choisie car elle a déjà été appliquée avec succès à la propagation d'ondes [3, 4, 7].

Le modèle GSP classique donne de bons résultats dans le cas d'un milieu formé de couches horizontales mais il suffit d'incliner ces couches pour voir la solution se dégrader. Les résultats se dégradent aussi lorsque les récepteurs sont loins de la source. Les tests que nous présentons dans la suite illustrent ces points.

Les FDM d'ordre élevé en espace, combinées à un schéma en temps de type saute-mouton, conduisent à une représentation explicite du champ d'ondes, la matrice de masse étant diagonale. Cependant, les différences finies produisent des artefacts, connus sous le nom générique de dispersion numérique, qui augmentent lorsque que l'on a un fort contraste entre deux milieux ou bien lorsque les grilles utilisées sont trop grossières. De plus, elles ne sont pas bien adaptées pour la prise en compte précise des effets de topographie car elles s'appuient sur des grilles qui approchent les interfaces par des marches d'escalier. Les méthodes d'éléments finis offrent une alternative efficace car elles peuvent s'appuyer sur des maillages reproduisant correctement la topographie du milieu. Toutefois, les plus classiques d'entre elles ne conduisent pas à un schéma explicite car la matrice de masse, qu'on doit inverser à chaque pas de temps, n'est pas diagonale, du moins sans traitement particulier. Pour pallier cet inconvénient, on peut appliquer une méthode de condensation de masse qui permet d'approcher la matrice  $\mathcal{M}$  par une matrice diagonale en calculant ses coefficients par une formule de quadrature s'appuyant sur des noeuds correspondant exactement aux noeuds du maillage. Dans le cas des éléments finis de Lagrange d'ordre  $l \geq 2$ , cette technique a pour conséquence de pénaliser l'ordre de convergence car les formules de quadrature à utiliser sont d'ordre plus bas que la méthode d'éléments finis. On évite ce désagrément en appliquant une méthode d'éléments finis spectraux (SEM) pour laquelle la formule de Gauss-Lobatto est parfaitement adaptée puisqu'elle est du même ordre que

la SEM. Cependant, la SEM s'appuie naturellement sur des maillages en quadrangles à 2D ou hexaèdres à 3D qui sont difficiles à mettre en oeuvre et pas toujours bien adaptés à des topographies compliquées. Des travaux ont été réalisés afin de pouvoir appliquer la SEM pour des maillages en triangles [8] mais cela reste difficile à mettre en oeuvre pour des éléments de haut degré et n'est pas encore généralisé à la dimension trois. La IPDGM, dont nous avons déjà parlé au chapitre 2, est très intéressante car elle s'appuie sur des maillages en triangles à 2D ou tétraèdres à 3D, sur des grilles régulières ou irrégulières, ce qui permet de prendre en compte de façon très précise la topographie du milieu de propagation. De plus, on conserve une représentation quasi-explicite de la solution car la matrice de masse est diagonale par blocs sans qu'il soit nécessaire d'approcher ses coefficients par une formule de quadrature. L'ordre de convergence est donc garanti, comme pour une méthode d'éléments spectraux.

Dans le début de ce chapitre, nous présentons la SEM, la IPDGM étant détaillée dans le chapitre 2 et les méthodes FDM et GSP dans le chapitre 1. Ensuite nous effectuons l'analyse de performance de la IPDGM en 1D et 2D. Enfin, nous validons la méthode à 3D en la comparant à une solution exacte.

### 3.1 La méthode des éléments spectraux

La méthode dite des éléments spectraux, bien connue sous l'acronyme de SEM pour Spectral Element Method, a été introduite par Patera en 1984 pour des problèmes de dynamique des fluides [42] et appliquée à des problèmes de géophysique par Komatitsch *et al.* [5, 6]. Il s'agit d'une méthode d'éléments finis à précision spectrale c'est-à-dire que l'erreur décroît exponentiellement avec le degré polynomial. De plus, elle conduit à une matrice de masse diagonale et l'ordre de convergence est optimal. Comme toutes les méthodes d'éléments finis, la discrétisation en espace s'appuie sur une écriture variationnelle du problème.

Par la suite, nous utilisons les codes SPECSEM2D ou SPECSEM3D <sup>1</sup> développé par D. Komatitsch, dans lequel les maillages sont composés de quadrangles ou hexaèdres. C'est pourquoi nous présentons la SEM dans le cadre d'un maillage  $\mathcal{T}_h$  de  $\Omega$  constitués d'éléments hexaédriques  $\{K\}$  tels que  $\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} \bar{K}$ . De plus, pour  $K \neq K'$ , l'intersection  $\bar{K} \cap \bar{K}'$  doit être soit vide soit composée d'un noeud, d'une arête ou d'une face communs. On suppose que  $\Gamma = \Gamma_{abs}$  i.e.  $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  sur  $\Gamma_{abs}$ .

On note  $H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) = \{\varphi \in H^1(\Omega) : \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  que l'on munit de la norme  $\|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)}$ . La formulation variationnelle associée à (3.1) est donnée par : trouver  $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$  tel

---

<sup>1</sup><http://www.geodynamics.org/cig/software/packages/seismo>

que

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} u \varphi \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int_{\partial\Omega} \frac{1}{\rho} (\nabla u \cdot \mathbf{n}) \varphi \, ds = \int_{\Omega} S \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (3.2)$$

En tenant compte des conditions de bord, le problème ci-dessus devient donc :

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} u \varphi \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} u \varphi \, ds = \int_{\Omega} S \varphi \, dx, \quad \forall \varphi \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega). \quad (3.3)$$

Définissons maintenant l'espace d'approximation. On cherche une approximation de  $u(., t)$  solution de (3.3) dans l'espace :

$$V_l^h := \left\{ v \in C^0 \cap H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) : v|_K \circ F_K^{-1} \in Q_l(\hat{K}), \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \quad (3.4)$$

où  $Q_l(\hat{K})$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à  $l$  pour chaque variable sur  $\hat{K}$ ,  $\hat{K}$  représentant l'élément de référence (le cube unité) et  $F_K$ , l'application vectorielle qui transforme l'élément de référence  $\hat{K}$  en l'élément  $K$ .

Le problème approché de (3.1) est alors : trouver  $u_h : \bar{I} \times V_l^h \rightarrow \mathbb{R}$  tel que,  $\forall \varphi_h \in V_l^h(\Omega)$

$$\frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} u_h \varphi_h \, dx + \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla u_h \cdot \nabla \varphi_h \, dx + \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} u_h \varphi_h \, ds = \int_{\Omega} S \varphi_h \, dx \quad (3.5)$$

avec les conditions initiales  $u_h(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$  et  $\frac{\partial u_h}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = u_1(\mathbf{x})$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ .

L'espace  $Q_l(\hat{K})$  étant de dimension  $(l+1)^d$  et composé de polynômes de degré inférieur ou égal à  $l$  en chacune des  $d$  variables, on doit définir  $(l+1)^d$  degrés de liberté sur  $\hat{K}$ . De plus, afin de conserver l'ordre de la méthode malgré la condensation de masse, on doit appliquer une règle de quadrature exacte pour les polynômes d'ordre  $2l-1$  [43]. C'est pourquoi la SEM utilise la formule de quadrature de Gauss-Lobatto qui vérifie cette propriété. Ainsi, les degrés de liberté sur  $\hat{K}$  devant coïncider avec les points de quadrature, on choisit les  $(\hat{x}_k)_{k=1,\dots,(l+1)^d}$  points de Gauss-Lobatto-Legendre, racines de la dérivée du polynôme de Legendre d'ordre  $l+1$ , associés à des poids  $(\hat{w}_k)_{k=1,\dots,(l+1)^d}$  et l'on considère la base des fonctions de Lagrange  $(\hat{\varphi}_k)_{k=1,\dots,(l+1)^d}$  d'ordre  $l$  qui vérifie :

$$\hat{\varphi}_k(\hat{x}_j) = \delta_{j,k}. \quad (3.6)$$

Nous définissons aussi  $\Upsilon = \left\{ (\varphi_j)_{j=1,\dots,N} \right\}$  l'ensemble des fonctions telles que :

- le support de  $\varphi_j$  soit l'ensemble des éléments  $K$  contenant le  $j$ ème degré de liberté ;

- l'image par  $F_K^{-1}$  de la restriction de  $\varphi_j$  à chaque élément de son support soit une fonction de base de  $Q^l(\hat{K})$ .

La solution approchée  $u_h$  peut donc être décomposée en  $u_{h,N}$  degrés de liberté ( $N$  étant le nombre de points du maillage) qui correspondent à la valeur de  $u_h$  calculée aux points  $\mathbf{x}_N$  de  $\Omega$ , où  $\{\mathbf{x}_k\}_{1 \leq k \leq N}$  est défini par :  $\mathbf{x}_k = F_K(\hat{\mathbf{x}}_k)$ . On peut alors écrire :

$$u_h = \sum_{j=1}^N u_{h,j} \varphi_j. \quad (3.7)$$

L'équation (3.5) devient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left( \sum_{j=1}^N u_{h,j} \varphi_j \right) \varphi_i dx &+ \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \left( \sum_{j=1}^N u_{h,j} \varphi_j \right) \varphi_i ds \\ &+ \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \left( \sum_{j=1}^N u_{h,j} \varphi_j \right) \cdot \nabla \varphi_i dx = \int_{\Omega} S \varphi_i dx, \quad \forall \varphi_i \in \Upsilon. \end{aligned} \quad (3.8)$$

On obtient alors le schéma en espace suivant :

$$\mathcal{M} \frac{d^2 U_h}{dt^2} + \mathcal{B} \frac{dU_h}{dt} + \mathcal{K} U_h = \mathcal{S}_h \quad (3.9)$$

où

- $U_h$  est le vecteur dont les composantes sont  $(u_{h,j})_{1 \leq j \leq N}$  ;
- la matrice  $\mathcal{M}$  qui est classiquement appelée matrice de masse, a pour coefficients  $\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \varphi_i \varphi_j dx$ . Elle est donc symétrique ;
- la matrice  $\mathcal{B}$  a pour coefficients  $\mathcal{B}_{ij} = \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \varphi_i \varphi_j ds$  et les fonctions de base sont telles que  $\mathcal{B}_{ij} \neq 0$  si  $x_i$  et  $x_j \in \Gamma_{abs}$  ;
- la matrice  $\mathcal{K}$  appelée matrice de rigidité a pour coefficients les termes  $\mathcal{K}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\rho} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dx$ . C'est donc aussi une matrice symétrique ;
- $\mathcal{S}_h$  est le vecteur source de composantes  $\mathcal{S}_i = \int_{\Omega} S \varphi_i dx$ .

En pratique, chaque intégrale sur  $\Omega$  est écrite comme la somme d'intégrales sur tous les éléments  $K$  du maillage. Par exemple, on obtient pour la matrice de masse les termes :

$$\mathcal{M}_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \frac{1}{\mu_K} \varphi_i \varphi_j dx. \quad (3.10)$$

Ensuite, chaque intégrale sur un élément  $K$  est transformée en une intégrale sur l'élément de référence  $\hat{K}$  grâce aux applications  $F_K$ . Par exemple, pour une intégrale de (3.10) on a :

$$\int_K \frac{1}{\mu_K} \varphi_i \varphi_j dx = |J| \int_{\hat{K}} \frac{1}{\mu_K} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j dx \quad (3.11)$$

où  $|J| = \det(JF_K)$  est le déterminant de la matrice Jacobienne de  $F_K$ .

Pour calculer les coefficients, on utilise la règle de quadrature de Gauss-Lobatto-Legendre qui est exacte pour les polynômes d'ordre  $2l - 1$  :

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{\mu_K} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j dx \simeq \frac{1}{\mu_K} \sum_k \hat{w}_k \hat{\varphi}_i(\hat{x}_k) \hat{\varphi}_j(\hat{x}_k) \quad (3.12)$$

ce qui garantit que l'ordre de convergence de la méthode n'est pas pénalisé [43]. De plus, les points de quadrature  $(\hat{x}_k)_{k=1, \dots, (l+1)^d}$  coïncidant avec les degrés de liberté, la matrice de masse est approchée par une matrice diagonale. En effet, comme  $\hat{\varphi}_i(\hat{x}_k) = \delta_{ij}$ ,

$$\int_{\hat{K}} \frac{1}{\mu_K} \hat{\varphi}_i \hat{\varphi}_j dx = \frac{1}{\mu_K} \hat{w}_i \delta_{ij}.$$

Pour la discrétisation en temps, le schéma (3.9) étant similaire au schéma (2.27) obtenue par IPDGM, nous utilisons le même schéma en temps :

$$\mathcal{M} \frac{U_h^{n+1} - 2U_h^n + U_h^{n-1}}{\Delta t^2} + \mathcal{B} \frac{U_h^{n+1} - U_h^{n-1}}{2\Delta t} = -\mathcal{K}U_h^n + \mathcal{S}_h \quad (3.13)$$

soit encore,

$$\left( I + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B} \right) U_h^{n+1} = 2U_h^n - U_h^{n-1} - \Delta t^2 \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}U_h^n + \frac{\Delta t}{2} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{B}U_h^{n-1} + \mathcal{M}^{-1} \mathcal{S}_h. \quad (3.14)$$

## 3.2 Analyse de performance

### 3.2.1 Tests mono-dimensionnels

Nous comparons numériquement l'efficacité de la IPDGM, de la SEM et de la FDM de façon numérique grâce à des codes 1D en Matlab. Pour la SEM et la IPDGM, nous avons effectué les expériences sur des maillages réguliers et aléatoires pour s'assurer qu'il n'y a pas d'effet de superconvergence dans le dernier cas. En effet, il est montré dans [3] que l'ordre de convergence de la SEM est plus élevé si l'on choisit les sommets des éléments équidistants les uns par rapport aux autres. De plus, dans le cas de maillages aléatoires, la taille des mailles varie de  $\pm 10\%$  autour de la valeur moyenne. Ce type de maillage se rapproche

donc plus de celui utilisé dans les expériences en 2D ou en 3D que les maillages équidistants.

Dans cette expérience, nous considérons que  $S = 0$  et nous prenons comme conditions initiales :

$$u_0(x) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) \quad \text{et} \quad u_1(x) = -\frac{4\pi}{3} \cos\left(\frac{4\pi}{3}x\right)$$

de telle sorte que la solution exacte s'écrit :

$$u_{ex}(x, t) = \sin\left(\frac{4\pi}{3}(x - t)\right).$$

Nous effectuons l'expérience sur un axe de longueur  $l = 9\text{m}$  pendant 60s avec une vitesse de propagation  $c = 1\text{ms}^{-1}$ . De plus, on suppose que  $\Gamma_D = \emptyset$  et sur  $\Gamma$ , on suppose que  $u$  est périodique c'est-à-dire :

$$u(l, t) = u(0, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t).$$

Avant de présenter les résultats obtenus, il est nécessaire aussi de préciser les notations utilisées :

- $dx, dt$  : pas d'espace et de temps utilisés ;
- $Raff$  : coefficient de raffinement du pas d'espace initial ( $dx=dx\_initial/Raff$ ) ;
- $nb\_ddl$  : nombre de degrés de liberté ;
- $err$  : erreur relative  $L^2(\Omega \times [0, t])$  donnée par  $\frac{\sqrt{\int_0^T \int_0^L (u - u_{ex})^2}}{\sqrt{\int_0^T \int_0^L u_{ex}^2}}$ .

Notre objectif étant de comparer différents schémas, nous précisons que nous avons choisi de tester les méthodes SEM et IPDGM jusqu'à l'ordre 4<sup>1</sup>. Ceci justifie notre intérêt pour une FDM d'ordre 4 en espace.

### 3.2.1.1 Résultats numériques

Nous présentons dans le tableau 3.1 les résultats obtenus pour la SEM et la IPDGM pour l'ordre 2.

Nous pouvons remarquer que l'erreur obtenue avec la IPDGM est beaucoup plus élevée qu'avec la SEM et cela en utilisant le même nombre d'éléments. Lorsque l'on choisit des points de quadrature aléatoires, l'écart entre les deux solutions se resserre mais la IPDGM reste toujours aussi peu précise.

---

<sup>1</sup>Par ordre 4, nous entendons ordre 4 de convergence en norme  $L^2$ . Cela signifie donc que nous utilisons des éléments de Lagrange de degré 3.



	Maillage fixe		Maillage aléatoire	
	IPDGM	SEM	IPDGM	SEM
Raff=1	nb_ddl=90 dx=0.200 dt=0.0808 err=1.5187	nb_ddl=91 dx=0.100 dt=0.0990 err=0.0164	nb_ddl=90 dx=0.200 dt=0.0761 err=1.5196	nb_ddl=91 dx=0.100 dt=0.0913 err=0.1059
Raff=2	nb_ddl=180 dx=0.100 dt=0.0404 err=0.6741	nb_ddl=181 dx=0.0500 dt=0.0495 err=0.0041	nb_ddl=180 dx=0.100 dt=0.0380 err=0.6661	nb_ddl=181 dx=0.0500 dt=0.0448 err=0.0313
Raff=4	nb_ddl=360 dx=0.0500 dt=0.0202 err=0.1772	nb_ddl=361 dx=0.0250 dt=0.0247 err=0.0010	nb_ddl=360 dx=0.0500 dt=0.0190 err=0.1749	nb_ddl=361 dx=0.0250 dt=0.0224 err=0.0076
Raff=6	nb_ddl=540 dx=0.0333 dt=0.0135 err=0.0791	nb_ddl=541 dx=0.0167 dt=0.0165 err=0.00045	nb_ddl=540 dx=0.0333 dt=0.0127 err=0.0781	nb_ddl=541 dx=0.0167 dt=0.0149 err=0.0034
Raff=8	nb_ddl=720 dx=0.0250 dt=0.0101 err=0.0448	nb_ddl=721 dx=0.0125 dt=0.0124 err=0.00025	nb_ddl=720 dx=0.0250 dt=0.0095 err=0.0439	nb_ddl=721 dx=0.0125 dt=0.0112 err=0.0019
Raff=16	nb_ddl=1440 dx=0.0125 dt=0.00677 err=0.0124	nb_ddl=1440 dx=0.00625 dt=0.00625 err=0.000064	nb_ddl=1440 dx=0.0125 dt=0.0063 err=0.012	nb_ddl=1440 dx=0.00625 dt=0.0056 err=0.00048

TAB. 3.1 – Résultats de la comparaison entre la IPDGM et la SEM pour l'ordre 2.

	Maillage fixe		Maillage aléatoire	
	IPDGM	SEM	IPDGM	SEM
Raff=1	nb_ddl=180 dx=0.1500 dt=0.0347 err=0.0742	nb_ddl=181 dx=0.100 dt=0.0400 err=0.0971	nb_ddl=180 dx=0.1500 dt=0.0320 err=0.0645	nb_ddl=181 dx=0.100 dt=0.0363 err=0.08
Raff=2	nb_ddl=360 dx=0.0750 dt=0.0174 err=0.0185	nb_ddl=361 dx=0.0500 dt=0.0200 err=0.0244	nb_ddl=360 dx=0.0750 dt=0.0159 err=0.0156	nb_ddl=361 dx=0.0500 dt=0.0182 err=0.0202
Raff=4	nb_ddl=720 dx=0.0375 dt=0.0087 err=0.0046	nb_ddl=721 dx=0.0250 dt=0.0100 err=0.0061	nb_ddl=720 dx=0.0375 dt=0.0079 err=0.0038	nb_ddl=721 dx=0.0250 dt=0.0091 err=0.0050
Raff=6	nb_ddl=1080 dx=0.0250 dt=0.0058 err=0.0020	nb_ddl=1081 dx=0.0167 dt=0.0067 err=0.0027	nb_ddl=1080 dx=0.0250 dt=0.0053 err=0.0017	nb_ddl=1081 dx=0.0167 dt=0.0060 err=0.0022
Raff=8	nb_ddl=1440 dx=0.0187 dt=0.0043 err=0.0011	nb_ddl=1441 dx=0.0125 dt=0.0050 err=0.0015	nb_ddl=1440 dx=0.0187 dt=0.0040 err=0.0009	nb_ddl=1441 dx=0.0125 dt=0.0125 err=0.0012

TAB. 3.2 – Résultats de la comparaison entre la IPDGM et la SEM pour l'ordre 3.

Les tableaux 3.2 et 3.3 donnent les résultats obtenus pour la SEM et la IPDGM pour l'ordre 3 et l'ordre 4 respectivement.

Nous remarquons que l'erreur est du même ordre pour les deux méthodes en utilisant le même nombre d'éléments. On constate que dans l'ensemble, les deux méthodes ont des performances similaires.

Dans le tableau 3.3 nous avons rajouté les résultats obtenus avec la FDM à l'ordre 4 et l'on remarque qu'elle donne de moins bons résultats que les méthodes SEM et IPDGM. De plus, comme l'atteste le tableau 3.4, les résultats obtenus avec la FDM à l'ordre 8 ne sont toujours pas compétitifs avec ceux obtenus avec des éléments finis d'ordre 4.

Nous pouvons donc conclure que les deux méthodes d'éléments finis sont beaucoup plus précises que la FDM. En revanche, pour un pas de temps équivalent, les solutions fournies par la SEM et la IPDGM ont des erreurs équivalentes à l'ordre élevé.

	Maillage fixe		Maillage aléatoire		FDM
	IPDGM	SEM	IPDGM	SEM	
Raff=1	nb_ddl=180 dx=0.200 dt=0.0307 err=0.0019	nb_ddl=180 dx=0.1500 dt=0.0348 err=0.0381	nb_ddl=180 dx=0.200 dt=0.0305 err=0.0291	nb_ddl=180 dx=0.1500 dt=0.0335 err=0.036	nb_ddl=181 dx=0.0500 dt=0.043 err=1.8549
Raff=2	nb_ddl=360 dx=0.100 dt=0.0153 err=0.0074	nb_ddl=360 dx=0.0750 dt=0.0174 err=0.0095	nb_ddl=360 dx=0.100 dt=0.0152 err=0.0073	nb_ddl=360 dx=0.0750 dt=0.0168 err=0.0089	nb_ddl=361 dx=0.0250 dt=0.0215 err=0.4658
Raff=4	nb_ddl=720 dx=0.0500 dt=0.0077 err=0.0018	nb_ddl=720 dx=0.0375 dt=0.0087 err=0.0024	nb_ddl=720 dx=0.0500 dt=0.0076 err=0.0018	nb_ddl=720 dx=0.0375 dt=0.0084 err=0.0022	nb_ddl=721 dx=0.0125 dt=0.0108 err=0.1166
Raff=6	nb_ddl=1080 dx=0.0333 dt=0.0051 err=0.00082	nb_ddl=1080 dx=0.0250 dt=0.0058 err=0.0001	nb_ddl=1080 dx=0.0333 dt=0.0051 err=0.00080	nb_ddl=1080 dx=0.0250 dt=0.0056 err=0.0009	nb_ddl=1081 dx=0.0083 dt=0.0072 err=0.0518
Raff=8	nb_ddl=1440 dx=0.0250 dt=0.0038 err=0.00046	nb_ddl=1440 dx=0.0187 dt=0.0044 err=0.00059	nb_ddl=1440 dx=0.0250 dt=0.0038 err=0.00045	nb_ddl=1440 dx=0.0187 dt=0.0042 err=0.00055	nb_ddl=1441 dx=0.00625 dt=0.005375 err=0.0291

TAB. 3.3 – Résultats de la comparaison entre la IPDGM, la SEM et la FDM pour l'ordre 4.

	Ordre 4	Ordre 8
Raff=1	nb_ddl=181 dx=0.0500 dt=0.043 err=0.1129	nb_ddl=181 dx=0.0500 dt=0.039 err=0.0933
Raff=2	nb_ddl=361 dx=0.0250 dt=0.0215 err=0.0283	nb_ddl=361 dx=0.025 dt=0.0195 err=0.0233
Raff=4	nb_ddl=721 dx=0.0125 dt=0.0108 err=0.0071	nb_ddl=721 dx=0.0125 dt=0.00975 err=0.0058
Raff=6	nb_ddl=1081 dx=0.0083 dt=0.0072 err=0.0031	nb_ddl=1081 dx=0.0083 dt=0.0065 err=0.0026
Raff=8	nb_ddl=1441 dx=0.00625 dt=0.005375 err=0.0017	nb_ddl=1441 dx=0.00625 dt=0.004875 err=0.0014

TAB. 3.4 – Comparaison entre un schéma d'ordre 4 et un schéma d'ordre 8 pour la FDM.

### 3.2.2 Tests 2D

Dans cette partie, les expériences sont tout d'abord effectuées dans deux domaines bicouches différents ; dans le premier cas, l'interface entre les deux milieux est horizontale, dans le second elle est inclinée. Dans la dernière expérience, nous considérons un domaine de type Foothill présentant une surface irrégulière. De plus, nous utilisons toujours des éléments finis  $P_3$  et une source ponctuelle en espace de la forme  $S(\mathbf{x}_s, t) = 2\pi^2 f^2 (2\pi^2 f^2 t^2 - 1) e^{-\pi^2 f^2 t^2} \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_s}$  où  $f$  désigne la fréquence,  $\mathbf{x}_s$  est un point situé à la surface  $\{z = 0\}$  et  $\delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_s}$  désigne la mesure de Dirac au point  $\mathbf{x}_s$ . Lorsque nous imposons une condition absorbante sur une partie de la frontière  $\partial\Omega$ , nous appliquons :

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Afin de valider nos résultats nous les comparons avec la solution exacte calculée avec la méthode de Cagniard de Hoop [44, 45]. Pour cela nous utilisons le code Gar6more2D développé par J. Diaz et A. Ezziani <sup>2</sup>.

#### 3.2.2.1 Domaines bicouches

Nous considérons tout d'abord un domaine bicouche  $[0, 21600] \times [0, 24470]$  avec une interface horizontale. La vitesse de propagation dans la couche supérieure  $[0, 21600] \times [8470, 24470]$  est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 1600\text{ms}^{-1}$ . Celle dans la couche inférieure  $[0, 21600] \times [0, 8470]$  est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 2400\text{ms}^{-1}$  (cf. Fig. 3.2). Nous utilisons une source à la fréquence  $f = 2\text{Hz}$  localisée au point de coordonnées  $(10800, 14470)$ . De plus, nous imposons une condition absorbante sur toute la frontière. Le temps de simulation est de 16s et nous enregistrons les sismogrammes (i.e. les signaux réfléchis) au niveau des capteurs situés à 14470m de hauteur et régulièrement espacés de 10m.

Puis, nous considérons un domaine bicouche  $[0, 21600] \times [0, 24470]$  avec une interface inclinée. La vitesse de propagation dans la couche supérieure est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 1600\text{ms}^{-1}$ . Celle dans la couche inférieure est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 2400\text{ms}^{-1}$  (cf. Fig. 3.3). Nous utilisons la même source, les mêmes récepteurs et la même condition de bord que pour le domaine bicouche à interface horizontale. Le temps de simulation est aussi de 16s.

#### • La méthode GSP

##### Domaine bicouche à interface horizontale

La figure 3.4 montre les résultats pour un récepteur situé à 1100m de la source et la figure 3.5 représente les résultats pour un récepteur situé à 5100m de la source.

Nous pouvons constater que, pour le récepteur proche de la source, il y a une légère différence d'amplitude et un petit décalage du temps d'arrivée au niveau de l'onde réfléchie.

<sup>2</sup><http://www.spice-rtn.org/library/software/Gar6more2D>

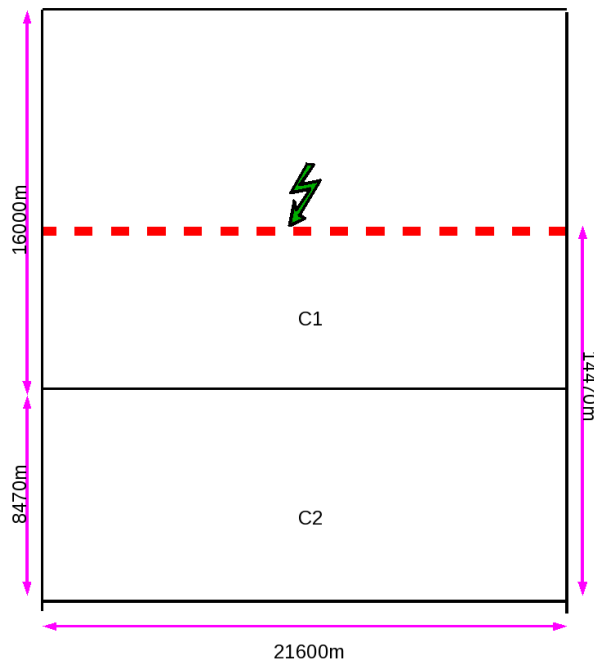


FIG. 3.2 – Expérience réalisée dans le domaine bicouche à interface horizontale.

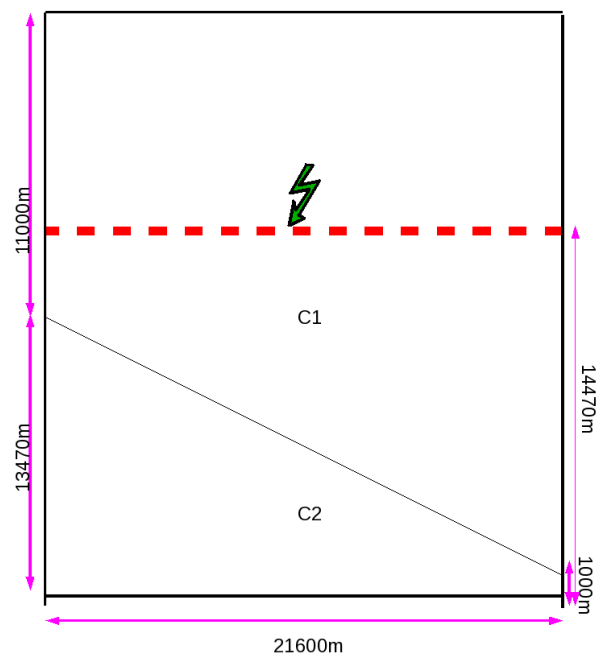


FIG. 3.3 – Expérience réalisée dans le domaine bicouche à interface inclinée.

Cependant les résultats obtenus sont satisfaisants. Pour un récepteur éloigné, ces différences sont accentuées et ceci est dû au fait que la méthode GSP que nous utilisons repose sur une représentation de Fourier des opérateurs, ce qui génère des périodicités artificielles que l'on observe sur les sismogrammes comme des effets de bord. On peut atténuer ce phénomène en appliquant un "taper" [32] mais nous n'avons pas considéré ce point ici.

### Domaine bicouche à interface inclinée

La figure 3.6 montre les résultats obtenus dans le domaine bicouche à interface inclinée. Dans ce cas, nous ne montrons les résultats que pour le récepteur situé à 1100m de la source, car nous avons vu dans le paragraphe précédent que même dans un domaine bicouche à interface horizontale, les résultats ne sont pas satisfaisants.

Nous remarquons que la solution est perturbée dans son ensemble par des oscillations. De plus, on observe que l'amplitude de l'onde réfléchie n'est pas correcte et il y a aussi un décalage en temps plus important que dans le domaine bicouche à interface horizontale.

En conclusion, nous pouvons dire que sur un domaine relativement simple, la méthode GSP ne donne pas de bons résultats. Ceci est dû à la technique d'approximation numérique utilisée pour les opérateurs intégraux de Fourier qui n'est pas adaptée à des vitesses variant latéralement et à des récepteurs loin de la source.

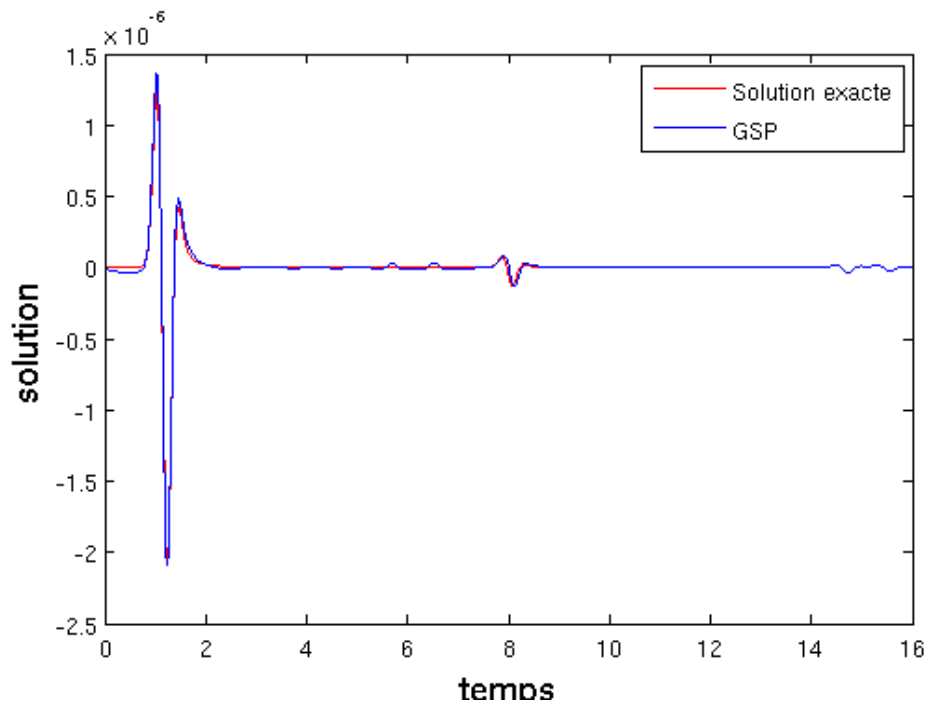


FIG. 3.4 – Résultats de la méthode GSP pour un récepteur situé à 1100m de la source dans le domaine bicouche à interface horizontale.

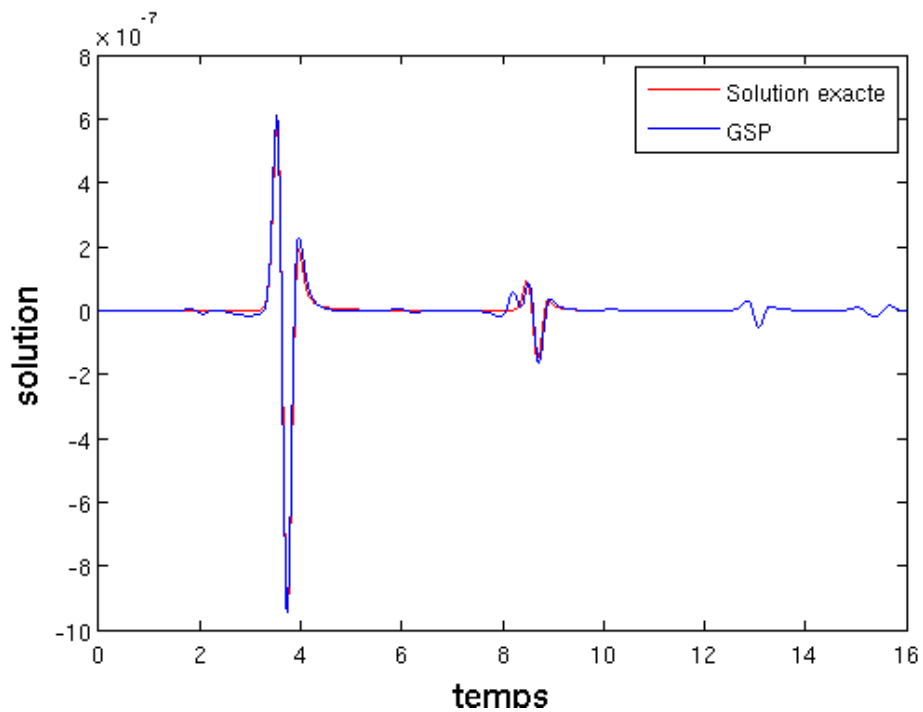


FIG. 3.5 – Résultats de la méthode GSP pour un récepteur situé à 5100m de la source dans le domaine bicouche à interface horizontale.

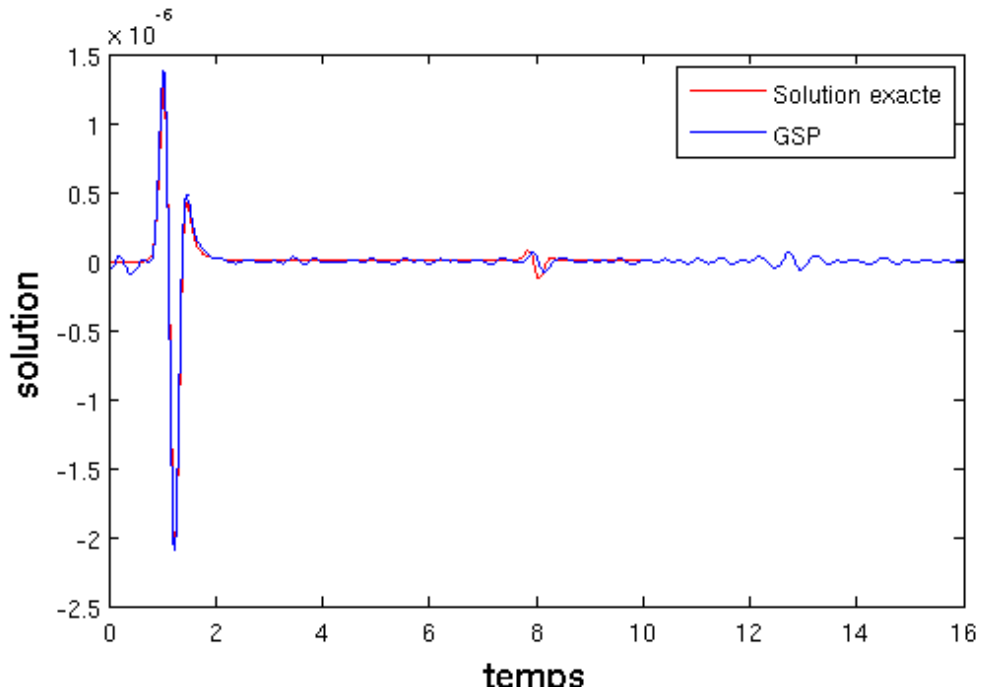


FIG. 3.6 – Résultats de la méthode GSP pour un récepteur situé à 1100m de la source dans le domaine bicouche à interface inclinée.

- **Les méthodes FDM, SEM et IPDGM**

### Domaine bicouche à interface horizontale

#### *a - Maillage grossier*

Pour cette expérience, nous avons utilisé un maillage d'environ 145000 degrés de liberté soit 14 points par longueur d'onde. Les résultats sont obtenus, soit avec un schéma aux différences finies d'ordre 4 en espace, soit avec des éléments finis d'ordre 4.

La figure 3.7 représente les sismogrammes obtenus avec les différentes méthodes.

On peut remarquer que pour la SEM et la IPDGM il y a quelques petites oscillations entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. On observe ici le phénomène de dispersion numérique, le maillage étant relativement grossier. On note cependant que les trois ondes incidentes sont confondues ainsi que les trois ondes réfléchies. Les résultats obtenus sont donc acceptables. Pour la FDM, on constate une différence d'amplitude et un décalage en temps.



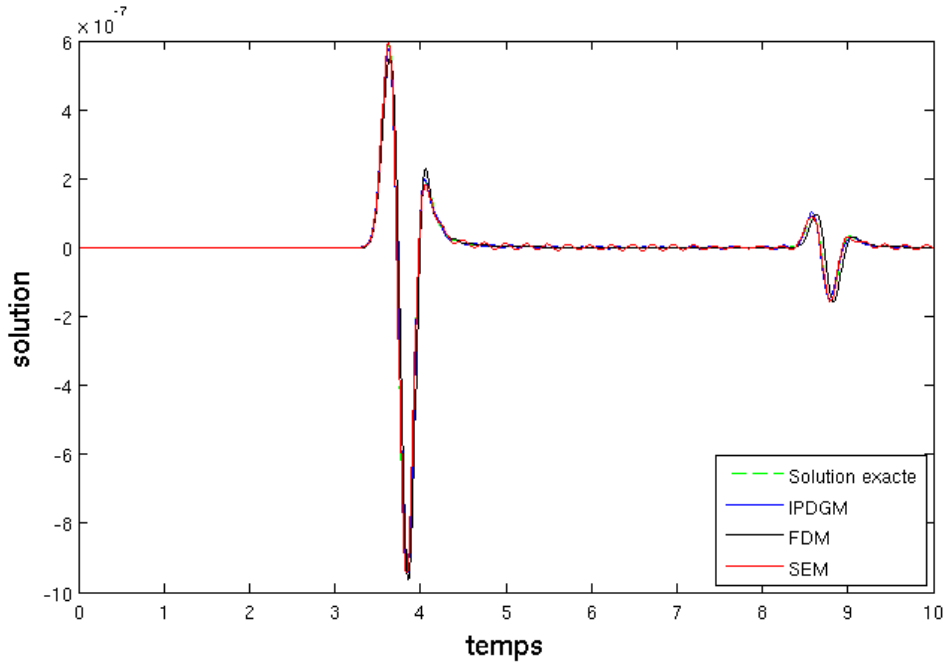


FIG. 3.7 – Résultats pour un récepteur situé à 5100m de la source pour un maillage grossier dans le domaine bicouche à interface horizontale.

### *b - Maillage fin*

Nous réalisons ici l'expérience avec un maillage d'environ 920000 degrés de liberté soit 35 points par longueur d'onde. Les résultats sont encore obtenus, soit avec un schéma aux différences finies d'ordre 4 en espace, soit avec des éléments finis d'ordre 4.

La figure 3.8 représente les sismogrammes obtenus avec les différentes méthodes.

Nous remarquons que les solutions calculées avec la SEM et la IPDGM se confondent avec la solution exacte. On obtient les bonnes amplitudes et les bons temps d'arrivées pour les ondes incidentes et les ondes réfléchies par l'interface. Pour la FDM, même si l'on a ici les bonnes amplitudes, on a toujours un décalage au niveau de l'onde réfléchie.

### *c - Comparaison de l'erreur*

Nous calculons ici grâce à un code Matlab, l'erreur relative  $L^2(x_1, [0, T])$  en un point donné  $x_1$  définie par 
$$\frac{\sqrt{\int_0^T (u(x_1, t) - u_{ex}(x_1, t))^2 dt}}{\sqrt{\int_0^T u_{ex}(x_1, t)^2 dt}}$$
. Nous comparons les résultats obtenus avec la FDM, la SEM et la IPDGM pour  $x_1 = (15400; 14470)$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 3.5 et résumés dans les figures 3.9 et 3.10.

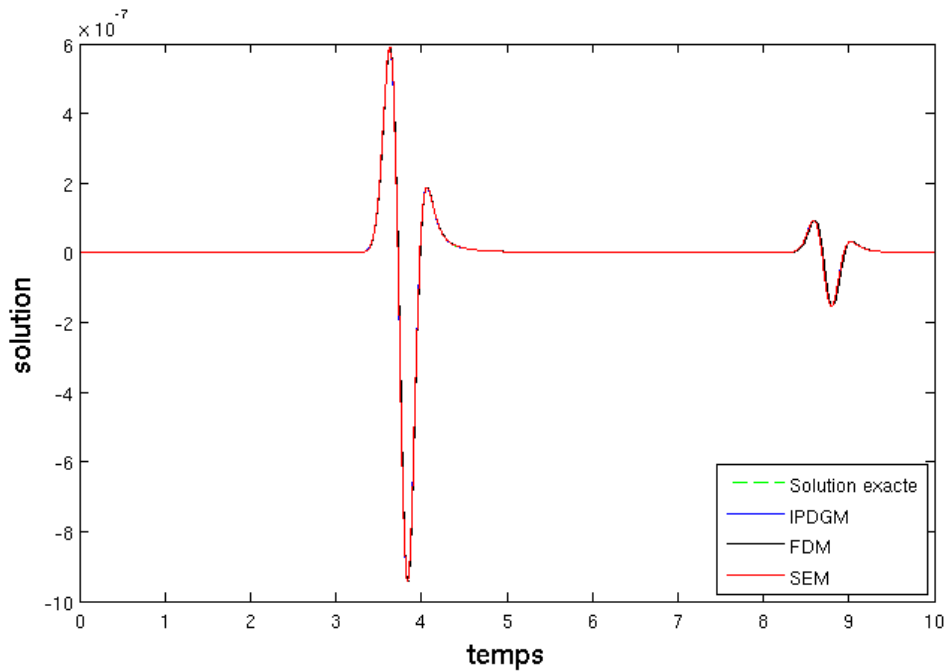


FIG. 3.8 – Résultats pour un récepteur situé à 5100m de la source pour un maillage fin dans le domaine bicouche à interface horizontale.

Ces résultats confirment le fait que la FDM donne de moins bons résultats que les deux autres méthodes d'éléments finis. On retiendra aussi que la solution obtenue avec la IPDGM est plus précise que celle obtenue avec la SEM mais elle utilise un pas de temps plus petit. Or, après avoir réalisé les tests, il s'avère que si l'on prend le même pas de temps (celui utilisé par la IPDGM) pour la SEM, l'erreur obtenue par la SEM est équivalente à celle obtenue par la IPDGM. On peut donc conclure que la IPDGM et la SEM ont des performances similaires. De plus, on peut voir sur les figures 3.9 et 3.10 que les trois méthodes sont d'ordre 2 alors que l'on utilise un schéma d'ordre 4 en espace pour la FDM et des éléments finis de Lagrange d'ordre 3. L'ordre de convergence est pénalisé par le schéma en temps qui est un schéma d'ordre 2.

#### *d - Estimation des temps de calcul pour la SEM et la IPDGM*

La performance d'une méthode d'éléments finis peut être définie entre autres par sa rapidité de calcul. Dans le tableau 3.6 nous avons répertorié le temps de calcul mis par le code SPECFEM2D (pour la SEM) et notre code IPDGFem (pour la IPDGM) pour effectuer une itération de la boucle en temps pour certains maillages du paragraphe précédent.

Nous pouvons remarquer que le temps de calcul augmente en fonction du nombre de degrés de liberté utilisés. Nous constatons aussi que pour la IPDGM ces deux quantités

		dt	err
nb_ddl=147200	IPDGM	0.00625	0.0430
nb_ddl=139351	SEM	0.00964	0.0465
nb_ddl=141899	FDM	0.00901	0.1344
nb_ddl=336000	IPDGM	0.004	0.0083
nb_ddl=337771	SEM	0.00578	0.0153
nb_ddl=354011	FDM	0.00557	0.0608
nb_ddl=588800	IPDGM	0.003125	0.0038
nb_ddl=581131	SEM	0.00482	0.0113
nb_ddl=552286	FDM	0.00474	0.0462
nb_ddl=920000	IPDGM	0.00249	0.0021
nb_ddl=919921	SEM	0.00413	0.0083
nb_ddl=883225	FDM	0.0036	0.0238
nb_ddl=1344000	IPDGM	0.002	0.0022
nb_ddl=1356841	SEM	0.00304	0.0046
nb_ddl=1324315	FDM	0.00292	0.0218
nb_ddl=1620000	IPDGM	0.002	0.0018
nb_ddl=1622551	SEM	0.00275	0.0038
nb_ddl=1655011	FDM	0.00271	0.0185
nb_ddl=2160000	IPDGM	0.0016	0.0013
nb_ddl=2155741	SEM	0.00241	0.0030
nb_ddl=2117520	FDM	0.00201	0.0128
nb_ddl=2390000	IPDGM	0.0016	0.0013
nb_ddl=2384491	SEM	0.00222	0.0026
nb_ddl=2206171	FDM	0.00237	0.0182
nb_ddl=2808000	IPDGM	0.0015	0.0012
nb_ddl=2793361	SEM	0.00192	0.0020
nb_ddl=2646288	FDM	0.00194	0.0127

TAB. 3.5 – Erreurs relatives  $L^2$  obtenues dans le domaine bicouche à interface horizontale avec les méthodes IPDGM et SEM et FDM.

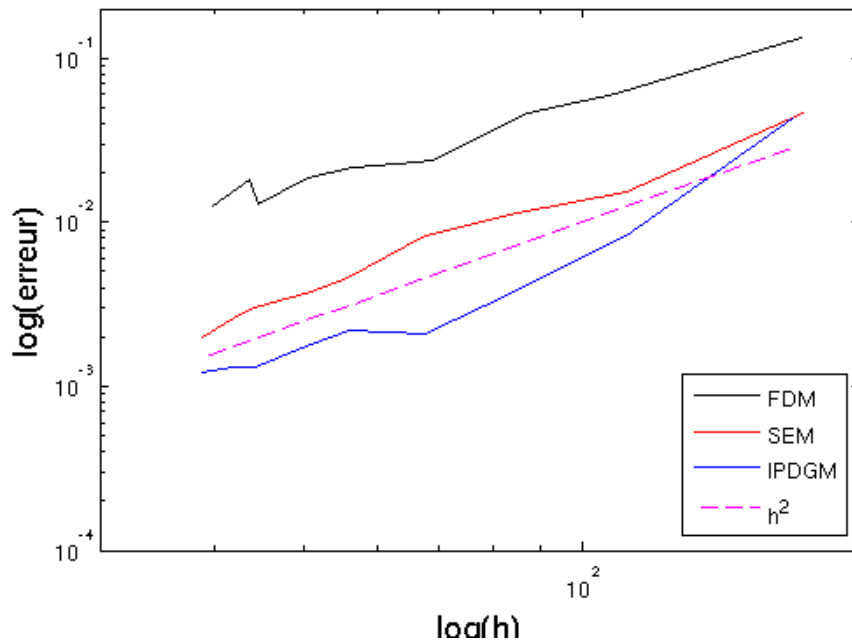


FIG. 3.9 – Erreurs relatives  $L^2$  obtenues dans le domaine bicouche à interface horizontale représentées en échelle logarithmique en fonction de  $h$ .

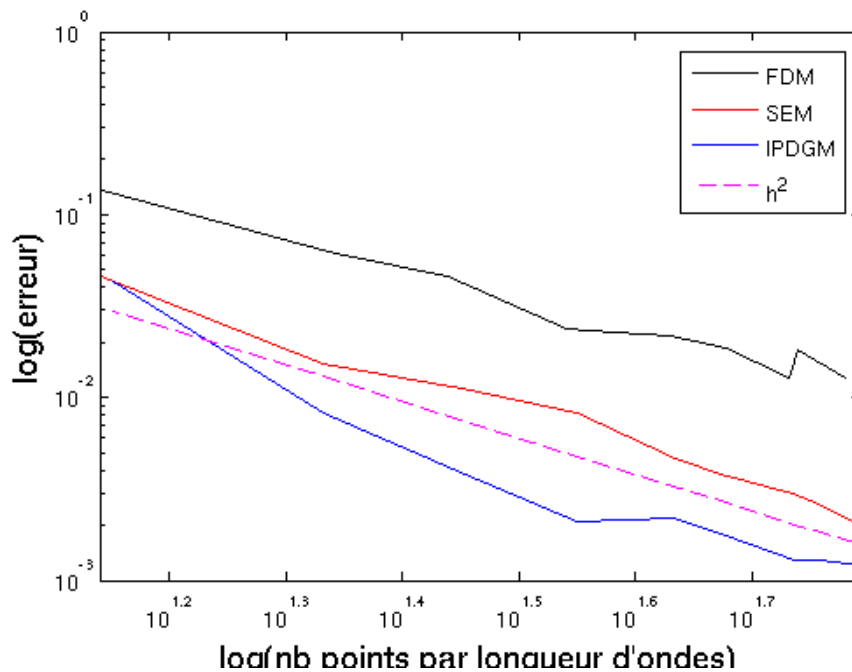


FIG. 3.10 – Erreurs relatives  $L^2$  obtenues dans le domaine bicouche à interface horizontale représentées en échelle logarithmique en fonction du nombre de points par longueur d'onde.

		Temps d'une itération
nb_ddl=147200	IPDGFem	0.0418
nb_ddl=139351	SPECFEM2D	0.0121
nb_ddl=336000	IPDGFem	0.0983
nb_ddl=337771	SPECFEM2D	0.0329
nb_ddl=588800	IPDGFem	0.173
nb_ddl=581131	SPECFEM2D	0.0607
nb_ddl=920000	IPDGFem	0.264
nb_ddl=919921	SPECFEM2D	0.104
nb_ddl=1344000	IPDGFem	0.386
nb_ddl=1356841	SPECFEM2D	0.170

TAB. 3.6 – Temps de calcul nécessaires aux 2 codes pour effectuer une itération en temps.

sont proportionnelles. En effet pour passer du maillage n° 1 au maillage n° 4, on multiplie le nombre de degrés de liberté par 6.25 et on peut vérifier que le temps CPU est lui aussi multiplié par le même nombre. Pour la SEM en revanche, on multiplie le nombre de degrés de liberté par 6.6 alors que le temps CPU est lui multiplié par 8.6. Entre le dernier et le premier, on multiplie le nombre de degrés de liberté par 9.7, le temps est alors multiplié par 14.

Nous pouvons aussi voir que la IPDGM met environ trois fois plus de temps pour effectuer une itération. Ceci est dû au fait que SPECFEM2D est très optimisé alors que IPDGFem ne l'est pas encore.

Nous avons donc testé ici la performance des deux codes et non pas réellement celle des deux méthodes. C'est pour cela que l'on va maintenant, comparer le nombre d'éléments non nuls de la matrice de rigidité  $\mathcal{K}$  et plus exactement  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$ . En effet, on effectue la majorité des calculs lors du produit matriciel  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}U$ . On cherche donc à savoir avec combien de degrés de liberté interagit un degré de liberté, sachant le nombre de degrés de liberté par éléments et le nombre d'éléments du maillage, on a facilement le nombre d'éléments non nuls de la matrice.

#### Calcul pour la IPDGM (ordre 4) :

- chaque élément  $K$  a au maximum trois voisins ;
- on a 10 degrés de liberté par éléments  $K$  ;
- calcul interne : chaque degré de liberté de l'élément  $K$  (en bleu sur la figure 3.11) interagit avec lui même et les 9 autres de l'élément  $K$  : on a donc  $10 \times 10 = 100$  multiplications ;
- calcul pour un élément et ses voisins : les 10 degrés de liberté d'un élément  $K$  sont as-

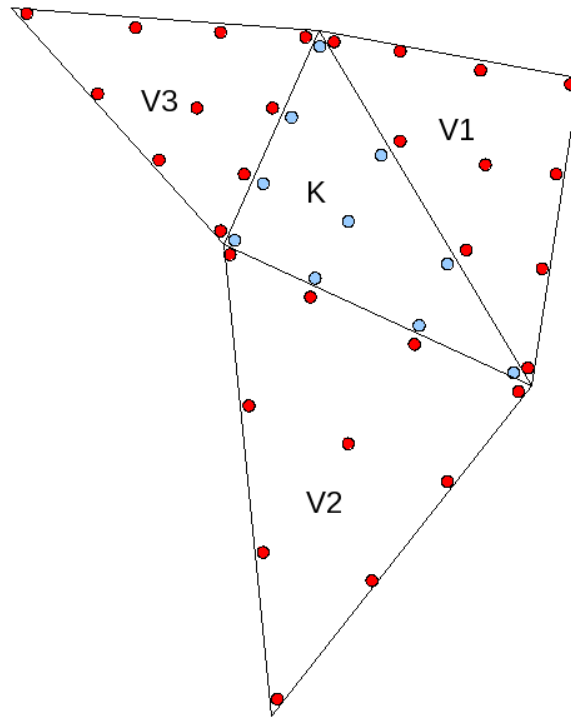


FIG. 3.11 – Un élément d’ordre quatre et ses trois voisins pour la IPDGM.

sociés aux 10 degrés de liberté de chacun de ses 3 voisins. En théorie on devrait donc calculer pour chaque voisin 100 interactions. Cependant, certaines de ces interactions sont nulles. En effet, les 6 fonctions de bases de  $K$  associées aux degrés de liberté qui ne sont pas sur l’arête commune à  $K$  et son voisin  $V_1$  (en mauve sur la figure 3.12) sont nulles sur cette arête. De plus, les 6 fonctions de base de  $V_1$  associées aux degrés de liberté qui ne sont pas sur l’arête commune à  $K$  et son voisin  $V_1$  (en rouge sur la figure 3.12) sont aussi nulles sur cette arête. Il y a donc 36 interactions nulles et donc  $100 - 36 = 64$  éléments non nuls pour chaque voisin. Étant donné qu’il y a 3 voisins, le nombre de multiplications à effectuer est alors de  $3 \times 64 = 192$ .

Le nombre d’éléments non nuls de la matrice  $\mathcal{K}$  pour la IPDGM est donc  $100 + 192 = 292$   $nb\_elem$ , où  $nb\_elem$  est le nombre d’éléments du maillage.

Cependant, on multiplie la matrice  $\mathcal{K}$  par l’inverse de la matrice de masse  $\mathcal{M}$  qui est diagonale par blocs de taille  $10 \times 10$  ce qui entraîne un remplissage local et le nombre d’éléments non nuls de  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$  est alors de  $4 \times 10 \times 10 = 400$   $nb\_elem$ .

#### Calcul pour la SEM (ordre 4) :

*Remarque :* Le maillage décrit ici est la situation la plus favorable pour la SEM. Les éléments sont réguliers et il n’y a donc que huit voisins possibles pour chaque élément. En effet, pour la SEM, deux éléments sont voisins s’ils ont un sommet ou une arête commune

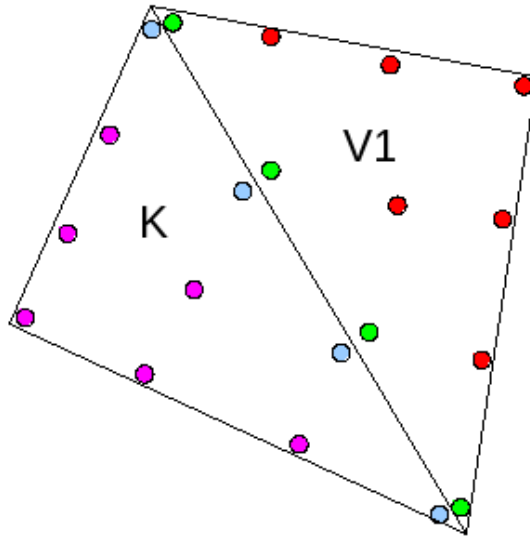


FIG. 3.12 – Un élément d’ordre quatre et un de ses voisins pour la IPDGM.

(pour la IPDGM, il faut une arête en commun). Dans le cas de maillages non réguliers, on peut avoir une situation comme sur la figure 3.13 où un sommet (en rouge) est commun à plus de quatre éléments.

- chaque élément  $K$  a 8 voisins ;
- on a 16 degrés de liberté par élément  $K$  ;
- chaque degré de liberté interne de l’élément  $K$  (en vert sur la figure 3.14) interagit avec lui même et les 15 autres de l’élément  $K$  : on a donc  $4 \times 16 = 64$  multiplications ;
- chaque coin (en mauve sur la figure 3.15) interagit avec lui même et les 48 degrés de liberté des 4 éléments auxquels il appartient. Il y a 4 coins, on devrait donc effectuer  $4 \times 49 = 196$  multiplications. Cependant, un coin appartient à 4 éléments : on a donc  $196/4 = 49$  interactions ;
- chaque degré de liberté d’une arête n’étant pas un coin (en mauve sur la figure 3.16) interagit avec lui même et les 27 autres des deux éléments auquel il appartient. Il y a huit degrés de liberté de ce type par élément, on devrait donc effectuer  $8 \times 28 = 224$  multiplications. Cependant, ces degrés de liberté appartiennent à deux éléments : on a donc  $224/2 = 112$  interactions.

Le nombre d’éléments non nuls de la matrice  $\mathcal{K}$  pour la SEM est donc de  $64 + 49 + 112 = 225 \text{ nb\_elem}$ , où  $\text{nb\_elem}$  est le nombre d’éléments du maillage. Pour la SEM, la matrice  $\mathcal{M}$  est diagonale, la matrice  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$  a donc le même nombre d’éléments non nuls que la matrice  $\mathcal{K}$ .

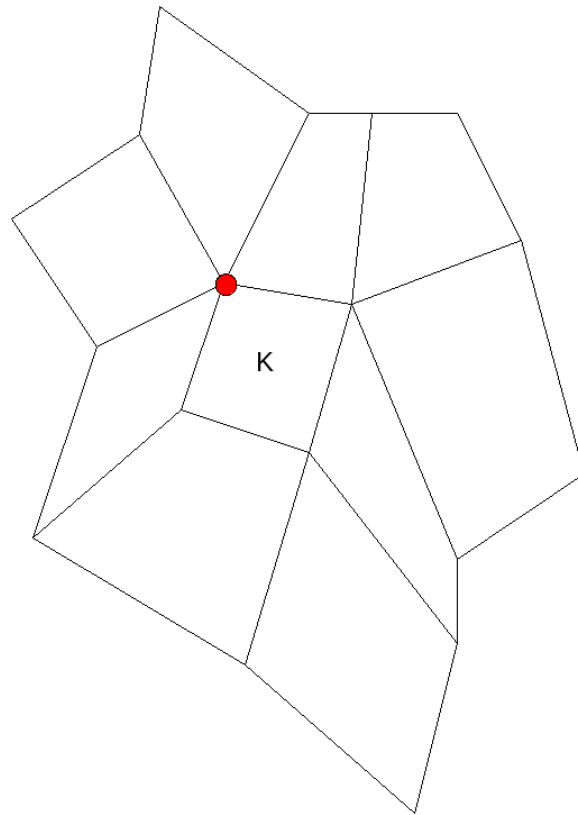


FIG. 3.13 – Exemple de maillage non régulier pour la SEM.

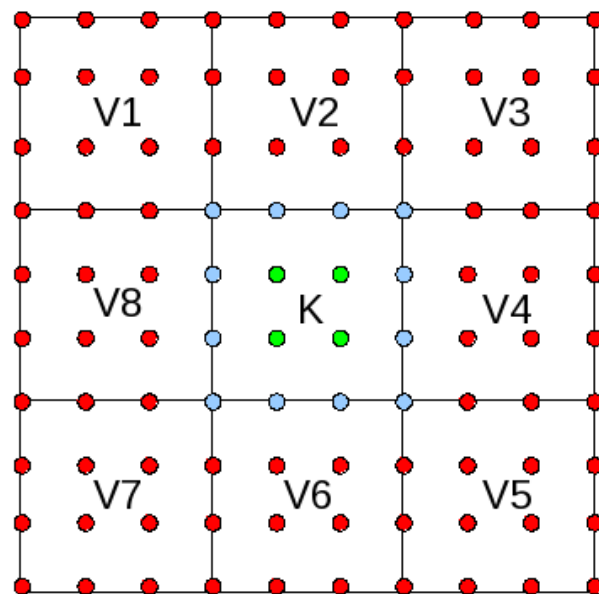


FIG. 3.14 – Un élément et ses huit voisins pour la SEM.



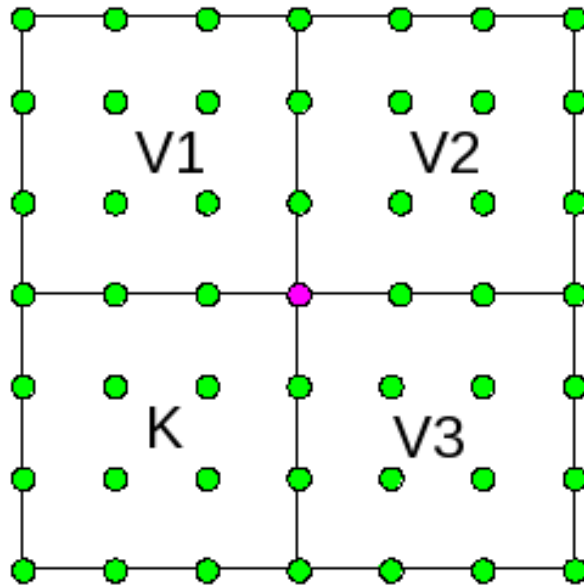


FIG. 3.15 – Un élément et trois de ses voisins pour la SEM.

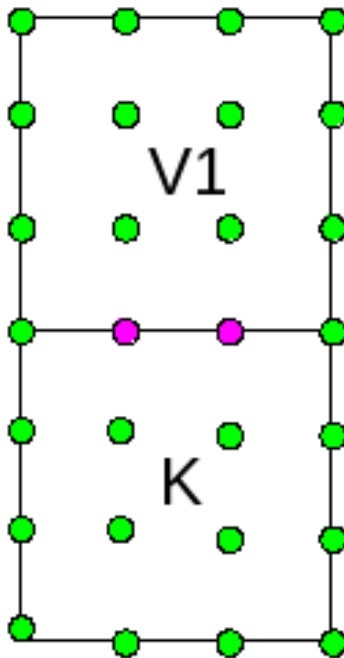


FIG. 3.16 – Un élément et un de ses voisins pour la SEM.

		Nombre d'éléments du maillage	Nombre d'éléments non nuls de $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$ (coût d'une itération)	Coût total	Erreur relative $L^2$
nb_ddl=147200	IPDGM	14720	5888000	$1.5 \cdot 10^{10}$	$4.3 \cdot 10^{-2}$
nb_ddl=139351	SEM	15400	3465000	$5.8 \cdot 10^9$	$4.7 \cdot 10^{-2}$
nb_ddl=336000	IPDGM	33600	13440000	$5.4 \cdot 10^{10}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=337771	SEM	37400	8415000	$2.4 \cdot 10^{10}$	$1.5 \cdot 10^{-2}$
nb_ddl=588800	IPDGM	58880	23552000	$1.2 \cdot 10^{11}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=552286	SEM	64400	14490000	$4.9 \cdot 10^{10}$	$1.1 \cdot 10^{-2}$
nb_ddl=920000	IPDGM	92000	36800000	$2.4 \cdot 10^{11}$	$2.1 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=919921	SEM	102000	22950000	$9 \cdot 10^{10}$	$8.3 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=1620000	IPDGM	162000	64800000	$5.2 \cdot 10^{11}$	$1.8 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=1622551	SEM	180000	40500000	$2.4 \cdot 10^{11}$	$3.8 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=2390000	IPDGM	239000	95600000	$9.6 \cdot 10^{11}$	$1.3 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=2384491	SEM	264600	59535000	$4.3 \cdot 10^{11}$	$2.6 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=2808000	IPDGM	280800	112320000	$1.2 \cdot 10^{12}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$
nb_ddl=2793361	SEM	310000	69750000	$5.9 \cdot 10^{11}$	$2 \cdot 10^{-3}$

TAB. 3.7 – Coût de calcul pour les méthodes IPDGM et SEM.

### Coût de calcul pour les maillages utilisés

Dans le tableau 3.7 nous avons calculé le coût de calcul d'une itération (correspondant aux éléments non nuls de la matrice  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}$ ), le coût de calcul total (correspondant au coût d'une itération multiplié par le nombre d'itérations) et nous avons rappelé les erreurs relatives  $L^2$  obtenues.

Nous pouvons voir que, pour un nombre de degrés de liberté donné, la IPDGM est deux fois plus précise que la SEM mais avec un coût de calcul deux fois plus grand. Cependant, si l'on compare les deux méthodes pour une précision donnée, nous pouvons remarquer que la IPDGM requiert 340000 degrés de liberté et un coût de calcul de  $5.4 \cdot 10^{10}$  pour atteindre une précision de 0.8% alors que la SEM requiert 920000 degrés de liberté et un coût de calcul de  $9 \cdot 10^{10}$ . Pour une précision de 0.2%, la IPDGM requiert 1620000 degrés de liberté et un coût de calcul de  $5.2 \cdot 10^{11}$  alors que la SEM requiert 2800000 degrés de liberté et un coût de calcul de  $5.9 \cdot 10^{11}$ .

### *e - Conclusion*

À précision égale les coûts de calcul et de stockage de la IPDGM sont inférieurs à ceux de la SEM. Par conséquent, l'utilisation de la IPDGM fournira plus rapidement une solution équivalente à celle de la SEM.

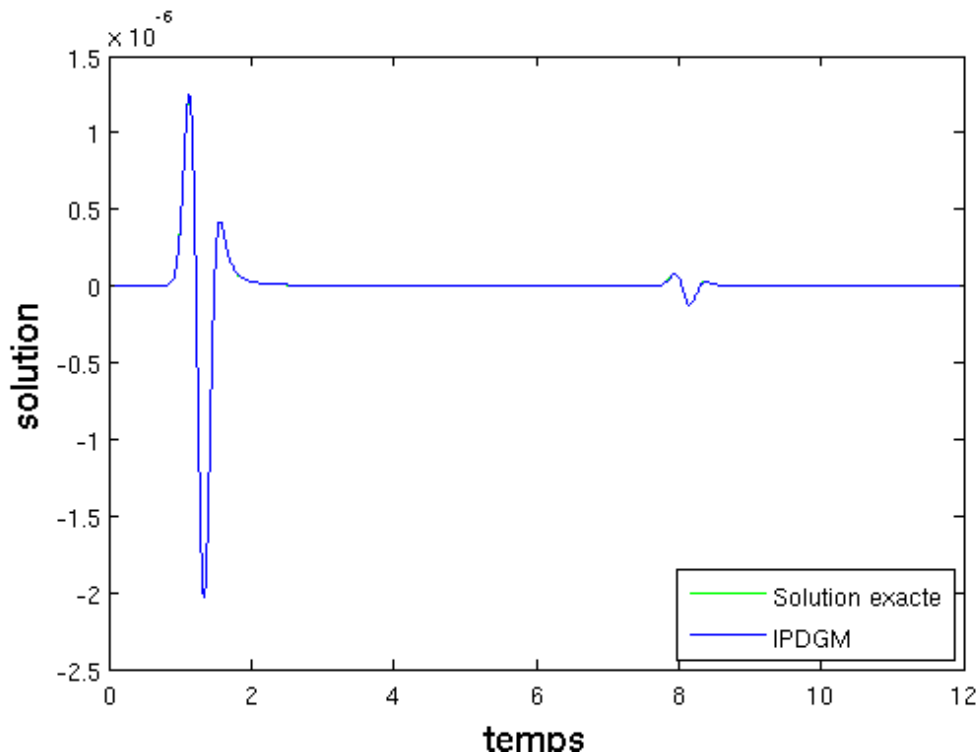


FIG. 3.17 – Résultats pour un récepteur situé à 1100m dans le domaine bicouche à interface inclinée avec la IPDGM

### Domaine bicouche à interface inclinée

Nous venons de voir que la IPDGM est plus performante que la SEM en ce qui concerne le temps de calcul. De plus, à l'heure actuelle, les maillages triangulaires ou tétraédriques sont beaucoup plus faciles à obtenir que les maillages rectangulaires ou hexaédriques et permettent une meilleure discrétisation de la surface du domaine (dans le cas de milieux avec de la topographie). Dans le cadre de ce travail, ces trois points sont très importants car la Reverse Time Migration effectuée sur terre est le résultat de la résolution successive de problèmes directs dans des domaines à surfaces irrégulières. Il faut donc une méthode efficace, rapide, et permettant de discrétiser au mieux la surface et c'est pour cela que nous avons retenu la IPDGM.

Pour finir la validation de la IPDGM, nous avons comparé la solution obtenue à la solution exacte dans un domaine présentant une interface inclinée afin de vérifier que la solution ne se dégrade pas comme c'est le cas avec la méthode GSP [32]. Le maillage utilisé comporte 390000 degrés de liberté soit 23 points par longueur d'onde.

La figure 3.17 représente les résultats obtenus.

nb_ddl	dt	err
393540	0.0016	0.0031
504720	0.0086	0.0015
754970	0.001269	0.000745
1070930	0.001268	0.000441
1294470	0.00102	0.000478
1813730	0.000898	0.000395
2259100	0.000799	0.000368

TAB. 3.8 – Erreurs relatives  $L^2$  obtenues avec la IPDGM dans le domaine bicouche à interface inclinée.

Nous pouvons constater que la solution calculée par la IPDGM correspond parfaitement à la solution exacte autant au niveau de l’onde directe que de l’onde réfléchie.

Nous calculons aussi grâce au code Matlab l’erreur relative  $L^2$  obtenue avec la IPDGM au point  $x_1$ . Les résultats sont donnés dans le tableau 3.8 et résumés dans les figures 3.18 et 3.19. Nous pouvons alors vérifier que, comme attendu, la méthode est d’ordre 2 comme le schéma en temps.

### 3.2.2.2 Le domaine Foothill

#### Adaptation du maillage

Nous considérons désormais que la IPDGM a été validée et nous analysons la qualité de la solution en fonction de celle du maillage. Nous voulons maintenant voir comment se comporte la IPDGM pour un domaine à surface irrégulière du type Foothill pour utiliser le terme consacré en ingénierie pétrolière (cf. Fig. 3.20). Nous prenons comme solution de référence celle obtenue avec un maillage fin et calculons une solution sur deux autres maillages dans laquelle seule la surface est maillée finement (cf. Fig. 3.21).

Le domaine Foothill fait 1440m de large et a une hauteur maximale de 830m. C’est un milieu hétérogène de vitesse  $c_2 = 3000\text{ms}^{-1}$  dans la couche inférieure  $[0, 1440] \times [0, 500]$  et  $c_1 = 1500\text{ms}^{-1}$  ailleurs. La source est localisée au point  $(x, y) = (300, 600)$  et a pour fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Nous imposons une condition de Dirichlet à la surface et une condition absorbante ailleurs. Le temps de simulation est de 1s et nous enregistrons les sismogrammes au niveau des capteurs situés à 600m et 400m de hauteur et régulièrement espacés de 10m.

Le maillage fin (cf. Fig. 3.21, en haut, n° 1) est composé de 65107 triangles, les deux autres, au milieu (n° 2) et en bas (n° 3), ont respectivement 21290 et 15202 éléments. La figure 3.22 montre les sismogrammes obtenus au niveau de la première ligne de récepteurs pour les différents maillages. La figure 3.23 représente ceux obtenus au niveau de la seconde

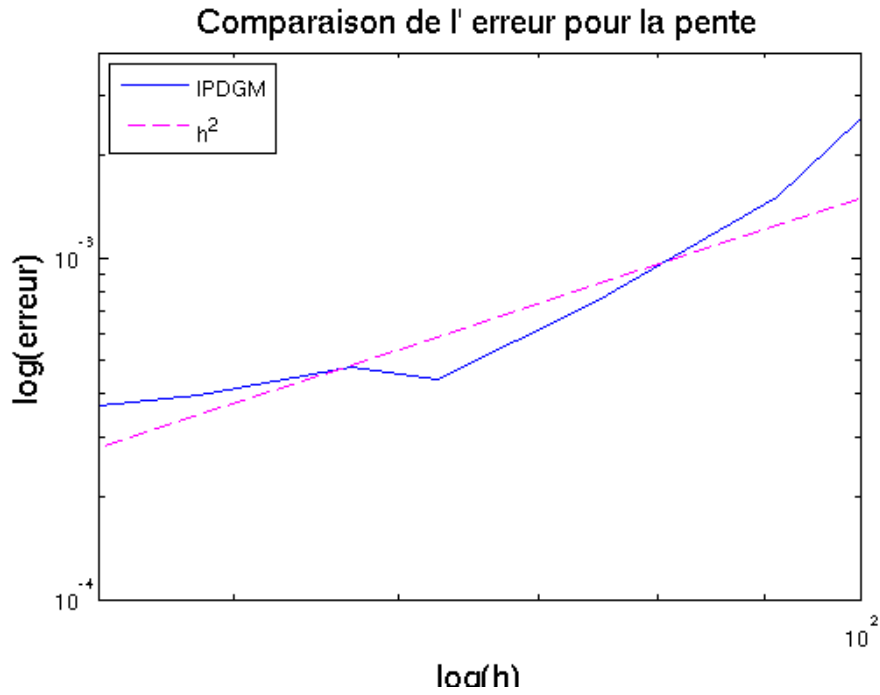


FIG. 3.18 – Erreurs obtenues avec la IPDGM dans le domaine bicouche à interface inclinée représentées en échelle logarithmique en fonction de  $h$ .

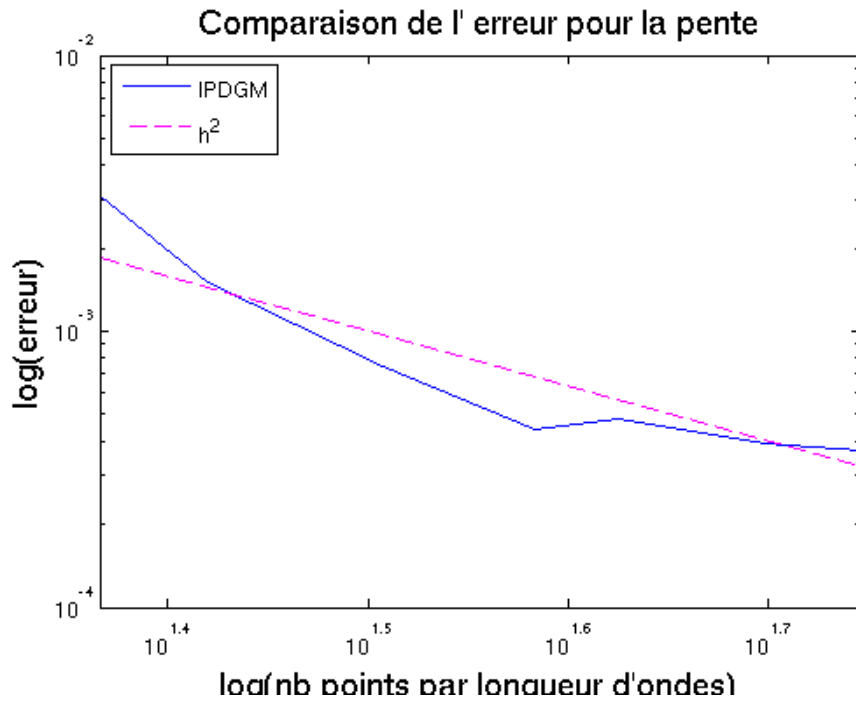


FIG. 3.19 – Erreurs obtenues avec la IPDGM dans le domaine bicouche à interface inclinée représentées en échelle logarithmique en fonction du nombre de points par longueur d'onde.

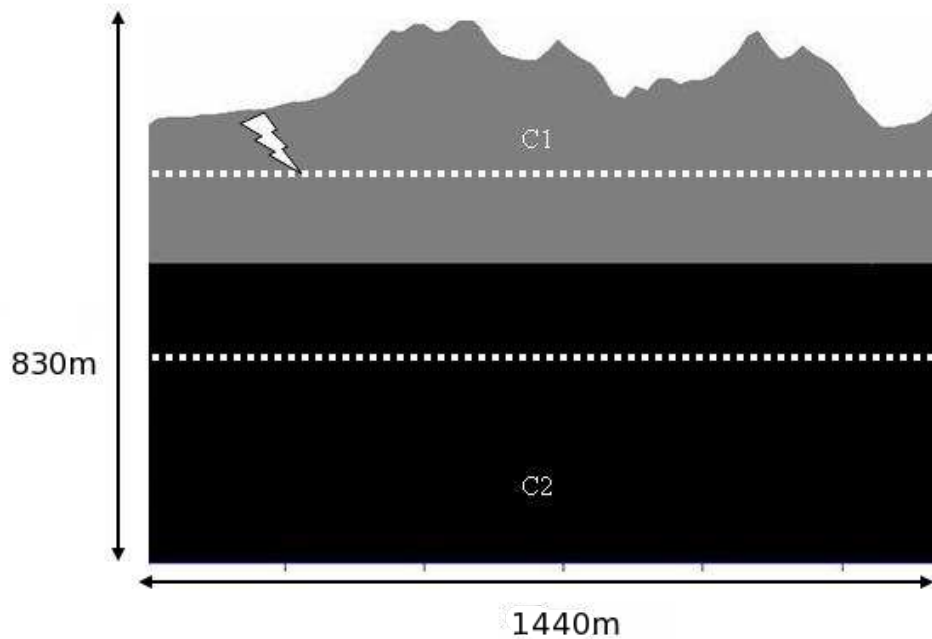


FIG. 3.20 – Le domaine Foothill.

ligne de capteurs. L'axe des ordonnées correspond à la position des récepteurs et celui des abscisses correspond au temps.

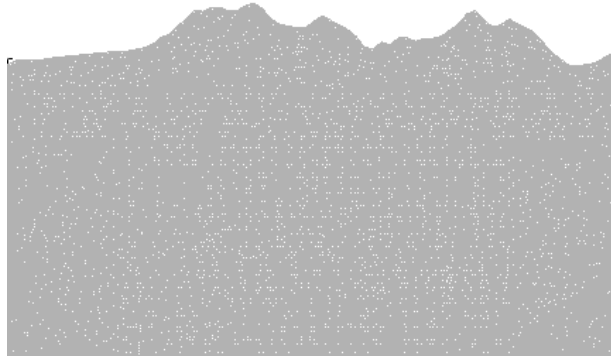
Dans les deux cas, nous pouvons constater que les sismogrammes correspondant aux deux premiers maillages sont semblables. En revanche, sur celui du dernier maillage, on commence à voir apparaître des ondes parasites au dessous de l'onde réfléchi. Le maillage est donc trop grossier, on commence à voir les effets de la dispersion numérique.

Nous pouvons en conclure qu'il n'est pas nécessaire d'avoir le même pas d'espace dans tout le domaine, il faut juste conserver un maillage fin aux endroits qui présentent des irrégularités et ailleurs la contrainte peut être relâchée en gardant cependant, un nombre de point par longueur d'onde minimum pour éviter le phénomène de dispersion numérique. Par conséquent, nous pouvons gagner en temps de calcul. Par exemple, le temps CPU est d'environ 50min pour le premier maillage, de 8min20s pour le second maillage. La deuxième expérience gagne donc 83% de temps CPU pour le même résultat au niveau des récepteurs.

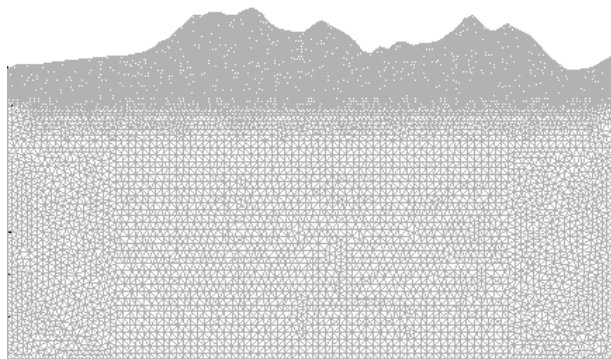
### Adaptation de l'ordre des éléments utilisés

Nous venons de voir dans le paragraphe précédent qu'il n'est pas nécessaire de mailler le domaine de calcul de façon uniforme. Nous devons préserver un maillage fin au niveau de la surface pour bien la discrétiser mais dans le reste du domaine, nous pouvons nous

Maillage de 65107 mailles, 32926 noeuds et 98032 aretes



Maillage de 21290 mailles, 10880 noeuds et 32169 aretes



Maillage de 15202 mailles, 7798 noeuds et 22999 aretes

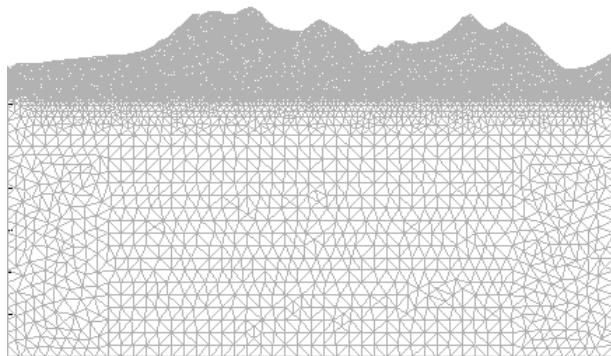


FIG. 3.21 – Les différents maillages utilisés.

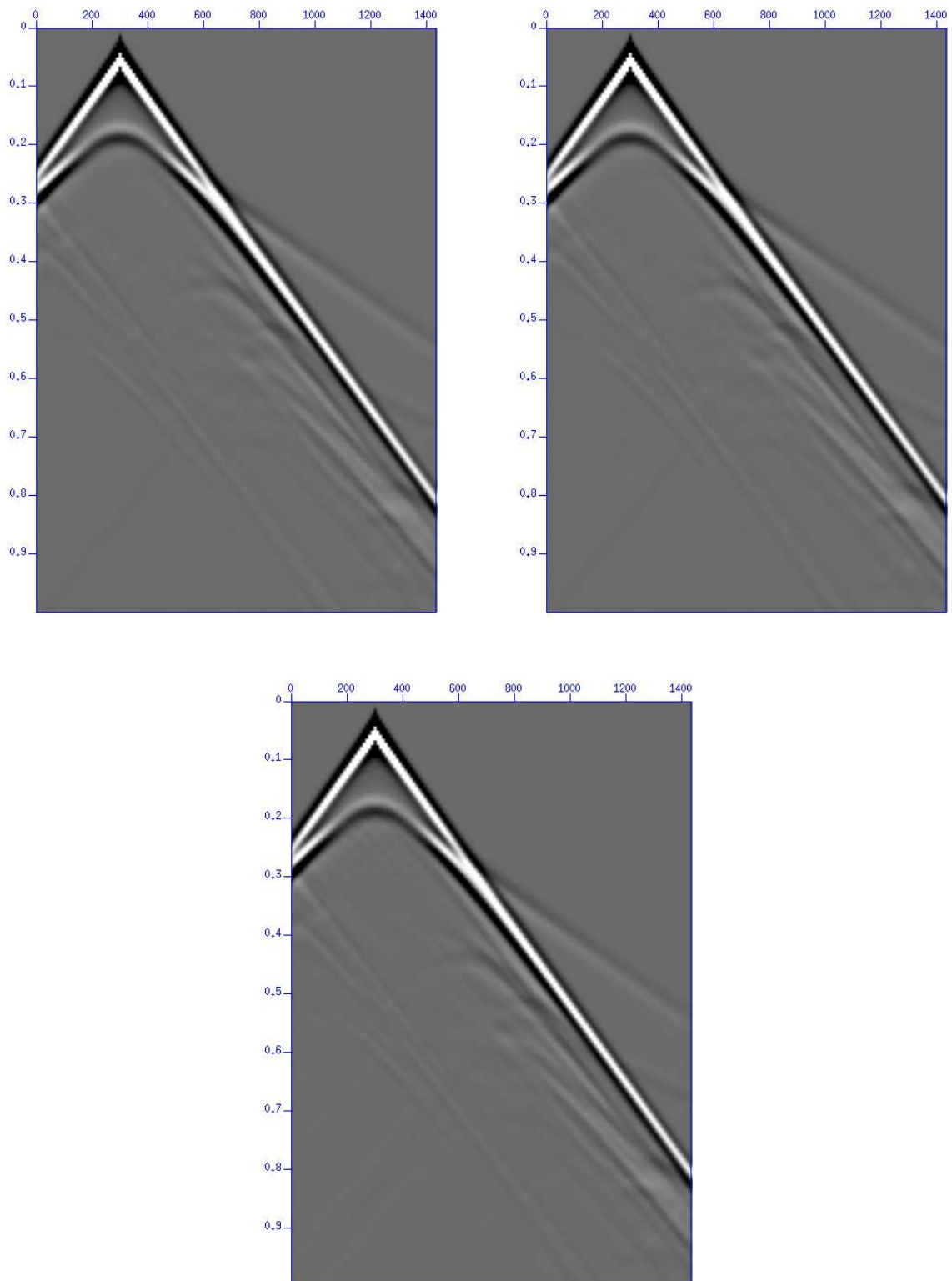


FIG. 3.22 – Sismogrammes obtenus pour la première ligne de récepteurs. En haut à gauche pour le maillage n° 1, en haut à droite pour le maillage n° 2 et en bas pour le maillage n° 3.



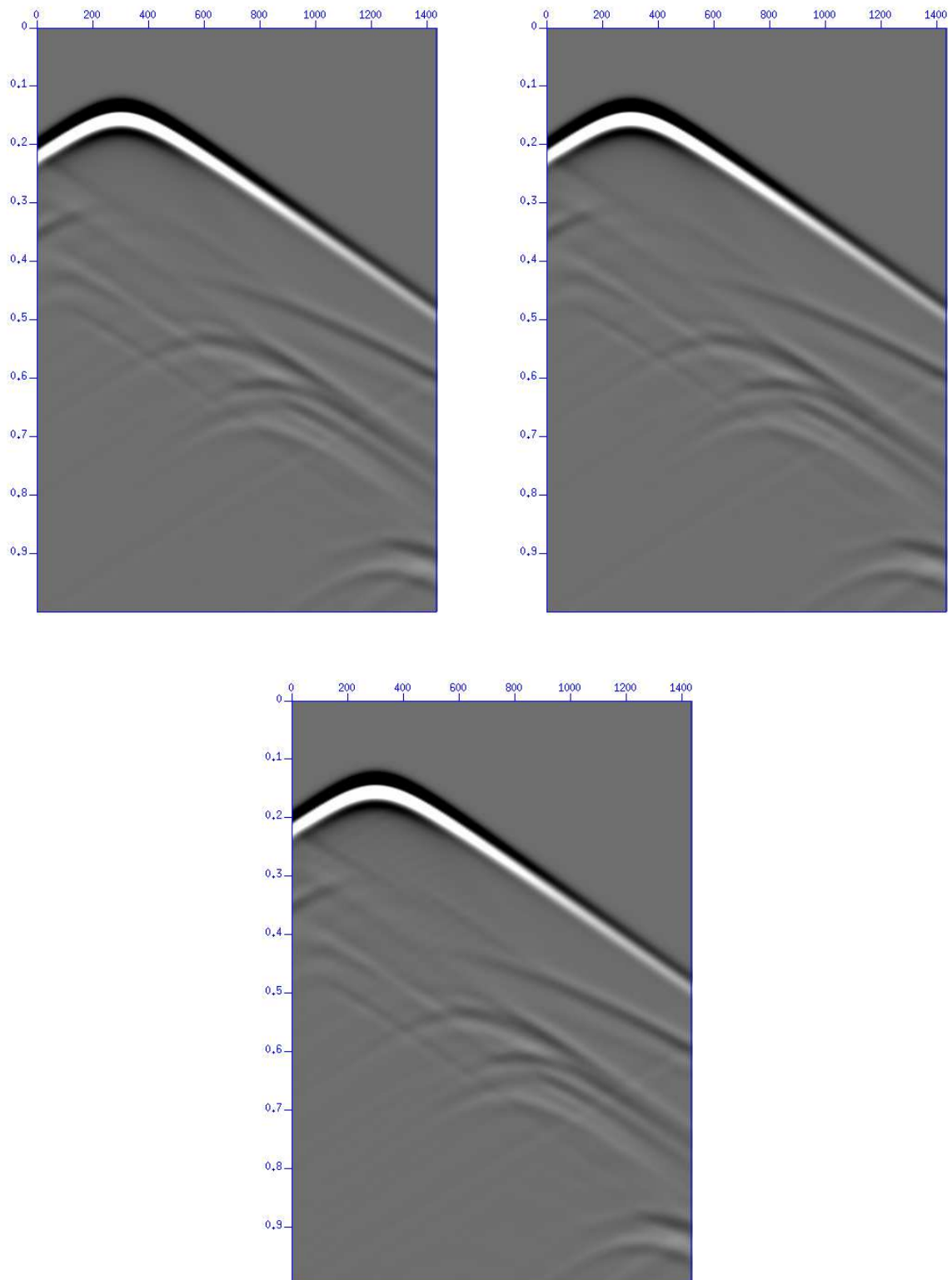


FIG. 3.23 – Sismogrammes obtenus pour la seconde ligne de récepteurs. En haut à gauche pour le maillage n ° 1, en haut à droite pour le maillage n ° 2 et en bas pour le maillage n ° 3.

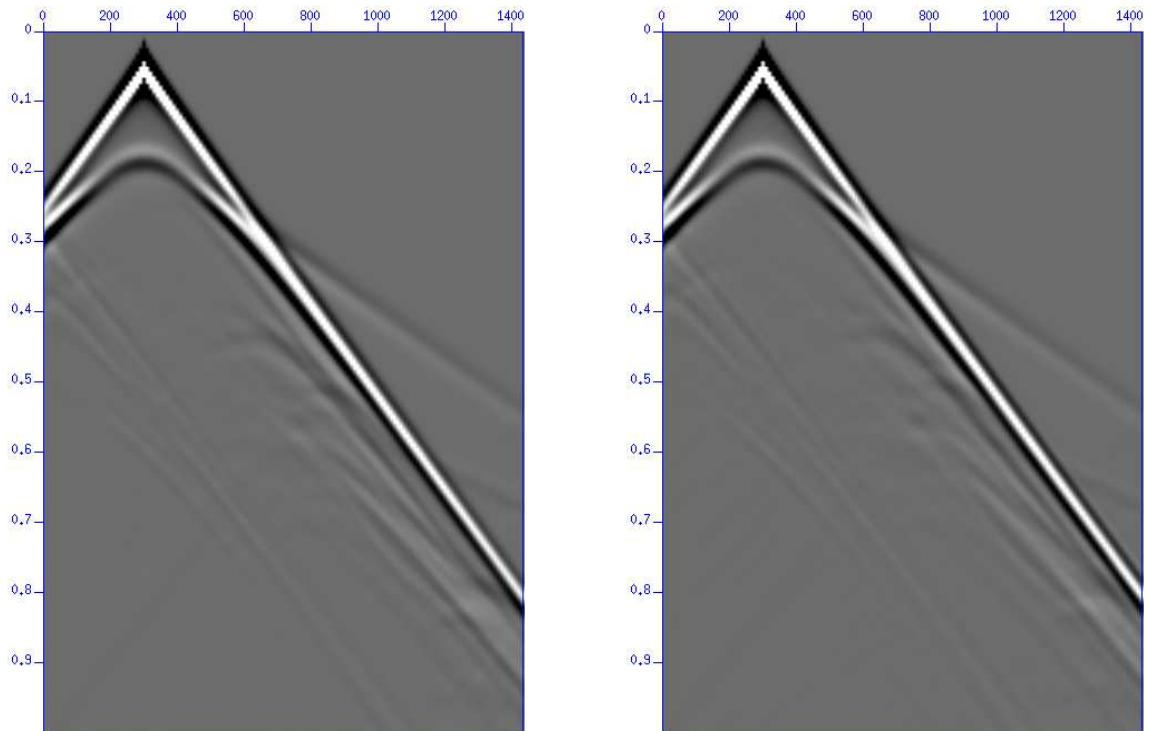


FIG. 3.24 – Sismogrammes obtenus pour la première ligne de récepteurs. À gauche pour le maillage n° 2 avec des éléments de Lagrange d’ordre 3, à droite pour le même maillage avec des éléments de Lagrange d’ordre 1 en surface et d’ordre 3 ailleurs.

permettre d’augmenter la taille des mailles utilisées. Il est donc légitime de se demander s’il est nécessaire de garder le même ordre d’approximation pour les éléments (de taille différente) utilisés. En effet, lorsque les éléments sont très raffinés, ils génèrent une erreur beaucoup plus faible que les éléments grossiers et on peut donc utiliser des éléments de bas degré dans la partie fine sans pénaliser l’erreur totale.

Nous avons utilisé dans cette expérience le maillage n° 2. Les figures 3.24 et 3.25 montrent les résultats obtenus lorsque l’on utilise des éléments  $P_1$  en surface et  $P_3$  dans le reste du domaine.

On peut remarquer qu’il n’y a aucune différence au niveau des sismogrammes quand on utilise des éléments avec des ordres d’approximation différents. On garde donc la même précision en ayant trois inconnues par élément au lieu de dix dans la partie fine. L’utilisation d’ordres différents en espace nous permet donc de gagner en temps et en espace mémoire sans pénaliser la solution numérique.

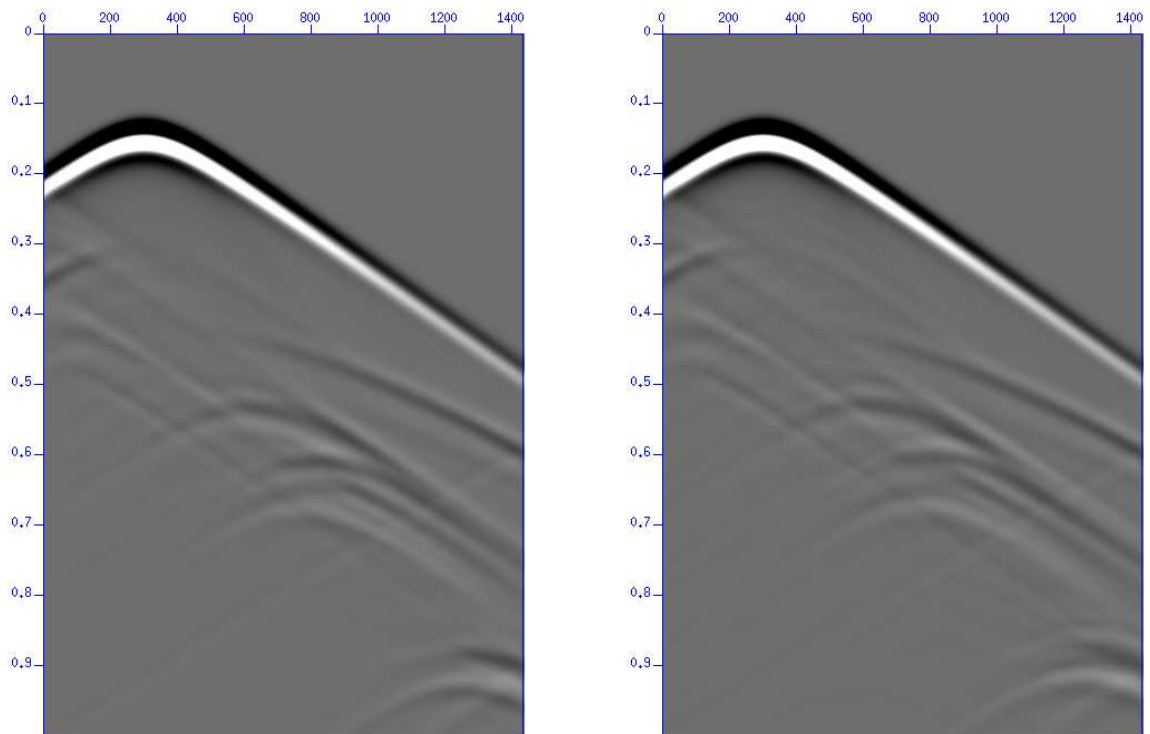


FIG. 3.25 – Sismogrammes obtenus pour la deuxième ligne de récepteurs. À gauche pour le maillage n° 2 avec des éléments de Lagrange d'ordre 3, à droite pour le même maillage avec des éléments de Lagrange d'ordre 1 en surface et d'ordre 3 ailleurs.

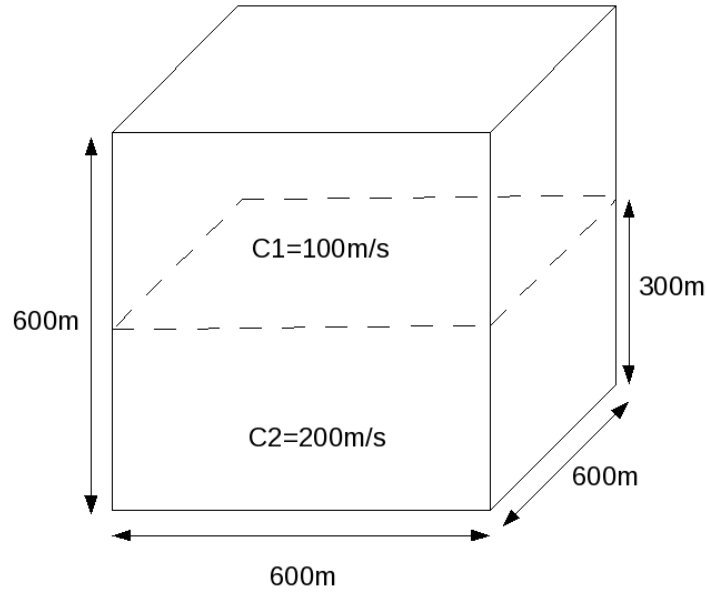


FIG. 3.26 – Domaine 3D.

### 3.2.3 Tests 3D

Pour finir l'analyse de la IPDGM, nous avons effectué quelques expériences en 3D. Pour cela, nous considérons un cube  $[0, 600] \times [0, 600] \times [0, 600]$  (cf. Fig. 3.26). La vitesse dans la partie supérieure  $[0, 600] \times [0, 600] \times [300, 600]$  est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 100\text{ms}^{-1}$ . Dans la partie inférieure  $[0, 600] \times [0, 600] \times [0, 300]$ , elle est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 200\text{ms}^{-1}$ . Les éléments que nous utilisons sont des éléments finis  $P_3$  et la source est du même type que dans les expériences 2D et de fréquence  $f = 2\text{Hz}$ . Elle est située au point  $(x, y, z) = (300, 300, 350)$ . De plus, nous imposons une condition absorbante sur toutes les frontières. Le temps de propagation est de 10s et nous enregistrons les sismogrammes au niveau de 16 récepteurs situés au même niveau que la source. L'ensemble source/récepteurs à la hauteur 350m est disposé de la manière décrite sur la figure 3.27.

Afin de valider nos résultats nous les comparons avec la solution exacte calculée avec la méthode de Cagniard de Hoop [44, 45]. Pour cela nous utilisons le code Gar6more3D développé par J. Diaz, A. Ezziani et N. Le Goff<sup>3</sup>.

Nous choisissons de regarder la solution au niveau du récepteur situé au point  $(x, y, z) = (260, 260, 350)$ . Les sismogrammes des figures 3.28, 3.29 et 3.30 ont été obtenus, respectivement, dans des maillages de 165438, 344210 et 412913 éléments d'ordre 4.

<sup>3</sup><http://www.spice-rtn.org/library/software/Gar6more3D>

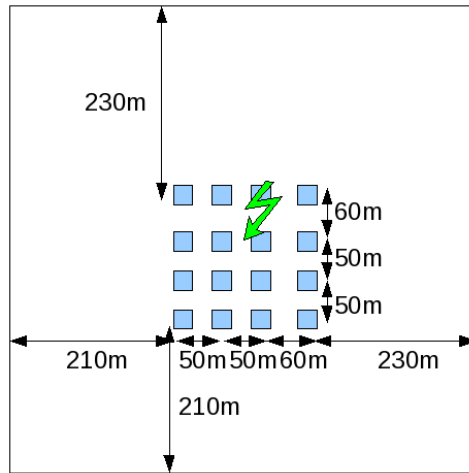


FIG. 3.27 – Dispositif source/récepteur du domaine 3D.

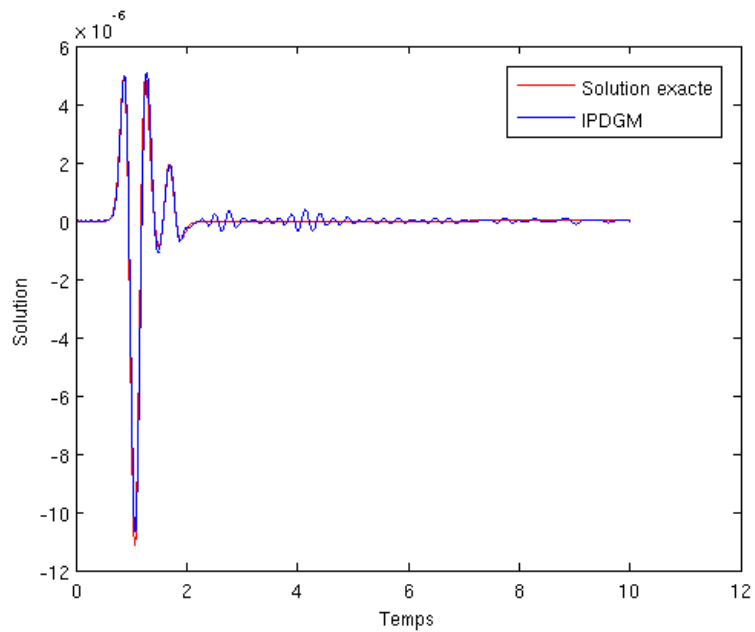


FIG. 3.28 – Comparaison entre la solution exacte et celle obtenue par la IPDGM pour un maillage de 165438 éléments.

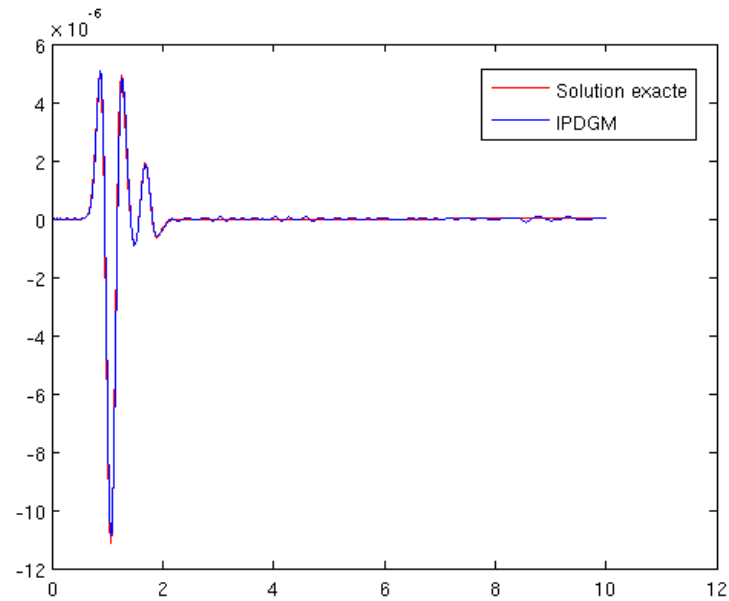


FIG. 3.29 – Comparaison entre la solution exacte et celle obtenue par la IPDGM pour un maillage de 344210 éléments.

Nous pouvons remarquer que nous obtenons, pour les trois expériences, les bons temps d'arrivée pour les ondes incidentes et réfléchies. Cependant, en ce qui concerne l'amplitude, nous voyons qu'elle n'est pas correcte pour les deux premiers maillages (cf. Fig. 3.28 et Fig. 3.29). De plus, nous apercevons des oscillations après l'onde réfléchie, d'autant plus fortes que le maillage est grossier. Pour le maillage le plus raffiné (cf. Fig. 3.30), la solution calculée avec la IPDGM et la solution exacte se confondent au niveau des ondes incidentes et réfléchies. Les oscillations après l'onde réfléchie sont faibles mais n'ont pas complètement disparu. Pour voir disparaître ce phénomène de dispersion numérique, il faudrait raffiner le maillage encore plus. Nous n'avons pas pu effectuer cette expérience car nous avons été limité par l'espace mémoire des calculateurs que nous avons à notre disposition.

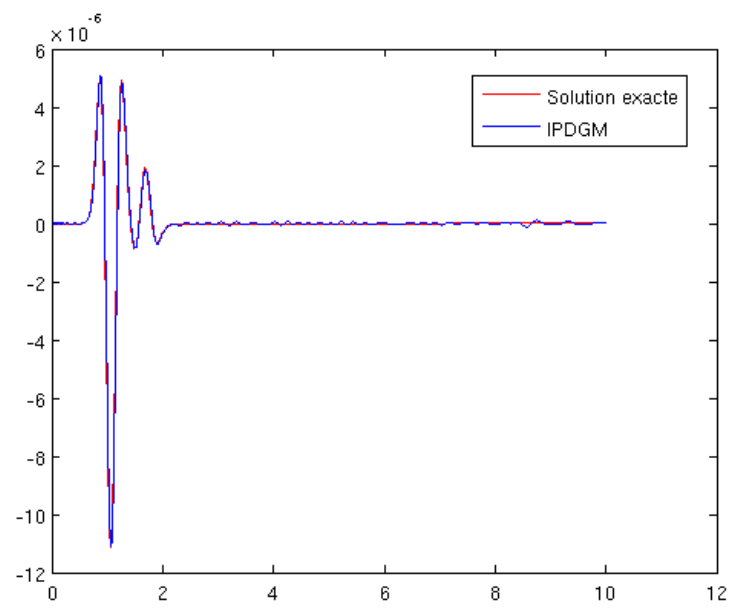


FIG. 3.30 – Comparaison entre la solution exacte et celle obtenue par la IPDGM pour un maillage de 412913 éléments.

# Chapitre 4

## Application à l'imagerie sismique

Dans le chapitre précédent, nous avons validé le code IPDGFem pour la résolution du problème direct. L'objet de ce chapitre est de montrer qu'il peut être utilisé pour la production d'images du sous-sol via la RTM. Dans un premier temps, nous avons intégré IPDGFem dans le code de simulation NWaves qui est développé à Total. Il s'agit de rendre le code compatible avec l'environnement informatique et logiciel de Total. Dans l'annexe A, le lecteur peut trouver un descriptif des étapes essentielles à la mise en oeuvre de la méthode numérique. Dans ce chapitre, nous présentons des résultats de migration 2D dont les données ont été générées par le code IPDGFem lui-même. Nous avons procédé étape par étape en considérant des milieux synthétiques de plus en plus compliqués et ensuite un milieu réaliste. Puis, nous décrivons les améliorations que nous avons apportées au code après validation afin de limiter les charges de calcul. Pour finir, nous avons considéré des données synthétiques générées par un autre code de simulation de Total reposant sur une approximation par différences finies.

Dans chacune des expériences numériques, nous utilisons des éléments finis d'ordre 4 et des sources ponctuelles en espace de la forme  $S(\mathbf{x}_s, t) = 2\pi^2 f^2 (2\pi^2 f^2 t^2 - 1) e^{-\pi^2 f^2 t^2} \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_s}$  où  $f$  désigne la fréquence,  $\mathbf{x}_s$  est un point situé à la surface  $\{z = 0\}$  et  $\delta_{\mathbf{x}-\mathbf{x}_s}$  désigne la mesure de Dirac au point  $\mathbf{x}_s$ . Les enregistrements des signaux réfléchis sont réalisés au niveau de récepteurs localisés eux aussi en surface. De plus, nous imposons une condition de Dirichlet en surface et la condition absorbante  $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\rho}} \nabla u \cdot \mathbf{n} = 0$  ailleurs.

### 4.1 Milieu bicouche

Nous considérons tout d'abord un domaine bicouche  $[0, 800] \times [0, 800]$  (cf. Fig. 4.1, page 94, en notant que la profondeur  $z$  est orientée vers le bas). La vitesse de propagation dans la couche supérieure  $[0, 800] \times [400, 800]$  est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 1500\text{ms}^{-1}$ . La vitesse dans la couche inférieure  $[0, 800] \times [0, 400]$  est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 3000\text{ms}^{-1}$ . Nous utilisons 31 sources à la fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 0.8s et nous enregistrons



les sismogrammes au niveau des récepteurs régulièrement espacés de 4m. Le maillage utilisé comporte 3594 éléments.

La figure 4.2, page 95, représente le sismogramme obtenu quand la source est située au milieu de la surface. L'axe vertical représente le temps (en secondes) et l'axe horizontal représente la position des récepteurs dans la direction  $x$  (en mètres).

Nous pouvons valider nos résultats en vérifiant que le temps de trajet surface/interface/récepteurs à la vitesse  $c_1$  correspond au temps indiqué par le sismogramme. De plus, nous pouvons remarquer des réflexions parasites dues aux conditions absorbantes peu performantes.

La figure 4.3, page 96, représente l'image finale obtenue par la RTM. Elle est construite en sommant les images partielles de tous les points de tirs.

Nous pouvons constater que l'interface est bien située à la profondeur de 400m. De plus, l'interface n'est pas parfaitement droite aux extrémités. Ceci est dû au fait qu'il n'y a pas de source aux extrémités de la surface  $x = 0\text{m}$  et  $x = 800\text{m}$ .

## 4.2 Milieu composé de quatre couches

Nous considérons ici un milieu  $[0, 2000] \times [0, 1200]$  composé de quatre couches comme le montre la figure 4.4, page 97. La vitesse dans la première couche  $[0, 2000] \times [900, 1200]$  est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 4500\text{ms}^{-1}$ . La deuxième et la troisième couche sont séparées par une interface en forme de marche d'escalier. La vitesse dans la deuxième couche est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 1500\text{ms}^{-1}$  et, dans la troisième, elle est notée  $c_3$  avec  $c_3 = 3000\text{ms}^{-1}$ . Le haut de la marche est situé à une profondeur de 500m et le bas est à une profondeur de 650m. Pour la dernière couche  $[0, 2000] \times [0, 300]$ , la vitesse est notée  $c_4$  avec  $c_4 = 6000\text{ms}^{-1}$ . Nous utilisons 79 sources à la fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 1.9s et nous enregistrons les sismogrammes au niveau des récepteurs régulièrement espacés de 4m. Nous utilisons un maillage de 12889 éléments.

La figure 4.5, page 98, représente l'image finale obtenue par la RTM.

Nous pouvons constater que les trois interfaces sont bien localisées à leurs profondeurs réelles.

## 4.3 Milieu composé de quatre couches et d'une surface pentée

Dans cette troisième expérience, le milieu que nous considérons est un milieu de 4000m de large et de profondeur maximale 4707m. Il est composé de quatre couches et comporte une surface pentée, comme le montre la figure 4.6, page 99. La vitesse dans la couche supérieure est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 4500\text{ms}^{-1}$ . Celle dans la deuxième couche est notée  $c_2$  avec

$c_2 = 1500\text{ms}^{-1}$  et celle dans la troisième est notée  $c_3$  avec  $c_3 = 3000\text{ms}^{-1}$ . Ces deux couches sont séparées par une interface en forme de marche d'escalier. Le haut de la marche est situé à une profondeur de 2207m et le bas est à une profondeur de 2707m. Dans la dernière couche  $[0, 4000] \times [0, 1000]$ , la vitesse est notée  $c_4$  avec  $c_4 = 6000\text{ms}^{-1}$ . Nous utilisons 15 sources à la fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 3.1s. Le maillage utilisé comporte 15001 éléments.

La figure 4.7, page 100, représente l'image finale obtenue par la RTM.

Nous pouvons ici aussi constater que les trois interfaces sont bien localisées à leurs profondeurs réelles.

## 4.4 Milieu composé de quatre couches et d'une surface à deux pentes

Dans cette quatrième expérience, le milieu que nous considérons est un milieu de 4000m de largeur et de profondeur maximale 4707m. Il est composé de quatre couches et présente une surface à deux pentes comme le montre la figure 4.8, page 101. La vitesse de propagation dans la couche supérieure est notée  $c_1$  avec  $c_1 = 4500\text{ms}^{-1}$ . Celle dans la deuxième couche est notée  $c_2$  avec  $c_2 = 1500\text{ms}^{-1}$  et celle dans la troisième est notée  $c_3$  avec  $c_3 = 3000\text{ms}^{-1}$ . Elles sont séparées par une interface en forme de marche d'escalier. Le haut de la marche est situé à une profondeur de 2207m et le bas est à une profondeur de 2707m. Dans la dernière couche  $[0, 4000] \times [0, 1000]$ , la vitesse est notée  $c_4$  avec  $c_4 = 6000\text{ms}^{-1}$ . Nous utilisons 15 sources à la fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 3.1s. Nous utilisons un maillage comportant 14922 éléments.

La figure 4.9, page 102, représente l'image finale obtenue par la RTM.

Nous remarquons, encore une fois, que les trois interfaces sont bien localisées à leurs profondeurs réelles.

## 4.5 Milieu complexe à surface irrégulière

Nous considérons ici un milieu complexe  $[0, 10000] \times [0, 10000]$  dont la surface est irrégulière, comme le montre la figure 4.10, page 103. L'intérieur du domaine présente des régions de tailles variables dans lesquelles la vitesse de propagation est soit  $c_1 = 2500\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_2 = 2700\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_3 = 3000\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_4 = 3500\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_5 = 4000\text{ms}^{-1}$ . Le maillage que nous utilisons est composé de 68375 éléments.

## 4.5.1 Résultat de la propagation

### 4.5.1.1 Fréquence de 20Hz

Dans cette première expérience, nous appliquons une source au point de la surface situé en  $x = 3000\text{m}$ , à la fréquence  $f = 20\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 7s.

La figure 4.11, page 104, montre l'évolution de la propagation au cours du temps.

Nous pouvons voir les ondes se réfléchir sur les différentes interfaces du milieu. Nous remarquons aussi des effets de dispersion numérique en quantité non négligeable.

La figure 4.12, page 105, représente le sismogramme obtenu.

Nous pouvons y retrouver les effets de dispersion numérique observés lors de la propagation.

### 4.5.1.2 Fréquence de 10Hz

Afin d'illustrer l'influence des phénomènes de dispersion numérique constatés dans l'expérience ci-dessus, nous avons reproduit l'expérience en utilisant cette fois une source à la fréquence  $f = 10\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 7s.

La figure 4.13, page 105, représente le sismogramme obtenu et la figure 4.14, page 106, représente le résultat de la propagation à différents temps.

Nous pouvons remarquer que, contrairement au cas précédent, il n'y a pas de dispersion numérique, ce qui illustre l'impact du nombre de points par longueur d'onde  $\lambda$  sur la qualité des résultats. Ici, en diminuant la fréquence  $f = \frac{c}{\lambda}$ , on augmente le nombre de points par longueur d'onde et on élimine ainsi le phénomène de dispersion numérique.

## 4.5.2 Image finale

La figure 4.15, page 107, représente l'image obtenue par la RTM en utilisant 100 sources à la fréquence  $f = 10\text{Hz}$ .

Nous pouvons constater que l'on retrouve bien les interfaces n° 1, n° 2 et n° 3 ainsi que le pic (n° 4), le flanc gauche (n° 5) et le haut du dôme (n° 6) (cf. Fig. 4.16, page 108). En revanche, nous ne retrouvons pas les parties n° 7, 8, 9 et 10. Cela s'explique par le fait que les champs d'ondes provenant de ces flancs (cf. Fig. 4.17, page 109) sortent du domaine sans être enregistrés par les récepteurs. Ces informations ne sont donc pas présentes dans les données utilisées pour la rétro-propagation et par conséquent les parties n° 7, 8, 9 et 10 ne sont pas imagées.

## 4.6 Milieu réaliste

Nous considérons à présent un milieu complexe  $[0, 15000] \times [0, 5000]$  dont la surface est irrégulière et des zones de tailles variables où la vitesse de propagation est soit  $c_1 = 2500\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_2 = 2700\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_3 = 3000\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_4 = 3500\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_5 = 4000\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_6 = 4500\text{ms}^{-1}$ , soit  $c_7 = 5500\text{ms}^{-1}$  comme le montre la figure 4.18, page 109. Nous utilisons 100 sources à la fréquence  $f = 10\text{Hz}$ . Le temps de simulation est de 4s. Nous utilisons ici un maillage de 61999 éléments.

### 4.6.1 Résultat de la propagation

La figure 4.19, page 110, montre l'évolution de la propagation au cours du temps pour la source située au point  $(x, z) = (7000, 0)$ .

Nous pouvons voir les ondes se réfléchir sur les différentes interfaces du milieu.

### 4.6.2 Image finale

La figure 4.20, page 111, représente l'image obtenue par la RTM.

Nous pouvons constater que l'on retrouve bien toutes les interfaces. Le domaine est assez étendu pour que tous les champs d'ondes provenant des différentes interfaces soient enregistrés par les récepteurs. Par conséquent, on image correctement tout l'intérieur du domaine.

## 4.7 Optimisation du code

### 4.7.1 Adaptation du domaine de calcul

Lors des acquisitions sismiques, un couple source/récepteurs ne couvre pas tout le domaine que l'on veut imager. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle on utilise plusieurs points de tirs en déplaçant l'ensemble tout le long de la surface. Cela paraît donc évident qu'il est inutile de faire des calculs dans la zone non couverte. Il faut alors adapter la région d'intérêt à celle délimitée par la source et les récepteurs.

La figure 4.18, page 109, représente le domaine initial que l'on veut imager et la figure 4.21, page 112, montre le domaine réellement utilisé quand la source est située en  $x = 750\text{m}$ ,  $x = 6000\text{m}$  et  $x = 12375\text{m}$ . Les maillages utilisés comportent alors respectivement, 23438, 41512 et 31672 éléments.

Cette adaptation du domaine de calcul a pour but de nous faire gagner en temps CPU. Cela se vérifie en pratique puisque le temps de calcul pour effectuer la migration dans le domaine initial est de 2h30min alors qu'il est de 1h27min pour le domaine adapté. Nous obtenons donc un gain d'environ 42%. Cependant, il faut tout de même vérifier que cela

n'affecte pas le résultat de l'image finale.

La figure 4.22, page 113, représente l'image obtenue par la RTM en utilisant des domaines adaptés pour chaque couple source/récepteurs.

Nous pouvons constater qu'il n'y a pas de différences visibles par rapport à celle obtenue dans le domaine initial (cf. Fig. 4.20, page 111). Nous pouvons donc conclure que l'on peut utiliser cette option du code pour gagner en temps de calcul sans craindre d'affecter la précision de l'image finale.

## 4.7.2 Adaptation du maillage

Une des quantités importantes à prendre en compte lorsque l'on effectue la propagation (ou la rétro-propagation) est le nombre de points par longueur d'onde. Cette valeur est calculée en fonction de la taille des éléments, de la vitesse du milieu et de la fréquence de la source. Dans les expériences de la sismique, il est courant de prendre entre 8 et 10 points par longueur d'onde. Pour avoir un nombre de points par longueur d'onde fixe dans un milieu hétérogène, en sachant que la fréquence de la source ne change pas et que la vitesse varie, on peut changer la taille des éléments à chaque changement de vitesse. Cela permet de garder la même précision dans tout le domaine en n'effectuant que les calculs nécessaires, ni plus ni moins.

L'adaptation du maillage a pour but, tout comme l'adaptation du domaine de calcul, de nous faire gagner en temps de calcul sans affecter la qualité de l'image finale. Cela se confirme par les résultats obtenus. En effet, le temps de calcul pour effectuer la migration dans le domaine initial et utilisant le même maillage que dans le paragraphe 4.6 est de 2h30min alors qu'il est ici de 1h25min soit, 45% de gain pour le domaine utilisant le maillage adapté (44823 éléments).

La figure 4.23, page 113, représente l'image finale que nous obtenons par la suite en effectuant la RTM.

Nous pouvons constater qu'il n'y a pas de différence visible par rapport à celle obtenue avec le maillage initial (cf. Fig. 4.20, page 111). En utilisant cette option, on gagne donc en temps CPU sans affecter la précision du résultat final.

## 4.7.3 Combinaison des deux adaptations

Nous avons réalisé ici la migration en adaptant non seulement la zone de calcul mais aussi le maillage correspondant à cette dernière. L'objectif visé est de gagner encore plus de temps CPU. Il est atteint puisque l'on passe d'une durée de 2h30min à 50min soit 66% de gain. De plus, sur la figure 4.24, page 114, nous pouvons vérifier que l'image finale n'est pas affectée par ces adaptations.

#### 4.7.4 Adaptation de l'ordre des éléments

Nous avons vu dans le chapitre 3 que la IPDGM permettait d'utiliser des éléments d'ordres différents dans le maillage. En effet, il est suffisant d'utiliser des éléments de bas degré dans les régions où l'on a des triangles de petite taille et des éléments de haut degré dans le cas contraire. Dans notre cas, afin de discrétiser le plus correctement possible la surface de notre domaine de calcul, nous utilisons en surface des éléments de petite taille que nous agrandissons dans le reste du domaine. C'est pour cela que nous avons effectué la migration dans le milieu représenté sur la figure 4.18, page 109, en utilisant des éléments d'ordre 1 jusqu'à une profondeur de 1000m et des éléments d'ordre 4 ailleurs.

La figure 4.25, page 114, montre le résultat obtenu. Nous pouvons constater que l'on retrouve bien, encore une fois, toutes les interfaces du domaine.

Nous analysons plus précisément cette technique dans le chapitre 5.

### 4.8 Milieu "vel\_dip "

Nous avons vu dans le paragraphe 4.7.1 que le fait de se limiter au domaine source/récepteurs n'a pas d'impact sur la précision du résultat final de la RTM. Ceci nous a permis de pouvoir considérer un domaine plus grand que ceux présentés précédemment. Nous considérons donc dans cette expérience, le domaine  $[0, 25000] \times [0, 10000]$  représenté sur la figure 4.26, page 115. Nous utilisons 250 sources à la fréquence  $f = 10\text{Hz}$  chacune associée à 200 récepteurs. Le temps de simulation est de 10s. De plus, les données utilisées pour la migration ont été générées par le code de migration (MigWE) par différences finies de Total afin de s'assurer que la IPDGM était en mesure de fournir l'image d'un sous-sol complexe en migrant des données générées par un autre code que IPDGFem en vu de son application sur données réelles.

La figure 4.27, page 115, représente l'image finale que nous obtenons.

Nous pouvons remarquer que l'on localise bien les différents dômes de sel. Cependant, nous constatons que certains flancs (très pentus ou profonds) ne sont pas imagés. Ceci est certainement dû au fait que l'on utilise 200 récepteurs pour une source. En effet les récepteurs sont espacés de 12.5m, cela fait donc une zone de propagation de 2500m, ce qui est insuffisant pour enregistrer les réflexions provenant de ces flancs. Nous avons déjà rencontré ce type de problème dans le paragraphe 4.5.2. Nous pensons que si l'on double la surface de propagation (soit 400 récepteurs), l'image finale devrait être améliorée. Cependant, la taille du domaine et le temps de calcul nécessaire à la migration (environ trois jours en migrant 25 points de tirs simultanément) ne nous ont pas permis d'obtenir pour l'instant le résultat final.

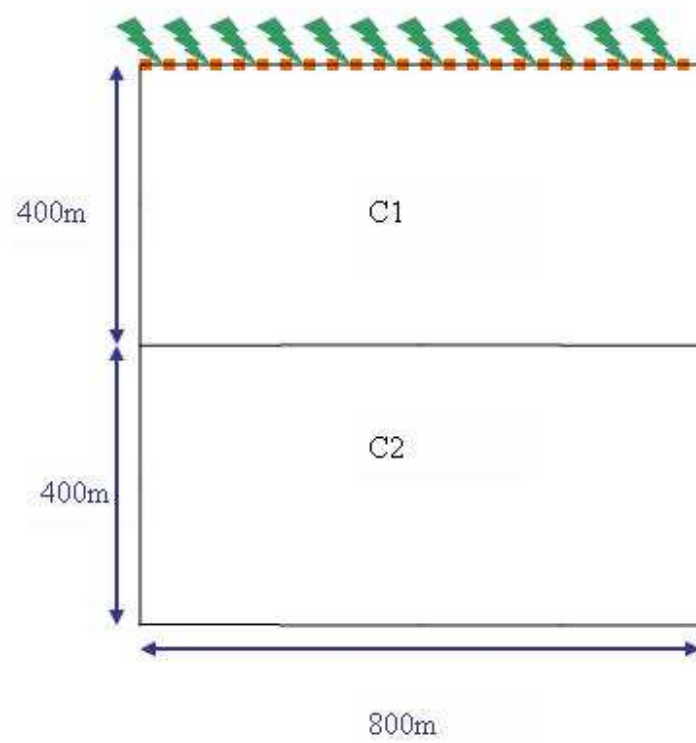


FIG. 4.1 – Expérience réalisée dans le milieu bicouche.

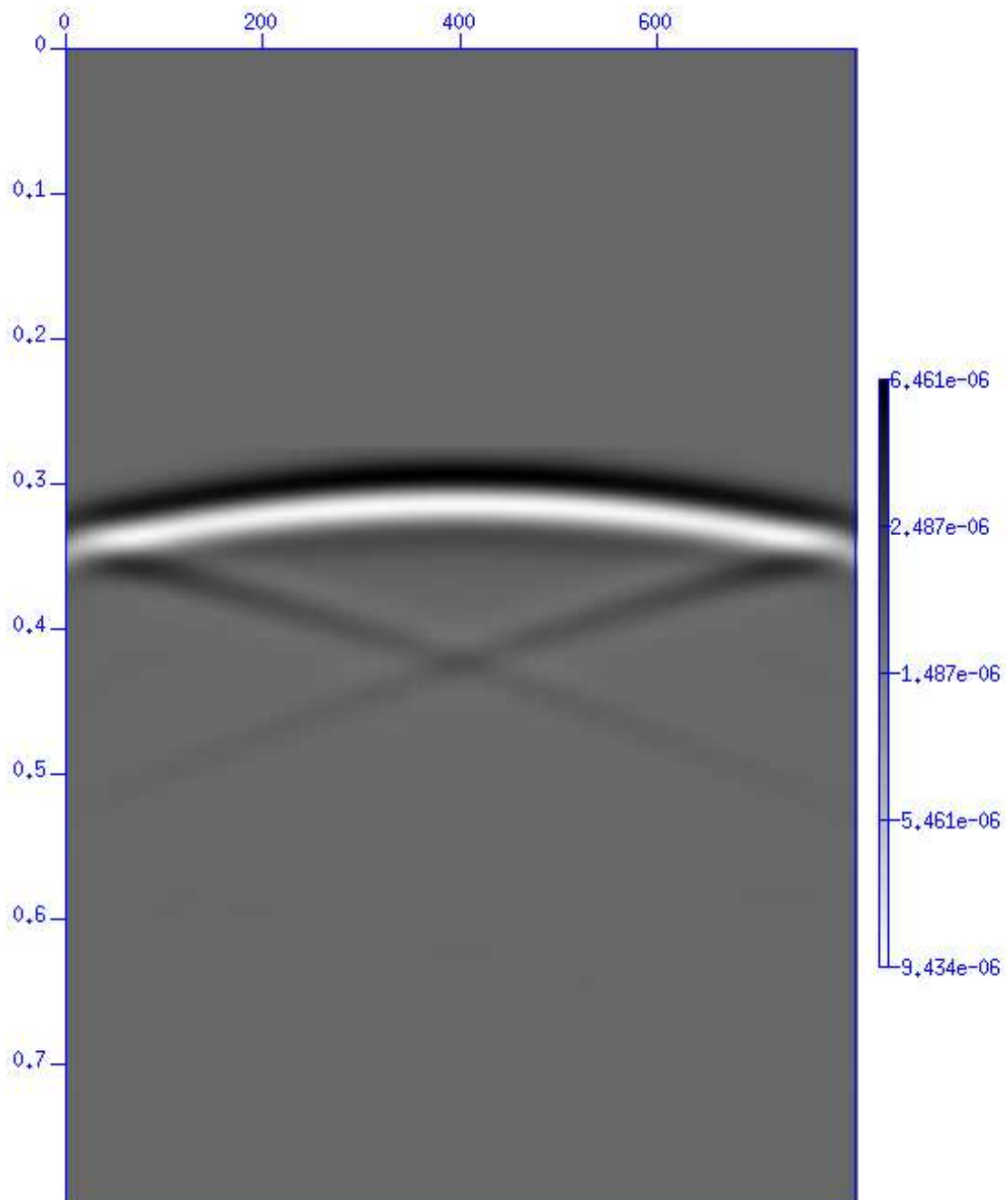


FIG. 4.2 – Sismogramme obtenu pour la source située a  $x = 400\text{m}$  dans le domaine bicouche.



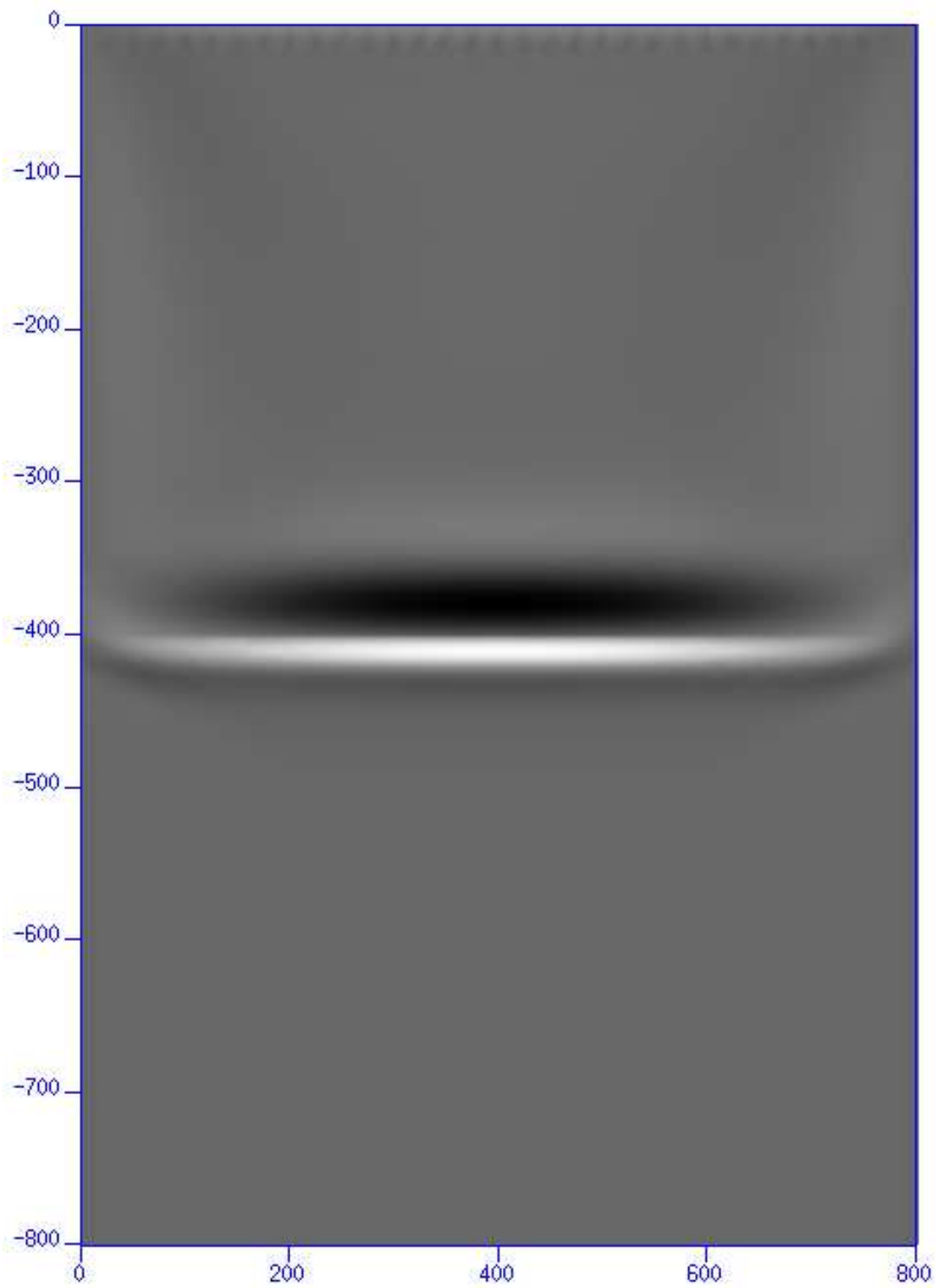


FIG. 4.3 – Image finale du milieu bicouche.

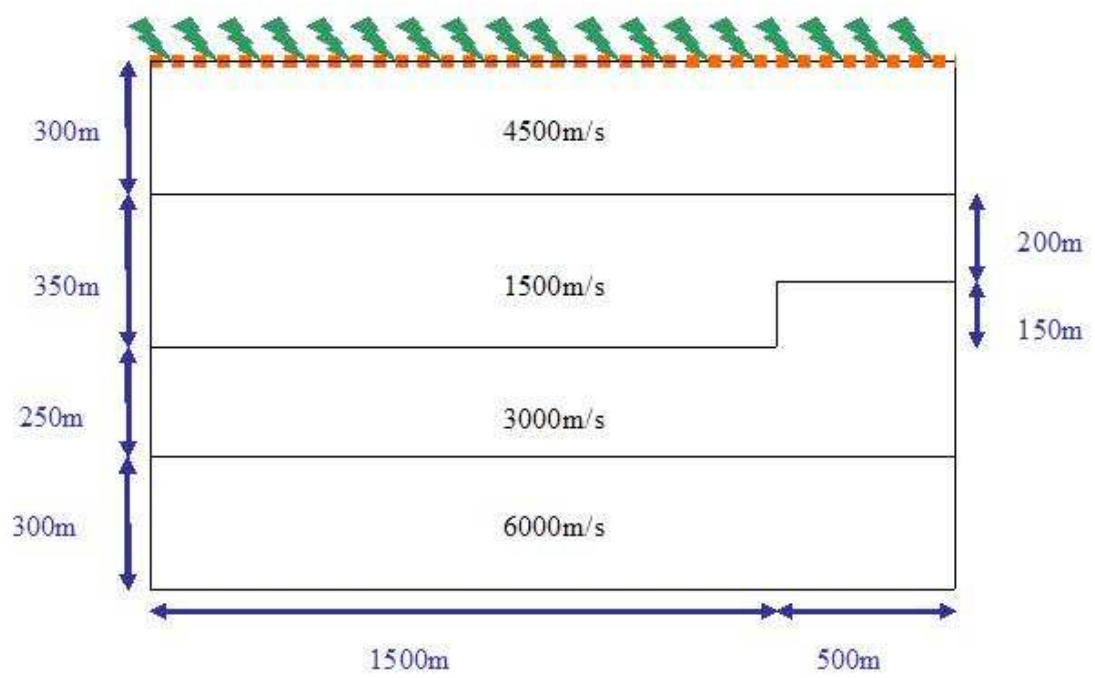


FIG. 4.4 – Expérience réalisée dans un milieu composé de quatre couches.

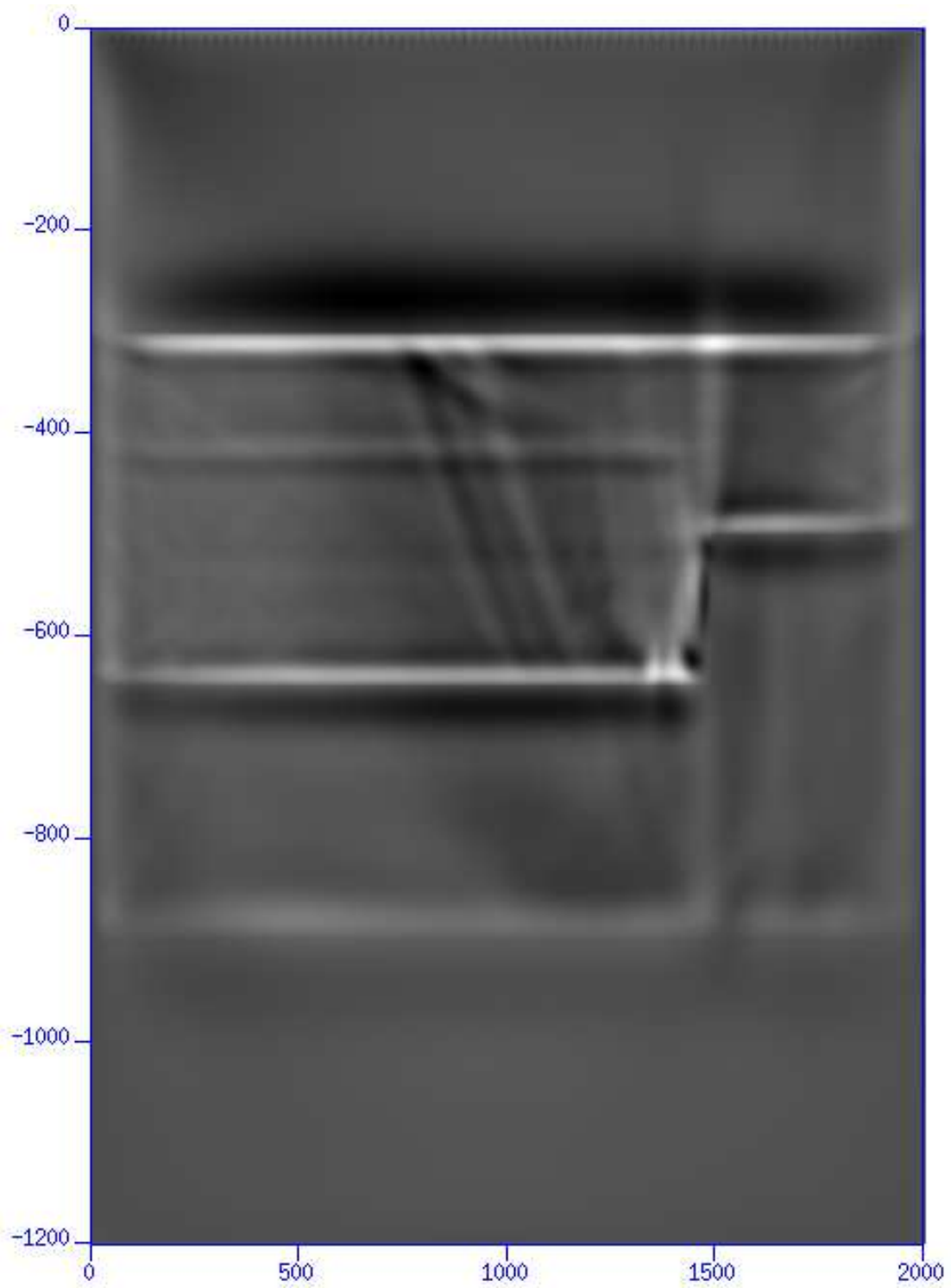


FIG. 4.5 – Image finale du milieu composé de quatre couches.

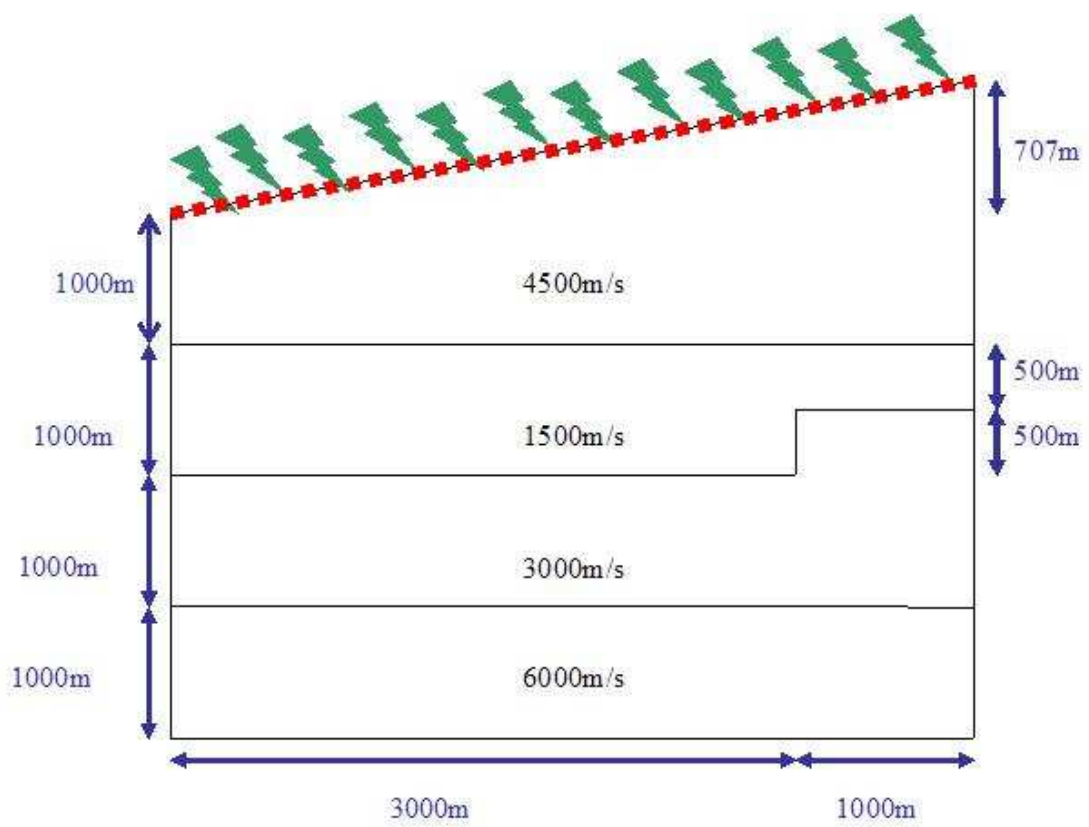


FIG. 4.6 – Expérience réalisée dans un milieu composé de quatre couches et d’une surface pentée.

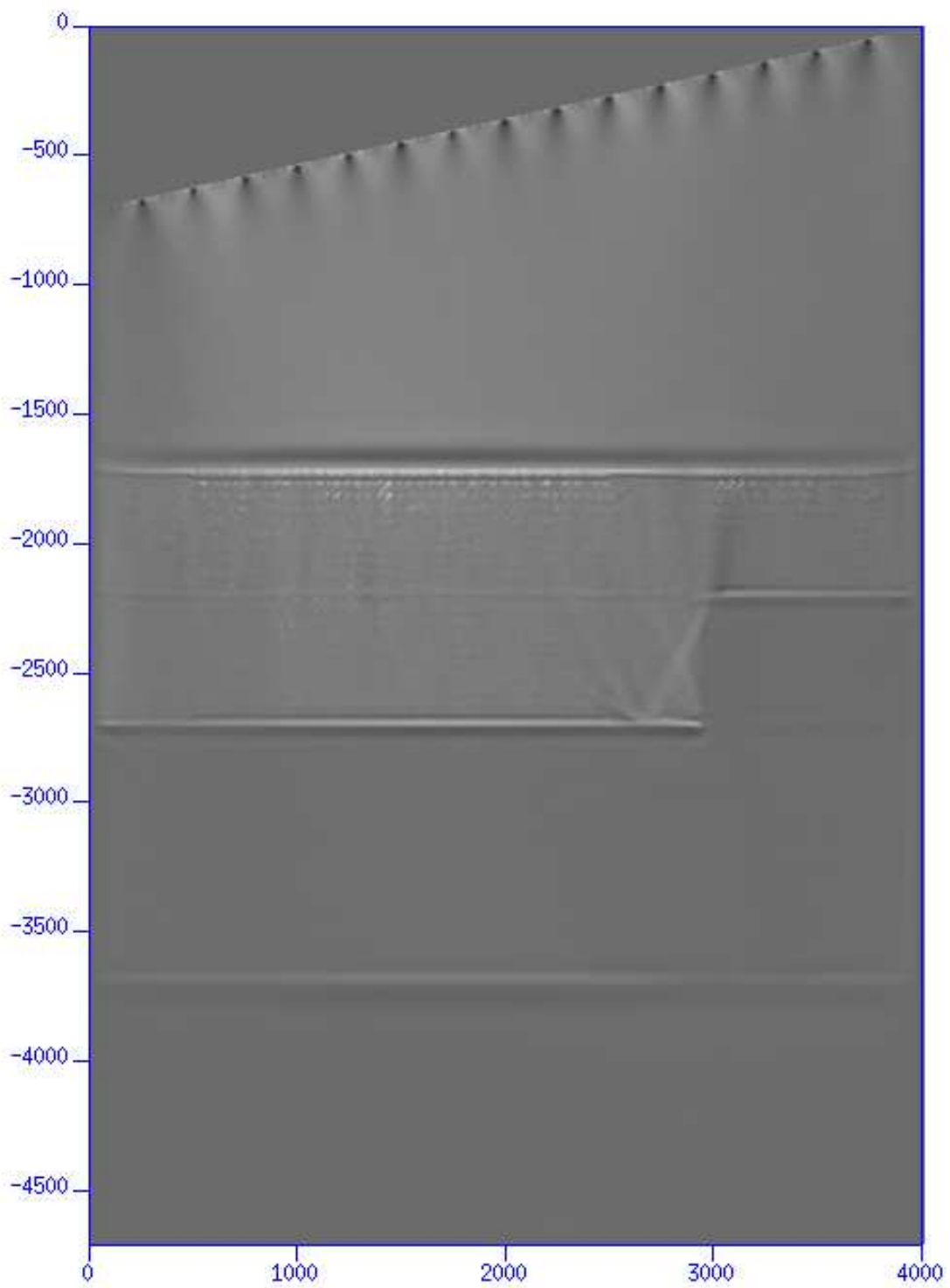


FIG. 4.7 – Image finale du milieu composé de quatre couches et d’une surface pentée.

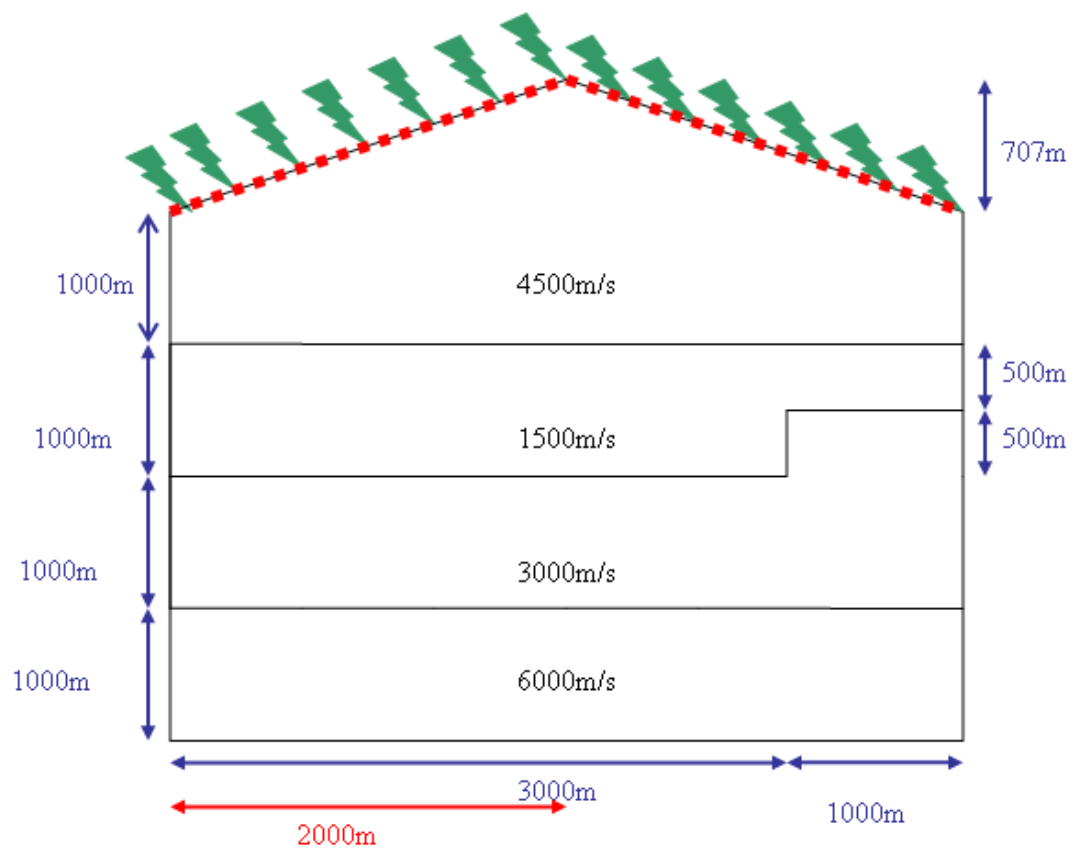


FIG. 4.8 – Expérience réalisée dans un milieu composé de quatre couches et d’une surface à deux pentes.

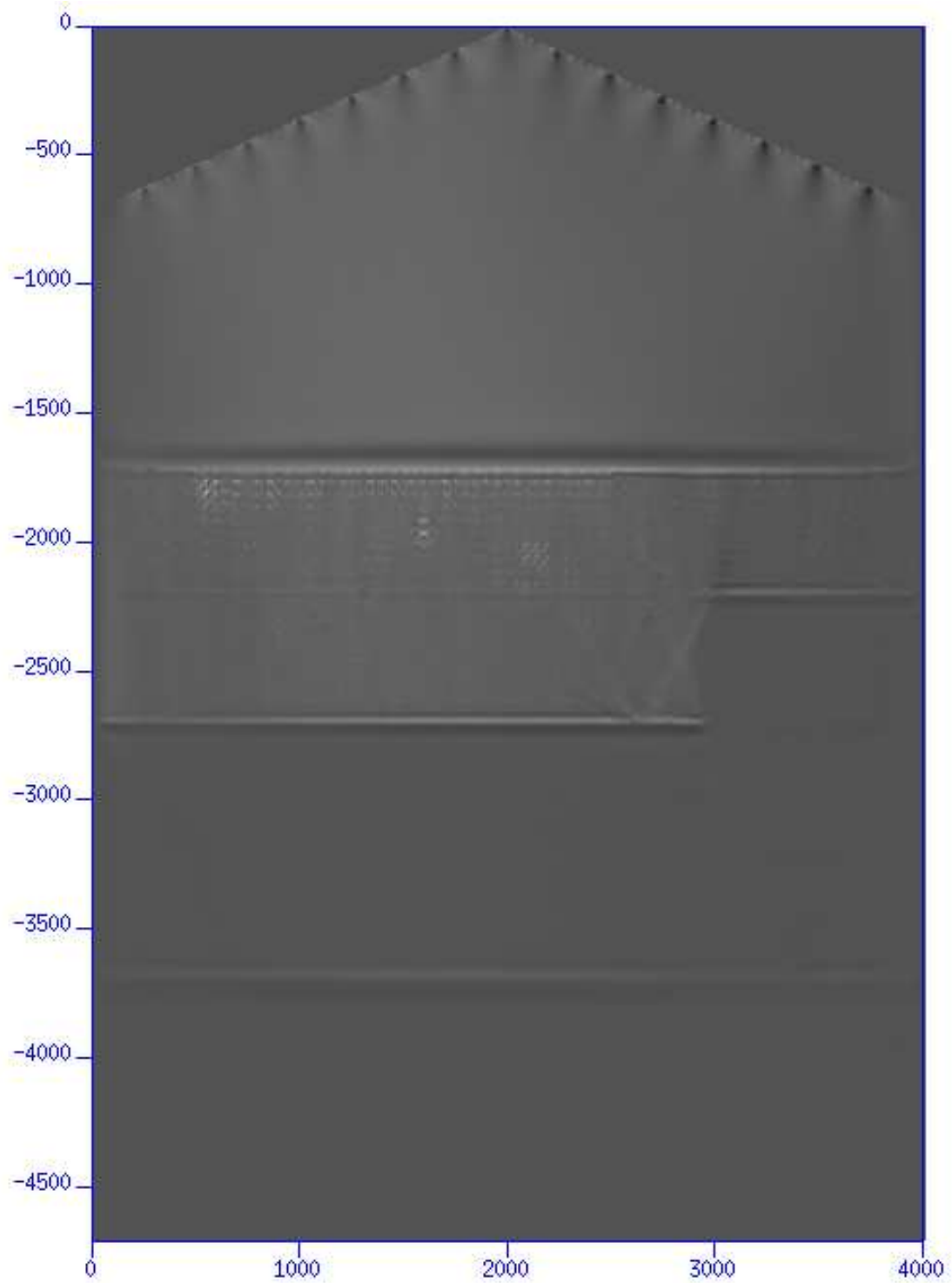


FIG. 4.9 – Image finale du milieu composé de quatre couches et d'une surface à deux pentes.

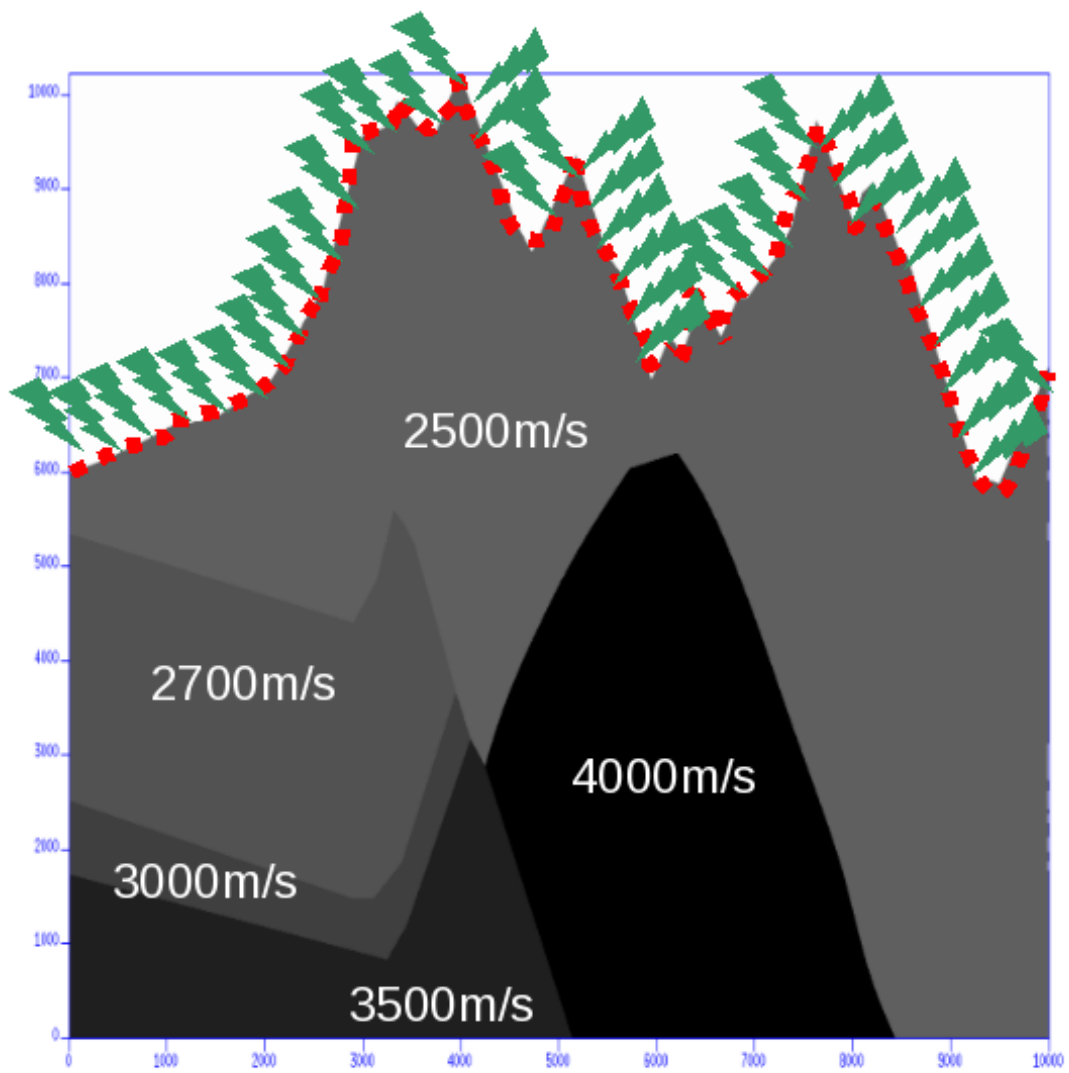


FIG. 4.10 – Expérience réalisée dans un milieu complexe à surface irrégulière.



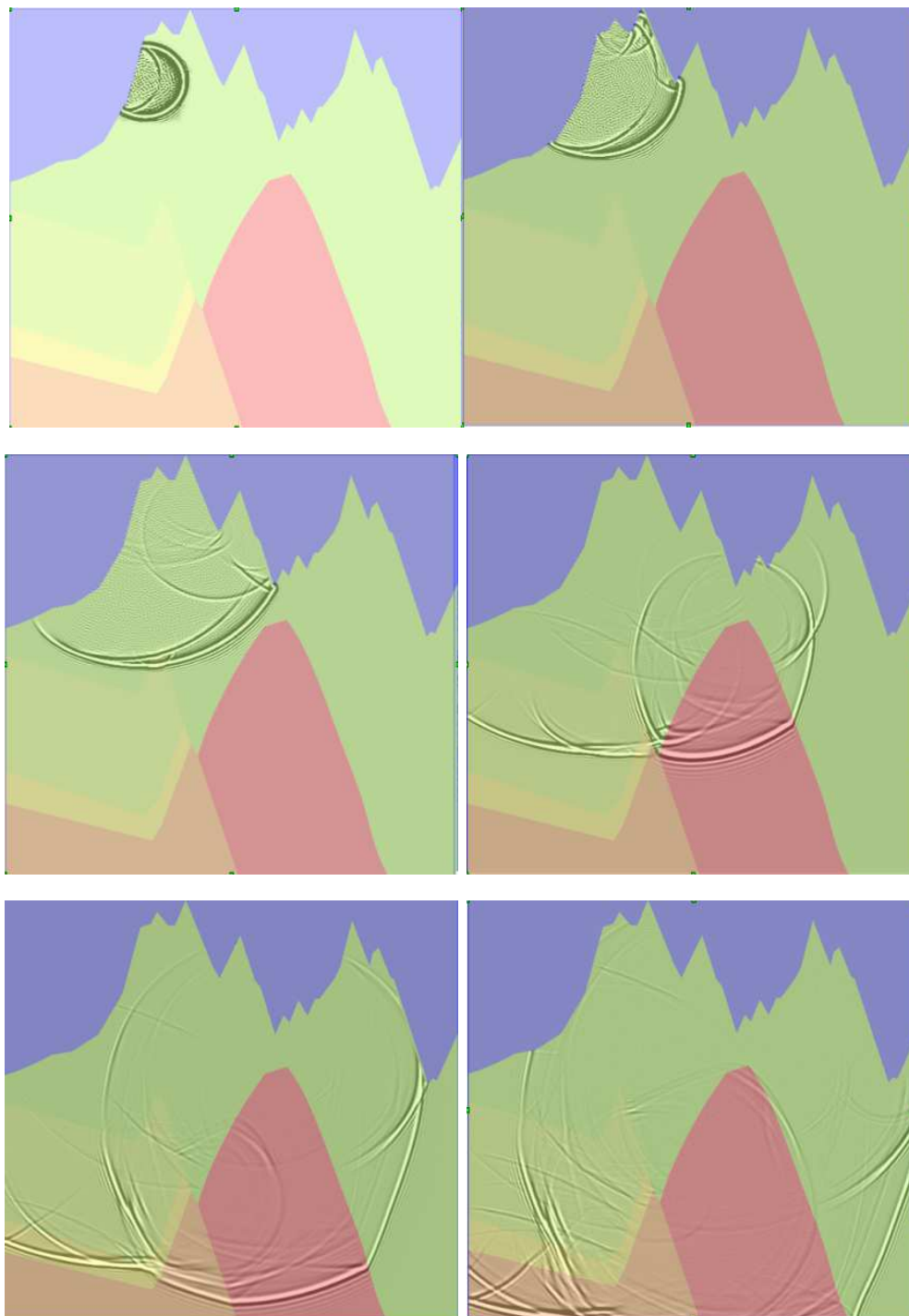


FIG. 4.11 – Instantanés obtenus pour une fréquence de 20Hz dans le domaine complexe à surface irrégulière.

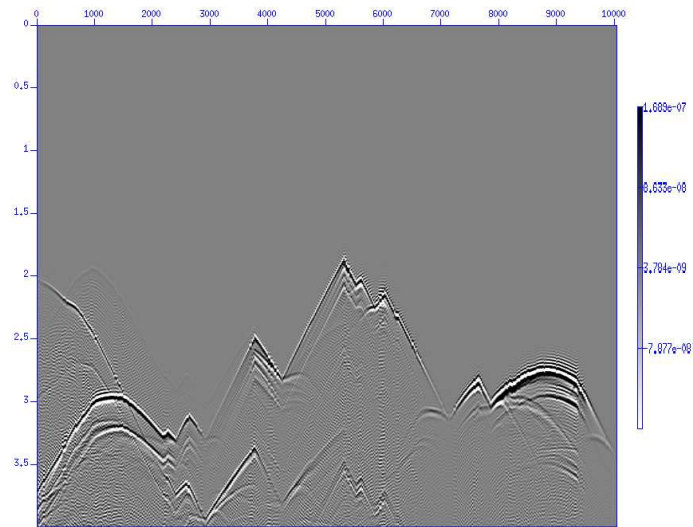


FIG. 4.12 – Sismogramme obtenu pour une fréquence de 20Hz dans le domaine complexe à surface irrégulière.

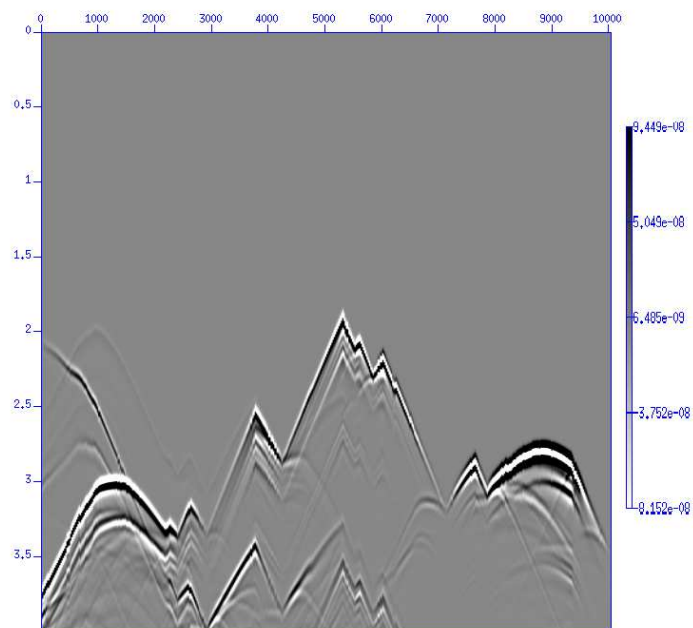


FIG. 4.13 – Sismogramme obtenu pour une fréquence de 10Hz dans le domaine complexe à surface irrégulière.

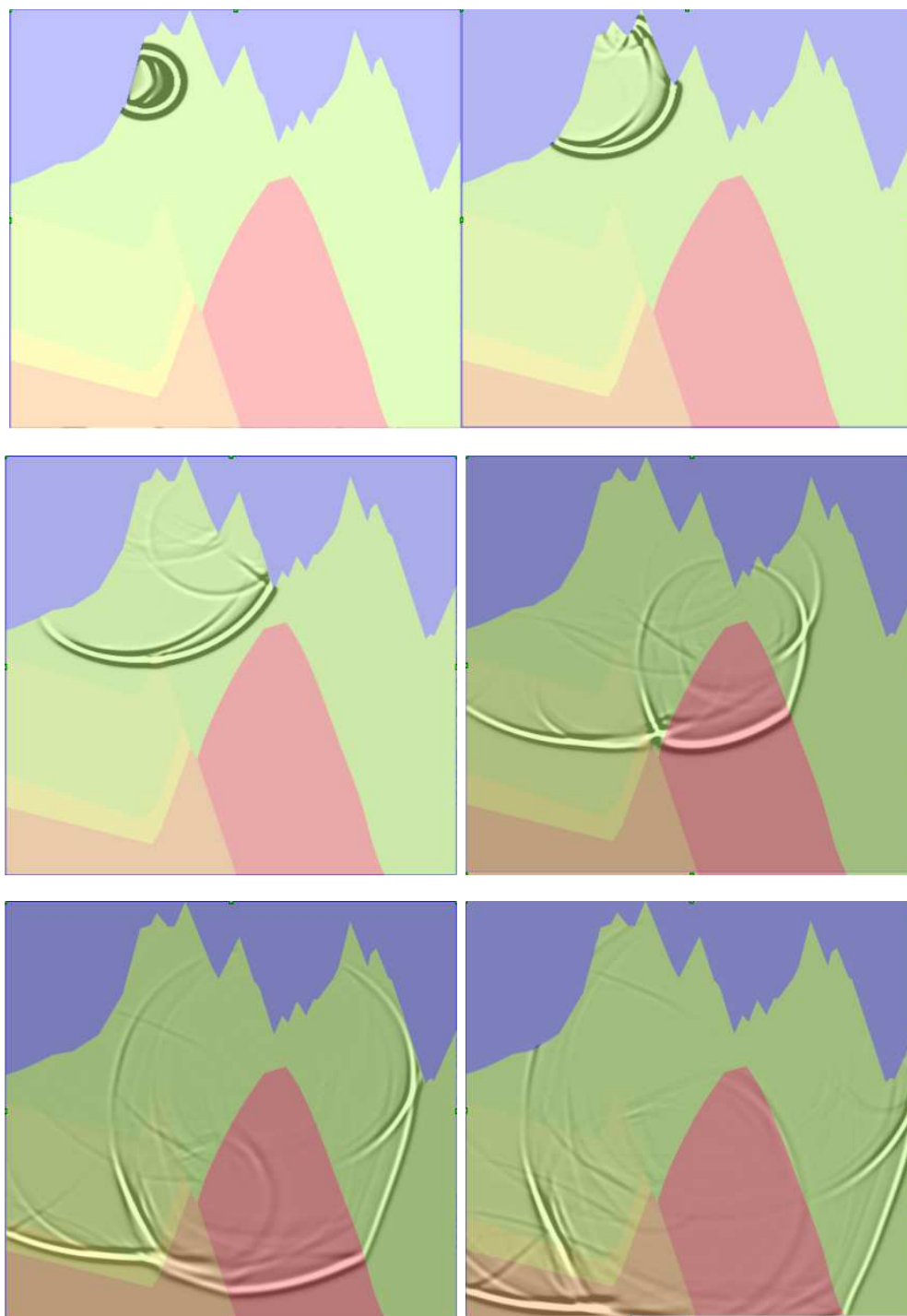


FIG. 4.14 – Instantanés obtenus pour une fréquence de 10Hz dans le domaine complexe à surface irrégulière.

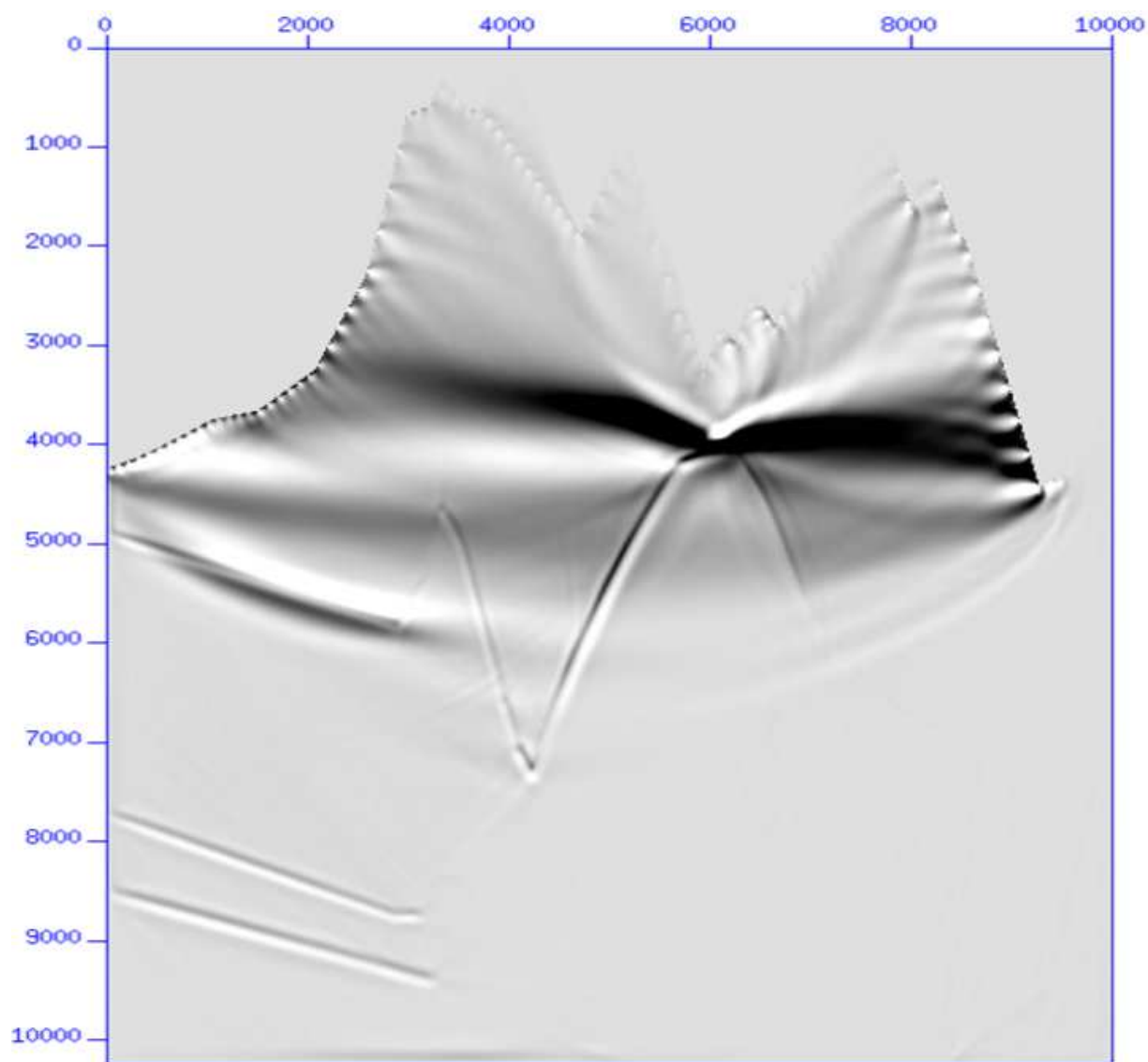


FIG. 4.15 – Image finale du milieu à surface irrégulière.

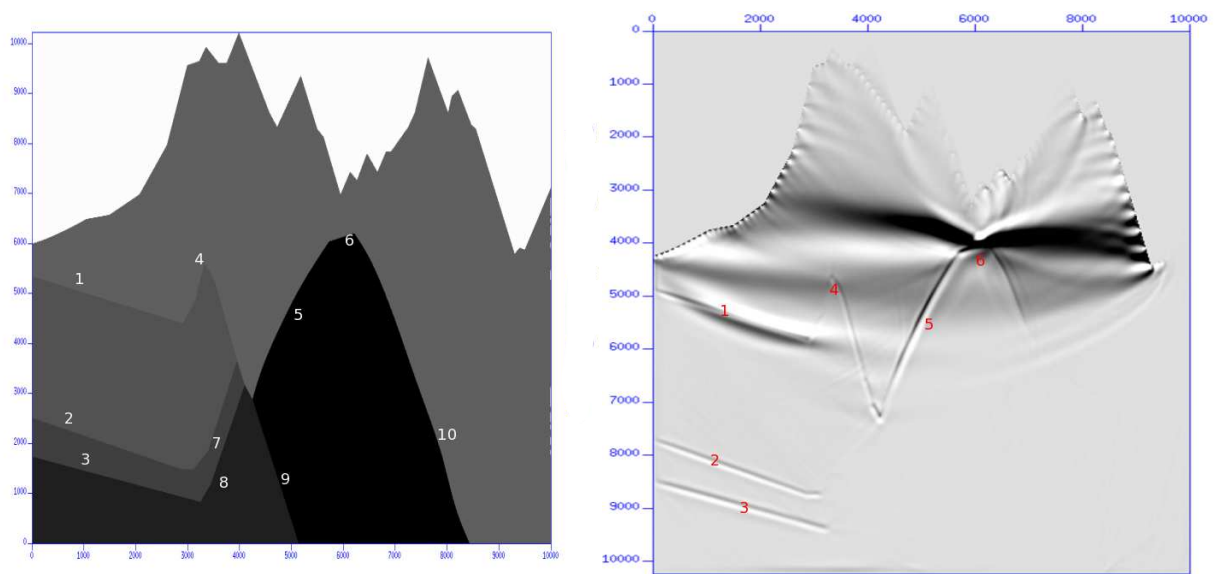


FIG. 4.16 – Comparaison entre le modèle de vitesse initial et l'image finale obtenue du milieu à surface irrégulière.

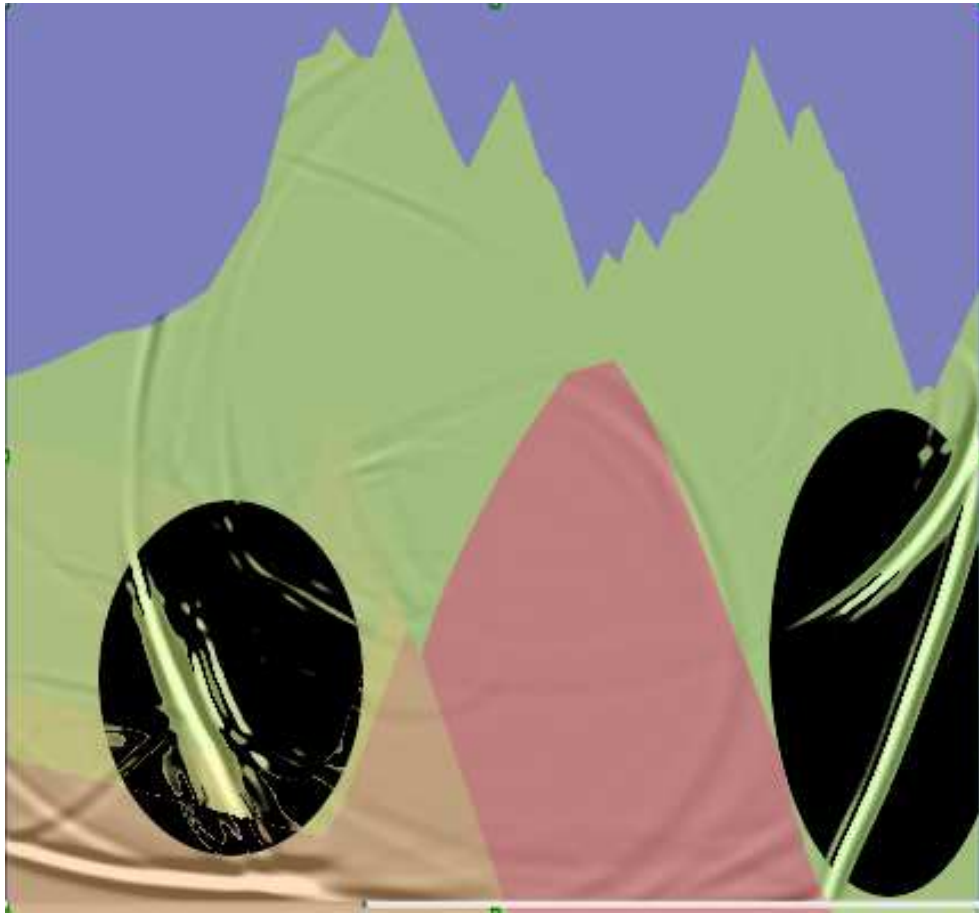


FIG. 4.17 – Champs d’ondes non enregistrés dans le milieu à surface irrégulière.

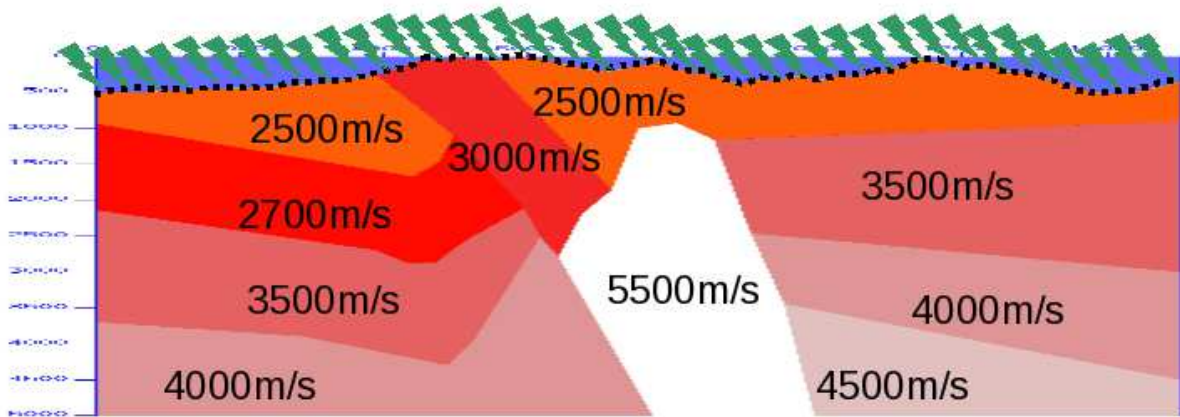


FIG. 4.18 – Expérience réalisée dans un milieu réaliste.

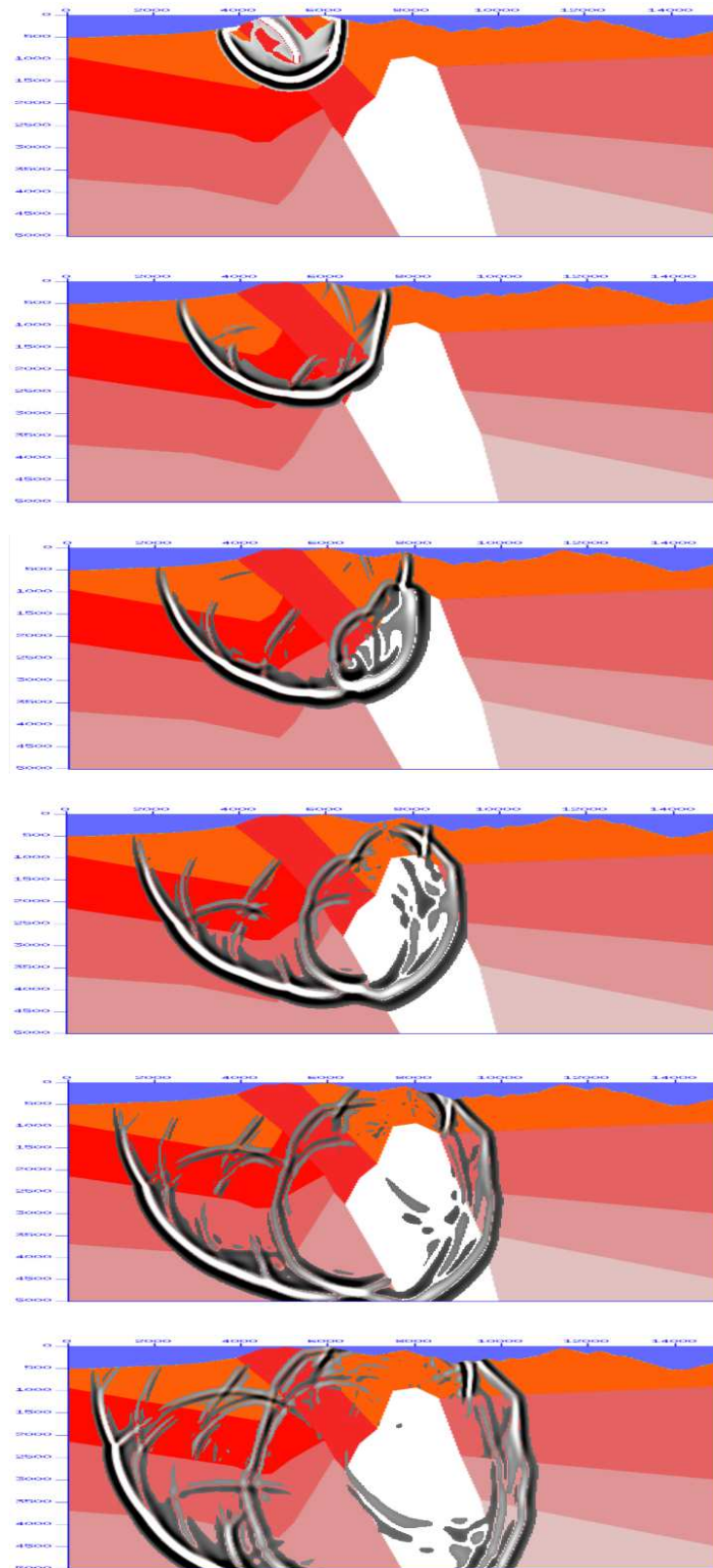


FIG. 4.19 – Instantanés obtenus pour la source située à  $x = 7000\text{m}$  et  $z = 0\text{m}$  dans le domaine réaliste.

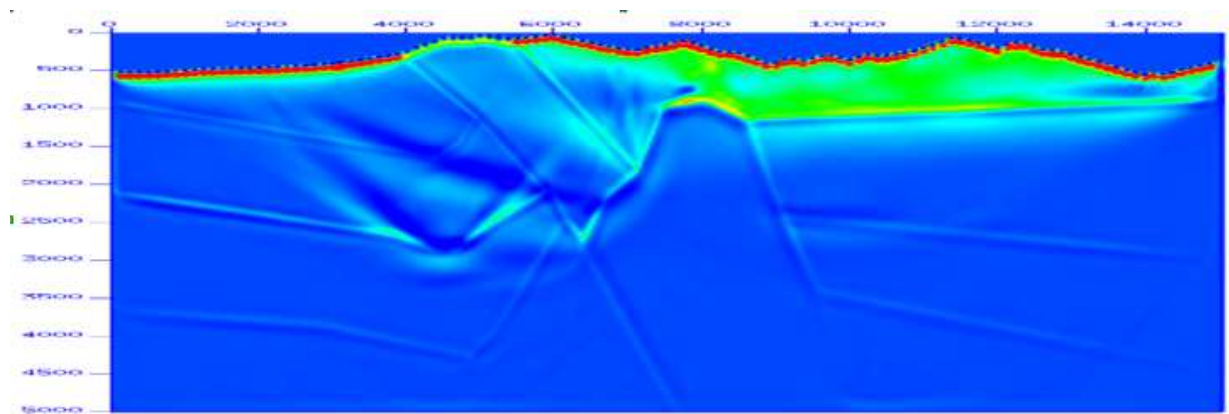


FIG. 4.20 – Image finale du milieu réaliste.



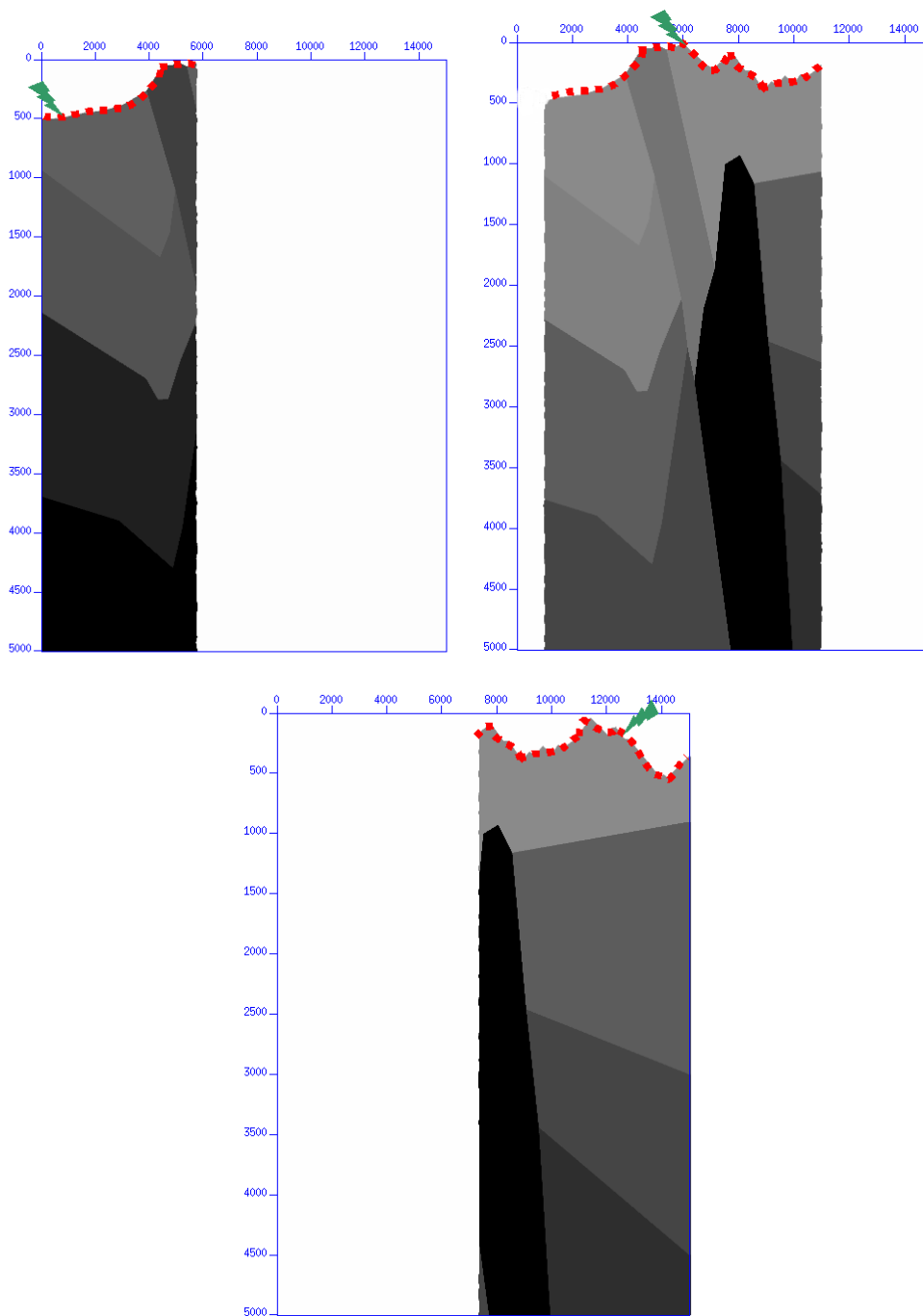


FIG. 4.21 – Modèles de vitesse réellement utilisés pour une source située en  $x = 750\text{m}$  (en haut, à gauche), en  $x = 6000\text{m}$  (en haut, à droite) et en  $x = 12375\text{m}$  (en bas).

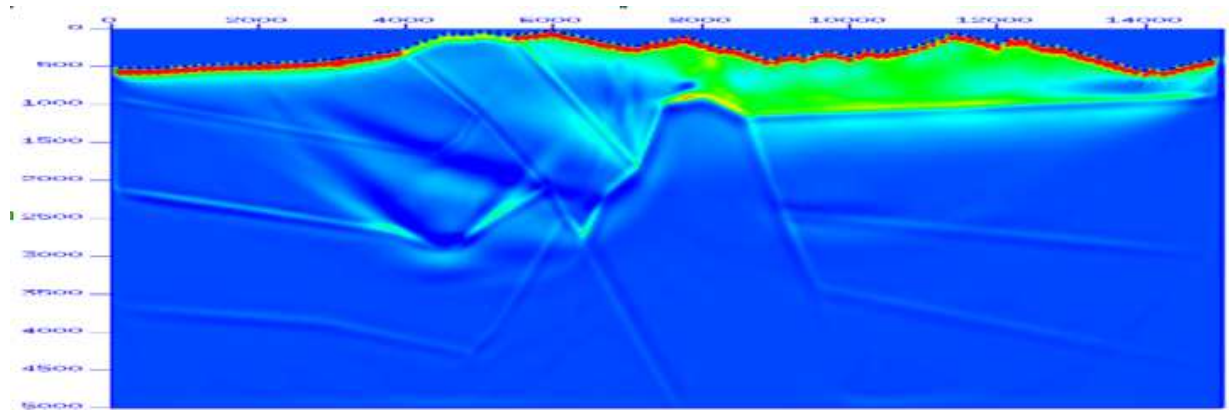


FIG. 4.22 – Image finale du milieu réaliste en utilisant des domaines adaptés pour chaque point de tir.

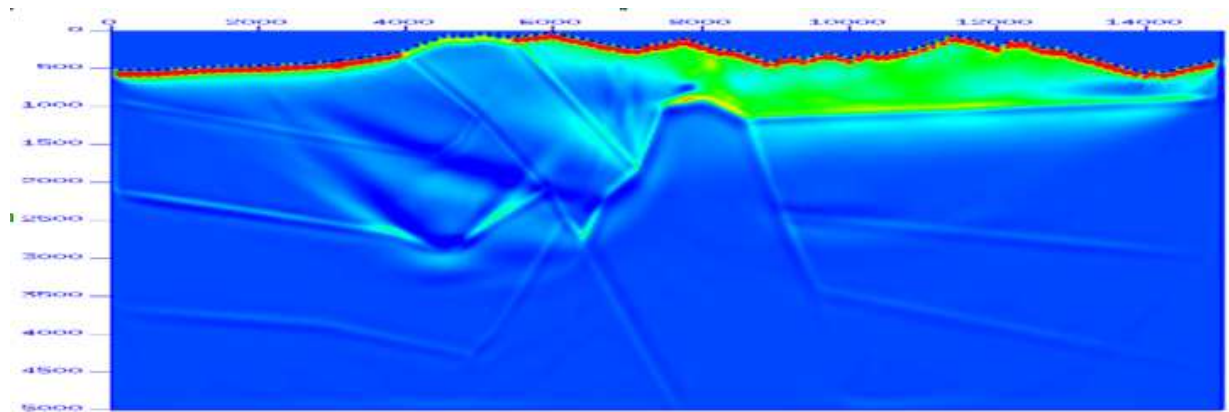


FIG. 4.23 – Image finale du milieu réaliste en utilisant un maillage adapté aux vitesses de propagation.

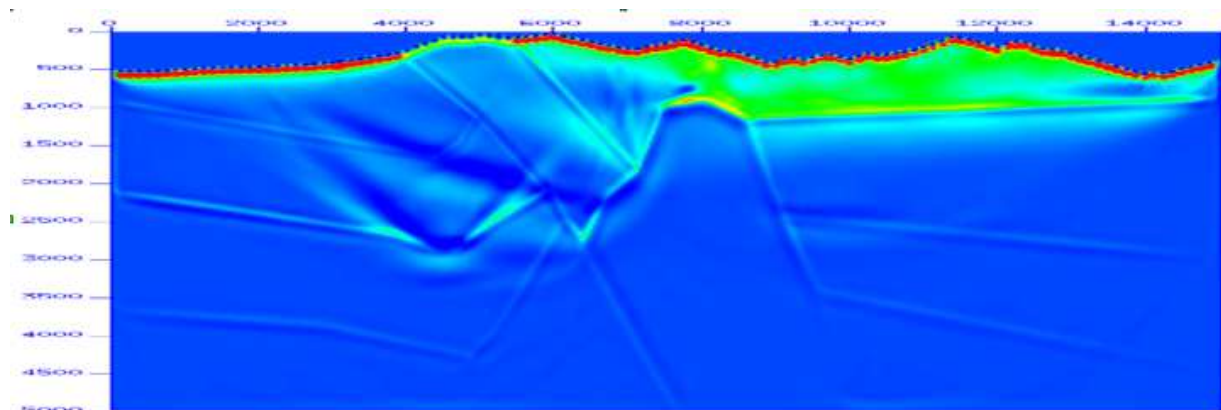


FIG. 4.24 – Image finale du milieu réaliste en utilisant un maillage adapté aux vitesses de propagation et un domaine adapté à chaque point de tir.

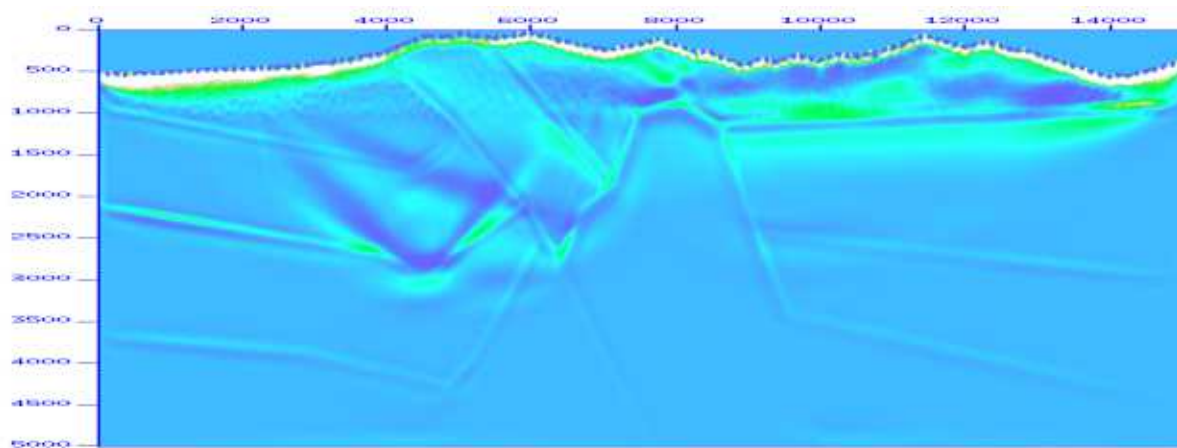


FIG. 4.25 – Image finale du milieu réaliste en utilisant un maillage et un domaine adapté à chaque zone du milieu et des ordres différents en espace.

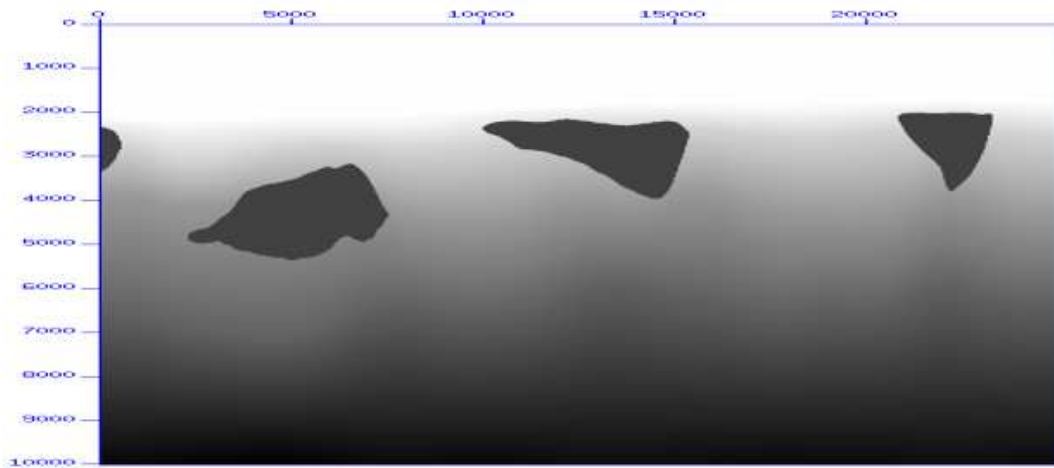


FIG. 4.26 – Milieu vel\_dip.

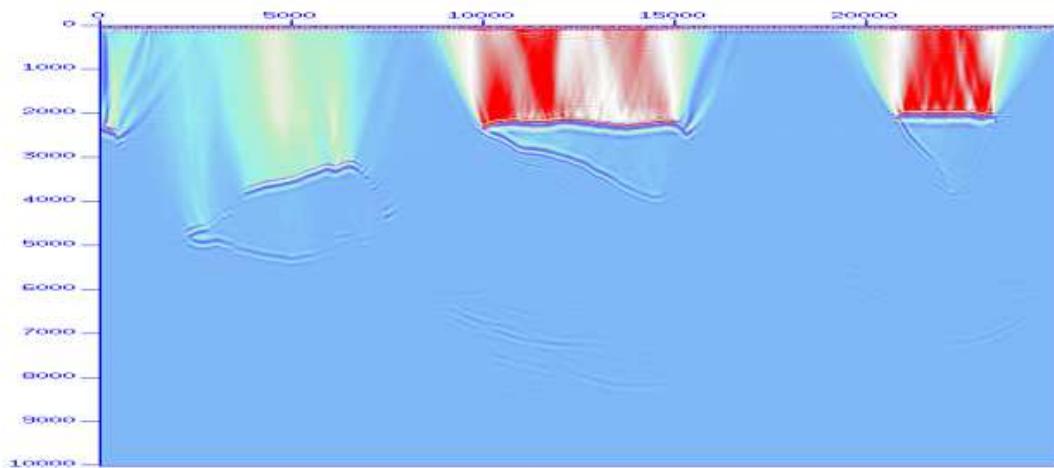


FIG. 4.27 – Image finale du milieu vel\_dip.



# Chapitre 5

## Ordre Local

L'expérience présentée au chapitre 3 (§§ 3.2.2.2) a mis en évidence l'intérêt de l'utilisation d'éléments de bas degré dans les régions où le maillage est raffiné et des éléments d'ordre supérieur ailleurs, avec un schéma d'ordre deux en temps. Dans ce chapitre, nous analysons plus précisément les performances de cette méthode avec un schéma d'ordre 4 en temps sur un problème modèle en dimension 1 (§§ 5.1 et 5.2). Nous combinons ensuite cette approche à la technique de pas de temps locaux proposée dans [11] (§§ 5.3). Nous avons choisi cette méthode car elle possède les avantages d'être complètement explicite et de pouvoir être employée avec des schémas d'ordre élevé en temps. Finalement, nous proposons un nouveau schéma de discrétisation temporelle permettant d'adapter à la fois l'ordre et le pas de temps de la méthode à la discrétisation spatiale.

### 5.1 La technique de l'équation modifiée

Nous rappelons dans cette section le principe de l'équation modifiée que nous avons choisie pour augmenter l'ordre de la discrétisation en temps.

On considère le problème (3.1) défini dans le chapitre 3 et on s'intéresse ici à la discrétisation en temps de l'équation des ondes semi-discrète :

$$\mathcal{M} \frac{d^2 U}{dt^2} + \mathcal{K}U = 0, \quad (5.1)$$

où  $\mathcal{M}$  désigne toujours la matrice de masse et  $\mathcal{K}$  représente la matrice de rigidité. Nous supposons que la méthode de discrétisation en espace utilisée est telle que  $\mathcal{M}$  est symétrique, définie positive et facilement inversible (par exemple diagonale par blocs) et  $\mathcal{K}$  est symétrique, positive et creuse.

La matrice  $\mathcal{M}$  étant facilement inversible, il est naturel de passer au système équivalent

$$\frac{d^2 U}{dt^2} + \mathcal{M}^{-1} \mathcal{K}U = 0 \quad (5.2)$$

car cela conduit à une méthode de discrétisation explicite.

Cependant, comme  $\mathcal{M}^{-1}\mathcal{K}U$  n'est pas symétrique, on considère donc plutôt

$$\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}\frac{d^2U}{dt^2} + \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{M}^{\frac{1}{2}}U = 0. \quad (5.3)$$

On note  $A = \mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}\mathcal{K}\mathcal{M}^{-\frac{1}{2}}$  la matrice creuse, symétrique et définie positive et on introduit  $Z = \mathcal{M}^{\frac{1}{2}}U$ . Le champ  $Z$  est alors solution de :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + AZ = 0. \quad (5.4)$$

L'équation (5.4) est bien évidemment équivalente à (5.2) mais comme  $A$  est symétrique, on peut établir plus facilement les propriétés du schéma de discrétisation, notamment la conservation de l'énergie. Toutefois, pour ce qui est de la mise en oeuvre numérique, nous utilisons plutôt la formulation (5.2).

### 5.1.1 Le schéma saute-mouton

Nous rappelons une technique simple pour discrétiser (5.4) qui repose sur un développement de Taylor d'ordre 2 de la forme :

$$\frac{Z(t + \Delta t) - 2Z(t) + Z(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2Z(t)}{dt^2} + O(\Delta t^2). \quad (5.5)$$

En utilisant (5.4) on a que :

$$\frac{Z(t + \Delta t) - 2Z(t) + Z(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = -AZ(t) + O(\Delta t^2). \quad (5.6)$$

On en déduit le schéma d'ordre 2 dit "saute-mouton" :

$$\frac{Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1}}{\Delta t^2} = -AZ^n, \quad (5.7)$$

où  $Z^n$  est une approximation de  $Z(n\Delta t)$ .

**Propriété 5.1.1.** *Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose*

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left\| \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\|^2 + (AZ^n, Z^{n+1}). \quad (5.8)$$

*Alors, sous la condition de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)*

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\lambda_{A_{max}}}}, \quad (5.9)$$

$E^{n+\frac{1}{2}}$  définit une énergie discrète.

Dans la condition CFL,  $\lambda_{A_{max}}$  désigne la plus grande valeur propre de  $A$ .

**Preuve** Pour vérifier que  $E^{n+\frac{1}{2}}$  est une énergie, on étudie son signe.

On a

$$(AZ^n, Z^{n+1}) = \frac{1}{4} \left[ \left\langle A(Z^{n+1} + Z^n), (Z^{n+1} + Z^n) \right\rangle - \Delta t^2 \left\langle A \frac{(Z^{n+1} - Z^n)}{\Delta t}, \frac{(Z^{n+1} - Z^n)}{\Delta t} \right\rangle \right],$$

soit

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \left( I - \frac{\Delta t^2}{4} A \right) \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle A \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle.$$

La matrice  $A$  étant positive, il suffit de vérifier que  $\left( I - \frac{\Delta t^2}{4} A \right)$  est positive. Si  $\lambda_{A_{max}}$  désigne la plus grande valeur propre de  $A$ , on a pour toute valeur propre  $\lambda_A$  de  $A$ ,  $1 - \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_A \geq 0$  si  $1 - \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_{A_{max}} \geq 0$  soit  $\Delta t^2 \leq \frac{4}{\lambda_{A_{max}}}$ .

En conclusion,  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définit une énergie discrète si la condition CFL (5.9) est vérifiée. ■

**Propriété 5.1.2.** Lorsque le pas de discrétisation du maillage  $h$  est suffisamment petit, la condition CFL (5.9) est équivalente à :

$$\Delta t < \alpha_{LF} h \tag{5.10}$$

avec  $\alpha_{LF} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$ , où  $\alpha$  est une constante dépendant du maillage et de la méthode de discrétisation en espace.

**Preuve** La valeur propre  $\lambda_{A_{max}}$  dépend de la discrétisation en espace et vérifie  $\lambda_{A_{max}} \simeq \frac{\alpha}{h^2}$ ,  $\alpha = cste$ . En utilisant (5.9), on en déduit que

$$\Delta t < \frac{2}{\sqrt{\alpha}} h.$$

**Propriété 5.1.3.** Sous la condition CFL (5.10), le schéma saute-mouton conserve l'énergie  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définie en (5.8). ■



**Preuve** On multiplie (5.7) par  $\frac{Z^{n+1} - Z^{n-1}}{2\Delta t}$  pour obtenir

$$\frac{1}{2\Delta t} \left[ \left\| \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\|^2 - \left\| \frac{Z^n - Z^{n-1}}{\Delta t} \right\|^2 \right] + \frac{1}{2\Delta t} [(AZ^n, Z^{n+1}) - (AZ^n, Z^{n-1})] = 0.$$

En posant  $E^{n+\frac{1}{2}} = \left\| \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\|^2 + (AZ^n, Z^{n+1})$ , on a

$$\frac{1}{2\Delta t} (E^{n+\frac{1}{2}} - E^{n-\frac{1}{2}}) = 0$$

ce qui assure la conservation de l'énergie. ■

En utilisant les propriétés 5.1.1, 5.1.2 et 5.1.3 on déduit :

**Propriété 5.1.4.** *Le schéma saute-mouton est stable si la condition CFL (5.10) est vérifiée.*

## 5.1.2 Le schéma de l'équation modifiée ou schéma EM

En utilisant un développement de Taylor d'ordre 4, on obtient

$$\frac{Z(t + \Delta t) - 2Z(t) + Z(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} + \frac{\Delta t^2}{12} \frac{d^4 Z(t)}{dt^4} + O(\Delta t^4) \quad (5.11)$$

et, en utilisant (5.4), il vient

$$\frac{d^4 Z(t)}{dt^4} = \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} \right) = -A \frac{d^2 Z(t)}{dt^2} = A^2 Z(t). \quad (5.12)$$

D'où,

$$\frac{Z(t + \Delta t) - 2Z(t) + Z(t - \Delta t)}{\Delta t^2} = -AZ(t) + \frac{\Delta t^2}{12} A^2 Z(t) + O(\Delta t^4). \quad (5.13)$$

On en déduit donc le schéma EM d'ordre 4 :

$$\frac{Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1}}{\Delta t^2} = - \left( A - \frac{\Delta t^2}{12} A^2 \right) Z^n. \quad (5.14)$$

On renvoie à [46] pour plus de détails.

En posant  $B = \left( A - \frac{\Delta t^2}{12} A^2 \right)$ , les schémas EM (5.14) et saute-mouton (5.7) sont du même type.

**Propriété 5.1.5.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left\| \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\|^2 + (BZ^n, Z^{n+1}). \quad (5.15)$$

Alors, sous la condition CFL

$$\Delta t < \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_{A_{max}}}}, \quad (5.16)$$

$E^{n+\frac{1}{2}}$  définit une énergie discrète.

**Preuve** Pour vérifier que  $E^{n+\frac{1}{2}}$  est une énergie, on étudie son signe.

On a

$$(BZ^n, Z^{n+1}) = \frac{1}{4} \left[ \langle B(Z^{n+1} + Z^n), (Z^{n+1} + Z^n) \rangle - \Delta t^2 \left\langle B \frac{(Z^{n+1} - Z^n)}{\Delta t}, \frac{(Z^{n+1} - Z^n)}{\Delta t} \right\rangle \right],$$

soit

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left\langle \left( I - \frac{\Delta t^2}{4} B \right) \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle B \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle.$$

Pour que  $E^{n+\frac{1}{2}}$  soit positive, il suffit que les matrices  $\left( I - \frac{\Delta t^2}{4} B \right)$  et  $B$  soient positives.

Posons  $\lambda_B = \lambda_A - \frac{\Delta t^2}{12} \lambda_A^2$ , valeur propre de  $B$ . Alors :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_B &= 1 - \frac{\Delta t^2}{4} \lambda_A + \frac{\Delta t^4}{48} \lambda_A^2 \\ &= 12 + (\Delta t^2 \lambda_A - 6)^2. \end{aligned}$$

On voit donc que la matrice  $\left( I - \frac{\Delta t^2}{4} B \right)$  est toujours positive.

Considérons maintenant la matrice  $B$ . Par définition,  $\lambda_B = \lambda_A \left( 1 - \frac{\Delta t^2}{12} \lambda_A \right)$ . Comme toutes les valeurs propres  $\lambda_A$  sont positives,  $\lambda_B$  est du même signe que  $1 - \frac{\Delta t^2}{12} \lambda_A$ . On voit que  $\lambda_B$  est positif si et seulement si :

$$\Delta t^2 \leq \frac{12}{\lambda_{A_{max}}}.$$

La quantité  $E^{n+\frac{1}{2}}$  sera donc une énergie si la condition CFL (5.16) est vérifiée. ■

**Propriété 5.1.6.** *Pour  $h$  suffisamment petit, la condition CFL (5.16) est équivalente à :*

$$\Delta t < \alpha_{EM} h \quad (5.17)$$

avec  $\alpha_{EM} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha}} = \alpha_{LF}\sqrt{3} \simeq 1,7\alpha_{LF}$ .

**Preuve** La valeur propre  $\lambda_{A_{max}}$  dépend de la discrétisation en espace et vérifie  $\lambda_{A_{max}} \simeq \frac{\alpha}{h^2}$ ,  $\alpha = cste$ . En utilisant (5.16), on en déduit que

$$\Delta t < \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\alpha}} h.$$

■

**Propriété 5.1.7.** *Sous la condition CFL (5.17), le schéma saute-mouton conserve l'énergie  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définie en (5.15).*

**Preuve** De la même façon que pour le schéma saute-mouton, en posant :

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left\| \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\|^2 + (BZ^n, Z^{n+1}), \text{ on a}$$

$$\frac{1}{2\Delta t} \left( E^{n+\frac{1}{2}} - E^{n-\frac{1}{2}} \right) = 0$$

ce qui assure la conservation de l'énergie. ■

En utilisant les propriétés 5.1.5, 5.1.6 et 5.1.7 on déduit :

**Propriété 5.1.8.** *Le schéma EM est stable si la condition CFL (5.17) est vérifiée.*

Lorsque l'on utilise le schéma EM (5.14), on doit effectuer pour chaque pas de temps  $\Delta t$  deux multiplications par la matrice  $A$  (une pour  $AZ$  et une pour  $A(AZ)$ ) contre une seule pour le schéma saute-mouton. On peut donc conclure que l'on effectue deux fois plus de multiplications en utilisant le schéma EM. Cependant, la condition de stabilité étant 1,7 fois plus grande, cela nous permet de prendre un pas de temps 1,7 fois plus grand. On a donc avec l'utilisation de l'équation modifiée une meilleure précision (schéma d'ordre 4), avec une faible perte au niveau temps de calcul. Plus généralement, un schéma EM d'ordre  $2s$  nécessite  $s$  multiplications par la matrice  $A$ . Malheureusement, l'augmentation de la condition de stabilité ne permet pas toujours de compenser le coût de calcul supplémentaire. Ainsi, pour l'ordre 6, la condition CFL n'est multipliée que par 1.38 [47]. Des efforts ont été faits dans [47] pour optimiser la condition de stabilité mais il s'avère que cela nécessite d'augmenter le nombre de multiplications par  $A$ .

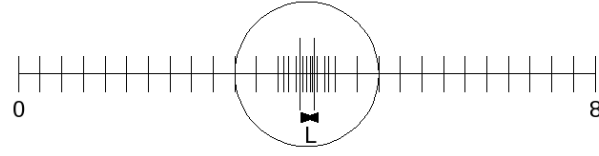


FIG. 5.1 – Domaine de calcul.

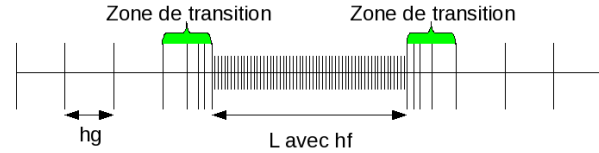


FIG. 5.2 – Zoom sur le centre du domaine de calcul.

### 5.1.3 Premiers résultats numériques

Dans les expériences que nous allons présenter, le domaine de calcul est un segment de longueur 8 contenant une petite inclusion de longueur  $L$  qui sera maillée finement par rapport au maillage recouvrant le reste du domaine. Le maillage de l'inclusion sera entouré d'une zone de transition permettant de passer progressivement du maillage fin au maillage grossier. On adopte les notations suivantes :

- $h_f$  désigne le pas de maillage dans l'inclusion ;
- $h_g$  désigne le pas de maillage dans le segment privé de l'inclusion et de la zone de transition ;
- $h$  désigne le pas de maillage dans la zone de transition ;  $h$  varie de  $h_f$  à  $h_g$ .

Nous renvoyons aux figures 5.1 et 5.2.

De plus, nous imposons des conditions de bord périodiques. Nous prenons  $S = 0$  et  $c = 1\text{ms}^{-1}$ . Les conditions initiales sont les suivantes :

pour  $(x - x_0) \leq r_0$  :

$$u_0(x) = (x - x_0)e^{-\frac{4(x - x_0)^2}{\pi^2 r_0^2}} \quad \text{et} \quad u_1(x) = \left( \frac{8(x - x_0)}{\pi^2 r_0^2} - 1 \right) e^{-\frac{4(x - x_0)^2}{\pi^2 r_0^2}}$$

et pour  $(x - x_0) > r_0$  :

$$u_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad u_1(x) = 0.$$

Ainsi, la solution exacte est donnée par :

$$u_{ex}(x, t) = \sum_{i=0}^{+\infty} u_0(x - 8i - t).$$

Dans la suite, nous prenons  $x_0 = 2$  et  $r_0 = 2$ . De plus, nous considérons deux types d'inclusions : une de longueur  $L = 0.2$  maillée avec un pas  $h_f = 1/160$  et une de longueur  $L = 0.1$  maillée avec un pas  $h_f = 1/320$ .

Nous regardons dans ce paragraphe l'erreur relative  $L^2([0, T], \Omega)$  que l'on obtient pour un temps de simulation long ( $T=80s$ ) et un temps court ( $T=8s$ ) en faisant varier le pas d'espace  $h_g$  de 0,2 à 0,025. Nous utilisons des éléments d'ordre 4 et pour la discrétisation en temps, nous considérons le schéma EM. Le schéma de discrétisation est noté EM\_4. Le pas de temps imposé par la condition CFL est de  $\Delta t = 1.6 \cdot 10^{-3}s$  pour  $h_f = 1/160$  et  $\Delta t = 8.22 \cdot 10^{-4}s$  pour  $h_f = 1/320$ . Les erreurs obtenues sont données dans les tableaux 5.1 et 5.2 et représentées par les figures 5.3 et 5.4.

	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	$8.6 \cdot 10^{-6}$	$1.23 \cdot 10^{-5}$
$h_g = 0.025$	$4.7 \cdot 10^{-7}$	$5.05 \cdot 10^{-7}$

TAB. 5.1 – Erreur relative pour le schéma EM\_4 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	$3.09 \cdot 10^{-3}$	$2.1 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	$8.63 \cdot 10^{-6}$	$1.24 \cdot 10^{-5}$
$h_g = 0.025$	$4.71 \cdot 10^{-7}$	$5.13 \cdot 10^{-7}$

TAB. 5.2 – Erreur relative pour le schéma EM\_4 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

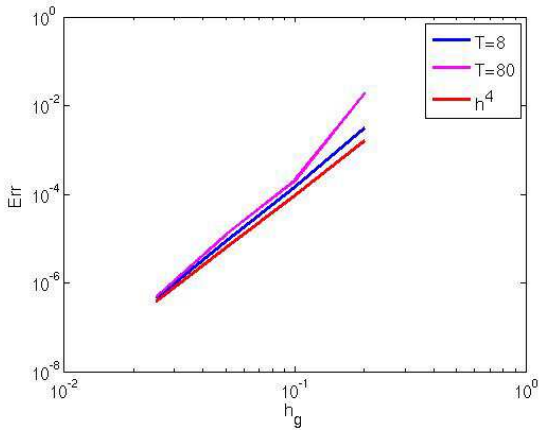


FIG. 5.3 – Courbes de convergence pour le schéma EM\_4 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

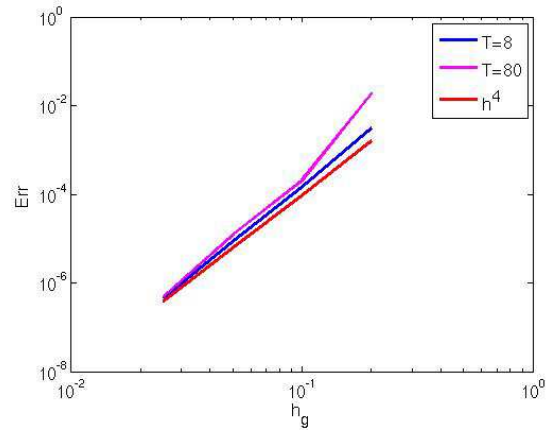


FIG. 5.4 – Courbes de convergence pour le schéma EM\_4 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

Nous pouvons constater que, pour  $T=8s$ , la méthode est d'ordre 4 quel que soit le pas d'espace utilisé. En revanche, pour  $T=80s$  la méthode n'est d'ordre 4 que pour  $h_g \leq 0.1$ . Cela est dû au fait que, pour  $T$  fixé, l'ordre de convergence n'est garanti que pour  $h_g$  suffisamment petit.

La largeur des mailles fines ne change quasiment pas les résultats obtenus. L'erreur obtenue sur la zone grossière "l'emporte" sur celle obtenue dans la zone fine.

Dans les sections suivantes, nous étudions différentes améliorations des schémas en temps et en espace. Les expériences que nous venons de présenter nous servent de référence pour évaluer les gains et les éventuelles pertes de précision apportés par ces méthodes.

## 5.2 Adaptation de l'ordre en espace

Dans cette section, on s'intéresse à la combinaison d'ordres différents en espace. En effet, comme nous venons de le voir, l'erreur générée par le maillage grossier prédomine sur celle du maillage fin. Il est donc raisonnable d'envisager l'utilisation d'éléments d'ordre 2 dans le maillage fin. Cette approche a deux avantages : tout d'abord elle permet de diviser par 2 le nombre d'inconnues dans la zone fine et ensuite, elle permet d'augmenter légèrement la condition CFL qui est imposée par les mailles fines.

L'approximation par éléments finis d'ordres différents est relativement facile à implémenter dans un code utilisant des éléments finis de Galerkin discontinus. En effet, les éléments étant discontinus, nous avons toujours le même ordre dans chaque élément. Pour appliquer la IPDGM (cf. chapitre 2), le paramètre de pénalisation  $\alpha$  doit être légèrement adapté, on utilise  $\alpha = 7$  à l'interface de deux éléments d'ordre 4 et  $\alpha = 2$  à l'interface de deux éléments d'ordre 2. A l'interface entre deux éléments d'ordres différents, on prend  $\alpha = 7$ .

Dans l'expérience effectuée, nous avons utilisé des éléments d'ordre 4 dans la zone maillée grossièrement et dans la zone de transition et des éléments d'ordre 2 dans la zone maillée finement. Le schéma que nous prenons pour la discrétisation en temps est celui de l'équation modifiée. Ici, ce choix n'est pas forcément justifié car on utilise des éléments d'ordre 2 dans la zone fine, on ne pourra donc pas atteindre un ordre de convergence de 4 dans cette zone. On note EM\_42 le schéma correspondant. Le pas de temps imposé par la CFL est de  $\Delta t = 1.8 \cdot 10^{-3}s$  pour  $h_f = 1/160$  et  $\Delta t = 9.21 \cdot 10^{-4}s$  pour  $h_f = 1/320$ . Les erreurs obtenues sont données dans les tableaux 5.3 et 5.4 et représentées par les figures 5.5 et 5.6. Pour les figures, nous ne représentons les courbes "loglog" que pour  $T=8s$ , les conclusions étant similaires pour  $T=80s$ .

	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	$3 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	$1.87 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$7.09 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$7.03 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.3 – Erreur relative pour un schéma EM\_42 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	$3.1 \cdot 10^{-3}$	$1.9 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	$1.52 \cdot 10^{-4}$	$2.79 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	$1.77 \cdot 10^{-4}$	$1.074 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	$1.51 \cdot 10^{-5}$	$1.02 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.4 – Erreur relative pour un schéma EM\_42 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

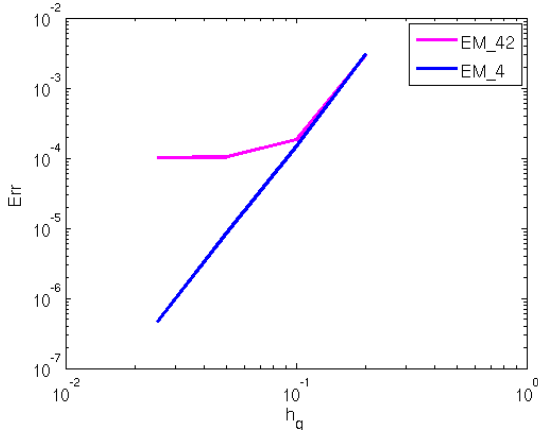


FIG. 5.5 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et EM\_42 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

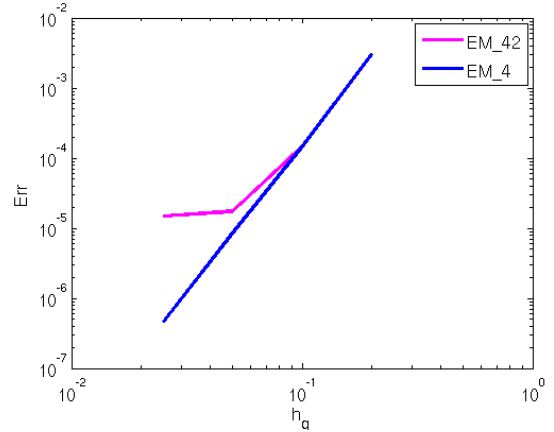


FIG. 5.6 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et EM\_42 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

On remarque que pour  $h_g$  grand, les erreurs obtenues en utilisant des éléments du même ordre et celles obtenues avec des ordres différents sont quasiment identiques. En diminuant  $h_g$ , l'erreur obtenue avec des ordres différents est plus élevée et finit même par converger vers une constante. Cette constante diminue et la convergence s'améliore quand  $h_f$  diminue. On voit donc que l'erreur dans la zone fine domine l'erreur pour la zone grossière. Remarquons cependant que cette méthode utilisant des ordres différents permet d'obtenir une erreur relative de l'ordre de 0.1 à 0.01% qui est tout à fait acceptable. On peut donc l'utiliser pour gagner en temps de calcul et en espace mémoire.

### 5.3 Pas de temps local

Pour les expériences effectuées dans la section précédente, le pas de temps imposé pour l'ensemble du schéma est  $\Delta t_f = 1.8 \cdot 10^{-3} s$  pour  $h_f = 1/160$  (resp.  $\Delta t_f = 9.21 \cdot 10^{-4} s$  pour  $h_f = 1/320$ ) et il correspond à la CFL dans la zone fine. La CFL dans la zone grossière varie de  $\Delta t_g = 32\Delta t_f$  (resp.  $\Delta t_g = 64\Delta t_f$ ) pour  $h_g = 0.2$  à  $\Delta t_g = 4\Delta t_f$  (resp.  $\Delta t_g = 8\Delta t_f$ ) pour  $h_g = 0.025$ . Nous pouvons donc constater que l'on effectue beaucoup plus de calculs que nécessaire dans la zone grossière. C'est pourquoi on s'intéresse, ici, à une méthode plus efficace qui consiste à considérer le bon pas de temps dans chaque zone (i.e.  $\Delta t_g$  dans la zone grossière et  $\Delta t_f$  dans la zone fine) afin de faire le minimum de calculs tout en gardant la stabilité du schéma.

Il existe différentes méthodes permettant de résoudre ce problème. Collino, Fouquet et Joly ont proposé, dans [48], une méthode de pas de temps locaux pour l'équation des ondes du premier ordre et l'ont étendue aux équations de Maxwell dans [49]. Bécache, Joly et Rodríguez l'ont ensuite appliquée à l'élastodynamique dans [50]. Nous renvoyons

à [51, 52] pour l'analyse détaillée de la méthode. Basée sur l'introduction d'un multiplicateur de Lagrange sur l'interface entre le maillage grossier et le maillage fin, elle conserve une énergie discrète. Cependant, elle nécessite la résolution d'un système linéaire pour le calcul des inconnues sur l'interface et ne mène qu'à des schémas d'ordre deux en temps, sa généralisation aux ordres supérieurs restant un problème ouvert. Récemment, Piperno a proposé une nouvelle approche, combinant un opérateur symplectique en temps avec une méthode de Galerkin discontinue en espace, pour le système de Maxwell du premier ordre. Comme la méthode précédente, ce schéma conserve une énergie discrète et elle a l'avantage d'être complètement explicite, c'est-à-dire qu'elle ne nécessite pas de résolution d'un système linéaire sur l'interface, mais elle ne permet pas d'utiliser des schémas d'ordre élevé en temps. Les méthodes de décomposition de domaine proposées dans [53, 54], qui permettent de coupler différentes méthodes numériques, pourraient être une alternative intéressante, mais elles n'ont pour le moment été appliquée qu'en dimension 1.

Nous avons choisi de considérer la méthode proposée dans [11] qui conserve elle aussi une énergie discrète et conduit à un schéma totalement explicite, mais qui peut être appliquée à des schémas en temps d'ordre arbitrairement élevé. De plus, elle est relativement simple à implémenter. Nous rappelons ci-dessous son principe, et nous testons ensuite son efficacité à résoudre le problème modèle 1D que nous avons présenté précédemment.

### 5.3.1 Présentation de la méthode

Rappelons que l'on veut résoudre l'équation (5.4)

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + AZ = 0 .$$

La première étape de la méthode que nous avons considérée consiste à utiliser une variable auxiliaire  $\tilde{Z}$ , définie pour  $\tau \in [-\Delta t; \Delta t]$  par :

$$\tilde{Z}(\tau) = \frac{Z(t + \tau) + Z(t - \tau)}{2} . \quad (5.18)$$

On a

$$\tilde{Z}(0) = Z(t) \text{ et } \frac{d\tilde{Z}}{d\tau}(0) = 0 .$$

De plus,

$$\frac{d^2 \tilde{Z}}{d\tau^2}(\tau) = \frac{1}{2} \left( \frac{d^2 Z}{dt^2}(t - \tau) + \frac{d^2 Z}{dt^2}(t + \tau) \right) = -\frac{1}{2} A (Z(t - \tau) + Z(t + \tau)) = -A \tilde{Z}(\tau),$$

de telle sorte que  $\tilde{Z}$  est solution du problème :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Z}}{d\tau^2}(\tau) = -A \tilde{Z}(\tau), \\ \tilde{Z}(0) = Z(t), \quad \frac{d\tilde{Z}}{d\tau}(0) = 0, \end{cases} \quad (5.19)$$



pour  $\tau \in [-\Delta t; \Delta t]$ . Remarquons aussi que la fonction  $\tilde{Z}(\tau)$  est une fonction paire.

Si nous pouvions calculer exactement  $\tilde{Z}(\Delta t)$ , il nous suffirait d'utiliser (5.18) pour en déduire  $Z(t + \Delta t) = -Z(t - \Delta t) + 2\tilde{Z}(\Delta t)$ . Comme cela n'est pas possible en général, on considère  $Z^n$ , approximation de  $Z(n\Delta t)$ , et  $\tilde{Z}_n$  une fonction définie sur  $[-\Delta t; \Delta t]$  vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Z}_n(\tau)}{d\tau^2} = -A\tilde{Z}_n(\tau), \\ \tilde{Z}_n(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0, \end{cases} \quad (5.20)$$

pour  $\tau \in [0; \Delta t]$  et  $\tilde{Z}_n(-\tau) = \tilde{Z}_n(\tau)$  pour  $\tau \in [-\Delta t; 0]$ . La première équation de (5.20) est appelée par la suite équation auxiliaire. Puis, on utilise l'algorithme suivant à chaque temps  $n$  :

### Algorithme 1.

1. On cherche une approximation  $X$  de  $\tilde{Z}_n(\Delta t)$  ;
2. on calcule  $Z^{n+1}$  en utilisant  $Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2X$ .

## 5.3.2 Discrétisation globale de l'équation auxiliaire

Nous nous intéressons maintenant aux différentes façons de discrétiser (5.20).

### 5.3.2.1 Sans approximation de $A\tilde{Z}_n$

Dans ce paragraphe nous utilisons un schéma saute-mouton (respectivement équation modifiée d'ordre 4) de pas de temps  $\Delta t/p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$  pour réaliser la discrétisation de (5.20). On peut alors montrer que le schéma global pour le calcul de  $Z$  est un schéma saute-mouton classique (respectivement équation modifiée d'ordre 4) de pas de temps  $\Delta t/p$ . Nous détaillons les calculs pour  $p = 2$ , la démonstration pour des valeurs de  $p$  supérieures étant du même type.

Résolvons tout d'abord (5.20) avec un schéma saute-mouton de pas de temps  $\Delta t/2$ . Nous notons par la suite  $\tilde{Z}_n^{q/2}$  l'approximation de  $\tilde{Z}_n\left(\frac{q\Delta t}{2}\right)$ ,  $q = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  et plus généralement  $\tilde{Z}_n^{q/p}$  l'approximation de  $\tilde{Z}_n\left(\frac{q\Delta t}{p}\right)$ ,  $q, p \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ ,  $|q| \leq p$ .

On pose  $\tilde{Z}_n^0 = Z^n$  et il nous faut ensuite calculer  $\tilde{Z}_n^{1/2}$  et  $\tilde{Z}_n^1$ . Pour la première itération, nous avons :

$$\frac{\tilde{Z}_n^{1/2} - 2\tilde{Z}_n^0 + \tilde{Z}_n^{-1/2}}{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2} = A\tilde{Z}_n^0.$$

Comme  $\tilde{Z}_n(\tau)$  est une fonction paire, on a  $\tilde{Z}_n^{1/2} = \tilde{Z}_n^{-1/2}$ , soit :

$$\tilde{Z}_n^{1/2} = Z^n + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 AZ^n.$$

Pour la seconde itération, nous avons

$$\frac{\tilde{Z}_n^1 - 2\tilde{Z}_n^{1/2} + \tilde{Z}_n^0}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} = A\tilde{Z}_n^{1/2},$$

soit :

$$\tilde{Z}_n^1 = Z^n + 2 \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 AZ^n + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^4 A^2 Z^n.$$

Finalement, en posant  $Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2\tilde{Z}_n^1$ , nous obtenons :

$$Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2Z^n + \Delta t^2 AZ^n + \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^4 A^2 Z^n. \quad (5.21)$$

Résolvons maintenant (5.4) avec un schéma saute-mouton de pas de temps  $\Delta t/2$ . On doit calculer  $Z^{n+1/2}$  et  $Z^n$  pour ensuite obtenir  $Z^{n+1}$ .

On a

$$\frac{Z^n - 2Z^{n-1/2} + Z^{n-1}}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} = AZ^{n-1/2} \quad (a),$$

$$\frac{Z^{n+1/2} - 2Z^n + Z^{n-1/2}}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} = AZ^n \quad (b) ,$$

$$\frac{Z^{n+1} - 2Z^{n+1/2} + Z^n}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} = AZ^{n+1/2} \quad (c).$$

Or,

$$2(b) + (a) + (c) \Rightarrow \frac{Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1}}{\left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2} = A(Z^{n+1/2} + Z^{n-1/2}) + 2AZ^n$$

et

$$(b) \Rightarrow Z^{n+1/2} + Z^{n-1/2} = \left( \frac{\Delta t}{2} \right)^2 AZ^n + 2Z^n.$$

On a alors

$$\begin{aligned} Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1} &= \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 A^2 Z^n + 2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 AZ^n + 2\left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2 AZ^n \\ &= \Delta t^2 AZ^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 A^2 Z^n \end{aligned} \quad (5.22)$$

et donc,

$$Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2Z^n + \Delta t^2 AZ^n + \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^4 A^2 Z^n. \quad (5.23)$$

Les deux schémas sont donc bien équivalents.

### 5.3.2.2 Avec approximation de $A\tilde{Z}_n$

Dans ce paragraphe, nous allons étudier les différentes approximations de  $A\tilde{Z}_n$  pour  $\tau \in [0; \Delta t]$ .

**Approximation d'ordre 2.** Une approximation d'ordre 2 de  $A\tilde{Z}_n$  est donnée pour  $\tau \in [0; \Delta t]$  par :

$$A\tilde{Z}_n(\tau) \simeq A\tilde{Z}_n(0) + \tau \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0)$$

et comme  $\frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0$ , on en déduit que l'on peut approcher  $A\tilde{Z}_n(\tau)$  par  $A\tilde{Z}_n(0)$  soit  $AZ^n$ , d'après (5.20).

En toute rigueur, on doit alors introduire la notation  $\tilde{Z}_n^*$  pour désigner la solution de

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Z}_n^*}{d\tau^2}(\tau) + AZ^n = 0, \\ \tilde{Z}_n^*(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n^*}{d\tau}(0) = 0, \end{cases} \quad (5.24)$$

puisque  $AZ^n$  désigne une approximation de  $A\tilde{Z}_n$ . Toutefois, afin d'alléger les notations, on notera indifféremment  $\tilde{Z}_n^*$  et  $\tilde{Z}_n$  et on remplacera (5.24) par :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + AZ^n = 0, \\ \tilde{Z}_n(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

On vérifie alors facilement que  $\tilde{Z}_n(\Delta t) = Z^n - \frac{\Delta t^2}{2} AZ^n$  et donc :

$$Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1} = 2\tilde{Z}_n(\Delta t) - 2Z^n = -\Delta t^2 AZ^n,$$

c'est-à-dire que l'on retrouve le schéma saute-mouton classique de pas de temps  $\Delta t$ .

On peut vérifier, la méthode étant la même que celle utilisée dans la paragraphe 5.3.2.1, qu'une résolution de (5.25) par un schéma saute mouton de pas de temps  $\Delta t/p$  conduit exactement au même résultat, c'est-à-dire à un schéma saute-mouton de pas de temps  $\Delta t$ .

**Approximation d'ordre 4.** De la même manière que précédemment, en utilisant l'approximation d'ordre 4 :

$$A\tilde{Z}_n(\tau) \simeq A\tilde{Z}_n(0) + \frac{\tau^2}{2}A\frac{d^2\tilde{Z}_n}{dt^2}(0) = A\tilde{Z}_n(0) - \frac{\tau^2}{2}A^2\tilde{Z}_n(0) = AZ^n - \frac{\tau^2}{2}A^2Z^n,$$

on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{d^2\tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + AZ^n - \frac{\tau^2}{2}A^2Z^n = 0, \\ \tilde{Z}_n(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0, \end{cases} \quad (5.26)$$

dont la solution vérifie exactement  $\tilde{Z}_n(\Delta t) = Z^n - \frac{\Delta t^2}{2}AZ^n + \frac{\Delta t^4}{24}A^2Z^n$ . On a donc

$$Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1} = -\Delta t^2AZ^n + \frac{\Delta t^4}{12}A^2Z^n.$$

Cette approximation nous permet de retrouver l'équation modifiée d'ordre 4 classique de pas de temps  $\Delta t$ .

De même que pour l'approximation d'ordre 2, on peut vérifier que la résolution de (5.26) par un schéma EM de pas de temps  $\Delta t/p$  conduit exactement au même résultat, c'est-à-dire à un schéma EM de pas de temps  $\Delta t$ .

L'intérêt de la variable  $\tilde{Z}_n^n$  réside dans cette propriété qui n'est pas vérifiée par  $Z^n$ .

### 5.3.3 Discrétisation locale de l'équation auxiliaire

L'objectif est de résoudre (5.4) en utilisant des pas de temps locaux adaptés à chaque zone du domaine. Cependant, nous ne pouvons pas le faire directement et on est obligé de passer par la variable auxiliaire  $\tilde{Z}_n$  et résoudre (5.20). Comme nous l'avons vu, l'utilisation d'approximations pour résoudre (5.20) est équivalente à un schéma de pas de temps  $\Delta t$  (§§ 5.3.2.2) et la méthode sans faire d'approximation est équivalente à un schéma de pas de temps  $\Delta t/p$  (§§ 5.3.2.1). L'idée est donc de combiner les deux méthodes afin de résoudre (5.20) en utilisant un pas de temps  $\Delta t$  dans la zone grossière et un pas de temps  $\Delta t/p$  dans la zone fine. Il est important de préciser que la partie discrétisée par un pas de temps  $\Delta t/p$  ne se limite pas à la zone finement maillée mais englobe également la zone de transition et les deux mailles grossières voisines de la zone de transition, cela pour des raisons de stabilité de la méthode décrite dans [11]. Pour ne pas faire de confusion, nous appellerons respectivement partie grossière et fine les parties discrétisées par un pas de temps  $\Delta t$  et

$\Delta t/p$  et nous continuerons à désigner par zone grossière et zone fine les mailles de pas d'espace  $h_g$  et  $h_f$  (cf. Fig. 5.7).

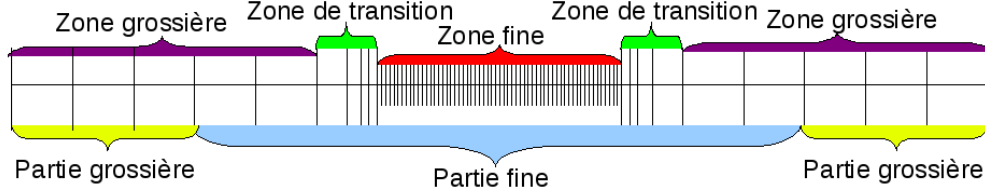


FIG. 5.7 – Détails des différentes zones et parties utilisées.

Supposons que

$$\tilde{Z}_n = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_n^{grossier} \\ \tilde{Z}_n^{fin} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{Z}_n^{grossier} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{Z}_n^{fin} \end{bmatrix} = (I - P) \tilde{Z}_n + P \tilde{Z}_n, \quad (5.27)$$

où  $P$  est une matrice de projection diagonale. Ses coefficients sont égaux à 1 ou 0 et permettent d'identifier les inconnues associées à la partie fine. Notons que la zone transitoire est considérée comme étant dans cette partie.

On a  $A\tilde{Z}_n = A(I - P)\tilde{Z}_n + AP\tilde{Z}_n$  et on utilise l'approximation d'ordre 4 dans la partie grossière :

$$\begin{aligned} A(I - P)\tilde{Z}_n(\tau) &\approx A(I - P)\tilde{Z}_n(0) + \frac{\tau^2}{2}A(I - P)\frac{d^2\tilde{Z}_n}{d\tau^2}(0) \\ &= A(I - P)\tilde{Z}_n(0) - \frac{\tau^2}{2}A(I - P)A\tilde{Z}_n(0) \\ &= A(I - P)Z^n - \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n, \end{aligned}$$

et on ne fait pas d'approximation dans la partie fine. On obtient alors le système :

$$\begin{cases} \frac{d^2\tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + A(I - P)Z^n - \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n + AP\tilde{Z}_n(\tau) = 0, \\ \tilde{Z}_n(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

On peut alors discrétiser (5.28) par un schéma EM d'ordre 4 en utilisant l'approximation :

$$\tilde{Z}_n\left(\tau + \frac{\Delta t}{p}\right) - 2\tilde{Z}_n(\tau) + \tilde{Z}_n\left(\tau - \frac{\Delta t}{p}\right) \approx \frac{\Delta t^2}{p^2}\frac{d^2\tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + \frac{\Delta t^4}{12p^4}\frac{d^4\tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau).$$

Comme  $\tilde{Z}_n$  vérifie (5.28), on a

$$\frac{d^2\tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) = -A(I - P)Z^n + \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n - AP\tilde{Z}_n(\tau)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau) &= A(I - P)AZ^n - AP \frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) \\ &= A(I - P)AZ^n + AP \left( A(I - P)Z^n - \frac{\tau^2}{2} A(I - P)AZ^n + AP \tilde{Z}_n(\tau) \right). \end{aligned}$$

On peut maintenant en déduire l'algorithme de résolution de (5.1) :

**Algorithme 2.**

1. Initialiser  $\tilde{Z}_n^0 = Z^n$ ,  $W_1 = -A(I - P)Z^n$ ,  $W_2 = A(I - P)AZ^n$ ,  
 $U_1 = -APZ^n$  et  $U_2 = APAZ^n$  ;
2. calculer  $\tilde{Z}_n^{1/p} = \tilde{Z}_n^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 (W_1 + U_1) + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (W_2 + U_2)$  ;
3. pour  $m = 1 \dots p - 1$  calculer
  - (a)  $V_1 = W_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{m\Delta t}{p} \right)^2 W_2 - AP \tilde{Z}_n^{m/p}$  ;
  - (b)  $V_2 = W_2 - APV_1$  ;
  - (c)  $\tilde{Z}_n^{m+1/p} = 2\tilde{Z}_n^{m/p} - \tilde{Z}_n^{m-1/p} + \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 V_2$  ;
4. calculer  $Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2\tilde{Z}_n^1$ .

Un schéma EM classique requiert  $2p$  multiplications par la matrice  $A$ . En ce qui concerne l'algorithme 2, on doit effectuer 2 multiplications par  $A(I - P)$ , 2 multiplications par  $AP$  pour l'initialisation (étape 1) puis,  $2(p - 1)$  multiplications par  $AP$  à l'étape 3. On fait donc au total 2 multiplications par  $A(I - P)$  et  $2p$  multiplications par  $AP$  ce qui diminue le nombre de multiplications à effectuer.

**Propriété 5.3.1.** *L'algorithme 2 ci-dessus est équivalent au schéma d'ordre 4*

$$Z^{n+1} = 2Z^n - Z^{n-1} - \Delta t^2 A_p Z^n, \quad (5.29)$$

où  $A_p$  est définie par

$$A_p = A - \frac{\Delta t^2}{12} A^2 - \frac{2}{p^2} \sum_{j=1}^{2(p-1)} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2(j+1)} \beta_j^p (AP)^j A^2.$$

où  $(\beta_j^m)_{m \geq j \geq 1}^{m \geq 1}$  sont des constantes (cf. [11]).

On renvoie à [11] pour la démonstration de cette propriété.

**Propriété 5.3.2.** *Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose*

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left( A \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right) + (AA_p Z^{n+1}, Z^n). \quad (5.30)$$

*Alors, sous la condition que les matrices  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  et  $AA_p$  soient positives,  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définit une énergie discrète.*

**Preuve** On cherche une condition sous laquelle  $E^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$ .

Il est démontré dans [11] que la matrice  $AA_p$  est symétrique, on a alors :

$$(AA_p Z^n, Z^{n+1}) = \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle,$$

soit

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ \left\langle \left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right) \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle + \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle \right]. \quad (5.31)$$

Pour que  $E^{n+\frac{1}{2}}$  soit positive il suffit que les matrices  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  et  $AA_p$  soient positives. La quantité  $E^{n+\frac{1}{2}}$  sera donc une énergie si les matrices  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  et  $AA_p$  sont positives. ■

**Remarque** Pour  $p = 1$ , on retrouve la même condition de stabilité que pour le schéma EM classique :  $\Delta t < \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{\lambda_{A_{max}}}}$  où  $\lambda_{A_{max}}$  désigne la plus grande valeur propre de  $A$  ce qui est équivalent à  $\Delta t < \sqrt{3}\alpha_{LF}h_f$ .

Pour  $p \geq 2$ , la matrice  $A_p$  dépend de  $\Delta t$  et n'est plus diagonalisable dans la même base que  $A$ . Il n'est donc pas possible d'obtenir une relation théorique simple entre  $\Delta t$ ,  $p$ ,  $h_f$  et  $h_g$ . Cependant, l'étude numérique des valeurs propres de  $AA_p$  et de  $A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p$  menée dans [11] indique que ces valeurs propres sont positives si  $\Delta t < h_g$  et  $\frac{\Delta t}{p} < h_f$ .

**Propriété 5.3.3.** *Sous la même condition CFL précédente, le schéma à pas de temps locaux conserve l'énergie  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définie par (5.30).*

**Preuve** Pour vérifier la conservation de l'énergie, on va prouver que  $E^{n+\frac{1}{2}} = E^{n-\frac{1}{2}}$ .

$$\text{Par définition, } E^{n+\frac{1}{2}} = \left( A \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right) + (AA_p Z^{n+1}, Z^n).$$

On utilise (5.29) pour éliminer  $Z^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} E^{n+\frac{1}{2}} &= \left( \frac{A(Z^n - Z^{n-1})}{\Delta t}, \frac{Z^n - Z^{n-1}}{\Delta t} \right) - (A(Z^n - Z^{n-1}), A_p Z^n) - (Z^n - Z^{n-1}, AA_p Z^n) \\ &+ (\Delta t^2 AA_p Z^n, A_p Z^n) + (AA_p (2Z^n - Z^{n-1} - \Delta t^2 A_p Z^n), Z^n). \end{aligned}$$

Comme  $A$  est symétrique, on en déduit que :

$$E^{n+\frac{1}{2}} = E^{n-\frac{1}{2}} + R$$

avec

$$\begin{aligned} R &= -(AZ^n, A_p Z^n) - (Z^n - Z^{n-1}, AA_p Z^n) + (\Delta t^2 AA_p Z^n, A_p Z^n) \\ &+ (AA_p (2Z^n - Z^{n-1} - \Delta t^2 A_p Z^n), Z^n). \end{aligned}$$

En développant  $R$  et en utilisant le fait que la matrice  $AA_p$  est symétrique on obtient que  $R = 0$  ce qui démontre la conservation de l'énergie. ■

En utilisant les propriétés 5.3.1, 5.3.3 et la remarque, on déduit que le schéma (5.29) est stable si  $\Delta t < h_g$  et  $\frac{\Delta t}{p} < h_f$ .

### 5.3.4 Résultats numériques

Nous comparons dans ce paragraphe les résultats obtenus en utilisant les schémas EM classique (que nous avons appelé EM\_4) et à pas de temps locaux que nous appelons Loc\_4. Dans un premier temps nous prenons pour la discrétisation en espace des éléments d'ordre 4 partout. Les erreurs obtenues sont données dans les tableaux 5.5 et 5.6 et représentées par les figures 5.8 et 5.9.

Les erreurs obtenues sont quasiment identiques. On peut donc en conclure que le schéma Loc\_4 ne pénalise pas la qualité de la solution que l'on peut obtenir avec le schéma EM\_4.

Maintenant, nous présentons les résultats obtenus en utilisant le schéma EM\_4 et celui à pas de temps locaux avec des éléments d'ordres différents dans chaque zone (4 pour la zone grossière et pour la zone de transition et 2 dans la zone fine) que nous appelons Loc\_42. Les erreurs obtenues sont données dans les tableaux 5.7 et 5.8 et représentées par



	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	32	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	64	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	16	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$7.76 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	32	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$8 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	8	$1.05 \cdot 10^{-5}$	$4.85 \cdot 10^{-5}$	$h_g = 0.05$	16	$1.06 \cdot 10^{-5}$	$4.92 \cdot 10^{-5}$
$h_g = 0.025$	4	$5.95 \cdot 10^{-7}$	$3.42 \cdot 10^{-6}$	$h_g = 0.025$	8	$6 \cdot 10^{-7}$	$3.47 \cdot 10^{-6}$

TAB. 5.5 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.6 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

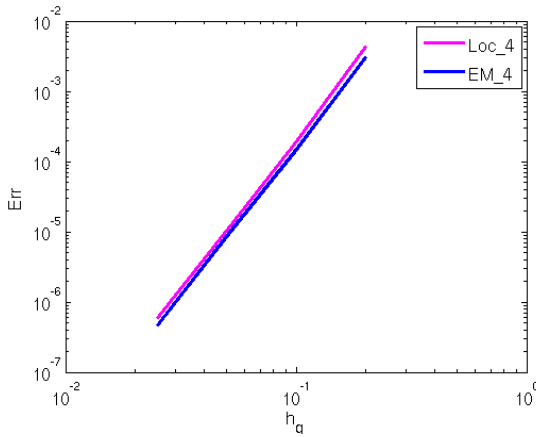


FIG. 5.8 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et Loc\_4 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

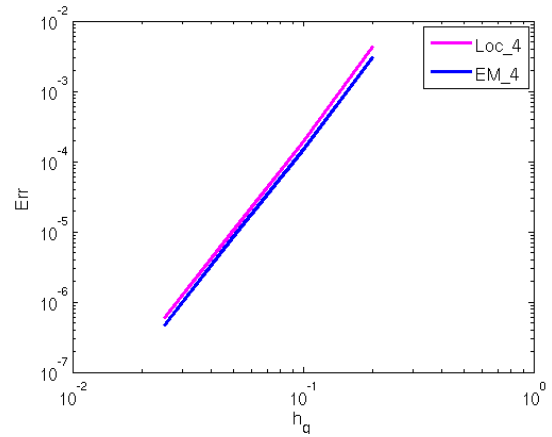


FIG. 5.9 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et Loc\_4 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	29	$4.32 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	58	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	15	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$5.53 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	29	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$7.45 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	8	$9.98 \cdot 10^{-5}$	$6.65 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.05$	15	$1.57 \cdot 10^{-5}$	$7.65 \cdot 10^{-5}$
$h_g = 0.025$	4	$1.03 \cdot 10^{-4}$	$7 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.025$	8	$1.48 \cdot 10^{-5}$	$9.91 \cdot 10^{-5}$

TAB. 5.7 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.8 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

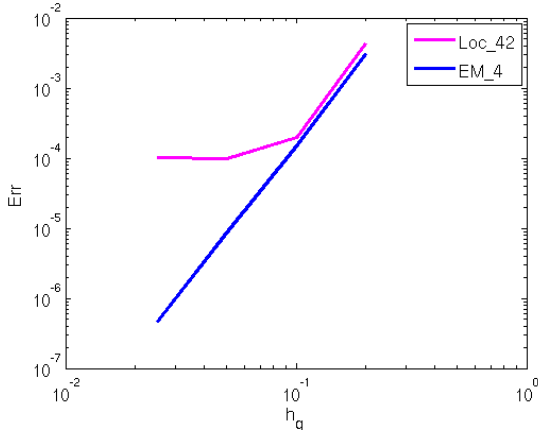


FIG. 5.10 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et Loc\_42 ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

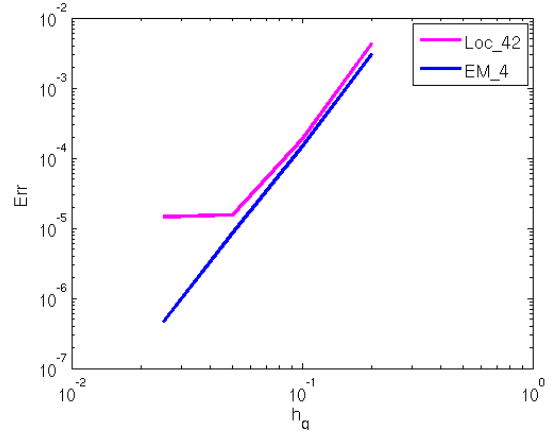


FIG. 5.11 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4 et Loc\_42 ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

les figures 5.10 et 5.11.

Les résultats obtenus avec le schéma Loc\_42 sont similaires à ceux obtenus avec un schéma EM\_42 comme l'illustrent les figures 5.5, 5.6, 5.10 et 5.11. Ici encore, on remarque que pour  $h_g$  grand, les erreurs obtenues en utilisant EM\_4 et Loc\_42 sont quasiment identiques. En raffinant  $h_g$ , l'erreur obtenue avec Loc\_42 est plus élevée et finit même par se stabiliser sur une constante. Cette constante diminue et la convergence s'améliore quand  $h_f$  diminue. Nous constatons donc que le schéma Loc\_42 ne pénalise pas la précision que l'on peut obtenir en appliquant un schéma EM\_4. Le niveau d'erreur est au maximum de 0.1% ce qui est tout à fait suffisant pour appliquer la RTM dans de bonnes conditions. Nous pensons donc qu'il serait intéressant d'étendre le schéma Loc\_42 à la dimension 2 afin de le tester en imagerie sismique.

## 5.4 Ordre local en temps

### 5.4.1 Présentation de la méthode

Nous venons de voir dans la section précédente que l'on gagne en temps de calcul en utilisant un schéma à pas de temps locaux. Afin d'optimiser encore plus la résolution de notre problème initial, nous nous intéressons maintenant à l'idée d'utiliser des discrétisations d'ordres différents en temps dans la partie grossière et dans la partie fine.

Nous proposons de considérer l'équation (5.28), obtenue par une approximation de  $A\tilde{Z}_n$

d'ordre 4 dans la partie grossière :

$$\begin{cases} \frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + A(I - P)Z^n - \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n + AP\tilde{Z}_n(\tau) = 0, \\ \tilde{Z}_n(0) = Z^n, \quad \frac{d\tilde{Z}_n}{d\tau}(0) = 0, \end{cases} \quad (5.32)$$

puis de discrétiser la partie fine par un schéma saute-mouton :

$$P\tilde{Z}_n(\tau + \Delta t/p) - 2P\tilde{Z}_n(\tau) + P\tilde{Z}_n(\tau - \Delta t/p) \approx P\frac{\Delta t^2}{p^2}\frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau),$$

et la partie grossière par un schéma équation modifiée d'ordre 4

$$\begin{aligned} (I - P)\tilde{Z}_n(\tau + \Delta t/p) - 2(I - P)\tilde{Z}_n(\tau) + (I - P)\tilde{Z}_n(\tau - \Delta t/p) &\approx (I - P)\frac{\Delta t^2}{p^2}\frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) \\ &+ (I - P)\frac{\Delta t^4}{12p^4}\frac{d^4 \tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau). \end{aligned}$$

En additionnant ces deux approximations nous obtenons :

$$\tilde{Z}_n(\tau + \Delta t/p) - 2\tilde{Z}_n(\tau) + \tilde{Z}_n(\tau - \Delta t/p) \approx \frac{\Delta t^2}{p^2}\frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) + (I - P)\frac{\Delta t^4}{12p^4}\frac{d^4 \tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau).$$

De plus, comme  $\tilde{Z}_n$  vérifie (5.32), on a

$$\frac{d^2 \tilde{Z}_n}{d\tau^2}(\tau) = -A(I - P)Z^n + \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n - AP\tilde{Z}_n(\tau) \quad (5.33)$$

et

$$\begin{aligned} (I - P)\frac{d^4 \tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau) &= (I - P)A(I - P)AZ^n \\ &+ (I - P)AP \left( A(I - P)Z^n - \frac{\tau^2}{2}A(I - P)AZ^n + AP\tilde{Z}_n(\tau) \right). \end{aligned} \quad (5.34)$$

On peut alors en déduire l'algorithme de résolution suivant :

### Algorithme 3.

1. Initialiser  $\tilde{Z}_n^0 = Z^n$ ,  $W_1 = -A(I - P)Z^n$ ,  $V_1 = -APZ_n$ ,  
 $W_2 = -A(I - P)(W_1 + V_1)$  ;
2. calculer  $\tilde{Z}_n^{1/p} = \tilde{Z}_n^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 (W_1 + V_1) + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I - P) [W_2 - AP(W_1 + V_1)]$  ;

3. pour  $m = 1 \dots p - 1$ , calculer

$$(a) V_1 = W_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{m\Delta t}{p} \right)^2 W_2 - AP\tilde{Z}_n^{m/p};$$

$$(b) V_2 = (I - P)(W_2 - APV_1);$$

$$(c) \tilde{Z}_n^{(m+1)/p} = 2\tilde{Z}_n^{m/p} - \tilde{Z}_n^{(m-1)/p} + \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 V_2;$$

4. calculer  $Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2\tilde{Z}_n^1$ .

L'algorithme 3 requiert deux multiplications par  $A(I - P)$  (étape 1),  $p$  multiplications par  $AP$  (étapes 1. et 3. (a)) et  $p$  multiplications par  $(I - P)AP$  (étapes 2 et 3 (b)). Dans notre analyse, nous utilisons le schéma Loc (étudié ici sous les formes Loc\_4 ou Loc\_42) comme référence. Ainsi, dans le but d'optimiser les coûts de calcul générés par l'algorithme 3, on vise l'objectif de ne pas dépasser les coûts inhérents à la mise en oeuvre du schéma Loc. Cela signifie donc qu'une façon de limiter les coûts de calcul consiste à modifier l'algorithme pour n'effectuer que deux multiplications par  $A(I - P)$  et  $p$  multiplications par  $AP$ . Nous pouvons remarquer que les multiplications par  $(I - P)AP$  dans la partie fine proviennent de l'approximation en temps d'ordre 4 de  $A\tilde{Z}_n$  dans la partie grossière. Nous rappelons que notre objectif est de combiner des ordres différents en temps et en espace tout en utilisant des pas de temps locaux. Dans la région maillée finement, on pourrait envisager d'utiliser des approximations d'ordre élevé. Toutefois, dans les applications que nous considérons, les maillages que nous qualifions de fins sont constitués de mailles très petites, ce qui ne justifie pas l'utilisation d'espaces d'éléments finis d'ordre plus grand que deux. Nous illustrons ce point plus loin par un cas test pour lequel nous renvoyons aux tableaux 5.11, page 152, 5.12, page 152, 5.15, page 154 et 5.16, page 154 et aux figures 5.22, page 153, 5.23, page 153, 5.24, page 154 et 5.25, page 154. Parallèlement à tout cela, en utilisant des pas de temps locaux, on perturbe le schéma en temps appliqué dans la partie fine par des termes de la forme  $(I - P)AP$  qui sont d'ordre 4. En conclusion, en tenant compte de l'analyse que nous venons de faire, nous proposons de supprimer ces termes, ce qui conduit à l'approximation suivante :

$$(I - P) \frac{d^4 \tilde{Z}_n}{d\tau^4}(\tau) = (I - P)A(I - P)AZ^n. \quad (5.35)$$

et donne l'algorithme :

#### Algorithme 4.

1. Initialiser  $\tilde{Z}_n^0 = Z^n$ ,  $W_1 = -A(I - P)Z^n$ ,  $V_1 = -APZ_n$ ,

$$W_2 = -A(I - P)(W_1 + V_1);$$

2. calculer  $\tilde{Z}_n^{1/p} = \tilde{Z}_n^0 + \frac{1}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 (W_1 + V_1) + \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I - P)W_2;$

3. pour  $m = 1 \dots p - 1$ , calculer

$$(a) V_1 = W_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{m\Delta t}{p} \right)^2 W_2 - AP\tilde{Z}_n^{m/p};$$

$$(b) \tilde{Z}_n^{(m+1)/p} = 2\tilde{Z}_n^{m/p} - \tilde{Z}_n^{(m-1)/p} + \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I - P)W_2;$$

4. calculer  $Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2\tilde{Z}_n^1$ .

L'algorithme 4 repose sur l'approximation (5.35) qui permet de s'affranchir des  $p$  multiplications par  $(I - P)AP$  (étapes 2 et 3 (b)). Son coût est donc optimisé par rapport à l'algorithme 3.

**Propriété 5.4.1.** *L'algorithme 4 est équivalent au schéma : pour  $p \geq 1$*

$$\frac{Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1}}{\Delta t^2} + A_p Z^n = 0, \quad (5.36)$$

avec

$$A_p = A - \frac{\Delta t^2}{12} (I - P)A(I - P)A \quad (5.37)$$

$$-2\alpha_p \frac{\Delta t^2}{p^4} [PA(I - P)A + APA] - 2 \sum_{j=1}^p \frac{\Delta t^{2j-2}}{p^{2j}} \beta_j^p (AP)^{j-2} AA \quad (5.38)$$

où les constantes  $(\alpha_m)_{m \geq 1}$  et  $(\beta_j^m)_{m \geq j \geq 1}^{m \geq 1}$  sont définies par récurrence avec pour conditions initiales :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta_1^m = \beta_2^m = 0.$$

**Preuve** Pour démontrer la propriété 5.4.1, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 1.** *L'itéré  $\tilde{Z}_n^{m/p}$  défini par récurrence au point 3 (b) de l'algorithme 4 satisfait la relation : pour  $m \geq 1$ ,*

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{m/p} = & Z^n - \frac{m^2}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 AZ^n + \frac{m^4}{24} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n \\ & + \alpha_m \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 [PA(I - P)A + APA] Z^n + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2j} \beta_j^m (AP)^{j-2} AA Z^n \end{aligned} \quad (5.39)$$

où les constantes  $(\alpha_m)_{m \geq 1}$  et  $(\beta_j^m)_{m \geq j \geq 1}^{m \geq 1}$  sont définies par récurrence avec pour conditions initiales :

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \beta_1^m = \beta_2^m = 0$$

En prenant  $m = p$ , on a

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_n^1 &= Z^n - \frac{p^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{p^4}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n \\ &+ \alpha_p \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 [PA(I - P)A + APA] Z^n + \sum_{j=1}^p \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} \beta_j^p (AP)^{j-2} AAZ^n,\end{aligned}$$

soit

$$\tilde{Z}_n^1 = Z^n - \frac{\Delta t^2}{2} A_p Z^n.$$

Puis, en utilisant l'étape 4 de l'algorithme 4, on obtient

$$Z^{n+1} = -Z^{n-1} + 2\tilde{Z}_n^1,$$

soit

$$\frac{Z^{n+1} - 2Z^n + Z^{n-1}}{\Delta t^2} = -A_p Z^n.$$

■

Démontrons maintenant le lemme 1.

**Preuve du lemme 1** A partir des définitions de  $\tilde{Z}_n^0$ ,  $V_1$ ,  $W_1$  et  $W_2$  de l'étape 1 de l'algorithme 4, nous obtenons

$$\tilde{Z}_n^{1/p} = Z^n - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{1}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n.$$

$\tilde{Z}_n^{1/p}$  est bien de la forme de (5.39) avec  $\alpha_1 = 0$  et  $\beta_1^1 = 0$ .

A l'étape 2, pour  $m = 1$ , on a

$$V_1 = -A(I - P)Z^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 A(I - P)AZ^n - AP\tilde{Z}_n^{1/p}.$$

En utilisant l'expression de  $\tilde{Z}_n^{1/p}$  et en remarquant que  $P(I - P) = 0$ , on obtient

$$V_1 = -A(I - P)Z^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 A(I - P)AZ^n - APZ^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 APAZ^n,$$

soit

$$V_1 = -AZ^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 (I - P)A(I - P)AZ^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 (PA(I - P)A + APA) Z^n.$$

De plus on a

$$\tilde{Z}_n^{2/p} = 2\tilde{Z}_n^{1/p} - \tilde{Z}_n^0 + \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)W_2,$$

soit

$$\tilde{Z}_n^{2/p} = Z^n - 2 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (PA(I - P)A + APA) Z^n$$

qui est de la forme de (5.39) avec  $\alpha_2 = \frac{1}{2}$  et  $\beta_1^2 = \beta_2^2 = 0$ .

Ensuite, comme

$$V_1 = W_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2\Delta t}{p}\right)^2 W_2 - AP\tilde{Z}_n^{2/p},$$

$$\begin{aligned} V_1 &= -AZ^n + 2 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 A(I - P)AZ^n + 2 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AP AZ^n \\ &\quad - \frac{2}{3} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 AP(I - P)A(I - P)AZ^n - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (APPA(I - P)A + APAPA) Z^n, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} V_1 &= -AZ^n + 2 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 (I - P)A(I - P)AZ^n \\ &\quad + 2 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 (PA(I - P)A + APA) Z^n - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 APAAZ^n. \end{aligned}$$

Et, comme

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{3/p} &= 2\tilde{Z}_n^{2/p} - \tilde{Z}_n^{1/p} + \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)W_2, \\ \tilde{Z}_n^{3/p} &= Z^n - \frac{9}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{27}{8} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n \\ &\quad + 3 \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (PA(I - P)A + APA) Z^n - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^6 APAAZ^n \end{aligned}$$

qui est de la forme de (5.39) avec  $\alpha_3 = 3$ ,  $\beta_1^3 = \beta_2^3 = 0$  et  $\beta_3^3 = -\frac{1}{2}$ .

Nous faisons alors comme hypothèse : pour  $1 \leq l \leq m$ ,  $m \geq 3$  fixé,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{l/p} &= Z^n - \frac{l^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{l^4}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I - P)A(I - P)AZ^n \\ &\quad + \alpha_l \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 [PA(I - P)A + APA] Z^n + \sum_{j=1}^l \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} \beta_j^l (AP)^{j-2} AAZ^n. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Calculons alors l'expression de  $\tilde{Z}_n^{(m+1)/p}$  défini par la relation de récurrence du 3 (b) de l'algorithme 4.

On a pour tout  $1 \leq l \leq m$ ,

$$V_1 = W_1 + \frac{1}{2} \left( \frac{l\Delta t}{p} \right)^2 W_2 - AP\tilde{Z}_n^{l/p}$$

et l'hypothèse que :

$$\begin{aligned} V_1 = & -AZ^n + \frac{l^2}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 (I-P)A(I-P)AZ^n + \frac{l^2}{2} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 (PA(I-P)A + APA) Z^n \\ & - \alpha_l \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 APAAZ^n - \sum_{j=1}^l \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2j} \beta_j^l (AP)^{j-1} AAZ^n. \end{aligned}$$

Par construction, pour  $1 \leq l \leq m$ ,

$$\tilde{Z}_n^{(l+1)/p} = 2\tilde{Z}_n^{l/p} - \tilde{Z}_n^{(l-1)/p} + \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 V_1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I-P)W_2.$$

On a alors pour tout  $m \geq 3$  fixé,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_n^{(m+1)/p} = & Z^n - \left( m^2 - \frac{(m-1)^2}{2} + 1 \right) \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^2 AZ^n \\ & + \left( \frac{m^4}{12} - \frac{(m-1)^4}{24} + \frac{1}{12} + \frac{m^2}{2} \right) \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 (I-P)A(I-P)AZ^n \\ & + \left( 2\alpha_m - \alpha_{m-1} + \frac{m^2}{2} \right) \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^4 [PA(I-P)A + APA] Z^n \\ & - \alpha_m \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^6 APAAZ^n + \sum_{j=1}^m \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2j} 2\beta_j^m (AP)^{j-2} AAZ^n \\ & - \sum_{j=1}^{m-1} \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2j} \beta_j^{m-1} (AP)^{j-2} AAZ^n - \sum_{j=1}^m \left( \frac{\Delta t}{p} \right)^{2(j+1)} \beta_j^m (AP)^{j-1} AAZ^n. \end{aligned}$$

Ensuite, comme

$$m^2 - \frac{(m-1)^2}{2} + 1 = \frac{(m+1)^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{m^4}{12} - \frac{(m-1)^4}{24} + \frac{1}{12} + \frac{m^2}{2} = \frac{(m+1)^4}{24},$$



en posant  $\alpha_{m+1} = 2\alpha_m - \alpha_{m-1} + \frac{m^2}{2}$ , on obtient, pour  $m \geq 3$  fixé :

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_n^{(m+1)/p} &= Z^n - \frac{(m+1)^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{(m+1)^4}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I-P)A(I-P)AZ^n \\ &+ \alpha_{m+1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 [PA(I-P)A + APA] Z^n \\ &- \alpha_m \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^6 APAAZ^n + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} 2\beta_j^m (AP)^{j-2} AAZ^n \\ &- \sum_{j=1}^{m-1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} \beta_j^{m-1} (AP)^{j-2} AAZ^n - \sum_{j=1}^m \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2(j+1)} \beta_j^m (AP)^{j-1} AAZ^n.\end{aligned}$$

Cette expression peut se réécrire

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_n^{(m+1)/p} &= Z^n - \frac{(m+1)^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{(m+1)^4}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I-P)A(I-P)AZ^n \\ &+ \alpha_{m+1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 [PA(I-P)A + APA] Z^n - (\alpha_m - 2\beta_3^m + \beta_3^{m-1}) \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^6 APAAZ^n \\ &+ \sum_{j=4}^{m-1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} (2\beta_j^m - \beta_j^{m-1} - \beta_{j-1}^m) (AP)^{j-2} AAZ^n \\ &+ (2\beta_m^m - \beta_{m-1}^m) \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2m} (AP)^{m-2} AAZ^n - \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2(m+1)} \beta_m^m (AP)^{m-1} AAZ^n,\end{aligned}$$

soit, en rappelant que  $\beta_1^m = 0 = \beta_2^m$ ,

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_n^{(m+1)/p} &= Z^n - \frac{(m+1)^2}{2} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^2 AZ^n + \frac{(m+1)^4}{24} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 (I-P)A(I-P)AZ^n \\ &+ \alpha_{m+1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^4 [PA(I-P)A + APA] Z^n + \sum_{j=1}^{m+1} \left(\frac{\Delta t}{p}\right)^{2j} \beta_j^{m+1} (AP)^{j-2} AAZ^n\end{aligned}$$

avec

$$\beta_1^{m+1} = \beta_2^{m+1} = 0, \quad \beta_3^{m+1} = \alpha_m - 2\beta_3^m + \beta_3^{m-1}, \quad \beta_m^{m+1} = 2\beta_m^m - \beta_{m-1}^m, \quad \beta_{m+1}^{m+1} = -\beta_m^m$$

et

$$\beta_j^{m+1} = 2\beta_j^m - \beta_j^{m-1} - \beta_{j-1}^m, \quad \text{pour } 4 \leq j \leq m-1.$$

En conclusion, si  $\tilde{Z}_n^{l/p}$  vérifie (5.40) pour tout entier  $m \geq l \geq 3$  avec  $m$  fixé,  $\tilde{Z}_n^{(m+1)/p}$  vérifie aussi (5.40). Comme (5.40) est vérifiée pour  $m = 1, 2, 3$ , elle est donc vérifiée pour tout entier  $m$ , ce qui achève la preuve du lemme 1.  $\blacksquare$

**Propriété 5.4.2.** *Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose*

$$E^{n+\frac{1}{2}} = \left( A \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right) + (AA_p Z^{n+1}, Z^n). \quad (5.41)$$

Alors, si les matrices  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  et  $AA_p$  sont positives,  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définit une énergie discrète.

**Preuve** On cherche une condition sous laquelle  $E^{n+\frac{1}{2}} \geq 0$ .

On a

$$\begin{aligned} \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle &= \frac{1}{4} (AA_p Z^{n+1}, Z^{n+1}) \\ &+ \frac{1}{4} (AA_p Z^{n+1}, Z^n) + \frac{1}{4} (AA_p Z^n, Z^{n+1}) + \frac{1}{4} (AA_p Z^n, Z^n) \\ &- \frac{1}{4} (AA_p Z^{n+1}, Z^{n+1}) + \frac{1}{4} (AA_p Z^{n+1}, Z^n) \\ &+ \frac{1}{4} (AA_p Z^n, Z^{n+1}) - \frac{1}{4} (AA_p Z^n, Z^n). \end{aligned}$$

En utilisant le lemme :

**Lemme 2.** *La matrice  $AA_p$  est symétrique pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .*

on obtient que

$$(AA_p Z^n, Z^{n+1}) = \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle - \frac{\Delta t^2}{4} \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle$$

soit

$$\begin{aligned} E^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2} \left[ \left\langle \left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right) \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t}, \frac{Z^{n+1} - Z^n}{\Delta t} \right\rangle \right. \\ &\quad \left. + \left\langle AA_p \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2}, \frac{Z^{n+1} + Z^n}{2} \right\rangle \right]. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Comme  $A$  et  $AA_p$  sont des matrices symétriques,  $E^{n+\frac{1}{2}}$  est une forme quadratique symétrique qui est positive pour  $\Delta t$  suffisamment petit. Ainsi, la quantité  $E^{n+\frac{1}{2}}$  est une énergie si les matrices  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  et  $AA_p$  sont positives.

Nous finissons la preuve de la propriété 5.4.2 en démontrant le lemme 2.

**Preuve du lemme 2** Par définition, on a :

$$\begin{aligned} AA_p &= A^2 - \frac{\Delta t^2}{12} A(I-P)A(I-P)A - 2\alpha_p \frac{\Delta t^2}{p^4} A[PA(I-P)A + APA] \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^p \frac{\Delta t^{2j-2}}{p^{2j}} \beta_j^p A (AP)^{j-2} A^2. \end{aligned}$$

Comme les matrices  $A$  et  $P$  sont symétriques, il en est de même pour les matrices  $A^2$  et  $A(I-P)A(I-P)A$ . Il reste à vérifier que  $A[PA(I-P)A + APA]$  et  $A(AP)^{j-2}A^2$  sont symétriques. On a, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$$A[PA(I-P)A + APA] = APAA - APAPA + AAPA = -APAPA + A(PA + AP)A.$$

$PA + AP$  étant symétrique, on en déduit que  $A[PA(I-P)A + APA]$  est symétrique. De plus, on a pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ ,

$${}^t \left( A (AP)^j A^2 \right) = A^2 (PA)^j A$$

car  ${}^t P = P$  et donc  ${}^t \left[ (AP)^j \right] = (PA)^j$  et,

$$A^2 (PA)^j A = A^2 (PA)^{j-1} PAA = A^2 (PA)^{j-1} PA^2 = A (AP)^j A^2.$$

On en déduit que  $A (AP)^j A^2$  et par conséquent  $A (AP)^{j-2} A^2$  sont symétriques ce qui achève la preuve du lemme 2. ■

**Propriété 5.4.3.** *Si les matrices  $AA_p$  et  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  sont positives, l'énergie  $E^{n+\frac{1}{2}}$  définie par (5.41) est conservée par le schéma des pas de temps locaux (5.36) (i.e. associé à l'algorithme 4).*

**Preuve** La preuve de la propriété 5.4.3 est en tout point identique à celle de la propriété 5.3.3 avec

$$\begin{aligned} A_p &= A - \frac{\Delta t^2}{12} (I-P)A(I-P)A \\ &\quad - 2\alpha_p \frac{\Delta t^2}{p^4} [PA(I-P)A + APA] - 2 \sum_{j=1}^p \frac{\Delta t^{2j-2}}{p^{2j}} \beta_j^p (AP)^{j-2} AA \end{aligned}$$

On en déduit donc que si les matrices  $AA_p$  et  $\left( A - \frac{\Delta t^2}{4} AA_p \right)$  sont positives, le schéma (5.36) est stable. Maintenant, il serait intéressant d'exprimer la condition suffisante portant

sur les matrices  $AA_p$  et  $\left(A - \frac{\Delta t^2}{4}AA_p\right)$  comme une condition du type CFL où la stabilité serait assurée par un choix convenable du pas de temps  $\Delta t$ . Nous n'avons pas réussi à établir cette condition, le calcul explicite des valeurs propres de  $AA_p$  et  $\left(A - \frac{\Delta t^2}{4}AA_p\right)$  étant difficile à réaliser. Toutefois, dans le paragraphe suivant, nous présentons une étude numérique des valeurs propres de  $AA_p$  et  $\left(A - \frac{\Delta t^2}{4}AA_p\right)$  qui va nous conduire à établir une condition CFL sous forme de conjecture.

### 5.4.2 Etude numérique de la condition de stabilité

Nous notons respectivement  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  et  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  les valeurs propres minimales de  $AA_p$  et  $A - \frac{\Delta t^2}{4}AA_p$  que nous allons calculer numériquement sur le cas test suivant. Nous considérons toujours la configuration 1D définie précédemment et présentons les résultats obtenus avec des mailles d'ordre 4 dans la zone grossière et dans la zone transitoire, des mailles d'ordre 2 dans la zone fine avec  $h_g = 0.05$ ,  $h_f = 1/160$  et  $L = 0.2$  et les conclusions sont les mêmes pour les autres choix de paramètres (par exemple  $h_g = 0.1$ ,  $h_f = 1/320$  et  $L = 0.1$ ) ou en utilisant des mailles d'ordre 4 pour tous les maillages.

Dans ce cas, en considérant la condition CFL du schéma classique EM d'ordre 4, on obtient numériquement que  $\alpha_g = 0.152$  et  $\alpha_f = 0.163$ . Ainsi, si on utilisait un maillage grossier sur tout le domaine et un schéma EM d'ordre 4, on aurait pour condition CFL :

$$\Delta t \leq \sqrt{3}\alpha_g h_g.$$

De même, si on utilisait un maillage fin partout avec un schéma saute-mouton, la condition CFL serait :

$$\Delta t \leq \alpha_f h_f.$$

Notre objectif est d'étudier le signe des valeurs propres de  $AA_p$  et  $\left(A - \frac{\Delta t^2}{4}AA_p\right)$  et de montrer que si  $\Delta t$  et  $p$  sont correctement choisis, elles sont bien positives et en déduire la stabilité du schéma. Si on se réfère à [11], la stabilité est dite optimale si le schéma est stable sous la condition CFL :

$$\Delta t \leq \Delta t_{opt} \quad \text{et} \quad p \geq p_{opt}.$$

Dans notre cas,  $\Delta t_{opt} = \sqrt{3}\alpha_g h_g$  et  $p_{opt} = E\left(\frac{\sqrt{3}\alpha_g h_g}{\alpha_f h_f}\right) + 1$ , où  $E$  désigne la fonction partie entière. On vérifie que  $\Delta t_{opt} = 0.0132$  et  $p_{opt} = 13$ .

A priori, on devrait évaluer  $\lambda_1^{\min}$  et  $\lambda_2^{\min}$  pour tout couple  $(\Delta t, p)$  de  $]0, \Delta t_{opt}] \times [p_{opt}, +\infty[$ . Bien évidemment, nous n'avons pas réalisé ces expériences et nous nous sommes limités à considérer 500 valeurs de  $\Delta t$  équiréparties sur l'intervalle  $]0, 1.1\Delta t_{opt}]$  et 4 valeurs de  $p$  à

savoir  $p = 13, 14, 15, 16$  et  $17$ . Ici, nous ne présentons que les résultats pour  $p = 13$ , les conclusions étant similaires pour les autres valeurs de  $p$ .

En pratique, la matrice  $AA_p$  n'est jamais calculée car elle implique de nombreuses multiplications matrice/matrice, et on préfère utiliser l'algorithme 4. Remarquons cependant que cet algorithme peut-être utilisé pour le calcul de  $A_p$  en remplaçant le vecteur  $Z^n$  (de taille  $m$  par exemple) dans tout l'algorithme par la matrice identité  $m \times m$ . D'après le lemme 1, on obtient alors

$$\tilde{Z}_n^1 = Z^n - \frac{\Delta t^2}{2} A_p Z_n = I - \frac{\Delta t^2}{2} A_p,$$

soit

$$A_p = \frac{2\tilde{Z}_n^1 - 2I}{\Delta t^2}.$$

Nous représentons l'évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  et  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  sur les figures 5.12 et 5.13 pour les 500 valeurs  $\Delta t$  régulièrement espacées sur l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$ . Les figures 5.14 et 5.15 représentent un zoom des deux figures précédentes. On remarque que les valeurs propres minimales oscillent autour de 0. En effet, la matrice  $A$  possède une valeur propre nulle car nous considérons des conditions périodiques (nous aurions observé le même phénomène avec des conditions de Neumann). Comme les valeurs propres sont calculées numériquement, cette valeur propre n'est pas exactement égale à 0 et nous ne pouvons pas la distinguer d'une éventuelle valeur propre négative. Pour pallier ce problème, nous avons refait l'expérience en considérant des conditions de Dirichlet homogènes (i.e.  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ ) au lieu des conditions périodiques. Les résultats sont présentés sur les figures 5.16 et 5.17. La figure 5.18 est un zoom de la figure 5.16. On remarque alors que  $\lambda_1^{\min}$  et  $\lambda_2^{\min}$  sont toujours positives pour  $\Delta t \leq \Delta t_{opt}$ . Cependant, nous avons dû discrétiser l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$  pour effectuer l'expérience et nous ne pouvons donc pas affirmer qu'il n'existe pas de valeurs propres négatives pour tous les  $\Delta t$  de cet intervalle. De plus, dans [11], des phénomènes de résonance (c'est-à-dire de zones étroites où la valeur propre est négative) ont été observés pour des pas de temps dans l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$ . Pour préciser ce point, nous avons refait l'expérience précédente pour 1000 valeurs de  $\Delta t$  régulièrement espacées dans l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$ . Nous présentons les résultats sur les figures 5.19 et 5.20. On remarque que  $\lambda_1^{\min}$  est négative pour 4 valeurs sur les 1000 considérées, ce qui illustre le phénomène de résonance précédemment évoqué. Nous avons donc choisi d'adopter la solution proposée dans [11], qui consiste à inclure une maille grossière supplémentaire dans la partie fine et nous avons recalculé les valeurs de  $\lambda_1^{\min}$  pour 1000 valeurs régulièrement espacées de l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$ . Ces résultats sont présentés sur la figure 5.21 où on peut voir que les phénomènes de résonance ont bien disparu.

Au vu de ces résultats numériques, nous proposons la conjecture suivante :

#### Conjecture 5.4.4.

– Si on inclut deux mailles grossières dans la partie fine, l'algorithme 4 est stable pour

$$p \geq p_{opt} \quad \text{et} \quad \Delta t \in ]0; \Delta t_{opt}] \setminus I_p.$$

avec  $\Delta t_{opt} = \sqrt{3}\alpha_g h_g$ ,  $p_{opt} = E\left(\frac{\sqrt{3}\alpha_g h_g}{\alpha_f h_f}\right) + 1$ , et  $I_p$  est une union finie d'intervalles de largeur inférieure à  $\Delta t_{opt}/1000$ .

– Si on inclut trois mailles grossières dans la partie fine, l'algorithme 4 est stable pour

$$p \geq p_{opt} \quad \text{et} \quad \Delta t \leq \Delta t_{opt}.$$

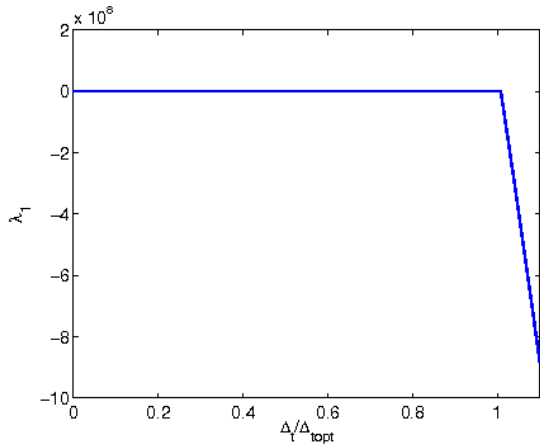


FIG. 5.12 – Évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord périodiques.

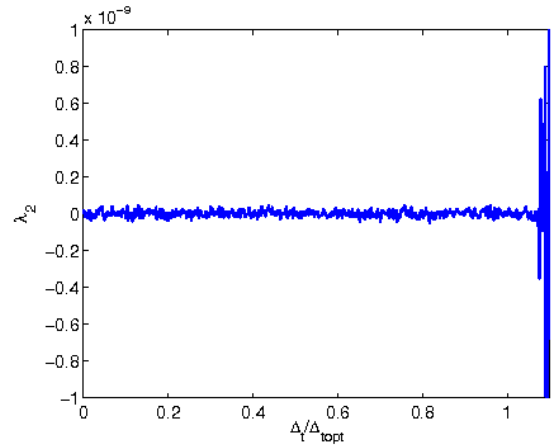


FIG. 5.13 – Évolution de  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord périodiques.

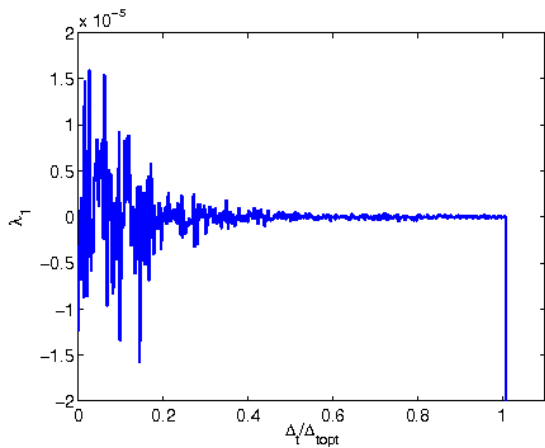


FIG. 5.14 – Zoom sur l'évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  pour l'expérience avec des conditions de bord périodiques.

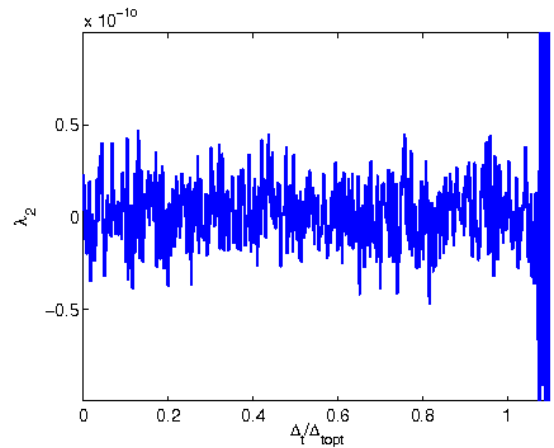


FIG. 5.15 – Zoom sur l'évolution de  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  pour l'expérience avec des conditions de bord périodiques.

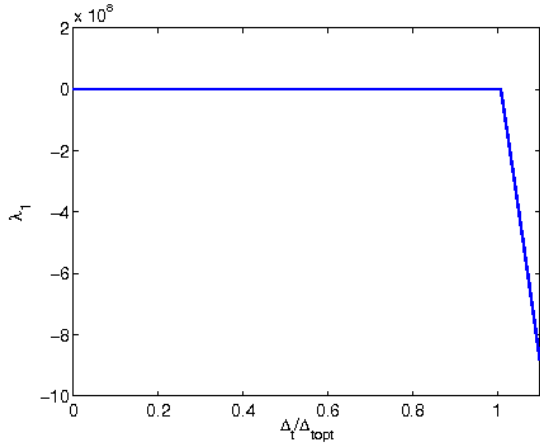


FIG. 5.16 – Évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes.

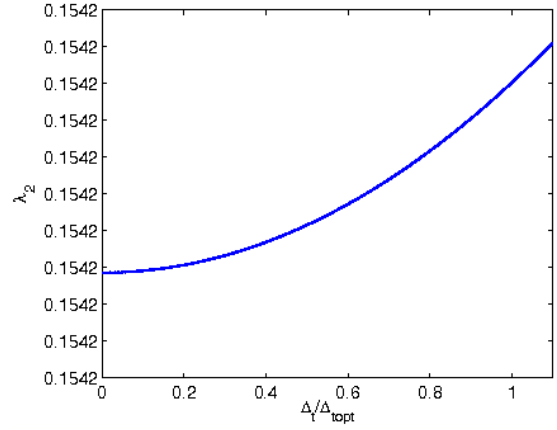


FIG. 5.17 – Évolution de  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0; 1.1\Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes.

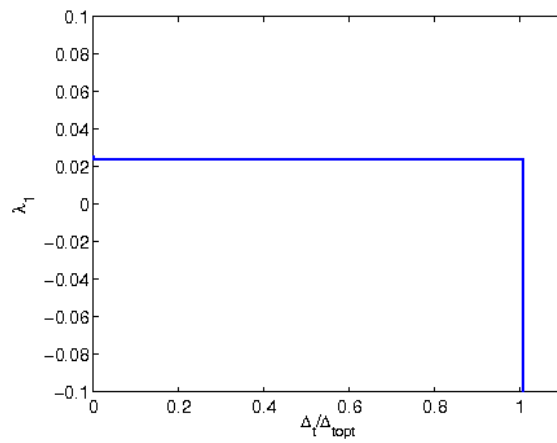


FIG. 5.18 – Zoom sur l'évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes.

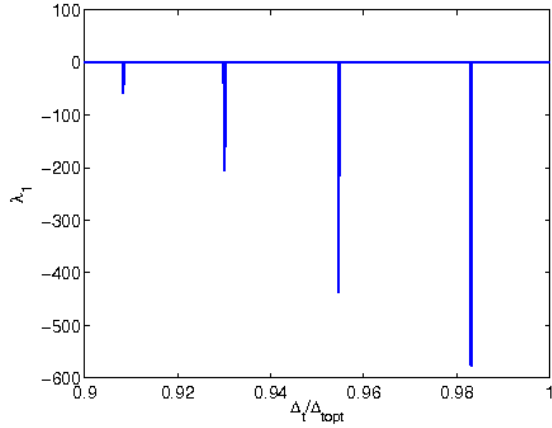


FIG. 5.19 – Évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes.

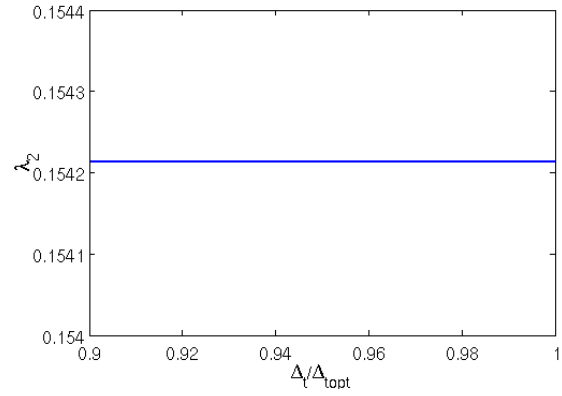


FIG. 5.20 – Évolution de  $\lambda_2^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes.

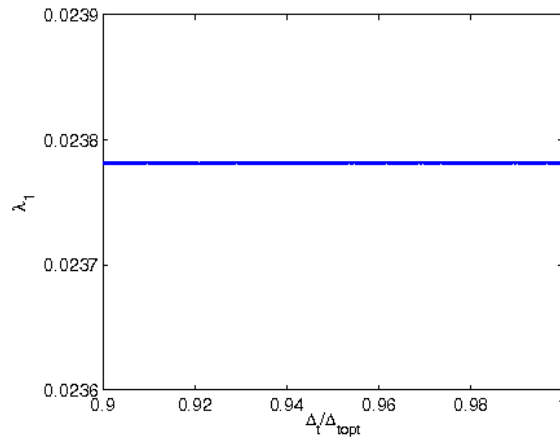


FIG. 5.21 – Évolution de  $\lambda_1^{\min}(\Delta t)$  dans l'intervalle  $]0.9\Delta t_{opt}; \Delta t_{opt}]$  pour l'expérience avec des conditions de bord de Dirichlet homogènes dans le cas où l'on a inclus une maille grossière supplémentaire dans la partie fine.



### 5.4.3 Résultats numériques

Nous comparons ici le schéma EM\_4 et le schéma combinant des pas de temps locaux avec ordres différents en temps issu de l'algorithme 3 puis de l'algorithme 4. Dans un premier temps, nous prenons pour la discrétisation en espace des éléments d'ordre 4 partout. Les schémas correspondants sont notés Loc\_4\_42a pour l'algorithme 3 et Loc\_4\_42b pour l'algorithme 4. Les erreurs obtenues sont données dans les tableaux 5.9, 5.10, 5.11 et 5.12 et représentées par les figures 5.22 et 5.23.

	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	56	$4.35 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	111	$4.31 \cdot 10^{-3}$	$3.12 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	28	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$7.3 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	56	$1.99 \cdot 10^{-4}$	$8.374 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	14	$9.83 \cdot 10^{-6}$	$2.37 \cdot 10^{-5}$	$h_g = 0.05$	28	$5.97 \cdot 10^{-5}$	$4.2 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	7	$3.38 \cdot 10^{-6}$	$2.2 \cdot 10^{-5}$	$h_g = 0.025$	14	$1.16 \cdot 10^{-4}$	$8.04 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.9 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4\_42a ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.10 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4\_42a ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	56	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	111	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	28	$1.95 \cdot 10^{-4}$	$7.92 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	56	$1.96 \cdot 10^{-4}$	$8.15 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	14	$1.02 \cdot 10^{-5}$	$4.3 \cdot 10^{-5}$	$h_g = 0.05$	28	$1.94 \cdot 10^{-5}$	$1.295 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	7	$6.78 \cdot 10^{-7}$	$2.64 \cdot 10^{-6}$	$h_g = 0.025$	14	$2.66 \cdot 10^{-5}$	$1.85 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.11 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4\_42b ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.12 – Erreur relative pour un schéma Loc\_4\_42b ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

Nous pouvons remarquer que pour  $h_f = 1/160$  et  $h_g$  petit, l'erreur des schémas Loc\_4\_42a et Loc\_4\_42b n'est plus d'ordre 4. Cela est dû au fait que l'erreur que nous faisons dans la partie d'ordre 2 devient plus grande que celle dans la partie grossière d'ordre 4. En revanche pour  $h_f = 1/320$  les résultats sont identiques. De plus, nous constatons que l'algorithme 3 est plus performant que l'algorithme 4. En effet, l'algorithme 4 est obtenu à partir du 3 en négligeant les termes d'ordre 4 en  $(I - P)AP$  ce qui ne peut se justifier que si l'on applique une méthode d'ordre 2 dans la partie fine.

Nous présentons maintenant les résultats obtenus en appliquant le schéma EM\_4 et celui à pas de temps locaux avec des ordres différents en temps et des éléments d'ordres différents dans chaque zone (4 pour la zone grossière et pour la zone de transition et 2 dans la zone fine) en utilisant l'algorithme 3 puis en utilisant l'algorithme 4. Pour simplifier, nous faisons référence à ces schémas par Loc\_42\_42a et Loc\_42\_42b. Les erreurs obtenues sont

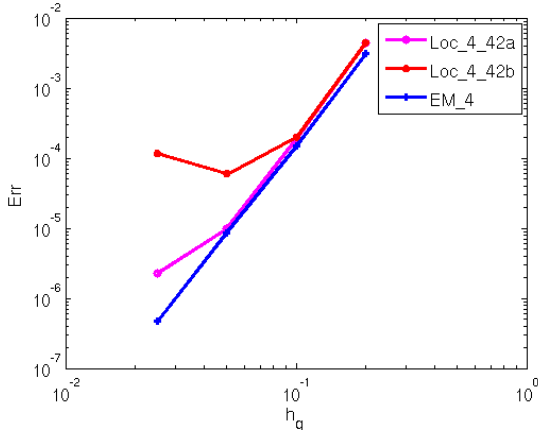


FIG. 5.22 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4, Loc\_4\_42a et Loc\_4\_42b ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

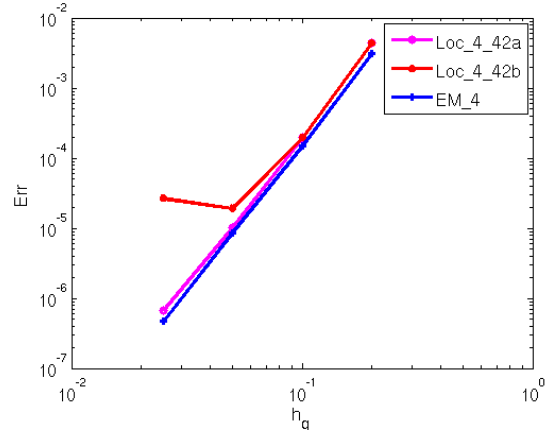


FIG. 5.23 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4, Loc\_4\_42a et Loc\_4\_42b ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

données dans les tableaux 5.13, 5.14, 5.15 et 5.16 et représentées par les figures 5.24 et 5.25.

Tout d’abord, nous pouvons remarquer que les algorithmes 3 et 4 donnent des résultats similaires aussi bien pour  $h_f = 1/160$  que pour  $h_f = 1/320$ . Ceci n’était pas le cas lorsque l’on prenait des éléments du même ordre partout (cf. Tab. 5.9, Tab. 5.10, Tab. 5.11 et Tab. 5.12). Ici, la suppression des termes d’ordre 4 en  $(I - P)AP$  n’a plus d’influence sur le résultat puisque on applique une méthode d’ordre 2 dans la partie fine.

Ensuite, nous constatons que les erreurs obtenues sont quasiment identiques à celles obtenues avec le schéma Loc\_42 (cf. Tab. 5.7 et Tab. 5.8). Cela signifie que les schémas Loc\_42\_42a et Loc\_42\_42b ne pénalisent pas les résultats par rapport au schéma Loc\_42. On retrouve une erreur proche de 0.1% ce qui confirme que l’utilisation des schémas Loc\_42\_42a et Loc\_42\_42b est tout à fait envisageable pour améliorer le temps et le coût de calcul sans dégrader la solution numérique.

*Conclusion :* Nous avons vu que dans la situation qui nous intéresse les algorithmes 3 et 4 donnent des résultats comparables. Cependant, l’algorithme 3 nécessite des multiplications supplémentaires et nous ne sommes pas parvenus à démontrer qu’il conservait une énergie. Nous ne pouvons donc pas étudier la stabilité du schéma Loc\_42\_42a. Pour les applications 2D, nous avons donc décidé d’utiliser l’algorithme 4 et donc le schéma Loc\_42\_42b.

	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	50	$4.32 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	100	$4.31 \cdot 10^{-3}$	$3.08 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	25	$1.97 \cdot 10^{-4}$	$5.51 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	50	$1.92 \cdot 10^{-4}$	$5.21 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	13	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$6.98 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.05$	25	$1.00 \cdot 10^{-4}$	$6.99 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	7	$1.06 \cdot 10^{-4}$	$7.22 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.025$	13	$1.27 \cdot 10^{-4}$	$8.73 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.13 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42\_42a ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.14 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42\_42a ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

	$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s		$\Delta t_g/\Delta t_f$	T=8s	T=80s
$h_g = 0.2$	50	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$3.13 \cdot 10^{-2}$	$h_g = 0.2$	100	$4.37 \cdot 10^{-3}$	$3.14 \cdot 10^{-2}$
$h_g = 0.1$	25	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$7.34 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.1$	50	$1.93 \cdot 10^{-4}$	$7.62 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.05$	13	$1.63 \cdot 10^{-5}$	$8.03 \cdot 10^{-5}$	$h_g = 0.05$	25	$2.38 \cdot 10^{-5}$	$1.52 \cdot 10^{-4}$
$h_g = 0.025$	7	$1.56 \cdot 10^{-5}$	$1.04 \cdot 10^{-4}$	$h_g = 0.025$	13	$2.88 \cdot 10^{-5}$	$1.98 \cdot 10^{-4}$

TAB. 5.15 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42\_42b ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

TAB. 5.16 – Erreur relative pour un schéma Loc\_42\_42b ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

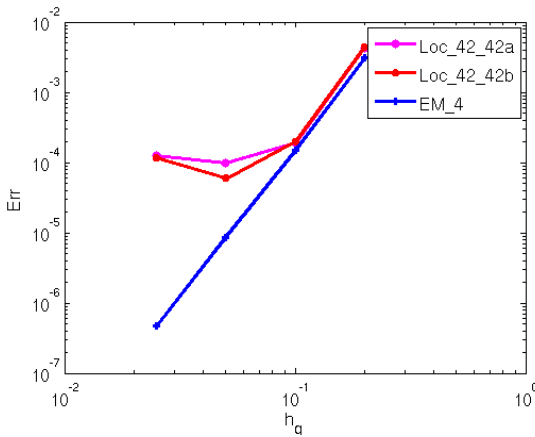


FIG. 5.24 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4, Loc\_42\_42a et Loc\_42\_42b ( $L = 0.2$  et  $h_f = 1/160$ ).

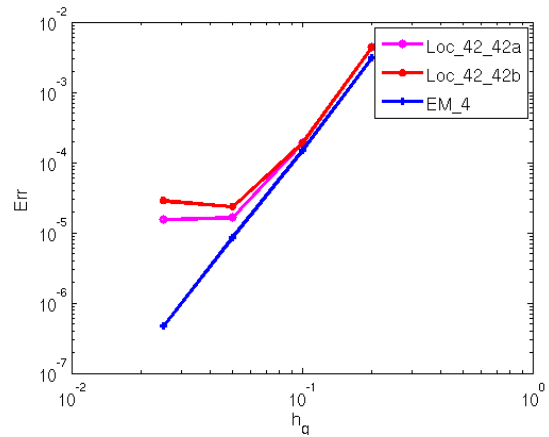


FIG. 5.25 – Courbes de convergence pour les schémas EM\_4, Loc\_42\_42a et Loc\_42\_42b ( $L = 0.1$  et  $h_f = 1/320$ ).

# Annexe A

## Mise en oeuvre de la méthode de Galerkin discontinue

Cette annexe a été rédigée une première fois dans le cadre du rapport évolutif du groupe de doctorants Nwaves. Nous avons choisi de la dupliquer dans ce manuscrit dans l'idée de proposer au lecteur un document le plus complet possible. On y trouve des informations sur la mise en oeuvre des éléments finis qui sont très classiques mais qui permettent aussi de mesurer la part de mise en oeuvre qu'il a été nécessaire de réaliser dans cette thèse.

### A.1 Définition de l'espace d'approximation $V^h$

#### A.1.1 Le maillage

**Définition A.1.1** *Un maillage  $\mathcal{T}_h$  du domaine  $\Omega$  est une partition de  $\Omega$  en  $L_h$  polyèdres convexes  $(K_l)_{l=1, L_h}$  (des segments en 1D, généralement des triangles ou des rectangles en 2D, des tétraèdres ou des hexaèdres en 3D), d'intérieur non vide et tels que  $\overset{\circ}{K}_l \cap \overset{\circ}{K}_m = \emptyset$ .*

*Le maillage est dit "conforme" si, de plus, toute face d'un élément est soit la face d'un autre élément, soit une face portée par le bord (voir Figs A.1 et A.2).*

Nous ne considérons ici que des triangles ou des tétraèdres et nous supposons que les fonctions  $\mu(x)$  et  $\rho(x)$  sont constantes par maille. On notera  $NT_h$ , le nombre d'éléments du maillage.

De plus, nous notons :

- $\Gamma_D$  une partie de la frontière  $\partial\Omega$  sur laquelle on pose des conditions de bords de type Dirichlet ;
- $F_i$  une face interne associée à deux éléments  $K^+$  et  $K^-$  i.e  $F_i = \partial K^+ \cap \partial K^-$  ;
- $\mathcal{F}_i$  l'ensemble des faces internes ;

- $F_b$  une face frontière i.e  $F_b = \partial K \cap \partial\Omega$ ;
- $\mathcal{F}_b$  l'ensemble des faces frontières;
- $\mathbf{n}^\pm$  les vecteurs normaux à  $K^\pm$ , orientés vers l'extérieur de  $K^\pm$ ;
- $v^\pm$  les traces d'une fonction  $v$  sur  $K^\pm$ ;
- la fonction  $\gamma$  qui pénalise les sauts de  $u_h$  et  $v_h$  sur les faces (ou arêtes) de  $\mathcal{T}_h$ . Elle est définie sur chaque  $F \in \mathcal{F}_h = \mathcal{F}_i \cup \mathcal{F}_b$  par :

$$\gamma|_F := \alpha c_{max} h_{min}^{-1}$$

où  $\alpha$  est un paramètre positif indépendant du maillage et du coefficient  $c_{max}$  défini pour  $x \in F$ , par :

$$c_{max|F}(x) = \begin{cases} \max(c|_{K^+}(x), c|_{K^-}(x)) & , F \in \mathcal{F}_i, F = \partial K^+ \cap \partial K^- \\ c|_K(x) & , F \in \mathcal{F}_b, F = \partial K \cap \partial\Omega \end{cases}$$

La fonction  $h_{min}$  est définie par :

$$h_{min|F} = \begin{cases} \min(h_{K^+}, h_{K^-}) & , F \in \mathcal{F}_i, F = \partial K^+ \cap \partial K^- \\ h_K & , F \in \mathcal{F}_b, F = \partial K \cap \partial\Omega. \end{cases}$$

où  $h_K$  est le diamètre de  $K$ .

Notons aussi que pour assurer la coercivité de  $\gamma$ , il faut que  $\alpha > \frac{1}{2}p(p+1)$ .

Nous définissons alors le saut et la moyenne de  $v$  pour  $x \in F_i$  par :

$$[[v]] = v^+ \mathbf{n}^+ + v^- \mathbf{n}^- \quad \text{et} \quad \{\{v\}\} := (v^+ + v^-) / 2.$$

Pour  $x \in F_b$ , on note  $[[v]] := v \mathbf{n}$  et  $\{\{v\}\} := v$ , où  $\mathbf{n}$  désigne le vecteur normal à  $F_b$ .

De la même façon, nous définissons le saut et la moyenne d'un vecteur  $\mathbf{q}$  par :

- $[[\mathbf{q}]] := \mathbf{q}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{q}^- \cdot \mathbf{n}^-$  et  $\{\{\mathbf{q}\}\} := (\mathbf{q}^+ + \mathbf{q}^-) / 2$  pour  $x \in F_i$ ;
- $[[\mathbf{q}]] := \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}$  et  $\{\{\mathbf{q}\}\} := \mathbf{q}$  pour  $x \in F_b$ .

Pour chaque élément  $K$ , nous définissons :

- $\lambda_K$ , le diamètre maximum des sphères (ou cercle en 2D) contenues dans  $K$ .

Nous notons  $h = \min_K h_K$  le diamètre du plus petit élément du maillage. Nous supposons de plus qu'il existe une constante  $\sigma \geq 1$  telle que :

$$\forall h, \forall K \in \mathcal{T}_h, \frac{h_K}{\lambda_K} \leq \sigma.$$

Cette dernière condition nous impose de choisir des éléments qui ne sont pas trop aplatis.

Nous appelons élément de référence  $\hat{K}$  le segment  $[0, 1]$  en 1D, le triangle de sommet  $\hat{S}_1(0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1)$  en 2D ou le tétraèdre de sommet  $\hat{S}_1(0, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_2(1, 0, 0)$ ,  $\hat{S}_3(0, 1, 0)$ ,  $\hat{S}_4(0, 0, 1)$ . Il existe, pour tout élément  $K$ , une fonction affine  $F_K$  qui transforme  $\hat{K}$  en l'élément  $K$  :

- en 1D :

$$F_K(\hat{x}) = x_1 + (x_2 - x_1)\hat{x} ;$$

- en 2D :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} ;$$

- en 3D :

$$F_K(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de l'élément  $K$  (cf. Figs A.3, A.4 et A.5). Cette application peut s'écrire sous forme matricielle

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = A_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K$$

et son jacobien vérifie :

$$J_{F_K} = A_K \quad \text{et} \quad |J_{F_K}| = |\det(A_K)|.$$

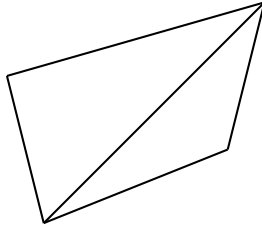


FIG. A.1 – Un maillage conforme.

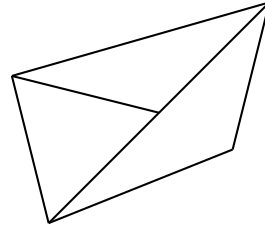


FIG. A.2 – Un maillage non conforme.

Il nous reste encore à déterminer les degrés de liberté du maillage pour les éléments finis de Galerkin discontinus  $P_k$ . Nous définissons d'abord les degrés de liberté sur l'élément de référence qui correspondent à ceux des éléments finis de Lagrange  $P_k$  :

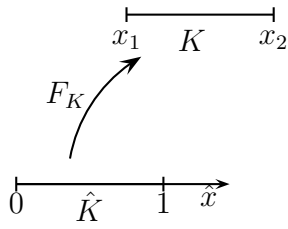


FIG. A.3 – Le segment de référence.

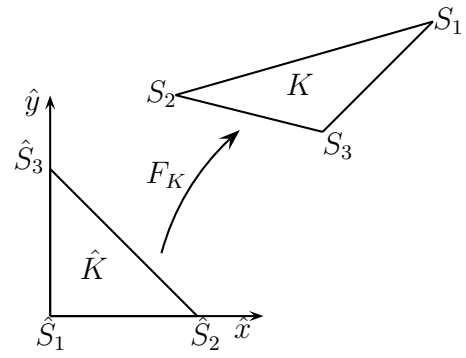


FIG. A.4 – Le triangle de référence.

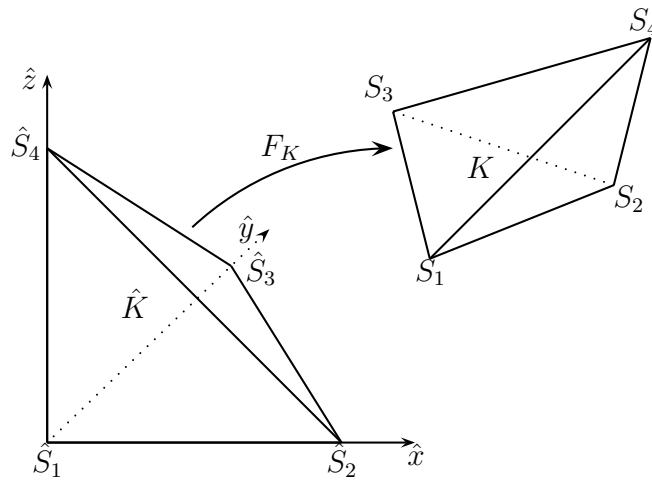


FIG. A.5 – Le tétraèdre de référence.

- en dimension 1, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$\hat{x}_i = \frac{i-1}{k}, \quad i = 1..k+1;$$

- en dimension 2, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j) = \left( \frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{k} \right), \quad \hat{x}_i + \hat{y}_j \leq 1, \quad i, j = 1..k+1;$$

- en dimension 3, les degrés de liberté de l'élément fini de Lagrange  $P_k$  sont les points de coordonnées

$$(\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_l) = \left( \frac{i-1}{k}, \frac{j-1}{k}, \frac{l-1}{k} \right), \quad \hat{x}_i + \hat{y}_j + \hat{z}_l \leq 1, \quad i, j, l = 1..k+1.$$

On note  $\hat{N}_k^d$  le nombre de degrés de liberté de  $\hat{K}$  en dimension  $d$ .

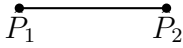


FIG. A.6 –  $P_1$ .

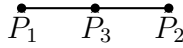


FIG. A.7 –  $P_2$ .

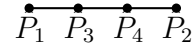


FIG. A.8 –  $P_3$ .

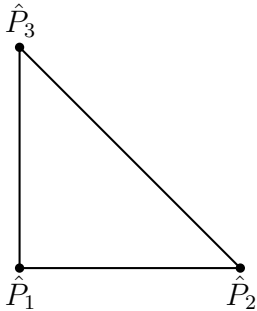


FIG. A.9 –  $P_1$ .

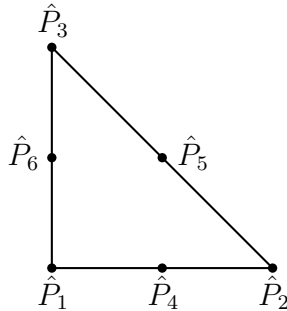


FIG. A.10 –  $P_2$ .

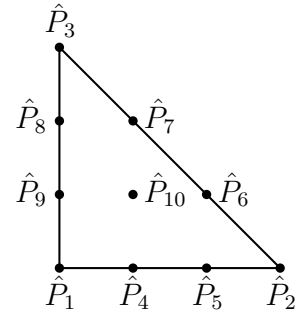


FIG. A.11 –  $P_3$ .

Les degrés de liberté de l'élément  $K$  sont alors les images par  $F_K$  des degrés de liberté de  $\hat{K}$ . Nous notons  $NP_h$  le nombre de degrés de liberté associés au maillage  $\mathcal{T}_h$ .

Pour la prise en compte des termes de saut et des conditions aux bords, nous avons également besoin de connaître les faces (ou les arêtes). L'ensemble des faces est noté  $\mathcal{F}_h$ , et pour chaque face  $F$  de  $\mathcal{F}_h$ , il existe une fonction affine  $G_F^K$  transformant la face de référence  $\hat{F}$  (en 2D le segment  $[0, 1]$ , en 3D le triangle  $\hat{S}_1\hat{S}_2\hat{S}_3$ ) en la face  $F$  de l'élément  $K$  :



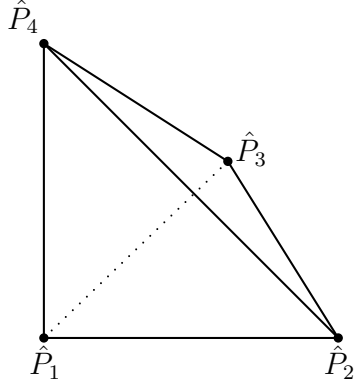


FIG. A.12 –  $P_1$ .

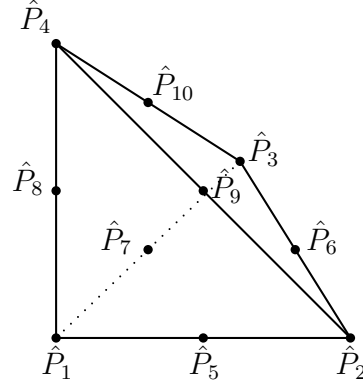


FIG. A.13 –  $P_2$ .

- en 2D :

$$G_F^K(\hat{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix} \hat{x} ;$$

- en 3D :

$$G_F^K(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$$

où  $x_i, y_i, z_i$  sont les coordonnées du sommet  $S_i$  de la face  $F$ . Nous notons de plus  $NF_h$  le nombre de faces de  $\mathcal{F}_h$ ,  $\hat{N}P^F$  le nombre de degrés de liberté par face et  $\hat{N}F^K$  le nombre de faces par élément. Par ailleurs, nous notons  $NB_h$  le nombre de faces appartenant à la frontière absorbante  $\Gamma_{abs}$ .

En pratique, un maillage est caractérisé par (au moins) quatre données :

1. les coordonnées des sommets et des degrés de liberté de tous les éléments. Dans le cas des éléments finis  $P_k$ , la connaissance des coordonnées des sommets est suffisante puisque nous pouvons déterminer les coordonnées des degrés de liberté à partir de la fonction  $F_K$  et des coordonnées des degrés de liberté sur l'élément de référence  $\hat{K}$  ;
2. la connectique de chaque élément, c'est-à-dire le numéro des sommets et des degrés de liberté appartenant à l'élément. Nous noterons  $lg_{K,i}$  la fonction qui permet de déterminer la numérotation globale du  $i$ -ème degré de liberté de l'élément  $K$  ;
3. la connectique de chaque face, c'est-à-dire le numéro des sommets et des degrés de liberté appartenant à la face. Nous noterons  $lgf_{K,F,i}$  la fonction qui permet de déterminer la numérotation globale du  $i$ -ème degré de liberté de la face  $F$  de l'élément  $K$  et  $lgfn_{K_{neigh},F,i}$  la fonction qui permet de déterminer la numérotation globale du  $i$ -ème degré de liberté de la face  $F$  de l'élément voisin  $K_{neigh}$  ;
4. les faces appartenant au bord du domaine, leur connectique et le type de condition de bord. Pour les faces de  $\Gamma_{abs}$ , nous noterons  $flabs_{K,F}$  la fonction qui permet de retrouver le numéro local de la face  $F$  dans l'élément  $K$ .

### A.1.2 Construction de l'espace $V^h$

Nous allons maintenant construire une base de l'espace  $V^h$ . Remarquons tout d'abord que les fonctions de  $V^h$  sont discontinues sur  $\Omega$ . Comme nous utilisons des éléments finis  $P^k$ , nous cherchons donc des fonctions polynômiales de degré  $k$  par élément :

$$V^h = \{v_h \in L^2(\Omega), v_h|_K \in P^k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Notons que les fonctions de  $V^h$  sont localement  $H^1(\Omega)$  et globalement  $L^2(\Omega)$ . Une base de cet espace est donnée par les fonctions  $(\phi_i)_{i=1, NP_h}$  qui vérifient

$$\begin{cases} \phi_i(P_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1..NP_h \\ \phi_i|_K \in P^k(K), \quad \forall K \in \mathcal{T}_h, \quad \forall i = 1..NP_h. \end{cases}$$

Cet espace est donc de dimension  $NP_h$  et toute fonction  $v_h$  de  $V^h$  vérifie

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^{NP_h} v_h(P_i) \phi_i(x),$$

ce qui montre que les composantes de  $v_h$  dans cette base coïncident avec ses degrés de liberté.

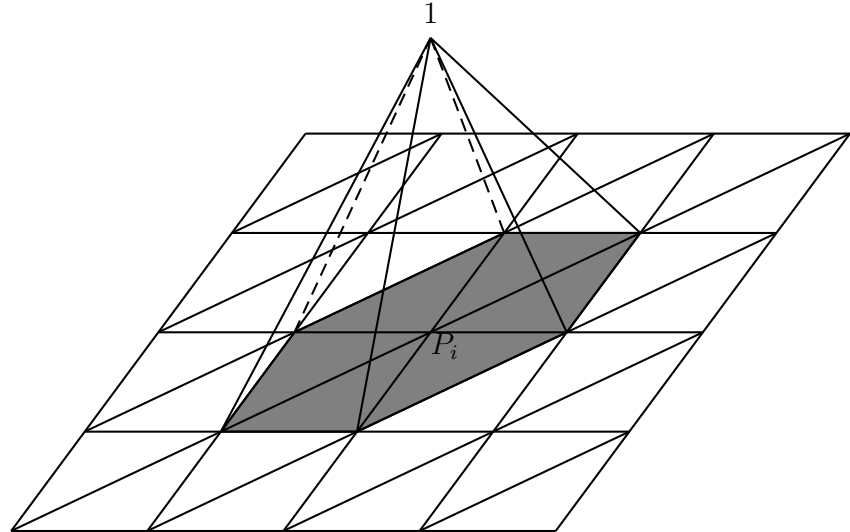


FIG. A.14 – La fonction  $\phi_i$  et son support.

Remarquons que le support de la fonction  $\phi_i$  est uniquement constitué des éléments contenant le point  $P_i$  (cf. Fig A.14, dans le cas  $P^1$ , en dimension 2). Autrement dit, les

seules fonctions de base non nulles sur un élément  $K$  sont les fonctions associées aux degrés de liberté de l'élément  $K$ . Cette propriété nous permet de définir les fonctions de base élément par élément à partir de fonctions de base  $\hat{\phi}_i^d$  définies sur l'élément de référence  $\hat{K}$ . Les fonctions de base  $\hat{\phi}_i^d$  sont définies par :

$$\begin{cases} \hat{\phi}_i^d(\hat{P}_j) = \delta_{ij}, \forall i, j = 1.. \hat{N}_k^d \\ \hat{\phi}_i^d \in P^k(\hat{K}), \forall i = 1.. \hat{N}_k^d. \end{cases}$$

En 1D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par (cf. Fig. A.15) :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}) &= 1 - \hat{x} \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}) &= \hat{x}, \end{aligned}$$

les fonctions de base  $P^2$  sont données par (cf. Fig. A.16) :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}) &= 2(1 - \hat{x}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} \right) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}) &= 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right) \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x}) \end{aligned}$$

et les fonctions de base  $P^3$  sont données par (cf. Fig. A.17) :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x}) \left( \frac{1}{3} - \hat{x} \right) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} \right) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}) &= \frac{9}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{x} - \frac{2}{3} \right) \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} \right) \\ \hat{\phi}_4^d(\hat{x}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x}) \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

En 2D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x} \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}, \end{aligned}$$

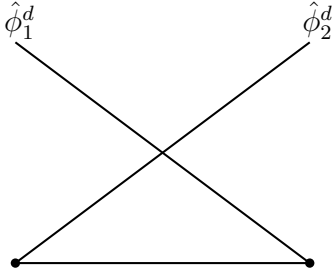


FIG. A.15 –  $P_1$ .

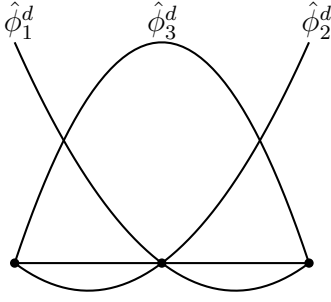


FIG. A.16 –  $P_2$ .

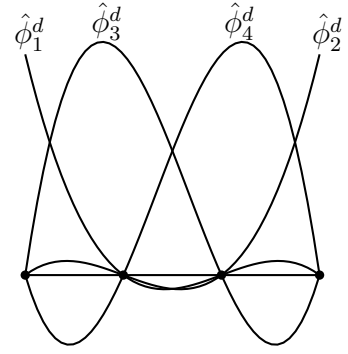


FIG. A.17 –  $P_3$ .

les fonctions de base  $P^2$  sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 2(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_4^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_5^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 2\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_6^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \end{aligned}$$

et les fonctions de base  $P^3$  sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{1}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_6^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{x} - \frac{2}{3} \right) & \hat{\phi}_7^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{9}{2}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{y} - \frac{2}{3} \right) & \hat{\phi}_8^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) (1 - \hat{x} - \hat{y}) \\ \hat{\phi}_4^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) & \hat{\phi}_9^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} \right) \\ \hat{\phi}_5^d(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{27}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) (1 - \hat{x} - \hat{y}) & \hat{\phi}_{10}^d(\hat{x}, \hat{y}) &= 27\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y}). \end{aligned}$$

En 3D, les fonctions de base  $P^1$  sont données par :

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= (1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\ \hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{x} \\ \hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{y} \\ \hat{\phi}_4^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \hat{z}, \end{aligned}$$

les fonctions de base  $P^2$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 \hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{1}{2} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) & \hat{\phi}_5^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
 \hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_6^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{y} \\
 \hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_7^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
 \hat{\phi}_4^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 2\hat{z} \left( \hat{z} - \frac{1}{2} \right) & \hat{\phi}_8^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
 & & \hat{\phi}_9^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{x}\hat{z} \\
 & & \hat{\phi}_{10}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 4\hat{y}\hat{z}
 \end{aligned}$$

et les fonctions de base  $P^3$  sont données par :

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_1^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{9}{2}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) \left( \frac{1}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) \\
\hat{\phi}_2^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{9}{2}\hat{x} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{x} - \frac{2}{3} \right) \\
\hat{\phi}_3^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{9}{2}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{y} - \frac{2}{3} \right) \\
\hat{\phi}_4^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{9}{2}\hat{z} \left( \hat{z} - \frac{1}{3} \right) \left( \hat{z} - \frac{2}{3} \right) \\
\hat{\phi}_5^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) \\
\hat{\phi}_6^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_7^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_8^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{y} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_9^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{10}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) \\
\hat{\phi}_{11}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \frac{2}{3} - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z} \right) \\
\hat{\phi}_{12}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \left( \hat{z} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{13}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{z} \left( \hat{x} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{14}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{x}\hat{z} \left( \hat{z} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{15}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{y}\hat{z} \left( \hat{y} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{16}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= \frac{27}{2}\hat{y}\hat{z} \left( \hat{z} - \frac{1}{3} \right) \\
\hat{\phi}_{17}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 27\hat{x}\hat{y}\hat{z} \\
\hat{\phi}_{18}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 27\hat{y}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
\hat{\phi}_{19}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 27\hat{x}\hat{z}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}) \\
\hat{\phi}_{20}^d(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}) &= 27\hat{x}\hat{y}(1 - \hat{x} - \hat{y} - \hat{z}).
\end{aligned}$$

Les fonctions de base globales  $\phi_i$  sont alors définies à l'aide des fonctions  $F_K$  par :

$$\begin{cases} \phi_{i|K} = \hat{\phi}_j^d \circ F_K^{-1}, \text{ avec } j \text{ tel que } i = lg_{j,K}, & \text{si } P_i \in K \\ \phi_{i|K} = 0 & \text{si } P_i \notin K \end{cases}$$

## A.2 Mise en oeuvre de la méthode de Galerkin discontinue

### A.2.1 Calcul de la matrice $\mathcal{M}$

Intéressons-nous d'abord au calcul de la matrice  $\mathcal{M}$ , diagonale par blocs, de coefficient

$$\mathcal{M}_{ij} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \phi_i \phi_j = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\mu_K} \int_K \phi_i \phi_j.$$

La première idée pour calculer cette matrice est, pour  $i$  et  $j$  fixés, de parcourir l'ensemble des éléments de  $\mathcal{T}_h$  :

#### Algorithme 1

- pour  $i = 1, NP_h$ 
  - pour  $j = 1, NP_h$ 
    - $\mathcal{M}(i, j) = 0$
    - pour  $l = 1, NT_h$ 
      - si  $P_i \in K_l$  et  $P_j \in K_l$  alors
        - $\mathcal{M}(i, j) = \frac{1}{\mu_{K_l}} \int_{K_l} \phi_i \phi_j$
      - *fin*
    - *fin*
  - *fin*
- *fin*

Cet algorithme présente plusieurs inconvénients :

1. il faut parcourir trois boucles de grande taille :  $NP_h \times NP_h \times NT_h$  ;
2. il faut à chaque fois savoir si les degrés de liberté  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à  $K_l$  ;
3. le calcul de  $\frac{1}{\mu_{K_l}} \int_{K_l} \phi_i \phi_j$  n'est pas simple à implémenter.

Remarquons tout d'abord que si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à l'élément  $K$ , alors il existe deux degrés de liberté  $\hat{P}_I$  et  $\hat{P}_J$  sur l'élément de référence  $\hat{K}$  tels que  $lg_{K,I} = i$ ,  $lg_{K,J} = j$  et

$$\frac{1}{\mu_K} \int_K \phi_i \phi_j = \frac{1}{\mu_K} \int_K \hat{\phi}_I^d \circ F_K^{-1} \hat{\phi}_J^d \circ F_K^{-1} = \frac{1}{\mu_K} \int_{\hat{K}} |\det J_{F_K}| \hat{\phi}_I^d \hat{\phi}_J^d = |\det A_K| \frac{1}{\mu_K} \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_I^d \hat{\phi}_J^d.$$

Le calcul de  $\frac{1}{\mu_K} \int_K \phi_i \phi_j$  se déduit donc simplement du calcul de la matrice  $\hat{\mathcal{M}}$  de terme général  $\hat{\mathcal{M}}_{i,j} = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i^d \hat{\phi}_j^d$  et nous utilisons l'algorithme de calcul suivant :

### Algorithme 2

!! bloc 1

- pour  $i = 1.. \hat{N}_p^d$ 
  - pour  $j = 1.. \hat{N}_p^d$ 
    - $\hat{\mathcal{M}}(i, j) = \int_{\hat{K}} \hat{\phi}_i^d \hat{\phi}_j^d$
  - finpour
- finpour
- $\mathcal{M} = 0$

!! bloc 2

- pour  $l = 1.. NT_h$ 
  - Calcul de  $|\det A_{K_l}|$
  - Calcul de  $res = |\det A_{K_l}| \times \frac{1}{\mu_{K_l}}$
  - pour  $I = 1.. \hat{N}_p^d$ 
    - pour  $J = 1.. \hat{N}_p^d$ 
      - $i = lg(l, I)$ ,  $j = lg(l, J)$
      - $\mathcal{M}(i, j) = res \times \hat{\mathcal{M}}(I, J)$
    - finpour
  - finpour
- finpour

Ce nouvel algorithme a plusieurs avantages :

1. il suffit de calculer les intégrales une fois sur l'élément de référence :  $\hat{N}_p^d \times \hat{N}_p^d$  itérations (bloc 1) ;
2. on ne parcourt que les degrés de liberté nécessaires au calcul de  $\mathcal{M}$ , il n'y a que  $NT_h \times \hat{N}_p^d \times \hat{N}_p^d$  itérations (bloc 2) ;
3. on déduit facilement la numérotation globale à partir de la numérotation locale grâce à la fonction  $lg$ .



## A.2.2 Calcul de la matrice $\mathcal{K}$

Comme pour le calcul de  $\mathcal{M}$ , nous décomposons l'intégrale sur  $\Omega$  en une somme d'intégrales sur les éléments auxquelles on rajoute les sauts et les flux à travers les faces (ou arêtes) des éléments :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{i,j} &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\rho_K} \int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j - \sum_{F_i \in \mathcal{F}_i} \int_{F_i} \llbracket \phi_i \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_j \right\} \right\} \\ &- \sum_{F_i \in \mathcal{F}_i} \int_{F_i} \llbracket \phi_j \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_i \right\} \right\} - \sum_{F_b \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_D} \int_{F_b} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_i \right\} \right\} \cdot \llbracket \phi_j \rrbracket \\ &- \sum_{F_b \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_D} \int_{F_b} \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_j \right\} \right\} \cdot \llbracket \phi_i \rrbracket \\ &+ \sum_{F_b \in \mathcal{F}_b \cap \Gamma_D} \int_{F_b} \gamma_K \llbracket \phi_i \rrbracket \cdot \llbracket \phi_j \rrbracket + \sum_{F_i \in \mathcal{F}_i} \int_{F_i} \gamma_K \llbracket \phi_i \rrbracket \cdot \llbracket \phi_j \rrbracket \nabla \phi_j. \end{aligned}$$

Pour le calcul de  $\int_K \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j = \int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j$ , nous utilisons à nouveau le fait que, si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à l'élément  $K$ , alors

$$\phi_{i|K} = \hat{\phi}_I^d \circ F_K^{-1} \text{ et } \phi_{j|K} = \hat{\phi}_J^d \circ F_K^{-1}$$

avec  $I$  et  $J$  tels que  $lg_{K,I} = i$  et  $lg_{K,J} = j$ . Nous en déduisons les relations

$$\nabla \phi_{i|K} = J_{F_K}^{-1} \nabla \hat{\phi}_I^d \circ F_K^{-1} \text{ et } \nabla \phi_{j|K} = J_{F_K}^{-1} \nabla \hat{\phi}_J^d \circ F_K^{-1}$$

puis,

$$\frac{1}{\rho_K} \int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j = \frac{1}{\rho_K} \int_K (A_K^{-1} \nabla \hat{\phi}_I^d \circ F_K^{-1})^T A_K^{-1} \nabla \hat{\phi}_J^d \circ F_K^{-1} = |\det A_K| \frac{1}{\rho_K} \int_{\hat{K}} \nabla \hat{\phi}_I^{dT} A_K^{-T} A_K^{-1} \nabla \hat{\phi}_J^d.$$

Contrairement à ce nous avons obtenu pour le calcul de  $\mathcal{M}$ , l'intégrale sur l'élément de référence dépend de l'élément  $K$  à cause de la matrice  $A_K^{-T} A_K^{-1}$ . Cependant, en posant  $C^K = A_K^{-T} A_K^{-1}$ , on vérifie facilement que, en dimension 3 par exemple,

$$\begin{aligned} \nabla \hat{\phi}_I^{dT} A_K^{-T} A_K^{-1} \nabla \hat{\phi}_J^d &= C_{1,1}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} + C_{1,2}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right) + C_{1,3}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right) \\ &+ C_{2,2}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} + C_{2,3}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} \right) + C_{3,3}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} \end{aligned}$$

et on obtient un résultat similaire en dimension 2. On a alors

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \phi_i^T \nabla \phi_j &= \frac{1}{\rho_K} |\det A_K| \left[ C_{1,1}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} + C_{1,2}^K \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right) \right. \\ &+ C_{2,2}^K \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} + C_{1,3}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right) + C_{2,3}^K \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} \right) + C_{3,3}^K \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} \left. \right]. \end{aligned}$$

Le premier terme de la matrice  $\mathcal{K}$  peut donc être calculé à partir des six matrices locales  $\hat{\mathcal{K}}_{xx}, \hat{\mathcal{K}}_{xy}, \hat{\mathcal{K}}_{xz}, \hat{\mathcal{K}}_{yy}, \hat{\mathcal{K}}_{yz}$  et  $\hat{\mathcal{K}}_{zz}$  de termes généraux respectifs

$$\int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J}{\partial x}, \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right), \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial x} \right), \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y},$$

$$\int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial y} \right) \text{ et } \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_I^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_J^d}{\partial z}.$$

Pour le calcul des intégrales sur les faces (ou arêtes), si  $P_i$  et  $P_j$  appartiennent à la face  $F$ ,

$$\phi_{i|F} = \hat{\phi}_I^{d-1} \circ G_F^{K-1} \text{ et } \phi_{j|F} = \hat{\phi}_J^{d-1} \circ G_F^{K-1}$$

avec  $I$  et  $J$  tels que  $l_{g f_{K,F,I}} = i$  et  $l_{g f_{K,F,J}} = j$ . On a alors

$$\int_F \phi_i \phi_j = \int_F (\hat{\phi}_I^{d-1} \hat{\phi}_J^{d-1}) \circ G_F^{K-1}.$$

De plus, rappelons que pour une face,

$$\int_F f \circ G_F^{K-1} = \int_{\hat{F}} \|\nabla G_F^K\| \hat{f} = 2 a_{K,F} \int_{\hat{F}} \hat{f} \quad \text{et} \quad \int_F f = 2 a_{K,F} \int_{\hat{F}} f \circ G_F^K,$$

où  $a_{K,F}$  est l'aire de la face  $F$  de l'élément  $K$ .

Pour une arête, on a

$$\int_F f \circ G_F^{K-1} = \int_{\hat{F}} \|\nabla G_F^K\| \hat{f} = h_{K,F} \int_{\hat{F}} \hat{f} \quad \text{et} \quad \int_F f = h_{K,F} \int_{\hat{F}} f \circ G_F^K,$$

où  $h_{K,F}$  est la longueur de l'arête  $F$  de l'élément  $K$ .

Pour le calcul des intégrales combinant le saut et la moyenne,

$$\int_F \llbracket \phi_i \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_j \right\} \right\} + \int_F \llbracket \phi_j \rrbracket \cdot \left\{ \left\{ \frac{1}{\rho_K} \nabla \phi_i \right\} \right\} = \frac{1}{2 \rho_K} \int_F [\phi_i^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_j^+ + \phi_i^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_j^-$$

$$+ \phi_i^- n_F^- \cdot \nabla \phi_j^+ + \phi_i^- n_F^- \cdot \nabla \phi_j^- + \phi_j^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_i^+$$

$$+ \phi_j^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_i^- + \phi_j^- n_F^- \cdot \nabla \phi_i^+ + \phi_j^- n_F^- \cdot \nabla \phi_i^-].$$

Cependant, il faut faire attention de ne pas calculer ces intégrales deux fois, une fois lorsque l'on est dans  $K^+$  et une fois lorsque l'on est dans  $K^-$ . C'est pour cela que l'on ne calcule que quatre contributions quand on est sur une face de élément  $K^+$ , les autres étant calculées dans  $K^-$ . Ainsi, pour chaque face de l'élément  $K^+$ , on calcule tout d'abord :

$$\int_F [\phi_i^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_j^+ + \phi_j^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_i^+].$$

Ensuite, pour des raisons de facilité d'implémentation, on choisit de calculer :

$$\int_F \phi_j^- n_F^- \cdot \nabla \phi_i^+ = - \int_F \phi_j^- n_F^+ \cdot \nabla \phi_i^+ \quad \text{et} \quad \int_F \phi_i^+ n_F^+ \cdot \nabla \phi_j^- = - \int_F \phi_i^+ n_F^- \cdot \nabla \phi_j^-.$$

Il faut aussi noter que la dernière intégrale est affectée à l'élément  $K^-$  toujours pour des raisons d'implémentation. La quatrième contribution dans  $K^+$  est en fait calculée lors du calcul dans  $K^-$ .

Pour les faces appartenant à la frontière  $\Gamma_D$ , il n'y a pas de voisin et donc, seules les deux premières contributions sont calculées.

Ainsi, il vient que :

$$\begin{aligned} \int_F \phi_i^+ n^+ \cdot \nabla \phi_j^+ &= \int_F \hat{\phi}_I^{+d-1} \circ G_F^{K-1} n_F^+ \left( J_F^{-1} \nabla \hat{\phi}_J^{+d} \circ F_K^{-1} \right)^T \\ &= a A_K^{-T} n_F^+ \int_{\hat{F}} \left( \hat{\phi}_I^{+d-1} \circ G_F^{K-1} \circ G_F^K \right) \left( \nabla \hat{\phi}_J^{+d} \circ F_K^{-1} \circ G_F^K \right)^T \\ &= a A_K^{-T} n_F^+ \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_I^{+d-1} \left( \nabla \hat{\phi}_J^{+d} \circ G_F^K \right)^T. \end{aligned}$$

Les autres termes sont calculés de façon similaire.

Pour le calcul des intégrales avec le saut, on a

$$\int_F \gamma_K [\phi_i] \cdot [\phi_j] = \gamma_K \int_F [\phi_i^+ n_F^+ \cdot \phi_j^+ n_F^+ + \phi_i^+ n_F^+ \cdot \phi_j^- n_F^- + \phi_i^- n_F^- \cdot \phi_j^+ n_F^+ + \phi_i^- n^- \cdot \phi_j^- n_F^-].$$

Pour les mêmes raisons que pour les intégrales avec la moyenne, on ne calcule que deux contributions (dont une est affectée à  $K^-$ ) lorsque l'on est sur une face de  $K^+$ . On choisit :

$$\int_F \phi_i^+ n_F^+ \cdot \phi_j^+ n_F^+ \quad \text{et} \quad \int_F \phi_i^+ n_F^+ \cdot \phi_j^- n_F^- = - \int_F \phi_i^+ n_F^- \cdot \phi_j^- n_F^-.$$

Pour les faces appartenant à la frontière  $\Gamma_D$ , seule la première contribution est calculée.

On a alors :

$$\begin{aligned} \int_F \phi_i^+ n_F^+ \cdot \phi_j^+ n_F^+ &= \int_F \left( \hat{\phi}_I^{+d-1} n_F^+ \right) \circ G_F^{K-1} \left( \left( \hat{\phi}_I^{+d-1} n_F^+ \right) \circ G_F^{K-1} \right)^T \\ &= a n_F^+ \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_I^{+d-1} \left( \hat{\phi}_J^{+d-1} \right)^T. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>en 3D,  $a = 2 a_{K,F}$  et en 2D,  $a = h_{K,F}$

Le premier terme de la matrice  $\mathcal{K}$  est obtenu en appliquant l'algorithme de calcul :

### Algorithme 3

- *pour*  $i = 1.. \hat{N}_p^d$ 
  - *pour*  $j = 1.. \hat{N}_p^d$ 
    - $\hat{\mathcal{K}}_{xx}(i, j) = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial x}$
    - $\hat{\mathcal{K}}_{xy}(i, j) = \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial x} \right)$
    - $\hat{\mathcal{K}}_{xz}(i, j) = \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial x} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial x} \right)$
    - $\hat{\mathcal{K}}_{yy}(i, j) = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial y}$
    - $\hat{\mathcal{K}}_{yz}(i, j) = \int_{\hat{K}} \left( \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial y} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial y} \right)$
    - $\hat{\mathcal{K}}_{zz}(i, j) = \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\phi}_i^d}{\partial z} \frac{\partial \hat{\phi}_j^d}{\partial z}$
  - *finpour*
- *finpour*
- $\mathcal{K} = 0$
- *pour*  $l = 1.. NT_h$ 
  - Calcul de  $|\det A_{K_l}|$  et  $C^{K_l}$
  - Calcul de  $res = \frac{1}{\rho_{K_l}} |\det A_{K_l}|$
  - *pour*  $I = 1.. \hat{N}_p^d$ 
    - *pour*  $J = 1.. \hat{N}_p^d$ 
      - $i = lg(l, I), j = lg(l, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(1, 1) \hat{\mathcal{K}}_{xx}(I, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(1, 2) \hat{\mathcal{K}}_{xy}(I, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(1, 3) \hat{\mathcal{K}}_{xz}(I, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(2, 2) \hat{\mathcal{K}}_{yy}(I, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(2, 3) \hat{\mathcal{K}}_{yz}(I, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times C^{K_l}(3, 3) \hat{\mathcal{K}}_{zz}(I, J)$

- *finpour*
- *finpour*
- *finpour*

Pour les quatres termes suivants qui ne sont définis que sur les faces (ou arêtes) des éléments, l'algorithme s'écrit :

#### Algorithme 4

- *pour*  $F = 1..\hat{N}F^K$ 
  - *pour*  $j = 1..\hat{N}_p^d$ 
    - *pour*  $i = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
      - $\hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(i, j) = \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_i^{d-1} \left( \nabla \hat{\phi}_j^d \circ G_F^K \right)$
      - *finpour*
    - *finpour*
  - *finpour*
- *pour*  $l = 1..NT_h$ 
  - *Calcul de*  $A_{K_l}^{-T}$
  - *pour*  $F = 1..\hat{N}F^K$ 
    - *Calcul de*  $n = normale(l, F)$  *et de*  $a$
    - *Calcul de*  $res = \frac{a}{2 \rho_{K_l}} n A_{K_l}^{-T}$
    - *si il y a un voisin alors*
      - *Calcul du numéro du voisin :*  $lneigh$
      - *Calcul du numéro de la face correspondante sur*  $lneigh$  :  $F_{neigh}$
      - *pour*  $I = 1..\hat{N}_p^d$ 
        - *pour*  $J = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
          - $i = lg(l, I), j = lgf(l, F, J)$
          - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
          - $\mathcal{K}(j, i) = \mathcal{K}(i, j) + res \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
          - $j = lgfn(lneigh, F_{neigh}, J)$
          - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) - res \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
          - $\mathcal{K}(j, i) = \mathcal{K}(i, j) - res \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
        - *finpour*
      - *finpour*

- *sinon*, si  $F \in \Gamma_D$ 
  - *pour*  $I = 1..\hat{N}_p^d$ 
    - *pour*  $J = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
      - $i = \text{lg}(l, I), j = \text{lgf}(l, F, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + \text{res} \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
      - $\mathcal{K}(j, i) = \mathcal{K}(i, j) + \text{res} \times \hat{\mathcal{K}}_{flux}^F(I, J)$
    - *finpour*
  - *finpour*
- *finsi*
- *finpour*

Pour finir, l'algorithme de calcul pour les deux derniers termes de la matrice  $\mathcal{K}$  est :

### Algorithme 5

- *pour*  $i = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
  - *pour*  $j = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
    - $\hat{\mathcal{K}}_{saut}(i, j) = \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_i^{d-1} \hat{\phi}_j^{d-1}$
  - *finpour*
- *finpour*
- *pour*  $l = 1..NT_h$ 
  - *Calcul de*  $\gamma_{K_l}$
  - *pour*  $F = 1..\hat{N}F^K$ 
    - *Calcul de*  $a$
    - *Calcul de*  $\text{res} = a \gamma_{K_l}$
    - *si il y a un voisin alors*
      - *Calcul du numéro du voisin* :  $lneigh$
      - *Calcul du numéro de la face correspondante sur*  $lneigh$  :  $F_{neigh}$
    - *pour*  $I = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
      - *pour*  $J = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
        - $i = \text{lgf}(l, F, I), j = \text{lgf}(l, F, J)$
        - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + \text{res} \times \hat{\mathcal{K}}_{saut}(I, J)$
        - $j = \text{lgfn}(lneigh, F_{neigh}, J)$

- $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) - res \times \hat{\mathcal{K}}_{saut}(I, J)$
- *finpour*
- *finpour*
- *sinon*, si  $F \in \Gamma_D$ 
  - *pour*  $I = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
    - *pour*  $J = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
      - $i = lgf(l, F, I)$ ,  $j = lgf(l, F, J)$
      - $\mathcal{K}(i, j) = \mathcal{K}(i, j) + res \times \hat{\mathcal{K}}_{saut}(I, J)$
      - *finpour*
    - *finpour*
  - *finsi*
- *finpour*
- *finpour*

### A.2.3 Calcul de la matrice $\mathcal{B}$

Les coefficients de la matrice  $\mathcal{B}$  sont donnés par :

$$\mathcal{B}_{i,j} = \int_{\Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu\rho}} \phi_i \phi_j = \sum_{F \in \Gamma_{abs}} \frac{1}{\sqrt{\mu_F \rho_F}} \int_F \phi_i \phi_j.$$

Comme dans le calcul de la matrice  $\mathcal{K}$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_F \rho_F}} \int_F \phi_i \phi_j = a \frac{1}{\sqrt{\mu_F \rho_F}} \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_I^{d-1} \hat{\phi}_J^{d-1}$$

avec  $a = 2 a_{K,F}$  en 3D et  $a = h_{K,F}$  en 2D.

Nous utilisons l'algorithme de calcul suivant :

#### Algorithme 6

- *pour*  $i = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
  - *pour*  $j = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
    - $\hat{\mathcal{B}}(i, j) = \int_{\hat{F}} \hat{\phi}_i^{d-1} \hat{\phi}_j^{d-1}$
    - *finpour*
  - *finpour*
- *finpour*

- $\mathcal{B} = 0$
- *pour*  $F = 1..NB_h$ 
  - $(K, F_{loc}) = flabs(F)$
  - *Calcul de a*
  - *Calcul de res*  $= \frac{a}{\sqrt{\mu_i \rho_i}}$
  - *pour*  $I = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
    - *pour*  $J = 1..\hat{N}_p^{d-1}$ 
      - $i = lgf(K, F_{loc}, I), j = lgf(K, F_{loc}, J)$
      - $\mathcal{B}(i, j) = \mathcal{B}(i, j) + res \times \hat{\mathcal{B}}(I, J)$
    - *finpour*
  - *finpour*
- *finsi*





# Bibliographie

- [1] P.G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1978. Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 4.
- [2] T.J.R. Hughes. *The finite element method*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987. Linear static and dynamic finite element analysis, With the collaboration of Robert M. Ferencz and Arthur M. Raefsky.
- [3] G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Higher-order finite elements with mass-lumping for the 1D wave equation. *Finite Elem. Anal. Des.*, 16(3-4) :329–336, 1994. ICOSA-HOM '92 (Montpellier, 1992).
- [4] G. Cohen, P. Joly, and N. Tordjman. Construction and analysis of higher order finite elements with mass lumping for the wave equation. In *Second International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation (Newark, DE, 1993)*, pages 152–160. SIAM, Philadelphia, PA, 1993.
- [5] D. Komatitsch and J. Tromp. Introduction to the spectral element method for three-dimensional seismic wave propagation. *Geophys. J. Int.*, 139 :806–822, 1999.
- [6] D. Komatitsch, J-P. Vilotte, R. Vai, J.M. Castillo-Covarrubias, and F.J. Sanchez-Sesma. The spectral element method for elastic wave equations : application to 2d and 3d seismic problems. *International Journal for numerical methods in engineering*, 45 :1139–1164, 1999.
- [7] D. Komatitsch and J.P. Vilotte. The spectral-element method : an efficient tool to simulate the seismic response of 2d and 3d geological structures. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 88(2) :368–392, 1998.
- [8] G. Cohen, P. Joly, J. E. Roberts, and N. Tordjman. Higher order triangular finite elements with mass lumping for the wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(6) :2047–2078 (electronic), 2001.
- [9] M.J. Grote, A. Schneebeli, and D. Schötzau. Discontinuous Galerkin finite element method for the wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 44(6) :2408–2431 (electronic), 2006.
- [10] M.V. De Hoop, J.H. Le Rousseau, and R.S. Wu. Generalization of the bremer coupling series. *Journal of Mathematical Physics*, 37 :3246–3282, 1996.
- [11] J. Diaz and M.J. Grote. Energy conserving explicit local time stepping for second-order wave equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 31(3) :1985–2014, 2009.

- [12] A. Tarantola. Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation. *Geophysics*, 49 :1259–1266, 1984.
- [13] M. Amara, H. Calandra, R. Djellouli, and M. Grigoroscuta-Strugaru. A modified discontinuous galerkin method for solving helmholtz problems. Technical report, Inria Bordeaux Sud-Ouest, RR-7050, 2009.
- [14] E. Forgues. *Inversion linéarisée multiparamètres via la théorie des rais*. PhD thesis, Université Paris VII, France, 1996.
- [15] J.E. Vidale. Finite-difference travel time calculation. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 78(6) :2062–2076, 1988.
- [16] J.E. Vidale. Finite-difference calculation of traveltimes in three dimensions. *Geophysics*, 55 :521–526, 1990.
- [17] T. Moser. Shortest path calculation of seismic rays. *Geophysics*, 56 :59–67, 1991.
- [18] W. Symes J. Van Trier. Upwind finite-difference calculation of traveltimes. *Geophysics*, 56 :812–821, 1991.
- [19] K. Aki and P.G. Richards. *Quantitative seismology, theory and methods*. W.H. Freeman, San Francisco, 1980.
- [20] A. Bendali. *Approximation par éléments finis de surface de problèmes de diffraction des ondes électromagnétiques*. PhD thesis, Université Paris VI, 1984.
- [21] E. Darrigrand. *Couplage methodes multipôles - Discrétisation microlocale pour les équations intégrales de l'électromagnétisme*. PhD thesis, Université Bordeaux I, 2002.
- [22] J. Gazdag. Wave equation migration with the phase-shift method. *Geophysics*, 43(7) :1342–1351, December 1978.
- [23] P.L. Stoffa, R.M Fokkema, W.P. de Luna Freire, and Kessinger. Split-step fourier migration. *Geophysics*, 55(4) :410–421, April 1990.
- [24] D. Ristow and T. Rühl. Fourier finite-difference migration. *Geophysics*, 59 :1882–1893, 1994.
- [25] J. Gazdag J and P. Sguazzero. Migration of seismic data by phase shift plus interpolation. *Geophysics*, 49(2) :124–131, February 1984.
- [26] F. Collino. Numerical analysis of mathematical models for wave propagation. Technical report, IFP, Prestack Structural Interpretation, 1993.
- [27] J.F. Claerbout. Toward a unified theory of reflector imaging. *Geophysics*, 36 :467–481, 1971.
- [28] Y. Zhang, G. Zhang, and N. Bleistein. True amplitude wave equation migration arising from true amplitude one-way equations. *Inverse Problems*, 19 :1113–1138, 2003.
- [29] H. Barucq, B. Duquet, and F. Prat. True amplitude one-way propagation in heterogeneous media. Technical report, Inria Bordeaux Sud-Ouest, RR-6517, 2008.
- [30] H. Bremmer. The w.k.b. approximation as the first term of a geometrical optical series. *Comm. Pure Appl. Math*, 4 :105–115, 1951.

- [31] J.H. Le Rousseau. *Microlocal analysis of wave-equation imaging and generalized-screen propagators*. PhD thesis, Center for Wave phenomena, Colorado School of Mines, 2001.
- [32] F. Prat. *Analyse du Generalized Screen Propagator*. PhD thesis, Université de Pau et des Pays de l'Adour, France, 2005.
- [33] T.N. Bishop, K.P. Bube, R.T. Cutler, R.T. Langan, P.L. Love, J.R. Resnick, R.T. Shuey, D.A. Spindler, and H.W. Wyld. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, 50 :903–923, 1985.
- [34] B.L. Biondi. *Concepts and Applications in 3D Seismic Imaging*. Society of Exploration Geophysicists and European Association of Geoscientists and Engineers, 2007.
- [35] W.H. Reed and T.R. Hill. Triangular mesh methods for the neutron transport equation. Technical report, Los Alamos Scientific Laboratory, LA-UR-73-479, 1973.
- [36] M. Bernacki, S. Lanteri, and S. Piperno. Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, nondiffusive, discontinuous Galerkin methods. *J. Comput. Acoust.*, 14(1) :57–81, 2006.
- [37] D.N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, and L.D. Marini. Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 39(5) :1749–1779 (electronic), 2001/02.
- [38] M. Ainsworth, P. Monk, and W. Muniz. Dispersive and dissipative properties of discontinuous galerkin finite element methods for the second-order wave equation. *Journal of Scientific Computing*, 27(1-3), 2006.
- [39] M.J. Grote and D. Schötzau. Optimal error estimates for the fully discrete interior penalty dg method for the wave equation. *J. Sc. Computing*, 40 :257–272, 2009.
- [40] S. Delcourte, L. Fezoui, and N. Glinsky-Olivier. A high-order discontinuous galerkin method for the seismic wave propagation. In *ESAIM : Proceedings*, volume 27, pages 70–89. SIAM, 2009.
- [41] J. Douglas, Jr. and T. Dupont. Interior penalty procedures for elliptic and parabolic Galerkin methods. In *Computing methods in applied sciences (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975)*, pages 207–216. Lecture Notes in Phys., Vol. 58. Springer, Berlin, 1976.
- [42] A. Patera. A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *J. Comput. Phys*, 54 :468–488, 1984.
- [43] P. Ciarlet and J. Lions. *Handbook of numerical analysis*, 2, 1991.
- [44] L. Cagniard. *Reflection and refraction of progressive seismic waves*. McGraw-Hill, 1962.
- [45] A. T. de Hoop. The surface line source problem. *Appl. Sci. Res. B*, 8 :349–356, 1959.
- [46] G.R. Shubin and J.B. Bell. A modified equation approach to constructing fourth-order methods for acoustic wave propagation. *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 8(2) :135–151, 1987.

- [47] J.C. Gilbert and P. Joly. Higher order time stepping for second order hyperbolic problems and optimal CFL conditions. In *Partial differential equations*, volume 16 of *Comput. Methods Appl. Sci.*, pages 67–93. Springer, Dordrecht, 2008.
- [48] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. I. Construction. *Numer. Math.*, 95(2) :197–221, 2003.
- [49] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. Conservative space-time mesh refinement methods for the FDTD solution of Maxwell’s equations. *J. Comput. Phys.*, 211(1) :9–35, 2006.
- [50] E. Bécache, P. Joly, and J. Rodríguez. Space-time mesh refinement for elastodynamics. Numerical results. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 194(2-5) :355–366, 2005.
- [51] F. Collino, T. Fouquet, and P. Joly. A conservative space-time mesh refinement method for the 1-D wave equation. II. Analysis. *Numer. Math.*, 95(2) :223–251, 2003.
- [52] P. Joly and J. Rodríguez. An error analysis of conservative space-time mesh refinement methods for the one-dimensional wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(2) :825–859 (electronic), 2005.
- [53] M.J. Gander, L. Halpern, and F. Nataf. Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 41(5) :1643–1681 (electronic), 2003.
- [54] L. Halpern. Local space-time refinement for the one-dimensional wave equation. *J. Comput. Acoust.*, 13(3) :547–568, 2005.