



HAL
open science

Vers un matériau virtuel pour les composites céramiques

Martin Genet

► **To cite this version:**

Martin Genet. Vers un matériau virtuel pour les composites céramiques. Mécanique [physics.med-ph].
École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2010. Français. NNT: . tel-00473030v1

HAL Id: tel-00473030

<https://theses.hal.science/tel-00473030v1>

Submitted on 13 Apr 2010 (v1), last revised 15 Apr 2010 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THÈSE DE DOCTORAT
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

présentée par

M. MARTIN GENET

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Domaine :

MÉCANIQUE

Sujet :

**VERS UN MATÉRIAU VIRTUEL
POUR LES COMPOSITES CÉRAMIQUES**

Soutenue à l'ENS-Cachan le 26 mars 2010 devant le jury composé de :

Dr. Pascal Chéreau	DGA	Ingénieur de suivi
Pr. Rodrigue Desmorat	LMT-Cachan	Examineur
Pr. Pierre Ladevèze	LMT-Cachan	Directeur de thèse
Pr. Jacques Lamon	INSA-Lyon	Président du jury
Pr. Éric Martin	LCTS-Bordeaux	Rapporteur
Dr. Anne Mouret	SPS	Ingénieure de suivi
Pr. Yves Rémond	IMFS-Strasbourg	Rapporteur

LMT-Cachan

ENS-Cachan/CNRS/UPMC/PRES UniverSud Paris
61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex

"Il n'existe qu'un seul moyen : plongez en vous-même, recherchez la raison qui vous enjoint d'écrire ; examinez si cette raison étend ses racines jusqu'aux plus extrêmes profondeurs de votre cœur ; répondez franchement à la question de savoir si vous seriez condamné à mourir au cas où il vous serait refusé d'écrire. Avant toute chose, demandez-vous, à l'heure la plus tranquille de votre nuit : est-il nécessaire que j'écrive ? Creusez en vous-même en quête d'une réponse profonde. Et si elle devait être positive, si vous étiez forcé à répondre à cette question grave par un puissant "je ne peux pas faire autrement", construisez alors votre existence en fonction de cette nécessité ; jusque dans ses moindres instants les plus insignifiants, votre vie doit être le signe et le témoin de cette impulsion."

Rainer MARIA RILKE, *Lettres à un jeune poète* (1903-1908).

Puisque la Science est avant tout une merveilleuse aventure humaine, je profite de cette page pour remercier du fond du cœur ...

... celle et ceux qui m'ont fait docteur : Jacques LAMON, président éclairé du jury, également pour son accueil de haut vol lors de mes différentes visites à Bordeaux et pour m'avoir ouvert les portes de la Californie ; Éric MARTIN, rapporteur, également pour l'humilité et l'humanité exemplaires ; Yves RÉMOND, rapporteur, également pour l'enthousiasme constructif porté à la vision constructiviste du matériau virtuel ; Rodrigue DESMORAT, examinateur des plus convexes, également pour sa connaissance sans limite et sa pédagogie sans faille ; Anne MOURET, examinatrice, également pour l'intérêt, le soutien, et les nombreux recadrages ; Pascal CHÉREAU, examinateur, également pour le soutien financier.

... celui qui avait largement préparé le terrain : Pierre LADEVÈZE, directeur de génie, dont les orientations m'ont guidé dans les profondeurs du Monde des Idées, m'ont sorti de bien des emprisonnements, m'ont montré la voie de la rigueur, et bien plus encore ! Jamais mes rêves ne m'avaient portés aussi près de la Réalité ! Une pensée également pour Gilles LUBINEAU, encadrant d'un temps, Christophe CLUZEL et Emmanuel BARANGER, équipiers de toujours, dont les idées, la culture et la présence ont constitué un soutien inestimable.

... la communauté du CPR, qui a engendré un cadre d'une grande richesse et très enrichissant autour de ces travaux.

... la communauté CMC de l'Université de Californie à Santa Barbara et de Teledyne Scientific (USA) : une fois les portes ouvertes grâce à Jacques LAMON et François HILD, c'est bien Frank W. ZOK, Brian N. COX et le regretté Anthony G. EVANS qui m'ont réservé un accueil des plus chaleureux. Sans oublier les plus jeunes, qui m'ont fait découvrir l'Amérique !

... celles et ceux qui font tourner les machines ENS, EDSP, LMT et DGM, nous permettant ainsi de penser dans les meilleures conditions qui soient.

... celles et ceux qui font le cœur de ces si belles machines tournantes, où l'on partage sans compter idées –scientifiques, philosophique, artistiques, politiques, voir futiles!–, plaisanteries –sarcasmes!–, émotions –pressions ou dépressions!–, et autres aspects de la condition humaine. L'intensité de ces échanges est telle qu'ils resteront gravés dans moi pour l'éternité !

... ma famille et mes amis : par un savant mélange d'amour et d'amitié, ils m'ont offert la plus belle vie qui soit. Les mots sont bien peu de chose face à tout cela : puisse mon bonheur de chaque instant représenter une récompense à leurs efforts...

Résumé

À l'âge actuel des **composites**, les développements industriels reposent en grande partie sur l'utilisation d'outils numériques pour le **dimensionnement** et l'**optimisation** des **structures** et des **matériaux**. Face au challenge scientifique que représente la construction de ces outils, on propose de rassembler les travaux menés par les communautés macro- et micro-mécanique. Pour cela, on considère des cadres de **modélisation** et de **simulation** suffisamment larges pour contenir l'ensemble des mécanismes, situés à différentes échelles et appartenant à différentes physiques, qui pilotent le **comportement mécanique** et la **durée de vie** des composites. Les modèles ainsi dérivés, appelés **matériaux virtuels**, sont i) utilisables tant en **calcul de structure** qu'en **optimisation** matériau, ii) **extrapolants** pour les chargements sévères et les grandes durées de vie, iii) **génériques** pour des familles entières de matériaux.

La thèse présentée ici initie la construction d'un matériau virtuel pour les **composites tissés à matrice céramique auto-cicatrisante** développés par **Snecma Propulsion Solide**, et plusieurs briques sont étudiées. i) Au niveau macroscopique, le comportement mécanique est analysé au travers d'un modèle écrit dans le cadre de la **théorie de l'endommagement anisotrope et unilatéral**. On discute d'abord du cadre même de la théorie, différentes formulations et lois d'évolutions sont alors comparées. Puis on discute de l'implémentation numérique des modèles proposés, et des exemples de calculs de structures industrielles sont présentés. ii) À l'échelle du tissu, pour traiter la fissuration inter-fil, une méthode basée sur la **mécanique de l'endommagement à taux limité en quasi-statique** est analysée et illustrée par des exemples de calculs à la propagation. iii) Toujours à cette échelle, la fissuration intra-fil transverse est introduite au travers d'un **modèle continu avec déformation inélastique, homogénéisé** à partir d'un **modèle discret avec frottements** situé à l'échelle fibre. Des exemples de calculs sur des tissus réalistes sont présentés. iv) Pour finir, le point clef de la thèse : à l'échelle fibre la durée de vie est analysée au travers d'une approche novatrice de la propagation sous-critique des défauts dans les céramiques. Elle unifie les propagations classique et sous-critique, ainsi que les propagations *reaction- et diffusion-controlled*, via un simple **couplage** entre la **mécanique de la rupture** et des **problèmes de diffusion/réaction**. Elle est validée sur le cas des fibres Hi-Nicalon.

Mots-clefs : Composites tissés à matrice céramique auto-cicatrisante;
Matériau virtuel; Mécanique de l'endommagement anisotrope et unilatéral;
Mécanique de l'endommagement à taux limité; Homogénéisation non linéaire;
Mécanique de la rupture sous-critique.

Abstract

In the current age of composite materials, industrial developments are based largely on the use of numerical tools for structures and materials design and optimization. With regard to the scientific challenge posed by the construction of these tools, we propose to collect the work of macro- and micro-mechanics communities. For this, we consider modeling and simulating frameworks large enough to contain all the mechanisms, situated at different scales and belonging to various physics, that drive the mechanical behavior and lifetime of composites. The derived models, called virtual materials, are i) useable in both structural design and material optimization, ii) extrapolating to severe loads and large lifetimes, iii) generic for entire families of materials. The thesis presented here initiates the construction of such a virtual material for self-healing ceramic matrix woven composites developed by Snecma Propulsion Solide, and several bricks are studied. i) At the macroscopic level, the mechanical behavior is analyzed through a model written in the framework of the anisotropic and unilateral damage theory. We first discuss the framework of the theory, several formulations and evolution laws are then compared. Then we discuss the numerical implementation of the proposed models, and examples of industrial structure calculations are presented. ii) At the yarn level, to handle with the inter-yarn cracking, a method based on damage mechanics with limited rate in quasi-static is analysed and illustrated by examples of propagation calculations. iii) Also at this scale, intra-yarn transverse cracking is introduced through a continuous model with inelastic deformation, homogenized from a discrete model with friction situated at the fiber scale. Examples of calculations on realistic fabric are presented. iv) Finally, the key point of the work : the fiber lifetime is analyzed through an innovative approach to the sub-critical propagation of defects in ceramics. It unifies classical and sub-critical propagations, as well as reaction- and diffusion-controlled propagations, through a simple coupling between fracture mechanics and diffusion/reaction problems. It is validated on the case of Hi-Nicalon fiber.

Keywords : Self-healing ceramic matrix woven composites ; Virtual Material ; Anisotropic and unilateral damage mechanics ; Limited rate damage mechanics ; Non linear homogenization ; Sub-critical fracture mechanics.

Table des matières

Résumé	vii
Abstract	ix
Table des matières	xiii
Introduction	1
Première Partie : Phénoménologie	7
1 Éléments de bibliographie	9
1.1 Les composites tissés à matrice céramique	9
1.1.1 Procédés et microstructure	9
1.1.2 Mécanismes de dégradation/protection	10
1.2 Les composites modèles unidirectionnels	12
1.2.1 Morphologie	12
1.2.2 Mécanismes de dégradation/protection	13
1.3 Les fibres céramiques	14
1.3.1 Famille de fibres Hi-Nicalon	14
1.3.1.1 Procédés, compositions et propriétés	14
1.3.1.2 Mécanismes de dégradation	15
1.3.2 Mèches de fibres	18
1.3.2.1 Mèches idéales	18
1.3.2.2 Mèches réelles	18
Deuxième Partie : Comportement mécanique	21
2 Éléments de bibliographie	23
2.1 Approches microscopiques	23
2.1.1 Composites modèles unidirectionnels	23
2.1.1.1 Micro-composites	24
2.1.1.2 Mini-composites	26
2.1.2 Composites tissés	28
2.2 Approches macroscopiques	31

2.2.1	Problème théorique	31
2.2.1.1	Préliminaires	31
2.2.1.2	Problème	33
2.2.2	Cas simples : contournement du problème	34
2.2.2.1	Endommagement isotrope	34
2.2.2.2	Endommagement directionnel	34
2.2.3	Cas général : Théorie de l'endommagement anisotrope	35
2.2.3.1	Préliminaires	35
2.2.3.2	Théorie	36
2.2.3.3	Un premier modèle des CMCs	39
2.2.3.4	Un modèle des bétons	40
2.2.3.5	Un second modèle des CMCs	41
2.2.4	Autre approche : <i>ONERA Damage Models</i>	44
2.3	Approches multi-échelles	46
2.3.1	Minicomposites	47
2.3.2	Composites tissés	47
2.4	Bilan	49
3	Comportement élastique	51
3.1	Représentation E.F. de géométries complexes	51
3.1.1	Représentation explicite	51
3.1.2	Représentation implicite	53
3.1.2.1	Maillages réguliers	53
3.1.2.2	Maillages raffinés	55
3.1.2.3	Maillages hybrides	57
3.1.2.4	Analyse de convergence	57
3.1.2.5	Discussion	57
3.2	Comportement élastique aux échelles fibre et fil	61
4	Comportement endommagé	65
4.1	Simulation E.F. de modèles de comportement non linéaires	65
4.1.1	Plateforme LMT++ : possibilités et limites	65
4.1.2	Équilibre global de structures E.F. non linéaires	66
4.1.3	Lois de comportement non linéaires	68
4.1.3.1	Le modèle d'endommagement isotrope	68
4.1.3.2	Le modèle d'endommagement anisotrope écrit en déformation et piloté en déformation	72
4.1.3.3	Le modèle d'endommagement anisotrope écrit en contrainte et piloté en déformation	72
4.1.3.4	Le modèle macroscopique pour les CMCs	76
4.2	Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées	76
4.2.1	Choix de la représentation	76
4.2.2	Étude sur la propagation de fissures par la mécanique de l'endommagement à taux limité en quasi-statique	78
4.2.2.1	Analyse théorique du problème de localisation	79
4.2.2.2	Illustration sur un cas test 1D	81

4.2.2.3	Choix des cas tests pour la propagation 3D . . .	87
4.2.2.4	Cas d'un modèle d'endommagement anisotrope écrit et piloté en déformation	89
4.2.2.5	Cas d'un modèle d'endommagement anisotrope écrit en contrainte mais piloté en déformation	96
4.2.2.6	Cas d'un modèle d'endommagement isotrope .	100
4.2.2.7	Bilan	106
4.3	Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration intra-fil transverse et des décohésions fibres-matrices associées	106
4.3.1	Choix de la représentation	106
4.3.2	Modélisation	107
4.3.3	Exemples	110
4.4	Comportement endommagé à l'échelle de la structure	115
4.4.1	Modélisation	115
4.4.2	Exemples au sein de la plateforme LMT++	115
4.4.3	Exemples au sein de ABAQUS	119

Troisième Partie : Durée de vie 121

5	Éléments de bibliographie 123
5.1	Fibres 123
5.1.1	Contrainte à rupture des fibres 123
5.1.1.1	Théorie de Weibull 123
5.1.1.2	Applications aux fibres 124
5.1.2	Durée de vie des fibres 126
5.1.2.1	Défauts de surface 126
5.1.2.2	Propagation sous-critique 128
5.2	Mèches de fibres 132
5.2.1	Contrainte à rupture des mèches de fibres 132
5.2.1.1	Cas des recharges globales 132
5.2.1.2	Cas des recharges locales 134
5.2.2	Durée de vie des mèches de fibres 135

6 Durée de vie des fibres 137

Conclusions et perspectives 163

Introduction

Contexte global : le programme de recherche dans la société humaine

La toute première –et toujours populaire– classification des différentes périodes de la préhistoire humaine repose directement sur les **matériaux** utilisés par les hommes dans la conception de leurs outils : âges de pierre, de bronze, de fer. Si l'idée est trop simpliste pour avoir perduré dans les milieux scientifiques, elle met néanmoins en évidence la place fondamentale qu'ont les **matériaux** au sein des civilisations. Et dans un tel cadre de pensée, l'époque actuelle correspond à l'âge des **composites** : la maîtrise des matériaux et des procédés est telle que l'on n'est plus dans la recherche de l'outil optimal à matériau donné, mais plutôt dans celle du matériau **optimal** pour chaque application ; cette optimisation étant réalisée par la composition savante de plusieurs matériaux aux propriétés et interactions bien définies.

Ainsi, en réponse à certaines attentes des marchés –produire plus léger, plus performant, etc–, l'utilisation des matériaux composites dans l'industrie s'étend très largement depuis plusieurs décennies, en particulier dans les secteurs aéronautique, aérospatial et défense. Et cette expansion repose sur un certain nombre de **challenges industriels**, *e.g.* la production et le recyclage de nouveaux matériaux, la réduction du coût et de la durée des cycles de développement de nouvelles pièces, etc. Parmi ces problèmes, c'est celui de l'optimisation des nouveaux développements qui nous concerne ici. En effet, il est en partie résolu à travers l'utilisation croissante d'**outils de prédiction**, du comportement et de la durée de vie des pièces, en remplacement des campagnes expérimentales, longues et coûteuses. Et le développement de ces outils repose sur un certain nombre de **challenges scientifiques**, comme par exemple, dans le domaine de la science des matériaux, l'analyse et la **modélisation** des mécanismes fondamentaux agissant au sein des matériaux industriels –aux différentes échelles de temps et d'espace et appartenant à différentes physiques– ; et dans le domaine du calcul scientifique, la **simulation** des modèles complexes ainsi construits.

L'ensemble de ces problématiques –industrielles et scientifiques– sont au cœur du **Contrat Programme de Recherche (CPR)** "Modélisation, extrapolation et validation de la Durée De Vie (DDV) des Composites à Matrice Céramique (CMCs) auto-cicatrisante", au sein duquel se situe le travail de doctorat présenté dans ce document.

Contexte local : la thèse dans le programme de recherche

Ce programme de recherche a été financé sur quatre ans (2006–2009) par la Délégation Générale pour l’Armement (DGA) et piloté par SNECMA Propulsion Solide (SPS). Il avait pour but de faire converger les travaux de différents laboratoires universitaires (LCTS-Bordeaux, MATEIS-Lyon, PROMES-Perpignan, LMT-Cachan) et industriels (CEAT-Toulouse, SPS-Bordeaux) français sur les composites tissés à matrice céramique autocatrisante développés par SPS. En effet, cette gamme de composites thermostrostructuraux n’est désormais plus uniquement destinée aux marchés **militaires** ou **spatiaux**, mais également aux marchés **civils**, qui contiennent de nouvelles contraintes –augmentation de la production, de la durée de vie, diminution du poids, du bruit, de la pollution, etc–. Parmi ces problématiques, c’est celle de la **durée de vie**, primordiale, qui concernait le CPR : si celle des pièces militaires –DDV $\approx 10\text{h}$ – est suffisamment faible pour être analysée expérimentalement, ce n’est plus envisageable dans le cas de pièces civiles –DDV $\approx 100\,000\text{h}$ –, et l’utilisation d’**outils de prédiction** est nécessaire. Ainsi, l’objectif du CPR était formulé de la manière suivante : "Concevoir un modèle conservatif de durée de vie de pièces en CMC, validé expérimentalement jusqu’à 5 000h et suffisamment proche de la physique du matériau pour être fiable jusqu’à 50 000h".

Pour répondre à cet objectif, il était nécessaire de compléter les connaissances du comportement des matériaux SPS, principalement au niveau des longues DDV, les courtes DDV ayant déjà fait l’objet d’un CPR par le passé. Et la complexité des matériaux est telle –systèmes multi-échelles, multi-physiques, etc– qu’il était nécessaire de rassembler une communauté scientifique pluridisciplinaire –chimistes, micro-mécaniciens, macro-mécaniciens, etc–. Plusieurs travaux ont donc été entrepris en parallèle :

- Identification et caractérisation précises des mécanismes de diffusion-réaction qui sous-tendent la **cicatrisation** du matériau (PROMES : [Wery et Teyssandier, 2006, 2008]; LCTS : [Garitte *et al.*, 2006a,b]).
- Identification, caractérisation et modélisation des mécanismes pilotant la **DDV des fibres et des fils** (LCTS : [Gauthier et Lamon, 2006, 2008, 2009; Gauthier *et al.*, 2009; Laforêt et Lamon, 2008]).
- Mise en place d’**indicateurs macroscopiques** d’endommagement et de DDV du composite, par analyse acoustique (MATEIS : [Moevus *et al.*, 2008b,a; Momon *et al.*, 2009]) ou par analyse statistique (LCTS : [De Melo-Loseille et Lamon, 2009a,b]).
- Développement d’un **cadre de modélisation** assez large –un matériau virtuel– pour pouvoir rassembler les analyses de chaque équipe (LMT : [Baranger *et al.*, 2007; Cluzel *et al.*, 2007; Baranger *et al.*, 2008; Genet *et al.*, 2008a,e,b, 2009b,a]).

Ainsi, cette thèse a été au centre des collaborations du CPR, puisqu’elle initiait la construction de véritables **CMCs virtuels**, qui non seulement seront un **outil de prédiction** pour l’industrie de demain, mais sont d’ores et déjà un **cadre structurant** pour l’ensemble des recherches menées sur ces matériaux. En effet, suivant l’idée de Popper selon laquelle toute observation physique

est effectuée à l'intérieur d'un cadre théorique [Popper, 1984; Chalmers, 1987], il est nécessaire de construire un cadre théorique **unifié** pour structurer les travaux de l'ensemble de la communauté.

Historique de modélisation des CMCs au LMT –et ailleurs!– : des modèles de comportement aux modèles de matériaux

La construction du **matériau virtuel** s'inscrit dans la lignée des travaux réalisés au LMT sur la modélisation des CMCs, qui eux-mêmes se situent en parallèle des travaux menés par les différentes équipes de la communauté. Les approches de modélisation empruntées sont fonction des problématiques industrielles et des outils de calcul disponible.

En terme de physique, le mécanisme clef du comportement mécanique des CMCs, qui engendre un matériau **ductile** à partir de plusieurs composants **fragiles**, est bien compris depuis l'article fondateur de [Aveston *et al.*, 1971]. Le cas des CMCs unidirectionnels est d'abord traité dans [Marshall *et al.*, 1985; Budiansky *et al.*, 1986; Curtin, 1991a], puis c'est au tour des CMCs tissés, dans [Ladevèze *et al.*, 1994; Guillaumat et Lamon, 1996]. À partir de ces analyses, plusieurs approches de modélisation sont empruntées à travers le monde.

Au LMT, la première génération de modèles date de [Ladevèze *et al.*, 1994; Ladevèze, 1995; Gasser *et al.*, 1996]. Les matériaux étudiés sont alors destinés à des applications courte DDV, et la problématique industrielle associée concerne essentiellement le comportement mécanique des pièces jusqu'à rupture. Le cadre de modélisation est la mécanique de l'endommagement [Lemaitre, 1992; Lemaitre et Chaboche, 1993], et plus précisément la **théorie de l'endommagement anisotrope** [Ladevèze, 1983], qui permet un endommagement orienté par le chargement et désactivé en compression. L'écriture des modèles est alors standard : la cinématique d'endommagement est définie *a priori* dans l'énergie de déformation à l'aide d'un tenseur d'effet de dommage, et la cinétique dans les lois d'évolution de ce tenseur. La théorie est appliquée, en dehors des CMCs, au cas des C/C 4D [Aubard *et al.*, 1998, 2000], des CMCs tissés stratifiés [Gasser *et al.*, 1998], et des bétons [Desmorat *et al.*, 2007]. Des approches similaires sont proposées dans la littérature pour les CMCs, comme par exemple à l'ONERA [Maire et Chaboche, 1997; Maire et Lesne, 1997; Chaboche et Maire, 2001, 2002], ou encore au LCTS-Bordeaux [Camus, 2000].

Une seconde génération est présentée dans [Ladevèze, 2002], où la théorie est remaniée pour offrir un cadre plus souple, qui permette de prendre en compte les **informations microscopiques**. L'écriture est alors non standard : plus rien n'est fixé *a priori* –le tenseur de rigidité est tout entier une variable interne–, et les lois d'évolution pilotent entièrement –cinématique et cinétique– l'évolution de l'endommagement.

La problématique de la **durée de vie** apparaît dans [Letombe, 2005; Cluzel *et al.*, 2009], où des modèles microscopiques sont introduits au sein du modèle macroscopique pour i) relier l'état d'endommagement du matériau à une représentation de ses réseaux de fissures ; ii) décrire la protection de la matrice auto-cicatrisante dans les fissures ; et iii) décrire la dégradation des fibres par oxydation. Cependant, le modèle mécanique reste macroscopique.

La nouvelle génération d'outils, initiée dans cette thèse pour les CMCs mais déjà largement opérationnelle pour les CMOs [Ladevèze, 2005; Ladevèze *et al.*, 2006; Lubineau *et al.*, 2009], se concentre davantage sur le matériau : le **matériau virtuel** n'est plus un simple modèle de comportement, mais un véritable modèle de matériau. Ses paramètres sont caractéristiques des différents constituants du matériau, de leur arrangement et de leurs interactions. Ainsi, il permet d'optimiser des familles entières de matériau, et d'extrapoler leur comportement à des cas de chargement extrême, avec une identification relativement légère. En contrepartie, la finesse de ces modèles est telle que le calcul de pièces industrielles n'est pas concevable, et que même le calcul de simples éprouvettes peut nécessiter l'utilisation de stratégies de calcul spécifiques. Ainsi, la dernière étape est la liaison, par **homogénéisation** ou *virtual testing*, entre le matériau virtuel et les modèles macroscopiques, donnant alors naissance à de véritables pyramides d'outils pour l'ingénieur.

Contenu de la thèse : les bases du matériau virtuel

L'objectif de la thèse n'était pas de terminer la construction du matériau virtuel, ni de fournir un outil industriel directement utilisable, mais plutôt d'en tracer les grandes lignes directrices et de mettre en place ses fondations.

Le matériau virtuel se structure de la manière suivante. Dans un premier temps, on décrit les différents mécanismes de dégradation mécanique du matériau –fissurations et décohésions associées–, à l'échelle du tissu. La représentation est hybride –continue / discrète–, et l'échelle fibre est introduite à travers un pont micro-macro. Ensuite, on décrit la dégradation des fibres par oxydation. La modélisation de l'environnement oxydant des fibres tient compte de l'état de fissuration du matériau, et des différents mécanismes de cicatrisation des fissures. Ainsi, le modèle doit fournir des prédictions sur le comportement jusqu'à rupture et sur la durée de vie de toute la famille de matériaux composites tissés à matrice céramique.

Pendant ce travail de thèse, plusieurs briques ont été mises en place au sein de LMT++, la plateforme de développement logiciel du laboratoire [Leclerc, 2008], qui sont présentées dans ce document :

- La **morphologie** du matériau à l'échelle du tissu est extrêmement complexe [Lomov *et al.*, 2007; Badel *et al.*, 2008], et sa représentation E.F., dans le cas d'une approche explicite, nécessite des développements techniques d'importance [Badel *et al.*, 2007; Couégnat, 2008]. Ainsi, une première approche, implicite, a été initiée qui simplifie largement l'implémentation numérique mais engendre une représentation dégradée des interfaces, qui se retrouvent moyennées au sein des éléments du maillage. Elle consiste à définir la géométrie sur des maillages réguliers à l'aide de fonctions de niveau [Möes *et al.*, 2003]. Elle se montre largement satisfaisante du point de vue de l'homogénéisation linéaire. En revanche, elle est limitée dans le traitement des mécanismes de dégradation, où les interfaces sont primordiales. Une seconde approche, hybride, a donc été proposée qui consiste à représenter les interfaces renforts/matrice de manière explicite, et les interfaces matrice/air de manière implicite.

L'étude est présentée Section 3.

- La **fissuration de la matrice inter-fil** étant entièrement orientée par le chargement, elle possède une morphologie complexe et non connue *a priori*, et sa représentation E.F., dans le cas d'une approche explicite, nécessite des développements techniques d'importance [Möes *et al.*, 1999; Jirasek, 2000; Strouboulis *et al.*, 2000]. Ainsi, une méthode de calcul pour la propagation de fissures par la mécanique de l'endommagement à taux limité en quasi-statique [Ladevèze *et al.*, 2000; Allix *et al.*, 2003] est proposée qui simplifie largement la résolution numérique mais engendre une représentation dégradée des fissures, où les surfaces de discontinuité sont régularisées à l'intérieur des zones volumiques de localisation de l'endommagement. La mise au point de la méthode regroupe en fait deux problématiques : i) la modélisation de l'endommagement et ii) le contrôle de la localisation. Deux modèles écrits dans le cadre de la seconde version de la théorie de l'endommagement anisotrope [Ladevèze, 2002] sont d'abord analysés. Si les énergies –l'une en déformation, l'autre en contrainte– sont classiques, les lois d'évolutions ont été revues –l'écriture est désormais complètement tensorielle– pour résoudre le problème de dépendance à l'histoire du chargement. Cependant, le modèle en déformation, bien plus efficace sur le plan de la résolution numérique, se révèle inapte à représenter les propriétés mécaniques de la zone de localisation, et le modèle en contrainte pose des problèmes de résolution numérique ; ils ne peuvent donc pas être utilisés dans l'état actuel des choses pour simuler la propagation de fissures. Ainsi, la méthode de contrôle de la localisation est illustrée au regard d'un modèle d'endommagement plus basique, et un premier calcul de propagation de fissure 3D est proposé. L'étude est présentée Section 4.2.
- La **fissuration transverse des fils** et les décohésions fibres-matrice associées posent le problème d'être en même temps i) un facteur clef de la durée de vie du matériau [Cluzel *et al.*, 2009] –elles nécessitent donc une représentation fine– ; et ii) situées à l'échelle fibre –ce qui rend difficile leur représentation explicite–. Par conséquent, elles sont introduites à l'échelle du tissu à travers un modèle continu avec déformation inélastique, homogénéisé à partir d'un modèle discret du mécanisme à l'échelle fibre [Hild *et al.*, 1996a; Letombe, 2005]. Ainsi, les lois d'évolution sont écrites en fonction des grandeurs micros –caractéristiques des fibres, de la matrice, etc–, et un pont existe entre les variables macros –déformation inélastique– et micros –taux de fissuration, ouverture des fissures, etc–. L'étude est présentée Section 4.3.
- Pour traiter la **dégradation des fibres** sous environnement oxydant, un nouveau cadre pour la propagation sous-critique des fissures dans les céramiques a été mis en place. Il appartient à la mécanique de la rupture, où les grandeurs critiques sont modifiées par effet de l'environnement ; et prend donc naturellement en compte l'environnement oxydant des fissures, et ses variations. De plus, il contient la loi de Paris, largement utilisée dans la littérature pour traiter le problème de

la propagation sous-critique [Wiederhorn, 1975; Wachtman, 1996]. Il est appliqué ici au cas des fibres *SiC Hi-Nicalon*, pour lesquelles plusieurs environnements oxydants sont considérés : fibre nue ; ou prise en compte de la couche d'oxyde protectrice générée en périphérie de la fibre [Deal et Grove, 1965]. Les deux paramètres scalaires du modèle de propagation –indépendants de la température, du chargement, etc–, ainsi que les différents paramètres caractérisant l'environnement des fibres, sont identifiés avec les données expérimentales obtenues lors du travail de thèse de W. Gauthier au LCTS [Gauthier, 2006], et une première analyse montre le fort pouvoir prédictif du modèle. L'étude est présentée Section 6.

En parallèle de ces travaux qui traitent directement du matériau virtuel, le modèle macroscopique d'endommagement proposé dans [Ladevèze, 2002; Cluzel *et al.*, 2009] pour calculer des **structures CMCs** a été implémenté, d'abord au sein de la plateforme de développement logiciel du laboratoire [Leclerc, 2008], puis au sein du logiciel ABAQUS, et plusieurs résultats de calcul sont présentés Section 4.4.

Communication et publications

L'ensemble de ces travaux de thèse ont fait l'objet de plusieurs présentations publiques, lors de conférences nationales [Genet *et al.*, 2008e, 2009b] et internationales [Genet *et al.*, 2008a, 2009a]. Plus spécifiquement, le travail sur la durée de vie des fibres fait l'objet d'un article en cours de publication [Ladevèze et Genet, 2010].

De plus, ces travaux de thèse m'ont permis de remporter la Sélection SAMPE France 2008 [Genet *et al.*, 2008d], en conséquence de quoi j'ai été invité à participer à la Sélection SAMPE Europe [Genet *et al.*, 2008c] et aux Journées Techniques SAMPE 2008 [Genet *et al.*, 2008b].

Pour finir, à l'occasion d'un séjour prolongé à l'Université de Californie à Santa Barbara pendant l'été 2008, dans l'équipe de F. Zok et du regretté A.G. Evans, j'ai eu l'occasion de donner deux séminaires [Genet, 2008a,b], et de participer à la rédaction d'un article [Flores *et al.*, 2010].

Première Partie

Phénoménologie

On commence par présenter les différentes phénoménologies associées aux composites tissés à matrice céramique. L'analyse met en évidence l'intérêt, en terme de compréhension, de plusieurs sous-systèmes : les composites modèles unidirectionnels, et les fibres, dont les phénoménologies sont également détaillées. L'étude est restreinte, en terme de mécanismes, au cadre des travaux de thèse.

Chapitre 1

Éléments de bibliographie

Les différentes analyses proposées la littérature qui concernent les CMCs ne portent pas toutes sur le système-composite dans son ensemble. Pour isoler certains mécanismes, les auteurs des différents domaines d'étude limitent leurs analyses à certains sous-systèmes du composite : fibres [Bunsell et Berger, 1999; Gauthier et Lamon, 2009; Gauthier *et al.*, 2009], mèches de fibres [Phoenix et Taylor, 1973; Phoenix, 1974; Calard et Lamon, 2004], composites modèles [Hui *et al.*, 1995; Curtin, 1991a,b; Lissart et Lamon, 1997a; Naslain *et al.*, 1999a], etc, et même fissures modèles [Garitte *et al.*, 2006a,b]. En vue des travaux présentés dans ce document, on rapporte ici les phénoménologies associées à plusieurs sous-systèmes d'intérêt.

Le domaine d'étude est restreint aux cas

- de chargements **statiques** (pas de fatigue cyclique, voir [Rouby et Reynaud, 1993; Evans et Zok, 1994; Zhu *et al.*, 1999; Letombe, 2005]),
- de températures **inférieures à 1000°C** (pas de fluage, voir [Evans et Zok, 1994; Zhu *et al.*, 1999]),
- et d'oxydation par de l'**air sec** (pas d'eau, voir [Garitte *et al.*, 2006a,b; Wery et Teyssandier, 2006, 2008]).

De plus, les mécanismes de cicatrisation matricielle ne sont pas traités (voir [Letombe, 2005]).

1.1 Les composites tissés à matrice céramique

1.1.1 Procédés et microstructure

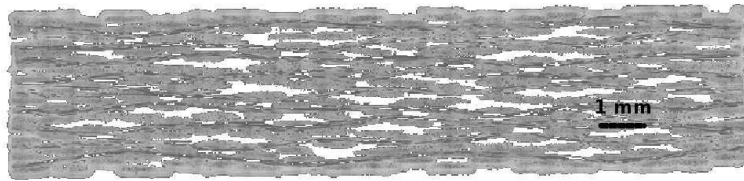
Les matériaux étudiés sont des composites tissés à matrice céramique auto-cicatrisante. Les fibres $-\phi \approx 0.01 \text{ mm}-$ sont d'abord tissées par paquets $-\approx 500$ fibres- elliptiques $-\approx 1 \text{ mm} \times 0.1 \text{ mm}-$ formant une préforme fibreuse. Les différentes couches de la matrice auto-cicatrisante –interphases *PyC*, couches de *SiC*, couches borées, etc– sont ensuite déposées par voie gazeuse : les préformes sont positionnées dans des fours où l'atmosphère est contrôlée et les atomes de matrice sont alors littéralement déposés à la surface de la matière (voir Figure 1.1(a)) [Naslain, 1999; Naslain *et al.*, 1999b, 2002; Naslain, 2004]. Cependant, la densification n'est pas complète, et le matériau

est très poreux (voir Figure 1.1(b)) : dans les mèches de fibres –appelés fils, ou torons, lorsqu’elles sont densifiées par la matrice–, on a $V_f \approx 45\%$, $V_m \approx 45\%$ et $V_p \approx 10\%$; dans le composite complet $V_f \approx 35\%$, $V_m \approx 35\%$, $V_p \approx 30\%$.

L’intérêt fondamental, en terme de propriétés mécaniques, des composites tissés est de proposer une solution au problème majeur du délaminage entre plis unidirectionnels dans les composites stratifiés [Allix et Ladevèze, 1992; Allix *et al.*, 1995], à travers une grande liberté dans le choix de la topologie de la microstructure. En effet, plutôt que d’empiler des plis unidirectionnels (voir Figure 1.2(a)), ou encore des plis 2D tissés indépendamment les uns des autres (voir Figure 1.2(b)), les fils de chaîne vont généralement lier ensemble les fils de trame de plusieurs plis adjacents, menant ainsi à de véritables structures 3D renforcées dans toutes les directions (voir Figure 1.2(c)).

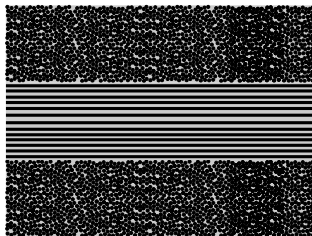


(a) Échelle fibre [Naslain, 2004]

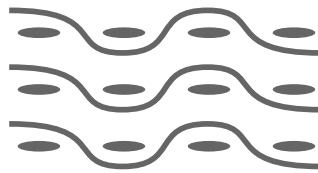


(b) Échelle composite [Couégnat, 2008]

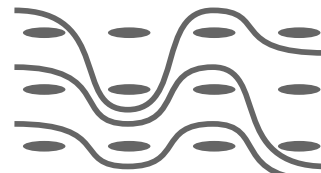
Figure 1.1 – Morphologie du matériau à différentes échelles



(a) Stratifié



(b) Tissé stratifié



(c) Tissé 3D

Figure 1.2 – Différentes topologies de matériaux composites

1.1.2 Mécanismes de dégradation/protection

Dégradations thermo-mécaniques Contrairement aux composites C/SiC , les différents composants des composites SiC/SiC ont tous des coefficients de dilatation thermique proches les uns des autres. Ils ne sont donc pas endommagés par les variations de température associées aux procédés de fabrication.

Dégradations mécaniques Lorsque le matériau est chargé mécaniquement, différents réseaux de fissures apparaissent. Un scénario a été établi dans [Ladevèze *et al.*, 1994; Ladevèze, 1995; Guillaumat et Lamon, 1996; Lamon, 2001; Fantozzi *et al.*, 2001], qui est rappelé ici :

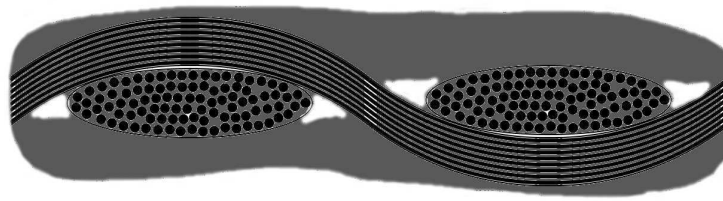
1. Dans un premier temps, la matrice inter-fil se fissure (voir Figure 1.3(b)). Ces fissures sont initiées à des macro-pores, se développent orthogonalement au chargement, et ne pénètrent pas les fils : lorsqu'elles arrivent sur les premières fibres, elles sont déviées le long des fibres et forment des fissures de décohésion.
2. Dans un second temps, c'est la matrice des fils sollicités transversalement qui se fissure (voir Figure 1.3(c)). Ces fissures sont initiées à des micro-pores, et se développent longitudinalement aux fibres. Elles se terminent en périphérie des fils par de nouvelles fissures de décohésion.
3. Dans un troisième temps, c'est la matrice des fils sollicités longitudinalement qui se fissure (voir Figure 1.3(d)). Ces fissures sont également initiées à des micro-pores, mais se développent orthogonalement aux fibres. Et de même que les fissures inter-fils contournent les fils, les fissures intra-fils transverses ne cassent pas les fibres mais les contournent en formant des fissures de décohésion.
4. Finalement, les ruptures de fibres, induites par des micro-défauts, mènent rapidement à la ruine du matériau.

Ainsi, le mécanisme clef du comportement mécanique des CMCs est la décohésion fibre/matrice au droit des fissures matricielles : c'est elle qui permet de faire un composite ductile à partir de deux constituants fragiles. Si la théorie est bien comprise depuis l'article de référence [Aveston *et al.*, 1971], de nombreuses analyses complémentaires ont été nécessaires pour la mettre en pratique dans le cadre industriel [Naslain, 1998; Rebillat *et al.*, 1998; Carrère *et al.*, 2000], qui ont nécessité l'utilisation de composites modèles unidirectionnels [Naslain *et al.*, 1999a], afin d'isoler le mécanisme. Ces composants modèles unidirectionnels sont introduits avec leur phénoménologie Section 1.2.

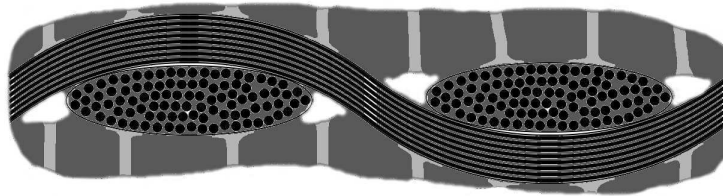
Dégradations/Protections physico-chimiques Dans le cas d'un chargement mécanique inférieur à la contrainte à rupture du matériau –la matrice est fissurée, les fibres soutiennent la charge–, plusieurs mécanismes, induits par l'environnement chimique –éventuellement oxydant– et la température –éventuellement élevée–, coexistent qui pilotent la durée de vie du matériau :

1. L'air chaud pénètre le réseau de fissures et vient oxyder les fibres, qui voient leur contrainte à rupture diminuer. Éventuellement, la contrainte appliquée devient critique, et les fibres commencent à rompre, menant rapidement à la ruine du composite.
2. L'air chaud va également oxyder certaines couches de la matrice auto-cicatrisante. L'oxydation produit un verre pâteux qui bouche les fissures et ralentit l'oxydation des fibres. La durée de vie du matériau s'en voit largement allongée.

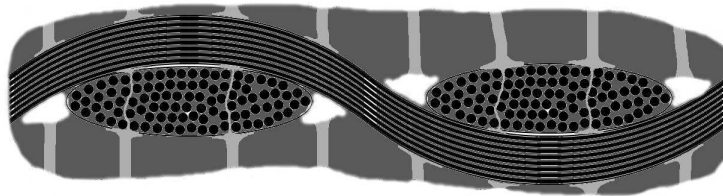
Ainsi, l'un des mécanismes clefs de la durée de vie des CMCs est la dégradation des fibres et des mèches de fibres sous chargement mécanique et chimique –encore une fois : les mécanismes de cicatrisation ne sont pas traités dans ce document–. Pour pouvoir l'étudier, une connaissance approfondie de



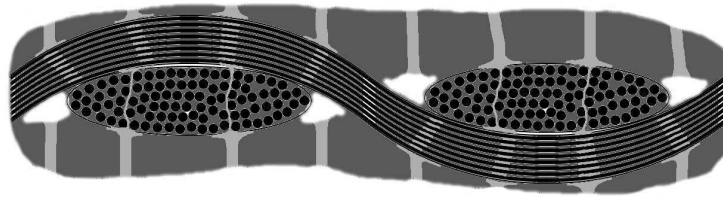
(a) Composite sain



(b) Fissures inter-fils



(c) Fissures intra-fils longitudinales



(d) Fissures intra-fils transversales

Figure 1.3 – Réseaux de fissures

la phénoménologie des fibres et des mèches de fibres est nécessaire. Elle est rapportée Section 1.3.

1.2 Les composites modèles unidirectionnels

1.2.1 Morphologie

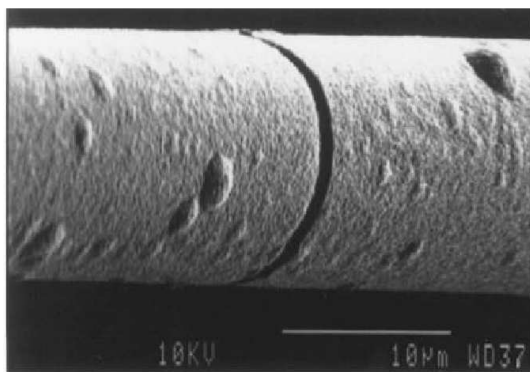
Deux types de composites modèles unidirectionnels ont été introduits [Naslain *et al.*, 1999a] pour l'étude spécifique de la fissuration transverse des fils [Lissart et Lamon, 1997a], de la décohésion fibre/matrice [Naslain, 1998; Rebillat *et al.*, 1998; Carrère *et al.*, 2000] et de la protection matricielle associées [Lamouroux *et al.*, 1999] (voir Figure 1.4) :

- Les **micro-composites** (*single fiber composites*) (voir Figure 1.4(a)), constitués d'une unique fibre dans leur gaine de matrice. Ils permettent une analyse vraiment précise, mais sont difficiles à produire : les fibres

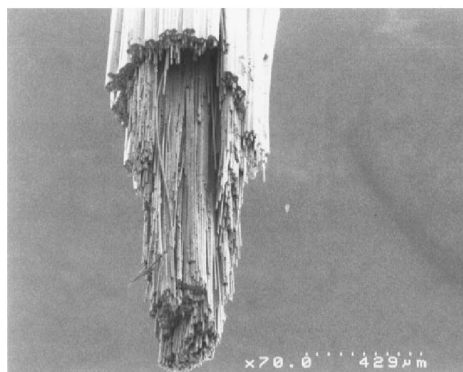
1.2. Les composites modèles unidirectionnels

sont reçues par mèches, et il est difficile d'extraire et de manipuler des fibres seules.

- Les **mini-composites** (voir Figure 1.4(b)), constitués d'une mèche de fibres infiltrée de matrice. C'est l'équivalent du fil dans le composite, à cela près que la porosité est généralement plus faible $-V_p < 10\%$, et qu'il n'y a pas d'ondulation. L'analyse est plus complexe que pour le micro-composite, mais leur production est largement simplifiée.



(a) Micro-composite, avec une fissure matricielle



(b) Mini-composite, après rupture

Figure 1.4 – Morphologies de composites modèles unidirectionnels [Naslain *et al.*, 1999a]

1.2.2 Mécanismes de dégradation/protection

Dégradations mécaniques Bien compris depuis l'article de référence [Aveston *et al.*, 1971], le mécanisme clef est décrit Figure 1.5 :

- Lorsqu'une fissure matricielle arrive sur la fibre (voir Figure 1.5(a)), plusieurs chemins sont envisageables : i) si la liaison fibre/matrice est forte, alors la fissure propage dans la fibre (voir Figure 1.5(b)) ; et ii) si la liaison fibre/matrice est faible, alors la fissure est déviée autour de la fibre, qui ne rompt pas mais est désolidarisée de la matrice, au moins sur une certaine zone (voir Figure 1.5(c)). C'est le second chemin, où les fibres sont protégées des fissures, qui est mis en œuvre en pratique.
- Les frottements dans la zone de décohésion fibre/matrice permettent alors un transfert de charge par cisaillement entre i) la fibre, surchargée par la fissure matricielle ; et ii) la matrice, déchargée. Ainsi, à une certaine distance de la fissure, la matrice se retrouve rechargée.
- L'effet de la fissure est donc localisé, et la matrice peut se multi-fissurer avant que le matériau ne rompe.

Pour piloter ce mécanisme avec précision, une interphase de PyC est déposée sur les fibres avant la matrice, qui possède le bon équilibre entre résistance – pour le transfert de charge – et fragilité – pour la protection des fibres – [Naslain, 1998; Rebillat *et al.*, 1998; Carrère *et al.*, 2000].

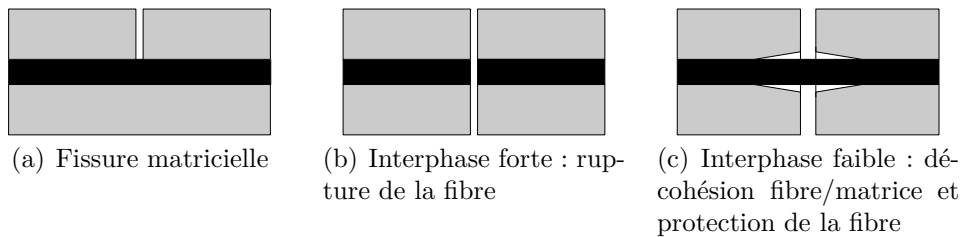


Figure 1.5 – Scénario de fissuration (fibre en noir, matrice en gris)

Dégradations/Protections physico-chimiques Les mécanismes sont les mêmes que ceux présentés section 1.1.2 pour les tissus.

1.3 Les fibres céramiques

1.3.1 Famille de fibres Hi-Nicalon

Jusqu'à un passé proche, les deux concepts de *céramique* et de *fibre* semblaient complètement dissociés. En effet, les céramiques sont rigides et fragiles, alors que les fibres se doivent d'être fines et flexibles, et toutes ces caractéristiques semblent à première vue incompatibles. Mais en fait il n'en est rien : premièrement la finesse apporte de la flexibilité même pour les matériaux fragiles (le module de flexion est en Er^4), deuxièmement elle réduit l'influence des défauts volumiques responsables de la fragilité (le rapport S/V est en $1/r$). Ainsi, les procédés de fabrication développés depuis les années 60 ont donné naissance à des fibres de diamètre de l'ordre de la dizaine de microns, de modules d'Young pouvant aller jusqu'à 800 GPa , de contrainte à rupture pouvant aller jusqu'à 2 GPa , et pouvant être tissées comme des fibres textiles [Takeda *et al.*, 1998, 1999a,b; Song *et al.*, 2000; Shimoo *et al.*, 2000; Bunsell et Berger, 1999]. Cependant, les fibres actuelles souffrent encore d'un manque de stabilité thermique et chimique.

1.3.1.1 Procédés, compositions et propriétés

Procédés et compositions La Figure 1.6 présente un tableau récapitulatif des procédés de fabrication et des compositions chimiques des différentes fibres de la famille Nicalon. Les points clefs sont :

- La réticulation par irradiation plutôt que par oxydation réduit largement la quantité d'oxygène au sein des fibres Hi-Nicalon et Hi-Nicalon S –il n'y a presque plus de $Si - C - O$ – par rapport aux Nicalon.
- L'amélioration du procédé de pyrolyse procure aux fibres Hi-Nicalon S des proportions quasi-stœchiométriques –presque tout le C forme du SiC – et une structure largement cristalline –presque tout le SiC a la forme SiC_{β} – [Bunsell et Berger, 1999; Takeda *et al.*, 1998].

1.3. Les fibres céramiques

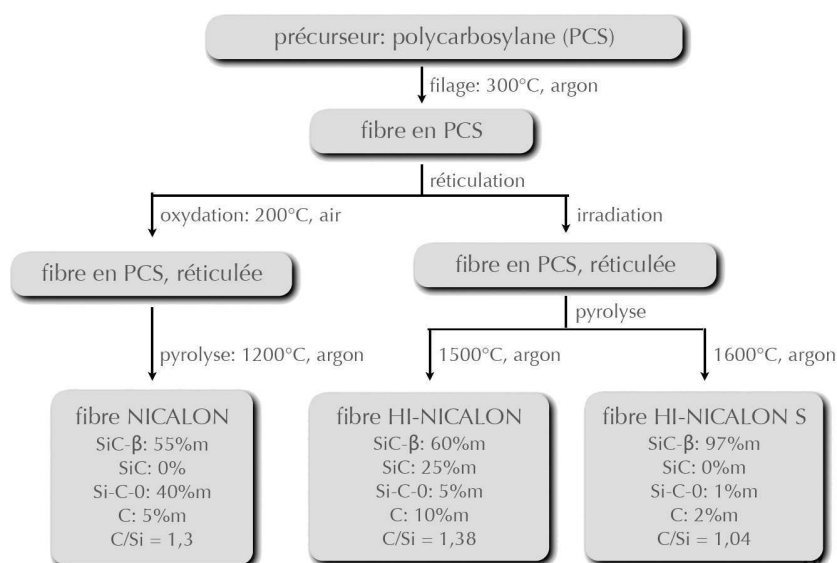


Figure 1.6 – Famille de fibres Nicalon : Procédés de fabrication et compositions chimiques [Bunsell et Berger, 1999]

Propriétés mécaniques Le Tableau 1.1 présente les propriétés mécaniques initiales des différentes fibres de la famille Nicalon. Les points clés sont :

- La réticulation par irradiation, en supprimant la phase $Si - C - O$ et en réduisant la taille des défauts, améliore largement la rigidité et la contrainte à rupture des fibres Hi-Nicalon et Hi-Nicalon S par rapport aux fibres Nicalon.
- L'amélioration du procédé de pyrolyse, en augmentant la proportion de la phase SiC_{β} , améliore encore la rigidité des fibres Hi-Nicalon S par rapport aux fibres Hi-Nicalon, mais réduit également leur déformation à rupture [Bunsell et Berger, 1999; Takeda *et al.*, 1998].

	d (μm)	E (GPa)	$\overline{\sigma}_R$ (GPa)	$\overline{\epsilon}_R$ (%)
Nicalon NLM-202	14	190	2	1.05
Nicalon NL-202	14	220	3	1.35
Hi-Nicalon	14	260	2.6	1.00
Hi-Nicalon S	13	375	2.5	0.65

Tableau 1.1 – Famille de fibres Nicalon : Propriétés mécaniques initiales [Bunsell et Berger, 1999; Takeda *et al.*, 1998]

1.3.1.2 Mécanismes de dégradation

Dégradations chimiques La Figure 1.7 présente les réactions chimiques agissant sur les différents composants des fibres de la famille Nicalon. Les points clés sont :

- L'auto-oxydation de $Si-C-O$, en générant de nouveaux défauts au sein des fibres, réduit la stabilité thermique des fibres Nicalon par rapport à celle des fibres Hi-Nicalon et Hi-Nicalon S [Takeda *et al.*, 1998]. En effet, même sous atmosphère inerte, après exposition à des températures supérieures à $1400^{\circ}C$, les fibres voient leur contrainte à rupture décroître fortement (voir Figure 1.8(a)).
- La réaction d'oxydation du SiC par l' O_2 , en générant de nouveaux défauts à la périphérie des fibres, réduit leur stabilité chimique plus rapidement que l'auto-oxydation de $Si-C-O$ et indépendamment de leur structure cristalline [Takeda *et al.*, 1998]. En effet, sous atmosphère oxydante, après exposition à des températures supérieures à $1200^{\circ}C$, la diminution de la contrainte à rupture (voir Figure 1.8(b)) est identique pour toutes les fibres. Une autre façon de mettre en évidence l'indépendance de la cinétique de cette réaction vis-à-vis de la structure cristalline est de considérer la couche de SiO_2 générée à la surface de la fibre (voir Figure 1.9(a)) : la croissance de la couche est identique pour toutes les fibres (voir Figure 1.9(b)).

Il est à noter que la contrainte à rupture des fibres de la famille Nicalon reste stable jusqu'à au moins $1000^{\circ}C$.

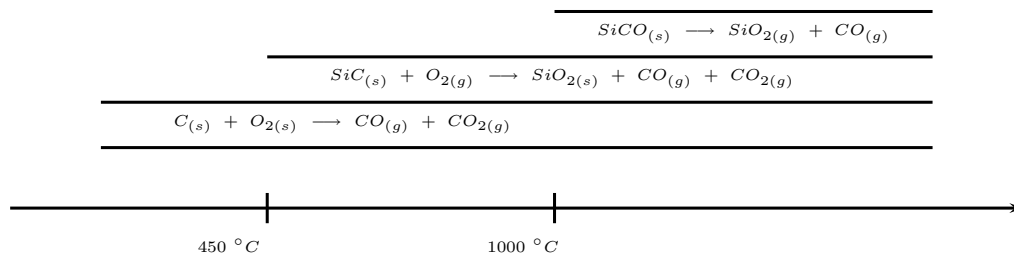


Figure 1.7 – Famille de fibres Nicalon : Réactions chimiques [Bunsell et Berger, 1999]

Dégradations physico-chimiques Contrairement à ce que le paragraphe précédent semble montrer, il a été observé des ruptures de fibres soumises à des contraintes inférieures à leur contrainte à rupture à des températures inférieures à $1000^{\circ}C$ [Gauthier, 2006]. Ces ruptures, différées dans le temps par rapport à l'application du chargement, sont observées en atmosphère oxydante, mais pas en atmosphère inerte.

Pour de tels chargement –contrainte mécanique, atmosphère oxydante, température élevée–, si les fibres C rompent par consommation de matière et réduction de section, les fibres SiC , elles, rompent par propagation sous-critique (*subcritical propagation*) de défauts de surface sous l'effet de l'oxydation [Gauthier, 2006; Laforêt, 2009]. La propagation sous-critique, également appelée propagation lente (*slow crack growth*), correspond à une réaction chimique en front de fissure, favorisée par la contrainte qui ouvre la pointe de fissure et écarte les grains de matière [Lawn, 1974; Wiederhorn, 1975; Wiederhorn *et al.*,

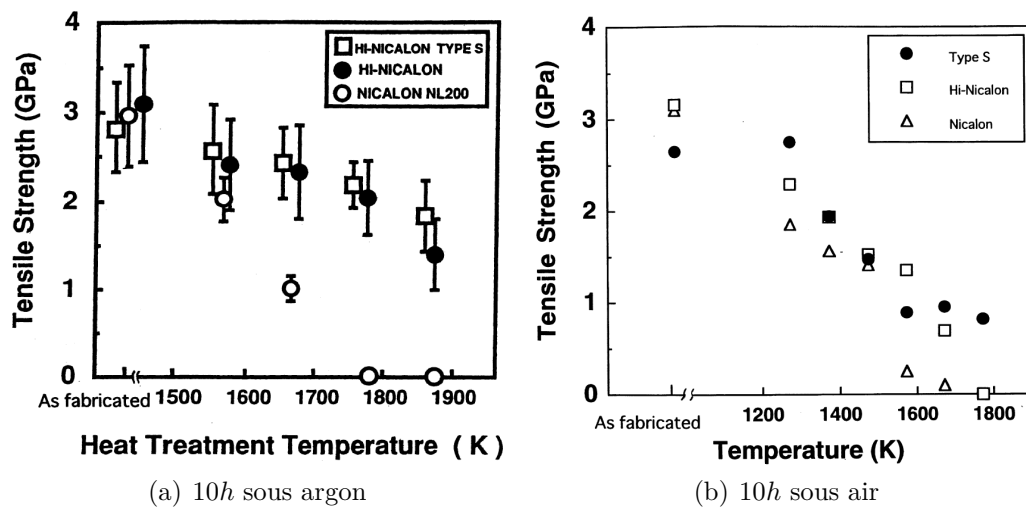
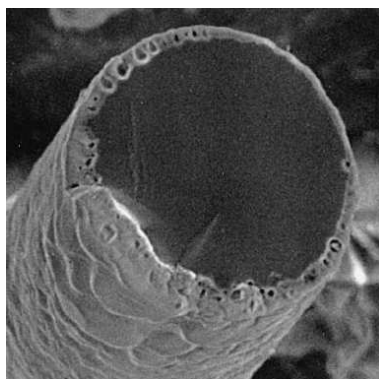
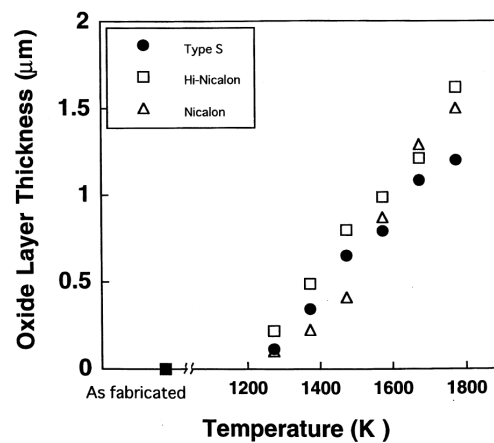


Figure 1.8 – Famille de fibres Nicalon : Contrainte à rupture après exposition à différentes températures sous différents environnements chimiques [Takeda *et al.*, 1998]



(a) Vue au microscope



(b) Épaisseur après 10h d'exposition à différentes températures

Figure 1.9 – Couche d'oxyde générée à la surface des fibres [Takeda *et al.*, 1998]

1980; Wachtman, 1996]. Cette réaction permet à la fissure de propager même si l'intensité des contraintes à son front est inférieure à l'intensité critique, ce qui explique l'utilisation du terme *sous-critique*.

Il existe deux stades de propagation sous-critique [Lawn, 1974; Wachtman, 1996; Hild *et al.*, 1996b; Laforêt, 2009] :

- Dans la première phase, dite *reaction controlled*, l'oxygène est en excès à la surface du front de défaut, et c'est la réaction d'oxydation qui pilote directement l'avancée du défaut.
- Dans la seconde phase, dite *diffusion controlled*, l'arrivée d'oxygène sur la front de défaut est ralenti par l'environnement du front de défaut – diffusion dans la couche d'oxyde en périphérie de la fibre [Ladevèze et Genet, 2010], diffusion dans la fissure [Lawn, 1974], consommation par les lèvres de la fissure [Wiederhorn *et al.*, 1980], etc–, et c'est la diffusion de l'oxygène dans cet environnement qui pilote l'avancée du défaut.

1.3.2 Mèches de fibres

1.3.2.1 Mèches idéales

Un système parfaitement parallèle de fibres constituerait une mèche idéale. Soumis à un chargement statique / de fatigue statique, les fibres d'une telle mèche cassent dans l'ordre de leur contrainte / temps à rupture. Et lorsqu'elles cassent, leur charge se répartit équitablement sur toutes les autres fibres. Alors, il existe une fibre dite critique qui, lorsqu'elle casse, induit une surcharge qui mène instantanément à la rupture de la fibre suivante, phénomène qui s'enchaîne jusqu'à la rupture de toutes les fibres. Ainsi, la contrainte / le temps à rupture de la mèche correspond à celle / celui de sa fibre critique, et sont donc peu dispersés.

1.3.2.2 Mèches réelles

Les mèches réelles de fibres peuvent être considérés comme des systèmes quasi-parallèles de fibres. Aux mécanismes propres aux fibres décrits à la Section 1.3 viennent s'ajouter les interactions suivantes :

- non-alignement des fibres,
- frottements entre fibres,
- pontages de silice entre fibres.

Le non-alignement des fibres est responsable de la diminution de la raideur apparente de la mèche pour des faibles niveaux de chargements. Cependant, la raideur apparente de la mèche prend sa valeur normale autour de 0.2% de déformation [Calard et Lamon, 2004; Laforêt, 2009], et le non-alignement des fibres n'a pas d'influence sur le comportement critique des mèches.

Les frottements et pontages entre fibres, en induisant des ruptures de fibres en séries, sont responsables de la réduction et de la dispersion des contraintes et des temps à rupture des mèches. La Figure 1.10(a) illustre le phénomène de ruptures en série dans le cas des pontages :

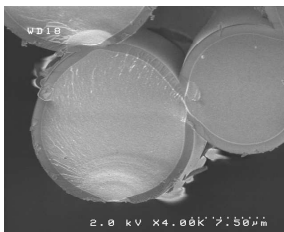
1.3. Les fibres céramiques

- La fibre centrale a rompu après la propagation sous-critique d'un défaut de surface : on observe en bas de la section les stries dues à la propagation sous-critique du défaut, puis le faciès caractéristique de la propagation quasi-instantanée de la fissure sur le reste de la section.
- La fibre de droite étant complètement collée à la fibre centrale –on voit même que les fibres ont été moins consommées au niveau du contact que sur le reste de leur périmètre!–, la fissure a propagé directement de la première à la seconde qui a rompu aussitôt.
- La fibre du haut étant liée –mais pas collée– par un pontage de silice à la fibre centrale, la fissure n'a pas propagé directement jusqu'à elle, mais y a induit une forte sur-contrainte locale qui a piloté la propagation sous-critique d'un défaut de surface entraînant la rupture de la fibre.

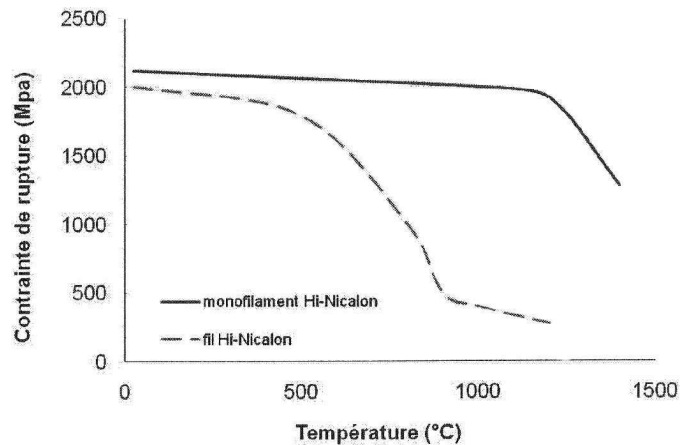
Et le même type de phénomène est attendu dans le cas des frottements.

Cependant, la séparation entre frottements et pontages n'est pas complètement admise :

- Pour les fibres Hi-Nicalon, [Laforêt, 2009] affirme que les interactions prépondérantes sont les pontages de silice, largement dépendants de la température : après exposition en température, la contrainte à rupture des mèches est d'autant plus diminuée que la température est élevée (voir Figure 1.10(b)).
- Pour des fibres de verre ou de Kevlar, qui s'oxydent de manière active donc sans l'apparition d'une couche d'oxyde, [Hill et Okoroafor, 1995] affirme que les interactions prépondérantes sont les frottements : les fibres rompent plus facilement dans une mèche standard que dans une mèche lubrifiée (voir Figure 1.11).



(a) Pontage de silice entre fibres



(b) Contrainte à rupture de fibres (monofilaments) / mèches de fibres (fils) après exposition en température, en fonction de la température

Figure 1.10 – Vue et conséquence des pontages entre fibres au sein des mèches de fibres [Laforêt, 2009]

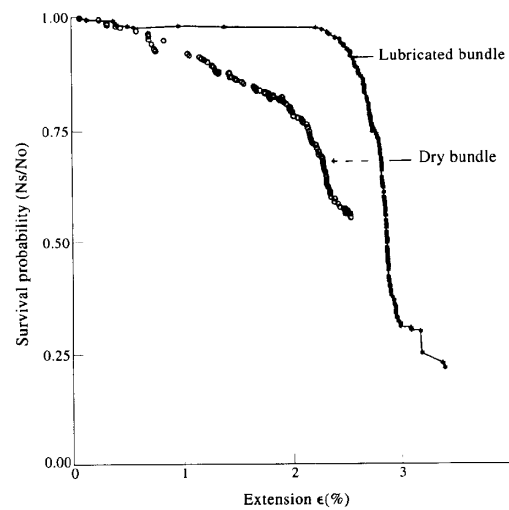


Figure 1.11 – Probabilité de survie de fibres au sein de mèches, en fonction de la déformation appliquée : effet de la lubrification [Hill et Okoroafor, 1995]

Deuxième Partie

Comportement mécanique

On présente maintenant les différents aspects des travaux de thèse relatifs à la modélisation et la simulation du comportement mécanique du composite. Il s'agit de mettre en place les bases du matériau virtuel : la représentation hybride de la morphologie et de la dégradation du matériau à l'échelle du tissu. Pour commencer, une synthèse bibliographique est présentée qui permet de situer les travaux de thèse par rapport à ceux de la littérature. Puis un point est fait sur les outils de calcul développés. Et enfin, on traite la représentation géométrique du tissu, puis la fissuration inter-fils, et pour finir la fissuration intra-fils transverse. En revanche, la fissuration intra-fils longitudinale n'est pas traitée.

Chapitre 2

Éléments de bibliographie

Jusque dans les années 90, deux approches de modélisation des CMCs –en fait : deux communautés scientifiques– se sont confrontées : la *micro-mécanique*, proche de la physique ; et la *macro-mécanique*, qui permet le calcul de structure. Depuis une dizaine d’années, elles se retrouvent unifiées au sein d’approches multi-échelles, qui combinent les avantages de chacune au prix d’un effort de calcul. Les grands lignes de ces différentes approches sont présentées ici, et illustrées par quelques travaux caractéristiques.

2.1 Approches microscopiques

On présente d’abord les travaux d’une partie de la communauté mécanique, étiquetée *matériaux* ou encore *micro-mécanique*, qui s’est attachée à construire des modèles aussi proches que possible de la physique des matériaux étudiés.

Les premières études, présentées Section 2.1.1, portent sur des composites modèles unidirectionnels [Evans et Zok, 1994; Evans, 1997], où la simplification à l’extrême de la géométrie et du chargement –et donc des champs– permet une analyse très fine de la physique mise en jeu. Les modèles qui en découlent sont essentiels pour ce qui est de la compréhension du matériau. En fait, la phénoménologie est souvent étudiée dans le cadre de ces modèles [Aveston *et al.*, 1971]. En revanche, ils sont bien souvent difficilement transposables à de véritables composites –structure tissée, etc– ou chargement –tridimensionnels, cycliques, etc–.

Cependant, les moyens de calcul évoluant, des analyses similaires –fissures discrètes, probabilités, etc–, présentées Section 2.1.2, ont pu être menées sur des géométries plus complexes. Les modèles qui en découlent permettent alors de simuler de véritables composites tissés, soumis à des chargement complexes.

2.1.1 Composites modèles unidirectionnels

On distingue principalement les approches i) *analytiques* [Curtin, 1991a,b; Hui *et al.*, 1995] et ii) *numériques* [Henstenburg et Phoenix, 1989; Lissart et Lamon, 1997a; Ismar et Streicher, 1999; Landis *et al.*, 2000].

Les premières ont l'avantage de mener à des modèles faciles à calculer mais introduisant des hypothèses parfois très restrictives ou difficilement quantifiables. On détaille ici l'approche de [Curtin, 1991a,b] pour les micro- et mini-composites, qui servira dans le modèle présenté Section 4.3.

Les secondes évitent toute argumentation d'ordre statistique, mais au prix d'un léger effort de calcul.

2.1.1.1 Micro-composites

Le problème du micro-composite *–single fiber composite–* a été largement traité dans la littérature, pour analyser soit le problème de la fragmentation de la fibre [Henstenburg et Phoenix, 1989; Curtin, 1991a; Hui *et al.*, 1995], soit le problème dual de la fragmentation de la matrice [Curtin, 1993]. C'est ce deuxième cas qui nous intéresse. On donne ici un aperçu de la méthode développée par [Curtin, 1991a] pour calculer l'évolution de la loi de probabilité des longueurs de fragments au long du chargement.

On considère un micro-composite de longueur L_T . Une contrainte σ est appliquée, qui induit une fragmentation de la matrice : on note N_T le nombre total de fragments et de fissures matricielles –supposés suffisamment grands pour être confondus–, et δ la longueur de décohesion formée autour de chaque fissure. On sépare les fragments en deux populations :

- les N_R fragments de taille inférieure à δ , dont la distribution est notée $P_R(l)$ pour $l \leq \delta$, et représentant une longueur cumulée de L_R ;
- et les $N_T - N_R$ fragments de taille supérieure à δ , dont la distribution, non affectée par le phénomène d'obscurisation associée aux fissures et décohésions, et donc uniquement liée à la distribution des contraintes à rupture, est équivalente à celle des distances centre-à-centre entre voisins d'une population de N segments de longueur δ répartis aléatoirement sur un segment de longueur L sans pouvoir se superposer, qui est donnée dans [Widom, 1966] :

$$\begin{cases} P(l; n, \delta) = \frac{1}{n\delta^2} q(l; n\delta) \\ q(l; \eta) = \begin{cases} 2 \int_0^\eta d\eta' \psi(\eta') \exp\left(-\left(\frac{l}{\delta} - 1\right) \psi(\eta')\right) & \text{si } \delta \leq l \leq 2\delta \\ \frac{\psi^2(\eta)}{\psi'(\eta)} \exp\left(-\left(\frac{l}{\delta} - 1\right) \psi(\eta)\right) & \text{si } l \geq 2\delta \end{cases} \\ \psi(\eta) / \eta = \int_0^\psi dt \exp\left(-2 \int_0^t ds \frac{1 - e^{-s}}{s}\right) \end{cases} \quad (2.1)$$

$$\text{avec } n = \frac{N_T - N_R}{L_T - L_R}, \text{ pour } l \geq \delta$$

Une sur-contrainte $\Delta\sigma$ est appliquée. La longueur de décohesion devient $\delta + \Delta\delta$. Parmi les $N_T - N_R$ fragments du second type, les

$$\Delta N_R = (N_T - N_R) P\left(\delta; \frac{N_T - N_R}{L_T - L_R}, \delta\right) \Delta\delta \quad (2.2)$$

Qui avaient une taille comprise entre δ et $\delta + \Delta\delta$ deviennent du premier type. La variation de longueur cumulée des fragments du premier type est alors $\Delta L_R = \Delta N_R \delta$, et la variation de la distribution des tailles de fragments du premier type est

$$\Delta P_R(l) = \begin{cases} \Delta N_R & \text{si } \delta \leq l \leq \delta + \Delta\delta \\ 0 & \text{si } l < \delta \end{cases} \quad (2.3)$$

De plus, parmi les $N_T - (N_R + \Delta N_R)$ fragments du premier type restants,

$$\Delta N_A = \mu(\sigma, L^*) \Delta\sigma \quad (2.4)$$

$$\text{avec } L^* = (N_T - (N_R + \Delta N_R)) \int_{2\delta}^{+\infty} dl (l - 2\delta) P\left(l; \frac{N_T - N_R}{L_T - L_R}, \delta\right)$$

se sont fissurés, où μ est la loi de probabilité d'activation d'un défaut dans un certain volume sous une certaine contrainte, et L^* la longueur équivalente susceptible de fissurer. La longueur de composite non saturé de fissures est alors

$$L = L_T - L_R - \Delta L_R \quad (2.5)$$

Et cette partie de composite contient

$$N = N_T - (N_R + \Delta N_R) + \Delta N_A \quad (2.6)$$

fragments. C'est-à-dire que la densité de fissure n est de

$$n = \frac{N}{L} \quad (2.7)$$

En passant à la limite, on obtient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{d\sigma} = -N\delta P(\delta; n, \delta) \frac{d\delta}{d\sigma} \\ \frac{dN}{d\sigma} = -NP(\delta; n, \delta) \frac{d\delta}{d\sigma} + \mu(\sigma, L^*) \\ L^* = N \int_{2\delta}^{+\infty} dl (l - 2\delta) P(l; n, \delta) \\ n = \frac{N}{L} \\ \frac{dP_R}{d\sigma} = NP(\delta; n, \delta) \frac{d\delta}{d\sigma} \delta_D(l - \delta) \end{cases} \quad (2.8)$$

Ainsi, en choisissant les lois adéquates pour la longueur de décohesion $\delta(\sigma)$ –linéaire, bilinéaire, etc– et la distribution de défauts $\mu(\sigma, L)$ –Weibull à 2 paramètres, 3 paramètres, etc–, la résolution du système mène à la connaissance de la distribution des tailles de fragments tout au long du chargement :

$$P(l, \sigma) = \begin{cases} P_R(l, \sigma) \\ P(l; n(\sigma), \delta(\sigma)) \end{cases} \quad (2.9)$$

Dans le cas d'un simple modèle *shear lag* à un paramètre, et d'une loi de Weibull à deux paramètres, la théorie produit des prédictions extrêmement proches d'une simulation numérique du processus complet, en terme de distribution de tailles de fragments à contrainte donnée (voir Figure 2.1(a)), ainsi que de densité de fissures en fonction de la contrainte (voir Figure 2.1(b)).

Remarque Bien que l'article [Curtin, 1991a] soit appelé "Exact theory etc", preuve est donnée dans [Hui *et al.*, 1995] que la solution développée est uniquement approchée.

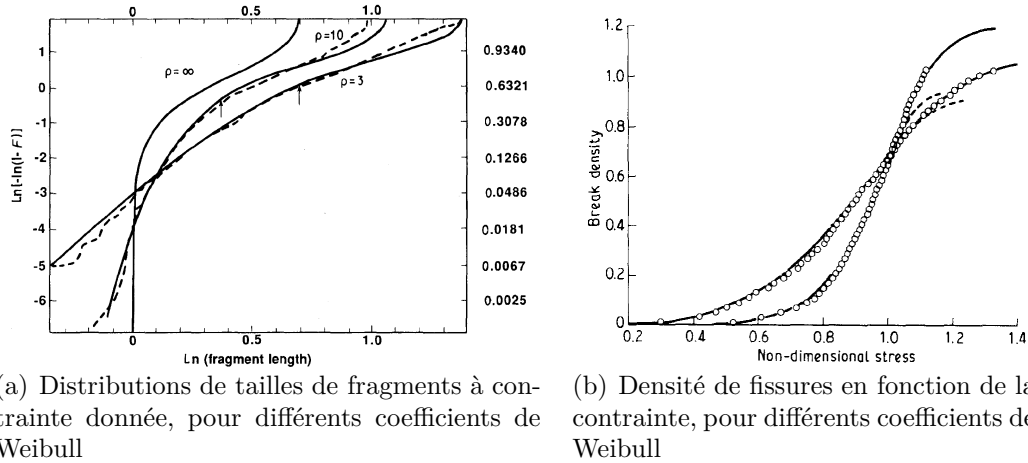


Figure 2.1 – Confrontation du modèle analytique (—) à une simulation numérique (---) [Curtin, 1991a]

2.1.1.2 Mini-composites

Les micro-composites permettent d'étudier la fragmentation d'un seul de ses deux constituants : lorsqu'il est fragmenté, une unique fracture de son autre constituant mène à la rupture du composite. Les mini composites, eux, puisqu'ils englobent un grand nombre de fibres, permettent d'étudier la fragmentation successive ou simultanée des deux constituants. Plusieurs approches ont été proposées [Marshall *et al.*, 1985; Budiansky *et al.*, 1986; Sutcu, 1989; Curtin, 1991b; Lissart et Lamon, 1997a; Landis *et al.*, 2000]. On donne ici un aperçu de la méthode développée par [Curtin, 1991b] pour calculer l'évolution de la loi de probabilité des longueurs de fragments de fibres dans la matrice fissurée au long du chargement, et donc la loi de comportement et la contrainte à rupture du composite, qui se base sur l'analyse précédente.

Un certain nombre d'hypothèses sont faites, qui permettent de ramener le problème de la fragmentation de chaque fibre dans le mini-composite à celui de la fragmentation de l'unique fibre d'un micro-composite où la matrice représente les propriétés moyennes du reste du mini-composite :

- Transfert de charge globale : dans chaque plan, la charge est supportée équitablement par tous les constituants (fibres non rompues à $\pm l_f$, matrice). D'autres hypothèses ont été étudiées dans [Lissart et Lamon, 1997a; Landis *et al.*, 2000].
- L'effet des fissures matricielles sur les contraintes axiales des fibres est négligé (voir Figure 2.2(B)).
- Les variations de contrainte axiale des fibres entre les zones de glissement sont négligées (voir Figure 2.2(C)).

2.1. Approches microscopiques

Suivant ces hypothèses, on utilise la méthode présentée Section 2.1.1.1 pour les micro-composites, et on obtient la distribution des tailles de fragments en fonction de la contrainte $P(l; \sigma)$.

Pour obtenir la loi de comportement du mini-composite, on considère une fissure matricielle quelconque : du fait des hypothèses précédentes, elles jouent toutes le même rôle. À cet endroit, la charge est supportée en partie par des fibres non rompues à $\pm l_f$ et en partie par des fibres rompues à $\pm l_f$:

$$\underbrace{\frac{\sigma}{V_f}}_{\substack{\text{seules les fibres} \\ \text{soutiennent la charge} \\ \text{au droit de la fissure}}} = T \cdot \underbrace{(1 - q(T))}_{\substack{\text{portion de fibres} \\ \text{non rompues à } \pm l_f \\ \text{de la fissure}}} + \frac{2\tau}{r_f} \cdot \langle L(T) \rangle \cdot \underbrace{q(T)}_{\substack{\text{portion de fibres} \\ \text{rompues à } \pm l_f \\ \text{de la fissure}}} \quad (2.10)$$

Où σ est la contrainte appliquée au composite, V_f la portion de fibres, T la contrainte dans les fibres, et $\langle L(T) \rangle$ la moyenne des longueurs de glissement (voir [Curtin, 1991b]). On introduit la relation $\epsilon = T/E_f$:

$$\frac{\sigma}{V_f \sigma_c} = \frac{\epsilon}{\epsilon_c} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_c} \right)^{m+1} \right) \quad \text{pour } \epsilon < \epsilon_l \quad (2.11)$$

avec $\begin{cases} \epsilon_c = \sigma_c / E_f \\ \epsilon_l = \epsilon_c (2/m + 2)^{1/m+1} \end{cases}$

On remarquera la proximité avec la mécanique de l'endommagement. Et pour finir, la contrainte à rupture est (voir Figure 2.3(b)) :

$$\sigma_R = V_f \sigma_c \left(\frac{2}{m+2} \right)^{\frac{1}{m+1}} \frac{m+1}{m+2} \quad (2.12)$$

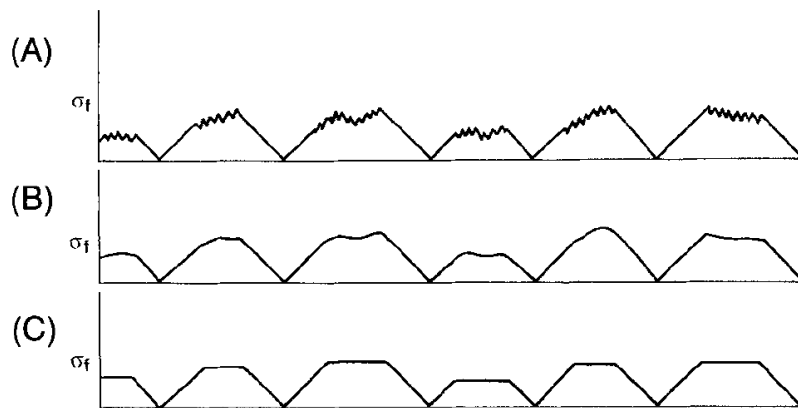


Figure 2.2 – Champs de contrainte axiale des fibres sous plusieurs hypothèses : (A) Champs réels ; (B) Effet des fissures matricielles négligées ; (C) Variations axiales négligées dans les zones intactes [Curtin, 1991b]

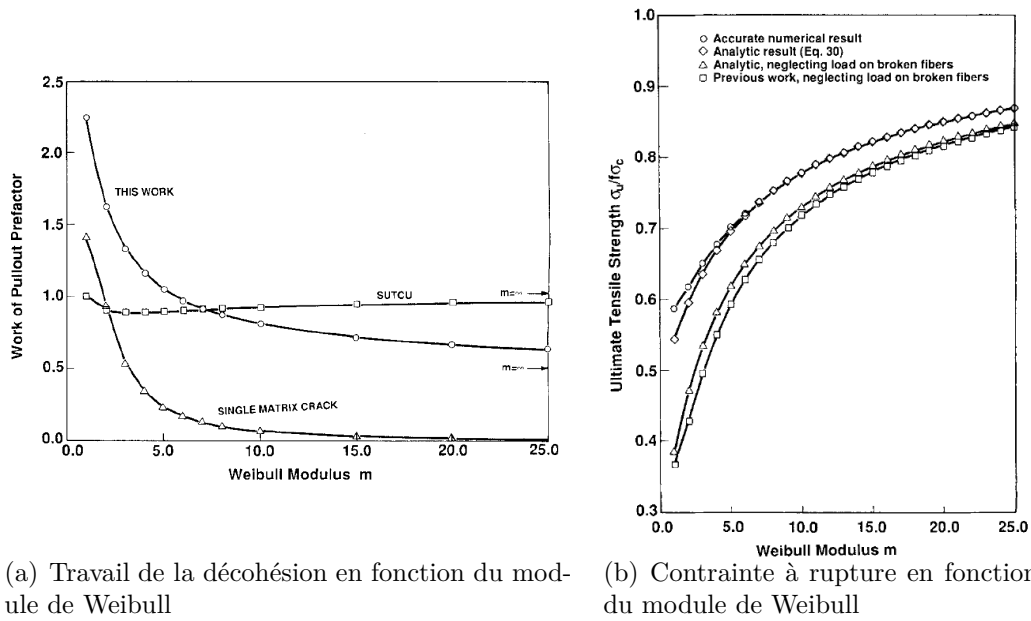


Figure 2.3 – Quelques résultats de l’analyse de [Curtin, 1991b]

Discussion L’intérêt fondamental de ce travail est de dériver la loi de comportement (voir équation 2.11) et la contrainte à rupture (voir équation 2.12) macroscopiques d’un mini-composite en fonction uniquement de ses propriétés microscopiques. On regrettera cependant que la loi de comportement ne sépare pas les parties élastique endommagée et inélastique des déformations, la rendant inutilisable dans des cas de charge-décharge.

2.1.2 Composites tissés

La prise en compte de la véritable microstructure des composites tissés représente une difficulté technique majeure, car il est nécessaire d’introduire des morphologies –des différents constituants et réseaux de fissures– complexes, qui doivent alors être traitées dans le cadre éléments finis.

En terme de représentation des fissures, on distingue principalement i) les représentations *implicites*, à travers la réduction –progressive ou directe ; orientée ou non ; pilotée en contrainte, en énergie, ...– de la rigidité des éléments du maillage ; et ii) les représentations *explicites*, à travers le dédoublement des nœuds du maillage. Quelques approches de référence sont présentées et illustrées ici.

[Bigaud et Hamelin, 1997, 2002] À chaque élément d’une cellule tridimensionnelle maillée régulièrement, une rigidité propre est attribuée en fonction de sa position par rapport à une géométrie de référence. La dégradation est introduite au sein des éléments par des réductions directes et isotropes de rigidité, pilotées par des critères en contrainte.

[Ismar *et al.*, 2000, 2001] Des cellules sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu (voir Figure 2.4). La fissuration des fils chargés longitudinalement est modélisée par une réduction de leur propriétés mécaniques dans la direction longitudinale grâce à des variables internes d'endommagement dont les lois d'évolution sont déterminées expérimentalement sur composites unidirectionnels. La fissuration des fils chargés transversalement, ainsi que la fissuration de la matrice inter-fil, sont modélisées par des réductions de leurs propriétés mécaniques pilotées par des critères en contrainte, et orientées par une méthode de taux de restitution d'énergie.

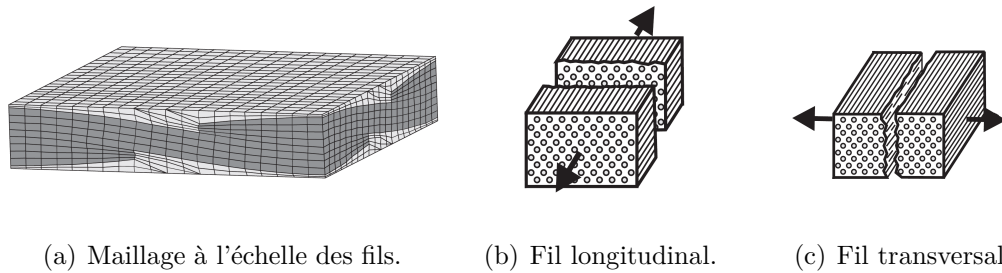


Figure 2.4 – Maillages E.F. et scénarios de dégradation [Ismar *et al.*, 2000]

[Whitcomb et Srirengan, 1995] Des cellules sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu (voir Figure 2.5). La fissuration est prise en compte au sein de la cellule par une diminution isotrope de la rigidité des éléments du maillage, pilotée par un critère en contrainte. Les auteurs étudient la forte dépendance au maillage de leur méthode.

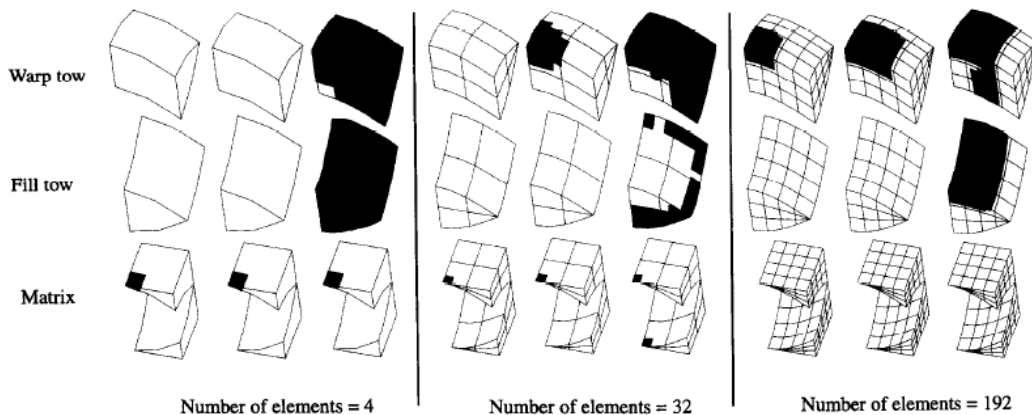


Figure 2.5 – Dépendance au maillage pour le traitement de la dégradation [Whitcomb et Srirengan, 1995]

[Zako *et al.*, 2003] Des cellules sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu (voir Figure 2.6). Les fils peuvent s'endommager de

manière anisotrope grâce à trois variables internes scalaires –représentant les trois modes de fissuration des fils : la fissuration longitudinale et les fissurations transverses dans les deux directions–, et la matrice de manière isotrope grâce à une variable interne scalaire. Lorsque la contrainte atteint un certain critère dans un élément de la cellule, sa rigidité dans une direction donnée par le critère est réduite (sans intermédiaire entre les états sain et endommagé : la variable interne passe directement de 0 à 1) et le calcul à ce pas de chargement est reconduit.

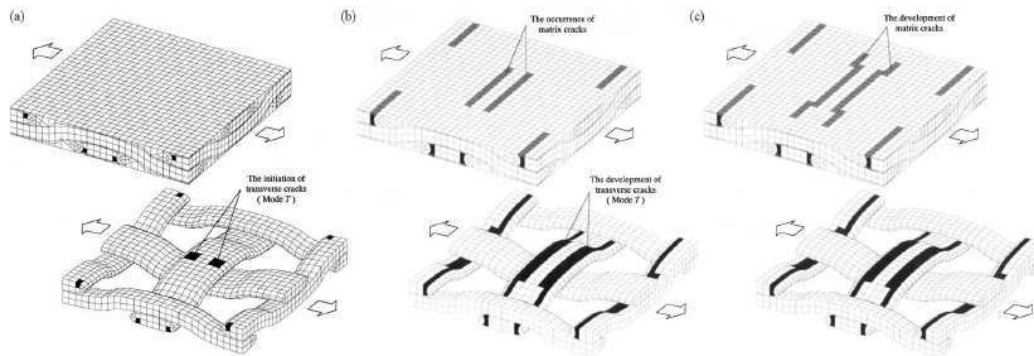


Figure 2.6 – Évolution de l’endommagement dans la cellule au cours du chargement [Zako *et al.*, 2003]

[Lomov *et al.*, 2007] Les travaux de l’équipe de Louvain sur la modélisation géométrique [Verpoest et Lomov, 2005] et ceux de l’équipe d’Osaka sur la modélisation mécanique [Zako *et al.*, 2003] sont ici rassemblés, donnant lieu à une analyse proche de la précédente. La différence majeure se situe au niveau des cellules éléments finis, qui sont ici générées grâce à la combinaison de WiseTex pour la géométrie et ANSYS pour le maillage, et sont donc plus proches de la réalité des tissus.

[Gorbatikh *et al.*, 2007] Les auteurs démontrent que la mécanique de l’endommagement telle qu’elle est pratiquée dans beaucoup d’articles de la littérature n’est pas adaptée pour décrire la fissuration d’un composite tissé à l’échelle du tissu. Une comparaison est faite entre le calcul d’un maillage 2D fissuré et celui du même maillage non fissuré mais avec certains éléments possédant une rigidité réduite. Un certain nombre de méthodes de réduction de la rigidité sont testées, ainsi qu’un certain nombre de critères prévoyant l’apparition ou la direction de propagation de la zone à rigidité réduite. Les auteurs montrent que même si certaines méthodes de réduction de la rigidité peuvent donner des valeurs correctes, cela est vrai seulement dans certaines directions. De plus, ils montrent que même si certains critères prévoyant l’apparition ou la direction de propagation de la zone à rigidité réduite peuvent donner des valeurs correctes, cela est vrai seulement dans certains cas de chargement.

[Guillaumat et Lamon, 1996; Lamon *et al.*, 1998] C’est la seule étude spécifique aux CMCs. Des cellules 2D sont générées qui représentent grossièrement la morphologie du tissu. La fissuration de la matrice inter-fil, ainsi que la décohésion fil-matrice qui en découle lorsque la fissure arrive à un fil et le contourne, sont décrites directement par un dédoublement des nœuds du maillage. Leur apparition est pilotée par une loi statistique de type Weibull et leur position est prise aléatoirement. L’effet de la fissuration de la matrice intra-fils est décrit par une diminution des propriétés mécaniques locales des fils, au lieu d’apparition de la fissure (également déterminée par la méthode précédente).

2.2 Approches macroscopiques

On continue avec les travaux d’une autre partie de la communauté mécanique, étiquetée *structure* ou encore *macro-mécanique*, qui elle s’est attachée à construire des modèles permettant des calculs de structures, au prix d’une dégradation de la représentation de la physique.

Les modèles macroscopiques sont généralement écrits dans le cadre de la mécanique de l’endommagement. Le problème fondamental associé aux CMCs vient des fissures inter-fil, qui sont orientées par le chargement –on ne connaît donc pas leur direction *a priori*– et peuvent éventuellement se refermer en compression. En effet, si la description d’un endommagement anisotrope seule ne pose pas de difficulté majeure [Cordebois et Sidoroff, 1982; Murakami, 1983; Chaboche, 1984], elle nécessite l’introduction d’une variable d’endommagement tensorielle. Et, si la construction de potentiels continûment différentiables – *i.e.* des lois de comportements continues– qui dissocient les comportements de traction et de compression ne pose pas de difficulté majeure dans le cas d’une variable d’endommagement scalaire [Ladevèze, 1983], elle n’est pas triviale dans le cas d’une variable tensorielle [Ladevèze, 1983; Simo et Ju, 1987; Chaboche, 1992].

On commence par détailler le problème (Section 2.2.1), et plusieurs façons de le contourner dans des cas simples (Section 2.2.2) d’un endommagement isotrope puis d’un endommagement directionnel –endommagement anisotrope mais avec une cinématique simple et connue *a priori*–. On présente ensuite deux approches de référence, qui résolvent le problème dans le cas général d’un endommagement anisotrope piloté par le chargement –donc avec une cinématique éventuellement complexe et non connue *a priori*– : celle de Ladevèze (Section 2.2.3), puis celle de Chaboche et Maire (Section 2.2.4).

2.2.1 Problème théorique

2.2.1.1 Préliminaires

Définition 2.1. Soit \underline{A} un tenseur d’ordre deux symétrique. Les parties positives/négatives de \underline{A} au sens classique des valeurs propres positives/négatives

sont notées $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}$. Elles sont définies par :

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} = \sum_I \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \cdot \left(\underline{T}_I \cdot {}^t \underline{T}_I \right) \quad (2.13)$$

Où les λ_i et \underline{T}_i sont définis par les problèmes spectraux :

$$\begin{cases} \underline{\underline{A}} \cdot \underline{T}_i = \lambda_i \cdot \underline{T}_i \\ {}^t \underline{T}_i \cdot \underline{T}_i = \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.14)$$

Proposition 2.1. Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique. La fonctionnelle suivante est C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{1}} \rangle_{+/-}^2 \quad (2.15)$$

Preuve [Ladevèze, 1983].

$$\langle \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{1}} \rangle_{+/-}^2 = \left\langle \sum_I \lambda_I \left(\underbrace{(\underline{T}_I \cdot {}^t \underline{T}_I)}_1 : \underline{\underline{1}} \right) \right\rangle_{+/-}^2 \quad (2.16)$$

$$= \left\langle \sum_I \lambda_I \right\rangle_{+/-}^2 \quad (2.17)$$

Ainsi, il n'y a pas de termes croisés. \square

Proposition 2.2. Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique. La fonctionnelle suivante n'est pas C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \left(\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \underline{\underline{1}} \right)^2 \quad (2.18)$$

Preuve.

$$\left(\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \underline{\underline{1}} \right)^2 = \left(\sum_I \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \left(\underbrace{(\underline{T}_I \cdot {}^t \underline{T}_I)}_1 : \underline{\underline{1}} \right) \right)^2 \quad (2.19)$$

$$= \left(\sum_I \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \right)^2 \quad (2.20)$$

$$= \sum_{\sum_I k_I = 2} \binom{2}{\{k_I\}_I} \prod_I \langle \lambda_I \rangle_{+/-}^{k_I} \quad (2.21)$$

Ainsi, les termes croisés ne s'annulent pas. \square

Proposition 2.3. Soit $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique. La fonctionnelle suivante est C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \quad (2.22)$$

Preuve [Ladevèze, 1983].

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} = \sum_I \sum_J \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \langle \lambda_J \rangle_{+/-} \left(\underbrace{(\underline{T}_I \cdot {}^t \underline{T}_I) : (\underline{T}_J \cdot {}^t \underline{T}_J)}_{\delta_{IJ}} \right) \quad (2.23)$$

$$= \sum_I \langle \lambda_I \rangle_{+/-}^2 \quad (2.24)$$

Ainsi, il n'y a pas de termes croisés. \square

Proposition 2.4. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{H}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique défini positif. La fonctionnelle suivante n'est pas C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \right) : \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \right) \quad (2.25)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} & \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \right) : \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \right) \\ &= \sum_I \sum_J \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \langle \lambda_J \rangle_{+/-} \underbrace{\left(\underline{\underline{H}} \cdot \left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \underline{\underline{H}} \cdot \left(\underline{\underline{T}}_J \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_J \right) \right)}_{\neq \delta_{IJ}} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Ainsi, les termes croisés ne s'annulent que si $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{A}}$ ont la même base propre. \square

Proposition 2.5. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{\underline{C}}}$ un tenseur d'ordre quatre symétrique défini positif. La fonctionnelle suivante n'est pas C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \quad (2.27)$$

Preuve.

$$\begin{aligned} & \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \\ &= \sum_I \sum_J \langle \lambda_I \rangle_{+/-} \langle \lambda_J \rangle_{+/-} \left(\left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \underline{\underline{\underline{C}}} : \left(\underline{\underline{T}}_J \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_J \right) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Ainsi, les termes croisés ne s'annulent que si les "matrices" propres de $\underline{\underline{A}}$ sont les "vecteurs" propres de $\underline{\underline{\underline{C}}}$. Par exemple, dans le cas 2D isotrope, on a :

$$\left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \underline{\underline{\underline{C}}} : \left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) \quad (2.29)$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\left(\left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) \right)}_{\delta_{IJ}} - \frac{\nu}{E} \underbrace{\left(\left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \underline{\underline{\underline{1}}} \right)}_1 \underbrace{\left(\left(\underline{\underline{T}}_I \cdot {}^t \underline{\underline{T}}_I \right) : \underline{\underline{\underline{1}}} \right)}_1 \quad (2.30)$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \delta_{IJ} - \frac{\nu}{E} \quad (2.31)$$

$$\neq \delta_{IJ} \quad (2.32)$$

Donc il subsiste des termes croisés et la fonctionnelle n'est pas C^1 . \square

2.2.1.2 Problème

Ainsi, dans les cas où il est nécessaire d'utiliser une description tensorielle de l'endommagement, comme par exemple si l'endommagement est anisotrope, avec une orientation connue *a priori* mais une cinématique complexe; ou encore si l'endommagement est anisotrope, avec une orientation non connue *a priori* –c'est la cas si rien dans la microstructure n'est là pour l'orienter–;

la construction de potentiels continûment différentiables n'est pas triviale du fait des Propositions 2.4 et 2.5 [Ladevèze, 1983; Chaboche, 1992]. Plusieurs approches ont été proposées pour surmonter cette difficulté et construire des lois de comportement continues. Par exemple, Ladevèze propose d'utiliser une décomposition particulière des tenseurs des déformations/contraintes en parties positives/négatives qui prenne en compte l'état d'endommagement et assure ainsi la continuité des lois de comportement [Ladevèze, 1983, 2002]; et Chaboche propose d'utiliser une règle particulière de désactivation de l'endommagement, qui, dans une première version [Maire et Chaboche, 1997], mène à des lois de comportement continues seulement dans la plupart des cas pratiques, puis, dans une seconde version [Chaboche *et al.*, 2001] à des lois de comportement entièrement continues.

2.2.2 Cas simples : contournement du problème

Cependant, dans plusieurs cas, le problème peut être contourné en développant les termes de l'énergie pour se ramener à des problèmes scalaires ou tout au moins sans opérateur dans les produits contractés.

2.2.2.1 Endommagement isotrope

La mécanique de l'endommagement a été initiée pour traiter le cas d'un endommagement isotrope [Kachanov, 1986; Lemaitre, 1992; Lemaitre et Chaboche, 1993], pour lequel une unique variable scalaire est nécessaire. Dans ce cas, le problème de la différentiabilité peut être résolu en utilisant les potentiels [Ladevèze, 1983] :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\psi = \lambda(1-d)\langle \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 + 2\mu(1-d)\left(\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+\right) \\ \quad + \lambda\langle \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{1}} \rangle_-^2 + 2\mu\left(\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_-\right) \\ 2\phi = \frac{1+\nu}{E(1-d)}\left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+\right) - \frac{\nu}{E(1-d)}\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 \\ \quad + \frac{1+\nu}{E}\left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-\right) - \frac{\nu}{E}\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 \end{array} \right. \quad (2.33)$$

Où λ , μ , E et ν sont les propriétés élastiques initiales du matériau, et d la variable d'endommagement. On a considéré $\langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2$ plutôt que $\left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ : \underline{\underline{1}}\right)^2$, et on montre alors aisément que ces potentiels sont bien C^1 (voir Propositions 2.1 et 2.3).

2.2.2.2 Endommagement directionnel

Le passage à un endommagement directionnel –endommagement anisotrope avec une cinématique simple et connue *a priori*– est trivial : la séparation des tenseurs en parties positives/négatives peut sans difficulté se ramener à des problèmes scalaires. Par exemple, dans le cas orthotrope 2D, avec un endommagement orienté dans les directions d'orthotropie, le potentiel en contrainte

peut s'écrire :

$$2\phi = \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_+^2}{E_1(1-d_1)} + \frac{\langle \sigma_{11} \rangle_-^2}{E_1} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_+^2}{E_2(1-d_2)} + \frac{\langle \sigma_{22} \rangle_-^2}{E_2} - 2\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma_{12}^2 + \frac{\sigma_{12}^2}{G_{12}(1-d_1)(1-d_2)} \quad (2.34)$$

Où d_1 et d_2 sont les variables d'endommagement scalaires associées à chacune des directions d'endommagement. Les lois de comportement qui en dérivent sont trivialement continues.

Ce type de modèles reste très efficace tant que l'endommagement du matériau est largement orienté par sa microstructure. C'est par exemple le cas des CMOs stratifiés [Ladevèze et Le Dantec, 1992; Allix et Ladevèze, 1992], des CMOs tissés stratifiés [Hochard *et al.*, 2001], ou encore des C/C [Dagli et Rémond, 2002].

2.2.3 Cas général : Théorie de l'endommagement anisotrope

2.2.3.1 Préliminaires

Définition 2.2. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{H}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique défini positif. Les parties positives/négatives généralisées de $\underline{\underline{A}}$ au sens de $\underline{\underline{H}}$ sont notées $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}}$. Elles sont définies par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} = \sum_i (\underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_i) \cdot {}^t(\underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_i) \cdot \langle \lambda_i \rangle_{+/-} \quad (2.35)$$

Où les λ_i et $\underline{\underline{T}}_i$ sont définis par les problèmes spectraux :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{T}}_i = \lambda_i \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_i \\ {}^t\underline{\underline{T}}_i \cdot \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \underline{\underline{T}}_i = \delta_{ij} \end{cases} \quad (2.36)$$

C'est-à-dire que :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} = \underline{\underline{H}}^{-1} \cdot \langle \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-} \quad (2.37)$$

Proposition 2.6. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{H}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique défini positif. Si $\underline{\underline{A}}$ est positif / négatif, alors

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-} = \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.38)$$

Preuve. On note $(\lambda_i, \underline{\underline{T}}_i)$ la décomposition spectrale classique de $\underline{\underline{\sigma}}$ (voir Définition 2.1), et $(\lambda'_i, \underline{\underline{T}}'_i)$ sa décomposition spectrale au sens de $\underline{\underline{H}}$ (voir Définition 2.2). On a alors :

$$\lambda'_i = {}^t\underline{\underline{T}}'_i \cdot \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{\underline{T}}'_i \quad \forall i \quad (2.39)$$

Et ainsi :

$$\lambda'_i = \sum_j \lambda_j \cdot ({}^t\underline{\underline{T}}'_i \cdot \underline{\underline{T}}_j)^2 \quad \forall i \quad (2.40)$$

□

Proposition 2.7. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{H}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique défini positif. La fonctionnelle suivante est C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} \right) : \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} \right) \quad (2.41)$$

Preuve [Ladevèze, 1983].

$$\left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} \right) : \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{H}}} \right) = \langle \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} : \langle \underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-} \quad (2.42)$$

Ainsi, on se ramène au cas de la Proposition 2.3. \square

Définition 2.3. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{C}}$ un tenseur d'ordre quatre symétrique défini positif. Les parties positives/négatives généralisées de $\underline{\underline{A}}$ au sens de $\underline{\underline{C}}$ sont notées $\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}}$. Elles sont définies par :

$$\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{C}}^{-1/2} \cdot \langle \underline{\underline{C}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-} \quad (2.43)$$

Remarque Contrairement à la Définition 2.2, la Définition 2.3 ne repose pas directement sur un problème spectral. Par conséquent, le Théorème 2.6 ne s'applique pas. Par exemple, dans le cas 2D isotrope ($E_0 = 1, \nu_0 = 0.2$), on a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+}^{\underline{\underline{C}}_0} = \begin{pmatrix} 1,01 & 0 \\ 0 & 0,10 \end{pmatrix} \\ \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{-}^{\underline{\underline{C}}_0} = \begin{pmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,10 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (2.44)$$

Proposition 2.8. Soient $\underline{\underline{A}}$ un tenseur d'ordre deux symétrique, et $\underline{\underline{C}}$ un tenseur d'ordre quatre symétrique défini positif. La fonctionnelle suivante est C^1 :

$$\underline{\underline{A}} \mapsto \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{C}} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}} \quad (2.45)$$

Preuve [Ladevèze et Letombe, 2000; Desmorat, 2000].

$$\langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{C}} : \langle \underline{\underline{A}} \rangle_{+/-}^{\underline{\underline{C}}} = \langle \underline{\underline{C}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-} : \langle \underline{\underline{C}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{+/-} \quad (2.46)$$

Ainsi, on se ramène au cas de la Proposition 2.3. \square

2.2.3.2 Théorie

Variables d'endommagement La théorie de l'endommagement anisotrope, introduite dans [Ladevèze, 1983], propose un cadre très général pour la modélisation de l'endommagement des matériaux. L'idée est très simple. On considère un matériau tridimensionnel endommagé soumis à une perturbation en contrainte σ^* –l'approche est présentée en contrainte– dans

une direction \underline{n} de l'espace. On note $\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes dans le matériau :

$${}^t\underline{n} \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} = \sigma^* \quad (2.47)$$

On note \underline{t} et \underline{t}' deux vecteurs orthogonaux perpendiculaires à \underline{n} , et $\underline{\underline{\epsilon}}$, le tenseur des déformations dans le matériau. On définit alors le module de Young $E(\underline{n})$ et le module en déformation volumique $\gamma(\underline{n})$:

$${}^t\underline{n} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n} = \frac{1}{E(\underline{n})} {}^t\underline{n} \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \quad (2.48)$$

$${}^t\underline{n} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n} + {}^t\underline{t} \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n} + {}^t\underline{t}' \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n} = \frac{1}{\gamma(\underline{n})} {}^t\underline{n} \underline{\underline{\sigma}} \underline{n} \quad (2.49)$$

Qui définissent entièrement l'opérateur de souplesse du matériau grâce aux relations :

$$\frac{1}{E(\underline{n})} = \left(\underline{\underline{S}} \cdot (\underline{n} \cdot {}^t\underline{n}) \right) : (\underline{n} \cdot {}^t\underline{n}) \quad (2.50)$$

$$\frac{1}{\gamma(\underline{n})} = \left(\underline{\underline{S}} \cdot (\underline{n} \cdot {}^t\underline{n}) \right) : \underline{\underline{1}} \quad (2.51)$$

Pour des raisons de simplicité, on considère désormais un matériau initialement isotrope, de module de Young E_0 et de coefficient de Poisson ν_0 , mais les cas plus généraux peuvent être traités sans difficulté majeure [He et Curnier, 1995]. On a donc, à l'état initial :

$$E(\underline{n}) = E_0 \quad (2.52)$$

$$\gamma(\underline{n}) = \gamma_0 = \frac{E_0}{1 - 2\nu_0} \quad (2.53)$$

Il s'introduit alors deux fonctions caractéristiques de l'endommagement du matériau :

$$d(\underline{n}) = \frac{E_0 - E(\underline{n})}{E_0} = 1 - \frac{E(\underline{n})}{E_0} \quad (2.54)$$

$$\delta(\underline{n}) = \frac{\gamma_0 - \gamma(\underline{n})}{\gamma_0} = 1 - \frac{\gamma(\underline{n})}{\gamma_0} \quad (2.55)$$

Ainsi, les variables d'endommagement sont définies à partir de la dégradation du comportement macroscopique du matériau, et non à partir de considérations microscopiques, comme c'est le cas dans [Kachanov, 1986; Lemaitre, 1992]; mais un lien peut quand même être fait [Ladevèze, 1983; Lemaitre *et al.*, 1999].

Cinématiques d'endommagement Ensuite, on choisit une cinématique d'endommagement en approximant les fonctions *-i.e.* les surfaces- $d(\underline{n})$ et $\delta(\underline{n})$.

L'approximation d'ordre zéro :

$$\begin{cases} d(\underline{n}) = d \\ \delta(\underline{n}) = \delta \end{cases} \quad (2.56)$$

Correspond à un endommagement isotrope, et le potentiel associé peut s'écrire :

$$2\phi = \frac{3}{2E_0(1-d)} \underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D + \frac{1-2\nu_0}{2E_0(1-\delta)} \left((\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}})^2 - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \right) \quad (2.57)$$

Ou encore :

$$2\phi = \frac{1+\nu_0}{E_0(1-d)} \underline{\underline{\sigma}}_D : \underline{\underline{\sigma}}_D + \frac{1-2\nu_0}{3E_0(1-\delta)} (\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}})^2 \quad (2.58)$$

Où $\underline{\underline{\sigma}}_D = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3} \text{Tr}(\underline{\underline{\sigma}}) \underline{\underline{1}}$ est le déviateur de $\underline{\underline{\sigma}}$. Dans le cas général, elle permet de considérer un endommagement isotrope même pour un matériau initialement anisotrope.

L'approximation d'ordre un est la plus simple qui permette de définir un endommagement anisotrope. On introduit pour cela deux tenseurs symétriques $\underline{\underline{d}}$ et $\underline{\underline{\delta}}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{1-d(\underline{\underline{n}})} = {}^t \underline{\underline{n}} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{d}})^{-1} \underline{\underline{n}} \\ \frac{1}{1-\delta(\underline{\underline{n}})} = {}^t \underline{\underline{n}} (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{\delta}})^{-1} \underline{\underline{n}} \end{cases} \quad (2.59)$$

Et le potentiel associé peut s'écrire :

$$2\phi = \frac{1}{E_0} (\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D) : (\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D) + \frac{1-2\nu_0}{2E_0(1-\delta)} \left((\underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}})^2 - \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \right) \quad (2.60)$$

Ou encore :

$$2\phi = \frac{3\nu_0}{E_0} (\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D) : (\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{\sigma}}_D) + \frac{1-2\nu_0}{E_0(1-\delta)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\sigma}} \quad (2.61)$$

Où $\underline{\underline{H}}$ est la nouvelle variable interne –reliée à $\underline{\underline{d}}$ – et $\underline{\underline{\delta}}$ est pris sphérique pour assurer la symétrie des contraintes effectives.

Des approximations d'ordre supérieur ont même été utilisées, notamment pour traiter la cinématique d'endommagement très complexes des matériaux C/C [Aubard *et al.*, 2000].

Cas du comportement différent en traction/compression La théorie propose également de traiter la refermeture des fissures.

Dans le cas de l'approximation d'ordre zéro, la prise en compte se fait très naturellement, et le potentiel peut s'écrire :

$$\begin{aligned} 2\phi = & \frac{1+\nu_0}{E_0(1-d_t)} \left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ - \frac{1}{3} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 \right) + \frac{1-2\nu_0}{3E_0(1-\delta_t)} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 \\ & + \frac{1+\nu_0}{E_0(1-d_c)} \left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- - \frac{1}{3} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_-^2 \right) + \frac{1-2\nu_0}{3E_0(1-\delta_c)} \langle \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{1}} \rangle_-^2 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Où d_t , δ_t , d_c et δ_c correspondent aux différents endommagements de traction et de compression. Le caractère continûment différentiable de ce potentiel est assuré par les Propositions 2.1 et 2.3.

Dans le cas de l'approximation d'ordre un, le potentiel peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
 2\phi = & \frac{3\nu_0}{E_0} \left(\left(\underline{\underline{H}}_t \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}_t}^+ \right) : \left(\underline{\underline{H}}_t \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}_t}^+ \right) - \frac{1}{3} \langle \left(\underline{\underline{H}}_t \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) : \underline{\underline{1}} \rangle_+^2 \right) \\
 & + \frac{1 - 2\nu_0}{E_0 (1 - \delta_t)} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+ \\
 & + \frac{3\nu_0}{E_0} \left(\left(\underline{\underline{H}}_c \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}_c}^- \right) : \left(\underline{\underline{H}}_c \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}_c}^- \right) - \frac{1}{3} \langle \left(\underline{\underline{H}}_c \cdot \underline{\underline{\sigma}} \right) : \underline{\underline{1}} \rangle_-^2 \right) \\
 & + \frac{1 - 2\nu_0}{E_0 (1 - \delta_c)} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Où $\underline{\underline{H}}_t$, δ_t , $\underline{\underline{H}}_c$ et δ_c , correspondent aux différents endommagements de traction et de compression. Le caractère continûment différentiable de ce potentiel est assuré par les Propositions 2.1 et 2.7.

2.2.3.3 Un premier modèle des CMCs

Déoulant directement de la théorie, un premier modèle a été proposé pour les CMCs [Ladevèze *et al.*, 1994; Ladevèze, 1995].

Potentiel Dans le cadre de l'approximation d'ordre un, et en faisant l'hypothèse qu'il n'y a ni endommagement transverse – $\delta(\underline{\underline{n}}) = d(\underline{\underline{n}}) / (1 - 2\nu_0 (1 - d(\underline{\underline{n}})))$ – ni endommagement en compression, on aboutit à :

$$\begin{aligned}
 \phi &= \phi_t + \phi_c + \phi_{tc} \quad (2.64) \\
 \text{avec } \begin{cases} \phi_t &= \frac{1}{2E_0} \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}}^+ \right) : \left(\underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}}^+ \right) \\ \phi_c &= \frac{1}{2E_0} \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- \\ \phi_{tc} &= -\frac{\nu_0}{2E_0} \left(\text{Tr} \left(\underline{\underline{\sigma}} \right)^2 - \text{Tr} \left(\underline{\underline{\sigma}}^2 \right) \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Où $\underline{\underline{H}}$ est la variable d'endommagement en traction – à l'instant initial, $\underline{\underline{H}} = \underline{\underline{1}}_-$.

Lois d'évolutions Les différents mécanismes de dégradation sont introduits à l'aide de plusieurs lois d'évolution. Par exemple pour les fissures inter-fils, on calcule le taux de restitution d'énergie associé à la variation de l'endommagement :

$$\underline{\underline{Y}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{H}}} = \frac{1}{E_0} \left(\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}}^+ \cdot \underline{\underline{H}} \cdot \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_{\underline{\underline{H}}}^+ \right) \quad (2.65)$$

Puis on définit la force d'endommagement qui va piloter l'évolution du système le long du chemin induit par la cinématique d'endommagement choisie :

$$z(\underline{\underline{Y}}) = \left(a \left(\text{tr} \left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{Y}} \right) \right)^{n+1} + (1 - a) \text{tr} \left(\left(\underline{\underline{H}} \cdot \underline{\underline{Y}} \right)^{n+1} \right) \right)^{1/(n+1)} \quad (2.66)$$

Où, n étant fixé assez grand, le paramètre a pilote l'anisotropie de l'endommagement. On note $\bar{z} = \max(z(\underline{Y}))$. La loi d'évolution associée au mécanisme de fissuration matricielle est alors définie par :

$$\underline{\dot{H}} = \frac{\dot{\alpha}}{\bar{z}^n} \left(a \left(\text{tr}(\underline{H} \cdot \underline{Y}) \right)^n \cdot \underline{1} + (1-a) \left(\underline{H} \cdot \underline{Y} \right)^n \right) \quad (2.67)$$

avec $\alpha = k\sqrt{\bar{z}}$

Où le paramètre k pilote la cinétique de l'endommagement.

Discussion Ce modèle permet une bonne comparaison avec les résultats expérimentaux [Ladevèze, 1995], mais possède certaines limitations, notamment au niveau de l'anisotropie initiale et du comportement transverse [Maire et Lesne, 1997].

Remarque La théorie a également été appliquée au cas des C/C 4D [Aubard *et al.*, 1998, 2000], ainsi que du béton [Desmorat *et al.*, 2007, 2008].

2.2.3.4 Un modèle des bétons

Un autre modèle a été construit dans le cadre de la théorie de l'endommagement anisotrope, et appliqué au cas des bétons [Desmorat *et al.*, 2007, 2008].

Potentiel Toujours dans le cadre de l'approximation d'ordre 1, en faisant les hypothèses que la refermeture des fissures joue uniquement sur la partie hydrostatique de l'énergie, et que l'endommagement volumique est lié au directionnel $-\delta = \underline{d} : \underline{1}_-$, les auteurs aboutissent au potentiel :

$$2\phi = \frac{1+\nu_0}{E_0} (\underline{H} \cdot \underline{\sigma}_D) : (\underline{H} \cdot \underline{\sigma}_D) + \frac{1-2\nu_0}{6E_0} \left(\frac{\langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_+^2}{1 - \underline{D} : \underline{1}} + \langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_-^2 \right) \quad (2.68)$$

C'est-à-dire à la loi de comportement :

$$\underline{\epsilon} = \frac{1+\nu_0}{E_0} (\underline{H} \cdot \underline{\sigma}_D \cdot \underline{H})_D + \frac{1-2\nu_0}{3E_0} \left(\frac{\langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_+}{1 - \underline{D} : \underline{1}} + \langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_- \right) \cdot \underline{1} \quad (2.69)$$

Où $\underline{H} = (\underline{1} - \underline{D})^{-1/2}$, \underline{D} étant la variable d'endommagement.

Ce potentiel possède plusieurs propriétés intéressantes :

- La contrainte effective est symétrique et indépendante des caractéristiques élastiques :

$$\underline{\tilde{\sigma}} = (\underline{H} \cdot \underline{\sigma}_D \cdot \underline{H})_D + \frac{1}{3} \left(\frac{\langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_+}{1 - \underline{D} : \underline{1}} + \langle \underline{\sigma} : \underline{1} \rangle_- \right) \cdot \underline{1} \quad (2.70)$$

Le couplage avec la plasticité en est grandement simplifié.

- La loi de comportement peut être inversée analytiquement en inversant la relation 2.70 :

$$\underline{\underline{\sigma}} = (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2} \cdot \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} \cdot (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}})^{-1/2} - \frac{(\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}) : \underline{\underline{\tilde{\sigma}}}}{3 - \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{1}}} \cdot (\underline{\underline{1}} - \underline{\underline{D}}) + \frac{1}{3} \left((1 - \underline{\underline{D}} : \underline{\underline{1}}) \langle \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{1}} \rangle_+ + \langle \underline{\underline{\tilde{\sigma}}} : \underline{\underline{1}} \rangle_- \right) \cdot \underline{\underline{1}} \quad (2.71)$$

La résolution numérique du modèle dans le cadre E.F. en est grandement simplifiée.

- Lorsque l'endommagement croît, les directions propres de l'opérateur de rigidité s'alignent avec les directions d'endommagement, de telle sorte que l'opérateur de rigidité perd son caractère défini positif uniquement lorsque l'une des valeur propre du tenseur d'endommagement atteint 1. Ainsi, on peut véritablement atteindre une contrainte nulle dans une direction endommagée, et cette propriété est indépendante de la loi d'évolution. On verra Section 4.2 que tous les modèles écrits dans le cadre de la théorie de l'endommagement anisotrope ne possèdent pas cette propriété, qui s'avère pourtant fondamentale lors du traitement de la localisation de l'endommagement.

Lois d'évolutions Une loi d'évolution non standard est utilisée pour décrire le comportement des bétons à la fissuration –fissuration orthogonale à la charge en traction, longitudinale en compression– :

$$\underline{\underline{\dot{D}}} \propto \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ \quad (2.72)$$

La positivité des dissipations associées à des lois non standards dans le cadre de la théorie de l'endommagement anisotrope ayant été étudiée dans [Desmorat, 2006] : il suffit que l'endommagement soit croissant, au sens des valeurs propres de $\underline{\underline{D}}$, pour garantir la consistance thermodynamique du modèle.

Illustrations Ce modèle a récemment été appliqué à des cas concrets d'applications industrielles dans le cadre de la thèse de M. Chambart [Chambart, 2009]. La Figure 2.7 reproduit quelques illustrations.

2.2.3.5 Un second modèle des CMCs

La théorie de l'endommagement anisotrope a ensuite été reformulée pour offrir plus de souplesse, notamment en ce qui concerne le comportement initial et l'endommagement transverse [Ladevèze et Letombe, 2000; Ladevèze, 2002]. L'idée est simple, et part de la constatation suivante : dans le modèle précédent, la cinématique d'endommagement est fixée à l'écriture du modèle –seul le tenseur $\underline{\underline{H}}$ peut évoluer–, et la loi d'évolution ne fait que de piloter l'évolution du système à l'intérieur de cette cinématique. Ainsi, l'idée ici est de ne rien fixer à l'écriture de l'énergie du modèle et de laisser les lois d'évolution piloter entièrement l'évolution de l'endommagement –cinématique et cinétique–.

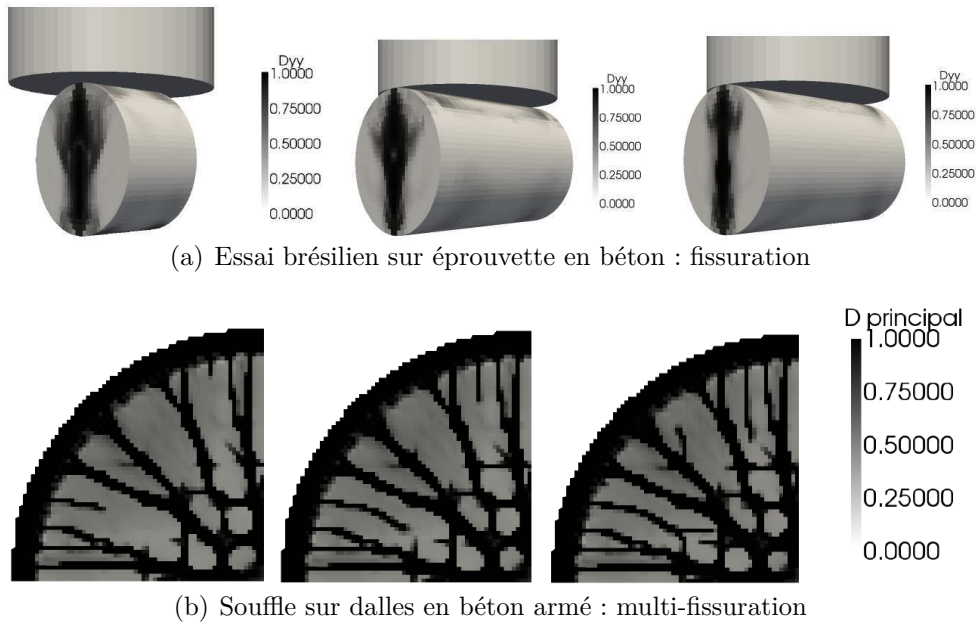


Figure 2.7 – Application du modèle de béton [Chambart, 2009]

Potentiel Un second modèle est alors proposé pour les CMCs, écrit dans le cadre de cette nouvelle formulation :

$$\phi = \phi_t + \phi_c + \phi_{tc} \quad (2.73)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} 2\phi_t = \left(\langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_+ \rangle : \underline{\underline{\underline{C}}} : \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_+ \rangle \right) \\ 2\phi_c = \left(\langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_- \rangle : \underline{\underline{\underline{C}}}_0 : \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_- \rangle \right) \\ 2\phi_{tc} = \left(\underline{\underline{\underline{\sigma}}} : \underline{\underline{\underline{Z}}} : \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \right) \end{cases}$$

Où $\underline{\underline{\underline{C}}}_0$ est le tenseur de souplesse initial du matériau, $\underline{\underline{\underline{C}}}$ le tenseur de souplesse endommagé –c'est une variable interne du modèle, initialement égale à $\underline{\underline{\underline{C}}}_0$ –, $\underline{\underline{\underline{Z}}}$ une souplesse due à l'endommagement agissant identiquement en traction et en compression –une autre variable interne, initialement nulle–.

Lois d'évolutions Comme dans le modèle précédent, les différents mécanismes de dégradation sont introduits à l'aide de plusieurs lois d'évolution, et on présente le cas des fissures inter-fils. On calcule les taux de restitution d'énergie associés à la variation de $\underline{\underline{\underline{C}}}$ et de $\underline{\underline{\underline{Z}}}$:

$$\begin{cases} Y_{\underline{\underline{\underline{C}}}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\underline{C}}}} = \frac{1}{2} \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_+ \rangle^H \otimes \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_+ \rangle^H \\ Y_{\underline{\underline{\underline{Z}}}} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{\underline{\underline{Z}}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \otimes \underline{\underline{\underline{\sigma}}} \end{cases} \quad (2.74)$$

On définit une troisième force thermodynamique qui pilote l'endommagement en cisaillement :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Y}}'' &= \underline{\underline{L}} \otimes \underline{\underline{L}} & (2.75) \\ \text{avec } \underline{\underline{L}} &= \left(i_2 \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+^H \right)_{sym} \end{aligned}$$

Où i_2 est l'opérateur de rotation de $\pi/2$ dans le plan du matériau :

$$i_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.76)$$

On définit alors la force d'endommagement qui va piloter l'évolution de l'état d'endommagement du matériau :

$$z \left(\underline{\underline{Y}}_C \right) = \left(a \left(\text{tr} \left(\widehat{\underline{\underline{Y}}}_C \right) \right)^{n+1} + (1-a) \text{tr} \left(\widehat{\underline{\underline{Y}}}_C^{n+1} \right) \right)^{1/(n+1)} \quad (2.77)$$

Où a pilote l'anisotropie de l'endommagement. On note $\bar{z} = \max \left(z \left(\underline{\underline{Y}}_C \right) \right)$. Les lois d'évolution associées au mécanisme de fissuration matricielle sont alors définies par :

$$\begin{cases} \dot{\underline{\underline{C}}} = \frac{\dot{\alpha}}{\bar{z}^n} \left(a \left(\text{tr} \left(\widehat{\underline{\underline{Y}}}_C \right) \right)^n \underline{\underline{1}} + (1-a) \widehat{\underline{\underline{Y}}}_C^n \right) \\ \dot{\underline{\underline{Z}}} = \frac{\dot{\alpha}}{\bar{z}^n} b \widehat{\underline{\underline{Y}}}_C'' \end{cases} \quad (2.78)$$

avec $\alpha = k\sqrt{\bar{z}}$

Où b pilote l'intensité de l'endommagement en cisaillement, et k la cinétique de l'endommagement.

Discussion Ce modèle permet d'ores et déjà de pallier les limites du modèle précédent sur les plans du comportement initial et du comportement endommagé transverse, mais surtout offre suffisamment de souplesse dans la description de l'endommagement pour pouvoir englober un maximum d'informations d'ordre micro-mécanique [Ladevèze et Letombe, 2000; Ladevèze *et al.*, 2001].

Remarque La définition de la partie négative des contraintes a été modifiée par rapport à [Ladevèze et Letombe, 2000; Ladevèze, 2002; Letombe, 2005], et ce pour deux raisons :

1. La partie compression de l'énergie, $\langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_- : \underline{\underline{C}}_0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-$, n'était pas continûment différentiable (voir Proposition 2.5).
2. $\underline{\underline{C}}_0$ n'était pas le tenseur de Hooke initial exact du matériau.

2.2.4 Autre approche : *ONERA Damage Models*

Chaboche et Maire proposent également un cadre général pour la modélisation de l'endommagement des matériaux, appliqué au cas des composites tissés [Maire et Chaboche, 1997; Maire et Lesne, 1997; Chaboche et Maire, 2001, 2002]. Les modèles qui en dérivent sont appelés *ONERA Damage Models* –ODM–.

On présente d'abord les différents choix offerts au niveau des variables internes qui représentent l'état d'endommagement du matériaux, puis l'écriture des potentiels qui définissent les lois de comportement, et enfin le traitement de la refermeture des fissures.

Variables internes La théorie propose plusieurs types de variables internes, correspondant aux deux grands types d'endommagement :

- pour les endommagements orientés par la *microstructure* –*e.g.* la fissuration de la matrice intra-fil–, des variables tensorielles d'ordre zéro –*i.e.* scalaires–, notées δ_i , associées à des directions connues *a priori*, notées \underline{n}_i ;
- et pour les endommagements orientés par le *chargement* –*e.g.* la fissuration de la matrice inter-fil–, des variables tensorielles d'ordre deux ou quatre, notées $\underline{\underline{d}}_i$ ou $\underline{\underline{\underline{D}}}_i$.

À chaque variable interne, on associe un tenseur d'ordre quatre, dit d'*effet du dommage*, qui décrit l'effet de l'endommagement sur la rigidité du matériau :

- Pour les variables d'ordre quatre :

$$\mathbb{D}^D : \underline{\underline{\underline{D}}}_i \mapsto \underline{\underline{\underline{D}}}_i \quad (2.79)$$

- Pour les variables d'ordre deux :

$$\mathbb{D}^d : \underline{\underline{d}}_i \mapsto \gamma \cdot \left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{d}}_i \right)_{\text{sym}} + \frac{\gamma - 1}{2} \cdot \left(\underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{d}}_i + \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{d}}_i \right)_{\text{sym}} \quad (2.80)$$

- Pour les variables scalaire :

$$\mathbb{D}^\delta : \left(\delta_i, \underline{n}_i \right) \mapsto \mathbb{D}^d \left(\delta_i \cdot \underline{n}_i \underline{n}_i \right) \quad (2.81)$$

Potentiels énergétiques Sans considérer de déformations résiduelles ou thermiques, le potentiel d'énergie libre s'écrit simplement (des potentiels en contrainte ont également été envisagés [Maire et Chaboche, 1997]) :

$$2\phi = \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{C}}} : \underline{\underline{\underline{C}}} \quad (2.82)$$

Où $\underline{\underline{\underline{C}}}$ est le tenseur de rigidité endommagé du matériau. Dans le cas général, il dépend de trois familles de tenseurs, une d'ordre quatre $\left\{ \underline{\underline{\underline{D}}}_i \right\}$, une d'ordre

deux $\{\underline{d}_i\}_i$, et une d'ordre zéro $\{\delta_i\}_i$. On écrit alors :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{C}} &= \underline{\underline{C}}_0 - \underline{\underline{\Delta C}} & (2.83) \\ \text{avec } \underline{\underline{\Delta C}} &= \underline{\underline{\Delta C}}^\delta + \underline{\underline{\Delta C}}^d + \underline{\underline{\Delta C}}^D \\ \text{avec } \begin{cases} \underline{\underline{\Delta C}}^\delta &= \sum_i \mathbb{D}^\delta(\delta_i, \underline{n}_i) \cdot \mathbb{K} \\ \underline{\underline{\Delta C}}^d &= \sum_i \mathbb{D}^d(\underline{d}_i) \cdot \mathbb{K} \\ \underline{\underline{\Delta C}}^D &= \sum_i \mathbb{D}^D(\underline{D}_i) \cdot \mathbb{K} \end{cases} \end{aligned}$$

Où l'on prend généralement $\mathbb{K} = \underline{\underline{C}}_0$ (d'autres possibilités ont été envisagées [Maire et Chaboche, 1997]).

Refermeture des fissures La désactivation de l'endommagement en compression est traitée à travers l'utilisation d'une variation de souplesse effective $\underline{\underline{\Delta C}}_{eff}$ au lieu de $\underline{\underline{\Delta C}}$, qui prend en compte l'état de déformation du matériau. Pour cela, on définit les projecteurs

$$\mathbb{P} : \underline{n}_i \mapsto (\underline{n}_i \otimes \underline{n}_i) \otimes (\underline{n}_i \otimes \underline{n}_i) \quad (2.84)$$

Et on a :

- Pour les variables scalaires :

$$\underline{\underline{\Delta C}}_{eff}^\delta = \underline{\underline{\Delta C}}^\delta - \sum_i H(-{}^t \underline{n}_i \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n}_i) \mathbb{P}(\underline{n}_i) \cdot \underline{\underline{\Delta C}}^\delta \cdot \mathbb{P}(\underline{n}_i) \quad (2.85)$$

Où \underline{n}_i est la direction associée à δ_i .

- Pour les variables d'ordre deux :

$$\underline{\underline{\Delta C}}_{eff}^d = \underline{\underline{\Delta C}}^d - \sum_i \sum_j H(-{}^t \underline{n}_j^i \underline{\underline{\epsilon}} \underline{n}_j^i) \mathbb{P}(\underline{n}_j^i) \cdot \underline{\underline{\Delta C}}^d \cdot \mathbb{P}(\underline{n}_j^i) \quad (2.86)$$

Où les $\{\underline{n}_j^i\}_j$ sont les vecteurs propres de \underline{d}_i .

Le cas des variables internes d'ordre quatre n'a pas encore été traité.

Remarques

- La méthode de désactivation de l'endommagement présentée ici est celle de [Maire et Chaboche, 1997], qui possède un certain nombre de limitations : i) s'il y a bien recouvrement de la rigidité de tension en compression, ce n'est pas le cas de la rigidité de cisaillement [Chaboche et Maire, 2001] ; et ii) si la loi de comportement est bien continue dans la plupart des cas pratiques, ce n'est pas vrai dans le cas général. Elle a été largement revisitée dans [Chaboche et Maire, 2001, 2002], avec l'introduction de concepts micro-mécaniques –l'énergie stockée par frottement entre les lèvres des fissures–, conduisant à une récupération totale de la rigidité en compression, et à des lois de comportements entièrement continues.
- Dans le but d'améliorer l'efficacité numérique des modèles, de nouvelles formulations, écrites en déformation et ne faisant intervenir que des variables d'endommagement scalaires, ont été introduites [Marcin, 2010].

Illustrations Les modèles ODM de dernière génération ont été récemment appliqués à des cas concrets d'applications industrielles, dans le cadre de la thèse de L. Marcin [Marcin, 2010] (voir Figure 2.8).

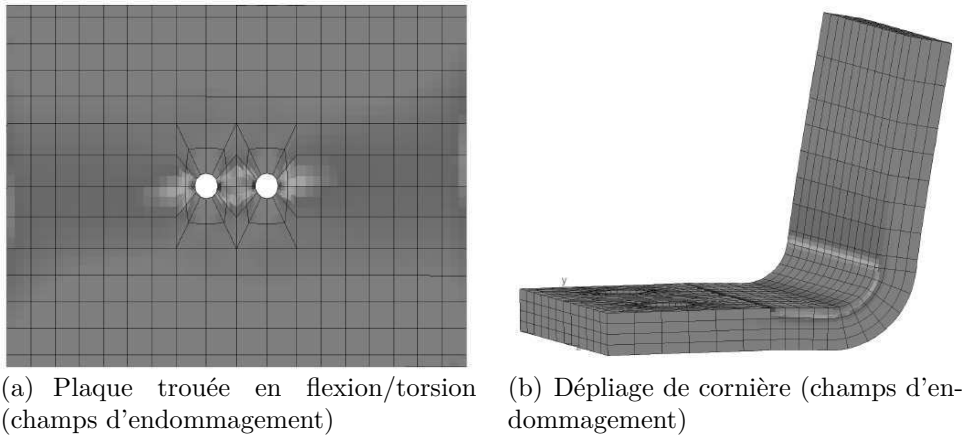


Figure 2.8 – Application des modèles ODM à des structures CMC [Marcin, 2010]

2.3 Approches multi-échelles

Les possibilités et limites de chacune des deux approches précédentes – *micro* et *macro* – sont aujourd'hui bien maîtrisées. Même si certains problèmes subsistent, la recherche se tourne depuis quelques années déjà vers la construction de modèles dits multi-échelles, où l'on vient coupler les différentes représentations au sein d'un même cadre de modélisation. L'objectif est de fournir des outils de prédiction qui soient proches de la physique des matériaux mais également utilisables en calcul de structure. L'idée générale procède en trois étapes :

- **Homogénéisation** : L'analyse est menée à l'échelle microscopique, et un comportement "moyen" est calculé.
- **Calcul de structure** : L'analyse est menée à l'échelle de la structure, en considérant le comportement homogénéisé calculé à l'étape précédente.
- **Relocalisation** : Une réanalyse locale est menée, qui consiste à repasser des variables macroscopiques –continues– aux variables microscopiques –discrètes–, au moins sur les parties critiques de la structure.

Cette problématique –dite d'*homogénéisation*, ou encore de *changement d'échelle*– concerne l'ensemble des scientifiques des matériaux –voire l'ensemble des physiciens, et même des mathématiciens!–, et il serait difficile d'en dresser un tableau structuré ici. On présente donc uniquement quelques approches de références qui ont été mises en œuvre dans le cas spécifique des CMCs, d'abord sur minicomposites (Section 2.3.1), puis sur composites tissés (Section 2.3.2).

2.3.1 Minicomposites

Comme pour les approches microscopiques (voir Section 2.1.1), la simplification à l'extrême de la géométrie et du chargement associée au minicomposite a permis des analyses fines, analytiques. On présente ici l'approche de [Hild *et al.*, 1996a], qui sera la base du modèle présenté Section 4.3.

On considère donc une cellule micro fissurée, chargée, et les champs de contrainte correspondants (voir Figure 2.9). L'énergie libre de la cellule est calculée en fonction des paramètres micros, puis est exprimée sous une forme consistante avec la mécanique des milieux continus, grâce à l'introduction de variables internes, ici 3 :

$$\psi = \frac{1}{2}E(1-D)(\epsilon - \alpha)^2 + \frac{2}{3}E\frac{\alpha^2}{d} \quad (2.87)$$

Où D est la diminution de rigidité associée à la fissuration elle-même, d une autre variable d'endommagement associée à la décohésion fibre/matrice, et α la déformation inélastique.

La loi de comportement dérive directement de cette énergie :

$$\sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} = E(1-D)(\epsilon - \alpha) \quad (2.88)$$

La forme des lois d'évolution des variables internes est également déduite de l'analyse de la cellule micro. Par contre, leur identification est faite à partir d'essais macroscopiques.

Il est important de signaler que cette approche analytique contient très naturellement les trois étapes génériques de l'homogénéisation. En particulier, pour l'étape de relocalisation, il existe un lien fort entre les variables internes macros et les quantités d'intérêt micros.

Cependant, les limites de l'approche semblent être i) lors des changements de sens de chargement, les champs de contrainte micros se complexifient rapidement, et seuls les cas de charges-décharges complètes sont envisagés ; ii) le caractère probabiliste de la fissuration matricielle n'est pas pris en compte ; et iii) en pratique, les variables internes sont obtenues à partir d'essais macroscopiques.

2.3.2 Composites tissés

Et comme pour les approches microscopiques (voir Section 2.1.2), l'introduction de la géométrie du tissu nécessite l'utilisation du calcul numérique. Quelques approches de références sont présentées et illustrées ici.

[Tang *et al.*, 2006] Un premier calcul est réalisé à l'échelle des fibres pour déterminer le comportement homogénéisé des fils, puis un second calcul est réalisé à l'échelle des fils pour déterminer le comportement homogénéisé du

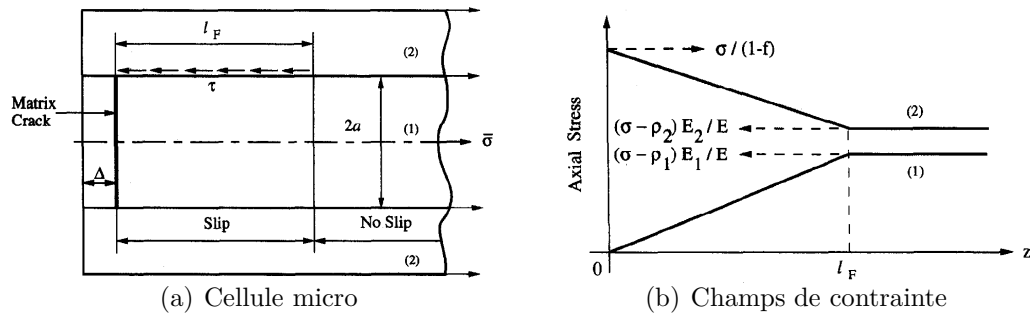


Figure 2.9 – Cellule micro fissurée et champs de contrainte associés [Hild *et al.*, 1996a]

tissu. C'est à cette échelle que l'endommagement est pris en compte, sous la forme d'une réduction immédiate –sans intermédiaire entre les états sain et endommagé– des propriétés mécaniques des fils et de la matrice, cette réduction étant pilotée par un critère en contrainte. Enfin, le calcul de structure est réalisé à l'échelle des plis. La stratégie est uniquement ascendante, et il n'y a pas de retour d'information du global vers le local.

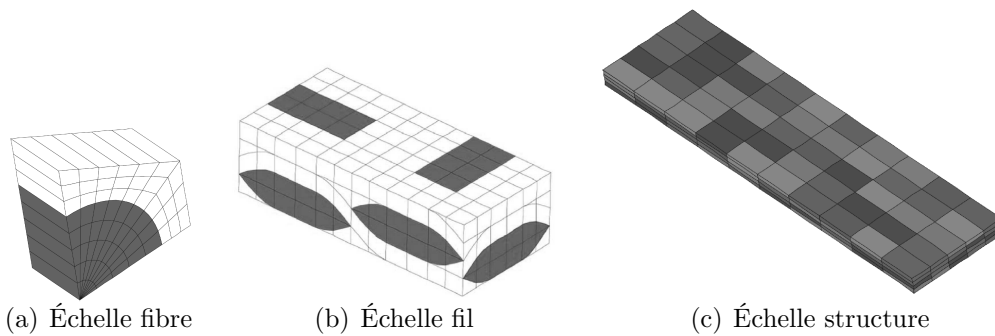


Figure 2.10 – Maillages E.F. aux différentes échelles [Tang *et al.*, 2006]

[Couégnat, 2008] C'est sans doute l'approche la plus aboutie à l'heure actuelle en ce qui concerne le cas spécifique des CMCs. Elle consiste en les étapes suivantes (voir Figure 2.11) :

1. Une première série de calculs est menée sur des cellules micros (à l'échelle des fibres, voir Figure 2.11(a)), qui contiennent suffisamment de fibres pour représenter leur distribution non totalement périodique. La fissuration transverse des fils est introduite de manière discrète. Le comportement homogénéisé est calculé pour un grand nombre de configurations d'endommagement différentes –c'est-à-dire un grand nombre de pas de fissuration transverse–, puis interpolé pour toutes les configurations d'endommagement.
2. Une seconde série de calculs est menée sur des cellules mésos (à l'échelle des fils, voir Figure 2.11(b)). La fissuration transverse des fils est introduite à travers le comportement endommagé des fils calculé à l'étape

précédent, alors que la fissuration longitudinale des fils et la fissuration matricielle sont introduites de manière discrète (voir Figure 2.11(c)). Le comportement homogénéisé est calculé pour un grand nombre de configurations d'endommagement différentes –c'est-à-dire un grand nombre de pas de fissuration transverse, pas de fissuration longitudinale, pas de fissuration matricielle–, puis interpolé pour toutes les configurations d'endommagement.

3. Si les étapes précédentes permettent de calculer la *cinématique* du modèle d'endommagement caractérisant le comportement du matériau à l'échelle de la structure, sa *cinétique* doit être identifiée expérimentalement. Une analyse inverse est donc réalisée à partir d'un essai sur une éprouvette standard en traction.
4. Des calculs sont finalement menés sur des structures CMCs (voir Figure 2.11(d)), qui possèdent le comportement endommageable construit aux étapes précédentes. Il est important de signaler que le lien fort qui existe entre les variables d'endommagement et les différents taux de fissuration permet, à chaque étape du calcul et en tout point de la structure, de calculer l'état d'endommagement réel du matériau. Un autre point important : la stratégie permet de désactiver l'endommagement dans les zones où la structure est en compression.

Et les limites actuelles de l'approche semblent être i) la prise en compte du frottement dans les zones de décohésion fibres- et fils-matrices ; ii) le traitement de la fissuration matricielle dans le cas où elle est entièrement orientée par le chargement ; et iii) les cinétiques d'endommagement, qui ne sont pas calculées sur les cellules micros mais doivent être identifiées sur essais macroscopiques.

2.4 Bilan

Le matériau virtuel dont il est question dans ce travail de thèse se situe résolument dans le cadre des approches multi-échelles (voir Section 2.3).

En effet, si dans l'état actuel des choses l'analyse est principalement menée à l'échelle du tissu, elle se situe dans la continuité des travaux des communautés micro- et macro-mécaniques, et a pour ambition de les rassembler :

1. La connaissance des travaux de la communauté micro-mécanique (voir Sections 2.1.1 et 2.3.1) a d'ores et déjà permis de construire un lien fort entre l'échelle fil et l'échelle fibre dans le traitement de la fissuration transverse des fils (voir Section 4.3), ce qui permettra à terme un couplage fort entre les parties comportement mécanique et durée de vie.
2. La souplesse des modèles macroscopiques développés au laboratoire (voir Section 2.2.3), dont certains ont été analysés dans le cadre de cette thèse (voir Sections 4.2.2.4 et 4.2.2.5), permettra à terme d'y introduire l'ensemble des informations obtenues par l'analyse menée à l'échelle du tissu.

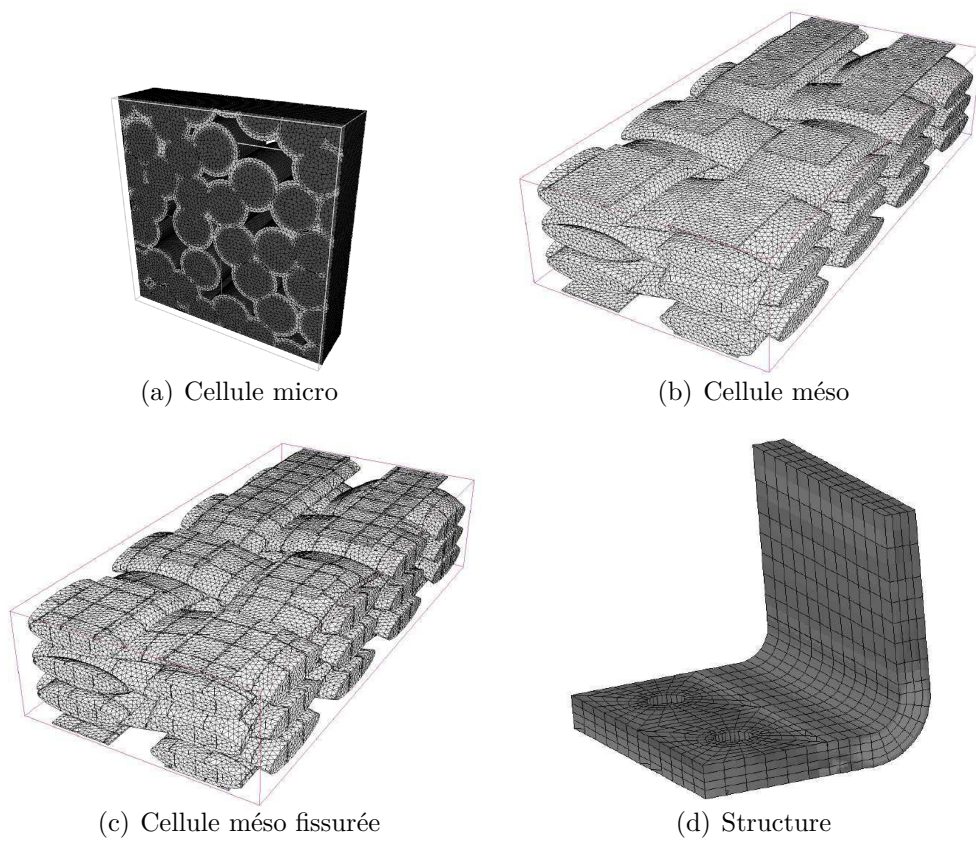


Figure 2.11 – Maillages E.F. aux différentes échelles [Couégnat, 2008]

Chapitre 3

Comportement élastique

3.1 Représentation E.F. de géométries complexes

Le développement d'un modèle multi-échelle de comportement mécanique de composites tissés nécessite d'avoir une représentation de la morphologie du matériau aux échelles fibre et fil. L'obtention de telles représentations dans le cadre éléments finis est un problème de recherche actuel [Lomov *et al.*, 2007; Couégnat, 2008]. En effet, la matrice céramique, déposée par voie gazeuse, ne remplit pas tout l'espace inter-fibre ou inter-fil et possède donc une morphologie extrêmement complexe [Couégnat, 2008]. Plusieurs approches ont été mises en œuvre dans le cadre de cette thèse et sont présentées ici.

3.1.1 Représentation explicite

Renforts Le maillage des renforts –fibres ou fils– ne pose pas de problème majeur : il s'agit de translater des maillages surfaciques représentant leur section le long de leur ligne moyenne. Plusieurs maillages ont été réalisés, d'abord dans le code de calcul CAST3M (voir Figures 3.1(a), 3.1(b), 3.2(a), 3.2(b) et 3.2(c)), puis dans le mailleur GMSH [Geuzaine et Remacle, 2009] (voir Figures 3.3(a), 3.3(b) et 3.3(c)). Il est à noter qu'un espace est introduit entre les renforts pour éviter qu'ils ne se touchent, il n'y a donc ni interface fibre-fibre, ni interface fil-fil.

Matrices CMO De la même manière, le maillage des matrices de type CMO, qui remplissent tout l'espace inter-renfort, ne pose pas de problème majeur : il s'agit de mailler l'intérieur d'un volume défini par ses maillages de surface. Plusieurs maillages ont été réalisés, d'abord dans CAST3M (voir Figures 3.1(a), 3.1(b) et 3.2(d)), puis dans GMSH (voir Figure 3.3(d)). Il est à noter que la densité du maillage est largement pilotée par l'espace inter-renfort introduit précédemment, menant rapidement à des maillages très lourds. Parmi les deux outils de maillage utilisés, c'est GMSH qui a été retenu et qui sera utilisé dans la suite de ce document, car il offre plus de souplesse dans la défi-

inition des maillages, et surtout de bien meilleures performances, en terme de temps de génération et de qualité des maillages.

Matrices CMC Par contre, le cas des matrices de type CMC, qui recouvrent les fils sur une certaine épaisseur mais laissent de larges vides dans le composite, représente une difficulté technique majeure : le volume de matrice est extrêmement complexe, et il est nécessaire de travailler sur des intersections de maillage [Couégnat, 2008]. Des approches alternatives ont été développées dans le cadre de cette thèse et sont présentées dans les sections suivantes.

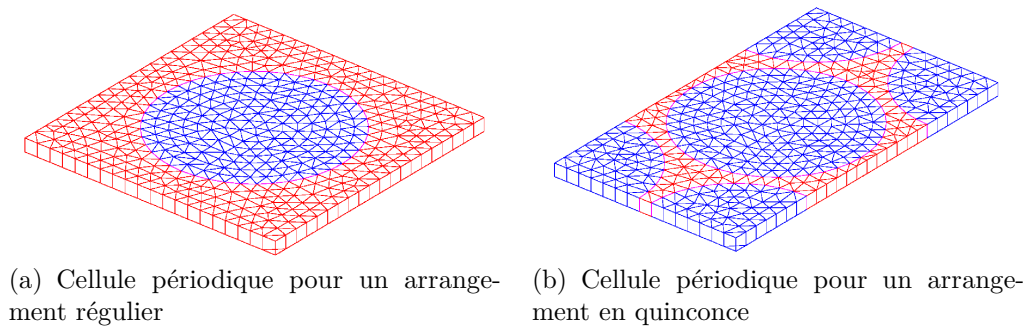


Figure 3.1 – Composants des cellules explicites à l'échelle fibre réalisées dans CAST3M

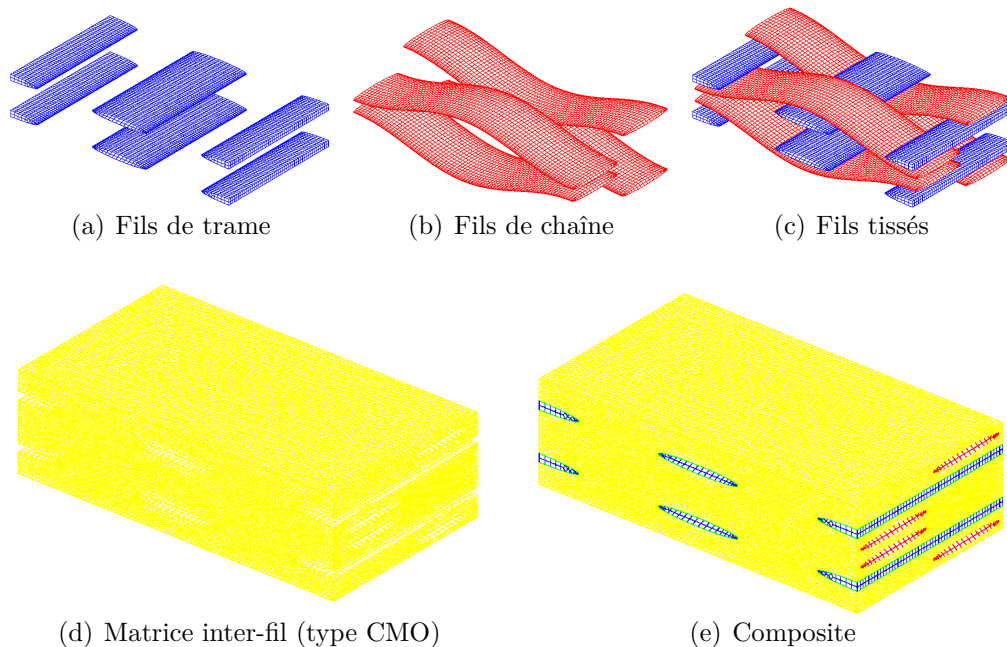


Figure 3.2 – Composants des cellules explicites à l'échelle fil réalisées dans CAST3M

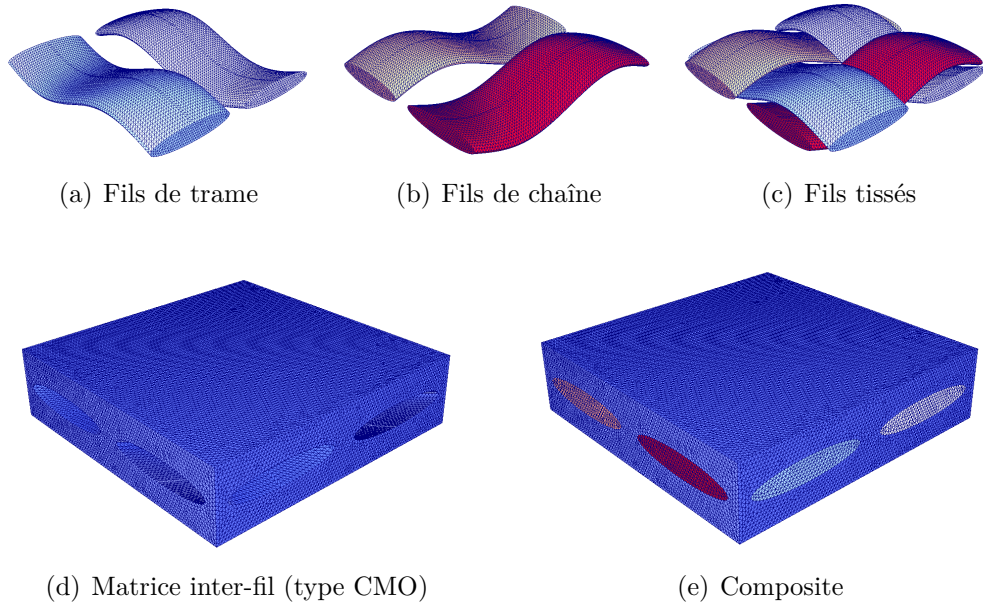


Figure 3.3 – Composants des cellules explicites à l'échelle fil réalisées dans GMSH

3.1.2 Représentation implicite

3.1.2.1 Maillages réguliers

Méthode On considère ici des maillages réguliers, donc *a priori* non conformes aux géométries à traiter. Sur ces maillages sont définies des fonctions de niveau *level sets*, indicatrices des différents constituants de la cellule : positives à l'intérieur, négatives à l'extérieur [Möes *et al.*, 2003]. Et les outils mis à disposition au sein de la plateforme LMT++ [Leclerc, 2007, 2008] permettent l'intégration sélective –chaque point d'intégration a un comportement propre en fonction de sa position par rapport aux différentes fonctions de niveau– des matrices éléments finis. Une source d'erreur géométrique est donc introduite –l'interface est régularisée au sein des éléments qu'elle traverse–, en contrepartie de quoi la méthode permet de traiter très simplement des géométries très complexes.

Fonctions de niveau Chaque élément de renfort –fibre, fil– possède en fait deux *level sets* : une première, notée ϕ_i^r , qui lui est propre, une seconde, notée ϕ_i^m , pour la gaine de matrice qui l'entoure (voir exemple à l'échelle fibre Figure 3.4). Et à partir de l'ensemble de ces *level sets*, on construit deux *level sets* globales, notées $\phi^{r/m}$: la première qui repère l'interface renforts-matrice, la seconde l'interface matrice-pores. On a (voir exemple à l'échelle fibre Figures 3.5 et 3.6) :

$$\phi^{r/m} = \sup_{\{i\}} \{ \phi_i^{r/m} \} \quad (3.1)$$

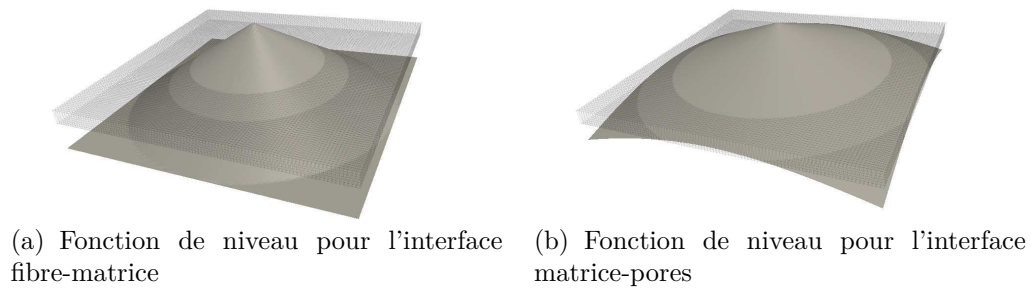


Figure 3.4 – Cas d'une fibre : fonctions de niveau associée à la fibre

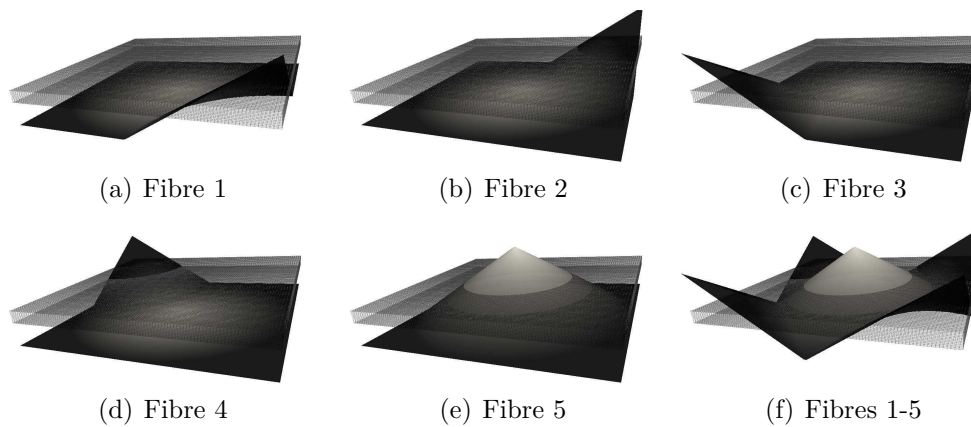


Figure 3.5 – Cas de fibres en quinconce : fonction de niveau associée à chaque fibre, et fonction de niveau globale (interface fibres-matrice)

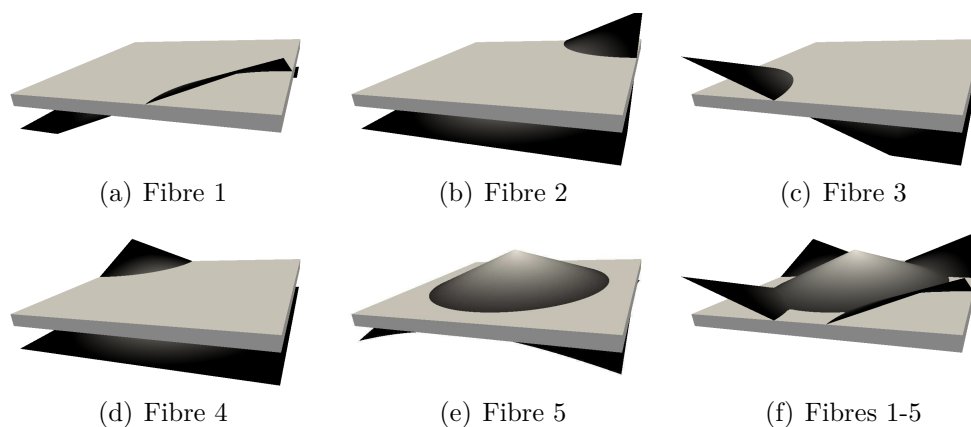


Figure 3.6 – Cas de fibres en quinconce : fonction de niveau associée à chaque fibre, et fonction de niveau globale (interface matrice-pores)

Formulation La prise en compte des fonctions de niveau dans le comportement de la cellule E.F. se fait de manière complètement naturelle dans la plateforme LMT++, puisque l'écriture du comportement est analytique (voir Code 3.1).

```
def formulation():
    epsilon = grad_sym_col(dep.expr)
    epstest = grad_sym_col(dep.test)

    fibre_in = heavyside(fibre_level_set.expr)

    matrice_in = heavyside(matrice_level_set.expr) -
                fibre_in

    vide_in = 1 - heavyside(matrice_level_set.expr)

    elastic_modulus = fibre_elastic_modulus.expr *
                    fibre_in + matrice_elastic_modulus.expr *
                    matrice_in + vide_elastic_modulus.expr * vide_in
    poisson_ratio = fibre_poisson_ratio.expr * fibre_in
                    + matrice_poisson_ratio.expr * matrice_in +
                    vide_poisson_ratio.expr * vide_in

    stiffness = hooke_isotrope(elastic_modulus,
                               poisson_ratio)

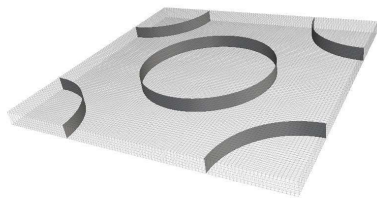
    return trace_sym_col(multiply(stiffness, epsilon),
                        epstest) * dV
```

Code 3.1 – Formulation d'un élément avec intégration sélective au sein de la plateforme LMT++, cas d'une cellule fibre-matrice-pores

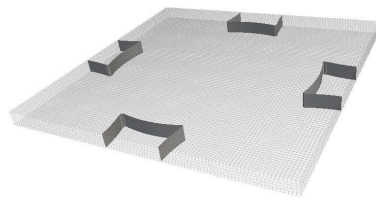
Illustration Plusieurs illustrations des larges possibilités de la méthode sont données Figures 3.7, 3.8 et 3.9. Il est à noter qu'il serait envisageable d'intégrer directement des fonctions de niveau issues d'images réelles.

3.1.2.2 Maillages raffinés

Méthode Plutôt que de raffiner le maillage de façon homogène dans la cellule, on propose ici de le raffiner uniquement autour des interfaces, en prenant en compte les informations données par les fonctions de niveau. Ainsi, lorsqu'un élément du maillage est traversé par l'iso-zéro d'une fonction de niveau, il est découpé le long de cet iso-zéro (voir Figure 3.10). Il est à noter qu'une taille minimale est introduite pour les nouveaux éléments ainsi créés, de sorte à éviter les problèmes de conditionnement (voir Figure 3.10).

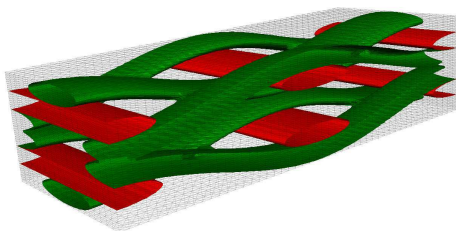


(a) Interface fibres-matrice

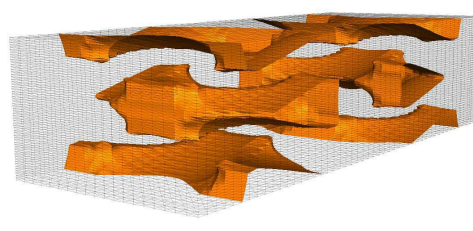


(b) Interface matrice-pores (couche de matrice de $3\mu m$ autour des fibres)

Figure 3.7 – Cellule à l'échelle fibre : iso-zéro des fonctions de niveau globales

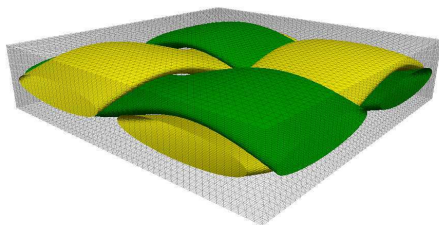


(a) Interface fils-matrice

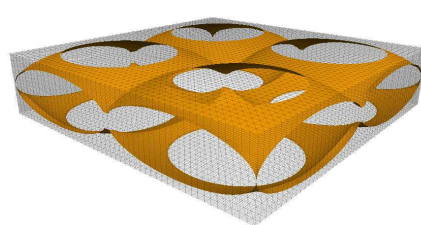


(b) Volume de porosités pour une couche de matrice de $100\mu m$ autour des fils

Figure 3.8 – Première cellule à l'échelle fil : iso-zéro des fonctions de niveau globales



(a) Interface fils-matrice



(b) Interface matrice-pores (couche de matrice de $100\mu m$ autour des fils)

Figure 3.9 – Seconde cellule à l'échelle fil : iso-zéro des fonctions de niveau globales

Illustration Les Figures 3.11 pour l'échelle fibre et 3.12 pour l'échelle fil illustrent les différentes étapes de maillages et de raffinement.

3.1.2.3 Maillages hybrides

Certaines analyses nécessitent de représenter de manière explicite les interfaces renforts-matrice, par exemple pour leur assigner un comportement matériaux spécifique –*e.g.* décohésion, frottements, etc–. Quant à elle, l'interface matrice-pores, qui pose problème du point de vue de la représentation, a un rôle mécanique moins important. Ainsi, il est envisageable d'utiliser les maillages de la Section 3.1.1 (voir Figures 3.2 et 3.3), où les interfaces fils-matrice sont représentées explicitement, mais où l'espace inter-fil est entièrement maillé, avec la méthode décrite précédemment pour traiter implicitement l'interface matrice-pores.

3.1.2.4 Analyse de convergence

Cas d'une cellule fibre-matrice On considère d'abord une cellule à l'échelle fibre. La cellule contient une unique fibre en son centre, et de la matrice tout autour (voir Figure 3.1(a)). Le rapport de rigidité entre la fibre et la matrice est de 10. La cellule est homogénéisée par la méthode de l'homogénéisation périodique [Sanchez-Palencia, 1980]. La Figure 3.13 compare les erreurs sur les modules –de Young, de Poisson, de cisaillement– homogénéisés calculés, en fonction de la densité du maillage, pour différents maillage. L'erreur est définie par rapport à la solution obtenue avec un maillage explicite extrêmement fin (≈ 300000 ddls).

Cas d'une cellule fils-matrice On considère maintenant une cellule à l'échelle fil. La cellule contient des fils tissés, et de la matrice tout autour (voir Figures 3.3 et 3.9). Le rapport de rigidité entre les fils et la matrice est de 10. La Figure 3.14 compare les erreurs sur les modules –de Young, de Poisson, de cisaillement– homogénéisés calculés, en fonction de la densité du maillage, pour différents maillages. L'erreur est définie par rapport à la solution obtenue avec le maillage explicite le plus fin.

3.1.2.5 Discussion

En plus d'être extrêmement facile à mettre en œuvre, la méthode purement implicite se montre largement satisfaisante du point de vue de l'homogénéisation. Cependant, elle est limitée pour la modélisation des différents mécanismes de dégradation. En effet, les sauts de déplacement et comportements complexes (frottements, etc) associés aux différentes fissures (des constituants, des interfaces entre constituants) ne peuvent être traités directement. Des travaux sont en cours au LMT-Cachan, dans le cadre de la thèse de B. Tranquart, pour implémenter dans la plateforme de calcul du laboratoire des outils qui permettent de prendre en compte de telles discontinuités (de déplacement, de défor-

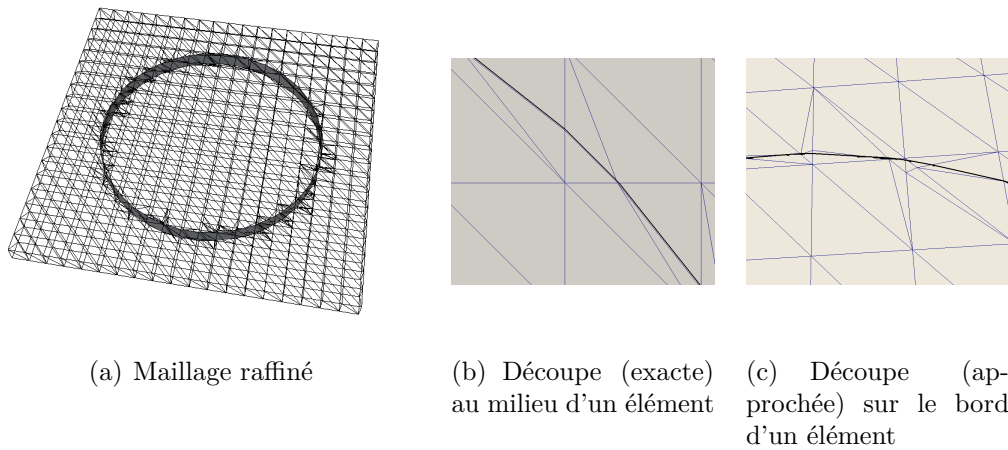


Figure 3.10 – Raffinement d'une cellule à l'iso-zéro d'une fonction de niveau

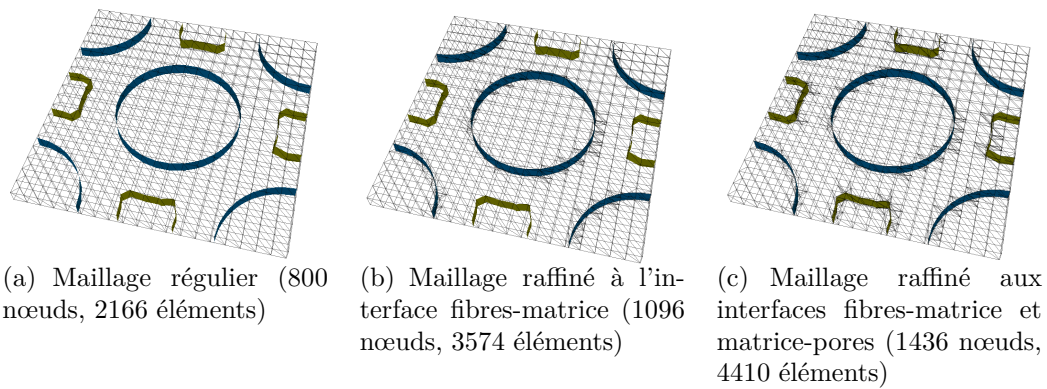


Figure 3.11 – Cellules à l'échelle fibre : iso-zéro des fonctions de niveau globales pour des maillages à différents niveaux de raffinement

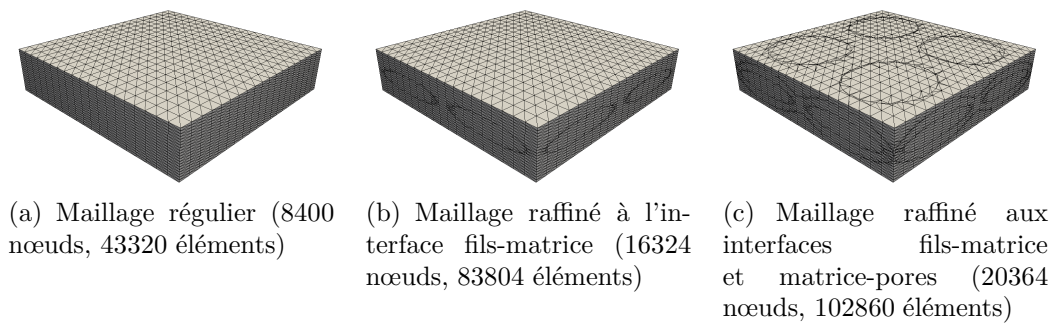


Figure 3.12 – Cellules à l'échelle fil : maillages à différents niveaux de raffinement

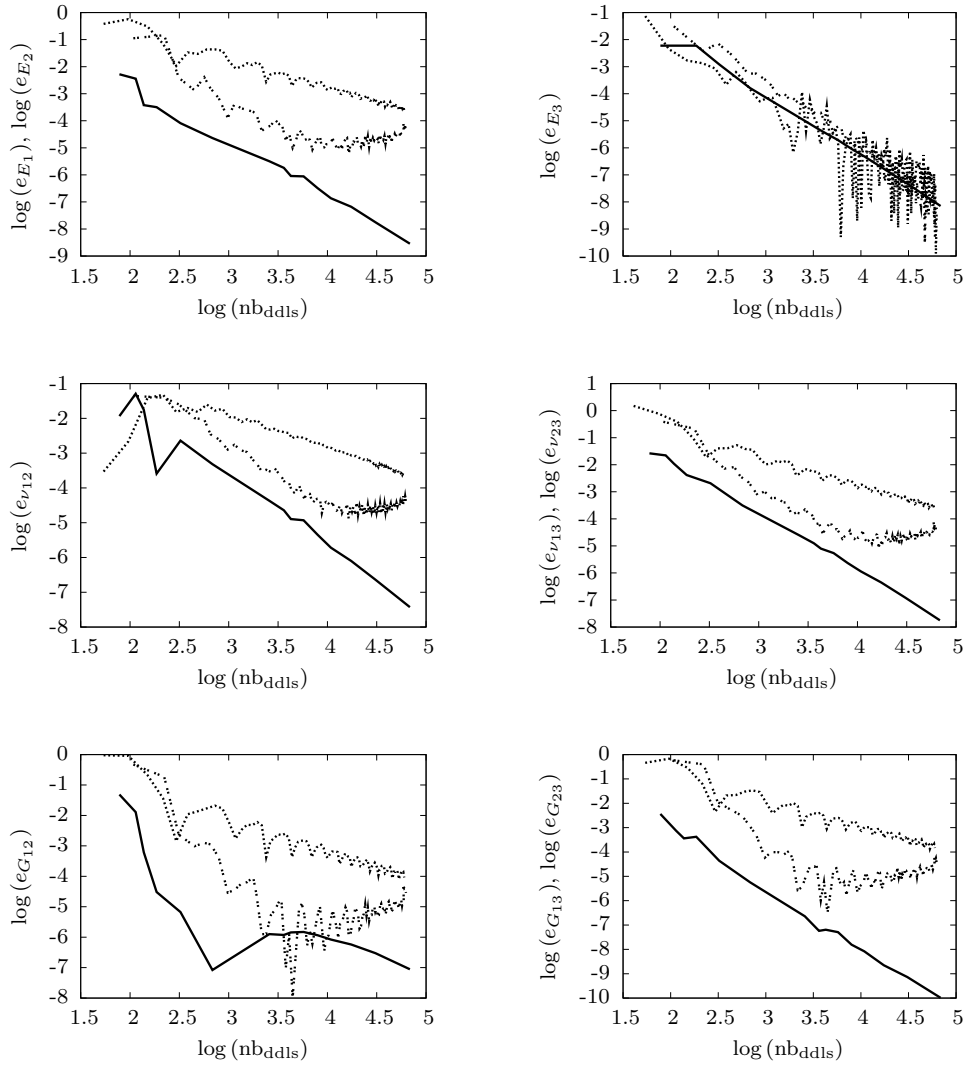


Figure 3.13 – Erreur sur les modules homogénéisés calculés, en fonction du nombre de degrés de liberté dans la cellule fibre-matrice, pour différents maillages (— : explicite; \cdots : régulier; $---$: raffiné)

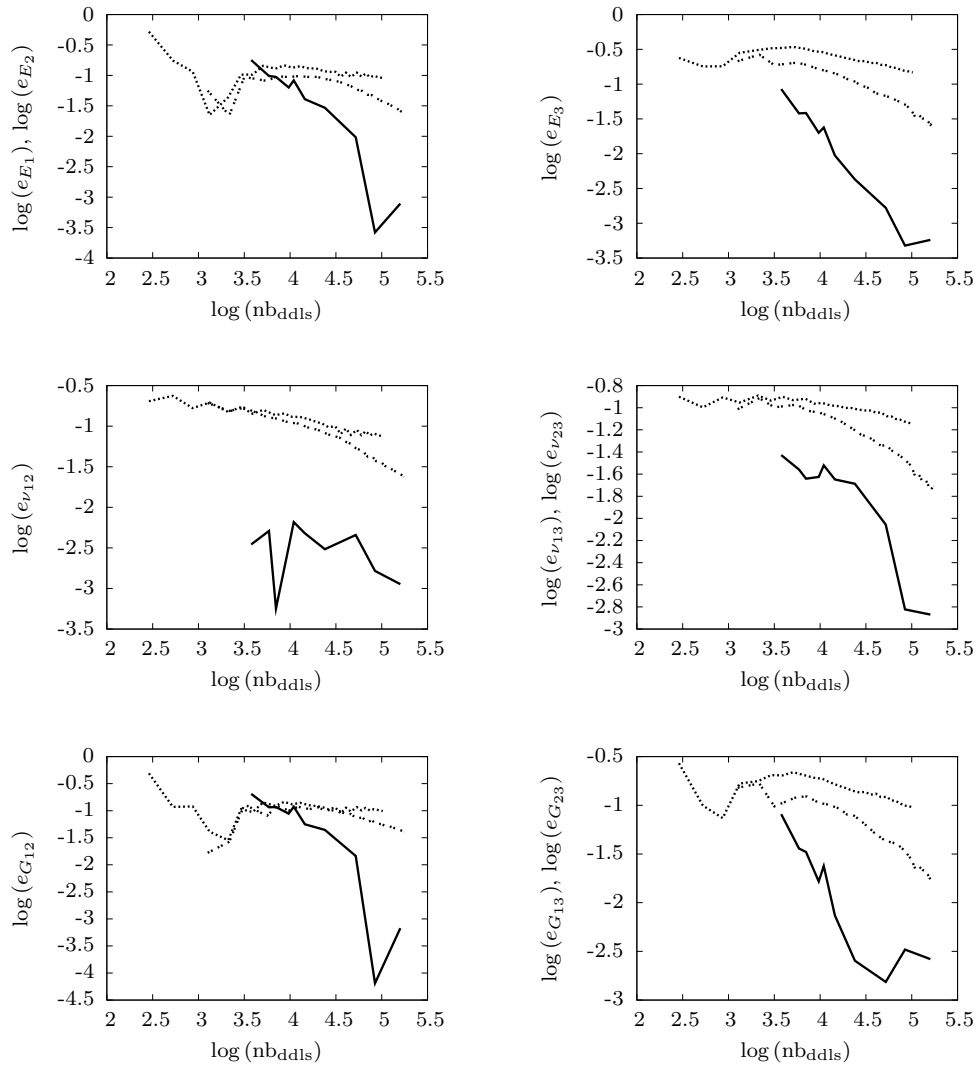


Figure 3.14 – Erreur sur les modules homogénéisés calculés, en fonction du nombre de degrés de liberté dans la cellule fils-matrice, pour différents maillages (— : explicite; \cdots : régulier; $---$: raffiné)

mation). Cependant, ce n'était pas envisageable dans l'état de développement de la plateforme au début de la thèse présentée ici.

Dans le cas des maillages raffinés, les interfaces sont définies de manière quasiment exacte. La convergence au niveau du comportement homogénéisé est largement améliorée.

3.2 Comportement élastique aux échelles fibre et fil

On présente ici quelques exemples d'analyse de l'influence de paramètres de la microstructure sur les grandeurs homogénéisées, effectuées sur des maillages réguliers avec intégration sélective.

Cas d'une cellule fibres-matrice-pores On considère d'abord une cellule à l'échelle fibre. La cellule contient deux fibres : la première en son centre, la seconde répartie à ses quatre coins (voir Figure 3.1(b)). Les propriétés géométriques et matériaux utilisées pour les fibres et la matrice sont données Tableau 3.1. La Figure 3.15 montre l'influence du taux de matrice dans la cellule sur ses propriétés homogénéisées.

d_f (μm)	V_f (%)	E_f (GPa)	ν_f ()	E_m (GPa)	ν_m ()
14	40	200	0.3	400	0.3

Tableau 3.1 – Propriétés des composants de la cellule de fibres

Cas d'une cellule fils-matrice-pores On considère maintenant une cellule à l'échelle fil. La cellule contient quatre fils (voir Figures 3.3 et 3.9). Les propriétés géométriques et matériaux utilisées pour les fils et la matrice sont données Tableaux 3.2 et 3.3. La Figure 3.15 montre l'influence du taux de matrice dans la cellule sur ses propriétés homogénéisées.

$V_{\text{fibres/fil}}$ (%)	$V_{\text{matrice/fil}}$ (%)	$V_{\text{vide/fil}}$ (%)	d_{fil}^1 (mm)	d_{fil}^2 (mm)
40	45	15	1	0.2
$V_{\text{fils/composite}}$ (%)		$V_{\text{fibres/composite}}$ (%)		
45		20		

Tableau 3.2 – Propriétés géométriques des composants de la cellule de fils

E_{fil}^n (GPa)	E_{fil}^t (GPa)	ν_{fil}^{nt} ()	ν_{fil}^{tt} ()	G_{fil}^{nt} (GPa)	G_{fil}^{tt} (GPa)
260	215	0.25	0.23	85	70
E_m (GPa)		ν_m ()			
400		0.3			

Tableau 3.3 – Propriétés matériaux des composants de la cellule de fils

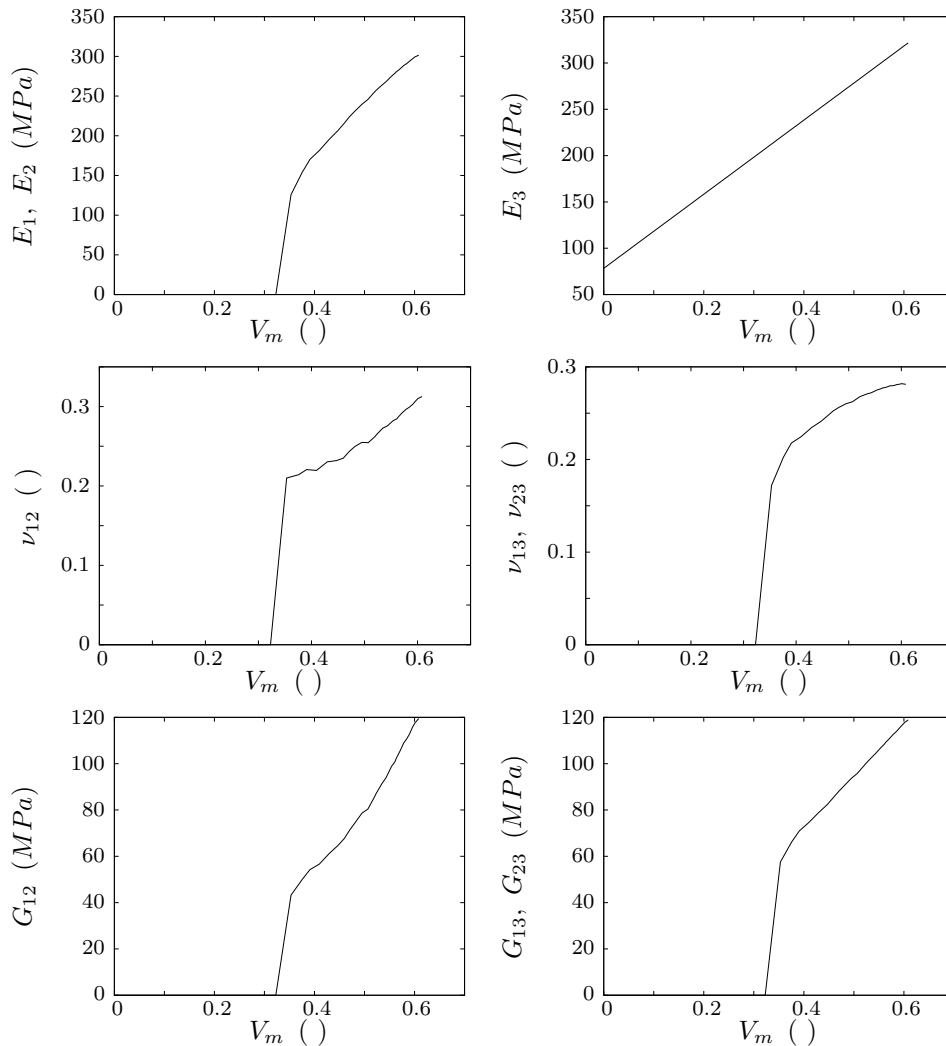


Figure 3.15 – Évolution des coefficients élastiques calculés du fil en fonction du taux de matrice dans le fil (direction des fibres : 3)

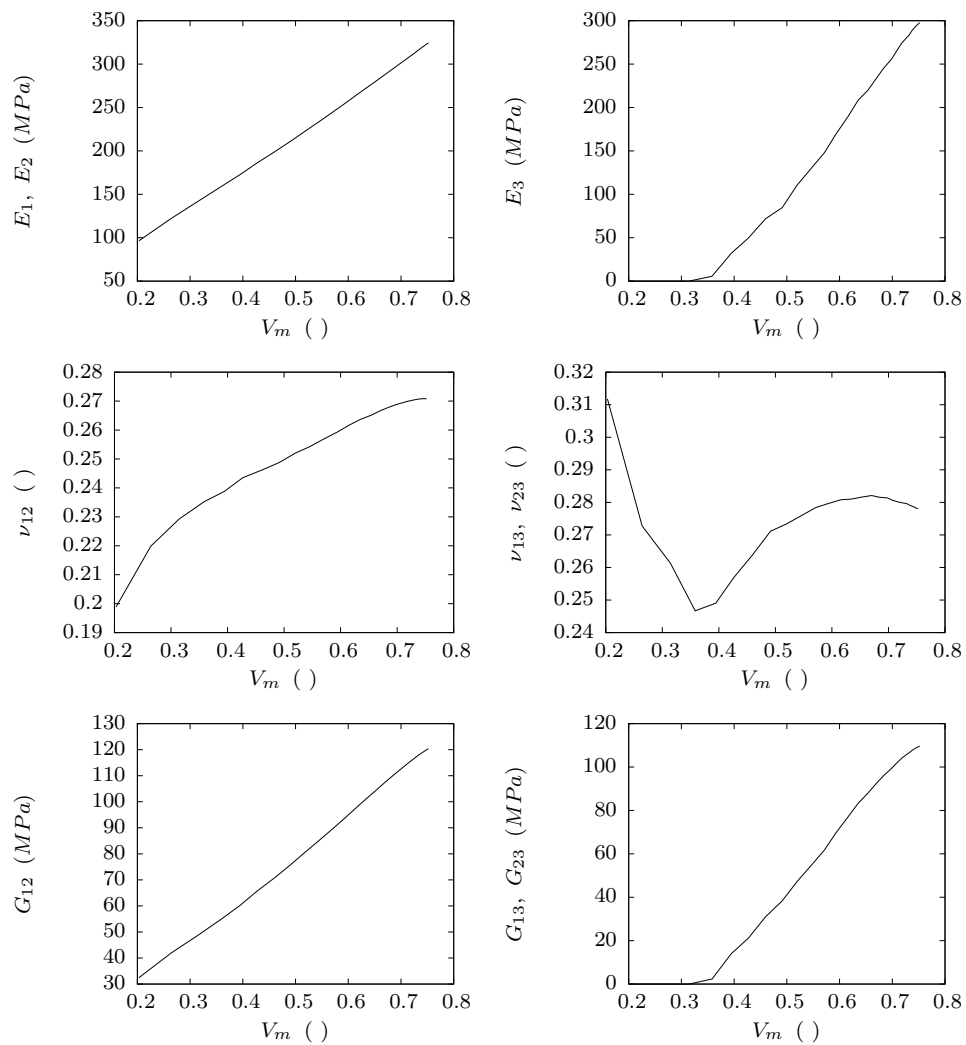


Figure 3.16 – Évolution des coefficients élastiques calculés du composite en fonction du taux de matrice dans le composite (direction des fils : 1 et 2)

Chapitre 4

Comportement endommagé

4.1 Simulation E.F. de modèles de comportement non linéaires

La simulation des différents modèles d'endommagement utilisés aux échelles fil (voir Sections 4.2 et 4.3) et structure (voir Section 4.4) a nécessité un certain nombre de développements numériques au sein de la plateforme logiciel du laboratoire, LMT++ [Leclerc, 2007, 2008], qui sont présentés ici.

La stratégie de calcul employée se situe dans le cadre de Newton-Raphson, qui offre une très nette séparation entre i) la résolution de l'équilibre global de la structure E.F. avec les conditions limites; et ii) celle de l'équilibre local du matériau –la loi de comportement–.

On présente d'abord les possibilités et limites offertes par la plateforme LMT++, puis, pour chacune des deux grandes parties de la stratégie, les algorithmes de résolution choisis avec leurs spécificités et quelques aspects relatifs à leur implémentation.

4.1.1 Plateforme LMT++ : possibilités et limites

La plateforme logicielle du laboratoire possède en interne un certain nombre d'outils qui permettent le calcul de problèmes E.F. non linéaires dans le cadre de Newton-Raphson [Leclerc, 2007, 2008]. Cependant, deux contraintes majeures sont imposées pour leur utilisation, qui peuvent être formulées ainsi :

1. "À variables internes fixées, la densité d'énergie, dont dérive la loi de comportement, peut être exprimée de manière exacte comme une fonction analytique simple –dérivable deux fois analytiquement– de la déformation."
2. "En tout point, les variables internes et la contrainte peuvent être exprimées de manière exacte comme des fonctions analytiques simples –ne faisant intervenir que des opérations analytiques standards– de la déformation."

Or ces contraintes ne sont pas compatibles avec les modèles écrits dans le cadre de la théorie de l'endommagement anisotrope : par exemple pour la

seconde version de la théorie (voir Section 2.2.3.5), qui nous concerne dans cette thèse (voir Sections 4.2.2.4, 4.2.2.5 et 4.4), la loi de comportement et donc l'énergie font intervenir des diagonalisations de matrices de taille 6, et ne sont donc pas exprimables analytiquement.

C'est la raison pour laquelle il a été nécessaire de développer, au sein de la plateforme, un outil de calcul qui prenne en compte les spécificités du modèle, tout en réutilisant au maximum les outils de la stratégie interne à la plateforme. Ces développements ont d'abord été effectués directement dans la plateforme, et validés sur des cas tests simples (en terme de géométrie et de chargement). Leurs spécificités ont ensuite été portées dans le logiciel Coffee/LMT++ développé par F. Bordeu au sein de la plateforme pour le calcul –non local, en décomposition de domaine– des composites stratifiés [Bordeu *et al.*, 2008, 2009], et qui offre de larges possibilités en terme d'importation de maillages, de sélection des différents comportements matériaux, de définitions des conditions limites et du chargement dans le temps et l'espace, etc.

4.1.2 Équilibre global de structures E.F. non linéaires

Algorithme L'algorithme mis en place pour la résolution de l'équilibre global de la structure E.F. est un algorithme standard de type Newton-Raphson. Il est décrit Algorithme 4.1 et Figure 4.1. De plus :

1. L'algorithme offre la possibilité de ne pas recalculer et refactoriser la direction de montée à chaque itération. En effet, il est parfois plus efficace de ne le faire qu'au début de chaque pas de chargement, ou même qu'au début du calcul, et d'utiliser la même direction de montée tout au long des itérations.
2. Pour éviter les cas de stagnation, une méthode de relaxation a été implémentée.
3. Pour améliorer la convergence des calculs, deux méthodes de type quasi-Newton ont également été implémentées : SR1 (Symmetric Rank 1), et BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) [Matthies et Strang, 1979].

On en détaille maintenant quelques étapes.

Vecteurs et matrices élémentaires E.F. La matrice \mathbb{K} ainsi que le vecteur \mathbb{F}^d , sont calculés grâce aux outils standards de la plateforme. Ils sont construits en assemblant leurs contributions élémentaires, qui sont calculées à partir d'une fonction analytique codée en Python, qui est une expression variationnelle du problème de mécanique posé sur un élément quelconque (voir Code 4.1). On définit ainsi la fonction suivante :

$$f(\underline{u}, \underline{u}^*) = a(\underline{u}, \underline{u}^*) - l(\underline{u}^*) \quad (4.1)$$

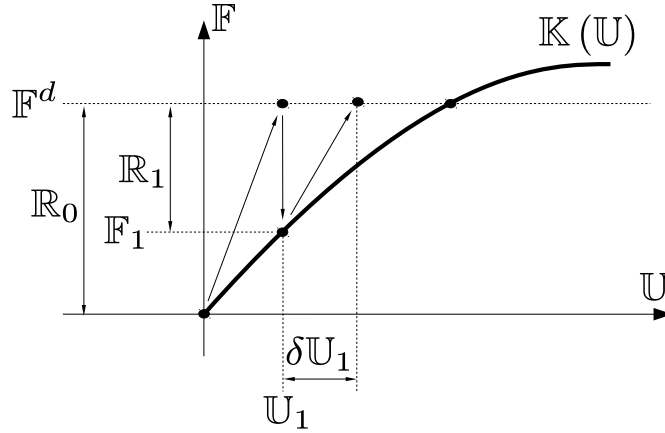


Figure 4.1 – Schématisation de l'Algorithme 4.1

```

pour chaque pas de chargement (indiqué k) faire
    Déplacements imposés :  $\mathbb{K}_k^d, \mathbb{U}_k^d$ 
    Efforts imposés :  $\mathbb{F}_k^d$ 
    Initialisation :  $\mathbb{U}_{k,0} = \mathbb{U}_{k-1}, \mathbb{F}_{k,0} = \mathbb{F}_{k-1}$ 
    pour chaque itération globale (indiquée i) faire
        Résidu :  $\mathbb{R}_{k,i} = \mathbb{F}_k^d - \mathbb{F}_{k,i}, \tilde{\mathbb{R}}_{k,i} = \mathbb{R}_{k,i} + \mathbb{K}_k^d \cdot (\mathbb{U}_k^d - \mathbb{U}_{k,i})$ 
        Direction de montée :  $\mathbb{K}_{k,i}, \tilde{\mathbb{K}}_{k,i} = \mathbb{K}_{k,i} + \mathbb{K}_k^d$ 
        Déplacements nodaux :  $\delta \mathbb{U}_{k,i} = \tilde{\mathbb{K}}_{k,i}^{-1} \cdot \tilde{\mathbb{R}}_{k,i}, \mathbb{U}_{k,i+1} = \mathbb{U}_{k,i} + \delta \mathbb{U}_{k,i}$ 
        si  $i > 0$  et  $\frac{\|\delta \mathbb{U}_{k,i-1}\|}{\|\mathbb{U}_{k,i} - \mathbb{U}_{k-1}\|} < \epsilon$  alors
            | Sortie :  $\mathbb{U}_k = \mathbb{U}_{k,i}, \mathbb{F}_k = \mathbb{F}_{k,i}$ 
        fin
        Boucle locale
        Efforts nodaux :  $\mathbb{F}_{k,i+1}$ 
    fin
fin
    
```

Algorithme 4.1 : Algorithme de résolution non linéaire de type Newton-Raphson, où \mathbb{K}^d est la matrice de pénalisation pour les conditions limites en déplacement, \mathbb{K} la direction de montée, $\tilde{\mathbb{K}}$ la direction de montée pénalisée par les conditions limites en déplacement, \mathbb{U}^d le vecteur des déplacements imposés, \mathbb{U} le vecteur des déplacements nodaux, $\delta \mathbb{U}$ l'incrément de déplacements nodaux, \mathbb{F}^d le vecteur des efforts imposés, \mathbb{F} le vecteur des efforts nodaux, \mathbb{R} le résidu, $\tilde{\mathbb{R}}$ le résidu pénalisé, et ϵ la tolérance (en pratique : $\epsilon = 10^{-3}$)

À partir de laquelle sont générés les vecteurs et matrices élémentaires suivants :

$$\mathbb{K}_{ij}^{el} = \frac{\partial a}{\partial \mathbb{U}_i \partial \mathbb{U}_j^*} \quad (4.2)$$

$$\mathbb{F}_j^{el} = \frac{\partial l}{\partial \mathbb{U}_j^*} \quad (4.3)$$

Déplacements imposés De même, \mathbb{K}^d et \mathbb{U}^d sont calculés grâce aux outils standards de la plateforme : ils sont construits en assemblant les contributions élémentaires de relations entre les degrés de libertés, qui sont exprimées analytiquement dans le code C++ (voir Code 4.2).

Efforts nodaux et Résidu Par contre, le calcul de résidu classique de la plateforme :

$$\mathbb{R} = -\frac{\partial f}{\partial \mathbb{U}^*} = \mathbb{F}^d - \mathbb{K}\mathbb{U} \quad (4.4)$$

N'est pas adapté à notre cas où la densité d'énergie n'est pas connue de manière exacte (voir Section 4.1.1).

On propose donc de calculer les forces nodales directement à partir des contraintes, en utilisant le fait que :

$$\mathbb{F} = \int_V \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}) \mathbb{B}(\underline{x}) dV \quad (4.5)$$

Où \mathbb{B} est la matrice E.F. qui contient les gradients des fonctions de forme ($\hat{\underline{\underline{\epsilon}}} = \mathbb{B}\mathbb{U}$). Le vecteur des forces nodales est donc construit en assemblant ses contributions élémentaires :

$$\mathbb{F}^{el} = \frac{\partial \int_{\Omega^{el}} \underline{\underline{\sigma}} : \hat{\underline{\underline{\epsilon}}}(\mathbb{U}^{el*})}{\partial \mathbb{U}^{el*}} \quad (4.6)$$

Qui sont calculées à partir d'une fonction analytique codée en Python (voir Code 4.3).

4.1.3 Lois de comportement non linéaires

Dans l'Algorithme 4.1, seules la boucle locale et la rigidité locale (la fonction `get_H`, voir Code 4.1) doivent être spécialisées pour chaque loi de comportement. On discute ici des différentes lois de comportement utilisées dans cette thèse.

4.1.3.1 Le modèle d'endommagement isotrope

Boucle locale Pour le modèle utilisé Section 4.2.2.6, la boucle locale est des plus simples, puisqu'elle est explicite. L'algorithme correspondant est présenté Algorithme 4.2. Les calculs de la déformation et de la contrainte en chaque point d'intégration sont faits de manière très naturelle en utilisant les outils analytiques de la plateforme (voir Codes 4.4 et 4.5). L'algorithme de la fonction `delay` est présenté Algorithme 4.3.

```
def formulation():
    epsilon = grad_sym_col(dep.expr)
    epstest = grad_sym_col(dep.test)

    sigma = mul(get_H(), epsilon)

    ed = trace_sym_col(sigma, epstest)

    wf_vol = dot(fd_vol.expr, dep.test)
    wf_sur = dot(fd_sur.expr, dep.test)
    wf_nod = dot(fd_nod.expr, dep.test)

    return ed * dV - wf_vol * dV - wf_sur * dS - wf_nod
        * dN
```

Code 4.1 – Formulation du comportement matériau pour la génération des vecteurs et matrices élémentaires E.F. (seule la fonction `get_H` varie d'un modèle à l'autre, voir Section 4.1.3)

```
formulation.add_constraint("node[k_node].dep[k_dim]=0",
    coef_penalisation);
```

Code 4.2 – Formulation des conditions limites en déplacement pour la génération des matrices et vecteurs de pénalisation

```
def get_nodal_forces():
    f = element.integration(trace_sym_col(sigma.expr,
        grad_sym_col(dep.test)))

    for k_node in range(element.nb_nodes):
        for k_dim in range(nb_dim):
            k_ddl = element.get_indice(k_node) + k_dim
            F[k_ddl] += f.diff(dep.test[k_node][k_dim])

    return F
```

Code 4.3 – Calcul des efforts nodaux élémentaires à partir du champs de contrainte

```

pour chaque élément faire
  Déformation sur chaque point d'intégration :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}$ 
  pour chaque point d'intégration faire
    Endommagement :  $d_{k,i} = \sup \left( d_{k-1}, \left\langle \frac{\|\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}\| + \|\cdot\|^{-\epsilon_0}}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 \right)$ 
    si  $\tau_c > 0$  alors
      |  $\delta d_{k,i} = \text{delay}(d_{k,i} - d_{k-1}, \delta t_k, \tau_c)$ 
    sinon
      |  $\delta d_{k,i} = d_{k,i} - d_{k-1}$ 
    fin
     $d_{k,i} = d_{k-1} + \delta d_{k,i}$ 
  fin
  Contrainte sur chaque point d'intégration :  $\hat{\underline{\sigma}}_{k,i}$ 
fin
Sortie :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}, \delta d_{k,i}, \hat{\underline{\sigma}}_{k,i}$ 

```

Algorithme 4.2 : Algorithme pour la loi comportement ($\tau_c = 0$ représente le cas sans effet retard)

```

Entrée :  $\delta d^{\text{static}}, \delta t, \tau_c$ 
Initialisation :  $\delta d_0^{\text{delay}} = \delta d^{\text{static}}$ 
pour chaque itération (indicée j) faire
  Résidu :  $r_j = \delta d_j^{\text{delay}} - \frac{\delta t}{\tau_c} \left( 1 - \exp^{-(\delta d^{\text{static}} - \delta d_j^{\text{delay}})} \right)$ 
  si  $r_j < \epsilon$  alors
    | Sortie :  $\delta d_j^{\text{delay}}$ 
  fin
  Direction de descente :  $d_j = 1 + \frac{\delta t}{\tau_c} \exp^{-(\delta d^{\text{static}} - \delta d_j^{\text{delay}})}$ 
  Descente :  $\delta \delta d_j^{\text{delay}} = \frac{r_j}{d_j}, \delta d_{j+1}^{\text{delay}} = \delta d_j^{\text{delay}} - \delta \delta d_j^{\text{delay}}$ 
fin

```

Algorithme 4.3 : Algorithme pour l'effet retard, où ϵ est la tolérance (en pratique : $\epsilon = 10^{-3}$)

```
def set_epsilon():
    epsilon = grad_sym_col(dep.expr)

    cw = Write_code('T') # contient les informations
        pour la generation de code C++

    for gauss_point in e.gauss_points: # on boucle sur
        les points de Gauss de l'element
        cw.add(epsilon.subs(gauss_point.pos), 'elem.
            epsilon[gauss_point.num]')

    return cw
```

Code 4.4 – Calcul de la déformation sur chaque point d'intégration

```
def set_sigma():
    H = hooke_isotrope(E0 * (1 - d), Nu0)

    sigma = mul(H, epsilon)

    cw = Write_code('T') # contient les informations
        pour la generation de code C++

    for gauss_point in e.gauss_points: # on boucle sur
        les points de Gauss de l'element
        cw.add(sigma.subs(gauss_point.pos), 'elem.sigma [
            gauss_point.num]')

    return cw
```

Code 4.5 – Calcul de la contrainte sur chaque point d'intégration

Direction de montée Si, dans la boucle locale, l'endommagement peut valoir exactement un (on peut ainsi avoir des contraintes exactement nulles), ce n'est pas possible dans la rigidité locale qui définit la direction de montée (sans quoi elle est singulière). Il faut donc limiter la valeur de l'endommagement dans la définition de la rigidité locale. En termes d'implémentation, cela correspond à la définition de la fonction `get_H` (voir Code 4.1), présentée Code 4.6.

```
def get_H() :
    return hooke_isotrope(E0 * (1 - mini(d, dmax)), Nu0)
```

Code 4.6 – Rigidité locale (en pratique, $d_{\max} = 0.9$)

4.1.3.2 Le modèle d'endommagement anisotrope écrit en déformation et piloté en déformation

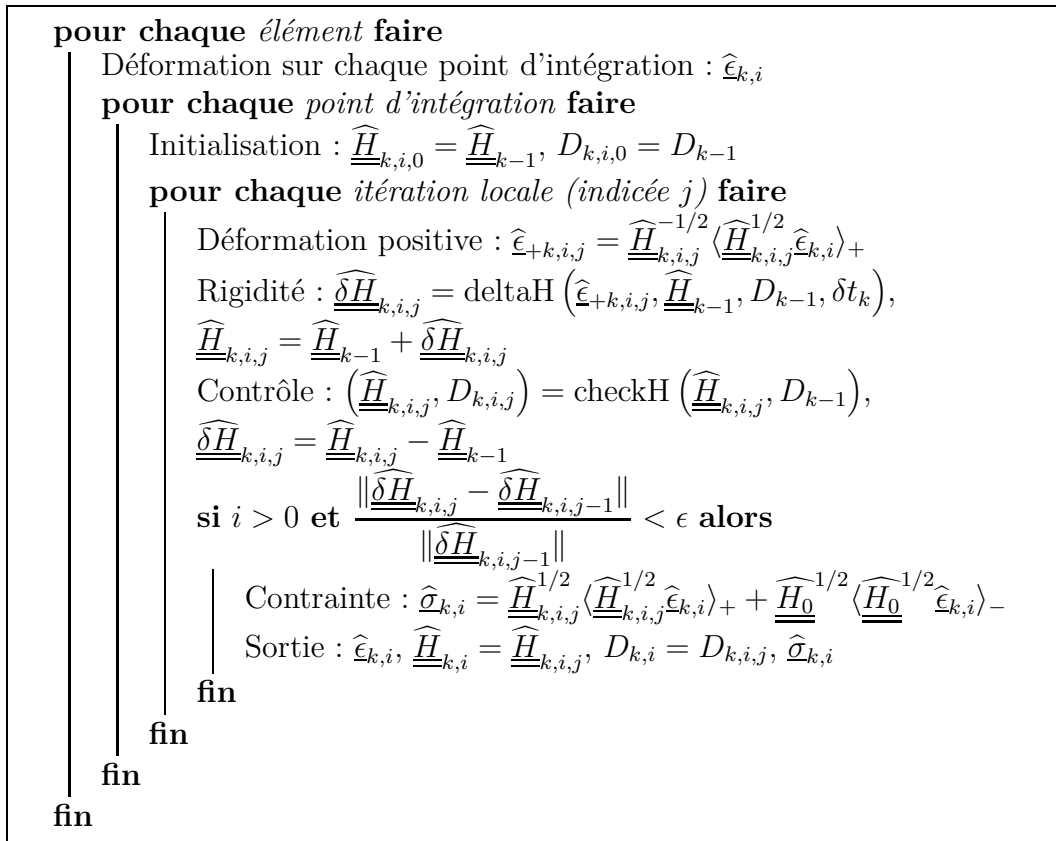
Boucle locale Pour le modèle utilisé Section 4.2.2.4, la boucle locale n'est plus explicite, simplement parce que les parties positives sont définies par rapport à l'endommagement. L'algorithme correspondant est présenté Algorithme 4.4. L'algorithme de la fonction `deltaH` est présenté Algorithme 4.5 et celui de la fonction `checkH` Algorithme 4.6.

Direction de montée Puisque l'on considère essentiellement des chargements de traction, on prendra comme rigidité locale, qui engendre la direction de montée, la rigidité associée à la traction, qui nous fournit alors une bonne approximation de la rigidité réelle du matériau. Dans le cas d'un chargement de compression, on pourrait imaginer prendre la rigidité initiale, associée à la compression. Dans le cas général, on pourrait imaginer prendre l'un ou l'autre en fonction de si l'élément est globalement en traction ou en compression.

4.1.3.3 Le modèle d'endommagement anisotrope écrit en contrainte et piloté en déformation

Boucle locale Pour le modèle utilisé Section 4.2.2.5, la boucle locale se simplifie d'un côté puisque la déformation positive n'est plus définie à partir de l'endommagement; et se complique d'un autre, puisque la loi de comportement n'est pas inversible analytiquement. Ainsi, il faut itérer pour calculer la contrainte à partir de la déformation, même à variables internes fixées. L'algorithme correspondant est présenté Algorithme 4.7. Les algorithmes des fonctions `deltaS` et `checkS` sont très proches de ceux de `deltaH` et `checkH` présentés algorithmes 4.5 et 4.6, et ne sont par conséquent pas rappelés. En revanche, l'algorithme de la fonction `get_sigma` est présenté Algorithme 4.8.

Direction de montée Le choix de la direction de montée est identique à celui du modèle précédent (voir Section 4.1.3.2)



Algorithme 4.4 : Algorithme pour la loi comportement, où D est un booléen qui caractérise l'état du matériau (passe à un lorsqu'il y a rupture et arrêt de l'endommagement, voir Section 4.2.2.4), et ϵ la tolérance (en pratique : $\epsilon = 10^{-3}$)

Entrée : $\underline{\epsilon}$, \underline{H}_{old} , D_{old} , δt

si $D_{old} = 1$ **alors**
 | Sortie : 0

fin

Intensité de l'endommagement : $n = \|\underline{\epsilon}\|$

Morphologie de l'endommagement : $\underline{N} = \frac{\underline{\epsilon}}{n}$

Endommagement courant : $d_{old} = 1 - \frac{{}^t\underline{N} \cdot \underline{H}_{old} \cdot \underline{N}}{{}^t\underline{N} \cdot \underline{H}_0 \cdot \underline{N}}$

Endommagement : $d_{new} = \sup \left(d_{old}, \left\langle \frac{n - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 \right)$

si $\tau_c > 0$ **alors**
 | $\delta d = \text{delay}(d_{new} - d_{old}, \delta t, \tau_c)$

sinon
 | $\delta d = d_{new} - d_{old}$

fin

Variation de rigidité : $\underline{\delta \widehat{H}} = - \left({}^t\underline{N} \cdot \underline{\widehat{H}}_0 \cdot \underline{N} \right) \cdot \delta d \cdot \left(\underline{N} \cdot {}^t\underline{N} \right)$,

$\underline{\delta \widehat{H}} = a \cdot \underline{\delta \widehat{H}} + (1 - a) \cdot \left(\underline{\delta \widehat{H}} : \underline{\underline{1}} \right) \cdot \underline{\underline{1}}$

Sortie : $\underline{\delta \widehat{H}}$

Algorithme 4.5 : Fonction `deltaH` : variation de rigidité ($\tau_c = 0$ représente le cas sans effet retard)

Entrée : \underline{H} , D_{old}

si $D_{old} = 1$ **alors**
 | Sortie : \underline{H}

fin

Diagonalisation : $\underline{P} = \text{eigenproblem}(\underline{H})$

Valeurs propres : $\underline{D} = {}^t\underline{P} \cdot \underline{H} \cdot \underline{P}$

Initialisation : $D = 0$

pour chaque *valeur propre* λ_j **faire**
 | **si** $\lambda_j < m$ **alors**
 | | $\lambda_j = m$
 | | $D = 1$
 | **fin**

fin

Opérateur sain : $\underline{H} = \underline{P} \cdot \underline{D} \cdot {}^t\underline{P}$

Sortie : \underline{H} , D

Algorithme 4.6 : Fonction `checkH` : contrôle de la rigidité et critère d'arrêt de l'endommagement

```

pour chaque élément faire
    Déformation sur chaque point d'intégration :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}$ 
    pour chaque point d'intégration faire
        Déformation positive :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{+k,i} = \langle \hat{\underline{\epsilon}}_{k,i} \rangle_+$ 
        Souplesse :  $\hat{\underline{\delta S}}_{k,i} = \text{deltaS}(\hat{\underline{\epsilon}}_{+k,i}, \hat{\underline{S}}_{k-1}, D_{k-1}, \delta t_k)$ ,
         $\hat{\underline{S}}_{k,i} = \hat{\underline{S}}_{k-1} + \hat{\underline{\delta S}}_{k,i}$ 
        Contrôle :  $(\hat{\underline{S}}_{k,i}, D_{k,i}) = \text{checkS}(\hat{\underline{S}}_{k,i}, D_{k-1})$ ,  $\hat{\underline{\delta S}}_{k,i} = \hat{\underline{S}}_{k,i} - \hat{\underline{S}}_{k-1}$ 
        Contrainte :  $\hat{\underline{\sigma}}_{k,i} = \text{get\_sigma}(\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}, \hat{\underline{S}}_{k,i}, \hat{\underline{\sigma}}_{k-1})$ 
        Sortie :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}, \hat{\underline{S}}_{k,i}, D_{k,i}, \hat{\underline{\sigma}}_{k,i}$ 
    fin
fin
    
```

Algorithme 4.7 : Algorithme pour la loi comportement, où D est un booléen qui caractérise l'état du matériau (passe à un lorsqu'il y a rupture et arrêt de l'endommagement, voir Section 4.2.2.5)

```

Entrée :  $\underline{\epsilon}, \underline{S}, \underline{\sigma}_{\text{old}}$ 
Initialisation :  $\underline{\sigma}_0 = \underline{\sigma}_{\text{old}}$ 
pour chaque itération (indiquée j) faire
    Résidu :  $\underline{R}_j = \underline{\epsilon} - \left( \underline{S}^{1/2} \langle \underline{S}^{1/2} \underline{\sigma}_j \rangle_+ + \hat{\underline{S}}_0^{1/2} \langle \hat{\underline{S}}_0^{1/2} \underline{\sigma}_j \rangle_- \right)$ 
    si  $\|\underline{R}_j\| < \epsilon$  alors
        | Sortie :  $\underline{\sigma}_j$ 
    fin
    Variation de contrainte :  $\underline{\delta \sigma}_j = \underline{Z} \cdot \underline{R}_j, \underline{\sigma}_{j+1} = \underline{\sigma}_j + \underline{\delta \sigma}_j$ 
fin
    
```

Algorithme 4.8 : Fonction `get_sigma` : inversion de la loi de comportement écrite en contrainte, où ϵ est la tolérance (en pratique : $\epsilon = 10^{-3}$), et \underline{Z} la direction de montée (en pratique : $\underline{Z} = \hat{\underline{S}}^{-1}$ si l'élément est globalement en traction, $\underline{Z} = \hat{\underline{S}}_0^{-1}$ si l'élément est globalement en compression)

4.1.3.4 Le modèle macroscopique pour les CMCs

Boucle locale Pour le modèle utilisé Section 4.4, la boucle locale rassemble les deux difficultés rencontrées précédemment : l'endommagement est piloté par la contrainte, qui varie en fonction de l'endommagement ; et la loi de comportement n'est pas inversible analytiquement. Ainsi, elle comporte deux boucles entrelacées. L'algorithme correspondant est présenté Algorithme 4.9.

```

pour chaque élément faire
  Déformation sur chaque point d'intégration :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}$ 
  pour chaque point d'intégration faire
    Initialisation :  $\hat{\underline{C}}_{k,i,0} = \hat{\underline{C}}_{k-1}$ ,  $\hat{\underline{Z}}_{k,i,0} = \hat{\underline{Z}}_{k-1}$ 
    pour chaque itération locale (indiquée j) faire
      Contrainte :  $\hat{\underline{\sigma}}_{k,i,j} = \text{get\_sigma}(\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}, \hat{\underline{C}}_{k,i,j}, \hat{\underline{Z}}_{k,i,j}, \hat{\underline{\sigma}}_{k-1})$ 
      Souplesse :  $(\hat{\underline{\delta S}}_{k,i,j}, \hat{\underline{\delta Z}}_{k,i,j}) = \text{deltaSandZ}(\hat{\underline{\sigma}}_{k,i,j}, \hat{\underline{S}}_{k-1}, \hat{\underline{Z}}_{k-1})$ ,
       $\hat{\underline{S}}_{k,i,j} = \hat{\underline{S}}_{k-1} + \hat{\underline{\delta S}}_{k,i,j}$ ,  $\hat{\underline{Z}}_{k,i,j} = \hat{\underline{Z}}_{k-1} + \hat{\underline{\delta Z}}_{k,i,j}$ 
      si  $i > 0$  et  $\frac{\|\hat{\underline{\delta S}}_{k,i,j} - \hat{\underline{\delta S}}_{k,i,j-1}\|}{\|\hat{\underline{\delta S}}_{k,i,j-1}\|} < \epsilon$  et
       $\frac{\|\hat{\underline{\delta Z}}_{k,i,j} - \hat{\underline{\delta Z}}_{k,i,j-1}\|}{\|\hat{\underline{\delta Z}}_{k,i,j-1}\|} < \epsilon$  alors
        | Sortie :  $\hat{\underline{\epsilon}}_{k,i}$ ,  $\hat{\underline{C}}_{k,i} = \hat{\underline{C}}_{k,i,j}$ ,  $\hat{\underline{Z}}_{k,i} = \hat{\underline{Z}}_{k,i,j}$ ,  $\hat{\underline{\sigma}}_{k,i} = \hat{\underline{\sigma}}_{k,i,j}$ 
        fin
      fin
    fin
  fin

```

Algorithme 4.9 : Algorithme pour la loi comportement

Direction de montée Pour les calculs effectués avec ce modèle (voir Section 4.4.2), on a toujours pris comme rigidité locale, qui engendre la direction de montée, la rigidité initiale.

4.2 Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

4.2.1 Choix de la représentation

Puisque la fissuration inter-fil est traitée à son échelle propre, la meilleure solution serait d'en donner une représentation explicite dans les calculs, régie par la mécanique de la rupture. Cependant, comme il n'y a rien dans la matrice inter-fil pour diriger ces fissures, leur orientation globale ainsi que leur

morphologie précise sont entièrement dirigées par les champs de contraintes locaux, et ne sont donc pas connues *a priori*, ce qui rend leur représentation explicite extrêmement complexe [Möes *et al.*, 1999; Jirasek, 2000; Strouboulis *et al.*, 2000; Oliver *et al.*, 2002; Karihaloo et Xiao, 2003; Hansbo et Hansbo, 2004].

Dans le travail présenté ici, on se propose de simplifier cette analyse en donnant aux fissures une représentation dégradée, comme zones de localisation d'un modèle continu d'endommagement. La représentation est dégradée, au sens où la discontinuité de déplacement associée aux fissures n'est pas strictement localisée à un plan, mais est régularisée à l'intérieur d'une zone volumique (voir Figure 4.2).

Le problème de la localisation, associé à l'utilisation de modèles d'endommagement –plus généralement : de modèles adoucissants–, est bien connu : dépendance –de la taille de la zone de localisation, du chemin de fissuration, de l'énergie dissipée, etc– à la discrétisation –maillage, pas de chargement, etc– [Needleman, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993]. Il en est de même pour la solution : l'introduction dans le calcul d'une longueur caractéristique [Needleman, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993]. Une première approche consiste à l'introduire explicitement à travers la formulation de modèles non locaux [Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993]. Elle permet un contrôle simple de la localisation mais souffre d'un manque de sens physique et de la difficulté associée au calcul de modèles non locaux. Une seconde approche, qui sera étudiée ici, consiste à introduire plutôt un temps caractéristique, qui se ramène à une longueur par les effets dynamiques [Needleman, 1988; Ladevèze *et al.*, 2000].

En revanche, la décohésion fil-matrice est traitée explicitement à l'aide d'un modèle d'interface avec frottements [Genet, 2006], qui permet le transfert de charge entre les fils et la matrice. C'est ce comportement d'interface qui pilote en grande partie le taux de fissuration limite de la matrice inter-fil (voir Figure 4.2).

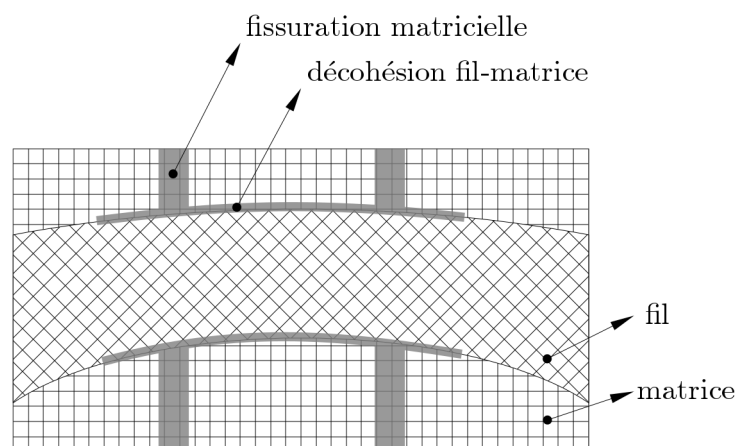


Figure 4.2 – Principe de modélisation de la fissuration matricielle inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

Cependant, les développements théoriques –le modèle d'endommagement–

et pratique –l’outil de calcul– ayant pris plus de temps que prévu, l’ensemble de la représentation n’est pas opérationnelle à l’instant où cette thèse est rédigée. Ainsi, seule une étude sur la propagation de fissures par la mécanique de l’endommagement à taux limité en quasi-statique est présentée ici. Le travail sur la décohésion fil-matrice n’ayant pas évolué depuis [Genet, 2006], il n’est pas présenté.

4.2.2 Étude sur la propagation de fissures par la mécanique de l’endommagement à taux limité en quasi-statique

En terme de physique, l’hypothèse fondamentale sous-jacente à la résolution en quasi-statique du problème de propagation est la suivante : on suppose que les effets d’inertie –qui limitent le taux de déformation et donc le taux d’endommagement– sont faibles devant les effets de viscosité –le taux d’endommagement est directement limité par la cinétique des mécanismes d’ouverture de la fissure–. En effet, en quasi-statique les termes d’accélération ne sont pas pris en compte, alors que les termes de vitesse le sont, et le problème reste un problème d’évolution.

Si cette question reste une question ouverte –de toute façon la réponse dépend du matériau!–, il est important de rappeler un résultat clef qui va dans ce sens : dans un calcul dynamique, les effets d’inertie ne sont en général pas suffisants pour empêcher la localisation de l’endommagement, et l’utilisation de modèles à taux limité est toujours nécessaire [Ladevèze *et al.*, 2000; Desmorat *et al.*, 2008].

Quoi qu’il en soit de la physique même de la propagation, l’utilisation de l’effet retard en quasi-statique doit être considérée davantage comme une technique de régularisation que comme une modélisation physique. En effet, les paramètres d’effet retard utilisés sont éloignés de plusieurs ordres de grandeurs de ceux dictés par la physique, car à ces paramètres correspondraient des discrétisations, dans le temps et l’espace, trop fines, et donc des temps de calcul trop longs. En conséquence, la taille de la zone localisée, ainsi que l’énergie dissipée, ne sont pas réalistes.

Cependant, elle a déjà permis des analyses fines de modes d’endommagement, essentiellement surfaciques, comme par exemple le délaminage des composites stratifiés [Allix *et al.*, 2003; Bordeu *et al.*, 2008]. De plus, des travaux sont en cours [Le Mauff *et al.*, 2009] pour formuler une loi d’effet retard en quasi-statique qui permette i) de régulariser la solution ; ii) de représenter une propagation qui soit compatible avec la mécanique de la rupture ; iii) dans un temps de calcul raisonnable.

Une fois admise l’idée que l’on va représenter une fissure –une *surface* de discontinuité dans un milieu continu– par une zone de localisation de l’endommagement –un *volume*–, il reste à définir le modèle d’endommagement, dont la *cinématique* définit les propriétés mécaniques de la zone endommagée qui représente la fissure, et dont la *cinétique* définit les critères de propagation.

On commence par illustrer le problème de la localisation ainsi que l'utilisation de cinétiques d'endommagement à taux limité sur un simple modèle 1D. On considère ensuite le cas de la propagation 3D, et plusieurs modèles sont proposés et étudiés.

4.2.2.1 Analyse théorique du problème de localisation

Le problème de la localisation de la déformation lors de l'utilisation de modèles adoucissants est bien connu [Needleman, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993]. Il est associé à une perte du caractère défini positif du problème, qui entraîne la perte de l'unicité de la solution. Il apparaît très clairement si l'on considère un simple problème d'évolution quasi-statique unidimensionnel, écrit en vitesse [Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993] :

$$\text{équation d'équilibre : } \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial x} = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{relation de comportement : } \begin{cases} \dot{\sigma} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) \\ \dot{Y} = \rho \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial d} \right) \\ \dot{d} = \frac{\partial \phi}{\partial \dot{Y}} \end{cases} \quad (4.8)$$

Où $\psi(\epsilon, d)$ et $\phi(\dot{Y})$ sont les potentiels qui définissent la loi de comportement. Ainsi, l'énergie à minimiser associée au problème en vitesse s'écrit :

$$I(\dot{\epsilon}) = \int_{\Omega} \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial \epsilon^2} \dot{\epsilon}^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial d \partial \epsilon} \frac{\partial \phi}{\partial \dot{Y}} \dot{\epsilon} \quad (4.9)$$

Où Ω est le domaine considéré.

Cinématique En considérant une cinématique standard

$$\rho \psi(\epsilon, d) = \frac{1}{2} E (1 - d) \epsilon^2 \quad (4.10)$$

On obtient l'énergie

$$I(\dot{\epsilon}) = \int_{\Omega} E (1 - d) \dot{\epsilon}^2 - E \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \dot{Y}} \dot{\epsilon} \quad (4.11)$$

On va maintenant étudier le cas de plusieurs cinétiques d'endommagement. Pour simplifier l'analyse, on considère des lois non standards, mais pour lesquelles la positivité des dissipations est triviale.

Cinétique en contrainte En considérant la loi

$$\dot{d} = \left\langle \frac{\dot{\sigma}}{\sigma_0} \right\rangle_+ = \left\langle \frac{E(1-d)\dot{\epsilon}}{\sigma_0} \right\rangle_+ \quad (4.12)$$

On obtient l'énergie

$$I^\sigma(\dot{\epsilon}) = \int_{\Omega} E(1-d)\dot{\epsilon}^2 - E\epsilon \left\langle \frac{E(1-d)\dot{\epsilon}}{\sigma_0} \right\rangle_+ \quad (4.13)$$

C'est-à-dire

$$I^\sigma(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} \int_{\Omega} E(1-d)\dot{\epsilon}^2 & \text{si } \dot{\epsilon} < 0 \\ \int_{\Omega} E\left(1 - \frac{E\epsilon}{\sigma_0}\right)(1-d)\dot{\epsilon}^2 & \text{si } \dot{\epsilon} > 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Ainsi, le problème reste défini positif jusqu'à ce que l'endommagement atteigne un.

Cinétique en déformation En revanche, en considérant la loi

$$\dot{d} = \left\langle \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} \right\rangle_+ \quad (4.15)$$

On obtient l'énergie

$$I^\epsilon(\dot{\epsilon}) = \int_{\Omega} E(1-d)\dot{\epsilon}^2 - E\epsilon \left\langle \frac{\dot{\epsilon}}{\epsilon_0} \right\rangle_+ \quad (4.16)$$

C'est-à-dire

$$I^\epsilon(\dot{\epsilon}) = \begin{cases} \int_{\Omega} E(1-d)\dot{\epsilon}^2 & \text{si } \dot{\epsilon} < 0 \\ \int_{\Omega} E\left(1 - d - \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)\dot{\epsilon}^2 & \text{si } \dot{\epsilon} > 0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Qui est représenté Figure 4.3. Il apparaît très clairement que l'on perd le caractère défini positif du problème avant que l'endommagement ne vaille un, et par voie de conséquence l'unicité de la solution.

On va maintenant illustrer ce problème sur un cas simple unidimensionnel.

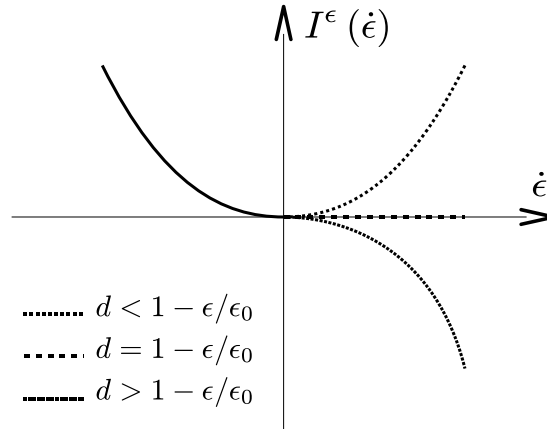


Figure 4.3 – Énergie associée au problème en vitesse : perte du caractère défini positif

4.2.2.2 Illustration sur un cas test 1D

On considère une poutre constituée d'un matériau endommageable :

$$\sigma = E (1 - d) \epsilon \quad (4.18)$$

$$d = f^d (\sup \langle \epsilon \rangle_+) \quad \text{sans effet retard} \quad (4.19)$$

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} \left(1 - e^{-f^d (\langle \epsilon \rangle_+ - d)_+} \right) \quad \text{avec effet retard} \quad (4.20)$$

$$\text{avec } f^d (\epsilon) = \left\langle \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1$$

Avec $E = 250 \text{ GPa}$, $\epsilon_0 = 0.1 \%$ et $\epsilon_1 = 0.3 \%$. La poutre est légèrement conique (voir Figure 4.4, où $S(x) = (x/L) S_L + (1 - x/L) S_0$, avec $S_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$, $S_L = 1.001 S_0$, et $L = 1 \text{ m}$). Elle est chargée par un déplacement imposé au bord, d'abord croissant puis constant (voir Figure 4.4, où $u_0 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ m}$).

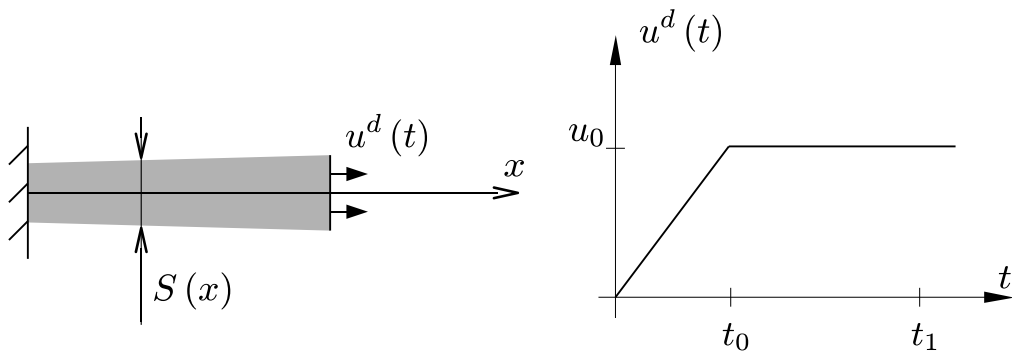


Figure 4.4 – Problème poutre

Le problème est choisi de telle sorte que i) l'instabilité ne soit pas activée de manière chaotique –elle s'initie là où la section est la plus petite–; ii) la

localisation ne soit pas masquée par des champs homogènes –une section non homogène implique une déformation/contrainte non homogène– et iii) la solution existe même après localisation –grâce au déplacement imposé–.

Pour les calculs avec effet retard, on s’assurera i) que t_1 est suffisamment grand pour que la solution ait atteint l’équilibre ; et ii) que le pas de temps est suffisamment faible pour que l’évolution de l’endommagement soit régulière ($\delta t = \tau_c/10$).

Loi statique La loi de comportement sans effet retard (Équation (4.19)) est tracée Figure 4.5. Lorsque cette loi est simulée sur un maillage, on observe une localisation de l’endommagement : quand l’endommagement atteint une valeur critique dans un des éléments, il passe instantanément à un dans cet élément, et les autres éléments sont alors déchargés (voir Figure 4.6). Et cette solution dépend pathologiquement du maillage : quand on raffine le maillage, la zone de localisation de l’endommagement –en fait : un élément–, ainsi que la quantité d’énergie dissipée, varient (voir Figure 4.7). D’où la nécessité de régulariser la solution.

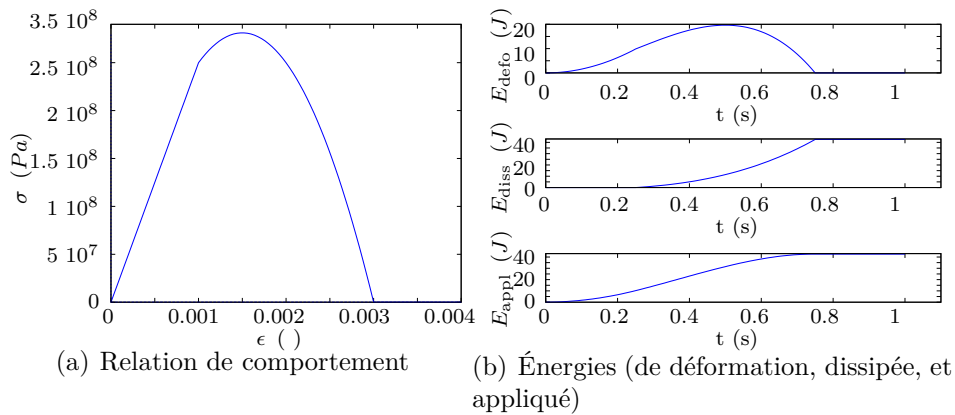
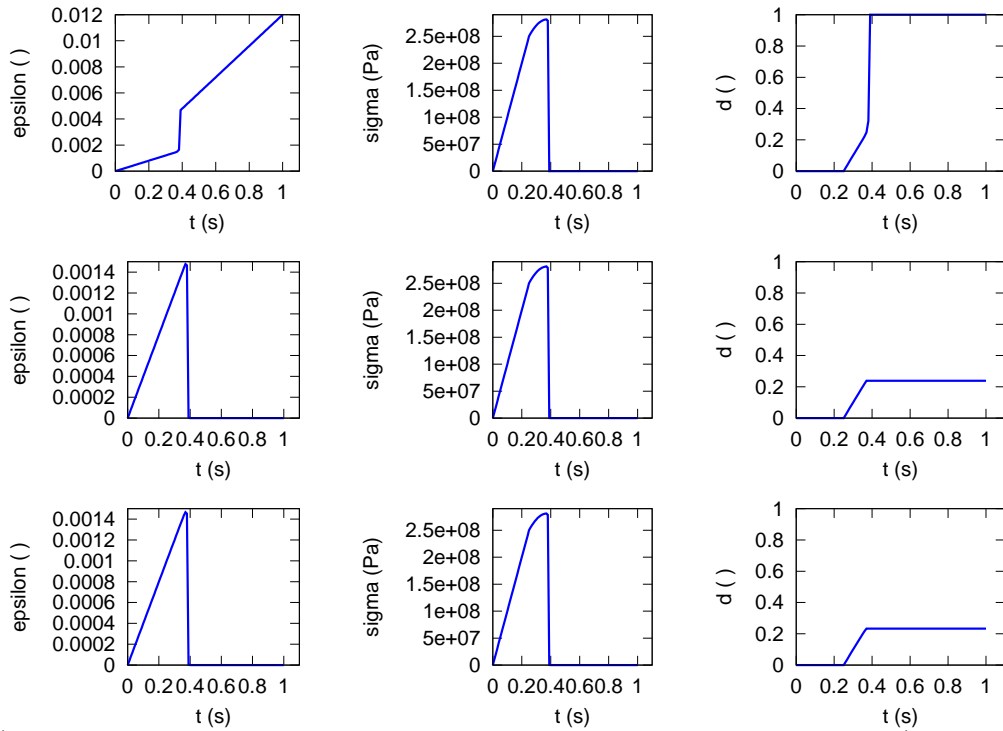


Figure 4.5 – Loi de comportement statique

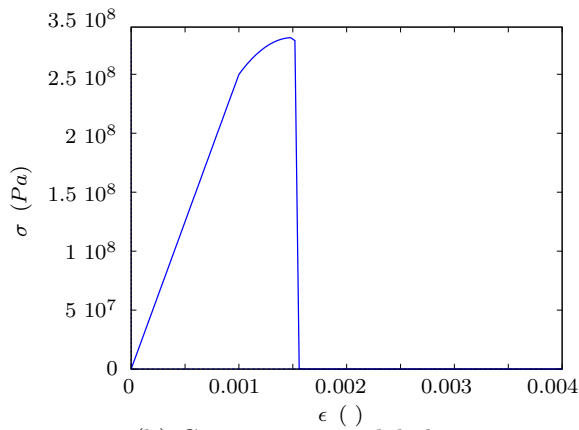
Loi à taux limité La loi de comportement avec effet retard (Équation (4.20)) est illustrée d’abord en faisant varier l’effet retard (Figure 4.8), puis le temps de montée (Figure 4.9). Grâce à cette loi, la taille de la zone de localisation –et donc la quantité d’énergie dissipée– est pilotée par le paramètre d’effet retard (voir Figure 4.10), ou la vitesse de chargement (voir Figure 4.11), mais est indépendante du maillage (voir Figure 4.12).

On va maintenant appliquer cette méthode au cas de fissures 3D.

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées



(a) Champs de déformation, contrainte et endommagement au cours du temps (un élément par ligne)



(b) Comportement global

Figure 4.6 – Localisation dans une poutre à trois éléments

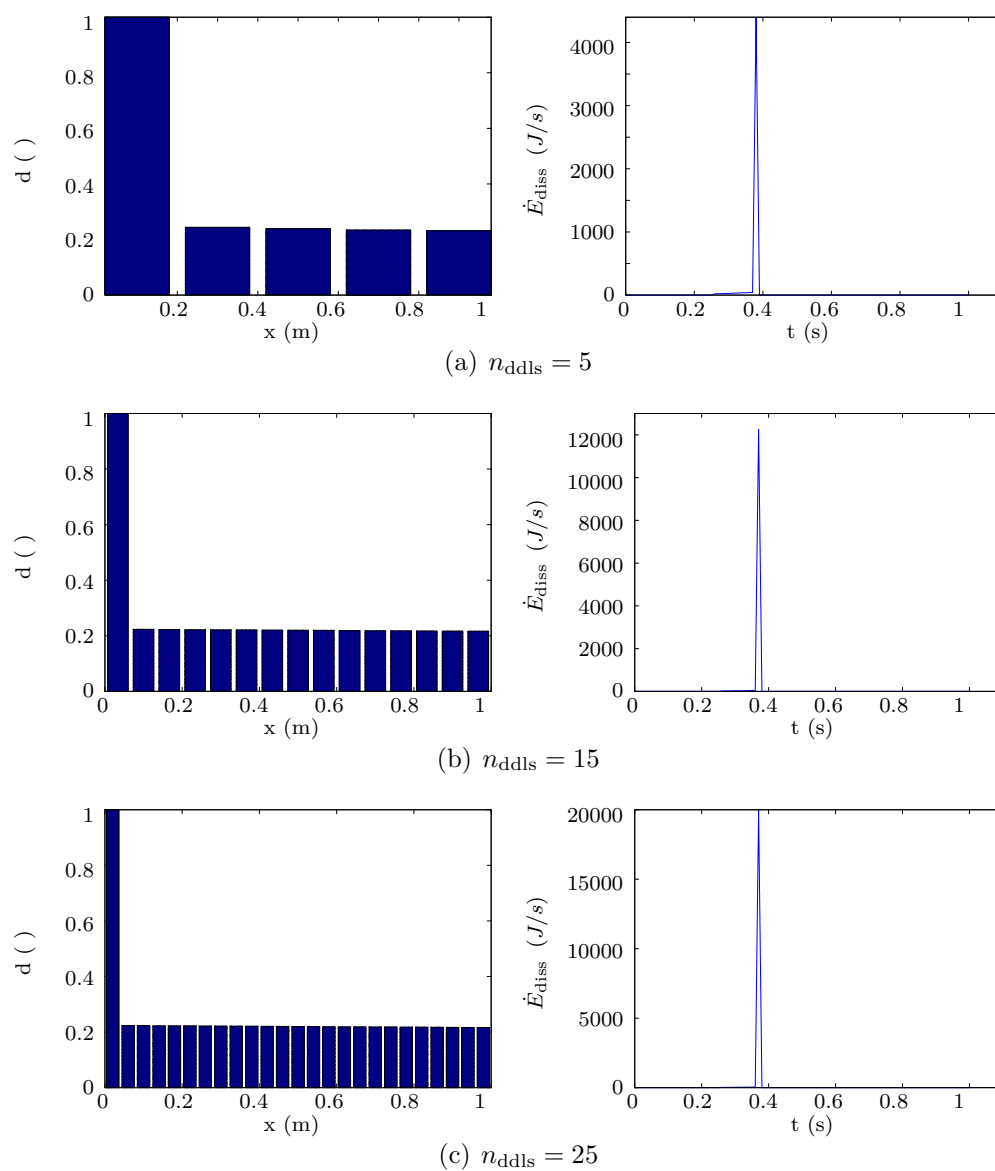


Figure 4.7 – Localisation dans une poutre : dépendance au maillage (Champs d'endommagement et puissance dissipée au cours du temps, pour différents maillages)

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

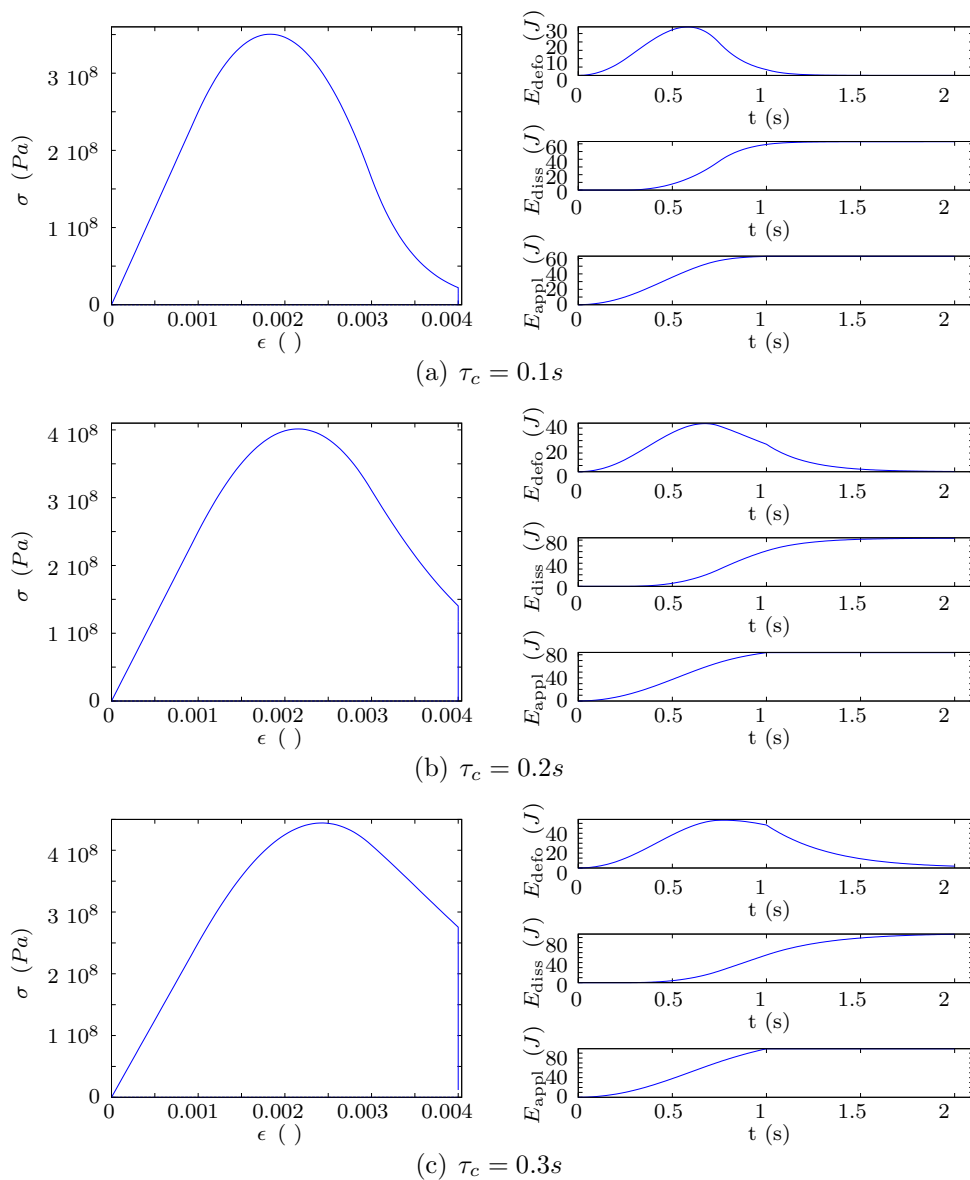


Figure 4.8 – Loi de comportement à taux limité : effet du paramètre d'effet retard (Relation de comportement et énergies de déformation, dissipée, et appliquée) ($t_0 = 0.1s$)

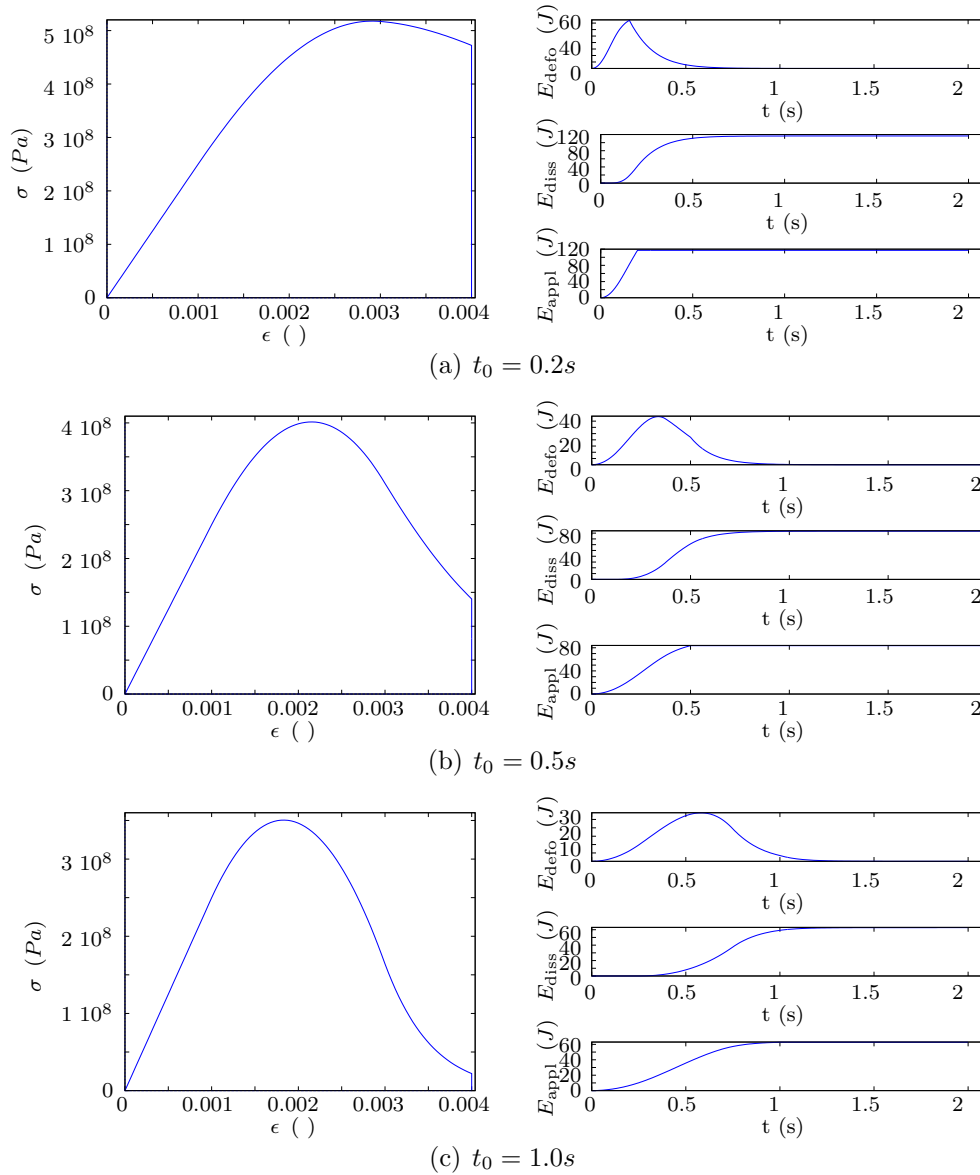


Figure 4.9 – Loi de comportement à taux limité : effet de la vitesse du chargement (Relation de comportement et énergies de déformation, dissipée, et appliquée) ($\tau_c = 0.1s$)

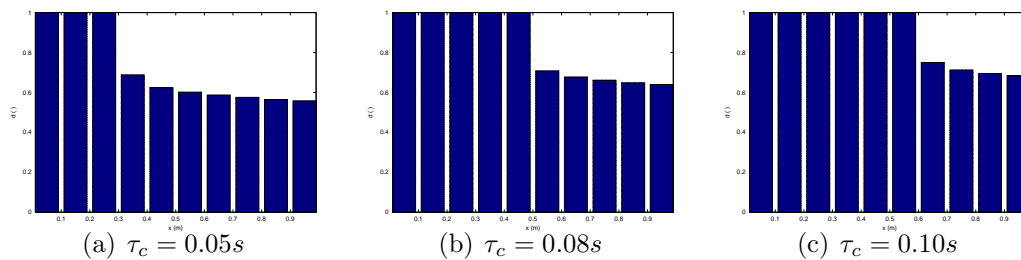


Figure 4.10 – Localisation contrôlée dans une poutre à 10 éléments : influence de l'effet retard (Champs d'endommagement) ($t_0 = 0.1s$)

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

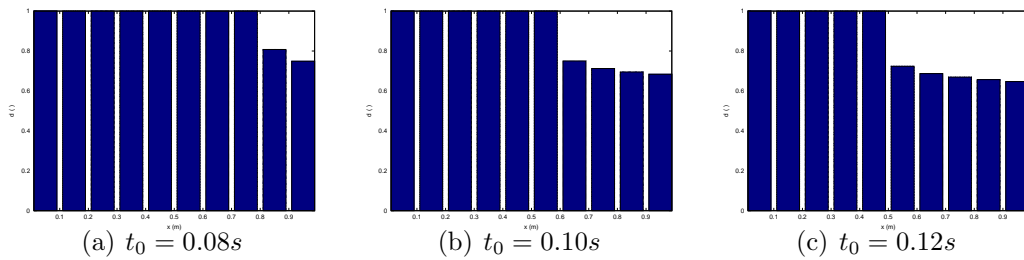


Figure 4.11 – Localisation contrôlée dans une poutre à 10 éléments : influence de la vitesse du chargement (Champs d'endommagement) ($\tau_c = 0.1s$)

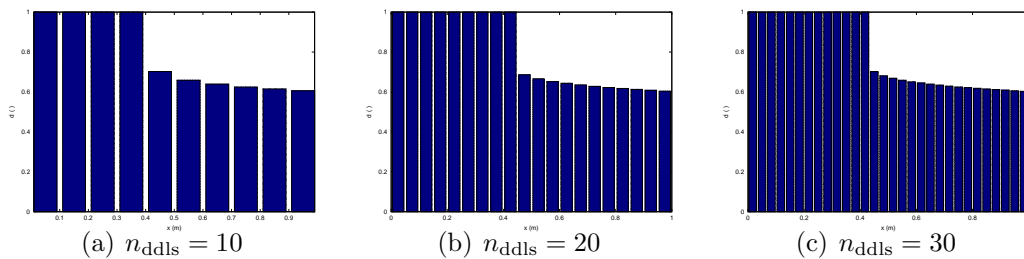


Figure 4.12 – Localisation contrôlée dans une poutre : indépendance au maillage (Champs d'endommagement) ($\tau_c = 0.08s$, $t_0 = 0.12s$)

4.2.2.3 Choix des cas tests pour la propagation 3D

Plusieurs cas tests, à la complexité croissante, sont considérés pour l'analyse préliminaire de la propagation de fissures tridimensionnelles.

Plaque entaillée On s'intéressera dans un premier temps au cas test très académique présenté Figure 4.13. La fissure doit se propager tout droit. Le chargement est appliqué directement sur les lèvres de la fissure de telle sorte que i) le chargement sur la structure est directement lié au chargement en pointe de fissure –pour contrôler les effets de vitesse introduits pas l'effet retard– ; et ii) seule la pointe de la fissure est chargée –pour éviter que d'autres fissures ne s'amorcent ailleurs–.

Plaque entaillée trouée On s'intéressera ensuite au cas test plus structurel présenté Figure 4.14, qui a déjà été traité dans la thèse de P.A. Guidault [Guidault, 2005] (propagation en fatigue par la méthode LaTIn couplée avec la méthode X-FEM) : la fissure doit se diriger vers le trou du milieu.

Pour les calculs avec effet retard on s'assurera que le pas de temps est suffisamment faible pour capter l'évolution de l'endommagement ($\delta t = \tau_c/10$).

On va maintenant tester le comportement de plusieurs modèles d'endommagement sur ces cas tests.

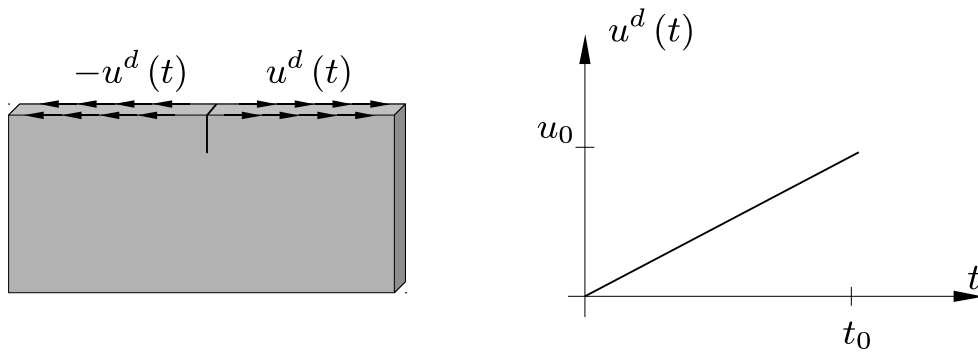


Figure 4.13 – Problème de propagation 3D (dimensions : $2 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 0.1 \text{ mm}$; $u_0 = 3 \text{ mm}$)

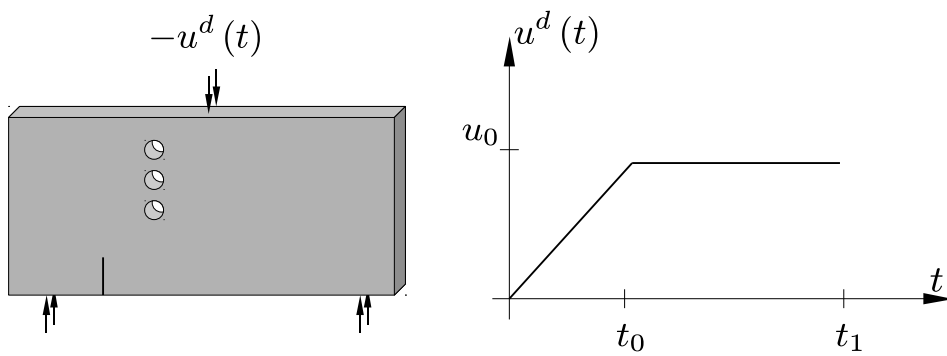


Figure 4.14 – Problème de la plaque entaillée (dimensions : $200 \text{ mm} \times 80 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$; $u_0 = 0.15 \text{ mm}$)

4.2.2.4 Cas d'un modèle d'endommagement anisotrope écrit et piloté en déformation

L'idée ici est d'introduire un premier modèle d'endommagement anisotrope avec séparation traction/compression, écrit dans le cadre de la seconde version de la théorie de l'endommagement anisotrope (voir Section 2.2.3.5). On a souhaité étudier le cas d'une formulation en déformation. En effet, elle simplifie et accélère grandement la résolution numérique du modèle (voir Section 4.1.3), c'est d'ailleurs la raison pour laquelle elle est choisie par un grand nombre d'auteurs [Ju, 1989; Maire et Chaboche, 1997; Marcin, 2010]. L'implémentation numérique du modèle est discutée Section 4.1.3.2.

Modèle On considère donc l'énergie libre :

$$2e_d = \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} : \underline{\underline{\underline{H}}} : \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} + \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_-^{\underline{\underline{\underline{H}_0}}} : \underline{\underline{\underline{H}_0}} : \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_-^{\underline{\underline{\underline{H}_0}}} \quad (4.21)$$

Où $\underline{\underline{\underline{H}_0}}$ est le tenseur de rigidité initial du matériau et $\underline{\underline{\underline{H}}}$ le tenseur de rigidité endommagé; et où les $\langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_{+/-}^{\underline{\underline{\underline{H}/H_0}}}$ sont définis par :

$$\begin{cases} \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} = \underline{\underline{\underline{H}}}^{-1/2} \langle \underline{\underline{\underline{H}}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+ \\ \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_-^{\underline{\underline{\underline{H}_0}}} = \underline{\underline{\underline{H}_0}}^{-1/2} \langle \underline{\underline{\underline{H}_0}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_- \end{cases} \quad (4.22)$$

Menant à un potentiel continûment différentiable (voir Section 2.2.3.1), et donc à une loi de comportement continue, qui s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\underline{H}}} : \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} + \underline{\underline{\underline{H}_0}} : \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_-^{\underline{\underline{\underline{H}_0}}} \quad (4.23)$$

Pour piloter l'évolution de l'endommagement, on définit la force thermodynamique suivante :

$$\underline{\underline{\underline{Y}}} = \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} \otimes \langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}} \quad (4.24)$$

Que l'on réécrit :

$$\underline{\underline{\underline{Y}}} = \|\langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}}\|^2 \cdot (\underline{\underline{\underline{N}}} \otimes \underline{\underline{\underline{N}}}) \quad (4.25)$$

avec $\underline{\underline{\underline{N}}} = \frac{\langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}}}{\|\langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}}\|}$

Pour séparer l'intensité ($\|\langle \underline{\underline{\underline{\epsilon}}}_+^{\underline{\underline{\underline{H}}}}\|$) et la morphologie ($\underline{\underline{\underline{N}}}$) du chargement local.

Ainsi, on peut définir, pour la direction courante de chargement, une variation d'endommagement scalaire :

$$\delta d = \langle d_{\text{new}} - d_{\text{old}} \rangle_+ \quad \text{sans effet retard} \quad (4.26)$$

$$\delta d = \frac{\delta t}{\tau_c} \left(1 - e^{-\langle (d_{\text{new}} - d_{\text{old}}) - \delta d \rangle_+} \right) \quad \text{avec effet retard} \quad (4.27)$$

Où d_{new} représente l'endommagement induit par le chargement :

$$d_{\text{new}} = \left\langle \frac{\sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{N}}} - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 = \left\langle \frac{\|\underline{\underline{H}}_+\| - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 \quad (4.28)$$

Avec ϵ_0 et ϵ_1 deux paramètres scalaires qui caractérisent la cinétique d'endommagement à proprement parler ; et d_{old} représente l'endommagement courant :

$$d_{\text{old}} = 1 - \frac{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}} : \underline{\underline{N}}}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}}_0 : \underline{\underline{N}}} \quad (4.29)$$

Finalement, la loi d'évolution s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\delta H}} = a \cdot \underline{\underline{\delta \tilde{H}}} + (1 - a) \cdot \left(\underline{\underline{\delta \tilde{H}}} : \underline{\underline{1}} \right) \cdot \underline{\underline{1}} \quad (4.30)$$

Où a est un paramètre qui caractérise la cinématique d'endommagement à proprement parler ($a = 1$ pour un endommagement anisotrope entièrement piloté par le chargement ; $a = 0$ pour un endommagement entièrement isotrope) ; et $\underline{\underline{\delta \tilde{H}}}$ la variation d'endommagement tensoriel :

$$\underline{\underline{\delta \tilde{H}}} = - \left(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{H}}_0 : \underline{\underline{N}} \right) \cdot \delta d \cdot \left(\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}} \right) \quad (4.31)$$

Pour définir la limite d'endommagement –ici nous n'avons pas à proprement parler de variable d'endommagement qui varie entre zéro et un–, on considère les valeurs propres de $\underline{\underline{H}}$: lorsque l'une d'entre elles s'annule –en pratique : devient beaucoup plus petite que sa plus grande valeur propre, ou bien que celle de $\underline{\underline{H}}_0$ – en un point d'intégration, on considère qu'il est cassé. Alors, son comportement n'évolue plus. En revanche, il est évident qu'on ne peut ôter toute la partie positive de l'énergie, car, et c'est bien l'intérêt d'avoir un endommagement anisotrope, si certaines directions peuvent être fortement dégradées, voire complètement rompues, d'autres directions peuvent quand à elles être entièrement saines, et ainsi participer à la rigidité du matériau. Ce cas limite est facilement détectable en pratique, car on doit de toute façon diagonaliser $\underline{\underline{H}}$ pour calculer sa racine carrée (voir Équation 4.22).

Remarque concernant l'énergie L'opérateur réel de comportement –qui combine $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}_0$ en fonction de $\underline{\underline{\epsilon}}$ –, peut éventuellement perdre son caractère défini au cours du chargement, même si $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}_0$ sont toujours définis positifs. Cependant, ce cas limite ne semble pas apparaître en pratique.

Remarque concernant la cinématique d'endommagement Dans l'Équation (4.28), on a considéré deux paramètres scalaires, menant à des seuils isotropes d'initiation et de limite d'endommagement. On aurait également pu

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

considérer des paramètres tensoriels, menant ainsi à des seuils anisotropes :

$$d_{\text{new}} = \left\langle \frac{\sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{N}}} - \sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}}_0 : \underline{\underline{N}}}}{\sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}}_1 : \underline{\underline{N}}} - \sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}}_0 : \underline{\underline{N}}}} \right\rangle_0^1 \quad (4.32)$$

Avec $\underline{\underline{Y}}_0$ et $\underline{\underline{Y}}_1$ deux paramètres tensoriels.

Remarque concernant la cinétique d'endommagement En suivant exactement l'idée des modèles précédents (où était introduite pour la première l'idée de séparer intensité et morphologie du chargement local, voir Section 2.2.3.5), on aurait écrit la loi d'évolution de la manière suivante :

$$\begin{cases} z = a \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}^n)^{1/n} + (1-a) \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}) \\ \alpha = \left\langle \frac{\bar{z} - z_0}{z_1 - z_0} \right\rangle_0^1 \quad \text{avec} \quad \bar{z} = \sup(z) \\ \dot{\underline{\underline{H}}} = -\dot{\alpha} \frac{a \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}^n)^{1/n} \cdot \widehat{\underline{\underline{Y}}} + (1-a) \cdot \text{Tr}(\underline{\underline{Y}}) \cdot \underline{\underline{1}}}{\bar{z}} \end{cases} \quad (4.33)$$

Où $\left(a \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}^n)^{1/n} + (1-a) \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}) \right)$ mesure l'intensité et $\left(a \cdot \text{Tr}(\widehat{\underline{\underline{Y}}}^n)^{1/n} \cdot \widehat{\underline{\underline{Y}}} + (1-a) \cdot \text{Tr}(\underline{\underline{Y}}) \cdot \underline{\underline{1}} \right) / z$ la morphologie du chargement.

Le fait de se ramener à une loi cinétique scalaire, donc isotrope, conduit à une forte dépendance du modèle à l'histoire du chargement. Pour illustrer ce point, on considère un simple problème de charge-décharge non proportionnelle (voir Figure 4.15). Les réponses associées aux deux lois d'évolution (ancienne écriture Équation (4.33); nouvelle écriture (4.30)) sont tracées Figure 4.16 : avec l'écriture présentée dans ce document, le domaine élastique dans la seconde direction de chargement n'a pas été modifié par l'endommagement dans la première direction de chargement.

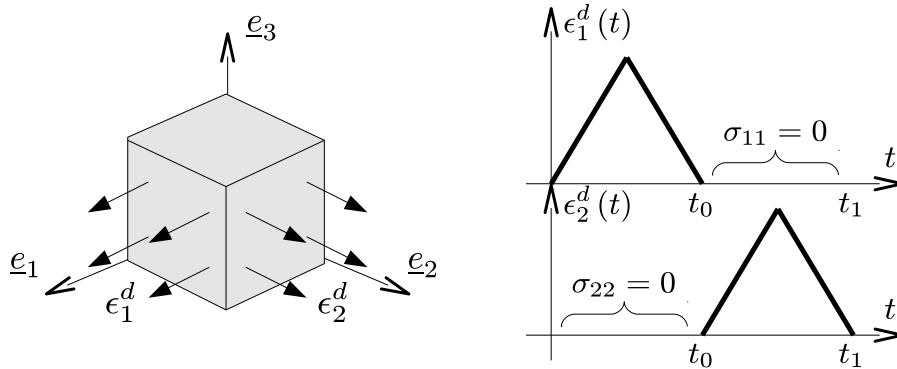


Figure 4.15 – Cas test pour l'analyse de la loi d'évolution : problème

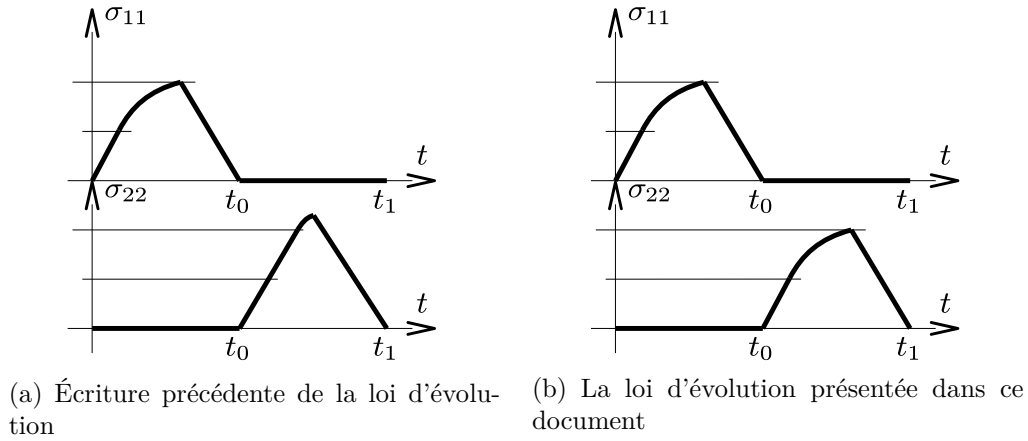


Figure 4.16 – Cas test pour l'analyse de la loi d'évolution : solutions

Un point sur le retour en compression après endommagement Dans un premier temps, on analyse le recouvrement de la rigidité initiale en compression. Les $\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_{+/-}$ sont pris au sens classique (voir Section 2.2.1.1) pour simplifier l'analyse. On considère le problème défini Figure 4.17, et on analyse le comportement du matériau à partir de t_1 . La loi de comportement s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \underline{\underline{H}} : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ + \underline{\underline{H}}_0 : \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_- \quad (4.34)$$

$$\approx \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(1 - d_1) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu)(1 - d_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\lambda}{(\lambda + 2\mu)(1 - d_2)} \epsilon_2^d(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$+ \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_2^d(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

Où d_1 et d_2 correspondent aux endommagements induits par les tractions dans les directions 1 (de 0 à t_0) et 2 (de t_0 à t_1) ; que l'on met sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} \approx \underline{\underline{\tilde{H}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.37)$$

Où $\underline{\underline{\tilde{H}}}$ est l'opérateur réel de comportement, qui combine $\underline{\underline{H}}$ et $\underline{\underline{H}}_0$ en fonction des valeurs propres de $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\underline{\underline{\tilde{H}}} \approx \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu)(1 - d_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \neq \underline{\underline{H}}_0 \quad (4.38)$$

Ainsi, dans le cas d'une compression uniaxiale après endommagement, le recouvrement de la rigidité initiale ne peut être complet pour ce modèle écrit en déformation, tout simplement parce que la déformation transverse, positive, est associée au comportement de traction, donc endommagé.

Bien évidemment, dans le cas d'une compression multiaxiale où toutes les valeurs propres de ϵ sont négatives, on recouvre exactement le comportement initial.

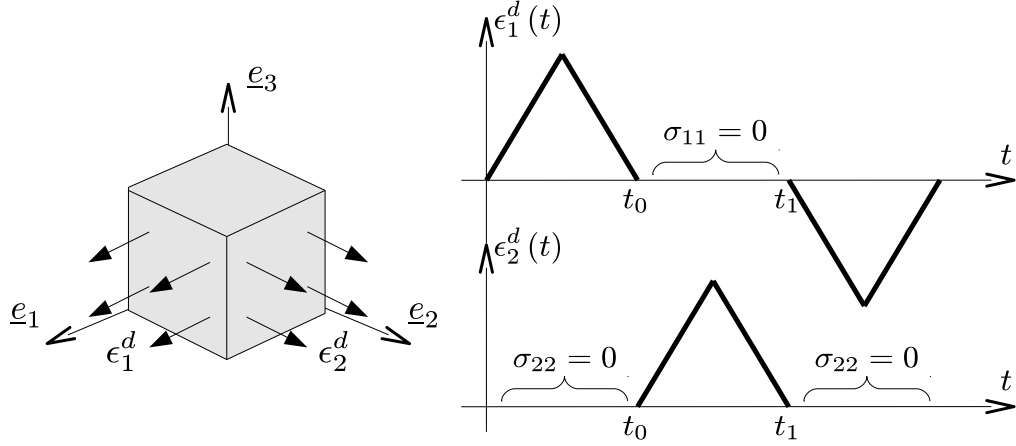


Figure 4.17 – Cas test pour l'analyse du retour en compression : problème

Analyse du comportement ($a = 1$) On l'a vu, le paramètre a de la loi d'évolution (voir Équation (4.30)) permet de piloter l'anisotropie de l'endommagement. La Figure 4.18 représente le comportement du modèle, sans effet retard, en anisotropie complète ($a = 1$), pour différents chargements.

En traction uniaxiale (voir Figure 4.18(a)), le comportement du modèle présente une pathologie majeure : le critère de limite d'endommagement est atteint avant que la rigidité dans la direction de chargement ne soit complètement nulle. Ce problème est illustré par l'analyse des valeurs propres de l'opérateur de Hooke isotrope 2D endommagé dans une seule direction :

$$\underline{\underline{\hat{H}}} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(1 - d) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\mu + \lambda - \frac{\lambda d}{2} - \mu d - \frac{\sqrt{\lambda^2 d^2 + 4\lambda\mu d^2 + 4\mu^2 d^2 + 4\lambda^2}}{2} \\ \lambda_2 = 2\mu + \lambda - \frac{\lambda d}{2} - \mu d + \frac{\sqrt{\lambda^2 d^2 + 4\lambda\mu d^2 + 4\mu^2 d^2 + 4\lambda^2}}{2} \\ \lambda_3 = 2\mu \end{cases}$$

Qui sont tracées Figure 4.19(a) : l'une d'elles s'annule avant que d ne vale un.

Plus généralement, ce problème est lié au cadre de la seconde version de la théorie de l'endommagement anisotrope (voir Section 2.2.3.5) : puisque absolument rien de la cinématique n'est fixé au niveau de l'énergie de déformation, ce sont les lois d'évolution qui lui donnent toutes ses propriétés. Or il est difficile de formuler une loi d'évolution qui conserve le caractère défini positif du modèle tout en étant anisotrope.

En revanche, en traction multiaxiale (voir Figure 4.18(b)), le comportement ne pose pas de difficulté. Ceci est illustré par l'analyse des valeurs propres de l'opérateur de Hooke isotrope 2D endommagé dans les deux directions :

$$\underline{\underline{\widehat{H}}} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(1-d) & \lambda(1-d) & 0 \\ \lambda(1-d) & (\lambda + 2\mu)(1-d) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\mu(1-d) \\ \lambda_2 = (2\lambda + 2\mu)(1-d) \\ \lambda_3 = 2\mu \end{cases}$$

Qui sont tracées Figure 4.19(b) : aucune ne s'annule avant que d ne vale un.

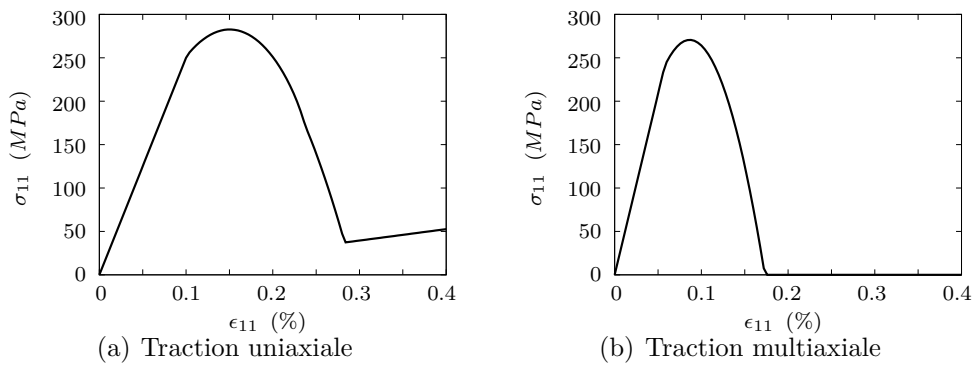


Figure 4.18 – Comportement du modèle en anisotropie complète sous différents chargements (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 1$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^{-3}$)

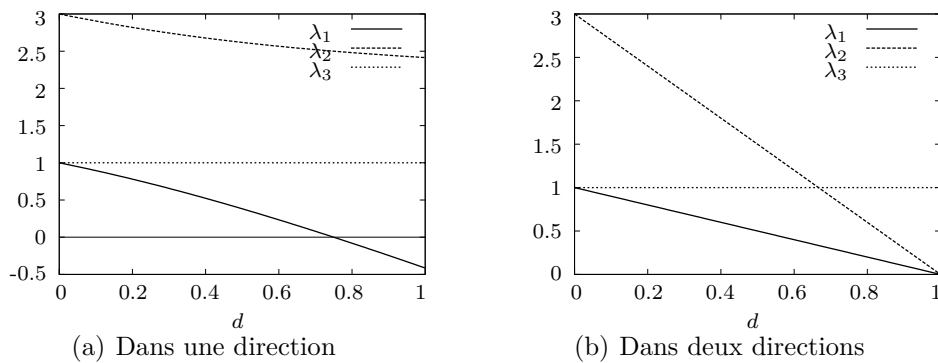


Figure 4.19 – Valeurs propres de l'opérateur de Hooke isotrope 2D endommagé ($\lambda = 2\mu = 1$)

Analyse du comportement ($a = 0$) La Figure 4.20 représente le comportement du modèle, toujours sans effet retard, mais cette fois en anisotropie nulle ($a = 0$), pour différents chargements.

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

Ici, la pathologie du paragraphe précédent est présente tant en traction uniaxiale (voir Figure 4.20(a)) que multiaxiale (voir Figure 4.20(b)) – l'endommagement est isotrope, donc l'opérateur est identique–. Ce problème est illustré par l'analyse des valeurs propres de l'opérateur de Hooke isotrope 2D endommagé dans toutes les directions :

$$\widehat{\underline{H}} = \begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(1-d) & \lambda & 0 \\ \lambda & (\lambda + 2\mu)(1-d) & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu(1-d) \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2\mu(1-d) - \lambda d \\ \lambda_2 = 2\mu(1-d) + \lambda(2-d) \\ \lambda_3 = 2\mu(1-d) \end{cases}$$

Qui sont tracées Figure 4.21 : encore une fois, l'une d'elles s'annule avant que d ne vale un.

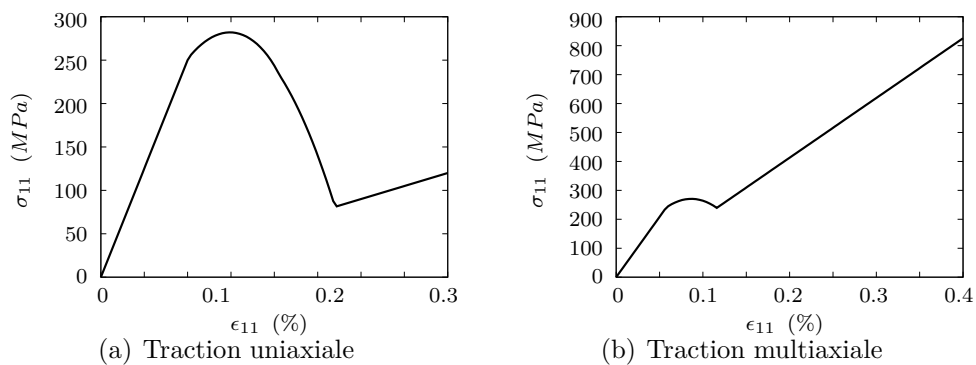


Figure 4.20 – Comportement du modèle en anisotropie nulle sous différents chargements (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 0$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^{-3}$)

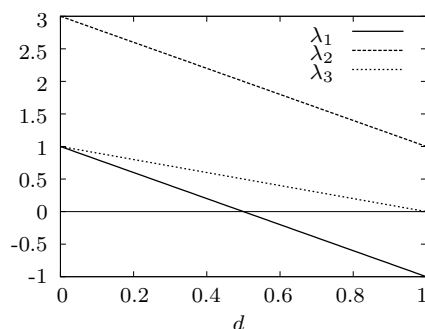


Figure 4.21 – Valeurs propres de l'opérateur de Hooke isotrope 2D endommagé dans toutes les directions ($\lambda = 2\mu = 1$)

Analyse du comportement à la propagation La Figure 4.22 montre un résultat de calcul à la propagation. La pathologie précédente entre en jeu à

l'intérieur de la zone endommagée lorsque la fissure s'ouvre : puisque la rigidité dans la direction normale à la fissure n'est pas complètement nulle, et que la déformation y est très grande, la contrainte devient elle-même suffisamment grande pour que le matériau s'endommage au droit de la fissure plutôt qu'en pointe de fissure.

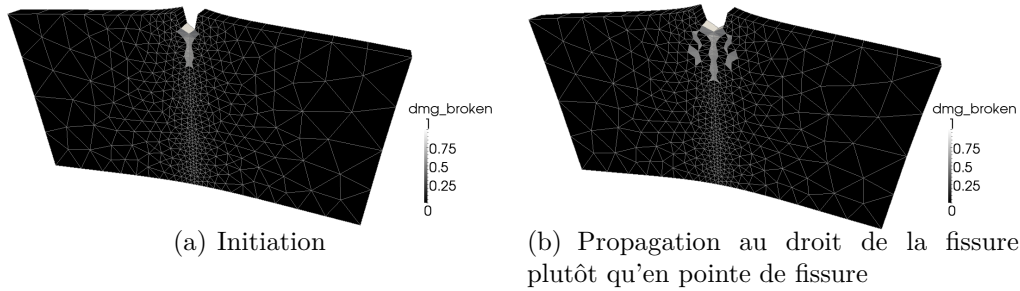


Figure 4.22 – Propagation pathologique de fissure (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 1$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^{-3}$) (champs de critères de limite d'endommagement)

Discussion La pathologie majeure mise en évidence par l'analyse présentée ici rend impossible l'utilisation de ce modèle pour le calcul de la propagation de fissures explicites. Plus généralement, elle questionne l'utilisation de modèles écrits en déformation pour modéliser la localisation de l'endommagement : est-il possible de formuler une loi d'évolution qui engendre un endommagement anisotrope tout en préservant le caractère défini de l'énergie jusqu'à ce que la rigidité, dans la direction de chargement, soit exactement nulle ?

4.2.2.5 Cas d'un modèle d'endommagement anisotrope écrit en contrainte mais piloté en déformation

Pour éviter les problèmes liés à la formulation en déformation (voir Section 4.2.2.4), on étudie maintenant le cas d'une formulation en contrainte. La résolution du modèle alors plus complexe et plus lente, puisque la loi de comportement doit être inversée numériquement à chaque itération. L'implémentation numérique du modèle est discutée Section 4.1.3.3.

Modèle On considère donc l'énergie libre :

$$2e_d = \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{+} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\underline{S}}} : \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{+} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} + \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{-} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} : \underline{\underline{\underline{S}}}_0 : \langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{-} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} \quad (4.42)$$

Où $\underline{\underline{\underline{S}}}_0$ est le tenseur de souplesse initial du matériau et $\underline{\underline{\underline{S}}}$ le tenseur de souplesse endommagé ; et où les $\langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{+/-} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}}$ sont définis par :

$$\langle \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{+/-} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} = \underline{\underline{\underline{S}}}^{-1/2} \langle \underline{\underline{\underline{S}}}^{1/2} \cdot \underline{\underline{\underline{\sigma}}}_{+/-} \rangle_{\underline{\underline{\underline{S}}}} \quad (4.43)$$

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

Menant à un potentiel continûment différentiable (voir Section 2.2.3.1), et donc à une loi de comportement continue, qui s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{S}} : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_+^{\underline{\underline{S}}} + \underline{\underline{S}}_0 : \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle_-^{\underline{\underline{S}}_0} \quad (4.44)$$

Pour piloter l'évolution de l'endommagement, on définit la force thermodynamique suivante :

$$\underline{\underline{Y}} = \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ \otimes \langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+ \quad (4.45)$$

Que l'on réécrit :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Y}} &= \|\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+\|^2 \cdot (\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}) \\ \text{avec } \underline{\underline{N}} &= \frac{\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+}{\|\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+\|} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Pour séparer l'intensité ($\|\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+\|$) et la morphologie ($\underline{\underline{N}}$) du chargement local.

Ainsi, on peut définir, pour la direction courante de chargement, une variation d'endommagement scalaire :

$$\delta d = \langle d_{\text{new}} - d_{\text{old}} \rangle_+ \quad \text{sans effet retard} \quad (4.47)$$

$$\delta d = \frac{\delta t}{\tau_c} \left(1 - e^{-\langle (d_{\text{new}} - d_{\text{old}}) - \delta d \rangle_+} \right) \quad \text{avec effet retard} \quad (4.48)$$

Où d_{new} représente l'endommagement induit par le chargement :

$$d_{\text{new}} = \left\langle \frac{\sqrt{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{Y}} : \underline{\underline{N}} - \epsilon_0}}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 = \left\langle \frac{\|\langle \underline{\underline{\epsilon}} \rangle_+\| - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1 \quad (4.49)$$

Avec ϵ_0 et ϵ_1 deux paramètres scalaires qui caractérisent la cinétique d'endommagement à proprement parler ; et d_{old} représente l'endommagement courant :

$$d_{\text{old}} = 1 - \frac{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{S}}_0 : \underline{\underline{N}}}{\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{N}}} \quad (4.50)$$

Finalement, la loi d'évolution s'écrit simplement :

$$\underline{\underline{\delta S}} = a \cdot \underline{\underline{\delta \tilde{S}}} + (1 - a) \cdot \left(\underline{\underline{\delta \tilde{S}}} : \underline{\underline{1}} \right) \cdot \underline{\underline{1}} \quad (4.51)$$

Où a est un paramètre qui caractérise la cinématique d'endommagement à proprement parler ($a = 1$ pour un endommagement anisotrope entièrement piloté par le chargement ; $a = 0$ pour un endommagement entièrement isotrope) ; et $\underline{\underline{\delta \tilde{S}}}$ la variation d'endommagement tensoriel :

$$\underline{\underline{\delta \tilde{S}}} = \left(\underline{\underline{N}} : \underline{\underline{S}}_0 : \underline{\underline{N}} \right) \cdot \frac{\delta d}{1 - d_{\text{old}}} \cdot (\underline{\underline{N}} \otimes \underline{\underline{N}}) \quad (4.52)$$

Pour définir la limite d'endommagement –ici nous n'avons pas à proprement parler de variable d'endommagement qui varie entre zéro et un–, on

considère les valeurs propres de $\underline{\underline{S}}$: lorsque l'une d'entre elles devient infinie –en pratique : beaucoup plus grande que sa plus petite valeur propre, ou bien que celle de $\underline{\underline{S}}_0$ – en un point d'intégration, on considère qu'il est cassé. Alors, son comportement n'évolue plus. En revanche, il est évident qu'on ne peut ôter toute la partie positive de l'énergie, car, et c'est bien l'intérêt d'avoir un endommagement anisotrope, si certaines directions peuvent être fortement dégradées, voire complètement rompues, d'autres directions peuvent quant à elles être entièrement saines, et ainsi participer à la rigidité du matériau. Ce cas limite est facilement détectable en pratique, car on doit de toute façon diagonaliser $\underline{\underline{S}}$ pour calculer sa racine carrée (voir Équation 4.43).

Remarques Les remarques concernant l'énergie, la cinématique, ainsi que la cinétique du modèle écrit en déformation (voir Section 4.2.2.4) sont également valables pour ce modèle ci, écrit en contrainte.

Un point sur le retour en compression après endommagement Contrairement au modèle écrit en déformation (voir Section 4.2.2.4), le modèle écrit en contrainte permet de recouvrer exactement le comportement initial du matériau, tant en compression multiaxiale qu'en compression uniaxiale. En effet, les déformations, éventuellement positives en compression, n'entrent pas en jeu dans l'énergie du modèle, et ne viennent donc pas perturber sa rigidité.

Analyse du comportement La Figure 4.23 représente le comportement du modèle, sans effet retard, en anisotropie complète ($a = 1$), sous des chargements de traction uniaxiale (Figure 4.23(a)) et multiaxiale (Figure 4.23(b)). La Figure 4.24 représente le comportement du modèle, sans effet retard, en anisotropie nulle ($a = 0$), sous des chargements de traction uniaxiale (Figure 4.24(a)) et multiaxiale (Figure 4.24(b)). Il apparaît clairement que la pathologie du modèle précédent n'est plus présente.

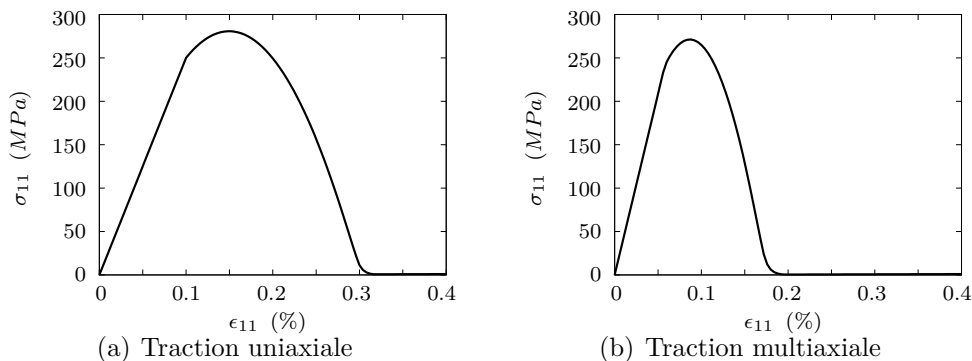


Figure 4.23 – Comportement du modèle en anisotropie complète sous différents chargements (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 1$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^{-3}$)

4.2. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration inter-fil et des décohésions fil-matrice associées

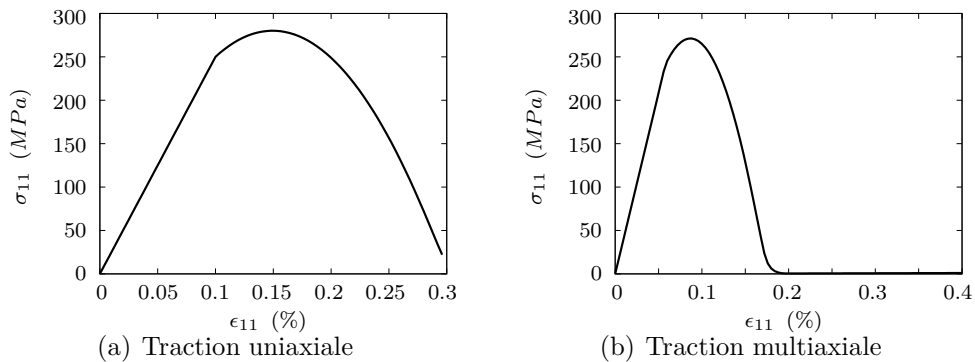


Figure 4.24 – Comportement du modèle en anisotropie nulle sous différents chargements (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 0$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 3 \cdot 10^{-3}$)

Possibilités et limites Si le calcul du modèle ne pose pas de difficulté tant que la limite d'endommagement n'est pas atteinte, lorsque qu'elle l'est l'inversion de la loi de comportement, qui fait intervenir des rigidités bien plus faibles en traction qu'en compression, peut devenir problématique, et la stratégie d'inversion mise en place (voir Section 4.1.3.3) peut échouer. C'est par exemple le cas de la Figure 4.24(a), où le calcul diverge avant que la limite d'endommagement ne soit atteinte. C'est la raison pour laquelle, dans l'état actuel des outils développés dans le cadre de cette thèse pour le calcul de ce modèle (voir Section 4.1.3.3), il peut être utilisé pour simuler un endommagement diffus (voir par exemple Figure 4.25), mais pas des fissures discrètes. Cependant, une nouvelle stratégie d'inversion de la loi de comportement a été formulée, et est en cours d'analyse.

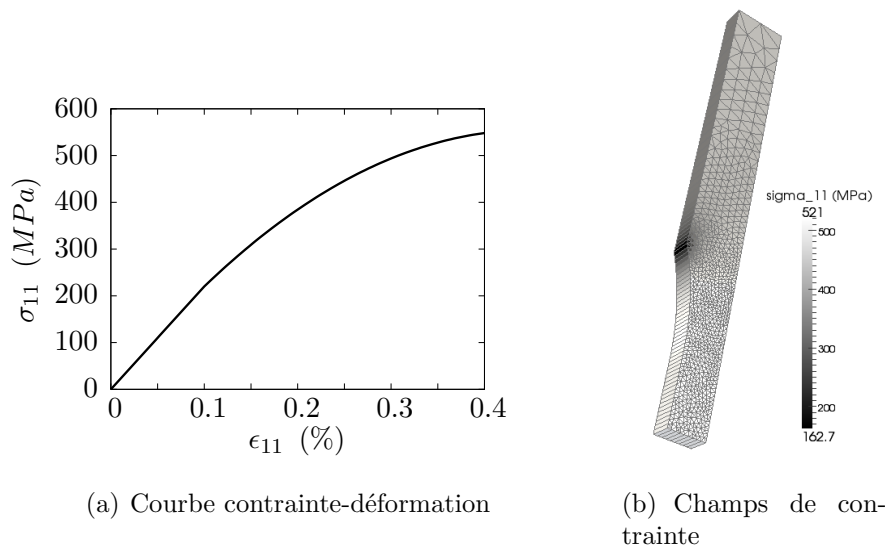


Figure 4.25 – Cas d'un éprouvette en haltère (sans effet retard, avec $E_0 = 250 \text{ GPa}$, $\nu_0 = 0.2$, $a = 1$, $\epsilon_0 = 1 \cdot 10^{-3}$ et $\epsilon_1 = 1 \cdot 10^{-4}$)

4.2.2.6 Cas d'un modèle d'endommagement isotrope

Afin de se concentrer sur le problème du contrôle de la localisation, et étant donné les problèmes rencontrés avec les modèles d'endommagement anisotrope (voir Sections 4.2.2.4 et 4.2.2.5), on s'intéresse maintenant à un modèle d'endommagement simplifié à l'extrême : isotrope, sans partition traction/compression, et piloté en déformation. Son implémentation numérique est discutée Section 4.1.3.1.

Modèle On considère donc la loi de comportement suivante :

$$\sigma = \frac{E(1-d)\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} (\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{1}}) \cdot \underline{\underline{1}} + \frac{E(1-d)}{1+\nu} \cdot \underline{\underline{\epsilon}} \quad (4.53)$$

$$d = f^d(\sup\langle\|\epsilon\|\rangle_+) \quad \text{sans effet retard} \quad (4.54)$$

$$\dot{d} = \frac{1}{\tau_c} e^{\langle f^d(\langle\|\epsilon\|\rangle_+) - d \rangle_+} \quad \text{avec effet retard} \quad (4.55)$$

$$\text{avec } f^d(\epsilon) = \left\langle \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon_1 - \epsilon_0} \right\rangle_0^1$$

Avec $E = 250 \text{ GPa}$, $\nu = 0.3$, $\epsilon_0 = 0.1 \%$ et $\epsilon_1 = 0.3 \%$.

Premier cas test, loi statique Dans le cas sans effet retard, on retrouve la pathologie standard de dépendance au maillage (voir Figure 4.26) : si le maillage est régulier alors la fissure propage dans la première rangée d'éléments; s'il est non régulier alors elle propage de manière complètement incontrôlée.

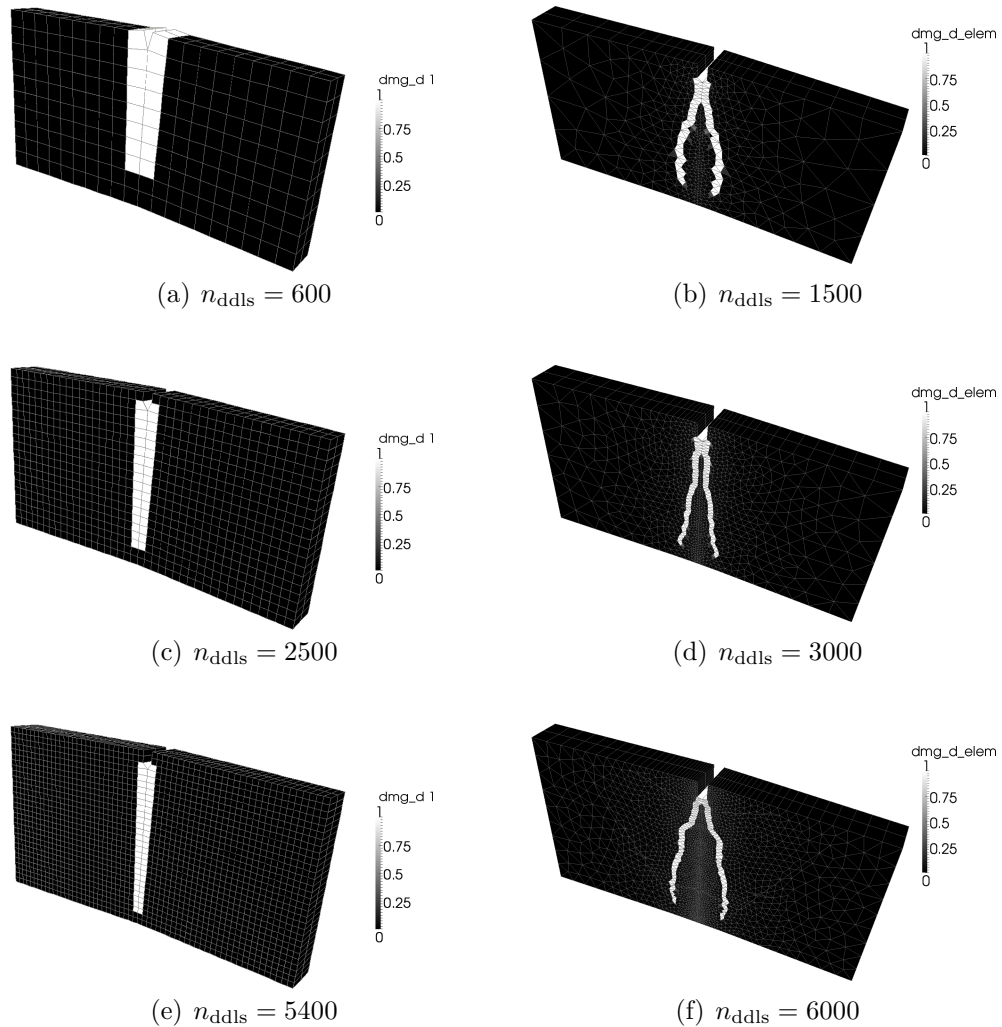


Figure 4.26 – Localisation : dépendance au maillage (Champs d'endommagement)

Premier cas test, loi à taux limité Dans le cas avec effet retard, on retrouve les résultats standards : i) la solution est indépendante du maillage (voir Figure 4.27) ; ii) elle est influencée par le paramètre d'effet retard (voir Figure 4.28) ; et iii) elle est influencée par la vitesse de chargement (voir Figure 4.29).

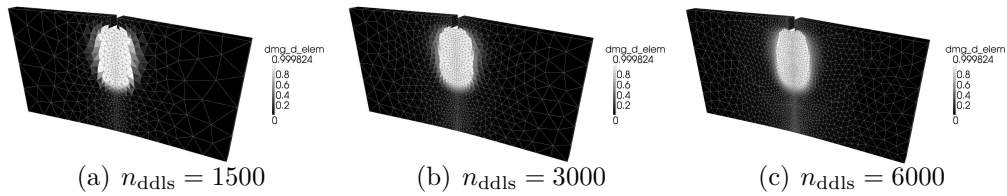


Figure 4.27 – Localisation contrôlée : indépendance au maillage (Champs d'endommagement) ($\tau_c = 0.1s$, $t_0 = 1s$)

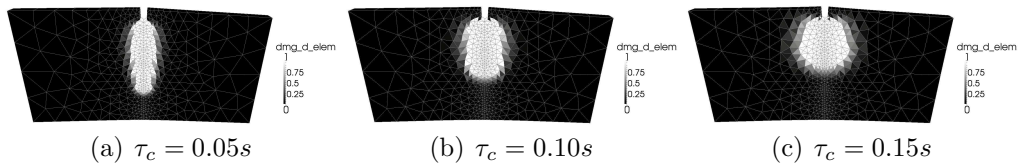


Figure 4.28 – Localisation contrôlée : influence de l'effet retard (Champs d'endommagement) ($n_{ddls} = 1500$, $t_0 = 1s$)

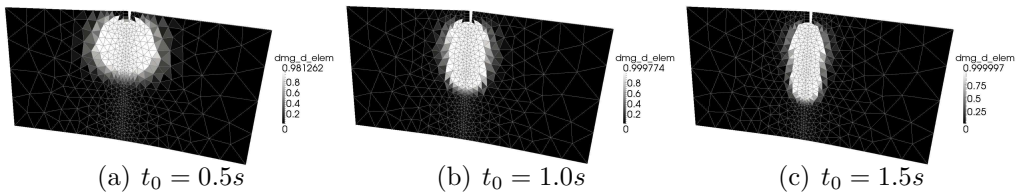


Figure 4.29 – Localisation contrôlée : influence du temps de montée (Champs d'endommagement) ($n_{ddls} = 1500$, $\tau_c = 0.1s$)

Second cas test, loi statique La Figure 4.30 présente des résultats de calcul sans effet retard, pour différents maillages et à différents instants : si la fissure a globalement la même forme, on peut remarquer qu'elle ne s'amorce ni ne se propage aux mêmes instants.

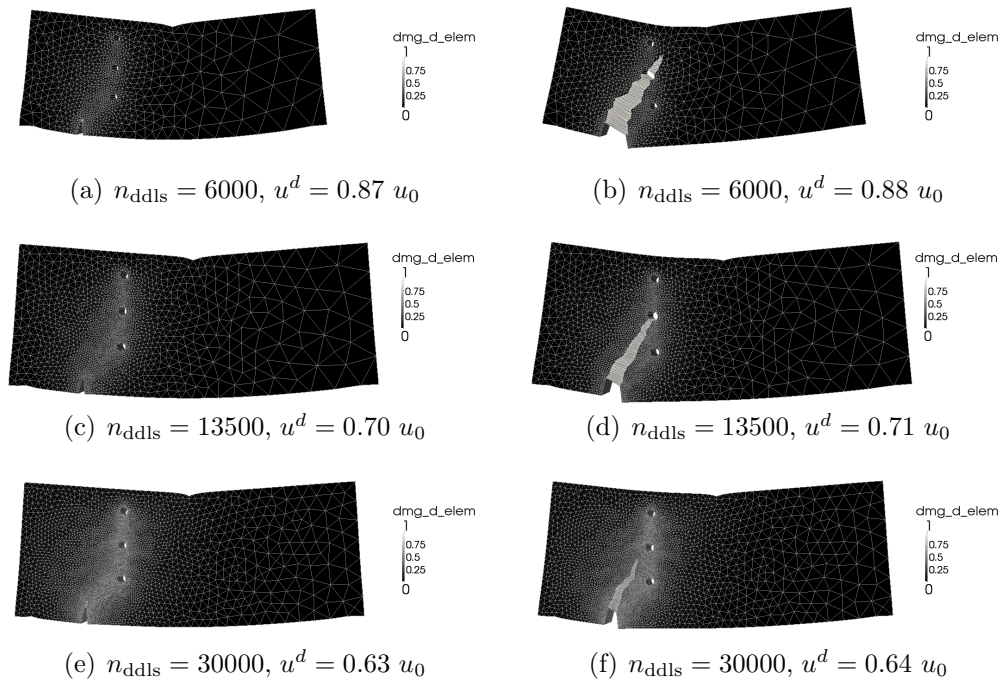


Figure 4.30 – Solution sans effet retard ($u_0 = 0.15 \text{ mm}$), pour différents maillages et à différents instants : dépendance au maillage de l'initiation de la fissure (champs d'endommagement)

Second cas test, loi à taux limité La Figure 4.31 présente des résultats de calcul avec effet retard, et met en évidence le fait que la solution peut bien être régularisée indépendamment du maillage. Cependant, à l'heure où cette thèse est rédigée, la mise au point de la technique de régularisation n'est pas entièrement maîtrisée, et le calcul mène à l'amorçage d'autres fissures dans la structure (voir Figure 4.32).

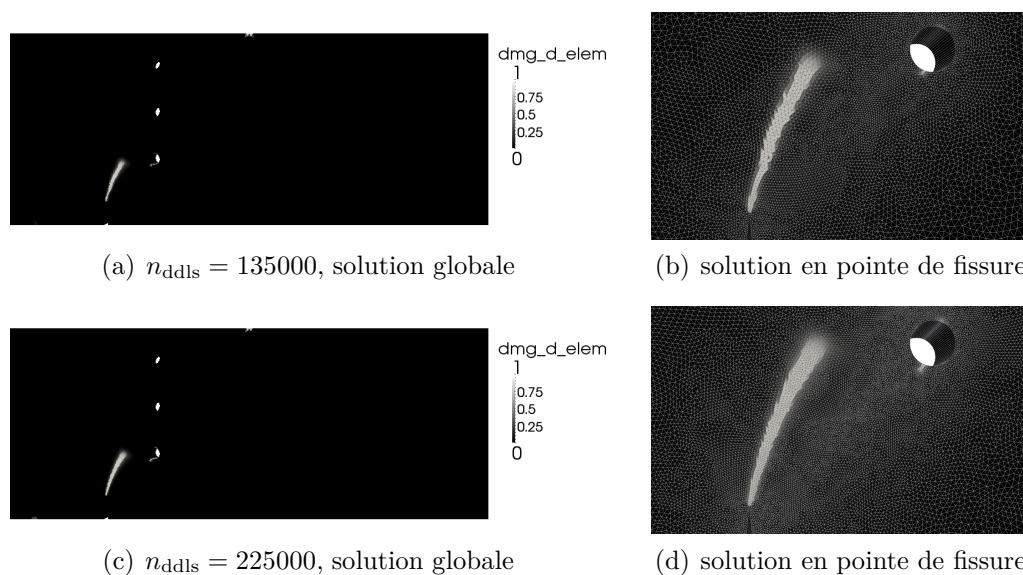


Figure 4.31 – Solution avec effet retard ($u_0 = 0.20 \text{ mm}$, $\tau_c = 0.1 \text{ s}$, $t_0 = 1 \text{ s}$, $t_1 = 6 \text{ s}$), pour différents maillage (champs d'endommagement)

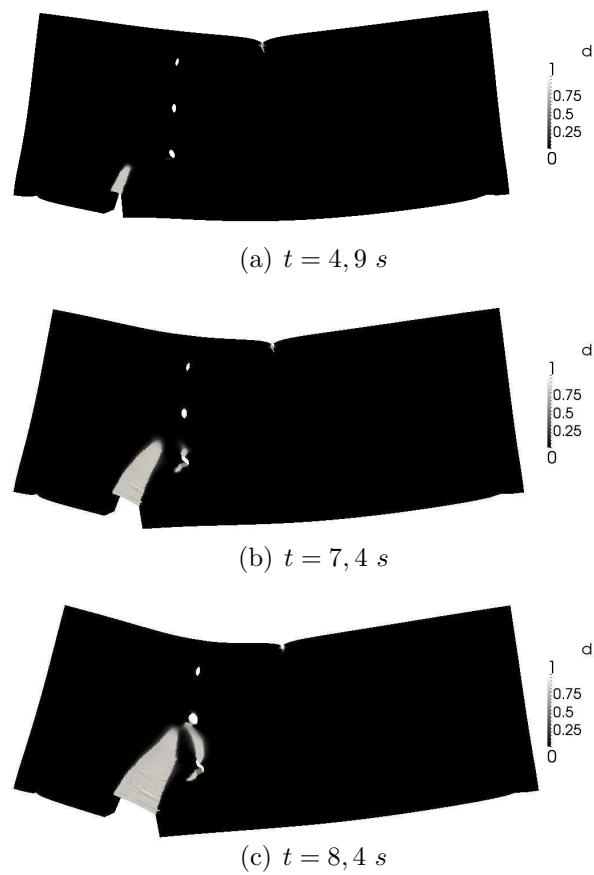


Figure 4.32 – Solution avec effet retard ($u_0 = 0.20 \text{ mm}$, $\tau_c = 0.1 \text{ s}$, $t_0 = 1 \text{ s}$), à différents instants : amorçage de plusieurs fissures (champs d'endommagement)

4.2.2.7 Bilan

Un certain nombre de difficultés ont été rencontrées au niveau

- de la modélisation de l'endommagement anisotrope :
 - pour obtenir une contrainte nulle dans la direction d'endommagement dans le cas des formulations en déformation (voir Section 4.2.2.4) ;
 - pour inverser numériquement la loi de comportement fortement endommagée dans le cas des formulations en contrainte (voir Section 4.2.2.5) ;
- et du contrôle de la localisation :
 - pour régler les paramètres de la loi d'effet retard de telle sorte à éviter l'apparition de fissures parasites (voir Section 4.2.2.6).

C'est la raison pour laquelle la méthode n'a pas été appliquée au cas de la fissuration inter-fil des CMCs. Des développements sont actuellement en cours pour pallier ces difficultés.

4.3 Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration intra-fil transverse et des décohésions fibres-matrices associées

4.3.1 Choix de la représentation

La problématique spécifique au traitement de la fissuration transverse des fils dans nos cellules à l'échelle fil est la suivante :

- Le pas de fissuration à saturation ($\simeq 50\mu m$ [Lissart et Lamon, 1997a]) est très petit devant l'échelle caractéristique du fil ($\simeq 1mm$). Par conséquent, un traitement explicite est difficilement envisageable.
- Ces fissures sont le chemin d'accès de l'oxygène aux fibres qui soutiennent le chargement mécanique, elles sont donc l'un des facteurs clefs de la durée de vie du matériau [Cluzel *et al.*, 2009]. Par conséquent, un traitement fin est nécessaire.

L'approche mise en place consiste à utiliser dans les cellules de tissu un modèle macroscopique –continu–, homogénéisé à partir d'un modèle microscopique –discret– de la fissure et de la décohésion associée. Un pont existe entre les deux représentations, qui permet de relier, à chaque étape du calcul, les grandeurs continues –déformation inélastique, endommagement, etc– aux grandeurs discrètes –taux de fissuration, ouverture des fissures, etc–.

L'homogénéisation de fissures –*a fortiori* de fissures frottantes– dans le cas général est un problème de recherche actuel [Oskay et Fish, 2007; Kanoute *et al.*, 2009], qui nécessite bien souvent des calculs numériques sur des cellules micros. En revanche, dans certains cas particulier, des méthodes établies, analytiques, peuvent s'appliquer. Par exemple, la méthode initiée par [Volterra, 1907] est appliquée dans [Hild *et al.*, 1994, 1996a] pour homogénéiser, dans le

cas des minicomposites, la fissuration matricielle, les ruptures de fibres, et les décohésions fibre/matrices associées (voir Section 2.3.1).

L'approche proposée est directement basée sur celle de [Hild *et al.*, 1996a]. En effet, c'est par là que les travaux ont commencé, et le temps ne nous a pas permis d'aller beaucoup plus loin. Ainsi, seul le cas 1D a été formulé et implémenté. De plus, les ruptures de fibres ne sont pas prises en compte. En revanche, i) le caractère probabiliste de la fissuration matricielle a été introduit, et ii) les lois d'évolutions des variables internes sont entièrement calculées à partir des calculs micros (voir Section 2.3.1).

Elle se distingue de celle proposée dans [Letombe, 2005; Cluzel *et al.*, 2007] i) par son caractère analytique –dans [Letombe, 2005], le modèle micro est numérique–, ii) par le fait que les variations de chargement sont traitées au niveau micro –dans [Letombe, 2005], l'homogénéisation est opérée pour un chargement monotone, et l'histoire du chargement est traitée dans le modèle homogénéisé à l'aide d'une loi de type plastique identifiée au niveau macro–, et iii) par le fait qu'elle n'intègre pas les développements proposés pour la fatigue cyclique.

4.3.2 Modélisation

Modèle discret On considère comme représentation micro le modèle *shear lag* standard [Aveston *et al.*, 1971] (voir Section 2.1.1), où la constante de cisaillement est notée τ (voir Figure 4.33).

Séparation de l'énergie Suivant l'idée originale de [Volterra, 1907], utilisée dans [Hild *et al.*, 1994; Hild, 1998] ainsi que dans [Vivier *et al.*, 2009], l'énergie interne du modèle micro est divisée entre les énergies élastiques stockée et récupérable :

$$E^i = E^s + E^r \quad (4.56)$$

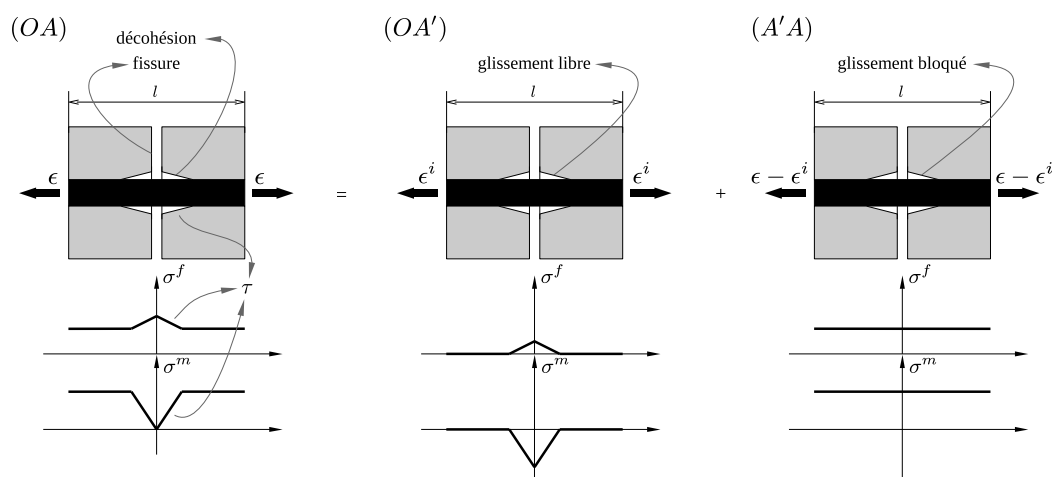
Cette séparation de l'énergie est faite pour tout état (A), en séparant le problème définissant le chemin (OA) en un problème purement frottant définissant le chemin conceptuel (OA') et un problème purement élastique définissant le chemin ($A'A$) (voir Figures 4.33).

Calcul de l'énergie élastique Dans l'hypothèse du *shear lag*, l'énergie élastique du problème ($A'A$) s'écrit simplement :

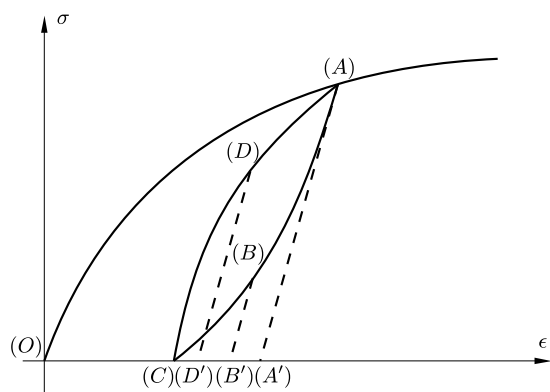
$$2E^r = \bar{E} (\epsilon - \epsilon^i)^2 \quad (4.57)$$

Où $\bar{E} = E^f V^f + E^m V^m$ est le module de Young moyen du système composite sain, ϵ la déformation du composite en (A), et ϵ^i la déformation du composite en (A').

Calcul de l'énergie stockée En revanche, pour l'énergie stockée, la difficulté majeure vient du fait que l'énergie stockée dans l'état (A') sous forme de contraintes auto-équilibrées n'est pas un potentiel d'état, mais dépend de



(a) Champs de contrainte



(b) Courbe contrainte-déformation

Figure 4.33 – Décomposition du problème frottant en un problème purement frottant et un problème purement élastique

l'histoire du chargement. Ainsi, l'introduction de variables internes additionnelles est nécessaire. Dans le cas général, une infinité de variables internes sont nécessaires. Cependant, dans la plupart des cas pratique –on se bornera à des cas de charge-décharge complètes–, il est possible de calculer ϵ^i en utilisant une unique variable interne. Pour ce faire, on écrit :

$$\epsilon^i = \frac{u^i}{l} \quad (4.58)$$

Où u^i est le déplacement inélastique associé à une unique fissure, et l la distance moyenne inter-fissure. Ainsi, calculer ϵ^i revient à calculer \dot{u}^i et \dot{l} .

Tout d'abord, l'approximation *shear lag* conduit à des expressions simples pour \dot{u}^i (voir Figure 4.33(b)) :

$$\dot{u}^i = \begin{cases} \frac{r_f E_m^2 V_m^2 \sigma \dot{\sigma}}{\bar{E}^2 E_f V_f^2 \tau} & \text{sur } (OA) \\ -\frac{r_f E_m^2 V_m^2 (\sigma - \sigma^A) \dot{\sigma}}{2\bar{E}^2 E_f V_f^2 \tau} & \text{sur } (AC) \\ \frac{r_f E_m^2 V_m^2 \sigma \dot{\sigma}}{2\bar{E}^2 E_f V_f^2 \tau} & \text{sur } (CA) \end{cases} \quad (4.59)$$

Où σ^A est la contrainte maximale appliquée, c'est l'unique variable interne du modèle.

Ensuite, la distance moyenne entre les fissures peut être calculée en suivant l'approche de [Curtin, 1991a] (voir Section 2.1.1). Elle peut également être approximée par la loi suivante (voir Figure 4.34) :

$$l = \begin{cases} +\infty & \text{si } \sigma^A < \sigma_c \\ L_0 \ln 2 \left(\frac{\sigma_0}{\sigma^A}\right)^m & \text{si } \sigma_c < \sigma^A < \sigma_l \\ l_c & \text{si } \sigma^A > \sigma_l \end{cases} \quad (4.60)$$

avec

$$\begin{cases} \sigma_c = \sigma_0 \left(\frac{L_0 \ln 2}{L}\right)^{1/m} \\ \sigma_l = \sigma_0 \left(\frac{L_0 \ln 2}{l_c}\right)^{1/m} \\ l_c = \left(\frac{\sigma_0 r_f}{\tau}\right)^{m/m+1} L_0^{1/m+1} \end{cases}$$

Où L_0 , σ_0 et m sont les coefficients de Weibull classiques, et L la longueur du fil composite.

Modèle continu Finalement, la loi de comportement du composite endommagé dérive du potentiel d'énergie élastique récupérable :

$$\sigma = \frac{\partial E^r}{\partial \epsilon} = \bar{E} (\epsilon - \epsilon^i) \quad (4.61)$$

Et la loi d'évolution de ϵ^i est définie Équations (4.58), (4.59) et (4.60).

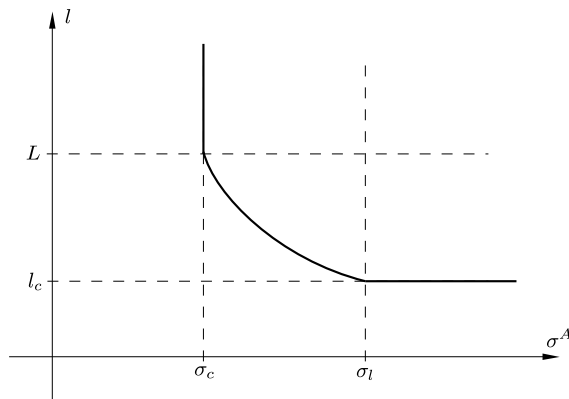


Figure 4.34 – Loi de distance inter-fissure moyenne en fonction de la contrainte maximale appliquée

Ainsi, le modèle microscopique est écrit dans un formalisme purement macroscopique, et peut donc être simulé comme un modèle continu standard. De plus, il est important de souligner que ce modèle est uniquement basé sur des paramètres microscopiques connus, et que ses variables internes sont fortement liées à la représentation microscopique des fissures. Par exemple, à chaque étape du calcul, la densité et l'ouverture des fissures sont parfaitement connus.

4.3.3 Exemples

On présente maintenant quelques résultats de calculs concrets. Les paramètres utilisés sont ceux de [Lissart et Lamon, 1997a], qui sont rappelés Tableaux 4.1, 4.2 et 4.3. De plus, on a considéré une contrainte de cisaillement interfaciale $\tau = 100 \text{ MPa}$, et un longueur totale de fil $L = 75 \text{ mm}$.

Cas 0D Les Figures 4.35 et 4.36 présentent la réponse du modèle, en terme de loi de comportement et d'évolution des quantités micros, pour différents cas de chargement. On illustre ainsi la capacité du modèle à représenter i) les déformations inélastiques, ii) les boucles d'hysteresis, et iii) la refermeture des fissures.

Cas du tissu Les Figures 4.37 et 4.38 présentent les champs de quantité micros sur les fils des cellules E.F. présentées Section 3. Pour chaque calcul, la matrice est entièrement élastique. En revanche, pour le calcul de la Figure 4.38 une fissure est introduite dans le plan de chargement. On illustre ainsi la capacité du modèle à représenter l'influence des fissures inter-fils sur la fissuration intra-fil transverse.

4.3. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration intra-fil transverse et des décohésions fibres-matrices associées

E_f (GPa)	ν_f ()	E_m (GPa)	ν_m ()
200	0.3	400	0.3

Tableau 4.1 – Propriétés mécaniques des composants micros [Lissart et Lamon, 1997a]

r_f (μm)	V_f (%)	V_m (%)
7	30	60

Tableau 4.2 – Propriétés géométriques des composants micros [Lissart et Lamon, 1997a]

V_0 (m^3)	σ_0 (MPa)	m_σ ()
1	11	6.1

Tableau 4.3 – Propriétés critiques de la matrice [Lissart et Lamon, 1997a]

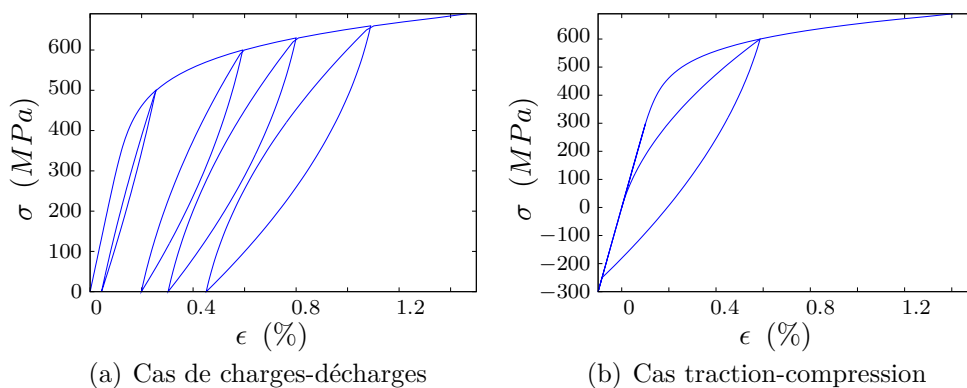
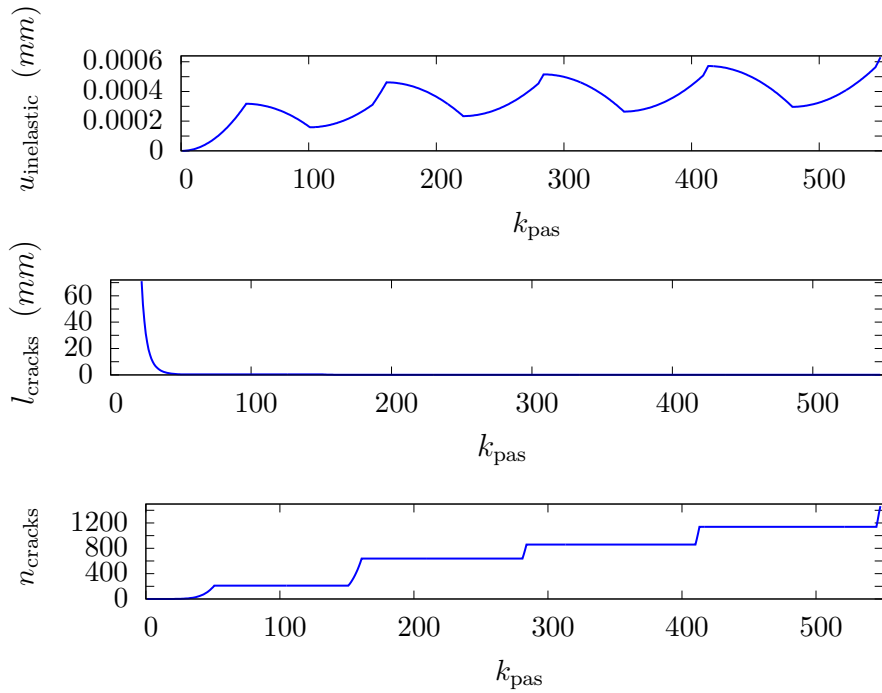
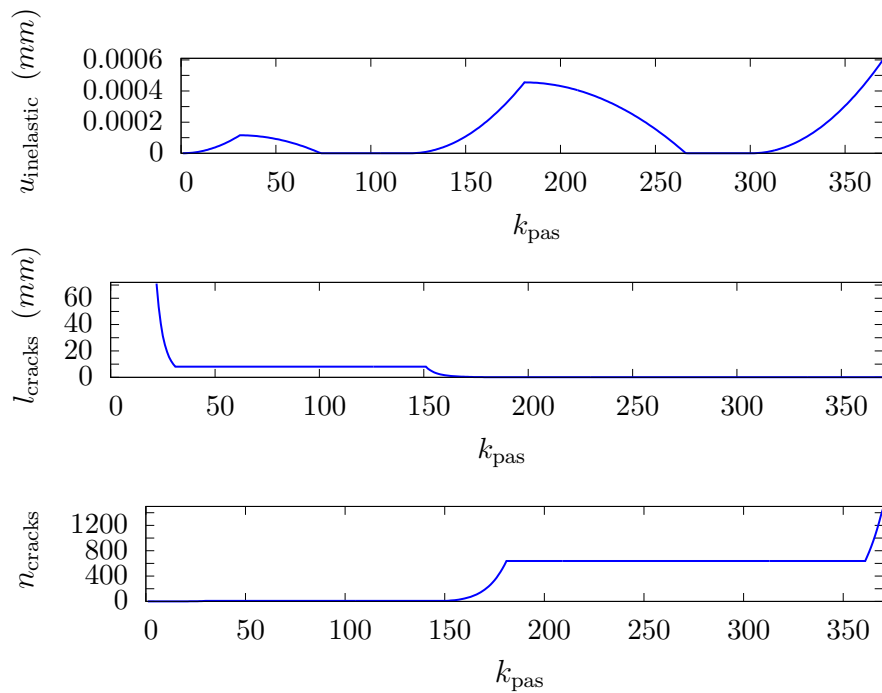


Figure 4.35 – Réponse du modèle homogénéisé pour différents cas de chargement : courbes contrainte-déformation



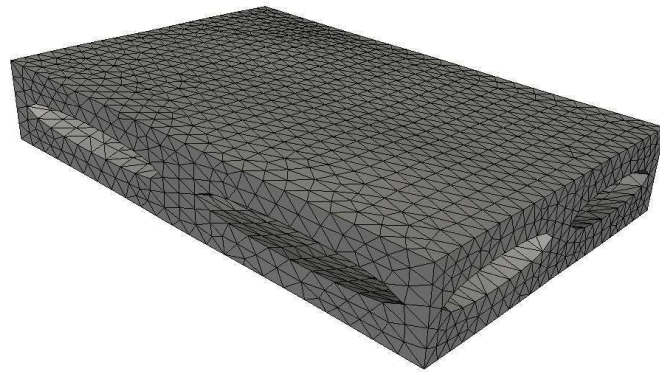
(a) Cas de charges-décharges



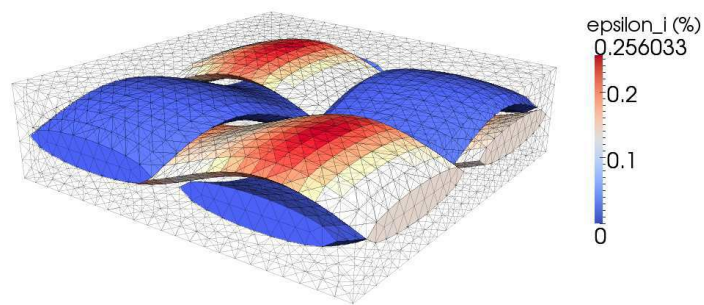
(b) Cas traction-compression

Figure 4.36 – Réponse du modèle homogénéisé pour différents cas de chargement : informations micro (nombre de fissures, distance moyenne inter-fissure, déplacement inélastique associé à une fissure) en fonction du pas de chargement

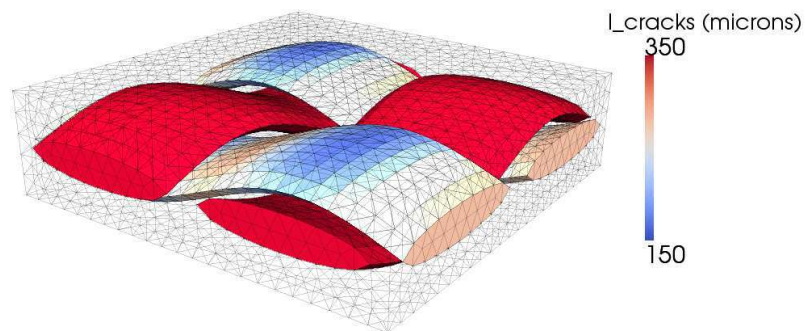
4.3. Comportement endommagé à l'échelle du tissu, cas de la fissuration intra-fil transverse et des décohésions fibres-matrices associées



(a) Matrice saine (déformée)

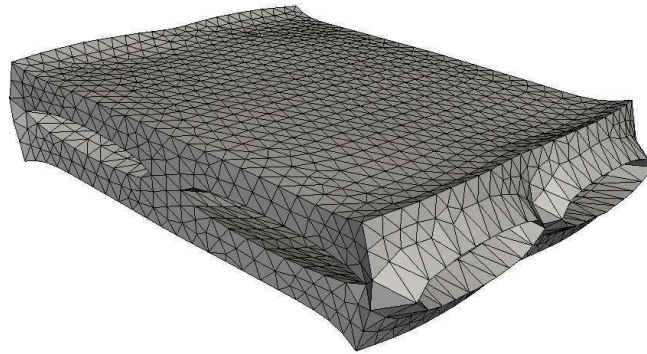


(b) Déformation inélastique

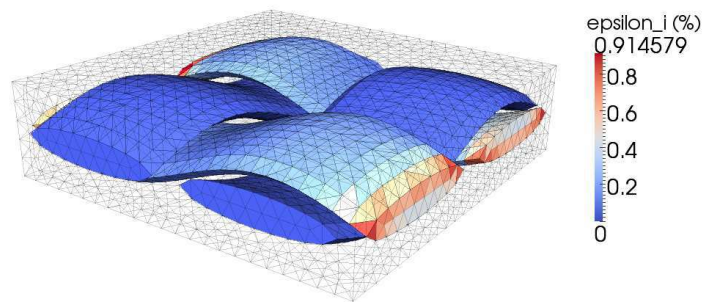


(c) Distance inter-fissure

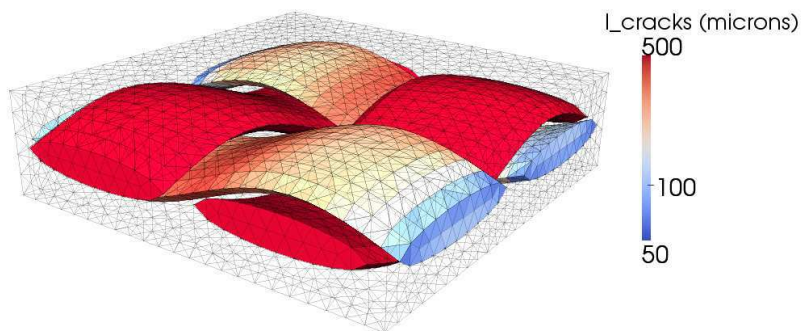
Figure 4.37 – Champs de quantité micros sur une cellule de tissu avec matrice non fissurée (déformation macroscopique : 0,4 %)



(a) Matrice "fissurée" (déformée)



(b) Déformation inélastique



(c) Distance inter-fissure

Figure 4.38 – Champs de quantité micros sur une cellule de tissu avec matrice fissurée (déformation macroscopique : 0,4 %)

4.4 Comportement endommagé à l'échelle de la structure

Les outils de calcul numérique mis en place dans le cadre de cette thèse (voir Section 4.1) permettent tout naturellement de simuler sur des géométries 3D le modèle macroscopique d'endommagement déjà présenté dans [Ladevèze *et al.*, 2001; Ladevèze, 2002; Letombe, 2005], mais jusque là simulé en 0D avec un pilotage en contrainte [Baranger *et al.*, 2007; Cluzel *et al.*, 2007; Baranger *et al.*, 2008; Cluzel *et al.*, 2009].

4.4.1 Modélisation

La formulation générale du modèle –potentiel énergétique, loi d'évolution pour la fissuration matricielle– a déjà été présentée Section 2.2.3.5. Pour les autres lois d'évolution, ainsi que les déformations anélastiques, on se référera à [Ladevèze, 2002; Letombe, 2005]. Pour l'identification à [Letombe, 2005].

Remarques

1. Si le modèle a toujours été écrit en 2D, ici il est implémenté en 3D, mais seul le comportement plan est affecté de l'endommagement.
2. Le comportement anélastique n'a pas été implémenté.

Analyse du comportement La Figure 4.39 présente la réponse du modèle –courbe contrainte-déformation et évolution des variables scalaires d'endommagement– sous chargement cyclique uniaxial dans la direction 1. La Figure 4.40 pour un chargement biaxial dans les directions 1 et 2.

4.4.2 Exemples au sein de la plateforme LMT++

On présente maintenant quelques résultats de calculs sur cas tests industriels.

Plaque trouée Les Figures 4.41 et 4.43 présentent un résultat de calcul –courbe contrainte déformation et champs de variables scalaires d'endommagement– sur une plaque trouée (30000 degrés de liberté, 100 pas de chargements, 740 itérations globales, 108h de calcul).

Il est important de signaler que le point d'inflexion observé sur la courbe contrainte-déformation simulée autour de 0.2 % – 200 MPa (voir Figure 4.41) n'est pas observé en pratique. En effet, il correspond, au niveau du modèle, à une saturation de la fissuration matricielle dans l'éprouvette, à une saturation de la fissuration des fils longitudinaux autour du trou, ainsi qu'à l'apparition de la fissuration des fils transverses autour du trou (voir Figure 4.43 pour $\epsilon = 0.2\%$). Et en pratique, c'est à ce niveau qu'apparaissent d'autres mécanismes, comme la rupture des fibres –qui n'est pas dans le modèle–, ou les déformations inélastiques –qui est dans le modèle présenté dans [Letombe, 2005], mais n'est

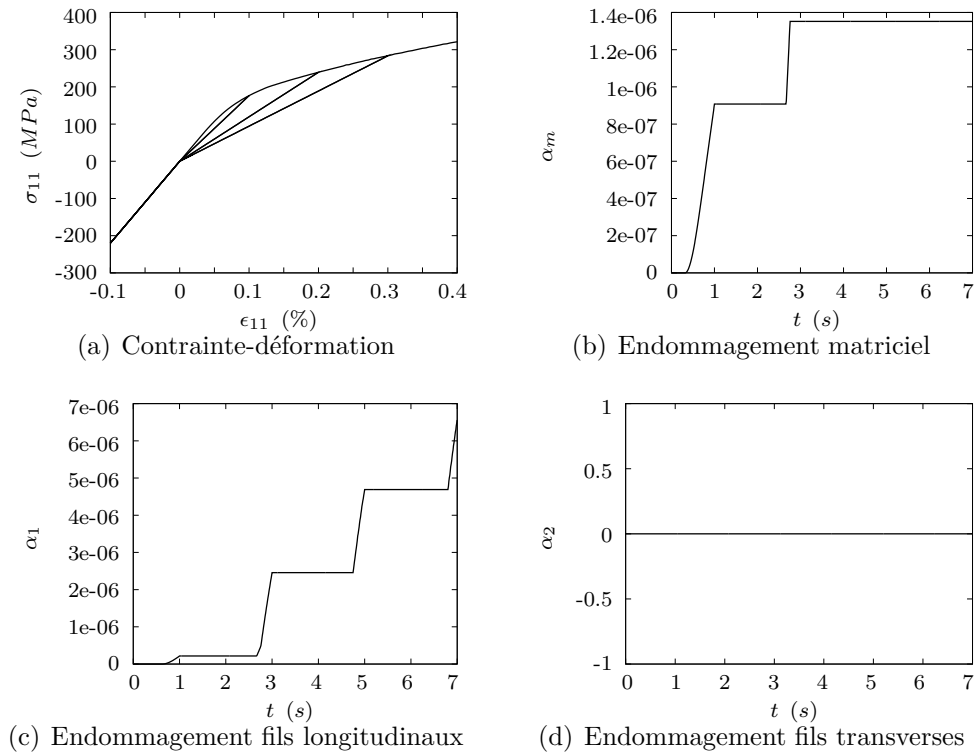


Figure 4.39 – Comportement du modèle en traction cyclique uniaxiale

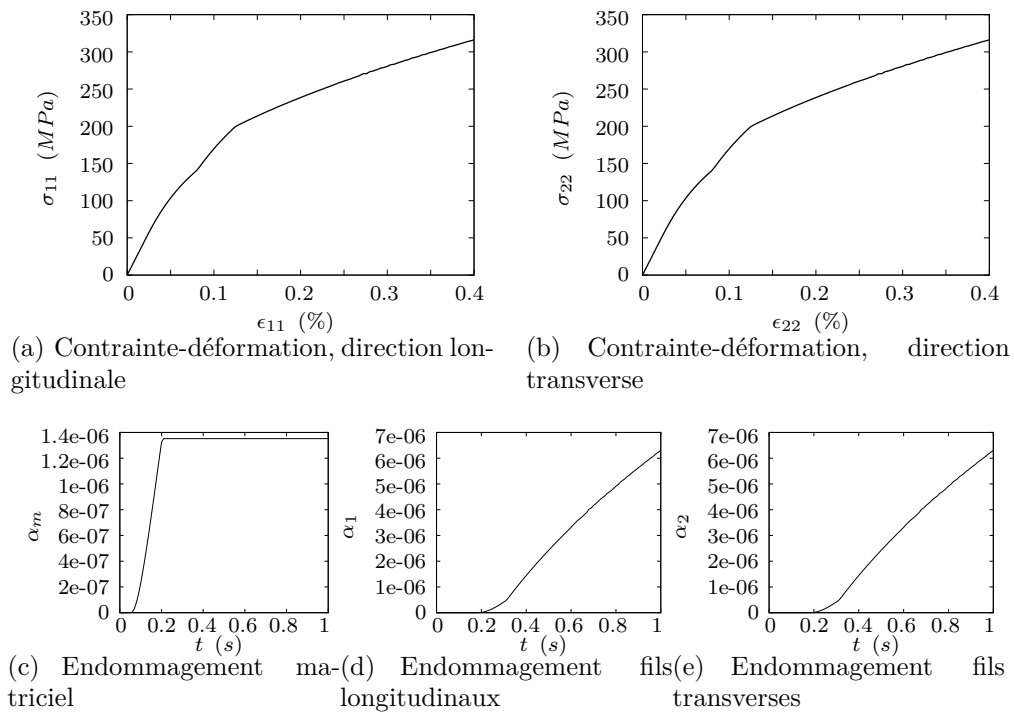


Figure 4.40 – Comportement du modèle en traction biaxiale

pas implémenté dans le code—. Ainsi, la stratégie de calcul mise en œuvre permet de simuler le modèle au-delà de son domaine de validité, elle est donc satisfaisante, mais les états d'endommagement correspondants (voir Figure 4.43 pour $\epsilon = 0.4 \%$) n'ont pas de contenu physique.

Éprouvette en haltère Les Figures 4.42 et 4.44 présentent un résultat de calcul –courbe contrainte déformation et champs de variables scalaires d'endommagement– sur une éprouvette en haltère (40000 degrés de liberté, 100 pas de chargements, 430 itérations globales, 90h de calcul).

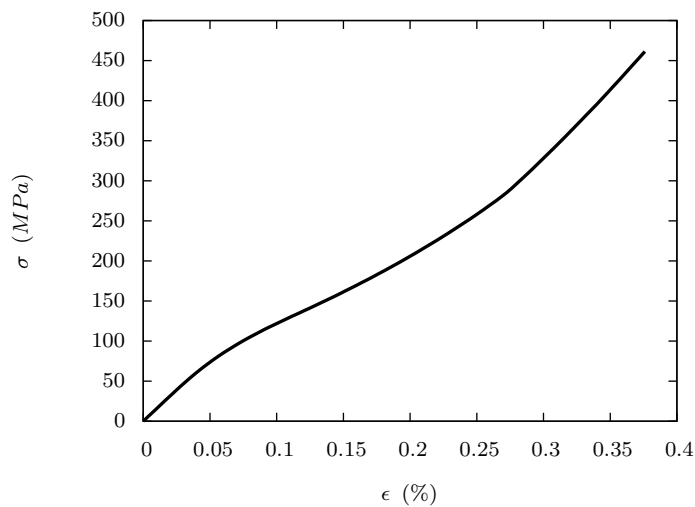
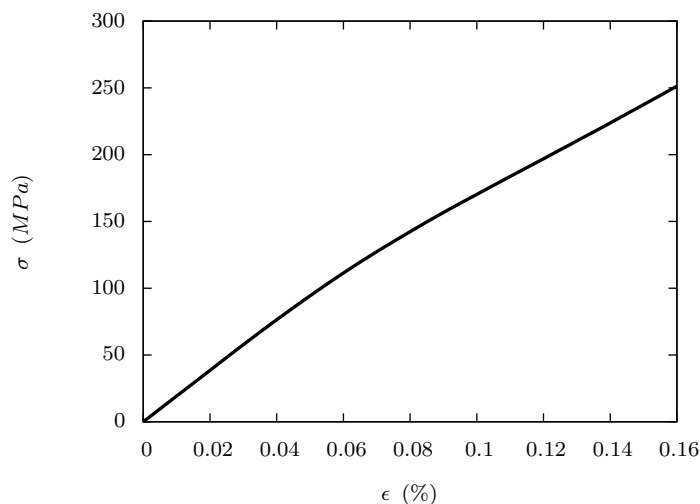


Figure 4.41 – Calcul d'une plaque trouée dans LMT++ : courbe contrainte-déformation



(a) Contrainte-déformation

Figure 4.42 – Calcul d'une éprouvette en haltère dans LMT++ : courbe contrainte-déformation

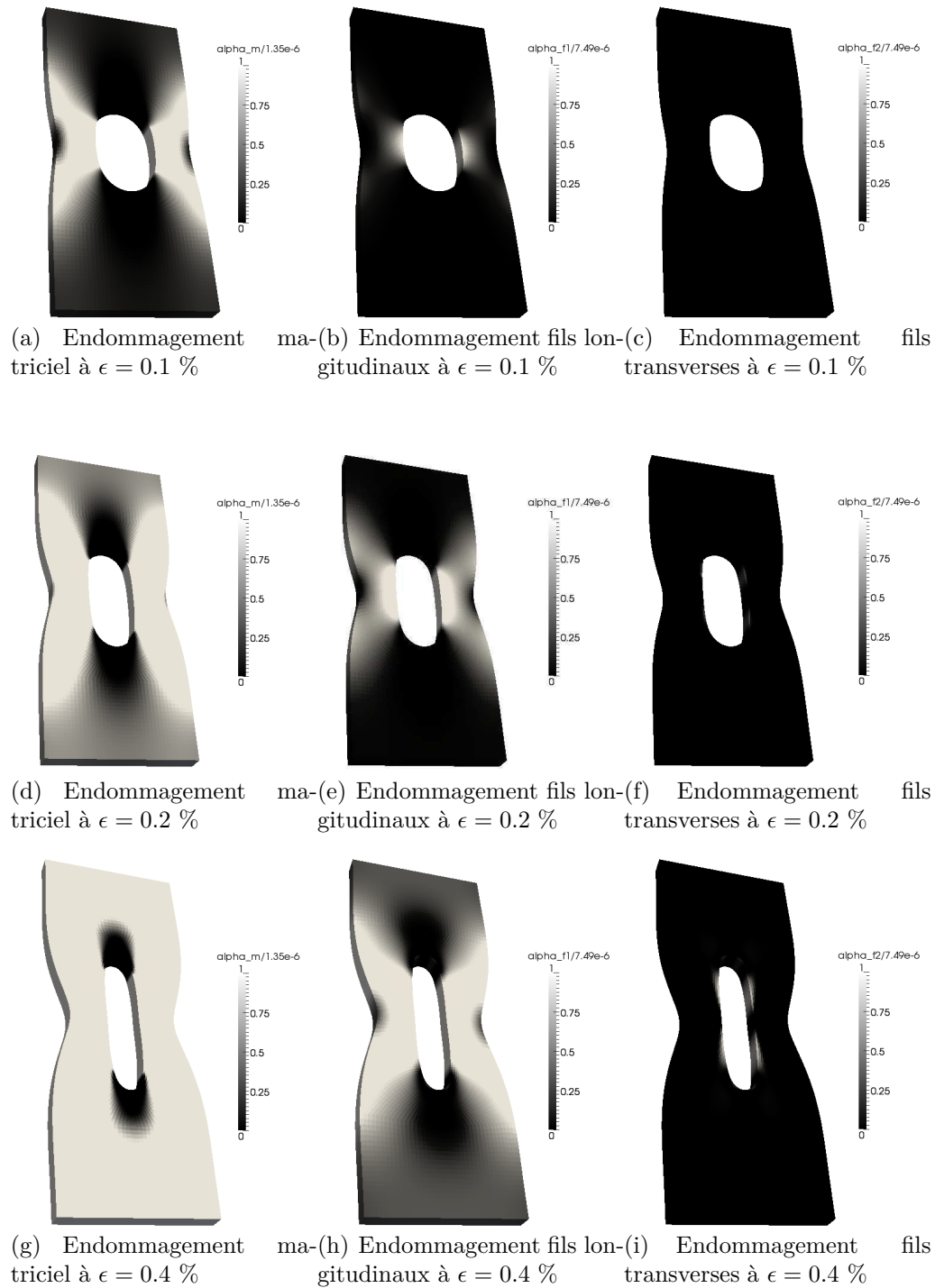


Figure 4.43 – Calcul d’une plaque trouée dans LMT++ : champs d’endommagement adimensionnés pour différents niveaux de déformation imposée

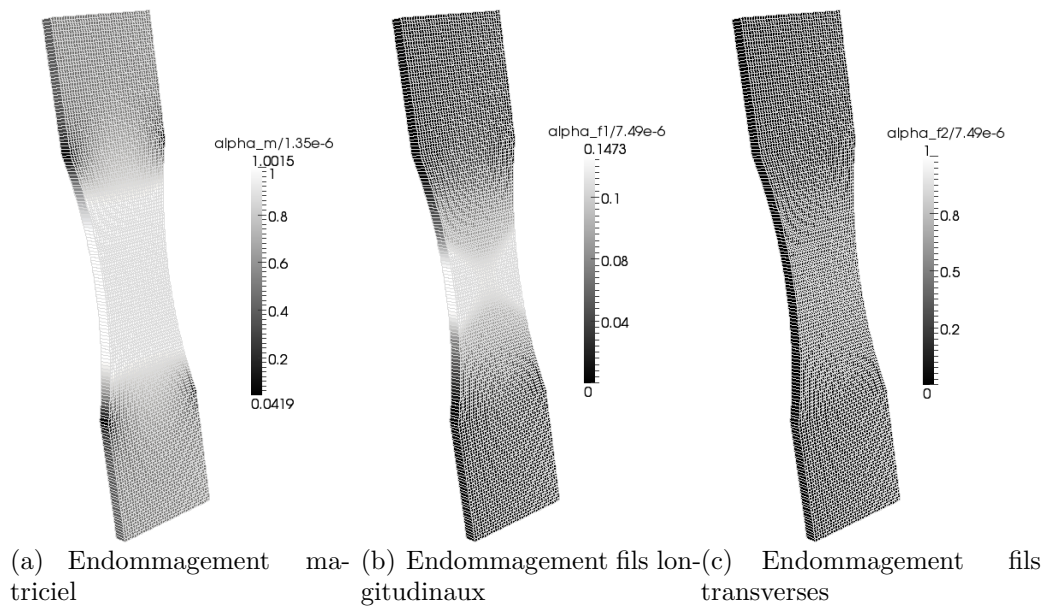
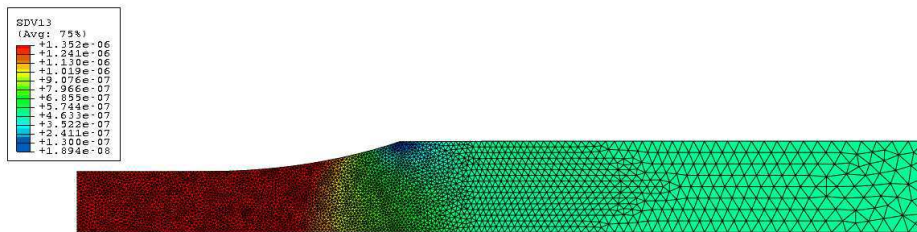


Figure 4.44 – Calcul d’une éprouvette en haltère dans LMT++ : champs d’endommagement adimensionnés à $\epsilon = 0.1 \%$

4.4.3 Exemples au sein de ABAQUS

Pour assurer le transfert de ces travaux à nos partenaires industriels, ce modèle a également été implémenté dans le code de calcul ABAQUS, sous la forme d’une routine UMAT écrite en C++ et générique pour le 2D/3D (voir Figures 4.45 et 4.46).

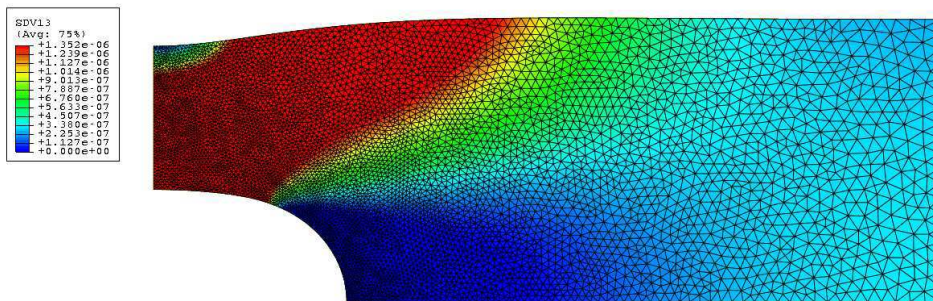


(a) Endommagement matriciel

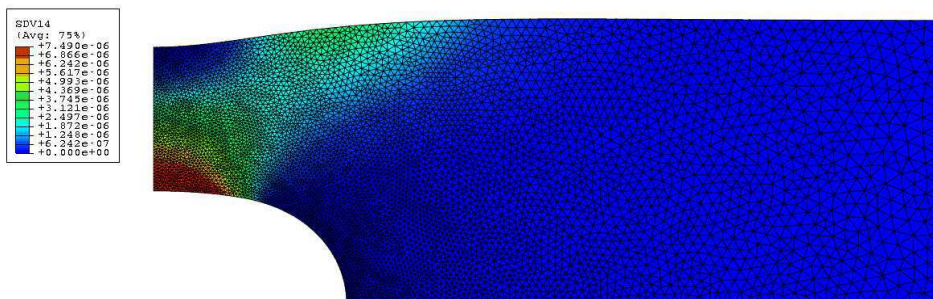


(b) Endommagement fils longitudinaux

Figure 4.45 – Calcul d’une éprouvette en haltère dans ABAQUS : champs d’endommagement à $\epsilon = 0.1 \%$



(a) Endommagement matriciel



(b) Endommagement fils longitudinaux

Figure 4.46 – Calcul d’une éprouvette trouée dans ABAQUS : champs d’endommagement à $\epsilon = 0.1 \%$

Troisième Partie

Durée de vie

On présente maintenant les différents aspects des travaux de thèse relatifs à la modélisation et la simulation de la durée de vie du composite. Là encore, il s'agit des bases du matériau virtuel : le calcul de la dégradation physico-chimique des fibres à partir de l'état d'endommagement du composite. Pour commencer, une synthèse bibliographique est présentée qui permet de situer les travaux de thèse par rapport à ceux de la littérature. Puis, on traite la durée de vie des fibres. Les mécanismes de cicatrisation ne sont pas traités.

Chapitre 5

Éléments de bibliographie

Le problème de la rupture sous-critique des céramiques a été largement abordé dans la littérature. Il regroupe en fait deux sous-problèmes :

1. la description des défauts de surface, qui est généralement faite dans le cadre de la théorie de Weibull grâce à l'introduction d'une morphologie de défaut ;
2. la description de la propagation sous-critique des défauts, contenant des physiques plus ou moins étoffées.

Ainsi, on rappelle d'abord la théorie de Weibull et son application aux fibres céramiques et à la description de leurs défauts de surface ; puis on présente différentes approches de modélisation de la propagation sous-critique de ces défauts.

De même, les aspects statistiques associés au traitement de mèches de fibres ont été largement étudiés, et quelques points clefs sont rappelés ici, concernant leur contrainte à rupture et leur durée de vie.

5.1 Fibres

5.1.1 Contrainte à rupture des fibres

5.1.1.1 Théorie de Weibull

La théorie de Weibull [Weibull, 1939, 1951] est largement utilisée dans la littérature pour traiter la rupture, fragile et probabiliste, des céramiques [Evans et Marshall, 1989; Curtin, 1991a,b; Gulino et Phoenix, 1991; Hui *et al.*, 1995; Lamon, 2007].

Elle est la réunion de plusieurs principes [Hild, 2001] :

- Il n'existe qu'une seule population de défauts, qui ne se différencient que par leur position et par leur taille.
- La distribution de ces défauts obéit à un *processus de Poisson* : leurs positions sont indépendantes les unes des autres, ne peuvent être confondues, et leur distribution ne dépend que de l'intensité du processus.

Ainsi, la probabilité p^k de trouver k défauts activés sous une intensité λ est (voir Figure 5.1(a)) :

$$p^k(\lambda) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad (5.1)$$

Et on vérifie trivialement que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} p^k(\lambda) = 1 \quad (5.2)$$

- La rupture obéit au principe du *maillon faible* : lorsqu'un défaut est activé au sein d'un volume de matière, le volume est rompu. Ainsi, la probabilité de rupture p_R d'un volume soumis à une intensité λ est :

$$p_R(\lambda) = p^{k \geq 1}(\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty} p^k(\lambda) = 1 - p^0(\lambda) \quad (5.3)$$

C'est-à-dire (voir Figure 5.1(b)) :

$$p_R(\lambda) = 1 - e^{-\lambda} \quad (5.4)$$

- L'intensité du processus de Poisson doit nécessairement faire intervenir la mesure du domaine Ω –pour rendre compte des effets d'échelle : plus le domaine est grand, plus il y a de chance d'y trouver un défaut–, et la contrainte σ –plus la contrainte est grande, plus il y a de chance qu'un défaut soit activé–. Ainsi, l'intensité considérée est :

$$\lambda(\Omega, \sigma) = \frac{|\Omega|}{|\Omega_0|} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \quad (5.5)$$

Où σ_0 et m sont les deux paramètres de la loi à identifier expérimentalement, et $|\Omega_0|$ est un volume de référence fixé lors de l'identification de σ_0 et m .

Finalement, en rassemblant les équations (5.4) et (5.5), on aboutit à la fameuse loi de Weibull :

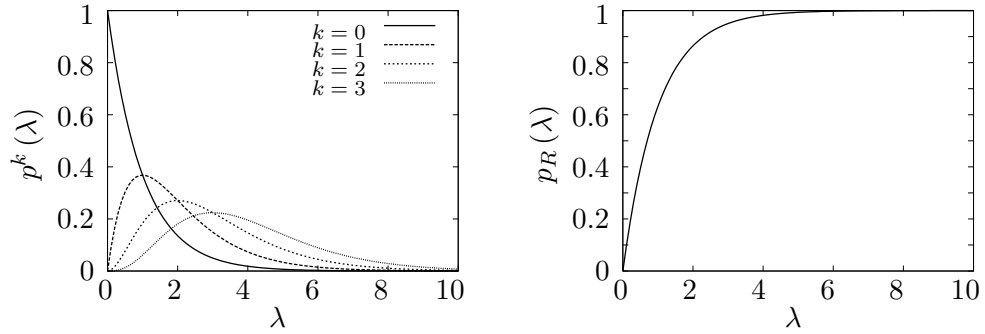
$$p_R(\Omega, \sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{|\Omega|}{|\Omega_0|} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (5.6)$$

Où les paramètres σ_0 et m pilotent la moyenne et la dispersion de la distribution (voir Figure 5.2). Des travaux ont été menés pour généraliser cette loi, notamment à des champs de contraintes non scalaires et/ou non homogènes [Weibull, 1939], à des lois à seuil [Weibull, 1939], ou encore à des populations de défauts multiples [Lissart et Lamon, 1997b].

5.1.1.2 Applications aux fibres

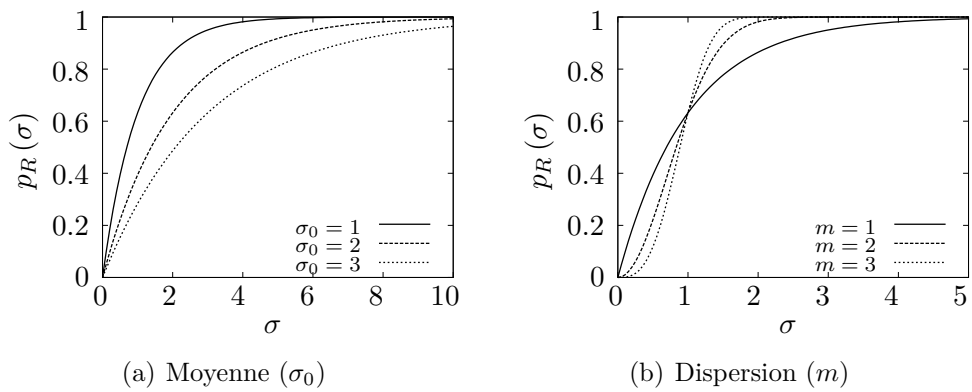
Dans le cas des fibres, la théorie de Weibull donne directement la loi de probabilité sur les contraintes à rupture en traction :

$$p(\sigma_R < \sigma) = p_R(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (5.7)$$



(a) Processus de Poisson : probabilité de trouver k défauts actifs en fonction de l'intensité du processus λ (b) Loi de Weibull : probabilité de rupture en fonction de l'intensité du processus λ

Figure 5.1 – Processus de Poisson et loi de Weibull : illustrations



(a) Moyenne (σ_0) (b) Dispersion (m)

Figure 5.2 – Influence des paramètres de la loi de Weibull

Cette loi est généralement identifiée en étudiant les ruptures successives de fibres dans des mèches de fibres soumis à de la traction monotone [Lissart et Lamon, 1994; Gauthier, 2006].

Pour les fibres Hi-Nicalon, les paramètres identifiés dans [Gauthier, 2006] sont donnés Tableau 5.1. Pour les raisons invoquées Section 1.3, ces paramètres sont indépendants de la températures en dessous de $1000^{\circ}C$. Les distributions correspondantes sont présentés Figure 5.3, avec les effets d'échelle classiques de la théorie de Weibull.

L_0 (mm)	σ_0 (MPa)	m_{σ}
1	3640	8.5

Tableau 5.1 – Paramètres de Weibull des fibres Hi-Nicalon [Gauthier, 2006]

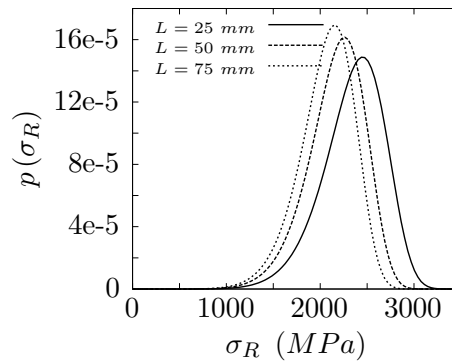


Figure 5.3 – Distributions des contraintes à rupture des fibres Hi-Nicalon : effets d'échelles

5.1.2 Durée de vie des fibres

5.1.2.1 Défauts de surface

Morphologie des défauts de surface des fibres Pour obtenir des distributions de tailles de défauts à partir de distributions de contraintes à rupture, il est nécessaire d'introduire une morphologie des défauts.

La croissance des défauts de surface des fibres est généralement considéré comme un problème unidimensionnel, où la taille des défauts est décrite par un unique paramètre scalaire [Gauthier, 2006; Laforêt, 2009]. Ainsi, le facteur d'intensité des contraintes K induit par un défaut de surface de taille a dans une fibre soumise à une contrainte σ est donné par :

$$K = \sigma Y \sqrt{a} \quad (5.8)$$

Où $Y = 2/\sqrt{\pi}$ est le facteur de forme associé au défaut. Pour les raisons invoquées Section 1.3, cette loi est indépendante de la températures en dessous de $1000^{\circ}C$. L'hypothèse unidimensionnelle revient à considérer que le facteur d'intensité des contraintes reste approximativement uniforme sur le front de défaut durant toute la propagation.

Distributions des tailles initiales des défauts de surface des fibres

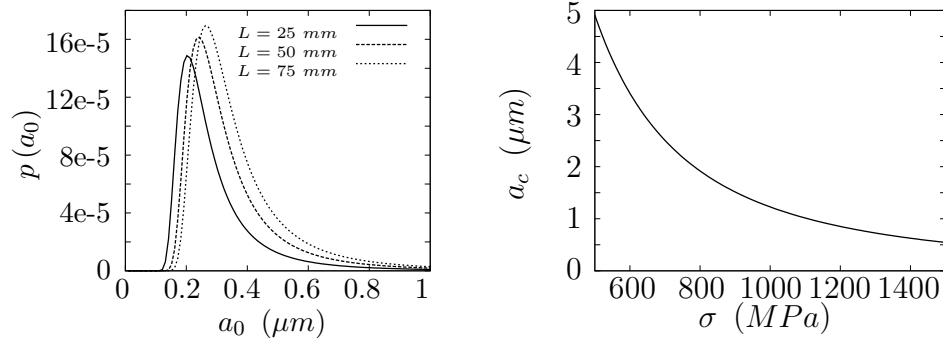
Cette morphologie introduit une taille caractéristique de défaut : lorsque la fibre est chargée à sa contrainte rupture σ_R , l'intensité des contraintes au front de son plus gros défaut atteint sa valeur critique K_c , et le défaut propage de manière instable dans toute la section de la fibre, qui rompt. On obtient ainsi la taille initiale du plus gros défaut de surface de la fibre a_0 en fonction de sa contrainte à rupture σ_R :

$$\sigma_R Y \sqrt{a_0} = K_c \implies a_0 = \left(\frac{K_c}{\sigma_R Y} \right)^2 \quad (5.9)$$

En rassemblant les équations (5.7) et (5.9), on obtient les distributions de tailles de défauts, représentées Figure 5.4(a) pour les fibres Hi-Nicalon, avec les effets d'échelle classique de la théorie de Weibull.

Taille critique des défauts de surface des fibres La morphologie des défauts de surface présentée au paragraphe précédent introduit une autre taille caractéristique. En effet, lorsque la fibre est chargée à une contrainte $\sigma < \sigma_R$, il existe une taille critique de défaut $a_c > a_0$ telle que l'intensité des contraintes au front de défaut atteint sa valeur critique K_c , donc telle que le défaut propage de manière instable dans toute la section de la fibre, qui rompt (voir Figure 5.4(b) pour les fibres Hi-Nicalon) :

$$\sigma Y \sqrt{a_c} = K_c \implies a_c = \left(\frac{K_c}{\sigma Y} \right)^2 \quad (5.10)$$

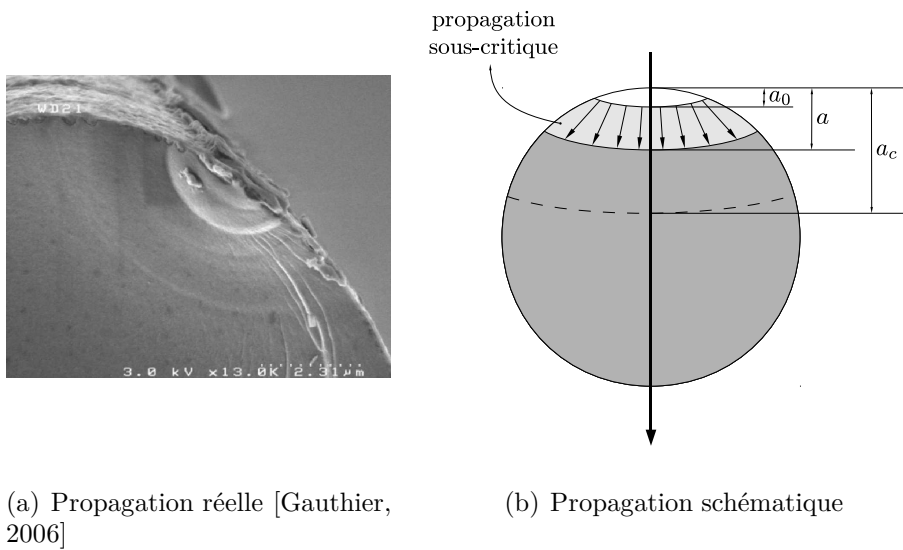


(a) Distributions des tailles initiales des défauts : effets d'échelles

(b) Taille critique des défauts en fonction de la contrainte appliquée

Figure 5.4 – Tailles caractéristiques des défauts de surface des fibres : cas des fibres Hi-Nicalon

Ainsi, le domaine de la propagation sous-critique s'intéresse à dériver un ensemble d'équations définissant l'évolution de la taille des défauts de a_0 à a_c (voir Figure 5.5), afin de prédire la durée de vie des pièces considérées.



(a) Propagation réelle [Gauthier, 2006]

(b) Propagation schématique

Figure 5.5 – Propagation sous-critique de défauts de surface dans une section de fibre

5.1.2.2 Propagation sous-critique

Dans la littérature, plusieurs auteurs se sont intéressés à la propagation sous-critique des défauts dans les céramiques [Lawn, 1974; Wiederhorn, 1975; Wiederhorn *et al.*, 1980; Ewart et Suresh, 1992; Wachtman, 1996; Gauthier, 2006; Laforêt, 2009].

Modèles phénoménologiques

Certains auteurs [Wachtman, 1996; Gauthier, 2006; Laforêt, 2009] ont une approche phénoménologique.

Loi de propagation Ils se basent sur une loi de type Paris liant la vitesse du défaut à son facteur d'intensité des contraintes :

$$\frac{da}{dt}(t) = v_0 \cdot K(a(t), \sigma(t))^n \quad (5.11)$$

Où v_0 et n sont des paramètres qui doivent être identifiés expérimentalement. Il est intéressant de noter que c'est l'utilisation d'une telle loi de Paris qui explique le terme *fatigue statique* qui est généralement utilisé dans la littérature pour les problèmes relatifs à la propagation sous-critique.

La dépendance en température de la propagation sous-critique, induite par la réaction chimique qui est responsable de l'avancée du défaut, est généralement traitée avec l'introduction d'un paramètre supplémentaire dans une loi d'Arrhenius pour v_0 :

$$v_0(T) = v_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right) \quad (5.12)$$

Temps à rupture En considérant des conditions de chargement mécanique et thermique constantes, les équations (5.8) et (5.11) s'intègrent en la loi suivante, liant le temps à rupture à la contrainte appliquée :

$$t_R \cdot \sigma^n = A \quad (5.13)$$

$$\text{avec } A = \frac{\int_{a_0}^{a_c} \frac{da}{\sqrt{a}^n}}{v_0(T) Y^n} \quad (5.14)$$

Là encore, il est intéressant de remarquer que cette loi de durée de vie a une forme classique du domaine de la *fatigue*.

Identification et Prédiction De par la nature probabiliste des tailles de défauts de surface, donc des contraintes à rupture, donc des temps à rupture, une trentaine de résultats de durée de vie sur fibres sont nécessaires pour identifier les paramètres de la loi (5.11) pour des conditions environnementales données [Gauthier, 2006]. Donc, pour identifier le modèle complet, avec la dépendance en température de la loi (5.12), au moins deux séries de données doivent être réalisées à des températures différentes. Dans le cas des fibres Hi-Nicalon, le Tableau 5.2 donne le résultat de cette identification, et la Figure 5.6 compare les résultats expérimentaux de [Gauthier, 2006] aux prévisions du modèle ainsi identifié.

v_0 ($\mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	E_a (J)	n ()
$4.6 \cdot 10^5$	$1.7 \cdot 10^5$	5

Tableau 5.2 – Paramètres identifiés pour les fibres Hi-Nicalon

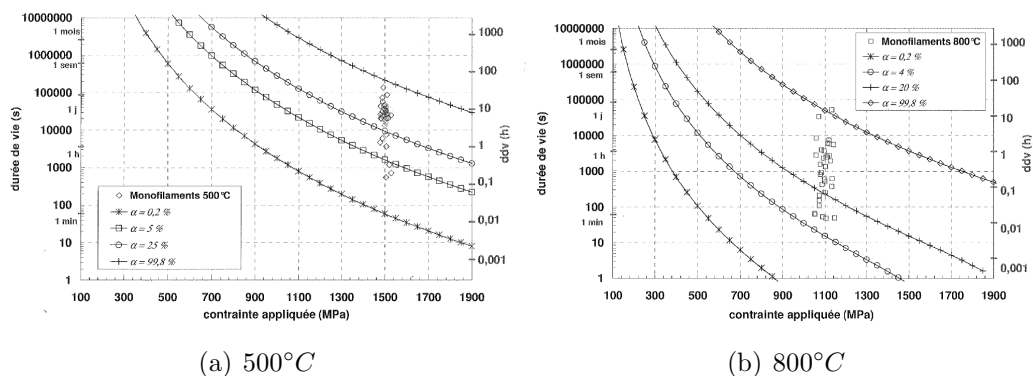


Figure 5.6 – Durées de vie des fibres Hi-Nicalon en fonction de la contrainte appliquée, pour différentes températures : résultats expérimentaux et prévisions théoriques (α représente le rang de la fibre dans la distribution des tailles de défauts) [Gauthier, 2006]

Discussion Il apparaît que le modèle ainsi construit peut-être relativement près des résultats expérimentaux. Cependant, cette approche n'est pas entièrement satisfaisante. Une première limitation est révélée par la confrontation précise entre les prévisions du modèle et les données expérimentales, notamment à travers les distributions de temps à rupture (voir Figure 5.7). Clairement, les prévisions du modèle sous-estiment largement les durées de vie réelles aux hautes températures. Ceci s'explique par le fait que la transition entre les phases de propagation *reaction-controlled* et *diffusion-controlled* est entamée, mais n'est pas prise en compte dans le modèle. Ainsi, la dépendance en température de type Arrhenius n'est pas suffisante, et un modèle plus complexe, avec davantage de paramètres à recaler, est nécessaire. Plus généralement, cette approche est limitée car elle ne prend pas en compte explicitement l'environnement chimique de la fibre. Ainsi, l'introduction de toute nouvelle grandeur influant sur l'oxydation –pression d'oxygène, concentration d'eau, etc– nécessite l'introduction d'une nouvelle loi phénoménologique à recaler expérimentalement. Ces limitations seront largement résolues dans l'approche proposée Section 6.

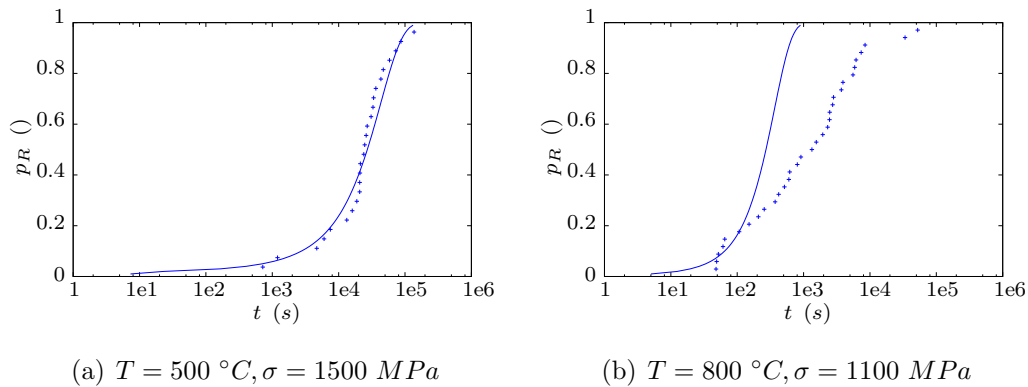


Figure 5.7 – Distributions de durée de vie des fibres Hi-Nicalon pour différentes conditions de chargement : résultats expérimentaux et prévisions théoriques [Gauthier, 2006]

Modèles avec prise en compte de l'environnement

La littérature présente également des tentatives de modélisation plus fine des mécanismes de diffusion-réaction qui sous-tendent la propagation sous-critique des défauts [Lawn, 1974; Wiederhorn, 1975; Wiederhorn *et al.*, 1980]. Par exemple, [Lawn, 1974] traite la propagation sous-critique d'une macrofissure –longueur de l'ordre du mm – dans un verre en présence d'eau –la réaction est active, le produit de la réaction ne vient pas influencer la cinétique de réaction–.

Loi de propagation Une extension dc de la fissure nécessite de rompre $dN = N_A dc$ liaisons atomiques, où N_A est le nombre de liaisons par unité de longueur. Ainsi, la vitesse de la fissure s'écrit :

$$v_c = \frac{dc}{dt} = \frac{1}{N_A} \frac{dN}{dt} \quad (5.15)$$

Modélisation de l'environnement chimique Il s'agit maintenant de calculer le taux d'avancement de la réaction dN/dt , donc la vitesse de la fissure v_c , à partir de l'environnement chimique existant dans la fissure. Pour ce faire, la fissure est divisé en plusieurs zones (voir Figure 5.8(a)) :

- Une première zone où le fluide oxydant s'écoule naturellement,
- Une seconde zone où l'écoulement du fluide oxydant est ralenti par l'étroitesse de la fissure,
- Et une dernière zone, siège de la réaction d'oxydation.

L'expression générale de la vitesse de la fissure obtenu s'écrit :

$$\frac{1}{v_c} = \frac{1}{v_d} + \frac{1}{v_r} \quad (5.16)$$

Où v_d est la vitesse de la fissure dans le cas où la diffusion prime sur la réaction, et v_r dans le cas inverse :

- v_d est obtenu à partir de la théorie cinétique des gaz :

$$v_d = \frac{p_0 K A_2}{N_A \sqrt{2\pi m k T}} \quad (5.17)$$

Où p_0 est la pression à l'extérieur de la fissure, m la masse molaire, k la constante de Boltzmann, T la température, et $K A_2$ un facteur d'impédance lié à l'étroitesse de la fissure qui vaut :

$$K A_2 = \frac{64 (K/E)^2}{3\pi \ln (y_1/y_2)} \quad (5.18)$$

Où, K est le facteur d'intensité des contraintes en front de fissure, E le module de Young du matériau, et y_1 et y_2 des grandeurs géométriques (voir Figure 5.8(a)). Il est important de remarquer que dans cette partie diffusion, les grandeurs mécaniques –contrainte appliquée, rigidité– ne jouent qu'à travers la géométrie de la fissure.

- v_r est obtenu à partir d'une analyse de la cinétique de la réaction considérée :

$$v_r = \frac{N_W}{N_A} c_0 p_0 \exp\left(\frac{-E_a + \beta K}{kT}\right) \quad (5.19)$$

Où N_W , c_0 , E_a et β sont des paramètres qui doivent être recalés expérimentalement. Dans cette partie réaction, le facteur d'intensité des contraintes K intervient à travers l'accélération de la réaction, due à l'ouverture du réseau atomique.

Une fois le modèle recalé expérimentalement, il permet de traiter naturellement la transition entre les propagations *reaction-controlled* et *diffusion-controlled* (voir Figure 5.8(b)).

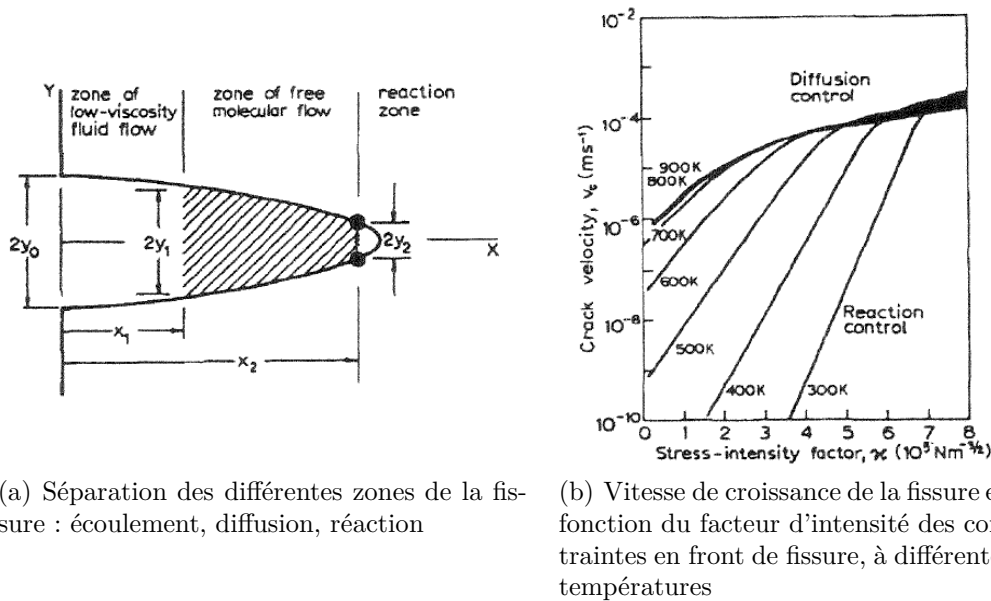


Figure 5.8 – Illustrations du modèle de [Lawn, 1974]

Discussion Ce modèle introduit une séparation nette entre la réaction qui induit la propagation sous-critique, et la diffusion qui alimente cette réaction. Bien que l'approche mise en place ne soit pas directement transposable à la durée de vie des fibres Hi-Nicalon –les défauts des fibres ont une taille de l'ordre du μm ; la réaction d'oxydation du SiC est passive, elle produit du SiO_2 solide qui se dépose sur le SiC et complexifie largement le problème de diffusion–, cette idée sera reprise dans l'approche proposée Section 6.

5.2 Mèches de fibres

5.2.1 Contrainte à rupture des mèches de fibres

Le problème du système de fibres de Weibull mises en parallèle a été largement traité dans la littérature. Les différentes études diffèrent par la nature des interactions introduites au sein des réseaux de fibres.

5.2.1.1 Cas des recharges globales (*Equal Load Sharing, ELS*)

Les premières études [Daniels, 1945; Coleman, 1958] considèrent des réseaux purement parallèles de fibres, sans interactions : lorsqu'une fibre rompt, la charge qu'elle soutenait se répartit équitablement sur toutes les autres fibres. Ainsi, la morphologie du système est simpliste : il n'y a pas de notion de géométrie. Un tel problème peut être vu comme un problème multi-échelle (voir Figure 5.9), qu'il est possible de résoudre analytiquement.

Problème macroscopique Le système est soumis à une contrainte macroscopique notée Σ , en résulte une déformation macroscopique notée E (voir

Figure 5.9). La loi de comportement macroscopique –à déterminer à partir de considérations microscopiques– s’écrit

$$\Sigma = E_M(E) \cdot E \quad (5.20)$$

Problème microscopique Les fibres qui constituent le système ont un comportement élastique fragile. Leur loi de comportement élastique est

$$\sigma = E_m \cdot \epsilon \quad (5.21)$$

Où σ et ϵ sont la contrainte et la déformation effectivement subies par les fibres (voir Figure 5.9). Leur comportement à rupture est décrit par la loi de probabilité de rupture de Weibull (voir Section 5.1.1) :

$$p(\sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (5.22)$$

Lien micro-macro Le lien entre les grandeurs micro et macro est

$$\begin{cases} \epsilon &= \frac{E}{\Sigma} \\ \sigma &= \frac{\Sigma}{1 - \alpha} \end{cases} \quad (5.23)$$

Où α est la taux de fibres rompues. De plus, on considère que le nombre de fibre est suffisamment grand pour que le taux de fibres rompues –qui devient alors continu– soit égal à la probabilité de rupture des fibres :

$$\alpha(\sigma) = p(\sigma) \quad (5.24)$$

Solution Finalement, on obtient la loi de comportement macroscopique de la mèche de fibre (voir Figure 5.10) :

$$\Sigma = E_m E \exp\left(-\frac{L}{L_0} \left(\frac{E_m E}{\sigma_0}\right)^m\right) \quad (5.25)$$

Et donc sa contrainte à rupture :

$$\Sigma_R = \sigma_0 \left(\frac{1}{m} \frac{L_0}{L}\right)^{\frac{1}{m}} \exp\left(-\frac{1}{m}\right) \quad (5.26)$$

Discussion La contrainte à rupture obtenue par cette approche est complètement déterministe. Des tentatives ont été faites pour prendre en compte le nombre fini de fibres, qui aboutissent à des solutions probabilistes [Daniels, 1945], mais les dispersions correspondantes restent très inférieures aux dispersions observées [Calard et Lamon, 2004]. L’intérêt de ce type d’approches sera donc uniquement de fournir, mais sous forme analytique, les ordres de grandeurs des comportements critiques des systèmes étudiés.

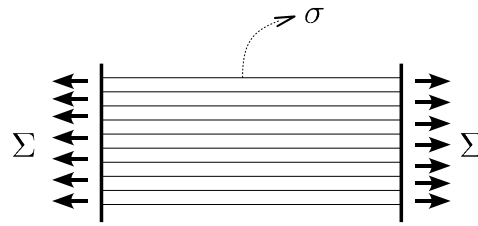
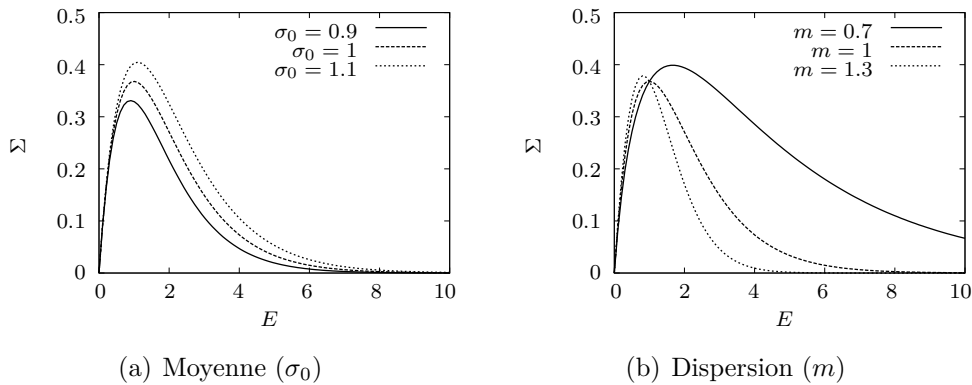


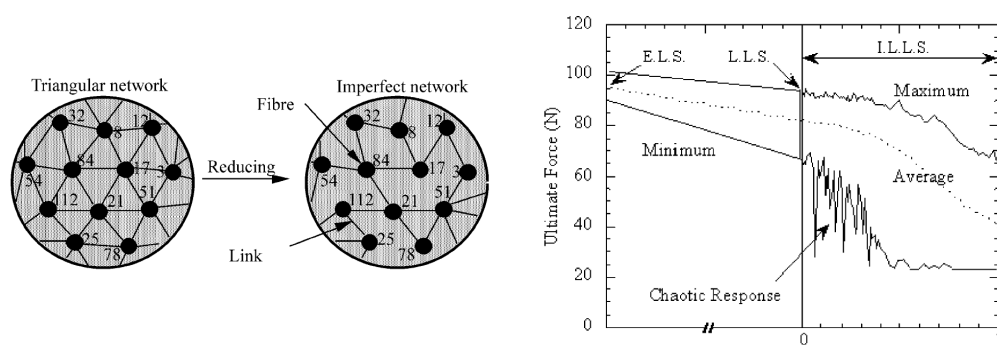
Figure 5.9 – Problème de la mèche de fibres

Figure 5.10 – Loi de comportement macroscopique de la mèche de fibre (équation (5.25) avec $E_m = 1$ et $L = L_0$) : influence des paramètres de Weibull

5.2.1.2 Cas des recharges locales (*Local Load Sharing, LLS*)

D'autres études [Phoenix et Taylor, 1973; Phoenix, 1974; Calard et Lamon, 2004] introduisent des recharges plus locales : lorsqu'une fibre rompt, la charge qu'elle soutenait se répartit, au moins en partie, sur les fibres qui lui sont liées dans le réseau de fibres. Ainsi, il est nécessaire de complexifier la morphologie du système et d'y introduire une géométrie, représentant au minimum une section d'une mèche de fibre. Les cas de réseaux parfaits –LLS–, ainsi que de réseaux imparfaits –Imperfect LLS, ILLS–, sont traités dans la littérature (voir Figure 5.11(a)), avec le résultat suivante : plus il y a d'interactions entre les fibres, et plus elles sont localisées, plus la contrainte à rupture des mèches de fibres est dispersée –des réponses chaotiques sont même observées [Calard et Lamon, 2004]–, et voit sa moyenne diminuer (voir Figure 5.11(b)).

Discussion Les résultats obtenus par ce type d'approches sont très proches des résultats expérimentaux, variabilité comprise [Calard et Lamon, 2004], et permettent d'étudier l'influence des imperfections dans les réseaux de fibres, *e.g.* rigidité, contraintes à rupture, etc [Chudoba *et al.*, 2006; Vorechovsky et Chudoba, 2006]. Cependant, ils nécessitent l'introduction de paramètres difficiles à identifier et pas forcément constant d'une mèche à l'autre –*e.g.* le taux d'"imperfections" des réseaux, les lois de probabilité sur les rigidité, etc–. De plus, ils nécessitent la mise en place d'une stratégie numérique de résolution, et n'offrent pas de solution analytique.



(a) Réseaux de fibres, parfait et imparfait (b) Contraintes à rupture –minimale, moyenne et maximale– des mèches de fibres pour différents cas de recharges –dans le cas ILLS, la variable représente le taux d’imperfections–

Figure 5.11 – Cas des recharges locales [Calard et Lamon, 2004]

5.2.2 Durée de vie des mèches de fibres

Dans la littérature, le problème de la durée de vie des mèches de fibres a été traité par [Gauthier, 2006] et [Laforêt, 2009].

Principe L’approche est la suivante : en fatigue statique, comme en statique, la rupture des mèches de fibres se produit au moment de la rupture d’une fibre particulière de mèche, dont la rupture entraîne une surcharge telle que toutes les autres fibres rompent instantanément. Il s’agit donc de déterminer, expérimentalement, le rang de cette fibre, dite critique.

Identification L’évolution du rang critique en fonction de la température a été identifié par [Gauthier, 2006], et est présenté Tableau 5.3. La dépendance en température est due à la dépendance en température des interactions entre fibres au sein des mèches, *i.e.* les pontages de silice (voir Section 1.3).

T ($^{\circ}C$)	20	500	800
α_c	13	5	4

Tableau 5.3 – Évolution du rang critique en fonction de la température [Gauthier, 2006]

Discussion Cette approche aboutit à des résultats satisfaisants en terme de prédiction de durée de vie [Gauthier, 2006; Laforêt, 2009]. Des diagrammes de durée de vie minimale des mèches en fonctions de la température et de la contrainte sont tracés (voir Figure 5.12), en tant qu’outils de dimensionnement pour l’ingénieur. Cependant, il est important de noter que l’évolution

du rang critique, en fonction de l'environnement chimique –*e.g.* température, concentration d'oxygène, etc– et de ses variations, regroupe un grand nombre de mécanismes situés à l'échelle des fibres (voir Section 1.3). Par conséquent, l'identification n'est pas complète, et ne pourra de toute façon être utilisée pour extrapoler les résultats de durée de vie en dehors des conditions expérimentales.

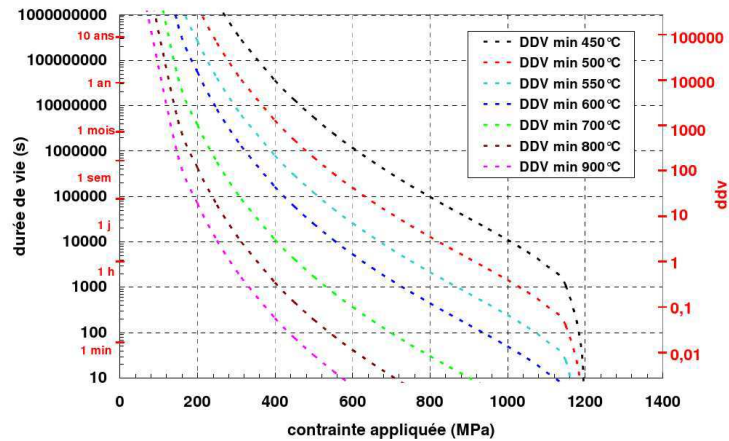


Figure 5.12 – Durée de vie minimale des mèches en fonctions de la température et de la contrainte [Gauthier, 2006]

Chapitre 6

Durée de vie des fibres

Les travaux de thèse relatifs à la durée de vie des fibres sont en cours de publication dans le journal *Composites Science and Technology*. Ils sont donc présentés ici sous forme de l'article soumis au journal.

A new approach to the subcritical cracking of ceramic fibers

Pierre Ladevèze^{*,a,1}, Martin Genet^a

^a*LMT-Cachan (ENS-Cachan / Paris 6 University / CNRS / UniverSud Paris PRES), 61 avenue du Président Wilson, 94235 Cachan Cedex, France*

Abstract

A new modeling approach to subcritical crack propagation (*i.e.* static fatigue) in ceramics is introduced and applied to the case of ceramic fibers. This approach relies on classical fracture mechanics, in which the zone near the crack's tip is modified by the environment (particularly through oxidation). Chemical reactions and diffusion are introduced naturally, which makes the model highly dependent on the environmental conditions, such as partial oxygen pressure. In some cases, the result comes down to the widely-used Paris-like subcritical crack propagation law. For the general case, a two-parameter model calibrated and validated up to 1,000°C for Hi-Nicalon fibers is presented.

Key words:

Subcritical cracking, A. Fibers, A. Ceramics, D. Life prediction, E. Modeling

1. Introduction

Woven Ceramic Matrix Composites (CMCs) reinforced with long fibers are potential candidates for high-temperature thermal/structural applications [Evans, 1997; Bunsell and Berger, 1999; Dambrine, 2006]. Their structural performance is controlled mainly by the fibers [Lamon, 2001]. Indeed, the fibers within the composite are protected from the surrounding cracks thanks to the mechanical fuse concept [Aveston *et al.*, 1971; Rebillat *et al.*, 1998]. However, once the surrounding matrix has cracked, the fibers are no longer protected from the aggressive environment: air (actually, oxygen, water, etc.) can penetrate the crack network and damage the fibers through oxidation or corrosion [Evans *et al.*, 1996; Forio *et al.*, 2004]. There have been attempts to introduce an environmental protection of the fibers within the composite (using, e.g., self-healing multilayered ceramic matrices or fiber treatments, referred to as chemical fuses), but even then the environmental protection is not complete

*Corresponding author

¹EADS Foundation Chair "Advanced Computational Structural Mechanics"

and the fibers remain one of the key factors in the material's lifetime [Cluzel *et al.*, 2008; Gauthier and Lamon, 2009].

The study of fibers lifetime under given environmental conditions is denoted *static fatigue analysis* because most works use the Paris law as in classical fatigue analysis, or *subcritical cracking*. Subcritical propagation, also known as *slow crack growth*, has been widely studied in the literature, especially for ceramics [Lawn, 1974; Wiederhorn *et al.*, 1980; Wachtman, 1996; Evans *et al.*, 1996; Hild *et al.*, 1996; Gauthier and Lamon, 2009]. These works describe the crack's propagation using a Paris-like law relating the crack's velocity to the crack's stress intensity factor calculated under the assumption of elastic behavior. This law, which depends on the temperature, agrees fairly well with experimental results [Wiederhorn *et al.*, 1980; Wachtman, 1996], but cannot be applied directly to varying environmental conditions such as oxygen or water concentration around the fibers. Moreover, it was found [Lawn, 1974; Wachtman, 1996; Evans *et al.*, 1996; Laforêt and Lamon, 2008] that as the temperature increases two different propagation stages take place. In the first stage, called the *reaction-controlled stage*, the crack's tip is damaged directly. The second stage, called the *diffusion-controlled stage*, is different in the sense that oxygen and water, prior to damaging the crack's tip, must first diffuse through an oxide layer formed on the surface of the fiber. Corresponding models can be found in [Lawn, 1974] for the fibers and in [Laforêt and Lamon, 2008] for the multifilament tow.

The alternative approach to subcritical propagation introduced here relies on classical fracture mechanics, in which the environment modifies the damage zone only at the crack's tip, then drives the progressive propagation of the crack. Pure elastic behavior without creep or mechanical damage is assumed, which is what is observed within the restricted scope of this study, as will be seen further on. The proposed model for subcritical propagation does not depend explicitly on temperature, but depends only on the total oxygen flux reacting at the crack's tip (which, in turn, depends on the temperature, the oxygen pressure, etc.). Consequently, the model is valid for any temperature or oxygen pressure, which can be functions of time, and the only difficulty consists in modeling the oxidizing environment of the crack properly. Only two parameters are needed in order to use the model under varying environmental conditions.

If the crack's growth is relatively slow, one can achieve a very good approximation; in the case of constant environmental conditions, this leads to the widely-used Paris-like law for the lifetime. For Hi-Nicalon fibers up to 1,000°C in dry environment, we introduced the chemical phenomena observed (reaction and diffusion) through simple models in order to define the true oxygen flux reacting at the crack's tip. The resulting calibrated model was validated using the experimental data reported in [Gauthier and Lamon, 2009].

2. The new approach

2.1. Defect modeling

In this paper, classical Weibull theory and associated idealizations are used to describe the distribution of defects over the fiber's surface [Lamon, 2007; Gauthier and Lamon, 2009].

In the Weibull theory, the strength of a fiber of length L , denoted σ_R , follows the cumulative density function:

$$p(\sigma_R < \sigma) = 1 - \exp\left(-\frac{L}{L_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{m_\sigma}\right) \quad (1)$$

where L_0 , σ_0 and m_σ are classical Weibull coefficients.

Moreover, the growth of surface defects is generally assumed to be a simple one-dimensional problem in which the size of a defect is described by a scalar parameter (Figure 1). This assumption means that the Stress Intensity Factor (SIF), denoted K , is approximately uniform along the crack's tip and that the impact of the environmental conditions on the elasticity coefficients is limited. This fact was proven for Hi-Nicalon fibers up to $1,000^\circ\text{C}$ in [Bunsell and Berger, 2000; Song *et al.*, 2000]. Thus, the SIF induced by a surface defect of size a in a fiber subjected to a stress σ can be calculated using classical elasticity theory:

$$K = \sigma Y \sqrt{a} \quad (2)$$

where $Y = 2/\sqrt{\pi}$ is the shape coefficient associated with the crack assumed to be constant throughout the propagation.

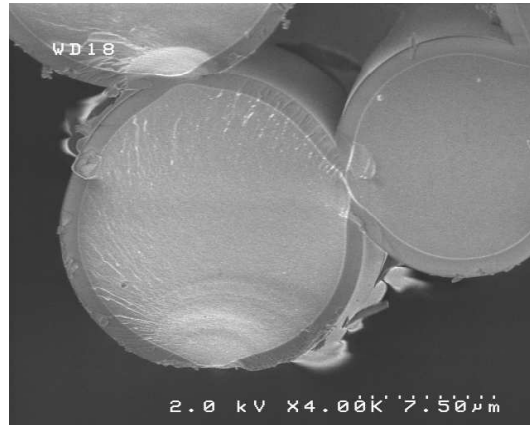
This modeling framework introduces two important quantities (see Figure 1):

- The largest surface defect (whose initial size is denoted a_0) is responsible for fiber failure in statics as well as in static fatigue. During static loading, the SIF reaches the Critical Stress Intensity Factor (CSIF), denoted K_c , at the largest surface defect when the applied stress reaches the fiber's strength, denoted σ_R . Therefore, the initial size of the largest surface defect is obtained, for any given strength, by:

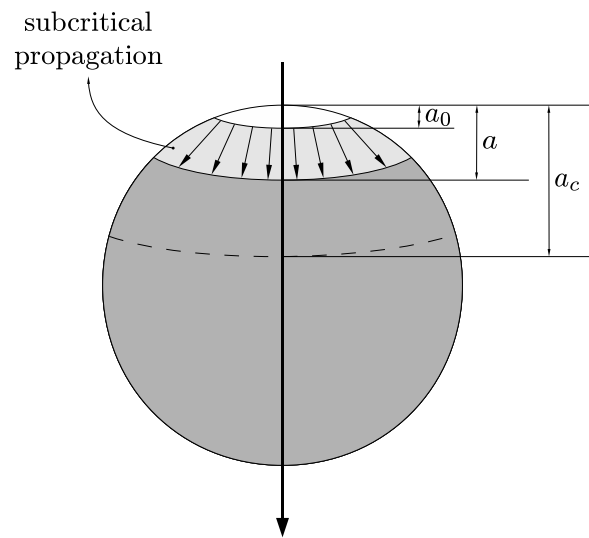
$$\sigma_R Y \sqrt{a_0} = K_c \implies a_0 = \left(\frac{K_c}{\sigma_R Y}\right)^2 \quad (3)$$

- Similarly, if the fiber is stressed at $\sigma < \sigma_R$, there exists a critical defect size $a_c > a_0$ for which the SIF reaches the CSIF:

$$\sigma Y \sqrt{a_c} = K_c \implies a_c = \left(\frac{K_c}{\sigma Y}\right)^2 \quad (4)$$



(a) Actual defect, laforet.2008



(b) Idealized defect: initial size and critical size

Figure 1: Surface defect in a cross section of a fiber

2.2. *Subcritical propagation: the classical model*

There have been several attempts at modeling subcritical crack propagation, *i.e.* deriving a set of equations defining the evolution of the crack's size $a(t)$ from a_0 to a_c . The approaches found in the literature [Wiederhorn *et al.*, 1980; Wachtman, 1996; Gauthier and Lamon, 2009] are based on a Paris-like law for the crack's velocity:

$$\frac{da}{dt} = v_0 \cdot K^n \quad (5)$$

where v_0 and n are parameters which must be calibrated from experimental data. It is worth observing that it is the use of this Paris law which is responsible for the term *static fatigue* being commonly used in the literature to refer to the subcritical propagation problem.

However, this law has several limitations. First, its physical meaning is not clear: the crack's propagation is only described, but not explained, and it does not follow the principles of fracture mechanics. Second, the temperature dependence induced by chemical reactions is generally handled through a macroscopic exponential law (or Arrhenius law) for v_0 , which requires the introduction of an additional parameter which must be calibrated. Finally, the introduction of external environmental conditions, such as the oxygen concentration, and their variations is not straightforward.

2.3. *Subcritical propagation: the new model*

2.3.1. *Fundamentals*

Propagation law. The basic idea is very simple. The propagation of defects follows classical fracture mechanics:

$$\begin{cases} K \leq K_{sc}(a(t), t) \\ \dot{a}(t) \geq 0 \\ \dot{a}(t) \cdot (K_{sc}(a(t), t) - K) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

where K_{sc} is the SubCritical Stress Intensity Factor (SCSIF), which is smaller than the CSIF K_c because of the oxidation. Let us emphasize that K_{sc} , which is a function of time, is defined everywhere within the fiber. However, for the sake of simplicity, we will show that K_{sc} can be assumed to be a function of only one unidirectional space variable (the same variable which describes the crack's size) and time.

The damage law. Now let us consider the dependence of K_{sc} on the environment. The progression of the oxidation reaction which is responsible for the material's damage is described by the reaction rate ϕ_r , which is the most suitable parameter to represent the oxidation-induced degradation of the local mechanical properties (Young's modulus, strength, etc.). For the example of the degradation of the CSIF into the SCSIF, one writes:

$$\dot{K}_{sc}(x, t) = -f(K_{sc}(x, t), T(x, t), \phi_r(x, t)) \quad (7)$$

where f is a simple function to be calibrated. It was proven in [Bunsell and Berger, 2000; Song *et al.*, 2000] that for Hi-Nicalon fibers up to $1,000^\circ\text{C}$ the direct dependence of the critical properties on the temperature is limited; therefore, it will be disregarded in the following discussion. Then, taking into account the initial conditions:

$$K_{sc}(x, t = 0) = K_c \quad (8)$$

K_{sc} can be written as follows:

$$K_{sc}(x, t) = K_c(1 - g(r(x, t))) \quad \text{with} \quad r(x, t) = \int_0^t \phi_r^m(x, \tau) d\tau \quad (9)$$

where m is a positive scalar, and g is another simple function. In this paper, the value of the material integer m is set to 1. It is important to observe the similarity between this law and the classical laws of damage mechanics [Lemaitre, 1996] which are widely used, for example, to describe the stiffness drop in materials due to microcracking.

2.3.2. Calculation of r

The diffusion-reaction problem. The calculation of r is carried out through the resolution of a diffusion-reaction problem within the fiber with prescribed boundary conditions. A first analysis is performed based on the following assumptions:

- (i) The diffusion-reaction phenomenon is localized near the oxygen input, which means that the effects of the crack's geometry and fiber's size are small; thus, the problem can be written over a semi-infinite unidirectional space.
- (ii) The evolution is quasi-stationary, which means that the velocity of the diffusion-reaction process is significantly higher than that of the crack's growth.
- (iii) The mechanical and chemical fields are uncoupled, which means, for example, that the reaction and diffusion coefficients are independent of the stress state.

Thus, one must solve the following simple problem (see Figure 2):

- Unknowns (the concentration and flux of O_2 within the fiber):

$$\begin{cases} c(x, t) \\ \phi(x, t) \end{cases} \quad \forall x \in [a(t); +\infty[\quad \forall t \in [0, +\infty] \quad (10)$$

- Conservation equation:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + \phi_r = 0 \quad \forall x \quad \forall t \quad (11)$$

- Diffusion equation (Fick's law, D being the diffusion coefficient of O_2 in SiC):

$$\phi = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \quad \forall x \quad \forall t \quad (12)$$

- Reaction equation (first-order reaction, k being the reaction coefficient of O_2 with SiC):

$$\phi_r = k \cdot c \quad \forall x \quad \forall t \quad (13)$$

- Boundary condition (ϕ_0 being a given boundary function):

$$\phi(x = a(t), t) = \phi_0(t) \quad \forall t \quad (14)$$

- Initial condition:

$$c(x, t = 0) = 0 \quad \forall x \quad (15)$$

- Crack's growth (v_0 being a given velocity function):

$$\dot{a}(t) = v_0(t) \quad \forall t \quad (16)$$

whose solution is:

$$\begin{cases} c(x, t) = \frac{\phi_0(t)}{\sqrt{kD}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}(x - a(t))\right) \\ \phi(x, t) = \phi_0(t) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}(x - a(t))\right) \end{cases} \quad (17)$$

Calculation of r . Thus, with $m = 1$, r is equal to:

$$r(x, t) = \int_0^t \frac{k\phi_0(\tau)}{\sqrt{kD}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}(x - a(\tau))\right) d\tau \quad (18)$$

and the crack's velocity is introduced through a change of variable:

$$r(x, t) = \int_{a_0}^{a(t)} \frac{k\phi_0(a^{-1}(\alpha))}{\sqrt{kD}} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}(x - \alpha)\right) \frac{d\alpha}{\dot{a}(a^{-1}(\alpha))} \quad (19)$$

If the diffusion-reaction process zone is small compared to the size of the crack:

$$\sqrt{\frac{k}{D}}(x - a) \begin{cases} = 0 & \text{when } x = a \\ \gg 1 & \text{when } x > a \end{cases} \quad (20)$$

which means that the reaction is essentially a surface reaction, the exponential term of the previous integral simplifies to:

$$\int_{a_0}^{a(t)} \exp\left(-\sqrt{\frac{k}{D}}(x - \alpha)\right) d\alpha \approx \begin{cases} 1/\sqrt{k/D} & \text{when } x = a \\ 0 & \text{when } x > a \end{cases} \quad (21)$$

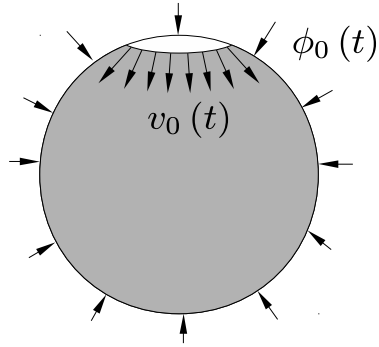
and r simplifies to:

$$r(x, t) \approx \begin{cases} \frac{k\phi_0(t)}{\sqrt{kD}} \frac{1}{\sqrt{k/D}} \frac{1}{\dot{a}(t)} & \text{when } x = a(t) \\ 0 & \text{when } x > a(t) \end{cases} \quad (22)$$

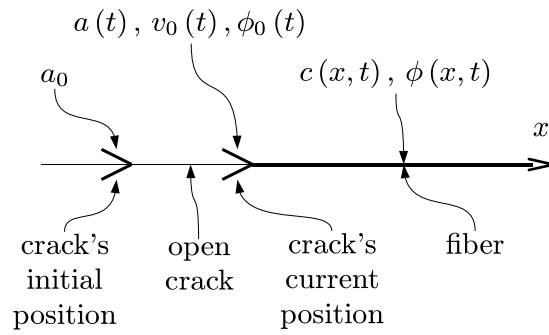
Therefore, from now on, we will consider the surface term

$$r(t) = r(a(t), t) = \frac{\phi_0(t)}{\dot{a}(t)} \quad (23)$$

alone.



(a) The real problem



(b) The simplified unidirectional problem

Figure 2: The diffusion-reaction problem for the calculation of r

Return to the damage law. Finally, the damage law for $m = 1$ is:

$$K_{sc}(t) = K_c \left(1 - g \left(\frac{\phi_0(t)}{\dot{a}(t)} \right) \right) \quad (24)$$

where $\phi_0(t)$ is the incoming oxygen flux at the crack's tip, *i.e.* the reaction rate of the oxidizing surface reaction, and $\dot{a}(t)$ is the crack's velocity. In the general case, for $m \geq 0$, one has:

$$K_{sc}(t) = K_c \left(1 - g \left(\frac{\phi_0^m(t)}{\dot{a}(t)} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{k}{D} \right)^{\frac{m-1}{2}} \right) \right) \quad (25)$$

2.3.3. Choice of g

There are several possible choices for g . Some of these choices are compared in Figure 3:

1. Taking $g(r) = \lambda r^n$ (where λ and n are positive scalars), Equation (24) reduces to:

$$\frac{K_{sc}(t)}{K_c} = 1 - \lambda \left(\frac{\phi_0(t)}{\dot{a}(t)} \right)^n \quad (26)$$

which has no physical meaning for large values of r (see Figure 3): $K_{sc} < 0$.

2. Taking $g(r) = e^{-\lambda/r^n}$ (where λ and n are positive scalars), Equation (24) reduces to:

$$\frac{K_{sc}(t)}{K_c} = 1 - \exp \left(-\lambda \left(\frac{\dot{a}(t)}{\phi_0(t)} \right)^n \right) \quad (27)$$

which is physically more meaningful (see Figure 3).

3. Another possibility is to use the first order of the Taylor series expansion of the previous choice, leading to $g(r) = 1 - \lambda/r^n$. Then, Equation (24) reduces to:

$$\frac{K_{sc}(t)}{K_c} = \lambda \left(\frac{\dot{a}(t)}{\phi_0(t)} \right)^n \quad (28)$$

which has no physical meaning for small values of r (see Figure 3): $K_{sc} > K_c$. However, in practice, such values would never be reached because the subcritical propagation is replaced by the classical propagation when K_{sc} reaches K_c . Therefore, this will be our choice from now on.

2.3.4. Summary

Finally, each part of the model has a clear physical meaning:

- Equation (6) is the standard equation of fracture mechanics. Since the damaging reaction is a surface reaction (see Equation (23)), the subcritical propagation is stable and continuous. Thus, during the whole propagation ($\dot{a}(t) > 0$), Equation (6) reduces to:

$$K(a(t), t) = K_{sc}(t) \quad (29)$$

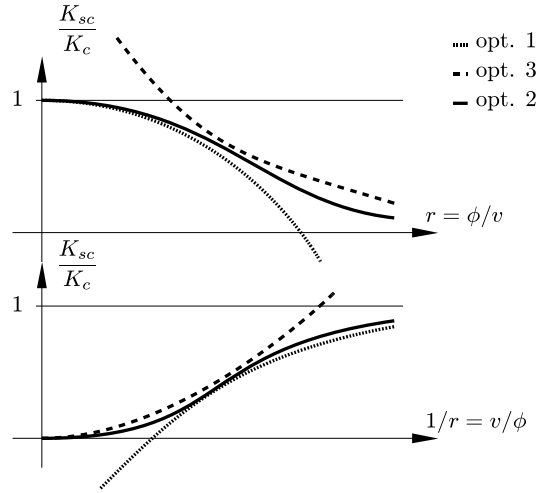


Figure 3: Comparison of several options for g

- The damage laws (27) and (28) also have a clear interpretation: the lower the velocity and/or the higher the reaction rate, the smaller the SCSIF and, conversely, the higher the velocity and/or the lower the reaction rate, the larger the SCSIF. The power law defined by λ and n characterizes the degradation of the CSIF for a given amount of oxygen arriving at the crack's tip. This is an intrinsic material law which depends neither on the temperature nor on time.

Grouping Equations (2) for the crack's intensity, (29) for the crack's propagation and (27) or (28) for the material's degradation through oxidation, this theory produces a differential problem in $a(t)$ which describes the crack's subcritical propagation under any mechanical loading and any chemical environment. This can lead to several models depending on the complexity of the description of the chemical environment surrounding the crack.

It is worth mentioning that in the case of Choice (28), if the reaction rate is assumed to be constant over time, one reverts to the framework of classical Paris-based laws (see Equation (5)) by introducing Equation (29):

$$\dot{a}(t) = \frac{\phi_0}{\lambda^{1/n} K_c^{1/n}} \cdot K^{1/n} \quad (30)$$

3. A first model with a simple environment, for low temperature

3.1. The model

3.1.1. Fiber environment

In this section, we consider that the fiber's surface is in direct contact with the ambient air. Thus, the reaction rate at the crack's tip is given by:

$$\phi_0 = k \cdot c_0 \quad (31)$$

where k is the reaction coefficient between O_2 and SiC , which is assumed to be independent of mechanical fields such as the stress field or the strain field, and whose temperature dependence is assumed to be of the Arrhenius type (k_0 being the prefactor and E_a^k the activation energy):

$$k = k_0 \cdot \exp\left(-\frac{E_a^k}{RT}\right) \quad (32)$$

and c_0 is the O_2 concentration in the surrounding air, related to the partial O_2 pressure through the ideal gas law:

$$c_0 = \frac{pO_2}{RT} \quad (33)$$

3.1.2. Resolution

The fiber's time-to-rupture, denoted t_R , is the solution of the differential problem ($m = 1$):

$$\begin{cases} a(t=0) = a_0(\sigma_R) \\ \dot{a}(t) = \frac{k c_0}{\lambda^{1/n} K_c^{1/n}} \sigma^{1/n} Y^{1/n} \sqrt{a(t)}^{1/n} \quad \forall t \\ a(t=t_R) = a_c(\sigma) \end{cases} \quad (34)$$

which, in the case of constant mechanical and chemical loading, can be integrated analytically:

$$t_R = \frac{2n}{2n-1} \frac{\lambda^{1/n} K_c^2}{k c_0 \sigma^{1/n} Y^2} \left(\sigma^{(2n-1)/n} - \sigma_R^{(2n-1)/n} \right) \quad (35)$$

For more complex loading cases, numerical integration may be required.

3.2. Calibration

3.2.1. Summary of published data

For Hi-Nicalon fibers, the toughness, previously presented in [Bunsell and Berger, 2000] and [Gauthier and Lamon, 2009], is given in Table 1 and the Weibull coefficients, previously presented in [Gauthier and Lamon, 2009], are given in Table 2.

K_c (MPa $\sqrt{\mu m}$)
1250

Table 1: Toughness of Hi-Nicalon fibers

L_0 (mm)	σ_0 (MPa)	m_σ
1	3640	8.47

Table 2: Weibull coefficients of Hi-Nicalon fibers

3.2.2. Fitting of the experimental data

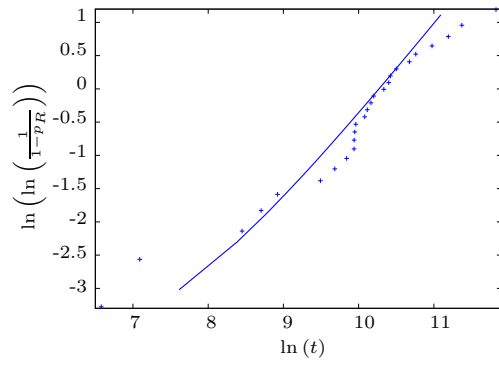
At this stage, the parameters which remain to be calibrated are: k , which is temperature-dependent (see Equation (32)), and λ and n , which are assumed to be temperature-independent. Since the literature does not provide much in terms of experimental data, this calibration is not straightforward. For example, regarding Hi-Nicalon fibers, only constant loading and environmental conditions have been investigated [Gauthier and Lamon, 2009]. These data will be used in this paper. Therefore, in Model (34), only the terms $k/\lambda^{1/n}$ and n can be calibrated at each temperature. Table 3 presents the result of the calibration process, and Figure 4 shows the comparison of the prediction given by the calibrated model with the experimental data.

$k/\lambda^{1/n}$ ($T = 500^\circ C$)	$k/\lambda^{1/n}$ ($T = 800^\circ C$)	n
$4 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-1}$	0.13

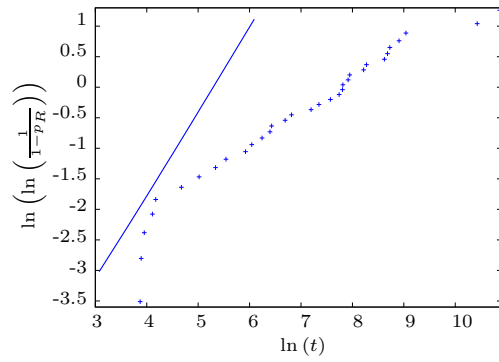
Table 3: The coefficients related to the subcritical propagation

3.3. Discussion

Even though this model is satisfactory at low temperatures, Figure 4 reveals a limitation at high temperatures: the model drastically underestimates the fiber's lifetime, especially in the case of long lifetimes. This is a major problem because the model already contains a parameter to adjust the temperature dependence. What this means is that this temperature dependence is more complex than an Arrhenius dependence. Indeed, it is well-known [Lawn, 1974; Wachtman, 1996; Evans *et al.*, 1996] that at high temperatures, after some time, the propagation becomes diffusion-controlled: the oxygen must diffuse through an oxide layer formed at the fiber's surface prior to oxidizing the crack's tip, a process which, by reducing the rate of the reaction which damages the material, results in a considerable increase in the fiber's lifetime. Therefore, it is necessary



(a) $T = 500^{\circ}C, \sigma = 1500 MPa$



(b) $T = 800^{\circ}C, \sigma = 1100 MPa$

Figure 4: Cumulative lifetime probability distributions of the fibers: model *vs.* experiment

to resort to a more realistic fiber environment. This will be the subject of the next section of the paper.

One should also observe that in the absence of further information only the coefficients $k/\lambda^{1/n}$ and n could be calibrated. An illustration of the possible values of λ and k is given in Figure 5, where the distance used is a classical norm of the modeling error:

$$e^2 = \frac{1}{n^{\text{exp}}} \sum_{i=1}^{n^{\text{exp}}} (\ln(t_R^{\text{mod}}) - \ln(t_R^{\text{exp}}))^2 \quad (36)$$

- (ii) The mechanical and chemical fields are uncoupled, which means, for example, that the reaction and diffusion coefficients are independent of the stress state.

Thus, one must solve the following simple problem:

- Unknowns (concentration and flux of O_2 in SiO_2):

$$\begin{cases} c(x, t) \\ \phi(x, t) \end{cases} \quad \forall x \in [-e(t), 0] \quad \forall t \in [0, +\infty] \quad (37)$$

- Conservation equation:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad \forall x \quad \forall t \quad (38)$$

- Diffusion equation (Fick's law, D being the diffusion coefficient of O_2 in SiO_2):

$$\phi = -D \cdot \frac{\partial c}{\partial x} \quad \forall x \quad \forall t \quad (39)$$

- Boundary conditions:

- Reaction condition at $x = -e(t)$ (first-order reaction, k being the reaction coefficient of O_2 with SiC):

$$\phi(x = -e(t), t) = k \cdot c(x = -e(t), t) \quad \forall t \quad (40)$$

- Prescribed concentration at $x = 0$:

$$c(x = 0, t) = c_0(t) \quad \forall t \quad (41)$$

whose solution is:

$$\begin{cases} c(x, t) = \left(1 + \frac{x}{e(t)}\right) \cdot c_0(t) - \left(\frac{x}{e(t)}\right) \cdot \frac{c_0(t)}{1 + ke(t)/D} \\ \phi(x, t) = \frac{kc_0(t)}{1 + ke(t)/D} \end{cases} \quad (42)$$

The oxide layer's growth problem.

- Unknown (the thickness e of the oxide layer):

$$e(t) \quad \forall t \in [0, +\infty] \quad (43)$$

- Growth equation (oxide creation, M and ρ being respectively the volume mass and the molar mass of SiO_2):

$$\frac{\partial e}{\partial t}(t) = -\frac{\rho}{M} \cdot \phi(x = -e(t), t) \quad \forall t \quad (44)$$

- Initial condition:

$$e(t = 0) = 0 \quad (45)$$

Reaction rate. The reaction rate at the crack's tip is obtained by coupling the previous two problems:

$$\phi_0(t) = \frac{kc_0(t)}{1 + ke(t)/D} \quad (46)$$

where the thickness e of the oxide layer is defined by the differential problem

$$\begin{cases} \frac{de}{dt}(t) = \frac{\rho}{M} \cdot \frac{kc_0(t)}{1 + ke(t)/D} \\ e(t=0) = 0 \end{cases} \quad (47)$$

which can be integrated numerically.

4.2. Calibration

4.2.1. Summary of published data

The silica-related coefficients are given in Table 4. The diffusion coefficient of O_2 in SiO_2 , assumed to be Arrhenius-dependent in temperature:

$$D_{0_2/SiO_2} = D_0 e^{-\frac{E_a^D}{RT}} \quad (49)$$

can be calibrated using the experimental data of [Boyer, 2005] and is given in Table 5.

ρ_{SiO_2} ($Kg \cdot mol^{-1}$)	M_{SiO_2} ($Kg \cdot m^{-3}$)
$60.0843 \cdot 10^{-3}$	2200

Table 4: Silica properties

D_0 ($m^2 \cdot s^{-1}$)	E_a^D ($J \cdot mol^{-1}$)
$2 \cdot 10^{-8}$	177,000

Table 5: Diffusion coefficient of O_2 in SiO_2

4.2.2. Fitting of the experimental data

Calibration. In Model (48), k and λ remain to be calibrated. Indeed, even though the ratio $k/\lambda^{1/n}$ was calibrated in the previous section (see Table 3), k appears without λ somewhere else in the model. Therefore, each parameter must be calibrated separately. In other words, for each temperature, one must find a single pair (k, λ) which verifies the relation of Table 3 and makes the model agree with the experimental data. Once again, we used the experimental data of [Gauthier and Lamon, 2009]. The calibrated values are given in Tables 6 and 7, and Figure 7 shows the comparison of the prediction given by the calibrated model with the experimental data.

Sensitivity analysis. Figure 8(a) shows the distance between the model and the experiments for the first environmental condition ($T = 500^\circ C$) near the calibrated values. The large cross represents the calibrated value and the small crosses represent all the values of (k, λ) which verify the relation of Table 3. In order to make things clearer, Figure 8(b) shows the distance as a function of the position λ along the line. Clearly, the solution is not unique and there are many pairs which minimize the distance. Indeed, at that temperature, the

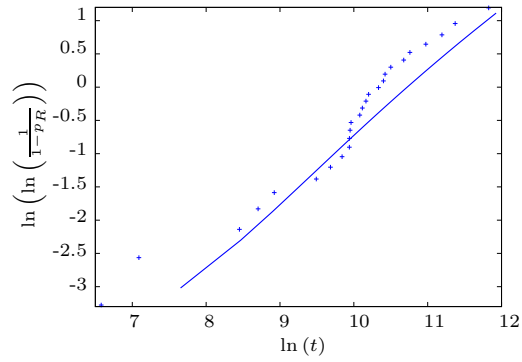
$k(T = 500^\circ C) \text{ (} m \cdot s^{-1} \text{)}$	$k(T = 800^\circ C) \text{ (} m \cdot s^{-1} \text{)}$
$1.02 \cdot 10^{-10}$	$2.56 \cdot 10^{-7}$

$k_0 \text{ (} m \cdot s^{-1} \text{)}$	$E_a^k \text{ (} J \cdot mol^{-1} \text{)}$
$1.47 \cdot 10^2$	180,000

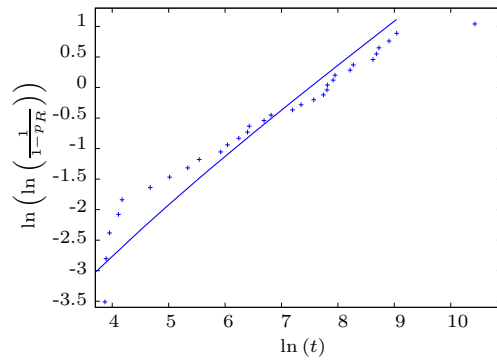
Table 6: Reaction coefficient of O_2 with SiC

$\lambda \text{ (} mol \cdot \mu m^{-3} \text{)}$	n
0.2	0.13

Table 7: Subcritical propagation coefficients



(a) $T = 500^\circ C, \sigma = 1500 \text{ MPa}$

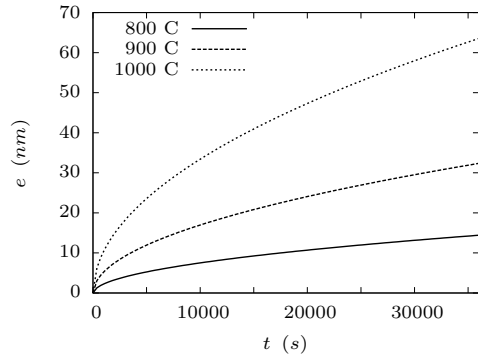


(b) $T = 800^\circ C, \sigma = 1100 \text{ MPa}$

Figure 7: Cumulative lifetime probability distributions of the fibers: model *vs.* experiment

oxide layer is expected to have almost no effect [Boyer, 2005] and, therefore, no information can be retrieved.

Conversely, Figure 9 shows the same plots for the second environmental condition ($T = 800^{\circ}C$). Clearly, the calibrated pair (k, λ) is that which verifies the relation of Table 3 and minimizes the distance between the model and the experiments. This calibration was made possible by the growth of the oxide layer which dissociates k from λ in the term $k/\lambda^{1/n}$.



(a) Model

fiber which governs the kinetics of the reaction), the calibration can be considered to be valid for any set of environmental conditions (low oxygen pressure, high temperature, variation over time, etc.) provided no other mechanism is involved. Some validation was presented. Work is currently underway in order to extend this validation and define its limits. An interesting application of this approach would be the analysis of accelerated tests (for example using high partial oxygen pressure) in order to reduce the cost of testing campaigns.

Finally, it is important to note that the model is suitable for varying environmental conditions, which constitute the cornerstone of the fiber's lifetime model as a first step toward a complete lifetime model of the tow. For example, in a composite, the oxygen concentration around the fibers may vary due to self-healing of the matrix. Thus, work is underway, with the introduction of self-healing mechanisms, in order to extend this prediction tool from fibers to fiber bundles, then from fiber bundles to complete tows.

References

- Aveston, J., Cooper, G., Kelly, A., 1971. Single and multiple fracture. In: Proc. of the Conference of the National Physical Laboratory on the properties of fiber composites. Vol. 4. p. 15–26.
- Boyer, M., 2005. Oxidation/Corrosion of ceramic matrix composites in aircraft type atmospheres (in French). Master thesis, LCTS, Bordeaux I University.
- Bunsell, A., Berger, M., 1999. Fine Ceramic Fibers. Marcel Dekker, Inc.
- Bunsell, A., Berger, M., 2000. Fine diameter ceramic fibres. Journal of the European Ceramic Society 20 (13), 2249–2260.
- Cluzel, C., Baranger, E., Ladevèze, P., Mouret, A., 2008. Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air. Composites, Part A: Applied Science and Manufacturing.
- Dambrine, B., 2006. Which composite materials in turbojets of Snecma Moteurs? (in French). In: Comptes rendus des 14èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC14).
- Deal, B.E., Grove, A.S., 1965. General relationship for the thermal oxidation of silicon. Journal of Applied Physics 36, 3770–3778.
- Evans, A.G., Zok, F.W., McMeeking, R.M., Du, Z.Z., 1996. Models of high-temperature, environmentally assisted embrittlement in ceramic-matrix composites. Journal of the American Ceramic Society 79, 2345–2352.
- Evans, A.G., 1997. Design and life prediction issues for high-temperature engineering ceramics and their composites. Acta Materialia 45 (1), 23–40.

- Forio, P., Lavaire, F., Lamon, J., 2004. Delayed failure at intermediate temperatures (600 degrees-700 degrees C) in air in silicon carbide multifilament tows. *Journal of the American Ceramic Society* 87 (5), 888–893.
- Gauthier, W., Lamon, J., 2009. Delayed Failure of Hi-Nicalon and Hi-Nicalon S Multifilament Tows and Single Filaments at Intermediate Temperatures (500 degrees-800 degrees C). *Journal of the American Ceramic Society* 92 (3), 702–709.
- Gauthier, W., Pailler, F., Lamon, J., and Pailler, R. Oxidation of Silicon Carbide Fibers During Static Fatigue in Air at Intermediate Temperatures. *Journal of the American Ceramic Society* 92 (9), 2067–2073.
- Hild, F., Marquis, D., Kadouch, O., and Lambelin, J.P. Analysis of the failure of ceramics due to subcritical crack growth. *Journal of Engineering Materials and Technology* 118 (3), 343–348.
- Laforêt, A., Lamon, J., 2008. Static fatigue of multifilament tows at high temperatures above 900°C. In: *Proc. of 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13)*.
- Lamon, J., 2001. A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites. *Composites Science and Technology* 61, 2259–2272.
- Lamon, J., 2007. Brittle fracture and damage mechanics – Probabilistic-statistical Approaches (in French). Hermès - Lavoisier.
- Lawn, B., 1974. Diffusion-controlled subcritical crack growth in the presence of a dilute gas environment. *Material Science and Engineering* 13, 277–283.
- Lemaitre, J., 1996. *A Course on Damage Mechanics, Second Edition*. Springer-Verlag.
- Phoenix, S.L., 1978. The asymptotic time to failure of a mechanical system of parallel members. *SIAM Journal of applied Mathematics* 34 (2), 227–246.
- Rebillat, F., Lamon, J., Naslain, R., Lara-Curzio, E., Ferber, M., Theodore, M., 1998. Properties of multilayered interphases in SiC/SiC chemical-vapor-infiltrated composites with 'weak' and 'strong' interfaces. *Journal of the American Ceramic Society* 81, 2315–2326.
- Song, D.-Y., Takeda, N., Kawamoto, H., 2000. Corrosion, oxidation and strength properties of Nicalon SiC fibre under loading. *Materials Science and Engineering* 279 (1-2), 82–87.
- Wachtman, J. B., 1996. *Mechanical properties of ceramics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Wiederhorn, S., Fuller, E., Thomson, T., 1980. Micromechanics of crack growth in ceramics and glasses in corrosive environments. *Metal Science* 14, 450–458.

Conclusions et perspectives

Conclusions

L'**objectif** de la thèse était de mettre en place les bases d'un matériau virtuel pour les composites tissés à matrice céramique auto-cicatrisante. Pour conclure sur les travaux effectués, il nous faut préciser les termes qui définissent cet objectif : si les concepts de *matériau* ou même de *matériau virtuel* sont relativement clairs, celui de *mettre en place* doit être précisé. En effet, le travail de thèse se situant dans le cadre de la *recherche scientifique appliquée*, il ne s'agit ni de fournir des outils purement théoriques, ni de fournir des outils purement pratiques, mais bien de trouver un équilibre entre ces deux voies. Il s'agit donc, mis à part les aspects humains et de formation, de fournir un certain nombre d'**outils pratiques** pour l'ingénieur, et dans le même temps de proposer des éléments de réponse à un certain nombre de **problèmes de fond**. Ainsi, plutôt que de reprendre les points clefs du travail dans l'ordre du manuscrit, on les présente ici en suivant cette distinction.

Tout d'abord, les outils pratiques :

1. Le point phare est sans aucun doute le travail –que l'on retrouvera également dans les questions de fond– sur la fibre (voir Section 6). En effet, il fournit à l'ingénieur un **outil de prédiction de la durée de vie des fibres Hi-Nicalon** sous chargement mécanique, thermique, et chimique, qui prend naturellement en compte la contrainte, la température et la pression partielle d'oxygène, ainsi que leurs variations, avec une identification très légère. Le modèle a été validé pour les températures inférieures aux températures de fluage (1200°C), et une oxydation par air sec. Il est très simple à mettre en œuvre, et ne nécessite pas de développement numérique particulier.
2. Un autre point clef concerne l'implémentation du modèle macroscopique d'endommagement pour les CMCs, déjà présenté dans [Ladevèze, 2002; Letombe, 2005] (voir Section 2.2.3.5), au sein du logiciel de calcul E.F. de référence ABAQUS (voir Section 4.4). En effet, le résultat de ce travail, facilement utilisable dans un bureau d'étude, est un **outil de prédiction du comportement et de l'endommagement de structures CMCs**, et ouvre donc la voie de l'optimisation structurale fine.
3. Le dernier point concerne le travail sur la représentation E.F. des cellules mésos (voir Section 3). Il fournit à l'ingénieur un **outil pour le calcul des propriétés élastiques macroscopiques d'un composite**

tissé à partir de la simple connaissance de son architecture tissée, et ouvre donc la voie de l'optimisation matériau fine. La stratégie étant implémentée dans la plateforme du laboratoire, elle n'est pas directement utilisable dans un bureau d'étude, mais peut d'ores et déjà être utilisée au laboratoire sur des structures banalisées.

Ensuite, les analyses et outils théoriques :

1. On retrouve ici le travail sur la fibre (voir Section 6), et plus précisément sur la **propagation sous-critique des fissures dans les céramiques**. En effet, une approche de modélisation réellement nouvelle a été proposée, qui réintègre le domaine d'étude de la propagation sous-critique [Wiederhorn, 1975; Wiederhorn *et al.*, 1980] dans celui de la propagation classique, *i.e.* la mécanique de la rupture. De plus, les points clefs de la physique –ou plutôt la chimie– qui sous-tend la propagation ont été introduits, de telle sorte que i) les deux stades de propagation dits *reaction* et *diffusion controlled* [Lawn, 1974; Wiederhorn *et al.*, 1980] se voient eux-mêmes unifiés; et ii) les différentes briques du modèle sont formulées de manière complètement intrinsèque.
2. Une autre analyse d'importance concerne le travail sur la **théorie de l'endommagement anisotrope** [Ladevèze, 1983, 2002] (voir Section 2.2.3 –ici il ne s'agit que de pédagogie–; ainsi que Sections 4.2.2.4, 4.2.2.5 et 4.4). Elle a non seulement permis de déceler un certain nombre de coquilles qui s'étaient glissées dans les publications de ces dix dernières années (voir remarque Section 2.2.3.5), mais surtout de comprendre et illustrer les possibilités et limites associées à un certain nombre de formulations de la théorie : dans l'état actuel des choses, les formulations en déformation ne permettent pas d'atteindre une contrainte nulle dans la direction de traction (voir Section 4.2.2.4), et les formulations en contrainte posent un véritable problème de résolution au niveau de l'inversion de la loi de comportement (voir Section 4.2.2.5). Pour finir, une nouvelle écriture des lois d'évolutions a été proposée, qui, à la différence des formulations précédentes, ne possède pas de dépendance à l'histoire du chargement (voir remarque Section 4.2.2.4).
3. L'analyse présentée Section 4.3 propose une **homogénéisation non linéaire d'une fissure frottante**, dans un style très micro-mécanique : à l'inverse des recherches actuelles sur des méthodes générales –souvent numériques– d'homogénéisation non linéaire [Kanoute *et al.*, 2009], *i.e.* la définition *a priori* des variables internes et des modèles réduits associés, la démarche consiste ici à utiliser les propriétés spécifiques du problème micro [Aveston *et al.*, 1971; Curtin, 1991a] pour opérer une homogénéisation analytique. Elle s'avère très proche de celle proposée dans [Hild *et al.*, 1996a], à cela près que i) le caractère probabiliste de la fissuration matricielle a été introduit, et ii) les lois d'évolutions des variables internes sont entièrement calculées à partir des calculs sur la cellule micro. Elle se distingue de celle proposée dans [Letombe, 2005] i) par son caractère

analytique, et ii) par le fait que les variations de chargement sont traitées au niveau micro.

4. Pour finir, Section 4.2.2 a été présentée une méthode de contrôle de la localisation liée à l'utilisation de modèles adoucissants [Needleman, 1988; Pijaudier-Cabot et Benallal, 1993], appliquée à la **simulation de la propagation de fissures discrètes par la mécanique de l'endommagement en quasi-statique**, avec comme objectif le traitement de la fissuration matricielle inter-fil. La méthode consiste en une régularisation du problème par l'utilisation d'une loi d'évolution de l'endommagement à taux limité [Ladevèze *et al.*, 2000; Allix *et al.*, 2003]. L'étude propose un premier cas de calcul de propagation de fissure 3D, qui met en évidence des difficultés liées au contrôle des paramètres de la méthode, entraînant par exemple l'amorçage de fissures parasites. Le cas de la fissuration des composites n'a donc pas été abordé.

Perspectives

La discussion se poursuit tout naturellement sur les perspectives des travaux de thèse :

1. Le travail sur la **fibre** pourrait être complété avec i) la prise en compte du fluage pour les températures élevées ; ii) la prise en compte d'environnements plus complexes, *e.g.* humides. Il pourrait également être porté au cas des **mèches de fibres**. Plus généralement, l'introduction du modèle de durée de vie des fibres dans un modèle de **durée de vie des fils** est en cours dans le travail de thèse de B. Tranquart –projet ARrière Corps cOmposite Céramique (ARCOCE), piloté par SPS–, qui consiste à traiter l'ensemble des mécanismes de dégradation/protection des fils –fissuration, décohésions, cicatrisation, etc– de manière explicite grâce à une stratégie de calcul spécifique. Il s'agira ensuite de remonter au **composite** dans son ensemble.
2. Quant au **modèle macroscopique d'endommagement** et à son implémentation (voir Section 4.4), des travaux sont en cours dans le cadre du post-doc de L. Marcin –à nouveau le projet ARCOCE– pour l'exploiter et la compléter, en particulier sur les problématiques de la **tolérance au dommage** et du **couplage fort endommagement/-durée de vie**. L'objectif est de fournir, sous peu, un outil de calcul de l'endommagement et de la durée de vie de structures CMCs à SPS.
3. Les problèmes numériques rencontrés dans cette thèse au niveau de **l'inversion des lois de comportement** des modèles d'endommagement anisotrope avec dissymétrie du comportement traction/compression, en particulier lorsque l'endommagement est saturé dans certaines directions en traction, ont permis de mettre à jour les limites des méthodes standards (voir Section 4.2.2.5). Ainsi, une méthode spécifique aux formulations de la théorie est en cours d'analyse.
4. En ce qui concerne le traitement de la **fissuration discrète par la mécanique de l'endommagement à taux limité en quasi-statique**, et

les limitations illustrées dans cette thèse (voir Section 4.2.2), des travaux sont en cours dans la thèse de C. Le Mauff, qui consistent à formuler une loi qui permette i) de régulariser la solution ; ii) de représenter une propagation qui soit compatible avec la mécanique de la rupture ; iii) tout en conservant un temps de calcul raisonnable [Le Mauff *et al.*, 2009].

Références

- Allix, O., Feissel, P. et Thevenet, P. (2003). A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues. *Computers & Structures*, 81(12):1177–1191.
- Allix, O. et Ladevèze, P. (1992). Interlaminar interface modeling for the prediction of delamination. *Composite Structures*, 22(4):235–242.
- Allix, O., Ladevèze, P. et Corigliano, A. (1995). Damage analysis of interlaminar fracture specimens. *Composite Structures*, 31(1):61–74.
- Aubard, X., Cluzel, C., Guitard, L. et Ladevèze, P. (1998). Modelling of the mechanical behaviour of 4D carbon/carbon composite materials. *Composites Science and Technology*, 58(5):701–708. 10th French National Colloquium on Composite Materials (JNC 10), Paris, France, 29-31 10 1996.
- Aubard, X., Cluzel, C., Guitard, L. et Ladevèze, P. (2000). Damage modelling of a 4D carbon/carbon composite for high temperature application. *Ceramics international*, 26(6):631–637.
- Aveston, J., Cooper, G. et Kelly, A. (1971). Single and multiple fracture. Dans *Proceedings of the Conference of the National Physical Laboratory on the properties of fiber composites*, volume 4, pages 15–26.
- Badel, P., Vidal-Salle, E. et Boisse, P. (2007). Computational determination of in-plane shear mechanical behaviour of textile composite reinforcements. *Computational Materials Science*, 40(4):439–448.
- Badel, P., Vidal-Sallé, E., Maire, E. et Boisse, P. (2008). Simulation and tomography analysis of textile composite reinforcement deformation at the mesoscopic scale. *Composites Science and Technology*, 68(12):2433–2440. Deformation and Fracture of Composites : Analytical, Numerical and Experimental Techniques, with regular papers.
- Baranger, E., Cluzel, C., Ladevèze, P. et Mouret, A. (2007). Prédiction de la durée de vie des composites céramiques à matrice autocicatrisante : I - Modélisation macroscopique de la fissuration. Dans *Comptes rendus des 15èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC15)*.

-
- Baranger, E., Cluzel, C., Ladevèze, P. et Mouret, A. (2008). Identification and validation of a multi-physic macro model for the lifetime prediction of self-healing ceramic matrix composites. Dans *Proceedings of the 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13)*.
- Bigaud, D. et Hamelin, P. (1997). Mechanical properties prediction of textiles-reinforced composite materials using a multiscale energetic approach. *Composite Structures*, 38:361–371.
- Bigaud, D. et Hamelin, P. (2002). Stiffness and failure modelling of 2D and 3D textile-reinforced composites by means of imbricated-type elements approaches. *Computers & Structures*, 80:2253–2264.
- Bordeu, F., Boucard, P. et Gosselet, P. (2009). Stratégie de calcul haute performance pour les structures composites. Dans *Comptes Rendus du 9ème Colloque National en Calcul de Structures*.
- Bordeu, F., Boucard, P., Lubineau, G. et Leclerc, H. (2008). A high performance strategy for the simulation of composites at mesoscale. Dans *Proceedings of the 6th International Conference on Engineering Computational Technology (ECT2008)*.
- Budiansky, B., Hutchinson, J. et Evans, A. (1986). Matrix fracture in fiber-reinforced ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 34(2): 167–189.
- Bunsell, A. et Berger, M. (1999). *Fine Ceramic Fibers*. Marcel Dekker, Inc.
- Calard, V. et Lamon, J. (2004). Failure of fiber bundles. *Composites Science and Technology*, 64(5):701–710.
- Camus, G. (2000). Modelling of the mechanical behavior and damage processes of fibrous ceramic matrix composites : applications to a 2-D SiC/SiC. *International Journal of Solids and Structures*, 37:919–942.
- Carrère, N., Martin, E. et Lamon, J. (2000). The influence of the interphase and associated interfaces on the deflection of matrix cracks in ceramic matrix composites. *Composites, Part A : Applied Science and Manufacturing*, 31(11):1179–1190.
- Chaboche, J. (1984). Anisotropic creep damage in the framework of continuum damage mechanics. *Nuclear Engineering and Design*, 79(3):309–319.
- Chaboche, J. (1992). Damage induced anisotropy : On the difficulties associated with the active/passive unilateral condition. *International Journal of Damage Mechanics*, 1(2):148–171.
- Chaboche, J., Kruch, S., Maire, J. et Pottier, T. (2001). Towards a micromechanics based inelastic and damage modeling of composites. *International Journal of Plasticity*, 17(4):411–439. 7th International Symposium on Plasticity and Its Current Applications, Cancun, Mexico, 01 1999.
-

- Chaboche, J. et Maire, J. (2001). New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMCs. *Composites Science and Technology*, 61(15):2239–2246. Workshop on Recent Advances in Continuum Damage Mechanics for Composites, Cachan, France, September 20-22, 2000.
- Chaboche, J. et Maire, J. (2002). A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's. *Aerospace Science and Technology*, 6(2):131–145.
- Chalmers, A. (1987). *Qu'est-ce que la Science ?* Éditions La Découverte.
- Chambart, M. (2009). *Endommagement anisotrope et comportement dynamique des structures en béton armé jusqu'à la ruine*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan.
- Chudoba, R., Vorechovsky, M. et Konrad, M. (2006). Stochastic modeling of multi-filament yarns. I. Random properties within the cross-section and size effect. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4):413–434.
- Cluzel, C., Baranger, E., Ladevèze, P. et Mouret, A. (2007). Prédiction de la durée de vie des composites céramiques à matrice autocicatrisante : II - Analyse des mécanismes de fissuration et d'oxydation. Dans *Comptes rendus des 15èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC15)*, pages 885–894.
- Cluzel, C., Baranger, E., Ladeveze, P. et Mouret, A. (2009). Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air. *Composites, Part A : Applied Science and Manufacturing*, 40:976–984. 15th French National Conference on Composites, Marseille, France, 06-08 06 2007.
- Coleman, B. (1958). On the strength of classical fibers and fibers bundles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 7:60–70.
- Cordebois, J. et Sidoroff, F. (1982). Anisotropic damage in elasticity and plasticity. *Journal de mécanique théorique et appliquée*, pages 45–60.
- Couégnat, G. (2008). *Approche multiéchelle du comportement mécanique de matériaux composites à renfort tissé*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Curtin, W. (1991a). Exact theory of fiber fragmentation in a single-filament composite. *Journal of Materials Science*, 26:5239–5253.
- Curtin, W. (1991b). Theory of mechanical properties of ceramic matrix composites. *Journal of the American Ceramic Society*, 74:2837–2845.
- Curtin, W. (1993). Multiple matrix cracking in brittle matrix composites. *Acta Metallurgica and Materialia*, 41(5):1369–1377.

-
- Dagli, L. et Rémond, Y. (2002). Identification of the non-linear behaviour a 4D carbon-carbon material designed for aeronautic application. *Applied Composite Materials*, 9(1):1–15.
- Daniels, H. (1945). The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads. Dans *Proceedings of the Royal Society, London*, volume 183, pages 404–435.
- De Melo-Loseille, O. et Lamon, J. (2009a). Durée de vie d'un composite en fatigue statique sous un gradient de contrainte et de température. Dans *Comptes rendus des 16èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC16)*.
- De Melo-Loseille, O. et Lamon, J. (2009b). Prediction of Ceramic Matrix Composites Lifetime in High Temperature Static Fatigue based on a Probabilistic Fracture Mechanics Model. Dans *Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM17)*.
- Deal, B. E. et Grove, A. S. (1965). General relationship for the thermal oxidation of silicon. *Journal of Applied Physics*, 36:3770–3778.
- Desmorat, R. (2000). Quasi-unilateral conditions in anisotropic elasticity. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 328(6):445–450.
- Desmorat, R. (2006). Positivity of intrinsic dissipation of a class of nonstandard anisotropic damage models. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 334(10):587–592.
- Desmorat, R., Chambart, M., Gatuingt, F., Combescure, D. et Guilbaud, D. (2008). Robust anisotropic visco-damage modeling for impact applications. Dans *Proceedings of the 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)*.
- Desmorat, R., Gatuingt, F. et Ragueneau, F. (2007). Nonlocal anisotropic damage model and related computational aspects for quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 74(10):1539–1560.
- Evans, A. (1997). Design and life prediction issues for high-temperature engineering ceramics and their composites. *Acta Materialia*, 45(1):23–40.
- Evans, A. et Marshall, D. (1989). The mechanical behavior of ceramic matrix composites. *Acta Metallurgica*, 37:2567–2583.
- Evans, A. et Zok, F. (1994). The physics and mechanics of fiber-reinforced brittle matrix composites. *Journal of Materials Science*, 29(15):3857–3896.
- Ewart, L. et Suresh, S. (1992). Elevated-temperature crack growth in polycrystalline alumina under static and cyclic loads. *Journal of Materials Science*, 27(19):5181–5191.

- Fantozzi, G., Reynaud, P. et Rouby, D. (2001). Thermomechanical behaviour of long fibres ceramic-ceramic composites. *Silicates Industriels*, 66(9-10): 109–119.
- Flores, S., Evans, A., Zok, F., Genet, M., Cox, B., Marshall, D., Sudre, O. et Yang, Q. (2010). Treating matrix nonlinearity in the binary model formulation for 3D ceramic composite structures. *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing*, 41(2):222–229.
- Garitte, E., Rebillat, F. et Guette, A. (2006a). B4C as the precursor of the healing in a SiC/SiC composite : behaviour under wet atmosphere. Dans *Proceedings of the 12th European Conference on Composite Materials (ECCM12)*.
- Garitte, E., Rebillat, F. et Guette, A. (2006b). Cinétique d'oxydation de SiBC sous atmosphère sèche entre 823 et 1173K. Dans *Comptes rendus du Congrès Matériaux 2006*.
- Gasser, A., Ladevèze, P. et Peres, P. (1998). Damage modeling for a laminated ceramic composite. *Material Science and Engineering*, 250:249–255.
- Gasser, A., Ladevèze, P. et Poss, M. (1996). Damage mechanisms of a woven SiC/SiC composite : modelling and identification. *Composites Science and Technology*, 56:779–784.
- Gauthier, W. (2006). *Rupture différée en fatigue statique, aux températures intermédiaires, de fils et de fibres à base de carbure de silicium*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Gauthier, W. et Lamon, J. (2006). Model of lifetime prediction at intermediate temperatures (500-800°C) in air for silicon carbide fibres. Dans *Proceedings of the 12th European Conference on Composite Materials (ECCM12)*.
- Gauthier, W. et Lamon, J. (2008). Delayed failure of silicon carbide fibres in static fatigue at intermediate temperatures (500-800°C) in air. Dans Lara-Curzio, E., Salem, J. et Zhu, D., éditeurs : *Mechanical Properties and Performance of Engineering Ceramics and Composites III*, volume 28, pages 423–431.
- Gauthier, W. et Lamon, J. (2009). Delayed Failure of Hi-Nicalon and Hi-Nicalon S Multifilament Tows and Single Filaments at Intermediate Temperatures (500 degrees-800 degrees C). *Journal of the American Ceramic Society*, 92(3):702–709.
- Gauthier, W., Pailler, F., Lamon, J. et Pailler, R. (2009). Oxidation of Silicon Carbide Fibers During Static Fatigue in Air at Intermediate Temperatures. *Journal of the American Ceramic Society*, 92(9):2067–2073.
- Genet, M. (2006). Utilisation des mini-composites pour l'identification d'un modèle de comportement des matériaux composites à matrice céramique. Mémoire de master, LMT-Cachan, ENS-Cachan.

-
- Genet, M. (2008a). Multiscale Modeling and Simulation Tools for Composite Materials at LMT-Cachan. Seminar of the Materials Department, UCSB, California, USA.
- Genet, M. (2008b). Multiscale Modeling and Simulation Tools for Composite Materials at LMT-Cachan. Seminar of Teledyne Scientific, Thousand Oaks, California, USA.
- Genet, M., Ladevèze, P. et Lubineau, G. (2009a). Toward virtual ceramic composites. Dans *Proceedings of the 17th International Conference on Composite Materials (ICCM17)*.
- Genet, M., Ladevèze, P. et Lubineau, G. (2009b). Vers des composites céramiques virtuels. Dans *Comptes rendus des 16èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC16)*.
- Genet, M., Ladevèze, P., Lubineau, G., Baranger, E. et Mouret, A. (2008a). Toward a virtual material for lifetime prediction of CMCs. Dans *Proceedings of the 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13)*.
- Genet, M., Ladevèze, P., Lubineau, G. et Barroumes, L. (2008b). Vers un matériau virtuel pour la prédiction de durée de vie des CMCs. Dans *Comptes Rendus des 17èmes Journée Techniques SAMPE 2008 (SAMPE2008)*.
- Genet, M., Ladevèze, P., Lubineau, G., Cluzel, C., Baranger, E. et Mouret, A. (2008c). Toward a virtual material for lifetime prediction of CMCs. Dans *Sélections SAMPE Europe*.
- Genet, M., Ladevèze, P., Lubineau, G., Cluzel, C., Baranger, E. et Mouret, A. (2008d). Vers un matériau virtuel pour la prédiction de durée de vie des CMCs. Dans *Sélections SAMPE France*.
- Genet, M., Ladevèze, P., Lubineau, G. et Mouret, A. (2008e). Toward a virtual material for lifetime prediction of CMCs. Dans *Comptes Rendus des 8èmes Journées Spécialisées sur les Réfractaires (JSR2008)*.
- Geuzaine, C. et Remacle, J. (2009). Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 79(11):1309–1331.
- Gorbatikh, L., Ivanov, D., Lomov, S. et Verpoest, I. (2007). On modelling of damage evolution in textile composites on meso-level via property degradation approach. *Composites, Part A : Applied Science and Manufacturing*, 38:2433–2442.
- Guidault, P. (2005). *Une stratégie de calcul pour les structures fissurées : analyse locale-globale et approche multiéchelle pour la fissuration*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan.
-

- Guillaumat, L. et Lamon, J. (1996). Probabilistic-statistical simulation of the non-linear mechanical behavior of a woven SiC/SiC composite. *Composites Science and Technology*, 56:803–808.
- Gulino, R. et Phoenix, S. (1991). Weibull strength statistics for graphite fibers measured from the break progression in a model graphite/glass/epoxy microcomposite. *Journal of Materials Science*, 26(11):3107–3118.
- Hansbo, A. et Hansbo, P. (2004). A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(33-35):3523–3540.
- He, Q. et Curnier, A. (1995). A more fundamental approach to damaged elastic stress-strain relations. *International Journal of Solids and Structures*, 32(10):1433–1457.
- Henstenburg, R. et Phoenix, S. (1989). Interfacial shear-strength studies using the single-filament test : II. A probability model and Monte-Carlo simulation. *Polymer Composites*, 10(6):389–408.
- Hild, F. (1998). *Endommagement, rupture et changements d'échelles dans les matériaux hétérogènes*. Habilitation à diriger des recherches, ENS-Cachan, LMT-Cachan.
- Hild, F. (2001). The Weibull law : A model of wide applicability. Dans *Proceedings of the NATO Advanced-Study-Institute on Physical Aspects of Fracture*, volume 32, pages 35–46.
- Hild, F., Burr, A. et Leckie, F. (1994). Fiber breakage and fiber pull-out of fiber-reinforced ceramic-matrix composites. *European Journal of Mechanics A-Solids*, 13(6):731–749.
- Hild, F., Burr, A. et Leckie, F. (1996a). Matrix cracking and debonding of ceramic-matrix composites. *International Journal of Solids and Structures*, 33(8):1209–1220.
- Hild, F., Marquis, D., Kadouch, O. et Lambelin, J. (1996b). Analysis of the failure of ceramics due to subcritical crack growth. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 118(3):343–348.
- Hill, R. et Okoroafor, E. (1995). Weibull statistics of fiber bundle failure using mechanical and acoustic-emission testing - The influence of interfiber friction. *Composites*, 26(10):699–705.
- Hochard, C., Aubourg, P. et Charles, J. (2001). Modelling of the mechanical behaviour of woven-fabric CFRP laminates up to failure. *Composites Science and Technology*, 61(2):221–230.

-
- Hui, C., Phoenix, S., Ibnabdeljalil, M. et Smith, R. (1995). An exact closed-form solution for fragmentation of Weibull fibers in a single filament composite with applications to fiber-reinforced ceramics. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 43(10):1551–1585.
- Ismar, H., Schröter, F. et Streicher, F. (2000). Modelling and numerical simulation of the mechanical behavior of woven SiC/SiC regarding a three dimensional unit cell. *Computational Materials Science*, 19:300–328.
- Ismar, H., Schröter, F. et Streicher, F. (2001). Influence of the fiber volume fraction and the fiber Weibull modul on the behavior of 2D woven SiC/SiC - a finite element simulation. *Acta Mechanica*, 149(1-4):41–54.
- Ismar, H. et Streicher, F. (1999). Modelling and simulation of the mechanical behavior of ceramic matrix composites as shown by the example of SiC/SiC. *Computational Materials Science*, 16(1-4):17–24.
- Jirasek, M. (2000). Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188(1-3):307–330.
- Ju, J. (1989). On energy-based coupled elastoplastic damage theories - Constitutive modeling and computational aspects. *International Journal of Solids and Structures*, 25(7):803–833.
- Kachanov, L. (1986). *Introduction to continuum damage mechanics*. Mechanics of Elastic Stability. H.H.E. Leipholz and G.AE. Oravas.
- Kanoute, P., Boso, D., Chaboche, J. et Schrefler, B. (2009). Multiscale Methods for Composites : A Review. *Archive of Computational Methods in Engineering*, 16(1):31–75.
- Karihaloo, B. et Xiao, Q. (2003). Modelling of stationary and growing cracks in FE framework without remeshing : a state-of-the-art review. *Computers & Structures*, 81(3):119–129.
- Ladevèze, P. (1983). Sur une théorie de l’endommagement anisotrope. Rapport interne 34, LMT-Cachan.
- Ladevèze, P. (1995). Modeling and Simulation of the Mechanical Behavior of CMCs. *High-Temperature Ceramic-Matrix Composites*, 47:53–63.
- Ladevèze, P. (2002). An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminate and three- and four-dimensional composites. Dans Allix, O. et Hild, F., éditeurs : *Continuum damage mechanics of materials and structures*, pages 205–233. Elsevier.
- Ladevèze, P. (2005). Multiscale computational damage modelling of laminate composites. Dans Sadowski, T., éditeur : *Multiscale modelling of damage and fracture processes in composite materials*, CISM Courses, pages 171–212. Springer-Verlag.
-

- Ladevèze, P., Allix, O., Deu, J. et Levêque, D. (2000). A mesomodel for localisation and damage computation in laminates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 183(1-2):105–122.
- Ladevèze, P., Gasser, A. et Allix, O. (1994). Damage mechanisms modelling for ceramic composites. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 116:331–336.
- Ladevèze, P. et Genet, M. (2010). A new approach to the subcritical cracking of ceramic fibers. *Submitted to Composites Science and Technology*.
- Ladevèze, P. et Le Dantec, E. (1992). Damage modeling of the elementary ply for laminated composites. *Composites Science and Technology*, 43(3):257–267.
- Ladevèze, P. et Letombe, S. (2000). Recent advances on an anisotropic damage theory including unilateral effects. Dans *Proceedings of the International Bimestre on Damage Mechanics*, Symposium on Continuous Damage and Fracture.
- Ladevèze, P., Letombe, S. et Cluzel, C. (2001). A CMC damage model based on micro and macromechanics for high-temperature and complex loading. Dans *Proceedings of the 4th International Conference on High Temperature Ceramic Matrix Composites (HTCMC 4)*.
- Ladevèze, P., Lubineau, G. et Violeau, D. (2006). A computational damage micromodel of laminate composites. *International Journal of Fracture*, 137: 139–150.
- Laforêt, A. (2009). *Rupture différée en fatigue statique aux très hautes températures (800°C-1300°C) des fils Hi-Nicalon, des composites Hi-Nicalon/type PyC/SiC et des composites Hi-Nicalon/type PyC/B4C*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Laforêt, A. et Lamon, J. (2008). Static fatigue of multifilament tows at high temperatures above 900°C. Dans *Proceedings of the 13th European Conference on Composite Materials (ECCM13)*.
- Lamon, J. (2001). A micromechanics-based approach to the mechanical behavior of brittle-matrix composites. *Composites Science and Technology*, 61:2259–2272.
- Lamon, J. (2007). *Mécanique de la rupture fragile et de l'endommagement – Approches statistiques et probabilistes*. Hermès - Lavoisier.
- Lamon, J., Thommeret, B. et Percevault, C. (1998). Probabilistic-statistical Approach to Matrix Damage and Stress-Strain Behavior of 2-D Woven SiC/SiC Ceramic Matrix Composites. *Journal of the European Ceramic Society*, 18:1797–1808.

-
- Lamouroux, F., Bertrand, S., Pailler, R. et Naslain, R. (1999). A multilayer ceramic matrix for oxidation resistant carbon fibers-reinforced CMCs. Dans Niihara, K., Nakano, K., Sekino, T. et Yasuda, E., éditeurs : *High Temperature Ceramic Matrix Composites III*, Key Engineering Materials, pages 365–368. 3rd International Conference on High Temperature Ceramic Matrix Composites (HT-CMC 3), Osaka, Japan, 06-09 09 1998.
- Landis, C., Beyerlein, I. et McMeeking, R. (2000). Micromechanical simulation of the failure of fiber reinforced composites. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48(3):621–648.
- Lawn, B. (1974). Diffusion-controlled subcritical crack growth in the presence of a dilute gas environment. *Material Science and Engineering*, 13:277–283.
- Le Mauff, C., Ladevèze, P. et Lubineau, G. (2009). Utilisation d’un modèle d’endommagement avec une loi à taux limité en quasi-statique. Dans *Comptes rendus du Congrès Français de Mécanique (CFM) 2009*.
- Leclerc, H. (2007). Plateforme metil : optimisations et facilités liées à la génération de code. Dans *Comptes Rendus du 8ème Colloque National en Calcul de Structures*.
- Leclerc, H. (2008). Toward higher performance FEM implementations using lazy evaluation and symbolic programming. Dans *Proceedings of the 8th World Congress on Computational Mechanics (WCCM8)*.
- Lemaitre, J. (1992). *A Course on Damage Mechanics*. Springer-Verlag.
- Lemaitre, J. et Chaboche, J. (1993). *Mécanique des matériaux solides*. Dunod.
- Lemaitre, J., Desmorat, R. et Sauzay, M. (1999). Evolution law for anisotropic damage. *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, 327(12):1231–1236.
- Letombe, S. (2005). *Modélisation du couplage oxydation/endommagement dans les composites à matrice céramique*. Thèse de doctorat, ENS-Cachan.
- Lissart, N. et Lamon, J. (1994). Évaluation des caractéristiques de rupture des monofilaments à partir d’un essai de traction sur mèches. Dans *Comptes rendus des 9èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC9)*, pages 589–598.
- Lissart, N. et Lamon, J. (1997a). Damage and failure in ceramic matrix minicomposites : Experimental study and model. *Acta Materialia*, 45(3):1025–1044.
- Lissart, N. et Lamon, J. (1997b). Statistical analysis of failure of SiC fibres in the presence of bimodal flaw populations. *Journal of Materials Science*, 32(22):6107–6117.
-

- Lomov, S., Ivanov, D., Verpoest, I., Zako, M., Kurashiki, T., Nakai, H. et Hirosawa, S. (2007). Meso-FE modelling of textile composites : Road map, data flow and algorithms. *Composites Science and Technology*, 67:1870–1891.
- Lubineau, G., Violeau, D. et Ladevèze, P. (2009). Illustrations of a micro-damage model for laminates under oxidizing thermal cycling. *Composites Science and Technology*, 69(1):3–9.
- Maire, J. et Chaboche, J. (1997). A new formulation of continuum damage mechanics (CDM) for composite materials. *Aerospace Science and Technology*, 1(4):247–257.
- Maire, J. et Lesne, P. (1997). A damage model for ceramic matrix composites. *Aerospace Science and Technology*, 1(4):259–266.
- Marcin, L. (2010). *Modélisation du comportement, de l'endommagement et de la rupture de matériaux composites à renforts tissés pour le dimensionnement robuste de structures*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I.
- Marshall, D., Cox, B. et Evans, A. (1985). The mechanics of matrix cracking in brittle-matrix fiber composites. *Acta Metallurgica*, 33(11):2013–2021.
- Matthies, H. et Strang, G. (1979). Solution of non-linear finite-element equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 14(11):1613–1626.
- Möes, N., Cloirec, M., Cartraud, P. et Remacle, J. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computational Methods in Applied Mechanics Engineering*, 192:3163–3177.
- Möes, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 46(1):131–150.
- Moevus, M., Godin, N., R'Mili, M., Rouby, D., Reynaud, P., Fantozzi, G. et Farizy, G. (2008a). Analysis of damage mechanisms and associated acoustic emission in two SiCf/[Si-B-C] composites exhibiting different tensile behaviours. Part II : Unsupervised acoustic emission data clustering. *Composites Science and Technology*, 68(6):1258–1265.
- Moevus, M., Rouby, D., Godin, N., R'Mili, M., Reynaud, P., Fantozzi, G. et Farizy, G. (2008b). Analysis of damage mechanisms and associated acoustic emission in two SiC/[Si-B-C] composites exhibiting different tensile behaviours. Part I : Damage patterns and acoustic emission activity. *Composites Science and Technology*, 68(6):1250–1257.
- Momon, S., Moevus, M., Godin, N., R'Mili, M., Reynaud, P., Fantozzi, G. et Fayolle, G. (2009). Identification de la signature acoustique des différents

-
- mécanismes sources lors d'essais de fatigue sur CMC : Application de classificateur supervisé et non supervisé. Dans *Comptes rendus des 16èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC16)*.
- Murakami, S. (1983). Notion of continuum damage mechanics and its application to anisotropic creep damage theory. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 105(2):99–105.
- Naslain, R. (1998). The design of the fibre-matrix interfacial zone in ceramic matrix composites. *Composites, Part A : Applied Science and Manufacturing*, 29(9-10):1145–1155. 5th International Conference on Interfacial Phenomena in Composite Materials, Hungary, 01-03 09 1997.
- Naslain, R. (1999). Materials design and processing of high temperature ceramic matrix composites : state of the art and future trends. *Advanced Composite Materials*, 8(1):3–16.
- Naslain, R. (2004). Design, preparation and properties of non-oxide CMCs for application in engines and nuclear reactors : an overview. *Composites Science and Technology*, 64(2):155–170. Symposium on Multifunctional Materials and Structures, Stuttgart, Germany, 16-20 03 2003.
- Naslain, R., Lamon, J., Pailler, R., Bourrat, X., Guette, A. et Langlais, F. (1999a). Micro/minicomposites : a useful approach to the design and development of non-oxide CMCs. *Composites, Part A : Applied Science and Manufacturing*, 30(4):537–547. International Symposium on Ceramic Matrix Composites, Tokyo, Japan, 28-30 10 1997.
- Naslain, R., Langlais, F., Pailler, R. et Vignoles, G. (2002). Processing of SiC/SiC fibrous composites according to CVI-techniques. Dans Kohyama, A., Singh, M., Lin, H. et Katoh, Y., éditeurs : *Advanced SiC/SiC Ceramic Composites : Developments and Applications in Energy Systems*, volume 144 de *Ceramic transactions*, pages 19–37. International Symposium on SiC/SiC Composite Materials Research and Development and Its Application to Advanced Energy Systems, Kyoto, Japan, 20-22 05 2002.
- Naslain, R., Pailler, R., Bourrat, X. et Vignoles, G. (1999b). Processing of ceramic matrix composites by pulsed-CVI and related techniques. Dans Suzuki, H., Komeya, K. et Uematsu, K., éditeurs : *Novel Synthesis and Processing of Ceramics*, volume 159-1 de *Key Engineering Materials*, pages 359–365. International Symposium on Novel Synthesis and Processing of Ceramics, Kurume, Japan, 26-29 10 1997.
- Needleman, A. (1988). Material rate dependance and mesg sensitivity in localization problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 67(1):69–85.
- Oliver, J., Huespe, A., Pulido, M. et Chaves, E. (2002). From continuum mechanics to fracture mechanics : the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):113–136.
-

- Oskay, C. et Fish, J. (2007). Eigendeformation-based reduced order homogenization for failure analysis of heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196(7):1216–1243.
- Phoenix, S. (1974). Probabilistic strength analysis of fiber bundles structures. *Fiber Science and Technology*, 7:15–31.
- Phoenix, S. et Taylor, H. (1973). The asymptotic strength distribution of a general fiber bundle. *Advanced Applied Problems*, 5:200–216.
- Pijaudier-Cabot, G. et Benallal, A. (1993). Strain localization and bifurcation in a nonlocal continuum. *International Journal of Solids and Structures*, 30(13):1761–1775.
- Popper, K. (1984). *Logique de la Découverte Scientifique*. Payot.
- Rebillat, F., Lamon, J., Naslain, R., Lara-Curzio, E., Ferber, M. et Theodore, M. (1998). Properties of multilayered interphases in SiC/SiC chemical-vapor-infiltrated composites with 'weak' and 'strong' interfaces. *Journal of the American Ceramic Society*, 81:2315–2326.
- Rouby, D. et Reynaud, P. (1993). Fatigue behaviour related to interface modification during load cycling in ceramic matrix fibre composites. *Composites Science and Technology*, 48:109–118.
- Sanchez-Palencia, E. (1980). *Non homogeneous media and vibration theory*. Lecture Notes in Physics, 127. Springer, Berlin.
- Shimoo, T., Takeuchi, H., Takeda, M. et Okamura, K. (2000). Oxidation kinetics and mechanical property of stoichiometric SiC fibers (Hi-Nicalon-S). *Journal of the ceramic society of Japan*, 108(12):1096–1102.
- Simo, J. et Ju, J. (1987). Strain-based and stress-based continuum damage models. 1. Formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 23(7):821–840.
- Song, D.-Y., Takeda, N. et Kawamoto, H. (2000). Corrosion, oxidation and strength properties of Nicalon SiC fibre under loading. *Materials Science and Engineering*, 279(1-2):82–87.
- Strouboulis, T., Babuska, I. et Copps, K. (2000). The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 181(1-3):43–69.
- Sutcu, M. (1989). Weibull statistics applied to fiber failure in ceramic composites and work of fracture. *Acta Metallurgica*, 37(2):651–661.
- Takeda, M., Imai, Y., Ichikawa, H., Kasai, N., Seguchi, T. et Okamura, K. (1999a). Thermal stability of SiC fiber prepared by an irradiation-curing process. *Composites Science and Technology*, 59(6):793–799.

- Takeda, M., Sakamoto, J., Imai, Y. et Ichikawa, H. (1999b). Thermal stability of the low-oxygen-content silicon carbide fiber, Hi-Nicalon (TM). *Composites Science and Technology*, 59(6):813–819.
- Takeda, M., Urano, A., Sakamoto, J. et Imai, Y. (1998). Microstructure and oxidative degradation behavior of silicon carbide fiber Hi-Nicalon type S. *Journal of Nuclear Materials*, 258:1594–1599.
- Tang, X., Whitcomb, J., Kelkar, A. et Tate, J. (2006). Progressive failure analysis of 2x2 braided composites exhibiting multiscale heterogeneity. *Composites Science and Technology*, 66:2580–2590.
- Verpoest, I. et Lomov, S. (2005). Virtual textile composites software Wisetex : integration with micro-mechanical, permeability and structural analysis. *Composites Science and Technology*, 65(15-16):2563–74.
- Vivier, G., Trumel, H. et Hild, F. (2009). On the stored and dissipated energies in heterogeneous rate-independent systems : theory and simple examples. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 20(7):411–427.
- Volterra, V. (1907). Sur l'équilibre des corps élastiques multiples connexes. *Annales Scientifiques de l'école Normale Supérieure*, 24:401–518.
- Vorechovsky, M. et Chudoba, R. (2006). Stochastic modeling of multi-filament yarns : II. Random properties over the length and size effect. *International Journal of Solids and Structures*, 43(3-4):435–458.
- Wachtman, J. B. (1996). *Mechanical properties of ceramics*. John Wiley & Sons, Inc.
- Weibull, W. (1939). A statistical theory of the strength of materials. Rapport technique 151, Royal Swedish Institute for Engineering Research.
- Weibull, W. (1951). A statistical distribution function of wide applicability. *Journal of Applied Mechanics*, pages 293–297.
- Wery, S. et Teyssandier, F. (2006). Etude thermodynamique des systèmes B-H-O et B-Si-H-O : modélisation de la vaporisation de B₂O₃. Dans *Comptes Rendus de Matériaux 2006, Dijon, France*.
- Wery, S. et Teyssandier, F. (2008). Use of the sessile drop method to understand the behaviour of self healing ceramic matrix composite. Dans Steinmetz, P., Wright, I., Galerie, A., Monceau, D. et Mathieu, S., éditeurs : *Proceedings of the High Temperature Corrosion and Protection of Materials 7*, pages 1173–1180.
- Whitcomb, J. et Srirengan, K. (1995). Effect of various approximations on predicted progressive failure in plain weave composites. *Composite Structures*, 34:13–20.

- Widom, B. (1966). Random sequential addition of hard spheres to a volume. *Journal of Chemical Physics*, 44(10):3888.
- Wiederhorn, S. (1975). Crack growth as an interpretation of static fatigue. *Journal of Non-Crystalline Solids*, 19:169–181.
- Wiederhorn, S., Fuller, E. et Thomson, T. (1980). Micromechanics of crack growth in ceramics and glasses in corrosive environments. *Metal Science*, 14:450–458.
- Zako, M., Uetsuji, Y. et Kurashiki, T. (2003). Finite element analysis of damaged woven fabric composite materials. *Composites Science and Technology*, 63:507–516.
- Zhu, S., Mizuno, M., Kagawa, Y. et Mutoh, Y. (1999). Monotonic tension, fatigue and creep behavior of SiC-fiber-reinforced SiC-matrix composites : a review. *Composites Science and Technology*, 59:833–851.