HAL open science

Extraction des paramètres cosmologiques et des propriétés de l'énergie noire

Sebastian Linden

To cite this version:

Sebastian Linden. Extraction des paramètres cosmologiques et des propriétés de l'énergie noire. Cosmologie et astrophysique extra-galactique [astro-ph.CO]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2010. Français. NNT : . tel-00473183v4

HAL Id: tel-00473183

https://theses.hal.science/tel-00473183v4

Submitted on 20 Dec 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université de Provence
(Centre de Physique Théorique)

Extraction des paramètres cosmologiques et des propriétés de l'énergie noire

Thèse présentée par

Sebastian Linden

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Provence

Spécialité : Physique Théorique, Cosmologie.

Soutenue publiquement le 19 avril 2010, devant le jury composé des MM. :

Aurélien	Barrau	LPSC	(Grenoble)
Alain	Blanchard	LATT	(Toulouse)
Pier Stefano	Corasaniti	LUTH	(Paris)
Jean-Paul	Kneib	LAM	(Marseille)
Christian	Marinoni	CPT	(Marseille)
André	Tilquin	CPPM	(Marseille)
Jean-Marc	Virey	(Directeur de thèse)	

Rapporteurs :

Professeur Dr. h.d.r. Alain Blanchard
Professeur Dr. h.d.r. David Polarski

خوش آنکه در این زمانه آزاده بزیست
خرسند به هرچه اش که خدا داده بزیست
وین یک دم عمر را غنیمت بشمرد
آزاده و با ساده و با باده بزیست

(حکیم عمر خیام)

Préface

Ce manuscrit est constitué de deux parties. Dans la première partie on expose les faits théoriques et observationnels qui établissent le modèle cosmologique standard, dit modèle ΛCDM, après avoir développé quelques étapes historiques qui y menèrent. On détaille les diverses sondes cosmologiques et les problèmes liés à la détermination de la nature de la composante inconnue, dite 'énergie noire'. On passe ensuite, dans la deuxième partie, au sujet de mon travail de thèse, à savoir l'extraction des paramètres cosmologiques et des propriétes de l'énergie noire. On y trouve l'ensemble des résultats que j'ai pu obtenir à propos des questions concernant :

1. les risques d'introduction de biais causés par l'utilisation d'une approche purement cinématique à l'étude de la cosmologie,
2. la validité du paramétrage de l'équation d'état de l'énergie noire de Chevallier, Polarski, et Linder, et
3. les effets d'une évolution en redshift de la magnitude apparente des Supernovae de type Ia.

Les résultats 2. et 3. ont aussi été publiés sous les références Linden & Virey (2008), Phys. Rev. D, 78, 023526, et Linden et al. (2009), A&A, 506, 1095-1105, respectivement.

J'ai pu effectuer mon travail sous la direction de Jean-Marc Virey à qui j'adresse mes remerciements les plus chaleureux. Mon travail et mon séjour à Marseille ont été financés par des bourses de recherche de la 'Gottlieb Daimler- und Karl Benz-Stiftung', de l'office allemand d'échanges universitaires (DAAD), et de la 'Dr. Jost-Henkel-Stiftung'.

Notes

1. A propos des indices et de la convention de sommation : Les indices grecs $\{\alpha, \beta, \gamma, \cdots\}$ prennent les valeurs $\{0, 1, 2, 3\}$. Ici, '0' designe la coordonnée temporelle x^0, et '1, 2, 3' désignent les trois coordonnées spatiales x^1, x^2, x^3. Quand nécessaire, le triplet $\left\{x^1, x^2, x^3\right\}$ sera désigné par le trivecteur position, $\vec{r}$, et nous aurons $\vec{v} := \dot{\vec{r}}$ le trivecteur de vitesse. Nous allons aussi nous servir du vecteur position unitaire $\vec{n} := \vec{r}/|\vec{r}|$.
On utilise la convention de sommation d'Einstein, c'est à dire que l'on sommera sur toutes les paires d'indices sans que le symbole de sommation, $\sum$, n'apparaisse explicitement. Soit par exemple :

- $P^{\mu\rho}{}_{\mu\sigma} = \sum\limits_{\mu=0}^{3} P^{\mu\rho}{}_{\mu\sigma}$,
- $a_{ii} = \sum\limits_{i=1}^{3} a_{ii}$.

Les indices latins $\{a, b, c, \ldots, i, j, k, \ldots\}$ prennent des valeurs selon le contexte où ils apparaissent. Aussi :

- $\dot{\{\}}$ désigne la dérivée de $\{\}$ par rapport au temps propre $\tau\left(= x^0/c\right)$,
- $\{\}^{\cdots}_{\cdots,\mu}$ désigne la dérivée partielle de $\{\}^{\cdots}_{\cdots}$ par rapport à x^μ, et
- $\{\}^{\cdots}_{\cdots;\mu}$ désigne la dérivée covariante de $\{\}^{\cdots}_{\cdots}$ par rapport à x^μ.

2. Notations particulières : Nous emploierons les notations suivantes :

- $\equiv$ exprime une identité,
- $:=$ exprime une définition, et
- $\overset{!}{=}$ exprime une égalité imposée (une condition).

3. A propos des figures : La plupart des figures ont été dessinées avec ORIGINPRO 8© et MATHEMATICA©, sauf certaines figures extraites directement d'articles, et les Figures 1.4, 2.4, 2.5 (droite), 2.7 et 2.8, qui ont été dessinées avec SMARTDRAW 2008© et/ou GIMP©.

4. Suivant un bel usage je présente l'année où j'ai fini ce manuscrit de façon cryptée.[2]

---

1. Le quatrain sur la première page est attribué au célèbre mathématicien et poète perse Omar Khayyâm († 1132). Monteil (2004, p. 78) en donne la traduction suivante : "Heureux celui qui sais rester un homme libre, et sait se contenter des simples dons de Dieu, qui retient chaque jour son souffle peu à peu : boire et aimer sans frein, n'est-ce pas, cela, vivre ?"
2. Lire aussi le vers qui suit l'annexe.

Table des matières

Préface **iii**

Notes **v**

I Cosmologie **1**

1 Brève histoire de la cosmologie **5**
1.1 La démystification du Monde 5
1.2 La modélisation du Monde 7
1.3 L'univers newtonien 10

2 Le modèle standard **15**
2.1 Les bases théoriques 15
2.1.1 La métrique de Robertson-Walker 17
2.1.2 La cinématique des univers Robertson-Walker 18
2.1.3 La dynamique des univers Robertson-Walker 23
2.2 Les modèles de Friedmann 28
2.3 Les sondes observationnelles 31
2.3.1 L'échelle de distance 31
2.3.2 Supernovae 35
2.3.3 Fond diffus cosmologique 40
2.3.4 Oscillations acoustiques des baryons 45
2.4 Valeurs des paramètres cosmologiques 46
2.4.1 Le modèle ΛCDM 46
2.4.2 Les paramètres de densité et de l'énergie noire 49
2.4.3 La dynamique de l'énergie noire 51
2.4.4 Résultats avec SNe+$\mathcal{R}$+A 51
2.5 La dégénérescence géométrique 54

3 Modèles pour l'énergie noire **59**
3.1 La Constante Cosmologique 59
3.2 L'énergie du vide 60
3.3 Modèles de Quintessence 61
3.3.1 Les modèles 'tracker' 63
3.3.2 Les modèles 'thawing' et 'freezing' 64
3.4 Modèles anisotropes et inhomogènes 66

3.4.1 Modèle de Lemaître, Tolman, et Bondi 66
3.4.2 Problème de moyenne, et 'backreaction' 67
3.4.3 Test du Principe Cosmologique 68
3.5 Modifications de la Relativité Générale 68
3.6 Effets astrophysiques 71
3.7 Paramétrage de l'énergie noire 71
3.7.1 Paramétrage de Chevallier, Polarski, et Linder 71
3.7.2 Paramétrage du type 'step' 75

II Extraction des paramètres cosmologiques 79

4 Cosmographie 83
4.1 Paramètres cosmographiques 84
4.2 Dépendance de modèle 85
4.3 Risque de biais 89
4.4 Résumé 91

5 Test du paramétrage CPL 93
5.1 Signification des paramètres CPL 93
5.2 Stratégie de l'analyse 94
5.3 Illustration du problème 97
5.4 L'espace des paramètres $(z_{\rm t}, \Gamma)$ 99
5.4.1 Les modèles avec $w_i = 0$ et $w_f = -1$ 99
5.4.2 Les modèles avec $w_i = -0.8$ et $w_f = -1$ 103
5.5 L'espace des paramètres (w_i, w_f) 104
5.6 Confusion avec des modèles $w_{\rm x} = \text{const.}$ et ΛCDM 105
5.7 Stabilité des résultats 107
5.8 Résumé 107

6 Evolution des magnitudes des Supernovae 109
6.1 Motivation de l'étude 109
6.1.1 Effets intrinsèques 110
6.1.2 Sous-populations 111
6.1.3 Effets extrinsèques 111
6.2 Paramétrages de l'effet 112
6.3 Données réelles 113
6.3.1 Contraindre l'évolution 113
6.3.2 Diagramme de Hubble 117
6.4 Données simulées 119
6.4.1 Illustration du problème 120
6.4.2 Détectabilité 121
6.4.3 Risque de biais 126
6.5 Dangerosité 127

7 Conclusions 131

Appendices **134**

A Traitement de données **135**
A.1 Distribution de χ^2 135
A.2 Test de qualité de l'ajustement 137
A.3 Degré de confiance 138
A.4 Matrice de Fisher 140

B Echantillon prospectif des SNe **143**

Registres **147**
Bibliographie 147
Table des figures 157
Liste des tableaux 159
Index des auteurs 161
Index des termes et définitions 165

Première partie

Cosmologie

This is all the heaven we've got,
right here where we are.[1]

Chapitre 1

Brève histoire de la cosmologie

Depuis que le premier des hommes y eût posé son regard, les beautés inouïes du ciel continuent à fasciner l'observateur terrestre. Alors que tous les phénomènes constituant son environnement direct, sur terre, furent dès le début de son parcours de l'histoire à la portée de ses sens et de sa manipulation, les espaces infiniment lointains du ciel, remplis d'objets mystérieux de toutes sortes, du puissant soleil à la lune changeante, passant par les planètes et les étoiles filantes, jusqu'aux étoiles les plus brillantes et à cette bande brumeuse répandue sur l'intégralité du ciel ; ces espaces éternels et divins devaient pour l'homme rester un mystère incompréhensible. Or, le ciel était le lieu de projections spirituelles et commença ensuite à être peuplé des Dieux les plus puissants des cultures anciennes.

1.1 La démystification du Monde

On ne s'étonne guère de trouver des descriptions du ciel et de ses acteurs, *i.e.* le soleil, la lune, et les étoiles, parmi les tous premiers documents écrits et œuvres d'artisanat. Il est inutile de vouloir faire le récit des observations célestes de toutes les cultures anciennes, on se contentera ici de montrer le fameux 'disque céleste de Nebra', Figure 1.1, qui suivant Maraszek (2009) représente le plus ancien document concret des observations du ciel jamais retrouvé, datant d'environ 1600 avant l'ère de Jésus-Christ. Le disque montre un mélange d'observations astronomiques (à savoir la pleine lune, la nouvelle lune, les équinoxes et les pléiades), et d'éléments artistiques (étoiles) et mythiques (le bateau de soleil) (cf. Maraszek 2009). L'invention de l'écriture par l'homme marqua la fin de l'époque où toute transmission de connaissance et d'histoire devait faire appel à la transmission orale qui était soumise à des manipulations introduites inconsciemment (ou bien consciemment) par les narrateurs.[2] Vinrent ensuite,

1. Our Shangri-La, Knopfler (2004).

2. On va pourtant s'apercevoir dans la suite de l'histoire que même ainsi les manipulations ne sont point exclues. On évoque ici le dogme de l'univers strictement statique, invariable et éternel au-delà de la sphère de la lune, promu pendant des siècles par l'église chrétienne du Moyen Age (cf. Drewermann (2002) pour les relations de l'église chrétienne avec la cosmologie,

FIGURE 1.1: Photographie du disque céleste de Nebra, trouvé à Nebra en Saxe-Anhalt (Allemagne).

en Mésopotamie au deuxième millénaire avant Jésus-Christ, les débuts d'une observation du ciel plus précise et une croissance cumulée du savoir. C'est à cette époque là que l'astronomie fut la première 'science' à être excercée à un niveau considérablemt rigoureux (cf. par exemple Lindberg 1992).
L'émergence d'une observation plus accrue du ciel et la découverte des régularités et du 'bien orchestré', et pas seulement des mouvements dans le ciel mais de tous phénomènes naturels (tels que la chute libre), permirent aux anciens grecs de pousser en avant le concept du 'cosmos', ce qui en grec indique le 'bon ordre' ou 'l'ordre de l'univers' (Robert 2009). C'est ici, dans le concept d''ordre', que se trouve le grand contraste avec les perceptions du monde de l'ère mystique, où le déroulement des choses et la survie de l'homme étaient à part entière soumis à la volonté des Dieux, dont les humeurs étaient supposées influençables par des actes de bonne volonté de l'homme, mais restèrent par définition imprévisibles et arbritaires. C'est donc le plus grand des succès des premiers savants de notre culture d'avoir tiré l'homme de cette inconscience de soi-même, et de lui avoir démontré sa capacité à prendre son destin entre ses propres mains. Le chaos et l'anarchie des Dieux de l'ère mystique furent remplacé par un regard sur le monde qui soulignait la compréhensibilité des choses. Cette compréhension pouvait notamment s'effectuer grâce à la pensée, mais surtout par des études méticuleuses du déroulement des phénomènes, afin d'en extraire les règles auxquelles ces derniers sont soumis. A titre d'exemple, citons la prédiction par Thales de Milet d'une éclipse en l'an 585 avant Jésus-Christ, qui est devenu légendaire grâce à cet exploit exceptionnel qui fut vite connu (à l'époque) dans le monde entier, selon Lindberg (1992). La prévisibilité montrait avant tout que le destin même du si puissant soleil, signe de force divine, est soumis aux régles non négociables du 'bon-ordre' de l'univers, et qui plus est, peut être compris par l'homme.
Il faut ici exprimer des doutes sur la capacité de Thales à prédire une éclipse avec les moyens d'observations réduits dont il disposait. Néanmoins cette lé-

et notre discussions plus bas).

gende montre bien ce que nous voulions souligner dans cette première section : que l'idée de la régularité et de la prédictibilité du déroulement des choses est née vers 600 avant Jésus-Christ, et s'incrustera par la suite dans la pensée de l'homme (cf. Kuhn 2001).

1.2 La modélisation du Monde et le rôle de la géométrie

Comme on a vu dans la section précédente, le concept du cosmos au sens d'un univers 'ordonné' plutôt que chaotique était présent dans la pensée des cultures d'Europe dès les premiers savants grecs. Alors que les modèles cosmologiques de Platon et d'Aristote restaient, du point de vue d'un cosmologue 'moderne', très simplistes, on y retrouve cependant des caractéristiques remarquables. Chez Platon on s'aperçoit notamment qu'il construisit son cosmos à partir des *principes géométriques*. Il construisit à partir du triangle les uniques cinq corps tridimensionnels aux surfaces égales (polyèdres réguliers, Figure 1.2), et les identifiait avec les quatre éléments : le Feu (le tétraèdre), la Terre (le cube), l'Air (l'octaèdre), l'Eau (l'icosaèdre), et le Cosmos entier (le dodécaèdre). Ainsi, les éléments deviennent changeables comme le sont les polyèdres, qui eux peuvent être composés et décomposés en triangle et/ou d'autres polyèdres. En outre, il décrit l'univers comme une sphère autour de la terre (une sphère elle-même) sur laquelle sont fixées les étoiles et où se déplacent les planètes, la lune, et le soleil. La contribution majeure d'Aristote à la cosmologie, si on tente ici de réduire sa cosmologie en une phrase, est une décomposition de la sphère céleste en une région inférieure, sous la lune, et en une région supérieure, au-delà de la lune, au sujet de laquelle il resta dogmatique sur son éternité et immobilité :

> Le corps céleste est inaugmentable, inaltérable, impassible, éternel enfin. [3]

Ceci influencera la philosophie occidentale pendant deux millénaires. Aristote défendait cette supposition de staticité éternelle par l'absence complète d'observation des mouvements dans la région supérieure :

> Le sens le confirme aussi : jamais dans le passé, selon la tradition et la mémoire, on n'a vu de transmutation dans le dernier ciel tout entier ni dans aucune de ses parties popres. [4]

Ici, Aristote semble cependant entrer en conflit avec sa philosophie naturelle : il avait postulé que tous les mouvements fussent linéaires et temporaires, et que les choses fussent altérables et corruptibles. Ainsi, avec Aristote, si nous observons dans le ciel d'éternels déplacements circulaires et uniformes, ceci vient du fait que le ciel est constitué d'autre chose que des quatre éléments terrestres : il est fait d'une cinquième essence, qu'Aristote nommait l''éther'[5].

3. Aristote (1984, I, 3, 270a). Traduction suivant Fréreux & De Gandt (1992).
4. Ibid.
5. Ibid., p. 270b.

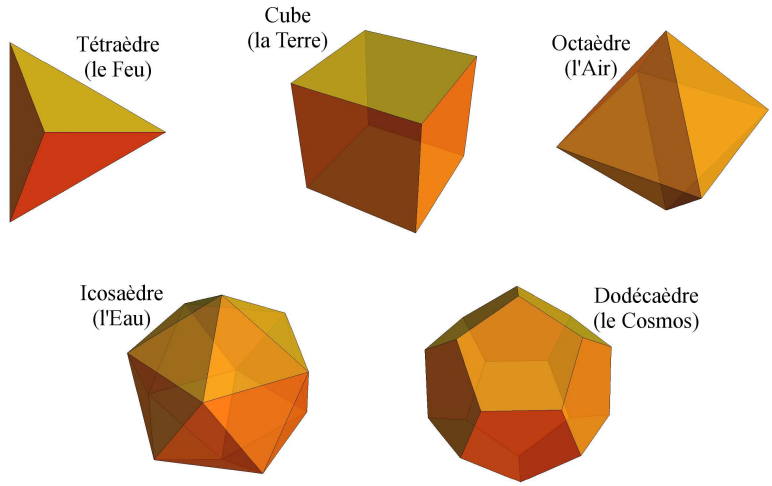


FIGURE 1.2: Les cinq corps platoniques.

Le niveau toujours plus élevé de la mathématique grecque et notamment de la géométrie permit aux auteurs grecs, dans les siècles suivants, des calculs des distances nous séparant de la lune et du soleil, du diamètre de la terre, ainsi que des prévisions du déplacement des objets célestes. Les grecs pouvaient apparemment aussi profiter d'un accès aux bases de données observationnelles des Babyloniens, ce qui mena Hipparque à combiner ces connaissances (cf. Toomer 1970-1978, vol. 15, p. 205). Il fut ainsi le premier à exiger un accord numérique entre des modèles géométriques et les observations, fait qui révolutionna l'astronomie grecque (cf. Lindberg 1992). Les résultats, cependant, dépendaient fortement des suppositions de modèle. Ce 'modèle cosmologique' provoqua de vives discussions parmis les cosmologues grecs (cf. Furley 1987) qui devaient finalement rejeter les modèles héliocentriques à cause de l'absence apparente d'une parallaxe annuelle. Vers la fin de l'époque hellénique, Claude Ptolémée (vers 150 après Jésus-Christ) pouvait se référer au savoir accumulé des auteurs grecs et babyloniens de plus de cinq siècles, dont il donna un résumé exhaustif et qu'il amalgama dans son système épicycloïdal des mouvements des planètes (cf. Toomer 1984).

Alors qu'en Europe le progrès scientifique s'arrêtait quasiment pendant les siècles du Moyen Age, à cause principalement du dogmatisme d'une église chrétienne dominant tout le secteur de l'éducation et ayant proclamé l'univers éternel et géocentrique comme le *seul et vrai* modèle du cosmos, ce n'était pas le cas au Moyen Orient. Des auteurs comme Abu Dscha'far Al-Khwârizmi, Umar Al-Hayyâm, et Omar Khayyâm (cf. Jaouiche 2000), ne fondaient pas seulement l'algèbre en donnant des solutions analytiques et géométriques aux équations jusqu'au troisième degré, mais contribuaient surtout à la théorie des parallèles en traitant des problèmes liés au cinquième postulat d'Euclide (cf. Rosenfeld

1988; Jaouiche 2000). Nous n'essayerons pas de donner ici un résumé du développement des géométries non-euclidiennes, mais nous nous contenterons de souligner l'importance des travaux des mathématiciens de pays d'islam sur le postulat des parallèles pour les travaux de Lobatchevski (1829) et de Bolyai (1832), qui donneront naissance à la géométrie des espaces courbes, et par ceci à la théorie relativiste de la gravitation.

Quand l'église chrétienne arrivait à supprimer la pensée innovante, le concept général du cosmos bien réglé survécut cependant. Grand est le nombre des œuvres traitant de la structure soupçonnée être géométrique de l'univers. Un des plus fameux et radical exemple en est l'illustration de la 'Bible Moralisée', œuvre réligieuse datant du treizième siècle, où figure un Dieu qui doit se munir d'un compas pour pouvoir aboutir à la création du monde, Figure 1.3. On y exprime donc l'idée que Dieu le tout puissant est, lui-même, soumis aux lois de la géométrie.
Dans une époque extraordinaire de l'histoire d'Europe, le dogme du ciel incorruptible devait finalement céder sa place à la science moderne. Un des premiers à véritablement s'opposer à ce verdict en s'appuyant sur des faits observables est Galilée (1610) en découvrant les lunes de Jupiter et plus tard les taches du Soleil et les phases de Venus (Galilée 1613), mais il dut renoncer à cette découverte (cf. Matarasso-Gervais 1988, pour une discussion). Mais aux vues des événements de l'an 1604 le monde des étoiles fixes vu par l'église fut inévitablement condamné à tomber. Cette année là, Kepler découvrit une *Stella Nova*, dont il décrivit le phénomène (cf. Kepler 1606), et en tira des conclusions révolutionnaires. Déjà son mentor Tycho Brahé avait observé et décrit une Stella Nova (Brahé 1573), mais il fut plus prudent dans l'interprétation de ses données que Kepler.[6] Là où Brahé n'osa guère prononcer que :

> La machine du ciel n'est pas un corps dur et impénétrable rempli de sphères réelles comme cela a été cru jusqu'à présent par la plupart des gens,

traduction suivant Lerner (1989), Kepler alla plus loin et conclut à partir de l'ensemble de ses données observationnelles et de celles de son mentor le modèle héliocentrique, auparavant spéculé par Copernic (1543), et fortement soutenu par l'observation des phases de Venus par Galilée (1613). Dans ce modèle, les planètes ne circulent pas seulement librement et le ciel n'est point incorruptible, mais la terre sera privée de sa place au centre de l'univers et tournera comme les autres planètes autour du soleil sur des orbites elliptiques. Aujourd'hui, on parle souvent de ce principe, que : "La terre ne se trouve pas à un point préféré dans l'univers", comme le Principe de Copernic. Ce fut le début de la science moderne, qui quatre-vingt ans plus tard vit sa première véritable apogée avec la mécanique de Isaac Newton (1686), qui, en combinaison avec sa loi de la gravitation universelle, donna une explication de ces mouvements orbitaux.

6. Notons que la SN observée par Tycho Brahe en 1572 a été démontrée faire partie de la classe de SNe dites de 'type Ia' (notamment par Ruiz-Lapuente et al. 2004; Krause et al. 2008), cf. plus bas.

FIGURE 1.3: 'Dieu l'architecte du monde' comme illustré dans la Bible Moralisée (Bib 1220-1230).

1.3 L'univers newtonien

Passant aux notations mathématiques, l'équation newtonienne du champ gravitationnel s'écrit sous la forme de l'équation de Poisson :

$$\Phi\left(\vec{r},t\right)_{,ii} = 4\pi G\rho\left(\vec{r},t\right), \tag{1.1}$$

où ρ désigne la densité de matière gravitationnelle (*i.e.* la densité de masse gravitationnelle), $\vec{r}$ est le vecteur position dans un espace euclidien de dimension trois, et t est le temps universel de la mécanique classique. Φ est appelé le potentiel gravitationnel. Supposons une boule de matière de masse gravitationnelle M et de rayon R, nous obtenons de l'éq.(1.1) la force gravitationnelle agissant sur une particule de masse inertielle m sur la surface de la boule. En vertu de l'axiome dynamique de la mécanique newtonienne on en déduit une accélération radiale :

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2}, \tag{1.2}$$

à la surface de la boule. La loi de gravitation universelle de Newton, prédisant que toutes masses attirent toutes autres masses, nécessite l'effondrement de cette distribution de matière finie. Et elle fera de même de toute autre distribution de matière, car il est clair que l'éq.(1.1) ne permet un univers statique ($\Phi(\vec{r},t)=\Phi_0$=const.) que si $\rho(\vec{r},t)\equiv 0$ partout. Alors qu'il était déjà établi à l'époque, comme on a vu, que les objets célestes n'étaient point éternels mais soumis aux changements comme le sont les objets terrestres, rien ne faisait croire que l'univers *en soi* pourrait être soumis à une évolution temporelle. Pour sortir du problème de l'effondrement gravitationnel sans pourtant perdre la validité de la loi de la gravitation, il fallait alors postuler l'univers infini. Malheureusement, plusieurs problèmes se posent au sujet de l'univers infini dans la théorie newtonienne.

Le paradoxe d'Olbers : Dans le modèle de l'univers infini, où les étoiles sont réparties dans l'espace de manière homogène,[7] on peut construire le paradoxe suivant qui a été formulé par l'astronome et physicien Heinrich Wilhelm Matthäus Olbers (1823) : Si les étoiles sont distribuées de manière homogène, et si l'univers est infini, ne devrait-on pas dans chaque direction du ciel voir une étoile, plus au moins éloignée ? Mais si, dans chaque direction on devrait voir une étoile, pourquoi le ciel est-il noir la nuit ?

Soit $n = \mathrm{d}N/\mathrm{d}V$ la densité moyenne d'étoiles dans un univers homogène et infini, et soit L la luminosité moyenne de ces étoiles. Le flux $\mathcal{F}_i$, mesuré sur la terre, venant de l'étoile i se trouvant à la distance r de cette dernière, est $\mathcal{F}_i = L_i/\left(4\pi r^2\right)$. Considérant des sphères concentriques de rayon r autour de la terre nous trouvons le flux :

$$\mathrm{d}\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi r^2}\mathrm{d}N = nL\mathrm{d}r, \tag{1.3}$$

provenant d'une couche fine d'étoiles se trouvant entre r et $r+\mathrm{d}r$ et de volume $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\mathrm{d}r$, cf. Figure 1.4. Ici, $\mathrm{d}N = n\mathrm{d}V$ est le nombre d'étoiles dans cette couche. Si nous prenons en compte la lumière en provenance de toutes les étoiles situées entre la terre et une distance $r_{\max}$, nous trouvons que :

$$\mathcal{F}(r_{\max}) = nL\int_0^{r_{\max}}\mathrm{d}r = nLr_{\max}, \tag{1.4}$$

est le flux intégral de toutes les étoiles à distance $r_i < r_{\max}$ de la terre, comme on le mesurera sur terre. Cependant, la valeur de $r_{\max}$ est bornée par l'argument suivant : Prenons comme rayon moyen des étoiles, que l'on imagine distribuées de manière équidistante, la valeur R_{s}. C'est à dire nous attribuons à chaque étoile la surface appararente $A_i = \pi {R_{\mathrm{s}}}^2$. Les $\mathrm{d}N = n4\pi r^2\mathrm{d}r$ étoiles dans la

7. Ce qui en effet peut être vu comme une conséquence du Principe de Copernic. Selon ce dernier, la terre ne se trouve pas à un endroit préférer dans l'univers. De là il ne reste qu'à postuler qu'il n'existe pas de point préféré dans l'univers, ce qui implique l'homogénéité et l'isotropie spatiale de l'univers, cf. Beisbart & Jung (2006) pour le rapport entre le Principe de Copernic et ce dernier principe, appelé 'Principe Cosmologique' (PC).

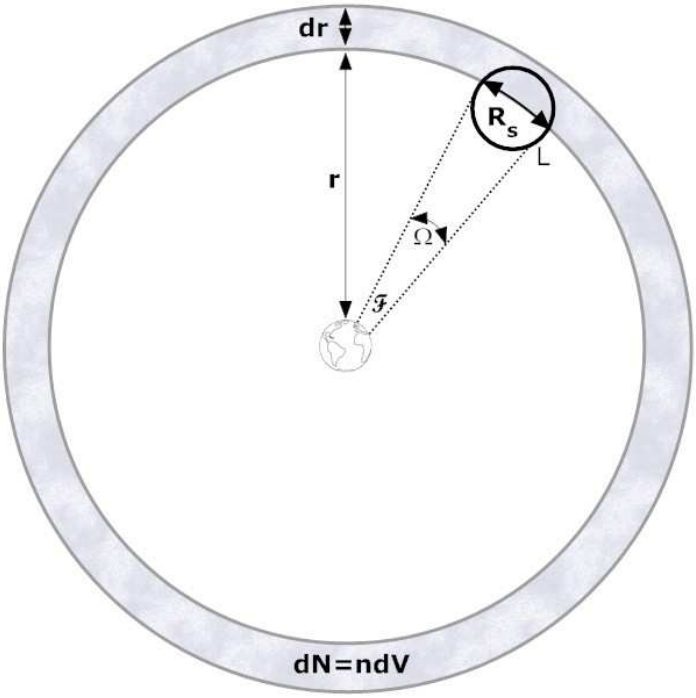


FIGURE 1.4: Fine clouche $r + \mathrm{d}r$ autour de la terre.

couche fine à distance r de la terre, définie auparavant, vont donc couvrir la surface effective :

$$\frac{A_i \mathrm{d}N}{A} = n \frac{4\pi^2 R_\mathrm{s}^2 r^2 \mathrm{d}r}{4\pi r^2}, \tag{1.5}$$

de la surface de la sphère r. r_max sera alors donné par la condition que :

$$(A_i \mathrm{d}N)/A \stackrel{!}{=} 1, \tag{1.6}$$

signifiant une couverture complète du ciel. Toutes étoiles étant éloignées plus que r_max seront invisibles de la terre, car cachées derrières les étoiles de premier plan. De l'éq.(1.6) nous obtenons évidemment :

$$\begin{aligned} n\pi R_\mathrm{s}^2 \int_0^{r_\mathrm{max}} \mathrm{d}r &\stackrel{!}{=} 1 \\ &\Leftrightarrow \\ r_\mathrm{max} &= \frac{1}{n\pi R_\mathrm{s}^2} \end{aligned} \tag{1.7}$$

la profondeur maximale de vision, r_max, dans un univers newtonien statique, d'âge et d'extension spatiale infinie.
Insérant l'éq.(1.7) dans éq.(1.4) nous trouvons donc :

$$\mathcal{F}(r_\mathrm{max}) = nLr_\mathrm{max} = \frac{L}{\pi R_\mathrm{s}^2} \tag{1.8}$$

le flux intégral mesuré sur la terre. Nous nous apercevons que $L/\left(\pi R_{\mathrm{s}}^2\right)$ est en effet la luminosité surfacique d'une étoile, et donc que la luminosité du ciel de nuit devrait être aussi grande que la luminosité surfacique d'une étoile. Ce résultat est connu sous le nom de 'paradoxe d'Olbers', alors que Olbers n'était pas le premier à le formuler (cf. Harrison 1990, et références citées). Le paradoxe ne fut résolu qu'avec les moyens de la cosmologie moderne. Car, premièrement, dans le modèle moderne l'univers est d'âge fini et la lumière émise par des objets très lointains n'a pas encore pu arriver sur terre. Et, deuxièmement, l'univers est soumis à une expansion globale depuis le big bang. Cette expansion cause un décalage spectral vers le rouge de la luminosité, et on observe en effet que dans la région spectrale électromagnétique de plusieurs cm, le ciel n'est point noir mais brillant comme le jour. Il s'agit ici du fond diffus cosmologique que l'on discutera dans la section 2.3.3. Cependant, si on se met dans le contexte de la théorie newtonienne et demande que l'univers soit statique et éternel, et que la matière soit distribuée de manière homogène, le paradoxe d'Olbers nécessite qu'il soit fini ; or nous avons vu que l'univers statique et fini n'est pas permis par la dynamique, cf. éq.(1.2). L'univers newtonien n'est donc pas consistant. Mais les études de cette dynamique ont amené l'idée de l'existence d'une Constance Cosmologique.

La non-convergence de la force gravitationnelle : Neumann (1874) et Seeliger (1895) ont demontré la non-convergence de la force gravitationnelle dans un univers infini à densité de masse constante, quand on le décrit par la théorie newtonienne. On trouve une discussion de l'argumentation et du développement de l'idée chez Goenner et al. (1999), cf. aussi la discussion de Pauli (1921). En bref, la force gravitationnelle excercée sur une particule de masse par une distribution de masse infinie n'est pas définie. Il faut alors demander que la densité de masse converge vers zéro plus vite que $1/r^2$, afin de garder la validité de la théorie newtonienne. Dans cette solution, l'univers 'infini' devient donc effectivement fini, car la densité de masse est quasiment zéro à partir d'un certain rayon. Mais, suivant l'argumentation de Einstein (1917), on doit remarquer :

> daß ein mit endlicher kinetischer Energie begabter Himmelskörper das räumlich Unendliche unter Überwindung der Newtonschen Anziehungskräfte erreichen kann. Dieser Fall muss nach der statistischen Mechanik solange immer wieder eintreten, als die gesamte Energie des Sternsystems genügend groß ist, um – auf einen einzigen Himmelskörper übertragen – diesem die Reise ins Unendliche zu gestatten, von welcher er nie zurückkehren kann. [8]

En d'autres termes : l'univers 'se viderait'.
Comme autre solution du problème de la non-convergence de la force gravitationnelle, Seeliger (1896) a proposé de remplacer le potentiel newtonien par un

8. "qu'un corps céleste disposant d'une énergie cinétique finie, peut, en franchissant les forces newtoniennes attractives, s'enfuir vers l'infini spatial. Selon la mécanique statistique ce cas devra continuer à se reproduire tant que l'énergie totale du système des étoiles, si transmise à un seul corps céleste, permet à ce dernier le voyage vers l'infini, d'où il ne reviendra jamais." (Einstein 1917).

potentiel du type :

$$\Phi(r) \propto -\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}r}}{r}, \tag{1.9}$$

où λ est une constante. On peut montrer que cette modification du potentiel revient à une simple modification de l'éq.(1.1) :

$$\Phi(\vec{r},t)_{,ii} + \lambda\Phi(\vec{r},t) = 4\pi G\rho(\vec{r},t), \tag{1.10}$$

qui a été donnée par Einstein (1917). De l'éq.(1.10) on déduit facilement que l'univers statique, caractérisé par $\Phi(\vec{r},t) = \Phi_0 =$ const., devient possible si la relation :

$$\Phi_0 = \frac{4\pi G\rho_0}{\lambda}, \tag{1.11}$$

est vérifiée. Dans cette solution, la matière est distribuée de manière homogène dans l'espace infini, et sa densité est constante dans l'espace et le temps, $\rho(\vec{r},t)$=ρ_0= const. Ainsi, l'univers n'aura pas de centre comme c'est le cas si l'on postule la diminution de la densité de masse vers zéro à distances infinies. Cette modification de l'équation de Poisson était le point de départ pour Einstein quand il introduisit la Constante Cosmologique dans la Relativité Générale, que nous discuterons dans le chapitre suivant.

Chapitre 2

Le modèle standard. Théories et observations

La cosmologie entra dans son ère de véritable discipline scientifique avec la formulation de la Relativité Générale par Einstein (1915a). Après avoir confirmé la validité de sa théorie sur les échelles du système solaire avec la prédiction exacte de l'avance du périhélie de Mercure (Einstein 1915b) et de la déflexion de la lumière dans le champ gravitationnel du soleil (qui cependant ne sera confirmée qu'en 1919, voir Dyson et al. (1920)), Einstein passa tout de suite à l'application de ses équations du champ gravitationnel à la cosmologie.

2.1 Les bases théoriques

C'est dans l'application cosmologique de sa nouvelle théorie que Einstein (1917) compléta ses équations par l'introduction d'un terme Λ, qu'il motiva ainsi :

> Wir können nämlich auf der linken Seite der Feldgleichung den mit einer vorläufig unbekannten universellen Konstante Λ multiplizierten Fundamentaltensor $g_{\mu\nu}$ hinzufügen, ohne dass dadurch die allgemeine Kovarianz zerstört wird. [1]

Les équations du champ gravitationnel d'Einstein prennent alors la forme :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \tag{2.1}$$

Ici, on retrouve les quantités géométriques $R_{\mu\nu}$ et R qui sont, respectivement, le tenseur de Ricci et le scalaire de Ricci, qui sont des contractions du tenseur de Riemann. $R_{\mu\nu}$ et R sont données par le tenseur métrique $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ (et ses deux premières dérivées) de l'espace pseudo-Riemannien en quatre dimensions que l'on a l'habitude de désigner l'‘espace-temps'. Nous appliquons la signature $(-+++)$ à la métrique. La partie gauche est souvent décrite comme le

1. “Car on peut sur le côté gauche de l'équation du champ gravitationnel ajouter le tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, multiplié avec une constante universelle Λ présentement inconnue, sans que ceci ne brise la covariance générale.”

tenseur d'Einstein, noté $G_{\mu\nu}$. Sur le côté droit, on a $T_{\mu\nu}$ le tenseur énergie impulsion de la matière. Il est une fonction du tenseur métrique et des variables d'état du système physique considéré, et peut être interprété comme la source du champ géométrique. Parce que le tenseur d'Einstein satisfait l'identité de Bianchi, $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, le tenseur énergie impulsion de la matière satisfait automatiquement la relation de continuité d'énergie et d'impulsion :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \equiv 0. \tag{2.2}$$

La première loi de la thermodynamique est donc une loi dérivée dans la Relativité Générale, cf. Neugebauer (1980) pour une discussion. On a aussi :

$$\kappa := \frac{8\pi G}{c^4} = 2.073 \cdot 10^{-43} \frac{\mathrm{s}^2}{\mathrm{m\,kg}}, \tag{2.3}$$

la constante gravitationnelle d'Einstein. Le terme Λ que Einstein nommait le 'Kosmologisches Glied' a depuis été désigné comme la *Constante Cosmologique*. Les éqs.(2.1) constituent un système couplé de dix équations différentielles non-linéaires pour le tenseur métrique, $g_{\mu\nu}$, et on aura besoin d'hypothèses simplificatrices pour arriver à en trouver des solutions analytiques, cf. Stephani et al. (2003) pour un résumé des solutions analytiques.

1. Une classe de simplifications est constituée des développements perturbatifs de la théorie, où on suppose connue la métrique 'de fond' de l'espace-temps, $\bar{g}_{\mu\nu}$, et où l'on traite ensuite les perturbations en tant que des fluctuations faibles du champ gravitationnel :

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(h^2), \tag{2.4}$$

ou $h = h^{\mu}{}_{\mu}$ est la trace de la fluctuation. Par exemple, si $\bar{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, où $\eta_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski, on obtient la linéarisation de la Relativité Générale qui est particulièrement utile dans la recherche des ondes gravitationnelles, cf. Sathyaprakash & Schutz (2009). On pourra aussi traiter des anisotropies de l'espace-temps cosmologiques comme déviations de la métrique Friedmann-Robertson-Walker, éq.(2.8) ci-dessous.

2. On peut aussi imposer des symétries géométriques (staticité, stationnarité, sphéricité, symétrie axiale...) pour obtenir les solutions du champ gravitationnel. L'expression géométrique de telles symétries est l'existence d'un champ vectoriel ξ^{μ}, dit de Killing, qui satisfait la condition :

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0, \tag{2.5}$$

désignée comme étant l'équation de Killing (1892), cf. aussi Misner et al. (1973). On s'aperçoit que l'existence d'un vecteur Killing du genre espace correspond à une symétrie spatiale (translation/rotation) et que l'existence d'un vecteur Killing du genre temps implique une solution stationnaire. Un espace Riemannien de dimension N peut disposer d'un nombre maximale $n = \frac{1}{2}N\,(N+1)$ de vecteurs de Killing. Un espace-temps disposant du nombre maximal de vecteurs de Killing, $n = 10$, est suivant Weinberg (1972) appelé un espace-temps de symétrie maximale.

3. En ce qui concerne l'application des équations du champ gravitationnel pour une distribution de masse-énergie ($T^{\mu\nu}$) donnée, on aura ensuite, au-delà des suppositions de type 2., besoin d'hypothèses sur la composition et la dynamique de la matière qui est notamment encodée dans l'équation d'état :

$$p = p(\rho, T), \tag{2.6}$$

qui lie la pression p à la densité ρ et à la température T de la matière considérée. Pour beaucoup d'applications on peut négliger la contribution de la température. Des matières dont la densité et la pression satisfont une telle relation simple, $p = p(\rho)$, sont appelées des fluides barotropiques. Pour nombre de matières une équation d'état polytropique $p = K\rho^{\Gamma}$, où K et Γ sont constants, est appropriée. Cependant, pour des modèles simples on peut en général établir une relation linéaire :

$$p = w\rho c^2, \tag{2.7}$$

entre densité et pression. On trouve par exemple $w = 1/3$ pour de la radiation, et $w = 0$ pour de la matière non-relativiste.

2.1.1 La métrique de Robertson-Walker

L'hypothèse géométrique dont on se sert habituellement pour construire des modèles cosmologiques en Relativité Générale est le Principe Cosmologique. Il en existe plusieurs formulations, cf. Beisbart & Jung (2006) pour une discussion, mais nous avons adopté la suivante :

Le principe cosmologique

> Il n'existe pas de point préféré dans l'univers. A chaque point et à chaque moment l'univers est identique dans chaque direction d'observation.

On note tout de suite que le Principe Cosmologique n'est pas vrai sur de 'petites' échelles. Un seul regard autour de nous, mais aussi au ciel nocturne observable à l'œil nu, nous montrera que notre environnement est loin d'être isotrope. Le Principe Cosmologique est justifié comme étant le résultat d'un processus de moyenne sur de très grandes échelles et par l'observation du fond diffus cosmologique quasi-isotrope, cf. section 2.3.3. La question des échelles pour effectuer la moyenne a toujours été un point de débat, cf. section 3.4. Une conséquence immédiate de l'isotropie en chaque point comme postulée dans le Principe Cosmologique est l'homogénéité de l'univers. Il a été montré par Robertson (1935, 1936a,b) et Walker (1936), que l'unique métrique correspondant aux symétries exigées par le Principe Cosmologique peut être exprimée de la façon suivante : [2]

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 + a^2(\tau)\left[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)\left(\mathrm{d}\theta^2 + (\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2\right)\right], \tag{2.8}$$

2. En effet, l'éq.(2.8) avait été trouvé par Friedmann (1922), d'où le fait que les modèles dynamiques des univers décrits par cette métrique portent son nom. Pourtant, l'obtention rigoureuse de cette équation à partir des symétries imposées ayant été effectuée par Robertson et Walker, on a décidé d'appeler la métrique celle de Friedmann, Robertson et Walker (FRW), ou seulement de Robertson et Walker. Selon les préférences historiques on la trouve aussi sous le nom de Friedmann-Lemaître, en l'honneur des travaux de Lemaître (1927, 1933).

où τ est le temps cosmologique, χ la distance comobile, θ l'angle polaire de la sphère bidimensionnel, et ϕ l'azimut de la sphère bidimensionnel. $a(\tau)$ est appelé le facteur d'échelle de l'univers. On a $f(\chi)$ donné par :

$$f(\chi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{-k}} \sin\left(\chi\sqrt{-k}\right), & k = +1; \\ \chi, & k = 0; \\ \frac{1}{\sqrt{k}} \sinh\left(\chi\sqrt{k}\right), & k = -1, \end{cases} \tag{2.9}$$

où k est appellé 'indice de courbure'. On peut en effet dériver la métrique[3] éq.(2.8) à partir des équations de Killing, éq.(2.5), cf. Islam (2002). Où la métrique de Robertson et Walker n'est pas nécessairement de symétrie maximale, le Principe Cosmologique impose néanmoins que les surfaces $\tau = \text{const.}$ soient de symétrie maximale. On décompose la métrique de façon suivante :

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 + \overset{(3)}{g}_{ab}(x^\mu) = -c^2\mathrm{d}\tau^2 + a^2(\tau)\left[\mathrm{d}\chi^2 + f^2(\chi)\,\mathrm{d}\Omega^2\right], \tag{2.10}$$

où $\overset{(3)}{g}_{ab}$ désigne la métrique du sous-espace tridimensionnel $\mathrm{d}\tau = 0$ de l'espace-temps, et où l'angle solide élémentaire est défini par $\mathrm{d}\Omega^2 := \mathrm{d}\theta^2 + (\sin\theta)^2\,\mathrm{d}\phi^2$. On calcule ensuite les tenseurs de Riemann et de Ricci de ce sous-espace :

$$\overset{(3)}{R}_{abcd} = -\frac{k}{a^2(\tau)}\left(\overset{(3)}{g}_{ac}\overset{(3)}{g}_{bd} - \overset{(3)}{g}_{ab}\overset{(3)}{g}_{cd}\right), \overset{(3)}{R}_{ab} = -\frac{k}{a^2(\tau)}\overset{(3)}{g}_{ab}, \tag{2.11}$$

pour s'apercevoir qu'il s'agit ici d'une version tridimensionnelle du fameux Theorema Egregium de Carl Friedrich Gauss (1827). k/a^2 est ainsi identifié comme la courbure gaussienne de l'espace tridimensionnel. On va appeler les espaces tridimensionnels de courbure positive ($k = +1$) 'espaces fermés', les espaces tridimensionnels de courbure négative ($k = -1$) 'espaces ouverts', et 'espaces plats' les espaces tridimensionnels avec $k = 0$.

2.1.2 La cinématique des univers Robertson-Walker

Les propriétés géométriques des espace-temps du type Robertson et Walker sont bien connues, et sont discutées dans les livres standards de la Relativité Générale et de la Cosmologie. Voir par exemple Weinberg (1972); Misner et al. (1973); Rindler (2001); Sexl & Urbandke (2002). On se contentera ici de noter seulement qu'avec la métrique de Robertson et Walker on peut déterminer la géométrie locale de l'univers grâce à la seule supposition de la validité approximative du Principe Cosmologique, mais que l'arc élémentaire éq.(2.8) ne prédétermine pas la topologie globale de l'univers.
Il est possible de construire plusieurs distances physiques à partir de la distance comobile χ, à savoir 1. la distance propre, r, 2. la distance lumineuse, d_{L}, et 3. la distance angulaire, d_{A}. Il semble utile d'introduire ici la notion du décalage vers le rouge cosmologique, z, que l'on va par la suite désigner par le terme anglais

3. Nous notons que par un abus de langage il est habituel d'appeler l'élément d'arc donné par l'éq.(2.8) la 'métrique' de Robertson et Walker.

'(cosmological) redshift'. Nous faisons référence à la littérature correspondante, cf. ci-dessus, et introduisons sans en donner la justification :

$$z := \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 = \frac{a_0}{a_e} - 1, \tag{2.12}$$

le redshift d'un signal émis au moment τ_e et intercepté au moment τ_0. Ici, λ_i (a_i) est la valeur de la longueur d'onde d'un signal électromagnétique (la valeur du facteur d'échelle de l'univers) mesurée au moment cosmologique $i \in (e, 0)$.

La distance propre : Il est évident de l'arc élémentaire éq.(2.8) que la distance 'physique' au moment $\tau_c = \text{const.}$ entre deux objets de distance comobile χ_c est donné par :

$$l = \int\limits_{\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}\theta=\mathrm{d}\phi=0} \mathrm{d}s = \int\limits_0^{\chi_c} \sqrt{{a_c}^2}\mathrm{d}\chi = a_c\chi_c, \tag{2.13}$$

où $a_c = a(\tau_c)$. Malheureusement, par construction, l n'est pas la distance 'observable', car clairement elle désigne la distance physique entre la terre et l'objet 'en ce moment même' où nous observons l'objet, alors que ce que nous observons en réalité quand nous 'observons le ciel' sont des signaux à vitesse de propagation finie, et nous ne voyons donc pas les objets tels qu'ils sont maintenant, mais bel et bien tels qu'ils étaient lorsque ces signaux furent émis. Pour la description de la propagation de la lumière il vaut donc mieux introduire une distance de type 'surface', r, telle que la surface d'une sphère de rayon r soit donnée par la relation habituelle $A = 4\pi r^2$. On trouve pour la surface de la boule à rayon comobile $\chi_c = \text{const.}$:

$$A = \iint\limits_{\mathrm{d}\tau=d\chi=0} \sqrt{{a_c}^4 f^4(\chi_c)(\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi = 4\pi {a_c}^2 f^2(\chi_c), \tag{2.14}$$

et donc la distance recherchée :

$$r_c(\chi) := a_c f(\chi_c). \tag{2.15}$$

La distance lumineuse : Soit un objet de luminosité L à distance $r_0(\chi)$ de la terre. On trouve que le flux $\mathcal{F}$ mesuré sur terre est donné par :

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi(1+z)^2 {r_0}^2(\chi)}, \tag{2.16}$$

car la luminosité ne diminue pas seulement comme l'inverse du carré de la distance comme dans un espace euclidien, cf. éq.(1.3), mais aussi par un facteur $a_0/a_e = (1+z)$ prenant en compte l'expansion de l'univers depuis l'émission du signal. Un autre facteur $(1+z)$ vient de l'effet de Doppler de l'objet s'éloignant de nous à cause de l'expansion de l'univers.[4] On est donc mené à définir la distance lumineuse :

$$d_{\mathrm{L}}(\chi, z) := (1+z)\, r_0(\chi), \tag{2.17}$$

4. Au sens strict, parler d'une 'expansion' ou des objets 's'éloignant' est en ce moment précipité. A priori, a_e peut facilement être supérieur à a_0, cas où $z < 0$.

afin de maintenir la définition usuelle :

$$\mathcal{F} = \frac{L}{4\pi {d_{\mathrm{L}}}^2}. \tag{2.18}$$

La distance lumineuse peut être exprimée en terme de z seul. Un calcul trivial nous donne :

$$\chi(z) = \frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{H(\tilde{z})}, \tag{2.19}$$

où on a introduit la fonction de Hubble :

$$H(z) := \frac{\dot{a}}{a}, \tag{2.20}$$

et en vertu des éqs.(2.15) et (2.17) nous obtenons ensuite :

$$d_{\mathrm{L}}(z) = (1+z) a_0 f\left(\frac{c}{a_0} \int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{H(\tilde{z})}\right). \tag{2.21}$$

La distance angulaire : Grâce à la définition éq.(2.15), la surface d'une sphère de rayon comobile χ_e est $4\pi a_e^2 f^2(\chi_e)$. Elle sous-tend un angle solide de 4π en son point central. En conséquence, un objet lumineux de diamètre $\mathcal{D}$ situé à la distance $r_e = a_e f(\chi_e)$ sous-tendra l'angle solide :

$$\Theta = \frac{\mathcal{D}}{r_e} =: \frac{\mathcal{D}}{d_{\mathrm{A}}}. \tag{2.22}$$

Clairement, r_e désigne le rayon au moment de l'émission de la lumière et est, en vertu de l'éq.(2.12), donné par $r_e = r_0/(1+z)$. On déduit alors de l'éq.(2.22) la distance angulaire comme étant :

$$d_{\mathrm{A}} = \frac{r_0}{(1+z)}. \tag{2.23}$$

Les deux distances d_{L} et d_{A} sont par conséquent liées par la relation :

$$\frac{d_{\mathrm{L}}}{d_{\mathrm{A}}(1+z)^2} = 1, \tag{2.24}$$

que l'on a l'habitude d'appeler relation de dualité des distances cosmologiques.

Nous allons maintenant remonter dans l'histoire au début de la cosmologie moderne pour motiver l'introduction de ce qu'on appelle aujourd'hui la cosmographie, soit l'approche purement cinématique à la cosmologie. Nous avons déjà rencontré le début théorique de la cosmologie moderne en citant le papier de Einstein (1917), page 15. Ce que l'on peut incontestablement appeler le début observationnel de la cosmologie moderne sont les résultats de Edwin Hubble sur les vitesses de récession (v_r) et distances (r) des nébuleuses extra-galactiques (*i.e.* galaxies), qui montrent une relation linéaire entre v_r et r. Nous avons

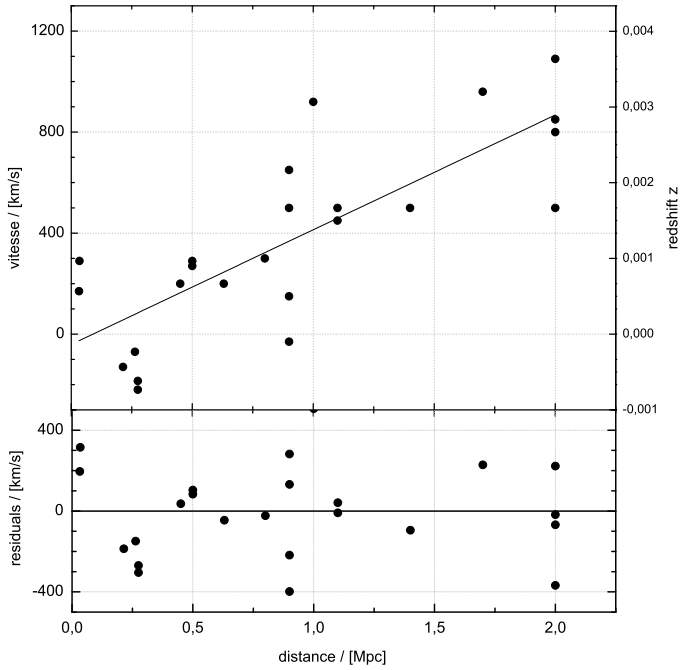


FIGURE 2.1: Reconstruction du diagramme original de Hubble avec les valeurs du Tab. 1 de Hubble (1929). Nous avons en bas ajouté la dispersion statistique des vitesses autour du meilleur fit linéaire (ligne noire, éq.(2.26)).

reconstruit le diagramme de Hubble (1929) sur la Figure 2.1, où sont représentées les vitesses de récession des nébuleuses en fonction de leurs distances.[5] L'apparente relation linéaire entre les vitesses et les distances avait été prise en compte par un terme $v_r \propto r$ dans l'expression :

$$v_r = Kr + X\cos\alpha\cos\delta + Y\sin\alpha\cos\delta + Z\sin\delta, \tag{2.25}$$

où les termes X, Y, et Z tiennent compte du mouvement propre du soleil dans la voie lactée. Hubble trouvait :

$$K = (465 \pm 50)\,\frac{(\mathrm{km/s})}{\mathrm{Mpc}}, \tag{2.26}$$

où 1Mpc=10^6pc $\approx 3.26 \cdot 10^6$ années lumière, cf. éq.(2.67). La relation :

$$v_r \propto r, \tag{2.27}$$

est depuis connue comme la loi de Hubble. Développons le facteur d'échelle, éq.(2.12), pour des petites différences de temps cosmologiques $\Delta\tau$ (équivalent

5. Ici, les distances des nébuleuses avaient été éstimées par des céphéides, cf. section 2.3.1.

aux petites distances $\Delta\chi$ par $c\Delta\tau = \Delta\chi$ quand on traite la propagation de la lumière) :

$$a\left(\Delta\tau\right) = a_0 + \dot{a}\big|_0 \Delta\tau + \mathcal{O}\left(\Delta\tau^2\right), \tag{2.28}$$

et rappelons nous que :

$$\dot{r} = \dot{a} f\left(\Delta\chi\right) = \dot{a}\Delta\chi + \mathcal{O}\left(\Delta\chi^2\right). \tag{2.29}$$

Nous obtenons ensuite :

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = 1 + \frac{1}{c}\dot{r} + \mathcal{O}\left([\dot{r}/c]^2\right), \tag{2.30}$$

relation qui peut être récrite sous forme :

$$v_r = cz, \tag{2.31}$$

où $v_r := \dot{r}$. L'éq.(2.31) donne pour de petites distances cosmologiques la relation entre la vitesse cosmologique de récession et le redshift cosmologique des objets observés. Nous avons sur la Figure 2.1 représenté sur l'axe droit des ordonnées les valeurs de z, correspondant en vertu de l'éq.(2.31) aux vitesses figurant le long de l'axe gauche des ordonnées. On voit qu'en effet le redshift est de l'orde 10^{-3} pour ces objets, et qu'à ces distances de quelques Mpc les distances r, d_{L}, et d_{A} sont pratiquement les mêmes. Combinant la loi de Hubble et l'éq.(2.31) on peut alors écrire :

$$d_{\mathrm{L}} \approx r = \frac{c}{K} z. \tag{2.32}$$

On a ici trouvé ici le premier terme d'un développement en z de la distance lumineuse d_{L} de l'éq.(2.21). Il a été montré dans la littérature (Visser 2004) que le développement de l'éq.(2.21) aux ordres supérieurs en z peut être écrit comme :

$$\begin{aligned} {d_{\mathrm{L}}}^{\mathrm{dv}}(z) = \frac{c}{H_0} z \Bigg(& 1 + \frac{1}{2}[1 - q_0]z - \frac{1}{6}\left[1 - q_0 - 3{q_0}^2 + j_0\right] z^2 + \\ & + \frac{1}{24}\left[2 - 2q_0 - 15{q_0}^2 - 15{q_0}^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0 + \frac{2kc^2\left(1 + 3q_0\right)}{H_0^2 a_0^2}\right] z^3 + \\ & + \mathcal{O}\left(z^4\right) \Bigg). \end{aligned} \tag{2.33}$$

où l'indice 'dv' désigne 'développement' pour distinguer cette expression de la distance lumineuse exacte de l'éq.(2.21). Aussi, k est l'indice de courbure, et on a introduit les paramètres suivants :

$$\text{le paramètre de Hubble :} \;\; H_0 = H\left(z\right)\big|_0 := \frac{\dot{a}}{a}\bigg|_0, \tag{2.34a}$$

$$\text{le paramètre de décélération :} \;\; q_0 = q(z)\big|_0 := \frac{-1}{H}\frac{\ddot{a}}{\dot{a}}\bigg|_0, \tag{2.34b}$$

$$\text{le 'jerk' :} \;\; j_0 = j(z)\big|_0 := \frac{1}{H^2}\frac{\dddot{a}}{\dot{a}}\bigg|_0, \tag{2.34c}$$

$$\text{le 'snap' :} \;\; s_0 = s(z)\big|_0 := \frac{1}{H^3}\frac{\ddddot{a}}{\dot{a}}\bigg|_0. \tag{2.34d}$$

Ici, H est la fonction de Hubble introduit ci-dessus (cf. éq.(2.20)), et on identifie alors $K = H_0$.
On souligne que jusqu'ici on n'a du faire aucune supposition sur le contenu physique de l'univers et sa dynamique. Les équations du type de l'éq.(2.33) permettent d'extraire des propriétés purement géométriques de l'espace-temps et ainsi de notre univers (proche) par des mesures du redshift et des distances d'objets, ce qui aujourd'hui est appelé un 'mapping' de l'histoire d'expansion de l'univers, ou aussi 'cosmographie'. La toute première extraction d'un paramètre cosmologique, celle du paramètre H_0 par Edwin Hubble, a été faite par cette approche en vertu de l'éq.(2.32), qui a été par la suite l'approche dominante pendant les premières décennies de la cosmologie moderne. Kirshner (2003) donne un résumé de l'estimation des paramètres H_0 et q_0. Les redshifts accessibles à cette époque là ne demandaient pas une approche plus rigoureuse, et les imprécisions des observations cosmologiques étaient largement supérieures aux erreurs introduites par des approximations de type éq.(2.33).[6] La cosmographie (au deuxième ordre) fut la principale approche avant que Mattig (1958) ne donne une solution exacte de l'éq.(2.21) pour le cas $\Lambda = 0$, et montre comment les erreurs introduites varient selon le modèle dynamique du cosmos, argumentant qu'elles deviendront non-négligeables à partir de certaines valeurs du redshift. On reviendra à la question de la validité de l'approche cinématique dans le chapitre 4 de ce manuscrit de thèse.

2.1.3 La dynamique des univers Robertson-Walker

Une autre conséquence du Principe Cosmologique sera une contrainte sur la forme du tenseur énergie impulsion de la matière cosmique. Supposons l'existence d'un champ vectoriel u^μ satisfaisant $u^\mu u_\mu = -c^2$ (qui représentera le quadrivecteur vitesse de la matière cosmique). On peut montrer que chaque vecteur, A^β, et chaque tenseur de rang deux, $B^{\mu\nu}$, peut être décomposé en terme de ses projections :

$$\begin{aligned} A^\beta &= a^\beta + a u^\beta / c^2, \\ B^{\mu\nu} &= b u^\mu u^\nu / c^2 + b^\mu u^\nu / c^2 + \bar{b}^\mu u^\nu c^2 + b^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{2.35}$$

par rapport à la direction désignée par u^α, où :

$$h^\alpha{}_\beta := \delta^\alpha{}_\beta + u^\alpha u_\beta / c^2, \tag{2.36}$$

est le tenseur de projection. Ainsi, le vecteur $a^\alpha = h^\alpha{}_\beta A^\beta$ sera la projection du quadrivecteur A^β dans l'espace orthogonal à u^α, et $a = -u_\alpha A^\alpha / c$ sa projection dans la direction de u^α. On a aussi défini les projections $b = u_\mu u_\nu B^{\mu\nu}$, $b^\mu = -h^\mu{}_\nu B^{\nu\sigma} u_\sigma$, $\bar{b}^\mu = -h^\mu{}_\nu B^{\nu\sigma} u_\nu$, et $b^{\mu\nu} = h^\mu{}_\sigma h^\nu{}_\rho B^{\sigma\rho}$, qui sont dans chaque indice orthogonales au quadrivecteur vitesse. L'isotropie du système au repos de la matière, imposée par le Principe Cosmologique, nécessite que toutes les variables d'état du système et leurs gradients sont proportoniels à u^α. Les tenseurs de rang

6. On note pour l'éq.(2.26) la forte différence entre la valeur estimée par Hubble et celle que l'on mesure aujourd'hui. Le projet principal du Hubble Space Telescop (HST) donne une valeur $H_0 = 72 \pm 8$(km/s)/Mpc, cf. Freedman et al. (2001), voir aussi pages 35 et 83.

deux tels que le tenseur énergie impulsion de la matière cosmologique, $T^{\mu\nu}$, ne peuvent être que proportionels au tenseur de projection et au produit dyadique du quadrivecteur vitesse avec lui-même. On obtient donc que seuls des tenseurs d'énergie impulsion de la forme :

$$T^{\mu\nu} = \Xi h^{\mu\nu} + \Pi u^{\mu} u^{\nu}/c^2, \tag{2.37}$$

où Ξ et Π sont des constantes, sont permis par le Principe Cosmologique (cf. Neugebauer 1980). Avec $h^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^{\mu}u^{\nu}/c^2$ on reconnait toute de suite le tenseur énergie impulsion d'un fluide, et on déduit ainsi que la matière d'un univers satisfaisant le Principe Cosmologique doit être décrit par le tenseur :

$$T^{\mu\nu} = (\rho c^2 + p) u^{\mu} u^{\nu} + p g^{\mu\nu}. \tag{2.38}$$

Ici, p et ρ désignent toujours les champs de pression et de densité de la matière constituant le contenu de l'univers. L'éq.(2.37) impose que dans les surfaces $\tau = \tau_0 =$ const. de l'espace-temps, définissant les espaces tridimensionels au repos du contenu masse-énergie de l'univers, ρ et p prennent les mêmes valeurs partout : $p(\tau_0) = p_0$ et $\rho(\tau_0) = \rho_0$.

Les équations de Friedmann

Insérant l'éq.(2.38) et l'arc élémentaire éq.(2.8) dans les éqs.(2.1), on obtient deux équations différentielles d'ordre deux pour le facteur d'échelle $a(\tau)$:

$$2\frac{\ddot{a}}{ac^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2c^2} + \frac{k}{a^2} - \Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4} p, \tag{2.39a}$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2c^2} + \frac{k}{a^2} - \frac{\Lambda}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho, \tag{2.39b}$$

qui sont connues sous le nom d'équations de Friedmann, en l'honneur des travaux de Friedmann (1922), voir note 2 en bas de la page 17. En soustrayant l'éq.(2.39b) de l'éq.(2.39a) on obtient la relation :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2, \tag{2.39c}$$

que l'on peut ensuite comparer à son équivalent newtonien, l'éq.(1.2). Nous voyons apparaître à droite un nouveau terme qui est typique pour la Relativité Générale : la pression p, qui grâce à l'équivalence de masse et d'énergie contribuera au champ géométrique. Nous nous apercevons aussi de l'apparition du terme Λ, qui dans la Relativité Générale apparaît comme un terme générique des équations des champs éq.(2.1),[7] alors qu'il fallait le mettre à la main dans l'équation de Poisson de la théorie newtonienne, éq.(1.10). On note que ρ et p,

7. Il est générique dans le sens que $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu}$ est le tenseur le plus général qui satisfait les conditions d'être construit exclusivement à partir du tenseur de Riemann et de la métrique, d'être linéaire en $R_{\mu\nu}$, d'être de rang deux et symétrique, et d'être de divergence nulle. Cf. par exemple la discussion élégante de Pauli (1921), ou de Misner et al. (1973) et Carroll (2001).

qui pour toute matière connue prennent des valeurs positives, ne peuvent causer qu'une dérivée seconde *négative* du facteur d'échelle, et donc qu'une expansion *décélérée* de l'univers. Alors que pour le moment le choix du signe de Λ est arbitraire (la nature de ce terme, c'est à dire les raisons physiques pour son existence étant entièrement inconnues rien ne pourrait nous imposer un signe quelconque), on s'aperçoit qu'une contribution $\Lambda > 0$ aurait des effets gravitationnels inverses par rapport aux effets de la matière 'ordinaire'.
Supposons un univers rempli de plusieurs composants, $\rho = \sum \rho_i$, avec une équation d'état simple, $p_i = w_i \rho_i c^2$, cf. éq.(2.45), et nous obtenons de l'éq.(2.39c) :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \sum \left(\rho_i \left[1 + 3w_i\right]\right) + \frac{1}{3}\Lambda c^2, \tag{2.40}$$

qui s'annule si :

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} \sum_i \rho_i \left(1 + 3w_i\right). \tag{2.41}$$

Pour le cas $w_i = 0$ (soit le cas de la matière non-relativiste) nous obtenons la valeur :

$$\Lambda_{\mathrm{E}} := 4\pi G\rho/c^2, \tag{2.42}$$

que nous avons déjà rencontrée dans la théorie newtonienne, quand nous modifions l'équation de Poisson afin d'obtenir un univers statique et infini, cf. éq.(1.10). Nous avons notamment $\Lambda_{\mathrm{E}} = \lambda\Phi_0/c^2$. Remarquons aussi que l'indice de courbure, k, n'intervient pas dans l'éq.(2.40). On trouve ici la raison pour laquelle Einstein (1917) introduisait la Constante Cosmologique. Grâce à ses propriétés tout à fait exceptionnelles, seule une contribution $\Lambda > 0$ peut assurer la staticité de l'univers dans le contexte de la Relativité Générale. Cependant, pour que l'univers soit statique nous devons aussi demander que $\dot{a}$ s'annule, et nous établissons à partir de l'éq.(2.39b) que l'univers statique est alors de courbure Gaussienne positive :

$$\frac{k}{a^2} = \Lambda_{\mathrm{E}}. \tag{2.43}$$

Cette solution cosmologique particulière est appelée l'univers d'Einstein.
Alors que ce n'était point la motivation d'Einstein d'introduire ce terme, on s'aperçoit dans l'éq.(2.40) qu'avec une Constante Cosmologiqe $\Lambda > \Lambda_{\mathrm{E}}$ on obtient une *accélération positive* du facteur d'échelle, fait que nous discuterons avec plus de détails dans la section 2.2. Nous reviendrons dans le chapitre 3 sur la Constante Cosmologique et discuterons les problèmes que posent son existence et sa valeur.

Contenu de l'univers

C'est maintenant que l'on doit faire des suppositions sur la nature et la composition du fluide cosmologique. L'éq.(2.2) donne :

$$\dot{\rho} = -3\left(\rho + p/c^2\right) H. \tag{2.44}$$

Ici, H est la fonction de Hubble définie auparavant (éq.(2.20)). Si nous supposons maintenant que le contenu masse-énergie de l'univers obéit à une équation d'état simple :

$$p = w\rho c^2, \tag{2.45}$$

nous obtenons alors :

$$\rho\left(a\right) = \rho_0 \exp\left[-3\int_{\ln a_0}^{\ln a}\left[1 + w\left(\tilde{a}\right)\right]\mathrm{d}\ln\tilde{a}\right], \tag{2.46}$$

où $\rho_0 = \rho\left(a = a_0\right)$, et où w est une fonction du facteur d'échelle et par conséquent une fonction du temps cosmologique τ. Pour le cas où $w =$ const. on obtient :

$$\rho\left(a\right) = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3(1+w)}. \tag{2.47}$$

Nous obtenons notamment pour de la matière non-relativiste, $w_{\mathrm{M}} = 0$:

$$\rho_{\mathrm{M}} = \rho_{\mathrm{M}}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \tag{2.48}$$

et pour de la radiation, $w_{\mathrm{R}} = \frac{1}{3}$:

$$\rho_{\mathrm{R}} = \rho_{\mathrm{R}}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}. \tag{2.49}$$

Nous introduisons aussi la vitesse du son, c_{s} :

$${c_{\mathrm{s}}}^2 := \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}\rho}, \tag{2.50}$$

d'où, avec l'éq.(2.44), il résulte pour des fluides barotropiques :

$$\dot{w} = -3H\left(1 + w\right)\left((\frac{c_{\mathrm{s}}}{c})^2 - w\right). \tag{2.51}$$

Nous remarquons que l'on a alors $w =$ const. si et seulement si $wc^2 = {c_{\mathrm{s}}}^2$ ou si $w = -1$. Nous notons aussi, que si l'on exclut le cas $w < -1$ et suppose seulement que $(c_{\mathrm{s}}/c)^2 > 0$, l'éq.(2.51) donne :

$$\dot{w} < 3Hw\left(1 + w\right). \tag{2.52}$$

Des modèles cosmologiques avec une contribution $w < -1$ sont appellés les modèles 'fantômes' et exhibent des propriétés intéressantes, cf. section 3.7.1. Nous reviendrons à la relation éq.(2.52) dans la section 3.3.2.

Les paramètres cosmologiques de densité

Suivant l'éq.(2.39b) nous trouvons que dans un univers sans Constante Cosmologique, l'univers est plat ($k = 0$) si la densité globale de l'univers, ρ, prend la valeur :

$$\rho_{\mathrm{c}} = \frac{3H^2}{8\pi G}, \tag{2.53}$$

appelée densité critique de l'univers. Il est habituel de donner les différentes densités des composantes de l'univers, ρ_i, par rapport à cette unité, en définissant les paramètres cosmologiques de densité :

$$\Omega_i(a) := \frac{\rho_i(a)}{\rho_c}. \tag{2.54}$$

Pour de la matière non-relativiste, nous obtenons :

$$\Omega_{\mathrm{M}} := \frac{\rho_{\mathrm{M}}}{\rho_{\mathrm{c}}} = \frac{8\pi G}{3H^2}\rho_{\mathrm{M}} = \frac{\Omega_{\mathrm{M}}^0 (a/a_0)^{-3}}{(H/H_0)^2}, \tag{2.55}$$

le paramètre de densité de la matière. Ici, $\Omega_{\mathrm{M}}^0 := \Omega_{\mathrm{M}}(\tau_0)$ désigne sa valeur aujourd'hui. Nous ne nous intéressons pas dans cette thèse directement à la matière sombre, mais nous devons noter ici que la densité totale de la matière non-relativiste, Ω_{M}, va être la somme de la densité de la matière baryonique 'ordinaire' (visible), Ω_{b}, et de la densité de la matière sombre, Ω_{cdm}. On aura ensuite le paramètre de densité de la radiation :

$$\Omega_{\mathrm{R}} := \frac{\rho_{\mathrm{R}}}{\rho_{\mathrm{c}}} = \frac{\Omega_{\mathrm{R}}^0 (a/a_0)^{-4}}{(H/H_0)^2}, \tag{2.56}$$

où $\Omega_{\mathrm{R}}^0 := \Omega_{\mathrm{R}}(\tau_0)$ est sa valeur aujourd'hui. Finalement, on attribue aussi des paramètres de densité au terme Λ et à la contribution de la courbure. Ainsi, le fait de parler d'une 'densité' perd un peu de son contenu, et on utilisera les Ω_i pour décrire toute contribution à la dynamique de l'univers, quelle qu'elle soit. Il est évident des éqs.(2.1) que le fait d'ajouter le terme Λ du côté gauche est tout à fait équivalent à y ajouter un tenseur énergie impulsion :

$$\kappa \overset{\Lambda}{T}_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu}, \tag{2.57}$$

à droite, ce qui en effet revient à décrire Λ avec un tenseur énergie impulsion d'un fluide de pression (négative !) $p_\Lambda = -\Lambda c^4/(8\pi G)$, et d'une équation d'état $p_\Lambda = -\rho_\Lambda c^2$, c'est à dire $w_\Lambda = -1$. On obtient donc :

$$\Omega_\Lambda := \frac{\rho_\Lambda}{\rho_{\mathrm{c}}} = \frac{\Lambda c^2}{3H^2} = \frac{\Omega_\Lambda^0}{(H/H_0)^2}, \tag{2.58}$$

le paramètre de densité de la Constante Cosmologique. Enfin, nous définissons :

$$\Omega_{\mathrm{k}} := \frac{-kc^2}{a^2H^2} = \frac{\Omega_{\mathrm{k}}^0 (a/a_0)^{-2}}{(H/H_0)^2}, \tag{2.59}$$

le paramètre de densité de la courbure, qui comme nous avons noté décrit la contribution de la courbure globale de l'univers à sa dynamique. En vertu de l'éq.(2.39b) sa valeur aujourd'hui est donnée par les densités de la matière, de la radiation, et de Λ via :

$$\Omega_{\mathrm{k}}^0 = 1 - \Omega_{\mathrm{M}}^0 - \Omega_\Lambda^0 - \Omega_{\mathrm{R}}^0. \tag{2.60}$$

On utilise aussi souvent la quantité $\Omega_{\mathrm{T}} := \Omega_{\mathrm{M}}+\Omega_{\Lambda}+\Omega_{\mathrm{R}}$, 'T' pour 'totale'. Dans l'éq.(2.60) nous voyons l'utilité des paramètres de densité. Elle souligne encore une fois la signification physique de la densité critique : l'univers est globalement plat seulement si la somme des densités des différents contenus de l'univers (y pris en compte la Constante Cosmologique) équivaut la densité critique. Nous pouvons maintenant réécrire l'éq.(2.39b) comme :

$$H(a) = \frac{\dot{a}}{a} = H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{k}}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-2} + \Omega_{\mathrm{M}}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3} + \Omega_{\mathrm{R}}^0\left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4} + \Omega_{\Lambda}^0}, \tag{2.61}$$

où $a = a(\tau)$. On constate ici une certaine confusion dans la littérature au sujet de l'indice '0' des paramètres de densité. Souvent on les omet quand on écrit l'éq.(2.61), et traite ainsi les paramètres *sans* l'indice '0' comme des constantes, alors qu'ils sont en fait des fonctions du redshift en vertu des éqs.(2.55), (2.56), (2.58), et (2.59). Nous représentons sur la Figure 2.2 le comportement qualitatif de ces paramètres de densité ainsi que des densités ρ_i en fonction du facteur d'échelle cosmologique (pour les valeurs des paramètres du modèle ΛCDM que nous introduirons plus bas) et en fonction du redshift. De l'éq.(2.12) on a $a_0/a = 1+z$ ce qui nous permet d'exprimer la fonction de Hubble (éq.(2.61)) en fonction du redshift :

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_{\mathrm{k}}^0(1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{M}}^0(1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{R}}^0(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda}^0}. \tag{2.62}$$

Finalement, a_0 se déduit de l'équation de Friedmann normalisée (éq.(2.60)) et de la définition de Ω_{k}^0 (eq.(2.59)) :

$$a_0 = \sqrt{\frac{-kc^2}{\Omega_{\mathrm{k}}^0 H_0^2}} = \sqrt{\frac{-kc^2}{\left(1-\Omega_{\mathrm{T}}^0\right)H_0^2}}. \tag{2.63}$$

Si $k = 0$, la normalisation de a_0 n'est pas définie, et on le fixe à $a_0 \equiv 1$.

2.2 Les modèles de Friedmann

La solution de l'éq.(2.61) est formellement donnée par :

$$\tau(a) = \frac{1}{a_0 H_0}\int_0^a \frac{\mathrm{d}\tilde{a}}{\sqrt{\Omega_{\mathrm{k}}^0 + \Omega_{\mathrm{M}}^0\left(\frac{a_0}{\tilde{a}}\right) + \Omega_{\mathrm{R}}^0\left(\frac{a_0}{\tilde{a}}\right)^2 + \Omega_{\Lambda}^0\left(\frac{a_0}{\tilde{a}}\right)^{-2}}}, \tag{2.64}$$

ce qui est une intégrale de la forme :

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right)\mathrm{d}x, \tag{2.65}$$

avec $R = x/\left(H_0\sqrt{P(x)}\right)$, où $P(x) = \Omega_{\mathrm{R}}^0+\Omega_{\mathrm{M}}^0 x+\Omega_{\mathrm{k}}^0 x^2+\Omega_{\Lambda}^0 x^4$ est un polynome en x de degré quatre, dont la solution peut en conséquence être donnée en terme de fonctions elliptiques, cf. Gradshteyn & Ryzhik (2007, p. 859). Dépendant des

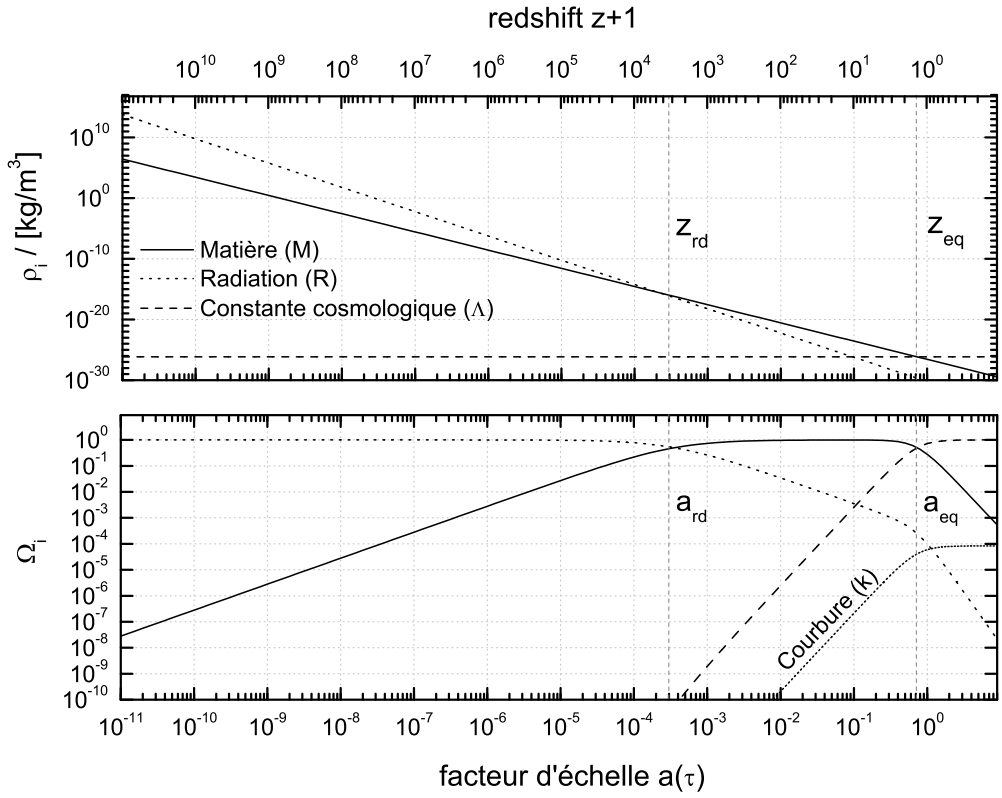


FIGURE 2.2: Les densités $\{\rho_{\rm M}, \rho_{\rm R}, \rho_\Lambda\}$ et les paramètres de densité $\{\Omega_{\rm M}, \Omega_{\rm R}, \Omega_\Lambda, \Omega_{\rm k}\}$ en fonction du facteur d'échelles cosmologique et du redshift. Ici, $a_0 = 1$. Les valeurs des paramètres de densité correspondent au modèle ΛCDM (section 2.4.1). Nous illustrons aussi le comportement d'une contribution de courbure $\Omega_{\rm k}^0 \simeq 10^{-4}$. La figure ne prend pas en compte la transition de phase de l'équation d'état de la matière qui aura lieu vers le redshift $z \sim 10^{10}$, où, dû à la température élevée de la radiation les particules massives deviennent relativistes et doivent alors être décrites par $w \sim 1/3$.

contributions de masse-énergie, de Constante Cosmologique, et de courbure, une grande classe de solutions existe, et nous renvoyons de nouveau le lecteur à la littérature standard pour une classification exhaustive.
Les modèles nous intéressant dans la suite seront les modèles avec $\Omega_{\rm M} \neq 0$ et $\Omega_\Lambda \neq 0$, dont les comportements qualitatifs de $a(\tau)$ pour tous les signes de la paire (Λ, k) sont représentés sur la Figure 2.3, qui a été tirée de Rindler (2001). Sur la Figure, 'E' désigne l'univers de Einstein que nous avons rencontré ci-dessus, soit un univers statique où $\Lambda = \Lambda_{\rm E} = 4\pi G\rho/c^2$. La ligne hachurée représente l'univers de deSitter ('deS', l'univers dont la métrique du fond est la métrique de deSitter, soit l'unique solution sphérique du vide aux éqs.(2.1) avec une contribution $\Lambda > 0$, cf. Stephani et al. (2003)).

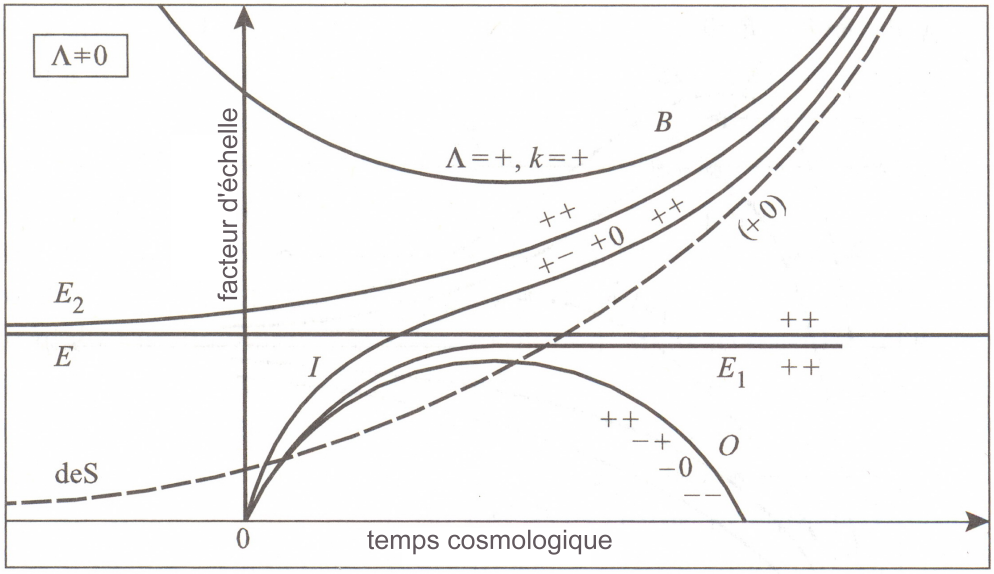


FIGURE 2.3: Figure (légèrement modifiée) de Rindler (2001). On représente la valeur du facteur d'échelle, $a(\tau)$, en fonction du temps cosmologiques, τ, en unités arbitraires.

Pour $\Lambda < 0$ on obtient des univers oscillatoires pour toute valeur de k. La valeur de $\dot{a}(\tau)$ décroît à partir de sa valeur infinie à l'origine vers une valeur minimale, $\ddot{a} = 0$, pour y changer de signe et croître de nouveau. L'univers se réeffondre, ligne 'O'.

Pour $\Lambda > 0$ et $k = -1$ ou $k = 0$ la valeur de $\dot{a}(\tau)$ décroît à partir de sa valeur infinie à l'origine vers une valeur minimale, $\ddot{a} = 0$, pour puis croître de nouveau. L'univers se met en expansion accélérée infinie, ligne 'I', et se rapproche asymptotiquement de l'univers de deSitter ('deS').

Pour $\Lambda > 0$ et $k = +1$ on obtient des comportements qualitativement différents de $\dot{a}(\tau)$ selon la valeur de Λ :

1. $\Lambda < \Lambda_E$: On obtient, dépendant de la valeur initiale de $a(\tau)$, des univers oscillatoires si $a(\tau)|_{\tau=0} = 0$ (ligne 'O'), ou des univers à rebonds si l'extension initiale de l'univers est infinie (ligne 'B').
2. $\Lambda = \Lambda_E$: Si l'univers commence avec $a(\tau)|_{\tau=0} = 0$, l'univers sera en expansion mais se rapprochera asymptotiquement de l'univers statique d'Einstein (ou, inversement, s'effondra après une phase de pseudo-stationnarité arbitrairement longue), ligne 'E_1'. Si l'extension intiale de l'univers est infinie, l'univers avec $\Lambda = \Lambda_E$ s'effondra asysomptotiquement vers l'univers d'Einstein (ou, inversement, se mettra en expansion après une phase de pseudo-stationnarité arbitrairement longue), ligne 'E_2'. Finalement, avec le bon choix de la valeur initiale du facteur d'échelle on obtient l'univers d'Einstein statique et infini. Tout de même, la figure met en évi-

dence l'instabilité de cet univers : dejà des perturbations légères suscitent que l'univers statique s'effondre (E_1) ou se met en expansion infinie (E_2).

3. $\Lambda > \Lambda_{\mathrm{E}}$: On obtient le même comportement qualitatif de $a(\tau)$ comme dans les cas déjà discutés où $k = -1$ ou $k = 1$, ligne 'I'.

Pour une discussion plus détaillée de toutes les courbes nous faisons référence à la discussion de Rindler (2001, p. 404). Notre discussion ci-dessus et la Figure 2.3 suffisent pour souligner le fait, qu'une courbe *convexe* de $a(\tau)$ n'est possible que dans le cas où $\Lambda > 0$. En d'autre terme : une expansion accélérée de l'univers, $\ddot{a} > 0$, est possible si et seulement si $\Lambda > 0$, quelle que soit la valeur de k. Ce résultat est en accord avec les conclusions de notre discussion précédente, page 25.

2.3 Les sondes observationnelles

2.3.1 L'échelle de distance

Comme nous avons pu voir dans la section 2.1.2, la première véritable mesure cosmologique était basée sur une estimation de la distance lumineuse des objets extra-galactiques, à savoir des céphéides. L'estimation des distances dans l'espace est en fait une affaire délicate, et on se sert d'une variété de mesures sur différentes échelles de longueur auxquelles on est confronté dans l'observation de l'univers. Concrètement, on établit une mesure de distance à petite échelle, puis on l'utilise pour calibrer une autre mesure permettant de construire une échelle plus grande, et ainsi de suite jusqu'aux échelles les plus grandes. On parle par conséquent d'une 'échelle de distance', et il est clair que les erreurs pour chacune des mesures se propagent le long de cette succession d'approximations. Nous donnons ci-dessous les indicateurs principaux de cette échelle des distances pour illustrer le principe et pour donner une idée des mesures de distances cosmologiques. Nous commençons par les échelles de l'environnement spatial proche de la terre.

La méthode du radar (Radar ranging) est la mesure la plus directe. On mesure le temps de transit aller-retour, t_l, d'un signal électromagnétique envoyé vers un objet distant et reflété. La distance r d'un objet sera alors donnée par :

$$r = \frac{1}{2} c t_l. \tag{2.66}$$

Cette façon de procéder est convenable aux échelles du système solaire, dont la longueur typique correspond à un temps de transit de quelques heures pour des signaux électromagnétiques. Cette méthode permet des mesures hautement précises de l'environnement direct, soit des satellites en orbite de la terre, de la lune et des planètes intérieures, et des sondes interplanétaires comme Voyager, Pioneer, etc. La distance terre $\leftrightarrow$ lune est ainsi connue avec une precision $\Delta r \sim 1\,\mathrm{cm}$, suivant Pearlman et al. (2002).

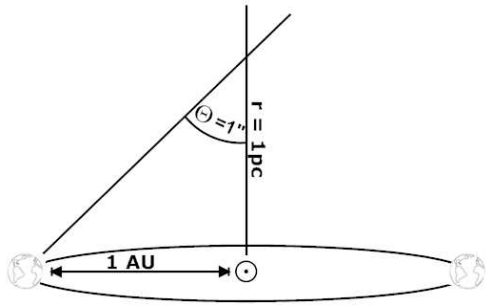


FIGURE 2.4: Illustration de la définition du parsec, éq. (2.67).

La méthode des parallaxes trigonométriques consiste à mesurer le changement de position d'un objet céleste dû au changement de position de l'observateur sur la terre, ou dû au mouvement de l'observateur grâce au mouvement de la terre autour du soleil. Cette méthode peut être calibrée grâce au Radar Ranging. Alors que le premier effet, le parallaxe diurne, est important aux échelles du système solaire, il est négligeable pour l'observation des étoiles où l'on se sert du parallaxe annuel. On définit comme le parsec (pc, voir Figure 2.4) la distance d'où une unité astrononomique (1AU$= 149.6 \cdot 10^9$m), soit la distance moyenne entre la terre et le soleil, sera observée sous-tendre un angle $\Theta = 1$ seconde d'arc $= 1''$. Donc :

$$r/\,[\mathrm{pc}] = \frac{1}{\Theta/\,[''] }, \tag{2.67}$$

la distance en parsec d'un objet observé à un angle Θ, mesuré en seconde d'arc. 1pc correspond à 3.26 années lumière, soit 206266 AU. On arrive ainsi à mesurer les distances des étoiles les plus proches, allant jusqu'à des distances $\sim$ 30pc avec une précision d'environ $\Delta r/r \sim 10\%$.

Parallaxe de flux d'étoiles : Considérons des amas d'étoiles. Dû au mouvement global de l'amas, tous les membres de l'amas semblent se mouvoir vers un point de fuite, le vortex. On effectue la mesure de la vitesse particulière et, via le redshift, de la vitesse de récession d'une étoile. Nous illustrons le principe sur la Figure 2.5. On obtient sa distance r par :

$$r/\,[\mathrm{pc}] = \frac{1}{4.74}\frac{v_r}{v_p}\frac{1}{\arctan\alpha}, \tag{2.68}$$

cf. par exemple Schneider (2006). Les estimations de distance grâce au parallaxe de flux d'étoiles forment les interfaces entres les parallaxes trigonométriques et les méthodes de parallaxe photométrique, permettant des estimations de distances jusqu'à $\sim$ 100pc, avec une précision d'environ $\Delta r/r \sim 10\%$.

Parallaxe photométrique : En supposant que tous les amas d'étoiles ont été formés au même moment que notre galaxie (soit supposer que tous les amas d'étoiles ont le même âge), on peut obtenir leurs distances de la terre par une

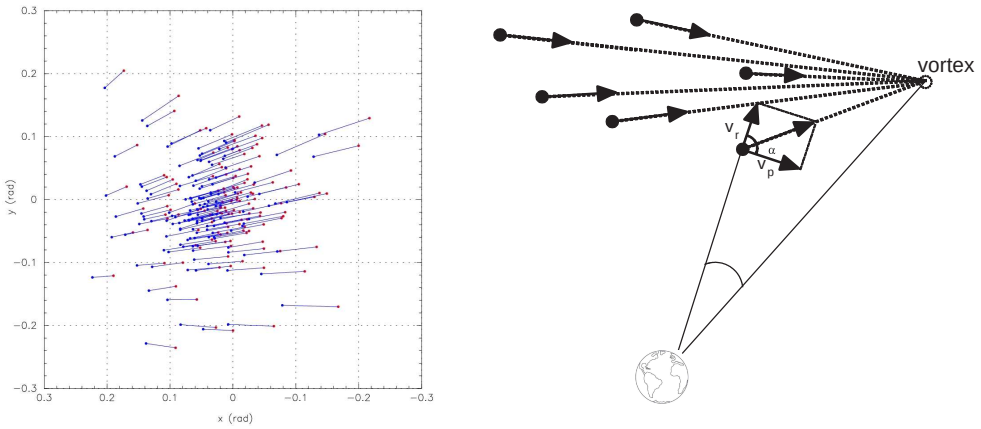


FIGURE 2.5: Le principe du parallaxe de flux d'étoiles. Gauche : Les données actuelles des 150 étoiles des Hyades, dont le déplacement vers le vortex a pour raison de visibilité de l'effet été projété de cent milles ans dans le futur (Leeuwen 2009). On trouve ($r \simeq 48 \pm 5$)pc. Droite : Illustration du principe de l'éq.(2.68).

comparaison du diagramme de Hertzsprung-Russel de l'amas avec celui obtenu pour les étoiles du voisinage du soleil. On obtient par exemple pour la nébuleuse M 44 le diagramme de la Figure 2.6 (droite), que l'on peut comparer au diagramme obtenu pour les étoiles du voisinage proche du soleil, à partir des données de HIPPARCOS, représenté à gauche de la même figure. Nous rappelons que le diagramme de Hertzsprung-Russel montre la luminosité intégrale des étoiles en terme de magnitude [mag], définie dans l'éq.(2.69) plus bas, en fonction de leur température de surface, qui sur la Figure 2.6 est représentée par leur luminosité dans le rouge, $B-V$. La caractéristique capitale de ce genre de diagramme est que l'on y trouve un arc linéaire remarquable (cf. Rosenberg 1910), appelé la séquence principale du diagramme. Nous renvoyons le lecteur à la littérature standard pour une discussion détaillée, par exemple Moore (2002). Selon la Figure 2.6 on a ainsi $V - M_V \approx 6.5$, et on peut estimer la distance de M 44 à $d_{\mathrm{L}} \approx 200\,\mathrm{pc}$ par la relation magnitude-distance, éq.(2.71) ci-dessous. Cette méthode de mesure des distances est assez précise, mais dépend fortement de l'évolution et de la composition des amas qui montrent souvent une séquence principale pas aussi prononcée que M 44. On peut dans ce cas recourir à la comparaison d'autres particularités du diagramme de Hertzsprung-Russel, tel que l'arc des géantes rouges qui sont des étoiles à luminosité maximale bien définie. La contrainte principale de cette mesure est évidemment que l'amas observé doit encore être assez proche afin de pouvoir distinguer des étoiles particulières. La portée de cette mesure est de l'ordre de 10^4 pc.

Chandelles standards : Nous avons, dans le paragraphe précédent, rencontré la magnitude apparente, m, que l'on définit à partir du flux observé, $\mathcal{F}$, de l'éq.(2.16) :

$$m := -2.5 \log \left[\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_0} \right], \tag{2.69}$$

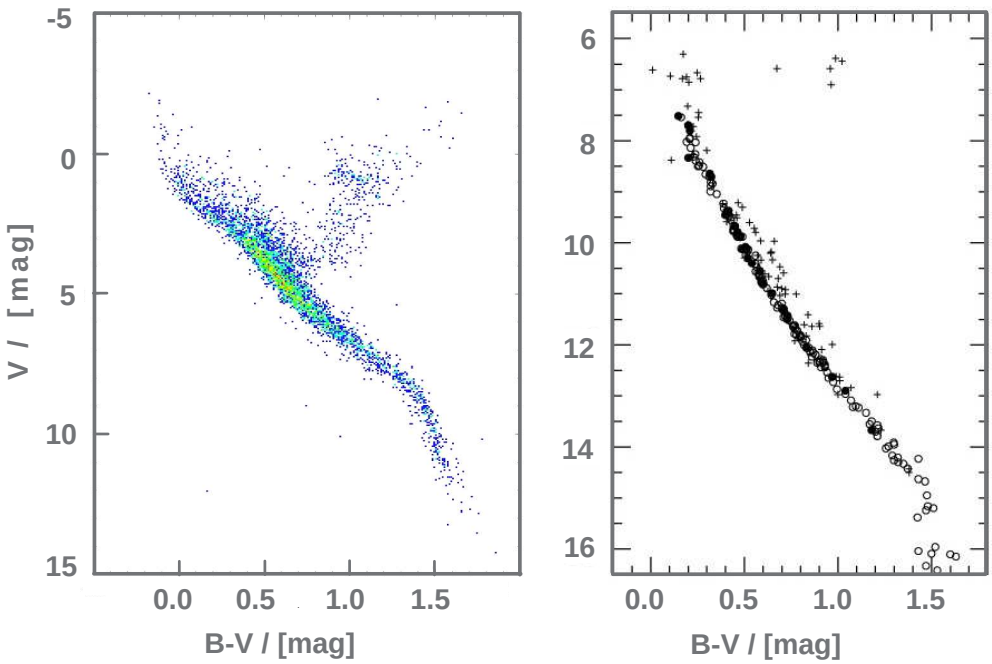


FIGURE 2.6: Diagramme Hertzsprung-Russel pour environ 5000 étoiles du catalogue Hipparcos (ESA 1997) à gauche, et celui de la nébuleuse Praesepe (M 44) à droite, cf. An et al. (2007).

où $\mathcal{F}_0$ est un flux de référence, par convention le flux de Vega (cf. par exemple Aller et al. 1982). De la même manière on définit la magnitude absolue d'un objet de luminosité L :

$$M := -2.5 \log \left[\left(\frac{L}{4\pi \left(10\text{pc}\right)^2} \right) / \mathcal{F}_0 \right], \tag{2.70}$$

comme la magnitude apparente que l'on mesurerait si l'objet se trouvait à une distance de 10pc, cf. par exemple Aller et al. (1982). De ces deux équations on obtient la relation magnitude-distance :

$$\mu := m - M = 25 + 5 \log \left[d_{\mathrm{L}} \left(z\right) / \left[\text{Mpc}\right] \right], \tag{2.71}$$

entre le 'module de distance', μ, et la distance lumineuse d_{L} (en Mpc) d'un objet.

Dans le paragraphe précédent, on ne supposait pas une luminosité standardisée d'un objet quelconque, mais profitait de l'évolution globale des étoiles dans l'ensemble d'un amas d'étoiles. Mais, de l'éq.(2.71) il résulte que si l'on arrivait à trouver des objets dont la luminosité est 'standardisable', c'est à dire des objets dont la luminosité est soit toujours pareille, soit déductible des propriétés indépendantes de l'objet, on disposerait d'une mesure puissante de distance.

En effet, lors des observations du Petit Nuage de Magellan en 1908, dont la distance est connue par les méthodes de parallaxe, Leavitt & Pickering (1912) remarquaient une corrélation entre la luminosité et la périodicité de pulsation

des 'céphéides'. Les céphéides sont des étoiles dites 'variables' situées hors la séquence principale du diagramme de Hertzsprung-Russel, et de magnitudes relativement élevées (de -3 à -7). On peut trouver une relation empirique entre la période de leur pulsation, $T_{\text{céph}}$, et leur magnitude absolue moyennée :

$$\begin{aligned}\bar{M}_{\text{céph}} :&= \frac{1}{T_{\text{céph}}} \int_{t}^{t+T_{\text{céph}}} m\left(\tilde{t}\right) \mathrm{d}\tilde{t} \\ &= -\left(3.141 \pm 0.100\right) \text{mag} \cdot \log\left(T_{\text{céph}}/\left[1 \text{ jour}\right]\right) - \left(0.826 \pm 0.119\right) \text{mag},\end{aligned} \tag{2.72}$$

suivant Tammann et al. (2003). La mesure de la période et de la magnitude des céphéides permettent alors en vertu des éqs.(2.71) et (2.72) l'estimation de leur distances lumineuses. Avec le Hubble Space Telescope, on arriva à estimer les distances de céphéides remarquables jusqu'à $r \approx 20$Mpc (cf. Freedman et al. 2001), ce qui correspond aux distances dépassant le groupe local (qui est d'un diamètre d'environ 2Mpc), mais toujours dans le flot de Hubble, cf. la section 2.3.2.

Relation de Tully-Fisher : Tully & Fisher (1977) ont demontré l'existence d'une relation entre la magnitude et la vitesse de rotation des galaxies spirales (mesurable par le redshift des bords des galaxies) :

$$M_{\text{spir}} \propto \left(v_{\text{rot}}\right)^{\alpha}, \tag{2.73}$$

où α est un nombre. Cette relation permet donc d'utiliser les galaxies spirales comme chandelles standard, mesure dont la portée va jusqu'à plusieurs centaines de Mpc. C'est à cette échelle là que commence le régime où l'on se sert des Supernovae pour estimer les distances, que nous traiterons dans la prochaine section, suivie d'une présentation des deux autres sondes cosmologiques principales, le fond diffus cosmologique (CMB) et les oscillations acoustiques des baryons (BAO).

Nous n'avons évidemment pas pu mentionner toutes les différentes mesures existantes qui contribuent à l'établissment de l'échelle de distance, mais nous avons exposé les échelons principaux, que nous représentons schématiquement sur la Figure 2.7, qui conclut cette section. Pour des discussions détaillées de ce que nous n'avons qu'effleuré ici nous renvoyons à la littérature pertinante (par exemple Chaisson & McMillan 2006; Schneider 2006). Nous discutons à présent en détails les sondes principales de la cosmologie.

2.3.2 Supernovae

Les événements dits Supernovae (SNe) sont des phénomènes extrêmement rares, on parle d'environ une SN par galaxie et par siècle. Dix SNe dans la voie lactée ont été décrites par des hommes, la dernière ayant eu lieu en 1987 dans le Grand Nuage de Magellan (cf. par exemple Müller 1998, pour un résumé). Les SNe sont historiquement classifiées selon la présence ou l'absence de certaines bandes dans leur spectre, cf. Figure 2.8.

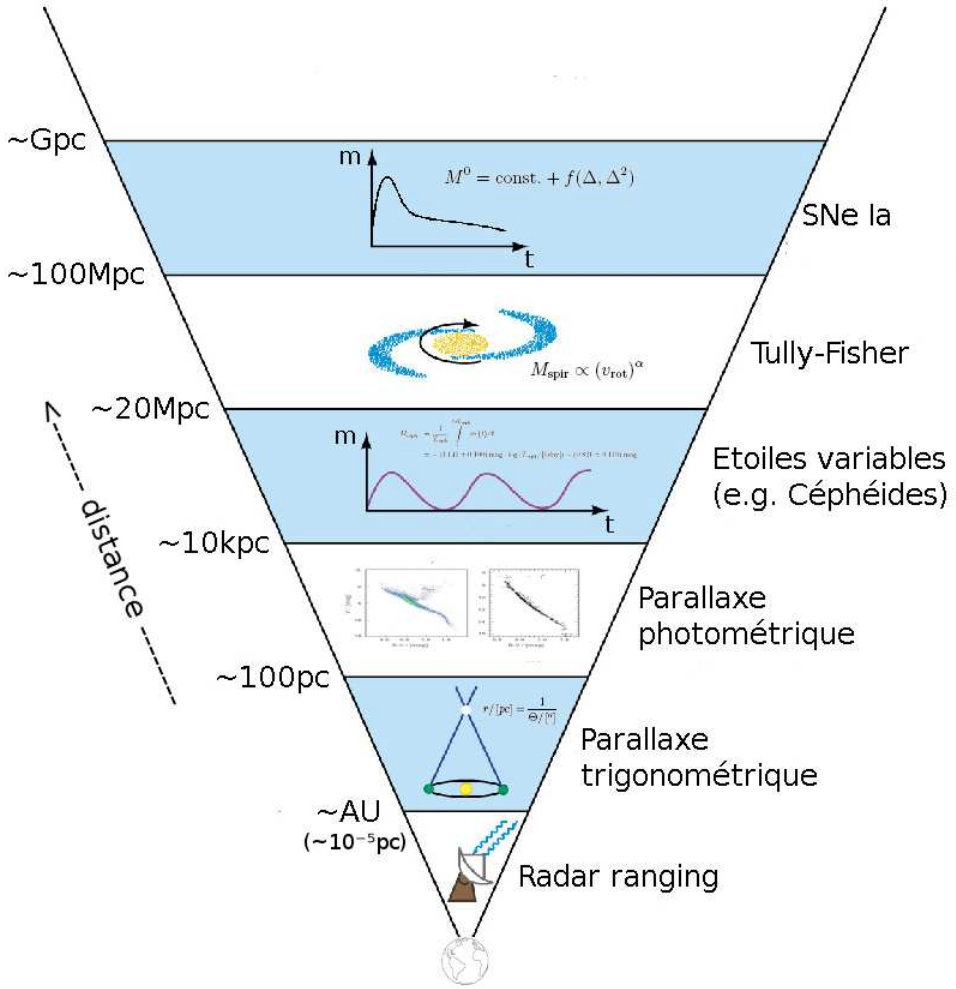


FIGURE 2.7: Figure légèrement modifiée de Chaisson & McMillan (2006). Illustration schématique des divers indicateurs de l'échelle cosmologique de distance.

Les SNe type II, type Ib et Ic sont supposées être des explosions violentes des couches extérieures des étoiles massives lors de l'effondrement gravitationnel à la fin de leur cycle de vie, cf. Shapiro & Teukolsky (1983); Linden (2005). Ces SNe dites 'implosion du cœur' sont les événements les plus énergétiques dans l'univers, l'énergie totale libérée pouvant atteindre :

$$E_{\text{core collapse}} \approx 10^{44}\text{J}, \tag{2.74}$$

selon Shapiro & Teukolsky (1983, chp. 18). La luminosité totale de ce genre de SN dépend fortement de la masse initiale et de la composition de l'étoile progénitrice. Par conséquence, ce type de SN n'a pas pu être standardisé pour les applications cosmologiques pendant longtemps. Cependant, récemment Hamuy & Pinto (2002) rapportaient une corrélation entre la vitesse d'expansion de la matière éjectée et la luminosité intégrale des SNe type II P, et proposaient une standardisation afin de permettre leur utilisation comme estimateur de distances

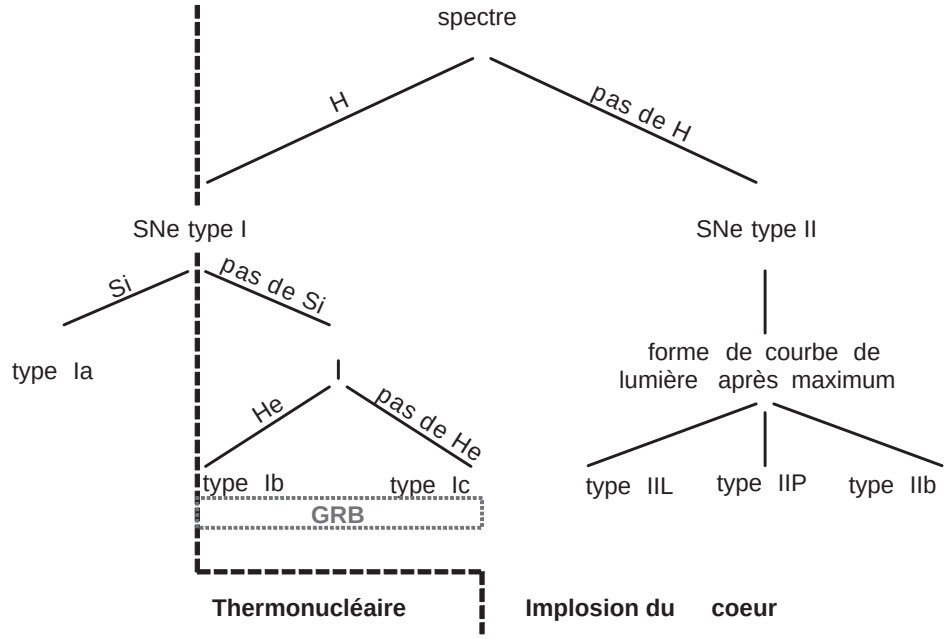


FIGURE 2.8: Classification des SNe selon la présence ou absence de certains éléments dans le spectre, cf. Müller (1998), ou Linden (2005). Les SNe dont les spectres montrent une contribution d'hydrogène sont appelées 'type II' et sont ensuite classifiées selon le comportement de leur courbe de lumière apres la luminosité maximale, notamment la classe II L (linéaire) qui est caractérisée par une diminution linéaire, et la classe II P (plateau) caractérisée par une luminosité presque constante pendant quarante à quatre-vingts jours après maximum. Les SNe exhibant un manque d'hydrogène dans le spectre seront appelées de 'type I' et classifiées selon la présence (absence) des éléments hélium et silicium. Nous avons aussi indiqué la classification selon la nature physique du phénomène (thermodynamique/implosion du cœur), discutée ci-dessous. Aussi, les 'γ-ray bursts' (GRB) proviennent des SNe types Ib et Ic. Cf. Leibundgut (2008) pour plus de détails.

cosmologiques. Des premiers essais sont prometteurs, cf. Nugent et al. (2006) et Leibundgut (2008, sec. 5.1.1) pour une discussion. Leibundgut (2008) note en particulier que les méthodes de standardisation des SNe type II sont entièrement basées sur la physique intrinsèque de la SN et par là *indépendantes* de l'échelle de distances que nous avions résumée ci-dessus. Nous ne les avons néanmoins pas considérées dans notre travail.

Supernovae type Ia : En revanche, l'étude de la forme des courbes de lumières des SNe Ia locales dont les distances peuvent être estimées indépendamment, montre que l'on peut trouver une relation entre la luminosité au maximum, $M^0 = m\,(t = 0)$, et la forme de courbe de lumière après le maximum :

$$M^0 = \text{const.} + f(\Delta, \Delta^2), \tag{2.75}$$

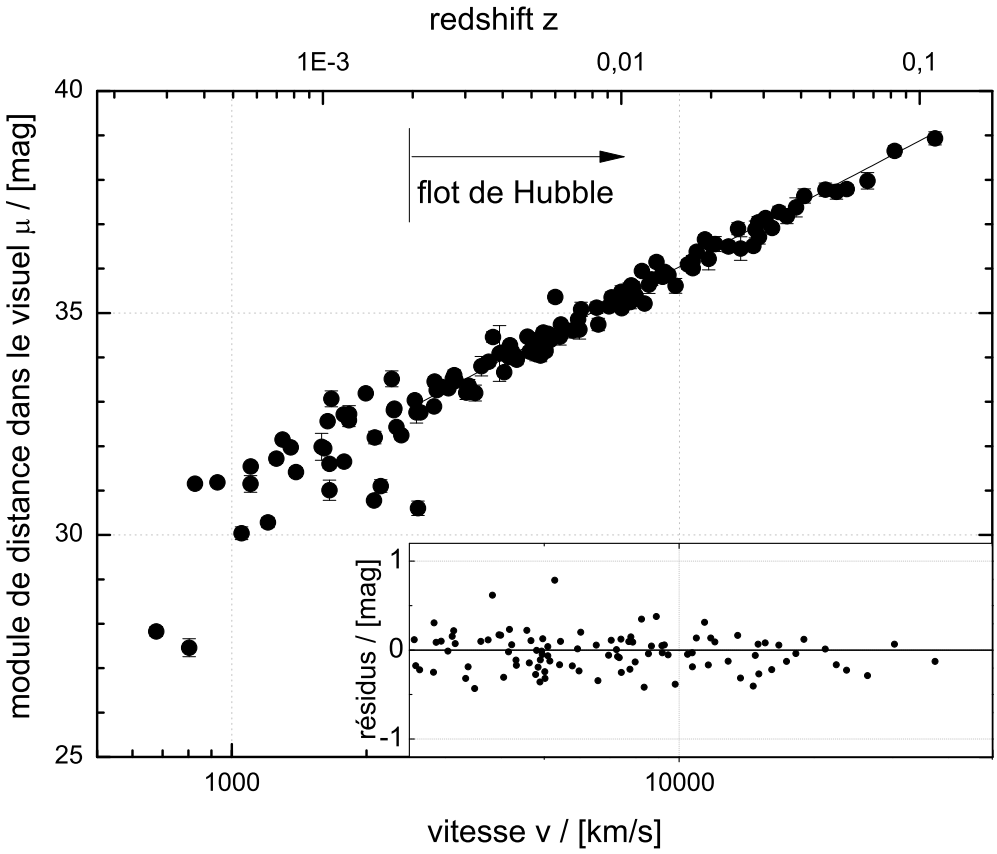


FIGURE 2.9: Diagramme de Hubble avec les données SN de Jha et al. (2007).

où Δ est le paramètre de courbe de lumière, suivant par exemple Jha et al. (2007). En supposant que les SNe d'un échantillon dit local sont dans le flot de Hubble, c'est à dire qu'elles sont d'une part assez loin pour que leur vitesse de récession dûe à l'expansion de l'univers domine leur vitesse particulière et d'autre part assez proche pour que la loi de Hubble soit valable, on arrive à standardiser leur magnitude comme montré sur la Figure 2.9. On y montre le module de distance dans le visuel, μ, (où les magnitudes des SNe type Ia ont été corrigées grâce à un fit sur la forme des courbes de lumière), en fonction de leur vitesse de récession (vitesse par rapport au système au repos du CMB).
Les magnitudes corrigées suivent, à partir de $v \approx 2500\,\mathrm{km/s}$, le flot de Hubble (ligne noire) avec une dispersion statistique de $\sigma_{\mathrm{stat}} = 0.02\,\mathrm{mag}$ (petit cadre en bas à droite). On peut alors utiliser les SNe Ia comme chandelles standards, cf. section 2.3.1. Cependant, cette standardisation est effectuée à bas redshift ($z \lesssim 0.1$), puis elle est extrapolée à haut redshift ($z \gtrsim 1$). Nous pouvons donc nous poser des questions sur la validité d'une telle extrapolation. En effet, l'univers en entier et toutes ses parties étant soumis à une évolution dans le temps, nous nous attendrions à des environnements et circonstances astrophysiques bien différents dans l'univers 'jeune' que dans l'univers 'vieux' que représente notre voisinage $z \lesssim 0.1$, cf. chapitre 6.

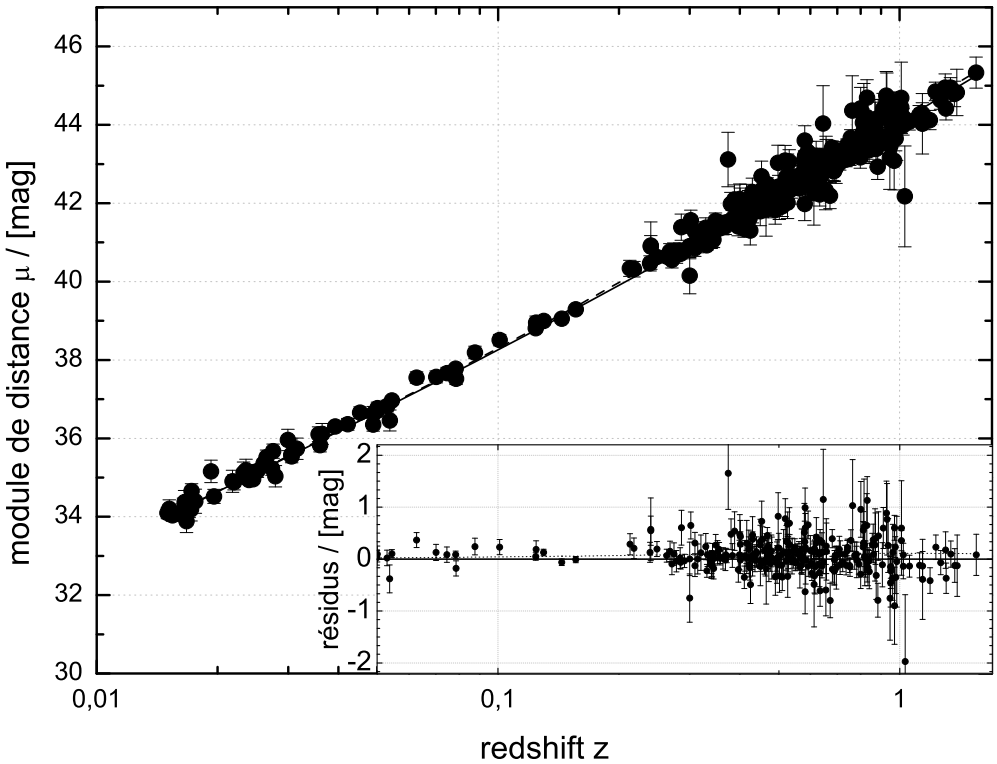


FIGURE 2.10: Le diagramme de Hubble de l'échantillon de SNe compilé par Kowalski et al. (2008).

Les SNe Ia furent historiquement les premiers indicateurs d'une expansion actuellement accélérée de l'univers (Riess et al. 1998; Perlmutter et al. 1999). Nombre de SNe Ia ont été cataloguées depuis, et on trouve une récente compilation cohérente chez Kowalski et al. (2008), contenant 307 SNe Ia telles que $0.01 < z < 1.55$. Cet échantillon est représenté sur la Figure 2.10, et est par la suite parfois appelé 'union set'. La ligne noire représente les valeurs théoriques prédites par le modèle ΛCDM, cf. section 2.4, par rapport auxquelles nous montrons en bas les résidus (à partir de $z = 0.5$). La ligne hachurée représente le meilleur fit actuel, cf. section 2.4, notamment le Tableau 2.2 ii). Pour des redshifts aussi elevés, $z \gtrsim 1$, on ne pourra plus utiliser la loi de Hubble ou un développement en ordre de z supérieur quelconque sans risquer d'introduire des biais, cf. chapitre 4. On va alors passer à un fit complet des modules de distance des données du diagramme de Hubble avec l'expression analytique suivante, que l'on obtient en insérant l'éq. (2.21) dans l'éq.(2.71) :

$$\begin{aligned}\mu &= 25 + 5\log\left[d_{\mathrm{L}}\left(z\right) / \left[\mathrm{Mpc}\right]\right] \\ &= 25 + 5\log\left[\frac{c}{H_0}\frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_{\mathrm{k}}^0|}}\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_{\mathrm{k}}^0|}\int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{E(\tilde{z})}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.76}$$

où nous avons introduit la fonction :

$$\mathcal{S}(x) := \begin{cases} \sin(x) \ , & k = +1 \ (\Omega_{\mathrm{k}} < 0) \, , \\ x \ , & k = 0 \quad (\Omega_{\mathrm{k}} = 0) \, , \\ \sinh(x) \ , & k = -1 \ (\Omega_{\mathrm{k}} > 0) \, . \end{cases} \tag{2.77}$$

Nous avons aussi utilisé la fonction de Hubble normalisée, $E(z)$:

$$H_0 E(z) := H(z) \, . \tag{2.78}$$

Il est habituel d'introduire une distance D_{L} qui est indépendante de la constante de Hubble, H_0 :

$$D_{\mathrm{L}}(z) := \frac{H_0}{c} d_{\mathrm{L}}(z) \, . \tag{2.79}$$

Quand nous exprimons la fonction de Hubble, via les équations de Friedmann, en termes des paramètres cosmologiques $\{p_i\} = \left\{\Omega_{\mathrm{M}}^0, \Omega_{\Lambda}^0, \Omega_{\mathrm{R}}^0\right\}$ (éq.(2.61)), nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \mu &= M_{\mathrm{s}} + 5 \log \left[D_{\mathrm{L}}(z; p_i) \right] \\ &= M_{\mathrm{s}} + 5 \log \left[\frac{(1+z)}{\sqrt{|\Omega_{\mathrm{k}}^0|}} \mathcal{S} \left(\sqrt{|\Omega_{\mathrm{k}}^0|} \int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{E(\tilde{z}; p_i)} \right) \right] , \end{aligned} \tag{2.80}$$

où le paramètre de Hubble, H_0, est donc absorbé dans la constante de normalisation des SNe :

$$M_{\mathrm{s}} := 25 + 5 \log \left[(c/H_0) / [\mathrm{Mpc}] \right] . \tag{2.81}$$

Pour un ajustement des données de bonne qualité on aura alors besoin d'un échantillon de SNe locales (dans le flot de Hubble, cf. Figure 2.9) pour fixer le paramètre de Hubble.
Nous apercevons dans l'éq.(2.80) que les paramètres cosmologiques $\{p_i\}$, rentrant dans la relation via la fonction $E(z; p_i)$, sont fortement dégénérés à cause de la nature intégrale de l'équation. Nous renvoyons ici à la section 2.5 où l'on traitera plus en détails ce problème.

2.3.3 Fond diffus cosmologique

Depuis que l'expansion de l'univers est connue, se pose le problème de la singularité initiale. Regardant la Figure 2.2 (page 29), nous remarquons qu'en s'approchant de $a = 0$ ($z \to \infty$) les densités de radiation et de matière tendent vers l'infini. Un traitement de la dynamique quantique de l'univers très jeune permet la description suivante : dans l'univers très jeune la radiation électromagnétique (les photons) était en équilibre thermique avec les électrons et les nucléons. A l'équilibre la fonction de distribution des photons est donnée par :

$$f(\epsilon) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\epsilon_{\mathrm{ph}}}{kT}} - 1} , \tag{2.82}$$

ou $\epsilon_{\mathrm{ph}} = h\nu$ désigne l'énergie des photons, et T la température d'équilibre du gaz de photons. Avec l'expansion universelle de l'univers, la densité de photons

diminue plus vite que la densité de matière baryonique et les photons sortent de l'équilibre à un moment que l'on désignera τ_{CMB}. La distribution de la radation va ensuite être soumise au décalage spectral vers le rouge, mais gardera la forme d'un rayonnement de corps noir. Sa température T diminuera par :

$$T(z) = T_{\mathrm{CMB}}(1 + z_{\mathrm{CMB}}), \tag{2.83}$$

où $z_{\mathrm{CMB}} = a_0/a(\tau_{\mathrm{CMB}}) - 1$ désigne le moment cosmologique où le gaz de photons sort de l'équilibre. La présence d'un fond de radiation résultant de ce *découplage* avait été prédite par Alpher & Herman (1948) et Gamow (1948), et détectée par Penzias & Wilson (1965), cf. aussi Dicke et al. (1965). Le satellite COBE confirma dans les années 1990 la forme du spectre d'un corps noir de température $\bar{T}^0_{\mathrm{CMB}} = 2.725 \pm 0.002\mathrm{K}$ (Mather et al. 1999) et révéla des anisotropies de l'ordre de grandeur $\left(T - \bar{T}\right)/\bar{T} \sim 10^{-4}$. Le satellite WMAP a ensuite été désigné pour mesurer ces anisotropies, la Figure 2.11 montre en haut le plan du CMB obtenu après cinq ans d'observation (Hinshaw et al. 2009, WMAP5).
Les anisotropies du fond diffus cosmologique peuvent être développées en harmoniques sphériques, $Y_{k\ell}$:

$$\Delta T(\vec{n}) := \frac{T(\vec{n})}{\bar{T}} = \sum_{k,\ell} a_{k\ell} Y_{k\ell}, \tag{2.84}$$

où les $a_{\ell m}$ obéissent à la relation d'orthogonalité :

$$a_{k\ell} \cdot a^*_{k\ell} = \delta_{k'k}\delta_{\ell'\ell} C_\ell. \tag{2.85}$$

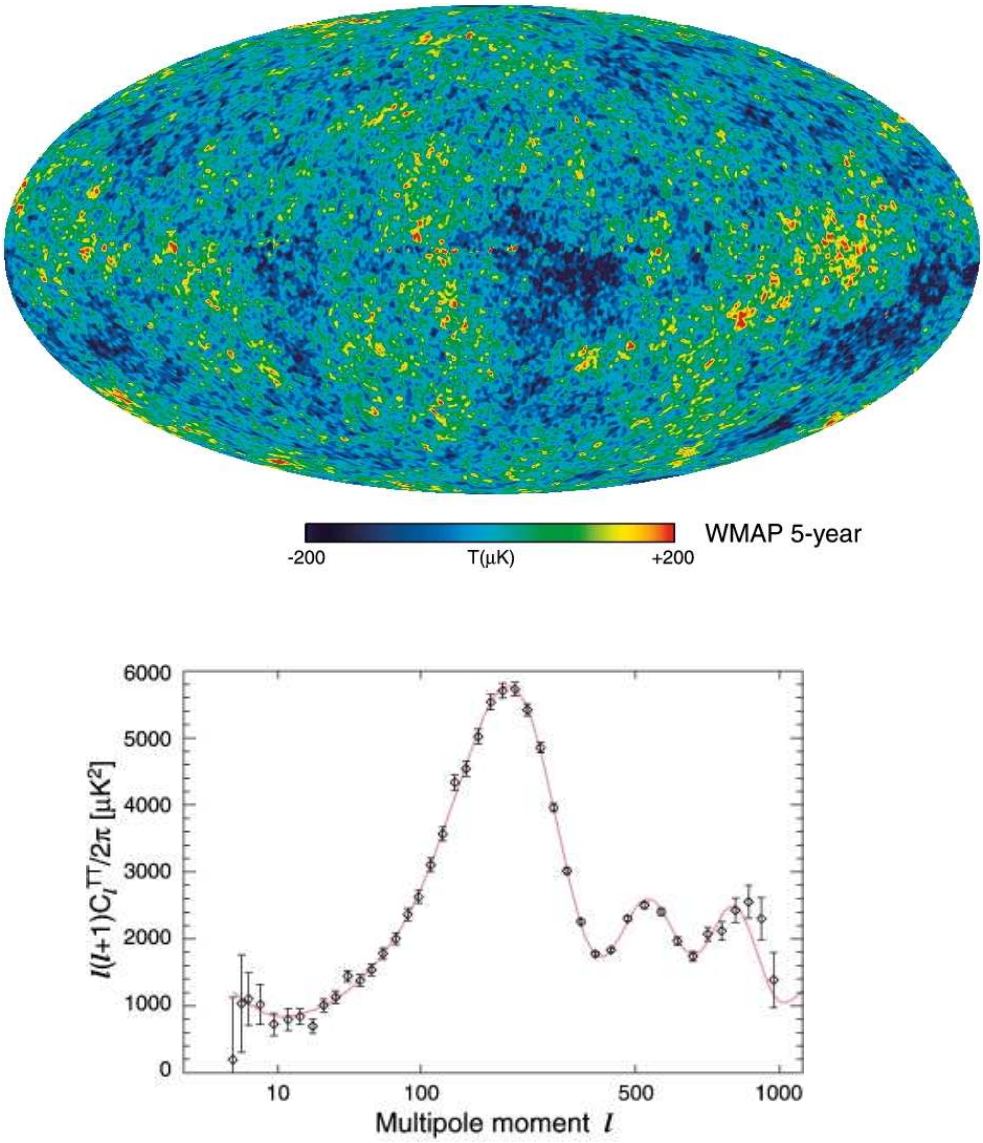
Les C_ℓ sont appelés spectre de puissance du CMB, et sont de la forme :

$$C_\ell = \sum_{m=-2}^{2} \int T_m(\ell, k) P_m(k) \mathrm{d}k, \tag{2.86}$$

où P_m est le spectre de puissance initial, et T_m est la 'fonction de transfert' du CMB.[8] L'évolution dans le temps de la fonction de transfert est déterminée par les équations couplées de Boltzmann-Einstein, et est donc donnée en terme des paramètres dynamiques de la cosmologie. Par une détermination expérimentale des C_ℓ on peut donc en vertu de l'éq.(2.86) ajuster la fonction de transfert et ainsi les paramètres cosmologiques, et/ou le spectre de puissance initial. Un fit libre des deux en même temps n'est cependant pas possible, car on s'aperçoit que T_m et P_m sont dégénérés : on pourra pour toute paire (C_ℓ, T_m) donnée trouver un spectre de puissance initial qui validera la relation (2.86), et de même on pourra pour chaque paire (C_ℓ, P_m) trouver une fonction de transfert qui la validera. Il serait souhaitable d'avoir estimé les paramètres cosmologiques (et ainsi la fonction de transfert) à partir de méthodes indépendantes, afin d'utiliser, avec ces connaissances, le CMB pour estimer le spectre de puissance initial. Si on veut néanmoins utiliser le CMB pour l'extraction des paramètres cosmologiques, il

8. Nous suivons ici la discussion de Durrer (2008).

FIGURE 2.11: Figure de Hinshaw et al. (2009, WMAP5). En haut le plan du ciel, où l'on montre en fausses couleurs les anisotropies $T(\vec{n}) - \bar{T}$ du CMB. En bas le spectre de puissance du CMB.



faut alors faire une supposition sur la forme de $P_m(k)$. Divers modèles d'inflation suggèrent une forme du spectre de puissance initial comme :

$$\Delta^2(k) \equiv \frac{k^3 P(k)}{2\pi^2} = \Delta^2(k_0) \left(\frac{k}{k_0}\right)^{n_s(k_0)-1+\frac{1}{2}\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k}, \tag{2.87}$$

cf. Kosowsky & Turner (1995). Ici, $\Delta^2(k_0)$ est l'amplitude et n_s l'indice scalaire du spectre. Des paramétrages de $P_{\pm 2}$ font apparaître un paramètre supplémentaire : l'indice tensoriel, n_t. Les observations actuelles (Komatsu et al. 2009, WMAP5) du CMB donnent $n_s \approx 1$ et $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k \approx 0$, cf. section 2.4.

Le spectre de puissance initial, $\Delta(k)$, est donc presque constant. Cette invariance d'échelle est théoriquement bien décrite par le modèle de l'inflation, qui décrit la formation des structures à partir d'un spectre des fluctuations primordiales presque invariant d'échelle (les spectres avec $n_s = 1$ sont appelés les spectres de Harrison-Zel'dovich), cf. par exemple Mukhanov (2005). En fait, n_s et $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k$ sont donnés par les trois premières dérivées du potentiel du champ d'inflation, et l'extraction de ces paramètres permet ainsi la reconstruction du potentiel. Cependant, les résultats peuvent être dépendants du choix du paramétrage, et d'autres paramétrages sont considérés dans la littérature pour étudier ce problème, cf. Komatsu et al. (2009) et références internes. L'indice tensoriel, n_t, décrit essentiellement la contribution des ondes gravitationnelles aux anisotropies du spectre du CMB. WMAP5 contraint cette contribution à $r := n_t/n_s < 0.22$.

Rappelons-nous que les C_ℓ sont liés à la fonction de corrélation à deux points du CMB :

$$\xi(\vec{s}) = \langle \Delta T(\vec{n})\, \Delta T(\vec{n}+\vec{s}) \rangle = \frac{1}{4\pi} \sum_\ell (2\ell+1)\, C_\ell P_\ell(\vec{n}\cdot(\vec{n}+\vec{s})), \tag{2.88}$$

où $\vec{n} := \vec{r}/|\vec{r}|$ est le vecteur position unitaire. Nous trouvons en bas de la Figure 2.11 les $\ell(\ell+1)\, C_\ell$ comme mesurés par WMAP5, représentés en fonction des indices des harmoniques sphériques, ℓ, révélant des pics pour $\ell \gtrsim 100$.[9] Les études de la physique cinématique et dynamique du CMB montrent qu'il s'agit ici des traces des compressions/décompressions du plasma primordial au moment du découplage, que l'on nomme les pics acoustiques. On parle en général de ce phénomène comme des oscillations acoustiques des baryons. Le n^{ème} pic correspond à la longueur d'ondes comobile $\lambda_n = 1/k_n = c_\mathrm{s}\tau_\mathrm{CMB}/n$, où k_n est déterminé par $c_\mathrm{s} k_n \tau_\mathrm{CMB} = n$. Ici, c_s est la vitesse adiabatique du son auparavant définie dans l'éq.(2.50). Les pics sont projetés dans le ciel sous l'angle :

$$\Theta_n = \frac{\lambda_n}{d_\mathrm{A}(z_\mathrm{CMB})}, \tag{2.89}$$

cf. éq.(2.22), avec d_A la distance angulaire. Cet angle correspond à l'harmonique $\ell(\theta) \simeq \pi/\Theta$, et nous avons alors avec les éqs.(2.24) et (2.21) pour la distance angulaire, et l'éq.(2.64) pour le temps cosmologique :

$$\begin{aligned} \ell_n &\simeq \frac{\pi d_\mathrm{A}(z_\mathrm{CMB})}{\lambda_n} \\ &= (1+z_\mathrm{CMB})\, \frac{n\pi c}{\sqrt{|\Omega_\mathrm{k}^0|}}\, \frac{\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_\mathrm{k}^0|}\int_0^{z_\mathrm{CMB}} \frac{\mathrm{d}z}{E(z)}\right)}{\int_{z_\mathrm{CMB}}^\infty \frac{c_\mathrm{s}(z)\,\mathrm{d}z}{E(z)}}. \end{aligned} \tag{2.90}$$

La position ℓ_n des pics sera alors, via la fonction $\mathcal{S}$, très sensible à la valeur de Ω_k^0. La détermination des pics dans le spectre de puissance du CMB donne

9. L'effet dominant le spectre à plus large échelle ($\ell \lesssim 30$) est l'effet Sachs-Wolfe, qui ne sera pas étudié dans ce manuscrit.

ainsi la contrainte principale sur la géométrie de l'univers. Le dénominateur [10] de l'éq.(2.90) est une intégrale sur la fonction de Hubble à très haut redshift, où les contributions dynamiques de la courbure et de la Constante Cosmologique deviennent négligeables, cf. éqs.(2.58) et (2.59), et $c_{\rm s}$ est alors essentiellement donné par les contributions de la densité de la matière baryonique $\Omega_{\rm b}$ et des photons Ω_γ. (Notons que $\Omega_\gamma \neq \Omega_{\rm R}$. La densité intégrale de la radiation $\Omega_{\rm R}$ en effet est la somme des densités des photons et des particules massives relativistes. On a en général $\Omega_{\rm R} = \Omega_\gamma\,(1 + 0.2271 N_{\rm eff})$, où $N_{\rm eff}$ est le nombre effectif des genres de neutrino, suivant Komatsu et al. (2009).) On trouve :

$$\left(\frac{c_s}{c}\right)^2 = \frac{1}{3}\frac{4\Omega_\gamma H_0^2}{4\Omega_\gamma H_0^2 + 3\Omega_{\rm b} H_0^2}. \tag{2.91}$$

La densité de la radiation est proportionnelle à la puissance quatrième de la température, $(T_{\rm CMB})^4$, qui est, comme nous avons pu voir ci-dessus, très bien connue. Par conséquent, la position du pic est aussi une mesure puissante de $\Omega_{\rm b} H_0^2$.

La quantité $c\,d_{\rm A}\,(z_{\rm CMB})\,H^2$, apparaissant dans le numérateur de l'éq.(2.90), sera encodée dans ce que l'on a l'habitude d'appeler le paramètre réduit du CMB, et qui a été introduit par Bond et al. (1997) :

$$\begin{aligned} \mathcal{R} :&= \frac{H_0}{c}\sqrt{\Omega_{\rm M}^0}\,(1 + z_{\rm CMB})\,d_{\rm A}\,(z_{\rm CMB}) \\ &= \sqrt{\frac{\Omega_{\rm M}^0}{|\Omega_{\rm k}^0|}}\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_{\rm k}^0|}\int_0^{z_{\rm CMB}} \frac{{\rm d}\tilde{z}}{E\,(\tilde{z})}\right). \end{aligned} \tag{2.92}$$

Cependant, ce paramètre réduit diffère de $c\,d_{\rm A}\,(z_{\rm CMB})\,H^2$ par un facteur $\sqrt{1 + z_{\rm CMB}}$, et néglige les contributions de la radiation et de la Constante Cosmologique à la fonction de Hubble, cf. Komatsu et al. (2009). Cependant, il a été argumenté que l'ajustement de $\mathcal{R}$ et $\Omega_{\rm b}{H_0}^2$ au lieu d'un ajustement de l'ensemble des C_ℓ serait un bon substitut pour l'extraction des paramètres cosmologiques (cf. Wang & Mukherjee 2007). Il faut cependant souligner, que l'utilisation de $\mathcal{R}$ au lieu d'un fit complet du spectre entraînera une perte d'information, quantifiée par Elgarøy & Multamäki (2007) et étudiée par Ferramacho (2008), mais aussi la possibilité de biais sur les valeurs des paramètres cosmologiques, cf. Corasaniti & Melchiorri (2008). [11] Komatsu et al. (2009, WMAP5) donnent :

$$\mathcal{R} = 1.710 \pm 0.019. \tag{2.93}$$

Remarquons que nous voyons de nouveau apparaître une dégénérescence entre les paramètres cosmologiques à cause de la relation intégrale entre ces derniers et $\mathcal{R}$ (éq.(2.92)), point qui sera discuté dans la section 2.5 ci-après.

10. L'intégrale dans le dénominateur de l'éq.(2.90) est dans la littérature aussi appelé l''horizon acoustique comobile du son' $r_{\rm s}$, ou plus simplement 'horizon sonore'.

11. Une alternive à l'utilisation de $\mathcal{R}$ sans implémenter un fit complet du CMB a été proposée par Hu et al. (2001) et Doran & Lilley (2002), cf. Corasaniti & Copeland (2002) pour une application de cette méthode.

2.3.4 Oscillations acoustiques des baryons

Les grandes structures de l'univers s'étant formées à partir des fluctuations primordiales de densité visibles sur le spectre des anisotropies du CMB, on s'attend à retrouver les pics d'oscillations acoustiques baryoniques dans le spectre de puissance de la distribution de matière dans l'univers. Un programme de relevé des objets célestes, le SDSS lancé en 2000, à révélé la distribution des galaxies dans l'univers proche comme montrée sur la Figure 2.12 (gauche).
Décrivons la densité $\rho(\vec{r})$ des galaxies dans une certaine direction du ciel, $\vec{r}$, comparée à la densité moyenne, $\bar{\rho}$:

$$\delta(\vec{r}) := \frac{\rho(\vec{r}) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \tag{2.94}$$

où $\vec{r}$ est le vecteur position. En considérant la transformée de Fourier nous obtenons la fonction de corrélation à deux points, $\xi(s)$, de la distribution des galaxies :

$$\xi(\vec{s}) = \langle \delta(\vec{r})\, \delta(\vec{r}+\vec{s}) \rangle = \frac{V_3}{(2\pi)^3} \int P(k)^2\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \mathrm{d}^3k, \tag{2.95}$$

où $P(k)$ est le spectre de puissance de la distribution des galaxies, et V_3 est le volume de la région de l'univers considérée. Pour les galaxies LRG (Luminous Red Galaxies) de l'échantillon SDDS de la Figure 2.12 (gauche), Eisenstein et al. (2005) obtenaient la fonction de corrélation à deux points de la Figure 2.12 (droite) où on observe en effet un pic acoustique à $k^{-1} \approx 100\,\mathrm{Mpc\,h^{-1}}$. L'horizon acoustique du son pouvant être estimé à partir des études de la dynamique du CMB, cf. ci-dessus, nous avons alors entre nos mains un 'angle standard' pour mesurer la distance angulaire $d_A(z)$ grâce à la position du pic dans le spectre de puissance de la distribution des galaxies à différents redshifts. Il a été argumenté par Eisenstein et al. (2005), que la position du pic sera bien encodée dans ce que l'on appelle le paramètre réduit des BAO :

$$A(z) := \left[z^2 |\Omega_\mathrm{k}^0|^2 E(z)\right]^{-1/3} \left[\mathcal{S}\left(\sqrt{|\Omega_\mathrm{k}^0|} \int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{E(\tilde{z})}\right)\right]^{2/3}, \tag{2.96}$$

qui est proportionel à la racine cubique du produit de la dilatation radiale de la position du pic, $(1+z)\,\mathrm{d}d_A/\mathrm{d}z = c/H(z)$, avec le carré de la dilatation transversale, $d_A(z)^2$, dans le spectre de puissance tridimensionnel (Eisenstein et al. 2005; Tegmark et al. 2006). [12] Le paramètre réduit A, éq.(2.96), a l'avantage d'être indépendant du paramètre de Hubble, H_0. Le redshift typique pour l'échantillon des galaxies LRG étant $z \sim 0.35$, la position du pic acoustique sur la Figure 2.12 est, toujours suivant Eisenstein et al. (2005), donnée par :

$$A(z = 0.35) = 0.469 \pm 0.017. \tag{2.97}$$

12. C'est à dire que la précision des sondages actuels n'est pas encore suffisante pour mesurer séparément les déplacements radiaux et transversaux du pic (Okumura et al. 2007), et le paramètre A est un amalgame des deux, cf. aussi la discussion de Ferramacho (2008).

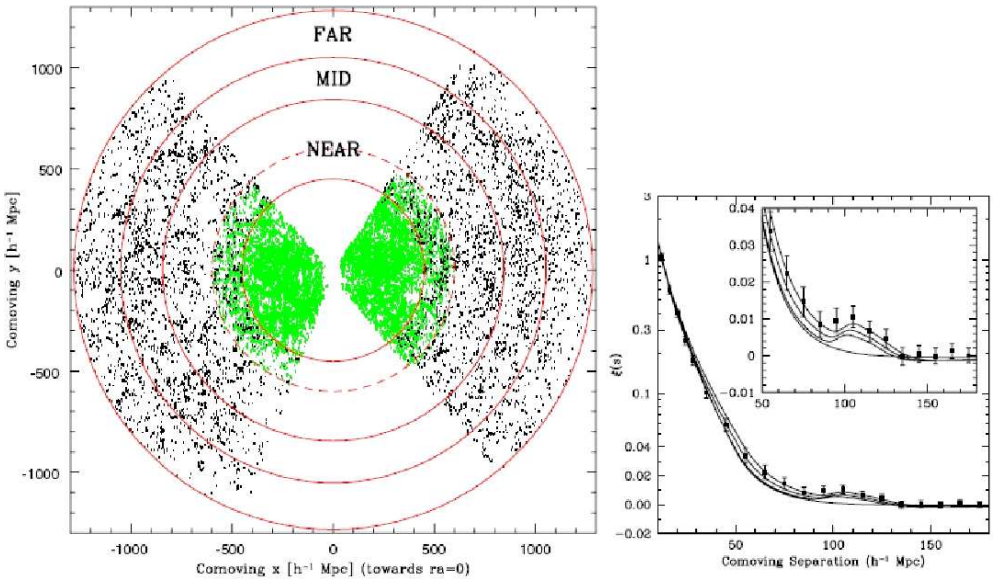


FIGURE 2.12: Gauche : La distribution de 6476 galaxies LRG ('Luminous Red Galaxies', noir) et de 32417 galaxies principales (vert/gris) comme relevé par Tegmark et al. (2006, SDSS). La coordonnée radiale est la distance propre éq.(2.15) en h^{-1}Mpc, où h est donné par $H_0 =: 100\,\mathrm{h}\,(\mathrm{km/s})\,/\mathrm{Mpc}$. L'échantillon est subdivisé en NEAR, MID et FAR par les cercles rouges correspondant aux redshift $0.155, 0.3, 0.38, 0.474$. Droite : Figure de Eisenstein et al. (2005), montrant la fonction de corrélation à deux points, éq.(2.95), pour les galaxies LRG. L'encadré élargit la région du diagramme autour du pic acoustique.

Encore une fois, nous voyons dans ce paramètre apparaître le problème de la dégénérescence des paramètres cosmologiques, que nous avons déjà vu apparaître dans les éqs.(2.80) et (2.92). Ce problème de dégénérescence provenant de l'intégrale sur l'inverse de la fonction de Hubble, $\int \mathrm{d}z/H\,(z)$, est alors générique à l'utilisation des distances cosmologiques. On appelle cet effet la dégénérescence géométrique (cf. Bond et al. 1997; Virey 2007).

Il existe d'autres mesures cosmologiques (comptages d'amas, mesures du spectre de puissance, autres mesures de distances) qui permettent de contraindre les paramètres cosmologiques, mais que nous n'avons pas utilisés dans le travail de cette thèse.

2.4 Valeurs des paramètres cosmologiques

2.4.1 Le modèle ΛCDM

Les analyses combinées des données actuelles provenant des observations des SNe, du CMB, et des BAO, comme nous avons exposé ci-dessus, indiquent les paramètres cosmologiques aux valeurs $\Omega^0_{\mathrm{M}} = \Omega^0_{\mathrm{b}} + \Omega^0_{\mathrm{cdm}} \simeq 0.05 + 0.23 = 0.28$ pour la densité de matière, $\Omega^0_{\mathrm{R}} \simeq 10^{-5}$ pour la densité de radiation, $\Omega^0_{\mathrm{x}} \simeq 0.72$ pour la densité d''énergie noire' (suivant Huterer & Turner (1999), symbole 'x'),

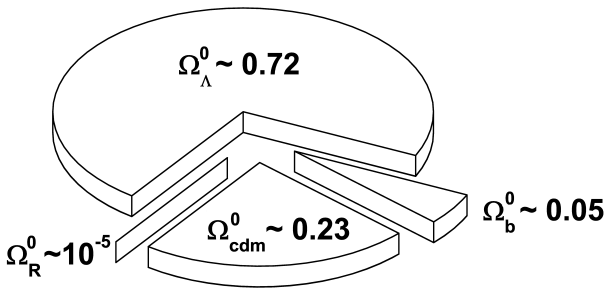


FIGURE 2.13: Composition de l'univers à présent, selon le modèle standard.

composante inconnue responsable de l'accélération du taux d'expansion (x = Λ si l'accélération est dûe à une Constante Cosmologique), et $w_{\rm x} \simeq -1$ pour la valeur de l'équation d'état de cette composante si on l'inclut dans le fit comme un paramètre constant (cf. Kowalski et al. (2008) et Komatsu et al. (2009) pour des extractions récentes des paramètres). La composition de l'univers selon ces résultats est schématiquement montrée sur la Figure 2.13. La valeur de $w_{\rm x}$ est en bon accord avec la valeur prédite par une contribution type Constante Cosmologique, et on appelle ce modèle le *modèle standard* de la cosmologie, dit le modèle 'Λ-Cold-Dark-Matter' (ΛCDM). Nous discuterons les erreurs de ces paramètres plus bas dans cette section, mais mentionnons les contraintes actuelles sur les autres paramètres que nous avions introduit jusqu'ici. Comme nous avons discuté ci-dessus, les données actuelles de Komatsu et al. (2009, WMAP5) contraignent l'indice scalaire de l'éq.(2.87) à $n_s = 0.960 \pm 0.013$ et indiquent donc un spectre de puissance initial presque constant en accord avec les modèles d'inflation. Cependant, la contrainte exlut le spectre de Harrison-Zel'dovich à 3σ. Son amplitude est contrainte à $\Delta^2(k_0) = (2.445 \pm 0.096) \cdot 10^{-9}$, où $k_0 = 0.002/\mathrm{Mpc}$. Sous l'hypothèse de $n_t = 0$ Komatsu et al. (2009) obtiennent la contrainte $-0.068 < \mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k < 0.012$ à 95% CL pour la variation de n_s avec l'échelle de l'éq.(2.87). Il n'y a donc pas d'indication d'une telle variation. Sous l'hypothèse que $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k = 0$ ils obtiennent ensuite une contribution des ondes gravitationnelles aux anisotropies du spectre de puissance initial de $r = n_t/n_s < 0.22$ à 95% CL. [13]

13. Cependant, dans l'analyse des données incluant simultanément n_s, $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k$, *et* n_t, on obtient un indice scalaire plus grand que 1, $n_s = 1.087 \pm 0.072$ (mais toujours incompatible avec $n_s = 1$ à 1σ), une variation avec l'échelle $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k = -0.050 \pm 0.034$ incompatible à 1σ avec $\mathrm{d}n_s/\mathrm{d}\log k = 0$, et une contrainte moins forte sur la contribution de l'indice tensoriel, $r < 0.58$ à 95%CL.

Les aspects techniques de l'extraction des paramètres à partir des données sont exposés dans l'appendice A, et sont discutés dans la littérature, cf. par exemple Amsler et al. (2008); Kowalski et al. (2008); Komatsu et al. (2009).

On note que selon les données actuelles l'univers apparaît globalement plat, soit $\Omega_{\mathrm{k}}^0 \simeq 0$. (Toute combinaison des sondes donnent des contraintes sur Ω_{k}^0 compatibles à 1σ avec l'hypothèse que l'univers soit plat, si w_{x} est considéré constant dans l'analyse. Cf. par exemple Komatsu et al. (2009).)
En outre, parce que nous avons :

$$\Lambda \simeq 2\left(\Omega_{\Lambda}^0/\Omega_{\mathrm{M}}^0\right)\Lambda_{\mathrm{E}} \overset{\Lambda\mathrm{CDM}}{>} \Lambda_{\mathrm{E}}, \tag{2.98}$$

où Λ_{E} a été défini dans l'éq.(2.42), le modèle ΛCDM correspond à la classe des modèles de Friedmann représentée par la ligne 'I' sur la Figure 2.3 (page 30). Après une phase d'expansion décélérée (la phase de domination de la matière), l'univers entre dans une phase d'accélération et l'univers se met dans une expansion infinie. On montre à partir de la définition éq.(2.34b), que la décélération du taux d'expansion est donnée par :

$$q\left(z;p_i\right) = \frac{1}{2}\Omega_{\mathrm{T}}\left(z\right) + \frac{3}{2}w_{\mathrm{x}}\left(z\right)\Omega_{\mathrm{x}}\left(z\right), \tag{2.99}$$

et on obtient alors pour le modèle ΛCDM le redshift z_{ta} où $q\left(z;p_i\right)$ a changé de signe :

$$z_{\mathrm{ta}} \overset{\Omega_{\mathrm{k}}^0=\Omega_{\mathrm{R}}^0=0}{=} -1 + \sqrt[3]{\frac{2\Omega_{\mathrm{x}}^0}{\Omega_{\mathrm{M}}^0}} \tag{2.100}$$

$$\overset{\Lambda\mathrm{CDM}}{=} 0.73, \tag{2.101}$$

où nous avons supposé $\Omega_{\mathrm{k}}^0 = \Omega_{\mathrm{R}}^0 = 0$ dans la première ligne. Aussi, le redshift z_{eq} à partir duquel l'énergie noire a dominé la matière est donné par :

$$z_{\mathrm{eq}} = -1 + \sqrt[3]{\frac{\Omega_{\mathrm{x}}^0}{\Omega_{\mathrm{M}}^0}} \tag{2.102}$$

$$\overset{\Lambda\mathrm{CDM}}{=} 0.37, \tag{2.103}$$

ce qui souligne que selon les valeurs actuelles des paramètres cosmologiques, l'univers n'entra que récemment dans une phase d'expansion accélérée. On trouve les valeurs de z_{ta} et z_{eq} indiquées sur la Figure 2.2 (page 29). Finalement, nous obtenons à partir de l'éq.(2.64) l'âge de l'univers :

$$t(z;p_i) = \frac{1}{H_0}\int_z^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{(1+\tilde{z})E(\tilde{z};p_i)}, \tag{2.104}$$

et on en obtient $t_0 \approx 13.5 \cdot 10^9$ans l'âge actuel de l'univers si le modèle ΛCDM est valable.

2.4.2 Les paramètres de densité et de l'énergie noire

Dans le reste de ce manuscrit nous nous intéressons principalement à l'extraction des paramètres cosmologiques de densité et des paramètres décrivant l'énergie noire et de leurs erreurs. Nous avons reproduit sur la Figure 2.14 les contours à 68% CL dans le plan $(\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0)$ qu'ont obtenus Kowalski et al. (2008) à partir des données récentes des SNe (Figure 2.10), du CMB (Spergel et al. 2007, WMAP3) et des BAO (Eisenstein et al. 2005). Ici, Ω_k^0 a été inclu dans le fit. On observe sur la Figure comment la combinaison des trois sondes brise la dégénérescence des paramètres Ω_M^0 et Ω_Λ^0, et que les contours combinés sont en accord avec le modèle ΛCDM à 68% CL.

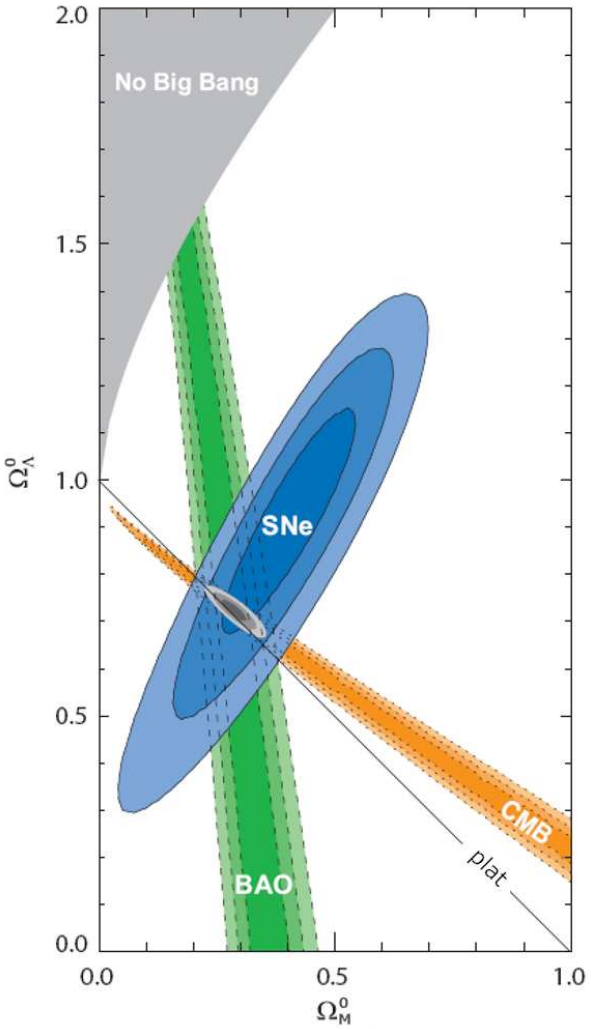


FIGURE 2.14: Prélevé de Kowalski et al. (2008). Contours à 68.3%, 95.4% et 99.7% CL dans le plan des paramètres $(\Omega_M^0, \Omega_\Lambda^0)$.

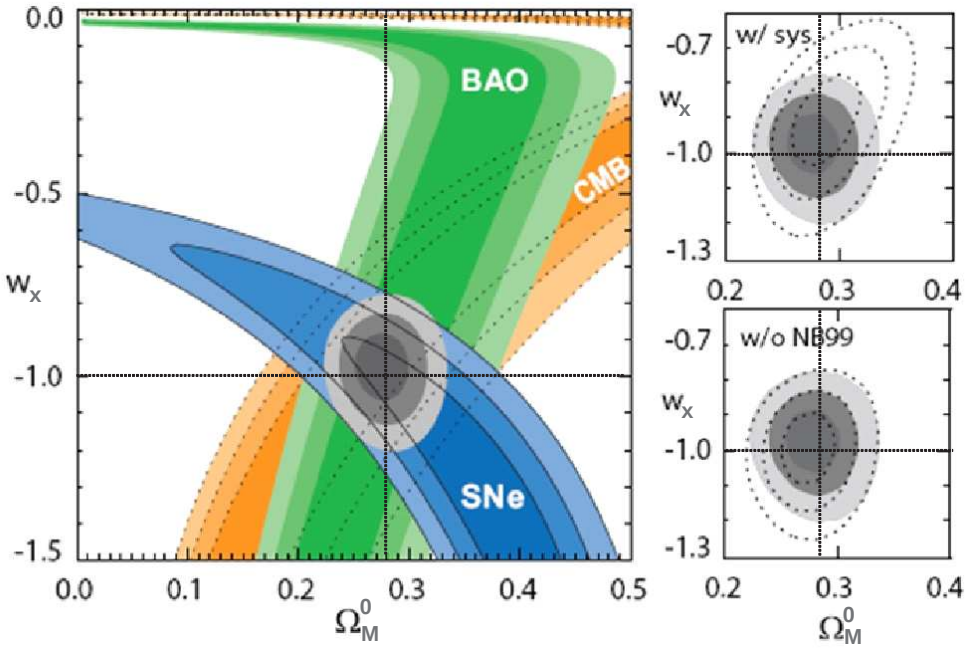


FIGURE 2.15: Figure (légèrement modifiée) de Kowalski et al. (2008). Contours à 68.3%, 95.4% et 99.7% CL dans le plan (Ω_M^0, w_x).

Sur la Figure 2.15 (gauche) sont reproduits les contours dans le plan des paramètres Ω_M^0 et w_x de la même analyse (où $w_x = \text{const}$) qui ont le plus grand d'intérêt pour ce manuscrit de thèse. On y trouve les contraintes imposées par les données SN, CMB, et BAO séparément, et les contraintes imposées par des données combinées en gris, sans prise en compte les erreurs systématiques. Les croix pointillées indiquent le modèle ΛCDM. On s'aperçoit que la combinaison seule des données du CMB et des BAO n'est pas apte à fortement contraindre le paramètre w_x. Alors que les données SNe seules préfèrent une valeur de w_x significativement plus petite que sa valeur ΛCDM, $w_x = -1$, leur combinaison avec les données CMB et BAO réalise un contour autour du modèle ΛCDM. Les petites figures à côté montrent (en haut) l'effet d'inclure des erreurs systématiques dans l'analyse (cf. appendice B), et l'effet d'inclure un certain échantillon de SNe dans l'analyse (en bas) (cf. Kowalski et al. 2008, pour plus de détails). Avec les données après cinq ans d'observations de WMAP, Komatsu et al. (2009) obtiennent les contours à 68% et 95% CL dans les plans (Ω_x^0, Ω_k^0) et (Ω_x^0, w_x), représentés sur la Figure 2.16. Ici aussi, w_x est considéré constant. Les figures mettent en valeur comment les différentes possibles combinaisons des sondes brisent la dégénérescence des paramètres cosmologiques. On en déduit que la combinaison des données du CMB avec les BAO contraint plus fortement le paramètre Ω_k^0 que sa combinaison avec les données SN. A l'inverse, le paramètre dynamique de l'énergie noire, w_x, est plus fortement contraint par la combinaison CMB+SNe.

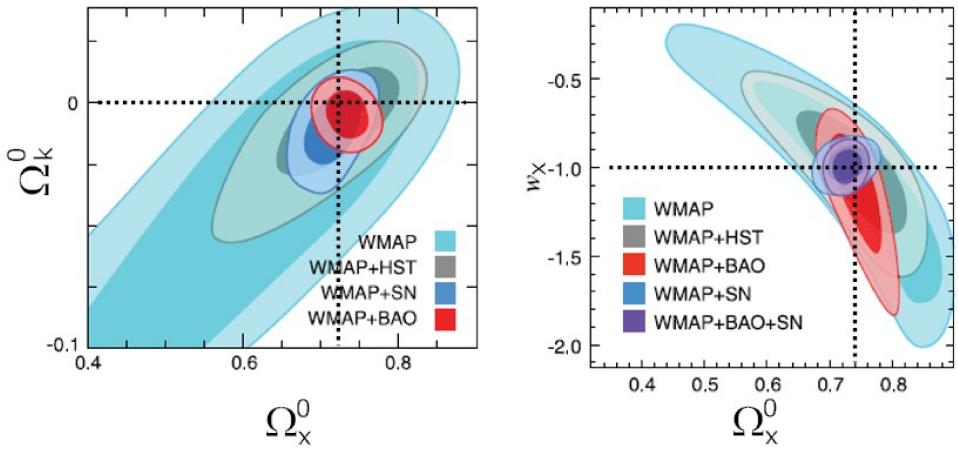


FIGURE 2.16: Figure de Komatsu et al. (2009, WMAP5). Les contraintes marginalisées dans les plans des paramètres (Ω_x^0, Ω_k^0) (gauche) et (Ω_x^0, w_x) (droite). Ici, on a supposé $w_x = \text{const.}$ et la croix pointillée indique le modèle ΛCDM.

2.4.3 La dynamique de l'énergie noire

Il est fréquent de prendre aussi en compte la possibilité que la composante 'énergie noire' soit dynamique et que ses propriétés varient avec le temps. Nous allons donner des motivations théoriques pour l'hypothèse d'une énergie noire dynamique dans le chapitre suivant. Sans donner plus de détails ici, nous mentionnons seulement que cette dynamique est décrite par une équation d'état qui dépend du temps. Le paramétrage le plus fréquemment utilisé pour présenter les résultats est celui proposé par Chevallier & Polarski (2001) et Linder (2003) (paramétrage CPL) :

$$w_x(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \tag{2.105}$$

que nous discuterons en détail dans la section 3.7. En incluant le paramètre w_a dans l'analyse des données, Kowalski et al. (2008) obtiennent les contours de la Figure 2.17, où sont représentées les différentes combinaisons des sondes (gauche) et l'effet d'inclure des effets systématiques sur les contours combinés (droite). $\Omega_k = 0$ a été imposé dans l'analyse, et la croix pointillée indique le modèle ΛCDM. Nous observons encore une fois que la combinaison des données CMB+SNe est très performante concernant l'extraction des paramètres dynamiques de l'énergie noire. La combinaison CMB+SNe est, en terme de surface des contours, à peu près deux fois plus performante que la combinaison CMB+BAO. Le contour combiné est en accord avec le modèle ΛCDM, mais nous le discuterons plus en détails dans la section 3.7.

2.4.4 Résultats avec SNe+$\mathcal{R}$+A

Nous pouvons avec notre approche 'réduite', SNe+$\mathcal{R}$+A, rapidement reproduire ces résultats, cf. appendice A, et nous obtenons avec le KOSMOSHOW, outil

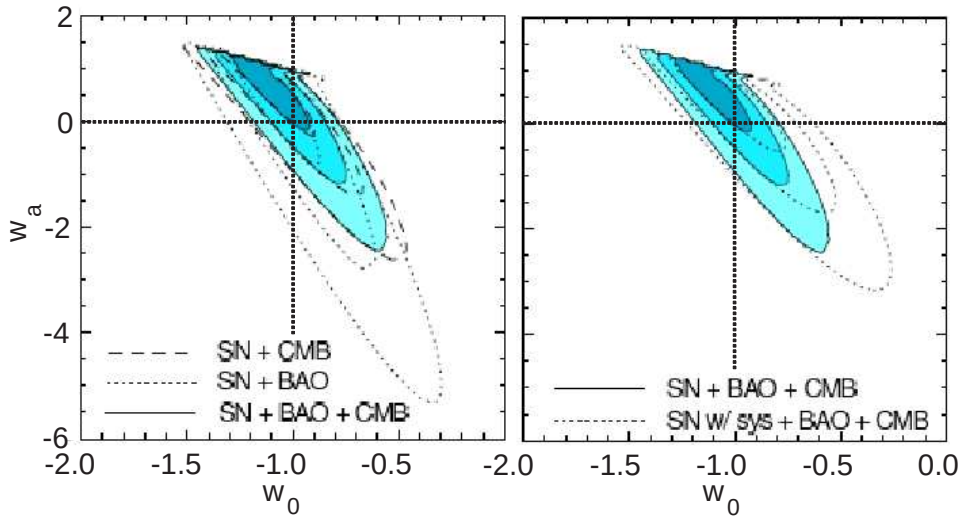


FIGURE 2.17: Figure de Kowalski et al. (2008). Contours à 68.3%, 95.4% et 99.7% CL dans le plan des paramètres (w_0, w_a). Gauche : Les combinaisons possibles des données SN (sans erreurs systématiques) avec les données CMB (WMAP3) et BAO. Droite : L'effet d'inclure des erreurs systématiques aux SNe dans l'analyse (contours pointillées). A comparer avec la Figure 3.5 (page 74).

d'analyse développé par A. Tilquin, les valeurs des paramètres $\{p_i\}$ du Tableau 2.1. Ici, nous prenons en compte le paramètre w_a qui décrit la dynamique de l'énergie noire.

Tableau 2.1: Paramètres cosmologiques $\{p_i\}$ obtenus avec les données SNe+$\mathcal{R}$+A sans priors. Les erreurs sont estimées au minimum du χ^2, cf. appendice A.4. Dans le cas a), $w_{\rm x}$ est considéré constant.

a)	$\Omega^0_{\rm M}$	$\sigma_{\Omega^0_{\rm M}}$	Ω^0_Λ	$\sigma_{\Omega^0_\Lambda}$	$\Omega^0_{\rm R}$	$\sigma_{\Omega^0_{\rm R}}$	$w_{\rm x}$	$\sigma_{w_{\rm x}}$	–		$\chi^2_{\rm min}/n$
	0.29	0.05	0.71	0.33	$< 10^{-3}$	0.06	-0.95	0.24	–		1.4
b)	$\Omega^0_{\rm M}$	$\sigma_{\Omega^0_{\rm M}}$	Ω^0_Λ	$\sigma_{\Omega^0_\Lambda}$	$\Omega^0_{\rm R}$	$\sigma_{\Omega^0_{\rm R}}$	w_0	σ_{w_0}	w_a	σ_{w_a}	$\chi^2_{\rm min}/n$
	0.29	0.22	0.71	2.06	$< 10^{-3}$	0.10	-0.97	2.34	0.49	5.13	1.4

Nous saisissons encore une fois l'occasion de noter que l'utilisation des paramètres réduits $\mathcal{R}$ et A peut amener à des résultats différents d'un fit complet des données CMB et BAO, cf. sections 2.3.3 et 2.3.4. Ferramacho (2008) souligne que l'utilisation de ces paramètres résultera en général dans une sur-estimation des erreurs. Nous voyons dans le Tableau 2.1, comment le fait d'inclure w_a dans le fit augmente drastiquement les erreurs. Au niveau du χ^2 les deux fits sont corrects. Dans notre Tableau 2.1 ci-dessus, nous n'avons cependant supposé aucune connaissance a priori sur aucun des $\{p_i\}$. Si nous imposons, comme on le fait souvent, que l'univers soit plat :

$$\Omega_{\rm k} \stackrel{!}{=} 0, \tag{2.106}$$

nous obtenons des erreurs largement réduites et des valeurs centrales significativement différentes. Aussi, l'erreur sur le paramètre de densité de radiation, $\sigma_{\Omega_{\rm R}^0}$, est diminuée par un facteur dix. Par la suite, nous allons souvent négliger $\Omega_{\rm R}^0$ dans l'analyse (et dans les simulations des données, cf. la deuxième partie) :

$$\Omega_{\rm R} \stackrel{!}{=} 0. \tag{2.107}$$

Avec ces deux contraintes nous obtenons alors les valeurs du Tableau 2.2. [14] Ces

Tableau 2.2: Paramètres cosmologiques $\{p_i\}$ obtenus avec les données SNe+$\mathcal{R}$+A si l'on impose que l'univers soit plat et néglige la contribution de la radiation dans l'analyse. Les erreurs sont estimées au minimum du χ^2, cf. appendice A.4. Dans le cas i), $w_{\rm x}$ est considéré constant.

i)	$\Omega_{\rm M}^0$	$\sigma_{\Omega_{\rm M}^0}$	Ω_Λ^0	$\sigma_{\Omega_\Lambda^0}$	$\Omega_{\rm R}^0$	$\sigma_{\Omega_{\rm R}^0}$	$w_{\rm x}$	$\sigma_{w_{\rm x}}$	–	$\chi^2_{\rm min}/n$
	0.27	0.02	$1-\Omega_{\rm M}^0$		–		-0.93	0.07	–	0.7

ii)	$\Omega_{\rm M}^0$	$\sigma_{\Omega_{\rm M}^0}$	Ω_Λ^0	$\sigma_{\Omega_\Lambda^0}$	$\Omega_{\rm R}^0$	$\sigma_{\Omega_{\rm R}^0}$	w_0	σ_{w_0}	w_a	σ_{w_a}	$\chi^2_{\rm min}/n$
	0.27	0.02	$1-\Omega_{\rm M}^0$		–		-1.13	0.16	0.84	0.53	0.7

résultats sont en bon accord avec la littérature. Les erreurs sont drastiquement plus petites pour tous les paramètres par rapport au Tableau 2.1, mais surtout les valeurs centrales de $w_{\rm x}$ sont significativement différentes notammment dans le cas où w_a est inclu dans le fit. La valeur actuelle de l'équation d'état passe de $w_{\rm x} = -0.97 \pm 2.34$ à une valeur centrale au-delà de la frontière fantôme, $w_0 = -1.13 \pm 0.16$, mais reste à 1σ consistante avec sa valeur ΛCDM. En revanche, la valeur $w_a = 0.84 \pm 0.53$ devient à 1σ inconsistante avec l'hypothèse $w_{\rm x} = $ const. Clarkson et al. (2007) ont démontré la dégénérescence analytique entre l'évolution de $w_{\rm x}$ et la contribution dynamique de la courbure, $\Omega_{\rm k}^0$. La dangerosité de cette dégénérescence même avec des futures données, et le rôle que jouent les suppositions de modèle, à savoir l'hypothèse $w_{\rm x} = $ const., dans la reconstruction de la valeur de $\Omega_{\rm k}^0$, ont été discuté par Virey et al. (2009). L'hypothèse d'un univers plat peut nous faire croire à une énergie noire dynamique alors qu'elle ne l'est pas. Par ailleurs, on peut confondre des modèles avec courbure et énergie noire dynamique avec le modèle ΛCDM (plat) si on ignore la dynamique de l'énergie noire dans l'analyse.
Nous reviendrons dans la deuxième partie de ce manuscrit de thèse à la question de la dépendance des résultats du fit sur les hypothèses d'analyse, et du danger d'introduire des biais sur les valeurs reconstruites des paramètres à cause de ces hypothèses.

14. Nous notons les légères différences des valeurs dans ce tableau par rapport au Tableau 6.1. Les erreurs plus grandes dans ce dernier proviennent du fait que dans cette étude nous avions utilisé la valeur de $\mathcal{R}$ de Spergel et al. (2007, WMAP3) dans l'analyse.

2.5 La dégénérescence géométrique

Au cœur du problème de la dégénérescence géométrique repose, comme nous avons vu, la relation intégrale :

$$d\left(z;p_i\right) \sim \int_0^z \frac{\mathrm{d}\tilde{z}}{E\left(\tilde{z};p_i\right)}, \tag{2.108}$$

entre les paramètres et les diverses distances cosmologiques, $d \in \{r, d_L, d_A\}$, qui entraîne que l'on peut obtenir des spectres de puissances du CMB identiques pour des ensembles de paramètres $\{p_i\}$ différents, soit pour des évolutions du fond très différentes, cf. Efstathiou & Bond (1999); Virey (2007). Revenons à la définition du paramètre réduit, $\mathcal{R}$, éq.(2.92) : à condition que nous ayons une valeur de $\Omega_{\mathrm{M}}^0 {H_0}^2$ identique pour tous les modèles en question, et que nous ayons aussi fixé le spectre de puissance initial éq.(2.86), nous allons reproduire le même spectre de puissance du CMB pour tous ensembles de paramètres (soit pour tous modèles) cosmologiques qui donneront la même valeur $\mathcal{R} = \mathrm{const.}$, fait qui est illustré sur la Figure 2.18. Le cadre en haut reprend le spectre de puissance de la Figure 2.11, calculé pour un univers $\Omega_{\mathrm{M}} \equiv 1$ et $\Omega_\Lambda \equiv 0$ (appélé 'modèle cible', qui donne $\mathcal{R} = 1.94$) et pour quatre modèles différents à valeur dégénérée de $\mathcal{R}$. En bas sont représentés les résidus de ces quatre modèles par rapport au modèle cible, avec les valeurs de $H_0/[100(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}]^2\Omega_\Lambda^0$ correspondantes données près des lignes. Nous observons que les modèles montrent un comportement distinguable à de grandes échelles $\ell \lesssim 30$ et seront donc en principe susceptibles d'être détectés par l'effet Sachse-Wolfe, cf. note 9 en bas de la page 43. Cependant, les deux lignes hachurées montrent la limite fondamentale de précision imposée par la variance cosmique, et nous nous apercevons, que la dégénérescence ne peut pas être brisée sans contrainte extérieure. Nous montrons sur la Figure 2.19 la dégénérescence du paramètre $\mathcal{R}$ dans les espaces de phase à deux dimension tendus, respectivement, par Ω_{k}^0 et Ω_{x}^0 (gauche), et par w_0 et Ω_{x}^0 (droite). Nous y montrons notamment en lignes noires et pointillées la contrainte actuelle : $\mathcal{R} = 1.710 \pm 0.019$ (éq.(2.93)). A gauche (droite), les lignes hachurées représentent de gauche à droite (d'en haut vers le bas) les contours $\mathcal{R} = \{2.0, 2.5, 3\}$. Nous déduisons de la figure qu'il existe alors un nombre infini de modèles dégénérés qui sont en accord avec la contrainte observationnelle. Cette dégénérescence ne peut pas être brisée sans contrainte extérieure sur Ω_{M}^0, Ω_{x}^0, et H_0.

Les volumes d'espace de phase occupés par la contrainte actuelle sont assez étroits dans les plans représentés sur la Figure 2.19. La situation change si l'on prend en compte le troisième paramètre de l'énergie noire, à savoir w_a. Les Figures 2.20 montrent les lignes de dégénérescence de la valeur de $\mathcal{R}$ dans l'espace de phase (w_0, w_a) pour différentes valeurs de Ω_{k}^0.

Pour les modèles ouverts, $\Omega_{\mathrm{k}}^0 = 0.05$, le volume de dégénérescence est très petit, et il suffira d'une contrainte extérieure exhibant une courbe de dégénérescene dans l'espace (w_0, w_a) seulement légèrement différente de celle de $\mathcal{R}$ pour briser la dégénérescence. Comme nous avons noté, toutes les sondes cosmologiques basées sur la mesure d'une distance, comme c'est le cas du BAO et des SNe Ia,

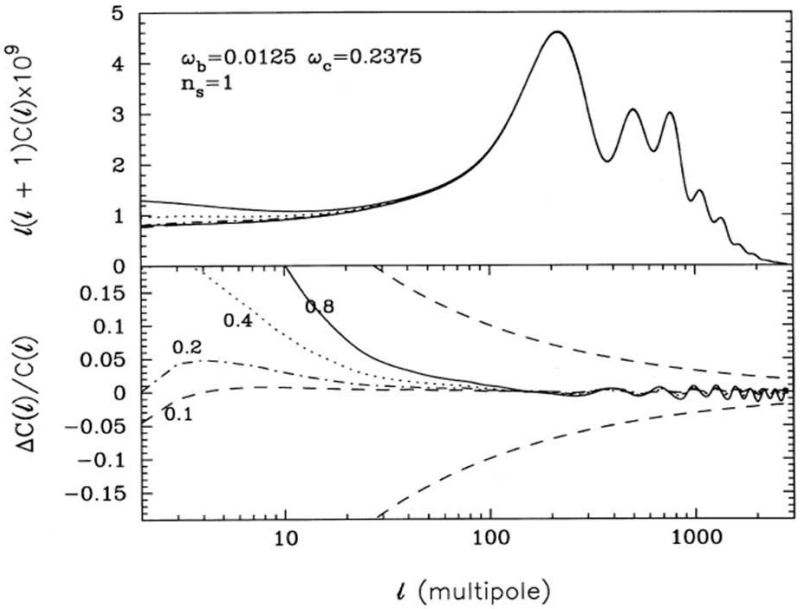


FIGURE 2.18: Figure de Efstathiou & Bond (1999), cf. dicussion dans le texte.

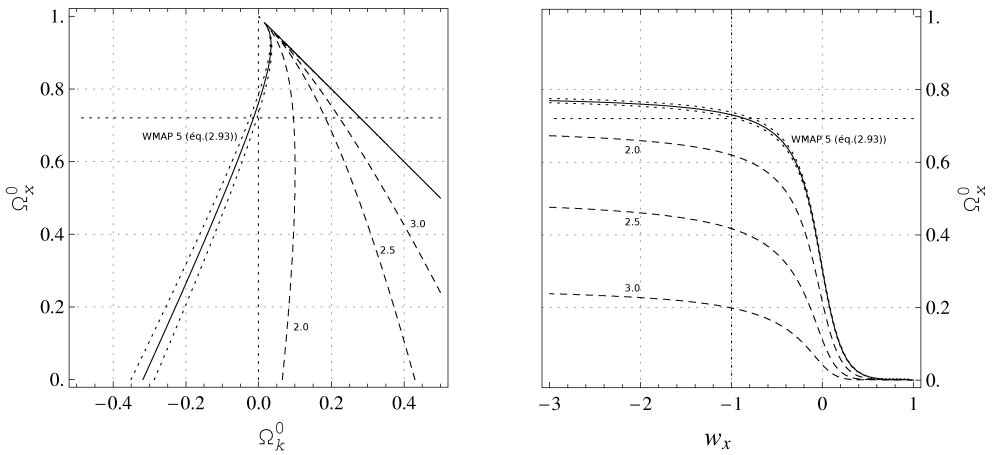


FIGURE 2.19: Gauche : Graphe inspiré par la Figure 1 (a) d'Efstathiou & Bond (1999). Contours $\mathcal{R} =$ const. dans le plan des paramètres cosmologiques $\left(\Omega^0_{\rm k}, \Omega^0_{\rm x}\right)$, où $w_{\rm x} = -1$. Les mêmes contours dans le plan $\left(w_{\rm x}, \Omega^0_{\rm x}\right)$, où $\Omega^0_{\rm k} = 0$ et $w_{\rm x} =$ const. Le modèle ΛCDM est indiqué sur les deux figures.

vont souffrir de la dégénérescence géométrique, mais leurs courbes dans l'espace de phase $\{p_i\}$ vont cependant ne pas avoir exactement le même comportement à cause des bornes d'intégration différentes. Aussi, la combinaison avec des données BAO ou SNe ne va permettre de briser la dégénérescence que partiellement, car malheureusement la description des anisotropies du CMB implique tellement de paramètres qu'il y a de nombreuses dégénérescences en sus de la géométrie, cf. Virey (2007).

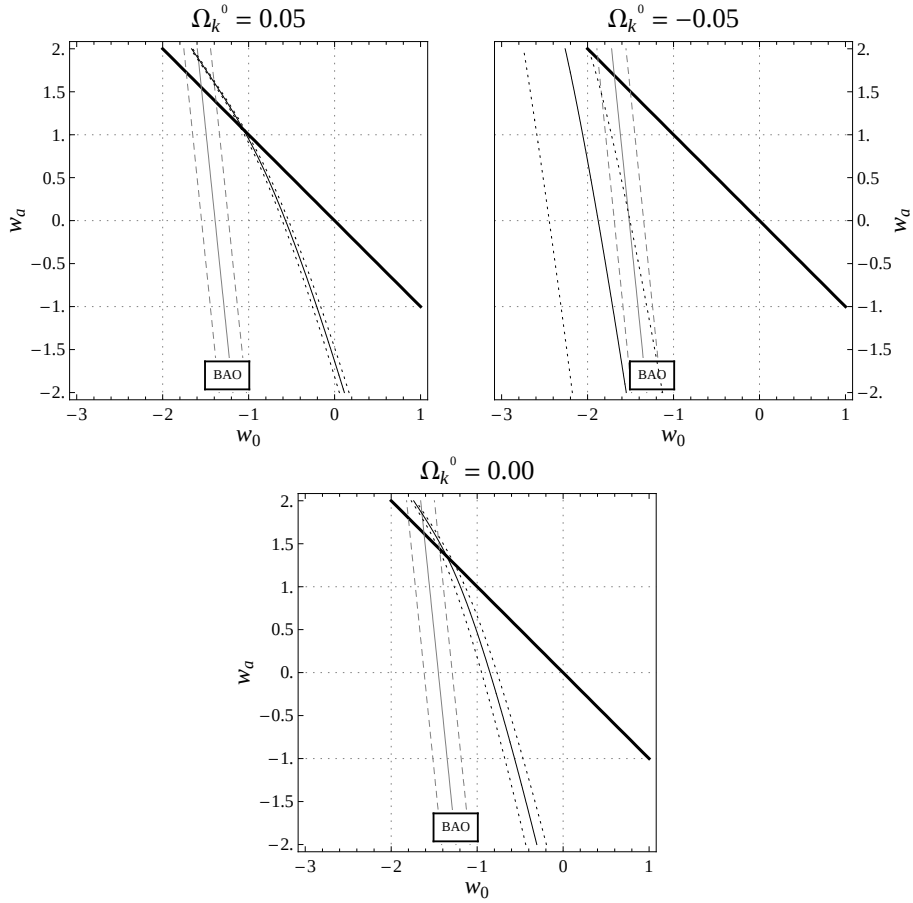


FIGURE 2.20: Lignes noires : Contours $\mathcal{R} = 1.710 \pm 0.019$ dans le plan (w_0, w_a) pour $\Omega_{\rm k}^0 = \{-0.05, 0.00, 0.05\}$. Ici, $\Omega_{\rm x}^0 = 0.72$. Nous représentons aussi la contrainte éq.(2.97) des BAO en lignes grises. L'épaisse ligne noir marque la limite $(w_0 + w_a) = 0$ dans l'espace de phase, cf. éq.(3.34) plus bas.

Par exemple, pour les BAO et SNe Ia que nous mesurons à des redshifts petits comparés à celui du CMB, nous allons nous attendre à ce que leurs contours de dégénérescence sur la Figure 2.20 dépendent différement de w_a surtout dans les cas où $w_0 + w_a > 0$. Nous allons voir (éq.(3.30)) que $w_a + w_0$ peut être interprété comme la valeur initiale de l'équation d'état, $w_a + w_0 = w_i$. Les modèles avec $w_i \sim 0$ sont appelés les modèles 'early dark energy', où l'énergie noire contribue à la dynamique de l'univers avant le découplage, $z > z_{\rm CMB}$. Considerant des sondes à haut et à bas redshift, on s'attend donc dans la zone $w_i > 0$ à une corrélation des paramètres différente de l'espace de phase par rapport à celle obtenue dans la zone $w_i < 0$. Nous avons pour illustration ajouté aux Figures 2.20 le contour de dégénérescence de la contrainte sur le paramètre réduit des BAO, A, cf. éq.(2.97). Concrètement, pour le cas du modèle ouvert, les contours des CMB et des BAO sont à 1σ disjoints pour tous les modèles d'énergie noire à $w_a \lesssim 1.5$. Dans ce cas d'un modèle ouvert, les modèles d''early dark energy' sont donc favorisés par les valeurs mesurées de $\mathcal{R}$ et A.

Dans le modèle plat, $\Omega_{\rm k}^0 = 0$, le volume de dégénérescence de $\mathcal{R}$ augmente par rapport aux modelès ouverts. Cependant, il reste disjoint des contours de dégénérescence des BAO pour tous $w_a \lesssim 1.5$. Le volume de dégénérescence de $\mathcal{R}$ augmente encore significativement pour le cas d'un univers légèrement fermé, $\Omega_{\rm k}^0 = -0.05$. Pour ce type de modèle, le CMB ne peut pas distinguer les modèles dans un volume de l'espace de phase (w_0, w_a) relativement grand, qui, cependant, est situé dans le régime 'fantôme', $w_0 < -1$, qui pour des raisons théoriques semble défavorable (cf. discussion page 72). Aussi, le rapport entre les volumes de dégénérescence de $\mathcal{R}$ et A s'est inversé par rapport aux cas de l'univers ouvert. La dégénérescence de w_0 et w_a n'est *pas* brisée par la combinaison des contraintes, à 1σ, pour tous les modèles $w_a \lesssim 1.5$. Et les volumes ne deviennent disjoints que pour les modèles d''early dark energy', ici pour les modèles $w_a \gtrsim 1.5$, qui sont donc défavorisés par les données combinées du CMB et des BAO si on suppose une courbure légèrement positive de l'univers, $\Omega_{\rm k}^0$. Pour des $\Omega_{\rm k}^0$ toujours plus négatifs, soit des modèles plus largement fermés ($\Omega_{\rm k}^0 < -0.05$), le volume de dégénérescence croît toujours, mais sort très vite du 'côté gauche' du plan montré : ces modèles suscitent des valeurs de $\mathcal{R}$ bien inférieures à la contrainte actuelle pour toutes valeurs de (w_0, w_a) 'raisonnables'.

Chapitre 3

Modèles pour l'énergie noire

3.1 La Constante Cosmologique

Comme nous avons pu voir dans le chapitre 2, la Relativité Générale propose une explication générique de l'accélération du taux d'expansion de l'univers mesurée aujourd'hui. Même s'il semblait à Einstein que l'introduction d'une Constante Cosmologique dans ses équations était une mauvaise idée,[1] on peut défendre le point de vue que le terme Λ ne fait que naturellement compléter les éqs.(2.1)[2]. Ainsi, la Constante Cosmologique n'est d'autre qu'une nouvelle constante naturelle dont la valeur doit être donnée par l'expérience. Plusieurs problèmes concernant cette interprétation du terme Λ ont été levés. Par exemple, il est argumenté que l'apparition de Λ comme une constante d'intégration mettrait en valeur une nature différente de celle des autres constantes naturelles, qui sont des constantes de couplage, ou dont les valeurs peuvent être motivées par des raisonnements physiques. Cependant, nous devons mentionner le 'problème de coïncidence', correspondant au fait que la valeur de Ω_Λ^0 soit du même ordre de grandeur que celle de Ω_M^0. A partir de la Figure 2.2 (page 29), donnant les variations dans le temps de $\Omega_\mathrm{M}(z)$ et $\Omega_\Lambda(z)$, nous pouvons observer qu'il faut un ajustement étonnant de la valeur de la Constante Cosmologique pour arriver à cette correspondance des deux termes aujourd'hui. On s'aperçoit aussi que de petites variations autour de la valeur de Ω_Λ donnent des évolutions de l'univers très différentes. Pour des valeurs plus grandes, l'évolution de l'univers n'aurait pas vécu une phase de domination de la matière, cf. Figure 2.2, et les grandes structures présentes dans l'univers, soit les galaxies et les amas des galaxies, n'auraient pas pu se former. Pour des valeurs plus petites que Λ_E, voire négative, les structures n'auraient pas non plus pu se former, car selon l'éq.(2.39c) l'univers se serait effondré avant (courbe 'O' sur la Figure 2.3).

1. Dejà en 1923 il écrivait dans une carte postale adressée à Hermann Weyl : "Wenn schon keine quasistatische Welt, dann fort mit dem kosmologischen Glied." (Einstein 1923), et se déclarait alors prêt à abandonner entièrement la Constante Cosmologique si la non-stationnarité de l'univers devait être démontrée, ce qu'il fit tout de suite quand il apprit les résultats de Hubble (1929), cf. Jung (2006). Aussi, selon Gamow (1970, page 44), Einstein lui aurait avoué que "the introduction of the cosmological term was the biggest blunder he ever made in his life".

2. Cf. la note 7 en bas de la page 24.

Pour éviter ce problème de coïncidence, certains auteurs cherchent à trouver une raison physique de l'existence du terme Λ, et une explication dynamique à sa valeur.

3.2 L'énergie du vide

Bien avant la découverte de l'accélération récente de l'expansion de l'univers il avait été proposé l'existence d'une contribution au contenu de l'univers du type Constante Cosmologique, correspondant à une contribution du vide au tenseur énergie impulsion cosmologique. Zel'dovich (1968) a montré que cette contribution doit être décrite par le produit d'une constante et de la métrique. Par exemple, considérons un champ scalaire, $\Phi\left(x^{\mu}\right)$, avec un potentiel $V\left(\Phi\right)$, dont l'action peut être écrite comme :

$$S=\int \mathrm{d}^{4}x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa}g^{\mu\nu}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}-V\left(\Phi\right)\right]. \tag{3.1}$$

Ici, κ et la constante gravitationnelle d'Einstein, cf. éq.(2.3). Le tenseur énergie-impulsion de ce champ scalaire est donné par :

$$T_{\mu\nu}=\frac{1}{2\kappa}\Phi_{,\mu}\Phi_{,\nu}+\frac{1}{2\kappa}\left(g^{\rho\sigma}\Phi_{,\rho}\Phi_{,\sigma}\right)g_{\mu\nu}-V\left(\Phi\right)g_{\mu\nu}, \tag{3.2}$$

dont la contribution minimale provient de l'état où il n'y a aucune contribution de l'énergie cinétique ou d'un gradient, soit $\Phi_{,\nu}=0$, ce qui implique :

$$T_{\mu\nu}=-V\left(\Phi_{0}\right)g_{\mu\nu}, \tag{3.3}$$

où Φ_0 désigne la valeur de $\Phi\left(x^{\mu}\right)$ au minimum du potentiel V. La contribution $V\left(\Phi_0\right)$ est appelée l'énergie du vide. Nous observons dans l'éq.(3.3) l'équivalence mathématique entre la contribution $V\left(\Phi_0\right)$ du minimum du potentiel du champ Φ et la Constante Cosmologique, cf. éq.(2.57). Ceci est aussi compréhensible par le raisonnement que la forme du tenseur énergie-impulsion du vide doit être invariante sous des transformations de Lorentz locales. La forme éq.(3.3) est la seule qui assure cette invariance (cf. Rindler 2001). Le problème crucial de cette description, très élégante en tant que telle et attirante du point de vue de l'unification des théories, repose dans le calcul quantitatif de la contribution. Pour chaque mode d'un champ quantique, l'énergie du point zéro est donnée par $hck/2$, où $k:=\nu/c$ désigne le nombre d'onde, ce qui donnera une densité de masse [3] du vide quantique de :

$$\rho_{\text{vide}}=\frac{1}{4\pi^{2}c}\sum_{\text{champs } i}n_{i}\int_{0}^{k_{\text{c}}}\sqrt{\left(hk\right)^{2}+\left(m_{i}\right)^{2}}k^{2}\mathrm{d}k, \tag{3.4}$$

3. Pour des raisons de consistance avec la notation introduite dans le chapitre 2, nous discutons ici la densité de *masse* du vide qui est évidemment équivalente à la densité d'énergie du vide d'habitude discutée dans la littérature.

où l'on somme sur tous les champs quantiques de degré de liberté n_i, et où m_i est la masse du champ i.[4] La borne supérieure d'intégration, k_c, doit être inférieure à l'infini pour éviter la divergence de l'intégrale. Regardons la seule contribution d'un champ scalaire bosonique de masse zéro, Φ, et obtenons alors :

$$\rho_\Phi = \frac{h{k_c}^4}{16\pi^2 c}. \tag{3.5}$$

Nous renvoyons aux articles de revue de Peebles & Ratra (2003) et de Frieman et al. (2008) pour une clarification des simplifications que nous avons implicitement invoquées ici, et pour des références supplémentaires. Le choix de la borne d'intégration, k_c, n'est malheureusement pas imposé par des raisonnements mathématiques ou physiques rigoureux. On pourrait imposer que la densité du vide ne doit pas dépasser la densité critique, ρ_c^0, de l'éq.(2.53), et aurait par conséquent $k_c < \sqrt[4]{6\pi c {H_0}^2/(hG)} \simeq 3 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^{-1}$, soit une longueur d'onde $\lambda \sim 35\mu\mathrm{m}$ correspondant à d'énergies $\simeq 0.04\,\mathrm{eV}$. Ce n'est guère l'échelle où l'on s'attendrait à une physique inconnue qui imposerait le cut-off de l'intégrale éq.(3.5). Si, par contre, on met le cut-off là où l'on s'attendrait à l'échec de la théorie quantique des champs et par ceci à la fin de la validité de l'éq.(3.5), soit à l'échelle de Planck $k_c = \sqrt{c^3/(hG)} \simeq 2,5 \cdot 10^{34}\,\mathrm{m}^{-1}$ (équivalent de $E_{\mathrm{Pl}} \simeq 3 \cdot 10^{19}\,\mathrm{GeV}$), on obtient :

$$\rho_\Phi = \frac{c^5}{16\pi^2 hG^2} \simeq 5 \cdot 10^{119} \rho_{\mathrm{crit}}^0 \simeq 7 \cdot 10^{119} \rho_\Lambda, \tag{3.6}$$

où nous comparons aussi la valeur de ρ_Φ à la valeur mesurée de la densité ρ_Λ, cf. éq.(2.58) et section 2.4. Le facteur 10^{120} constitue probablement la plus mauvaise estimation théorique d'une valeur mesurée dans l'histoire de la science. Comme nous l'avons noté au début de ce paragraphe, ce problème de prédiction irraisonnable de la contribution du vide au contenu masse-énergie de l'univers est connu depuis longtemps, Peebles & Ratra (2003) en donnent un résumé. Il reste à trouver un mécanisme physique nouveau permettant d'ajuster cette valeur soit à zéro, ce qui a longtemps été cru, soit à la petite valeur mesurée aujourd'hui. On appelle ce problème le problème de la Constante Cosmologique, et on parle aussi du problème de 'fine tuning' quant à la valeur actuelle de Λ (Weinberg 1989).

3.3 Modèles de Quintessence

Les densités de masse-énergie de la Constante Cosmologique et du vide quantique sont constantes par rapport au temps et à l'espace. Cependant, des modèles introduisant un champ scalaire variant avec le temps ont été proposés afin d'éviter le problème de coïncidence. Pour ceci, il faut effectivement postuler un nouveau champ scalaire, Q, appelé la *Quintessence*[5]. Les auteurs fondateurs de cette approche sont notamment Wetterich (1988), Ratra & Peebles (1988), et Zlatev et al. (1999); Steinhardt et al. (1999).

4. On a notamment $\mathrm{sgn}\,(n) = +\,(-)$ pour les champs bosoniques (fermioniques), cf. Frieman et al. (2008).

5. En référence au cinquième élément d'Aristote dont est fait le ciel étérnel, cf. page 7.

On suppose un champ scalaire homogène dans l'espace tridimensionnel, mais variant avec le temps cosmologique, $Q(\tau)$, dont l'action s'écrit :

$$\mathcal{S} = \int \mathrm{d}^4x\sqrt{-g}\left[\frac{1}{2\kappa c^2}\dot{Q}^2 - V(Q)\right], \tag{3.7}$$

où $V(Q)$ désigne le potentiel du champ, et $\frac{1}{2\kappa c^2}\dot{Q}^2$ son énergie cinétique. On en déduit l'équation dynamique du champ Q :

$$\ddot{Q} + 3H\dot{Q} + \kappa c^2\frac{\partial V}{\partial Q} = 0, \tag{3.8}$$

où H est la fonction de Hubble. Les entrées du tenseur énergie-impulsion de ce champ scalaire peuvent être données comme étant :

$$\overset{Q}{T}_{00} =: \rho_{\mathrm{Q}}c^2 = \frac{\dot{Q}^2}{2\kappa c^2} + V(Q), \tag{3.9a}$$

et

$$\overset{Q}{T}_{11} = \overset{Q}{T}_{22} = \overset{Q}{T}_{33} =: p_Q = \frac{\dot{Q}^2}{2\kappa c^2} - V(Q). \tag{3.9b}$$

En termes de l'équation d'état, cf. éq.(2.45), nous avons donc :

$$w_Q = \frac{\rho_Q c^2}{p_Q} = \frac{\frac{\dot{Q}^2}{2\kappa c^2} + V(Q)}{\frac{\dot{Q}^2}{2\kappa c^2} - V(Q)}. \tag{3.10}$$

On reproduit, pour $\dot{Q} = 0$, le cas de l'éq.(3.5), soit $w_Q = -1 = w_\Lambda$. Ceci est équivalent à dire qu'un champ scalaire Q reposant au minimum de son potentiel correspond à une Constante Cosmologique, cas que l'on discutait dans la section précédente. On aura aussi $w_Q \approx -1$ dans tous les cas où le potentiel $V(Q)$ domine le terme de l'énergie cinétique, $\dot{Q}^2/2\kappa c^2$. Dans ces cas, on a $\rho_Q \sim V(Q)$. Le potentiel V n'étant donné par aucun raisonnement a priori et étant alors une fonction libre, le déficit principal des modèles de Quintessence est qu'il s'agit effectivement de modèles à nombre infini de paramètres.

On trouve dans la littérature un grand nombre de potentiels, $V(Q)$, à un, deux, ou plusieurs paramètres, qui souvent sont des exponentielles ou des fonctions hyperboliques de Q. (On pourra consulter Sahni (2004) pour une liste de différents potentiels, et pour des références supplémentaires.)

Il a été proposé par Caldwell & Linder (2005) de discuter la dynamique des modèles d'énergie noire dans l'espace de phase de l'équation d'état tendu par w_{x} et w'_{x}, où :

$$w'_{\mathrm{x}} := \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{x}}}{\mathrm{d}\ln a} = \frac{\dot{w}_{\mathrm{x}}}{H}. \tag{3.11}$$

Pour l'éq.(3.10) nous obtenons suivant Huterer & Turner (1999) :

$$\frac{w'_{\mathrm{Q}}}{w_{\mathrm{Q}}} = 2\frac{V'(Q)}{V(Q) - \left(\frac{1}{2\kappa c^2}\dot{Q}^2\right)/V(Q)} - 12\frac{V(Q)}{\frac{1}{2\kappa c^2}\dot{Q}^2 - V(Q)^2/\left(\frac{1}{2\kappa}\dot{Q}^2\right)}, \tag{3.12}$$

où $V'(Q) := \mathrm{d}V(Q)/\mathrm{d}\ln a$. Avec le choix du potentiel V et la solution correspondante de l'éq.(3.8) on obtient alors les trajectoires des modèles de Quintessence dans l'espace de phase de l'équation d'état. Nous allons décrire à présent les principales classes de modèles.

3.3.1 Les modèles 'tracker'

Parmi le grand nombre de modèles de Quintessence on distingue notamment des modèles qui montrent un comportement dit 'tracker', introduit par Zlatev et al. (1999) pour éviter le problème de coïncidence. La particularité des champs 'tracker' est que les solutions de leurs équations de mouvement convergent vers une évolution cosmique particulière de $\rho_{\mathrm{Q}}(z)$, pour un très grand nombre de conditions intiales différentes. Zlatev et al. (1999) et Steinhardt et al. (1999) montrent que ρ_{Q}^{i}, la valeur initiale de ρ_{Q} à la sortie de la phase de l'inflation, peut varier de presque cent ordres de grandeur et fournir la même évolution globale de $\rho_{\mathrm{Q}}(z)$. L'intervalle des valeurs initiales possibles est indiqué par une bande blanche et grise le long de l'axe des ordonnées de la Figure 3.1. Notamment, la bande blanche correspond aux modèles 'undershoot' dont la ligne pointillée représente un exemple, et la bande grise correspond aux modèles 'overshoot', dont la ligne noire représente un exemple. Ces deux évolutions diffèrent notamment à très haut redshift, $z > z_{\mathrm{CMB}}$, qui n'est pas de grand intérêt pour notre travail. Sur la Figure 3.1, les auteurs ont aussi indiqué la condition initiale très spéciale de la Constante Cosmologique (point noir).[6] Steinhardt et al. (1999) trouvent notamment que tous les modèles de Quintessence du potentiel $V(\mathrm{Q})$ convergent vers une même évolution de ρ_Q si :

1. $\Gamma > 1$ et $|\frac{\mathrm{d}(\Gamma-1)}{\mathrm{d}t}| \ll H|\Gamma-1|$ (Γ presque constant), où $\Gamma := \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Q^2}V\right)/\left(\frac{\partial V}{\partial Q}\right)^2$, la solution est une solution 'tracker' avec $w_{\mathrm{Q}} < w_{\mathrm{bg}}$.
2. $\dfrac{1-(1-w_{\mathrm{bg}})}{6+2w_{\mathrm{bg}}} < \Gamma < 1$ $|\frac{\mathrm{d}(\Gamma-1)}{\mathrm{d}t}| \ll H|\Gamma-1|$, la solution est une solution tracker avec $w_{\mathrm{bg}} < w_{\mathrm{Q}} < \frac{1}{2}(1+w_{\mathrm{bg}})$.

Si $\dfrac{1-(1-w_{\mathrm{bg}})}{6+2w_{\mathrm{bg}}} > \Gamma$, il n'existe pas de solution tracker.

Ici, w_{bg} est l'équation du fond cosmologique, soit $w_{\mathrm{bg}} \sim 1/3$ dans le domaine de la domination de la radiation, et $w_{\mathrm{bg}} \sim 0$ dans le domaine de la domination de la matière, cf. Figures 2.2 et 3.1. La condition 1. est équivalente à imposer que $|(\partial V/\partial Q)/V|$ décroisse quand V décroit. Cette condition comprend une très grande classe de potentiels, y compris des potentiels $V \propto 1/Q^{\alpha}$ où $\alpha =$ const. > 0 (potentiel de Ratra & Peebles 1988), cf. Steinhardt et al. (1999). Les solutions 'tracker' tirent leurs noms du fait suivant : La condition que Γ soit presque constant implique, en vertu de la définition de Γ, que l'équation d'état du champ Q, éq.(3.10), prenne la forme :

$$w_{\mathrm{Q}} \approx \frac{w_{\mathrm{bg}} - 2(\Gamma-1)}{1+2(\Gamma-1)}, \tag{3.13}$$

c'est à dire que l'équation d'état de la Quintessence est étroitement liée à l'évolution de l'équation du fond, w_{bg}. Ce fait est représenté sur la Figure 3.1, où on voit représentées les évolutions des dénsités du fond, la solution de convergence, et un modèle 'tracker' particulier.

6. Notons que sur la Figure 3.1 la densité est donnée en GeV^4 au lieu des $\mathrm{kg/m}^3$ que nous utilisons dans le reste du manuscrit. Cela vient de l'éq.(3.5), où k_{c} est souvent dé-

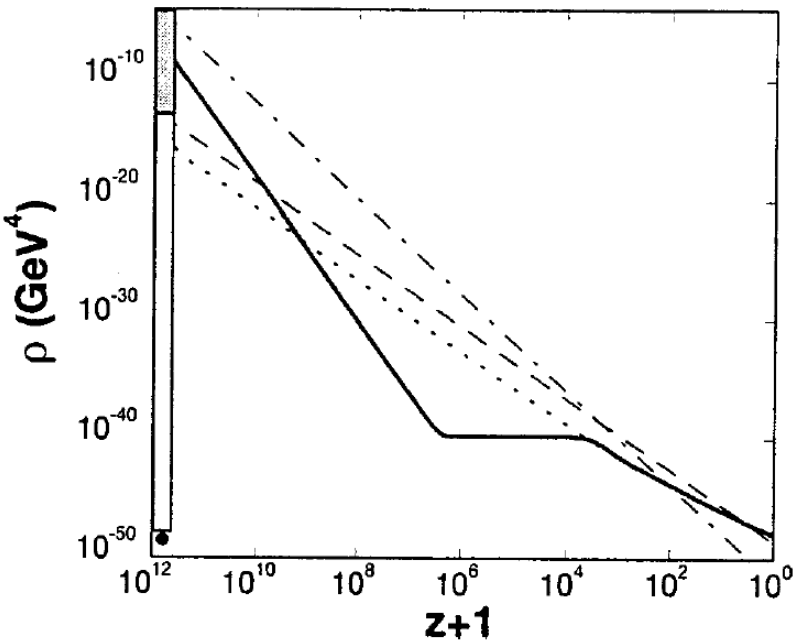


FIGURE 3.1: Figure 1 de la publication de Steinhardt et al. (1999). Nous avons en ligne hachurée et en ligne hachurée-pointillée les évolution des densités du fond, ρ_{M} et ρ_{R}, respectivement. La ligne pointillée représente l'évolution des modèles 'tracker', la ligne noire un exemple d'une solution 'overshoot' où la valeur initiale de ρ_{Q}^{i} est supérieure à la valeur de la solution tracker. Le diagramme ne va pas jusqu'aux redshifts de l'inflation.

L'époque où l'univers passait de la domination de la radiation à la domination de la matière, peut être regardée comme un genre de transition de phase dans l'équation d'état du fond. Selon l'éq.(3.13) une telle transition de phase devrait entraîner une transition de phase dans l'équation d'état de la Quintessence aussi. Corasaniti & Copeland (2003) traitent cette question et montrent qu'en effet la fonction $w_{\mathrm{Q}}(z)$ suit un comportement de transition de phase, plus où moins prononcé selon la forme exacte du potentiel $V(Q)$. Nous reproduisons sur la Figure 3.2 leur illustration de ce comportement, et reviendrons aux implications de ce phénomène pour l'extraction des paramètres cosmologiques dans la section 3.7.2 et le chapitre 5.

3.3.2 Les modèles 'thawing' et 'freezing'

Caldwell & Linder (2005) ont montré que l'on peut trouver une classification des modèles de Quintessence selon des comportements de $w_{\mathrm{Q}}(z)$ qualitativement différents. La classification est effectuée par rapport au signe de l'accélération du champ Q. Il est clair de l'éq.(3.8) que cette accélération est controlée par la pente du potentiel, $\partial V/\partial Q$, et par la valeur de l'expansion de l'univers, H.

---

fini comme l'énergie du mode, $k_{\mathrm{c}} := h\nu$, et on a alors la correspondance $\rho/[\mathrm{GeV}^4] = (\mathrm{J}^4/[\mathrm{GeV}^4])(16\pi^2 h^3 c^5)\,\rho/[\mathrm{kg/m}^3] = 1.69 \cdot 10^{-16}\,\rho/[\mathrm{kg/m}^3]$.

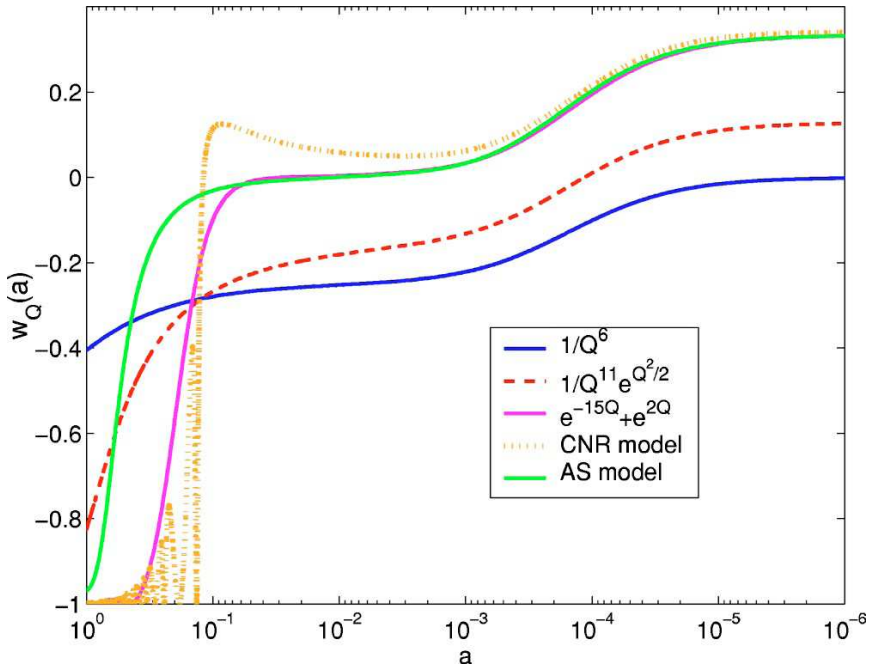


FIGURE 3.2: Figure 1 de Corasaniti & Copeland (2003), montrant l'évolution de w_Q, ici en fonction du facteur d'échelle, a, de quelques modèles tracker. Les fonctions encadrées donnent la forme des potentiels $V(Q)$. Les évolutions des différents modèles exhibent une ou plusieurs transitions de phase plus ou moins prononcées.

Thawing : Le premier cas possible est que l'accélération de Q est initialement bridée par l'expansion de l'univers, ou par la fonction de Hubble, et ne devient non-négligeable qu'à un certain moment. On a alors $(w_Q, w'_Q) \sim (-1, 0)$ dans une phase initiale, et seulement plus récemment quand $\dot{w}/H > 0$, w_Q deviendra moins négatif. Ce comportement est appelé 'thawing'.

Freezing : Le cas inverse, où initialement $w_Q > -1$ et $w'_Q < 0$, et où l'évolution converge vers $(w_Q, w'_Q) = (-1, 0)$, sont essentiellemt les modèles tracker, cf. la Figure 3.3 ci-dessous. Ce comportement est aussi appelé 'freezing'.

Caldwell & Linder (2005) argumentent que les modèles 'thawing' ['freezing'] seront, pour $w_Q \lesssim -0.8$, limités dans l'espace de phase à des zones $(1 + w_Q) < w'_Q < 3(1 + w_Q)$ $\left[3w_Q(1 + w_Q) < w'_Q < 0.2w_Q(1 + w_Q)\right]$, et obtiennent la Figure 3.3. Il est intéressant de noter ici que ces modèles de Quintessence occupent un volume dans l'espace de phase (w_x, w'_x) disjoint des fluides barotropiques, cf. éq.(2.52). Mesurer w_x et w'_x avec des précisions suffisantes, $\sigma_{w'_x} \simeq (1 + w_x)$, nous donnerait donc un moyen de distinguer l'origine de l'accélération cosmique non seulement parmi les nombreux modèles de Quintessence, mais aussi entre les modèles de Quintessence, les modèles de fluides barotropiques et une Constante Cosmologique.

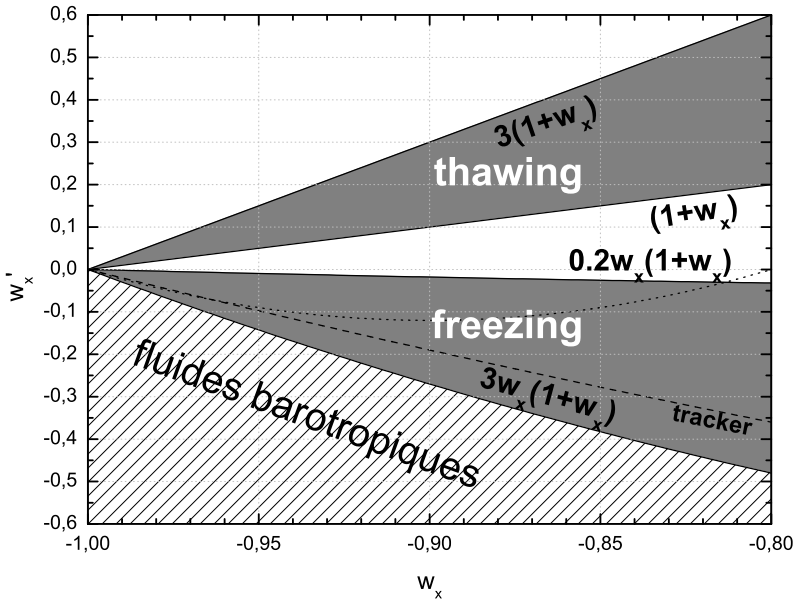


FIGURE 3.3: Reprise de la Figure 1 de Caldwell & Linder (2005). Elle montre les volumes dans l'espace de phase $(w_{\rm x}, w'_{\rm x})$ occupés par les modèles 'thawing' et 'freezing'. La ligne hachurée représente la borne inférieure pour les modèles tracker qu'obtient Scherrer (2006). La ligne pointillée illustre un modèle du type 'step', paramétré avec (Γ, w_i, w_f)=$(1.2, -0.8, -1)$, voir section 3.7.2.

3.4 Modèles anisotropes et inhomogènes

3.4.1 Modèle de Lemaître, Tolman, et Bondi

Lemaître (1933) et Tolman (1934) trouvaient la solution sphérique suivante aux éqs.(2.1) : [7]

$$\mathrm{d}s^2 = -c^2\mathrm{d}\tau^2 + A\left(r,\tau\right)^2\mathrm{d}r^2 + R\left(r,\tau\right)^2\mathrm{d}\Omega^2, \tag{3.14}$$

pour une distribution sphérique de matière non-relativiste :

$$T_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(\rho_{\rm M}\left(r,\tau\right), 0, 0, 0\right). \tag{3.15}$$

Ici, A et R sont des fonctions libres de la distance comobile et du temps cosmologique. On a donc introduit de nouveaux degrés de liberté par rapport à la métrique FRW, l'éq.(2.8), et on doit par conséquent imposer des conditions de bord supplémentaires afin de résoudre les équations d'Einstein. La métrique éq.(3.14) a été étudiée exhaustivement par Bondi (1947), d'où le fait qu'on l'appelle souvent la métrique de Lemaître, Tolman, et Bondi (LTB). La métrique LTB décrit des solutions qui sont isotropes en un seul point. A savoir, elle décrit des boules sphériques qui sont sous-denses par rapport au reste de l'univers, où

7. Il existe cependant d'autre solutions cosmologiques inhomogènes aux éqs.(2.1). Outre la compilation complète de toutes solutions de Stephani et al. (2003), on trouve une discussion des solutions inhomogènes chez Krasiński (1997).

la métrique tend vers un univers FRW : TLB $\rightarrow$ FLW pour $r \rightarrow \infty$. En référence à cette classe de modèles il a été proposé que, finalement, nous vivons quand même dans un endroit favorisé de l'univers, contredisant le Principe de Copernic, à savoir dans une boule sous-dense. Garcia-Bellido & Haugbølle (2008) dérivent pour un cas général la valeur effective de l'équation d'état, éq.(3.26), qui correspondrait à la courbure négative locale dans cette boule locale. Notons, que dans ce cas-ci la fonction de Hubble et le paramètre de densité de matière sont des fonctions du rayon r de la métrique éq.(3.14) : $H_0 = H_0(r)$ et $\Omega_{\mathrm{M}}^0 = \Omega_{\mathrm{M}}^0(r)$. Pour l'univers local, $z \approx 0$, ils obtiennent :

$$w_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{T,L}}(z) = \begin{cases} -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{c\left(\frac{\partial}{\partial r}H_0\right)\big|_{r=0}}{\left(1-\Omega_{\mathrm{M}}^0(0)\right)H_0(0)}, & \text{pour } H = H_{\mathrm{T}} \\ -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{c\left(\frac{\partial}{\partial r}H_0\right)\big|_{r=0}}{\left(1-\Omega_{\mathrm{M}}^0(0)\right)H_0(0)}, & \text{pour } H = H_{\mathrm{L}} \end{cases} \tag{3.16}$$

où $H_{\mathrm{T,L}}$ représente, respectivement, le taux d'expansion transversale et longitudinale. On obtient, à bas redshift, une accélération apparente du taux de l'expansion, $w_{\mathrm{eff}} < -1/3$, si le gradient de $H_0(r)$ est négatif. En testant ce type de modèle avec des données actuelles (paramètres réduits du CMB et des BAO plus les SNe de Davis et al. (2007, ESSENCE)), Garcia-Bellido & Haugbølle (2008) concluent qu'à présent les modèles TLB ne peuvent pas être exclus. Alors qu'en accord avec ce résultat Alexander et al. (2009) reportent d'avoir trouvé un bon fit du spectre du CMB avec un modèle TLB spécifique, Frieman (2008) rapportait l'exclusion de ce modèle par les données SNe du SDSS. La situation est donc confuse.

3.4.2 Problème de moyenne, et 'backreaction'

Comme nous l'avons déjà noté suite à la définition du Principe Cosmologique (page 17), afin d'obtenir l'homogénéité et l'isotropie de l'univers il faut définir les quantités physiques comme des moyennes effectuées sur de grands volumes. Le choix de cette échelle caractéristique fait débat, et ceci depuis que les premiers modèles cosmologiques s'en servaient. Evidemment l'univers n'est pas parfaitement isotrope est homogène, est sans inhomogénéités aucune structure telle que les amas et les galaxies n'auraient pu se former. Cependant, l'approche habituelle de résoudre les équations d'Einstein, éq.(2.1), en supposant la validité du Principe Cosmologique, puis de traiter les inhomogénéités comme des perturbations locales (cf. page 16) n'est sans doute pas correcte. Ellis (1984) a montré que dû à la non-linéarité des équations, les processus de dérivation par rapport au temps et le calcul des moyennes spatiales ne commutent pas. En effet, si on définit l'opérateur de moyenne d'un champ scalaire via l'intégrale Riemannienne sur le volume V_4 de l'espace-temps :

$$\langle \Phi(x^\mu) \rangle := \frac{1}{V_4}\int \sqrt{-g}\,\Phi(x^\mu)\,\mathrm{d}^3x, \tag{3.17}$$

on obtient pour le commutateur du champ de densité de matière inhomogène sur une géométrie inhomogène :

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle\rho\rangle - \left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\rho\right\rangle = -\frac{1}{V_4}\frac{\partial}{\partial\tau}\left\langle\rho\ln\frac{\rho}{\langle\rho\rangle}\right\rangle \neq 0, \tag{3.18}$$

où la *source* de non-commutativité est connue comme l''information relative d'entropie' (cf. Ellis & Buchert 2005). Les travaux par rapport aux développements de ces modèles inhomogènes sont en plein progrès, mais ne semblent pas encore avoir évolués à l'état où l'on peut s'attaquer à les tester. Nous renvoyons à l'article de Buchert (2008) pour une discussion du sujet.
Aussi, l'effet de la rétroaction ('backreaction') des structures dans l'univers sur la métrique du fond est discutée depuis Brill & Hartle (1964) et Isaacson (1968), qui traitaient des effets des ondes gravitationnelles sur la métrique du fond. Cette approche a été généralisée pour décrire la rétroaction des perturbations cosmologiques (des grandes échelles de l'univers) sur la métrique du fond moyennée, et ses implications pour le taux d'expansion local observé sont discutées dans la littérature, cf. par exemple Geshnizjani & Brandenberger (2002) (et références internes).

3.4.3 Test du Principe Cosmologique

Récemment, Clarkson et al. (2008) ont proposé un test du Principe Cosmologique réalisable avec des données futures. A partir de l'éq.(2.19) nous pouvons trivialement obtenir la relation :

$$\Omega_{\mathrm{k}}^{0} = \frac{\left(H(z)\frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2 - 1}{\left(H_0\chi(z)\right)^2}, \tag{3.19}$$

où Ω_{k}^{0} est le paramètre de courbure. Celui-ci étant une constante on obtient par dérivation la relation :

$$0 = 1 + H(z)^2\left[\chi(z)\frac{\mathrm{d}^2\chi(z)}{\mathrm{d}z^2} - \left(\frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}\right)^2\right] + \left(H(z)\frac{\mathrm{d}H(z)}{\mathrm{d}z}\right)\left(\chi(z)\frac{\mathrm{d}\chi(z)}{\mathrm{d}z}\right), \tag{3.20}$$

entre les fonctions $H(z)$ et $\chi(z)$ déductibles des observations, et ses deux premières dérivées. Outre le Principe Cosmologique, qui assure la validité de la métrique FRW, aucune supposition quelconque n'a été faite dans la dérivée de cette relation, qui devient par conséquent un test puissant de la validité du Principe Cosmologique. Parce que ce test nécessite la connaissance des dérivées en redshift de la fonction de Hubble, H, et de la distance comobile, χ, il n'a pas encore pu être implementé à cause du manque de précision de ces données, cf. notre note 12 en bas de la page 45.

3.5 Modifications de la Relativité Générale

Il a été argumenté dans la littérature que nous n'avons jamais testé la théorie de la Relativité Générale sur des échelles supérieures aux échelles du système

solaire, et que les effets d'une composante type énergie noire pourraient bien avoir comme origine le fait que la Relativité Générale n'est plus valable aux échelles cosmologiques.
Les tests principaux de la Relativité Générale sont effectués à des échelles comparativement petites, à savoir la déflexion de la lumière dans le champ graviationnel du soleil, l'avance au périhélie de Mercure, la mesure de la métrique extérieure de la Terre (Everitt et al. 2009, Gravity Probe B), et la mesure des trajectoires des sondes en orbites terrestres ou interplanétaires. Au-delà des frontières du système solaire, l'amortissement des systèmes binaires dû à l'émmission d'ondes gravitationnelles, notamment du pulsar binaire Hulse-Taylor, constitue un test de la Relativité Générale, cf. Weisberg & Taylor (2005). Les tests du principe d'équivalence peuvent être considérés comme des tests de la Relativité Générale. Nous renvoyons à l'article de revue de Will (2006) pour un vue d'ensemble de ces tests. Au-delà de ces échelles aucun véritable test de la Relativité Générale n'a pu être effectué. Nous notons ici l'anomalie Pioneer, correspondant au fait que les trajectoires mesurées des sondes spatiales Pioneer 10 et 11 explorant les limites du système solaire diffèrent des trajectoires attendues. Il n'existe pas encore d'explication pour cette anomalie, cf. Anderson et al. (1998) et aussi Dittus & Lämmerzahl (2006) et références citées.
Aux échelles galactiques, afin de décrire les courbes de rotation des galaxies spirales dans le modèle standard cosmologique, on a besoin de la matière sombre, une composante de matière supplémentaire invisible. Une alternative à l'introduction de la matière sombre est une modification de la dynamique newtionenne, MOND, proposée par Milgrom (1983), et généralisée pour le cas de la Relativité Générale par Bekenstein (2004). Toute application de la Relativité Générale au-delà de ces échelles est par conséquent une extrapolation, fait dont nombre d'auteurs tirent la conclusion que les effets d'une composante type énergie noire proviendraient d'une modification des lois de la gravitation aux échelles cosmologiques. Cependant, les prédictions de la Relativité Générale sont en très bon accord avec la baryogenèse et la théorie de formation des structures à partir du spectre initial (cf. par exemple Frieman et al. 2008). On est donc mené à exiger des lois modifiées de la gravitation qui se réduisent à la Relativité Générale :

1. aux petites échelles (échelles du système solaire ou intra-galactique), et
2. dans l'univers primordial.

Une approche souvent suivie est une modification ad hoc de l'action d'Einstein-Hilbert :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{\kappa} \int \mathrm{d}^4 x \sqrt{-g} f(R) \,, \tag{3.21}$$

où $f(R)$ est une fonction du scalaire de Ricci à choisir telle que les deux conditions ci-dessus soient satisfaites. Dans le cas de la Relativité Générale on a $f(R) = R/2$. Un grand nombre de fonctions $f(R)$ est discuté dans la littérature (cf. Sotiriou & Faraoni 2008, pour une revue). Notamment, en comparant l'éq.(3.21) avec l'éq.(3.1) on s'aperçoit que cette approche va, pour le bon choix de la fonction $f(R)$, être analytiquement équivalente à la supposition d'un champ scalaire supplémentaire.

Une autre approche de modification de la Relativité Générale consiste à supposer l'espace-temps à quatre dimensions encastré dans une variété Minkowskienne à cinq dimensions. Cette idée a été formulée par Kaluza (1921). Ce que l'on appelle aujourd'hui le mécanisme de Kaluza-Klein est l'effet d'un champ scalaire de dimension cinq, $\Phi\left(x^{\mu}, x^{4}\right)$, où x^4 désigne la dimension supplémentaire, qui obéit à l'équation d'onde à cinq dimensions :

$$\Box_{5\,\mathrm{dim.}}\Phi \sim T, \tag{3.22}$$

avec la source T. Dans l'espace de Fourier, la solution de cette équation peut être écrite sous la forme :

$$\Phi\left(x^{\mu}, x^{4}\right) = \sum_{k} \Phi_k \mathrm{e}^{ik\frac{x^4}{r_\mathrm{c}}}, \tag{3.23}$$

où r_c est une longuer typique de la dimension supplémentaire. Des modèles avec dimensions supplémentaires proviennent aussi des théories des cordes. Par exemple le modèle de Dvali et al. (2000) suggère une modification de l'équation de Friedmann, éq.(2.39c), de la forme :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\dot{a}c}{ar_\mathrm{c}}, \tag{3.24}$$

cf. Frieman et al. (2008). En comparant cette équation à l'éq.(2.39c) nous voyons clairement qu'une valeur de r_c de :

$$r_\mathrm{c} = \frac{3H_0}{\Lambda c}, \tag{3.25}$$

donnerait une accélération de l'expansion comme mesurée aujourd'hui. Frieman et al. (2008) remarquent, cependant, que l'évolution du terme $(\dot{a}c)\,/\,(ar_\mathrm{c})$ correspondrait à celle d'une composante type énergie noire dont l'équation d'état évoluerait d'une valeur $w_\mathrm{x} = -1/2$ dans le passé vers une valeur future $w_\mathrm{x} = -1$. De tels modèles seraient par conséquent dégénérés avec certaines solutions 'freezing' des modèles de Quintessence, exposées ci-dessus, au niveau de leurs équation d'état. Mais le modèle de Dvali et al. (2000) s'accompagne aussi d'une modification du facteur de croissance contrairement aux modèles de Quintessence les plus simples. La mesure du taux de croissance des structures est donc un observable supplémentaire à la mesure de l'équation d'état pour distinguer ces divers modèles, mais nous n'avons pas abordé ce point dans cette thèse.
En général, si on interprète des modèles de gravitation modifiée dans le cadre des équations de Friedmann, on peut exprimer les effets de ces modèles sur l'expansion de l'univers par une équation d'état effective :

$$w_\mathrm{eff}\left(z\right) = -1 + \frac{1}{3}\frac{\mathrm{d}\ln\left[E^2\left(z\right) - \Omega_\mathrm{M}^0\left(1+z\right)^3\right]}{\mathrm{d}\ln\left[1+z\right]}, \tag{3.26}$$

où on met la fonction de Hubble $E^2\left(z\right)$ en rapport à celle d'un univers standard (plat) à densité de matière Ω_M^0.
Enfin, nous notons aussi que les premiers résultats de la gravité quantique à boucles (Rovelli & Smolin 1988) semblent indiquer qu'une accélération du taux d'expansion de l'univers pourrait génériquement provenir de la structure quantique de la géométrie, cf. Bojowald (2002).

3.6 Effets astrophysiques

L'effet que les SNe distantes apparaissent moins lumineuses que prédit par un modèle standard sans énergie noire, pourrait être causé par des effets astrophysiques lors la propagation de la lumière dans le milieu interstellaire. Pour modéliser cet effet, de la poussière extra-galactique a été proposée par Aguirre (1999) et Rana (1980). Riess et al. (2004) traitent ces modèles et trouvent que l'on ne peut pas les exclure à partir des données actuelles des SNe. Les différences entre les magnitudes apparentes prédites par ces modèles (pour le bon choix de la densité de la poussière extra-galactique) avec celles prédites par le modèle ΛCDM sont trop petites. Il a aussi été proposé d'expliquer le problème des magnitudes apparentes des SNe distantes avec une évolution en redshift des magnitudes absolue des SNe. Nous traiterons de cette question en détails dans le chapitre 6.

3.7 Paramétrage de l'énergie noire

Au vu du grand nombre de modèles proposés, il ne semble pas envisageable de sonder les données modèle par modèle. Beaucoup d'auteurs ont adopté un paramétrage de l'équation d'état de la composante inconnue, w_{x}, afin d'exprimer notre ignorance à propos de la nature de l'énergie noire, et de distinguer divers modèles (Cf. par exemple Davis et al. 2007; Jha et al. 2007; Kowalski et al. 2008; Komatsu et al. 2009). D'autres approches pour paramétrer l'énergie noire ont été poursuivies. Au delà d'une utilisation de formes différentes de paramétrages de l'équation d'état (par exemple Gerke & Efstathiou 2002; Maor et al. 2002; Wetterich 2004; Jassal et al. 2005; Crittenden et al. 2007), des paramétrages de la densité de l'énergie noire (Wang & Mukherjee 2004; Wang & Tegmark 2004; Wang & Freese 2006) ou du paramètre de Hubble (Sahni et al. 2003; Alam et al. 2004) ont été considérés. Des tests non-paramétriques ont aussi été étudiés par Huterer & Starkman (2003); Daly & Djorgovski (2004); Shafieloo et al. (2006), cf. par exemple Shafieloo et al. (2006) pour une discussion générale.

3.7.1 Paramétrage de Chevallier, Polarski, et Linder

Chevallier & Polarski (2001) et Linder (2003) ont proposé le paramétrage de l'équation d'état de l'énergie noire suivant :

$$w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{CPL}}(z) =: w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \tag{3.27}$$

où w_0 et w_a sont des nombres réels. Nous avons déjà rencontré l'éq.(3.27) ci-dessus, page 51, et nous l'appellerons par la suite 'CPL'. Ce paramétrage a notamment été utilisé par le 'Dark Energy Task Force' (DETF) (Albrecht et al. 2006) comme modèle phénoménologique de référence, cf. aussi Virey & Ealet (2007).
Malgré sa simplicité le paramétrage CPL exhibe des propriétés intéressantes, cf. Linder (2008). En particulier, seuls deux paramètres interviennent, ce qui est important car Linder & Huterer (2005) et Upadhye et al. (2005) ont montré

qu'au maximum deux paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire pourront être déterminés avec une précision utile dans une analyse combinée de données futures (horizon 2015-2020). Les deux paramètres w_0 et w_a ont une signification physique directe : w_0 est la valeur de w_x aujourd'hui, et w_a décrit sa possible évolution avec le temps cosmologique. Car nous avons :

$$\left(w_\mathrm{x}^\mathrm{CPL}\right)' = -\left(w_0 + w_a\right) + w_\mathrm{x}, \tag{3.28}$$

où w_x' a été défini dans l'éq.(3.11). On peut alors interpréter w_a comme, par exemple :

$$w_a = -2w_\mathrm{x}'\big|_{z=1}. \tag{3.29}$$

On note aussi que l'éq.(3.27) reste bien définie à très haut redshift :

$$\lim_{z\to\infty} w_\mathrm{x}^\mathrm{CPL}\left(z\right) = w_0 + w_a =: w_i^\mathrm{CPL}, \tag{3.30}$$

où l'on a défini la valeur initiale de l'équation d'état, w_i^CPL. Evidemment, un seul paramétrage comme CPL ne peut pas décrire tous les modèles d'énergie noire avec la même qualité (cf. aussi Wang & Mukherjee 2004; Wang & Tegmark 2004; Wang & Freese 2006; Linder 2008). Ceci est apparent avec l'éq.(3.28) : CPL ne décrit que des modèles aux trajectoires linéaires dans l'espace de phase $(w_\mathrm{x}, w_\mathrm{x}')$, cf. Figure 3.3, alors que les modèles pour l'énergie noire peuvent en général avoir des trajectoires bien plus compliquées (cf. Scherrer 2006). Nous reviendrons, dans le chapitre 5, sur cette question d'effets de dépendance de paramétrage dans l'extraction des paramètres cosmologiques.

Avec le paramétrage CPL nous obtenons de l'éq.(2.46) :

$$\rho_\mathrm{x}\left(z\right) = \rho_\mathrm{x}^0\left(1+z\right)^{3(1+w_0+w_a)}\,\mathrm{e}^{-3w_a z/(1+z)}, \tag{3.31}$$

et la fonction de Hubble normalisée est alors donnée par :

$$\begin{aligned} E^2\left(z;p_i\right) = {} & \Omega_\mathrm{k}^0\left(1+z\right)^2 + \Omega_\mathrm{M}^0\left(1+z\right)^3 + \Omega_\mathrm{R}^0\left(1+z\right)^4 \\ & + \Omega_\mathrm{x}^0\left(1+z\right)^{3(1+w_0+w_a)}\,\mathrm{e}^{-3w_a z/(1+z)}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

où les paramètres cosmologiques sont $\{p_i\} = \left\{\Omega_\mathrm{M}^0, \Omega_\mathrm{R}^0, \Omega_\mathrm{x}^0, w_0, w_a\right\}$, et Ω_k^0 est donné par l'éq.(2.60). Nous montrons sur la Figure 3.4 le module de distance en fonction de z pour plusieurs valeurs de w_0 et w_a afin d'illustrer l'effet que ces paramètres auront dans le diagramme de Hubble. Des w_0 inférieurs à -1 ainsi que des w_a positifs rendent les magnitudes apparentes des objets distants plus grandes que ce n'est le cas dans le modèle ΛCDM, signifiant que les objets nous apparaissent *moins* lumineux. Nous représentons aussi le meilleur fit obtenu à partir des données SNe+R+A, cf. section 2.4.

Possibles valeurs de $\mathbf{w_0}$ et $\mathbf{w_a}$

Modèles fantôme : On appelle les modèles d'énergie noire exhibant une valeur de l'équation d'état inférieure à -1, les modèles 'fantômes'. Plusieurs problèmes ce posent pour ces modèles fantômes. En particulier, une équation

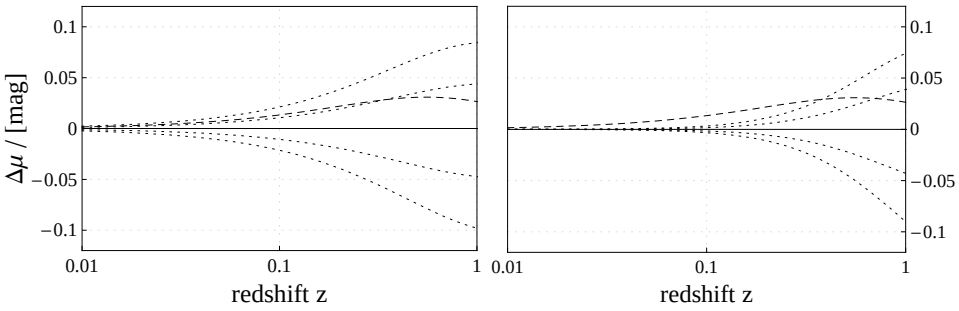


FIGURE 3.4: Module de distance des distances lumineuses de différent modèles (w_0, w_a), représenté par rapport au modèle ΛCDM. Gauche : Pour quatre différentes valeurs de w_0, où $w_a = 0$. Les lignes pointillées correspondent, d'en haut vers le bas, à $w_0 = \{-1.2, -1.1, -0.9, -0.8\}$. Droite : Pour quatre différentes valeurs de w_a, où $w_0 = -1$. Les lignes pointillées correspondent, d'en haut vers le bas, à $w_a = \{-1.0, -0.5, 0.5, 1\}$. La ligne hachurée correspond au meilleur fit CPL des données SNe+$\mathcal{R}$+A, cf. section 2.4.

d'état $w_{\rm x} < -1$ n'est pas en accord avec la condition faible d'énergie en Relativité Générale. On ne peut pas obtenir $w_{\rm x} < -1$ avec un Lagrangien canonique. A titre d'exemple nous voyons dans l'éq.(3.10), que pour un champ scalaire, Φ, il faudrait supposer un Lagrangien non-standard :

$$L_{\text{fantôme}} = -\frac{1}{2\kappa} g^{\mu\nu} \Phi_{,\mu} \Phi_{,\nu} - V(\Phi), \tag{3.33}$$

où on a changé le signe du terme cinétique. Si les données continuent donc à préférer des valeurs de $w_0 < -1$, les implications au niveau de la physique fondamentale seraient étonnantes, cf. Caldwell (2002). Hu (2005a) étudie des modèles dynamiques d'énergie noire dont l'évolution necéssite que l'équation d'état passe par la 'frontière fantôme' ('phantom divide') correspondant à $w_{\rm x} = -1$. Alors que pour des modèles à un seul degré de liberté (par exemple un seul champ scalaire) ce passage par la frontière $w_{\rm x} = -1$ implique l'instabilité de la théorie (notammant, la vitesse du son, $c_{\rm s}$, devient singulière), ajouter des degrés de liberté supplémentaires résout ce problème. Une évolution de l'équation d'état de l'énergie noire passant la frontière fantôme pourrait donc indiquer des degrés de liberté supplémentaires pour l'énergie noire.

Contrainte sur la formation des grandes structures : Pour les modèles de Quintessence, Steinhardt et al. (1999) ont noté que si $w_{\rm Q} > w_{\rm bg}$ au moment du découplage et si $\Omega^0_{\rm Q} \geq 0.5$, l'évolution des densités de l'univers est telle qu'aucune phase de domination de matière n'aurait pu exister. Par conséquent, les grandes structures n'auraient pas pu se former. On doit donc imposer que $w^{\rm CMB}_{\rm Q} < w^{\rm CMB}_{\rm bg}$, ce que l'on peut en terme des paramètres w_0 et w_a écrire sous la forme :

$$(w_0 + w_a) \overset{!}{<} 0, \tag{3.34}$$

pour assurer qu'il existe dans l'histoire d'expansion de l'univers une phase de domination de matière. Nous utiliserons cette contrainte dans le chapitre 6 en

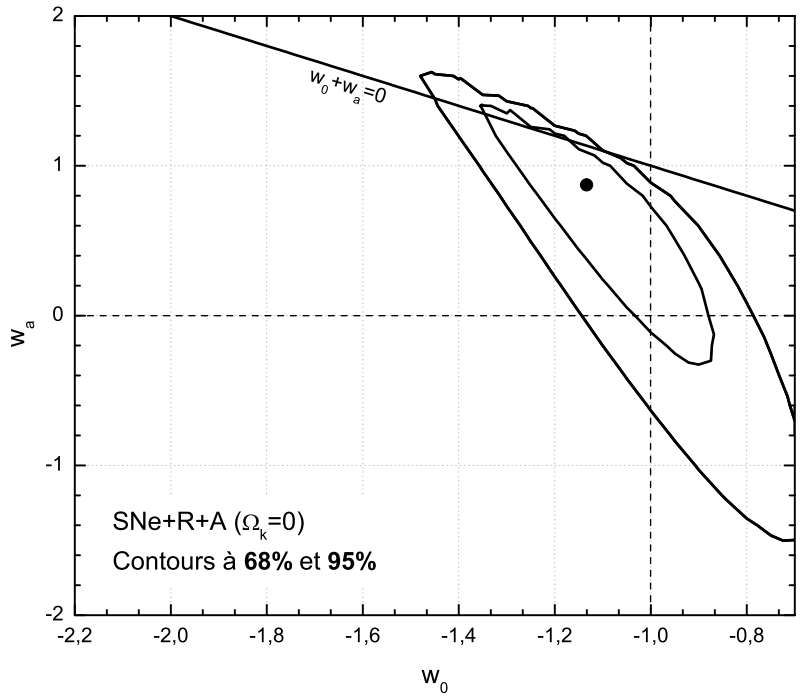


FIGURE 3.5: Contour dans le plan (w_0, w_a) obtenu avec les données SNe+$\mathcal{R}$+A si l'on impose que l'univers soit plat et néglige la contribution de la radiation dans l'analyse. Le contour correspond au meilleur fit, cas ii), du Tableau 2.2, et est aussi reproduite dans le Tableau 6.2 (page 118).

tant que critère physique pour juger la qualité des fits cosmologiques.
Concernant le comportement de l'équation d'état des modèles de Quintessence à très haut redshift, $z \gtrsim z_{\rm CMB}$, plusieurs auteurs étudient des classes de modèles à contribution non-négligeables de la Quintessence à cette époque de l'univers, $\Omega_Q\left(z_{\rm CMB}\right) \lesssim 0.05$ (il s'agit des modèles d''early dark energy' que nous avons déjà discuté, section 2.5), et calculent leur implications pour les anisotropies du CMB (par exemple Doran et al. (2001); Caldwell et al. (2003)) et la formation des structures (par exemple Ferreira & Joyce 1998; Bartelmann et al. 2006). Pour $w_0 \approx -1$, une contribution $\Omega_Q\left(z_{\rm CMB}\right) \sim 0.05$ de la Quintessence à $z = z_{\rm CMB}$ est via le paramétrage CPL en vertu de l'éq.(3.32) décrite par $w_a \approx 0.5$ (si $\Omega_Q^0 \approx 0.7$ et $\Omega_{\rm M}^0 \approx 0.3$, en accord avec les contraintes actuelles).

Contraintes actuelles sur $\mathbf{w_0}$ et $\mathbf{w_a}$: Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, en incluant les deux paramètres CPL dans l'analyse des données Kowalski et al. (2008) obtiennent les contours à 68%, 95% et 99% CL de la Figure 2.17 (page 52). Dans la combinaison des trois sondes, figure à droite, les auteurs donnent en lignes pointillées les contours qu'ils obtiennent quand ils incluent des erreurs systématiques aux magnitudes des SNe. La borne supérieure coupant les contours vers le haut est la borne imposée par l'éq.(3.34). Pour comparaison : le contour à 68% CL (sans erreurs systématiques) correspond au cas ii) de notre Tableau 2.2 (page 53), où nous avons obtenus les paramètres cosmo-

logiques dans une analyse des SNe en combinaison avec les paramètres réduits du CMB et des BAO. Nous avons aussi obtenu les contours dans l'espace des paramètres cosmologiques, dans la ligne ii) du Tableau 6.2. Nous reproduisons ce contour dans le plan (w_0, w_a) sur la Figure 3.5 ci-dessous. En comparant le contour de Kowalski et al. (2008) avec notre contour, nous observons une très bonne correspondance entre les résultats. Concrètement, le contour à 68% occupe un volume comparativement grand dans l'espace de phase de l'énergie noire, (w_0, w_a), mais une grande partie en est situé dans le régime fantôme de l'espace de phase, $w_0 < 1$. Surtout, le meilleur fit indique une valeur de w_0 plus petite que sa valeur ΛCDM. Cependant, les données sont toujours à 68% CL en accord avec la valeur $w_0 = -1$. A l'inverse, les données quasiment excluent à 68% CL les modèles d'énergie noire aux valeurs négatives de w_a. Via l'éq.(3.29), les modèles aux valeurs négatives de w_a avec une valeur de w_0 proche de -1 correspondent à la classe 'thawing' des modèles d'énergie noire, cf. Figure 3.3. Les modèles du type 'thawing' sont donc défavorisés par les données actuelles mais restent en accord à 95%. Alors que le meilleur fit indique une valeur de w_a significativement positive, les données sont en accord à 68% CL avec le modèle ΛCDM. Le meilleur fit est tel que $w_0 + w_a \lesssim 0$ ce qui indique une préférence pour la classe des modèles 'early dark energy' des modèles de Quintessence.

3.7.2 Paramétrage du type 'step'

Nous avons vu sur la Figure 3.2 que des solutions trackers sont caractérisées par des transitions plus ou moins prononcées (en terme de largeur et d'amplitude) dans l'équation d'état, entre deux valeurs asymptotiques. Ce comportement est bien décrit par une forme fonctionelle du type 'step'. Cependant, le choix du paramétrage reste arbitraire. Bassett et al. (2002) utilisent une distribution de Fermi, et des fonctions exponentielles ont été considérées par Hannestad & Mörtsell (2004) et par Linder & Huterer (2005). Un paramétrage en terme de la fonction tangente hyperbolique a été utilisé par Pogosian et al. (2005) et plus récemment par Douspis et al. (2008), basé sur les résultats de Corasaniti & Copeland (2003) qui discutent en détail les propriétés génériques de la dynamique des modèles de Quintessence. Malheureusement, la nécessité d'introduire quatre paramètres (deux valeurs asymptotiques ainsi que la largeur et la position de la transition dans l'espace en redshift) constitue un défaut majeur de ces paramétrages, car des hypothèses devront être faites sur deux des paramètres au moment d l'analyse afin d'obtenir des contraintes pertinantes, cf. page 72.
Nous adoptons ici le paramétrage utilisé par Douspis et al. (2008) pour modéliser l'équation d'état fiducielle de l'énergie noire :

$$w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{step}}(z) = \frac{1}{2}(w_i + w_f) - \frac{1}{2}(w_i - w_f)\tanh\left[\Gamma \ln\left(\frac{1+z_{\mathrm{t}}}{1+z}\right)\right], \tag{3.35}$$

dont un exemple est donné sur la Figure 3.6, et où on a introduit quatre paramètres :

1. $w_i = \lim_{z\to\infty} w^{\mathrm{step}}(z)$ est la valeur intiale de l'équation d'état ;

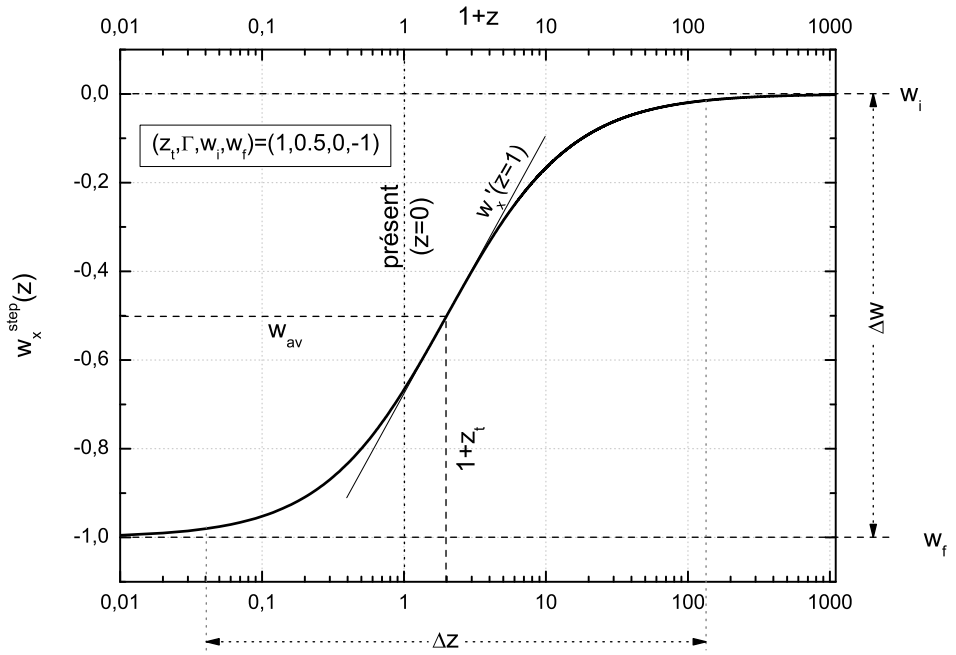


FIGURE 3.6: Un exemple d'équation d'état du type 'step' (éq.(3.35)) avec $(z_t, \Gamma, w_i, w_f) = (1, 0.5, 0, -1)$.

2. $w_f = \lim_{z\to -1} w^{\text{step}}(z)$ sa valeur asymptotique dans le futur ;
3. z_{t} désigne la position de la transition dans l'espace en redshift, soit $w^{\text{step}}(z_{\text{t}}) = w_{av}$, où :
$$w_{av} := \frac{1}{2}(w_i + w_f), \tag{3.36}$$
est la valeur moyenne de l'équation d'état.
4. $\Gamma > 0$ donne la largeur de la transition, cf. éq.(3.40).

Le premier avantage de ce paramétrage est que la fonction de Hubble peut être donnée explicitement :

$$\begin{aligned} E(z)^2 &= \Omega_{\text{k}}^0 (1+z)^2 + \Omega_{\text{M}}^0 (1+z)^3 + \Omega_{\text{R}}^0 (1+z)^4 \\ &+\Omega_{\text{x}}^0 (1+z)^{3(1+w_{\text{av}})} \left[\frac{\left(\frac{1+z_{\text{t}}}{1+z}\right)^{\Gamma} + \left(\frac{1+z_{\text{t}}}{1+z}\right)^{-\Gamma}}{(1+z_{\text{t}})^{\Gamma} + (1+z_{\text{t}})^{-\Gamma}} \right]^{\frac{3\Delta w}{2\Gamma}}, \end{aligned} \tag{3.37}$$

où nous avons défini l'amplitude de la transition :

$$\Delta w := w_i - w_f. \tag{3.38}$$

Comme autre avantage nous notons le fait, qu'avec ce paramétrage les valeurs initiales et futures, w_i et w_f, sont dynamiquement découplées. Aussi, nons obtenons trivialement :

$$\left(w_{\text{x}}^{\text{step}}\right)' = 2\Gamma \left(\frac{\left(w_{\text{x}}^{\text{step}} - w_{\text{av}}\right)^2}{\Delta w} - \frac{1}{4}\Delta w \right), \tag{3.39}$$

ce qui représente des trajectoires paraboliques dans l'espace de phase $(w'_{\rm x}, w_{\rm x})$. Notons, que ces trajectoires ne dépendent pas du redshift de la transition, z_t, mais $w_{\rm x}^{\rm step}$ en dépend. Nous représentons sur la Figure 3.3 (page 66) une trajectoire pour un choix particulier des paramètres qui montre très bien ce comportement parabolique. Le paramétrage du type 'step' permet de décrire une plus grande variété de modèles théoriques que les modèles CPL possédant des trajectoires linéaires dans cet espace de phase, cf. éq.(3.28).
La largeur de la transition, Γ, peut être reliée à une largeur en redshift, Δz, autour du centre de la transition, $z_{\rm t}$, via :

$$\Delta z\,(z_t, \Gamma) = 2\,(1 + z_{\rm t})\sinh\,(2/\Gamma). \tag{3.40}$$

Pour dériver l'éq.(3.40) nous avons défini Δz comme la largeur de la transition entre les valeur $w_{av} \pm \frac{1}{2}\Delta w \tanh(2)$. Parce que $\tanh(2) \approx 0.96$, cette définition contient l'essentiel de la dynamique du modèle. Une particularité de notre paramétrage est, cependant, que la largeur Δz n'est pas seulement anti-proportionnelle à Γ, mais dépend aussi linéairement de $z_{\rm t}$. Pour $z_{\rm t} = 0$, nous obtenons par exemple $\Delta z = 0.5, 1, 10$ pour $\Gamma = 8.08, 4.16, 0.86$, respectivement.

Contraintes actuelles sur $\mathbf{z_t}$, $\mathbf{\Gamma}$, $\mathbf{w_i}$ et $\mathbf{w_f}$: Ferramacho et al. (2009b) ont analysé les données actuelles des SNe, du CMB et du spectre de puissance des LRG en paramétrant la dynamique de l'énergie noire avec l'éq.(3.35). Ils trouvent que le redshift à partir duquel les données exluent une transition dans l'equation d'état dépendent des hypothèses sur les paramètres asymptotiques w_i et w_f. Pour le cas précis d'une transition entre les valeurs $w_i = -0.2$ et $w_f = -1$, l'analyse combinée permet d'exclure à 2σ toutes transitions ayant lieu à redshifts $z_t \lesssim 1.1$. Cependant, en fixant $w_i = 0$ et marginalisant sur w_f, ils excluent à partir des données toutes transitions ayant lieu à des redshifts $z_t < 10$.

Deuxième partie

Extraction des paramètres cosmologiques

With four parameters I can fit an elephant, and with five I can make him wiggle his trunk. [1]

Chapitre 4

Cosmographie

Sous le terme 'cosmographie' on comprend l'approche purement cinématique à la cosmologie. Comme nous avons déja indiqué ci-dessus (page 20), l'intention motivant une telle approche est de tracer l'histoire de l'expansion de l'univers en ignorant un quelconque modèle dynamique de ses contenus en masse-énergie. On s'abstient donc de toutes suppositions théoriques que l'on pourrait trouver prejugées. Le seul ingrédient théorique de la cosmographie est la métrique de l'espace-temps, soit en application du Principe Cosmologique la métrique FRW, éq.(2.8). Nous avons déjà exposé la dérivation des distances cosmologiques à partir de cette métrique, cf. section 2.1.2, où nous avons aussi obtenu le développement de la distance lumineuse en redshift au premier ordre, cf. les éqs.(2.28)-(2.31).
Si on pousse le développement jusqu'à l'ordre quatre, on obtient le développement éq.(2.33) que nous reproduisons ici (Visser (2004), cf. aussi John (2004)) :

$$\begin{aligned} {d_{\mathrm{L}}}^{\mathrm{dv}}(z) = \frac{c}{H_0} z \Bigg(& 1 + \frac{1}{2}[1-q_0]z - \frac{1}{6}\left[1 - q_0 - 3{q_0}^2 + j_0\right] z^2 + \\ & + \frac{1}{24}\left[2 - 2q_0 - 15{q_0}^2 - 15{q_0}^3 + 5j_0 + 10q_0 j_0 + s_0 + \frac{2kc^2\left(1+3q_0\right)}{H_0^2 a_0^2}\right] z^3 + \\ & + \mathcal{O}\left(z^4\right) \Bigg). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Les paramètres H_0, q_0, j_0, et s_0 ont été définis dans les éqs.(2.34), et leur signification cinématique est discutée en détail par Visser (2004). Il nous suffira de remarquer que jusqu'à aujourd'hui la mesure des deux premiers paramètres entraîna une révolution scientifique. Nous avons largement discuté, au début de ce mansucrit de thèse, les implications du terme H_0 dans la section 2.1.2, où nous avons aussi donné la valeur mesurée aujourd'hui, $H_0 = 72 \pm 8(\mathrm{km/s})/\mathrm{Mpc}$ (cf. la note 6 de la page 23). La détermination du signe de q_0, quant à lui, révéla l'accélération du taux d'expansion. L'analyse de Shapiro & Turner (2006)

1. "Avec quatre paramètres je peux ajuster un éléphant. Avec cinq, je peux le faire agiter la queue." Johann von Neumann (selon Dyson 2004). En fait, suivant Burnham & Anderson (2002, p. 30) il faut trente paramètres pour ajuster un éléphant.

donne une détection à 5σ du signe négatif du paramètre de décélération. Déjà assez tôt dans l'histoire de la cosmologie moderne, Mattig (1958) montra les limites d'une approche approximative au deuxième ordre en comparant l'erreur introduite par cette approximation aux précisions des sondages cosmologiques disponibles à l'époque, et proposa d'utiliser des solutions exactes pour des modèles dynamiques spécifiques afin d'extraire les paramètres cosmologiques. La cosmographie, à l'ordre supérieur à deux, resta cependant très populaire grâce au grand avantage de son indépendance des suppositions théoriques sur la dynamique. Depuis la découverte de l'accélération présente du taux d'expansion de l'univers, nombre d'auteurs ont analysé les données afin d'extraire les paramètres de décélération, cf. par exemple Riess et al. (2004); Virey et al. (2005); Shapiro & Turner (2006), et du snap et du jerk, cf. par exemple Cattoen & Visser (2007); Vitagliano et al. (2009).

4.1 Paramètres cosmographiques dans un univers plat

Suivant Mattig (1958) nous allons vouloir tester la précision de cette aproche et quantifier les erreurs que son utilisation introduit, en les comparant à la précision des sondages cosmologiques actuels et futurs. A cette fin, nous allons exprimer les paramètres cosmologiques 'cinématiques' en fonction des paramètres dynamiques d'un modèle spécifié. Nous allons notamment décrire le contenu de l'univers par les paramètres de densité de matière, Ω_{M}^0, et d'une composante énergie noire, Ω_{x}^0. Nous imposons $\Omega_{\mathrm{k}}^0 = \Omega_{\mathrm{R}}^0 = 0$ pour simplifier l'analyse et les calculs numériques, et nous employons le paramétrage CPL pour décrire une possible évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire. Nous obtenons la fonction de Hubble (reprise de l'éq.(3.32)) :

$$E^2\left(z;p_i\right) = \Omega_{\mathrm{M}}^0\left(1+z\right)^3 + \Omega_{\mathrm{x}}^0\left(1+z\right)^{3(1+w_0+w_a)}\,\mathrm{e}^{-3w_a\left(\frac{z}{1+z}\right)}, \tag{4.2}$$

où $\Omega_{\mathrm{x}}^0 = 1 - \Omega_{\mathrm{M}}^0$. En vertu de l'éq.(2.99) nous pouvons alors explicitement calculer la fonction de décélération, $q\left(z\right)$, pour ce modèle :

$$2q\left(z;p_i\right) = \frac{1 + \left(1 + 3\left(w_0 + w_a\frac{z}{1+z}\right)\right)\frac{1-\Omega_{\mathrm{M}}^0}{\Omega_{\mathrm{M}}^0}\left(1+z\right)^{3(w_0+w_a)}\,\mathrm{e}^{-3w_a\left(\frac{z}{1+z}\right)}}{1 + \frac{1-\Omega_{\mathrm{M}}^0}{\Omega_{\mathrm{M}}^0}\left(1+z\right)^{3(w_0+w_a)}\,\mathrm{e}^{-3w_a\left(\frac{z}{1+z}\right)}}, \tag{4.3}$$

d'où on obtient trivialement le paramètre de décélération :

$$2q_0\left(p_i\right) = 1 + 3w_0\left(1 - \Omega_{\mathrm{M}}^0\right). \tag{4.4a}$$

Via les définitions éqs.(2.34c) et (2.34d) on obtient ensuite le jerk :

$$j_0\left(p_i\right) = q_0 + 2q_0^2 + \underbrace{\frac{3}{2}\left(1 - \Omega_{\mathrm{M}}^0\right)\left(w_a + 3w_0^2\Omega_{\mathrm{M}}^0\right)}_{\left.\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}z}\right|_0}, \tag{4.4b}$$

et le snap :

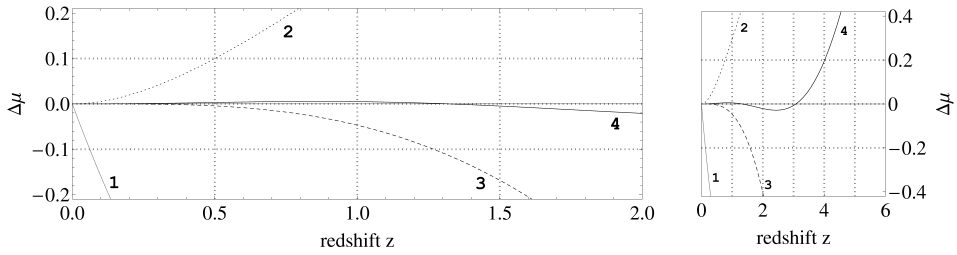


FIGURE 4.1: Déviation $\Delta\mu(z)$ de l'éq.(4.1) de la solution exacte, pour premier (ligne grise, label '1'), deuxième (ligne pointillée, label '2'), troisième (ligne hachurée, label '3'), et quatrième (ligne noire, label '4') ordre de développement en redshift. Le modèle cosmologique supposé est le modèle ΛCDM.

$$s_0(p_i) = -2j_0 - 3q_0 j_0 \underbrace{-\frac{9}{2}\left(2-\Omega_{\mathrm{M}}^0-{\Omega_{\mathrm{M}}^0}^2\right)w_0 w_a - \frac{3}{2}\left(1-\Omega_{\mathrm{M}}^0\right)\left(w_a + 6\Omega_{\mathrm{M}}^0 w_0^2 + 9{\Omega_{\mathrm{M}}^0}^2 w_0^3\right)}_{\left.\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}z}\right|_0}. \tag{4.4c}$$

Les éqs.(4.4a), (4.4b) et (4.4c) permettent de calculer la distance lumineuse comme approximée par l'éq.(4.1) pour tout ensemble de paramètres $\{p_i\} = \left\{\Omega_{\mathrm{M}}^0,\, w_0,\, w_a\right\}$, avec $\Omega_{\mathrm{x}}^0 = 1 - \Omega_{\mathrm{M}}^0$. Nous pourrons ensuite comparer cette distance lumineuse à l'expression exacte, éq.(2.21), que l'on calcule numériquement. Cependant, d_{L} n'étant pas la quantité observable nous allons par la suite mener nos discussions en termes du module de distance, μ, au lieu de d_{L}. La Figure 4.1 représente la déviation $\Delta\mu(z) := \mu^{\mathrm{dv}}(z) - \mu(z; p_i)$ du module de distance $\mu^{\mathrm{dv}}(z)$ calculée avec l'éq.(4.1) du module $\mu(z; p_i)$ obtenu avec la relation exacte pour $d_{\mathrm{L}}(z)$, pour le cas du modèle ΛCDM. Nous avons représenté la déviation pour les cas d'un développement jusqu'au deuxième, troisième, et quatrième ordre en redshift. Déjà à redshift $z = 1$ le développement de l'ordre trois diffère de $\Delta\mu = 0.05$ de la solution exacte. Appliquant le terme du quatrième ordre réduit la déviation à $\Delta\mu \lesssim 0.01$ jusqu'au redshift $z = 1.7$. A cet ordre l'approximation est donc correcte pour le modèle ΛCDM.

4.2 Dépendance de la précision du modèle cosmologique

Comment ce résultat changera-t-il quand on variera le modèle cosmologique ? Nous allons considérer $z = 1.7$ comme le redshift maximal d'un échantillon prospéctif de SN, cf. appendice B. Si on veut considérer la précision de la cosmographie dans cet intervalle de redshift on
peut introduire :

$$\overline{\Delta\mu} := \frac{1}{1.7}\int_0^{1.7} |\Delta\mu(z)|\,\mathrm{d}z, \tag{4.5}$$

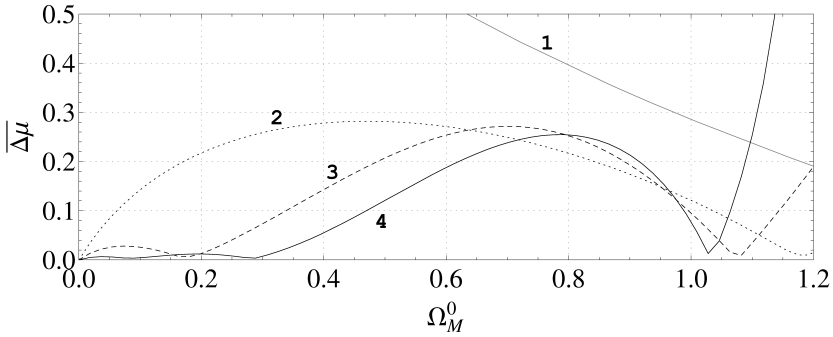


FIGURE 4.2: $\overline{\Delta\mu}$ en fonction de $\Omega_{\rm M}^0$ pour premier (ligne grise, label '1'), deuxième (ligne pointillée, label '2'), troisième (ligne hachurée, label '2'), et quatrième (ligne noire, label '2') ordre de développement en redshift de la distance lumineuse. Les autres paramètres sont fixés à $(w_0,\, w_a) = (-1,\, 0)$.

comme indicateur de précision.
Si nous fixons pour le moment $(w_0,\, w_a) = (-1,\, 0)$ et nous intéressons à la sensitivité de $\overline{\Delta\mu}$ aux variations en $\Omega_{\rm M}^0$, nous obtenons la Figure 4.2. La ligne $\overline{\Delta\mu}\left(\Omega_{\rm M}^0\right)$ a un minimum à $\Omega_{\rm M}^0 = 0.18$ pour le troisième ordre, et des minimums à $\Omega_{\rm M}^0 = 0.10$ et $\Omega_{\rm M}^0 = 0.28$ pour le développement en quatrième ordre en redshift. Cette dernière est par coïncidence la valeur de $\Omega_{\rm M}^0$ du modèle ΛCDM. Si nous élargissons notre étude et ajoutons un degré supplémentaire à la Figure 4.2, à savoir le paramètre w_0, nous obtenons le plan des Figures 4.3 de gauche, où nous avons représenté la sensibilité de $\Delta\mu$ aux variations en w_0 le long de l'axe des ordonnées pour le deuxième, troisième et quatrième ordre de devéloppement (de haut en bas). On y trouve les contours $\overline{\Delta\mu} = 0.02$ et $\overline{\Delta\mu} = 0.08$. Nous prenons la première valeur comme estimateur de la précision d'un futur sondage, cf. appendice B. La deuxième valeur représente la dispersion intégrée des données SNe de Kowalski et al. (2008) autour du meilleur fit SNe+$\mathcal{R}$+A. A savoir, quand nous analysons les magnitudes m_i des SNe de l'échantillon dans des bins en redshift de largeur 0.1, la magnitude moyenne dans le bin est donnée par :

$$\overline{\Delta m}_{\rm bin} = \frac{1}{N_{\rm bin}\,({\rm SNe})} \sum_{i\in{\rm bin}} (m_i - m_i^{\rm fit}), \tag{4.6}$$

où $N_{\rm bin}\,({\rm SNe})$ est le nombre de SNe dans le bin. Voir aussi le chapitre 6 où nous discutérons plus en détails l'histogramme de l'échantillon. Pour pouvoir comparer la dispersion des SNe avec notre critère éq.(4.5), nous calculons ensuite :

$$\frac{1}{1.7} \sum_{\rm bin} \left(0.1\overline{\Delta m}_{\rm bin}\right) \simeq 0.08. \tag{4.7}$$

Via l'éq.(2.71) les variations en magnitudes apparentes, Δm, se traduisent directement dans des variations en module de distances, $\Delta\mu$.

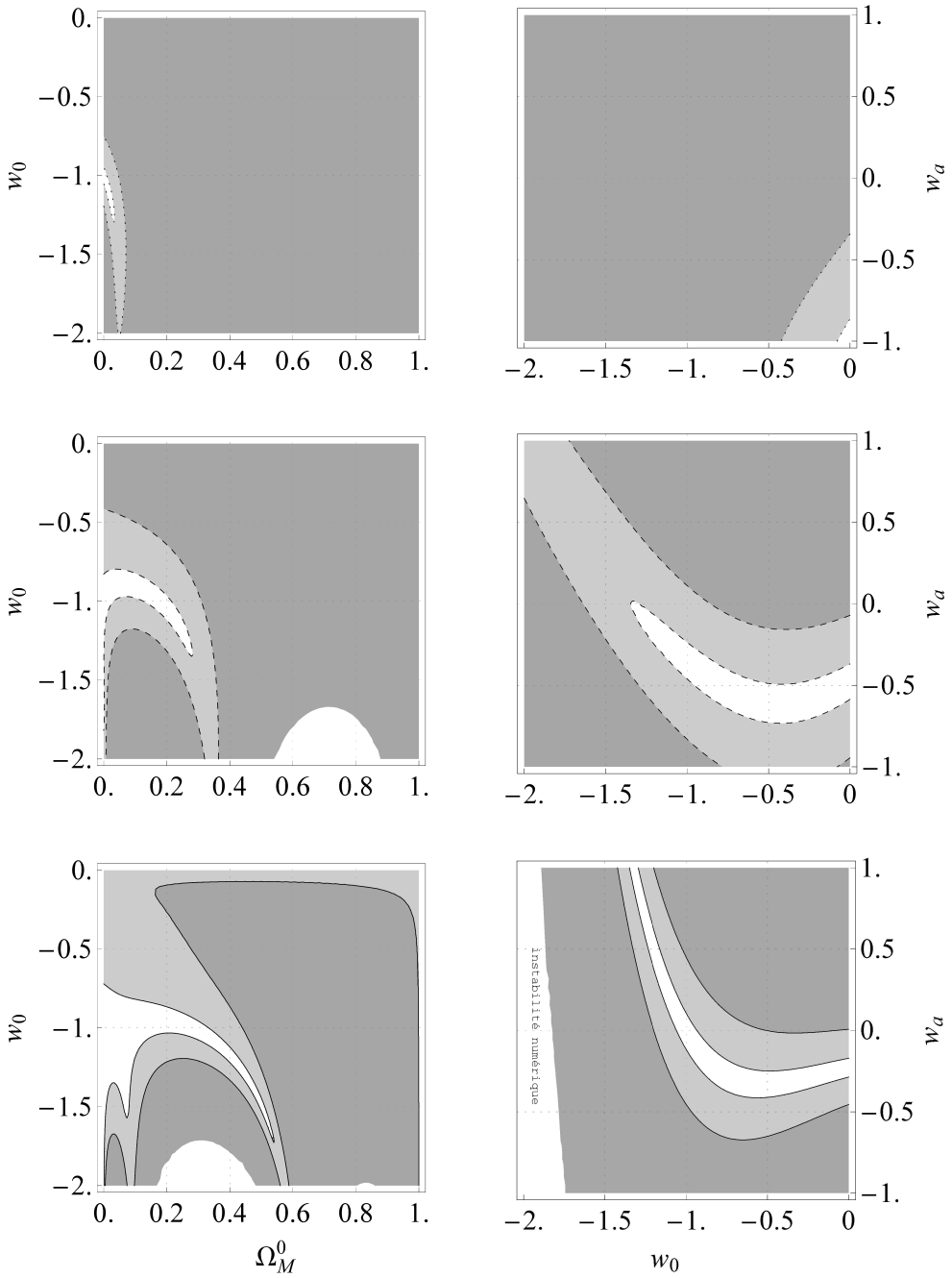


FIGURE 4.3: Gauche : $\overline{\Delta\mu}$ en fonction des paramètres $\Omega_{\rm M}^0$ et w_0 (gauche, où $w_a \equiv 0$), et en fonction des paramètres w_0 and w_a (droite, où $\Omega_{\rm M}^0 \equiv 0.28$) pour le deuxième, troisième, et quatrième ordre de développement en redshift (de haut en bas). Les zones blanches correspondent aux régions de l'espace des paramètres où $\overline{\Delta\mu} \leq 0.02$, les zones en grises claires correspondent aux régions où $\overline{\Delta\mu} \leq 0.08$. Dans les zones grises enfoncées on a $\overline{\Delta\mu} > 0.08$. Prochaine page : Afin de mieux illustrer les contours du deuxième ordre et les contours entiers des ordres supérieurs, nous montrons un plan élargi de (w_0, w_a). Les contours correspondent aux valeurs $\overline{\Delta\mu}0.02$ et $\overline{\Delta\mu}0.08$ pour le premier (lignes grises, label '1'), le deuxième (lignes pointillées, label '2'), le troisième (lignes hachurées, label '3') et le quatrième (lignes noires, label '4') ordre de développement en redshift.

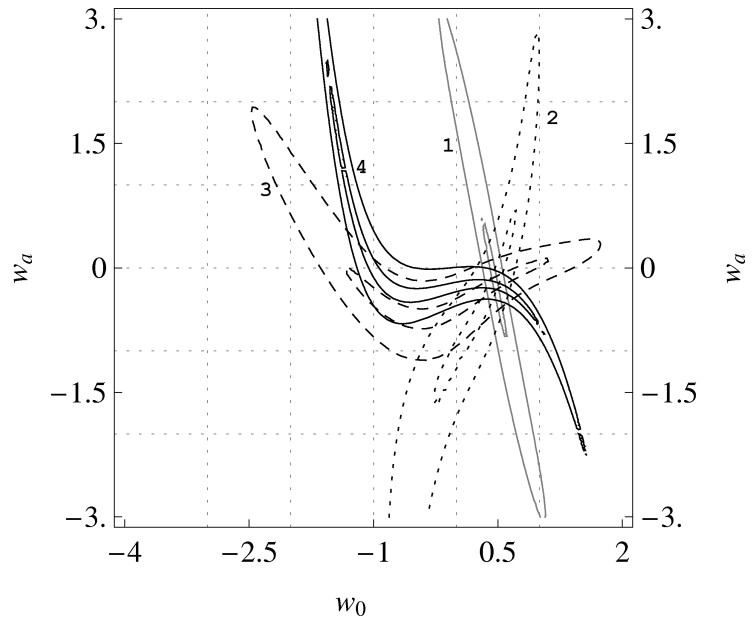


FIGURE 4.4: Voir page précédente.

Nous nous apercevons, que le modèle ΛCDM est situé à l'intérieur du contour $\overline{\Delta\mu} = 0.08$ seulement si nous utilisons le développement de l'éq.(4.1) jusqu'au troisième ordre. Le développement en redshift de la distance lumineuse jusqu'à l'ordre deux n'est pas valide pour le modèle standard de la cosmologie, ΛCDM, avec une précision correspondant aux sondages actuels des SNe. Quand nous utilisons le développement jusqu'au troisième ordre, le modèle ΛCDM est inclu dans la zone où $\overline{\Delta\mu} \leq 0.8$, mais est situé tout au bord de cette zone. Déjà une légère augmentation des précision des sondages SNe rendra le développement au troisième ordre insuffisant lui aussi. Il peut être contester que notre choix de contour, $\overline{\Delta\mu} = 0.08$, pour estimer la précision des sondages actuels des SNe n'est pas rigoureusement dérivé. Dans la section 4.3 nous renforcerons notre résultat par une étude sur les biais des paramètres cosmologiques.
Sur le côté droit des Figures 4.3 nous représentons les zones correspondantes dans le plan des paramètres (w_0, w_a), où $\Omega_{\rm M}^0 \equiv 0.28$. A nouveau, couper le développement après le troisième ordre entraîne une imprécision considérable dans le cas ΛCDM. Au niveau d'un développement au quatrième ordre le modèle ΛCDM repose encore dans la zone de très bonne précision. Nous sommes pourtant, dans tous les cas, confrontés à la grande sensibilité de la précision aux modèles cosmologiques que l'on considère. Les divers termes de l'éq.(4.1) satisfont un degré de précision donné uniquement dans quelques régions de l'espace des paramètres . Pour un ordre du développement donné, la précision de l'approche cosmographique dépend du modèle cosmologique ; et pour un modèle cosmologique donné, la précision de la cosmographie varie avec l'ordre de développement choisi.

4.3 Risque de biais

Afin de quantifier ces dépendances, nous étudions trois modèles cosmologiques bien justifiés, et nous les testons avec deux échantillons de données SN différents. A savoir, nous considérons le modèle standard de la cosmologie, le modèle ΛCDM, un modèle XCDM correspondant au meilleur fit actuel, $\left\{\Omega_{\rm M}^0, w_0, w_a\right\} \sim \{0.28, -1.1, 0.4\}$, et afin d'illustrater la problématique des biais, un modèle $\left\{\Omega_{\rm M}^0, w_0, w_a\right\} = \{0.31, -1.1, 1.4\}$. Ce dernier modèle correspond au meilleur fit avec le paramétrage CPL du modèle **B** du chapitre 5, cf. Tableau 5.1. Ce modèle représente un paramétrage du type 'step' d'un modèle 'freezing', avec une transition de l'équation d'état centré à $z_t = 0.5$. Nous donnons les paramètres cosmographiques de ces trois modèles fiduciels dans le Tableau 4.1.

Tableau 4.1: Valeurs fiducielles des paramètres cosmographiques,$\{p_i\}^{\rm Fid}$, pour les trois modèles en question.

	$q_0^{\rm Fid}$	$j_0^{\rm Fid}$	$s_0^{\rm Fid}$
ΛCDM	-0.58	1.00	0.65
XCDM	-0.69	1.79	4.36
modèle B	-0.64	2.79	10.9

Comme échantillon des données 'actuelles' nous simulons des magnitudes de 307 SNe qui sont distribuées comme celles de l'échantillon de Kowalski et al. (2008). [2] Comme données futures nous utilisons l'échantillon de SNe de l'annexe B. Le meilleur fit est trouvé par une minimisation du χ^2 comme décrit dans l'annexe A. Pour quantifier la qualité de reconstruction des paramètres $\{p_i\}$ nous définissons l'important paramètre de biais :

$$\mathcal{B}_i := \left| {p_i}^{\rm Fid} - {p_i}^{\rm fit} \right|, \tag{4.8}$$

et utiliserons le language suivant :
- nous qualifierons le paramètre p_i de *bien reconstruit*, si $\mathcal{B}_i \leq \sigma_{p_i}$, et
- nous qualifierons le paramètre p_i de *biaisé* (à 1σ), si $\mathcal{B}_i > \sigma_{p_i}$.

Le Tableau 4.2 montre les valeurs ajustées des paramètres $\{p_i\}^{fit}$ pour les différents ordres du développement en redshift de la distance lumineuse. Les erreurs sont les erreurs à 1σ, estimées avec la méthode de Fisher. Nous ne représentons pas dans ce tableau la valeur ajustée du paramètre de Hubble qui était inclu dans le fit via le paramètre $M_{\rm s}$. Au deuxième ordre du développement, le paramètre de décélération, q_0, est biaisé à plusieurs σ déjà avec des données SN à une précision telle que l'on en dispose aujourd'hui.

2. Il ne semble pas préférable d'effectuer un ajustement des données du CMB par une approche cinématique, ni des données BAO. Pour les deux sondes, des hypothèses fortes sur la dynamique de l'univers sont impliquées ainsi que dans la dérivation des paramètres réduits $\mathcal{R}$ et A. Nous devons par conséquent nous restreindre à n'utiliser que des données SNe pour cette étude.

Tableau 4.2: Valeurs des paramètres cosmographiques, pour des données SNe actuelles et futures, cf. discussion page 89.

	$\mathcal{O}(z^2)$			$\mathcal{O}(z^3)$					$\mathcal{O}(z^4)$						
actuelles	q_0	σ_{q_0}	χ^2/n	q_0	σ_{q_0}	j_0	σ_{j_0}	χ^2/n	q_0	σ_{q_0}	j_0	σ_{j_0}	s_0	σ_{s_0}	χ^2/n
ΛCDM	**−0.15**	**0.07**	0.02	−0.51	0.18	0.44	0.85	10^{-4}	−0.59	0.38	1.12	3.28	1.10	12.11	10^{-5}
XCDM	**−0.16**	**0.07**	0.02	−0.58	0.18	**0.73**	**0.92**	10^{-4}	−0.68	0.38	1.76	3.52	3.74	17.12	10^{-5}
modèle B	**0.02**	**0.07**	10^{-4}	**−0.41**	**0.17**	**0.45**	**0.72**	10^{-3}	−0.58	0.37	1.89	3.18	2.9	14.3	10^{-5}
futures	q_0	σ_{q_0}	χ^2/n	q_0	σ_{q_0}	j_0	σ_{j_0}	χ^2/n	q_0	σ_{q_0}	j_0	σ_{j_0}	s_0	σ_{s_0}	χ^2/n
ΛCDM	**0.11**	**0.02**	5.8	**−0.43**	**0.06**	**0.08**	**0.19**	0.18	−0.58	0.13	1.07	0.88	0.90	2.97	10^{-4}
XCDM	**0.12**	**0.02**	6.8	**−0.49**	**0.06**	**0.22**	**0.21**	0.15	−0.66	0.13	1.56	0.95	2.84	4.20	10^{-3}
modèle B	**0.26**	**0.01**	23	**−0.27**	**0.06**	**−0.08**	**0.13**	0.3	**−0.51**	**0.12**	**1.41**	**0.80**	**1.0**	**3.0**	10^{-2}

*Les valeurs des paramètres biaisés sont représentées en caractères gras.

Pour les données futures à haute statistique, l'utilisation de ce développement mènera pour ce paramètre à se tromper de signe à plusieurs σ.
Passant au troisième ordre du développement, le paramètre de décélération, q_0, est bien reconstruit (sauf pour le modèle B) pour des données à statistique actuelle, et sa valeur ajustée exclut correctement une décélération actuelle du taux d'expansion de l'univers. Le jerk est bien reproduit dans le cas ΛCDM, mais pas dans le cas du modèle XCDM malgré son erreur comparativement grande. A propos des erreurs nous notons qu'à cause de l'utilisation d'un paramètre supplémentaire dans le fit nous obtenons pour tous les paramètres des erreurs plus grandes d'un facteur deux à trois par rapport aux erreurs obtenues avec le développement au deuxième ordre.
Nous nous apercevons, cependant, que des biais sur les deux paramètres cosmographiques seront introduit si on analyse des données futures. Pour les trois modèles, q_0 sera biaisé à plus de 2σ, la situation s'agrave pour le paramètre j_0, qui est biaisé à 4σ dans le cas ΛCDM, et à plus de 7σ dans les cas XCDM et du modèle B.
En incluant le quatrième ordre du développement dans le fit, les erreurs augmentent encore une fois d'un facteur deux, et nous obtenons avec la statistique actuelle des paramètres bien reconstruits pour les trois modèles. Dans l'analyse des données prospectives à haute statistique, les paramètres sont bien reconstruits pour les modèles ΛCDM et XCDM. Dans le cas du modèle B, cependant, l'approche cinématique continue à introduire des biais sur tous les paramètres, même quand elle est appliquée jusqu'au quatrième ordre.

Nous rappelons, que nous avons considéré seulement les données SN, et que par conséquent les erreurs sur les paramètres sont relativement grandes. Comme nous l'avons dit, nous ne pouvons combiner ces données avec des contraintes à partir du CMB ou des BAO. Comme contraintes extérieures on pourra cependant combiner les données SNe avec des sondages sensibles à la distance angulaire, d_A, (cf. Marinoni et al. (2008)) qui peut aussi être exprimée en termes des paramètres cosmographiques. Le fait d'appliquer des contraintes extérieures réduirait davantage les erreurs sur les paramètres, et pourrait introduire des risques de biais plus élevés. Aussi, comme nous avons vu dans la discussion de deux échantillons à statistiques différentes, plus on augmente la statistique de l'échantillon des données (plus grand nombre de SNe, plus petites erreurs), le plus on agrave le risque d'introduire des biais sur les paramètres.

4.4 Résumé

Nous avons établi, qu'avec des données SNe comme disponibles aujourd'hui, l'extraction du paramètre de décélération, q_0, tant qu'elle est effectuée en tenant compte des termes d'ordre quatre, n'entraîne pas de risques de biais dans le cas du modèle ΛCDM et du modèle correspondant au meilleur fit des données actuelles. Alors que nous n'avons pas exploré tout l'espace de phase, nous avons démontré comment la précision de l'approche cinématique dépend du modèle cosmologique et de l'ordre du développement en redshift que l'on applique. A

titre d'exemple, nous avons démontré le risque d'introduire des biais pour le cas de notre modèle B, qui est une description en terme du paramétrage CPL d'un modèle physiquement bien motivé (d'un modèle 'tracker'). Dans ce cas, tous les paramètres cosmographiques risquent d'être biaisés dans une analyse des sondages futures de SNe. Il est donc dangereux d'utiliser une telle approche pour extraire les paramètres cosmographiqes et, en particulier, le paramètre de décélération.

Chapitre 5

Test du paramétrage CPL

La plupart des études actuelles tentant d'extraire les paramètres de l'énergie noire se concentre sur l'extraction de son équation d'état, $w_{\rm x}(z)$ (cf. par exemple Astier et al. 2006; Davis et al. 2007; Spergel et al. 2007; Jha et al. 2007), et en particulier applique le paramétrage de Chevallier & Polarski (2001) et Linder (2003) :

$$w_{\rm x}^{\rm CPL}(z) = w_0 + w_a \frac{z}{1+z}, \tag{5.1}$$

que nous avons discuté dans la section 3.7.

5.1 Signification physique des paramètres CPL

Malheureusement, un choix de paramétrage impose naturellement des limites de validité, et il est clair que CPL ne peut pas décrire tous les modèles théoriques d'énergie noire avec la même précision (Wang & Mukherjee 2004; Wang & Tegmark 2004; Wang & Freese 2006; Linder 2008). Notamment, nous avons déjà vu que CPL décrit des trajectoires linéaires dans l'espace de phase $(w_{\rm x}, w'_{\rm x})$, selon l'éq.(3.28), alors que des modèles d'énergie noire peuvent exhiber des courbes fortement non-linéaires (cf. Caldwell & Linder 2005; Scherrer 2006; Chiba 2006; Linder 2008, et aussi notre discussion section 3.3.2). Notamment, Linder (2003) souligne que le paramétrage CPL ne sera pas capable de bien décrire des transitions rapides ou encore des oscillations dans l'équation d'état. On est alors confronté à un inévitable degré de dépendance des résultats sur le choix du paramétrage. Pour contourner ce problème, d'autres approches ont été proposées, cf. section 3.7 pour une discussion.
Si nous revenons en particulier sur les modèles de Quintessence, nous avons vu sur la Figure 3.2 qu'il existe une sous-classe des solutions trackers dont l'équation d'état exhibe en effet des transitions rapides, et qui sont bien décrites par une forme fonctielle du type 'step'. Dans la section 3.7.2 nous avons discuté le paramétrage suivant :

$$w_{\rm x}^{\rm step}(z) = \frac{1}{2}(w_i + w_f) - \frac{1}{2}(w_i - w_f)\tanh\left[\Gamma \ln\left(\frac{1+z_{\rm t}}{1+z}\right)\right], \tag{5.2}$$

où on a introduit quatre paramètres. Comme nous l' avons discuté, la nécessité d'introduire un si grand nombre de paramètres est un défaut majeur de la modélisation de la dynamique de l'énergie noire via une fonction du type 'step'. Parce que les solutions 'tracker' avec une transition prononcée dans l'évolution de l'équation d'état sont physiquement motivées, il est néanmoins necéssaire de tester la signification des informations encodées dans les paramètres de l'énergie noire de CPL, w_0 et w_a, que l'on déduit dans une extraction des paramètres où le modèle cosmologique fiduciel exhibe un tel comportement du type 'step'. Nous allons aussi mesurer le risque d'introduction de biais dans la reconstruction des paramètres cosmologiques, afin de connaître les limitations intrinsèques du paramétrage CPL et donc le domaine de validité de notre interprétation.

5.2 Stratégie de l'analyse

Dans cette étude nous ne nous sommes pas intéressés à l'analyse de vraies données, mais nous effectuons une étude paramétrique avec des données simulées. Nous simulons les magnitudes des SNe et les valeurs de $\mathcal{R}$ et A dans un univers avec la fonction de Hubble 'step' éq.(3.37), que nous rappellons ici :

$$\begin{aligned} E(z)^2 &= \Omega_{\mathrm{k}}^0 (1+z)^2 + \Omega_{\mathrm{M}}^0 (1+z)^3 + \Omega_{\mathrm{R}}^0 (1+z)^4 \\ &\quad + \Omega_{\mathrm{x}}^0 (1+z)^{3(1+w_{\mathrm{av}})} \left[\frac{\left(\frac{1+z_{\mathrm{t}}}{1+z}\right)^{\Gamma} + \left(\frac{1+z_{\mathrm{t}}}{1+z}\right)^{-\Gamma}}{(1+z_{\mathrm{t}})^{\Gamma} + (1+z_{\mathrm{t}})^{-\Gamma}} \right]^{\frac{3\Delta w}{2\Gamma}} . \end{aligned} \tag{5.3}$$

Dans ce type de modèle fiduciel, nous varierons les paramètres $\{p_i\}^{\mathrm{Fid}} = \{z_{\mathrm{t}}, \Gamma, w_i, w_f\}$ afin d'étudier des transitions de phases plus ou moins rapides, plus ou moins récentes, pour différentes valeurs de w_i et w_f. Pour chaque modèle fiduciel, correspondant à un point dans l'espace de paramètre de la cosmologie fiducielle, nous minimisons le χ^2 avec les paramètres standard cosmologiques, $\{p_i\}^{\mathrm{fit}} = \left\{M_{\mathrm{s}}, \Omega_{\mathrm{M}}^0, w_0, w_a\right\}$ (paramètres CPL).
Nous allons estimer les erreurs au minimum avec l'outil KOSMOSHOW, cf. appendice A. La base de données est constituée des SNe de l'appendice B en combinaison avec les paramètres réduit du CMB et des BAO. Nous allons supposer une erreur $\sigma_{\mathcal{R}} = 0.01$, ce qui est l'estimation de l'erreur qu'obtiendra PLANCK, et une erreur $\sigma_A = 0.005$ comme estimateur d'une future précision sur A. Nous allons imposer $\Omega_{\mathrm{R}}^0 = \Omega_{\mathrm{k}}^0 = 0$ dans les cosmologies fiducielles et dans le fit afin de simplifier l'analyse. Nous allons fixer ${\Omega_{\mathrm{M}}^0}^{\mathrm{Fid}} = 0.3$ dans le modèle fiduciel. La valeur fiducielle du paramètre de normalisation des SNe, eq.(2.80), est $M_{\mathrm{s}}^{\mathrm{Fid}} = -3.6$.
La qualité statistique du fit est encodée dans la valeur au minimum du χ^2, χ^2_{min}. Une valeur trop élevée du χ^2_{min} indique un fit de mauvaise qualité : la probabilité que les données correspondent au modèle cosmologique représenté par les $\{p_i\}^{\mathrm{fit}}$ au minimum est faible. Concrètement, nous pouvons calculer la p-valeur et l'interpréter comme un degré de confiance. Ayant dans notre étude vingt degrés de liberté dans le fit, nous obtenons $\Delta\chi^2 = 22$ (31) pour un degré de confiance du fit de 68% (95%), cf. appendice A pour une discussion.

Si $\chi^2_{\rm min} > \Delta\chi^2$, nous considérons la mauvaise hypothèse détectée au degré de confiance correspodant au $\Delta\chi^2$. Si, par contre, $\chi^2_{\rm min} \lesssim \Delta\chi^2$, nous n'avons pas d'indication statistique prouvant que nous avons utilisé une mauvaise hypothèse. Dans ce cas, la fausse hypothèse pourra devenir très dangereuse, car dans les cas où elle biaise la reconstruction d'un ou plusieurs des paramètres, ceci passera indétecté et nous risquerons de mal interpréter notre fit. [1]
Au-delà de la qualité purement statistique du fit, nous voulons aussi connaître la qualité de la reconstruction des paramètres, ce qui sera très important dans tous les cas où la mauvaise hypothèse n'est pas détectée. A cette fin nous allons comparer les valeurs fiducielles et ajustées des paramètres, ou combinaisons de paramètres possédant une interprétation physique claire, suivants :

1. Les paramètres de densité de la matière fiduciel, ${\Omega_{\rm M}^0}^{\rm Fid}$, et ajusté,${\Omega_{\rm M}^0}^{\rm fit}$, peuvent être comparés directement.
2. La valeur actuelle de l'équation d'état de l'énergie noire. Dans le modèle fiduciel elle est calculée en fonction des paramètres :

$$w_{\rm x}^{\rm step}\left(\{p_i\}^{\rm Fid}, z\right)\Big|_{z=0} = w_{\rm av} + \frac{1}{2}\Delta w \tanh\left[\Gamma \ln\left(1+z\right)\right], \tag{5.4}$$

   dans le modèle ajusté elle est directement donnée par w_0.
3. En traitant la reconstruction de l'équation d'état de l'énergie noire, une quantité souvent discutée est le redshift 'pivot', qui est le redshift auquel l'erreur $\sigma_{w_{\rm x}}$ devient minimale, soit le redshift où $\partial\sigma_{w_{\rm x}}(z)/\partial z = 0$. Cf. aussi Albrecht et al. (2006); Virey & Ealet (2007); Hu (2005b) pour des définitions et discussions de ce paramètre. Sa valeur ne dépendra donc pas seulement du paramétrage que l'on utilise dans l'analyse, mais aussi des spécifications des sondes que l'on applique. Il doit alors être considéré comme une quantité statistique, et on ne s'attend pas à en trouver une signification physique. Il a été proposé d'utiliser des paramétrages de l'équation d'état du type $w_{\rm x}(z) = w_p + w_a f(z)$. De cette manière, cependant, on perdrait un peu des possibilités de comparer les performances des différentes sondes cosmologiqes et des différents sondages, car on aura des différents paramétrages pour chaque sonde et chaque combinaison de sondes. Afin de quantitativement tester ce que nous venons de dire, nous testerons néanmoins la reproduction de la valeur de l'équation d'état au redshift pivot, $w_p := w_{\rm x}(z_p)$. Avec CPL, z_p sera obtenu via la relation :

$$z_p = \frac{-{\rm corr}\left(w_0, w_a\right)\sigma_{w_0}}{\sigma_{w_a} + {\rm corr}\left(w_0, w_a\right)\sigma_{w_0}}, \tag{5.5}$$

   où ${\rm corr}\left(w_0, w_a\right)$ est la corrélation entre w_0 et w_a (cf. éq.(A.7), page 136).
4. Après notre discussion des comportements différents des deux paramétrages dans l'espace de phase $(w_{\rm x}, w'_{\rm x})$, il sera particulièrement intéressant de savoir, jusqu'à quel degré CPL est capable de tracer la dynamique fiducielle de l'énergie noire. Nous avons vu, que le paramètre w_a peut être

1. Cependant, on peut penser à établir d'autre critères de detection du problème. Voir chapitre 6.

lié à la dérivée $\left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{CPL}}\right)'$ par la relation :

$$w_a = -2\left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{CPL}}\right)'\Big|_{z=1}, \tag{5.6}$$

et nous allons alors comparer la valeur ajustée de w_a avec la valeur correspondante du modèle fiduciel, voir éq.(3.39) :

$$-2\left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{step}}\right)'\Big|_{z=1}, \tag{5.7}$$

afin de tester la reproduction de la dynamique de l'équation d'état.

5. Enfin, nous avons vu que la valeur initiale de l'équation d'état est dans le paramétrage CPL donné par $(w_0 + w_a)$, quantité que nous pouvons directement comparer au paramètre w_i du modèle fiduciel, afin de savoir si le comportement de l'énergie noire à très haut redshift peut être contraint avec des données SNe, CMB, et BAO.
6. Dans ce contexte de reconstruction de la dynamique de l'énergie noire à très haut redshift, Huey et al. (1999) ont proposé d'utiliser la valeur 'effective' de $w_{\mathrm{x}}(z)$, défini par :

$$(w_{\mathrm{x}})_{\mathrm{eff}} := \frac{\int_0^{z_{\mathrm{CMB}}} w_{\mathrm{x}}(z)\,\Omega_{\mathrm{x}}(z)\,\mathrm{d}z}{\int_0^{z_{\mathrm{CMB}}} \Omega_{\mathrm{x}}(z)\,\mathrm{d}z}, \tag{5.8}$$

comme un bon paramètre pour capter l'essentiel de la dynamique de l'énergie noire entre aujourd'hui et l'époque du découplage (CMB). Cf. aussi Pogosian et al. (2005). Nous allons par conséquent aussi comparer la valeur effective des deux modèles, fiduciel et ajusté.

Nous résumons schématiquement l'essentiel de ce qui vient d'être dit :

$$\begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{M}}^0 \\ w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{step}}(0) \\ w_p \\ -2\left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{step}}\right)'\Big|_{z=1} \\ w_i \\ \left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{step}}\right)_{\mathrm{eff}} \end{pmatrix}^{\mathrm{Fid}} \quad \begin{array}{c}\text{minimisation du } \chi^2, \\ \Leftrightarrow \\ \text{puis comparaison}\end{array} \quad \begin{pmatrix} \Omega_{\mathrm{M}}^0 \\ w_0 \\ w_p \\ w_a \\ w_0 + w_a \\ \left(w_{\mathrm{x}}^{\mathrm{CPL}}\right)_{\mathrm{eff}} \end{pmatrix}^{\mathrm{fit}}.$$

Afin de quantifier la qualité de reconstruction de ces six paramètres, nous allons appliquer notre définition du biais, cf. éq.(4.8), que nous rappellons ici :

$$\mathcal{B}_i := \left| {p_i}^{\mathrm{Fid}} - {p_i}^{\mathrm{fit}} \right|. \tag{5.9}$$

Nous ne discuterons pas les résultats modèle par modèle, mais nous étudierons tout l'espace des paramètres. Nous obtiendrons des volumes dans l'espace de

paramètre où le paramètre p_i sera biaisé. Nous appellons ces régions de l'espace de paramètre les zone de biais. Inversement, les zones où le paramètre p_i n'est pas biaisé, sont appelées les zones de validité. Ces définitions ont été introduites et sont discutées en détail par Virey et al. (2004). Notons que nous représenterons aussi dans les figures les lignes où le biais devient supérieur à $1.96\sigma_{p_i}$, soit un degré de confiance de 95%.
En comparant ces six quantités nous serons en mesure de tester si le paramétrage CPL permet une extraction des paramètres physiquement significatifs pour le cas d'une transition rapide de l'équation d'état de l'énergie noire.

5.3 Illustration du problème

Afin d'illustrer le problème, nous allons d'abord considérer deux exemples particuliers. Nous définissons deux modèles à transition très rapide, $\Gamma = 10$, entre les valeurs asymptotiques $w_i = 0$ et $w_f = -1$, inspirés par les solutions tracker de la Quintessence, cf. ci-dessus. Les modèles diffèrent dans leur redshift de transition, à savoir $z_\mathrm{t} = 3.0$ pour le modèle A, soit une transition au delà de la portée des données actuelles SNe et BAO, et $z_\mathrm{t} = 0.5$ pour le modèle B, soit un redshift de transition dans l'univers 'proche'. La largeur de transition en redshift est $\Delta z = 0.6$ (1.6) pour le modèle A (B).
Pour chaque modèle nous ajustons la cosmologie correspondante avec les paramètres M_s et Ω^0_M et les paramètres CPL : w_0 et w_a. Les valeurs obtenues sont données dans le Tableau 5.1, et illustrées sur la Figure 5.1. Pour le modèle A, nous obtenons une bonne reconstruction des paramètres cosmologiques 'locaux', soit de Ω^0_M, de w_0, et de w_p. Aussi le paramètre décrivant l'évolution globale de l'équation d'état,$-2w_\mathrm{x}(1)'$, est bien reconstruit. Cependant, le comportement à haut redshift, w_i, est biaisé à 4σ. La valeur du χ^2_min est correcte et ne permettrait pas, dans une analyse des données réelles, de réfuter ce modèle. Pour le modèle B, tous les paramètres sont biaisés à plusieurs σ. Cependant, la valeur du χ^2_min est supérieure au seuil $\Delta\chi^2 = 22$ correspondant à un degré de confiance de 68%. Dans une analyse des données réelles, la valeur du χ^2_min indiquerait un problème dans l'analyse.

Tableau 5.1: Valeurs fiducielles et ajustées des six paramètres 'physiques' étudiés, pour les modèles A et B. Les valeurs des paramètres biaisés sont représentées en caractères gras. Le redshift pivot est $z_p = 0.27$ ($z_p = 1.31$) pour modèle A (modèle B).

		Modèle A			Modèle B		
		Fid	fit	σ	Fid	fit	σ
1.	Ω^0_M	0.300	0.295	0.006	0.300	**0.315**	**0.006**
2.	$w_\mathrm{x}(0)$	-1.00	-1.03	0.06	-1.00	**-1.10**	**0.03**
3.	w_p	-1.00	-0.99	0.02	0.00	**-0.30**	**0.04**
4.	$-2w'_\mathrm{x}(1)$	0.00	0.20	0.27	0.13	**1.41**	**0.06**
5.	w_i	0.00	**-0.86**	**0.21**	0.00	**0.32**	**0.02**
6.	$(w_\mathrm{x})_\mathrm{eff}$	0.00	**-0.83**	**0.30**	0.00	**0.32**	**0.08**
	χ^2_min		0.9			27.5	

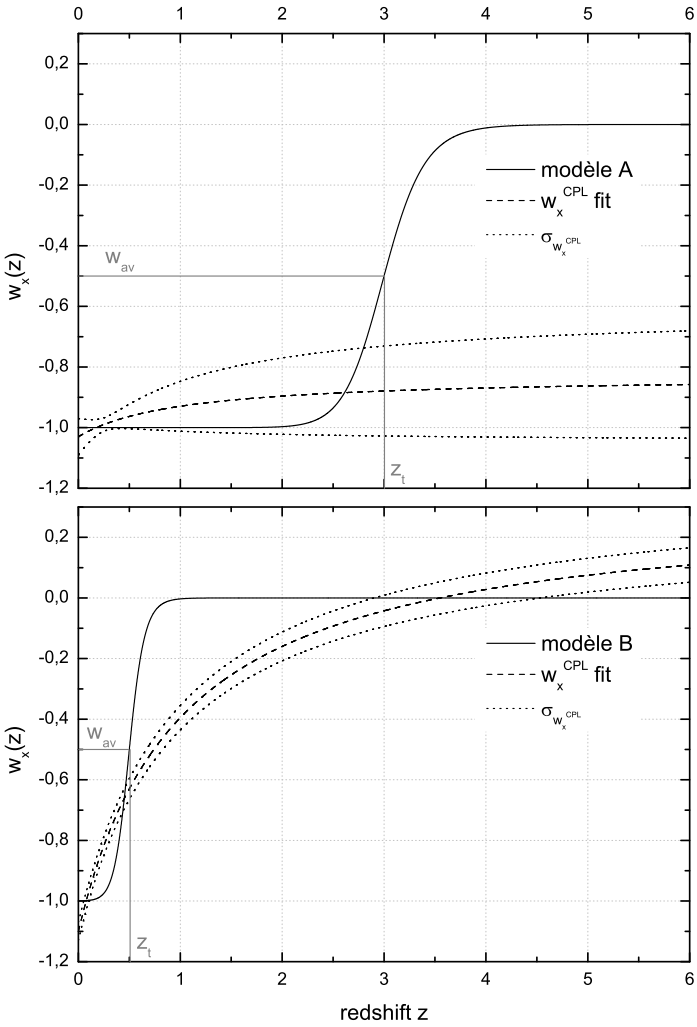


FIGURE 5.1: Illustration de la performance du fit CPL du Tableau 5.1 pour le modèle A (en haut) et le modèle B (en bas). L'équation d'état fiducielle est représentée en ligne noire, le meilleur fit CPL en lignes hachurées, et ses erreurs à 1σ en lignes pointillées.

Nous pouvons donc conclure de ces deux résultats, que l'éq.(5.1) devrait permettre une bonne reconstruction des paramètres locaux, *i.e.* w_0 et $\Omega_{\rm M}^0$, même dans le cas d'une transition rapide dans l'équation d'état de l'énergie noire, *si* cette transition a eu lieu pas trop récemment. Contrairement à ceci, sans grande surprise cependant, nous trouvons que le comportement à haut redshift peut entraîner de mauvaises interprétations des paramètres en question, à savoir w_i, $(w_{\rm x})_{\rm eff}$ et aussi possiblement de w_a. Afin de tester la stabilité de ces conclusions préliminaires nous varierons par la suite les quatre paramètres fiduciels.

5.4 L'espace des paramètres $(\mathbf{z_t}, \mathbf{\Gamma})$

5.4.1 Les modèles avec $\mathbf{w_i = 0}$ et $\mathbf{w_f = -1}$

Si nous fixons par la suite $w_i = 0$ et $w_f = -1$, nous pouvons étudier notre modèle du type 'step' dans le plan à deux dimensions de $(z_{\rm t}, \Gamma)$. Aux vues de la discussion section 3.3.1, nous trouvons ce choix physiquement bien motivé, mais nous allons aussi tester la variation de nos résultats en fonction des valeurs $w_i = 0$ et $w_f = -1$ dans la section suivante.
Dans le plan $(z_{\rm t}, \Gamma)$, chaque point représentera donc un modèle cosmologique spécifique. Nous ajusterons alors chacun de ces modèles fiduciels avec un modèle cosmologique où l'équation d'état de l'énergie noire est paramétrée par CPL, comme décrit auparavant. Ceci fait, nous regarderons la valeur du $\chi^2_{\rm min}$ et la qualité de reconstruction des six paramètres pour chacun de ces modèles. Les résultats que nous obtenons par cette procédure sont représentés dans les Figs. 5.2 à 5.5, où nous avons varié $z_{\rm t}$ dans l'intervalle $[0; 5]$ et Γ dans l'intervalle $[0; 11]$. Nous avons cependant testé nos conclusions pour des valeurs de $z_{\rm t}$ et de Γ encore supérieures. Nous remarquons tout d'abord, que la valeur $\chi^2_{\rm min}$ est sous notre critère pour tous les modèles dans le plan présenté, à l'exception d'une petite région de l'espace de paramètre, où $0.1 < z_{\rm t} < 0.5$ et $\Gamma \gtrsim 4$, et où $\chi^2_{\rm min} > 22$, région où se trouve notre modèle B, cf. Figure 5.2 (gauche). La qualité du fit est par conséquent correcte pour tous les autres modèles, et c'est dans ces régions de l'espace de paramètre qu'il sera d'une importance cruciale de connaître la qualité de reconstruction des paramètres cosmologiques.

Reconstruction des paramètres $\mathbf{\Omega^0_M}$ et $\mathbf{w_0}$: La Figure 5.3 montre la qualité de reconstruction des paramètres $\Omega^0_{\rm M}$ et w_0, où nous représentons en hachuré les zones de biais et en blanc les zones de validité que nous obtenons. Nous y retrouvons les modèles A et B. Les paramètres $\Omega^0_{\rm M}$ et w_0 sont en général fortement dégénérés, comme nous avons pu voir dans la discussion des contraintes

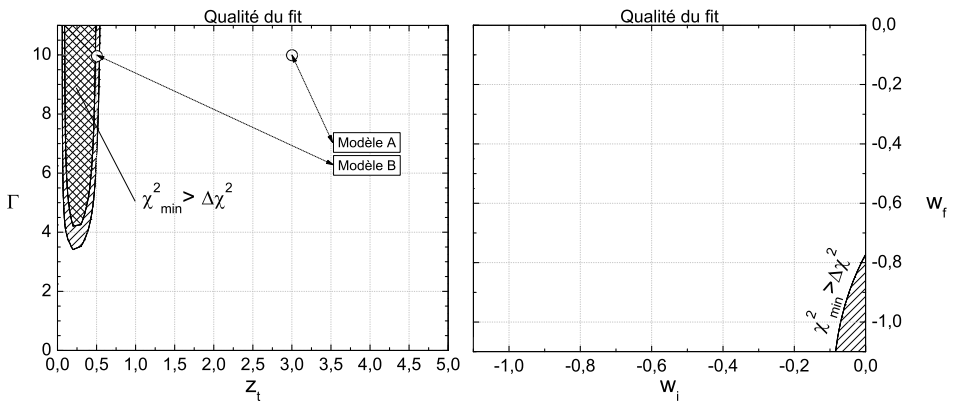


FIGURE 5.2: Les zones où $\chi^2_{\rm min} > 22$ (31) dans les tranches (w_i, w_f)=$(0, -1)$ (gauche) et $(z_{\rm t}, \Gamma)$=$(0.5, 10)$ (droite) de l'espace de paramètre du modèle $w_{\rm x}^{\rm step}$, correspondant via l'éq.(A.12) aux degrés de confiance de 68% (95%).

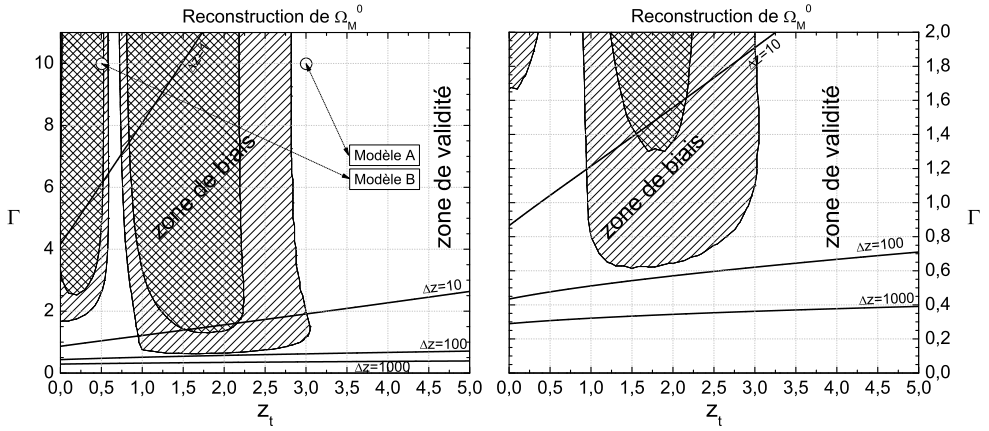
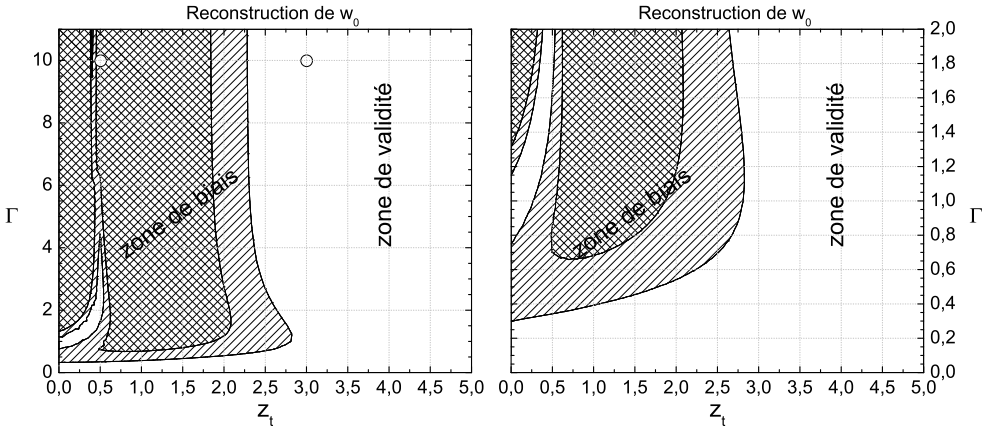


FIGURE 5.3: En haut : Qualité de reconstruction du paramètre $\Omega_{\rm M}^0$. Nous représentons dans l'espace de paramètre à deux dimensions, $(z_{\rm t}, \Gamma)$, les zones de validité (blanc) et les zones de biais obtenues pour le paramètre CPL de la densité de matière dans le plan en entier (côté gauche) et dans le sous-espace élargi $(z_{\rm t}, \Gamma) = ([0;5],[0;2])$ (côté droit). Nous avons dans cette figure représenté quelques contours $\Delta z =$ const. On distingue aussi dans les zones de biais les zones où $\Omega_{\rm M}^0$ est biaisé à 1σ selon notre définition du biais, et les zones où $\Omega_{\rm M}^0$ est biaisé à 1.96σ afin d'illustrer la variation du biais. En bas : Qualité de reconstruction du paramètre w_0.



des données actuelles, section 2.4. Cette dégénérescence forte résulte dans des zones de biais de $\Omega_{\rm M}^0$ et w_0 assez similaires. Nous trouvons que :

– Le paramètre w_0 (ainsi que tous les autres paramètres) est bien reconstruit le long la ligne $\Gamma = 0$. Ceci ne constitue qu'un signe de consistance, car $\Gamma = 0$ impose $w_i = w_f$ au modèle fiduciel, ce qui en fait revient à un modèle $w_{\rm x} =$ const. qui doit, bien entendu, être correctement reconstruit par CPL.
– Si $\Gamma \leq 0.3$, la transition est suffisament lente pour que w_0 soit reconstruit sans biais quelle que soit le redshift de la transition, $z_{\rm t}$. Avec les valeurs de $z_{\rm t}$ augmentant, cependant, la borne augmente vers des valeurs de Γ plus grandes en suivant une courbe concave, mais ne suivant pas une ligne $\Delta z =$ const. Par exemple, quand $z_{\rm t} = 2.7$, le paramètre w_0 est bien reconstruit pour toutes

transitions $\Gamma \leq 0.8$, correspondant à une largeur de transition en redshift de $\Delta z \simeq 50$.
– Nous trouvons une bonne reconstruction de w_0 pour $z_{\rm t} \gtrsim 2.5$ pour toutes les valeurs de Γ (sauf dans une petite 'bosse' entre les valeurs $0.7 \lesssim \Gamma \lesssim 2.5$ qui s'étend jusqu'à $z_{\rm t} = 2.8$). Ceci peut être compris à partir de notre illustration de la Figure 5.1, où nous avons vu que pour des transitions à des redshifts supérieurs à la portée des données SNe et BAO, l'équation d'état 'locale' décrit parfaitement une dynamique $w_{\rm x} = \text{const.}$, ou bien, dans le cas d'une transition lente, une dynamique presque constante, $w_{\rm x} \simeq \text{const}$. Ces deux cas sont bien reconstruits par le paramétrage CPL.
– Nous trouvons une petite région de bonne reconstruction de w_0 dans l'espace de paramètre, où $z_{\rm t} \simeq 0.5 \pm 0.1$ *et* $1.8 \lesssim \Gamma \lesssim 4.5$ (correspondant à $1.3 \lesssim \Delta z \lesssim 4.3$). En effet, le paramétrage a tendance à surestimer la valeur de w_0 pour des transitions très récentes, et à sous-estimer sa valeur pour des transitions à plus haut redshift. Il s'agit donc d'une reconstruction correcte mais 'accidentelle'. Cette petite zone de validité n'est par conséquent pas d'un intérêt particulier dans notre discussion. Nous allons cependant voir réapparaître ce phénomène pour les paramètres $\Omega_{\rm M}^0$, w_i, et $(w_{\rm x})_{\rm eff}$, et de façon moins prononcé pour le paramètre w_p.
– Concernant la reconstruction de $\Omega_{\rm M}^0$, nous trouvons une légère augmentation de la zone de biais dans la direction de $z_{\rm t}$: La limite de la zone de biais est à $z_{\rm t} \simeq 2.8$, la 'bosse' s'étendant jusqu'à $z_{\rm t} \simeq 3.1$. Aussi, en terme du paramètre Γ le paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ est bien reconstruit pour un plus grand nombre de modèles fiduciels que le paramètre w_0. Notamment, il est correctement reconstruit pour $\Gamma \leq 0.6$ pour toutes valeurs de $z_{\rm t}$. Il y apparaît une zone de bonne reconstruction autour de $z_{\rm t} \approx 0.6$ pour toutes valeurs de Γ, dont la largeur decroît avec des valeurs croissantes de Γ. Il s'agit ici du même phénomène que nous avons déjà observé pour le paramètre w_0, à savoir que CPL sur-estime la valeur de $\Omega_{\rm M}^0$ pour des tranistions récentes, et la sous-estime pour des transitions à plus haut redshift. Cette zone de bonne reconstruction est donc dû au passage entre ces deux régions. Notons cependant, que cette zone de bonne reconstruction de $\Omega_{\rm M}^0$ est bien plus grande que ce fut le cas pour le paramètre w_0.

Reconstruction du paramètre $\mathbf{w_p}$: Le scan du même plan pour la reconstruction de w_p mène à des résultats similaires, cf. Figure 5.4 (en haut). Ici, nous trouvons une zone de biais agrandie comparée à celle de w_0. Notamment, w_p est bien reconstruit si $z_{\rm t} \geq 2.7$ pour n'importe quelle valeur de Γ (la 'bosse' de la zone de biais est présent pour w_p aussi, et s'étend jusqu'à $z_{\rm t} \simeq 3.5$), ou si $\Gamma \leq 0.2$ pour toutes valeurs de $z_{\rm t}$. Nous notons, cependant, que nous trouvons la qualité de reconstruction de w_p extrêmement sensible aux erreurs attribuées aux SNe et aux paramètres réduits du CMB et des BAO. Ce paramètre n'étant pas d'un grand intérêt physique, nous ne considérerons plus ce paramètre par la suite.

Reconstruction du paramètre $\mathbf{-2w_x\,(1)}$: L'évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire, encodée dans le paramètre w_a via la relation

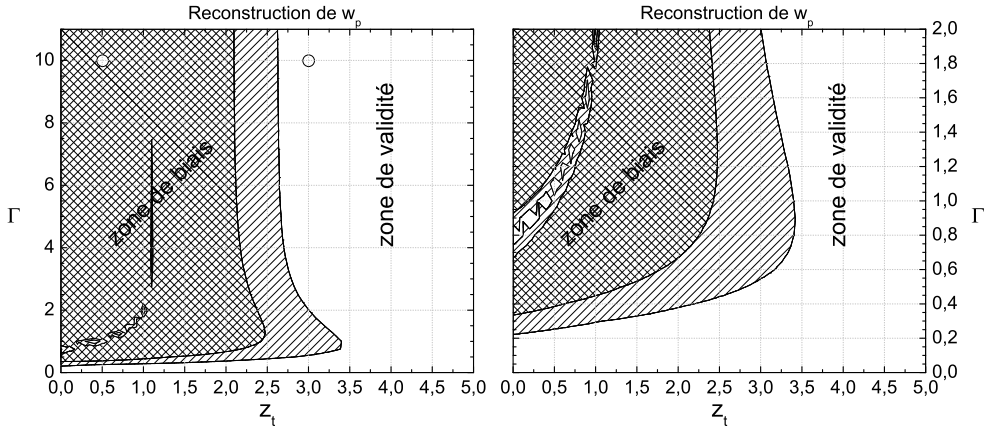
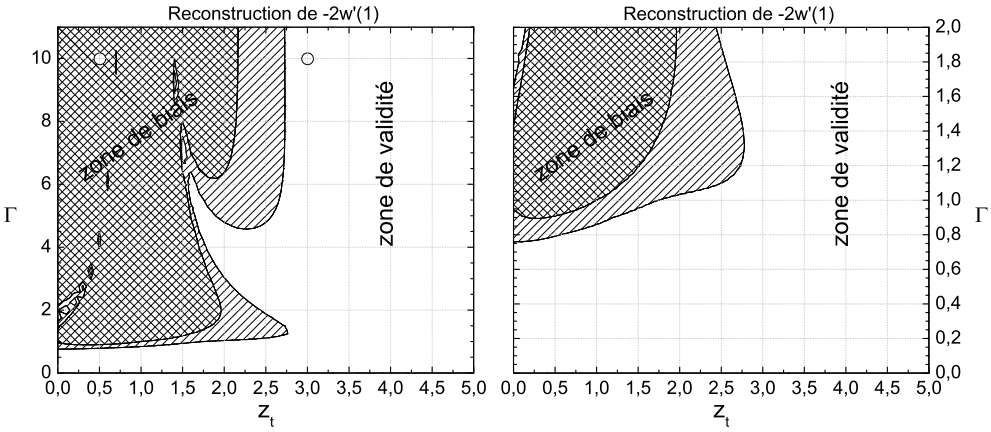


FIGURE 5.4: En haut : Qualité de reconstruction du paramètre w_p. En bas : Qualité de reconstruction de l'évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire. Nous représentons dans l'espace de paramètre à deux dimensions, $(z_{\rm t}, \Gamma)$, les zones de validité (blanc) et les zones de biais (à 1σ et 1.96σ).



éq.(5.6), est reconstruite comme montré sur la Figure 5.4 (en bas). Nous trouvons, que l'éq.(5.6) permet une interprétation correcte (non-biaisée) de w_a dans les cas :

– où $\Gamma \leq 0.8$ pour toutes valeurs de $z_{\rm t}$, correspondant à des transitions assez grandes ($\Delta z \gtrsim 12$),

– où $z_{\rm t} \geq 2.7$ quelle que soit la valeur de Γ, et

– dans une zone où $z_{\rm t} \gtrsim 1.7$ et $2.5 \lesssim \Gamma \lesssim 4.5$.

Au-delà de ces zones, la validité de la relation éq.(5.6) s'effondre et nous perdons la signification physique du paramètre w_a.

Reconstruction des paramètres $\mathbf{w_i}$ et $(\mathbf{w_x})_{\mathbf{eff}}$: En ce qui concerne la reconstruction du comportement de l'équation d'état à haut redshift, nous nous apercevons que w_i est très mal reconstruit pour presque toutes paires $(z_{\rm t}, \Gamma)$ si $\Gamma \gtrsim 0.1$, cf. Figure 5.5 (gauche). Il existe une zone de validité, là où $1.25 \lesssim z_{\rm t} \lesssim 1.5$ et $\Gamma \gtrsim 1$, mais son emplacement dans l'espace de paramètre est accidentel

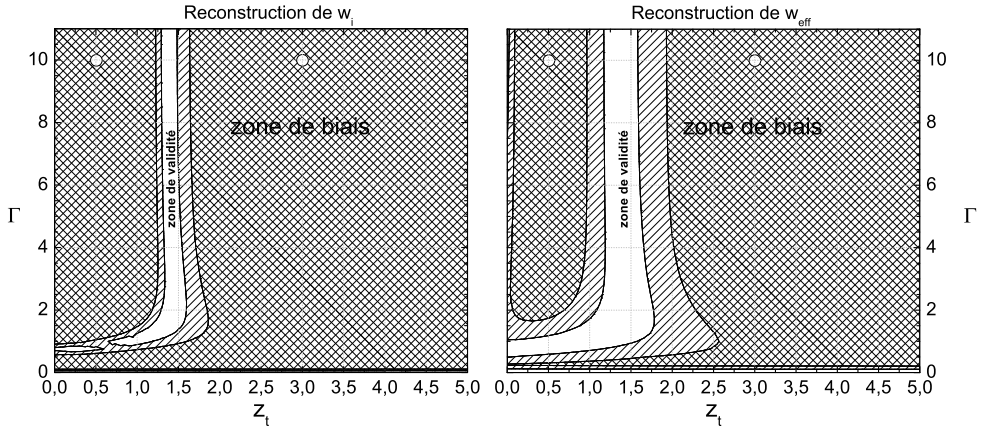


FIGURE 5.5: Gauche : Qualité de reconstruction de la valeur initiale de l'équation d'état de l'énergie noire, w_i. Droite : Qualité de reconstruction de la valeur intiale de l'équation d'état de l'énergie noire, $(w_{\mathrm{x}})_{\mathrm{eff}}$.

comme ce fut le cas pour les paramètres Ω_{M}^0 et w_0. Le fit CPL sur-estime la valeur de w_i pour les transitions récentes, et la sous-estime pour des transitions ayant lieu à plus haut redshift, très visible sur la Figure 3.6. La zone de bonne reconstruction est alors la zone où CPL passe entre ces deux régions. Son emplacement (comme d'ailleurs celle des zones de bonne reconstruction 'accidentelle' des autres paramètres) sera donc très sensible aux valeurs de w_i et w_f. Par conséquent, nous nous exposons à de grands risques de mal interpréter le comportement à haut redshift de l'équation d'état de l'énergie noire quand nous appliquons le paramétrage CPL. Concernant le paramètre $(w_{\mathrm{x}})_{\mathrm{eff}}$, nous trouvons que sa reconstruction est aussi problématique que celle de w_i, cf. Figure 5.5 (droite). La seule différence avec ce dernier est que la zone de reconstruction 'accidentelle' est plus large, ce qui est principalement dû au fait que l'erreur $\sigma_{w_{\mathrm{eff}}}$ est en général plus grande que l'erreur σ_{w_i} d'au moins un facteur deux.

Résumons ce que nous avons établi dans cette section. Nous avons à partir des Figures 5.2 à 5.5 quantifié les zones de validité du paramétrage CPL, pour des modèles d'énergie noire correspondant aux solutions 'tracker' de la Quintessence exhibant un comportement du type 'step'. Notamment, pour des modèles exhibant une transition entre la valeur initiale $w_i = 0$ et une valeur future asymptotique $w_f = -1$, nous avons obtenu que tous les paramètres sauf ceux décrivant la dynamique de l'énergie noire à très haut redshift sont bien reconstruits pour toutes transitions aux largeurs $\Gamma \lesssim 0.3$ ayant lieu aux redshifts de transition $z_{\mathrm{t}} \gtrsim 2.5$. Clairement, ces bornes vont être sensibles aux variations des valeurs fiducielles de w_i et w_f.

5.4.2 Les modèles avec $\mathbf{w_i = -0.8}$ et $\mathbf{w_f = -1}$

Par exemple, si nous changons le paramètre $w_i = 0$ à $w_i = -0.8$ en gardant $w_f = -1$, nous trouvons une valeur du χ^2_{min} extrêmement petite dans tous le

plan $(z_{\rm t}, \Gamma)$. Au niveau de la valeur du $\chi^2_{\rm min}$, tous les fits sont corrects. Les zones de biais et de validité changent significativement. En ce qui concerne la reconstruction des paramètres 'physiques', nous trouvons notamment :
– Le paramètre $\Omega^0_{\rm M}$ est toujours bien reconstruit pour toutes valeurs de $z_{\rm t}$ et Γ.
– Le paramètre w_0 est seulement biaisé si $z_{\rm t} \lesssim 0.25$ et $\Gamma \gtrsim 7$, soit dans les cas des transitions très récentes et très rapides ($\Delta z \lesssim 0.7$).
– Le paramètre w_a est biaisé dans une zone où $z_{\rm t} \lesssim 1.5$ avec $\Gamma \gtrsim 2$ (*i.e.* $\Delta z \lesssim 6$). Il existe une zone de reconstruction accidentelle que nous avons déjà discuté dans la section précédente. La reconstruction de w_a est représenté sur la Figure 5.6 (gauche).
– La valeur initiale de l'équation d'état, w_i, est seulement biaisée si $0.1 \lesssim z_{\rm t} \lesssim 0.5$ et $\Gamma \gtrsim 4$, correspondant à des transitions très récentes et très rapides ($\Delta z \lesssim 1.1$), comme représenté sur la Figure 5.6 (droite).
– La valeur effective de l'équation d'état, $(w_{\rm x})_{\rm eff}$, est biaisée dans une très petite zone $0.2 \lesssim z_{\rm t} \lesssim 0.4$ et $\Gamma \gtrsim 8$, correspondant à des transitions très récentes et très rapides ($\Delta z \lesssim 0.6$).

Par conséquence, CPL est capable de décrire le comportement à haut redshift de ce modèle pour toutes les transitions centrées aux redshift $z_{\rm t} \gtrsim 0.5$, quelle que soit la largeur de la transition. Pour cet exemple particulier nous trouvons donc que CPL est un très bon choix pour paramétrer l'équation d'état de l'énergie noire.

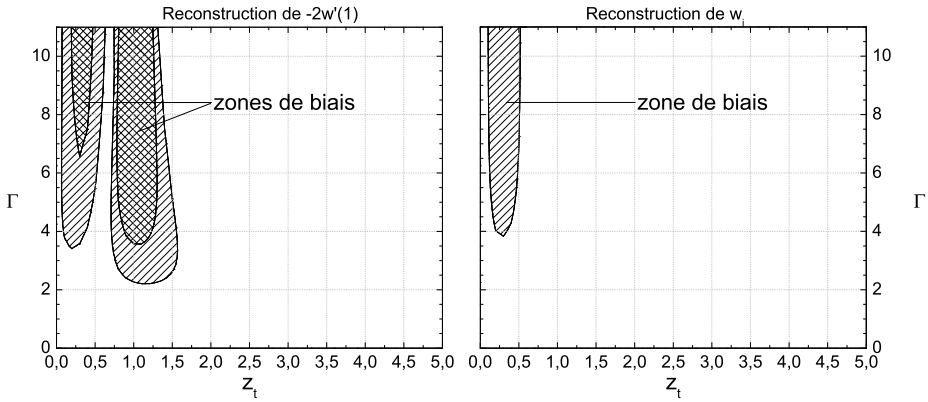


FIGURE 5.6: Gauche : Qualité de reconstruction de $-2w'_{\rm x}(1)$. Droite : Qualité de reconstruction de w_i. Ici, les paramètres fiduciels w_i et w_f sont fixés à $w_i = -0.8$ et $w_f = -1$ afin de décrire une transition dans l'équation d'état de petite amplitude.

5.5 L'espace des paramètres $(\mathbf{w_i}, \mathbf{w_f})$

Afin d'être plus précis à propos de l'influence des variations des valeurs fiducielles de w_i et w_f, nous allons à présent étudier les biais dans le plan (w_i, w_f), où nous fixons les valeurs $z_{\rm t} = 0.5$ et $\Gamma = 10$ pour décrire un cas 'pessimiste', à savoir une transition très rapide ($\Delta z = 0.6$) qui n'a eu lieu que récemment.

Ce choix implique alors le modèle B si $w_i = 0$ et $w_f = -1$, cas où, nous le rappelons, tous les paramètres étaient biaisés, mais l'identification d'un problème au niveau du fit était possible à 68% de confiance. Nous considérons ensuite des variations des valeurs de w_i and w_f dans l'intervalle $[-1.1; 0]$ (pour les deux), et obtenons les zones de biais et de validité pour les six paramètres 'physiques' comme représentées sur les Figures 5.7. Nous remarquons que tous les fits sont corrects au niveau du $\chi^2_{\rm min}$, qui est inférieur à 22 dans le plan entier (cf. Figure 5.2 (droite)), à l'exception d'une très petite région vers (w_i, w_f)=$(0, -1)$ où se trouve notre modèle B. En ce qui concerne la qualité de reconstruction des paramètres cosmologiques nous obtenons notamment :
– $\Omega^0_{\rm M}$ est bien reconstruit pour toutes valeurs de w_f si seulement $w_i \lesssim -0.4$. Si $w_i > -0.4$, $\Omega^0_{\rm M}$ est bien reconstruit seulement si $|\Delta w| \lesssim 0.4$.
– w_0 est bien reconstruit si $|\Delta w| \lesssim 0.2$ (cas traité en section 5.4.2),
– $-2'_{\rm x}(1)$, la dynamique de l'équation d'état, a plus de risque d'être biaisé que w_0. Pour des valeurs asymptotiques $w_i \sim w_f \lesssim -0.8$ il est bien reconstruit seulement si $|\Delta w| \lesssim 0.1$. Pour des valeurs de $w_i \sim w_f \gtrsim -0.8$, la dynamique n'est bien reconstruit que pour le cas d'une équation d'état quasi constante, $|\Delta w| \lesssim 0.05$.
– La reconstruction de la valeur intiale, w_i, est similaire à celle de $-2'_{\rm x}(1)$ mais légèrement meilleure. w_i est bien reconstruit si $|\Delta w| \lesssim 0.1$, borne qui s'élargit à $|\Delta w| \lesssim 0.2$ si $w_i \sim w_f \lesssim -0.8$.
– La valeur effective de l'équation d'état, $(w_{\rm x})_{\rm eff}$, est mieux reconstruite que la valeur initiale. Elle est bien reconstruite pour des transitions $|\Delta w| \lesssim 0.2$.

En résumant, nous avons trouvé que CPL permet d'obtenir des résultats valides même dans des cas d'une transition rapide et récente dans l'évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire (le cas le plus pessimiste), si seulement l'amplitude de la transition, Δw, n'est pas trop élevée.

5.6 Confusion avec des modèles $\mathbf{w_x}$ = const. et ΛCDM

Quand des biais sont présents dans une analyse, il est intéressant d'étudier les valeurs concrètes des paramètres biaisés afin d'estimer le risque que la mauvaise hypothèse, ici l'hypothèse de la validité du paramétrage CPL, résultera dans une confusion du meilleur fit avec un modèle cosmologique particulier. Notamment, il est intéressant de savoir si on pourrait confondre le modèle fiduciel avec le modèle standard, ΛCDM, par exemple, ou plus généralement avec un modèle $w_{\rm x}$ = const. Si l'amplitude de la transition est grande, $\Delta w = +1$ comme dans notre cas particulier de la section 5.4, nous allons confrondre le modèle fiduciel avec un modèle $w_{\rm x}$ = const. si $z_{\rm t} \gtrsim 3$ et $\Gamma \gtrsim 2$. Si, de plus, le fiduciel exhibe $w_f = -1$, la confusion est avec ΛCDM. Ceci peut, encore une fois, être compris à partir de l'exemple du modèle A, Figure 5.1 (en haut) : la vraie cosmologie correspond effectivement à un modèle $w_{\rm x}$ = const. = -1. A bas redshift, où les données actuelles SNe et BAO sont obtenues. La contrainte à haut redshift (CMB) n'est pas assez forte pour compenser cet effet. Le risque de confusion est plus important si l'amplitude est plus petite. Concrètement, pour

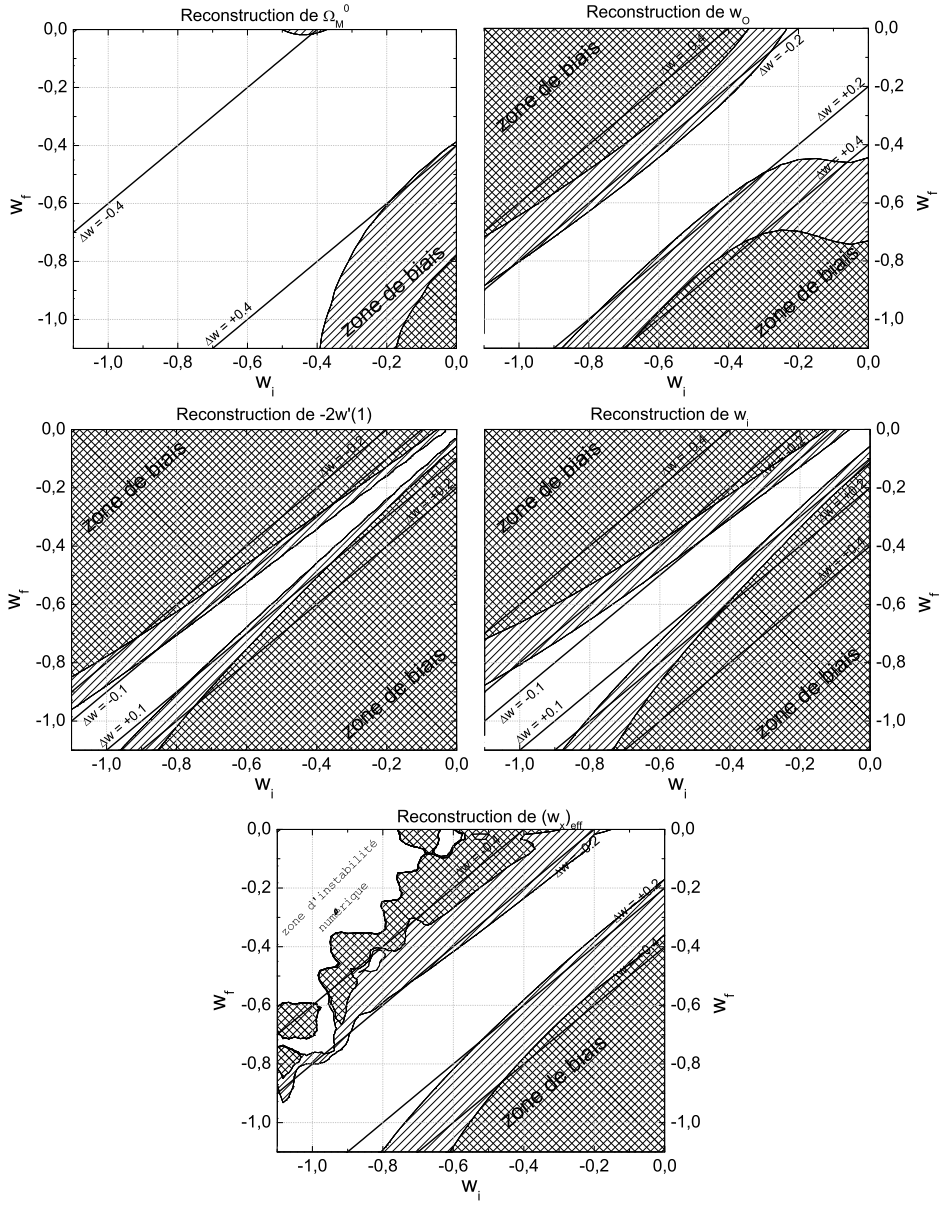


FIGURE 5.7: Qualité de reconstruction des paramètres 'physiques' étudiés dans l'espace de paramètre à deux dimensions (w_i, w_f). Nous représentons les zones de validité en blanc et les zones de biais où on distingue les zones de biais à 1σ et 1.96σ. On a fixé $z_t = 0.5$ et $\Gamma = 10$.

l'exemple où $\Delta w = +0.2$ (section 5.4.2), on confond le modèle fiduciel avec un modèle $w_{\rm x} = \text{const.}$ si $z_{\rm t} \gtrsim 0.7$, indépendamment de la largeur de la transition. Si de plus la transition est lente ($\Gamma \lesssim 2$) on confond le modèle fiduciel avec un modèle $w_{\rm x} = \text{const.}$ quel que soit le redshift z_t de la transition.

5.7 Stabilité des résultats

Nous avons testé la stabilité des résultats par rapport aux variations dans la valeur fiducielle du paramètre de la densité de matière. Quand on varie autour de la valeur cible de notre étude, $0.25 \leq \Omega_{\mathrm{M}}^{0\ \mathrm{Fid}} \leq 0.35$, on aperçoit une très légère augmentation en volume des zones de biais de tous les paramètres 'physiques' pour des valeurs fiducielles $\Omega_{\mathrm{M}}^{0\ \mathrm{Fid}} < 0.30$, et d'une légère diminution en volume pour des valeurs fiducielles $\Omega_{\mathrm{M}}^{0\ \mathrm{Fid}} > 0.30$. Ceci est compréhensible quand on regarde l'intégrale qui intervient dans le calcul des observables. Plus le paramètre de densité de matière, Ω_{M}^{0}, domine la fonction de Hubble éq.(5.3), moins les paramètres de l'énergie noire contribuent à la dynamique, et les risques de biais sont donc réduits. Cette variation n'est cependant pas significative, et change les bornes que nous avons discutées ci-dessous de seulement quelques pourcent. Les conclusions tirées ci-dessus sont donc valables pour toutes valeurs de $\Omega_{\mathrm{M}}^{0\ \mathrm{Fid}}$ autour de 0.30.
Quand on analyse la stabilité des zones de biais et de validité par rapport aux variations de la statistique de la base de données (nombre de SNe, erreurs sur les observables), on s'aperçoit (sans grande surprise), que l'on augmente les zones de validité de tous paramètres quand on applique une statistique moins élévée. Dans une analyse à basse statistique, les paramètres cosmologiques sont ajustés avec des erreurs σ_{p_i} relativement grandes, et on a plus de chance que le biais soit plus faible que l'erreur. Inversement, quand on augmente la statistique, les erreurs sur les paramètres cosmologiques sont plus petites, et on augmente le risque de mal interpréter ces paramètres quand une fausse hypothèse est présente dans l'analyse.

5.8 Résumé

Nous avons quantifié le niveau jusqu'auquel le paramétrage CPL de l'équation d'état de l'énergie noire est capable de reconstruire la dynamique d'une énergie noire dont l'équation d'état montre une transition de phase plus ou moins rapide, comme cela serait le cas pour une classe de solutions tracker, cf. Figure 3.2. Nous avons utilisé une fonction tangente hyperbolique pour décrire l'équation d'état fiducielle, et avons effectué l'analyse d'un échantillon prospectif de données SNe, BAO, et CMB. Nous trouvons, que les paramètres cosmologiques locaux, soit les paramètres Ω_{M}^{0} et w_0, sont en général bien reconstruits, sauf dans les cas d'une transitions récente, $z_{\mathrm{t}} \lesssim 2.7$, et rapide, $\Gamma \gtrsim 0.3$, à grandes amplitudes, $|\Delta w| = |w_i - w_f| \gtrsim 0.2$, dans l'équation d'état fiducielle. La valeur de l'équation d'état au redshift 'pivot', w_p, a été proposée comme moyen d'extraire les propriétés de l'équation d'état de l'énergie noire. Nous avons trouvé, que les risques de mal interpréter w_p sont plus grands que le risque de mal interpréter w_0, la valeur actuelle de l'équation d'état. De plus, ces résultats concernant w_p sont plutôt instables, et nous ne trouvons pas de véritable signification physique au redshift pivot. Nous concluons en conséquence, que la valeur w_p n'est pas une bonne quantité pour interpréter les fits cosmologiques.
L'évolution en redshift de l'équation d'état de l'énergie noire, encodée dans le

paramètre w_a via l'éq.(5.6), est bien reconstruite, résultat auquel nous ne nous attendions pas forcément. Nous trouvons notamment, que des biais sont présents seulement si $z_\mathrm{t} \lesssim 2.7$ et $\Gamma \gtrsim 0.8$ pour de grandes amplitudes $|\Delta w|$, et que ces bornes sont réduites à $z_\mathrm{t} \lesssim 1.5$ et $\Gamma \gtrsim 2$ pour de plus petites amplitudes. Si l'amplitude est plus petite que 0.1, nous ne trouvons pas de biais du tout.
Par contre, le comportement de l'équation d'état de l'énergie noire à haut redshift est en général fortement biaisé. Seulement dans le cas d'une transition très lente, $\Gamma \lesssim 0.1$, ou à petites amplitudes, $|\Delta w| \lesssim 0.2$, CPL est apte à reconstruire correctement la dynamique fiducielle.

En résumé, les paramètres les mieux reconstruits sont donc Ω_M^0 et w_0, et dans une moindre mesure w_a interprété comme $-2w'_\mathrm{x}(1)$. Il apparaît, que la quantité $w_0 + w_a$, correspondant à la valeur initiale de l'équation d'état, w_i, entraîne le plus grand risque d'interprétation incorrecte. On devra par conséquent interpréter avec précaution la valeur initiale que l'on obtient via le paramétrage CPL. Pour exclure la possibilité de telles fausses interprétations des fits, l'application de CPL devrait être restreinte aux zones de validité dans l'espace de paramètre que nous avons quantifiés, et une analyse des données afin d'extraire les paramètres cosmologiques devrait être complétée par un fit des données avec une fonction du type 'step'. Une telle étude a en effet été effectuée récemment, par Ferramacho et al. (2009b), qui trouvent dans une analyse des données SNe, CMB et BAO, que toutes transitions du type 'step' entre $w_i = -0.2$ et $w_f = -1$ qui auraient lieu aux redshifts $z_\mathrm{t} \lesssim 0.7$ seraient rejetés par les données.

Chapitre 6

Effets d'une évolution des magnitudes apparentes des Supernovae de type Ia.

Comme nous avons vu dans les sections précédentes, notamment la section 2.3.2, les SNe du type Ia constituent une sonde puissante pour mesurer des distances cosmologiques à partir des observables *flux* ($\mathcal{F}$) et *redshift* (z), et d'en extraire les paramètres cosmologiques ($\{p_i\} = \left\{\Omega_i^0, w_{\mathrm{x}}\right\}$). Les seuls ingrédients théoriques pour établir la relation éq.(2.80) entre magnitudes et redshifts des objets lumineux sont le Principe Cosmologique et l'hypothèse d'une variété Riemanienne à quatre dimensions, soit finalement la métrique FRW. Nous rappelons la forme de cette relation :

$$\mu = M_{\mathrm{s}} + 5 \log D_{\mathrm{L}}(z; \Omega_i^0, w_{\mathrm{x}}), \tag{6.1}$$

où M_s est la constante de normalisation des Supernovae, éq.(2.81), et D_{L} est la distance lumineuse indépendante de la constante de Hubble, cf. éq.(2.79).

6.1 Motivation de l'étude

L'application de l'éq.(6.1) est cependant rendue compliquée à cause de divers effets. Les données pour les courbes de lumière des SNe ne sont pas disponibles dans la gamme de fréquence entière, mais seulement dans une petite gamme, appellée 'bandpass', qui doit être liée à la luminosité bolométrique totale. La correction pour ajuster ce fait, le 'bandpass mapping', est réalisé en rajoutant un terme de correction, dont la valeur ne dépend pas seulement du redshift de l'objet mais aussi de son spectre, cf. Drell et al. (2000). Au delà de ce problème, le véritable point crucial de l'application de l'éq.(6.1) est la détermination de la luminosité intrinsèque de l'objet, qui n'est pas directement mesurable, à partir des propriétés spectroscopiques ou photométriques. Il est établi que toutes les SNe ne sont point de la même luminosité (magnitude absolue) ; on parle d'une dispersion de 0.5mag de la magnitude au maximum. Mais nous avons vu que l'on peut établir une relation entre la courbe de lumière et la magnitude absolue

au maximum, cf. éq.(2.75). Kowalski et al. (2008) donnent la valeur :

$$\Delta M_{\rm intr} = 0.15, \tag{6.2}$$

pour l'incertitude intrinsèque de la magnitude absolue des SNe, provenant des standardisations. Par l'éq.(2.71), la précision des distances cosmologiques mesurées à partir des données SNe est alors intrinsèquement limitée à :

$$\frac{\Delta d_{\rm L}}{d_{\rm L}} = 0.2 \log(10)\, \Delta M_{\rm intr} \approx 0.46 \Delta M_{\rm intr}, \tag{6.3}$$

soit à une précision maximale d'environ sept pourcent. Nous avons vu sur la Figure 2.9, que la standardisation est nécessairement effectuée aux bas redshifts, où les distances des SNe peuvent être estimées par d'autres indicateurs de l'échelle de distance. Il est cependant parfaitement possible, que cette extrapolation ne soit pas permise. Il pourrait y avoir une variation systématique du module de distance des SNe en fonction du redshift. On peut imaginer plusieurs scénarios d'effets astrophysiques susceptibles de causer une telle variation.

6.1.1 Effets intrinsèques

Nombre d'effets pourraient influencer les propriétés intrinsèques des SNe, comme la magnitude au maximum ou la forme de la courbe de lumière. Les premiers indicateurs d'une possible évolution des magnitudes en redshift viennent des mesures du temps d'ascension de la courbe de lumière avant maximum pour des SNe à plus haut redshift (Riess et al. 1999). Diverses causes pour une telle évolution ont été proposées. La variation de la métallicité des étoiles progénitrices avec celle de l'univers est sans doute responsable d'une évolution globale des propriétés intrinsèques des SNe. De plus, la masse initiale et la composition de la matière de la naine blanche au moment de l'explosion, variant en fonction du temps cosmologique, pourraient influencer les propriétés intrinsèques des SNe. L'importance de différentes compositions et métallicité initiale pour la dynamique de l'explosions SNe est étudiée numériquement. Cependant, les résultats de Hoeflich et al. (1998), Lentz et al. (2000), et Röpke & Hillebrandt (2004) ne sont pas en accord concernant la prédiction des changements en magnitude intrinsèque et de la forme des courbes de lumière en fonction de la composition. La modélisation des SNe souffre de nombreux problèmes, comme l'existence de différents paradigmes pour le mécanisme d'explosion (modèles de détonation ou de déflagration). D'autres effets pourraient provenir des phénomènes liés à l'environnement direct de l'étoile, comme des nuages de gaz circumstellaires ou de l'existence de champs magnétiques. La rotation des étoiles progénitrices est prise en compte par des modèles numériques à trois dimensions, mais les résultats ne sont pas encore concluants, cf. Röpke (2005). En outre, la dépendence du flux global sur l'âge des étoiles progénitrices reste mal conçue. En effet, Gallagher et al. (2005) soulignent que l'âge des progéniteurs est plus probablement la source des variations des magnitudes au maximum que ne l'est la métallicité. Une étude des échantillons SN par Strolger et al. (2004, le 'SN high-z team') montre, que des modèles de SNe exhibant un grand pourcentange d'explosions

'promptes' (associées à des progéniteurs âgés de moins que deux milliards d'années) ne reproduisent pas bien la distribution en redshift des SNe observées, et sont rejetés à plus de 95% de degré de confiance. Quand on observe l'univers plus jeune, soit à $z \gtrsim 1.5$, on s'attend à un âge moyen des étoiles progénitrices plus petits au moment de l'explosion que dans l'univers vieux. Une étude de la variation en magnitude des explosions SN en fonction de l'âge moyen dans différentes galaxies hôtes par Howell et al. (2007) suggère en effet des SNe plus lumineuses à haut redshift qu'à bas redshift.
Dans ce contexte se pose un autre problème concernant l'âge des étoiles progénitrices. Les deux modèles majeurs de systèmes progéniteurs, à savoir les modèles 'single-degenerate' et 'double-degenerate', diffèrent en terme du délai de l'explosion et des conditions d'environnement. L'incertitude à propos de l'identification du scénario pourra, suivant Riess & Livio (2006), aussi entraîner un effet d'évolution globale.

6.1.2 Sous-populations

Hamuy et al. (1996a,b) ont suggéré que la magnitude des SNe dépend de la galaxie hôte, à savoir que l'on trouvera des SNe plus lumineuses dans des galaxies elliptiques ('early-type') que dans des galaxies sprirales ('late-type'), et ont proposé une classification des SNe dans deux sous-classes. L'étude de Hatano et al. (2000) met en valeur que ces sous-populations pourraient être identfiées comme provenant des deux mécanismes d'explosions différents que nous avons déjà mentionnés, soit les modèles de détonation ou de déflagration, ou une combinaison des deux (modèles de détonations retardées). Suivant Branch et al. (2001), une transition entre une époque cosmique à population de SNe dominée par une des sous-classes vers une époque dominée par une autre sous-classe, composée de SNe possédant une magnitude absolue différente, pourrait aussi faire croire à une évolution globale des magnitudes des SNe. Cette possibilité a récemment été étudiée par Sarkar et al. (2008a) et Linder (2009), qui ont montré qu'un tel effet pourra entraîner une reconstruction biaisée des paramètres de l'énergie noire.

6.1.3 Effets extrinsèques

Une autre classe d'effets astrophysiques pouvant entraîner une évolution globale en redshift des magnitudes apparentes des SNe ou des propriétés de la courbe de lumière est constituée d'effets extrinsèques, qui donc n'influent pas sur les propriétés intrinsèques de la SN, mais sont des effets entre la SN et l'observateur. Les lentilles gravitationnelles miment un effet d'évolution aux échelles cosmologiques, mais cette influence a été démontrée négligeable (cf. Sarkar et al. 2008b). La poussière grise ('gray dust') présente sur la ligne de visée atténue la luminosité des SNe, ce qui peut biaiser l'extraction des paramètres cosmologiques (cf. Aguirre 1999; Corasaniti 2006; Ménard et al. 2009). Une autre source potentielle d'évolution des magnitudes est liée à l'évolution dans le temps du milieu interstellaire associée à une modification du rapport des populations des galaxies spirales et elliptiques.

Aujourd'hui, on suppose que la standardisation des SNe de type Ia, calibrée à bas redshift, reste valable à haut redshift ($z \gtrsim 1$). Notre objectif dans cette étude est de mettre en doute cette hypothèse et de mesurer l'influence d'une possible évolution des magnitudes des SNe Ia sur les valeurs reconstruites des paramètres cosmologiques, exercice qui n'a pas été effectué auparavant. Nous allons à cette fin simuler les observables en supposant qu'une évolution en redshift des SNe *a lieu*, mais *négligerons* cette possibilité dans l'analyse des données. Au vu de la diversité des sources d'évolutions possibles, résumées ci-dessus, nous avons considéré plusieurs paramétrages différents, physiquement justifiés, afin de simuler de façon générique ces effets d'évolution. Afin de juger la qualité du fit que nous obtenons par cette procédure, nous allons étudier différents critères nous permettant d'identifier la présence d'une mauvaise hypothèse (l'absence d'évolution) dans notre analyse des données (simulées).

6.2 Paramétrages de l'effet

Une évolution en redshift du module de distance, soit une évolution de la magnitude apparente ou de la magnitude absolue (ou d'un mélange des deux) des SNe, peut être simulée par une modification très simple de la relation éq.(6.1) :

$$\mu = M_{\rm s} + 5 \log D_{\rm L}(z; \Omega_i^0, w_{\rm x}) + \Delta m(z)^{\rm evo}. \tag{6.4}$$

Nous allons dans la suite simplement écrire $\Delta m^{\rm evo}$ au lieu de $\Delta m\,(z)^{\rm evo}$. Plusieurs modèles pour décrire l'effet d'évolution ont été appliqués dans la littérature. Cependant, la diversité des causes physiques et notre ignorance de l'importance relative de chaque source d'un tel effet fait que le choix du paramétrage est plus ou moins arbitraire. Linder (2006) a choisi un paramétrage :

$$\Delta m^{\rm evo} \propto z/\,(1+z)\,, \tag{6.5}$$

afin d'étudier le risque d'introduire des biais. Ferramacho et al. (2009a) utilisent :

$$\Delta m^{\rm evo} \propto (t\,(z; p_i) - t_0)\,, \tag{6.6}$$

pour une analyse des données réelles, où $t\,(z; p_i)$ est l'âge de l'univers au redshift z, cf. éq.(2.104). Quand nous étudions le comportement en fonction de redshift de l'âge de l'univers, nous trouvons pour le cas ΛCDM que dans l'époque de la domination de l'énergie noire, soit $z < z_{\rm eq}$, l'intégrale dans l'éq.(2.104) s'approche de la solution analytique $\Delta m^{\rm evo} \sim \log\,(1+z)$. Ce modèle logarithmique a déja été utilisé par Drell et al. (2000), qui l'avaient motivé différemment. Notamment, sous l'hypothèse que la luminosité intrinsèque des SNe, L, varie directement avec le facteur d'échelle de l'univers, soit de manière :

$$L \to L\,(1+z)^{-\beta_1}\,, \tag{6.7}$$

où β_1 est un nombre réel, on obtient trivialement une variation en redshift de la magnitude apparente de la même forme :

$$\Delta m^{\rm evo} = 2.5\beta_1 \log(1+z). \tag{6.8}$$

Par la suite, nous appellerons ce paramètrage le **modèle 1**.

Conscient de la dépendance des résultats sur le choix du paramétrage, nous compléterons notre analyse en considérant des modèles où la magnitude apparente varie en fonction de puissances en redshift :

$$\Delta m^{\mathrm{evo}} = \beta_2 z^{\alpha}. \tag{6.9}$$

Ici, α et β_2 sont des nombres réels, et nous appelerons cette classe de modèles les **modèles 2**. Notons, que pour $\alpha \to 0$ l'effet modelé par l'eq.(6.9) devient fortement dégénéré avec le paramètre de normalisation des SNe, M_{s}, et dans ce cas aucun problème n'est attendu. Pour le choix particulier $\alpha = 0.6$ nous trouvons que le modèle 2 est, dans l'intervalle de redshift que nous étudions, une bonne description du modèle de Linder (2006) (éq.(6.5)) et en même temps de celui de Ferramacho et al. (2009a) (éq.(6.6)). L'équivalence de ces deux modèles se concrétisera dans les résultats, section 6.5 plus bas.
Nous choisissons trois valeurs particulières de α, notamment :

1. $\alpha = 0.5$, soit un modèle rendant l'effet d'évolution plus important dans l'univers proche, ($z \lesssim 1$). Il s'agit donc d'un modèle privilégiant une évolution tardive, que nous appellerons **modèle 2a** par la suite.
2. $\alpha = 1$, soit un modèle linéaire en redshift, qui était parmi les premiers à être étudié (cf. Riess 2000) et apparaît souvent dans la littérature (cf. par exemple Nordin et al. 2008). Nous le nommerons **modèle 2b** par la suite.
3. $\alpha = 2$, soit un modèle qui, contrairement au modèle 2a, décrit un effet d'évolution qui domine à haut redshift, soit un modèle d'évolution précoce que nous appelons **modèle 2c**.

6.3 Données réelles

6.3.1 Contraindre l'évolution

Les contraintes sur les paramètres β sont obtenues à partir des données actuelles des SNe, CMB et BAO, que nous avons déjà utilisées dans le chapitre précédent. Pour des raisons de cohérence avec les simulations de données des sections suivantes, nous utilisons les paramètres réduits $\mathcal{R}$ et A pour décire le CMB et les BAO. Dans le fit, nous allons encore une fois supposer un univers plat ($\Omega_{\mathrm{T}} = 1$), et nous décrirons l'équation d'état de l'énergie noire, $w_{\mathrm{x}}(z)$, par le paramétrage CPL. La procédure de minimisation du χ^2 est décrite dans l'appendice A. Nous obtenons les résultats du Tableau 6.1, où nous donnons les valeurs centrales et les erreurs à 1σ des paramètres $\{p_i\} = \{\Omega^0_{\mathrm{M}}, w_{\mathrm{x}}, \beta\}$ pour le cas où on suppose $w_{\mathrm{x}}(z) = \mathrm{const.}$ et le cas où l'on suppose $w_{\mathrm{x}}(z) = w_0 + w_{\mathrm{a}} z/(1+z)$ dans le fit, cas I) and II), respectivement. Nous donnons dans le Tableau les résultats si nous ignorons dans l'analyse le paramètre d'évolution des magnitudes, β. Il s'agit des cas i) et ii), qui sont une reproduction des résultats du Tableau 2.2.[1] Ces derniers sont en bon accord avec les résultats

1. Page 53. Contrairement au Tableau 2.2 nous avons utilisé la valeur de $\mathcal{R}$ de Spergel et al. (2007, WMAP3) : $\mathcal{R} = 1.71 \pm 0.03$, parce que nous n'étions pas encore en possession

Tableau 6.1: Valeurs des paramètres au minimum. Les cas i) et ii) représentent les cas sans évolution.

I)	modèle	$\Omega_{\rm M}^0$	β	$w_{\rm x} = \text{const.}$	$\chi^2_{\rm min}/n$
	i)	$0.27^{+0.02}_{-0.02}$	$-$	$-0.95^{+0.08}_{-0.08}$	0.72
	1	$0.24^{+0.05}_{-0.04}$	$-0.22^{+0.38}_{-0.32}$	$-1.18^{+0.34}_{-0.34}$	0.71
	2a	$0.29^{+0.05}_{-0.05}$	$+0.08^{+0.20}_{-0.40}$	$-0.86^{+0.24}_{-0.52}$	0.71
	2b	$0.24^{+0.04}_{-0.03}$	$-0.15^{+0.15}_{-0.15}$	$-1.16^{+0.22}_{-0.22}$	0.71
	2c	$0.26^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.10^{+0.08}_{-0.08}$	$-1.00^{+0.12}_{-0.12}$	0.71

II)	modèle	$\Omega_{\rm M}^0$	β	w_0	$w_{\rm a}$	$\chi^2_{\rm min}/n$
	ii)	$0.28^{+0.02}_{-0.02}$	$-$	$-1.14^{+0.16}_{-0.08}$	$0.88^{+0.49}_{-0.49}$	0.71
	1	$0.24^{+0.04}_{-0.04}$	$-0.24^{+0.23}_{-0.23}$	$-1.48^{+0.38}_{-0.31}$	$1.39^{+0.40}_{-0.60}$	0.71
	2a	$0.23^{+0.05}_{-0.05}$	$-0.30^{+0.31}_{-0.30}$	$-1.65^{+0.55}_{-0.47}$	$1.72^{+0.70}_{-1.03}$	0.71
	2b	$0.25^{+0.03}_{-0.03}$	$-0.13^{+0.13}_{-0.13}$	$-1.36^{+0.24}_{-0.24}$	$1.19^{+0.51}_{-0.91}$	0.71
	2c	$0.26^{+0.02}_{-0.02}$	$-0.08^{+0.08}_{-0.08}$	$-1.21^{+0.18}_{-0.18}$	$0.91^{+0.48}_{-1.09}$	0.71

qu'obtiennent Kowalski et al. (2008) et Komatsu et al. (2009), cf. section 2.4. Dans le cas i), nous retrouvons notamment la compatibilité de nos résultats avec le modèle ΛCDM, alors que si on inclut la dynamique de l'énergie noire dans le fit via le paramètre w_a, cas ii), sa valeur est à 1σ incompatible avec le modèle ΛCDM.

I) Quand nous imposons $w_{\rm x} = \text{const.}$, nous observons une valeur centrale assez élevée du paramètre d'évolution du modèle 1, $\beta_1 = -0.22^{+0.38}_{-0.32}$. Ces valeurs correspondent à un décalage de magnitude $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} = -0.24^{+0.41}_{-0.35}$ à redshift $z = 1.7$. La valeur centrale du paramètre de densité de la matière, $\Omega_{\rm M}^0$, est de 0.03 plus petite que la valeur du cas i), où on a $\Omega_{\rm M}^0 = 0.27 \pm 0.02$. Tous les $\{p_i\}$ sont, cependant, consistants avec ΛCDM à 1σ.
Le paramètre d'évolution du modèle 2b est ajusté à une valeur centrale moins négative que celui du modèle 1, et il est aussi à 1σ consistant avec l'hypothèse de non-évolution, $\beta = 0$. Aussi, la valeur centrale de $w_{\rm x}$ s'est rapprochée de sa valeur ΛCDM, et les erreurs des paramètres β et $w_{\rm x}$ sont réduites.
Dans le cas du modèle 2c, la valeur centrale de $w_{\rm x}$ s'est encore plus rapprochée de sa valeur ΛCDM, comme c'est aussi le cas de la valeur centrale de $\Omega_{\rm M}^0$. Aussi, les erreurs de tous les paramètres sont réduites par rapport au modèle 2b. Cependant, le paramètre d'évolution de ce modèle 2c est inconsistant à 1σ avec l'hypothèse $\beta = 0$.
Le modèle 2a constitue un cas spécial dans cette partie du tableau, car il est le seul modèle à valeur de β positive (tout de même consistant à 1σ avec $\beta = 0$). En effet, nous trouvons qu'à partir de $\alpha \approx 0.6$ le signe de la valeur du meilleur fit de β change, et nous ajustons $\beta \gtrless 0$ pour $\alpha \lessgtr 0.6$. Dû à la corrélation entre β et $w_{\rm x}$, la valeur centrale de $w_{\rm x}$ change aussi, et nous ajustons $w_{\rm x} + 1 \gtrless 0$ pour $\alpha \lessgtr 0.6$. Nous illustrons ce phénomène sur la Figure 6.1.

des valeurs de Komatsu et al. (2009, WMAP5) quand nous avons commencé l'étude. Ceci est la cause des différences mineures des résultats sur les deux Tableaux.

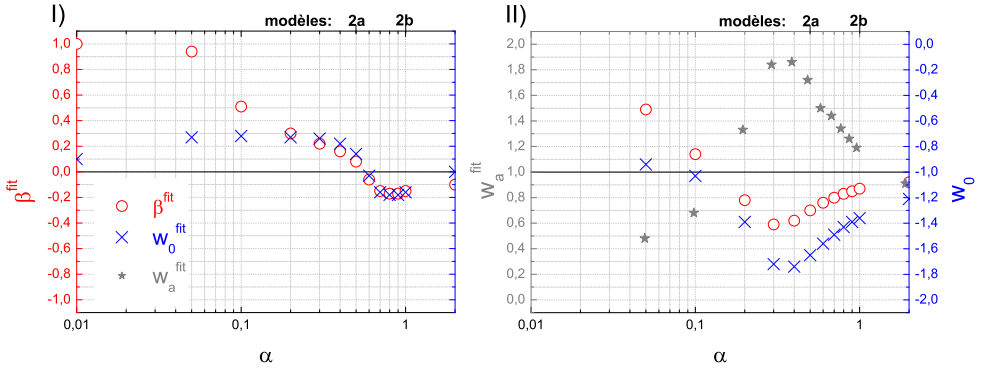


FIGURE 6.1: Valeurs centrales des paramètres β (rouge) et $w_{\rm x}$ (bleu), cas I), et des paramètres β (rouge), w_0 (bleu), et w_a (gris), cas II), pour les modèles 2 en fonction du paramètre α.

II) Quand nous incluons le paramètre w_a dans le fit, nous obtenons des résultats significativement différents. Pour le modèle 1, la valeur centrale de w_0 se trouve significativement en dessous de -1. Egalement, la valeur centrale de w_a est élevée, et le fit devient à 1σ inconsistant avec une Constante Cosmologique, voire à 2σ en ce qui concerne le paramètre w_a.
Pour les modèles 2 nous trouvons la tendance générale, qu'avec des puissances en redshift croissantes la valeur absolue du meilleur fit du paramètre d'évolution, $|\beta|$, décroît, et qu'en même temps $\Omega_{\rm M}^0$ se rapproche de sa valeur ΛCDM. w_0 se déplace aussi vers sa valeur ΛCDM, mais reste toujours inconsistant avec la valeur -1 à 1σ. Le paramètre w_a est lui aussi inconsistant avec sa valuer ΛCDM dans les modèles 2a et 2b, mais devient consistant avec $w_a = 0$ dans le modèle 2c.
Notons que l'introduction du paramètre w_a dans le fit, pour les modèles 2, pousse la limite $\alpha = 0.6$, où les valeurs centrales de β et $w_0 + 1$ changeaient de signe dans le cas $w_{\rm x} = $ const., vers des puissances plus petites, $\alpha \approx 0.1$, grâce à la corrélation forte entre les paramètres β et w_a. Les quatre modèles ont donc des valeurs centrales négatives du paramètre d'évolution : $\beta < 0$.

Nous pouvons illustrer les résultats du Tableau 6.1 dans un diagramme magnitude redshift. A cette fin nous calculons l'évolution de magnitudes $\Delta m^{\rm evo}$ correspondant aux valeurs du meilleur fit des divers modèles. Nous obtenons la Figure 6.2. Elle met en valeur le résultat important, que toutes les évolutions positives, $\Delta m^{\rm evo} > 0$, sont exlcues à 1σ dans le cas II), soit quand $w_{\rm x} \neq$ const. Nous rappellons que, dû à la définition de la magnitude, un effet d'évolution $\Delta m^{\rm evo} > 0$ correspond à des SNe *moins* lumineuses.
Dans les deux cas, I) et II), les données sont consistantes à 1σ avec l'hypothèse $\Delta m^{\rm evo} = 0$, avec deux exceptions. Le modèle 2c exlut cette hypothèse à 1σ dans le cas I), et le modèle 1 exclut l'hypothèse à 1σ dans le cas II). Nous illustrons les contraintes et les corrélations entre chaque couple de paramètres obtenues pour le modèle 1 sur les figures du Tableau 6.2. Afin d'illustrer comment le fait

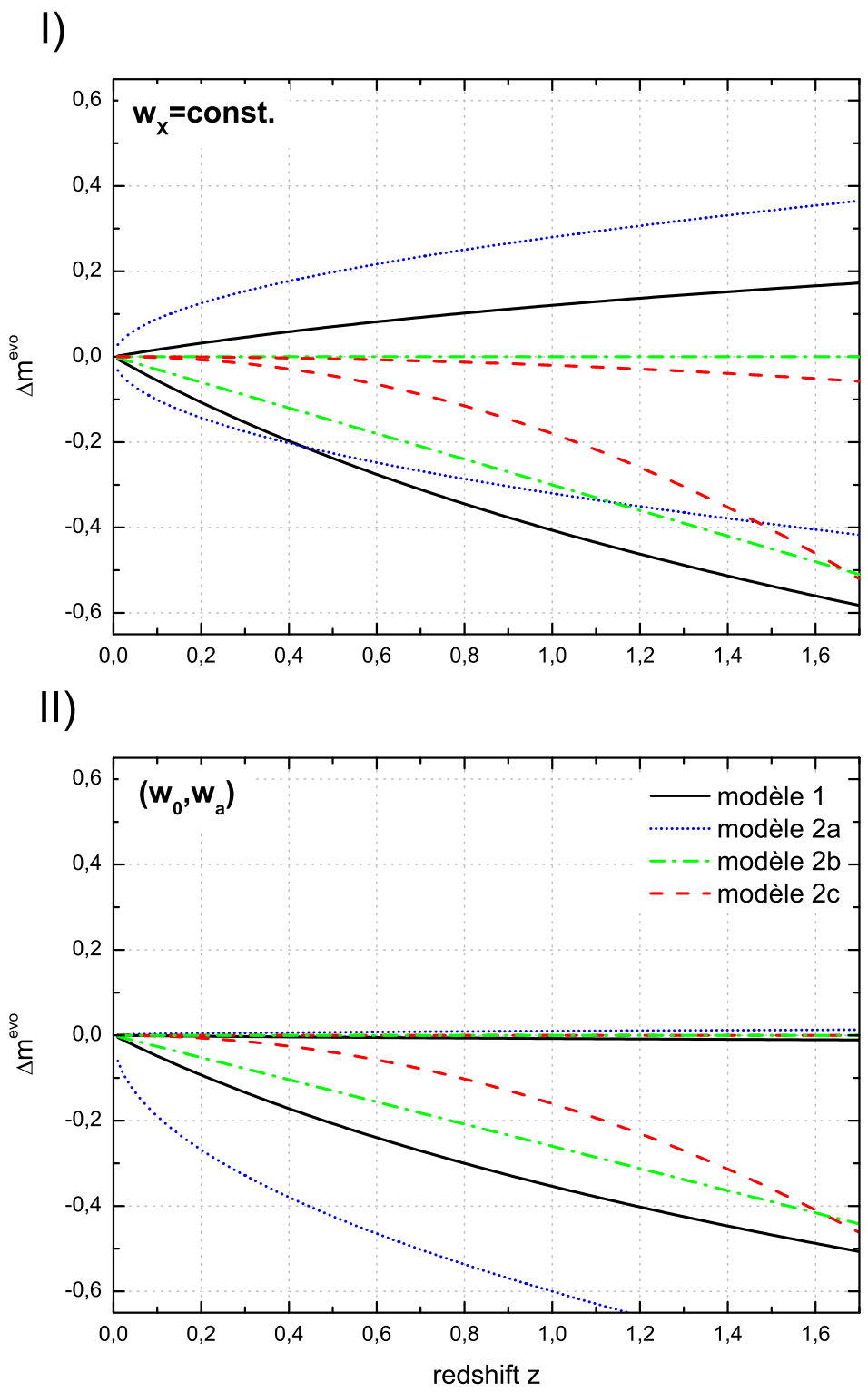


FIGURE 6.2: Illustration des contraintes à 1σ obtenues pour les modèles 1 et 2 dans un diagramme de Hubble. On retrouve les cas I) et II) du Tableau 6.1.

d'inclure le paramètre β dans le fit ne change pas seulement les valeurs centrales, mais aussi les erreurs et les corrélations des paramètres cosmologiques, nous y comparons les contours obtenus par des fits avec ou sans β, pour le cas $w_{\rm x} = \text{const.}$ ou le paramètrage CPL. Nous décrivons dans l'appendice A la procédure pour obtenir les contours. Nous remarquons, que l'introduction du paramètre β_1 entraîne une diminution de la valeur centrale de $\Omega_{\rm M}^0$, ce que nous avons vu être toujours le cas si $\beta^{\rm fit} < 0$. En ce qui concerne la valeur actuelle de l'équation d'état de l'énergie noire, w_0, le fait d'inclure β_1 dans le fit présente les mêmes effets que d'inclure w_a, *i.e.* la valeur centrale de w_0 tombe par-dessous la limite fantôme, $w_{\rm x} = -1$. Alors qu'inclure *ou* w_a *ou* β_1 dans le fit laisse le résultat du fit à 1σ consistant avec $w_0 = -1$, le fait d'inclure les deux rend la valeur reconstruite de w_0 à 1σ inconsistante avec $w_0 = -1$. Cet effet est présent dans tous les modèles, mais est le plus prononcé dans les modèles 2a et 1. Quand nous revenons sur les résultats du Tableau 6.1, nous nous apercevons qu'au niveau de la valeur du χ^2 au minimum par degré de liberté du fit, n, tous les modèles montrent un fit avec une bonne qualité. Statistiquement, il n'y a donc pas d'indicateur du besoin d'inclure un paramètre d'évolution des magnitudes des SNe dans l'analyse (ni, par ailleurs, d'inclure le paramètre w_a).

6.3.2 Diagramme de Hubble

La tendance des données à préférer une déviation négative des magnitudes apparentes, $\Delta m^{\rm evo}$, est aussi visible sur le diagramme de Hubble de l'échantillon des SNe. Sur la Figure 6.3 nous avons décomposé l'intervalle en redshift de l'échantillon en bins de largeur 0.1, et nous montrons la déviation relative entre les magnitudes mesurées, m_i, et les magnitudes obtenues pour le meilleur fit (cas ii) du Tableau 6.1), $m_i^{\rm fit}$:

$$\overline{\Delta m}_{\rm bin} := \frac{1}{N_{\rm bin}\,(\text{SNe})} \sum_{i \in \rm bin} \left(m_i - m_i^{\rm fit} \right). \tag{6.10}$$

Ici, $N_{\rm bin}\,(\text{SNe})$ est le nombre de SNe dans le bin. Nous avons inclu l'histogramme de l'échantillon sur la Figure. Les erreurs :

$$\left(\frac{1}{\sigma_{\rm m_{bin}}} \right)^2 = \frac{1}{N_{\rm bin}\,(\text{SNe})} \sum_{i \in \rm bin} \left(\frac{1}{\sigma_{\rm m_i}} \right)^2, \tag{6.11}$$

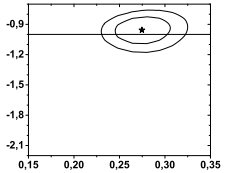
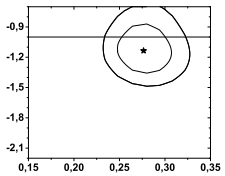
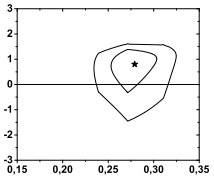
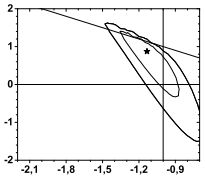
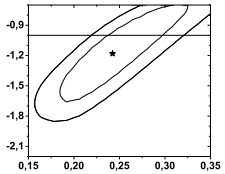
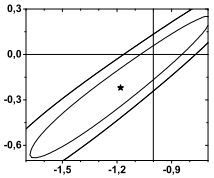
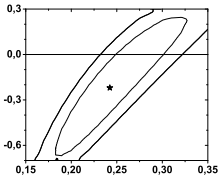
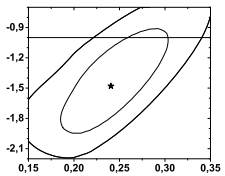
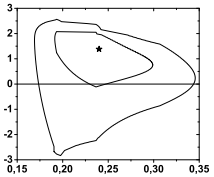
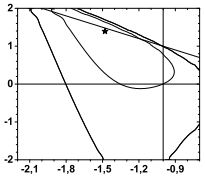
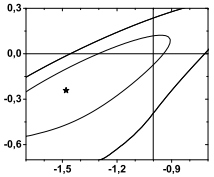
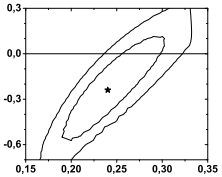
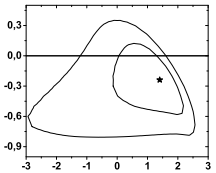
sont obtenues à partir des erreurs $\sigma_{\rm m_i}$ données par Kowalski et al. (2008) [2]. Les SNe à haut redshift, *i.e.* SNe à $z \gtrsim 1$, apparaîssent plus lumineuses que ce qui est prédit par le modèle de meilleur fit. Si nous ajustons cet effet avec une simple fonction linéaire, nous obtenons :

$$\Delta m^{\rm evo} = (-0.04 \pm 0.06)\, z, \tag{6.12}$$

correspondant à un décalage des magnitudes apparentes de $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} = -0.07 \pm 0.10$ à redshift $z = 1.7$. A nouveau, ces résultats indiquent un effet d'évolution

2. Cf. aussi la Figure 2.10, où nous avons représenté l'échantillon SN par SN.

Tableau 6.2: Contours à 68% et 95% de degré de confiance sur l'exemple du modèle 1. Lignes noires représentes les valeurs ΛCDM : $\{w_0, w_a, \beta_1\} = \{-1, 0, 0\}$ et la contrainte $(w_0 + w_a) = 0$.

	$\Omega_{\mathrm{M}} \times w_0$	$\Omega_{\mathrm{M}} \times w_a$	$w_0 \times w_a$	$w_0 \times \beta_1$	$\Omega_{\mathrm{M}} \times \beta_1$	$w_a \times \beta_1$
i)						
ii)						
a)						
b)						

* Nous avons discuté le contour dans le plan (w_0, w_a) du cas *ii)* dans la section 3.7.

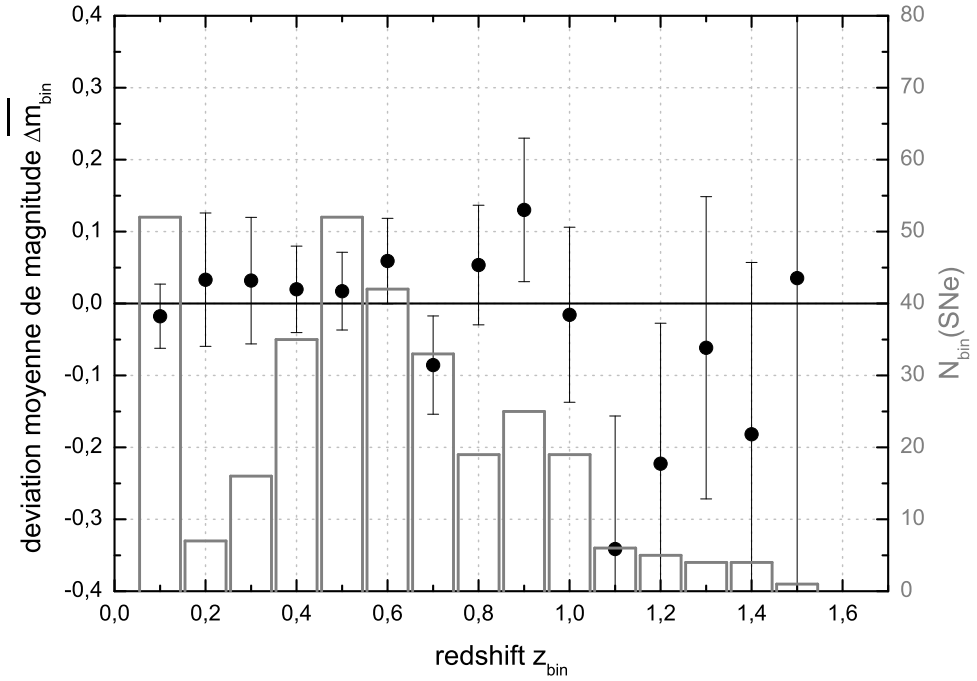


FIGURE 6.3: Déviation relative entre les magnitudes mesurées et les magnitudes obtenues pour le meilleur fit (éq.(6.10)).

tel que les SNe à haut redshift aparaissent plus lumineuses que celles à bas redshift, mais les données sont consistantes à 1σ avec l'hypothèse $\Delta m^{\text{evo}} = 0$. Ces résultats sont en accord avec ceux de Kowalski et al. (2008), Ferramacho et al. (2009a), Linder (2009), et les résultats de Bronder et al. (2008) et Sullivan et al. (2009).
Regardant l'histogramme sur la Figure 6.3, nous nous apercevons, qu'avec l'échantillon actuel de SNe, la statistique à haut redshift n'est pas très puissante. On n'y trouve que dix-huit SNe à $z > 1$. Plus de SNe à haut redshift sont indispensables pour tester la présence d'effets d'évolution des SNe, comme argumenté depuis Riess (2000) (e.g. Riess & Livio 2006).

6.4 Données simulées

A présent, nous allons nous intéresser à l'étude de l'impact des hypothèses d'analyse sur les valeurs centrales et les erreurs des paramètres cosmologiques. Nous désirons estimer les risques de biaiser l'extraction des paramètres. Comme dans les chapitres précédents, nous allons nous intéresser aux effets qu'aura l'hypothèse d'absence d'évolution des magnitudes des SNe Ia jusqu'à très haut redshift. A cette fin, nous simulons un échantillon de données SN et les observables $\mathcal{R}$ et A du CMB et des BAO dans un univers plat, en supposant qu'une évolution en redshift des magnitudes apparentes des SNe a lieu. Puis, nous négligerons cette possibilité dans l'analyse pour l'extraction des paramètres. Les paramètres

à ajuster dans le fit sont les paramètres standard, $\{p_i\}^{\rm fit} = \{M_{\rm s}, \Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a\}$. Grâce à la platitude imposée, cf. ci-dessus, on a $\Omega^0_\Lambda + \Omega^0_M = 1$ dans les modèles fiduciels et ajustés. L'échantillon des SNe que l'on utilisera est encore celui de l'appendice B, et nous attribuons une erreur $\sigma_{\mathcal{R}} = 0.01$ et une erreur $\sigma_A = 0.005$ aux observables $\mathcal{R}$ et A, respectivement. Cette base de données sert ainsi comme un scénario statistique 'futur'. Notons que nous avons ajouté des erreurs systématiques non-corrélées, $\sigma_{\rm sys} = 0.02$, aux erreurs intrinsèques des magnitudes des SNe, éq.(B.1), qui entrent dans la matrice de covariance (éq.(A.8), page 136) par $C_{ii} = (\sigma_i)^2_{\rm intr} + (\sigma_i)^2_{\rm sys}$.

6.4.1 Illustration du problème

Comme nous le montrons sur la Figure B.1, la statistique à haut redshift de cet échantillon prospectif des SNe est très élevée par rapport aux données actuelles. Négliger l'hypothèse d'une évolution globale en redshift des magnitudes apparentes des SNe peut entraîner de graves risques de biaiser les paramètres cosmologiques indépendamment de la statistique utilisée. En effet, comme nous avons noté dans le chapitre 5, augmenter la statistique des données résulte en général en des risques de biais plus élévés, quand des mauvaises hypothèses sont présentes dans l'analyse. Afin d'illustrer ce risque, supposons une cosmologie fiducielle $\{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a, \beta_1\}^{\rm Fid} = \{0.255, -1.20, 0, -0.10\}$. Il s'agit d'un modèle cosmologique avec une composante d'énergie noire à équation d'état constante, $w_{\rm x} = {\rm const.} = w_0$, où les magnitudes des SNe évoluent en fonction du redshift comme dictée par le modèle 1, éq.(6.8). Nous représentons ce modèle par le petit cercle sur la Figure 6.4, représentant l'espace de phase $\left(\Omega^0_{\rm M}, w_0\right)$. Quand nous effectuons l'ajustement de ce modèle fiduciel avec l'ensemble standard de paramètres, $\{p_i\}^{\rm fit} = \{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a\}$, soit en ne prenant pas en compte une possible évolution des magnitudes, nous obtenons les valeurs $\{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a\}^{\rm fit} = \{0.274 \pm 0.007, -1.12 \pm 0.09, 0.23 \pm 0.41\}$ dans un fit à haute qualité, $\chi^2_{\rm min}/n = 0.2$. Nous représentons les contraintes associées à ce modèle sur la même Figure 6.4. Le petit cercle noir correspond aux valeurs centrales, les ellipses aux contours à 68% et 95% de degrés de confiance. On s'aperçoit sur la figure que l'écart est de plus de 1.96σ entre le modèle fiduciel et le modèle ajusté. On rejette alors la vraie cosmologie à plus de 95% degrés de confiance. Remarquons que ce modèle ajusté est à 1σ consistant avec le modèle du meilleur fit que l'on obtient aujourd'hui avec les contraintes actuelles, cf. section 2.4.

Remarquons cependant, qu'il nous a été impossible de trouver un modèle fiduciel avec une Constante Cosmologique, soit $\{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a, \beta\}^{\rm Fid} = \{\Omega^0_{\rm M}, -1, 0, \beta\}$, qui puisse être confondu avec le meilleur fit actuel. Ce dernier est caracterisé par une valeur du paramètre w_a significativement plus grande que zéro, $w_a > 0$, et nous trouvons, que $w_a^{\rm fit} \leq w_a^{\rm Fid} (= 0)$ pour tous $w_0^{\rm Fid} \leq -1$, quel que soit le signe ou le modèle que nous appliquions à l'effet d'évolution fiduciel, $\Delta m^{\rm evo}$. Afin de limiter ce genre de biais, il est clair que l'on aimerait bien disposer de moyens permettant de détecter qu'il y a un problème, et nous avons exploré trois critères possibles du qualité.

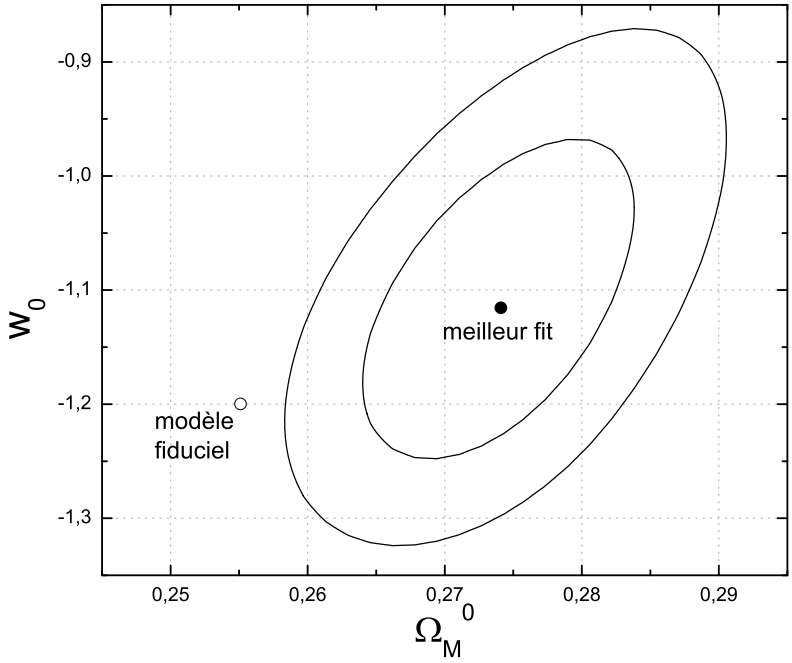


FIGURE 6.4: Illustration du risque que peut entraîner l'hypothèse que les magnitudes apparentes des SNe ne varient pas systématiquement en fonction de redshift, si elle est fausse.

6.4.2 Détectabilité

Critère de qualité statistique

Il s'agit ici du critère statistique que nous avons déjà utilisé dans le chapitre précédent, soit de juger la qualité du fit à partir de la valeur du $\chi^2_{\rm min}$ et du nombre de degré de liberté du fit dont l'information est encodée dans la p-valeur :

$$1 - \mathrm{CL} = p := \int_{\Delta\chi^2}^{\infty} \frac{x^{n/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma\left(n/2\right)}\mathrm{d}x, \tag{6.13}$$

que nous discutons en détail dans l'appendice A.3. Ici, n est le nombre de degré de liberté du fit, et CL indique le degré de confiance correspondant à la valeur de $\Delta\chi^2$. Pour l'échantillon de données employé dans notre étude, nous obtenons $\Delta\chi^2 = 22\,(31)$ correspondant à un degré de confiance de 68% (95%). Nous devons nous attendre à ce que les modèles fiduciels sans (où avec un petit) effet d'évolution, $\beta^{\rm Fid} \approx 0$, soient bien reconstruits. Nous allons donc obtenir un intervalle en β, autour de zéro, des modèles 'bien reconstruits'. Ce fait est illustré sur la Figure 6.5 (gauche).

Critère de consistance

On a l'habitude d'utiliser les termes 'bas redshift' et 'haut redshift' sans en donner une définition concrète, comme nous l'avons déjà fait dans ce manuscrit de thèse. Concernant les SNe, quelques auteurs parlent de la dispersion

des magnitudes des SNe dans le diagramme de Hubble, Figure 6.3, et coupent l'échantillon en deux sous-échantillon 'bas redshift' et 'haut redshift' tel que les sous-échantillons aient la même dispersion moyenne. D'autre auteurs considèrent simplement $z > 0.5$ ou $z > 1$ comme le domaine à 'haut redshift'. Ici, nous adoptons une manière (statistiquement) plus rigoureuse de découper l'échantillon en deux. Nous voulons que les erreurs σ_{p_i} du paramètre cosmologique p_i soient égales pour chacun des deux sous-échantillons. Plus concrètement, nous cherchons le redshift $z_{\rm cut}$ où :

$$\sigma_{\rm p_i}{}^{\rm hr} \stackrel{!}{=} \sigma_{\rm p_i}{}^{\rm br}. \tag{6.14}$$

Ici, (hr) indique le sous-échantillon 'haut redshift' (SNe Ia $z > z_{\rm cut}$), et (br) indique le sous-échantillon 'bas redshift' ($z < z_{\rm cut}$). Ainsi, les sous-échantillons auront le même poids statistique par rapport au paramètre p_i. Pourtant, nous trouvons des différents redshifts de coupure selon le paramètre p_i utilisé. Si nous appliquons ce critère à notre échantillon prospectif des données SN, nous trouvons les valeurs du Tableau 6.3.
Notons, que ces redshifts de coupure sont obtenus par une étude des erreurs des paramètres dans une analyse des SNe *seule*, ainsi assurant que le critère de consistance est un critère générique aux SNe. Sur la Figure 6.5 (droite) nous

Tableau 6.3: Valeurs de $z_{\rm cut}$ pour l'échantillon prospectif des données SN pour les paramètres w_0 et $\Omega^0_{\rm M}$.

p_i	$z_{\rm cut}$
w_0	0.95
$\Omega^0_{\rm M}$	1.20

illustrons l'application de ce critère sur l'exemple du modèle 1, où le redshift de coupure est tel que $z_{\rm cut} = 1.20$. Nous varions dans la cosmologie fiducielle le paramètre d'évolution, β_1, et gardant fixés les autres paramètres fiduciels, $\{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a\}^{\rm Fid} = \{0.30, -1, 0\}$. Nous représentons les valeurs ajustées de w_0 obtenues par des fits séparés des deux sous-échantillons en combinaison avec $\mathcal{R}$ et A, en fonction de la valeur du paramètre fiduciel β_1. Comme prévu, nous trouvons une reconstruction consistante et non-biaisée des deux valeurs de w_0 autour du modèle fiduciel avec $\beta_1^{\rm Fid} = 0$. Par 'reconstruction consistante' nous entendons que la valeur centrale de ${w_0}^{\rm hr}$, la valeur obtenue par un ajustement du sous-échantillon à haut redshift se trouve dans la barre d'erreur de la valeur ajustée du sous-échantillon à bas redshift, ${w_0}^{\rm br}$, et vice-versa. Clairement, les valeurs respectives de w_0 deviendrons inconsistante à partir d'une certaine valeur du paramètre d'évolution, $|\beta_1|$. Pour quantifier l'inconsistance nous introduisons la notion du 'biais de consistance' :

$$\mathcal{C}_i = \left| {p_i}^{\rm hr} - {p_i}^{\rm br} \right|, \tag{6.15}$$

et nous qualifierons le paramètre p_i de :

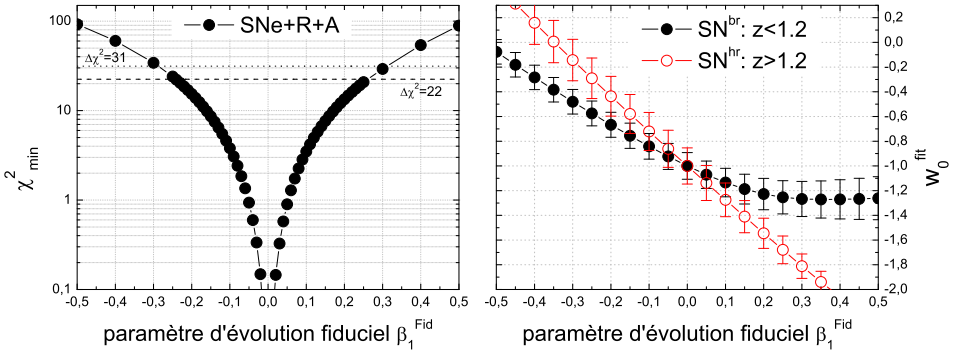


FIGURE 6.5: Illustration de deux de nos critères sur l'exemple du modèle 1. Gauche : Le critère de qualité statistique. Nous représentons la valeur du $\chi^2_{\rm min}$ du meilleur fit en fonction du paramètre d'évolution fiduciel. Les deux lignes horizontales correspondent à la p-valeur du χ^2 de 68% (hachurée) et 95% (pointillée). Droite : Le critère de consistance, ici pour le paramètre w_0. Nous représentons la valuer ajustée, $w_0^{\rm fit}$, obtenue séparement pour le sous-échantillon des SNe à bas redshift $0 < z \leq 1.2$ (croix) et le sous-échantillon de SNe à haut redshift $1.2 \leq z \leq 1.7$ (cercles), en fonction du paramètre d'évolution fiduciel. Les barres d'erreurs sont les erreurs 1σ pour $\sigma_{w_0}{}^{\rm br}$ et $\sigma_{w_0}{}^{\rm hr}$. Nous ne représentons pas les barres d'erreurs 1.96σ pour des raisons de lisibilité de la figure.

- *consistant*, si $\mathcal{C}_i \leq T\sqrt{(\sigma_{p_i}{}^{\rm hr})^2 + (\sigma_{p_i}{}^{\rm br})^2}$, et
- *inconsistant*, si $\mathcal{C}_i > T\sqrt{(\sigma_{p_i}{}^{\rm hr})^2 + (\sigma_{p_i}{}^{\rm br})^2}$.

Notons que T est un facteur associé au degré de confiance de l'analyse statistique et est tabularisé dans la littérature, cf. par exemple Amsler et al. (2008). On a $T = 1\,(1.96)$ pour 68% (95%) de degré de confiance. Pour l'exemple de la Figure 6.5 nous trouvons via l'éq.(6.15) l'intervalle $-0.17\ (-0.40) < \beta_1 < 0.13\ (0.23)$, où l'analyse des sous-échantillons haut et bas redshift, en combinaison avec $\mathcal{R}$ et A, donne des valeurs de w_0 consistantes à 68% (95%).

Critères physiques

Comme motivé dans la section 3.7.1, nous imposons :

$$(w_0 + w_a) \overset{!}{<} 0, \tag{6.16}$$

aux modèles ajustés. Tous les modèles ajustés exhibant une valeur initiale de l'équation d'état supérieure à zéro seront considérés comme non-physiques, et le problème de la mauvaise hypothèse sera considéré détecté. Par ailleurs, nous devons imposer :

$$\Omega_{\rm M}^0 \overset{!}{>} 0, \tag{6.17}$$

aux modèles ajustés, afin d'éviter des contradictions entre ces modèles et la

Tableau 6.4: Les intervalles en β où un effet d'évolution des magnitudes selon les quatre modèles reste indétecté (zones de non-détectabilité).

	modèle 1				**modèle 2a**			
Critère	68% CL		95% CL		68% CL		95% CL	
$\chi^2_{\min} < \Delta\chi^2$	$[\,-0.24, 0.26\,]$		$[-\mathbf{0.28}, 0.32\,]$		$[\,-0.28, 0.28\,]$		$[-\mathbf{0.33}, 0.33\,]$	
consistance de :	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$
$\Omega_{\rm M}^{0\ \rm br} \leftrightarrow \Omega_{\rm M}^{0\ hr}$	$[\,-0.20\,, 0.18\,]$	$[\,-0.18\,, 0.15\,]$	$[\,(-0.45)\,, 0.38\,]$	$[\,-0.43\,, 0.28\,]$	$[\,-0.23\,, 0.20\,]$	$[\,-0.20\,, 0.17\,]$	$[\,(-0.6)\,, 0.37\,]$	$[\,-0.45\,, 0.32\,]$
${w_0}^{\rm br} \leftrightarrow {w_0}^{\rm hr}$	$[\,-0.39\,, 0.33\,]$	$[-\mathbf{0.17}\,, \mathbf{0.13}]$	(...)	$[\,-0.40\,, \mathbf{0.23}]$	$[\,(-0.6)\,, 0.35\,]$	$[-\mathbf{0.19}\,, \mathbf{0.15}]$	$[\ (...)\ , 0.44\,]$	$[\,-0.44\,, \mathbf{0.26}]$
${w_a}^{\rm br} \leftrightarrow {w_a}^{\rm hr}$	$[\ (...)\ , 0.41\,]$	$[\,-0.22\,, 0.15\,]$	(...)	$[\ (...)\ , 0.26\,]$	$[\ (...)\ , 0.42\,]$	$[\,-0.25\,, 0.17\,]$	(...)	$[\ (...)\ , 0.30\,]$

	modèle 2b				**modèle 2c**			
Critère	68% CL		95% CL		68% CL		95% CL	
$\chi^2_{\min} < \Delta\chi^2$	$[\,-0.12, 0.14\,]$		$[-\mathbf{0.14}, 0.16\,]$		$[\,-0.05, 0.05\,]$		$[-\mathbf{0.06}, \mathbf{0.06}]$	
consistance de :	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$	$z_{\rm cut} = 0.95$	$z_{\rm cut} = 1.20$
$\Omega_{\rm M}^{0\ \rm br} \leftrightarrow \Omega_{\rm M}^{0\ \rm hr}$	$[\,-0.10\,, 0.11\,]$	$[-\mathbf{0.09}\,, 0.08]$	$[\,-0.21\,, 0.23\,]$	$[\,-0.21\,, 0.14\,]$	$[\,-0.04\,, 0.06\,]$	$[-\mathbf{0.04}\,, \mathbf{0.04}]$	$[\,-0.08\,, 0.12\,]$	$[\,-0.08\,, 0.07\,]$
${w_0}^{\rm br} \leftrightarrow {w_0}^{\rm hr}$	$[\,-0.20\,, 0.26\,]$	$[-\mathbf{0.09}\,, \mathbf{0.07}]$	$[\,-0.38\,, 0.43\,]$	$[\,-0.21\,, \mathbf{0.13}]$	$[\,-0.09\,, 0.20\,]$	$[-\mathbf{0.04}\,, \mathbf{0.04}]$	$[\,-0.16\,, 0.28\,]$	$[\,-0.09\,, 0.07\,]$
${w_a}^{\rm br} \leftrightarrow {w_a}^{\rm hr}$	$[\,(-0.6)\,, 0.36\,]$	$[\,-0.12\,, 0.08\,]$	$[\ (...)\ , (0.7)\,]$	$[\,(-0.3)\,, 0.15\,]$	$[\,-0.24\,, 0.28\,]$	$[\,-0.07\,, 0.07\,]$	$[\,(-0.4)\,, (0.4)\,]$	$[\,-0.15\,, 0.09\,]$

*Les valeurs entre paranthèses () sont situées hors de l'intervalle d'étude, et ont été obténues par extrapolation. $(\cdots)$ indique qu'aucune extrapolation raisonnable était possible, mais ces nombres sont sans intérêt.

présence de matière dans l'univers. De manière surprenante, nous trouvons cependant que dans notre contexte d'analyse combinée, ces critères ne donnent aucune contrainte sur nos modèles d'évolution. Par conséquent, nous ne les discuterons plus par la suite.

Zones de non-détectabilité

Nous rassemblons dans le Tableau 6.4 tous les intervalles en β pour lesquels l'effet d'une évolution en redshift (selon les quatre modèles) reste indétecté par nos critères. Nous appelons ces intervalles les 'intervalles (zones) de non-détectabilité'. Nous nous apercevons que le test de consistance entre des ajustement séparés des sous-échantillons SN est particulièrement performant. A 68% de degré de confiance, il est le plus performant dans tous les cas. Seulement à un degré de confiance supérieur (à 95%) le test du χ^2 est le plus puissant pour les modèles fiduciels avec $\beta < 0$. Il est intéressant de noter la particularité suivante du critère de consistance : le teste de consistance du paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ est le plus performant si on découpe l'échantillon par rapport aux erreurs égales de w_0 (soit si $z_{\rm cut} = 0.95$). Et réciproquement, si on découpe l'échantillon par rapport au paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ (soit si $z_{\rm cut} = 1.20$), le test de consistance du paramètre w_0 est le plus performant.

Interprétation des paramètres β : Nous représentons dans le Tableau 6.4 les intervalles les plus contraignants en caractères gras, pour chaque modèle d'évolution pour les deux degrés de confiances considérés. Par les éqs.(6.8) et (6.9) nous pouvons traduire ces intervalles, qui ici sont donnés en terme du paramètre peu intuitif β, en intervalles en $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7}$, où :

$$\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} := \Delta m^{\rm evo}\,(z)|_{z=1.7}\,, \tag{6.18}$$

est le décalage en magnitude causé par l'effet d'évolution à redshift 1.7. Par la suite, nous nous restreindrons à discuter les résultats à 1σ, soit à 68% degré de confiance. Nous obtenons les intervalles de la première colonne du Tableau 6.5 qui donnent les intervalles de non-détectabilité pour chaque modèle en terme de $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7}$. Il est évident de ces valeurs, que les modèles 2 sont d'autant mieux contraints que la puissance α est grande. Le modèle (d''évolution précoce') 2c est détecté quand le décalage de magnitude est supérieur à $|0.12|$ à redshift 1.7. Alors que le modèle (linéaire) 2b a la même borne de détectabilité pour des effets d'évolutions $\Delta m^{\rm evo} > 0$, il est plus difficile à détecter si $\Delta m^{\rm evo} < 0$. Le modèle ('d'évolution tardive') 2a reste indétecté pour tous décalages de magnitude $-0.25 < \Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} < 0.20$, même pour une analyse combinée d'un échantillon prospectif des données. Le cas du modèle (logarithmique) 1 est moins grave que celle du modèle 2a, mais il est plus difficile à détecter que les modèles 2b et 2c. Pour tous les modèles, les bornes de détectabilité soulignent encore une fois la tendance que nous avons déjà rencontrée dans la section 6.3 : que des effets d'évolution impliquant des SNe plus lumineuses à haut redshift, soit des effets $\Delta m^{\rm evo} < 0$, sont plus difficiles à détecter que des effets inverses, soit

que des effets où $\Delta m^{\rm evo} > 0$. Nous avons vu la préférence des données actuelles pour des effets du premier genre, $\Delta m^{\rm evo} < 0$, cf. Figures 6.2 et 6.3.

6.4.3 Risque de biais

Alors que nous avons établi la classe des effets qui ne seront pas détectables dans une analyse des données cosmologiques, nous ne savons pas encore si cela constitue un véritable problème. Car il est toujours possible que nous ne détections pas la présence d'une évolution des magnitudes, et que les paramètres cosmologiques soient pourtant bien reconstruits. Dans ce cas, la mauvaise hypothèse n'est pas dangereuse. Malheureusement, il en va souvent différemment. Si nous appliquons la définition du biais, cf. éqs.(4.8) et (5.9), nous pouvons quantifier la qualité de reconstruction des paramètres cosmologiques et pouvons ainsi trouver les modèles fiduciels 'dangereux'. Nous avons discuté en détail lors du chapitre 5 comment obtenir les zones de biais et de validité des paramètres cosmologiques, et nous renvoyons donc à ce chapitre pour les définitions de ces termes.

Nous obtenons, à titre d'exemple, qu'avec une cosmologie fiducielle où les magnitudes apparentes des SNe varient selon le modèle 1, le paramètre de densité de la matière, $\Omega^0_{\rm M}$, est bien reconstruit seulement si la valeur de β_1 est telle que le décalage des magnitudes dû a l'évolution est inférieur à 0.04 à redshift 1.7. Rappellons maintenant, que nous avons dans la section précédente conclu que seuls les effets menant à un décalage avec $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} < -0.18$ ou $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} > 0.14$ peuvent être detéctés. Notre ignorance envers l'évolution des magnitudes des SNe nous confronte donc à une zone dangereuse de modèles fiduciels, où les paramètres cosmologiques sont biaisés sans que nous puissions le détecter. Si nous cherchons les zones de validité pour tous les modèles d'évolution considérés et pour les trois paramètres cosmologiques principaux, $\{\Omega^0_{\rm M}, w_0, w_a\}$, nous trouvons les zones données dans le Tableau 6.5. Alors que nous avons trouvé dans la section 6.4.2 que la mauvaise hypothèse est d'autant plus difficile à détecter que la puissance α du modèle d'évolution est grande, nous trouvons ici que le risque de biaiser les paramètres cosmologiques est d'autant plus petit que la puissance α est grande. Les zones de validité de tous les paramètres croissent avec la valeur de α. Concernant la reconstruction des divers paramètres, nous trouvons que le paramètre de densité de la matière, $\Omega^0_{\rm M}$, porte le plus grand risque d'être biaisé à cause de la mauvaise hypothèse, quel que soit le modèle. Sa zone de validité est la plus petite comparée aux autres paramètres. Le paramètre w_0 porte de grands risques d'être biaisé, ses zones de validité sont assez étroites. Notons une particularité du modèle 1 : Dans ce cas, le paramètre w_0 est bien reconstruit jusqu'aux décalages de magnitude $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7} < 1.18$, où cependant, nous l'avons vu, le modèle est déjà exclu à plusieurs σ par les critères de détection. Concernant le paramètre décrivant la dynamique de l'énergie noire, w_a, il est intéressant de noter que ce sont plutôt des effets d'évolution de magnitudes positives, $m^{\rm evo} > 0$ (SNe moins lumineuses), qui risquent de biaiser la reconstruction de la dynamique de l'énergie noire. Pour les modèles 1 et 2a la zone de validité de w_a est relativement large, mais elle devient aussi petite (voire plus

Tableau 6.5: Zones de non-détéctabilité, et zones de validité des paramètres $\{\Omega_{\rm M}^0, w_0, w_a\}$ en termes de $\Delta m^{\rm evo}{}_{|1.7}$.

modèle	zones de non-détéctabilité	zones de validité des paramètres cosmologiques $\Omega_{\rm M}^0$	w_0	w_a
1	$[\,-0.18, 0.14\,]$	$[\,-0.04, 0.04\,]$	$[\,-0.08, 1.18\,]$	$[\,-0.28, 0.15\,]$
2a	$[\,-0.25, 0.20\,]$	$[\,-0.04, 0.04\,]$	$[\,-0.08, 0.13\,]$	$[\,-0.27, 0.27\,]$
2b	$[\,-0.15, 0.12\,]$	$[\,-0.03, 0.05\,]$	$[\,-0.10, 0.37\,]$	$[\,-0.39, 0.09\,]$
2c	$[\,-0.12, 0.12\,]$	$[\,-0.06, 0.09\,]$	$[\,-0.17, 0.09\,]$	$[\,-0.06, 0.06\,]$

petite pour des fiduciels $m^{\rm evo} > 0$) que celle du paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ dans le cas du modèle 2c.

6.5 Dangerosité

Puisque nous avons vu que le paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ porte les plus grands risques d'être biaisé, nous restreignons notre discussion à ce paramètre, soit de discuter le cas le plus dangereux. Il est très illustratif de représenter les bornes des intervalles de non-détectabilité et les bornes des zones de validité dans un diagramme de Hubble. Nous voyons sur la Figure 6.6 en lignes noires les bornes des zones de validité de $\Omega_{\rm M}^0$ pour les quatres modèles d'évolution (Tableau 6.5). Le paramètre $\Omega_{\rm M}^0$ est alors biaisé au-dessus et en-dessous de la surface engendrée par ces bornes. En lignes hachurées sont représentées les bornes des intervalles de non-détectabilité des quatre modèles du Tableau 6.5. Tous les effets d'évolution représentés dans la surface engendrée par ces bornes restent alors indétectés. Nous avons aussi représenté en lignes pointillées les bornes de détectabilité que l'on obtiendrait si on se tenait seulement au test du χ^2, moins performant que le test de consistance (à 68% CL). Pour chaque cas, on est confronté à l'existence d'une zone :

1. où l'effet d'évolution n'est pas détecté, *et*
2. où au moins un des paramètres cosmologiques, à savoir le paramètre de densité de la matière, $\Omega_{\rm M}^0$, est biaisé.

Nous appelons ces zones, hachurées sur la Figure 6.6, les 'zones dangereuses' et quantifions la 'dangerosité' des différents modèles par la valeur de leur surfaces, S, qu'elles engendrent dans le diagramme de Hubble jusqu'à $z = 1.7$. Les valeurs de S sont données dans le Tableau 6.6.
Ces valeurs valident la tendance que nous avons déjà vu apparaître dans le Tableau 6.4, où les modèles à plus grande puissance, $\alpha \gtrsim 1$, sont moins dangereux en ce qui concerne l'impact sur la reconstruction des paramètres que des modèles à puissances plus petites, $\alpha \lesssim 1$. Le modèle ('d'évolution tardive') 2a a plus de risques de biaiser de manière indétectable les paramètres cosmologiques que le modèle ('d'évolution précoce') 2c. La dangerosité des modèles (linéaires) 2b et (logarithmiques) 1 se trouvent entre ces deux extrêmes. Leurs dangerosités sont du même ordre. Sur la Figure 6.6 et le Tableau 6.6 nous représentons aussi

Tableau 6.6: Dangerosité S des quatre modèles d'évolution.

modèle	$S_1{}^*$	$S_2{}^{**}$	S
1	0.09	0.14	0.23
2a	0.17	0.24	0.41
2b	0.07	0.10	0.17
2c	0.02	0.03	0.05

$^{*\,(**)}$ Surface de la zone dangereuse dans la partie supérieure (inférieure) du diagramme de Hubble de la Figure 6.6.

séparément les valeurs S_1 (S_2) de la surface des zones dangeures dans la moitié supérieure (inférieure) du diagramme de Hubble. Trouvant $S_2 > S_1$ pour tous les modèles, nous confirmons encore une fois la tendance que les effets d'évolution $\Delta m^{\text{evo}} < 0$ portent de plus grands risques de biaiser de manière indétectable le fit que des effets $\Delta m^{\text{evo}} > 0$.
Nous avons aussi extrait les dangerosités des modèles éqs.(6.5) et (6.6) et trouvons qu'ils sont équivalents : on obtient $S = 0.36$ pour les deux cas. Aussi, cette valeur est très proche de celle du modèle 2a, ce qui est en accord avec le fait que ces deux modèles sont bien décrits par un modèle 2 avec $\alpha \approx 0.6$. La dangerosité de ces deux modèles est illustrée en bas de la Figure 6.6. Quand nous effectuons cette analyse au niveau de 95% de degré de confiance, nous trouvons évidemment des valeurs plus grandes pour S, mais les conclusions du paragraphe précédent restent valables. En particulier, nous retrouvons les mêmes tendances parmis les modèles, et $S_2 > S_1$ pour tous les modèles.
Nous devons conclure, qu'en traitant de l'extraction des paramètres cosmologiques à partir des données SN, on devrait se soucier des effets d'une évolution en redshift des magnitudes apparentes des SNe. Notamment, les modèles entraînant une évolution dont les effets dominent dans l'univers proche et qui prédisent une variation des magnitudes telle que les SNe aparaissent plus lumineuses à plus haut redshift sont dangereux. Afin d'éviter le risque d'introduire des biais dans l'extraction des paramètres cosmologiques, on devrait aussi analyser des données en incluant un paramètre supplémentaire qui décrit la possible évolution des magnitudes. Selon nos résultats, ce paramètre devrait être choisi tel qu'il décrit une évolution dominante dans l'univers proche, comme le fait notre modèle 2a, $\Delta m^{\text{evo}} \sim \sqrt{z}$.

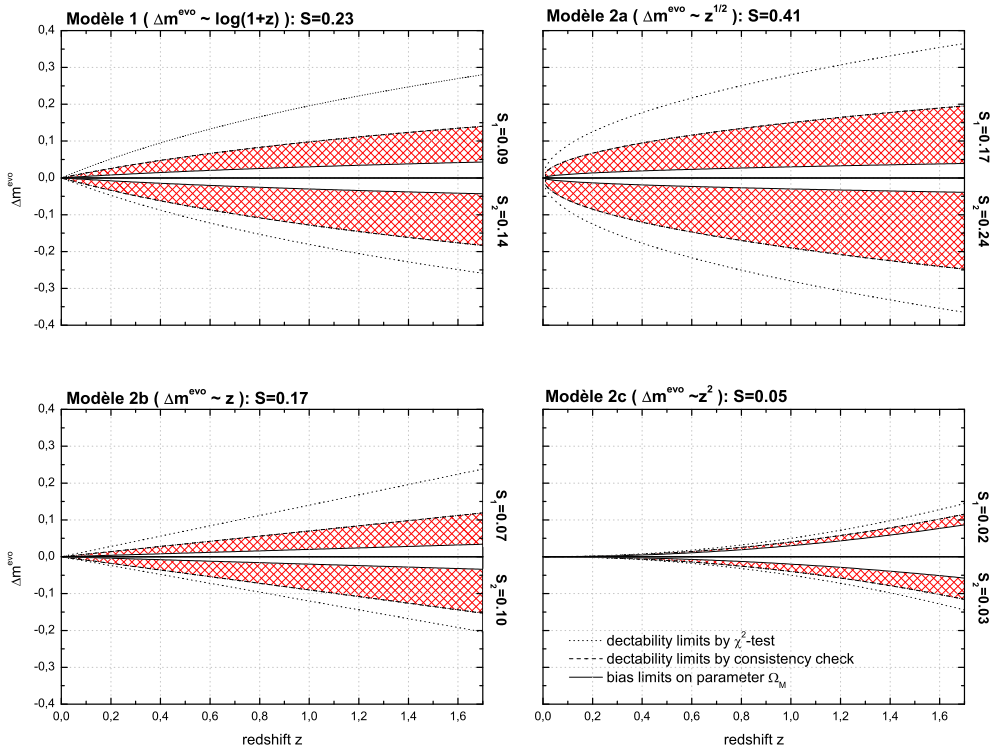
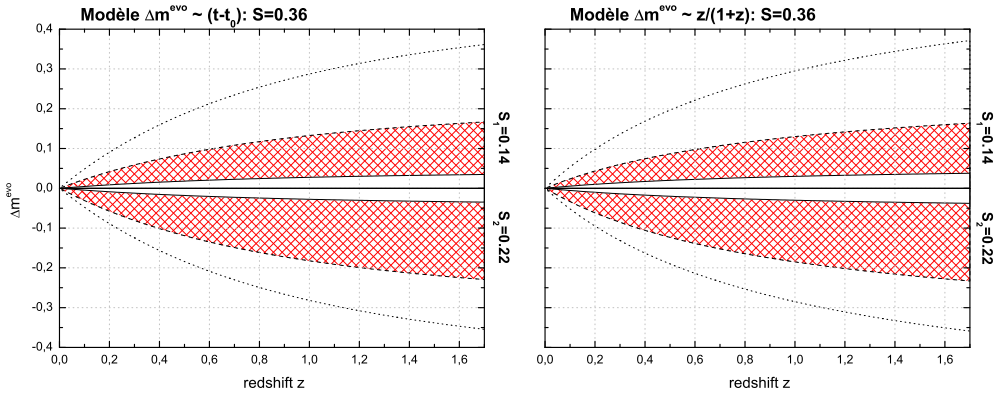


FIGURE 6.6: Les intervalles de détectabilité et de validité, à 68% de degré de confiance, dans un diagramme de Hubble. Les zones dangereuses sont hachurées. En haut : Les modèles 1 et 2. En bas : Les modèles (6.5) et (6.6).



Chapitre 7

Conclusions

Avec la découverte que l'univers se trouve à présent dans une phase d'expansion accélérée, la cosmologie entre dans ce que l'on peut nommer l'ère de la cosmologie de haute précision. Les contraintes actuelles indiquent un modèle cosmologique à géométrie plate, où la plus grande partie du contenu en masse-énergie de l'univers correspond à une composante inconnue, souvent appelée 'énergie noire', qui contribue pour environ 70% à la densité totale de l'univers. Dans ce modèle, la matière baryonique ordinaire et la radiation ont une contribution d'environ 5%, et la matière sombre contribue pour 25%. Les propriétés mesurées de l'énergie noire étant consistantes avec celles d'une Constante Cosmologique, Λ, ce modèle cosmologique standard est connu sous le nom du modèle 'Λ-Cold-Dark-Matter' ('ΛCDM'). Malgré son succès, ce modèle souffre de plusieurs problèmes. L'existence d'une Constante Cosmologique soulève des problèmes fondamentaux concernant sa nature physique, et beaucoup d'auteurs s'interrogent sur le 'problème de coïncidence'. Des essais tentant de la décrire comme la contribution du vide quantique faillissent quantitativement. Par conséquent, de nombreux modèles alternatifs ont été développés afin de décrire la composante d'énergie noire : citons par exemple les modèles de Quintessence, ou les modèles avec dimensions supplémentaires dérivés des théories des cordes, ou encore des propositions de modification des lois de la gravitation. De plus, des effets astrophysiques qui miment une expansion accélérée ont été considérés. Nous avons exposé les bases théoriques et observationnelles du modèle ΛCDM, et les diverses approches théoriques proposées pour interpréter l'accélération de l'expansion.

Ensuite, nous nous sommes concentrés sur les problèmes de l'extraction des paramètres cosmologiques à partir des données observationnelles. Les problèmes viennent principalement de la relation intégrale entre les observables mesurés et les paramètres cosmologiques, amenant à de très fortes corrélations entre paramètres, ce que l'on a appelé la dégénérescence géométrique. Cependant, lors des analyses de données, diverses hypothèses sont réalisées afin de réduire le nombre de paramètre à ajuster. A cause des dégénérescences, ces hypothèses ne sont pas sans effet et plusieurs études ont montré que les résultats peuvent être dangereusement biaisés. Les hypothèses les plus couramment effectuées sont de supposer une géométrie plate, que l'énergie noire est une Constante Cosmolo-

gique, ou que son équation d'état est constante... Pour les SNe Ia, de nombreuses approximations sont faites au niveau de la standardisation et on néglige souvent tout effet d'évolution. Pour le CMB et les observations liées à la croissance des structures, des hypothèses sont réalisées au niveau de la croissance des perturbations de densité, de la forme du spectre de puissance primordial, sur la vitesse du son à cette époque... Les analyses combinant plusieurs sondes cosmologiques permettent de lever partiellement les dégénérescences entre paramètres, mais chaque sonde ajoute ses propres paramètres et problèmes, rendant l'analyse globale de plus en plus complexe ce qui ne permet pas de s'affranchir de la nécessité d'effectuer des hypothèses lors de l'analyse. Ainsi, même dans le cadre des analyses combinées, certaines hypothèses, si elles sont erronées, peuvent fausser dramatiquement notre interprétation sans que cela soit détectable malgré de fortes statistiques.

Nous avons montré que, dû à la haute précision des mesures cosmologiques modernes, des approches purement cinématiques à la cosmologie ne permettent plus d'extraire des résultats fiables sur l'expansion de l'univers. Nous avons quantifié le risque d'introduire des biais sur les paramètres cinématiques pour différents modèles cosmologiques bien motivés, et nous avons montré comment la précision de l'approche cinématique (aux différents ordres en redshift qui sont discutés aujourd'hui) dépend du modèle cosmologique fiduciel. Nous démontrons, qu'avec des données à haute statistique le risque d'introduire des biais sur le paramètre de décélération est non-négligeable. Notre étude ayant été effectuée avec des données SN seules, nous argumentons qu'une future combinaison des données avec d'autres sondes sujettes à une description cosmographique (comme des sondages de la distance angulaire par le test des diamètres des galaxies) aggravera encore le risque de biais introduit par l'approche cinématique. Dans l'analyse des données cosmologiques on doit par conséquent se servir de la relation intégrale (exacte) pour les distances cosmologiques.

Nous avons testé la validité du paramétrage de l'équation d'état de l'énergie noire de Chevallier, Polarski, et Linder pour les cas où la dynamique fiducielle de l'énergie noire est décrite par une équation d'état du type 'step'. Une telle dynamique est motivée par la sous-classe 'tracker' des modèles de Quintessence. Nous avons quantifié les volumes dans l'espace des paramètres de l'équation d'état de l'énergie noire où la validité du paramétrage CPL s'effondre. Notamment pour des cas de transitions rapides et récentes, les paramètres CPL et les paramètres 'physiques' que l'on peut en déduire perdent leur interprétation physique. De plus, la reconstruction du paramètre de densité de la matière montre des risques de biais. Concernant les volumes et les limites exactes des zones de validité dans l'espace des paramètres nous mettons en valeur l'important résultat contre-intuitif qu'une augmentation de la statistique des données cosmologiques résultera en des risques de biais plus élevés. Afin d'éviter ces risques nous suggérons, qu'en sus d'une analyse CPL, il est nécessaire d'analyser les données cosmologiques avec une équation d'état de l'énergie noire du type 'step', tant que les transitions récentes et rapides ne sont pas exlues. Ceci devient d'autant plus important lorsqu'on augmente la statistique des données.

Nous avons évalué les risques de mal interpréter les résultats de l'analyse des données lorsqu'on introduit une mauvaise hypothèse concernant la standardisation des magnitudes des SNe. Nous avons exposé des arguments en faveur d'une évolution en redshift des magnitudes des SNe. Nous avons analysé les données actuelles en considérant quatre modèles d'évolution à un paramètre. Nous avons trouvé que des effets d'évolution menant aux luminosités des SNe plus petites à haut redshift qu'à bas redshift sont à 1σ exlus par les données actuelles quel que soit le paramétrage de l'évolution quand on suppose l'énergie noire dynamique ($w_{\mathrm{x}} \neq$ const.). Cependant, quand on suppose une équation d'état de l'énergie noire constante, $w_{\mathrm{x}} =$ const., seuls les modèles favorisant une évolution des magnitudes des SNe dominant à haut redshift exluent des SNe moins lumineuses à haut redshift. En général, les données ont tendance à préférer des évolutions des magnitudes des SNe vers des luminosités plus grandes à haut redshift. Sauf cas spéciaux, les données sont cependant à 1σ en accord avec l'hypothèse que les magnitudes n'évoluent pas.
Nous avons testé les implications sur l'extraction des paramètres cosmologiques si on ignore la possibilité des effets d'évolution (selon les quatre modèles en question) dans l'analyse des données cosmologiques. Nous avons testé la détectabilité des effets d'évolution avec des critères statistiques et physiques. Nous avons trouvé que pour chacun des modèles il existe une zone dangereuse où l'effet d'évolution n'est pas détectable dans une analyse qui ignore cet effet, et où il introduit des biais sur au moins un des paramètres cosmologiques. Notamment, le paramètre de densité de la matière porte le plus grand risque d'être biaisé. Nous avons trouvé, que les modèles entraînant les plus grands dangers de mal interpréter les paramètres cosmologiques sont des modèles favorisant une évolution dominant à bas redshift.

Appendice A

Traitement de données

A.1 Distribution de χ^2

Considérons N observables cosmologiques gaussiens et indépendants, $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_N)$, que l'on ait mesurés avec des erreurs $\vec{\sigma}_m = (\sigma_{m_1}, \sigma_{m_2}, \ldots, \sigma_{m_N})$. Nous voulons comparer à ceux-ci les valeurs des observables obtenues par un modèle théorique décrit par n_p paramètres cosmologiques $\{p_k\}$: $\vec{m}^{\mathrm{fit}}(p_k) = \left({m_1}^{\mathrm{fit}}, {m_2}^{\mathrm{fit}}, \ \ldots, {m_N}^{\mathrm{fit}}\right)$, où $k = (1, \ldots, n_\mathrm{p})$. Nous définissons la fonction 'maximum de vraisemblance' $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}\left(m_i, {m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k), \sigma_{m_i}\right) := \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{m_i}} \mathrm{e}^{-\frac{\left(m_i - {m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right)^2}{2\sigma_{m_i}^2}}. \tag{A.1}$$

La fonction $\mathcal{L}$ est la probabilité de mesurer les m_i observables, étant donné le modèle théorique permettant d'estimer les valeurs des observables $m_i^{\mathrm{fit}}(p_k)$:

$$\mathcal{L} = p\left(m_i | {m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right). \tag{A.2}$$

En realité, nous sommes cependant confronté au cas inverse : étant donné les m_i, nous cherchons le modèle théorique $\{p_k\}$ fournissant les meilleures prédictions pour ${m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)$. Le théorème de Bayes permet de donner $p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k) | m_i\right)$ comme :

$$p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k) | m_i\right) = p\left(m_i | {m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right) \frac{p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right)}{p(m_i)}, \tag{A.3}$$

où $p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right)$ est une probabilité 'a priori' du modèle théorique (la 'foi' que le modèle théorique est vrai). Le dénominateur, $p(m_i)$, appelé l''évidence', n'est pas important pour l'extraction des paramètres car il ne dépend pas des paramètres cosmologiques et peut être eliminé par une normalisation du côté gauche de l'éq.(A.3). La dépendance de la probabilité des connaissances 'a priori', cependant, doit être considérée comme génante. Il n'existe pas de règle fondamentale pour déterminer la probabilité 'a priori' des hypothèses, et la valeur que l'on attribue à $p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right)$ dépend des expériences antérieures, des préjugés théoriques, etc. (cf. Amsler et al. 2008, the Particle Data Group). Pour éviter cette dépendance nous allons employer l'approche 'fréquentiste'. Dans l'approche fréquentiste, on interprète $p\left({m_i}^{\mathrm{fit}}(p_k)\right)$ comme une hypothèse qui est soit correcte, soit fausse. Sa valeur est par conséquent 1 ou 0.

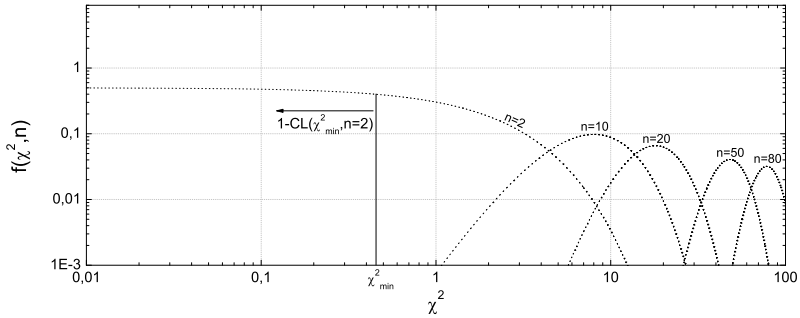


FIGURE A.1: Distribution de probabilité du χ^2 pour cinq différents nombres de dégré de liberté (éq.(A.5)). Nous y avons indiqué le principe de l'éq.(A.10), mais renvoyons à Amsler et al. (2008) pour plus de détails.

Nous verrons par la suite comment on peut attribuer un degré de confiance aux paramètres $\{p_k\}$ à partir de la fonction maximum de vraisemblance, éq.(A.1).

La description en terme de maximum de vraisemblance est équivalente à une description en terme de la fonction :

$$\begin{aligned}\chi^2\left(m_i, {m_i}^{\text{fit}}\left(p_k\right), \sigma_{m_i}\right) &:= -2\log\mathcal{L}\left(m_i, {m_i}^{\text{fit}}\left(p_k\right), \sigma_{m_i}\right)\\ &= \text{const.} + \sum_{i=1}^{N}\left\{\log\left(2\pi{\sigma_i}^2\right) + \frac{\left(m_i - {m_i}^{\text{fit}}\left(p_k\right)\right)^2}{{\sigma_{m_i}}^2}\right\},\end{aligned} \tag{A.4}$$

qui, pour des données distribuées de manière gaussienne, suit la fonction de distribution de probabilité de χ^2 :

$$f\left(\chi^2, n\right) = \frac{\left(\chi^2\right)^{n/2-1}\mathrm{e}^{-\chi^2/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}, \tag{A.5}$$

où n est le nombre de degré de liberté de l'ajustement (cf. Amsler et al. 2008). La fonction $f\left(\chi^2, n\right)$ est illustrée sur la Figure A.1 pour plusieurs valeurs différentes de n. La surface F sous la fonction f est par définition $F \equiv 1$. Dans le cas général, les données $\vec{m} = (m_1, m_2, \cdots, m_N)$ sont gaussiennes mais pas indépendantes, avec la fonction de corrélation :

$$\text{cov}\left[m_i, m_j\right] := \text{E}\left[m_i m_j\right] - \text{E}\left[m_i\right]\text{E}\left[m_j\right], \tag{A.6}$$

où $\text{E}\left[x\right]$ est l'espérance mathématique de la variable x. On utilise souvent le coéfficient de corrélation, défini par :

$$\text{corr}\left(m_i, m_j\right) := \frac{\text{cov}\left[m_i, m_j\right]}{\sigma_{m_i}\sigma_{m_j}}, \tag{A.7}$$

qui prend donc des valeurs entre -1 et 1. On introduit la matrice de covariance $\mathbf{C}$ tel que :

$$C_{ij} := \sigma_{m_i}\sigma_{m_j}\text{corr}\left(m_i, m_j\right), \tag{A.8}$$

et on peut alors réécrire l'éq.(A.4) sous la forme :

$$\chi^2 \cong \left(m_i - m_i^{\text{fit}}\right) C_{ij}^{-1} \left(m_j - m_j^{\text{fit}}\right) = \left[\vec{m} - \vec{m}^{\text{fit}}\right]^T \mathbf{C}^{-1} \left[\vec{m} - \vec{m}^{\text{fit}}\right]. \quad \text{(A.9)}$$

Le minimum χ^2_{min} dans l'espace des paramètres $\{p_k\}$ indique le 'meilleur fit'. L'implémentation numérique d'une minimisation du χ^2 peut se faire par plusieurs méthodes, mais n'est pas le sujet de ce manuscrit de thèse. Il suffit de souligner que pour des raisons de coûts numériques on applique en général une méthode itérative et non pas une grille, cf. ci-dessous.

A.2 Test de qualité de l'ajustement

La minimisation de la fonction χ^2 nous fournit d'une part la valeur minimale de cette fonction, χ^2_{min}, ainsi que le modèle théorique associé, $\{p_k\}$, que nous supposons donc être le 'bon' modèle. On peut utiliser la valeur χ^2_{min} comme un estimateur de qualité de l'ajustement des données avec le modèle théorique. Pour ceci on peut définir la 'p-valeur', qui correspond à la probabilité qu'un échantillon de données quelconque basé sur le bon modèle théorique ne soit pas compatible avec le modèle théorique déduit des vraies données. Ainsi, des valeurs faibles de la p-valeur indiquent une mauvaise correspondance entre l'hypothèse et les données. La condition de compabilité est donc donnée par $1-p$. La p-valeur peut être donnée par :

$$\begin{aligned} p &= \int_{\chi^2_{\text{min}}}^{\infty} f\left(x, n\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\chi^2_{\text{min}}}^{\infty} \frac{x^{n/2-1} \mathrm{e}^{-x/2}}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} \mathrm{d}x, \end{aligned} \quad \text{(A.10)}$$

où f est la fonction de distribution de probabilite du χ^2 (éq.(A.5)). Ici, le nombre de degré de liberté de l'ajustement, n, est donné par le nombre des données N moins le nombre de paramètres ajustés, n_{p}. Nous pouvons illustrer la p-valeur correspondant à une valeur χ^2_{min} comme le rapport de la surface engendrée par la fonction de distribution de probabilité sur l'intervalle $\left[0, \chi^2_{\text{min}}\right]$ à la surface totale, cf. Figure A.1.

Exemple 1 - Données actuelles : Quand nous analysons l'échantillon des 307 SNe de Kowalski et al. (2008) en combinaison avec les paramètres réduits du CMB et des BAO nous avons $N = 309$. Pour un ajustement des 4 paramètres standards $\left\{M_{\text{s}}, \Omega^0_{\text{M}}, w_0, w_a\right\}$ on a alors $n = 305$ et on obtient $1-p = 0.683$ (0.95) pour $\chi^2_{\text{min}} = 316$ (347). [1]

1. Par rapport au nombre de degré de liberté de l'ajustement on a alors $\chi^2_{\text{min}}/n = 1.04$ (1.14). Valeurs auxquelles sont à comparer les valeurs χ^2_{min}/n des Tablaux 2.1, 2.2 et 6.1. Puisque les valeurs de χ^2_{min}/n présentées sur ces tableaux sont bien inférieures aux valeurs dérivées ci-dessus, il est justifié de parler d'une bonne qualité du fit.

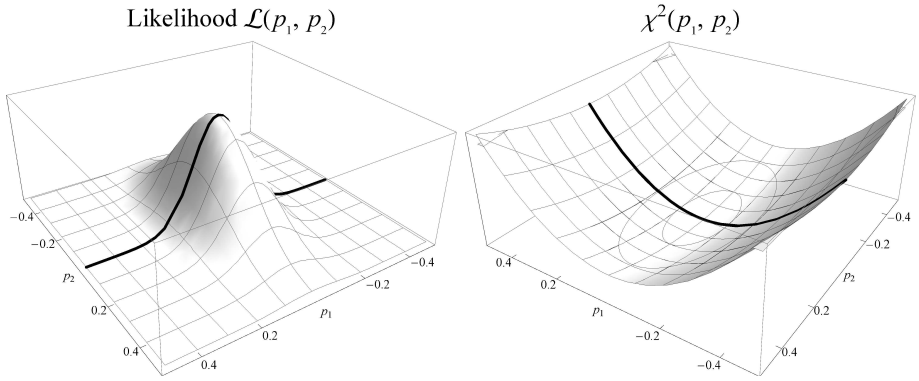


FIGURE A.2: Fonction maximum de vraisemblance (éq.(A.1), gauche) et χ^2 (éq.(A.4), droite) en unité arbitraire pour deux paramètres ($n_\mathrm{p} = 2$) avec $\sigma_{p_1(p_2)} = 0.1\,(0.2)$. Le minimum du χ^2 se trouve à (p_1, p_2)=$(0, 0)$. Les épaisses lignes noires montrent pour orientation la ligne $p_2 = 0$. Du côté droit nous montrons aussi les surfaces d'intersection de la fonction χ^2 avec les contours $\chi^2 = \chi^2_\mathrm{min} + 2.3\,(5.99)$.

Exemple 2 - Données futures : Pour les futures données de l'annexe B nous avons 18 bins de données, ce qui donne $N = 20$ dans une analyse combinée avec les paramètres réduits du CMB et des BAO. Nous obtenons $1-p = 0.683$ (0.95) pour $\chi^2_\mathrm{min} = 22$ (31). Ce sont les valeurs que nous utilisons comme critère de qualité statistique dans les chapitres 5 et 6.

A.3 Degré de confiance

Supposons que nous ayons trouvé le minimum, χ^2_min, en variant tous les paramètres $\{p_k\}$. Ayant ainsi trouvé les valeurs centrales des paramètres cosmologiques nous nous intéressons à leurs erreurs, soit à un intervalle autour de la valeur centrales correspondant à la précision statistique de la mesure. Si les erreurs sont gaussiennes, on peut donner la déviation standard du paramètre, σ_{p_k}, comme décrit ci-dessous. Dans le cas plus général où les erreurs ne sont pas gaussiennes, on peut construire des intervalles de confiance de la façon suivante, définie par Neyman (1937). A l'aide de la relation :

$$\chi^2 = \chi^2_\mathrm{min} + \Delta\chi^2, \tag{A.11}$$

on construit des contours autour du minimum dans l'espace des paramètres $\{p_k\}$. La valeur de $\Delta\chi^2$ est fixée par le degré de confiance ('confidence level', CL) que l'on désire avoir. Cette relation entre degré de confiance et $\Delta\chi^2$ dépend du nombre de paramètres du modèle, et a l'expression suivante :

$$\begin{aligned} 1 - \mathrm{CL}\left(\Delta\chi^2, n_\mathrm{p}\right) :&= \int_{\Delta\chi^2}^{\infty} f\left(x, n_\mathrm{p}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{\Delta\chi^2}^{\infty} \frac{x^{n_\mathrm{p}/2-1}\mathrm{e}^{-x/2}}{2^{n_\mathrm{p}/2}\Gamma(n_\mathrm{p}/2)}\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{A.12}$$

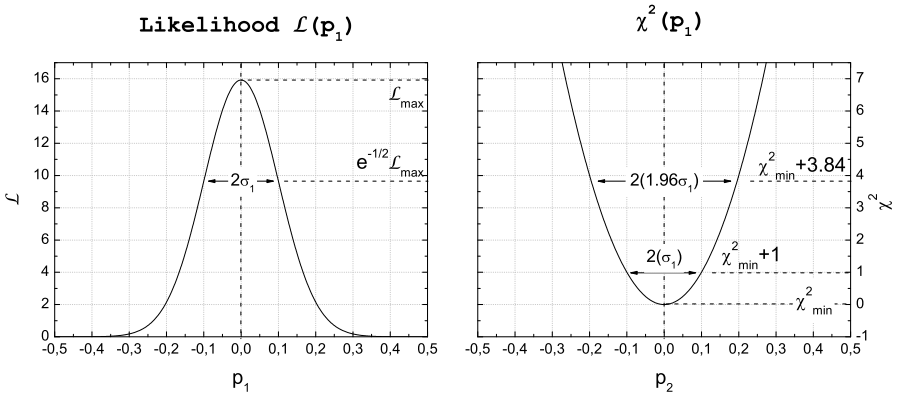


FIGURE A.3: Fonction maximum de vraisemblance (éq.(A.1), gauche) et χ^2 (éq.(A.4), droite) pour $n_\mathrm{p} = 1$. Nous voyons à droite que les intervalles de $68,3\%\,(95\%)$ CL (les erreurs $1\,(1.96)\,\sigma$) correspondent à ${\chi^2}_{\mathrm{min}} + 1\,(3.84)$.

Ici, n_p désigne le nombre des paramètres. Le degré de confiance correspond alors à la probabilité que les 'vrais' paramètres soient à l'intérieur de ces contours. Cependant, Amsler et al. (2008) mettent en valeur que cette probabilité dépend, pour des échantillons finis ($N < \infty$), des paramètres p_k. Par conséquent, ces contours ne sont pas exacts. Mais, la dépendance est faible et la probabilité peut être approximée par les valeurs calculées pour le cas $N = \infty$ que nous donnons dans le Tableau A.1 (pour les cas $n_\mathrm{p} = 1$ et $n_\mathrm{p} = 2$).
Nous illustrons la construction de ces contours sur un exemple simple, où les paramètres ne sont pas corrélés. Sur la Figure A.2 nous représentons la fonction 'maximum de vraisemblance' (éq.(A.1)) et le χ^2 (éq.(A.4)) pour $n_\mathrm{p} = 2$ paramètres. Suivant le Tableau A.1 nous trouvons le degré de confiance $\mathrm{CL}\,(p_1, p_2) = \{0.68, 0.95\}$ pour $\Delta\chi^2 = \{2.30, 5.99\}$. Les surfaces d'intersection de la fonction $\chi^2\,(p_1, p_2)$ avec les contours $\chi^2\,(p_1, p_2) = \chi^2_{\mathrm{min}} + 2.3\,(5.99)$ définissent ainsi les contours dans l'espaces des paramètres qui engendrent au degré de confiance de $68\,(95)\,\%$ les vraies valeurs des paramètres.
Dans ce cas, où p_1 et p_2 sont décorrélés, nous obtenons comme surface d'intersection des ellipses lelong des axes $p_k = 0$. En général, les paramètres du fit seront corrélés et l'ellipse va être inclinée par rapport aux axes de l'espace des paramètres, cf. plus bas. Si, de plus, les erreurs σ_{m_i} ne sont pas gaussiennes, la surface d'intersection de la Figure A.2 ne va plus ressembler à une ellipse, mais prendra des formes déformées souvent appelées 'bananes' ; cf. par exemple Figs. 2.12 et 2.16 (pages 46 et 51), et les contours du Tableau 6.2 (page 118).
De même, pour $n_\mathrm{p} = 1$, Figure A.3, nous trouvons les intervalles de dégré de confiance $\mathrm{CL}_{p_1} = \{0.68, 0.95\}$ pour $\Delta\chi^2 = \{1.00, 3.84\}$.

Résumé : Dans les analyses des données cosmologiques nous allons donc chercher le meilleur fit par une minimisation du χ^2, nous fixerons ensuite un (ou deux) des paramètres au minimum, soit $p_k\big|_{\chi^2=\chi^2_{\mathrm{min}}}$ (ou la paire $(p_k, p_l)\,\big|_{\chi^2=\chi^2_{\mathrm{min}}}$), et obtiendrons les erreurs σ_k (ou les contours dans l'espace de phase (p_k, p_l)) des paramètres cosmologiques par une minimisation du $\chi^2\,(p_{i\neq k})$ (ou $\chi^2\,(p_{i\neq k,l})$)

CL (%)	$n_\mathrm{p} = 1$	$n_\mathrm{p} = 2$
68.3	1.00	2.30
95.	3.84	5.99
99.	6.63	9.21

Tableau A.1: $\Delta\chi^2$ correspondant au degré de confiance CL (éq.(A.12)).

autour du minimum et par l'application de l'éq.(A.12). En réalité, la dimension de l'espace des paramètres peut être assez élévée, et cette méthode d'extraire les erreurs va être très demandeuse en temps de calcul. Supposons les six paramètres standard plus les paramètres du CMB et BAO nous pouvons facilement arriver à un espace des paramètres de dimensions dix ou supérieur. Pour une grille de 100 pas dans chaque direction p_k, autour du minimum, nous aurons alors à calculer le χ^2 pour $\sim 100^{10}$ points. Pour un temps de calcul du χ^2 de l'ordre $t_{\chi^2} \sim s$ on aurait alors à attendre $\sim 10^{12}$a.

A.4 Matrice de Fisher

Nous allons par conséquent chercher à estimer les erreurs σ_{p_k} au minimum $\{{p_k}^{\min}\}$. La fonction χ^2 peut, à son minimum ($\frac{\partial\chi^2}{\partial p_k}\big|_{{p_k}^{\min}} = 0$), être développée au premier ordre :

$$\chi^2\left({p_k}^{\min} + \delta p_k\right) \cong {\chi^2}_{\min} + F_{ij}\big|_{{p_k}^{\min}} \delta p_j, \tag{A.13}$$

où :

$$F_{ij} := \frac{1}{2}\frac{\partial^2\chi^2}{\partial p_k \partial p_j}, \tag{A.14}$$

est la 'matrice de Fisher'. Pour des erreurs parfaitement gaussiennes, la matrice de Fisher est l'inverse de la matrice de covariance de l'estimateur des paramètres, $F_{ij}^{-1} = V_{ij} = \sigma_{p_i}\sigma_{p_j}\mathrm{corr}\,(p_i, p_j)$.[2] Elle définie un ellipsoïde dans l'espace de phase :

$$p_k F_{ij} p_j \equiv 1, \tag{A.15}$$

dont les axes principaux sont en direction des vecteurs propres de $\mathbf{F}$ et dont les rayons sont donnés par la racine carrée de ses valeurs propres. L'ellipsoïde éq.(A.15) correspond aux contours $\chi^2 = \chi^2_{\min} + 1$ dans l'espace des paramètres. A titre d'exemple nous représentons sur la Figure A.4 une ellipse que l'on obtient dans le cas de deux paramètres. Les largeurs de l'ellipse en direction des paramètres p_1 et p_2 sont les déviations standards σ_{p_1} et σ_{p_2}, et sont un bon estimateur des vraies erreurs si les vraies erreurs sont approximativement gaussiennes. L'inclinaison de l'ellipse est donnée par la corrélation des paramètres via :

$$\tan\left(2\alpha\right) = 2\mathrm{corr}(\mathrm{p}_1, \mathrm{p}_2)\frac{\sigma_{p_1}\sigma_{p_2}}{\sigma_{p_1}^2 - \sigma_{p_2}^2}. \tag{A.16}$$

Cf. Amsler et al. (2008) pour une discussion plus détaillée.

2. Dans le cas général, la méthode de Fisher fournit l'erreur minimale.

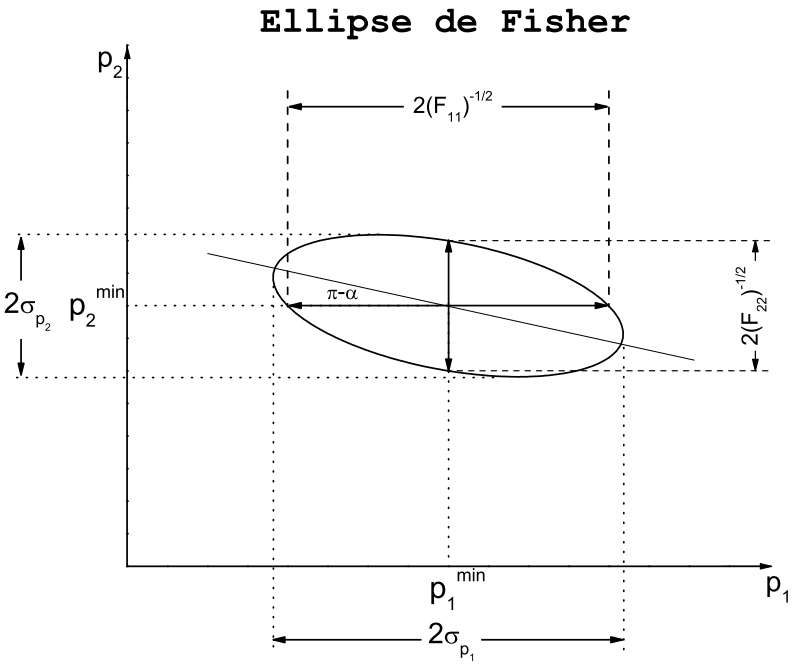


FIGURE A.4: L'ellipse définie par l'éq.(A.15) pour l'exemple de deux paramètres (p_1, p_2) légèrement correlés. Ici, la corrélation est négative.

Grâce à la matrice de Fisher (qui aura déja été calculée lors la minimisation du χ^2) on peut par conséquent économiser du temps de calcul et estimer les erreurs au minimum, ce qui sera envisageable quand on veut étudier les effets des paramétrages où des dépendances des valeurs centrales des paramètres et de leurs erreurs sur des hypothèses de modèle ou d'analyse, études où on a à calculer des minimums et des erreurs pour un très grand nombre de modèles cosmologiques.

Appendice B

Echantillon prospectif des SNe

Dans nos études des chapitres 4 à 6 nous utilisons, pour la simulation des données prospectives (horizon 2015 $\sim$ 2020), un échantilon de SNe qui correspond à ce que l'on pourrait attendre d'un sondage spatial, par exemple d'une mission satellite comme le 'Supernova Acceleration Probe' (SNAP) (cf. Branch et al. 2001; Kim et al. 2004). SNAP était proposé dans le cadre du Joint Dark Energy Mission (JDEM) de la NASA et du DOE, et comptait détecter et mesurer à haute statistique des SNe du type Ia jusqu'à redshift $z = 1.7$. L'échantillon contient 2000 SNe, dont 1000 à $z \geq 1$. Aux SNe à haut redshift s'ajoutent 300 SNe contenues dans deux bins à bas redshift $z < 0.1$, pour fixer la constante de Hubble, cf. la discussion page 40. Cet échantillon corresond à ce qui peut être attendu des sondages comme la SN Factory (Wood-Vasey et al. 2004). Nous représentons sur la Figure B.1 l'histogramme de l'échantillon.
L'erreur intrinsèque des magnitudes de chaque SN est supposée être :

$$\sigma_{\rm intr} = 0.15, \tag{B.1}$$

cf. éq.(6.2), et les erreurs systématiques sont supposées d'être contrôlées au niveau de quelques pourcents, cf. aussi Virey et al. (2004) et références internes. Les erreurs systématiques ne viennent pas seulement de l'instrument mais surtout de notre connaissance imparfaite de l'environnement astrophysique des SNe, des effets de lensing, de la correction K, de la procedure d'ajustement des courbes de lumière, etc. ., cf. par exemple Kowalski et al. (2008) qui ont étudié l'effet des erreurs systématiques sur l'extraction des paramètres cosmologiques (Figure 2.15). Concrètement, dans certaines analyses (chapitres 4 et 5) nous négligerons les erreurs systématiques, mais dans d'autres (chapitre 6) nous prendrons la valeur proposée pour SNAP (cf. Kim et al. 2004) :

$$\sigma_{\rm sys} = 0.02, \tag{B.2}$$

qui reste une valeur optimiste. Ces erreurs entrent dans la matrice de covariance par :

$$C_{ii}{}^{-1} = \sigma_{m_i}^2 + (\sigma_{m_i})_{\rm sys}^2. \tag{B.3}$$

La corrélation entre les bins sera mise à zéro dans toutes les études de cette thèse.

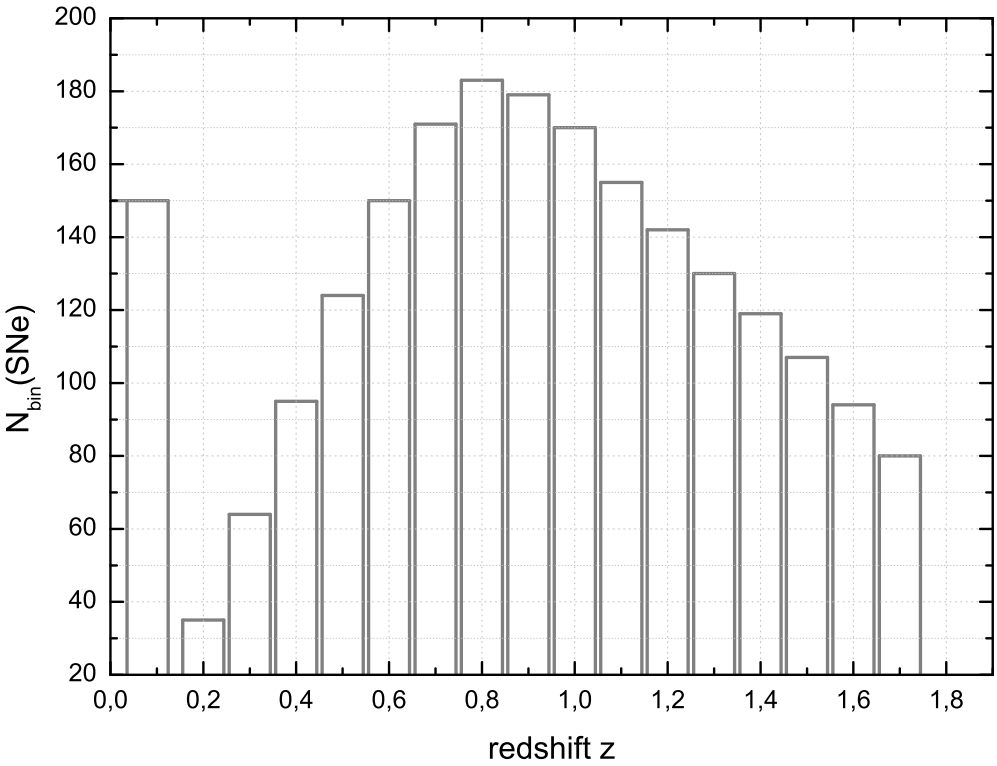


FIGURE B.1: Histogramme de l'échantillon des SNe que nous employons comme échantillon prospectif dans les études des chapitre 4 à 6. La portée de l'échantillon est divisée en 18 bins, dont deux à bas redshift $z < 0.1$ centrés sur $z = 0.03$ et $z = 0.08$, et 16 bins de largeur 0.1 de $z = 0.2$ jusqu'à $z = 1.7$. On peut comparer cet histogramme à celui des données actuelles, Figure 6.3 (page 119).

Liste des journaux scientifiques cités.

arXiv	L'archive de prépublications http ://arxiv.org/
A&A	Astronomy & Astrophysics
Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-nat. Kl.	Abhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse
AJ	The Astronomical Journal
ApJ	The Astrophysical Journal
ApJ Lett.	The Astrophysical Journal Letters
ApJ Suppl.	The Astrophysical Journal Supplement Series
Astr. Nachr.	Astronomische Nachrichten
Class. Quant. Grav.	Classical and Quantum Gravity
Gen. Rel. Grav.	General Relativity and Gravitation
Harv. Coll. Obs. Circ.	Harvard College Observatory Circular
Int. J. Mod. Phys.	International Journal of Modern Physics
JCAP	Journal of Cosmology and Astroparticle Physics
J. Reine Angew. Math.	Journal für die reine und angewandte Mathematik
J. Gen. Phil. Science	Journal for General Philosophy of Science
Lect. Not. Phys.	Lecture Notes in Physics
Münch. Ber.	Münchener Berichte
New Astron. Rev.	New Astronomy Reviews
Nucl. Phys.	Nuclear Physics
PASP	Publications of the Astronomical Society of the Pacific
Phys. Lett.	Physics Letters
Phys. Rep.	Physics Reports
Phys. Rev.	Physical Review
Phys. Rev. Lett.	Physical Review Letters
Proc. London Math. Soc.	Proceedings of the London Mathematical Society
Preuß. Akad. der Wiss.	Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften
PNAS	Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America
Rev. Mod. Phys.	Reviews of Modern Physics
R. Soc. Lond.	Royal Society of London
Phil. Trans. Series	Philosophical Transactions Series
Sov. J. Exp. and Th. Phys. Lett.	Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters
Sov. Phys. Usp.	Soviet Physics Uspekhi
Space Sc. Rev.	Space Science Reviews

Bibliographie

1220-1230, Bible Moralisée, Codex Vondobonensis 2554 (Bibliothèque Nationale de l'Autriche)

Aguirre, A. 1999, ApJ, 525, 583

Alam, U., Sahni, V., Deep Saini, T., & Starobinsky, A. A. 2004, MNRAS, 354, 275

Albrecht, A., Bernstein, G., Cahn, R., et al. 2006, astro-ph/0609591

Alexander, S., Biswas, T., Notari, A., & Vaid, D. 2009, Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics, 9, 25

Aller, L. H., Appenzeller, I., Baschek, B., et al. 1982, Landolt-Börnstein : Numerical data and functional relationships in science and technology - New series 'Group 6 Astronomy and Astrophysics', Vol. 2 (Springer)

Alpher, R. A. & Herman, R. C. 1948, Physical Review, 74, 1737

Amsler, C. et al. 2008, Phys. Lett. B, 667, 1

An, D., Terndrup, D. M., Pinsonneault, M. H., et al. 2007, ApJ, 655, 233

Anderson, J. D., Laing, P. A., Lau, E. L., et al. 1998, Phys. Rev. Lett., 81, 2858

Aristote. 1984, De caleo (Princeton : Princeton University Press)

Astier, P., Guy, J., Regnault, N., et al. 2006, A&A, 447, 31

Bartelmann, M., Doran, M., & Wetterich, C. 2006, A&A, 454, 27

Bassett, B. A., Kunz, M., Silk, J., & Ungarelli, C. 2002, MNRAS, 336, 1217

Beisbart, C. & Jung, T. 2006, J. Gen. Phil. Science, 37, 225

Bekenstein, J. D. 2004, Phys. Rev. D, 70, 083509

Bojowald, M. 2002, Phys. Rev. Lett., 89, 261301

Bolyai, J. 1832, Tentamen iuventutem studiosam in elementa matheosos introducendi (Maros-Vásárhelyini)

Bond, J. R., Efstathiou, G., & Tegmark, M. 1997, MNRAS, 291, L33

Bondi, H. 1947, MNRAS, 107, 410

Brahé, T. 1573, De stella nova (Copenhague)

Branch, D., Perlmutter, S., Baron, E., & Nugent, P. 2001, in The SNAP (Supernova Acceleration Probe) Yellow Book (Snowmass)

Brill, D. R. & Hartle, J. B. 1964, Phys. Rev., 135, B271

Bronder, T. J., Hook, I. M., Astier, P., et al. 2008, A&A, 477, 717

Buchert, T. 2008, Gen. Rel. Grav., 40, 467

Burnham, K. P. & Anderson, D. R. 2002, Model selection and multimodel fnference : A practical information-theoretic approach (New York : Springer)

Caldwell, R. R. 2002, Phys. Lett. B, 545, 23

Caldwell, R. R., Doran, M., Müller, C. M., Schäfer, G., & Wetterich, C. 2003, ApJ Lett., 591, L75

Caldwell, R. R. & Linder, E. V. 2005, Phys. Rev. Lett., 95, 141301

Carroll, S. M. 2001, Living Reviews in Relativity, 4, 1

Cattoen, C. & Visser, M. 2007, gr-qc/0703122

Chaisson, E. & McMillan, S. 2006, Astronomy : A beginner's guide to the universe, 5th edn. (San Francisco : Benjamin/Cummings)

Chevallier, M. & Polarski, D. 2001, Int. J. Mod. Phys. C, 10, 213

Chiba, T. 2006, Phys. Rev. D, 73, 063501

Clarkson, C., Bassett, B., & Lu, T. 2008, Phys. Rev. Lett., 101, 011301

Clarkson, C., Cortês, M., & Bassett, B. 2007, JCAP, 8, 11

Copernic, N. 1543, De revolutionibus orbium coelestium libri VI (Nuremberg)

Corasaniti, P. S. 2006, MNRAS, 372, 191

Corasaniti, P. S. & Copeland, E. J. 2002, Phys. Rev. D, 65, 043004

Corasaniti, P. S. & Copeland, E. J. 2003, Phys. Rev. D, 67, 063521

Corasaniti, P. S. & Melchiorri, A. 2008, Phys. Rev. D, 77, 103507

Crittenden, R., Majerotto, E., & Piazza, F. 2007, Phys. Rev. Lett., 98, 251301

Daly, R. A. & Djorgovski, S. G. 2004, ApJ, 612, 652

Davis, T. et al. 2007, in Bulletin of the American Astronomical Society, Vol. 38, 1003

Dicke, R. H., Peebles, P. J. E., Roll, P. G., & Wilkinson, D. T. 1965, ApJ, 142, 414

Dittus, H. & Lämmerzahl, C. 2006, Physik Journal, 5, 25

Doran, M. & Lilley, M. 2002, MNRAS, 330, 965

Doran, M., Lilley, M., Schwindt, J., & Wetterich, C. 2001, ApJ, 559, 501

Douspis, M., Zolnierowski, Y., Blanchard, A., & Riazuelo, A. 2008, A&A, 488, 47

Drell, P. S., Loredo, T. J., & Wassermann, I. 2000, ApJ, 530, 593

Drewermann, E. 2002, Glauben in Freiheit. Religion und Naturwissenschaft, Vol. 3, Im Anfang... Die moderne Kosmologie und die Frage nach Gott (Düsseldorf : Walter-Verlag)

Durrer, R. 2008, The Cosmic Microwave Background (Cambridge University Press)

Dvali, G., Gabadadze, G., & Porrati, M. 2000, Phys. Lett. B, 485, 208

Dyson, F. 2004, Nature, 427, 297

Dyson, F. W., Eddington, A. S., & Davidson, C. 1920, R. Soc. Lond. Phil. Trans. Serie A, 220, 291

Efstathiou, G. & Bond, J. R. 1999, MNRAS, 304, 75

Einstein, A. 1915a, Preuß. Akad. der Wiss., 844

Einstein, A. 1915b, Preuß. Akad. der Wiss., 831

Einstein, A. 1917, Preuß. Akad. der Wiss., 142

Einstein, A. 1923, Carte Postale à Hermann Weyl, Albert Einstein Archives, Jerusalem

Eisenstein, D. J., Zehavi, I., Hogg, D. W., et al. 2005, ApJ, 633, 560

Elgarøy, O. & Multamäki, T. 2007, A&A, 471, 65

Ellis, G. F. R. 1984, in General Relativity and Gravitation Conference, ed. B. Bertotti, F. de Felice, & A. Pascolini, 215

Ellis, G. F. R. & Buchert, T. 2005, Phys. Lett. A, 347, 38

ESA. 1997, The Hipparcos and Tycho Catalogues, Tech. rep.

Everitt, C. W. F., Adams, M., Bencze, W., et al. 2009, Space Sc. Rev., 65

Ferramacho, L. 2008, Cosmological parameter estimation from different observational data, Thèse de doctorat, Université Paul Sabatier (Toulouse)

Ferramacho, L. D., Blanchard, A., & Zolnierowski, Y. 2009a, A&A, 499, 21

Ferramacho, L. D., Blanchard, A., Zolnierowski, Y., & Riazuelo, A. 2009b, arXiv :0909.1703

Ferreira, P. G. & Joyce, M. 1998, Phys. Rev. D, 58, 023503

Freedman, W. L., Madore, B. F., Gibson, B. K., et al. 2001, ApJ, 553, 47

Friedmann, A. A. 1922, Zeitschrift für Physik, 10, 377

Frieman, J. A. 2008, Présentation à 43ième Rencontres de Moriond : Cosmologie (La Thuile)

Frieman, J. A., Turner, M. S., & Huterer, D. 2008, Annual Review of Astronomy & Astrophysics, 46, 385

Fréreux, R. & De Gandt, F. 1992, Galileo Galilei : Dialogue sur les deux grands systèmes du monde (Editions du seuil), traduit de l'italien par R.F. avec le concours de F. De G.

Furley, D. 1987, The greek cosmologists (Cambridge University Press)

Galilée. 1610, Sidereus nuncius (Venise : apud Thomam Baglionum)

Galilée. 1613, Storia e dimonstrazioni intorno alle macchie solari et loro accidenti... (Rome : Apresso Giacomo Mascardi)

Gallagher, J. S., Garnavich, P. M., Berlind, P., et al. 2005, ApJ, 634, 210

Gamow, G. 1948, Phys. Rev., 74, 505

Gamow, G. 1970, My world line (New York : Viking)

Garcia-Bellido, J. & Haugbølle, T. 2008, Journal of Cosmology and Astro-Particle Physics, 4, 3

Gauss, C. F. 1827, Disquisitiones generales circa superficies curvas (Göttingen)

Gerke, B. F. & Efstathiou, G. 2002, MNRAS, 335, 33

Geshnizjani, G. & Brandenberger, R. 2002, Phys. Rev. D, 66, 123507

Goenner, H., Renn, J., Ritter, J., & Sauer, T. 1999, The expanding worlds of general relativity (Birkhäuser)

Gradshteyn, I. S. & Ryzhik, I. M. 2007, Table of integrals, series and products, ed. A. Jeffrey & D. Zwillinger (Burlington : Elsevier Academic Press)

Hamuy, M., Phillips, M. M., Suntzeff, N. B., et al. 1996a, AJ, 112, 2391

Hamuy, M., Phillips, M. M., Suntzeff, N. B., et al. 1996b, AJ, 112, 2398

Hamuy, M. & Pinto, P. A. 2002, ApJ Lett., 566, L63

Hannestad, S. & Mörtsell, E. 2004, JCAP, 9, 1

Harrison, E. R. 1990, in IAU Symposium, Vol. 139, The galactic and extragalactic background radiation, ed. S. Bowyer & C. Leinert, 3

Hatano, K., Branch, D., Lentz, E. J., et al. 2000, ApJ Lett., 543, L49

Hinshaw, G., Weiland, J. L., Hill, R. S., et al. 2009, ApJ Suppl., 180, 225

Hoeflich, P., Wheeler, J. C., & Thielemann, F. K. 1998, ApJ, 495, 617

Howell, D. A., Sullivan, M., Conley, A., & Carlberg, R. 2007, ApJ Lett., 667, L37

Hu, W. 2005a, Phys. Rev. D, 71, 047301

Hu, W. 2005b, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 339, Observing Dark Energy, ed. S. C. Wolff & T. R. Lauer, 215

Hu, W., Fukugita, M., Zaldarriaga, M., & Tegmark, M. 2001, ApJ, 549, 669

Hubble, E. 1929, PNAS, 15, 168

Huey, G., Wang, L., Dave, R., Caldwell, R. R., & Steinhardt, P. J. 1999, Phys. Rev. D, 59, 063005

Huterer, D. & Starkman, G. 2003, Phys. Rev. Lett., 90, 031301

Huterer, D. & Turner, M. S. 1999, Phys. Rev. D, 60, 081301

Isaacson, R. A. 1968, Phys. Rev., 166, 1272

Islam, J. N. 2002, An Introduction to Mathematical Cosmology (Cambridge University Press)

Jaouiche, K. 2000, La théorie des parallèles en pays d'islam : Contribution à la préhistoire des géométries non-euclidiennes, L'histoire des sciences (Paris : Librairie Philosophique Vrin)

Jassal, H. K., Bagla, J. S., & Padmanabhan, T. 2005, MNRAS, 356, L11

Jha, S., Riess, A. G., & Kirshner, R. P. 2007, ApJ, 659, 122

John, M. V. 2004, ApJ, 630, 667

Jung, T. 2006, in Nuncius Hamburgensis - Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften, Vol. 4, Entwicklung der Astrophysik. Proceedings des Kolloquiums des Arbeitskreises Astronomiegeschichte in der Astronomischen Gesellschaft am 26. September 2005 in Köln., ed. G. Wolfschmidt

Kaluza, T. 1921, Preuß. Akad. der Wiss., 966

Kepler, J. 1606, De stella nova in pede serpentarii (Prague)

Killing, W. K. 1892, J. Reine Angew. Math., 109, 121

Kim, A. G., Linder, E. V., Miquel, R., & Mostek, N. 2004, MNRAS, 347, 909

Kirshner, R. P. 2003, PNAS, 101, 8

Knopfler, M. 2004, Shangri-La (will d. side limited)

Komatsu, E., Dunkley, J., Nolta, M. R., et al. 2009, ApJ Suppl., 180, 330

Kosowsky, A. & Turner, M. S. 1995, Phys. Rev. D, 52, 1739

Kowalski, M., Rubin, D., Aldering, G., et al. 2008, ApJ, 686, 749

Krasiński, A. 1997, Inhomogeneous cosmological models (Cambridge University Press)

Krause, O., Tanaka, M., Usuda, T., et al. 2008, Nature, 456, 617

Kuhn, W. 2001, Ideengeschichte der Physik. Eine Analyse der Entwicklung der Physik im historischen Kontext (Wiesbaden : Vieweg Verlag)

Leavitt, H. S. & Pickering, E. C. 1912, Harv. Coll. Obs. Circ., 173, 1

Leeuwen, F. 2009, A&A, 497, 209

Leibundgut, B. 2008, Gen. Rel. Grav., 40, 221

Lemaître, G. 1927, Annales de la Societe Scientifique de Bruxelles, 47, 49

Lemaître, G. 1933, Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 53, 51

Lentz, E. J., Baron, E., Branch, D., Hauschildt, P. H., & Nugent, P. E. 2000, ApJ, 530, 966

Lerner, M. P. 1989, Revue d'histoires des sciences, 275

Lindberg, D. C. 1992, The beginnings of western science. The european tradition in philosophical, religious and institutional context, 600 B.C. to A.D. 1450 (Chicago : University of Chicago)

Linden, S. 2005, Kollaps kompakter astrophysikalischer Objekte, Thèse de diplôme, Friedrich-Schiller-Universität (Iéna)

Linden, S. & Virey, J.-M. 2008, Phys. Rev. D, 78, 023526

Linden, S., Virey, J.-M., & Tilquin, A. 2009, A&A, 506, 1095

Linder, E. V. 2003, Phys. Rev. Lett., 90, 091301

Linder, E. V. 2006, Astropart. Phys., 26, 102

Linder, E. V. 2008, Gen. Rel. Grav., 40, 329

Linder, E. V. 2009, Phys. Rev. D, 79, 023509

Linder, E. V. & Huterer, D. 2005, Phys. Rev. D, 72, 043509

Lobatchevski, N. 1829, in Bulletin de l'Université de Kazan (Kazan)

Maor, I., Brustein, R., McMahon, J., & Steinhardt, P. J. 2002, Phys. Rev. D, 65, 123003

Maraszek, R. 2009, The Nebra sky disc, ed. H. Meller (Landesamt für Denkmalpflege und Archäologie Sachsen-Anhalt), version en anglais par Brendan O'Connor

Marinoni, C., Saintonge, A., Giovanelli, R., et al. 2008, A&A, 478, 43

Matarasso-Gervais, S. 1988, Galilée – Entre le Savoir et le Pouvoir (Aix-en-Provence : Alinéa)

Mather, J. C., Fixsen, D. J., Shafer, R. A., Mosier, C., & Wilkinson, D. T. 1999, ApJ, 512, 511

Mattig, W. 1958, Astr. Nach., 284, 109

Ménard, B., Kilbinger, M., & Scranton, R. 2009, arXiv :0903.4199

Milgrom, M. 1983, ApJ, 270, 365

Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. 1973, Gravitation (W. H. Freeman and company)

Monteil, V.-M. 2004, Khayyâm Quatrains, Hâfez Ballades. Poèmes traduits du persan par Vincent-Mansour Monteil, Edition bilingue (Arles : Babel)

Moore, P. 2002, The Astronomy Encyclopedia (Oxford University Press)

Mukhanov, V. 2005, Physical foundations of cosmology (Cambridge University Press)

Müller, E. 1998, in Simulation of Astrophysical Fluid Flow, ed. O. Steiner & A. Gautschy (Springer), 343–449

Neugebauer, G. 1980, Relativistische Thermodynamik (Berlin : Akademie Verlag)

Neumann, C. 1874, Abh. d. Kgl. sächs. Ges. d. Wiss., math.-nat. Kl., 26, 97

Newton, I. 1686, Philosophiae naturalis principa mathematica (Londres : Jussu societatis regiæ ac typis Josephi Streater)

Neyman, J. 1937, R. Soc. London Phil. Trans. Series, 236, 333

Nordin, J., Goobar, A., & Jönsson, J. 2008, JCAP, 2, 8

Nugent, P., Sullivan, M., Ellis, R., et al. 2006, ApJ, 645, 841

Okumura, T., Matsubara, T., & Eisenstein, D. J. 2007, ApJ, 676, 889

Olbers, H. W. 1823, Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826

Pauli, W. 1921, in Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, ed. A. Sommerfeld, Vol. 5/2 (Leipzig : B. G. Teubner)

Pearlman, M. R., Degnan, J. J., & Bosworth, J. J. 2002, Advances in Space Research, 30

Peebles, P. J. & Ratra, B. 2003, Rev. Mod. Phys., 75, 559

Penzias, A. A. & Wilson, R. W. 1965, ApJ, 142, 419

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., et al. 1999, ApJ, 517, 565

Pogosian, L., Corasaniti, P. S., Stephan-Otto, C., Crittenden, R., & Nichol, R. 2005, Phys. Rev. D, 72, 103519

Rana, N. C. 1980, Astrophysics and Space Science, 71, 123

Ratra, B. & Peebles, P. J. E. 1988, Phys. Rev. D, 37, 3406

Riess, A. G. 2000, PASP, 112, 1284

Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., et al. 1998, AJ, 116, 1009

Riess, A. G., Filippenko, A. V., Li, W., & Schmidt, B. P. 1999, AJ, 118, 2668

Riess, A. G. & Livio, M. 2006, ApJ, 648, 884

Riess, A. G., Strolger, L., Tonry, J., et al. 2004, ApJ, 607, 665

Rindler, W. 2001, Relativity : Special, General, and Cosmological (Oxford University Press)

Robert, P. 2009, Le nouveau Petit Robert de la langue française, ed. J. Rey-Debove & A. Rey (Paris : Dictionnaire le Robert)

Robertson, H. P. 1935, ApJ, 82, 284

Robertson, H. P. 1936a, ApJ, 83, 187

Robertson, H. P. 1936b, ApJ, 83, 257

Röpke, F. K. 2005, A&A, 432, 969

Röpke, F. K. & Hillebrandt, W. 2004, A&A, 420, L1

Rosenberg, H. 1910, Astr. Nachr., 186, 71

Rosenfeld, B. A. 1988, A history of non-Euclidean geometry, studies in the history of mathematics and physical sciences (Springer)

Rovelli, C. & Smolin, L. 1988, in Highlights in Gravitation and Cosmology, ed. B. Iyer (Cambridge, U.K. ; New York, U.S.A. : Cambridge University Press)

Ruiz-Lapuente, P., Comeron, F., Méndez, J., et al. 2004, Nature, 431, 1069

Sahni, V. 2004, in Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, Vol. 653, Lecture Notes in Physics, Berlin Springer Verlag, ed. E. Papantonopoulos, 141

Sahni, V., Saini, T. D., Starobinsky, A. A., & Alam, U. 2003, Sov. J. Exp. and Th. Phys. Lett., 77, 201

Sarkar, D., Amblard, A., Cooray, A., & Holz, D. E. 2008a, ApJ Lett., 684, L13

Sarkar, D., Amblard, A., Holz, D. E., & Cooray, A. 2008b, ApJ Lett., 678, 1

Sathyaprakash, B. S. & Schutz, B. F. 2009, Living Reviews in Relativity, 12, http ://www.livingreviews.org/lrr-2009-2

Scherrer, R. J. 2006, Phys. Rev. D, 73, 043502

Schneider, P. 2006, Einführung in die extragalaktische Astronomie und Kosmologie (Springer)

Seeliger, H. v. 1895, Astr. Nachr., 137, 129

Seeliger, H. v. 1896, Münch. Ber., 26, 373

Sexl, R. U. & Urbandke, H. K. 2002, Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie (Spektrum Akademischer Verlag)

Shafieloo, A., Alam, U., Sahni, V., & Starobinsky, A. A. 2006, MNRAS, 366, 1081

Shapiro, C. & Turner, M. S. 2006, ApJ, 649, 563

Shapiro, S. L. & Teukolsky, S. A. 1983, Black holes, white dwarfs, and neutron stars : The physics of compact objects (Wiley)

Sotiriou, T. P. & Faraoni, V. 2008, arXiv :0805.1726, à paraître dans Rev. Mod. Phys.

Spergel, D. N., Bean, R., Doré, O., et al. 2007, ApJ Suppl. Ser., 170, 377

Steinhardt, P. J., Wang, L., & Zlatev, I. 1999, Phys. Rev. D, 59, 123504

Stephani, H., Kramer, D., MacCallum, M., Hoenselaers, C., & Herlt, E. 2003, Exact solutions of Einstein's field equations (Cambridge University Press)

Strolger, L.-G., Riess, A. G., Dahlen, T., et al. 2004, ApJ, 613, 200

Sullivan, M., Ellis, R. S., Howell, D. A., et al. 2009, ApJ Lett., 693, L76

Tammann, G. A., Sandage, A., & Reindl, B. 2003, A&A, 404, 423

Tegmark, M., Eisenstein, D. J., Strauss, M. A., et al. 2006, Phys. Rev. D, 74, 123507

Tolman, R. C. 1934, PNAS, 20, 169

Toomer, G. 1984, Ptolemy's Almagest (Springer)

Toomer, G. J. 1970-1978, Dictionary of scientific biography (New York : Scribners)

Tully, R. B. & Fisher, J. R. 1977, A&A, 54, 661

Upadhye, A., Ishak, M., & Steinhardt, P. J. 2005, Phys. Rev. D, 72, 063501

Virey, J. & Ealet, A. 2007, A&A, 464, 837

Virey, J., Taxil, P., Tilquin, A., et al. 2004, Phys. Rev. D, 70, 043514

Virey, J., Taxil, P., Tilquin, A., et al. 2005, Phys. Rev. D, 72, 061302

Virey, J.-M. 2007, Recherche de Signaux de Nouvelle Physique en Physique des Particules et en Cosmologie, HDR, Université de Provence

Virey, J.-M., Talon-Esmieu, D., Ealet, A., Taxil, P., & Tilquin, A. 2009, JCAP

Visser, M. 2004, Class. Quant. Grav., 21, 2603

Vitagliano, V., Xia, J., Liberati, S., & Viel, M. 2009, arXiv :0911.1249

Walker, A. G. 1936, Proc. London Math. Soc., 42, 90

Wang, Y. & Freese, K. 2006, Phys. Lett. B, 632, 449

Wang, Y. & Mukherjee, P. 2004, ApJ, 606, 654

Wang, Y. & Mukherjee, P. 2007, Phys. Rev. D, 76, 103533

Wang, Y. & Tegmark, M. 2004, Phys. Rev. Lett., 92, 241302

Weinberg, S. 1972, Gravitation and Cosmology : Principles and applications of the general theory of relativity (Wiley)

Weinberg, S. 1989, Rev. Mod. Phys., 61, 1

Weisberg, J. M. & Taylor, J. H. 2005, in Astronomical Society of the Pacific Conference Series, Vol. 328, Binary radio pulsars, ed. F. A. Rasio & I. H. Stairs, 25

Wetterich, C. 1988, Nucl. Phys. B, 302

Wetterich, C. 2004, Phys. Lett. B, 594, 17

Will, C. M. 2006, Living Reviews in Relativity, 9, 3

Wood-Vasey, W. M., Aldering, G., Lee, B. C., et al. 2004, New Astron. Rev., 48, 637

Zel'dovich, Y. 1968, Sov. Phys. Usp., 11, 381

Zlatev, I., Wang, L. M., & Steinhardt, P. . 1999, Phys. Rev. Lett., 82, 896

Table des figures

1.1 Le disque céleste de Nebra 6
1.2 Les corps platoniques 8
1.3 La 'Bible Moralisée' 10
1.4 Illustration du paradoxe d'Olbers 12

2.1 Diagramme de Hubble (1929) 21
2.2 Les (paramètres de) densités cosmologiques 29
2.3 Les modèles de Friedmann 30
2.4 Illustration de la définition du parsec 32
2.5 Illustration du parallaxe de flux d'étoiles 33
2.6 Illustration du parallaxe photométrique 34
2.7 L'échelle de distance 36
2.8 Classification des SNe 37
2.9 Le flot de Hubble 38
2.10 Le 'Union Set' (échantillon de SN) 39
2.11 Plan et spectre du CMB (WMAP5) 42
2.12 Distribution et spectre de puissance des galaxies (SDSS) 46
2.13 Composition de l'univers 47
2.14 Contours $(\Omega_{\mathrm{M}}^0, \Omega_{\Lambda}^0)$ 49
2.15 Contours $(\Omega_{\mathrm{M}}^0, w_{\mathrm{x}})$ 50
2.16 Contours $(\Omega_{\mathrm{x}}^0, \Omega_{\mathrm{k}}^0)$ et $(\Omega_{\mathrm{x}}^0, w_{\mathrm{x}})$ 51
2.17 Contours (w_0, w_a) 52
2.18 Dégénérescence du spectre du CMB 55
2.19 Dégénérescence géométrique dans les plans $\left(\Omega_{\mathrm{k}}^0, \Omega_{\mathrm{x}}^0\right)$ et $\left(w_{\mathrm{x}}, \Omega_{\mathrm{x}}^0\right)$. 55
2.20 Dégénérescence géométrique dans le plan (w_0, w_a) 56

3.1 Les modèles 'tracker' 64
3.2 Transition de phase dans $w_{\mathrm{Q}}(z)$ 65
3.3 L'espace de phase $(w_{\mathrm{x}}, w_{\mathrm{x}}')$ 66
3.4 Module de distances pour différentes valeurs de w_0 et w_a 73
3.5 Contours (w_0, w_a), obtenu avec SNe+$\mathcal{R}$+A 74
3.6 Illustration du paramétrage du type 'step' 76

4.1 Série Taylor du module de distances 85
4.2 Imprécision du développement en z du module de distances en fonction de Ω_{M}^0 86

4.3 Imprécision du développement en z du module de distances en fonction des paramètres cosmologiques 87
4.4 Imprécision du développement en z du module de distances en fonction de w_0 et w_a (plan élargi) 88

5.1 Illustration d'un ajustement avec CPL d'une équation d'état fiducielle du type 'step' 98
5.2 Valeur du $\chi^2_{\rm min}$ dans l'espace des paramètres du modèle fiduciel du type 'step' 99
5.3 Zones de validité des paramètres $\Omega^0_{\rm M}$ et w_0 dans l'espace des paramètres $(z_{\rm t}, \Gamma)$ du modèle fiduciel du type 'step' 100
5.4 Zones de validité des paramètre $-2w_{\rm x}(1)$ et w_p dans l'espace des paramètres $(z_{\rm t}, \Gamma)$ du modèle fiduciel du type 'step' 102
5.5 Zones de validité des paramètres w_i et $w_{\rm eff}$ dans l'espace des paramètres $(z_{\rm t}, \Gamma)$ du modèle fiduciel du type 'step' 103
5.6 Zones de validité des paramètres $-2w'_{\rm x}(1)$ et w_i dans l'espace des paramètres $(z_{\rm t}, \Gamma)$ du modèle fiduciel du type 'step', pour une transition de petite amplitude 104
5.7 Zones de validité des paramètres dans l'espace des paramètres (w_i, w_f) du modèle fiduciel du type 'step' 106

6.1 Valeurs centrales des paramètres dynamiques de l'énergie noire et du paramètre d'évolution de magnitudes des SNe pour divers modèles d'évolution 115
6.2 Contraintes sur les paramètres d'évolution de magnitude des SNe 116
6.3 Le 'Union Set' (échantillon de SN) divisé en bin de redshift . . . 119
6.4 Illustration du risque de biais sur les paramètres cosmologiques . 121
6.5 Illustration des critères de χ^2 et de consistance 123
6.6 Dangerosité des modèles d'évolution des magnitudes des SNe étudiés 129

A.1 Fonction de distribution de probabilité de χ^2 136
A.2 La fonction maximum de vraisemblance et χ^2 en deux dimensions 138
A.3 La fonction maximum de vraisemblence et χ^2 en une dimension . 139
A.4 Ellipse de Fisher 141

B.1 L'échantillon de SN prospectif 144

Liste des tableaux

2.1 Contraintes sur les paramètres cosmologiques (sans priors) à partir des données SN (Union Set), WMAP5 ($\mathcal{R}$), et des BAO (A) . 52
2.2 Contraintes sur les paramètres cosmologiques (sous l'hypothèse $\Omega_{\mathrm{R}}^0 = \Omega_{\mathrm{k}}^0 = 0$) à partir des données SN (Union Set), WMAP5 ($\mathcal{R}$), et des BAO (A) 53

4.1 Valeurs des paramètres cosmographiques pour trois modèles cibles 89
4.2 Risque de biais sur les paramètres cosmographiques 90

5.1 Reconstruction des paramètres dans une analyse avec CPL d'une équation d'état ficudielle du type 'step' 97

6.1 Contraintes sur les paramètres cosmologiques et les paramètres d'évolution de magnitudes des SNe à partir des données SN (Union Set), WMAP3 ($\mathcal{R}$), et des BAO (A) 114
6.2 Contraintes sur les paramètres cosmologiques et le paramètre d'évolution du modèle 1 d'évolution des magnitudes des SNe . . . 118
6.3 Critère de consistance sur l'échantillon des SNe 122
6.4 Zones de non-détectabilité (par les différents critères) d'une évolution des magnitudes des SNe 124
6.5 Zones de non-détéctabilité, et zones de validité des paramètres cosmologiques pour les modèles fiduciels d'évolution de magnitudes des SNe 127
6.6 Dangerosité des modèles d'évolution des magnitudes des SNe . . 128

A.1 $\Delta\chi^2$ correspondant au degré de confiance. 140

Index des auteurs

Aguirre (1999), 71, 111
Al-Hayyâm, Umar, 8
Al-Khwârizmi, Abu Dscha'far, 8
Alam et al. (2004), 71
Albrecht et al. (2006), 71, 95
Alexander et al. (2009), 67
Aller et al. (1982), 34
Alpher & Herman (1948), 41
Amsler et al. (2008), 48, 123, 135, 136, 139, 140
An et al. (2007), 34
Anderson et al. (1998), 69
Aristote (1984), 7
Astier et al. (2006), 93
Bartelmann et al. (2006), 74
Bassett et al. (2002), 75
Beisbart & Jung (2006), 11, 17
Bekenstein (2004), 69
Bib (1220-1230), 10
Bojowald (2002), 70
Bolyai (1832), 9
Bond et al. (1997), 44, 46
Bondi (1947), 66
Brahé (1573), 9
Branch et al. (2001), 111, 143
Brill & Hartle (1964), 68
Bronder et al. (2008), 119
Buchert (2008), 68
Burnham & Anderson (2002), 83
Caldwell & Linder (2005), 62, 64–66, 93
Caldwell et al. (2003), 74
Caldwell (2002), 73
Carroll (2001), 24
Cattoen & Visser (2007), 84
Chaisson & McMillan (2006), 35, 36
Chevallier & Polarski (2001), 51, 71, 93
Chiba (2006), 93
Clarkson et al. (2007), 53
Clarkson et al. (2008), 68
Copernic (1543), 9
Corasaniti & Copeland (2002), 44
Corasaniti & Copeland (2003), 64, 65, 75
Corasaniti & Melchiorri (2008), 44
Corasaniti (2006), 111
Crittenden et al. (2007), 71
Daly & Djorgovski (2004), 71
Davis et al. (2007), 67, 71, 93
Dicke et al. (1965), 41
Dittus & Lämmerzahl (2006), 69
Doran & Lilley (2002), 44
Doran et al. (2001), 74
Douspis et al. (2008), 75
Drell et al. (2000), 109, 112
Drewermann (2002), 5
Durrer (2008), 41
Dvali et al. (2000), 70
Dyson et al. (1920), 15
Dyson (2004), 83
ESA (1997), 34
Efstathiou & Bond (1999), 54, 55
Einstein (1915a), 15
Einstein (1915b), 15
Einstein (1917), 13–15, 20, 25
Einstein (1923), 59
Eisenstein et al. (2005), 45, 46, 49
Elgarøy & Multamäki (2007), 44
Ellis & Buchert (2005), 68
Ellis (1984), 67
Everitt et al. (2009), 69
Ferramacho et al. (2009a), 112, 113, 119
Ferramacho et al. (2009b), 77, 108
Ferramacho (2008), 44, 45, 52

Ferreira & Joyce (1998), 74
Fréreux & De Gandt (1992), 7
Freedman et al. (2001), 23, 35
Friedmann (1922), 17, 24
Frieman et al. (2008), 61, 69, 70
Frieman (2008), 67
Furley (1987), 8
Galilée (1610), 9
Galilée (1613), 9
Gallagher et al. (2005), 110
Gamow (1948), 41
Gamow (1970), 59
Garcia-Bellido & Haugbølle (2008), 67
Gauss (1827), 18
Gerke & Efstathiou (2002), 71
Geshnizjani & Brandenberger (2002), 68
Goenner et al. (1999), 13
Gradshteyn & Ryzhik (2007), 28
Hamuy & Pinto (2002), 36
Hamuy et al. (1996a), 111
Hamuy et al. (1996b), 111
Hannestad & Mörtsell (2004), 75
Harrison (1990), 13
Hatano et al. (2000), 111
Hinshaw et al. (2009), 41, 42
Hipparque, 8
Hoeflich et al. (1998), 110
Howell et al. (2007), 111
Hu et al. (2001), 44
Hubble (1929), 21, 59
Huey et al. (1999), 96
Huterer & Starkman (2003), 71
Huterer & Turner (1999), 46, 62
Hu (2005a), 73
Hu (2005b), 95
Isaacson (1968), 68
Islam (2002), 18
Jaouiche (2000), 8, 9
Jassal et al. (2005), 71
Jha et al. (2007), 38, 71, 93
John (2004), 83
Jung (2006), 59
Kaluza (1921), 70
Kepler (1606), 9
Khayyâm, Omar, v, 8
Killing (1892), 16
Kim et al. (2004), 143
Kirshner (2003), 23
Knopfler (2004), 5
Komatsu et al. (2009), 42–44, 47, 48, 50, 51, 71, 114
Kosowsky & Turner (1995), 42
Kowalski et al. (2008), 39, 47–52, 71, 74, 75, 86, 89, 110, 114, 117, 119, 137, 143
Krasiński (1997), 66
Krause et al. (2008), 9
Kuhn (2001), 7
Leavitt & Pickering (1912), 34
Leeuwen (2009), 33
Leibundgut (2008), 37
Lemaître (1927), 17
Lemaître (1933), 17, 66
Lentz et al. (2000), 110
Lerner (1989), 9
Lindberg (1992), 6, 8
Linden & Virey (2008), iii
Linden et al. (2009), iii
Linden (2005), 36, 37
Linder & Huterer (2005), 71, 75
Linder (2003), 51, 71, 93
Linder (2006), 112, 113
Linder (2008), 71, 72, 93
Linder (2009), 111, 119
Lobatchevski (1829), 9
Müller (1998), 35, 37
Maor et al. (2002), 71
Maraszek (2009), 5
Marinoni et al. (2008), 91
Matarasso-Gervais (1988), 9
Mather et al. (1999), 41
Mattig (1958), 23, 84
Milgrom (1983), 69
Misner et al. (1973), 16, 18, 24
Monteil (2004), v
Moore (2002), 33
Mukhanov (2005), 43
Ménard et al. (2009), 111
Neugebauer (1980), 16, 24
Neumann (1874), 13
Newton (1686), 9
Neyman (1937), 138

Nordin et al. (2008), 113
Nugent et al. (2006), 37
Okumura et al. (2007), 45
Olbers (1823), 11
Pauli (1921), 13, 24
Pearlman et al. (2002), 31
Peebles & Ratra (2003), 61
Penzias & Wilson (1965), 41
Perlmutter et al. (1999), 39
Pogosian et al. (2005), 75, 96
Rana (1980), 71
Ratra & Peebles (1988), 61, 63
Riess & Livio (2006), 111, 119
Riess et al. (1998), 39
Riess et al. (1999), 110
Riess et al. (2004), 71, 84
Riess (2000), 113, 119
Rindler (2001), 18, 29–31, 60
Robertson (1935), 17
Robertson (1936a), 17
Robertson (1936b), 17
Robert (2009), 6
Rosenberg (1910), 33
Rosenfeld (1988), 8
Rovelli & Smolin (1988), 70
Ruiz-Lapuente et al. (2004), 9
Röpke & Hillebrandt (2004), 110
Röpke (2005), 110
Sahni et al. (2003), 71
Sahni (2004), 62
Sarkar et al. (2008a), 111
Sarkar et al. (2008b), 111
Sathyaprakash & Schutz (2009), 16
Scherrer (2006), 66, 72, 93
Schneider (2006), 32, 35
Seeliger (1895), 13
Seeliger (1896), 13
Sexl & Urbandke (2002), 18
Shafieloo et al. (2006), 71
Shapiro & Turner (2006), 83, 84
Shapiro & Teukolsky (1983), 36
Sotiriou & Faraoni (2008), 69
Spergel et al. (2007), 49, 53, 93, 113
Steinhardt et al. (1999), 61, 63, 64, 73
Stephani et al. (2003), 16, 29, 66
Strolger et al. (2004), 110
Sullivan et al. (2009), 119
Tammann et al. (2003), 35
Tegmark et al. (2006), 45, 46
Tilquin, André, 52
Tolman (1934), 66
Toomer (1970-1978), 8
Toomer (1984), 8
Tully & Fisher (1977), 35
Upadhye et al. (2005), 71
Virey & Ealet (2007), 71, 95
Virey et al. (2004), 97, 143
Virey et al. (2005), 84
Virey et al. (2009), 53
Virey (2007), 46, 54, 55
Visser (2004), 22, 83
Vitagliano et al. (2009), 84
Walker (1936), 17
Wang & Mukherjee (2007), 44
Wang & Freese (2006), 71, 72, 93
Wang & Mukherjee (2004), 71, 72, 93
Wang & Tegmark (2004), 71, 72, 93
Weinberg (1972), 16, 18
Weinberg (1989), 61
Weisberg & Taylor (2005), 69
Wetterich (1988), 61
Wetterich (2004), 71
Will (2006), 69
Wood-Vasey et al. (2004), 143
Zel'dovich (1968), 60
Zlatev et al. (1999), 61, 63

Index des termes et définitions

χ^2, 136
  fonction de distribution de probabilité, 121, 136
  minimisation du, 113, 138
  p-valeur, 121, 139

Bateau de soleil, 5
Bayes, théorème de, 135
Biais
  de consistance, 122–123
  paramètre de, 89, 96
  risque de, 44, 53, 89–92, 97–108, 120–128
Bianchi, identité de, 16
Bible Moralisée, 9–10

Céphéides, 21, 31, 35
Constante Cosmologique, 15–16, 25–29, 46–50, 59–62
  dans la théorie de Newton, 13–14
  problème de la, 61
  tenseur énergie impulsion de la, 27
Cosmographie, 22–23, 83–92
Cosmologie quantique, 70
Courbure
  gaussienne, 18
  indice de, 18, 25
  paramètre de, 27
Covariance, matrice de, 136, 143

Dégénérescence géométrique, 40, 44, 46, 54–57
Distance, 37
  angulaire, 20
  lumineuse, 20
    indépendante de H_0, 40, 109
  module de, 34, 40
  propre, 19
  relation de dualité, 20

Eclipse, 6
Einstein
  constante gravitationnelle de, 16
  convention de sommation de, v
  équations de, 15–17, 24, 27, 59, 66, 67
    résoudre les, 16–17
    solutionner les, 67
Energie du vide, 60
Energie noire, iii, 46, 51, 59, 69, 71
  équation d'état de l', 71–77, 93–97
    espace de phase de l', 62, 65–66
    valeur effective de l', 96
  équation d'état effective, 70
  modèles pour l', 59–71
  paramétrage de l', 71–77
Ere mystique, 6

Fisher
  matrice de, 140–141
Fluide barotropique, 17, 65
Fond diffus cosmologique, 13, 40–44
  anisotropies du, 17, 41–42
  fonction de transfert du, 41–43
  la mission COBE, 41
  la mission PLANCK, 94
  la mission WMAP, 41–42, 51
  paramètre réduit du, 44, 52, 54, 75, 89, 94, 113, 120
  spectre de puissance du, 41–42
Friedmann
  équations de, 24
  modèles de, 17, 28–31
Friedmann-Robertson-Walker

métrique de, 17–19, 66

Gravity Probe B, 69

Hertzsprung-Russel, diagramme de, 33, 35
Hubble
diagramme de, 21, 38–39, 117–119, 127
flot de, 35, 38
fonction de, 20
loi de, 21–22
paramètre de, 23, 35, 40
Space Telescope, 23, 35
Hyades, 33

Inflation, 43, 63
spectre de Harrison-Zel'dovich, 43, 47

JDEM, 143
Jerk (paramètre), 22, 84–91
Jupiter, lunes de, 9

Kaluza-Klein, mécanisme de, 70
Killing, équation de, 16, 18
KOSMOSHOW, 52, 94

Lemaître-Tolman-Bondi
métrique de, 66–67

Magnitude, 33
absolue, 34, 110–111
apparente, 33, 111
Matière sombre, 27, 47, 69
Mercure, 15, 69
Mésopotamie, 6
Modèles fantômes, 26, 72
MOND, 69

Nebra, disque celèste de, 5–6
Newton
Cosmologie à la, 10–14
gravitation universelle de, 9, 11

Olbers, paradoxe de, 11
Oscillations acoustiques des baryons, 45–57
paramètre réduit des, 45, 52, 75, 89, 94, 113, 120
spectre de puissance des, 45

Parallaxe, 32–33
de flux d'étoiles, 32
photométrique, 32
trigonométrique, 8, 32
Paramètre de décélération, 22, 83–92
Paramètres cosmologiques de densité, 26–28
Paramétrage CPL, iii, 51, 54, 71–75
test du, 93–108
Parsec, 32
Pic acoustique, 43, 45
Pioneer, anomalie de, 69
Pléiades, 5
Praesepe (M44), 33, 34
Principe Cosmologique, 11, 17–18, 23–24, 109
test du, 68
Principe de Copernic, 9, 11, 67
Problème de coïncidence, 59, 61–63
Projection, tenseur de, 23–24
Pulsar binaire Hulse-Taylor, 69

Quintessence, 61–65
d'Aristote (éther), 7
équation d'état de la, 62
solutions 'freezing' et 'thawing', 64, 70, 75
solutions 'tracker', 63, 75, 92–103

Radar ranging, 31
Relativité Générale
modifications de la, 68–70
tests de la, 69

Sachs-Wolfe, effet de, 43
SDSS, 45–46, 67
Snap (paramètre), 22, 84–91
Son
horizon acoustique comobile du, 44, 45
vitesse adiabatique du, 26, 43
Spectre de puissance initial, 41–43
Supernova(e), 35–40
classification des, 35

type Ia
de Tycho Brahé, 9
paramètre de normalisation des, 40
standardisation des, 37–38, 110–113, 119, 143
types II,Ib,c, 36–37

Theorema Egregium, 18
Tully-Fisher, relation de, 35

Unité astronomique, 32
Univers
âge de l', 48
bon ordre de l', 6–7
de deSitter, 29
densité critique de l', 27–28, 61
facteur d'échelle de l', 18
modèle ΛCDM de l', 46–48
oscillatoire, 30
statique, 5, 11, 12, 25
d'Einstein, 25, 29–31
taux d'expansion de l', voir Hubble, loi de
accélération du, 30–31, 39, 48

LE LABEUR ACCOMPLI
ON ÉPROUVE NOSTALGIE
ET POURTANT PLAISIR
QUAND L'ON SE RETIRE