



HAL
open science

Modélisation de la Fiabilité et de la Maintenance par Modèles Graphiques Probabilistes - Application à la Prévention des Ruptures de Rails

Roland Donat

► **To cite this version:**

Roland Donat. Modélisation de la Fiabilité et de la Maintenance par Modèles Graphiques Probabilistes - Application à la Prévention des Ruptures de Rails. Modélisation et simulation. INSA de Rouen, 2009. Français. NNT: . tel-00474389v1

HAL Id: tel-00474389

<https://theses.hal.science/tel-00474389v1>

Submitted on 19 Apr 2010 (v1), last revised 20 Jan 2011 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Modélisation de la fiabilité
et de la maintenance
par modèles graphiques probabilistes**
Application à la prévention des ruptures de rails

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée et soutenue publiquement le 30 novembre 2009

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Rouen
(spécialité informatique)

par

Roland DONAT

Jury :

Alexandre Aussem	Professeur des Universités, UCBL Lyon 1	<i>(Rapporteur)</i>
Christophe Bérenguer	Professeur des Universités, UTT	<i>(Rapporteur)</i>
Gilles Celeux	Directeur de Recherche, INRIA	
Sandrine Bondeux	Responsable de Recherche, RATP	
Laurent Bouillaut	Chargé de Recherche, INRETS	
Philippe Leray	Professeur des Universités, Polytech' Nantes	<i>(Directeur de thèse)</i>
Patrice Aknin	Directeur de Recherche, INRETS	<i>(Directeur de thèse)</i>

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde gratitude à **M. Patrice Aknin**, Directeur de Recherche INRETS, qui a su me faire confiance et me laisser la liberté nécessaire à l'accomplissement de mes travaux, tout en y gardant un œil critique et avisé. Nos échanges continuels et son aide précieuse au quotidien furent, sans nul doute, autant de clés essentielles à la réussite de ce travail.

De même, je voudrais remercier chaleureusement **M. Philippe Leray**, Professeur à Polytech' Nantes, pour toutes les fructueuses discussions que nous avons eues avoir. Je tiens également à le remercier pour sa réactivité, sa disponibilité, son hospitalité et pour la confiance qu'il a su me témoigner.

Mes vifs remerciements vont également à **Mme Sandrine Bondeux**, Responsable de Recherche du service SLI, qui a eu la lourde tâche d'assurer mon encadrement industriel. Son implication et l'intérêt qu'elle a porté à ce projet ont joué un rôle majeur dans son bon déroulement. Je remercie également ses prédécesseurs **Mme Claire Mielnik** et **M. Didier Levy** qui ont initié ces travaux et qui m'ont soutenu durant les premiers temps de la thèse. Un bon travail de modélisation statistique sous-entend en général des bases de données de qualité. Un grand merci donc à **M. Jean-François Le Bihan**, Responsable Politiques et Méthodes de Maintenance du service SLI, qui s'est efforcé de faire ressortir ce qu'il a de mieux dans les données de Retour d'EXpérience relatif à la maintenance des rails. Merci enfin à **M. Michel Jouve**, Responsable du service SLI, de m'avoir accueilli au sein de son équipe.

Merci à **M. Laurent Bouillaut**, Chargé de Recherche INRETS, de m'avoir toujours encouragé et appuyé dans les orientations que je souhaitais donner à mon travail.

Je remercie mes rapporteurs **M. Christophe Bérenguer**, Professeur à l'UTT, et **M. Alexandre Aussem**, Professeur à l'UCBL Lyon I, pour la rapidité avec laquelle ils ont lu mon manuscrit et l'attention qu'ils ont porté à mon travail. Merci également à **M. Gilles Celeux**, Directeur de Recherche INRIA, qui a accepté d'examiner mon travail.

Ma gratitude va également à **Mme Sophie Mercier**, Professeur à l'Université de Pau, **M. Michel Roussignol**, Professeur émérite à l'Université Paris-Est, **Mme Anne Barros**, Maître de conférences à l'UTT et **M. Antoine Grall**, Professeur à l'UTT pour leurs invitations au GT fiabilité et domaines connexes, ainsi que pour leur soutien et l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.

Afin de mener à bien ces travaux de thèse, j'ai partagé mon temps entre le Laboratoire des Technologies Nouvelles (LTN) de l'INRETS et l'unité Voie de la RATP. J'ai eu la chance d'y trouver deux ambiances chaleureuses dans lesquelles j'ai eu l'occasion de rencontrer de nombreuses personnalités que je ne suis pas près d'oublier.

En effet, j'ai une pensée émue pour l'ensemble du personnel du LTN qui m'a accompagné tout au long de cette thèse. Je pense en particulier à mes partenaires des premiers instants **Étienne Côme**, **Frédéric Badel** et **Alexandra Débiolles**, ou encore à **Latifa Oukhelou**, **Allou Samé** et **Mounira Bouarroudj** pour le climat convivial qu'ils ont contribué à instaurer. Arrivé plus récemment, je tiens à remercier **Cyril Hory** pour toutes ses critiques constructives et son excellent cari porc. Merci aux thésards plein d'avenir **Zohra Cherfi**, **Faïcel Chamrouki** et ma voisine de bureau **Ines Ayadi**, notamment pour les sorties *running*. Merci enfin à **Olivier François**, mon autre voisin de bureau, et aux p'tits jeunes **Raïssa Onanena** et **Nicolas Cheifetz**.

Je souhaite sincèrement à tout thésard CIFRE une intégration en entreprise aussi agréable que fut la mienne. Cela, je le doit en grande partie à mes amis et collègues du service des plaintes qui m'ont hébergé dans leur bureau. Un grand merci donc à **Patrick Routier**, guitariste de talent, sportif accompli et nouvelle star du poker; **Thierry Tournadre**, professionnel des mots-croisés d'ADN, as des énigmes et conteur ferroviaire hors pair; **Christian Letertre**, responsable conciliant, coach de bowling et à présent jeune retraité épanoui. Je remercie également **Philippe Fray-Lacoste** et les **AJiTés**, qui ont fait naître en moi la passion de la course à pied, ainsi que tous les gens que j'ai connus au cours de ces trois années pour leur sympathie et leur soutien.

Bien que je ne puisse écrire qu'ils aient directement contribué à enrichir ma production scientifique, il m'est impossible d'oublier mes amis du SPJE (**Auré**, **Bangy**, **Blez**, **Bobo**, **Dups**, **EFB**, **Jack**, **Marco**, **Rémard**, **Tichon** et **Vinz**) que je remercie pour tous les moments *highly provocative* que nous avons partagés. Merci également à mes amis sportifs de l'**USMT basket** pour leurs encouragements et à **Dorothée Delaunay**, **Anne Corrèges** et **Claire Faure** pour l'intérêt qu'elles ont témoigné à mes travaux de thèse.

Je ne saurais clore ces pages sans remercier mes amis d'enfance **Fabien** et **Lionel**, qui me soutiennent depuis toujours, et bien sûr, ceux sans qui je ne serais rien : **mes Parents** en premier lieu, puis **ma Sœur**, mes **Nièces**, mon **Neveu**, **Arlette** et **Serge** qui m'ont supporté, encouragé et permis d'en arriver là où je suis.

Je conclurai en remerciant de tout cœur **Anne-Cécile**, ma jolie statisticienne accroc au shopping, pour m'avoir supporté au quotidien, malgré mes longs têtes-à-têtes avec VAIO, mon sympathique ordinateur portable. Ses encouragements, qui se traduisaient régulièrement sous la forme de concerts karaokés privés, furent sans aucun doute autant de stimulants pour la création scientifique. Merci enfin pour le temps passé à relire attentivement mon manuscrit, ses critiques constructives ont contribué à redonner un peu de légèreté à mes propos qui ont parfois tendance à s'égarer au milieu de lourdeurs inutiles.

Table des matières

Table des matières	5
Introduction générale	9
1 Modèles graphiques probabilistes	13
1.1 Introduction	14
1.2 Potentiel et loi de probabilité conditionnelle	15
1.2.1 Potentiel	15
1.2.2 Loi de probabilité conditionnelle	20
1.2.3 Notion d'utilité	22
1.3 Modèles graphiques probabilistes	24
1.3.1 Définition	24
1.3.2 Factorisation de la loi jointe	27
1.3.3 Apprentissage des lois de probabilité conditionnelles	28
1.3.4 Inférence	31
1.4 Modèles graphiques probabilistes markoviens	38
1.4.1 Définition	39
1.4.2 Apprentissage des LPC	43
1.4.3 Inférence	44
1.5 Conclusions	48
2 Modèles Graphiques de Durée	51
2.1 Introduction	52
2.2 Description graphique	54
2.3 Description probabiliste	55

2.3.1	Distribution initiale des états du système	56
2.3.2	Distribution initiale des temps de séjour	56
2.3.3	Politique d'action	59
2.3.4	Modèle de transition des états du système	59
2.3.5	Modèle de transition du temps de séjour	62
2.3.6	Remarques	64
2.4	Apprentissage des LPC et simulation de trajectoire	67
2.4.1	Données attendues	68
2.4.2	Estimation du maximum de vraisemblance	68
2.4.3	Simulation de trajectoires	69
2.5	Inférence probabiliste exacte	71
2.5.1	Probabilité d'une trajectoire	71
2.5.2	Calcul naïf	73
2.5.3	Calcul <i>ad hoc</i>	74
2.6	Application à l'étude de la fiabilité	77
2.6.1	MGD et mesures de fiabilité	77
2.6.2	Illustration	78
2.7	Conclusions	85
3	Modélisation de la maintenance	87
3.1	Introduction	88
3.1.1	Approche générale	88
3.1.2	État de l'art	89
3.1.3	Objectifs	89
3.2	Modèle VIRMALAB	90
3.2.1	Description qualitative	90
3.2.2	Description probabiliste	92
3.2.3	Caractérisation paramétrique	97
3.2.4	Complexité spatiale	98
3.3	Calculs d'utilité	99
3.3.1	Construction d'une fonction d'utilité	100
3.3.2	Évaluation d'une fonction d'utilité	102
3.3.3	Complexité algorithmique	105
3.3.4	Exemple	108
3.4	Politiques de maintenance	115

3.4.1	Maintenance corrective	116
3.4.2	Maintenance préventive	117
3.5	Conclusions	123
4	Application à la prévention des ruptures de rails	125
4.1	Introduction	126
4.1.1	Contexte de l'étude	126
4.1.2	Défauts de fatigue et ruptures	127
4.1.3	Déroulement de l'étude	128
4.2	Représentation de la voie ferrée	128
4.3	Dégradation d'un coupon élémentaire	129
4.3.1	Généralités	129
4.3.2	Modélisation	132
4.3.3	Coût associé à l'indisponibilité de la voie	136
4.3.4	Apprentissage des lois de temps de séjour	136
4.4	Méthodes de diagnostic	138
4.4.1	Diagnostic ultrasonore	141
4.4.2	Diagnostic par signalisation	143
4.4.3	Politique de diagnostic	144
4.4.4	Coûts associés aux diagnostics	145
4.5	Actions de maintenance	145
4.5.1	Description qualitative	145
4.5.2	Politique d'action	147
4.5.3	Coûts associés aux actions de maintenance	148
4.5.4	Conséquences sur le coupon élémentaire	148
4.6	Outil développé	152
4.6.1	Description	152
4.6.2	Résultats	154
4.7	Conclusions	160
	Conclusions générales et perspectives	163
	Références	172
	Liste des figures	174

Liste des tableaux	176
A Notations	177
B Éléments sur la théorie des graphes orientés	181
C Éléments sur la théorie des probabilités	183
C.1 Rappels de probabilités	183
C.2 Indépendance conditionnelle	188
D Apprentissage à partir de données incomplètes	189
D.1 Problématique et notations	189
D.2 Méthode EM	191
D.3 Applications	194
D.3.1 Exemple simple	194
D.3.2 Estimation d'une loi de durée	195
E Démonstrations	197
E.1 Démonstrations du chapitre 1	197
E.2 Démonstrations du chapitre 2	199
E.3 Démonstrations du chapitre 3	203

Introduction générale

Contexte

Depuis la seconde moitié du XX^e siècle, les activités liées à la sûreté de fonctionnement prennent une place de plus en plus essentielle dans l'industrie. Cette tendance est d'autant plus marquée que le domaine concerné est associé à la réalisation d'une tâche critique. Tout incident rappelle aux industriels la nécessité de prendre les mesures permettant d'assurer le maintien du système considéré à un niveau de fonctionnement satisfaisant et les mesures en question définissent ainsi la stratégie (ou politique) de maintenance du système. Dans le cas des systèmes critiques, les industriels ont longtemps privilégié des stratégies de maintenance de type systématique avec une fréquence d'interventions importante, de manière à se prémunir contre toutes défaillances graves. D'un point de vue économique, de telles stratégies entraînent des coûts d'entretien extrêmement importants, sans qu'ils soient pour autant indispensables compte tenu de la réalité technique. En conséquence et du fait d'une forte concurrence conjuguée à des conjonctures économiques difficiles, les industriels ont été amenés à affiner leur politique de maintenance de façon à en réduire les coûts tout en conservant une qualité de service élevée.

Ceci explique les nombreuses études récentes tant académiques qu'industrielles portant sur la fiabilité des systèmes et l'optimisation de leur maintenance. Le concept de maintenance prévisionnelle a ainsi peu à peu vu le jour. L'intérêt de cette démarche est aujourd'hui reconnu par la très grande majorité des industriels. Toutefois, cette reconnaissance reste encore bien souvent théorique, du fait des difficultés pratiques sous-jacentes à l'application de cette méthode. Réaliser une étude de maintenance prévisionnelle nécessite préalablement la modélisation du système considéré, ce qui s'avère délicat dès que le système devient complexe. La première étape consiste à exploiter les données de Retour d'EXpérience (REX) et les connaissances d'experts afin d'estimer les paramètres du modèle de dégradation du système retenu. Le modèle de dégradation est ensuite enrichi en tenant compte des opérations de maintenance. Dès lors que le système et sa maintenance sont correctement formalisés, toute politique peut être évaluée selon un ou plusieurs critères donnés.

Ces travaux de thèse ont pour objectif l'élaboration d'un modèle de maintenance visant à améliorer la programmation des opérations d'entretien de la voie du réseau RATP (Régie

Autonome des Transports Parisiens). Cette étude s'intéresse en particulier à la dynamique d'évolution des défauts de fatigue des rails, ces derniers pouvant entraîner des ruptures et occasionner des perturbations du service voyageur. Cette problématique se décompose en trois étapes :

- (i) Modélisation de la dynamique de dégradation des rails.
- (ii) Formalisation des opérations de maintenance associées au traitement des défauts de fatigue.
- (iii) Intégration d'un modèle économique afin d'évaluer une politique de maintenance donnée (coûts de réparation, de surveillance de la voie, d'indisponibilité).

Ces travaux se sont déroulés à l'INRETS et à la RATP dans le cadre du projet de recherche européen UrbanTrack¹ dont l'objectif principal est la conception d'une voie ferrée urbaine innovante et sûre sur son cycle de vie.

Démarche

Nous nous sommes orientés vers une approche utilisant les Modèles Graphiques Probabilistes (MGP). Ces derniers reposent sur la théorie des graphes et la théorie des probabilités. Ils permettent de représenter intuitivement et parcimonieusement des systèmes dont l'état évolue de manière non déterministe. Une description de ces objets mathématiques ainsi que des outils d'analyses associés est présentée dans le chapitre 1.

Avant de modéliser et d'évaluer les performances d'une stratégie de maintenance, il est nécessaire de disposer d'un modèle de dégradation du système étudié. Nous introduisons dans le chapitre 2 un MGP particulier, appelé Modèle Graphique de Durée (MGD), ayant pour objectif d'améliorer la représentation d'un système dynamique dans le cadre de ces outils graphiques (Donat et al. 2007) (Donat et al. 2008) (Donat et al. 2008). Cette approche vise à adapter le concept des modèles semi-markoviens au formalisme des MGP. Dans ce chapitre, nous présentons en particulier :

- les propriétés probabilistes des MGD (Donat et al. 2008) ;
- un algorithme d'inférence adapté spécifiquement à ce modèle ainsi que sa complexité spatiale et algorithmique (Donat et al. 2010) ;
- une comparaison empirique entre MGD et l'approche classique reposant sur l'utilisation de chaînes de Markov (Donat et al. 2009) (Bouillaut et al. 2009).

Dans le chapitre 3, nous proposons un modèle graphique de maintenance reposant sur la fiabilité. Nous supposons tout d'abord l'existence d'un MGP représentant la dégradation du système considéré, par exemple à l'aide de chaînes de Markov ou de MGD. Ensuite, la politique de surveillance et de maintenance doit être formalisée. Le modèle VIRMALAB, initié à l'INRETS et enrichi pour les besoins de l'étude, a été utilisé du fait de sa flexibilité et de son caractère générique. Celui-ci permet en effet de prendre en compte :

- un nombre quelconque d'appareils de diagnostic indépendants ayant chacun leurs caractéristiques propres ;

¹<http://www.urbantrack.eu/> (IP-FP6)

- la possibilité d’activer périodiquement un ou plusieurs appareils de diagnostic ;
 - une politique d’action de maintenance dépendant des informations issues des diagnostics.
- De nombreuses politiques de maintenance peuvent être représentées à partir de ce modèle, depuis les politiques de maintenance de type curatif, jusqu’aux politiques préventives conditionnelles qui déclenchent une opération de maintenance dès qu’un certain seuil de dégradation est détecté à l’aide des outils de diagnostic. Cette approche offre également la possibilité d’intégrer toute sorte de considérations économiques sous forme d’utilités, permettant ainsi la comparaison de différentes politiques de maintenance.

Pour finir, nous appliquons notre méthodologie dans le chapitre 4 au cas particulier de la maintenance de l’infrastructure ferroviaire dans le cadre d’une étude de prévention des ruptures de rail sur le réseau Réseau Express Régional (RER) de la RATP. Une étude évaluant l’impact de différentes politiques de maintenance des rails selon différents contextes ferroviaires est présentée. Nous détaillons en particulier l’intérêt de l’ajustement du cycle d’auscultation préventif des rails et de leur période de renouvellement de la voie de sorte à améliorer l’utilité de la politique de maintenance ainsi définie.

Chapitre 1

Modèles graphiques probabilistes

Sommaire

1.1	Introduction	14
1.2	Potentiel et loi de probabilité conditionnelle	15
1.2.1	Potentiel	15
1.2.2	Loi de probabilité conditionnelle	20
1.2.3	Notion d'utilité	22
1.3	Modèles graphiques probabilistes	24
1.3.1	Définition	24
1.3.2	Factorisation de la loi jointe	27
1.3.3	Apprentissage des lois de probabilité conditionnelles	28
1.3.4	Inférence	31
1.4	Modèles graphiques probabilistes markoviens	38
1.4.1	Définition	39
1.4.2	Apprentissage des LPC	43
1.4.3	Inférence	44
1.5	Conclusions	48

1.1 Introduction

Ce chapitre a pour objectif de présenter le formalisme principal de modélisation utilisé au cours de cette thèse, à savoir les modèles graphiques probabilistes orientés. Notons que dans la littérature, il est courant de faire référence à ces derniers sous différentes appellations (ex : réseaux probabilistes, réseaux de croyances), la plus connue étant : réseaux bayésiens. Dans le but de faciliter la lecture, nous nous permettons dans ce document de raccourcir la dénomination "modèles graphiques probabilistes orientés" en "modèles graphiques probabilistes" voire même en "modèles graphiques" lorsque le contexte ne porte pas à confusion, bien que ces trois expressions n'aient pas le même degré de généralité. En outre, les abréviations MGP pour Modèle Graphique Probabiliste et RB pour Réseaux Bayésiens sont utilisés pour désigner les mêmes objets.

Ces objets mathématiques, dont le formalisme repose sur la théorie des graphes ([Gross and Yellen 2004](#)) et la théorie des probabilités ([Rao and Swift 2006](#)), permettent de représenter de façon intuitive et parcimonieuse la distribution jointe de plusieurs variables aléatoires. En effet, la théorie des graphes fournit les outils appropriés pour décrire graphiquement les relations de dépendance entre les variables. La théorie des probabilités apporte, quant à elle, un formalisme permettant de quantifier ces relations en associant à chaque variable une loi de probabilité conditionnelle.

Par ailleurs, de nombreux outils génériques ont été développés, utilisant comme support les modèles graphiques probabilistes. Par exemple, il est possible de réaliser efficacement des raisonnements probabilistes, l'objectif étant souvent de mettre à jour les connaissances sur certaines variables alors que d'autres sont observées. Cette tâche porte le nom de calcul d'inférence probabiliste. Citons par exemple à ce sujet les travaux de [Pearl \(1988\)](#), [Lauritzen and Spiegelhalter \(1988\)](#), [Huang and Darwiche \(1996\)](#) ou plus récemment [Jordan et al. \(1999\)](#). Il est également possible d'apprendre les paramètres d'un modèle graphique probabiliste (structure graphique du modèle et lois de probabilité) à partir de données complètes ou incomplètes, ou encore à partir d'avis d'experts ([Jordan 1999](#)), ([Neapolitan 2003](#)). Précisons enfin qu'un ouvrage en français, écrit par [Naïm et al. \(2007\)](#), reprend l'ensemble des notions précédentes.

Ce chapitre se compose de trois parties principales. La partie [1.2](#) introduit les objets de base que sont les potentiels et les lois de probabilité conditionnelles dans le cadre des réseaux bayésiens. La partie [1.3](#) aborde le formalisme des modèles graphiques probabilistes en présentant quelques propriétés fondamentales illustrées par un exemple. Des éléments sur l'apprentissage des paramètres du modèle et sur l'inférence probabiliste sont également donnés. La partie [1.4](#) s'intéresse enfin à l'extension markovienne des modèles graphiques probabilistes. Ces modèles, adaptés à la représentation des phénomènes dynamiques, sont au cœur des travaux présentés dans le reste de ce document.

1.2 Potentiel et loi de probabilité conditionnelle

Les paragraphes suivants ont pour vocation d'introduire la notion de potentiel, ainsi que les principales opérations qui lui sont associées (Castillo et al. 1996), (Cowell et al. 1999). Les potentiels occupent une place essentielle dans le formalisme des réseaux bayésiens, en particulier pour ce qui est des mécanismes d'inférence probabiliste qui sont évoqués dans la partie 1.3.4. Nous nous intéressons ensuite aux lois de probabilité conditionnelles, éléments de base de la composante probabiliste des réseaux bayésiens.

Les définitions et les propositions présentées dans la suite ne diffèrent pas fondamentalement de ce qu'il est possible de lire dans la littérature. Néanmoins, certaines notations sont introduites de manière à se placer dans un cadre de travail unifié. En particulier, bien que différente des présentations classiques issues de la théorie des probabilité, la notion de probabilité conditionnelle est abordée ici sous l'angle des potentiels.

1.2.1 Potentiel

Définitions et notations

Un potentiel est une application de plusieurs variables à valeurs dans un ensemble quelconque et muni d'opérations particulières. Cet objet mathématique généralise, entre autre, la notion de matrice en permettant la représentation de tableaux multidimensionnels.

Définition 1.1 (Potentiel)

Soit $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$ une famille ordonnée de D ensembles quelconques $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D$. Soit également un ensemble supplémentaire E . π est un potentiel défini sur le domaine \mathcal{X} et à valeurs dans E , noté $\pi \in E^{\mathcal{X}}$, si π est une application définie par

$$\pi : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D & \mapsto & E \\ (x_1, \dots, x_D) & \mapsto & \pi(x_1, \dots, x_D) \end{cases} .$$

$E^{\mathcal{X}}$ désigne l'ensemble des potentiels définis sur le domaine \mathcal{X} à valeurs dans E .

Notations 1.1 (Vocabulaire et notations sur les potentiels)

Soit un potentiel $\pi \in E^{\mathcal{X}}$, avec $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D\}$. Le vocabulaire et les notations suivantes sont alors utilisés :

- $\text{Dom}(\pi)$ désigne le domaine du potentiel π , c'est-à-dire ici $\text{Dom}(\pi) = \mathcal{X}$;
- $\mathcal{X}^* = \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_d = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D$ représente le produit cartésien des ensembles appartenant à la famille \mathcal{X} ;
- tout élément de \mathcal{X}^* est appelé configuration du domaine \mathcal{X} ;
- une configuration $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$ est alors un D -uplet (x_1, \dots, x_D) tel que

$$\pi(\mathbf{x}) = \pi(x_1, \dots, x_D) \in E;$$

- notons la distinction entre l'ensemble \mathcal{X}_d et le domaine $\{\mathcal{X}_d\}$, et remarquons alors que $\{\mathcal{X}_d\}^* = \mathcal{X}_d$;

- si tous les ensembles $\mathcal{X}_d \in \mathcal{X}$ sont discrets (dénombrables) et finis, alors \mathcal{X} et π sont qualifiés respectivement de domaine et potentiel discret et fini ;
- les potentiels discrets et finis sont représentables sous forme de table (cf. exemple 1.1).

Dans la suite de ce document, nous nous limitons aux potentiels à valeurs réelles, autrement dit avec $E \subseteq \mathbb{R}$. Par conséquent, s'il n'y a pas d'ambiguïté, le qualificatif réel est omis. Voici à présent un exemple illustrant les notions précédemment introduites.

Exemple 1.1

Soit un potentiel $\pi \in \mathbb{R}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}}$ où $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$, $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$ and $\mathcal{Z} = \{z_1, z_2\}$. \mathcal{X} , \mathcal{Y} et \mathcal{Z} sont des ensembles discrets et finis, aussi en est il de même pour π . D'autre part, $\text{Dom}(\pi) = \{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ et donc $\text{Dom}(\pi)^* = \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \times \mathcal{Z}$ est l'ensemble des configurations de ce domaine. Définir π revient à associer à chacune des huit configurations $(x, y, z) \in \text{Dom}(\pi)^*$, un réel $\pi(x, y, z)$. Considérons par exemple les valeurs suivantes :

\mathcal{X}	\mathcal{Y}	\mathcal{Z}	π
x_1	y_1	z_1	0.50
x_2	y_1	z_1	1.00
x_1	y_2	z_1	-0.75
x_2	y_2	z_1	-2.00
x_1	y_1	z_2	0.00
x_2	y_1	z_2	0.25
x_1	y_2	z_2	3.00
x_2	y_2	z_2	-1.00

La table précédente donne une représentation unidimensionnelle du potentiel π . Ce dernier étant défini sur trois dimensions, une représentation sous forme de table multidimensionnelle peut éventuellement être utilisée. Cela donne ici :

$$\pi(:, :, z_1) = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.75 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad \pi(:, :, z_2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0.25 & -1 \end{bmatrix},$$

où le symbole ":" désigne tous les éléments de la dimension correspondante. À noter qu'en pratique la première représentation est souvent préférée pour des raisons de lisibilité.

Il est intéressant de remarquer dans la définition 1.1 le caractère ordonné des dimensions d'un potentiel. Dans l'exemple 1.1, écrire $\pi(y_1, x_1, z_1)$ n'a pas de sens car, par définition, la première dimension de π est associée à l'ensemble \mathcal{X} et non \mathcal{Y} . En revenant à l'exemple, le domaine $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ est identique au domaine $\{\mathcal{Y}, \mathcal{X}, \mathcal{Z}\}$ à une permutation près. On parle dans ce cas de domaines équivalents. Par conséquent, lorsque deux potentiels possèdent le même domaine et les mêmes valeurs à une permutation près de leurs dimensions, ces derniers sont dits équivalents. La définition suivante pose formellement la relation d'équivalence entre potentiels et l'exemple 1.2 en donne une illustration.

Définition 1.2 (Équivalence entre deux potentiels)

Soient deux potentiels $\pi \in E^{\{\mathcal{X}_d\}_{1 \leq d \leq D}}$ et $\pi' \in E^{\{\mathcal{X}'_{d'}\}_{1 \leq d' \leq D'}}$. π et π' sont dits équivalents, et nous notons $\pi \sim \pi'$, si

- (i) $E = E'$;
- (ii) $\{\mathcal{X}_d\}_{1 \leq d \leq D} = \{\mathcal{X}'_{d'}\}_{1 \leq d' \leq D'}$;
- (iii) s'il existe une permutation σ de l'ensemble $\{1, \dots, D\}$ telle que pour tout $\mathbf{x} \in \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_d$ et tout $\mathbf{x}' \in \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_{\sigma(d)}$, $\pi(\mathbf{x}) = \pi'(\mathbf{x}')$.

Exemple 1.2

Soient $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathbb{R}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}}$ où $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$. Ces trois potentiels sont définis comme suit :

\mathcal{X}	\mathcal{Y}	π_1	\mathcal{Y}	\mathcal{X}	π_2	\mathcal{X}	\mathcal{Y}	π_3
x_1	y_1	1	y_1	x_1	1	x_1	y_1	1
x_2	y_1	2	y_2	x_1	3	x_2	y_1	4
x_1	y_2	3	y_1	x_2	2	x_1	y_2	3
x_2	y_2	4	y_2	x_2	4	x_2	y_2	2

Les trois potentiels sont définis sur le même domaine. Ils sont tous les trois à valeurs dans \mathbb{R} et semblent posséder les mêmes valeurs. En fait d'après la définition 1.2 en prenant la permutation $\sigma = \{2, 1\}$, il apparaît que $\pi_1 \sim \pi_2$. En revanche π_3 n'est pas équivalent aux deux autres car $\pi_1(x_2, y_1) \neq \pi_3(x_2, y_1)$.

Pour finir sur ces quelques généralités, il est intéressant de définir les deux potentiels remarquables suivants :

Définition 1.3 (Potentiel nul et potentiel unitaire)

Soit un potentiel $\pi \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. Si pour toute configuration $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$,

- $\pi(\mathbf{x}) = 0$, alors π est appelé potentiel nul sur \mathcal{X} et on note $\pi = \mathbf{0}_{\mathcal{X}}$;
- $\pi(\mathbf{x}) = 1$, alors π est appelé potentiel unitaire sur \mathcal{X} et on note $\pi = \mathbf{1}_{\mathcal{X}}$.

Opérations arithmétiques

Nous abordons à présent la manipulation des potentiels. Il s'agit de détailler les opérations élémentaires dont ils sont munis. Nous débutons naturellement par la définition de l'addition et celle de la multiplication entre deux potentiels.

Définition 1.4 (Somme et produit entre potentiels)

Soient deux potentiels $\pi_1 \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ et $\pi_2 \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$. On pose $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$, $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Z}$ et $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Z}$. Alors,

- la somme de π_1 et π_2 est un potentiel $(\pi_1 + \pi_2) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ vérifiant pour toute configuration $(\mathbf{x}', \mathbf{z}, \mathbf{y}') \in (\mathcal{X}' \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Y}')^*$,

$$(\pi_1 + \pi_2)(\mathbf{x}', \mathbf{z}, \mathbf{y}') = \pi_1(\mathbf{x}', \mathbf{z}) + \pi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}')$$

– le produit de π_1 et π_2 est un potentiel $(\pi_1 \cdot \pi_2) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ vérifiant pour toute configuration $(\mathbf{x}', \mathbf{z}, \mathbf{y}') \in (\mathcal{X}' \cup \mathcal{Z} \cup \mathcal{Y}')^*$,

$$(\pi_1 \cdot \pi_2)(\mathbf{x}', \mathbf{z}, \mathbf{y}') = \pi_1(\mathbf{x}', \mathbf{z})\pi_2(\mathbf{z}, \mathbf{y}').$$

Une opération couramment utilisée sur les potentiels consiste à sommer des valeurs du potentiel correspondant à un sous-domaine donné.

Définition 1.5 (Somme/marginalisation)

Soit un potentiel $\pi \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. Le résultat de la somme de π sur le domaine \mathcal{W} , ou de manière équivalente, de la marginalisation de π sur le domaine $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \mathcal{W}$ est un potentiel, noté $(\int_{\mathcal{W}} \pi) \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}'}$, vérifiant pour toute configuration $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'^*$,

$$(\int_{\mathcal{W}} \pi)(\mathbf{x}') = \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} \pi(\mathbf{x}', \mathbf{w}).$$

Si \mathcal{W} est un domaine discret (resp. continu), le signe $\int_{\mathcal{W}}$ désigne une somme (resp. une intégration).

Les opérations précédentes sont illustrées dans l'exemple 1.3.

Exemple 1.3

Reprenons le potentiel π de l'exemple 1.1 et posons également $\nu = \sum_{\{\mathcal{X}\}} \pi$, le potentiel résultant de la marginalisation de π sur le domaine $\{\mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$. De même, soit $\xi = \sum_{\{\mathcal{X}, \mathcal{Z}\}} \pi$ le résultat de la marginalisation de π sur le domaine $\{\mathcal{Y}\}$. Les potentiels ν et ξ sont alors donnés par :

\mathcal{Y}	\mathcal{Z}	ν
y_1	z_1	$\pi(x_1, y_1, z_1) + \pi(x_2, y_1, z_1) = 1.50$
y_2	z_1	$\pi(x_1, y_2, z_1) + \pi(x_2, y_2, z_1) = -2.75$
y_1	z_2	$\pi(x_1, y_1, z_2) + \pi(x_2, y_1, z_2) = 0.25$
y_2	z_2	$\pi(x_1, y_2, z_2) + \pi(x_2, y_2, z_2) = 2.00$

\mathcal{Y}	ξ
y_1	$\pi(x_1, y_1, z_1) + \pi(x_2, y_1, z_1) + \pi(x_1, y_1, z_2) + \pi(x_2, y_1, z_2) = 1.75$
y_2	$\pi(x_1, y_2, z_1) + \pi(x_2, y_2, z_1) + \pi(x_1, y_2, z_2) + \pi(x_2, y_2, z_2) = -0.75$

Achevons cet exemple par le produit de ν et ξ . D'après la définition 1.4, le résultat est un potentiel dont le domaine est $\{\mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ et vérifiant

\mathcal{Y}	\mathcal{Z}	$\nu \cdot \xi$
y_1	z_1	$\nu(y_1, z_1)\xi(y_1) = 2.6250$
y_2	z_1	$\nu(y_2, z_1)\xi(y_2) = 2.0625$
y_1	z_2	$\nu(y_1, z_2)\xi(y_1) = 0.4375$
y_2	z_2	$\nu(y_2, z_2)\xi(y_2) = -1.5000$

Potentiels discrets et finis et complexité

Nous abordons à présent les notions de complexité spatiale et de complexité algorithmique (Garey and Johnson 1979) associées à la manipulation de potentiel. La complexité spatiale d'un potentiel désigne la quantité d'espaces mémoires élémentaires nécessaire pour représenter ce dernier sur une machine. La complexité algorithmique est associée à la manipulation d'un ou plusieurs potentiels, et désigne le nombre d'opérations élémentaires permettant de la mener à bien.

Notons par ailleurs que l'utilisation de structures de données particulières telles que les matrices creuses ou les arbres décisionnels (Komarek and Moore 2000) permettent dans certains cas de diminuer les complexités. Toutefois, il est rare qu'une structure conduise à la fois à une réduction de la complexité spatiale et algorithmique. En effet, une économie spatiale importante est souvent synonyme de structure complexe dans laquelle les opérations arithmétiques élémentaires sont plus difficiles à réaliser. Par conséquent, nous supposons dans la suite que le stockage des potentiels est réalisé par l'intermédiaire d'une table multidimensionnelle classique. Chaque configuration du potentiel occupe alors un espace mémoire élémentaire. Précisons que cette structure de donnée basique est disponible dans la plupart des langages de programmation et bénéficie en général de bonnes performances arithmétiques. Dans le cadre discret et fini, nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Définition 1.6 (Complexité spatiale)

Soit un potentiel discret et fini $\pi \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. La complexité spatiale du potentiel π , notée $CS(\pi)$, est de l'ordre du nombre de configurations du domaine \mathcal{X} . Autrement dit, $CS(\pi) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}^*|)$ où $|\cdot|$ désigne le cardinal d'un ensemble discret et fini.

Proposition 1.1 (Complexité algorithmique de la somme et du produit)

Soient deux potentiels discrets et finis $\pi_1 \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ et $\pi_2 \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$. Posons $\pi' \in \mathbb{R}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$ le potentiel résultant de l'addition ou de la multiplication de π_1 et π_2 . La complexité algorithmique du calcul de π' , notée $CA(\pi')$, est de l'ordre de sa complexité spatiale. Formellement, $CA(\pi') = CS(\pi') = \mathcal{O}(|(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^*|)$.

Proposition 1.2 (Complexité algorithmique de la marginalisation)

Soit un potentiel discret et fini $\pi \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. Posons $\pi' = \sum_{\mathcal{W}} \pi$ le potentiel résultant de la marginalisation de π sur $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \mathcal{W}$. La complexité algorithmique du calcul de π' est de l'ordre de la complexité spatiale de π . Formellement, $CA(\pi') = CS(\pi) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}^*|)$.

Les démonstrations des deux propositions précédentes sont données en annexe E.1. Toutes

deux reposent simplement sur le comptage des opérations arithmétiques élémentaires nécessaires aux calculs d'une somme, d'un produit et d'une marginalisation dans l'espace des potentiels.

Exemple 1.4

Reprenons les exemples précédents et évaluons la complexité spatiale des potentiels utilisés ainsi que la complexité algorithmique des opérations réalisées.

1. Dans l'exemple 1.1, le potentiel π est défini sur huit configurations, d'où $CS(\pi) = 8$ espaces mémoires élémentaires.
2. Dans l'exemple 1.2, $CS(\pi_1) = CS(\pi_2) = CS(\pi_3) = 4$ espaces mémoires élémentaires.
3. Dans l'exemple 1.3, la marginalisation de π sur $\{\mathcal{Y}, \mathcal{Z}\}$ nécessite $2 \times 2 \times (2 - 1) = 4$ additions, d'où $CA(\nu) = 4$ opérations élémentaires. De la même manière, $CA(\xi) = 2 \times (4 - 1) = 6$ et $CA(\nu \cdot \xi) = 2 \times 2 = 4$ opérations élémentaires.

1.2.2 Loi de probabilité conditionnelle

La définition suivante propose une caractérisation des lois de probabilité conditionnelles à partir des potentiels.

Définition 1.7 (Loi de probabilité conditionnelle)

Soient deux domaines disjoints \mathcal{X} et \mathcal{Y} et un potentiel $p \in [0, 1]^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}}$. On dit que p est une Loi de Probabilité Conditionnelle (LPC) sur \mathcal{X} conditionnellement à \mathcal{Y} si pour toute configuration $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$,

$$\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} p(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 1.$$

Les domaines \mathcal{Y} et \mathcal{X} sont alors appelés respectivement domaine de conditionnement et domaine normalisé. Par ailleurs, il est courant de séparer les variables de conditionnement des variables normalisées en adoptant la notation $p(\mathbf{x}|\mathbf{y})$ pour désigner $p(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. D'autre part, l'ensemble des LPC sur \mathcal{X} conditionnellement à \mathcal{Y} est noté $\mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$ de sorte qu'ici $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$. Enfin lorsque $\mathcal{Y} = \emptyset$, les notations précédentes sont simplifiées. On écrit simplement dans ce cas $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}}$.

La caractérisation précédente des lois de probabilité conditionnelles reste cohérente avec le formalisme mathématique usuel issu de la théorie des probabilités (cf. annexe C). En considérant par exemple deux vecteurs aléatoires $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ et $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_{D'})$ à valeurs respectivement dans les ensembles $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D$ et $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \times \dots \times \mathcal{Y}_{D'}$, on note $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y})$ la loi du vecteur \mathbf{X} conditionnellement au vecteur \mathbf{Y} , ce qui implique $P(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$. Cette notation a l'avantage de faire apparaître clairement le domaine de la LPC en écrivant explicitement les variables aléatoires. Son inconvénient réside dans la longueur des écritures réduisant ainsi la lisibilité des expressions.

De manière parfaitement équivalente il est possible d'écrire que le vecteur \mathbf{X} conditionnellement au vecteur \mathbf{Y} est distribué selon la loi $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$. Ceci implique que pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$ et tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$,

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x} | \mathbf{Y} = \mathbf{y}).$$

On note alors $\mathbf{X}|\mathbf{Y} \sim p$. Remarquons enfin que p désigne une densité ou une loi de probabilité selon que \mathcal{X} est un domaine continu ou discret.

D'autre part les LPC étant des potentiels particuliers, les définitions, les notations, les opérations et les notions de complexité introduites précédemment s'y appliquent directement. Une LPC est dite discrète et finie si c'est le cas de son potentiel sous-jacent. Il est également possible d'effectuer une addition ou un produit entre une LPC et un potentiel. Il est toutefois important de préciser que le résultat de telles opérations est en général un potentiel et non une LPC. De même, on montre que la somme de deux LPC n'est plus une LPC, mais seulement un potentiel. Il y a néanmoins des cas où la sommation et le produit restent stables. Ceci est l'objet des deux théorèmes suivants ainsi que de l'exemple 1.5.

Théorème 1.1 (Stabilité par sommation)

Soient une LPC $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$ et le potentiel $q = \int_{\mathcal{W}} p$ résultant de la sommation de p sur le domaine \mathcal{W} . Si $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{X}$, alors q est une LPC de $\mathcal{L}^{\mathcal{X}'|\mathcal{Y}}$ où $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \setminus \mathcal{W}$.

Théorème 1.2 (Stabilité par produit)

Soient deux LPC $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$ et $q \in \mathcal{L}^{\mathcal{W}|\mathcal{Z}}$. Si \mathcal{X} et $(\mathcal{W} \cup \mathcal{Z})$ sont disjoints, le produit $(p \cdot q)$ est alors une LPC appartenant à $\mathcal{L}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{W}|\mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}}$ où $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{W}$.

Les démonstrations des deux théorèmes précédents (cf. annexe E.1) résultent d'une application des définitions 1.4 et 1.5 dans le cas où les potentiels sous-jacents considérés ont des domaines remarquables.

Exemple 1.5

Soient deux LPC discrètes et finies $p \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}|\{\mathcal{Y}\}}$ et $q \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{Y}\}}$, où $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$, définies comme suit :

p				q	
X				Y	
\mathcal{Y}	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2
y_1	0.25	0.5	0.25	0.3	0.7
y_2	0.8	0.1	0.1		

Le produit des deux potentiels associés aux LPC p et q donne le résultat suivant :

$(p \cdot q)$					
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$					
x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
y_1	y_1	y_2	y_2	y_3	y_3
0.075	0.150	0.075	0.560	0.070	0.070

$(p \cdot q)$ est un potentiel défini sur $[0, 1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}}$ et somme à 1 sur le domaine $\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}$. Autrement dit, $(p \cdot q) \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}}$ comme le prévoit le théorème 1.2. Par ailleurs, la sommation de $(p \cdot q)$ sur \mathcal{Y} donne

$\sum_{y \in \mathcal{Y}} (p \cdot q)$		
\mathcal{X}		
x_1	x_2	x_3
0.635	0.220	0.145

Ce calcul est donc une application du théorème 1.1 et nous observons bien que $\sum_{\mathcal{Y}} (p \cdot q)$ est une LPC appartenant à $\mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}}$.

Il est également possible de modéliser les phénomènes déterministes par l'intermédiaire d'une LPC comme le montre la définition suivante.

Définition 1.8 (LPC déterministe)

Soit une LPC $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$. La LPC p est dite déterministe si pour toute configuration $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$, il existe une unique configuration $\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$ telle que

$$p(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 1.$$

Exemple 1.6

Soient deux ensembles $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$. La LPC discrète et finie $p \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}|\{\mathcal{Y}\}}$ donnée dans la suite est un exemple de LPC déterministe :

p			
X			
\mathcal{Y}	x_1	x_2	x_3
y_1	1	0	0
y_2	0	0	1

Notons que l'optimisation de la représentation et les opérations concernant les potentiels et les LPC sont toujours un sujet d'études actives (Cobb and Shenoy 2006), (Arias and Díez 2007).

1.2.3 Notion d'utilité

La notion d'utilité est une généralisation dans le formalisme des potentiels du concept d'espérance mathématique issu de la théorie des probabilités.

Définition 1.9 (Potentiel d'utilité)

Soient une LPC $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}}$ et un potentiel $u \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$. Le réel défini par

$$U_p = \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} u(\mathbf{x})p(\mathbf{x}),$$

est appelé utilité de la LPC p associée au potentiel u . Le potentiel u est alors qualifié de potentiel d'utilité.

D'après la définition 1.9, tout potentiel $u \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ peut être considéré comme potentiel d'utilité et appliqué à une LPC défini sur le domaine \mathcal{X} . Dans le cas discret et fini, nous adaptions une représentation particulière pour les potentiels d'utilité afin de les distinguer des potentiels ordinaires. Dans la suite de ce document, un potentiel d'utilité est représentée comme une LPC, excepté que la somme de ses valeurs n'est pas égale à 1 et que ces dernières ne sont pas nécessairement comprises entre 0 et 1. L'exemple 1.7 illustre cette notation.

Exemple 1.7

Soit un potentiel $\nu \in \mathbb{R}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}}$, avec $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$ et $\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\}$, tel que :

ν			
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$			
x_1	x_2	x_1	x_2
y_1	y_1	y_2	y_2
2	-5	10	0

Par conséquent, Il est possible de se servir du potentiel ν dans tout calcul d'utilité impliquant une LPC $q \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{Y}\}}$. Considérons par exemple la LPC suivante :

q			
$\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$			
x_1	x_2	x_1	x_2
y_1	y_1	y_2	y_2
0.3	0.4	0.1	0.2

L'utilité de la LPC q associée à ν est alors donnée par :

$$\begin{aligned} U_q &= \nu(x_1, y_1)q(x_1, y_1) + \nu(x_2, y_1)q(x_2, y_1) + \nu(x_1, y_2)q(x_1, y_2) + \nu(x_2, y_2)q(x_2, y_2) \\ &= 2 \times 0.3 - 5 \times 0.4 + 10 \times 0.1 + 0 \times 0.2 \\ U_q &= -0.4 . \end{aligned}$$

1.3 Modèles graphiques probabilistes

Nous disposons à présent des outils mathématiques nécessaires à l'introduction des modèles graphiques probabilistes. Des éléments sur les questions d'apprentissage statistique et d'inférence probabiliste sont également exposés dans les paragraphes suivants.

1.3.1 Définition

L'objectif principal des modèles graphiques probabilistes consiste à définir de manière parcimonieuse la loi jointe d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ en exploitant les relations de dépendances parmi les variables X_1, \dots, X_D . Ces outils reposent sur les théories des graphes et des probabilités. Un graphe orienté sans circuit (cf. annexe B) est utilisé pour décrire ces relations dans lequel chaque nœud représente une variable aléatoire et chaque arc entre deux variables indique une relation de dépendance. Les propriétés probabilistes du modèle sont décrites localement par l'intermédiaire des lois de probabilité de chaque variable conditionnellement à leurs variables parentes dans le graphe.

Définition 1.10 (Modèle graphique probabiliste/Réseau bayésien)

Un modèle graphique probabiliste (MGP) ou réseau bayésien (RB), noté \mathcal{M} , est un couple $(\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$ où :

- (i) $\mathcal{G} = (\mathbf{X}, \mathcal{A})$ est un graphe orienté sans circuit. $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ représente à la fois les nœuds du graphe et une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D$ respectivement. \mathcal{A} est l'ensemble des arcs du graphe décrivant les dépendances entre les variables. Si $X_i \rightarrow X_j \in \mathcal{A}$, alors un arc relie la variable X_i à la variable X_j .
- (ii) $\{p_d\}_{1 \leq d \leq D}$ est un ensemble de LPC tel que chaque p_d représente la distribution de la variable X_d conditionnellement à ses variables parentes dans le graphe, notées $pa(X_d)$. En généralisant l'opérateur $pa(\cdot)$ aux domaines, le vecteur aléatoire $pa(X_d)$ est à valeurs dans $pa(\mathcal{X}_d)^*$ et par conséquent $p_d \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}_d\} | pa(\mathcal{X}_d)}$.

Il est courant de faire référence au graphe \mathcal{G} comme étant la partie qualitative ou graphique du modèle, et à l'ensemble de LPC $\{p_d\}_{1 \leq d \leq D}$ comme étant sa partie quantitative ou probabiliste. Enfin, \mathcal{M} est dit discret et fini si toutes les LPC $p_d \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}_d\} | pa(\mathcal{X}_d)}$ sont discrètes et finies.

La définition suivante prolonge la notion de complexité spatiale dans le cadre des réseaux bayésiens.

Définition 1.11 (Complexité spatiale d'un MGP)

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D$ représenté par un MGP $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$. La complexité spatiale de \mathcal{M} est définie comme étant la somme des complexités spatiales associées à chacune des LPC p_d , $d = 1, \dots, D$. Autrement

$$\text{dit, } CS(\mathcal{M}) = \sum_{d=1}^D CS(p_d).$$

Le principe de la modélisation par réseaux bayésiens ainsi que l'ensemble des notations introduites dans les définitions 1.10 et 1.11 sont illustrés dans l'exemple 1.8 où il est question de la maintenance d'une machine de production.

Exemple 1.8 (Un système de production simple)

Nous proposons d'étudier l'état d'une machine de production, supposée initialement neuve, après quatre années de fonctionnement. La machine en question produit des lots de pièces dont la qualité est vérifiée afin d'écarter d'éventuels lots non conformes. Notons que deux cadences de production sont possibles (normale ou rapide) et qu'une politique de maintenance préventive est appliquée, consistant à un examen périodique de la machine.

Supposons à présent qu'il ait été demandé aux responsables de la production d'analyser les liens entre l'état de la machine, la conformité des lots, la cadence de production et la fréquence de la maintenance. Pour ce faire, leur choix se porte sur une modélisation de type probabiliste qui conduit à l'introduction des quatre variables aléatoires suivantes :

1. X : état de la machine, à valeurs dans $\mathcal{X} = \{\text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$;
2. Z : cadence de fonctionnement, à valeurs dans $\mathcal{Z} = \{\text{normale}, \text{rapide}\}$;
3. Y : qualité des lots, à valeurs dans $\mathcal{Y} = \{\text{conforme}, \text{non conforme}\}$;
4. A : période de la maintenance, à valeurs dans $\mathcal{A} = \{1 \text{ an}, 2 \text{ ans}\}$.

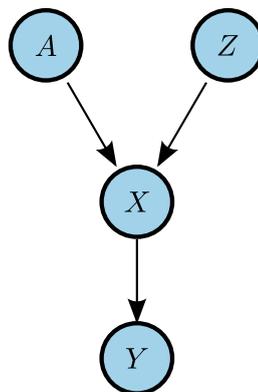


FIG. 1.1 – Réseau bayésien représentant les liens de dépendance entre l'état de la machine de production (X), sa cadence de fonctionnement (Z), la qualité des pièces produites (Y) et sa fréquence de maintenance (A).

Ayant récemment entendu parler des réseaux bayésiens, les responsables de la production décident d'utiliser ces outils de façon à représenter ce système composé de quatre variables. D'après leurs expertises et le retour d'expérience disponible, ils aboutissent à la construction du modèle graphique représenté figure 1.1. L'ensemble des arcs du graphe est donné formellement par $\mathcal{A} = \{A \rightarrow X, Z \rightarrow X, X \rightarrow Y\}$. Ces derniers possèdent en outre les significations suivantes :

- la variable d'état de la machine (X) a deux parents $pa(X) = (A, Z)$, autrement dit l'état dépend à la fois de la période de maintenance (A) et de la cadence de production (Z) ;
- la qualité des lots ne dépend que de l'état de la machine ($pa(Y) = X$) ;

– la période de la maintenance et la cadence de production ne possèdent pas de parent ($pa(A) = pa(Z) = \emptyset$).

Une fois les relations de dépendance explicitées dans le graphe, les responsables de la production se sont attachés à décrire le comportement probabiliste du modèle en spécifiant les quatre LPC p_X , p_Y , p_A et p_Z associées respectivement aux variables X , Y , A et Z . Supposons par exemple que le retour d'expérience ait conduit aux valeurs numériques suivantes :

		p_X		
		X		
A	Z	ok	dégradé	panne
1 an	normale	0.90	0.07	0.03
2 ans	normale	0.85	0.10	0.05
1 an	rapide	0.80	0.16	0.04
2 ans	rapide	0.72	0.20	0.08

p_Y		
Y		
X	conforme	non conforme
ok	0.99	0.01
dégradé	0.70	0.30
panne	0.00	1.00

p_A		p_Z	
A		Z	
1 an	2 ans	normale	rapide
1.00	0.00	0.75	0.25

L'observation de la LPC p_X associée à l'état de la machine indique que cette dernière se trouve dans l'état ok avec une probabilité égale à 0.9 lorsque la maintenance préventive est effectuée tous les ans et la cadence est normale. Cette probabilité chute à 0.8 lorsque la cadence est rapide. De même, la LPC associée à la qualité de production nous renseigne qu'un lot est conforme avec une probabilité de 0.99 si la machine est dans l'état ok, seulement de 0.7 si elle est dégradée et de 0 lorsqu'elle est en panne. Par ailleurs, les variables sans parent représentent souvent les entrées du système. La loi de la variable A permet ici de définir la politique de maintenance du système. Poser $p_A(1 \text{ an}) = 1$ signifie que la période considérée pour la maintenance est de 1 an. De la même manière, la loi associée à la variable Z caractérise la politique de production. Une probabilité de 0.75 associée à

la cadence normale exprime que 75% de l'utilisation de la machine se fait à cette cadence, contre 25% en cadence rapide. Notons enfin que ce MGP possède une complexité spatiale s'élevant à

$$CS(\{p_A, p_Z, p_X, p_Y\}) = CS(p_A) + CS(p_Z) + CS(p_X) + CS(p_Y) = 12 + 6 + 2 + 2 = 22$$

espaces mémoires élémentaires.

Jusqu'à présent, nous n'avons fait usage des modèles graphiques probabilistes qu'à des fins de modélisation et de représentation de la connaissance. Or il est également possible de "poser des questions" au modèle de façon à déduire de nouvelles informations sur le système considéré. Ainsi dans le cadre de l'exemple précédent, il serait possible dans un premier temps de calculer la probabilité d'un lot défectueux dans le contexte présenté, puis d'observer l'évolution des probabilités lorsque la période de maintenance passe à deux ans. Cette problématique est l'objet de la section 1.3.4 dans laquelle nous détaillons le problème de l'inférence dans les modèles graphiques probabilistes.

1.3.2 Factorisation de la loi jointe

Il s'agit ici de présenter un des principaux résultats associés à la modélisation par réseaux bayésiens, à savoir le théorème de factorisation de la loi jointe. Ce dernier, également connu sous le nom de théorème de Markov direct, décrit comment la loi jointe d'un vecteur aléatoire, représentée à l'aide d'un modèle graphique probabiliste, peut s'écrire comme le produit des LPC de chacune de ces variables. Ce résultat repose sur une simplification du théorème de Bayes généralisé (cf. théorème C.2, annexe C) à partir des relations d'indépendances conditionnelles induites par la structure graphique du modèle (Pearl and Paz 1985), (Verma and Pearl 1988).

Théorème 1.3 (Factorisation de la loi jointe)

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_D$ représenté par un MGP $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$. On note $p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}}$ la loi (ou densité) jointe associée au vecteur \mathbf{X} . La loi p admet alors la factorisation suivante pour tout $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D) \in \mathcal{X}^*$,

$$p(\mathbf{x}) = p(x_1, \dots, x_D) = \prod_{d=1}^D p_d(x_d | \text{pa}(x_d)). \quad (1.1)$$

On dit alors que la loi (ou densité) jointe p associée au vecteur aléatoire \mathbf{X} se factorise dans \mathcal{M} et on note $\mathbf{X} \sim \mathcal{M}$.

Ce théorème justifie le caractère concis de la modélisation à partir de réseaux bayésiens. Il est en effet souvent beaucoup plus avantageux, en terme de complexité spatiale, de stocker l'ensemble des LPC $\{p_d\}_{1 \leq d \leq D}$ plutôt que la loi jointe p directement. Ceci est détaillé dans la remarque suivante pour le cas des MGP discrets et finis.

Remarque 1.1 (MGP discrets et finis et complexité spatiale)

Soit $\mathbf{X} = (X_d)_{1 \leq d \leq D}$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $(\mathcal{X}_d)_{d=1}^D$ représenté par un MGP $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$. La complexité spatiale associée à \mathcal{M} est donnée par

$$CS(\mathcal{M}) = \sum_{d=1}^D CS(p_d) = c \left(\sum_{d=1}^D |\mathcal{X}_d| |\text{pa}(\mathcal{X}_d)^*| \right),$$

alors que la complexité spatiale naïve de la loi jointe p sous-jacente est égale à

$$CS(p) = c \prod_{d=1}^D |\mathcal{X}_d|$$

où c désigne le coût d'un espace mémoire élémentaire. Considérons le cas où toutes les variables prennent le même nombre de valeurs K , autrement dit pour tout d , $|\mathcal{X}_d| = K$. Supposons également que toutes les variables possèdent L parents. Ceci implique $CS(\mathcal{M}) = cDK^{L+1}$ et $CS(p) = cK^D$. La représentation par réseaux bayésiens est plus avantageuse que la loi jointe classique en terme de complexité spatiale si et seulement si

$$CS(\mathcal{M}) \leq CS(p) \iff DK^{L-D+1} \leq 1.$$

La représentation d'une loi de probabilité multivariée par un MGP est d'autant plus intéressante que le nombre de parents est petit comparé au nombre de variables et que ces dernières prennent un grand nombre de valeurs.

1.3.3 Apprentissage des lois de probabilité conditionnelles**Problématique et notations**

L'objectif de cette section est de détailler l'apprentissage des paramètres probabilistes d'un réseau bayésien dont la structure graphique est connue. En reprenant les notations introduites et en faisant explicitement apparaître les paramètres, le théorème de factorisation (1.3) se réécrit comme suit :

$$p(x_1, \dots, x_D; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{d=1}^D p_d(x_d | \text{pa}(x_d); \boldsymbol{\theta}_d),$$

où chaque $\boldsymbol{\theta}_d \in \Theta_d$ représente les paramètres de la LPC p_d et $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_D)$. La question est donc de calculer une estimation de $\boldsymbol{\theta} = (\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_D)$, notée $\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\hat{\boldsymbol{\theta}}_1, \dots, \hat{\boldsymbol{\theta}}_D)$, à partir d'informations contenues dans une base de données répertoriant un certain nombre de réalisations du processus étudié. Cette base est souvent qualifiée de base d'exemples ou de base de REX (Retour d'EXpérience) dans l'industrie.

Soit formellement le vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ dont la distribution se factorise dans le MGP $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$. Considérons également une base de données $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$ contenant N exemples indépendants et identiquement distribués (i.i.d.) dans laquelle chaque

ligne représente une réalisation du processus \mathbf{X} . Par conséquent, il est possible d'assimiler $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$ à la matrice de N lignes et D colonnes suivante :

$$\mathbf{D}_{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,d} & \dots & x_{1,D} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,d} & \dots & x_{n,D} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{N,1} & \dots & x_{N,d} & \dots & x_{N,D} \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

où $x_{n,d}$ est la n -ème observation de la variable X_d . Notons $\text{fa}(X_d)$ les variables constituant la famille de X_d dans \mathcal{G} , à savoir X_d elle-même et ses parents, c'est-à-dire $\text{fa}(X_d) = (\text{pa}(X_d), X_d)$. Introduisons alors par analogie la notation $\mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)}$ comme étant la sous matrice de $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$ contenant les observations de X_d et de ses parents.

Nous nous plaçons ici dans un cadre où la base de données disponible est complètement observée, autrement dit celle-ci ne possède pas de donnée manquante, ni même partiellement observée. Nous traitons dans un premier temps le cas où les LPC sont quelconques, puis le cas où ces dernières sont discrètes et finies. Nous présentons en particulier la démarche permettant de calculer les estimations issues de la méthode du maximum de vraisemblance.

Apprentissage dans le cas général

La méthode du maximum de vraisemblance (Fisher 1922) consiste à déterminer le jeu de paramètres noté $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ qui maximise la vraisemblance, notée L , des données observées $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$. Par définition, cette dernière est définie comme étant la probabilité d'observer $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{D}_{\mathbf{X}}) &= p(\mathbf{D}_{\mathbf{X}}; \boldsymbol{\theta}) \\ &= \prod_{n=1}^N p(x_{n,1}, \dots, x_{n,D}; \boldsymbol{\theta}) \quad (\text{données i.i.d.}) \\ &= \prod_{n=1}^N \prod_{d=1}^D p_n(x_{n,d} | \text{pa}(x_{n,d}); \theta_d) \quad (\text{factorisation de la loi jointe dans } \mathcal{M}) \\ &= \prod_{d=1}^D \underbrace{\prod_{n=1}^N p_n(x_{n,d} | \text{pa}(x_{n,d}); \theta_d)}_{L(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)})} \\ L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{D}_{\mathbf{X}}) &= \prod_{d=1}^D L(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)}), \end{aligned}$$

où $L(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)})$ correspond à la vraisemblance locale des données observées relatives à la famille de la variable X_d . En règle générale, on utilise le logarithme de la vraisemblance, ou log-vraisemblance notée l , cette dernière permettant souvent de simplifier les calculs. Le résultat du calcul précédent se réécrit de la manière suivante :

$$l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{D}_{\mathbf{X}}) = \ln[L(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{D}_{\mathbf{X}})] = \sum_{d=1}^D \ln[L(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)})] = \sum_{d=1}^D l(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)}). \quad (1.3)$$

Ainsi d'après l'équation (1.3), la log-vraisemblance se décompose en une somme de log-vraisemblances locales. Par conséquent, rechercher l'estimation du jeu de paramètres $\widehat{\boldsymbol{\theta}}$ qui maximise $l(\boldsymbol{\theta}; \mathbf{D}_{\mathbf{X}})$ revient à calculer localement chaque estimation $\widehat{\theta}_n$ maximisant $l(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)})$. D'où,

$$\widehat{\boldsymbol{\theta}} = (\widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_d, \dots, \widehat{\theta}_D), \text{ avec } \widehat{\theta}_d = \arg \max_{\theta_d \in \Theta_d} l(\theta_d; \mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)}), \quad 1 \leq d \leq D. \quad (1.4)$$

Dans certains cas particuliers, il est possible de déterminer l'expression analytique de ces estimations. En revanche lorsque cela est impossible, il est nécessaire de recourir à une méthode d'optimisation numérique (Panos and Mauricio 2002) afin de résoudre l'équation (1.4). Notons par ailleurs que les estimateurs de maximum de vraisemblance ont la particularité d'être asymptotiquement sans biais, de variance minimale et asymptotiquement distribués selon une loi normale. Cette dernière propriété est particulièrement utile car elle permet la construction d'intervalles de confiance sur les estimations calculées (Keeping 1962).

Apprentissage dans le cas discret et fini

Dans le cadre des MGP discrets et finis, il est possible de poursuivre le calcul précédent. Définir la d -ème LPC, notée $p_d \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}_d\}|\text{pa}(\mathcal{X}_d)}$, revient dans ce cas à spécifier pour chacune des configurations de parents $\mathbf{x}' \in \text{pa}(\mathcal{X}_d)$, la probabilité d'occurrence de chacun des éléments de \mathcal{X}_d . Autrement dit, θ_d et p_d représentent exactement le même objet, à savoir une table de probabilité conditionnelle. Nous cherchons donc à calculer pour tout $d \in \{1, \dots, D\}$ une estimation de p_d , notée \widehat{p}_d . L'équation (1.4) se réécrit de la manière suivante :

$$\forall d \in \{1, \dots, D\}, \widehat{p}_d = \arg \max_{p_d \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}_d\}|\text{pa}(\mathcal{X}_d)}} \sum_{n=1}^N \ln[p_n(x_{n,d}|\text{pa}(x_{n,d}))] \quad (1.5)$$

Posons $N_{d,\mathbf{x}',x}$ le nombre de fois où la variable X_d prend la valeur $x \in \mathcal{X}_d$ dans les données $\mathbf{D}_{\text{fa}(X_d)}$ alors que ses parents sont dans la configuration $\mathbf{x}' \in \text{pa}(\mathcal{X}_d)$. Par définition, $N_{d,\mathbf{x}',x}$ vérifie

$$N_{d,\mathbf{x}',x} = \sum_{n=1}^N \mathbb{I}(x_{n,d} = x) \mathbb{I}(\text{pa}(x_{n,d}) = \mathbf{x}'),$$

où \mathbb{I} est la fonction indicatrice. De cette quantité, il est possible d'en déduire le nombre de fois où les parents sont dans la configuration \mathbf{x}' , à savoir $N_{d,\mathbf{x}'} = \sum_{x \in \mathcal{X}_d} N_{d,\mathbf{x}',x}$. L'estimation du maximum de vraisemblance associée à la LPC p_d vérifie alors pour toute configuration de parents $\mathbf{x}' \in \text{pa}(\mathcal{X}_d)$ et tout $x \in \mathcal{X}_d$,

$$\widehat{p}_d(x|\mathbf{x}') = \frac{N_{d,\mathbf{x}',x}}{N_{d,\mathbf{x}'}}$$

ce qui revient à calculer, pour chaque configuration de parents, la proportion du nombre d'occurrences de la valeur x dans la d -ème colonne de $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$, et ce, pour tout $d \in \{1, \dots, D\}$. La propriété de normalité asymptotique liée à la méthode du maximum de vraisemblance

permet dans ce cas de déduire un intervalle de confiance asymptotique autour de l'estimation obtenue. En se fixant un seuil de confiance $\alpha \in [0, 1]$, nous obtenons pour toute configuration de parents $\mathbf{x}' \in \text{pa}(\mathcal{X}_d)$ et tout $x \in \mathcal{X}_d$ l'encadrement suivant :

$$\left[\hat{p}_d(x|\mathbf{x}') - u_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_d(x|\mathbf{x}')(1 - \hat{p}_d(x|\mathbf{x}'))}{N_{d,\mathbf{x}'}}}, \hat{p}_d(x|\mathbf{x}') + u_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}_d(x|\mathbf{x}')(1 - \hat{p}_d(x|\mathbf{x}'))}{N_{d,\mathbf{x}'}}} \right],$$

où $u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ est le quantile $\frac{1+\alpha}{2}$ de la loi normale centrée-réduite.

Remarques bibliographiques

Il arrive souvent en pratique que les données disponibles pour l'apprentissage des LPC ne soient pas complètes. Des variables peuvent ne pas être observées dans certains exemples de la base $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$. Dans ce type de situation, des méthodes, en particulier celles reposant sur l'algorithme EM¹ (Mclachlan and Krishnan 1997), ont été développées pour une utilisation dans les MGP (Cowell et al. 1999). D'autre part lorsque des informations *a priori* sont disponibles sur le processus, par exemple des avis d'experts, il est possible d'en tenir compte par le biais des méthodes bayésiennes (Gelman et al. 2003) telles que le maximum *a posteriori* (MAP) ou l'espérance *a posteriori* (EAP).

Enfin, en ce qui concerne l'apprentissage de la structure graphique du modèle, la thèse de François (2006) passe en revue la plupart des méthodes existantes tout en les comparant empiriquement sur divers exemples classiques avec données complètes et manquantes. Plus récemment, les travaux de Rodrigues de Morais (2009) présentent de nouvelles techniques permettant d'améliorer l'apprentissage de la structure à partir de données complètes composées d'un très grand nombre de variables.

1.3.4 Inférence

Généralités

Après avoir présenté l'intérêt des MGP pour la modélisation, nous nous intéressons ici aux mécanismes permettant d'effectuer des raisonnements probabilistes. En pratique, l'objectif est de calculer la loi de probabilité d'un sous ensemble de variables aléatoires, appelé requête, parmi l'ensemble des variables aléatoires représenté dans un MGP. Les calculs réalisés afin de déduire la distribution de la requête sont appelés calculs d'inférence probabiliste. Il existe trois classes de méthodes d'inférence probabiliste :

- les méthodes exactes, reposant sur des multiplications et sommations de potentiels sans faire d'hypothèse simplificatrice sur le modèle ;
- les méthodes approchées déterministes, consistant à effectuer des calculs exacts sur une structure graphique simplifiée ;

¹L'annexe D présente le principe de la méthode EM, appliquée au problème d'apprentissage d'une loi discrète et finie en présence de données incomplètes.

- les méthodes approchées stochastiques, réalisant un échantillonnage de la loi de la requête en exploitant la structure originale du modèle.

Le premier algorithme d'inférence exacte pour les MGP a été proposé par Pearl (1986). Il s'agit d'un protocole de passage de messages limité aux graphes orientés sans circuit ayant une structure de polyarbre². Cette méthode a été étendue aux graphes quelconques pour donner naissance à l'algorithme de l'arbre de jonction (Lauritzen and Spiegelhalter 1988). Cette méthode est très largement utilisée à l'heure actuelle dans la plupart des logiciels de modélisation basés sur les MGP. Cet engouement s'explique en partie par sa faculté à calculer rapidement la distribution de chacune des variables représentées par le modèle graphique. Dans la suite, nous détaillons la méthode d'inférence exacte dite d'élimination de variables (Dechter 1999). L'élimination de variables est un problème intrinsèque à tous les algorithmes d'inférence d'exacte. D'autre part, sa simplicité, notamment car elle ne fait pas intervenir de notions complexes issues de la théorie des graphes, permet une mise en œuvre rapide. Cette méthode possède en outre de bonnes propriétés algorithmiques lui conférant les mêmes avantages que la méthode de l'arbre de jonction (Cozman 2000). Précisons toutefois qu'en pratique, la plupart des méthodes d'inférence exactes ne s'appliquent pour l'instant qu'à des modèles dont les LPC sont discrètes et finies. même si la théorie prévoit en principe une utilisation dans le cadre plus large des LPC appartenant à la famille dite exponentielle (Wei 1998). Par ailleurs, Cooper (1990) montre que l'inférence exacte dans des réseaux quelconques est un problème NP-difficile. Néanmoins la complexité algorithmique des méthodes est en général calculable à l'avance. Quand le résultat dépasse une limite raisonnable, il est alors préférable d'utiliser une méthode approchée.

Dans le cadre des méthodes approchées déterministes, nous pouvons citer par exemple les travaux de Murphy et al. (1999) qui montrent qu'une utilisation de l'algorithme de Pearl dans le cas général peut avoir un certain intérêt en considérant un compromis rapidité/précision des résultats. Jordan et al. (1999) ont étudié les méthodes variationnelles appliquées à l'inférence dans les MGP. Intéressons nous enfin aux méthodes approchées stochastiques qui reposent à la fois sur l'exploitation de la topologie du modèle et d'un échantillonnage des variables aléatoires représentées. Les deux méthodes les plus utilisées sont la méthode générale d'échantillonnage MCMC (*Monte Carlo Markov Chain*, Gilks (1995)) et la méthode du filtrage particulaire (Arulampalam et al. 2002). La méthode d'échantillonnage est détaillée dans la suite. Ces méthodes possèdent les avantages d'être simples à implémenter et flexibles dans leur utilisation. Il est possible de les appliquer à des modèles où les LPC sont quelconques. La convergence de ces algorithmes vers les solutions exactes associées est en général garantie par la théorie. Malheureusement cette convergence est lente et n'est assurée que dans le cas où le nombre d'échantillons tend vers l'infini. Par conséquent, et bien que possédant de bonnes propriétés théoriques, ces méthodes ne sont utilisées en pratique que lorsque les algorithmes précédents ne peuvent s'appliquer.

Dans les paragraphes suivants, nous considérons $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$, un vecteur aléatoire dont la loi jointe se factorise dans un modèle graphique probabiliste $\mathcal{M} = (\mathcal{G}, \{p_d\}_{1 \leq d \leq D})$. Formellement, l'objectif de l'inférence probabiliste consiste à calculer la loi $P(\mathbf{X}_r) \in \mathcal{L}^{\mathbf{X}_r}$ d'un vecteur aléatoire \mathbf{X}_r extrait de \mathbf{X} , appelé requête. Selon le problème considéré, cer-

²Un polyarbre est un graphe orienté sans circuit dans lequel il n'y a pas non plus de circuit non orienté.

taines des variables de \mathbf{X}_r peuvent être observées, apportant ainsi des informations supplémentaires³ sur le système étudié. Notons que ces observations ne changent en rien le principe des méthodes d'inférence probabiliste mais conduisent en revanche souvent à une réduction de la complexité des calculs effectués.

Inférence exacte : Méthode de l'élimination de variables

Le principe de la méthode d'élimination repose sur le fait que pour tout $\mathbf{x}_r \in \mathcal{X}_r^*$,

$$P(\mathbf{X}_r = \mathbf{x}_r) = \int_{\mathbf{x}_e \in (\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}_r)^*} \prod_{d=1}^D p_d(x_d | \text{pa}(x_d)). \quad (1.6)$$

"Éliminer une variable" signifie effectuer une sommation de la loi jointe factorisée sur le domaine de la variable en question. La méthode consiste donc à éliminer une à une les variables qui n'appartiennent pas à la requête \mathbf{X}_r , de telle sorte qu'en fin de procédure il ne reste plus que la LPC sur \mathcal{X}_r . Le résultat de l'équation (1.6) ne dépend pas de l'ordre dans lequel sont effectuées les sommations. En revanche cet ordre influe très fortement sur la complexité des calculs associés. Malheureusement, trouver l'ordre d'élimination optimal s'avère être un problème NP-difficile, d'où l'utilisation d'heuristiques (Kjaerulff 1990), (Zhang and Poole 1996) permettant dans certains cas d'obtenir des ordres convenables.

L'algorithme 1.1 présente la méthode d'élimination de variables appliquée aux calculs d'inférence dans le cadre des modèles graphiques probabilistes. La complexité algorithmique de cette méthode est étudiée en détail par Dechter (1999). Néanmoins il est intéressant de remarquer que l'étape de calcul du potentiel c_X concentre l'essentiel de la complexité algorithmique de la méthode. Plus précisément, en reprenant les notations introduites dans l'algorithme, nous avons

$$\begin{aligned} CA(c_X) &= CA\left(\int_{\mathcal{X}} \prod_{m \in \mathcal{B}_X} m\right) \\ &= CA(m') + CA\left(\int_{\{X\}} m'\right) \quad \text{avec } m' = \prod_{m \in \mathcal{B}_X} m \\ CA(c_X) &= 2CS(m') = \mathcal{O}(CS(m')). \end{aligned}$$

Autrement dit, plus le nombre de potentiels contenus dans les ensembles \mathcal{B}_X est important, plus il est probable que le calcul de c_X soit coûteux du point de vue algorithmique et spatial. L'exemple 1.9 donne une illustration du fonctionnement de cet algorithme.

Exemple 1.9 (Illustration de l'algorithme d'élimination)

Replaçons nous dans le contexte introduit dans l'exemple 1.8. Il s'agit ici de présenter pas à pas les étapes de l'algorithme 1.1 lors d'un calcul d'inférence simple. Intéressons nous par exemple à la distribution de la qualité des lots (variable Y) en considérant le modèle graphique de la figure 1.1. La requête \mathbf{X}_r ne contient ici que la variable Y . En utilisant l'ordre d'élimination (A, Z, X, Y) , la méthode se déroule de la façon suivante :

³Ces informations sont souvent appelées "évidence".

Algorithme 1.1 : Méthode de l'élimination de variables dans un MGP.

Entrées :

1. Un ensemble de LPC $\{p_d\}_{1 \leq d \leq D}$ caractérisant la loi jointe d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D$ représenté par un MGP.
2. Un vecteur aléatoire \mathbf{X}_r extrait de \mathbf{X} représentant la requête de l'inférence.
3. Une permutation du vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_D) , notée $\sigma(X_1, \dots, X_D)$, représentant l'ordre d'élimination des variables.

Sortie : La loi $P(\mathbf{X}_r) \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}_r}$.

// Copie de l'ensemble des LPC

 $\mathcal{P} \leftarrow \{p_1, \dots, p_D\};$
pour chaque $d = 1, \dots, D$ **faire**
 $X^{(d)} \leftarrow \sigma(X_d);$
si $X^{(d)}$ *n'appartient pas* à la requête \mathbf{X}_r **alors**

// Potentiels (ou LPC) dont le domaine contient $\mathcal{X}^{(d)}$
 $\mathcal{B}_{X^{(d)}} \leftarrow \{m \mid m \in \mathcal{P} \text{ tel que } \mathcal{X}^{(d)} \in \text{Dom}(m)\};$
 $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \setminus \mathcal{B}_{X^{(d)}};$

// Multiplier les potentiels (ou LPC) de $\mathcal{B}_{X^{(d)}}$

// Puis sommer sur $\mathcal{X}^{(d)}$

$$c_{X^{(d)}} \leftarrow \sum_{\mathcal{X}^{(d)}} \prod_{m \in \mathcal{B}_{X^{(d)}}} m;$$

// Réinsérer le résultat dans \mathcal{P}
 $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P} \cup \{c_{X^{(d)}}\};$
fin

En déduire $P(\mathbf{X}_r) \leftarrow \prod_{m \in \mathcal{P}} m;$
fin

- Initialisation : $\mathcal{P} = \{p_A, p_Z, p_X, p_Y\}$.
- $X^{(1)} \leftarrow A$.
- $A \notin \mathbf{X}_r = (Y)$.
- $A \in \text{Dom}\{p_A\}$ et $A \in \text{Dom}\{p_X\}$, donc $B_A \leftarrow \{p_A, p_X\}$.
- $\mathcal{P} \leftarrow \{p_Z, p_Y\}$.
- $c_A \leftarrow \sum_{\mathcal{A}} p_A \cdot p_X$ avec $c_A \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}|\{\mathcal{Z}\}}$, ce qui donne compte tenu des valeurs numériques :

		c _A		
		X		
Z		ok	dégradé	panne
normale		0.90	0.07	0.03
rapide		0.80	0.16	0.04

- $\mathcal{P} \leftarrow \{p_Z, p_Y, c_A\}$.

- $X^{(2)} \leftarrow Z$.
- $Z \notin \mathbf{X}_r = (Y)$.
- $Z \in \text{Dom}\{p_Z\}$ et $Z \in \text{Dom}(c_M)$, donc $B_Z \leftarrow \{p_Z, c_A\}$.
- $\mathcal{P} \leftarrow \{p_Y\}$.
- $c_Z \leftarrow \sum_Z p_Z \cdot c_A$ avec $c_A \in \mathcal{L}^{\{X\}}$, soit :

c_Z
X
ok dégradé panne
0.875 0.092 0.033

- $\mathcal{P} \leftarrow \{p_Y, c_Z\}$.
- $X^{(3)} \leftarrow X$.
- $X \notin \mathbf{X}_r = (Y)$.
- $X \in \text{Dom}\{p_Y\}$ et $X \in \text{Dom}(c_Z)$, donc $B_Z \leftarrow \{p_Y, c_Z\}$.
- $\mathcal{P} \leftarrow \emptyset$.
- $c_X \leftarrow \sum_X p_Y \cdot c_Z$ avec $c_X \in \mathcal{L}^{\{Y\}}$, soit :

c_X
Y
conforme non conforme
0.931 0.069

- $\mathcal{P} \leftarrow \{c_X\}$.
- $X^{(4)} \leftarrow Y$.
- $Y \in \mathbf{X}_r = (Y)$, on ne fait rien.
- Il n'y a plus de variable à éliminer.
- Résultat : $P(Y) \leftarrow c_X$.

Inférence approchée : Méthode par échantillonnage

Le principe de la méthode d'inférence par échantillonnage consiste dans un premier temps à construire une base d'exemples indépendants à partir des LPC caractérisant le MGP. Cette base est ensuite utilisée pour estimer la distribution de la requête en utilisant une méthode d'estimation quelconque (par exemple la méthode du maximum de vraisemblance, cf. partie 1.3.3). Formellement, il s'agit de générer N réalisations indépendantes du vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$, notées $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N$ où pour tout $n = 1, \dots, N$, $\mathbf{x}_n = (x_{n,1}, \dots, x_{n,D})$. Ces réalisations forment alors une base de données, notée $\mathbf{D}_{\mathbf{X}}$, identique à (1.2). L'algorithme 1.2 présente une méthode d'échantillonnage générique d'un processus aléatoire représenté par un MGP. Remarquons qu'une fois l'échantillonnage effectué, il est possible d'estimer la loi $P(\mathbf{X}_r) \in \mathcal{L}^{\mathbf{X}_r}$ de n'importe quelle requête \mathbf{X}_r . Cette estimation est effectuée à partir de la sous base d'exemples, notée $\mathbf{D}_{\mathbf{X}_r}$ obtenue en ne gardant que les colonnes correspondant aux variables appartenant à la requête.

Algorithme 1.2 : Méthode d'échantillonnage dans un MGP.

Entrées :

1. Un ensemble de LPC $\{p_d\}_{1 \leq d \leq D}$ caractérisant la loi jointe d'un vecteur aléatoire $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$ à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_D$ représentée par un MGP.
2. Le nombre N d'échantillons du vecteur aléatoire \mathbf{X} à réaliser.

Sortie : Une base d'exemples i.i.d. $\mathbf{D}_{\mathbf{X}} = (x_{n,d})_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq d \leq D}}$ où $x_{n,d}$ désigne la n -ème réalisation de la variable aléatoire X_d .

pour chaque $n = 1, \dots, N$ **faire**

 // n -ème échantillonnage

 pour chaque $d = 1, \dots, D$ **faire**

 // Tirage aléatoire selon la LPC de la variable X_d

 $x_{n,d} \sim p_d(\cdot | \text{pa}(x_{n,d}))$ où $\text{pa}(x_{n,d})$ correspond à la n -ème réalisation du vecteur aléatoire associé aux variables parentes de X_d dans le MGP.

 fin
fin

Dans le cas discret et fini, l'estimation de la loi $\widehat{P}(\mathbf{X}_r)$ se déduit en généralisant l'équation (1.5). Soit $N_{\mathbf{x}_r}$ le nombre d'occurrences de la configuration \mathbf{x}_r dans la sous base d'exemples $\mathbf{D}_{\mathbf{X}_r}$. La méthode du maximum de vraisemblance fournit alors une estimation de la loi de \mathbf{X}_r , notée $\widehat{P}(\mathbf{X}_r)$, définie pour tout $\mathbf{x}_r \in \mathcal{X}_r^*$ par

$$\widehat{P}(\mathbf{X}_r = \mathbf{x}_r) = \widehat{p}_{\mathbf{x}_r} = \frac{N_{\mathbf{x}_r}}{N}. \quad (1.7)$$

En appliquant la propriété de normalité asymptotique caractéristique de la méthode du maximum de vraisemblance, l'estimation précédente est précise à $\pm \Delta_{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}}$ avec

$$\Delta_{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}} = u_{\frac{1+\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}(1 - \widehat{p}_{\mathbf{x}_r})}{N}} \in [0, 1], \quad (1.8)$$

où $\alpha \in [0, 1]$ est le seuil de confiance de l'encadrement et où $u_{\frac{1+\alpha}{2}}$ est le quantile $\frac{1+\alpha}{2}$ de la loi normale centrée-réduite. Insistons sur le fait que choisir un seuil de confiance α signifie que l'estimation obtenue a une probabilité α d'appartenir à l'encadrement associé. Enfin, il est possible de déterminer le nombre $N_{\alpha, \epsilon}$ de manière à obtenir un encadrement de la forme $\widehat{p}_{\mathbf{x}_r} \pm \Delta_{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}}$ avec $\Delta_{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}} < \epsilon$. Nous avons en effet $p_{\mathbf{x}_r} \in [0, 1]$ ce qui permet d'utiliser la majoration $p_{\mathbf{x}_r}(1 - p_{\mathbf{x}_r}) < 1/4$ et d'en déduire

$$\Delta_{\widehat{p}_{\mathbf{x}_r}} < \epsilon \iff N_{\alpha, \epsilon} > \frac{u_{\frac{1+\alpha}{2}}^2}{4\epsilon^2}. \quad (1.9)$$

La complexité algorithmique de la méthode d'inférence par échantillonnage se résume essentiellement au temps de calcul nécessaire à la construction de la base d'exemples. Ceci revient à évaluer la complexité algorithmique de l'algorithme 1.2. Nous en déduisons alors

que la méthode possède un coût algorithmique en

$$\mathcal{O}\left(N \sum_{d=1}^D CA(x_{n,d} \sim p_d)\right), \quad (1.10)$$

où $CA(x_{n,d} \sim p_d)$ désigne la complexité algorithmique liée à la génération d'une réalisation suivant la LPC $p_d \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}_d\}|\text{pa}(\mathcal{X}_d)}$. Or, le coût d'un tirage aléatoire à partir d'une LPC quelconque de $\mathcal{L}^{\mathcal{X}|\mathcal{Y}}$ étant en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|)$, la méthode d'échantillonnage détaillée ici nécessite de l'ordre de

$$\mathcal{O}\left(N \sum_{d=1}^D |\mathcal{X}_d|\right)$$

opérations élémentaires.

Exemple 1.10 (Illustration de la méthode d'échantillonnage)

Reprenons la problématique de l'exemple 1.9 et appliquons la méthode d'échantillonnage afin d'obtenir une estimation de la distribution de la qualité des lots. Rappelons que la méthode d'élimination donne le résultat exact suivant :

$P(Y)$	
Y	
conforme	non conforme
0.931	0.069

En se fixant un seuil de confiance $\alpha = 0.95$ (95%), nous obtenons à partir de $N = 100$ exemples l'estimation

$\hat{P}(Y)$	
Y	
conforme	non conforme
0.890	0.110

Dans ces conditions, les valeurs obtenus sont précises à ± 0.0613 . Avec $N = 1000$ exemples, le résultat est

$\hat{P}(Y)$	
Y	
conforme	non conforme
0.933	0.067

La précision est alors de ± 0.0155 . Enfin, avec $N = 10000$ exemples, l'estimation $\hat{P}(Y)$ est égale à

$\hat{P}(Y)$	
Y	
conforme	non conforme
0.930	0.070

avec une précision de ± 0.0066 . Par ailleurs, à titre indicatif, le nombre d'exemples à générer pour obtenir une précision à 10^{-3} avec un seuil de confiance $\alpha = 0.99$ s'élève à $N_{0.99,10^{-3}} = 1658725$. Ceci illustre la faiblesse de cette méthode, à savoir un coût algorithmique démesuré par rapport à la précision des estimations calculées.

1.4 Modèles graphiques probabilistes markoviens

L'objectif des paragraphes suivants est d'étendre le formalisme des modèles graphiques probabilistes afin de représenter des systèmes dynamiques. Nous entendons par cette terminologie des systèmes dont l'état évolue en fonction d'un paramètre t introduisant une notion d'ordre. Nous nous limitons ici au cas où ce paramètre prend ses valeurs dans un espace discret et fini. Le paramètre t peut par exemple désigner un temps discret, une position, ... Le terme dynamique ne s'applique donc pas à la structure du système, cette dernière étant supposée fixe.

Les réseaux bayésiens dynamiques, et en particulier les modèles à deux tranches de temps, ont été introduits et largement décrits par [Murphy \(2002\)](#). Le principe majeur de ces modèles consiste à autoriser les variables du modèle à l'instant présent à dépendre de l'instant précédent. Autrement dit, d'un point de vue probabiliste, ces modèles vérifient l'hypothèse markovienne d'ordre un. Par conséquent, et par volonté d'unification, nous nous permettons dans ce document de désigner par modèles graphiques probabilistes markoviens d'ordre n , abrégés n -MGPM, les modèles souvent appelés réseaux bayésiens à $n+1$ tranches de temps dans la littérature.

Par analogie avec les modèles graphiques probabilistes statiques introduits dans la partie 1.3, l'idée est à présent de représenter de manière parcimonieuse les processus multivariés vérifiant une hypothèse markovienne. Par conséquent, le formalisme des n -MPGM constitue un outil d'unification pertinent, permettant, entre autre, de représenter de nombreux modèles markoviens connus. Par exemple, les modèles de Markov cachés ([Rabiner and Juang 1993](#)), les filtres de [Kalman \(1960\)](#) ou bien encore les processus décisionnels markoviens ([Puterman 2005](#)) sont tous représentables à l'aide d'un 1-MGPM. D'autre part, nous montrons dans les paragraphes suivants que les modèles graphiques probabilistes markoviens héritent largement du formalisme et des outils développés dans le cadre statique.

1.4.1 Définition

Formellement un n -MGPM est une représentation graphique de la distribution d'un vecteur aléatoire $(\mathbf{X}_t)_{t \in \mathcal{T}} = (X_{t,1}, \dots, X_{t,D})_{1 \leq t \leq T}$ en supposant l'hypothèse markovienne d'ordre n . Autrement dit pour tout $t > n$, le vecteur aléatoire \mathbf{X}_{t+1} est supposé indépendant du vecteur \mathbf{X}_{t-n} conditionnellement au vecteur $(\mathbf{X}_{t-n+1}, \mathbf{X}_{t-n+2}, \dots, \mathbf{X}_t)$, ce qui s'écrit mathématiquement

$$\mathbf{X}_{t-n} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+1} | (\mathbf{X}_{t-n+1}, \mathbf{X}_{t-n+2}, \dots, \mathbf{X}_t). \quad (1.11)$$

Notons que l'équation 1.11 avec $n = 1$ désigne l'hypothèse classique selon laquelle le futur du processus étudié est indépendant de son passé connaissant son présent, c'est-à-dire $\mathbf{X}_{t-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+1} | \mathbf{X}_t$.

Définition 1.12 (Modèle graphique probabiliste markovien d'ordre n)

Soit $\mathbf{X}_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,D})$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathcal{X}_t^* = \mathcal{X}_{t,1} \times \dots \times \mathcal{X}_{t,D}$. Un modèle graphique probabiliste (ou réseau bayésien) markovien d'ordre n , noté $\mathcal{M}_n^\rightarrow$, est un couple de deux modèles graphiques probabilistes $(\mathcal{M}^{\text{ini}}, \mathcal{M}^\rightarrow)$ représentant un processus stochastique multivarié $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 1}$.

- (i) $\mathcal{M}^{\text{ini}} = (\mathcal{G}^{\text{ini}}, \{p_{1,d}^{\text{ini}}, \dots, p_{n,d}^{\text{ini}}\}_{1 \leq d \leq D})$ définit la distribution initiale du processus, à savoir la distribution jointe du vecteur $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$, notée $p^{\text{ini}} \in \mathcal{L}^{\bigcup_{t'=1}^n \mathcal{X}_{t'}}$. D'après le théorème 1.3, pour tout $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \in (\bigcup_{t'=1}^n \mathcal{X}_{t'})^*$

$$p^{\text{ini}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \prod_{t'=1}^n \prod_{d=1}^D p_{t',d}^{\text{ini}}(x_{t',d} | \text{pa}(x_{t',d})). \quad (1.12)$$

- (ii) $\mathcal{M}^\rightarrow = (\mathcal{G}^\rightarrow, \{p_{t,d}^\rightarrow\}_{\substack{1 \leq d \leq D \\ n+1 \leq t \leq T}})$ représente le modèle de transition du processus, autrement dit la distribution de $\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, \dots, \mathbf{X}_{t-n}$, notée $p^\rightarrow \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}_t | \mathcal{X}_{t-1} \cup \dots \cup \mathcal{X}_{t-n}}$. Dans ce cas, le théorème de factorisation donne pour tout $(\mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-n}) \in (\mathcal{X}_t, \mathcal{X}_{t-1} \cup \dots \cup \mathcal{X}_{t-n})^*$

$$p^\rightarrow(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-n}) = \prod_{d=1}^D p_{t,d}^\rightarrow(x_{t,d} | \text{pa}(x_{t,d})), \quad t > n. \quad (1.13)$$

D'après l'hypothèse markovienne d'ordre n , les parents d'une variable $X_{t,d}$ quelconque se trouvent nécessairement entre les tranches t et $t-n$ lorsque $t > n$.

Lorsque le modèle de transition ne dépend pas de t , c'est-à-dire si pour tout d , $p_{t,d}^\rightarrow = p_d^\rightarrow$, le n -MGPM est dit homogène.

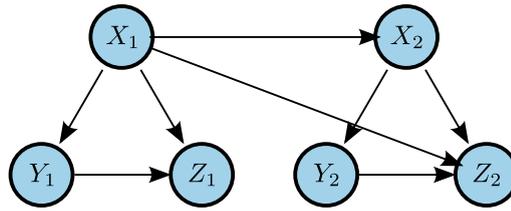
La distribution jointe du vecteur aléatoire $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}$, notée $p \in \mathcal{L}^{\bigcup_{t=1}^T \mathcal{X}_t}$, vérifie alors pour tout $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) \in (\bigcup_{t=1}^T \mathcal{X}_t)^*$,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_T) &= p^{\text{ini}}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \prod_{t=n+1}^T p^\rightarrow(\mathbf{x}_t | \mathbf{x}_{t-1}, \dots, \mathbf{x}_{t-n}) \\ &= \prod_{t'=1}^n \prod_{d=1}^D p_{t',d}^{\text{ini}}(x_{t',d} | \text{pa}(x_{t',d})) \prod_{t=n+1}^T \prod_{d=1}^D p_{t,d}^\rightarrow(x_{t,d} | \text{pa}(x_{t,d})). \end{aligned}$$

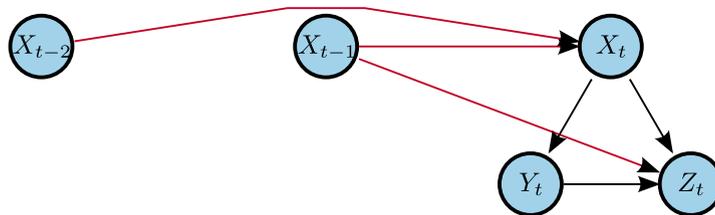
Il existe deux manières équivalentes de représenter graphiquement un n -MGPM. La première consiste à représenter les deux modèles graphiques \mathcal{M}^{ini} et $\mathcal{M}^{\rightarrow}$. Le modèle $\mathcal{M}^{\rightarrow}$ ayant la particularité de représenter une loi conditionnelle et non plus une loi jointe, les conventions graphiques suivantes sont utilisées :

- toutes les variables de la tranche t sont dessinées ;
- dans les tranches $t-1$ à $t-n$, seules les variables ayant au moins un arc vers une variable de la tranche t sont dessinées ;
- tous les arcs entrant dans une variable de la tranche t sont dessinés.

Les figures 1.2a et 1.2b illustrent cette méthode de représentation. La seconde possibilité pour représenter un n -MGPM est plus directe. Il suffit uniquement de dessiner les variables et les arcs sur $n+1$ tranches successives, le plus simple étant de représenter les tranches $t-n$ à t . La figure 1.3 donne un exemple de cette manière de procéder. La structure de modèle initial sous-jacent \mathcal{M}^{ini} se déduit en supprimant la dernière tranche. Le modèle de transition $\mathcal{M}^{\rightarrow}$ s'obtient en conservant uniquement les variables de la tranche t , ainsi que celles des tranches $t-n$ à $t-1$, possédant au moins un arc vers la tranche t . Remarquons toutefois que cette méthode ne permet pas de représenter des relations de dépendance différentes dans le modèle initial et dans le modèle de transition, ces derniers n'étant pas dissociés.



(a) Modèle graphique \mathcal{M}^{ini} représentant le vecteur aléatoire initial $(X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2)$.



(b) Modèle graphique $\mathcal{M}^{\rightarrow}$ représentant le vecteur aléatoire (X_t, Y_t, Z_t) conditionnellement au vecteur aléatoire (X_{t-2}, X_{t-1}) .

FIG. 1.2 – Modèle graphique probabiliste markovien d'ordre 2 représentant le vecteur aléatoire $(X_t, Y_t, Z_t)_{t \geq 1}$ à partir de son modèle initial en figure (a) et son modèle de transition en figure (b).

Remarque 1.2

Dans la définition 1.12, le vecteur aléatoire $\mathbf{X}_t = (X_{t,1}, \dots, X_{t,D})$ caractérisant le processus associé au n -MGPM à l'instant t est supposé à valeurs $\mathcal{X}_t^* = \mathcal{X}_{t,1} \times \dots \times \mathcal{X}_{t,D}$. Toutefois, dans

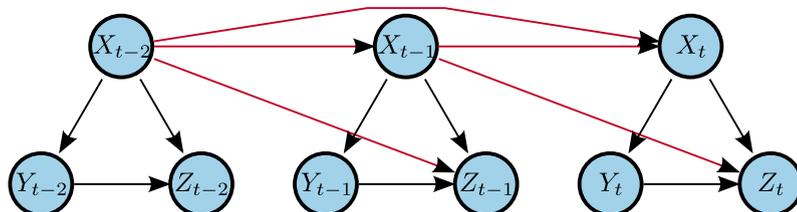


FIG. 1.3 – Modèle graphique probabiliste markovien d’ordre 2 représentant le vecteur aléatoire $(X_t, Y_t, Z_t)_{t \geq 1}$ à partir de trois tranches temporelles successives.

la suite de ce rapport, nous considérons toujours que pour tout t , $\mathcal{X}_{t,d} = \mathcal{X}_d$, autrement dit que le nombre de modalités de chaque variable aléatoire ne change pas au cours du temps. Malgré cela, l’indexation par t reste pertinente afin d’éviter certaines confusions. Ceci est particulièrement vrai en ce qui concerne la définition de LPC possédant des dépendances dans plusieurs tranches différentes.

Prenons par exemple la variable X_t située dans le modèle de transition représenté figure par la 1.4b. Sa LPC, notée p_{X_t} , appartient à $\mathcal{L}^{\{X_t\}}\{\mathcal{X}_{t-1}, \mathcal{A}_{t-1}, \mathcal{Z}_t\}$. La suppression de l’indexation par t conduirait à des difficultés de lecture et nécessiterait obligatoirement l’utilisation du graphe pour identifier sans erreur les relations de dépendance associées.

Une illustration de la définition 1.12 est proposée dans l’exemple 1.11 dans le cadre d’un processus markovien d’ordre $n = 1$.

Exemple 1.11 (MGPM d’ordre 1)

Il s’agit ici d’étendre l’exemple 1.8 en ajoutant une dépendance temporelle d’ordre un à la variable décrivant l’état du système. Le modèle est désormais constitué des variables A_t , Z_t , X_t et Y_t représentant respectivement la décision de maintenance, la cadence de production, l’état du système et la qualité de la production à l’instant t . Les relations de dépendance entre les variables sont :

- l’état du système courant dépend à la fois de son état précédent et de la décision de maintenance précédente ;
- la décision de maintenance courante dépend de l’état courant ;
- la qualité de la production dépend de l’état courant.

Ces relations sont modélisées avec un 1-MPGM dont la loi initiale et la loi de transition sont représentées respectivement dans les figures 1.4a et 1.4b.

Afin d’achever la définition du modèle, il est nécessaire de quantifier les relations de dépendance introduites graphiquement par l’intermédiaire de LPC. Notons tout d’abord que comparativement à l’exemple 1.8, seul l’ensemble de définition de la variable de maintenance a changé. En effet, pour tout t , $\mathcal{A}_t = \mathcal{A} = \{\text{aucune action, remettre à neuf}\}$ donne les deux décisions de maintenance possibles. Dans un premier temps, les LPC caractérisant le modèle initial sont :

$p_{X_1}^{ini}$				$p_{Y_1}^{ini}$		
		X_1		Y_1		
Z_1	ok	dégradé	panne	X_1	conforme	non conforme
normale	0.999	0.001	0.000	ok	0.99	0.01
rapide	0.990	0.010	0.000	dégradé	0.70	0.30
				panne	0.00	1.00

$p_{A_1}^{ini}$				p_{Z_1}	
		A_1		Z_1	
X_1	aucune action	remise à neuf		normale	rapide
ok		1.00	0.00	0.75	0.25
dégradé		0.50	0.50		
panne		0.00	1.00		

Les LPC associées au modèle de transition $p_{Z_t}^{\vec{}}$, $p_{Y_t}^{\vec{}}$ et $p_{A_t}^{\vec{}}$ sont supposées invariantes par rapport aux valeurs prises à la tranche initiale. La loi de transition associée à l'état du système est donnée par,

$p_{X_t}^{\vec{}}$					
			X_t		
X_{t-1}	A_{t-1}	Z_t	ok	dégradé	panne
ok	aucune action	normale	0.99	0.01	0.00
dégradé	aucune action	normale	0.00	0.90	0.10
panne	aucune action	normale	0.00	0.00	1.00
ok	remise à neuf	normale	1.00	0.00	0.00
dégradé	remise à neuf	normale	1.00	0.00	0.00
panne	remise à neuf	normale	1.00	0.00	0.00
ok	aucune action	rapide	0.95	0.04	0.01
dégradé	aucune action	rapide	0.00	0.70	0.30
panne	aucune action	rapide	0.00	0.00	1.00
ok	remise à neuf	rapide	1.00	0.00	0.00
dégradé	remise à neuf	rapide	1.00	0.00	0.00
panne	remise à neuf	rapide	1.00	0.00	0.00

Cette table de probabilité indique que si une action de remise à neuf est déclenchée à l'instant $t - 1$, le système repasse dans l'état ok quels que soient l'état précédent et la cadence de production. En revanche lorsque qu'il n'y a pas d'action prévue, le système se dégrade selon deux matrices de transition dépendant de la cadence de production.

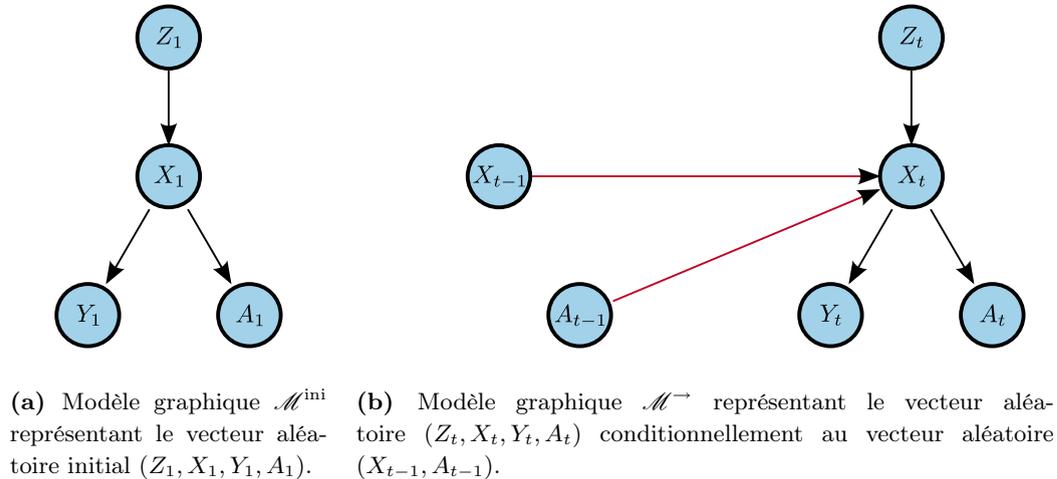


FIG. 1.4 – Modèle graphique probabiliste markovien d’ordre 1 représentant l’évolution d’un système de production caractérisé par sa loi initiale en figure (a) et sa loi de transition en figure (b).

Terminons cette introduction aux modèles graphiques probabilistes markoviens en soulignant la forte analogie avec le formalisme des chaînes de Markov. Si l’on ne tient pas compte des propriétés de factorisation caractérisées par les équations (1.12) et (1.13) dans la définition 1.12, cette dernière correspond exactement à la définition d’un processus markovien multivarié d’ordre n (Aven and Jensen 1999). Autrement dit, les n -MPGM sont des outils permettant d’affiner la représentation de tels processus en exploitant l’information sur les relations d’indépendance entre les variables. En reprenant les notations de la définition 1.12, il apparaît qu’un n -MPGM $(\mathcal{M}^{\text{ini}}, \mathcal{M}^{\rightarrow})$ est équivalent à la chaîne de Markov de distribution initiale p^{ini} et de loi de transition p^{\rightarrow} . L’intérêt d’un n -MPGM réside donc dans la possibilité de factoriser ces deux lois, permettant ainsi dans certains cas de réduire de manière importante la complexité spatiale du modèle.

1.4.2 Apprentissage des LPC

Les méthodes d’apprentissage concernant les LPC d’un n -MPGM s’inspirent largement des techniques développées dans le cas statique. En particulier, il n’y a aucune différence dans le cas où les informations disponibles sont complètes. Les LPC du modèle initial et du modèle de transition sont estimées séparément en appliquant la méthodologie présentée dans la partie 1.3.3. Le problème devient en revanche plus délicat lorsque les données sont incomplètes. À l’instar du cas statique, des méthodes reposant sur l’utilisation de l’algorithme EM ont été développées. L’apprentissage dans un modèle de Markov caché en est un exemple (Rabiner 2002). Le dernier chapitre de la thèse de Murphy (2002) illustre plus en détail cette problématique en présentant quelques cas d’applications concrètes.

1.4.3 Inférence

Généralités

Il est souvent d'usage dans la littérature (Murphy 2002) de fragmenter, comme dans le cas statique, le problème de l'inférence dans les n -MPGM selon la nature de la requête probabiliste considérée. Citons par exemple les problèmes de filtrage, lissage ou encore prédiction. Leur nom n'est d'ailleurs pas une coïncidence, il s'agit bien d'une extension des problèmes rencontrés en traitement du signal ou en analyse de séries temporelles dans le cadre des modèles graphiques probabilistes. Néanmoins ces requêtes particulières peuvent se ramener au problème plus général du calcul de la distribution d'un vecteur aléatoire $(\mathbf{X}_{r_t})_{1 \leq t \leq T}$ extrait du vecteur $(\mathbf{X}_t)_{1 \leq t \leq T}$ représenté par un n -MPGM.

Méthodes exactes

De nombreuses méthodes exactes ont été mises au point afin de résoudre ce problème. La plus simple consiste à "dérouler" le n -MPGM sur T tranches de façon à obtenir un grand réseau bayésien statique. N'importe quel algorithme d'inférence adapté au cas statique permet alors de calculer la distribution désirée. Cependant, cette approche implique le stockage de l'ensemble des LPC de transition sur $T - n$ tranches, augmentant du même facteur la complexité spatiale du modèle. L'intérêt même de l'approche markovienne est donc perdu ici, ce qui rend cette méthode très peu commode à utiliser en pratique.

Une autre technique, fondée sur la transformation du n -MGPM en sa chaîne de Markov équivalente, peut s'avérer intéressante dans certains cas. L'intérêt majeur de cette approche est la possibilité d'appliquer directement les nombreuses méthodes d'inférence développées pour les chaînes de Markov dans le cadre des modèles graphiques. Son point faible réside dans la nécessité de stocker la loi initiale p^{ini} et surtout la loi de transition p^{\rightarrow} dès qu'une requête d'inférence est traitée. Aussi, la propriété de factorisation des modèles graphiques n'est plus utilisée, entraînant souvent une explosion de la complexité spatiale.

Une manière de réduire la complexité spatiale lors de l'inférence consiste à exploiter la propriété de Markov associée au n -MGPM. Autrement dit, tout raisonnement probabiliste dans la tranche t est possible dès que la distribution jointe des variables des tranches $t - n$ à $t - 1$ ou des tranches $t + 1$ à $t + n$ est connue. On appelle alors distribution de la frontière gauche (resp. droite) à l'instant t , la loi jointe $p_{t-}^{\text{fr}} = P(\mathbf{X}_{t-n}, \dots, \mathbf{X}_{t-1})$ (resp. $p_{t+}^{\text{fr}} = P(\mathbf{X}_{t+1}, \dots, \mathbf{X}_{t+n})$) des variables des tranches $t - n$ à $t - 1$ (resp. $t - n$ à $t - 1$). Par conséquent, p_{t-}^{fr} (resp. p_{t+}^{fr}) est définie sur le domaine $\mathcal{L}^{\mathcal{X}_{t-n} \cup \dots \cup \mathcal{X}_{t-1}}$ (resp. $\mathcal{L}^{\mathcal{X}_{t+1} \cup \dots \cup \mathcal{X}_{t+n}}$). Zweig (1996) a proposé l'algorithme de la frontière reposant sur la mise à jour pour chaque tranche t , de l'une des deux distributions de frontière afin d'effectuer l'inférence dans la tranche $t + 1$. Pour ce faire, n'importe quel algorithme d'inférence statique peut être utilisé. L'avantage de cette approche provient du fait qu'ici la factorisation du modèle de transition est effectivement mise à profit, réduisant ainsi la complexité spatiale. Toutefois cette méthode reste particulièrement sensible à l'ordre n représentant la profondeur des dépendances passées.

Une amélioration de la méthode précédente est possible en affinant la propriété de Markov dans le cadre n -MGPM [Darwiche \(2001\)](#). En effet, il est possible de montrer que seule l'observation d'une partie des variables appartenant aux tranches $t-n$ à $t-1$ est nécessaire pour assurer l'indépendance entre le passé et le futur du processus. Ces variables constituent ce que l'on appelle l'interface du n -MPGM.

Définition 1.13 (Interface d'un n -MGPM)

Soit $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 1}$ un vecteur aléatoire dont la distribution est représentée par un n -MGPM.

On appelle alors interface gauche de la tranche t le vecteur aléatoire, noté $\mathbf{X}_{t^-}^{int}$, composé des variables des tranches $t-n$ à $t-1$ ayant un lien de dépendance avec une variable de la tranche t . On note en général $p_{t^-}^{int} = P(\mathbf{X}_{t^-}^{int})$ la distribution de l'interface gauche de la tranche t , et $\mathcal{L}^{\mathbf{X}_{t^-}^{int}}$ son domaine.

De même, on appelle interface droite de la tranche t le vecteur aléatoire, noté $\mathbf{X}_{t^+}^{int}$, composé des variables des tranches $t+1$ à $t+n$ ayant un lien de dépendance avec une variable de la tranche t . On note $p_{t^+}^{int} = P(\mathbf{X}_{t^+}^{int})$ la distribution de l'interface droite de la tranche t , et $\mathcal{L}^{\mathbf{X}_{t^+}^{int}}$ son domaine.

Par exemple dans le 1-MGPM de la figure [1.4b](#), l'interface à gauche de la tranche t est le vecteur (X_{t-1}, A_{t-1}) et l'interface droite est le vecteur constitué d'une seule variable X_{t+1} .

Le théorème suivant énonce les résultats en matière d'indépendance conditionnelle portés par les variables constituant l'interface gauche et l'interface droite.

Théorème 1.4

Soit un vecteur aléatoire $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 1}$ dont la distribution est représentée par un n -MGPM. On note respectivement $\mathbf{X}_{t^-}^{int}$ et $\mathbf{X}_{t^+}^{int}$ l'interface droite et l'interface gauche du n -MGPM de la tranche t . Alors pour tout $t > n$,

$$\mathbf{X}_{t-n-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t^-}^{int},$$

et pour tout $t \geq 1$,

$$\mathbf{X}_t \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_{t+n+1} | \mathbf{X}_{t^+}^{int}.$$

La démonstration du théorème est donnée par [Darwiche \(2001\)](#) et [Murphy \(2002\)](#) dans le cas respectivement de l'interface gauche et droite. Ce résultat permet de réduire la complexité spatiale lors de l'inférence dans un n -MPGM. Il n'est plus nécessaire de mettre à jour la distribution d'une frontière à chaque tranche, mais uniquement celle d'une interface. L'algorithme [1.3](#) présente une méthode d'inférence visant à calculer la distribution d'un vecteur aléatoire \mathbf{X}_{r_t} extrait de \mathbf{X}_t , et ce pour tout $t \geq 1$. Cette méthode repose sur le théorème [1.4](#) et sur une procédure d'inférence statique quelconque, notée $\mathcal{A}_{inf}^{statique}$. Cette dernière est supposée permettre le calcul de la distribution d'une requête quelconque à partir d'un ensemble de LPC caractérisant la factorisation d'une loi jointe. Notons que la méthode d'élimination présentée dans l'algorithme [1.1](#) satisfait parfaitement cette condition. Une application de l'algorithme [1.3](#) est proposée dans l'exemple [1.12](#).

Algorithme 1.3 : Algorithme de l'interface gauche.

Entrées :

1. Deux ensembles de LPC $\{p_{t',1}^{\text{ini}}, \dots, p_{t',D}^{\text{ini}}\}_{1 \leq t' \leq n}$ et $\{p_{t,1}^{\rightarrow}, \dots, p_{t,D}^{\rightarrow}\}_{n+1 \leq t \leq T}$ représentant respectivement le modèle initial et le modèle de transition d'un n -MGPM représentant la loi d'un vecteur aléatoire $(X_{t,1}, \dots, X_{t,D})_{1 \leq t \leq T}$.
2. Un algorithme d'inférence pour MGP statique $\mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}$ permettant de calculer la loi d'un vecteur \mathbf{X}_r extrait d'un vecteur (X_1, \dots, X_K) dont la loi est caractérisée par un ensemble de LPC $\{p_k\}_{1 \leq k \leq K}$. Autrement dit, $\mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}(\{p_k\}_{1 \leq k \leq K}, \mathbf{X}_r) = P(\mathbf{X}_r)$.
3. Une suite de requêtes $(\mathbf{X}_{r_1}, \dots, \mathbf{X}_{r_T})$ de longueur T .

Sortie : La suite des distributions $P(\mathbf{X}_{r_1}), \dots, P(\mathbf{X}_{r_T})$ correspondant aux requêtes demandées.

```
// Calcul des requêtes impliquant uniquement les LPC initiales
```

```
pour chaque  $t' \in \{1, \dots, n\}$  faire
```

```
  |  $P(\mathbf{X}_{r_{t'}}) \leftarrow \mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}(\{p_{t',1}^{\text{ini}}, \dots, p_{t',D}^{\text{ini}}\}_{1 \leq t' \leq n}, \mathbf{X}_{r_{t'}});$ 
```

```
fin
```

```
// Calcul de l'interface gauche de la tranche  $n+1$ 
```

```
 $p_{(n+1)-}^{\text{int}} \leftarrow \mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}(\{p_{t',1}^{\text{ini}}, \dots, p_{t',D}^{\text{ini}}\}_{1 \leq t' \leq n}, \mathbf{X}_{(n+1)-}^{\text{int}});$ 
```

```
// Calcul des requêtes et mise à jour de la distribution d'interface
```

```
  pour  $t > n$ 
```

```
    pour chaque  $t \in \{n+1, \dots, T\}$  faire
```

```
      |  $\mathcal{P} \leftarrow \{p_{t-}^{\text{int}}\} \cup \{p_{t,1}^{\rightarrow}, \dots, p_{t,D}^{\rightarrow}\};$ 
```

```
      // Calcul de la requête
```

```
       $P(\mathbf{X}_{r_t}) \leftarrow \mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}(\mathcal{P}, \mathbf{X}_{r_t});$ 
```

```
      // Calcul de la distribution d'interface gauche suivante
```

```
      |  $p_{(t+1)-}^{\text{int}} \leftarrow \mathcal{A}_{\text{inf}}^{\text{statique}}(\mathcal{P}, \mathbf{X}_{(t+1)-}^{\text{int}});$ 
```

```
    fin
```

Exemple 1.12 (Inférence exacte dans un 1-MGPM)

Replaçons nous dans le cadre de l'exemple 1.11 et prenons comme objectif le calcul de la distribution de l'état du système et celle de la qualité des lots au cours du temps. L'algorithme 1.3 est appliqué aux LPC associés au 1-MGPM de la figure 1.4. L'ensemble des LPC initiales est donc $\{p_{Z_1}^{\text{ini}}, p_{X_1}^{\text{ini}}, p_{Y_1}^{\text{ini}}, p_{A_1}^{\text{ini}}\}$ et celui des LPC de transition $\{p_{Z_t}^{\rightarrow}, p_{X_t}^{\rightarrow}, p_{Y_t}^{\rightarrow}, p_{A_t}^{\rightarrow}\}$. L'interface gauche à la tranche t est constituée des variables X_{t-1} et A_{t-1} .

Les requêtes soumises à l'algorithme sont donc le calcul des lois de X_t puis de Y_t pour $t = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Au cours de son exécution, la méthode calcule à chaque tranche t la loi des requêtes et celle de l'interface gauche à partir de l'algorithme d'élimination. Les résultats numériques sont présentés dans les tables 1.1a et 1.1b pour les requêtes sur les variables X_t et Y_t respectivement. La table 1.1c donne l'évolution de la loi d'interface gauche au cours du temps.

le n -MGPM est discret et fini. Par analogie avec l'équation 1.10, la méthode d'échantillonnage d'un n -MPGM possède une complexité algorithmique en $\mathcal{O}(T \sum_{d=1}^D |\mathcal{X}_d|)$.

Algorithme 1.4 : Méthode d'échantillonnage dans un n -MGPM.

Entrées :

1. Deux ensembles de LPC $\{p_{t',1}^{\text{ini}}, \dots, p_{t',D}^{\text{ini}}\}_{1 \leq t' \leq n}$ et $\{p_{t,1}^{\rightarrow}, \dots, p_{t,D}^{\rightarrow}\}_{n+1 \leq t \leq T}$ correspondant respectivement au modèle initial et au modèle de transition d'un n -MGPM représentant la loi d'un vecteur aléatoire $(X_{t,1}, \dots, X_{t,D})_{1 \leq t \leq T}$.
2. Un algorithme d'échantillonnage pour MGP statique $\mathcal{A}_{\text{échant}}^{\text{statique}}$ permettant de générer une réalisation d'un vecteur aléatoire (X_1, \dots, X_K) distribué selon un MGP caractérisé par l'ensemble de LPC $\{p_k\}_{1 \leq k \leq K}$. Autrement dit,
 $\mathcal{A}_{\text{échant}}^{\text{statique}}(\{p_k\}_{1 \leq k \leq K}) = (x_1, \dots, x_K)$.
3. La longueur T de la trajectoire à échantillonner.

Sortie : Un base d'exemples $(x_{t,d})_{\substack{1 \leq t \leq T \\ 1 \leq d \leq D}}$.

```
// Échantillonnage du modèle initial
pour chaque  $t' \in \{1, \dots, n\}$  faire
  |  $(x_{t',1}, \dots, x_{t',D}) \leftarrow \mathcal{A}_{\text{échant}}^{\text{statique}}(\{p_{t',1}^{\text{ini}}, \dots, p_{t',D}^{\text{ini}}\})$ ;
fin

// Échantillonnage du modèle de transition
pour chaque  $t \in \{n+1, \dots, T\}$  faire
  |  $(x_{t,1}, \dots, x_{t,D}) \leftarrow \mathcal{A}_{\text{échant}}^{\text{statique}}(\{p_{t,1}^{\rightarrow}, \dots, p_{t,D}^{\rightarrow}\})$ ;
fin
```

1.5 Conclusions

Ce chapitre fournit des éléments sur le formalisme des modèles graphiques probabilistes statiques et markoviens. L'exemple traité tout au long du chapitre illustre les possibilités offertes par ces outils en ce qui concerne la modélisation de systèmes complexes. L'intérêt principal de ce type d'approche provient du caractère intuitif induit par l'aspect graphique de la modélisation. En outre, les méthodes présentées pour résoudre les problèmes d'apprentissage et d'inférence probabiliste fournissent aux utilisateurs des outils d'analyses performants et génériques. Ceci permet d'expliquer en partie l'engouement actuel pour les modèles graphiques probabilistes que ce soit en intelligence artificielle, pour l'aide au diagnostic en général ou encore en sûreté de fonctionnement.

L'utilisation de ce type d'outils paraît donc pertinente pour le problème de modélisation de la maintenance en général et de la voie ferrée en particulier. L'apprentissage d'un processus de vieillissement, son intégration dans un modèle de maintenance et enfin le calcul d'indicateurs de la fiabilité ou le coût du système sont des tâches complexes, mais accessibles aux modèles graphiques comme la suite de ce document le démontre.

Le chapitre suivant met l'accent sur le problème de la modélisation de la dégradation

d'un système. Pour ce faire et de par leur formalisme approprié, les modèles graphiques probabilistes markoviens y jouent un rôle important. Il y est question en particulier d'un 1-MPGM spécifique pour la modélisation des processus de dégradations complexes.

Chapitre 2

Modèles Graphiques de Durée

Sommaire

2.1	Introduction	52
2.2	Description graphique	54
2.3	Description probabiliste	55
2.3.1	Distribution initiale des états du système	56
2.3.2	Distribution initiale des temps de séjour	56
2.3.3	Politique d'action	59
2.3.4	Modèle de transition des états du système	59
2.3.5	Modèle de transition du temps de séjour	62
2.3.6	Remarques	64
2.4	Apprentissage des LPC et simulation de trajectoire	67
2.4.1	Données attendues	68
2.4.2	Estimation du maximum de vraisemblance	68
2.4.3	Simulation de trajectoires	69
2.5	Inférence probabiliste exacte	71
2.5.1	Probabilité d'une trajectoire	71
2.5.2	Calcul naïf	73
2.5.3	Calcul <i>ad hoc</i>	74
2.6	Application à l'étude de la fiabilité	77
2.6.1	MGD et mesures de fiabilité	77
2.6.2	Illustration	78
2.7	Conclusions	85

2.1 Introduction

Ce chapitre aborde le problème de la modélisation d'un système dynamique (Howard 2007a) à états discrets et finis dans le cadre des modèles graphiques probabilistes. Le terme système dynamique conserve le sens donné au début de la partie 1.4. Les qualificatifs discret et fini indiquent que l'espace des états doit être un ensemble dénombrable et fini. L'objectif de ce chapitre concerne en particulier la modélisation :

- des temps qui s'écoulent entre deux événements (ex : durée de vie d'un individu ou d'un système physique, durée entre le déclenchement d'une maladie et la guérison, durée d'un épisode de chômage, durée entre l'établissement d'un prêt et une défaillance de remboursement...);
- des transitions entre deux événements (ex : transition entre deux états de fonctionnement pour un système de production industriel, transition entre les différents stades d'une maladie, changement comportemental d'un individu au cours d'une partie de poker...).

La figure 2.1 donne un exemple d'évolution d'un système dynamique à trois états au cours du temps. On parle en général d'une trajectoire du système. La question est de proposer un modèle capable d'exploiter au mieux l'information contenue dans les trajectoires observées d'un système (transitions et temps de séjour dans chaque état). La problématique soulevée ici est très générale et trouve des applications dans de nombreux domaines tels que la biologie, la médecine, la démographie, l'économie, la finance... Ce document aborde ce problème dans le cadre de la sûreté de fonctionnement. Toutefois, les développements réalisés sont aisément transposables dans de nombreux domaines connexes.

Il existe de nombreux travaux traitant de l'analyse de la fiabilité dans la littérature. Des outils tels que les chaînes de Markov (Aven and Jensen 1999) sont bien adaptés pour la modélisation des transitions dans un système multi-états. L'inconvénient majeur de cette approche reste la contrainte implicite sur les temps de séjour dans les états du système. Dans ce cas, ces derniers sont nécessairement distribués géométriquement (ou exponentiellement en temps continu). Pour dépasser cette limitation les modèles semi-markoviens (Limnios and Oprisan 2001) ont été développés permettant de spécifier explicitement des lois de temps de séjour dans chacun des états. D'autre part le modèle de Cox (1972) ou plus généralement un modèle à hasards proportionnels (Kay 1977) sont des outils intéressants dès qu'il s'agit d'analyser l'influence de variables contextuelles sur la dégradation du système. Les méthodes citées précédemment fournissent des outils d'analyses performants lorsque le système étudié reste de taille raisonnable. Elles possèdent en outre l'avantage d'être flexibles sur leurs conditions d'utilisation (temps discret/continu, variables discrètes/continues). En revanche, ces approches sont difficilement applicables aux grands systèmes caractérisés par un grand nombre de variables interdépendantes.

Par ailleurs, de récentes études reposant sur l'utilisation de MGP se sont avérées pertinentes pour représenter les systèmes dynamiques et étudier leur fiabilité. En effet, le fort potentiel des MGP en matière de modélisation permet de représenter relativement intuitivement des systèmes complexes en décrivant leur comportement stochastique local. Ce gain de flexibilité en matière de représentation se fait néanmoins au détriment de conditions d'utilisation parfois plus restrictives, notamment la nécessité de travailler en temps discret. Boudali and

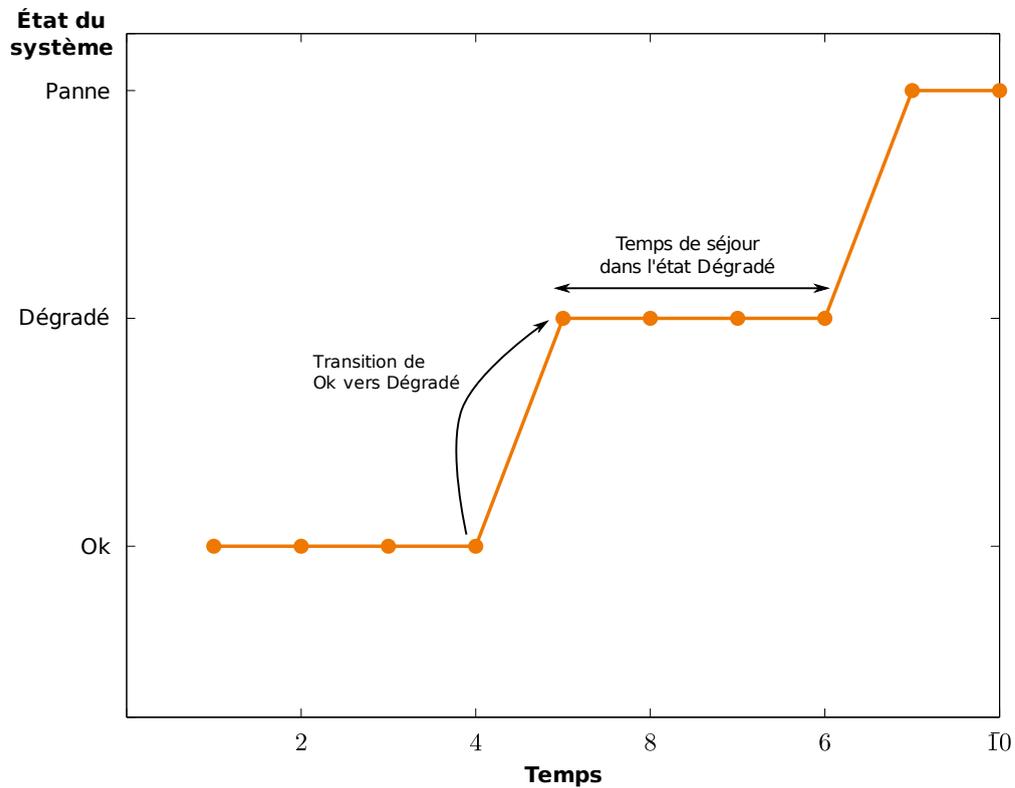


FIG. 2.1 – Évolution de l'état d'un système dynamique au cours du temps (trajectoire du système sur dix pas de temps).

Dugan (2005) et Celeux et al. (2006) ont donné des exemples d'études de fiabilité sur des systèmes composés de nombreuses variables interdépendantes à partir de MGP statiques. Langseth and Portinale (2007) et Montani et al. (2006) ont montré qu'il était possible de représenter les arbres de défaillance (Vesely et al. 1981) avec un MGP. Weber and Jouffe (2003) ont utilisé les Modèles Graphiques Probabilistes Markoviens d'ordre un (1-MGPM) afin de modéliser des chaînes de Markov dépendant de variables exogènes pour étudier la fiabilité d'un système dynamique à temps discret en tenant compte de son contexte. L'intérêt majeur de cette technique est la possibilité de représenter de grands systèmes dont l'aspect dynamique est géré localement par des chaînes de Markov. Bien que suffisante dans certains cas, cette approche souffre de la limitation liée au temps de séjour géométrique. Dans le cadre d'un problème d'apprentissage dans les modèles de Markov cachés, Murphy (2002) a proposé d'introduire explicitement une variable de temps de séjour associée à l'état des variables cachées, l'objectif étant d'améliorer les procédures d'apprentissage en tenant compte de l'information sur les durées passées dans chaque état. Toutefois l'ajout de ces variables de durée engendre souvent une complexité spatiale importante de sorte que les algorithmes d'inférence exacte génériques dédiés aux MGPM voient leur performance chuter significativement.

Dans ce chapitre, nous introduisons un 1-MGPM discret et fini particulier s’inspirant des modèles à variables de durée proposés par [Murphy \(2002\)](#). Cette structure a pour vocation de représenter l’évolution d’un système multi-états dont les lois de temps de séjour sont quelconques. Cette structure prévoit également la prise en compte d’actions agissant éventuellement sur le système au cours du temps. La description graphique et probabiliste de ce 1-MGPM, que nous appelons Modèle Graphique de Durée (MGD), est abordée respectivement dans la partie 2.2 et la partie 2.3. Par la suite, nous mettons l’accent sur le problème de l’apprentissage et de la simulation de données pour un MGD dans la partie 2.4. Dans la partie 2.5, nous décrivons une méthode d’inférence probabiliste efficace dédiée à cette structure particulière. Enfin, une comparaison empirique sur l’évaluation de la fiabilité d’un système représenté à partir d’un MGD et à partir d’une Chaîne de Markov (CM) est proposée dans la partie 2.6.

2.2 Description graphique

Un Modèle Graphique de Durée (MGD) est un 1-MGPM discret et fini particulier dont la structure graphique est donnée en figure 2.2. Cette structure est désignée dans la suite du document par structure MGD. Ce modèle s’articule autour des variables aléatoires X_t , S_t et A_t à valeurs respectivement dans les ensembles \mathcal{X} , \mathcal{S} et \mathcal{A} . Les variables X_t , S_t et A_t représentent respectivement à l’instant t l’état du système, le temps de séjour restant dans cet état et l’action sélectionnée. L’examen du graphe associé à un MGD montre qu’à une tranche t quelconque l’état du système X_t dépend à la fois de l’état précédent X_{t-1} , du temps de séjour précédent S_{t-1} et de l’action sélectionnée au pas précédent A_{t-1} . Ces relations permettent de contrôler les transitions entre les états par l’intermédiaire des temps de séjour et de l’action sélectionnée. Le modèle de transition de l’état du système est détaillé dans la partie 2.3.4. Le temps de séjour courant S_t dépend des variables X_{t-1} , S_{t-1} , A_{t-1} et de l’état courant X_t . Ces relations ont pour objectif de maintenir une cohérence dans le décompte des temps de séjour dans un état donné et d’initialiser un temps de séjour dans l’état courant du système lorsqu’une transition a eu lieu. Le mécanisme probabiliste sous-jacent est décrit dans la partie 2.3.5. L’action A_t est sélectionnée conditionnellement à l’état courant X_t . Ceci permet de spécifier une politique d’action impactant sur l’état du système (cf. partie 2.3.3).

Les relations de dépendance engendrées par ce modèle donnent lieu à une généralisation de celles obtenues par une Chaîne de Markov (CM). En effet, l’état courant ne dépend plus uniquement de l’état précédent. Le processus $(X_t)_{t \geq 1}$ n’est donc pas markovien. Par construction seul le processus $(X_t, S_t, A_t)_{t \geq 1}$ est effectivement markovien. Dans la littérature probabiliste, ce type de processus est qualifié de semi-markovien ([Howard 2007b](#)). D’après la définition 1.13, les variables formant respectivement l’interface gauche et l’interface droite à l’instant t sont $\mathbf{X}_t^{\text{int}-} = (X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$ et $\mathbf{X}_t^{\text{int}+} = (X_{t+1}, S_{t+1})$. Le théorème 1.4 appliqué à un MGD s’écrit alors :

$$X_{t-2}, S_{t-2}, A_{t-2} \perp\!\!\!\perp X_t, S_t, A_t | X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}, \quad (2.1)$$

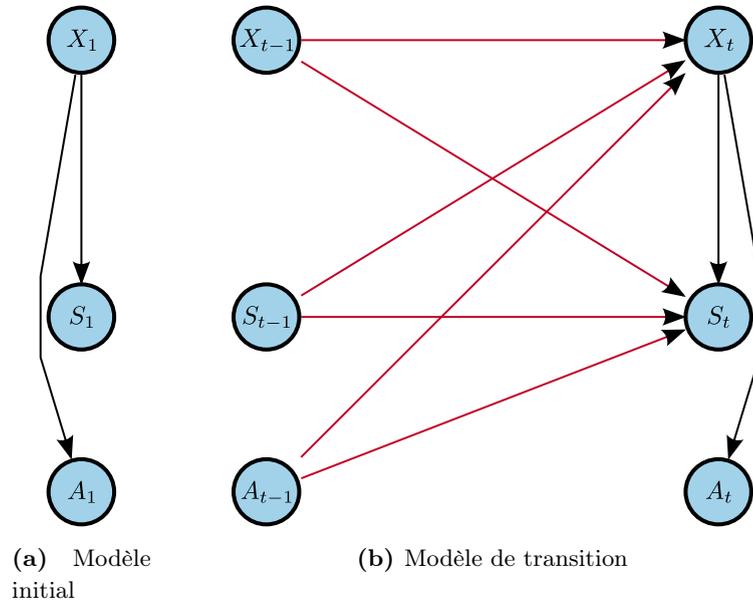


FIG. 2.2 – Structure du 1-MGPM associé à un MGD (structure MGD). X_t , S_t et A_t représentent respectivement à l’instant t , l’état du système, le temps de séjour restant et l’action sélectionnée. Les figures (a) et (b) donnent respectivement les structures du modèle initial et du modèle de transition.

et

$$X_t, S_t, A_t \perp\!\!\!\perp X_{t+2}, S_{t+2}, A_{t+2} | X_{t+1}, S_{t+1} \quad (2.2)$$

Le théorème de factorisation dans les n -MGPM associé à l’équation (2.1) conduit à la définition récursive suivante pour l’interface gauche :

$$P(X_t, S_t, A_t) = \begin{cases} P(X_1)P(S_1|X_1)P(A_1|X_1) & t = 1 \\ \sum_{\substack{X_{t-1}, S_{t-1} \\ A_{t-1}}} [P(X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})P(X_t|X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}) \\ P(S_t|X_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}, X_t)]P(A_t|X_t) & t \geq 2 \end{cases} \quad (2.3)$$

Lors de l’utilisation de l’algorithme d’inférence exacte 1.3 sur un MGD, le calcul précédent est effectué à chaque tranche t . Toutefois, la complexité spatiale de ce modèle (cf. table 2.1) ne permet pas toujours de se contenter d’une telle méthode générique. Dans la partie 2.5, un algorithme d’inférence *ad hoc* est proposé permettant d’accélérer significativement le temps de calcul en exploitant les spécificités probabilistes des MGD.

2.3 Description probabiliste

Les paragraphes suivants abordent les mécanismes probabilistes d’un MGD. Il s’agit donc de détailler la construction des LPC intervenant dans la factorisation du modèle initial

et du modèle de transition. Pour des raisons d'unification du formalisme, une description probabiliste des états, des temps de séjour et des actions est systématiquement utilisée.

2.3.1 Distribution initiale des états du système

La distribution initiale de l'état du système décrit la situation dans laquelle il se trouve à $t = 1$. On note $\alpha_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}_1}$ la LPC correspondante où \mathcal{X} désigne l'ensemble des états possibles et $\{\mathcal{X}\}_1$ son domaine. Rappelons que $|\mathcal{X}|$ désigne le cardinal de l'ensemble \mathcal{X} et donc ici le nombre des états possibles pour le système. Mathématiquement, la LPC est définie pour tout $x \in \mathcal{X}$ par

$$P(X_1 = x) = \alpha_1(x), \quad (2.4)$$

où $\alpha_1(x)$ donne la probabilité que le système se trouve initialement dans l'état x . La LPC α_1 étant définie sur une seule dimension, il est possible de la représenter sous la forme d'un vecteur stochastique¹ de $|\mathcal{X}|$ éléments. La complexité spatiale de cette LPC est donnée par $CS(\alpha_1) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|)$ (cf. définition 1.6).

Exemple 2.1

Reprenons l'exemple 1.11 en laissant pour l'instant de côté les variables représentant la cadence Z et la qualité Y de la production. L'objet de cet exemple et de ceux qui suivront tout au long de cette partie est d'illustrer comment appliquer un MGD à la modélisation du processus de dégradation d'un système simple.

La variable X_t représente l'état de la machine de production à valeur dans l'ensemble $\mathcal{X} = \{\text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$. Considérons par exemple que la machine est neuve à l'instant initial de sorte que $\alpha_1 = P(X_1)$ vérifie :

α_1		
X_1		
ok	$dégradé$	$panne$
1	0	0

2.3.2 Distribution initiale des temps de séjour

La LPC associée à la variable des temps de séjour S_1 caractérise la distribution des différentes durées que le système peut passer dans chacun des états $x \in \mathcal{X}$. La variable S_1 est à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, T_S\}$ où T_S désigne la durée maximum possible (en unités de temps) dans chaque état. Cette LPC est notée $F_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{S}\}_1|\{\mathcal{X}\}_1}$ et vérifie pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \mathcal{S}$

$$P(S_1 = s|X_1 = x) = F_1(x, s), \quad (2.5)$$

¹Un vecteur stochastique est un vecteur composé d'éléments de $[0, 1]$ dont la somme égale 1.

où $F_1(x, s)$ correspond à la probabilité de rester s unités de temps dans l'état x . La LPC $F_1(x, s)$ est assimilable à une matrice stochastique² de $|\mathcal{X}|$ lignes et $|\mathcal{S}| = T_S$ colonnes. Sa complexité spatiale, notée $CS(F_1)$, est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S)$.

Le rôle de cette distribution consiste à caractériser le comportement dynamique de chacun des états du système. La possibilité de spécifier des lois de temps de séjour quelconques, mais toujours discrètes et finies, permet de s'affranchir de la contrainte géométrique liée aux CM. Notons que dans ce cadre de travail les lois ne doivent pas nécessairement posséder une forme analytique spécifique pourvu qu'une masse de probabilité soit donnée pour chaque temps de séjour $s \in \mathcal{S}$, et ce, pour chaque état $x \in \mathcal{X}$. Lorsque des données de retour d'expérience sont disponibles, la phase d'apprentissage de F_1 (cf. partie 2.4) peut alors se faire sans *a priori*, évitant ainsi les problèmes induits par un mauvais choix de modèle.

Exemple 2.2

Il s'agit à présent d'ajouter une variable de temps de séjour, notée S_t , au modèle de l'exemple 1.11. L'unité de temps considérée ici est le trimestre. On suppose également que des données de retour d'expériences sont disponibles indiquant qu'aucune machine n'est restée plus de trois ans dans l'état *ok*. La borne T_S est donc fixée à 12 trimestres ce qui implique que la variable S_t est à valeurs dans le domaine $\mathcal{S} = \{1, 2, \dots, 12\}$. Il ne reste plus qu'à fournir une distribution de temps de séjour pour chacun des états $x \in \{\text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$. Prenons par exemple les valeurs suivantes :

		F_1											
		S_1											
X_1		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>ok</i>		0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
<i>dégradé</i>		0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
<i>panne</i>		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Les valeurs numériques précédentes révèlent que le système a plutôt tendance à sortir de l'état *ok*, soit autour du premier ou du deuxième trimestre de fonctionnement (défauts de jeunesse), soit au bout de deux ans environ (défauts de vieillesse). Une fois en mode dégradé le système change rapidement d'état puisque dans 90% des cas le temps de séjour avant une transition est de un ou deux trimestres. Le temps de séjour dans l'état *panne* est considéré ici comme étant déterministe et fixé à la valeur maximale. Nous verrons dans l'exemple 2.4, traitant du modèle de transition des états du système, que ce choix n'a pas réellement d'importance car l'état *panne* est un état absorbant.

Notons néanmoins que dans certaines situations (par exemple, peu ou pas de données) il est utile de travailler à partir d'une loi de durée définie analytiquement. La plupart des lois classiquement utilisées (ex : loi exponentielle, loi de Weibull, loi de Pareto ...) sont définies sur un support continu et infini (en général \mathbb{R}^+) du fait de l'homogénéité fréquente

²Une matrice stochastique est une matrice composée d'éléments de $[0, 1]$ où la somme de chaque ligne égale 1.

de la grandeur représentée à un temps. Ceci entraîne une contradiction avec l'hypothèse discrète et finie de l'approche proposée. Le problème lié à la continuité peut se résoudre en effectuant une discrétisation de la loi continue considérée ou en choisissant une loi de durée en temps discret. Les travaux de [Bracquemond \(2001\)](#) et [Bracquemond and Gaudoin \(2003\)](#) détaillent les deux alternatives précédentes. Pour ce qui est du support infini, la solution retenue consiste à effectuer une troncature de ce dernier par la borne T_S . Cette opération ne se fait pas sans perte d'information comme le souligne la remarque 2.1. La question est alors de choisir une borne T_S suffisamment grande afin de représenter correctement les lois de temps de séjour, et suffisamment petite afin de conserver une complexité spatiale raisonnable. De manière générale si *in fine* l'objectif est de réaliser des calculs d'inférence sur un horizon T , choisir $T_S = T$ assure un calcul sans perte de précision. Dans le cas où il existe $T_S < T$ tel que pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout $s > T_S$, $F_1(x, s) = 0$, tronquer la loi des temps de séjour par $T_S < T$ n'occasionne aucune perte d'information et garantit une meilleur complexité spatiale.

Remarque 2.1 (Troncature d'une loi de durée discrète et infinie)

Soit W une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, \dots\}$ de loi de probabilité p . Il est alors possible de définir la variable aléatoire discrète et finie S comme étant la troncature de W sur l'ensemble $\mathcal{S} = \{1, \dots, T_S\}$. La loi de S est notée $p^{T_S} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{S}\}}$ et vérifie pour tout $s \in \mathcal{S}$

$$p^{T_S}(s) = \begin{cases} p(s) & \text{si } 1 \leq s < T_S \\ 1 - \sum_{s'=1}^{T_S-1} p(s') & \text{si } s = T_S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Quantifions à présent l'erreur commise en effectuant la troncature précédente. Selon le critère de l'Erreur Absolue, notée EA , entre la loi originale et la loi tronquée, nous avons

$$\begin{aligned} EA(T_S) &= \sum_{s=1}^{\infty} |p(s) - p^{T_S}(s)| \\ &= \underbrace{\sum_{s=1}^{T_S} |p(s) - \underbrace{p^{T_S}(s)}_{=p(s)}|}_{=0} + |p(T_S) - \underbrace{p^{T_S}(T_S)}_{=1 - \sum_{s=1}^{T_S-1} p(s)}| + \sum_{s=T_S+1}^{\infty} |p(s) - \underbrace{p^{T_S}(s)}_{=0}| \\ &= 1 - \sum_{s=1}^{T_S} p(s) + \sum_{s=T_S+1}^{\infty} p(s) \\ EA(T_S) &= 2(1 - H(T_S)), \end{aligned} \tag{2.6}$$

où $H(T_S) = \sum_{s=1}^{T_S} p(s)$ correspond à l'évaluation de la fonction de répartition de W en T_S . Naturellement plus T_S est grand, plus $H(T_S)$ tend vers un et $EA(T_S)$ vers zéro.

Supposons que W suive une loi de Weibull discrète de type I ([Khan et al. 1989](#)). La loi de W est alors définie pour tout $s \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$p(s; \mu, \gamma) = H_{\mu, \gamma}(s - 1) - H_{\mu, \gamma}(s),$$

où $H_{\mu,\gamma}(s) = 1 - e^{-\left(\frac{s}{\mu}\right)^\gamma}$ correspond à l'expression de la fonction de répartition d'une loi de Weibull continue de paramètre d'échelle μ et de paramètre de forme γ . D'après l'équation (2.6) l'erreur commise en tronquant la variable sur le domaine $\{1, 2, \dots, T_S\}$ est égale à

$$EA(T_S) = 2e^{-\left(\frac{T_S}{\mu}\right)^\gamma}.$$

2.3.3 Politique d'action

La LPC associée à la variable A_t permet de décrire la politique d'action agissant sur le système. L'ensemble des actions possibles est noté \mathcal{A} . Ce dernier est partitionné entre l'ensemble des actions déclenchant une transition de l'état du système, noté \mathcal{A}^X , et celui des actions laissant l'état du système inchangé, noté $\mathcal{A}^{\bar{X}}$. Cette LPC est notée $G_t \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{A}\}_t | \{\mathcal{X}\}_t}$ et vérifie pour tout $x \in \mathcal{X}$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$P(A_t = a | X_t = x) = G_t(x, a). \quad (2.7)$$

La valeur $G_t(x, a)$ donne la probabilité de sélectionner l'action a sachant que le système se trouve dans l'état x . Cette LPC peut se mettre sous la forme d'une matrice stochastique de $|\mathcal{X}|$ lignes et $|\mathcal{A}|$ colonnes. Notons que lorsque la politique d'action ne dépend pas de t , c'est-à-dire $G_t = G$, on parle de politique homogène. La complexité spatiale de G_t , notée $CS(G_t)$, est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{A}|)$.

Exemple 2.3

Dans l'exemple 1.11, la LPC de la variable A_t définit la politique de maintenance du système en se basant sur l'observation de son état. Autrement dit, cette variable correspond à la variable d'action de la définition précédente, et $\mathcal{A} = \{\text{aucune action, remise à neuf}\}$. Les valeurs numériques sont identiques à celles présentées dans l'exemple 1.11, à savoir pour tout $t \geq 1$:

G_t		
A_t		
X_t	aucune action	remise à neuf
ok	1.00	0.00
dégradé	0.50	0.50
panne	0.00	1.00

Seule l'action remise à neuf est supposée avoir un impact sur l'état du système. Par conséquent $\mathcal{A}^X = \{\text{remise à neuf}\}$ et $\mathcal{A}^{\bar{X}} = \{\text{aucune action}\}$.

2.3.4 Modèle de transition des états du système

Dans un premier temps, nous abordons uniquement le modèle de transition des états du système. Pour plus de clarté, nous réservons la description du modèle de transition des

temps de séjour à la section 2.3.5. La LPC associée à la variable d'état du système X_t lorsque $t \geq 2$ caractérise la façon dont le système passe d'un état à un autre. Trois cas sont à distinguer selon le temps de séjour restant et l'action sélectionnée à l'instant précédent :

- (i) Si le temps de séjour à l'instant $t - 1$ est écoulé ($S_{t-1} = 1$), le système subit une transition. Si de plus l'action calculée n'agit pas sur le système ($A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}$), nous parlons de transition naturelle car cette dernière n'est pas la conséquence d'une action extérieure. Un nouvel état courant x est choisi à l'instant t par l'intermédiaire de la LPC de transition naturelle du système, notée $Q^{\text{sys}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}\}_{t-1}}$, vérifiant pour tous $x', x \in \mathcal{X}$,

$$P(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1} = 1, A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}) = Q^{\text{sys}}(x', x). \quad (2.8)$$

La valeur $Q^{\text{sys}}(x', x)$ correspond à la probabilité de passer de l'état x' à l'état x lors d'une transition naturelle. Cette LPC peut s'écrire sous la forme d'une matrice stochastique carrée de $|\mathcal{X}|$ lignes et $|\mathcal{X}|$ colonnes. En outre, la LPC Q^{sys} ne dépend pas de t , elle est donc homogène. Pour finir la complexité spatiale de Q^{sys} , notée $CS(Q^{\text{sys}})$, est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2)$.

- (ii) Si le séjour dans l'état courant n'est pas terminé ($S_{t-1} \geq 2$) et que l'action sélectionnée n'agit pas sur le système ($A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}$), celui-ci reste dans le même état. Dans ce cas la loi de transition est déterministe (cf. définition 1.8) et correspond à la LPC identité, notée $I \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}\}_{t-1}}$, vérifiant pour tous $x', x \in \mathcal{X}$,

$$P(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1} \geq 2, A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}) = I(x', x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = x' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.9)$$

La définition précédente assure, avec une probabilité de 1, que le nouvel état courant x soit égal à l'état précédent x' . La complexité spatiale de I est identique à celle de Q^{sys} , soit $CS(I) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2)$.

- (iii) Si l'action sélectionnée agit sur le système ($A_{t-1} \in \mathcal{A}^X$), une transition artificielle, par opposition à la transition naturelle, est déclenchée quel que soit le temps de séjour de l'état courant. Le nouvel état est alors choisi à partir de la loi de transition artificielle, notée $Q^{\text{act}} \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}^X\}_{t-1}}$, définie pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $a' \in \mathcal{A}^X$ par

$$P(X_t = x | X_{t-1} = x', S_{t-1}, A_{t-1} = a') = Q^{\text{act}}(x', a', x). \quad (2.10)$$

La valeur $Q^{\text{act}}(x', a', x)$ correspond à la probabilité de passer de l'état x' à l'état x sachant que l'action déclenchée au pas précédent était a' . Cette LPC peut s'écrire sous la forme d'une matrice stochastique de $|\mathcal{X}| |\mathcal{A}^X|$ lignes et $|\mathcal{X}|$ colonnes. La complexité spatiale de cette LPC, notée $CS(Q^{\text{act}})$, est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}^X|)$.

Le modèle de transition global associé à l'état du système est donc caractérisé par la LPC, notée $Q^{\rightarrow} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}\}_{t-1}}$, définie pour tous $x', x \in \mathcal{X}$, tout $s' \in \mathcal{S}$ et tout $a' \in \mathcal{A}$ par

$$Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) = \begin{cases} Q^{\text{sys}}(x', x) & \text{si } s' = 1 \text{ et } a' \in \mathcal{A}^{\bar{X}} \\ I(x', x) & \text{si } s' \geq 2 \text{ et } a' \in \mathcal{A}^{\bar{X}} \\ Q^{\text{act}}(x', a', x) & \text{si } a' \in \mathcal{A}^X \end{cases}. \quad (2.11)$$

Notons que si l'on calcule naïvement la complexité spatiale de Q^\rightarrow , il vient $CS(Q^\rightarrow) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{S}||\mathcal{A}|)$. Cette complexité diminue en tenant compte de la définition par morceaux donnée dans l'équation (2.11). L'espace nécessaire pour stocker Q^\rightarrow est alors égale à l'espace nécessaire pour stocker Q^{sys} , I et Q^{act} , soit

$$\begin{aligned} CS(Q^\rightarrow) &= CS(Q^{\text{sys}}) + CS(I) + CS(Q^{\text{act}}) \\ &= 2\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^X|) \\ CS(Q^\rightarrow) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^X|). \end{aligned}$$

La réduction d'espace ainsi engendrée est de l'ordre d'un facteur $|\mathcal{S}| = T_S$ ce qui est bien souvent non négligeable puisque la borne T_S a plutôt tendance à être importante (cf. partie 2.3.2).

Exemple 2.4

Il s'agit à présent de définir la LPC de transition naturelle et la LPC de transition artificielle associées à l'état de la machine de production considérée. Le système n'étant pas supposé auto-réparable, la LPC de transition naturelle possède deux contraintes :

1. Une transition vers un état moins dégradé est impossible. La matrice représentant cette loi est donc diagonale supérieure.
2. L'état panne est absorbant. Cela signifie qu'une fois entré dans cet état, le système ne peut plus en sortir par une transition naturelle. Seule une transition artificielle (ici une opération de maintenance) peut éventuellement modifier l'état du système.

Prenons par exemple la LPC suivante qui tient compte des contraintes précédentes :

		Q^{sys}		
		X_t		
X_{t-1}		ok	dégradé	panne
ok		0	0.9	0.1
dégradé		0	0	1
panne		0	0	1

Les valeurs numériques proposées indiquent qu'après un séjour dans l'état ok, le système entre dans 90% des cas dans l'état dégradé contre 10% dans l'état panne directement. Si le système est dans l'état dégradé, une transition naturelle conduit forcément dans l'état panne. Notons pour finir que la loi des temps de séjour associée à l'état panne n'a aucune importance ici. En effet l'état étant absorbant, quel que soit le temps de séjour sélectionné, le système reste en panne lors d'une transition naturelle. La distribution associée à la durée dans l'état panne proposée dans l'exemple 2.2 est donc totalement arbitraire.

La loi de transition artificielle intervient uniquement lors du déclenchement de l'action remise à neuf puisque $\mathcal{A}^X = \{\text{remise à neuf}\}$. On suppose dans ce cas que le système retourne dans l'état ok quel que soit l'état dans lequel il se trouve. La LPC Q^{act} est définie par :

		Q^{act}		
		X_t		
X_{t-1}	A_{t-1}	ok	dégradé	panne
ok	remise à neuf	1	0	0
dégradé	remise à neuf	1	0	0
panne	remise à neuf	1	0	0

Remarquons que la LPC de transition artificielle Q^{act} est souvent déterministe comme le montre l'exemple précédent, sans que cela soit une obligation.

Lorsque il n'y a ni transition naturelle, ni transition artificielle, le système reste dans le même état ce qui s'exprime ici par la LPC identité suivante :

		I		
		X_t		
X_{t-1}		ok	dégradé	panne
ok		1	0	0
dégradé		0	1	0
panne		0	0	1

2.3.5 Modèle de transition du temps de séjour

La LPC associée à la variable du temps de séjour S_t gère l'évolution du temps passé dans les états du système qu'une transition (naturelle ou artificielle) ait eu lieu, ou non, entre les tranches $t-1$ et t ($t \geq 2$).

- (i) Si une transition a eu lieu ($S_{t-1} = 1$ ou $A_{t-1} \in \mathcal{A}^X$), le système commence un nouveau séjour dans l'état sélectionné. La loi de ce temps de séjour est donnée par la LPC homogène, notée $F^{\text{sys}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{S}\}_t | \{\mathcal{X}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t$, vérifiant pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \mathcal{S}$,

$$P(S_t = s | X_{t-1} = x', S_{t-1} = 1 \text{ ou } A_{t-1} \in \mathcal{A}^X, X_t = x) = F^{\text{sys}}(x', x, s). \quad (2.12)$$

La valeur $F^{\text{sys}}(x', x, s)$ désigne la probabilité de passer s unités de temps dans l'état x sachant que le système se trouvait dans l'état x' . Cette LPC peut s'écrire sous la forme d'une matrice stochastique de $|\mathcal{X}|^2$ lignes et T_S colonnes. La complexité spatiale de F^{sys} , notée $CS(F^{\text{sys}})$, est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S)$.

Il est important de noter que toutes les remarques effectuées à propos de la LPC des temps de séjour initiaux F_1 (cf. partie 2.3.2) sont valables pour F^{sys} . L'unique différence entre ces deux LPC provient du fait que F^{sys} dépend également de l'état précédent x' . Il arrive fréquemment que cette dépendance soit omise pour éviter des problèmes de sur-paramétrisation, réduire la complexité ou encore lorsque peu de données sont disponibles pour l'apprentissage. Dans ce cas F^{sys} est identique à F_1 de sorte que pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \mathcal{S}$, $F^{\text{sys}}(x', x, s) = F_1(x, s)$.

- (ii) Si aucune transition ne s'est produite ($S_{t-1} \geq 2$ et $A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}$). Le temps de séjour courant est décompté d'une unité de manière déterministe. La LPC déterministe, notée $C \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{S}\}_t | \{\mathcal{S} \setminus \{1\}\}_{t-1}}$, vérifie pour tout $s' \in \{2, 3, \dots, T_S\}$ et tout $s \in \{1, 2, \dots, T_S\}$,

$$P(S_t = s | X_{t-1}, S_{t-1} = s', A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}, X_t) = C(s', s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s = s' - 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.13)$$

La définition précédente assure que si le temps de séjour restant à l'instant $t - 1$ est égale à $s' \geq 2$, à l'instant t ce dernier sera égale à $s' - 1$. La complexité spatiale de C , notée $CS(C)$, est en $\mathcal{O}(T_S^2)$.

Le modèle de transition global associé aux temps de séjour est donc caractérisé par la LPC, notée $F^{\rightarrow} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{S}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}\}_{t-1} \cup \text{set } \mathcal{X}_t}$, définie pour tous $x', x \in \mathcal{X}$, tous $s', s \in \mathcal{S}$ et tout $a' \in \mathcal{A}$ par

$$P(S_t = s | X_{t-1} = x', S_{t-1} = s', A_{t-1} = a', X_t = x) = F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) = \begin{cases} F^{\text{sys}}(x', x, s) & \text{si } s' = 1 \text{ ou } a' \in \mathcal{A}^{\bar{X}} \\ C(s', s) & \text{si } s' \geq 2 \text{ et } a' \in \mathcal{A}^{\bar{X}} \end{cases} \quad (2.14)$$

Notons qu'un stockage naïf de F^{\rightarrow} conduit à une complexité spatiale en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| T_S^2)$. A l'instar de Q^{\rightarrow} (cf. partie 2.3.4), il est possible de réduire cette complexité en stockant uniquement F^{sys} et C , soit

$$CS(F^{\rightarrow}) = CS(F^{\text{sys}}) + CS(C) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S) + \mathcal{O}(T_S^2) = \mathcal{O}(T_S(|\mathcal{X}|^2 + T_S)).$$

Exemple 2.5

De façon à conserver une certaine simplicité, la loi des temps de séjour pour $t \geq 2$ est supposée indépendante de l'état précédent et on pose pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \mathcal{S}$, $F^{\text{sys}}(x', x, s) = F_1(x, s)$. En poursuivant l'exemple 2.2, cela donne numériquement :

		F^{sys}											
		S_t											
X_{t-1}	X_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ok	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
dégradé	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
panne	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
ok	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
dégradé	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
panne	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
ok	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
dégradé	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
panne	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

La LPC déterministe assurant le décompte du temps de séjour correspond ici à

		C											
		S_t											
S_{t-1}		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2		1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3		0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4		0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
6		0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
7		0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
8		0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
9		0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
10		0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
11		0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
12		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0

2.3.6 Remarques

Complexité spatiale

D'après les descriptions données dans les paragraphes précédents, un MGD est un 1-MGPM possédant des mécanismes probabilistes singuliers. Cette spécificité provient des deux lois de transition qui ont la particularité d'être :

- définies par morceaux, réduisant ainsi la complexité spatiale du modèle ;
- en partie déterministe, offrant la possibilité d'accélérer les calculs d'inférence (cf. partie 2.5).

Un MGD est donc caractérisé par les LPC α_1 , F_1 , G_t , Q^{sys} , Q^{act} et F^{sys} . La table 2.1 propose un récapitulatif de la description probabiliste d'un MGD en précisant l'ordre des complexités spatiales sous-jacentes.

	LPC	Description	CS
Modèle initial	α_1	État du système	$\mathcal{O}(\mathcal{X})$
	F_1	Temps de séjour	$\mathcal{O}(\mathcal{X} T_S)$
Modèle de transition	Q^{sys}	Transition naturelle	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2)$
	Q^{act}	Transition artificielle	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2 \mathcal{A}^X)$
	I	Identité	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2)$
	F^{sys}	Temps de séjour	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2T_S)$
	C	Décompte	$\mathcal{O}(T_S^2)$
	G_t	Politique d'action	$\mathcal{O}(\mathcal{X} \mathcal{A})$

TAB. 2.1 – Détail de la complexité spatiale d'un MGD.

La complexité spatiale d'un MGD, notée $CS(\text{MGD})$, se déduit alors par addition des complexités locales. Il vient par conséquent

$$CS(\text{MGD}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S |\mathcal{A}| + T_S^2). \quad (2.15)$$

Lien avec les chaînes de Markov

D'un point de vue qualitatif, rappelons que la structure MGD est une généralisation de la structure CM. La différence entre ces deux structures se situe uniquement au niveau de la variable du temps de séjour. Par ailleurs, il est important de noter que tout résultat théorique établi pour les MGD s'applique aux CM. En effet, il est possible d'inhiber l'effet de la variable S_t de manière probabiliste afin de se ramener à une CM. Pour ce faire, il suffit de considérer un ensemble de temps de séjour \mathcal{S} réduit au singleton $\{1\}$. Par conséquent, seul un temps de séjour d'une unité de temps est autorisé, ce qui a pour effet de déclencher une transition naturelle à chaque pas de temps. Dès lors, le processus caractérisant l'évolution naturelle liée à l'état du système n'est plus contrôlé que par la loi initiale α et la LPC de transition naturelle Q^{sys} . Plus formellement, lorsque $\mathcal{S} = \{1\}$, les LPC F_1 et F^{sys} deviennent deux potentiels unitaires tels que pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, $F_1(\mathbf{x}, 1) = F^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}, 1) = 1$. Ces deux LPC n'influencent donc plus les calculs probabilistes dans ce cas. Enfin, de l'équation (2.15), nous en déduisons la complexité spatiale d'un MGD réduit à une CM en fixant $T_S = 1$. Nous obtenons alors

$$CS(\text{CM}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}|).$$

Illustration

Notons qu'il est bien évidemment possible d'ajouter des variables à la structure originale représentée en figure 2.2. Dans ce cas les LPC décrites précédemment doivent tenir compte des changements apportés par les relations de dépendance induites par la nouvelle structure graphique. L'exemple 2.6 et en particulier la figure 2.3 donnent une illustration où la structure MGD originale est complétée par deux variables : une variable Z_t relative au contexte du système et une variable Y_t relative à une décision de conformité de la production du système.

Exemple 2.6

La figure 2.3 représente le MGD associé à l'exemple 1.11. D'un point de vue graphique, seule la variable de temps de séjour a été ajoutée par rapport au modèle original donné en figure 1.4. Les différences se situent essentiellement dans la description probabiliste fournie dans les exemples de la partie 2.3.

Il est important de noter que la dépendance de l'état du système et des temps de séjour avec la cadence de production doit être prise en compte dans la définition des LPC. Autrement dit il est nécessaire de modifier les LPC α_1 , F_1 , Q^{sys} et F^{sys} de manière à définir le comportement du système en cadence normale et rapide. On suppose que les LPC proposées précédemment sont caractéristiques de la cadence normale. Complétons ces lois pour la cadence rapide en prenant par exemple les valeurs suivantes :

α_1			
X_1			
Z_1	ok	dégradé	panne
normale	1	0	0
rapide	1	0	0

F_1													
		S_1											
Z_1	X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
normale	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
rapide	ok	0.35	0.22	0.16	0.11	0.09	0.03	0.02	0.01	0.01	0	0	0
normale	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
rapide	dégradé	0.90	0.07	0.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0
normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Q^{sys}				
X_t				
X_{t-1}	Z_t	ok	dégradé	panne
ok	normale	0	0.9	0.1
dégradé	normale	0	0	1
panne	normale	0	0	1
ok	rapide	0	0.7	0.3
dégradé	rapide	0	0	1
panne	rapide	0	0	1

F^{sys}														
			S_t											
X_{t-1}	Z_t	X_t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
ok	normale	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
dégradé	normale	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
panne	normale	ok	0.20	0.12	0.08	0.04	0.04	0.06	0.08	0.12	0.16	0.08	0.02	0
ok	rapide	ok	0.35	0.22	0.16	0.11	0.09	0.03	0.02	0.01	0.01	0	0	0
dégradé	rapide	ok	0.35	0.22	0.16	0.11	0.09	0.03	0.02	0.01	0.01	0	0	0
panne	rapide	ok	0.35	0.22	0.16	0.11	0.09	0.03	0.02	0.01	0.01	0	0	0
ok	normale	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
dégradé	normale	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
panne	normale	dégradé	0.70	0.20	0.05	0.03	0.02	0	0	0	0	0	0	0
ok	rapide	dégradé	0.90	0.07	0.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0
dégradé	rapide	dégradé	0.90	0.07	0.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0
panne	rapide	dégradé	0.90	0.07	0.03	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ok	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
dégradé	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
panne	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
ok	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
dégradé	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
panne	normale	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Les tables de probabilités proposées précédemment retranscrivent le fait que le système se dégrade plus vite en cadence rapide qu'en cadence normale. Dans le premier cas les temps

de séjour sont en effet souvent plus courts et les transitions de l'état ok directement dans l'état panne sont plus fréquentes.

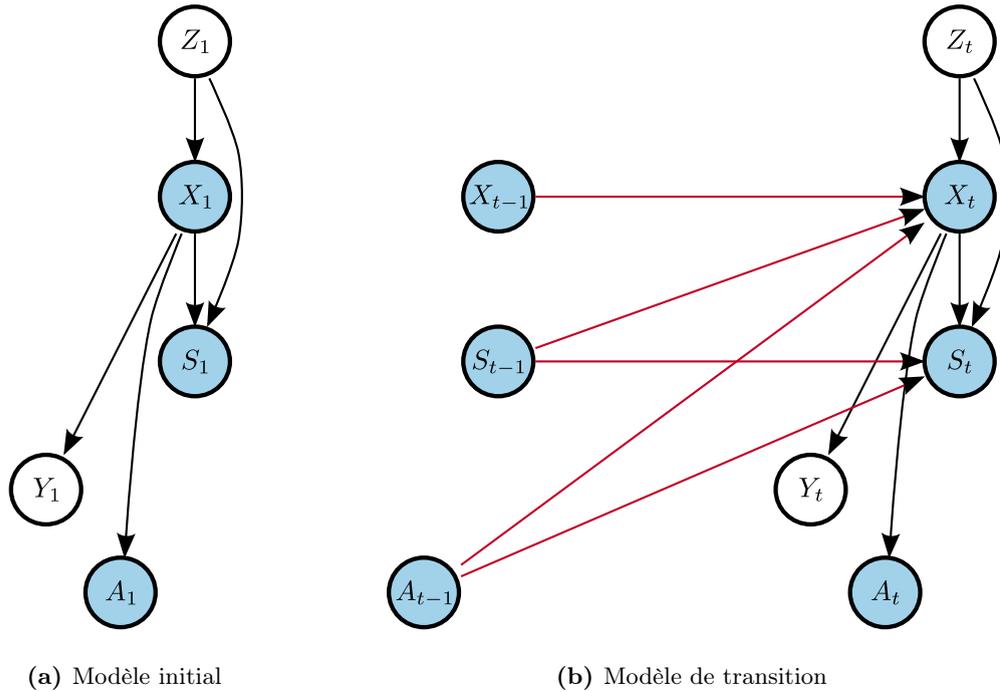


FIG. 2.3 – MGD associé au système de production introduit dans l'exemple 1.11. Les variables correspondant à une structure MGD originale sont colorées en bleu. Les figures (a) et (b) donnent respectivement les structures du modèle initial et du modèle de transition.

2.4 Apprentissage des LPC et simulation de trajectoire

Nous abordons à présent l'apprentissage des LPC à partir de données de retour d'expériences complètes et la simulation de données. Des éléments sur le format des données attendues sont présentés dans la partie 2.4.1. L'application de la méthode du maximum de vraisemblance (cf. partie 1.3.3) pour l'apprentissage des LPC associées à un MGD est détaillée dans la partie 2.4.2. Notons qu'ici la question se limite à l'apprentissage du processus d'évolution naturelle du système. L'estimation de la politique d'action et des transitions artificielles n'est pas traitée, car supposée comme étant des paramètres d'entrée du système. La partie 2.4.3 présente un algorithme de type Monte-Carlo pour simuler des trajectoires correspondant au système modélisé par un MGD.

2.4.1 Données attendues

L'apprentissage des LPC est réalisé à partir d'exemples de trajectoires naturelles issues du système étudié. Dans le cas des MGD, une trajectoire naturelle correspond à l'observation d'une séquence d'états du système et des temps de séjour associés sans tenir compte des transitions artificielles. Si l'on se place dans le domaine de la fiabilité, cela pourrait signifier que l'on observe le système vieillir sans jamais intervenir jusqu'à la panne.

Le nombre de trajectoires disponibles est noté K . Pour chaque trajectoire k , une séquence de N_k transitions naturelles est observée. Au cours de la n_k -ème transition, le nouvel état courant $x_{n_k} \in \mathcal{X}$ et son temps de séjour $s_{n_k} \in \{1, 2, \dots, T_S\}$ sont donnés. L'observation initiale du système correspond à la première transition. La structure des données attendues est illustrée dans la table 2.2.

	Transition	État courant	Temps de séjour
Trajectoire 1	1_1	x_{1_1}	s_{1_1}
	\vdots	\vdots	\vdots
	N_1	x_{N_1}	s_{N_1}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Trajectoire k	1_k	x_{1_k}	s_{1_k}
	\vdots	\vdots	\vdots
	N_k	x_{N_k}	s_{N_k}
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
Trajectoire K	1_K	x_{1_K}	s_{1_K}
	\vdots	\vdots	\vdots
	N_K	x_{N_K}	s_{N_K}

TAB. 2.2 – Suite de K trajectoires associées à l'évolution naturelle d'un système représenté par un MGD. La notation 1_k désigne l'indice de la première transition (état initial du système) de la k -ème trajectoire.

Exemple 2.7

La table 2.3 donne un exemple de trois trajectoires supposées issues du système de production décrit précédemment. Remarquons que l'information sur la cadence de production a été ajoutée de par son influence sur l'état et les temps de séjour du système.

2.4.2 Estimation du maximum de vraisemblance

Il s'agit à présent de calculer les estimations, notées $\hat{\alpha}_1$, \hat{F}_1 , \hat{Q}^{sys} et \hat{F}^{sys} , associées respectivement à l'état et aux temps de séjour initiaux, au modèle de transition naturelle des états et aux temps de séjour pour $t \geq 2$. La méthode du maximum de vraisemblance présentée

	Transition	Cadence	État courant	Temps de séjour (en trimestres)
Traj. 1	1	normale	ok	11
	2	normale	dégradé	2
	3	normale	panne	12
Traj. 2	1	rapide	ok	3
	2	rapide	panne	12
Traj. 3	1	rapide	ok	5
	2	normale	dégradé	3
	3	normale	panne	12

TAB. 2.3 – Trois trajectoires associées à l'évolution naturelle du système de production introduit initialement dans l'exemple 1.11. Dans ce contexte le nombre de trajectoires $K = 3$ et le nombre de transitions dans chaque trajectoire valent respectivement $N_1 = 3$, $N_2 = 2$ et $N_3 = 3$.

dans la partie 1.3.3 est appliquée aux données de la table 2.2. Pour ce faire les notations suivantes sont introduites pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \{1, \dots, T_S\}$:

- $N_x^{\text{ini}} = \sum_{k=1}^K \mathbb{I}(x_1 = x)$ correspond au nombre de fois où le système se trouvait initialement dans l'état x ;
- $N_{x,s}^{\text{ini}} = \sum_{k=1}^K \mathbb{I}(x_1 = x) \mathbb{I}(s_1 = s)$ correspond au nombre de fois où le système a passé s unités de temps dans l'état initial x ;
- $N_{x',x} = \sum_{k=1}^K \sum_{n_k=2}^{N_k} \mathbb{I}(x_{n_k-1} = x') \mathbb{I}(x_{n_k} = x)$ désigne le nombre de transitions entre les états x' et x ;
- $N_{x',x,s} = \sum_{k=1}^K \sum_{n_k=2}^{N_k} \mathbb{I}(x_{n_k-1} = x') \mathbb{I}(x_{n_k} = x) \mathbb{I}(s_{n_k} = s)$ désigne le nombre de fois où le système est resté s unités de temps dans l'état x alors qu'il se trouvait dans l'état x' .

En appliquant l'équation (1.5) au cas présent, les estimations du maximum de vraisemblance vérifient pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \{1, \dots, T_S\}$

$$\begin{aligned}
 \hat{\alpha}_1(x) &= \frac{N_x^{\text{ini}}}{K}, & \hat{F}_1(x, s) &= \frac{N_{x,s}^{\text{ini}}}{K}, \\
 \hat{Q}^{\text{sys}}(x', x) &= \frac{N_{x',x}}{\sum_{x' \in \mathcal{X}} N_{x',x}}, & \hat{F}^{\text{sys}}(x', x, s) &= \frac{N_{x',x,s}}{\sum_{x', x \in \mathcal{X}} N_{x',x,s}}.
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.4.3 Simulation de trajectoires

Le principe de la simulation d'une trajectoire est évoqué de manière générale à la fin de la partie 1.4.3. Cette démarche est en quelque sorte l'inverse de celle évoquée précédemment

lors de l'apprentissage des LPC. En effet, il est question ici de simuler des données à partir des paramètres probabilistes du MGD. L'algorithme 2.1 est une application de l'algorithme générique 1.4 au cas particulier des MGD. Il s'agit donc d'une méthode de type Monte-Carlo permettant d'échantillonner une trajectoire de longueur T à partir des LPC α_1 , F_1 , Q^{sys} , Q^{act} , F^{sys} et G_t . La complexité algorithmique de cette méthode est par conséquent en

$$\mathcal{O}(T(|\mathcal{X}| + |\mathcal{A}| + |T_S|)). \quad (2.17)$$

Notons par ailleurs que l'intérêt de cet algorithme réside dans le fait que certains tirages aléatoires ne sont pas nécessaires de par les propriétés déterministes du modèle. Bien que cela ne change théoriquement pas l'ordre du temps de calcul de l'algorithme 2.1, son exécution est en pratique accélérée de manière significative.

Algorithme 2.1 : Simulation d'une trajectoire d'un système représenté par un MGD.

Entrées :

1. Un MGD vérifiant la description probabiliste donnée dans la partie 2.3;
2. La taille de la trajectoire à simuler, notée T .

Sortie : Une trajectoire de taille T constituée à chaque instant t de l'état x_t du système, du temps de séjour restant s_t et de l'action sélectionnée a_t .

```
// Initialisation de la trajectoire
Générer  $x_1 \sim \alpha_1$ ;
Générer  $s_1 \sim F_1(x_1, :)$ ;
Générer  $a_1 \sim G_1(x_1, :)$ ;
pour chaque  $t = 2, \dots, T$  faire
    si  $a^{(t-1)} \in \mathcal{A}^{\bar{X}}$  alors
        // Cas où l'action n'agit pas sur le système
        si  $s^{(t-1)} = 1$  alors
            // Transition naturelle
            Générer  $x_t \sim Q^{\text{sys}}(x^{(t-1)}, :)$ ;
            Générer  $s_t \sim F^{\text{sys}}(x^{(t-1)}, x_t, :)$ ;
        sinon
            // Transition déterministe
             $x_t \leftarrow x^{(t-1)}$ ;
             $s_t \leftarrow s^{(t-1)} - 1$ ;
        fin
    sinon
        // Transition artificielle
        Générer  $x_t \sim Q^{\text{act}}(x^{(t-1)}, a^{(t-1)}, :)$ ;
        Générer  $s_t \sim F^{\text{sys}}(x^{(t-1)}, x_t, :)$ ;
    fin
fin
```

La simulation de trajectoires s'avère être un premier outil intéressant pour étudier le comportement d'un système dynamique. Il est en effet possible d'effectuer des calculs d'infé-

rence probabiliste approchés à partir de plusieurs trajectoires afin d'estimer des indicateurs caractérisant le système. Toutefois, la précision des calculs étant directement liée au nombre de simulations réalisées (cf. fin de la partie 1.3.4), il est préférable lorsque cela est possible d'utiliser une méthode d'inférence exacte.

2.5 Inférence probabiliste exacte

Cette partie traite du problème de l'inférence exacte dans un MGD. Nous nous intéressons en particulier au calcul de la probabilité d'une trajectoire quelconque du système.

2.5.1 Probabilité d'une trajectoire

Plaçons nous dans un premier temps dans le cas général d'un n -MGPM représentant un processus $(X_{t,1}, \dots, X_{t,D})$ où chaque variable $X_{t,d}$ est à valeurs dans \mathcal{X}_d . Au sens large, une trajectoire de longueur T issue de ce n -MGPM est définie comme étant une suite de sous-ensembles $(\tilde{\mathcal{X}}_{t,1}, \dots, \tilde{\mathcal{X}}_{t,D})_{1 \leq t \leq T}$ telle que pour tout t et tout d , $\tilde{\mathcal{X}}_{t,d} \subseteq \mathcal{X}_d$.

Par conséquent, une trajectoire issue d'un MGD est caractérisée par une suite de domaines $(\tilde{\mathcal{X}}_t, \tilde{\mathcal{S}}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t)_{1 \leq t \leq T}$ telle que $\tilde{\mathcal{X}}_t$, $\tilde{\mathcal{S}}_t$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t$ représentent respectivement des sous-ensembles d'états du système, de temps de séjour et d'actions. En posant $\Upsilon_t = (\tilde{\mathcal{X}}_t, \tilde{\mathcal{S}}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t)$, $\Upsilon = (\Upsilon_t)_{1 \leq t \leq T}$ désigne une trajectoire, issue d'un MGD, quelconque et on note $P(\Upsilon) \in [0, 1]$ sa probabilité définie par

$$P(\Upsilon) = P(X_1 \in \tilde{\mathcal{X}}_1, S_1 \in \tilde{\mathcal{S}}_1, A_1 \in \tilde{\mathcal{A}}_1, \dots, X_T \in \tilde{\mathcal{X}}_T, S_T \in \tilde{\mathcal{S}}_T, A_T \in \tilde{\mathcal{A}}_T), \quad (2.18)$$

avec pour tout t , $\tilde{\mathcal{X}}_t \subseteq \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{S}}_t \subseteq \mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t \subseteq \mathcal{A}$. Afin de simplifier l'expression (2.18), l'écriture suivante est admise :

$$P(\Upsilon) = P(\Upsilon_1, \Upsilon_2, \dots, \Upsilon_T).$$

La probabilité $P(\Upsilon)$ dépend directement des valeurs contenues dans les LPC caractérisant le MGD sous-jacent. Un exemple de trajectoire de longueur 3 est donné dans l'exemple 2.8.

Exemple 2.8 (Trajectoire issue d'un MGD)

Considérons un MGD classique représentant le processus $(X_t, S_t, A_t)_{t \geq 1}$ dont l'ensemble des états est $\mathcal{X} = \{x_1, x_2\}$, l'ensemble des temps de séjour $\mathcal{S} = \{1, 2, 3\}$ et l'ensemble des actions $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Soit Υ une trajectoire de longueur $T = 3$ définie par :

$$\Upsilon = \left(\underbrace{(\mathcal{X}, \{3, 4\}, \{a_3\})}_{=\Upsilon_1}, \underbrace{(\{x_2\}, \{2, 3\}, \{a_2, a_3\})}_{=\Upsilon_2}, \underbrace{(\mathcal{X}, \{1, 2\}, \{a_1\})}_{=\Upsilon_3} \right).$$

La trajectoire Υ décrit

- un système initialement dans un état quelconque avec un temps de séjour de 3 ou 4 unités et où l'action a_3 est sélectionnée ;
- à $t = 2$, le système est dans l'état x_2 avec un temps de séjour égal à 2 ou 3 unités et le déclenchement de l'action a_2 ou a_3 ;

- enfin à $t = 3$, le système se retrouve dans un état quelconque avec un temps de séjour de 1 ou 2 unités et l'action a_1 sélectionnée.

La question soulevée ici concerne l'évaluation de la probabilité (2.18). Pour ce faire, commençons par introduire quelques notations. On désigne par $\Phi_t = P(X_t, S_t, A_t)$ la distribution à la tranche $t + 1$ de l'interface gauche d'un MGD. Soit $\Upsilon = (\Upsilon_t)_{1 \leq t \leq T}$ une trajectoire issue d'un MGD, on note Φ_t^Υ le potentiel défini pour tout $x \in \mathcal{X}$, tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$ par

$$\Phi_t^\Upsilon(x, s, a) = \begin{cases} \Phi_1(x, s, a) & \text{si } t = 1, \\ P(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{t-1}, X_t = x, S_t = s, A_t = a) & \text{sinon} \end{cases}. \quad (2.19)$$

Notons que la distribution de l'interface gauche Φ_t se déduit à partir du potentiel Φ_t^Υ en fixant la trajectoire $\Upsilon = (\Upsilon_\tau)_{\tau \geq 1}$ telle que pour tout $\tau = 1, 2, \dots, t - 1$, $\Upsilon_\tau = (\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A})$. Par ailleurs, le potentiel Φ_t^Υ permet également de calculer la probabilité de la trajectoire Υ jusqu'à l'étape t en effectuant une sommation sur le domaine $\{\tilde{\mathcal{X}}_t, \tilde{\mathcal{S}}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t\}$.

L'algorithme 2.2 décrit une méthode itérative générique permettant de déduire la probabilité d'une trajectoire quelconque issue d'un MGD. Le calcul de la trajectoire d'une tranche à l'autre est assuré par la propriété de l'interface gauche donnée par l'équation (2.1). Toutefois l'algorithme ne précise pas comment est réalisé le calcul de Φ_t^Υ (cf. algorithme 2.2, ligne \diamond). Ceci est l'objet des deux paragraphes suivants qui présentent respectivement une méthode générique naïve et une méthode *ad hoc* plus rapide pour mener à bien ce calcul.

Algorithme 2.2 : Algorithme itératif générique calculant la probabilité d'une trajectoire issue d'un MGD quelconque.

Entrées :

1. Un ensemble de LPC associé à un MGD (cf. partie 2.3) caractérisant le processus $(X_t, S_t, A_t)_{t \geq 1}$, où les variables X_t , S_t et A_t sont respectivement à valeur dans \mathcal{X} , \mathcal{S} et \mathcal{A} ;
2. Une trajectoire $\Upsilon = (\Upsilon_t)_{1 \leq t \leq T}$ de longueur T telle que $\Upsilon_t = (\tilde{\mathcal{X}}_t, \tilde{\mathcal{S}}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t)$ avec pour tout t , $\tilde{\mathcal{X}}_t \subseteq \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{S}}_t \subseteq \mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t \subseteq \mathcal{A}$.

Sortie : La probabilité de la trajectoire Υ .

Calculer $\Phi_1^\Upsilon = \alpha_1(x)F_1(x, s)G_1(x, a)$;

Calculer $P(\Upsilon_1) = \sum_{x \in \tilde{\mathcal{X}}_1} \alpha_1(x) \sum_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_1} F_1(x, s) \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_1} G_1(x, a)$;

pour chaque $t = 2, \dots, T$ **faire**

\diamond | Calculer Φ_t^Υ ;
 | En déduire $P(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_t) = \sum_{x \in \tilde{\mathcal{X}}_1} \sum_{s \in \tilde{\mathcal{S}}_1} \sum_{a \in \tilde{\mathcal{A}}_1} \Phi_t^\Upsilon(x, s, a)$;

fin

2.5.2 Calcul naïf

Le calcul naïf consiste à adapter la méthode itérative de calcul de l'interface gauche à $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$ (cf. équation (2.3)). Le résultat obtenu est présenté dans la proposition suivante.

Proposition 2.1

Soit $(X_t, S_t, A_t)_{t \geq 1}$ un processus engendré par un MGD (cf. partie 2.3). Considérons également une trajectoire de longueur T , notée $\mathbf{Y} = (\Upsilon_t)_{1 \leq t \leq T} = (\tilde{\mathcal{X}}_t, \tilde{\mathcal{S}}_t, \tilde{\mathcal{A}}_t)_{1 \leq t \leq T}$ avec pour tout t , $\tilde{\mathcal{X}}_t \subseteq \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{S}}_t \subseteq \mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t \subseteq \mathcal{A}$. Dans ce cas, $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$ est défini récursivement pour tout $x \in \mathcal{X}$, tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$ par

$$\Phi_t^{\mathbf{Y}}(x, s, a) = \begin{cases} \alpha_1(x)F_1(x, s)G_1(x, a) & \text{si } t = 1, \\ G_t(x, a) \sum_{\substack{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \\ s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a')Q^{\rightarrow}(x', s', a', x)F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) & \text{si } t \geq 2 \end{cases} . \quad (2.20)$$

La démonstration de cette proposition, donnée dans l'annexe E.2, s'obtient par récurrence en appliquant l'hypothèse markovienne d'ordre un et la propriété de factorisation (cf. équation 2.3) aux MGD. Ce résultat est directement utilisable dans l'algorithme 2.2 pour le calcul de $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$. Notons que cette méthode correspond à l'adaptation de l'algorithme générique d'élimination au problème de l'évaluation de la probabilité d'une trajectoire dans un MGD. Il s'agit donc de la solution algorithmique de référence pour ce problème. Or, il s'avère qu'en pratique cette dernière est rapidement inutilisable de par son importante complexité algorithmique, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2.2

En reprenant les hypothèses et le résultat de la proposition 2.1, la complexité algorithmique du calcul de $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$, $CA^{naïve}(\Phi_t^{\mathbf{Y}})$ est de l'ordre :

$$CA^{naïve}(\Phi_t^{\mathbf{Y}}) = \begin{cases} \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S|\mathcal{A}|) & \text{si } t = 1, \\ \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2T_S^2|\mathcal{A}|) & \text{si } t \geq 2 \end{cases} .$$

Ce résultat de complexité algorithmique (cf. annexe E.2) repose essentiellement sur les propositions 1.1 et 1.2 appliquées aux calculs intervenant dans la proposition 2.1. Par conséquent, à partir d'une trajectoire de longueur T , la complexité de l'algorithme 2.2 reposant sur la proposition 2.1 est de l'ordre de $\mathcal{O}(T|\mathcal{X}|^2T_S^2|\mathcal{A}|)$ opérations élémentaires. Notons en particulier que la vitesse d'exécution de cette méthode dépend de la borne T_S élevée au carré. Or, nous avons vu dans la partie 2.3.2 que cette dernière pouvait être bornée par la longueur de la trajectoire T . Autrement dit, l'ordre de la complexité algorithmique dans le pire des cas passe en $\mathcal{O}(T^3|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|)$. En pratique, cette méthode devient inutilisable dès que $T \geq 100$.

2.5.3 Calcul *ad hoc*

L'objectif des paragraphes suivants est d'affiner la méthode précédente de façon à réduire la complexité algorithmique du résultat de la proposition 2.1. Pour ce faire, nous exploitons les propriétés probabilistes des LPC Q^\rightarrow et F^\rightarrow , à savoir à la fois leur caractère défini par morceaux et leur composante déterministe. Nous obtenons alors le résultat suivant :

Proposition 2.3

Reprenons les hypothèses de la proposition 2.1 et les définitions de Q^\rightarrow et F^\rightarrow données respectivement par les équations (2.11) et (2.14). Supposons également que chaque sous-ensemble d'actions $\tilde{\mathcal{A}}_t \subseteq \mathcal{A}$ soit partitionné de telle sorte que $\tilde{\mathcal{A}}_t = \tilde{\mathcal{A}}_t^X \cup \tilde{\mathcal{A}}_t^{\bar{X}}$ avec $\tilde{\mathcal{A}}_t^X \subseteq \mathcal{A}^X$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t^{\bar{X}} \subseteq \mathcal{A}^{\bar{X}}$. Le calcul de $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$, $t \geq 2$ se réécrit alors pour tout $x \in \mathcal{X}$, tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$ comme suit :

$$\Phi_t^{\mathbf{Y}}(x, s, a) = [\Psi_t^{\text{sys}}(x, s) + \Psi_t^{\text{det}}(x, s) + \Psi_t^{\text{act}}(x, s)]G_t(x, a),$$

avec

$$\Psi_t^{\text{sys}}(x, s) = \begin{cases} \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} Q^{\text{sys}}(x', x) F^{\text{sys}}(x', x, s) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', 1, a') & \text{si } 1 \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

$$\Psi_t^{\text{det}}(x, s) = \begin{cases} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x, s+1, a') & \text{si } x \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \text{ et } s \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \setminus \{T_S\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

et enfin,

$$\Psi_t^{\text{act}}(x, s) = \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} F^{\text{sys}}(x', x, s) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^X} Q^{\text{act}}(x', a', x) \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a'),$$

La démonstration de cette proposition (cf. annexe E.2) est fondée à la fois sur le caractère défini par morceaux des LPC Q^\rightarrow et F^\rightarrow , ainsi que sur leur composante déterministe respective (cf. équations 2.11 et 2.14).

Comme dans le cas du calcul naïf de $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$, il est possible d'évaluer la complexité algorithmique liée au résultat de la proposition 2.3.

Proposition 2.4

En reprenant les hypothèses et le résultat de la proposition 2.3, la complexité algorithmique du calcul de $\Phi_t^{\mathbf{Y}}$, $t \geq 2$ est de l'ordre de

$$CA^{\text{ad hoc}}(\Phi_t^{\mathbf{Y}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S|\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2T_S),$$

opérations élémentaires.

La démonstration de cette proposition (cf. annexe E.2) relève exactement du même principe que celle de la proposition 2.2. Ce résultat montre que si l'on applique la proposition 2.3 dans l'algorithme 2.2, la complexité algorithmique de ce dernier passe à un ordre de

$\mathcal{O}(|\mathcal{X}|T^2|\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2T|\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2T^2)$ opérations élémentaires pour le calcul de la probabilité d'une trajectoire de longueur T . Comparée à l'approche naïve, la méthode *ad hoc* conduit à une réduction du temps de calcul d'un facteur T_S à chaque itération. Cette amélioration permet en pratique de réaliser des calculs probabilistes sur de plus grandes trajectoires et surtout avec une borne T_S bien supérieure en pratique ($\simeq 10000$).

Enfin, il est intéressant d'illustrer les résultats théoriques présentés précédemment sur la complexité algorithmique du calcul de $\Phi_t^{\mathcal{X}}$. Pour ce faire, nous comparons le temps d'exécution moyen d'une itération de l'algorithme 2.2 en fonction du nombre d'états $|\mathcal{X}|$ (cf. figure 2.4), de la borne T_S (cf. figure 2.5) et du nombre d'actions $|\mathcal{A}|$ (cf. figure 2.6), et ce, en utilisant la méthode naïve (cf. proposition 2.1), la méthode *ad hoc* (cf. proposition 2.3) et une méthode approchée par échantillonnage (cf. algorithme 2.1). Dans les résultats présentés, les trajectoires considérées dans les méthodes d'inférence sont de longueur $T = 10$. Sur chaque figure, la taille des deux paramètres constants est égale à 25 et le nombre de trajectoires générées pour la méthode d'échantillonnage est fixé à 100.

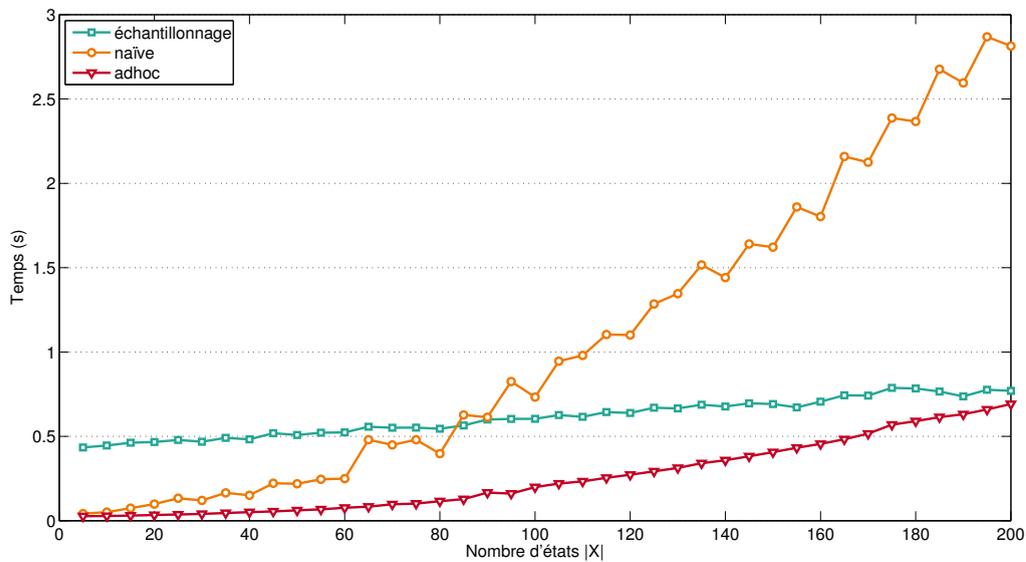


FIG. 2.4 – Temps moyen du calcul d'une itération de l'algorithme 2.2 en fonction de $|\mathcal{X}|$ ($T_S = |\mathcal{A}| = 25$) et de la méthode d'inférence utilisée.

Nous retrouvons sur ces figures des résultats conformes à ce qui est prévu par la théorie. Le temps d'exécution de la méthode naïve est d'allure parabolique en fonction de $|\mathcal{X}|$ et T_S , et d'allure linéaire en fonction de $|\mathcal{A}|$. Avec la méthode *ad hoc*, nous vérifions un changement d'allure de la complexité en fonction de T_S qui devient linéaire, presque constante. Ceci s'explique par le fait que l'évolution probabiliste des temps de séjour est en grande partie déterministe. En pratique lors des calculs d'inférence ceci se traduit par une suppression de calculs arithmétiques au profit de tests logiques, beaucoup moins coûteux en temps d'exécution. Pour des raisons similaires, bien que la complexité algorithmique en fonction de $|\mathcal{X}|$ et $|\mathcal{A}|$ soit du même ordre avec les deux méthodes, le temps d'exécution augmente plus lentement en utilisant la méthode *ad hoc*.

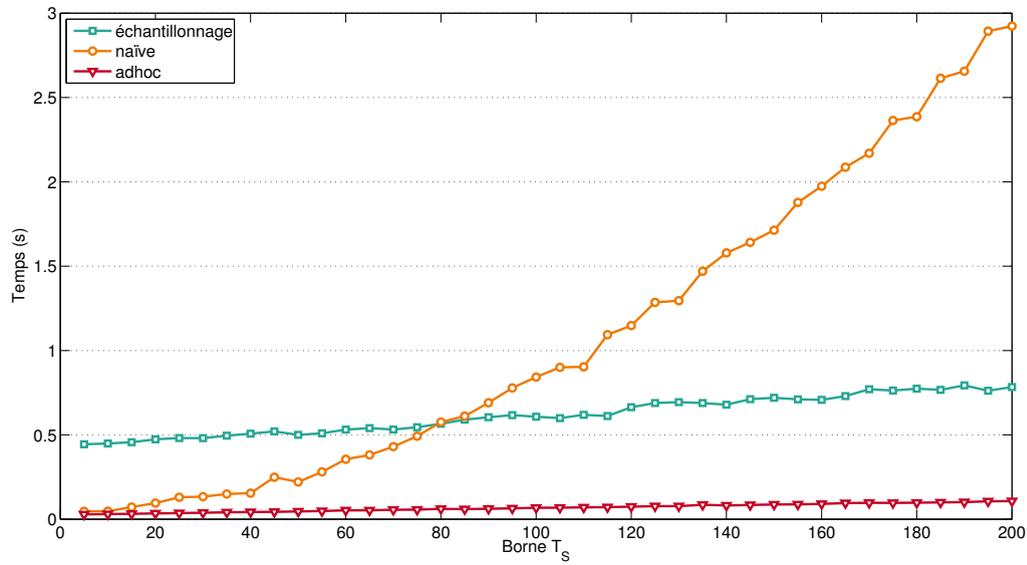


FIG. 2.5 – Temps moyen du calcul d’une itération de l’algorithme 2.2 en fonction de T_S ($|\mathcal{X}| = |\mathcal{A}| = 25$) et de la méthode d’inférence utilisée.

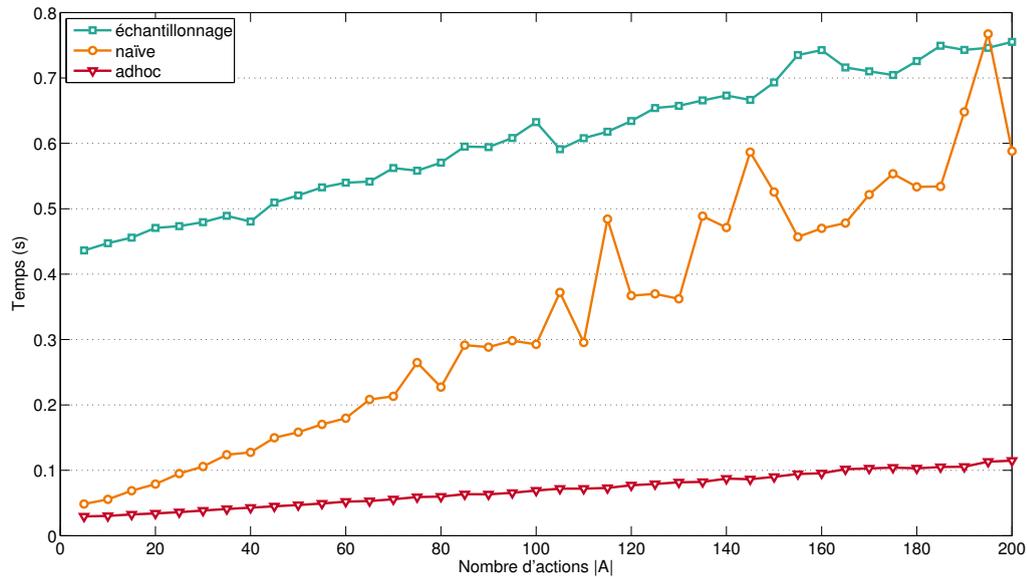


FIG. 2.6 – Temps moyen du calcul d’une itération de l’algorithme 2.2 en fonction de $|\mathcal{A}|$ ($|\mathcal{X}| = T_S = 25$) et de la méthode d’inférence utilisée.

Pour finir, les résultats concernant la méthode d’échantillonnage sont conformes avec la complexité théorique donnée par (2.17). Quelque soit le paramètre considéré, l’évolution du temps de calcul est linéaire et de pente identique. Rappelons toutefois que la précision d’une telle méthode évolue lentement avec le nombre de simulations à réaliser (cf. équations 1.8 et 1.9).

2.6 Application à l'étude de la fiabilité

Nous achevons ce chapitre par une application concrète des MGD dans le cadre d'une étude de fiabilité. Dans un premier temps, nous effectuons un rappel des définitions usuelles associées au concept de fiabilité en temps discret. Nous décrivons ensuite comment mettre à profit l'algorithme 2.2 afin de mesurer la fiabilité d'un système représenté par un MGD. Nous proposons enfin une comparaison empirique entre l'approche reposant sur les MGD et celle utilisant les chaînes de Markov pour représenter le processus de dégradation d'un système.

2.6.1 MGD et mesures de fiabilité

Rappels de fiabilité en temps discret

Nous supposons à présent que l'ensemble \mathcal{X} des états d'un système est partitionné en deux ensembles \mathcal{X}_U et \mathcal{X}_D , contenant respectivement les états de fonctionnement et les états de panne. La fiabilité en temps discret est alors définie comme suit :

Définition 2.1 (Fiabilité en temps discret)

Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ représentant l'état d'un système au cours du temps. La fiabilité ou fonction de survie d'un système en temps discret est définie par la fonction

$$R : \begin{cases} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \mapsto [0, 1] \\ t & \mapsto R(t) = P(X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_t \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

Autrement dit, $R(t)$ donne la probabilité que le système reste dans un état de fonctionnement jusqu'à l'instant t compris. Bien que la fiabilité soit définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$, on suppose par convention que $R(0) = 1$.

D'autres indicateurs de fiabilité découlent de la définition précédente. Parmi les plus connus, rappelons la définition du taux de défaillance et de la durée de vie résiduelle moyenne.

Définition 2.2 (Taux de défaillance en temps discret)

Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ représentant l'état d'un système au cours du temps. Le taux de défaillance d'un système en temps discret est défini par la fonction

$$h : \begin{cases} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \mapsto [0, 1] \\ t & \mapsto h(t) = P(X_t \in \mathcal{X}_D | X_1 \in \mathcal{X}_U, \dots, X_{t-1} \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

Autrement dit, $h(t)$ correspond à la probabilité qu'une panne se produise à l'instant t conditionnement au fait que le système ait toujours été sain avant. $h(t)$ s'exprime en fonction de la fiabilité de la façon suivante :

$$h(t) = \begin{cases} 1 - \frac{R(t)}{R(t-1)} & \text{si } R(t-1) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Définition 2.3 (Durée de vie résiduelle moyenne)

Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ représentant l'état d'un système au cours du temps. La durée de vie résiduelle moyenne à l'instant t , notée $m(t)$, est le temps moyen avant une défaillance sachant que le système fonctionne depuis t unités de temps. En temps discret, cette quantité est définie par

$$m(t) = \mathbb{E}[T_D - t | T_D > t],$$

où $T_D = \inf\{t \in \mathbb{N} \setminus \{0\} | X_t \in \mathcal{X}_D\}$ représente la variable aléatoire de durée de vie du système, qui n'est autre que le premier instant de défaillance. La durée de vie résiduelle moyenne s'exprime également en fonction de la fiabilité par :

$$m(t) = \frac{1}{R(t)} \sum_{\tau=0}^{\infty} R(\tau + t).$$

Notons que le temps moyen avant défaillance, noté *MTTF* (*Mean Time To Failure*), est donné par $m(0)$.

La définition suivante introduit la notion de disponibilité du système, indicateur couramment utilisé lors d'études de fiabilité.

Définition 2.4 (Disponibilité en temps discret)

Soit $(X_t)_{t \geq 1}$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U \cup \mathcal{X}_D$ représentant l'état d'un système au cours du temps. La disponibilité d'un système en temps discret est définie par la fonction

$$A : \begin{cases} \mathbb{N} \setminus \{0\} & \mapsto [0, 1] \\ t & \mapsto A(t) = P(X_t \in \mathcal{X}_U) \end{cases} .$$

Autrement dit, $A(t)$ donne la probabilité que le système soit dans un état de fonctionnement à l'instant t , quel que soit ses états passés.

Il est possible d'énumérer de nombreux autres indicateurs permettant de rendre compte de la fiabilité d'un système en temps discret ([Bracquemond and Gaudoin 2003](#)). Par ailleurs, le point commun de tous ces indicateurs réside dans le fait qu'ils s'obtiennent à partir du calcul probabiliste d'une trajectoire particulière des états du système. En effet, utiliser l'algorithme 2.2 afin de calculer la probabilité de la trajectoire $(\mathcal{X}_U, \mathcal{S}, \mathcal{A})_{1 \leq \tau \leq t}$ revient à calculer la fiabilité du système à l'instant t . De même, la disponibilité du système à l'instant t s'obtient en utilisant l'algorithme 2.2 avec la trajectoire $(\tilde{\mathcal{X}}_\tau, \mathcal{S}, \mathcal{A})_{1 \leq \tau \leq t}$ tel que $\tilde{\mathcal{X}}_t = \mathcal{X}_U$ et $\tilde{\mathcal{X}}_\tau = \mathcal{X}$ sinon.

2.6.2 Illustration

Nous proposons une illustration empirique de l'intérêt des MGD pour la représentation de systèmes dynamiques. Pour ce faire, nous nous replaçons dans le cadre du système de production introduit initialement dans le chapitre 1. L'objectif est de présenter concrètement les résultats concernant l'apprentissage et les mesures de fiabilité associées à une modélisation du processus de dégradation du système par une approche :

- (i) classique à l'aide de chaînes de Markov (cf. figure 1.4), désignée par approche CM ;
- (ii) reposant sur les MGD (cf. figure 2.3), désignée par approche MGD.

Présentation des données

Pour mener à bien la phase d'apprentissage, nous disposons de données de retour d'expérience sur la machine de production considérée. Ces données contiennent l'historique de fonctionnement, sans maintenance, de $K = 100$ machines de production identiques et indépendantes, de leur mise en service jusqu'à leur panne (cf. les trajectoires de la table 2.3 pour exemple). Ces 100 trajectoires ont été générées avec l'algorithme 2.1 à partir des LPC décrites dans l'exemple 2.6. Ces LPC caractérisent donc le modèle théorique de dégradation du système.

Pour chacune des 100 machines, nous possédons donc une information sur les cadences de production utilisées, les états traversés et les temps de séjour associés. La table 2.4 fournit le nombre d'occurrences, noté $N_{z,x,s}$, où le système est resté $s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, 12\}$ unités de temps dans l'état $x \in \mathcal{X} = \{\text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$ à la cadence $z \in \mathcal{Z} = \{\text{normale}, \text{rapide}\}$. La table 2.5 donne, quant à elle, le nombre de transitions, noté $N_{x',z,x}$, où le système est passé de l'état x' à x avec une cadence z .

Cadence	État	Temps de séjour (en trimestres)												total
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
normale	ok	161	95	56	37	31	40	56	93	121	55	7	0	752
rapide	ok	91	52	43	20	19	9	6	6	2	0	0	0	248
normale	dég.	501	126	37	11	10	0	0	0	0	0	0	0	685
rapide	dég.	140	13	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	160

TAB. 2.4 – Nombre d'observations des temps de séjour allant de 1 à 12 trimestres pour chaque état (excepté l'état absorbant panne), pour les deux cadences et dans les $K = 100$ trajectoires disponibles.

État ($t - 1$)	Cadence	État (t)			total
		ok	dégradé	panne	
ok	normale	0	685	67	752
dégradé	normale	0	0	685	685
ok	rapide	0	160	88	248
dégradé	rapide	0	0	160	160

TAB. 2.5 – Nombre des transition observées à partir de chaque état (excepté l'état absorbant panne), pour les deux cadences et dans les $K = 100$ trajectoires disponibles.

L'apprentissage ne concerne ici que les LPC caractérisant le processus de dégradation du système. Les LPC associées à l'état initial du système, à la cadence de fonctionnement, à la qualité de la production et à la maintenance en général sont en effet définies *a priori* ou *a posteriori*. Pour chacune des deux approches, l'apprentissage est réalisé par la méthode du maximum de vraisemblance. Les estimations présentées dans les paragraphes suivants sont issues d'une adaptation des résultats de l'équation 2.16 au cas du système étudié. Notons enfin que nous supposons que les états ok et dégradé constituent les états de fonctionnement, autrement dit $\mathcal{X}_U = \{\text{ok}, \text{dégradé}\}$ et $\mathcal{X}_D = \{\text{panne}\}$.

Apprentissage du MGD

Commençons par traiter le modèle reposant sur un MGD. Dans ce cas, il y a deux LPC à estimer : la LPC des temps de séjour initiaux, notée $\widehat{F}_{\text{MGD},1}$ et la matrice de transition naturelle, notée $\widehat{Q}_{\text{MGD}}^{\text{sys}}$. Rappelons que la LPC des temps de séjour pour $t \geq 2$ est supposée identique à $\widehat{F}_{\text{MGD},1}$. Les expressions de ces estimations sont définies par :

$$\widehat{F}_{\text{MGD},1}(z, x, s) = \widehat{F}_{\text{MGD}}^{\text{sys}}(x', z, x, s) = \frac{N_{z,x,s}}{\sum_{z \in \mathcal{Z}, x \in \mathcal{X}} N_{z,x,s}}, \quad \widehat{Q}_{\text{MGD}}^{\text{sys}}(x', z, x) = \frac{N_{x',z,x}}{\sum_{x' \in \mathcal{X}, z \in \mathcal{Z}} N_{x',z,x}}, \quad (2.21)$$

ce qui donne avec les données disponibles :

		$\widehat{F}_{\text{MGD},1}$											
		S_1											
Z_1	X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
norm.	ok	0.21	0.13	0.07	0.05	0.04	0.05	0.07	0.12	0.16	0.07	0.01	0
rap.	ok	0.37	0.21	0.17	0.08	0.08	0.04	0.02	0.02	0.01	0	0	0
norm.	dég.	0.73	0.18	0.05	0.02	0.02	0	0	0	0	0	0	0
rap.	dég.	0.88	0.08	0.04	0	0	0	0	0	0	0	0	0
norm.	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
rap.	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

		$\widehat{Q}_{\text{MGD}}^{\text{sys}}$		
		X_t		
X_{t-1}	Z_t	ok	dégradé	panne
ok	normale	0	0.91	0.09
dégradé	normale	0	0	1
panne	normale	0	0	1
ok	rapide	0	0.64	0.36
dégradé	rapide	0	0	1
panne	rapide	0	0	1

Apprentissage de la chaîne de Markov

Dans le cadre de la modélisation du processus de dégradation par une chaîne de Markov, seule la LPC de transition naturelle, notée $\widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}$ est à estimer, les temps de séjour n'étant plus explicitement représentés. L'estimation des taux de transition entre états est effectuée, comme précédemment, par la méthode du maximum de vraisemblance. Notons toutefois que le taux de transition d'un état vers lui-même se déduit de la table 2.4 donnant le nombre d'occurrences des temps de séjour. En effet, l'observation de $N_{z,x,s}$ temps de séjour de s unités de temps dans l'état x et à la cadence de production z , signifie également que le système a effectué $N_{z,x,s}(s-1)$ transitions de l'état x vers lui-même à cette cadence z . Autrement dit, nous avons ici $N_{x',z,x} = \sum_{s=1}^{12} N_{z,x,s}(s-1)$ lorsque $x = x'$. Dans le cas où $x' \neq e$, la table 2.5 donne directement les différents $N_{x',z,x}$. La LPC de transition $\widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}$ s'obtient alors comme précédemment (cf. équation (2.21)), ce qui donne avec les données disponibles :

		$\widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}$		
		X_t		
X_{t-1}	Z_t	ok	dégradé	panne
ok	normale	0.81	0.17	0.02
dégradé	normale	0	0.29	0.71
panne	normale	0	0	1
ok	rapide	0.63	0.24	0.13
dégradé	rapide	0	0.14	0.86
panne	rapide	0	0	1

Dans ce cas, la LPC $\widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}$ permet à elle seule de caractériser le processus de dégradation du système. Cependant, la distribution des temps de séjour n'étant pas clairement explicitée, la comparaison des résultats d'apprentissage avec l'approche précédente et le modèle théorique n'est pas aisée. Nous savons néanmoins que les temps de séjour dans chacun des états d'un processus représenté par une chaîne de Markov sont implicitement distribués géométriquement. Il est possible d'augmenter le modèle CM en y ajoutant explicitement les lois de temps de séjour. Les informations contenues dans la LPC $\widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}$ se scindent alors en :

- une LPC des temps de séjour distribués géométriquement, notée $\widehat{F}_{\text{CM}_{\text{bis},1}}$, et définie pour tout $x \in \mathcal{X}$, tout $z \in \mathcal{Z}$ et tout $s \in \mathcal{S} = \{1, \dots, 12\}$ par

$$\widehat{F}_{\text{CM}_{\text{bis},1}}(z, x, s) = \begin{cases} p_{\text{geo}}(s; \theta_{z,x}) & \text{si } 1 \leq s < 12 \\ 1 - \sum_{s'=1}^{11} p_{\text{geo}}(s'; \theta_{z,x}) & \text{si } s = 12 \end{cases}$$

avec $p_{\text{geo}}(s, \theta_{z,x}) = \theta_{z,x}^{s-1}(1 - \theta_{z,x})$ et $\theta_{z,x} = \widehat{Q}_{\text{CM}}^{\text{sys}}(x, z, x)$. La LPC $\widehat{F}_{\text{CM}_{\text{bis},1}}$ correspond donc à une suite de lois géométriques tronquées (cf. remarque 2.1). Numériquement, nous obtenons ici :

		$\widehat{F}_{CM_{bis},1}$											
		S_1											
Z_1	X_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
norm.	ok	0.19	0.16	0.13	0.10	0.08	0.07	0.05	0.04	0.03	0.03	0.02	0.10
rap.	ok	0.37	0.23	0.15	0.09	0.06	0.04	0.02	0.01	0.01	0.01	0.00	0.01
norm.	dég.	0.71	0.20	0.06	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
rap.	dég.	0.86	0.12	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
norm.	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
rap.	panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

- une LPC de transition strictement diagonale supérieure (excepté pour l'état absorbant panne) pour chaque cadence de production, notée $\widehat{Q}_{CM_{bis}}^{sys}$, et définie pour tous $x', x \in \mathcal{X}$ et tout $z \in \mathcal{Z}$ par

$$\widehat{Q}_{CM_{bis}}^{sys}(x', z, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x' = x \\ \widehat{Q}_{CM}^{sys}(x', z, x) & \text{sinon} \\ \widehat{Q}_{CM}^{sys}(x', z, x') & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'approche CM augmentée correspond à une approche MGD particulière dont la LPC des temps de séjour possède une forme paramétrique précise. Le modèle de transition des états du système est donc équivalent dans les deux approches. Par conséquent et par construction, il vient $\widehat{Q}_{CM_{bis}}^{sys} = \widehat{Q}_{MGD}^{sys}$.

Insistons enfin sur le fait que le calcul de la distribution géométrique des temps de séjour n'est uniquement pertinent qu'à des fins de comparaison de résultats d'apprentissage. Lors d'un calcul d'inférence avec une approche reposant sur les chaînes de Markov, il n'y a aucun intérêt à augmenter la complexité algorithmique en introduisant la LPC $\widehat{F}_{CM_{bis},1}$ souvent très volumineuse et inutile dans ce cas.

Comparaison des résultats d'apprentissage

Nous comparons la qualité des résultats d'apprentissage obtenus par les approches MGD et CM en nous appuyant sur la vraisemblance des données et sur l'Erreur Absolue Moyenne (EAM) commise par rapport au modèle théorique. La table 2.6 ne fournit ces deux critères que pour la modélisation des temps de séjour. En effet, en considérant l'approche CM augmentée par une LPC de temps de séjour géométrique, le modèle de transition des états du système est identique dans les deux approches.

Approche	MGD	CM
Log-vraisemblance	-2725	-3002
EAM	0.0014	0.0220

TAB. 2.6 – Comparaison de la log-vraisemblance des données et de l'EAM commise par rapport au modèle théorique dans le cas des deux approches.

La log-vraisemblance est un critère intéressant au sens où son calcul ne nécessite pas la connaissance d'un modèle théorique. Ce critère est donc bien adapté lorsque le modèle

théorique du système étudié est inconnu, comme c'est souvent le cas lors de l'étude d'un système complexe. Son interprétation reste toutefois délicate car la log-vraisemblance est une grandeur non bornée. Dans le cas présent, cette dernière est plus élevée avec l'approche MGD qu'avec l'approche CM. L'utilisation d'un MGD permet donc de mieux expliquer les données observées qu'une chaîne de Markov seule. L'approche MGD ne fait aucune hypothèse sur la distribution dont sont issues les données. Il est donc naturel qu'un modèle géométrique, ne possédant qu'un paramètre, obtienne des résultats moins satisfaisants.

Intéressons nous à l'EAM commise entre le modèle théorique et les deux approches considérées. Il apparaît dans cet exemple que l'utilisation d'un MGD conduit à une erreur moyenne de 0.14% sur la probabilité d'occurrence de chaque temps de séjour, et ce, pour chaque couple (état, cadence). L'approche CM commet quant à elle une erreur moyenne de 2.2%. L'imprécision est donc en moyenne quinze fois plus grande avec cette dernière approche. Cette erreur dépend directement du degré de similarité entre le modèle théorique des temps de séjour et une loi géométrique. Autrement dit, si les deux sont proches, l'intérêt des MGD diminue fortement en raison de l'augmentation de complexité occasionnée. Cependant, lorsque le système possède une dynamique d'évolution plus complexe, il s'avère souvent intéressant de représenter plus finement la distribution des temps de séjour. Ceci est illustré dans la partie suivante où des résultats en matière de calculs de fiabilité sont présentés.

Comparaison des mesures de fiabilité

L'objectif est à présent de comparer les résultats obtenus par les approches MGD et CM concernant le calcul d'indicateurs de fiabilité. L'algorithme 2.1 est utilisé afin de générer un grand nombre de trajectoires (ici 10^6) de manière à déduire la fiabilité du système selon le modèle théorique. L'algorithme 2.2 est quant à lui utilisé pour le calcul de la fiabilité dans le cadre des deux modèles appris précédemment. Par ailleurs, la table 2.7 donne l'EAM commise sur le calcul de divers indicateurs relatifs à la fiabilité du système par unité de temps.

Approche	MGD	CM
Fiabilité	0.0010	0.0059
Taux de défaillance	0.0018	0.7538
Durée de vie résiduelle	0.0085	3.8986

TAB. 2.7 – Comparaison des EAM commises sur le calcul d'indicateurs de fiabilité à partir des approche MGD et CM.

Le calcul de la fiabilité est présenté en figure 2.7. Nous observons que l'approche MGD conduit à une légère sous-estimation de la fiabilité théorique, tout en respectant son allure générale. En revanche, l'approche CM sous-estime la fiabilité du système entre son quatrième et son dixième trimestres de fonctionnement, puis la surestime après le onzième semestre. Cette approche ne permet clairement pas de retrouver l'allure théorique de la

fiabilité. Ces constatations visuelles sont confirmées par les résultats de la table 2.7. L'EAM commise par l'approche MGD est de 1% par unité de temps, tandis qu'elle s'élève à près de 6% pour l'approche CM.

Rappelons que dans l'industrie, la fiabilité est l'un des indicateurs les plus utilisés pour la mise en place d'une politique de maintenance. Sous-estimer la fiabilité conduit à des politiques de maintenance onéreuses ne tenant pas compte de la qualité du système étudié. À l'inverse lorsque celle-ci est surestimée, le système souffre d'une perte de disponibilité due à une insuffisance d'entretien. Cet exemple est donc une illustration de l'intérêt pratique des MGD comparés à une approche CM dans le cadre d'études de fiabilité.

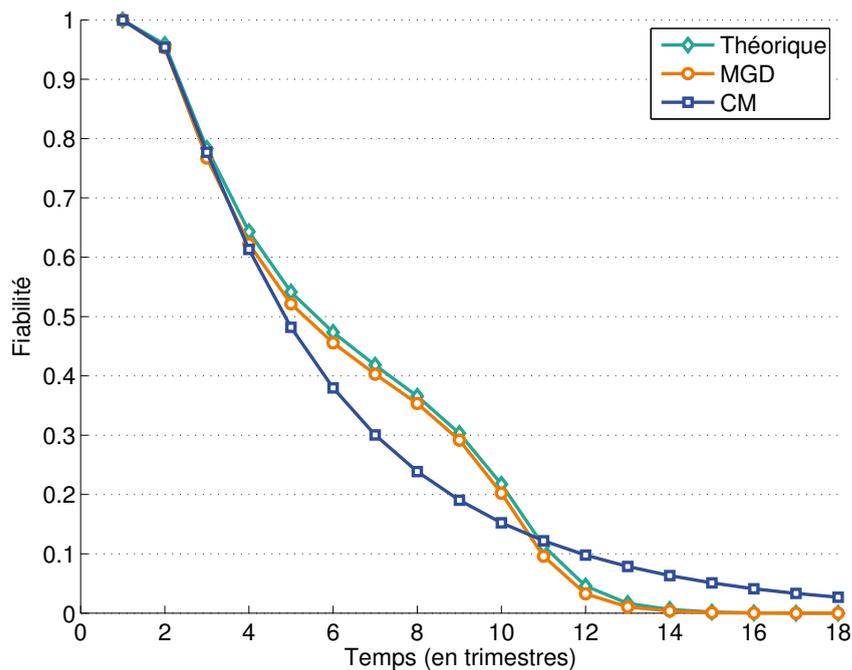


FIG. 2.7 – Évaluation de la fiabilité du système à partir du modèle théorique et des approches MGD et CM.

Les figures 2.8 et 2.9 représentent respectivement le taux de défaillance et la durée de vie résiduelle du système obtenus selon la modélisation considérée. L'observation de ces courbes met en avant l'incapacité de l'approche CM à retrouver la forme théorique de ces deux grandeurs. Plus précisément, la table 2.7 indique que l'EAM commise en moyenne à chaque unité de temps par cette approche est de 75% pour le taux de défaillance et d'environ 3.8 trimestres pour la durée de vie résiduelle. Ces erreurs sont particulièrement importantes comparées à celles engendrées par l'approche MGD.

Par ailleurs, ces grandeurs de fiabilité caractérisent le comportement instantané du système : la première en terme de probabilité d'occurrence d'une défaillance et la seconde en terme de durée avant l'occurrence d'une défaillance. Le modèle théorique à un taux de défaillance globalement croissant et une durée de vie résiduelle globalement décroissante. Ceci signifie que le système vieillit, autrement dit plus le temps passe, plus la probabilité

que survienne une panne augmente. Or, nous observons une fois encore que l'approche CM s'avère insuffisante pour représenter une telle dynamique de vieillissement.

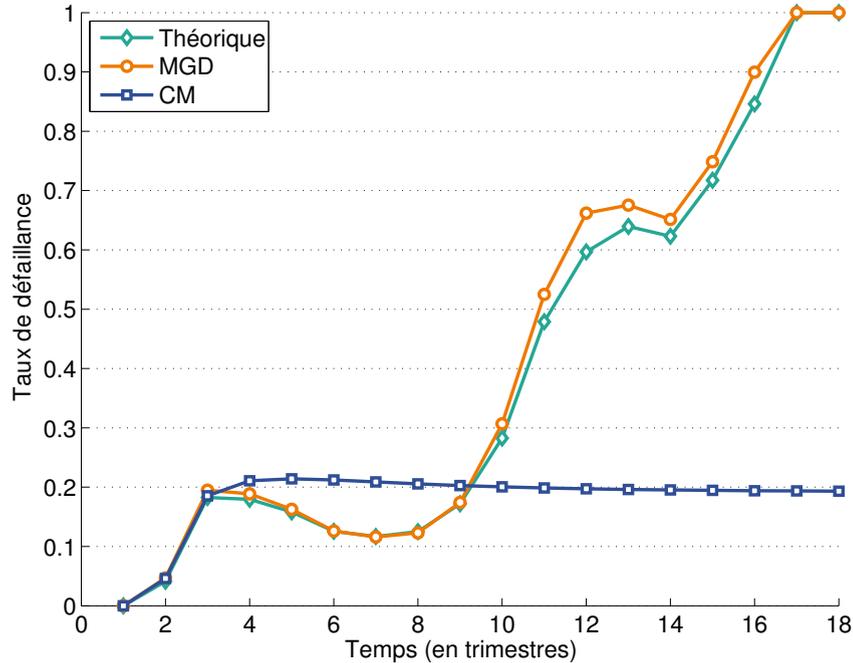


FIG. 2.8 – Évaluation du taux de défaillance du système à partir du modèle théorique et des l'approches MGD et CM.

2.7 Conclusions

Ce chapitre propose une description détaillée des Modèles Graphiques de Durée (MGD). Cette structure graphique particulière, reposant sur le formalisme des Modèles Graphiques Probabilistes Markoviens d'ordre un (1-MGPM), est dédiée à la représentation de systèmes dynamiques complexes. Cette approche permet de dépasser les limitations sous-jacentes à l'utilisation des chaînes de Markov dans le cadre des 1-MGPM. Une chaîne de Markov impose par construction que les durées dans chaque état du système suivent des lois exponentielles. Cette hypothèse n'est pas réaliste dans un très grand nombre d'applications concrètes. L'intérêt des MGD provient de la possibilité de spécifier une loi de durée quelconque, paramétrique ou non, pour chaque état du système. Ces propriétés sont illustrées par une comparaison entre chaînes de Markov et MGD dans le cadre d'une analyse de fiabilité, montrant ainsi la pertinence pratique l'approche.

Toutefois, la structure MGD étant plus complexe que la structure d'une chaîne de Markov, son utilisation entraîne une augmentation de la complexité spatiale et de la complexité algorithmique lors des calculs d'inférence à partir d'une méthode générique. Nous montrons cependant qu'en exploitant les propriétés probabilistes particulières associées aux MGD, il est possible de limiter significativement cette complexité. La première propriété remar-

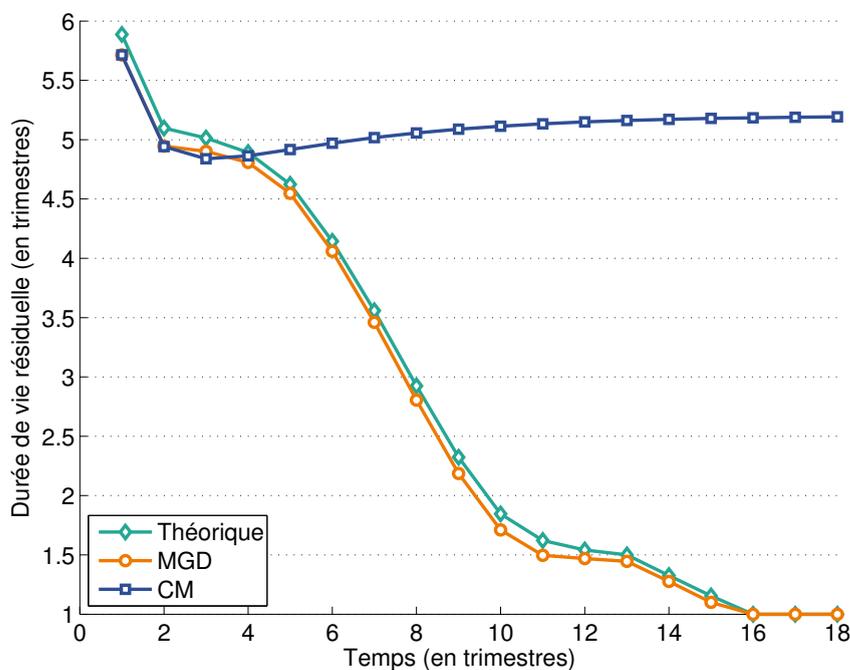


FIG. 2.9 – Évaluation de la durée de vie résiduelle du système à partir du modèle théorique et des l'approches MGD et CM.

quable provient du caractère défini par morceaux des Loies de Probabilité Conditionnelle (LPC) manipulées. Cette particularité a en général un intérêt d'un point de vue de leur stockage en mémoire. La seconde propriété est liée à la présence de composantes déterministes dans lesdites LPC. En conséquence, d'importantes simplifications peuvent être réalisées lors des calculs d'inférence. Une étude théorique complète est présentée, expliquant la réduction de complexité engendrée par la prise en compte de ces spécificités.

Pour finir, il n'existe pas, à notre connaissance, d'outil logiciel de modélisation par réseaux bayésiens permettant de manipuler efficacement des LPC définies par morceaux. Il n'est pourtant pas rare de rencontrer des cas d'applications où ce type de LPC est utilisable, en particulier dans le cadre de la représentation de systèmes dynamiques. Aussi, au cours de cette thèse, le développement d'une boîte à outils MATLAB[®] a été initié. L'ensemble des résultats numériques présentés dans ce rapport ont été obtenus à partir de cette boîte à outils. Cette dernière est à présent utilisée au sein du laboratoire INRETS-LTN mais à termes, une diffusion plus large est envisagée.

Chapitre 3

Modélisation de la maintenance

Sommaire

3.1	Introduction	88
3.1.1	Approche générale	88
3.1.2	État de l'art	89
3.1.3	Objectifs	89
3.2	Modèle VirMaLab	90
3.2.1	Description qualitative	90
3.2.2	Description probabiliste	92
3.2.3	Caractérisation paramétrique	97
3.2.4	Complexité spatiale	98
3.3	Calculs d'utilité	99
3.3.1	Construction d'une fonction d'utilité	100
3.3.2	Évaluation d'une fonction d'utilité	102
3.3.3	Complexité algorithmique	105
3.3.4	Exemple	108
3.4	Politiques de maintenance	115
3.4.1	Maintenance corrective	116
3.4.2	Maintenance préventive	117
3.5	Conclusions	123

3.1 Introduction

3.1.1 Approche générale

L'étude de la fiabilité est aujourd'hui une étape incontournable lors de la conception industrielle et une préoccupation permanente pour les systèmes opérationnels. Ceci est particulièrement vrai pour des systèmes exécutant des tâches critiques comme le transport de voyageurs. Les connaissances disponibles sur la fiabilité du système sont utilisées afin d'organiser sa maintenance. Cette approche est connue sous la dénomination Maintenance Basée sur la Fiabilité (MBF ou *RCM*, *Reliability-Centered Maintenance* pour l'acronyme anglais). La première description générale de la MBF a été proposée par [Nowlan and Heap \(1978\)](#). La principale référence en français traitant de la MBF est l'ouvrage de [Zwingselstein \(1996\)](#). En pratique, l'approche MBF a pour objectif de minimiser les coûts d'entretien tout en assurant le meilleur niveau de disponibilité du système considéré. Ce cadre de travail comporte de nombreuses déclinaisons, notamment suivant la nature de la politique de maintenance considérée. Cependant, la mise en place d'une telle démarche pour un système donné nécessite toujours :

- (i) un modèle représentant le processus de dégradation du système ;
- (ii) un modèle représentant les différentes solutions de maintenance envisageables ;
- (iii) une fonction d'utilité permettant d'évaluer chaque politique de maintenance réalisable.

La modélisation du système constitue en général l'étape la plus délicate, le reste de la méthode reposant grandement sur la pertinence de la représentation adoptée. Il s'agit d'expliquer au mieux les mécanismes d'évolution des différents états de fonctionnement du système. La présence d'un REX (Retour d'EXpérience) facilite la compréhension des processus de dégradation des composants du système et de leurs interactions. L'exploitation d'un REX possède en outre l'avantage de fournir une représentation relativement proche de la réalité. En revanche, s'il n'y a pas ou peu de données REX exploitables, il incombe aux experts de proposer leur modèle ce qui conduit parfois à l'introduction de biais importants.

La description des procédures de maintenance est souvent moins complexe. Il est en effet courant de disposer de référentiels décrivant les différentes actions d'entretien et de réparation possibles et leurs effets sur le système. Cette étape consiste alors à traduire mathématiquement ces référentiels.

La fonction d'utilité retenue permet enfin de quantifier la pertinence d'une politique de maintenance donnée. Le choix de la fonction d'utilité dépend du système représenté et du problème considéré. Cette dernière doit à la fois prendre en compte les contraintes économiques et les exigences de sûreté de fonctionnement. L'objectif de l'approche MBF est alors *in fine* de maximiser la fonction d'utilité en ajustant les paramètres de maintenance afin de réaliser le meilleur compromis entre coûts d'entretien et disponibilité du système.

3.1.2 État de l'art

Une grande partie des travaux scientifiques publiés dans le domaine de la maintenance s'intéressent aux méthodes préventives qu'elles soient systématiques ou conditionnelles. Les politiques préventives s'avèrent, en pratique, souvent bien plus avantageuses qu'une politique purement corrective entraînant de l'indisponibilité. Toutefois, la Maintenance Préventive (MP) n'est réellement efficace que si elle est correctement optimisée (Barlow and Hunter 1960). Citons par exemple les travaux récents de Bar-Noy et al. (2004), Grigoriev et al. (2006) et Courtois and Delsarte (2006) traitant de l'optimisation de politiques systématiques périodiques. Par ailleurs, les progrès scientifiques sur les capteurs et le diagnostic en général permettent de surveiller les systèmes industriels plus souvent et plus précisément. Ceci explique le nombre croissant d'études dédiées aux politiques de maintenance conditionnelles. En particulier, les travaux de Grall et al. (2002), Marseguerra et al. (2002), Castanier et al. (2005) et Bérenguer (2008) s'intéressent à la représentation de telles politiques et à leur optimisation. Bien que performante d'un point de vue calculatoire, les études précédentes reposent la plupart du temps sur des hypothèses relativement restrictives quant à la description du système (par exemple sur les lois de dégradation et la représentation du contexte).

Parallèlement, des outils plus génériques, basés notamment sur des modèles graphiques rudimentaires, ont été proposés (Vatn et al. 1996), (Vatn 1997) permettant la représentation de systèmes plus complexes. En revanche, ces travaux ne fournissent aucune solution algorithmique générale aux problèmes d'inférence soulevés. Plus récemment, l'utilisation des Modèles Graphiques Probabilistes (MGP) a partiellement résolu le problème précédent. Ce cadre de travail offre en effet un formalisme puissant et intuitif en matière de modélisation, ainsi qu'un ensemble d'outils d'analyse adaptés à l'évaluation de politiques de maintenance. Les travaux de Corset (2003) et Celeux et al. (2006) ont abordé la construction pratique d'un MGP dans le contexte d'une étude de sûreté de fonctionnement. Par ailleurs, Kang and Golay (1999) a proposé un MGP statique dédié à la modélisation de la maintenance, en incluant explicitement une couche diagnostic.

3.1.3 Objectifs

Les objectifs de ce chapitre sont d'unifier et d'étendre les travaux précédents en proposant une approche MBF dynamique et générique. Pour ce faire, nous nous plaçons dans le cadre des MGP Markoviens (MGPM) et nous supposons qu'un modèle de dégradation du système considéré est disponible sous cette forme (chaîne de Markov, modèle graphique de durée). La démarche générique initiée et développée à l'INRETS hors du cadre applicatif que relate ce mémoire, consiste à enrichir ce modèle de dégradation en ajoutant une composante de diagnostic, de maintenance et d'utilité. Il s'agit au final de fournir un outil d'analyse complet capable de s'adapter aux différentes stratégies de maintenance rencontrées couramment dans l'industrie. La partie 3.2 est consacrée à la description de ce modèle que nous désignons dans la suite par modèle VIRMALAB. La partie 3.3 aborde le problème de l'inférence probabiliste appliquée aux calculs d'utilité permettant l'évaluation

d'une politique de maintenance donnée. Pour finir, un point sur les différentes politiques de maintenance représentables par cette approche est fourni dans la partie 3.4. Le chapitre 4 détaille quant à lui la traduction de cette approche générique au problème industriel rencontré par la Régie Autonome des Transports Parisiens (RATP).

3.2 Modèle VIRMA LAB

3.2.1 Description qualitative

Le modèle graphique associé à l'approche VIRMA LAB est donné dans la figure 3.1. Ce dernier caractérise les relations de dépendance du vecteur aléatoire $(\mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t, A_t)_{t \geq 1}$ sur deux tranches temporelles. Pour des raisons de lisibilité et de complexité spatiale et algorithmique, le modèle VIRMA LAB est représenté sous la forme d'un 1-MGPM. Toutefois, il est important de noter qu'il n'existe pas de verrou théorique quant à l'extension du modèle à un ordre markovien supérieur. Le modèle VIRMA LAB est donc constitué de trois composantes principales dédiées respectivement à l'évolution du système (processus $(\mathbf{X}_t)_{t \geq 1}$), à son diagnostic (processus $(\mathbf{D}_t)_{t \geq 1}$) et à sa maintenance (processus $(A_t)_{t \geq 1}$).

Le vecteur aléatoire \mathbf{X}_t représente l'état du système à l'instant t . L'état du système désigne ici toutes les variables permettant d'expliquer son évolution temporelle. L'hypothèse la plus simple consiste à réduire le vecteur \mathbf{X}_t à une simple variable X_t . Dans le chapitre 2, nous avons étudié le cas où le système était décrit par le vecteur $\mathbf{X}_t = (X_t, S_t)$, à savoir son état à l'instant t ainsi que la durée avant une transition. L'exemple 2.6 illustre la prise en compte d'un contexte agissant sur le système (cadence de production). Dans ce cas, le vecteur \mathbf{X}_t désigne le triplet (C_t, E_t, S_t) .

Le vecteur aléatoire $\mathbf{D}_t = ((\delta_{t,\ell}, D_{t,\ell})_{1 \leq \ell \leq L}, D_t^{\text{sys}})$ représente l'ensemble des moyens de diagnostic du système. Plus précisément, le modèle de diagnostic est composé de L méthodes de diagnostic indépendantes entre elles conditionnellement à l'état du système caractérisées par les variables aléatoires $D_{t,1}, \dots, D_{t,L}$. Chaque variable D_ℓ représente le résultat du diagnostic de la ℓ -ème méthode à l'instant t . Les variables $\delta_{t,1}, \dots, \delta_{t,L} \in \{0, 1\}$ sont des variables binaires indiquant si chaque méthode de diagnostic est active à l'instant t . La variable D_t^{sys} représente le diagnostic final du système à l'instant t issu du traitement des résultats des L méthodes de diagnostic.

La variable A_t désigne l'action de maintenance sélectionnée à l'instant t . Dans le modèle VIRMA LAB, la décision de maintenance est prise à partir du diagnostic final. Cette action agit ensuite potentiellement sur l'état du système à l'instant suivant.

D'après la définition 1.13, le vecteur aléatoire associé à l'interface gauche dans le modèle VIRMA LAB à l'instant t est $(\mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1})$. Le théorème 1.4 s'écrit alors :

$$\mathbf{X}_{t-2}, \mathbf{D}_{t-2}, A_{t-2} \perp\!\!\!\perp \mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t, A_t \mid \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}. \quad (3.1)$$

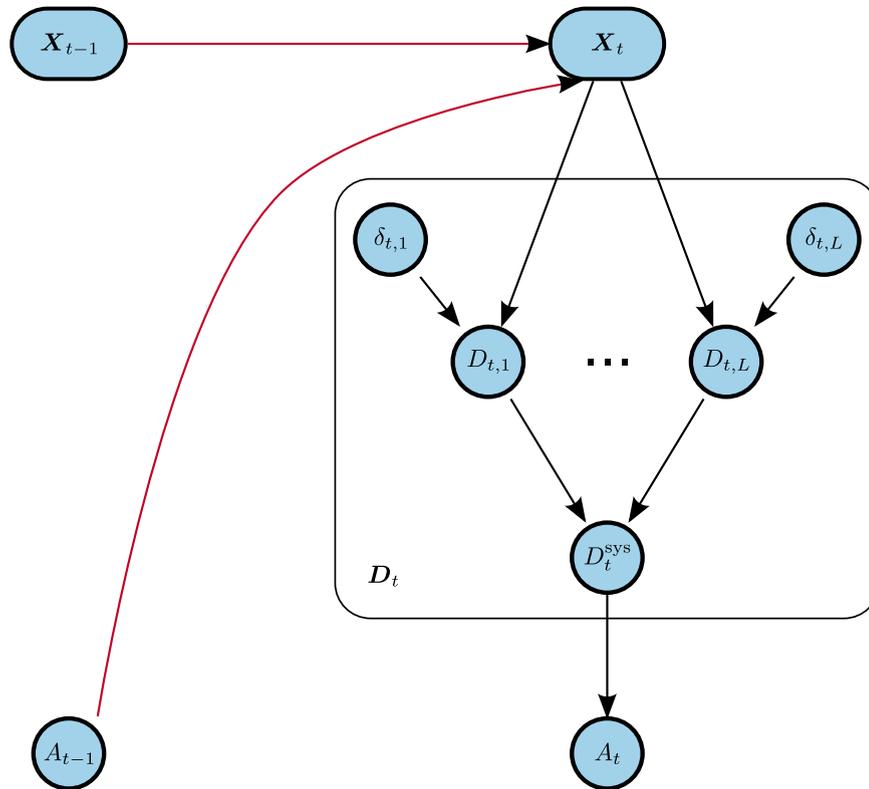


FIG. 3.1 – 1-MPGM (modèle de transition) associé au modèle VIRMA LAB. Dans le but d'améliorer la lisibilité, remarquons que seul le modèle de transition est représenté sur la figure. Le modèle initial étant identique à celui d'une tranche de temps quelconque, il n'y a pas de confusion possible.

Les relations de dépendance engendrées par la structure graphique du modèle conduisent à la définition récursive suivante pour l'interface gauche :

$$P(\mathbf{X}_t, A_t) = \begin{cases} P(\mathbf{X}_1) \sum_{\mathbf{D}_1} P(\mathbf{D}_1 | \mathbf{X}_1) P(A_1 | \mathbf{D}_1) & t = 1 \\ \sum_{\substack{\mathbf{X}_{t-1} \\ A_{t-1}}} P(\mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}) P(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1}) \sum_{\mathbf{D}_t} P(\mathbf{D}_t | \mathbf{X}_{t-1}) P(A_t | \mathbf{D}_t) & t \geq 2 \end{cases} \quad (3.2)$$

avec pour tout $t \geq 1$,

$$P(\mathbf{D}_t) = \prod_{\ell=1}^L [P(\delta_{t,\ell}) P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})] P(D_t^{\text{sys}}, | D_{t,1}, \dots, D_{t,L}),$$

et

$$P(A_t | \mathbf{D}_t) = P(A_t | D_t^{\text{sys}}).$$

D'un point de vue purement qualitatif, la structure graphique associée à l'approche VIR-MALAB permet de représenter :

- le processus de dégradation d'un système ;
- un nombre quelconque de méthodes de diagnostic dont l'activation dépend du temps ;
- une politique de traitement des différents résultats de diagnostic ;
- une politique d'actions de maintenance.

Cette démarche possède l'avantage d'être à la fois réaliste et générique. Elle s'adapte en effet à de nombreux systèmes industriels et couvre un large éventail de problèmes liés à la modélisation de la maintenance. Notons toutefois qu'afin de se placer dans un cadre permettant de réaliser des calculs d'inférence exacte, nous supposons que toutes les variables du modèle VIR-MALAB sont discrètes et finies.

3.2.2 Description probabiliste

Loi d'évolution du système

Soient \mathcal{X} l'ensemble des états du système et \mathcal{A} l'ensemble des actions de maintenance. L'ensemble \mathcal{A} est partitionné tel que $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}} \cup \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ où $\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}} \neq \emptyset$ et $\mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ représentent respectivement l'ensemble des actions laissant le système invariant et celui des actions affectant le système. Dans le modèle VIR-MALAB, le processus de dégradation du système est caractérisé par la distribution initiale des états du système $\lambda_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathbf{x}\}_1}$ et la distribution de transition $\Lambda \in \mathcal{L}^{\{\mathbf{x}\}_t | \{\mathbf{x}, \mathcal{A}\}_{t-1}}$. Formellement, nous avons pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$P(\mathbf{X}_1 = \mathbf{x}) = \lambda_1(\mathbf{x}).$$

Autrement dit, la valeur $\lambda_1(\mathbf{x})$ donne la probabilité que le système se trouve dans la configuration \mathbf{x} à l'instant initial.

Concernant le modèle de transition, deux cas sont à distinguer :

- (i) Si l'action sélectionnée à l'état précédent laisse le système invariant ($A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}$), le système évolue selon la loi de transition naturelle $\Lambda^{\text{sys}} \in \mathcal{L}^{\{\mathbf{x}\}_t | \{\mathbf{x}\}_{t-1}}$. Pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$, Λ^{sys} vérifie alors

$$P(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}) = \Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}).$$

Le système passe naturellement de la configuration \mathbf{x}' à \mathbf{x} avec une probabilité égale à $\Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x})$.

- (ii) Si l'action sélectionnée à l'état précédent agit sur le système ($A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$), le système subit une transition artificielle contrôlée par la loi $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}^{\{\mathbf{x}\}_t | \{\mathbf{x}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}}$. Pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$, Λ^{act} vérifie alors

$$P(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', A_{t-1} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}) = \Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a', \mathbf{x}).$$

La valeur $\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a', \mathbf{x})$ exprime ainsi la probabilité pour le système de passer de la configuration \mathbf{x}' à \mathbf{x} alors que l'action a' a été sélectionnée.

Par conséquent, la loi de transition du système est définie par morceaux telle que pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a' \in \mathcal{A}$,

$$P(\mathbf{X}_t = \mathbf{x} | \mathbf{X}_{t-1} = \mathbf{x}', A_{t-1} = a') = \Lambda(\mathbf{x}', a', \mathbf{x}) = \begin{cases} \Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) & \text{si } a' \in \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}} \\ \Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a', \mathbf{x}) & \text{si } a' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}} \end{cases} .$$

Remarque 3.1 (Utilisation d'un MGD)

La description du modèle d'évolution du système dépend à la fois du problème considéré et du degré de précision souhaité. En adoptant une représentation par Modèle Graphique de Durée (MGD, cf. chapitre 2), le vecteur aléatoire modélisant l'état général du système vaut alors $\mathbf{X}_t = (X_t, S_t)$ où X_t et S_t désignent respectivement l'état du processus et le temps avant une transition naturelle à l'instant t . L'ensemble des valeurs prises par \mathbf{X}_t est $\mathcal{X} = \mathcal{X} \times \mathcal{S}$. Par ailleurs, en reprenant les notations de la partie 2.3, la loi initiale du système dans le modèle VIRMA LAB, $\lambda_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_1}$, est donnée pour tout $\mathbf{x} = (x, s) \in \mathcal{X} \times \mathcal{S}$ par

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \lambda_1(x, s) = \alpha_1(x) F_1(x, s). \quad (3.3)$$

Dans ce cas, la loi de transition naturelle, $\Lambda^{\text{sys}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_{t-1}}$ est définie pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tous $s', s \in \mathcal{S}$ par

$$\Lambda^{\text{sys}}(x', s', x, s) = \begin{cases} Q^{\text{sys}}(x', x) F^{\text{sys}}(x', x, s) & \text{si } s' = 1 \\ I(x', x) C(s', s) & \text{si } s' \geq 2 \end{cases} . \quad (3.4)$$

Enfin, pour toute action $a' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ agissant sur le système, la loi de transition artificielle, $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}\}_{t-1}}$ est définie pour tous $\mathbf{x}', \mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $s \in \mathcal{S}$ par

$$\Lambda^{\text{act}}(x', a', x, s) = Q^{\text{act}}(x', a', x) F^{\text{sys}}(x', x, s). \quad (3.5)$$

Les équations (3.3), (3.4) et (3.5) caractérisent le processus décrivant l'évolution temporelle du système modélisé par un MGD dans le cadre d'une approche VIRMA LAB.

D'après la partie 2.3.6, nous pouvons en outre déduire le cas où le système est représenté par une Chaîne de Markov (CM). Cela revient simplement à supprimer les LPC F_1 et F^{sys} des calculs précédents. Formellement, nous avons pour tout $\mathbf{x} = (x, s) \in \mathcal{X} \times \{1\}$,

$$\lambda_1(\mathbf{x}) = \lambda_1(x, 1) = \alpha_1(x) \underbrace{F_1(x, 1)}_{=1} = \alpha_1(x),$$

$$\Lambda^{\text{sys}}(x', s', x, s) = \begin{cases} Q^{\text{sys}}(x', x) \underbrace{F^{\text{sys}}(x', x, 1)}_{=1} & \text{si } s' = 1 \\ \underbrace{I(x', x) C(s', s)}_{\text{cas impossible car } s = 1} & \text{si } s' \geq 2 \end{cases} = Q^{\text{sys}}(x', x),$$

et pour tout $a' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$,

$$\Lambda^{\text{act}}(x', a', x, s) = Q^{\text{act}}(x', a', x) \underbrace{F^{\text{sys}}(x', x, 1)}_{=1} = Q^{\text{act}}(x', a', x).$$

Diagnostic

Dans un premier temps, le diagnostic du système est réalisé à chaque instant t par L méthodes caractérisées par les variables aléatoire $D_{t,1}, \dots, D_{t,L}$ à valeurs respectivement dans les ensembles $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L$. Le rôle de ces organes de diagnostic consiste à fournir des informations sur l'état réel du système, ce dernier n'étant pas accessible directement. Les ensembles $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L$ contiennent les résultats possibles de chacune des méthodes de diagnostic. Pour chaque méthode ℓ , le nombre $|\mathcal{D}_\ell|$ représente la taille du spectre de détection de la ℓ -ème méthode. L'activation de chaque méthode $D_{t,\ell}$ à l'instant t est contrôlée par la variable binaire $\delta_{t,\ell}$. Notons que chaque ensemble \mathcal{D}_ℓ contient un élément d_\emptyset permettant de signaler explicitement que la méthode correspondante n'est pas activée. Ceci est détaillé dans les paragraphes qui suivent.

La LPC de la variable $D_{t,\ell}$ permet alors de décrire le comportement probabiliste de la ℓ -ème méthode de diagnostic à l'instant t . Deux cas sont à distinguer :

- (i) Si la ℓ -ème variable d'activation vaut un à l'instant t ($\delta_{t,\ell} = 1$), le système est examiné selon la ℓ -ème méthode de diagnostic. Les caractéristiques du diagnostic effectué sont décrites dans la LPC $\Delta_\ell \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}_\ell\} \times \{\mathcal{X}\}^t}$. Formellement, pour tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$ et tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$

$$P(D_{t,\ell} = d_\ell | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,\ell} = 1) = \Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell).$$

La quantité $\Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell)$ correspond à la probabilité de renvoyer le signal d_ℓ sachant que le système se trouve dans l'état \mathbf{x} . Lorsque les états du système sont triés dans un ordre croissant de gravité, trois situations sont envisageables :

- lorsque $\mathbf{x} < d_\ell$, l'état réel est moins grave que le diagnostic, $\Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell)$ correspond à un taux de fausse alarme ;
- lorsque $\mathbf{x} = d_\ell$, l'état réel est identique au diagnostic, $\Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell)$ correspond à un taux de bonne détection ;
- lorsque $\mathbf{x} > d_\ell$, l'état réel est plus grave que le diagnostic, $\Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell)$ correspond à un taux de non détection.

- (ii) Si la ℓ -ème variable d'activation vaut zéro à l'instant t ($\delta_{t,\ell} = 0$), la méthode ℓ est inhibée. Cela se traduit formellement en associant au diagnostic $d_\emptyset \in \mathcal{D}_\ell$ une probabilité égale à un, et ce, quel que soit l'état réel du système. Autrement dit, pour tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$ et tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$P(D_{t,\ell} = d_\ell | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,\ell} = 0) = \mathbb{I}(d_\ell = d_\emptyset).$$

Les LPC associées aux méthodes de diagnostic sont donc définies par morceaux telles que pour tout $\ell = 1, \dots, L$, tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$, tout $\delta_{t,\ell} \in \{0, 1\}$, et tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$P(D_{t,\ell} = d_\ell | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,\ell}) = \begin{cases} \Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 1 \\ \mathbb{I}(d_\ell = d_\emptyset) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 0 \end{cases}.$$

Remarquons enfin que les temps d'activation de chaque méthode de diagnostic sont des paramètres participant à la définition de la politique de maintenance du système. Ceci n'est pas le cas des LPC $\Delta_1, \dots, \Delta_L$ qui, elles, sont supposées provenir des caractéristiques techniques des appareils de diagnostic considérés.

Exemple 3.1

Soit un système à trois états dont l'évolution est représentée par une chaîne de Markov. Dans ce cas, nous supposons que $\mathbf{X}_t = X_t$ et $\mathcal{X} = \mathcal{X} = \{\text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$. Considérons de plus que le système possède deux méthodes de diagnostic modélisées par les variables $D_{t,1}$ et $D_{t,2}$. Admettons enfin que ces deux méthodes soient spécialisées dans un diagnostic particulier. Par exemple, la première méthode est dédiée à la détection de l'état dégradé, et la seconde à la détection de l'état panne. Nous fixons alors $\mathcal{D}_1 = \{d_\emptyset, \overline{\text{dégradé}}, \text{dégradé}\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{d_\emptyset, \overline{\text{panne}}, \text{panne}\}$, ainsi que les valeurs numériques suivantes :

Δ_1				Δ_2			
$D_{t,1}$				$D_{t,2}$			
X_t	d_\emptyset	$\overline{\text{dégradé}}$	dégradé	X_t	d_\emptyset	$\overline{\text{panne}}$	panne
ok	0	0.95	0.05	ok	0	1	0
dégradé	0	0.15	0.85	dégradé	0	1	0
panne	0	1	0	panne	0	0.01	0.99

L'observation de la LPC associée à la première méthode montre que cette dernière commet 5% de fausses alarmes lorsque le système est dans l'état ok. D'autre part, l'état dégradé est bien détecté dans 85% des cas contre 15% de non détection. Conformément à la description donnée, cette méthode ne permet pas de diagnostiquer l'état panne. En effet, dès que le système est dans cet état, le résultat de la détection indique uniquement que le système n'est pas dans l'état dégradé. À l'inverse, la seconde méthode ne peut pas détecter l'état dégradé, mais fournit un diagnostic correct concernant l'état panne dans 99% des cas.

Rappelons que les LPC Δ_1 et Δ_2 définissent le comportement probabiliste des méthodes de diagnostic lorsqu'elles sont activées. Dans le cas contraire, le résultat du diagnostic est déterministe et vaut d_\emptyset quel que soit l'état réel du système.

Les résultats de chaque méthode de diagnostic à l'instant t sont ensuite traités afin d'en déduire un diagnostic final. Ce dernier dépend de la politique de diagnostic décrite par la LPC de la variable D_t^{sys} à valeurs dans \mathcal{D}^{sys} et notée $\Delta_t^{\text{sys}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t | \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L\}_t}$. Il est à noter que le diagnostic d_\emptyset appartient également à l'ensemble \mathcal{D}^{sys} et correspond au cas où aucune méthode de diagnostic n'est activée à l'instant t . Formellement, Δ_t^{sys} vérifie pour tout $\ell = 1, \dots, L$, tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$ et tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$,

$$P(D_t^{\text{sys}} = d | D_{t,1} = d_1, \dots, D_{t,L} = d_L) = \Delta_t^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d).$$

La valeur $\Delta_t^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d)$ correspond à la probabilité que le diagnostic final du système à l'instant t soit d alors que les L diagnostics indépendants ont respectivement donné les résultats d_1, \dots, d_L . À l'instar des variables d'activation, la stratégie décisionnelle du diagnostic est un des paramètres définissant la politique de maintenance du système.

Exemple 3.2

Plaçons nous à nouveau dans le contexte de l'exemple 3.1. Dans ce cas, définir la politique du diagnostic revient à établir quel est le diagnostic final selon la valeur des deux méthodes

de diagnostic disponibles. Une manière naturelle de procéder consiste à prendre

$$\mathcal{D}^{\text{sys}} = \{d_{\emptyset}\} \cup \mathcal{X} = \{d_{\emptyset}, \text{ok}, \text{dégradé}, \text{panne}\}$$

de façon à couvrir l'ensemble des états possibles à diagnostiquer. La stratégie assurant ici le minimum de non détection consiste à retenir la détection la plus critique comme diagnostic final. Cela s'exprime numériquement par :

		Δ^{sys}			
		D_t^{sys}			
$D_{t,1}$	$D_{t,2}$	d_{\emptyset}	ok	dégradé	panne
d_{\emptyset}	d_{\emptyset}	1	0	0	0
$\overline{\text{dégradé}}$	d_{\emptyset}	0	1	0	0
dégradé	d_{\emptyset}	0	0	1	0
d_{\emptyset}	$\overline{\text{panne}}$	0	1	0	0
$\overline{\text{dégradé}}$	$\overline{\text{panne}}$	0	1	0	0
dégradé	$\overline{\text{panne}}$	0	0	1	0
d_{\emptyset}	panne	0	0	0	1
$\overline{\text{dégradé}}$	panne	0	0	0	1
dégradé	panne	0	0	0	1

Toutefois, une telle approche peut favoriser les fausses alarmes, entraînant parfois un impact économique non négligeable.

Action de maintenance

Le choix de l'action de maintenance à l'instant t est contrôlé par la LPC associée à la variable aléatoire A_t , notée $\Gamma \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{A}\}_t \mid \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t}$. Dans le modèle VIRMA LAB, l'action de maintenance est sélectionnée selon le résultat du diagnostic final. La LPC Γ vérifie pour tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$P(A_t = a \mid D_t = d) = \Gamma(d, a).$$

La valeur $\Gamma(d, a)$ désigne la probabilité de déclencher l'action de maintenance a sachant que le diagnostic final du système est d . Si l'action sélectionnée à l'instant t appartient à l'ensemble \mathcal{A}^{X} , l'état du système est modifié *via* la LPC de transition Λ^{act} .

Exemple 3.3

Reprenons l'exemple 3.2 et soit $\{\text{néant}, \text{réparation partielle}, \text{réparation totale}\}$ l'ensemble des actions possibles où l'action "néant" désigne l'absence d'action. Supposons que l'action "réparation partielle" permette de réduire la dégradation du système d'un état, et que l'action "réparation totale" ramène le système dans l'état ok. La partition de l'ensemble \mathcal{A} est donc constituée des deux ensembles

$\mathcal{A}^{\text{X}} = \{\text{réparation partielle}, \text{réparation totale}\}$ et $\mathcal{A}^{\overline{\text{X}}} = \{\text{néant}\}$. Par ailleurs, d'après les descriptions précédentes, la LPC Λ^{act} vérifie ici :

		Λ^{act}		
		X_t		
X_{t-1}	A_{t-1}	ok	dégradé	panne
ok	réparation partielle	1	0	0
dégradé	réparation partielle	1	0	0
panne	réparation partielle	0	1	0
ok	réparation totale	1	0	0
dégradé	réparation totale	1	0	0
panne	réparation totale	1	0	0

Considérons enfin une politique d'actions telle que si le résultat du diagnostic final est :

- d_\emptyset ou ok, alors aucune action n'est déclenchée ;
- dégradé, alors une réparation partielle est effectuée dans 50% des cas et aucune action le reste de temps ;
- panne, alors une réparation partielle est effectuée dans 33% des cas et une réparation totale le reste de temps.

Ceci se traduit numériquement par :

Γ			
A_t			
D_t^{sys}	néant	réparation partielle	réparation totale
d_\emptyset	1	0	0
ok	1	0	0
dégradé	0.5	0.5	0
panne	0	0.33	0.67

3.2.3 Caractérisation paramétrique

La description probabiliste du modèle VIRMA LAB donnée dans la partie 3.2.2 met en évidence les différents paramètres du modèle. Ces derniers peuvent être classés en deux catégories : les paramètres descriptifs et les paramètres de maintenance. La première catégorie correspond aux paramètres caractérisant le fonctionnement du système considéré. Il s'agit donc des éléments associés à l'évolution du système (λ_1, Λ^{sys}), à la précision des méthodes de diagnostic $(\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$ et aux effets des actions de maintenance Λ^{act} . En pratique, ces paramètres se déduisent à partir du Retour d'EXpérience (REX), d'avis d'experts, des caractéristiques techniques du matériel utilisé ou encore des référentiels de maintenance. Par conséquent, hormis lors de changements techniques, les paramètres descriptifs sont supposés fixes pour un système donné. Dans la suite, nous adoptons la notation

$$\mathcal{V}^{desc} = (\lambda_1, \Lambda^{sys}, \Lambda^{act}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L})$$

pour désigner les paramètres descriptifs du modèle.

La seconde catégorie de paramètres décrit la stratégie de maintenance du système. Il s'agit par conséquent des instants d'activation des diagnostics $(\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}$, de la politique de traitement des diagnostics Δ^{sys} et de la politique de décision de maintenance Γ . L'ensemble des stratégies de maintenance représentables à partir de ces paramètres est abordé dans la partie 3.4. Comme précédemment, nous désignons

$$\mathcal{V}^{\text{maint}} = ((\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$$

les paramètres de maintenance du modèle VIRMLAB. De manière générale, l'objectif d'une telle approche consiste alors à déterminer $\mathcal{V}^{\text{maint}}$, étant donné $\mathcal{V}^{\text{desc}}$ de façon à optimiser un certain critère.

Il est alors possible d'utiliser la notation $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}^{\text{maint}})$ pour caractériser un modèle VIRMLAB, c'est-à-dire en spécifiant ses paramètres descriptifs et ses paramètres de maintenance.

3.2.4 Complexité spatiale

Soit $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{\text{sys}}, \Lambda^{\text{act}}, (\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ un modèle VIRMLAB. La complexité spatiale de ce modèle, notée $CS(\mathcal{V})$, correspond à la somme des complexités spatiales associées aux LPC décrivant l'évolution du système, la chaîne de diagnostics et l'action de maintenance. La table 3.1 détaille le coût de stockage de chacune des LPC du modèle.

LPC	Description	CS
λ_1	État initial	$\mathcal{O}(\mathcal{X})$
Λ^{sys}	Transition naturelle	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2)$
Λ^{act}	Transition artificielle	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2 \mathcal{A}^{\mathcal{X}})$
$(\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$	Méthodes de diagnostic	$\mathcal{O}(\mathcal{X} ^2 \sum_{\ell=1}^L \mathcal{D}_\ell)$
Δ^{sys}	Politique du diagnostic	$\mathcal{O}(\mathcal{D}^{\text{sys}} \prod_{\ell=1}^L \mathcal{D}_\ell)$
Γ	Politique des actions de maintenance	$\mathcal{O}(\mathcal{D}^{\text{sys}} \mathcal{A})$

TAB. 3.1 – Complexité spatiale des LPC associées au modèle VIRMLAB.

Nous en déduisons par conséquent

$$CS(\mathcal{V}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 (|\mathcal{A}^{\mathcal{X}}| + \sum_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell|) + |\mathcal{D}^{\text{sys}}| (\prod_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell| + |\mathcal{A}|)). \quad (3.6)$$

D'après le résultat (3.6), la complexité spatiale du processus d'évolution du système, en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}^{\mathcal{X}}|)$, contribue de manière significative au coût de stockage du modèle VIRMLAB. Par exemple, si le système est représenté par une chaîne de Markov dont l'espace

d'état est \mathcal{X} , la complexité spatiale du système est en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^X|)$. Dans le cadre d'une modélisation par MGD, cette complexité est alors de l'ordre $\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2(T_S + |\mathcal{A}^X|) + T_S)$ où T_S désigne la borne supérieure du support des lois de temps de séjour.

Le nombre de méthodes de diagnostic considérées et la taille de leur spectre de détection ont également une influence importante sur la complexité du modèle. En particulier, la LPC Δ^{sys} , caractérisant la politique du diagnostic, possède un coût de stockage en $\mathcal{O}(|\mathcal{D}^{\text{sys}}| \prod_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell|)$, pouvant devenir rapidement déraisonnable de par le produit sur les résultats possibles de chaque méthode de diagnostic. Dans le meilleur des cas, il n'y a que deux diagnostics possibles par méthode ce qui conduit à $CS(\Delta^{\text{sys}}) = \mathcal{O}(2^{L+1})$. À l'inverse, il est rare en pratique que le nombre de diagnostics possibles par méthode dépasse le nombre des états du système. La pire situation du point de vue du stockage correspond donc à $\mathcal{O}(|\mathcal{D}^{\text{sys}}|) = \mathcal{O}(|\mathcal{D}_1|) = \dots = \mathcal{O}(|\mathcal{D}_L|) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|)$ et par conséquent $CS(\Delta^{\text{sys}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^{L+1})$.

3.3 Calculs d'utilité

Considérons un modèle VIRMALAB, noté $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}^{\text{maint}})$, caractérisé par ses paramètres descriptifs et ses paramètres de maintenance (cf. partie 3.2.3). Rappelons que l'objectif du modèle VIRMALAB est de permettre l'évaluation de stratégies de maintenance appliquées à un système donné. Dans notre cadre de travail, cette évaluation s'exprime en termes d'utilité (cf. partie 1.2.3). Nous supposons en effet qu'à chaque instant t , le système, les diagnostics et l'action de maintenance engendrent chacun des utilités. En pratique, ces dernières sont souvent homogènes à un coût ou à un profit. Toutefois, une utilité correspond plus généralement à une grandeur calculable à partir de la loi du vecteur aléatoire considéré et n'a donc pas forcément une connotation économique. Par exemple dans une étude de fiabilité, une utilité peut être associée à un nombre de défauts particuliers ou à un nombre de fausses alarmes pour un appareil de diagnostic.

La figure 3.2 représente le modèle VIRMALAB à la tranche t sur lequel des nœuds d'utilité sont explicitement représentés. Contrairement aux nœuds usuels dans les MGP, les nœuds d'utilité ne sont pas associés à des variables aléatoires. Ces derniers servent uniquement à indiquer explicitement sur quelles variables les calculs d'utilité sont réalisés.

Remarque 3.2 (Diagrammes d'influence)

Notons que les MGP possédant des nœuds d'utilité sont souvent référencés sous le terme diagramme d'influence dans la littérature (Shachter 1988). Plus particulièrement, un diagramme d'influence est un MGP constitué de nœuds d'utilité et de nœuds de décision, et a pour objectif de modéliser graphiquement un problème décisionnel. Ces nœuds de décision représentent les actions possibles pour le décideur et n'ont par conséquent pas de variable parente dans le graphe. Une fois la modélisation du problème effectuée, des algorithmes d'inférence permettent de déterminer les décisions maximisant l'utilité totale. Il est toutefois important de noter que les méthodes d'inférence pour les diagrammes d'influence sont très proches des méthodes génériques dédiées aux MGP classiques (Jensen et al. 1994). Par ailleurs, la problématique abordée dans ce chapitre ne permet pas d'utiliser les outils développés dans le cadre des diagrammes d'influence. Dans la suite de ce document, nous

nous limitons donc au cadre plus flexible des MGP.

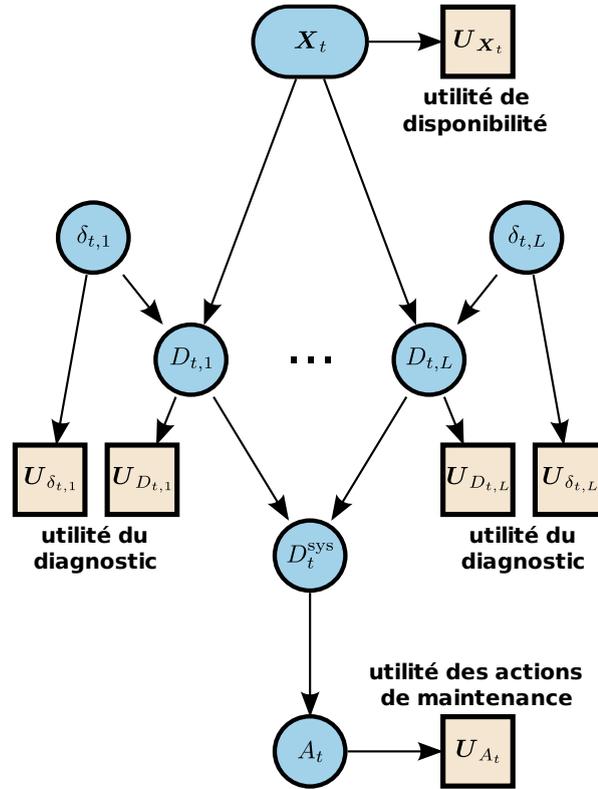


FIG. 3.2 – Modèle VIRMA LAB à la tranche t avec utilités. Les nœuds carrés représentent les utilités des variables parentes associées.

3.3.1 Construction d'une fonction d'utilité

Les paragraphes suivants détaillent tout d'abord le calcul des utilités associées aux différentes composantes du modèle à l'instant t . La construction d'une fonction d'utilité est traitée par la suite.

Utilités du système

Soient $u_{\mathbf{X}_t}^1, \dots, u_{\mathbf{X}_t}^{K_{\mathbf{X}}} \in \mathbb{R}^{\{\mathcal{X}\}_t}$ une suite de potentiels d'utilité associée au vecteur aléatoire \mathbf{X}_t représentant l'état du système à l'instant t . Notons également $\lambda_t \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}\}_t}$ la distribution de \mathbf{X}_t , autrement dit $\lambda_t = P(\mathbf{X}_t)$. Pour tout $k_{\mathbf{X}} = 1, \dots, K_{\mathbf{X}}$ et tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, la $k_{\mathbf{X}}$ -ème utilité associée à \mathbf{X}_t , notée $U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}} \in \mathbb{R}$, est définie par

$$U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}} = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} u_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}}(\mathbf{x}) \lambda_t(\mathbf{x}). \quad (3.7)$$

En vue de simplifier les notations, le vecteur $\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t} = (U_{\mathbf{X}_t}^1, \dots, U_{\mathbf{X}_t}^{K_{\mathbf{X}}}) \in \mathbb{R}^{K_{\mathbf{X}}}$ est utilisé afin de désigner les différentes utilités du système à l'instant t . Précisons également que lorsque les potentiels d'utilité ne dépendent pas de t , ces derniers sont dits homogènes, auquel cas l'indice t est omis et l'écriture $u_{\mathbf{X}}^1, \dots, u_{\mathbf{X}}^{K_{\mathbf{X}}} \in \mathbb{R}^{\{\mathbf{X}\}}$ est adoptée.

Utilités des diagnostics

Soit $u_{\delta_{t,\ell}}^1, \dots, u_{\delta_{t,\ell}}^{K_{\delta_\ell}}$ une suite d'utilités associée à l'activation de la ℓ -ème méthode de diagnostic à l'instant t . Pour tout $\ell = 1, \dots, L$, tout $k_{\delta_\ell} = 1, \dots, K_{\delta_\ell}$, la k_{δ_ℓ} -ème utilité associée à la variable d'activation $\delta_{t,\ell} \in \{0, 1\}$, notée $U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}} \in \mathbb{R}$, est définie par

$$U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}} = u_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}} \delta_{t,\ell}. \quad (3.8)$$

Par conséquent, l'hypothèse implicite formulée ici consiste à fixer une utilité nulle lorsque le diagnostic n'est pas activé et une utilité $u_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}}$ sinon. Comme précédemment, le vecteur $\mathbf{U}_{\delta_{t,\ell}} = (U_{\delta_{t,\ell}}^1, \dots, U_{\delta_{t,\ell}}^{K_{\delta_\ell}}) \in \mathbb{R}^{K_{\delta_\ell}}$ désigne les utilités liées à l'activation de la ℓ -ème méthode de diagnostic à l'instant t .

Il n'est pas rare que le déclenchement d'un diagnostic entraîne une procédure de confirmation qui elle-même peut avoir son utilité propre (cf. chapitre 4). Pour en tenir compte, nous introduisons $u_{D_{t,\ell}}^1, \dots, u_{D_{t,\ell}}^{K_{D_\ell}} \in \mathbb{R}^{\{\mathbf{X}\}^t}$ une suite de potentiels d'utilité associée à la variable aléatoire $D_{t,\ell}$ représentant le résultat de la ℓ -ème méthode de diagnostic à l'instant t . Pour tout $k_{D_\ell} = 1, \dots, K_{D_\ell}$ et tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$, la k_{D_ℓ} -ème utilité associée à $D_{t,\ell}$, notée $U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}} \in \mathbb{R}$, est définie par

$$U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}} = \sum_{d_\ell \in \mathcal{D}_\ell} u_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}}(d_\ell) P(D_{t,\ell} = d_\ell). \quad (3.9)$$

Le vecteur $\mathbf{U}_{D_{t,\ell}} = (U_{D_{t,\ell}}^1, \dots, U_{D_{t,\ell}}^{K_{D_\ell}}) \in \mathbb{R}^{K_{D_\ell}}$ désigne les différentes utilités du diagnostic associées à la ℓ -ème méthode à l'instant t .

De manière synthétique, le vecteur $\mathbf{U}_{D_t} = (\mathbf{U}_{\delta_{t,\ell}}, \mathbf{U}_{D_{t,\ell}})_{1 \leq \ell \leq L}$ contient l'ensemble des utilités liées à la composante diagnostic du modèle VIRMALAB à l'instant t .

Utilités de l'action de maintenance

Soit $u_{A_t}^1, \dots, u_{A_t}^{K_A} \in \mathbb{R}^{\{\mathbf{X}\}^t}$ une suite de potentiels d'utilité associée à la variable aléatoire A_t représentant l'action de maintenance à l'instant t . Pour tout $a \in \mathcal{A}$, la k_A -ème utilité associée à A_t , notée $U_{A_t}^{k_A} \in \mathbb{R}$, est définie par

$$U_{A_t}^{k_A} = \sum_{a \in \mathcal{A}} u_{A_t}^{k_A}(a) P(A_t = a). \quad (3.10)$$

Le vecteur $\mathbf{U}_{A_t} = (U_{A_t}^1, \dots, U_{A_t}^{K_A}) \in \mathbb{R}^{K_A}$ désigne les différentes utilités de l'action de maintenance sélectionnée à l'instant t .

Fonction d'utilité

Soit $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}^{\text{maint}})$ un modèle VIRMALAB tel que défini dans la partie 3.2.3. Il s'agit à présent de proposer un critère permettant d'évaluer, et donc de comparer, chacune des stratégies de maintenance représentables par les paramètres $\mathcal{V}^{\text{maint}}$. La démarche retenue consiste à combiner les utilités obtenues à chaque instant t de manière à obtenir un résultat sur un horizon de longueur T . La fonction d'utilité définit la manière dont sont combinées les utilités de chaque composante du système. Formellement, il s'agit de construire une fonction, notée f^{util} , qui associe à tout modèle VIRMALAB \mathcal{V} un vecteur de réels $f^{\text{util}}(\mathcal{V}) \in \mathbb{R}^J$. La fonction f^{util} est qualifiée de fonction mono-utilité lorsque $J = 1$ et de fonction multi-utilité lorsque $J \geq 2$. Il est important de noter que les calculs d'utilité associés aux équations (3.7), (3.9) et (3.10) nécessitent des calculs d'inférence probabiliste qui dépendent directement des paramètres du modèle \mathcal{V} . Seules les utilités liées à l'activation des diagnostics s'obtiennent immédiatement à partir des valeurs prises par les variables d'activation $(\delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}$. Autrement dit, l'expression de la fonction d'utilité peut se réécrire en faisant intervenir explicitement les utilités impliquées dans le calcul :

$$f^{\text{util}}(\mathcal{V}) = f^{\text{util}}((\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t}(\mathcal{V}), \mathbf{U}_{\mathbf{D}_t}(\mathcal{V}), \mathbf{U}_{A_t}(\mathcal{V}))_{1 \leq t \leq T}).$$

La partie 3.3.2 est dédiée à la description des calculs probabilistes sous-jacents à l'évaluation d'une fonction d'utilité. Enfin, l'exemple 3.4 illustre les notations précédentes en détaillant la construction d'une fonction mono-utilité moyenne.

Exemple 3.4 (Fonction mono-utilité moyenne)

Considérons un modèle VIRMALAB \mathcal{V} où chaque composante ne possède qu'un nœud d'utilité. En reprenant les notations précédentes, nous avons alors

$$k_{\mathbf{X}} = k_{\delta_1} = \dots = k_{\delta_L} = k_{D_1} = \dots = k_{D_L} = k_A = 1.$$

Dans ce cas, les exposants associés aux utilités sont omis, ce qui se traduit par :

- $\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t} = U_{\mathbf{X}_t}^1 = U_{\mathbf{X}_t}^1$;
- $\mathbf{U}_{\mathbf{D}_t} = (U_{\delta_{t,\ell}}^1, U_{D_{t,\ell}}^1)_{1 \leq \ell \leq L} = (U_{\delta_{t,\ell}}, U_{D_{t,\ell}})_{1 \leq \ell \leq L}$;
- $\mathbf{U}_{A_t} = U_{A_t}^1 = U_{A_t}$.

Par conséquent, $U_{\mathbf{X}_t}$, $(U_{\delta_{t,\ell}}, U_{D_{t,\ell}})_{1 \leq \ell \leq L}$ et U_{A_t} sont calculées à chaque instant t .

Cet exemple présente le cas simple, mais néanmoins très utilisé en pratique, de la fonction mono-utilité moyenne sur l'horizon T . Cette fonction d'utilité possède l'expression suivante :

$$f^{\text{util}}(\mathcal{V}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[U_{\mathbf{X}_t}(\mathcal{V}) + \sum_{\ell=1}^L [U_{\delta_{t,\ell}}(\mathcal{V}) + U_{D_{t,\ell}}(\mathcal{V})] + U_{A_t}(\mathcal{V}) \right].$$

3.3.2 Évaluation d'une fonction d'utilité

Nous mettons à présent l'accent sur l'évaluation pratique d'une fonction d'utilité dans un modèle VIRMALAB. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer pour tout $t \geq 1$:

- la loi des états du système, $\lambda_t = P(\mathbf{X}_t)$;
- la loi des diagnostics, $(P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}$;
- la loi des actions de maintenance, $P(A_t)$.

Le modèle VIRMALAB étant un 1-MPGM particulier, l'algorithme 1.3 est adapté pour réaliser les calculs précédents en vue d'en étudier la complexité. Il est néanmoins intéressant de détailler les opérations effectuées. Ceci est l'objet des propositions 3.2 et 3.3 présentées dans les paragraphes suivants. La première aborde le calcul de la distribution d'interface gauche, notée $\Xi_t = P(\mathbf{X}_t, A_t)$, tandis que la seconde traite le calcul des distributions $P(D_{t,1}), \dots, P(D_{t,L})$, et ce, à chaque instant t . Cependant avant d'aborder ces deux propositions, nous introduisons le résultat utilitaire suivant :

Proposition 3.1

Soit $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{\text{sys}}, \Lambda^{\text{act}}, (\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ un modèle VIRMALAB (cf. partie 3.2). Posons $G_t = P(A_t | \mathbf{X}) \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{A}\}_t | \{\mathcal{X}\}_t}$. La LPC G_t est alors définie pour tout $t \geq 1$, tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a \in \mathcal{A}$ par

$$G_t(\mathbf{x}, a) = \sum_{d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}} \Gamma(d, a) \Delta_{t,L}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d),$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$, tout $\ell = 1, \dots, L$, tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$ et tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$,

$$\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, (d_{\ell'})_{\ell < \ell' \leq L}, d) = \begin{cases} \Delta^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d) & \text{si } \ell = 0 \\ \begin{cases} \sum_{d_\ell \in \mathcal{D}_\ell} \Delta_\ell(\mathbf{x}, d_\ell) \Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}(d_\ell, \dots, d_L, d) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 1 \\ \Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}(d_\emptyset, \dots, d_L, d) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 0 \end{cases} & \text{si } \ell \geq 1 \end{cases} . \quad (3.11)$$

La démonstration de ce résultat (cf. annexe E.3) repose sur la factorisation du modèle VIRMALAB à une tranche t quelconque, ainsi que sur la définition par morceaux des LPC associées aux variables $D_{t,1}, \dots, D_{t,L}$ (cf. équation (3.2.2)). Par ailleurs, la suite $(\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}})_{0 \leq \ell \leq L}$ est introduite afin de réaliser l'élimination des variables $\delta_{t,1}, D_{t,1}, \dots, \delta_{t,L}, D_{t,L}$. Formellement, à la ℓ -ème itération la LPC $\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}}$ appartient à $\mathcal{L}^{\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{D}_{\ell+1}, \dots, \mathcal{D}_L\}_t}$ et correspond à la LPC Δ^{sys} après l'élimination des variables $\delta_{t,1}, D_{t,1}, \dots, \delta_{t,\ell}, D_{t,\ell}$.

Proposition 3.2

Soit $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{\text{sys}}, \Lambda^{\text{act}}, (\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ un modèle VIRMALAB (cf. partie 3.2). Le modèle \mathcal{V} possède une distribution d'interface gauche, notée $\Xi_t = P(\mathbf{X}_t, A_t)$, définie pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a \in \mathcal{A}$ par

$$\Xi_t(\mathbf{x}, a) = \lambda_t(\mathbf{x}) G_t(\mathbf{x}, a), \quad (3.12)$$

où $\lambda_t = P(X_t)$ représente la loi de l'état du système à l'instant t et possède la caractérisation

réursive suivante pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$:

$$\lambda_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_1(\mathbf{x}) & t = 1 \\ \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \left[\Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{a' \in \mathcal{A}^{\bar{\mathcal{X}}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a') + \sum_{a'' \in \mathcal{A}^{\mathcal{X}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a'') \Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a'', \mathbf{x}) \right] & t \geq 2 \end{cases} \quad (3.13)$$

et où $G_t = P(A_t | \mathbf{X}_t)$ désigne la LPC introduite dans la proposition 3.1.

Remarquons enfin que la distribution de l'action de maintenance sélectionnée à l'instant t est alors donnée pour tout $a \in \mathcal{A}$ par

$$P(A_t = a) = \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \Xi(\mathbf{x}, a). \quad (3.14)$$

La démonstration de ces résultats (cf. annexe E.3) consiste à affiner le calcul générique de l'interface gauche dans le cas d'un modèle VIRMALAB (cf. équation (3.2)). La définition par morceaux de la loi de transition du système présentée dans l'équation (3.2.2), ainsi que le résultat de la proposition 3.1 sont à l'origine des simplifications dans le calcul de λ_t .

Proposition 3.3

Soit $\mathcal{V} = (\lambda_1, \Lambda^{\text{sys}}, \Lambda^{\text{act}}, (\delta_{t,\ell})_{t \geq 1, 1 \leq \ell \leq L}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ un modèle VIRMALAB (cf. partie 3.2). Dans ce cas, pour tout $\ell = 1, \dots, L$, la loi du ℓ -ème diagnostic à l'instant t , notée $P(D_{t,\ell})$, est définie pour tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$ par

$$P(D_{t,\ell} = d_\ell) = \begin{cases} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda_t(\mathbf{x}) \Delta_{t,\ell}(\mathbf{x}, d_\ell) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 1 \\ \mathbb{I}(d_\ell = d_\emptyset) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 0 \end{cases}, \quad (3.15)$$

où la loi $\lambda_t = P(\mathbf{X}_t)$ est caractérisée par l'équation (3.12).

La démonstration de cette proposition (cf. annexe E.3) s'appuie dans un premier temps sur le fait que le modèle VIRMALAB vérifie la relation d'indépendance conditionnelle

$$\mathbf{X}_{t-1}, \mathbf{D}_{t-1}, A_{t-1} \perp\!\!\!\perp \mathbf{D}_t, A_t | \mathbf{X}_t.$$

Ceci implique qu'à l'instant t , la connaissance de la distribution λ_t est suffisante pour poursuivre les calculs d'inférence courants. Par la suite, la définition par morceaux des lois $(P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}$ est utilisée pour simplifier l'expression des lois $(P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}$.

À partir des résultats présentés dans les propositions précédentes, nous construisons l'algorithme d'inférence 3.1, dédié à l'évaluation d'une fonction d'utilité dans un modèle VIRMALAB. Il existe peu de contraintes quant au choix de la fonction d'utilité, pourvu que cette dernière soit calculable à chaque instant t à partir des utilités associées au système, aux diagnostics et à la maintenance. Notons également que la fonction peut être mono ou multi-utilité. La partie 3.3.4 présente une application du modèle VIRMALAB, ainsi que de l'algorithme 3.1 dans le cas d'une fonction mono-utilité moyenne.

Algorithme 3.1 : Évaluation d'une fonction d'utilité dans un modèle VIRMLAB.

Entrées :

1. Un modèle VIRMLAB vérifiant la description donnée dans la partie 3.2;
2. L'horizon T des calculs d'inférence à réaliser ;
3. Des potentiels d'utilité
 $((u_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}})_{1 \leq k_{\mathbf{X}} \leq K_{\mathbf{X}}}, ((u_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}})_{1 \leq k_{\delta_\ell} \leq K_{\delta_\ell}}, (u_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}})_{1 \leq k_{D_\ell} \leq K_{D_\ell}})_{1 \leq \ell \leq L}, (u_{A_t}^{k_A})_{1 \leq k_A \leq K_A})_{1 \leq t \leq T}$
représentant respectivement les utilités associées à l'état du système, aux variables d'activation des diagnostics, aux résultats des diagnostics et à l'action de maintenance ;
4. Une fonction d'utilité f^{util} .

Sortie : L'évaluation de la fonction d'utilité f^{util} correspondant au modèle VIRMLAB et aux utilités considérés.

pour chaque $t = 1, \dots, T$ **faire**

// Inférence probabiliste

Calcul de λ_t (équation (3.13)); // État du système

Calcul de Ξ_t (équation (3.12)); // Interface gauche

pour chaque $\ell = 1, \dots, L$ **faire**

| Calcul de $P(D_{t,\ell})$ (équation (3.15)); // Résultat des diagnostics

fin

Calcul de $P(A_t)$ (équation (3.14)); // Action de maintenance

// Utilités

Calcul de $\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t} = (U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}})_{1 \leq k_{\mathbf{X}} \leq K_{\mathbf{X}}}$ (équation (3.7)); // État du système

pour chaque $\ell = 1, \dots, L$ **faire**

| // Diagnostics

| Calcul de $\mathbf{U}_{\delta_{t,\ell}} = (U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}})_{1 \leq k_{\delta_\ell} \leq K_{\delta_\ell}}$ (équation (3.8)); // Activation

| Calcul de $\mathbf{U}_{D_{t,\ell}} = (U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}})_{1 \leq k_{D_\ell} \leq K_{D_\ell}}$ (équation (3.9)); // Résultat

fin

$\mathbf{U}_{D_t} \leftarrow (\mathbf{U}_{\delta_{t,\ell}}, \mathbf{U}_{D_{t,\ell}})_{1 \leq \ell \leq L}$;

Calcul de $\mathbf{U}_{A_t} = (U_{A_t}^{k_A})_{1 \leq k_A \leq K_A}$ (équation (3.10)); // Action de maintenance

fin

// Fonction d'utilité

Évaluation de $f^{\text{util}}((\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t}, \mathbf{U}_{D_t}, \mathbf{U}_{A_t})_{1 \leq t \leq T})$;

3.3.3 Complexité algorithmique

Cette partie a pour objectif l'étude de la complexité de l'algorithme 3.1. Il s'agit tout d'abord d'évaluer le temps de calcul permettant d'obtenir les utilités sur une tranche t quelconque. La complexité algorithmique des calculs de G_t , λ_t , Ξ_t , $(P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}$ et $P(A_t)$ est à déterminer. Ceci fait l'objet des propositions suivantes.

Proposition 3.4

En se plaçant dans le contexte de la proposition 3.1, la complexité algorithmique du calcul de G_t , notée $CA(G_t)$, est de l'ordre

$$CA(G_t) = \mathcal{O} \left(|\mathcal{X}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \left[\sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=\ell}^L |\mathcal{D}_{\ell'}| + |\mathcal{A}| \right] \right).$$

Proposition 3.5

En se plaçant dans le contexte de la proposition 3.2, la complexité algorithmique du calcul de λ_t , $t \geq 2$, notée $CA(\lambda_t)$, est de l'ordre

$$CA(\lambda_t) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}|).$$

Les complexités algorithmiques des calculs de Ξ_t et $P(A_t)$ sont alors données par

$$CA(\Xi_t) = CA(P(A_t)) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| |\mathcal{A}|).$$

Proposition 3.6

En se plaçant dans le contexte de la proposition 3.3, la complexité algorithmique du calcul de chaque loi $P(D_{t,\ell})$, notée $CA(P(D_{t,\ell}))$, est de l'ordre

$$CA(P(D_{t,\ell})) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| |\mathcal{D}_\ell|).$$

La démonstration de chacune de ces propositions est donnée dans l'annexe E.3. Ces résultats reposent sur la complexité des opérations de base sur les potentiels (cf. propositions 1.1 et 1.2). Les résultats précédents permettent de déduire la complexité liée aux calculs d'inférence probabiliste dans l'algorithme 3.1. Cette complexité algorithmique est notée de manière synthétique comme suit :

$$\begin{aligned} CA(G_t, \lambda_t, \Xi_t, (P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}, P(A_t)) &= CA(G_t) + CA(\lambda_t) + CA(\Xi_t) + \\ &\quad \sum_{\ell=1}^L CA(P(D_{t,\ell})) + CA(P(A_t)). \end{aligned}$$

Or, en remarquant que le terme $\sum_{\ell=1}^L CA(P(D_{t,\ell}))$ est négligeable devant $CA(G_t)$, puis que les termes $CA(\Xi_t)$ et $CA(P(A_t))$ sont négligeables devant $CA(\lambda_t)$, nous obtenons

$$CA(G_t, \lambda_t, \Xi_t, (P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}, P(A_t)) = \mathcal{O} \left(|\mathcal{X}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \left[\sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=\ell}^L |\mathcal{D}_{\ell'}| + |\mathcal{A}| \right] + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| \right). \quad (3.16)$$

Intéressons nous à présent à la complexité algorithmique des calculs d'utilités $U_{\mathbf{X}_t}$, $U_{\mathbf{D}_t}$ et U_{A_t} en proposant le résultat suivant.

Proposition 3.7

En se plaçant dans le contexte de la partie 3.3.1, l'ensemble des calculs d'utilités effectués à la tranche t de l'algorithme 3.1 possède une complexité algorithmique de l'ordre

$$CA(U_{\mathbf{X}_t}, U_{\mathbf{D}_t}, U_{A_t}) = \mathcal{O} \left(K \left[|\mathcal{X}| + L + \sum_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell| + |\mathcal{A}| \right] \right), \quad (3.17)$$

où $K = \max(K_{\mathbf{X}}, (K_{\delta_\ell}, K_{D_\ell})_{1 \leq \ell \leq L}, K_A)$ représente le plus grand nombre d'utilités associées à une même variable.

Ce résultat s'obtient de manière analogue aux propositions précédentes. Sa démonstration consiste simplement à analyser la complexité des calculs (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10).

La complexité de l'algorithme 3.1 se résume ainsi à la somme de la complexité liée aux calculs d'inférence (cf. équation (3.16)) et à la complexité liée aux calculs d'utilité (cf. équation (3.17)). En notant $CA(\mathcal{V}_{\text{futil}})$ l'ordre de la quantité d'opérations élémentaires nécessaire à l'évaluation d'une fonction d'utilité dans un modèle VIRMALAB sur un horizon temporel T , nous obtenons alors

$$CA(\mathcal{V}_{\text{futil}}) = T [CA(G_t, \lambda_t, \Xi_t, (P(D_{t,\ell}))_{1 \leq \ell \leq L}, P(A_t)) + CA(\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t}, \mathbf{U}_{D_t}, \mathbf{U}_{A_t})].$$

Il convient toutefois de noter qu'en pratique la complexité algorithmique des calculs d'utilité est très souvent négligeable devant la complexité des calculs d'inférence. En effet, le nombre K , correspondant au plus grand nombre d'utilités associées à une même variable, est classiquement égal à un. Ce nombre atteint parfois deux ou trois si la problématique considérée fait intervenir des calculs multi-utilité. Cela reste néanmoins d'un ordre bien inférieur aux complexités des modèles décrivant le système, le diagnostic ou la maintenance. Par conséquent, nous effectuons l'approximation suivante :

$$CA(\mathcal{V}_{\text{futil}}) = \mathcal{O} \left(T \left[|\mathcal{X}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \left[\sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=\ell}^L |\mathcal{D}_{\ell'}| + |\mathcal{A}| \right] + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| \right] \right). \quad (3.18)$$

L'équation (3.18) montre que la complexité du modèle d'évolution du système et la complexité de la composante diagnostic contribuent de manière significative au temps de calcul de la fonction d'utilité. Le caractère dynamique de la modélisation associée au système engendre un coût algorithmique quadratique, rendant l'algorithme 3.1 particulièrement sensible à la complexité de la représentation choisie pour le processus de dégradation. L'influence de la composante diagnostic dépend à la fois du nombre L de méthodes de diagnostic considéré et du degré de finesse de ces méthodes, correspondant aux quantités $|\mathcal{D}_\ell|_{1 \leq \ell \leq L}$. Nous expliquons dans la partie 3.2.4 que pour chaque méthode de diagnostic ℓ , son degré de finesse peut raisonnablement être encadré par

$$2 \leq |\mathcal{D}_\ell|, |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \leq \mathcal{X}. \quad (3.19)$$

Il est alors possible d'en déduire un encadrement de la complexité de l'algorithme 3.1 comme le montre la proposition 3.8. Nous achevons donc cette partie par la proposition donnée dans les paragraphes suivants. La preuve de ce résultat, présentée dans l'annexe E.3, repose sur des simplifications de l'équation (3.18), rendues possibles en se plaçant à chacune des bornes de l'encadrement (3.19).

Proposition 3.8

En se plaçant dans le contexte de l'algorithme 3.1 et sous l'hypothèse que pour tout $\ell = 1, \dots, L$, $2 \leq |\mathcal{D}_\ell|, |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \leq \mathcal{X}$, la complexité de l'algorithme 3.1 vérifie

$$\mathcal{O} (T [2^{L+2} |\mathcal{X}| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}|]) \leq CA(\mathcal{V}_{\text{futil}}) \leq \mathcal{O} (T [|\mathcal{X}|^{L+2} + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}|]).$$

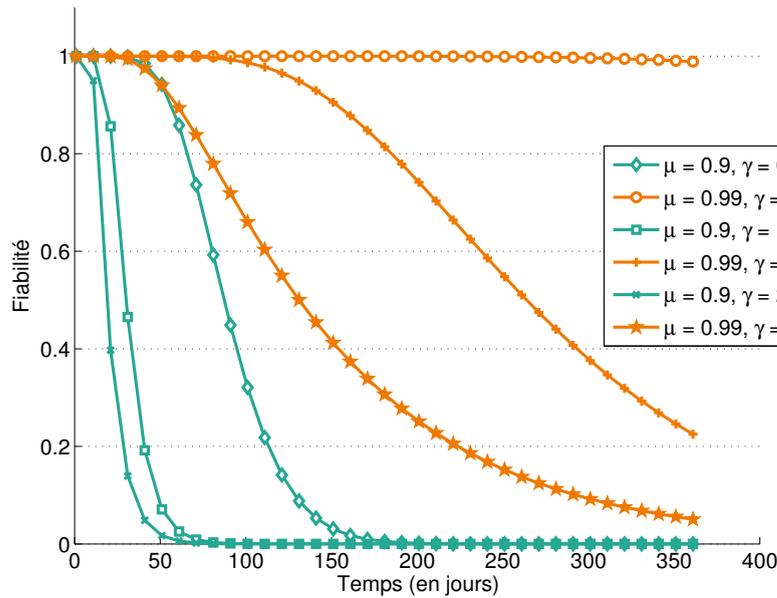


FIG. 3.3 – Évolution de la fiabilité du système en fonction des paramètres μ et γ .

3.3.4 Exemple

Les paragraphes suivants mettent l'accent sur les aspects pratiques sous-jacents à l'approche VIRMALAB. Pour ce faire, nous proposons un exemple à la fois simple et réaliste permettant d'illustrer les notions précédemment introduites.

Description du système

Le système considéré est une machine de production possédant dix états de fonctionnement. Dans cet exemple, la modélisation du système ne fait intervenir qu'une variable X_t représentant l'état du système à l'instant t exprimé en jour. L'ensemble des états de fonctionnement est noté $\mathcal{X} = \{\text{neuf, dég-1, dég-2, } \dots, \text{déq-8, panne}\}$. Autrement dit, le vecteur aléatoire \mathbf{X}_t est réduit à l'unique variable X_t . Ceci correspond à la situation où le processus de dégradation du système est représenté par une chaîne de Markov. Notons également que les états sont ordonnés par gravité croissante ce qui permet de les indexer sur l'ensemble $\{1, \dots, 10\}$, en posant $x_1 = \text{neuf}$, $x_2 = \text{déq-1}$, $x_3 = \text{déq-2}$, \dots , $x_{10} = \text{panne}$.

Ce processus est dans un premier temps caractérisé par la LPC de transition naturelle $\Lambda^{\text{sys}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t|\{\mathcal{X}\}_{t-1}$. Nous supposons que la dégradation du système est contrôlée par les deux paramètres $\mu \in [0, 1]$ et $\gamma \geq 0$ tels que Λ^{sys} soit définie pour tout $x_i, x_j \in \mathcal{X}$ par

$$\Lambda^{\text{sys}}(x_i, x_j) = \begin{cases} \mu^{i^\gamma} & \text{si } i = j & \text{et } i \neq |\mathcal{X}| = 10 \\ 1 - \mu^{i^\gamma} & \text{si } i = j - 1 & \text{et } i \neq |\mathcal{X}| = 10 \\ 1 & \text{si } i = j & \text{et } i = |\mathcal{X}| = 10 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.20)$$

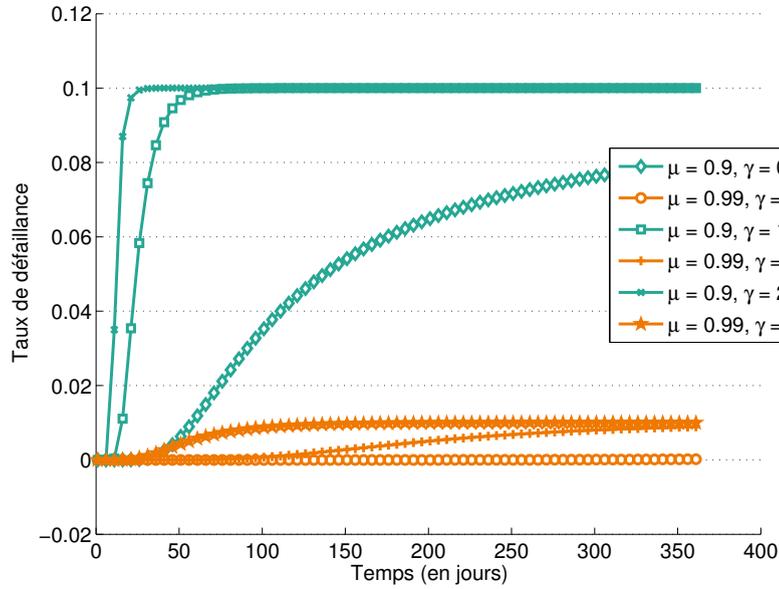


FIG. 3.4 – Évolution du taux de défaillance du système en fonction des paramètres μ et γ .

La loi de transition naturelle a donc la forme diagonale par bloc suivante :

		Λ^{sys}									
		X_t									
X_{t-1}	neuf	dég-1	dég-2	dég-3	dég-4	dég-5	dég-6	dég-7	dég-8	panne	
neuf	μ	$1 - \mu$	0	0	0	0	0	0	0	0	
dég-1	0	$\mu^{2\gamma}$	$1 - \mu^{2\gamma}$	0	0	0	0	0	0	0	
dég-2	0	0	$\mu^{3\gamma}$	$1 - \mu^{3\gamma}$	0	0	0	0	0	0	
dég-3	0	0	0	$\mu^{4\gamma}$	$1 - \mu^{4\gamma}$	0	0	0	0	0	
dég-4	0	0	0	0	$\mu^{5\gamma}$	$1 - \mu^{5\gamma}$	0	0	0	0	
dég-5	0	0	0	0	0	$\mu^{6\gamma}$	$1 - \mu^{6\gamma}$	0	0	0	
dég-6	0	0	0	0	0	0	$\mu^{7\gamma}$	$1 - \mu^{7\gamma}$	0	0	
dég-7	0	0	0	0	0	0	0	$\mu^{8\gamma}$	$1 - \mu^{8\gamma}$	0	
dég-8	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mu^{9\gamma}$	$1 - \mu^{9\gamma}$	
panne	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	

La figure 3.3 présente différents résultats sur la fiabilité du système en faisant varier les paramètres μ et γ . De façon similaire, la figure 3.4 fournit des résultats concernant le taux de défaillance du système. Les calculs ont été effectués sur un horizon temporel $T = 365$ jours. Ces deux figures montrent que le paramètre μ contrôle la valeur stationnaire du taux de défaillance du système. Le paramètre γ caractérise pour sa part la vitesse du vieillissement. Plus précisément, plus le paramètre γ est élevé et plus le système atteint rapidement son régime stationnaire.

Nous supposons que le système possède deux méthodes de diagnostic : une méthode 1, représentée par la variable $D_{t,1}$ et une méthode 2, représentée par la variable $D_{t,2}$. Ces

deux variables sont respectivement à valeurs dans les ensembles $\mathcal{D}_{t,1}$ et $\mathcal{D}_{t,2}$ tels que $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}^{\text{sys}} = \{d_\emptyset, \text{ok}, \text{défaut}\}$. Les deux méthodes de diagnostic sont concurrentes. Elles réalisent le même travail qui consiste à envoyer un signalement de défaut lorsque le système entre dans l'état dég-6. Toutefois, la méthode 1 est moins précise que la méthode 2. En pratique, cela se traduit par des détections de défauts alors que l'état dég-6 n'est pas encore atteint (fausses alarmes), ou par des omissions de signalement lorsque le système est dans un état supérieur ou égal à l'état dég-6 (non-détections). Numériquement, ces méthodes sont caractérisées respectivement par les LPC $\Delta_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}_1\}_t|\{\mathcal{X}\}_t}$ et $\Delta_2 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}_2\}_t|\{\mathcal{X}\}_t}$ définies comme suit :

Δ_1				Δ_2			
$D_{t,1}$				$D_{t,2}$			
$D_{t,1}$	d_\emptyset	ok	défaut	$D_{t,2}$	d_\emptyset	ok	défaut
neuf	0	1	0	neuf	0	1	0
dég-1	0	1	0	dég-1	0	1	0
dég-2	0	1	0	dég-2	0	1	0
dég-3	0	1	0	dég-3	0	1	0
dég-4	0	0.80	0.20	dég-4	0	0.99	0.01
dég-5	0	0.35	0.65	dég-5	0	0.95	0.05
dég-6	0	0.30	0.70	dég-6	0	0.10	0.90
dég-7	0	0.25	0.75	dég-7	0	0.05	0.95
dég-8	0	0.20	0.80	dég-8	0	0	1
panne	0	0.05	0.95	panne	0	0	1

La politique du diagnostic est fixée de façon à minimiser les non-détections en conservant le résultat détecté le plus critique. La LPC $\Delta^{\text{sys}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t|\{\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2\}_t}$ donnée dans la suite permet de traduire cela en termes probabilistes.

Δ^{sys}				
		D_t^{sys}		
$D_{t,1}$	$D_{t,2}$	d_\emptyset	ok	défaut
d_\emptyset	d_\emptyset	1	0	0
ok	d_\emptyset	0	1	0
défaut	d_\emptyset	0	0	1
d_\emptyset	ok	0	1	0
ok	ok	0	1	0
défaut	ok	0	0	1
d_\emptyset	défaut	0	0	1
ok	défaut	0	0	1
défaut	défaut	0	0	1

Il s'agit enfin de définir la politique des actions de maintenance en spécifiant l'opération de maintenance effectuée lorsque le diagnostic signale un défaut. Supposons par exemple que la détection d'un défaut engendre une réparation minimale (action rép-1). Dans ce cas, la LPC $\Gamma \in \mathcal{L}\{A\}_t|\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t$ s'écrit comme suit :

$\Gamma_{\text{rép-1}}$				
D_t^{sys}	A_t			
	néant	rép-1	rép-3	rép-tot
d_{\emptyset}	1	0	0	0
ok	1	0	0	0
défaut	0	1	0	0

De manière similaire, il est possible d'utiliser des référentiels de maintenance plus prudents en déclenchant les actions rép-3, voire rép-tot, après un signalement de défaut en posant respectivement les deux LPC suivantes :

$\Gamma_{\text{rép-3}}$					$\Gamma_{\text{rép-tot}}$				
D_t^{sys}	A_t				D_t^{sys}	A_t			
	néant	rép-1	rép-3	rép-tot		néant	rép-1	rép-3	rép-tot
d_{\emptyset}	1	0	0	0	d_{\emptyset}	1	0	0	0
ok	1	0	0	0	ok	1	0	0	0
défaut	0	0	1	0	défaut	0	0	0	1

Utilités

Nous disposons de la description probabiliste d'un modèle VIRMALAB représentant un système de production $\mathcal{V} = (\mu, \gamma, \Lambda^{\text{act}}, (\delta_{t,1}, \delta_{t,2})_{t \geq 1}, \Delta_1, \Delta_2, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$. L'objectif est à présent de construire une fonction d'utilité permettant d'évaluer la politique de maintenance du système. Dans cet exemple, la notion d'utilité est homogène à une grandeur économique dont l'unité n'est pas précisée. Une utilité négative correspond à un coût, tandis qu'une utilité positive correspond à un bénéfice. Les paragraphes suivants décrivent les utilités associées à chacune des variables du modèle.

Dans un premier temps, nous supposons que la qualité de la production dépend de l'état dans lequel se trouve le système. Plus précisément, des bénéfices sont réalisés tant que ce dernier est neuf ou peu dégradé. En revanche, dès lors que le système atteint l'état dégr-7, des pertes sont occasionnées. Numériquement, l'utilité du système par unité de temps relativement à son état est caractérisée par le potentiel u_X suivant :

X_t	neuf	dég-1	dég-2	dég-3	dég-4	dég-5	dég-6	dég-7	dég-8	panne
u_X	10	9	9	8	7	5	0	-3	-10	-100

Concernant le diagnostic, les utilités associées à une utilisation de la méthode 1 et de la méthode 2 sont notées respectivement u_{δ_1} et u_{δ_2} . Puisque la méthode 2 est plus performante que la méthode 1, nous lui attachons un coût d'activation plus élevé, c'est-à-dire une utilité négative moins grande, à savoir :

u_{δ_1}	u_{δ_2}
-1	-4

Notons par ailleurs que dans cet exemple, le résultat des diagnostics n'ont pas d'utilité, autrement dit, les potentiels d'utilité correspondant aux variables $D_{t,1}$ et $D_{t,2}$ sont des potentiels nuls. Nous abordons pour finir le coût des actions de maintenance par l'intermédiaire du potentiel d'utilité, noté u_A , défini par

A_t	néant	rép-1	rép-3	rép-tot
u_A	0	-30	-60	-150

Les utilités par unité de temps de chacune des composantes du modèle VIRMALAB sont calculées à chaque instant t comme suit :

- $U_{X_t} = \sum_{x \in \mathcal{X}} \lambda_t(x) u_X(x)$ (système) ;
- $U_{\delta_{t,1}} = \delta_{t,1} u_{\delta_1}$ et $U_{\delta_{t,2}} = \delta_{t,2} u_{\delta_2}$ (diagnostics) ;
- $U_{A_t} = \sum_{a \in \mathcal{A}} P(A_t = a) u_A(x)$ (action de maintenance).

Par la suite, ces utilités élémentaires sont mises à profit dans les évaluations de la fonction d'utilité complète du modèle, notée f^{util} , calculée sur un temps de simulation donné. La fonction mono-utilité moyenne sur un horizon temporel T (cf. exemple 3.4) est utilisée dans la suite, c'est-à-dire

$$f^{\text{util}}(T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [U_{X_t} + U_{\delta_{t,1}} + U_{\delta_{t,2}} + U_{A_t}] .$$

Quelques résultats

L'ensemble de tables 3.2 présente les utilités moyennes sur un horizon temporel de 3 ans (1095 jours ou unités de temps) obtenues en faisant varier les périodes d'activation des diagnostics et le déclenchement des actions de maintenance. Ces résultats sont donnés pour un système se dégradant rapidement et plus lentement, respectivement dans les tables 3.2a et 3.2b. Dans le cas de la dégradation rapide, nous observons que la politique de

maintenance minimale $\Gamma_{\text{rép-1}}$ ne permet pas de compenser suffisamment le vieillissement du système afin d'éviter des pertes. Parmi les résultats présentés, la meilleure politique consiste à déclencher les diagnostics conjointement tous les 30 jours et de remettre le système à neuf en cas de signalement défectueux (politique $\Gamma_{\text{rép-tot}}$).

En revanche, lorsque la dégradation est plus lente, toutes les politiques de maintenance expérimentées deviennent bénéficiaires. Dans ce cas, le meilleur résultat en termes d'utilité moyenne s'obtient en effectuant un diagnostic 1 tous les 30 jours, un diagnostic 2 tous les 90 jours et une réparation de niveau trois en cas de défaut détecté. Remarquons également que la stabilité des utilités obtenues par rapport aux variations de la politique de maintenance dépend fortement de la vitesse de dégradation du système.

π_1 (en jours)	π_2 (en jours)	Maintenance	Utilité moy. (par jour)	π_1 (en jours)	π_2 (en jours)	Maintenance	Utilité moy. (par jour)
30	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-6.88	30	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.51
60	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-8.51	60	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.41
90	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-9.02	90	30	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.36
30	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-7.74	30	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.56
60	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-14.60	60	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.40
90	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-13.41	90	60	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.36
30	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-8.02	30	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.58
60	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-13.09	60	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.43
90	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	-17.34	90	90	$\Gamma_{\text{rép-1}}$	8.28
30	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	6.88	30	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.73
60	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	5.94	60	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.62
90	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	5.56	90	30	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.56
30	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	6.21	30	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.79
60	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	-0.57	60	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.65
90	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	1.11	90	60	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.58
30	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	5.95	30	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.80
60	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	1.41	60	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.66
90	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	-7.25	90	90	$\Gamma_{\text{rép-3}}$	8.55
30	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.14	30	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.65
60	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	7.92	60	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.59
90	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	7.81	90	30	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.55
30	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.00	30	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.70
60	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	6.85	60	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.62
90	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	6.69	90	60	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.57
30	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	7.92	30	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.72
60	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	6.69	60	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.63
90	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	4.62	90	90	$\Gamma_{\text{rép-tot}}$	8.54

(a) Avec $\mu = 0.99$ et $\gamma = 1$.

(b) Avec $\mu = 0.99$ et $\gamma = 0.1$.

TAB. 3.2 – Utilité moyenne journalière du système de production sur 3 ans en fonction des périodes π_1 et π_2 d'activation des diagnostics et des trois politiques d'actions de maintenance. Les paramètres permettant d'obtenir la meilleure utilité sont indiqués en gras.

La figure 3.5 illustre l'évolution de la fonction d'utilité moyenne journalière à horizon croissant, $(f^{\text{util}}(t))_{1 \leq t \leq 1095}$, en fonction du temps et pour des vitesses de dégradation du système différentes. Les résultats présentés correspondent à la situation où les deux diagnostics sont effectués conjointement tous les 30 jours en appliquant la politique de réparation minimale ($\Gamma_{\text{rép-1}}$). Nous observons que la politique de maintenance appliquée dans cet exemple n'est

valable à long terme que si le système ne se dégrade pas trop vite ($\gamma \leq 0.3$). Pour $\gamma \geq 0.6$, la politique globale retenue (diagnostic et action) aboutit en moyenne à des pertes. Ceci souligne clairement l'intérêt de posséder préalablement des informations précises sur le processus de dégradation du système dans l'optique d'ajuster sa politique de maintenance.

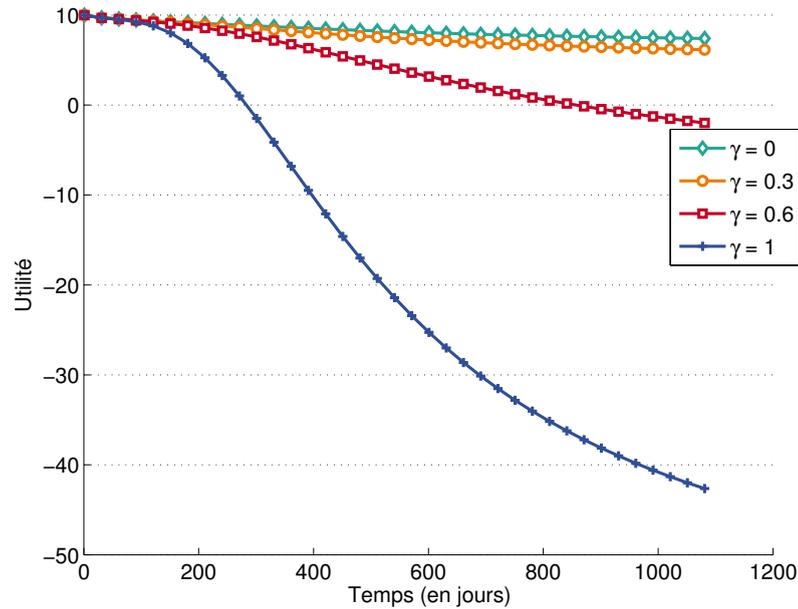


FIG. 3.5 – Évolution de l'utilité moyenne journalière en fonction du paramètre de dégradation γ , avec $\mu = 0.99$, $\pi_1 = \pi_2 = 30$ et la politique $\Gamma_{\text{rép-1}}$.

Bien que réaliste, l'exemple présenté dans cette partie reste simple afin d'illustrer efficacement les notions introduites dans ce chapitre. En effet, le système est mono-composant avec un processus de dégradation représenté uniquement par une chaîne de Markov. Le chapitre 4 décrit l'utilisation du modèle VIRMALAB dans le cadre de la maintenance des rails, avec une modélisation bi-composant, bi-utilité et des processus de dégradation complexes utilisant une structure de type MGD.

3.4 Politiques de maintenance

Dans cette partie, nous montrons en quoi le modèle VIRMALAB s'avère pertinent pour représenter les principaux concepts de maintenance (cf. introduction). Nous décrivons comment se déclinent en pratique les différents paramètres du modèle afin de simuler une politique de maintenance donnée. Pour ce faire, l'ensemble désignant les états du système \mathcal{X} est partitionné par l'ensemble des états de bon fonctionnement \mathcal{X}_U et l'ensemble des états de panne \mathcal{X}_D . Rappelons qu'un état de panne est un état dans lequel le système ne parvient pas à réaliser une fonction requise. Nous faisons également l'hypothèse que les systèmes étudiés ne sont pas auto-réparables, autrement dit l'ensemble des états de panne est absorbant. Parmi les états de bon fonctionnement, nous notons $\mathbf{x}_{\text{neuf}} \in \mathcal{X}_U$ l'état du

système lorsque ce dernier est neuf ou remis à neuf.

3.4.1 Maintenance corrective

La maintenance corrective désigne toute action d'entretien visant à ramener le système dans un état de bon fonctionnement lorsque ce dernier est entré dans un état de panne. La présence d'éléments de maintenance corrective dans le modèle VIRMALAB est conditionnée par les points suivants :

- (i) L'ensemble des actions de maintenance agissant sur le système doit posséder au moins une action corrective, c'est-à-dire permettant la transition d'un état de panne vers un état de fonctionnement suffisant. Cela signifie formellement qu'il existe une action $a_{\text{cor}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$, un état de panne $\mathbf{x}_D \in \mathcal{X}_D$ et un état de bon fonctionnement $\mathbf{x}_U \in \mathcal{X}_U$ tels que la LPC de transition artificielle $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}$ vérifie

$$\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}_D, a_{\text{cor}}, \mathbf{x}_U) > 0.$$

- (ii) Il est nécessaire qu'au moins une des L méthodes de diagnostic considérées permette le signalement d'un état de panne. Cela signifie qu'il doit exister un $\ell \in \{1, \dots, L\}$ tel que la ℓ -ème méthode de diagnostic possède une alerte $d_{\ell, \text{cor}} \in \mathcal{D}_\ell$ correspondant à un état de panne $\mathbf{x}_D \in \mathcal{X}_D$. En outre, la LPC $\Delta_\ell \in \mathcal{L}\{\mathcal{D}_\ell\}_t | \{\mathcal{X}\}_t$ doit vérifier

$$\Delta_\ell(\mathbf{x}_D, d_{\ell, \text{cor}}) > 0.$$

- (iii) Supposons l'existence d'une action de maintenance corrective $a_{\text{cor}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ et d'un signalement de panne $d_{\ell, \text{cor}} \in \mathcal{D}_\ell$. Dans le cas où seule la ℓ -ème méthode de diagnostic est activée, la politique du diagnostic et la politique d'actions de maintenance doivent permettre le déclenchement de l'action a_{cor} lorsque l'alerte $d_{\ell, \text{cor}}$ est observée. D'un point de vue probabiliste, cela se traduit par l'existence d'un résultat de diagnostic $d_{\text{cor}} \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$ tel que les LPC Δ^{sys} et $\Gamma \in \mathcal{L}\{\mathcal{A}_t\} | \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t$ vérifient

$$\Delta^{\text{sys}}(d_\emptyset, \dots, d_{\ell, \text{cor}}, \dots, d_\emptyset, d_{\text{cor}}) > 0 \text{ et } \Gamma(d_{\text{cor}}, a_{\text{cor}}) > 0.$$

Exemple 3.5

Reprenons le contexte et les notations introduites dans l'exemple présenté dans la partie 3.3.4. Nous avons alors :

- $\mathcal{X} = \mathcal{X} = \{\text{neuf}, \text{dég-1}, \text{dég-2}, \dots, \text{dég-8}, \text{panne}\}$;
- $\mathcal{X}_U = \mathcal{X}_U = \{\text{neuf}, \text{dég-1}, \text{dég-2}, \dots, \text{dég-8}\}$ et $\mathcal{X}_D = \mathcal{X}_D = \{\text{panne}\}$;
- $\mathbf{x}_{\text{neuf}} = \text{neuf}$.

Toutes les actions agissant sur le système peuvent être considérées comme action corrective relativement à l'état panne. En effet, d'après la loi de transition artificielle chacune des actions disponibles, exceptée l'action néant, permettent de ramener le système dans un état de bon fonctionnement lorsque celui-ci a atteint l'état panne. D'autre part, les deux méthodes de diagnostic sont susceptibles de détecter l'état panne en lançant le signalement défaut. Or, d'après la politique de diagnostic, il suffit d'un seul signalement défaut pour déclencher une action maintenance.

Selon l'importance des modifications apportées au système par une action de maintenance corrective, deux catégories d'action sont possibles : les actions palliatives et les actions curatives.

Action palliative

Une action de maintenance palliative est destinée à rétablir provisoirement tout ou une partie d'une fonction requise d'un système tombé en panne. Notons également que la maintenance palliative est couramment appelée "dépannage". Plus précisément, elle consiste à réparer le système de manière à le ramener dans un état de bon fonctionnement sans pour autant le remettre à neuf. Formellement, une action corrective $a_{\text{cor}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ est dite palliative relativement à l'état de panne $\mathbf{x}_D \in \mathcal{X}_D$ si la LPC de transition artificielle $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}$ vérifie pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}_D, a_{\text{cor}}, \mathbf{x}) = \begin{cases} > 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{X}_U \setminus \{\mathbf{x}_{\text{neuf}}\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Exemple 3.6

Dans l'exemple présenté dans la partie 3.3.4, les actions de maintenance rép-1 et rép-3 sont correctives palliatives relativement à l'état panne puisque

$$\Lambda^{\text{act}}(\text{panne}, \text{rép-1}, \text{dég-8}) = \Lambda^{\text{act}}(\text{panne}, \text{rép-3}, \text{dég-6}) = 1,$$

où les états dég-6 et dég-8 appartiennent bien à l'ensemble des états de bon fonctionnement.

Action curative

Une action de maintenance curative a pour objectif de complètement rétablir une fonction requise d'un système tombé en panne en effectuant une remise à neuf. La maintenance curative correspond à une réparation parfaite ou à un renouvellement du système. Après ce type d'action, le système est considéré comme étant neuf. Formellement, une action corrective $a_{\text{cor}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ est dite curative relativement à l'état de panne $\mathbf{x}_D \in \mathcal{X}_D$ si la LPC de transition artificielle $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}$ vérifie pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}_D, a_{\text{cor}}, \mathbf{x}) = \mathbb{I}(\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{neuf}}).$$

Exemple 3.7

Dans l'exemple présenté dans la partie 3.3.4, seule l'action de maintenance rép-tot est curative relativement à l'état panne puisque

$$\Lambda^{\text{act}}(\text{panne}, \text{rép-tot}, \text{neuf}) = 1.$$

3.4.2 Maintenance préventive

La maintenance préventive désigne toute action d'entretien visant à diminuer l'état de dégradation du système avant que ce dernier n'atteigne un état de panne. Dans le modèle

VIRMALAB, la maintenance préventive est caractérisée par la vérification des hypothèses suivantes :

- (i) L'ensemble des actions de maintenance agissant sur le système doit posséder au moins une action préventive, c'est-à-dire permettant la transition d'un état de bon fonctionnement vers un état de bon fonctionnement moins critique. Remarquons que s'il n'existe pas de relation d'ordre de gravité parmi au moins un sous ensemble d'états de bon fonctionnement, le terme action préventive n'a pas de sens. Aussi, nous supposons à présent que l'ensemble $\mathcal{X}_U = \{\mathbf{x}_{U_1}, \mathbf{x}_{U_2}, \dots\}$ où \mathbf{x}_{U_i} est un état moins critique que \mathbf{x}_{U_j} si $i < j$. Cela signifie formellement qu'il existe une action $a_{\text{prév}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ et deux états de bon fonctionnement $\mathbf{x}_{U_i}, \mathbf{x}_{U_j} \in \mathcal{X}_U$, avec $i < j$, tels que la LPC de transition artificielle $\Lambda^{\text{act}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t | \{\mathcal{X}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}$ vérifie

$$\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}_{U_j}, a_{\text{prév}}, \mathbf{x}_{U_i}) > 0.$$

- (ii) Il est nécessaire qu'au moins une des L méthodes de diagnostic considérées soit dédiée au signalement d'un état de bon fonctionnement différent de l'état \mathbf{x}_{neuf} . Cela signifie qu'il doit exister un $\ell \in \{1, \dots, L\}$ tel que la ℓ -ème méthode de diagnostic possède une alerte $d_{\ell, \text{prév}} \in \mathcal{D}_\ell$ correspondant à un état $\mathbf{x}_U \in \mathcal{X}_U \setminus \{\mathbf{x}_{\text{neuf}}\}$. En outre, la LPC $\Delta_\ell \in \mathcal{L}\{\mathcal{D}_\ell\}_t | \{\mathcal{X}\}_t$ doit vérifier

$$\Delta_\ell(\mathbf{x}_U, d_{\ell, \text{prév}}) > 0.$$

- (iii) Supposons l'existence d'une action de maintenance préventive $a_{\text{prév}} \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ et d'un signalement préventif $d_{\ell, \text{prév}} \in \mathcal{D}_\ell$. Dans le cas où seule la ℓ -ème méthode diagnostic est activée, la politique du diagnostic et la politique d'action de maintenance doivent permettre le déclenchement de l'action $a_{\text{prév}}$ lorsque l'alerte $d_{\ell, \text{prév}}$ est observée. D'un point de vue probabiliste, cela se traduit par l'existence d'un résultat de diagnostic $d_{\text{prév}} \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$ tel que les LPC Δ^{sys} et $\Gamma \in \mathcal{L}\{\mathcal{A}_t\} | \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t$ vérifient

$$\Delta^{\text{sys}}(d_\emptyset, \dots, d_{\ell, \text{prév}}, \dots, d_\emptyset, d_{\text{prév}}) > 0 \text{ et } \Gamma(d_{\text{prév}}, a_{\text{prév}}) > 0.$$

Il est important de noter qu'une même action de maintenance peut avoir un rôle correctif ou préventif selon le contexte (cf. exemple 3.8). Cela dépend uniquement de l'état dans lequel se trouve le système au moment de la maintenance. Si l'état courant est différent d'un état de panne, l'action est préventive. Dans le cas contraire, l'action est corrective.

Exemple 3.8

Poursuivons l'exemple 3.5 en remarquant que toutes les actions de maintenance décrites dans la partie 3.3.4 peuvent être considérées comme étant préventives. En effet, les deux appareils de diagnostic sont capables d'envoyer un signalement de défaut avant que le système n'atteigne l'état panne. Or, tout signalement de défaut déclenche une action de maintenance. Cette dernière est donc qualifiée de préventive si le diagnostic a été effectué suffisamment tôt.

La mise en place d'une politique de maintenance préventive gagne en pertinence lorsqu'elle est adaptée au système considéré. Remplacer préventivement un composant coûteux tous les mois alors que ce dernier possède une durée de vie moyenne se comptant en années

n'a que peu d'intérêts. Bien que souvent délicate, l'optimisation des actions préventives est envisageable dès lors qu'un modèle de dégradation du système est exploitable. Il est également nécessaire de choisir un critère à optimiser. Dans cette étude, nous utilisons la fonction d'utilité, notée f^{util} . Considérons par ailleurs un modèle VIRMLAB, noté $\mathcal{V} = (\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}^{\text{maint}})$, avec pour rappel (cf. partie 3.2.3) :

- les paramètres descriptifs $\mathcal{V}^{\text{desc}} = (\alpha_1, \Lambda^{\text{sys}}, \Lambda^{\text{act}}, (\Delta_\ell)_{1 \leq \ell \leq L})$;
- les paramètres de maintenance $\mathcal{V}^{\text{maint}} = ((\delta_{t,\ell})_{\substack{t \geq 1 \\ 1 \leq \ell \leq L}}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$, incluant les paramètres du diagnostic.

Par conséquent, optimiser la maintenance revient à chercher les paramètres de maintenance $\widehat{\mathcal{V}}^{\text{maint}}$ maximisant la fonction d'utilité f^{util} . Autrement dit, il s'agit de résoudre le problème :

$$\widehat{\mathcal{V}}^{\text{maint}} = \underset{(\delta_{t,\ell})_{\substack{t \geq 1 \\ 1 \leq \ell \leq L}}, \Delta^{\text{sys}}, \Gamma}{\text{arg max}} f^{\text{util}}(\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}^{\text{maint}}), \quad (3.21)$$

où les paramètres descriptifs $\mathcal{V}^{\text{desc}}$ sont invariants pour un système donné. La fonction d'utilité ne possédant aucune propriété de différentiabilité évidente et compte tenu du nombre de paramètres à ajuster, le problème (3.21) est un problème d'optimisation difficile. L'utilisation de métaheuristiques (Dréo et al. 2003) semble donc appropriée dans ce contexte. Précisons que cette thèse n'a pas pour objectif d'étudier le problème de l'optimisation de manière approfondie. Seuls quelques travaux exploratoires sont présentés dans la suite.

En général, ce problème se subdivise en étudiant indépendamment la composante systématique et la composante conditionnelle caractérisant la maintenance préventive. Nous notons alors $\mathcal{V}^{\text{maint}} = (\mathcal{V}_{\text{sys}}^{\text{maint}}, \mathcal{V}_{\text{cond}}^{\text{maint}})$ où

- $\mathcal{V}_{\text{sys}}^{\text{maint}} = ((\delta_{t,\ell})_{\substack{t \geq 1 \\ 1 \leq \ell \leq L}})$ désigne les paramètres de maintenance préventive systématique ;
- $\mathcal{V}_{\text{cond}}^{\text{maint}} = (\Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ désigne les paramètres de maintenance préventive conditionnelle.

Composante systématique

La composante systématique correspond à toute opération de surveillance ou d'entretien effectuée selon un échéancier. Dans le modèle VIRMLAB, le caractère systématique de la maintenance préventive est contrôlé par les variables d'activation $(\delta_{t,\ell})_{\substack{t \geq 1 \\ 1 \leq \ell \leq L}}$.

Remarque 3.3

De manière à rendre totalement indépendant les actions de maintenance des instants effectifs des diagnostics, il est possible de créer artificiellement une $\delta_{t,\ell}$ spécifique à une politique d'actions donnée (systématique en particulier).

L'optimisation de la maintenance systématique sur un horizon temporel de longueur T consiste à déterminer $\widehat{\mathcal{V}}_{\text{sys}}^{\text{maint}} = (\widehat{\delta}_{t,\ell})_{\substack{1 \leq t \leq T \\ 1 \leq \ell \leq L}} \in \{0, 1\}^{T \times L}$ maximisant la fonction d'utilité.

En d'autres termes, l'objectif est de résoudre

$$\widehat{\mathcal{V}}_{\text{sys}}^{\text{maint}} = \arg \max_{\substack{(\delta_{t,\ell})_{\substack{1 \leq t \leq T \\ 1 \leq \ell \leq L}} \in \{0,1\}^{TL}} f^{\text{util}}(\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}_{\text{sys}}^{\text{maint}}, \mathcal{V}_{\text{cond}}^{\text{maint}}), \quad (3.22)$$

les autres paramètres étant fixés. L'espace des paramètres à explorer dans le problème (3.22) contient 2^{TL} éléments soulignant clairement la difficulté de l'optimisation pour les grandes valeurs de TL ($TL \geq 20$ dans les expérimentations réalisées). Une manière de simplifier la problématique sans pour autant s'éloigner des réalités pratiques consiste à considérer un échéancier périodique. Dans ce cas, $\widehat{\mathcal{V}}_{\text{sys}}^{\text{maint}} = (\widehat{\pi}_{\ell})_{1 \leq \ell \leq L} \in \{1, \dots, T\}^L$ où π_{ℓ} correspond à la période d'activation de la ℓ -méthode de diagnostic telle que $\delta_{t,\ell} = \mathbb{I}(\text{mod}(t, \pi_{\ell}) = 0)$. Le problème de maximisation (3.22) se réécrit alors

$$\widehat{\mathcal{V}}_{\text{sys}}^{\text{maint}} = \arg \max_{(\pi_{\ell})_{1 \leq \ell \leq L} \in \{1, \dots, T\}^L} f^{\text{util}}(\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}_{\text{sys}}^{\text{maint}}, \mathcal{V}_{\text{cond}}^{\text{maint}}).$$

L'espace des paramètres à explorer est alors grandement réduit à T^L éléments. Une exploration exhaustive des périodes d'inspection est envisageable lorsque l'horizon temporel et le nombre de diagnostics prennent des valeurs raisonnables.

Exemple 3.9

Reprenons le contexte de l'exemple présenté dans la partie 3.3.4. La figure 3.6 représente les variations de l'utilité journalière moyenne sur 3 ans en fonction des périodes d'activation du diagnostic 1 et du diagnostic 2, notées respectivement π_1 et π_2 . Ces résultats sont obtenus en supposant un système se dégradant selon les paramètres $\mu = 0.99$ et $\gamma = 1$. Nous observons que l'utilité moyenne maximum est atteinte en inspectant le système uniquement à l'aide de la méthode 1 tous les $\widehat{\pi}_1 = 2$ jours. Ceci s'explique par le fait que dans ce cas les méthodes de diagnostic sont en concurrence et que le rapport précision/coût est moins rentable pour la méthode 2 que pour la méthode 1. Sur cet exemple, la suppression du diagnostic 2 peut être envisagée sans perte d'utilité.

Supposons à présent que les méthodes de diagnostic soient spécialisées et non concurrentes (inverse du cas précédent). Considérons les caractéristiques données par les LPC suivantes :

Δ_1				Δ_2			
$D_{t,1}$				$D_{t,2}$			
$D_{t,1}$	d_{\emptyset}	ok	défaut	$D_{t,2}$	d_{\emptyset}	ok	défaut
neuf	0	1	0	neuf	0	1	0
dég-1	0	1	0	dég-1	0	1	0
dég-2	0	1	0	dég-2	0	1	0
dég-3	0	1	0	dég-3	0	1	0
dég-4	0	1	0	dég-4	0	1	0
dég-5	0	1	0	dég-5	0	1	0
dég-6	0	0.40	0.60	dég-6	0	1	0
dég-7	0	1	0	dég-7	0	1	0
dég-8	0	1	0	dég-8	0	1	0
panne	0	1	0	panne	0	0	1

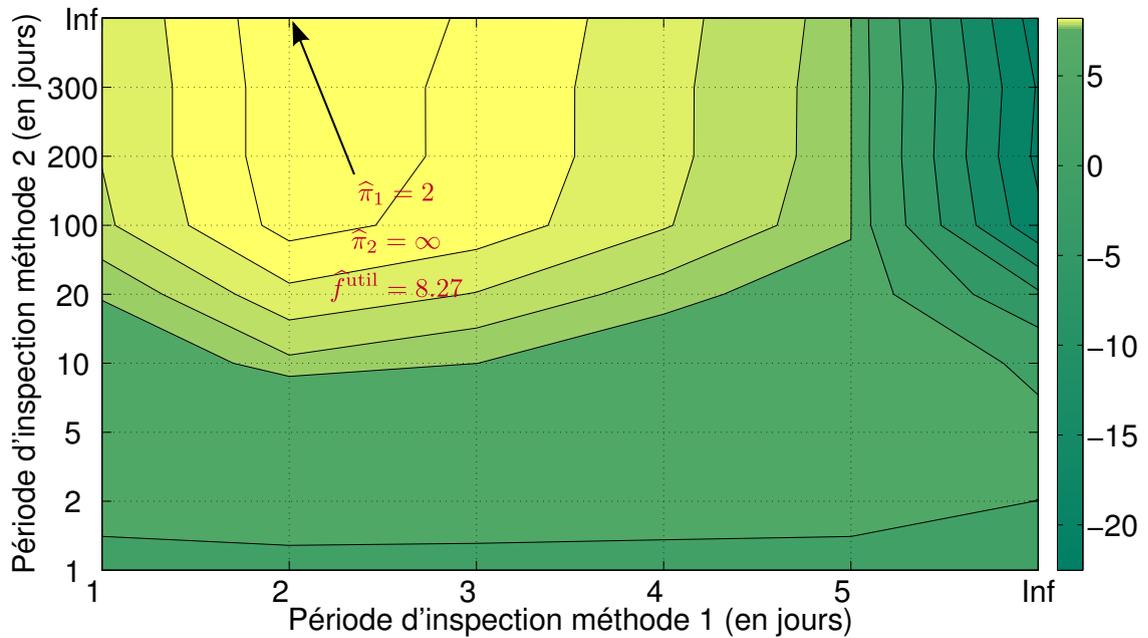


FIG. 3.6 – Évolution de l'utilité journalière moyenne sur 3 ans en fonction des périodes de diagnostic π_1 et π_2 . La dégradation du système est caractérisée par les paramètres $\mu = 0.99$ et $\gamma = 1$ et la politique d'actions effectuée est $\Gamma_{\text{rép-1}}$. Les méthodes de diagnostic possèdent les caractéristiques présentées dans la partie 3.3.4 (concurrentes). La notation "Inf" sur les axes correspond à l'infini. Lorsque $\pi_1 = \infty$ (resp. $\pi_2 = \infty$), cela signifie que la méthode de diagnostic 1 (resp. méthode 2) n'est pas utilisée au cours du scénario.

La méthode 1 est dédiée à la détection préventive et exclusive de l'état de dégradation dég-6. Cette méthode déclenche une action de maintenance préventive lorsque le système se trouve dans l'état dég-6 avec un taux de détection de 60%. La méthode 2 permet quant à elle le déclenchement d'une action corrective lorsque le système atteint l'état panne. La figure 3.7 présente les variations de l'utilité journalière moyenne sur 3 ans en fonction des périodes d'activation des deux méthodes de diagnostic munies des caractéristiques données précédemment. L'optimum est atteint pour $\pi_1 = 1$ jour et $\pi_2 = 5$ jours. Cet exemple illustre un cas où la maintenance corrective et la maintenance préventive ont des rôles complémentaires.

Composante conditionnelle

La composante conditionnelle correspond aux traitements des indices révélateurs de l'état du système ainsi qu'aux décisions de maintenance qui en découlent. Dans le modèle VIR-MALAB, l'aspect conditionnel est caractérisé par la LPC de gestion des diagnostic $\Delta^{\text{sys}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}|\{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L\}$ et la LPC associée à la politique d'actions de maintenance $\Gamma \in \mathcal{L}\{\mathcal{A}\}|\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}$.

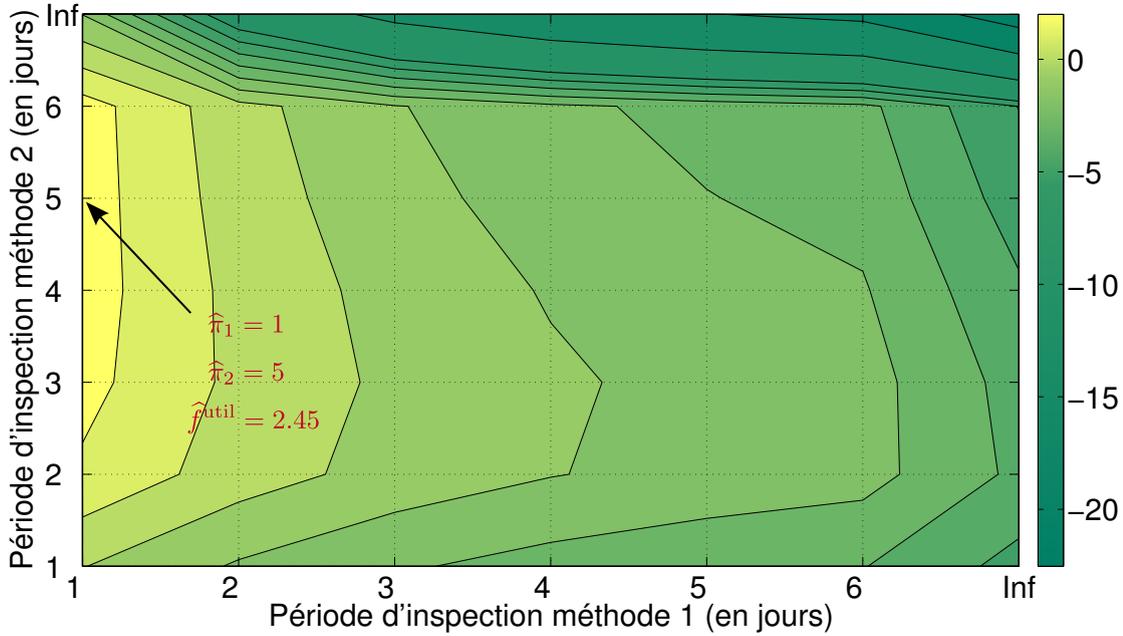


FIG. 3.7 – Évolution de l'utilité journalière moyenne sur 3 ans en fonction des périodes de diagnostic π_1 et π_2 . La dégradation du système est caractérisée par les paramètres $\mu = 0.99$ et $\gamma = 1$, L'action de maintenance effectuée est rép-1. Les méthodes de diagnostic possèdent les caractéristiques présentées dans cet exemple (non concurrentes).

L'optimisation de la composante conditionnelle revient à chercher $\hat{\mathcal{V}}_{\text{cond}}^{\text{maint}} = (\Delta^{\text{sys}}, \Gamma)$ maximisant la fonction d'utilité, ce qui s'écrit

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{cond}}^{\text{maint}} = \arg \max_{\Delta^{\text{sys}} \in \mathcal{L}\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\} | \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L\}, \Gamma \in \mathcal{L}\{\mathcal{A}\} | \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}} f^{\text{util}}(\mathcal{V}^{\text{desc}}, \mathcal{V}_{\text{sys}}^{\text{maint}}, \mathcal{V}_{\text{cond}}^{\text{maint}}), \quad (3.23)$$

les autres paramètres étant fixés. Dans ce cas, il s'agit d'explorer les espaces $\mathcal{L}\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\} | \{\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_L\}$ et $\mathcal{L}\{\mathcal{A}\} | \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}$ associés à des domaines discrets et finis. Quels que soient ces domaines, ces espaces contiennent un nombre infini de LPC. L'exploration de ces espaces ne peut être réalisée de manière exhaustive. Des résultats encourageants ont été obtenus à partir d'une méthode de recuit simulé adaptée à l'exploration d'espace continu (Corana et al. 1987).

Néanmoins, en se restreignant aux seules LPC déterministes (cf. définition 1.8), le nombre de LPC possibles chute à $|\mathcal{D}^{\text{sys}}| \prod_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell|$ pour Δ^{sys} et $|\mathcal{A}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}|$ pour Γ . Sous cette hypothèse déterministe, il y a donc $|\mathcal{A}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}|^2 \prod_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell|$ ajustements à explorer pour déterminer la politique conditionnelle optimale correspondante. Une fois encore, il est rare en pratique d'être en mesure de tester chaque configuration, ce qui souligne la nécessité d'appliquer des méthodes d'optimisation adaptées à ce type de situations.

3.5 Conclusions

Ce chapitre est dédié à la description d'un modèle de maintenance générique que nous appelons VIRMALAB. Ce dernier repose sur le formalisme des Modèles Graphiques Probabilistes Markoviens (MGPM). Cette approche permet de représenter le processus de dégradation d'un système dynamique ainsi que ses moyens de diagnostic et de maintenance.

Le premier intérêt du modèle VIRMALAB provient de sa flexibilité. La plupart des méthodes de maintenance ayant cours dans l'industrie peuvent y être intégrées. Il est en outre possible de tenir compte de différentes politiques de maintenance conjointement (corrective, préventive systématique, préventive conditionnelle) en vue d'en étudier les effets sur le système. Le second point intéressant de cette approche concerne l'héritage des outils d'analyse associés aux MGPM. L'adaptation des algorithmes d'inférence génériques dans le cadre du modèle VIRMALAB rend possible l'évaluation de politiques de maintenance selon un critère donné. Dans cette étude, notre choix s'est arrêté sur le critère d'utilité au vue du large éventail de problèmes qu'il permet de traiter. Nous présentons en particulier dans ce chapitre quelques résultats sur l'ajustement des paramètres de maintenance dans le cas où l'utilité correspond à un coût ou à un profit.

Notons enfin qu'une étude rigoureuse de la complexité spatiale et algorithmique de l'approche VIRMALAB est présentée. Par ailleurs, la boîte à outils MATLAB[®] évoquée dans la conclusion du chapitre 2 a été mise à profit pour la modélisation de la maintenance de systèmes multi-composants.

Application à la prévention des ruptures de rails

Sommaire

4.1	Introduction	126
4.1.1	Contexte de l'étude	126
4.1.2	Défauts de fatigue et ruptures	127
4.1.3	Déroulement de l'étude	128
4.2	Représentation de la voie ferrée	128
4.3	Dégradation d'un coupon élémentaire	129
4.3.1	Généralités	129
4.3.2	Modélisation	132
4.3.3	Coût associé à l'indisponibilité de la voie	136
4.3.4	Apprentissage des lois de temps de séjour	136
4.4	Méthodes de diagnostic	138
4.4.1	Diagnostic ultrasonore	141
4.4.2	Diagnostic par signalisation	143
4.4.3	Politique de diagnostic	144
4.4.4	Coûts associés aux diagnostics	145
4.5	Actions de maintenance	145
4.5.1	Description qualitative	145
4.5.2	Politique d'action	147
4.5.3	Coûts associés aux actions de maintenance	148
4.5.4	Conséquences sur le coupon élémentaire	148
4.6	Outil développé	152
4.6.1	Description	152
4.6.2	Résultats	154
4.7	Conclusions	160

4.1 Introduction

4.1.1 Contexte de l'étude

Ces dernières années, la Régie Autonome des Transports Parisiens (RATP) a constaté une recrudescence des défauts de rails. Ces défauts, touchant en particulier la ligne A du Réseau Express Régional (RER), peuvent conduire à des ruptures de rails. Les procédures de maintenance établies par le service de la voie permettent de conserver un niveau de sécurité élevé face à ce phénomène. En revanche, ces procédures se traduisent le plus souvent par l'arrêt immédiat du trafic en cas de détection d'une rupture, ce qui occasionne une dégradation de la qualité de service et des coûts de maintenance importants. Une étude préliminaire réalisée à l'unité Voie de la RATP a montré l'intérêt d'une analyse prévisionnelle de la maintenance de façon à prévenir l'apparition de ruptures (Le Bihan and Jouve 2005). L'inspection des rails, le suivi des défauts et les remplacements préventifs ont clairement été identifiés comme des paramètres clés pour l'amélioration du réseau.

Il existe dans la littérature quelques travaux abordant l'analyse des risques associés aux ruptures de rails (Barkan et al. 2003), (Dick et al. 2003), (Anderson and Barkan 2004). Les méthodes proposées s'apparentent dans la plupart des cas à une étude statistique spécifique sur les données de Retour d'EXpérience (REX) du réseau considéré. Aucune méthodologie générique n'est réellement décrite, ce qui rend ces approches difficilement transposables aux problématiques d'autres exploitants. De plus, ces études n'offrent pas la possibilité d'évaluer les effets de différentes stratégies de maintenance. D'autres travaux s'intéressent à l'ajustement de la maintenance préventive des rails. Orringer (1988) a proposé un modèle statique pour l'optimisation des intervalles de temps entre deux inspections de la voie. Plus récemment, Podofillini et al. (2006) ont ajouté une dimension temporelle en représentant la dégradation des rails par une chaîne de Markov. Dans ce cas, l'optimisation de la politique de maintenance est réalisée à partir d'un algorithme génétique. Bien que possédant un cadre d'application relativement large, cette méthode souffre d'un nombre élevé de paramètres à sélectionner pour l'optimisation, compliquant son utilisation pratique. Notons par ailleurs que tous les travaux cités précédemment ne tiennent pas compte des spécificités engendrées par les soudures aluminothermiques (cf. figure 4.1c) qui sont pourtant au cœur des préoccupations de la maintenance des rails. Ces dernières sont introduites à deux occasions :

- au moment de la pose initiale de la voie ou suite à un renouvellement de rails à des pas d'espace important (environ tous les 250 mètres) ;
- lors de la pose d'un coupon de réparation (longueur moyenne de 23 mètres sur le RER) suite à une opération de maintenance corrective.

Les soudures possèdent une durée de vie bien inférieure aux rails standards, dits encore rails "pleine barre". Autrement dit, plus il y a de soudures sur la voie, plus le risque d'apparition d'un défaut par mètre linéaire augmente. Ces soudures apparaissent et disparaissent au fil des opérations de maintenance, ce qui rend délicate la modélisation de leur impact sur la dégradation de la voie. À notre connaissance, seul l'article de Zhao et al. (2007) propose un modèle tenant compte de ces soudures, les processus de dégradation sous-jacents étant là encore représentés par des chaînes de Markov.

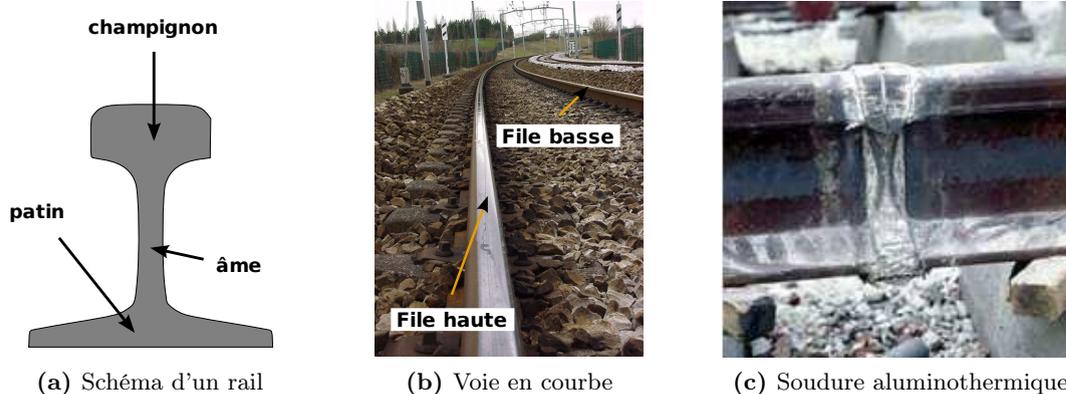


FIG. 4.1 – Illustrations caractéristiques de la voie.

4.1.2 Défauts de fatigue et ruptures

Les rails sont soumis à d'importantes contraintes répétées au niveau du contact rail-roue lors de la circulation des trains (Bondeux et al. 2006). Ces contraintes, conjuguées à l'existence de glissements entre le rail et la roue, entraînent différents modes de dégradations qui se traduisent par l'apparition :

- d'usure des profils qui est caractérisée par l'arrachement répété de métal sur le rail et la roue ;
- d'usure ondulatoire qui se présente sous la forme d'une ondulation de la surface du rail plus ou moins régulière ;
- de défauts de surface provenant du développement de fissures initiées dans la zone de contact, en surface ou en subsurface immédiate ;
- de défauts de fatigue internes provenant du développement de fissures initiées sur de petites inclusions d'impuretés communément présentes dans l'acier.

Ce dernier type est le plus pénalisant car il aboutit à terme à la rupture systématique du rail. Les défauts de fatigue internes ou de surface apparaissent majoritairement au niveau des soudures aluminothermiques, points faibles de la voie. Toute anomalie, même légère, lors du soudage est susceptible d'entraîner une hétérogénéité du mélange (par exemple un préchauffage insuffisant). L'utilisation des moules de soudage peut également créer en surface des petites fissures qui constituent autant d'amorces de ruptures. Notons cependant que l'évolution des procédures de soudage tend d'année en année à minimiser ces inconvénients.

L'évolution de ces fissures dépend principalement de la charge à l'essieu des matériels roulants circulant sur la voie. Plus cette charge augmente, plus le phénomène de fatigue s'intensifie, accélérant la propagation des fissures. De même, ces défauts se déclarent le plus souvent dans les courbes de faible rayon et en file dite haute (par opposition à la file dite basse, cf. figure 4.1b) où les contraintes sont les plus fortes du fait de l'inscription du matériel roulant en courbe. La figure 4.2 illustre les différents types de rupture. La rupture

simple (cf. figures 4.2a et 4.2b), cas le plus fréquent, présente un danger limité pour la circulation et est quasiment toujours détectée immédiatement par la signalisation (coupure du courant circulant dans les rails).



(a) Rupture simple sur rail



(b) Rupture simple sur soudure

FIG. 4.2 – Exemples de ruptures.

La réparation d'une rupture se traduit par une opération de maintenance curative visant à insérer un coupon de rail neuf en lieu et place de la rupture. Cette méthode présente l'inconvénient de multiplier le nombre de soudures aluminothermiques, introduisant ainsi sur la voie des points singuliers à plus faible durée de vie. L'évolution temporelle du nombre de soudures complique le problème de modélisation de la voie en vue d'étudier sa fiabilité. Ceci revient en effet à considérer un système dans lequel le nombre de composants n'est pas fixe. La partie 4.2 explicite la solution introduite pour contourner cette difficulté.

4.1.3 Déroulement de l'étude

L'objectif de ce chapitre est d'appliquer l'approche générique VIRMALAB (cf. chapitre 3) à la prévention des ruptures de rails. La partie 4.2 décrit l'approche adoptée pour représenter la voie ferrée dans le cadre de cette étude. Le modèle de dégradation de la voie est présenté dans la partie 4.3. Les parties 4.4 et 4.5 détaillent respectivement l'intégration des systèmes de diagnostic et des actions de maintenance dans le modèle VIRMALAB associé à cette étude. Enfin, cette étude a donné lieu au développement d'un outil d'analyse de la maintenance des rails. La partie 4.6 propose une brève description de cet outil ainsi qu'une étude de cas illustrant le type d'analyses réalisables.

4.2 Représentation de la voie ferrée

Dans cette étude, nous nous intéressons au processus de dégradation de la voie ferrée lié aux défauts de fatigue. De manière synthétique, nous supposons qu'une voie est constituée de deux files de rails, chacune d'elles étant composée de rails standards (pleines barres) et d'un certain nombre de soudures aluminothermiques. Notons que les rails en pleines barres

sont par nature des composants de nature continue, tandis que les soudures sont des points singuliers de la voie. Cette différence de nature complique la représentation d'une file de rail dans un cadre formel. Pour remédier à ce problème, nous procédons à une discrétisation de la voie. Plus précisément, nous faisons les hypothèses suivantes :

1. Toute voie de longueur L_v est représentée comme une succession de $N_{ce} = 2 \times L_v / L_{ce}$ coupons de longueur L_{ce} .
2. Chaque coupon peut éventuellement posséder au plus une soudure aluminothermique.
3. Pour une section de voie donnée, les coupons sont supposés indépendants et régis par le même processus de dégradation.

Le couple composé d'un coupon de rail pleine barre de taille L_{ce} et d'une éventuelle soudure aluminothermique est appelé coupon élémentaire. La figure 4.3 illustre les hypothèses précédentes. Une bonne pratique quant au choix de la taille du coupon élémentaire L_{ce} consiste à prendre la longueur moyenne du coupon remplacé lors d'une opération de maintenance curative, à savoir environ 25 mètres sur le RER.

Cette représentation de la voie permet de ramener l'étude d'une portion de voie quelconque à l'étude de son coupon élémentaire moyen. Autrement dit, cette approche simplifie la problématique initiale en modélisant une voie ferrée donnée par uniquement deux composants, à savoir la pleine barre de longueur L_{ce} et l'éventuelle soudure caractéristique de la voie considérée. Supposons par exemple que l'objectif soit d'analyser la fiabilité des rails situés en courbe ayant un rayon de courbure inférieur à 500 mètres sur le RER A. La méthode consiste alors à construire à partir du REX disponible les modèles de dégradation de la pleine barre moyenne et de la soudure moyenne dans ce contexte particulier. L'hypothèse d'indépendance est ensuite utilisée afin d'extrapoler les résultats obtenus pour le coupon élémentaire à la totalité de la voie considérée.

Remarquons toutefois que ces hypothèses simplificatrices rendent impossible une analyse géographique de la dégradation de la voie ferrée. La prévision de la localisation d'une rupture est exclue avec une telle approche. En revanche, la méthodologie décrite est bien adaptée pour le calcul d'indicateurs moyens tels que le coût moyen annuel de la maintenance ou le nombre moyen annuel de ruptures. Notons enfin qu'il est théoriquement possible de construire un modèle intégrant les informations géographiques d'une voie donnée. Cependant, pour des raisons de complexité spatiale et algorithmique, cela n'est actuellement pas réalisé.

4.3 Dégradation d'un coupon élémentaire

4.3.1 Généralités

Nous abordons à présent la modélisation du processus de dégradation d'un coupon élémentaire. Autrement dit, il s'agit d'étudier l'évolution des défauts de fatigue dans une pleine barre et dans une soudure pour un contexte donné. Dans les paragraphes suivants, nous nous reposons sur la classification des défauts de fatigue en vigueur à la RATP ([Le Bihan](#)

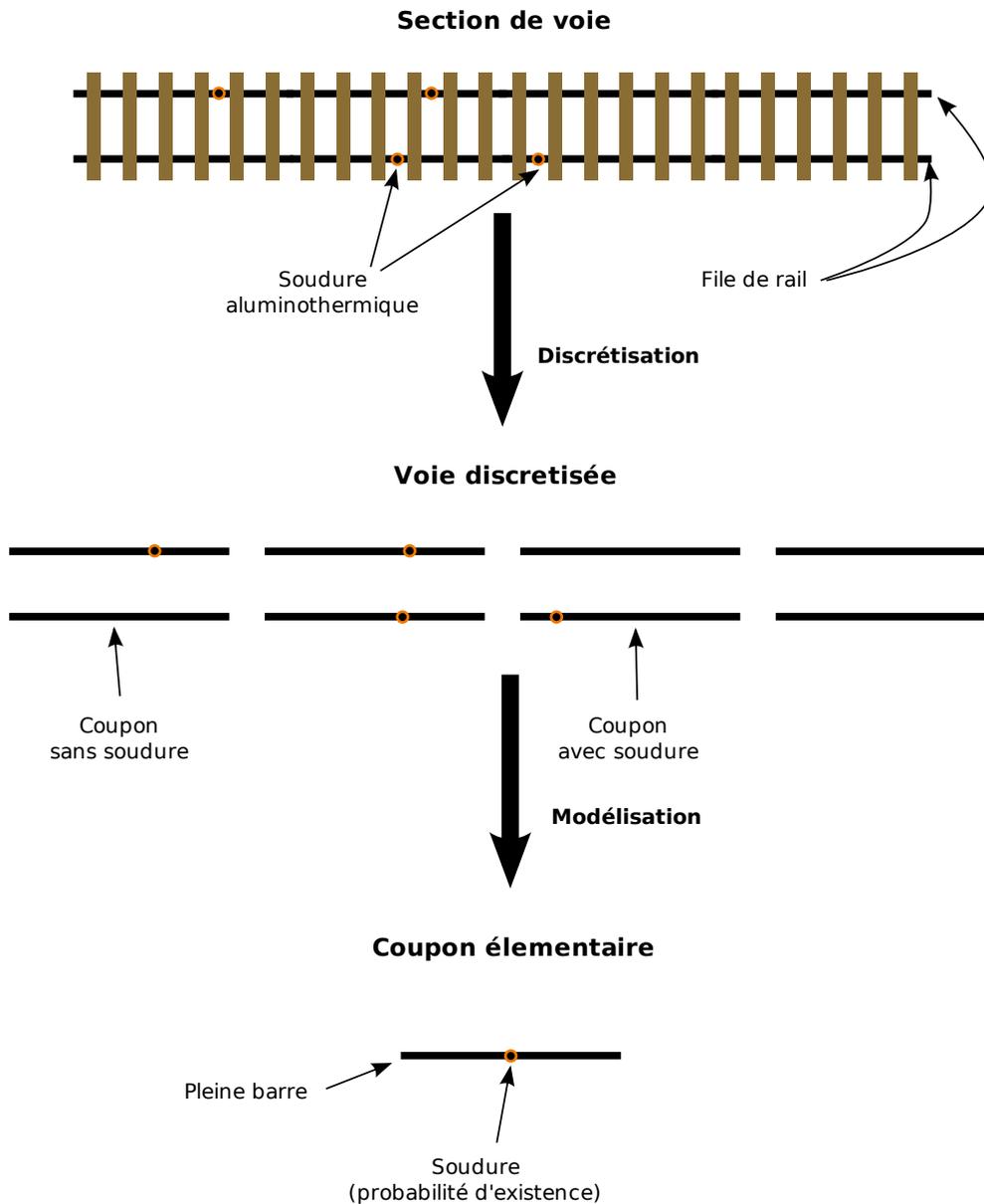


FIG. 4.3 – Modélisation de la voie.

2005). Cette classification est directement liée à la taille du défaut détecté, et par conséquent au degré d'urgence de son élimination. Le classement, par gravité croissante, est le suivant :

- N : pas de défaut détecté ;
- O : défaut en observation ;
- X1 : défaut à surveiller de près ;
- X2 : défaut à réparer avec délai d'un mois maximum ;
- S : défaut à réparer d'urgence.

D'après les référentiels de maintenance, les ruptures n'apparaissent pas explicitement dans le classement précédent mais sont regroupées dans la classe S avec les défauts internes majeurs et les fissures visibles ayant atteint un stade critique. En revanche, les données de REX disponibles proposent une discrétisation plus détaillée de la classe S en SInt, SVis et SRup désignant respectivement un défaut interne critique, une fissure visible critique et une rupture. Du point de vue de la maintenance, cette distinction est intéressante car seule la détection d'une rupture entraîne, pour des raisons de sécurité, une réparation immédiate quelles que soient les conséquences pour l'exploitation. Une rupture est donc susceptible d'engendrer des perturbations importantes du service voyageur puisque la maintenance nécessite l'arrêt du trafic. Il est à noter que les défauts critiques autres que les ruptures sont en général traités immédiatement, mais de manière palliative sans interrompre l'exploitation (renforcement du défaut par éclissage), puis de manière curative sous un certain délai.

Rappelons que cette étude a pour objectif la prévention des ruptures de rails en évaluant les performances de telle ou telle politique de maintenance sur un horizon temporel donné. Pour cette raison, et également afin de limiter la complexité algorithmique de l'approche, une précision temporelle mensuelle est utilisée dans la suite. Par conséquent, la classe X2 et la classe S, sans les ruptures, peuvent être agrégées de par l'échelle temporelle utilisée. Pour des raisons similaires, il est également intéressant de fusionner la classe O et la classe X1. Des remarques précédentes, nous déduisons l'ensemble des états de dégradation d'un coupon élémentaire (pleine barre + soudure) pour notre modélisation :

- N : pas de défaut ;
- OX1 : défaut mineur ;
- X2S : défaut critique ;
- SRup : rupture.

Précisons enfin qu'il existe de nombreux facteurs contextuels agissant sur le processus de dégradation des rails. Dans le cadre de cette application, nous nous intéressons en particulier :

- à la charge à l'essieu et au tonnage supporté par la zone étudiée ;
- au rayon des courbes ;
- à la localisation sur file haute ou basse.

D'autres paramètres pourraient être ajoutés à cette liste tels que l'insuffisance de dévers¹, la nuance de l'acier² des rails ou le type des soudures. Cependant, augmenter le degré de précision du contexte a pour conséquence une diminution des données disponibles permettant d'en expliquer les effets. Le choix des variables contextuelles retenues provient d'un compromis entre la pertinence qualitative du modèle de dégradation et la quantité d'informations utilisables pour son apprentissage.

¹L'insuffisance de dévers est l'écart, négatif, entre le dévers théoriquement nécessaire pour compenser la force centrifuge et le dévers réel, le dévers étant la valeur de l'inclinaison transversale d'une voie ferrée.

²La nuance d'un acier correspond à ses caractéristiques de construction exprimées par un certain nombre de propriétés mécaniques et chimiques.

4.3.2 Modélisation

Description qualitative

La figure 4.4 présente le Modèle Graphique Probabiliste Markovien d'ordre un (1-MGPM, cf. chapitre 1) associé au processus de dégradation d'un coupon élémentaire. Ce dernier étant constitué d'une pleine barre de rail de longueur L_{ce} et d'une éventuelle soudure, le processus global est représenté par deux sous-modèles correspondant à ces deux composants. Dans cette application, nous utilisons les Modèles Graphiques de Durée (MGD, cf. chapitre 2) de manière à faire face à d'éventuels dynamiques d'évolution complexes.

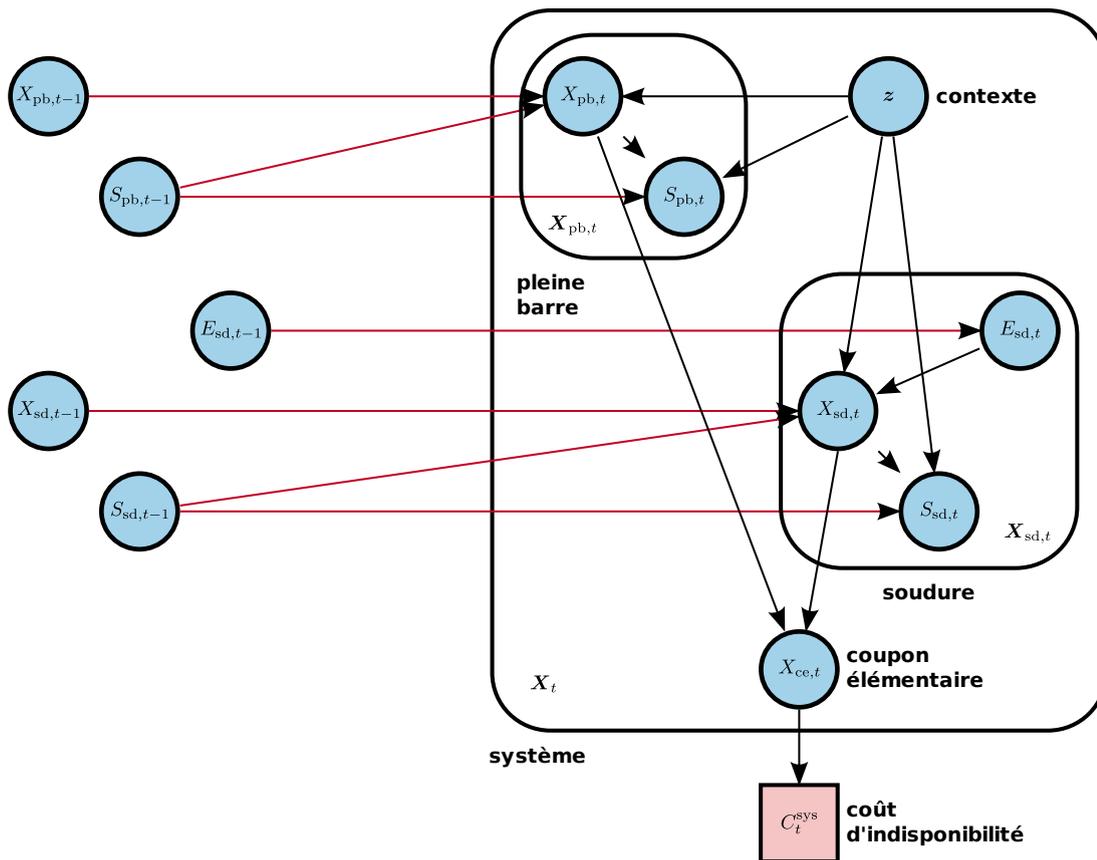


FIG. 4.4 – Modèle de transition du 1-MGPM associé à la dégradation d'un coupon élémentaire. Comme dans les chapitres précédents, les liens de couleur rouge indique une dépendance entre la tranche $t - 1$ et la tranche t .

Le vecteur aléatoire $\mathbf{X}_{pb,t} = (X_{pb,t}, S_{pb,t})$ représente les caractéristiques de la pleine barre de rail à l'instant t . La variable aléatoire $X_{pb,t}$ à valeurs dans l'ensemble d'états $\mathcal{X} = \{N, OX1, X2S, SRup\}$ désigne son niveau de dégradation à l'instant t . La variable aléatoire $S_{pb,t}$ à valeurs dans $\mathcal{S} = \{1, \dots, T_S\}$ désigne le temps restant à l'instant t avant le prochain changement d'état, où T_S correspond au temps de séjour maximum possible dans chaque état. De même, le vecteur aléatoire $\mathbf{X}_{sd,t} = (E_{sd,t}, X_{sd,t}, S_{sd,t})$ représente les

caractéristiques de la soudure à l'instant t . La signification des variables aléatoires $X_{sd,t}$ et $S_{sd,t}$ est analogue à ce qui est décrit pour la pleine barre. La variable $E_{sd,t}$, à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{E} = \{\text{absente, présente}\}$ est une variable aléatoire à deux états permettant de modéliser la probabilité que le coupon élémentaire présente ou non une soudure. De manière synthétique, l'état du coupon élémentaire est défini comme étant égal à l'état le plus critique entre celui de la pleine barre et celui de la soudure associée. De ce fait, nous introduisons également la variable aléatoire $X_{ce,t}$ de manière à représenter explicitement l'état du coupon élémentaire à l'instant t . Par ailleurs, la variable d'utilité C_t^{sys} désigne le coût associé à l'état du système, autrement dit à l'état du coupon élémentaire, à l'instant t . Ce coût s'interprète comme la pénalité économique engendrée par une indisponibilité du système.

Le contexte est décrit par un vecteur \mathbf{z} supposé indépendant du temps et agissant sur la dégradation de la pleine barre et de la soudure. La variable symbolisant le contexte est volontairement notée en lettre minuscule de façon à souligner le fait qu'il ne s'agit pas d'une variable aléatoire. Chaque étude sur la dégradation du système est donc réalisée avec un contexte défini *a priori*. De ce contexte, nous pouvons déduire les deux grandeurs suivantes :

- $L_{v,\mathbf{z}}$, le nombre de mètres de rails correspondant au contexte \mathbf{z} ;
- $N_{ce,\mathbf{z}} = L_{v,\mathbf{z}}/L_{ce}$, le nombre de coupons élémentaires associé à la voie de contexte \mathbf{z} .

Pour finir, en utilisant les notations de l'approche VIRMALAB (cf. chapitre 3), le vecteur aléatoire représentant l'état global du système correspond à $\mathbf{X}_t = (\mathbf{z}, \mathbf{X}_{pb,t}, \mathbf{X}_{sd,t}, X_{ce,t})$.

Description probabiliste

Soit \mathbf{z} le vecteur contenant les informations contextuelles relatives à la voie que nous souhaitons étudier. D'un point de vue probabiliste, le processus de dégradation naturelle d'une pleine barre est caractérisé par la distribution de son état à l'instant initial, notée $\alpha_{pb,\mathbf{z},1}$, sa Loi de Probabilité Conditionnelle (LPC) de transition naturelle, notée $Q_{pb,\mathbf{z}}^{\text{sys}}$, et sa LPC des temps de séjour, notée $F_{pb,\mathbf{z}}^{\text{sys}}$. Rappelons que la loi $\alpha_{pb,\mathbf{z},1}$ constitue un des paramètres descriptifs du modèle puisqu'il permet de spécifier l'état initial des pleines barres sur la voie considérée. En général, nous nous plaçons dans le cas où la voie est initialement neuve en affectant une probabilité égale à un à l'état N. Sous réserve d'existence, l'évolution d'une soudure possède des caractéristiques probabilistes analogues. Exceptée la LPC des temps de séjour $F_{sd,\mathbf{z}}^{\text{sys}}$, les paramètres probabilistes de la soudure $\alpha_{sd,\mathbf{z},1}$ et $Q_{sd,\mathbf{z}}^{\text{sys}}$ dépendent explicitement de son existence. En pratique, s'il n'y pas de soudure à l'instant t , c'est-à-dire si $E_{sd,t} = \text{absente}$, une probabilité égale à 1 est associée à l'état N. Nous considérons donc que l'absence de soudure est modélisée par une soudure neuve qui ne se dégrade pas. D'autre part, nous supposons que :

- les processus de dégradation ne sont pas auto-réparables ;
- l'état rupture est absorbant ;
- les transitions entre états s'effectuent de proche en proche, dans l'ordre croissant de gravité.

Ces remarques, et en particulier le dernier point, sont conformes à la physique de propagation des fissures internes. D'après les descriptions précédentes, les lois de transition naturelle de la pleine barre et de la soudure vérifient respectivement :

$Q_{pb,z}^{sys}$					$Q_{sd,z}^{sys}$					
$X_{pb,t}$					$X_{sd,t}$					
$X_{pb,t-1}$	N	OX1	X2S	SRup	$X_{sd,t-1}$	$E_{sd,t}$	N	OX1	X2S	SRup
N	0	1	0	0	N	absente	1	0	0	0
OX1	0	0	1	0	OX1	absente	1	0	0	0
X2S	0	0	0	1	X2S	absente	1	0	0	0
SRup	0	0	0	1	SRup	absente	1	0	0	0
					N	présente	0	1	0	0
					OX1	présente	0	0	1	0
					X2S	présente	0	0	0	1
					SRup	présente	0	0	0	1

Il est important de noter que le processus de dégradation de la soudure dépend également de l'évolution de sa probabilité de présence. Rappelons que dans cette section nous nous intéressons à l'évolution naturelle du coupon élémentaire. Le processus décrivant l'existence d'une soudure est donc défini dans un premier temps par sa loi initiale de présence, notée $\omega_{sd,z,1}$. À l'instar des lois initiales $\alpha_{pb,z,1}$ et $\alpha_{sd,z,1}$, la loi $\omega_{sd,z,1}$ est un paramètre descriptif du modèle permettant de tenir compte du nombre de soudures présentes initialement sur la voie, noté $N_{sd,z,1}$. Rappelons que par hypothèse, le nombre de soudures est au plus égal au nombre de coupons élémentaires, c'est-à-dire $N_{sd,z,1} \leq N_{ce,z}$. La probabilité initiale d'existence d'une soudure est alors donnée par

$$P(E_{sd,1} = \text{présente}; z) = \omega_{sd,z,1}^+ = \frac{N_{sd,z,1}}{N_{ce,z}}, \quad (4.1)$$

Le processus régissant l'existence de la soudure dépend également de sa loi de transition naturelle, notée W_{sd}^{sys} . Or, après la pose initiale et sans intervention extérieure, il ne peut y avoir création de soudures, ces dernières étant introduites sur la voie lors d'opérations de maintenance correctives. Autrement dit, la probabilité de présence d'une soudure ne change pas et par conséquent la LPC W_{sd}^{sys} correspond à la LPC identité :

W_{sd}^{sys}		
$E_{sd,t}$		
$E_{sd,t-1}$	absente	présente
absente	1	0
présente	0	1

La définition de la LPC de transition artificielle de création/suppression de soudure, notée $W_{sd,z}^{act}$, est abordée à la fin de la partie 4.5.4.

Nous introduisons enfin la LPC Σ_{cd} permettant de définir l'état du coupon élémentaire conditionnellement à l'état de la pleine barre et à l'état de la soudure. Rappelons que l'état du coupon élémentaire correspond à l'état de dégradation le plus critique entre celui de la pleine barre et celui de la soudure. Cela se traduit formellement par :

		Σ_{ce}			
		$X_{ce,t}$			
$X_{pb,t}$	$X_{sd,t}$	N	OX1	X2S	SRup
N	N	1	0	0	0
OX1	N	0	1	0	0
X2S	N	0	0	1	0
SRup	N	0	0	0	1
N	OX1	0	1	0	0
OX1	OX1	0	1	0	0
X2S	OX1	0	0	1	0
SRup	OX1	0	0	0	1
N	X2S	0	0	1	0
OX1	X2S	0	0	1	0
X2S	X2S	0	0	1	0
SRup	X2S	0	0	0	1
N	SRup	0	0	0	1
OX1	SRup	0	0	0	1
X2S	SRup	0	0	0	1
SRup	SRup	0	0	0	1

En conclusion, nous supposons ici que la dégradation naturelle du coupon élémentaire ne dépend que des lois de temps de séjour associées à chacun des deux composants. L'apprentissage de ces lois est détaillé dans la partie 4.3.4. Par ailleurs, cet exemple illustre la possibilité de traiter les systèmes multi-composants dans le cadre du modèle VIRMALAB.

Remarque 4.1 (Notations VIRMALAB)

En reprenant les notations introduites au chapitre 3, la loi initiale du système λ_1 est définie par

$$\lambda_{z,1} = \alpha_{pb,z,1} \cdot F_{pb,z}^{sys} \cdot \omega_{sd,z,1} \cdot \alpha_{sd,z,1} \cdot F_{sd,z}^{sys} \cdot \Sigma_{ce}.$$

La LPC de transition naturelle Λ_z^{sys} est quant à elle définie par

$$\Lambda_z^{sys} = \begin{cases} Q_{pb,z}^{sys} \cdot F_{pb,z}^{sys} \cdot W_{sd,z}^{sys} \cdot Q_{sd,z}^{sys} \cdot F_{sd,z}^{sys} & \text{si transition} \\ C_{pb} \cdot I_{pb} \cdot C_{sd} \cdot I_{sd} & \text{sinon} \end{cases},$$

où C_{pb} et I_{pb} désignent respectivement la LPC de décompte des temps de séjour et la LPC identité associées au composant pleine barre (cf. notations introduites dans le cadre des MGD au chapitre 2). Les LPC C_{sd} et I_{sd} correspondent aux mêmes objets pour le

composant soudure. La description de la LPC de transition artificielle Λ_z^{act} est donnée dans la partie 4.5, laquelle aborde la modélisation des actions de maintenance et leur effet sur le système.

4.3.3 Coût associé à l'indisponibilité de la voie

Dans cette étude, nous supposons que seule la présence d'une rupture sur la voie entraîne de l'indisponibilité. Cette dernière a des répercussions économiques dues aux perturbations du service voyageur. Nous notons alors c_{ind}^{sys} la pénalité financière occasionnée par l'apparition d'une rupture sur la voie considérée et nous en déduisons son coût pour un coupon élémentaire à l'instant t :

$$C_{z,t}^{sys} = c_{ind}^{sys} P(X_{ce,t} = SRup; z), \quad (4.2)$$

où $P(X_{ce,t} = SRup; z)$ correspond à la probabilité qu'une rupture apparaisse sur le coupon élémentaire associé à la voie de contexte z à l'instant t .

Remarquons que les perturbations engendrées par les ruptures ont également des conséquences en termes d'image pour l'exploitant. Par conséquent, l'étude du nombre de ruptures au cours du temps s'avère également pertinente, et ce, indépendamment des considérations financières directes. Notons $N_{rup,z,t}$ l'espérance du nombre de ruptures présentes sur la voie à l'instant t . Par définition, nous avons :

$$N_{rup,z,t} = N_{ce,z} P(X_{ce,t} = SRup; z). \quad (4.3)$$

4.3.4 Apprentissage des lois de temps de séjour

Données disponibles

L'apprentissage des LPC associées aux temps de séjour dans chacun des états de dégradation de la pleine barre et de la soudure s'effectue en exploitant les bases de REX disponibles. À la RATP, le REX concernant le suivi des défauts de fatigue est stocké dans une base dite AVARIES. Le traitement de cette base permet d'obtenir une information sur les durées de vie des pleines barres et des soudures qui ont présenté un défaut. Plus précisément, le contexte général, le classement du défaut et la date de chaque avarie sont donnés. Il est donc possible de reconstruire l'historique de chaque pleine barre ou de chaque soudure ayant présenté un défaut, de son installation sur la voie jusqu'à son retrait.

Notons que pour des raisons de sécurité évidentes, la RATP ne laisse pas évoluer les défauts détectés jusqu'à l'apparition d'une rupture. Ceci constitue une difficulté d'un point de vue statistique car, de fait, il existe très peu de données disponibles sur les temps de séjour dans les états dégradés OX1 et X2S. Les seules informations réellement exploitables par une méthode d'apprentissage automatique concernent l'état N. Les distributions des temps de séjour associés aux états OX1 et X2S sont fixées par avis d'experts et prennent généralement la forme de lois de Weibull.

Il est important de noter que la prise en compte des seules données d'avaries conduit à une estimation pessimiste du processus de dégradation du coupon élémentaire. Il est en effet nécessaire de tenir compte de toutes les pleines barres et toutes les soudures qui n'ont pas encore présenté de défaut à la date où l'étude a lieu. Pour ces matériels toujours fonctionnels, nous disposons uniquement d'une borne inférieure du temps de séjour réel dans l'état N. Le traitement de ces données, dites censurées à droite (Kalbfleisch and Prentice 2002), constitue la seconde difficulté de ce problème d'apprentissage. À titre indicatif, les informations concernant le matériel encore en voie à une date donnée se trouve dans une seconde base appelée RAIL.

Au final, pour un contexte \mathbf{z} donné, un filtrage des bases AVARIES et RAIL est réalisé de manière à obtenir les quantités suivantes :

- $N_{pb,\mathbf{z},s}$ et $N_{sd,\mathbf{z},s}$ désignent respectivement le nombre de mètres de rail et le nombre de soudures retirés suite à toutes les avaries intervenues s mois après la pose du matériel en voie ;
- $N_{pb,\mathbf{z},s}^+$ et $N_{sd,\mathbf{z},s}^+$ désignent respectivement le nombre de mètres de rail et le nombre de soudures âgés de s mois à la fin de l'étude qui n'ont pas présenté d'avarie.

Par exemple, la quantité $N_{\mathbf{z},pb,6} = 200$ signifie qu'un total de 200 mètres de rail pleine barre âgés de 6 mois ont été retirés suite à des avaries dans le contexte \mathbf{z} . En revanche, la quantité $N_{\mathbf{z},pb,6}^+ = 3500$ signifie qu'un total de 3500 mètres de rail âgés de 6 mois étaient sains à la fin de l'étude. La prise en compte de ces données ne permet plus de déterminer une expression analytique pour les estimations du maximum de vraisemblance, comme décrit dans la partie 2.4.2. L'utilisation d'une méthode de type EM s'avère en général bien adaptée dans ce cadre (Hartley 1958). Le principe consiste dans un premier temps à estimer la distribution des données censurées, puis à appliquer ce résultat à l'estimation du maximum de vraisemblance comme si les données étaient complètes. Il s'agit ensuite d'itérer les deux étapes précédentes jusqu'à convergence des estimations. L'annexe D présente en détails l'algorithme mis en place pour l'estimation des distributions de temps de séjour.

Quelques résultats d'apprentissage

Dans les paragraphes suivants, nous présentons les estimations obtenues en exploitant le REX RATP des distributions du temps entre la pose et l'apparition du premier défaut (classé OX1, X2S ou SRup) associées à la pleine barre et à la soudure moyenne dans différents contextes. Nous nous intéressons au tronçon central de la ligne A du réseau RER qui s'étend entre les stations La Défense et Vincennes. Ce tronçon est la zone la plus critique en matière de défaut de fatigue sur le réseau RATP. Ceci est principalement dû à un trafic très soutenu et à la circulation de matériels roulants agressifs (tonnage et charge à l'essieu importants). La table 4.1 donne les taux d'avaries sur cette zone, calculés à partir du REX sur les dix dernières années, en fonction du rayon de courbure. Nous observons que les courbes de rayon inférieur à 500 mètres possèdent un taux d'avarie bien supérieur aux deux autres cas. Ces courbes de faible rayon constituent une des préoccupations majeures de la maintenance des rails. Aussi, les résultats présentés dans la suite de ce chapitre portent sur ce contexte particulier.

Rayon de courbure (en mètres)	Longueur de la voie (en mètres)	Nombre d'avaries	Taux d'avarie (par mètre et par année)
]0, 500]	12492	231	1.3×10^{-3}
]500, 1000]	21512	167	7.8×10^{-4}
]1000, ∞ [39644	63	1.6×10^{-4}

TAB. 4.1 – Analyse du REX entre les 1^{er} janvier 1999 et 2009 associé aux avaries du tronçon central du RER A en fonction du rayon de courbure.

Les figures 4.5a et 4.5b représentent les distributions des temps avant apparition d'un défaut sur la file haute des courbes (contraintes fortes) respectivement pour les pleines barres et les soudures. Les figures 4.5c et 4.5d donnent les mêmes résultats pour la file basse des courbes (contraintes plus faibles). Ces distributions fournissent une caractérisation numérique du processus de dégradation associé au coupon élémentaire dans le contexte considéré. Par ailleurs, ces figures montrent clairement la différence de durée de vie entre les pleines barres et les soudures. D'après la figure 4.5a, l'apparition d'un défaut sur une pleine barre en file haute se produit majoritairement entre 20 et 35 mois, ainsi que dans une moindre mesure entre 40 et 50 mois. En revanche, dans le même contexte, les soudures ont tendance à présenter un défaut entre 1 et 20 mois après leur création (cf. 4.5b). De même, l'impact de la file dans la dégradation des pleines barres est clairement illustré par les figures 4.5a et 4.5c. En effet, une pleine barre en file basse a tendance à présenter un défaut après 110 mois, ce qui correspond à plus du double de la durée de vie en file haute. L'observation des figures 4.5b et 4.5d indique une influence de la file moins marquée dans le cas des soudures.

Remarquons enfin que les formes de ces distributions sont éloignées de la forme exponentielle (ou géométrique en temps discret). Par conséquent, ceci justifie l'utilisation d'un MGD de manière à capturer plus précisément la dynamique d'apparition des défauts sur la voie étudiée.

4.4 Méthodes de diagnostic

La surveillance des défauts de fatigue sur le réseau RATP est essentiellement réalisée par les deux techniques de diagnostic suivantes :

1. la méthode par ultrasons visant à détecter de façon préventive les fissures internes ;
2. la méthode reposant sur la signalisation, et en particulier les Circuits de Voie (CdV), permettant de détecter les ruptures de rails.

Notons qu'il existe d'autres opérations de surveillance permettant de détecter les ruptures telles que les parcours à pied ou les signalements de conducteurs. Toutefois, leur contribution reste très faible comparée aux deux principales méthodes citées précédemment. Dans cette partie, nous enrichissons le modèle de dégradation présenté en figure 4.4 en ajoutant une couche de diagnostics comme le montre la figure 4.6. Le vecteur aléatoire

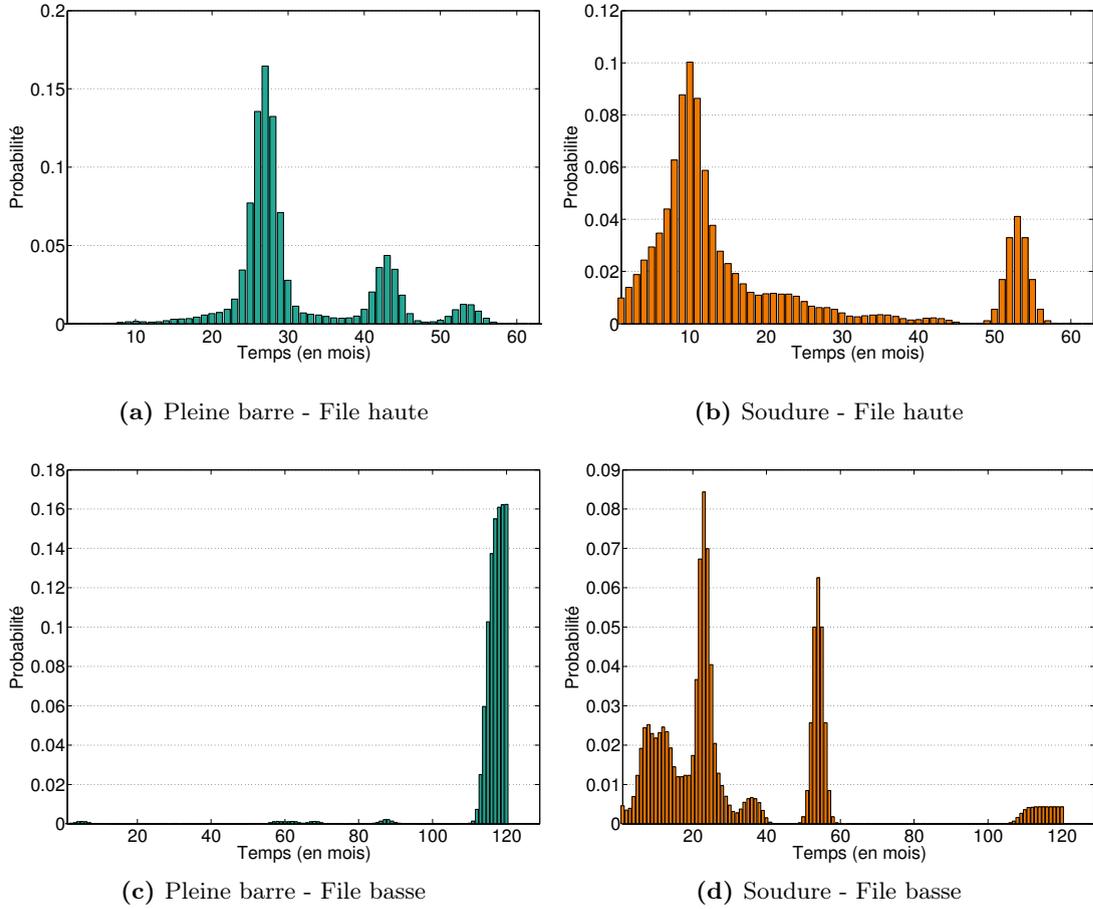


FIG. 4.5 – Distributions du temps avant apparition du premier défaut dans les courbes ayant un rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

$\mathbf{D}_t^{\text{us}} = (D_{t,\text{pb}}^{\text{us}}, D_{t,\text{sd}}^{\text{us}}, \delta_t^{\text{us}})$ représente le diagnostic ultrasonore associé au coupon élémentaire. Les variables aléatoires $D_{t,\text{pb}}^{\text{us}}$ et $D_{t,\text{sd}}^{\text{us}}$ désignent respectivement les résultats du diagnostic pour la pleine barre et la soudure. L'activation de l'inspection ultrasonore à l'instant t dépend de la valeur de la variable binaire δ_t^{us} . De manière similaire, le vecteur aléatoire $\mathbf{D}_t^{\text{sig}} = (D_{t,\text{pb}}^{\text{sig}}, D_{t,\text{sd}}^{\text{sig}}, \delta_t^{\text{sig}})$ modélise le diagnostic du coupon élémentaire issue de la signalisation. Enfin, la politique du diagnostic est représentée par la variable D_t^{sys} . Dans le cadre de l'approche VIRMALAB, le vecteur aléatoire caractérisant le diagnostic du système s'écrit $\mathbf{D}_t = (\mathbf{D}_t^{\text{us}}, \mathbf{D}_t^{\text{sig}}, D_t^{\text{sys}})$. Des détails sur le principe et les propriétés de chaque méthode sont fournis dans les paragraphes suivants.

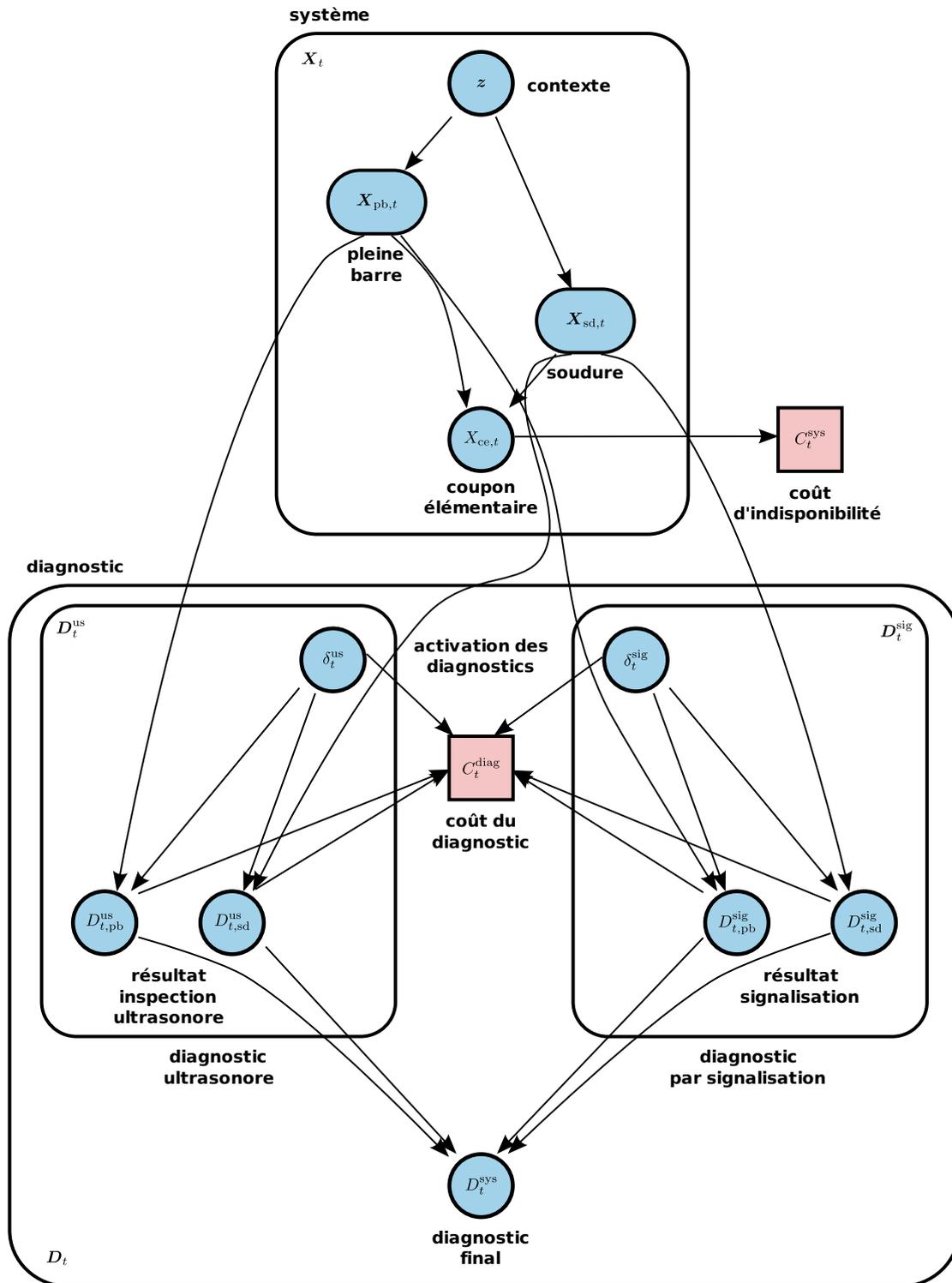


FIG. 4.6 – Modèle graphique représentant le diagnostic de la voie à l'instant t . Pour des raisons de lisibilité, les variables $X_{pb,t}$ et $S_{pb,t}$ sont représentées par un seul nœud $X_{pb,t} = (X_{pb,t}, S_{pb,t})$. De même, le nœud $X_{sd,t}$ représente le vecteur aléatoire $(E_{sd,t}, X_{sd,t}, S_{sd,t})$.

4.4.1 Diagnostic ultrasonore

Principe

Les fissures internes sont détectées dans un premier temps par le passage d'une voiture de contrôle, nommée V365 (cf. figure 4.7), équipée de sondes ultrasonores. Ces dernières sont insérées dans un patin qui frotte sur le rail préalablement mouillé par un liquide de couplage (généralement de l'eau). Les directions de visée de ces sondes sont choisies en fonction de l'inclinaison des fissures rencontrées. Les auscultations sont effectuées à une vitesse maximum de 40 km/h et chaque détection déclenche un jet de peinture au pied du rail qui marque l'emplacement des défauts. Par la suite, une équipe de confirmation est dépêchée sur le lieu de chaque détection afin de vérifier le niveau de gravité du défaut ou si le signalement est une fausse alarme. Si le défaut est confirmé, une estimation de sa taille est obtenue par l'inspection ultrasonore manuelle. Un classement est ensuite attribué au défaut selon son degré de gravité.



FIG. 4.7 – Voiture de contrôle ultrasonore V365.

Modélisation

Par soucis de simplification, nous appelons par la suite "diagnostic ultrasonore", l'ensemble composé du diagnostic opéré par le véhicule ainsi que sa confirmation par l'équipe spécialisée. Formellement, les résultats des diagnostics ultrasonores à l'instant t sont représentés par les variables aléatoires $D_{pb,t}^{us}$ et $D_{sd,t}^{us}$, toutes deux à valeurs dans $\mathcal{D} = \{N, DNC, DC\}$. Les différentes issues du diagnostic sont définies de la manière suivante :

- N (Néant) indique qu'aucun défaut n'a été détecté ;

- DNC (Défaut Non Confirmé) correspond à un signalement de la voiture d'inspection V365 qui s'est révélé être une fausse alarme ;
- DC (Défaut Confirmé) correspond à un défaut de classe OX1 ou X2S signalé par la V365 qui a été confirmé manuellement.

Remarquons qu'en vue d'une étude économique, la distinction des cas DNC et DC est importante pour tenir compte des coûts de confirmation. En effet, ces deux résultats de diagnostic supposent qu'une confirmation, engendrant un coût, a été effectuée, tandis que seul le signalement DC conduit au déclenchement d'une opération de maintenance.

La précision des diagnostics ultrasonores est décrite par l'intermédiaire des LPC Δ_{pb}^{us} et Δ_{sd}^{us} définies comme suit :

$X_{pb,t}$ (resp. $X_{sd,t}$)	Δ_{pb}^{us} (resp. Δ_{sd}^{us})		
	$D_{pb,t}^{us}$ (resp. $D_{sd,t}^{us}$)		
	N	DNC	DC
N	$1 - \tau_{fa}^{us}$	τ_{fa}^{us}	0
OX1	$1 - \tau_{ox1}^{us}$	0	τ_{ox1}^{us}
X2S	$1 - \tau_{x2s}^{us}$	0	τ_{x2s}^{us}
SRup	1	0	0

La variable τ_{fa}^{us} correspond au taux de fausses alarmes de la voiture d'inspection. Les variables τ_{ox1}^{us} et τ_{x2s}^{us} désignent, quant à elles, les taux de détection d'un défaut classé OX1 et classé X2S respectivement. Ces taux constituent les premiers paramètres descriptifs de la maintenance dans la modélisation proposée. Dans la pratique, les valeurs numériques de ces taux sont estimées à partir du retour d'expérience des agents responsables des inspections. Notons enfin que le taux de détection d'une rupture par l'inspection ultrasonore est ici fixé à zéro bien qu'en théorie, les sondes de la voiture d'inspection soient capables de détecter la plupart des ruptures de rails. Ceci provient du pas de temps mensuel (voire hebdomadaire) considéré dans cette étude. Cette discrétisation temporelle est adaptée au processus de dégradation des rails et des soudures, mais pas à celui du passage ponctuel de la voiture d'inspection. Dans notre modélisation, dire qu'une auscultation a lieu à l'instant t signifie en réalité que cette dernière s'est produite dans l'intervalle $]t-1, t]$. Par conséquent, lorsque t est en mois et en considérant la présence d'une surveillance quasi continue de la voie par la signalisation (cf. partie 4.4.2), la probabilité qu'une rupture soit détectée par le véhicule ultrasonore tend bien vers zéro.

Notons enfin que les instants de passage de la voiture de surveillance sont contrôlés par la variable d'activation δ_t^{us} . En pratique, les auscultations s'effectuent de manière périodique telle que

$$\delta_t^{us} = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{mod}(t, \pi^{us}) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où π^{us} désigne la période de passage du véhicule ultrasonore. Cette période est un des paramètres participant à la définition de la politique de maintenance dans cette étude.

4.4.2 Diagnostic par signalisation

Principe

Le second moyen de surveillance des rails considéré dans cette application est représenté par les Circuits de Voie (CdV). Leur fonction première est d'assurer la détection de présence d'un train sur une section (ou canton) donnée et d'agir sur la signalisation en conséquence (cf. 4.8). Lorsque la section de voie est libre de tout véhicule, les CdV sont également capables de repérer les rails cassés en observant en continu l'impédance électrique entre les deux files de rail. Dans un tel cas, l'exploitation commerciale du réseau bascule alors en mode dégradé jusqu'à ce qu'une équipe de maintenance soit dépêchée sur la section concernée de façon à confirmer la nature de l'anomalie.

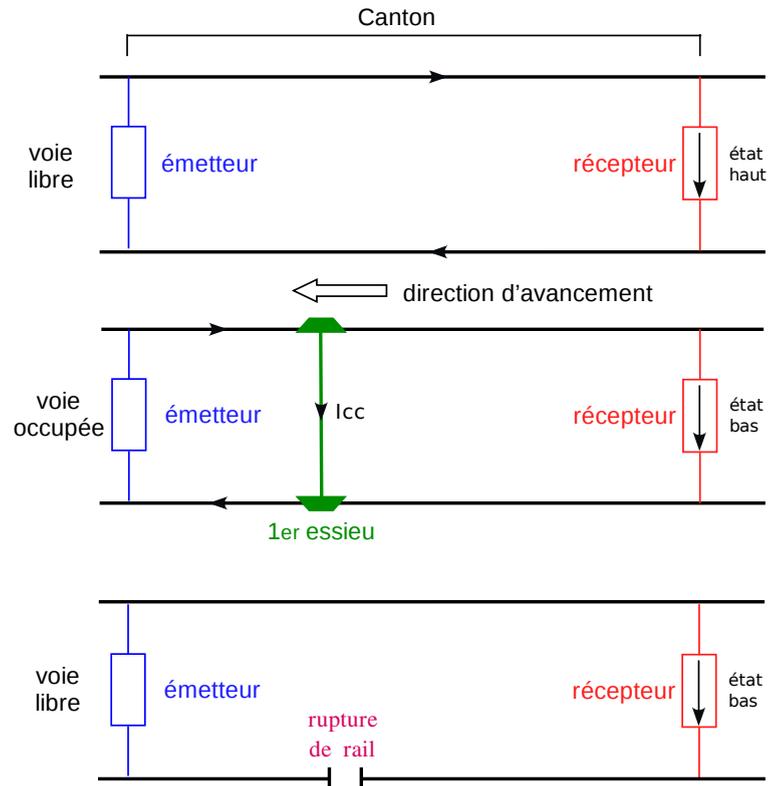


FIG. 4.8 – Schéma de principe d'un circuit de voie. Lorsque le circuit de voie est libre, le courant provenant de l'émetteur parvient au récepteur. Dès qu'un train entre sur ce circuit de voie, le courant est court-circuité par les essieux du train, ce qui provoque un signal d'arrêt pour les trains suivants. I_{cc} désigne le courant de court-circuit.

Modélisation

D'un point de vue probabiliste, le principe de la modélisation du diagnostic par signalisation est analogue au diagnostic ultrasonore (cf. partie 4.4.1). Les variables $D_{pb,t}^{sig}$ et $D_{sd,t}^{sig}$

représentent les diagnostics réalisés par la signalisation à l'instant t pour le rail et la soudure respectivement. Comme précédemment, l'ensemble des résultats de diagnostic possibles est $\mathcal{D} = \{N, DNC, DC\}$. Suite à l'observation d'une isolation électrique anormale au niveau d'un CdV et au repérage d'un rail cassé par l'équipe de confirmation, le diagnostic prend la valeur DC. En revanche, si l'équipe de confirmation ne constate aucun défaut sur la voie, le diagnostic prend finalement la valeur DNC.

Les LPC Δ_{pb}^{sig} et Δ_{sd}^{sig} permettent de spécifier les caractéristiques du diagnostic par signalisation de la manière suivante :

Δ_{pb}^{sig} (resp. Δ_{sd}^{sig})			
$D_{pb,t}^{\text{sig}}$ (resp. $D_{sd,t}^{\text{sig}}$)			
$X_{pb,t}$ (resp. $X_{sd,t}$)	N	DNC	DC
N	$1 - \tau_{fa}^{\text{sig}}$	τ_{fa}^{sig}	0
OX1	1	0	0
X2S	1	0	0
SRup	$1 - \tau_{srup}^{\text{sig}}$	0	τ_{srup}^{sig}

La variable τ_{fa}^{sig} correspond au taux de fausses alarmes associé au diagnostic la signalisation. Rappelons par ailleurs que cette méthode ne permet pas de détecter les défauts internes, le taux de détection des défauts classés OX1 ou X2S est donc supposé nul. Enfin, le taux de détection d'une rupture avérée est donné par τ_{srup}^{sig} . Bien que ce dernier soit très proche de un, il arrive néanmoins que certaines ruptures (par exemple en étoile) ne soient pas détectées par la signalisation ; de même en cas de dilatation des rails par temps chaud.

Rappelons enfin que la méthode de diagnostic reposant sur la signalisation effectue une surveillance quotidienne de la voie et de manière quasi continue. Aussi, en se plaçant sur une échelle mensuelle, il est tout à fait raisonnable de considérer cette méthode comme étant activée en permanence. Ceci se traduit formellement en posant pour tout instant t , $\delta_t^{\text{sig}} = 1$. Par conséquent, la variable d'activation associée au diagnostic par signalisation ne figure pas parmi les paramètres de maintenance du modèle.

4.4.3 Politique de diagnostic

Dans cette application, la politique de diagnostic consiste simplement à déclencher une alerte dès qu'une des méthodes de surveillance détecte un défaut sur une pleine barre ou une soudure. L'objectif est de signaler tout défaut sur le coupon élémentaire, et ce, quels que soient sa nature et son emplacement. Ceci est fidèle aux réalités du terrain puisqu'en pratique, dès qu'un défaut est détecté, une opération de maintenance est déclenchée, aboutissant au remplacement du coupon défectueux, que l'avarie ait lieu en pleine barre ou sur une soudure. La variable D_t^{sys} est donc à valeurs dans $\mathcal{D}^{\text{sys}} = \{N, D\}$ où N désigne une absence d'alarme et D correspond à la détection d'un défaut. Autrement dit, lorsqu'au

moins un signalement DC est observé à l'instant t , le diagnostic final est $D_t^{\text{sys}} = D$. Dans le cas contraire, le diagnostic final prend la valeur $D_t^{\text{sys}} = N$.

4.4.4 Coûts associés aux diagnostics

Le modèle économique associé au diagnostic repose sur les coûts suivants :

- $c_{\text{insp}}^{\text{us}}$: coût de l'inspection ultrasonore par mètre de voie à inspecter ;
- $c_{\text{conf}}^{\text{us}}$: coût de la confirmation d'un signalement émis par la voiture de surveillance ultrasonore ;
- $c_{\text{insp}}^{\text{sig}}$: coût de la surveillance par circuit de voie par mois ;
- $c_{\text{conf}}^{\text{sig}}$: coût de la confirmation d'un signalement lié au circuit de voie.

L'espérance du coût de l'ensemble des opérations de diagnostic pour un coupon élémentaire à l'instant t est calculée comme suit

$$C_{z,t}^{\text{diag}} = \underbrace{\left[L_{\text{ce}} c_{\text{insp}}^{\text{us}} + c_{\text{conf}}^{\text{us}} \left[P(D_{\text{pb},t}^{\text{us}} \neq N; \mathbf{z}) + P(D_{\text{sd},t}^{\text{us}} \neq N; \mathbf{z}) \right] \right]}_{\text{coût du diagnostic ultrasonore}} \delta_t^{\text{us}} + \underbrace{c_{\text{insp}}^{\text{sig}} + c_{\text{conf}}^{\text{sig}} \left[P(D_{\text{pb},t}^{\text{sig}} \neq N; \mathbf{z}) + P(D_{\text{sd},t}^{\text{sig}} \neq N; \mathbf{z}) \right]}_{\text{coût de la surveillance par signalisation}}. \quad (4.4)$$

4.5 Actions de maintenance

4.5.1 Description qualitative

Nous abordons à présent la modélisation des actions de maintenance concernant la correction des défauts de fatigue. La figure 4.9 représente la dernière étape dans la construction du modèle VIRMALAB, à savoir l'ajout de la variable d'action, ainsi que ses liens de dépendance mettant en évidence son impact sur l'état du système. Dans cette application, cette dernière consiste en un vecteur aléatoire $\mathbf{A}_t = (A_t^s, \rho_t)$. La variable aléatoire A_t^s désigne l'action sélectionnée à l'instant t dans l'ensemble $\mathcal{A} = \{N, C, R\}$ où :

- la valeur N signifie qu'aucune action n'est réalisée ;
- la valeur C correspond à la réparation du coupon élémentaire (action curative) ;
- la valeur R désigne le renouvellement complet de la voie considérée.

D'autre part, la variable $\rho_t \in \{0, 1\}$ est une variable indicatrice permettant de déclencher explicitement un renouvellement à l'instant t . Comme le montre le modèle graphique, l'action sélectionnée à l'instant $t - 1$ agit sur le coupon élémentaire à l'instant t . L'état et les temps de séjour associés à la pleine barre et à la soudure sont modifiés en fonction de l'action déclenchée au pas de temps précédent. Il est important de souligner que la soudure voit également sa probabilité d'existence changer de manière différente après une réparation ou après un renouvellement. Rappelons en effet que les soudures sont introduites sur la voie suite aux réparations de coupons défectueux (cf. partie 4.2). Une méthode permettant de tenir compte de cette propriété est proposée dans la partie 4.5.4.

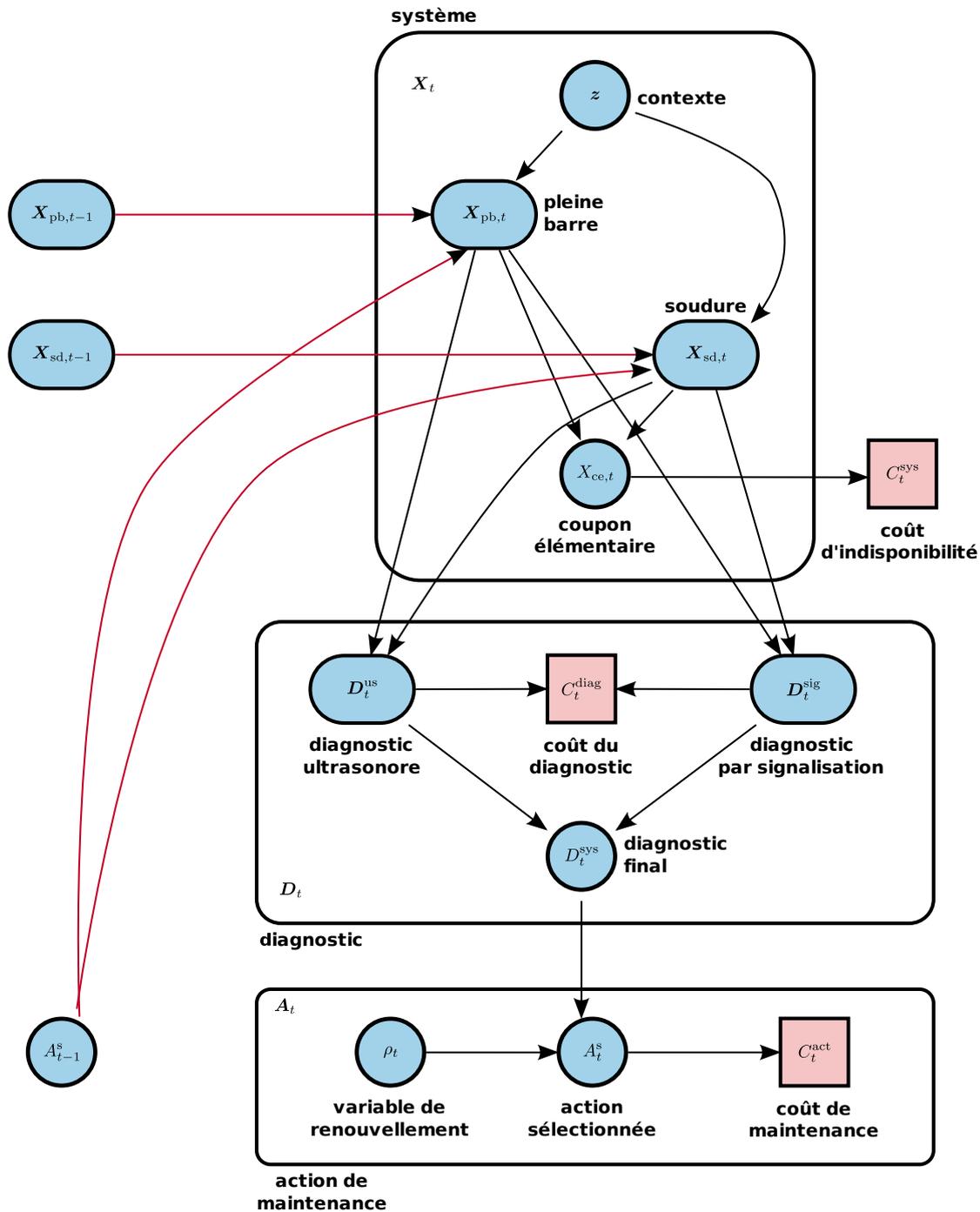


FIG. 4.9 – Modèle VIRMALAB associé à la maintenance des ruptures de rails. les nœuds D_t^{us} et D_t^{sig} représentent respectivement les vecteurs aléatoires $(D_{pb,t}^{us}, D_{sd,t}^{us}, \delta_t^{us})$ et $(D_{pb,t}^{sig}, D_{sd,t}^{sig}, \delta_t^{sig})$.

4.5.2 Politique d'action

De manière à limiter la propagation des défauts de fatigue, tout défaut confirmé est traité par une procédure de maintenance *ad hoc* consignée dans le référentiel de maintenance. Les défauts repérés suffisamment tôt (classés OX1) sont mis sous surveillance en vue d'une réparation ultérieure. De même, les défauts plus critiques (classés X2S) subissent une consolidation en vue d'une réparation définitive dans un délai d'un mois. Autrement dit, ces deux cas entraînent une action de maintenance préventive puisque le matériel est réparé avant la rupture. En revanche, lorsqu'une rupture est détectée, une action de maintenance curative immédiate est réalisée. Par conséquent, chaque diagnostic de défaut aboutit à plus ou moins long terme à une réparation du coupon présentant l'avarie. Notons cependant que si un renouvellement de rail est prévu à l'instant t , aucune action de réparation locale ne peut être déclenchée, et ce, quel que soit le diagnostic courant. Ceci se traduit en termes probabilistes par la LPC Γ définie comme suit :

- si $\rho_t = 0$, aucun renouvellement n'est prévu et une action corrective est déclenchée en cas de détection d'un défaut :

$\Gamma (\rho_t = 0)$			
	A_t^s		
D_t^{sys}	N	C	R
N	1	0	0
D	0	1	0

- si $\rho_t = 1$, le renouvellement complet de la voie est effectué quel que soit le résultat du diagnostic courant :

$\Gamma (\rho_t = 1)$			
	A_t^s		
D_t^{sys}	N	C	R
N	0	0	1
D	0	0	1

En pratique sur les voie RER de la RATP, les renouvellements sont réalisés de manière périodique telle que

$$\rho_t = \begin{cases} 1 & \text{si } \text{mod}(t, \pi^{\text{ren}}) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où π^{ren} correspond à la période de renouvellement des rails sur la voie considérée. Dans cette étude, la politique de maintenance est donc caractérisée par la période d'auscultation ultrasonore π^{us} et la période de renouvellement π^{ren} .

4.5.3 Coûts associés aux actions de maintenance

Le coût associé aux actions de maintenance est défini par :

- c_C^{act} : coût d'une opération de maintenance corrective par mètre de rail remplacé ;
- c_R^{act} : coût d'une remise à neuf de la voie par mètre de rail renouvelé.

L'espérance du coût correspondant aux actions de maintenance sur un coupon élémentaire à l'instant t est donnée par

$$C_{z,t}^{\text{act}} = L_{ce} [c_C^{\text{act}} P(A_t^s = C; \mathbf{z})(1 - \rho_t) + c_R^{\text{act}} \rho_t]. \quad (4.5)$$

4.5.4 Conséquences sur le coupon élémentaire

Comme le montre la figure 4.9, l'action de maintenance agit à la fois sur l'état de la pleine barre et sur l'état de la soudure, ainsi que sur la probabilité d'existence de cette dernière. Les paragraphes suivants ont pour objet la description probabiliste de l'impact des actions de maintenance sur le coupon élémentaire.

État du coupon élémentaire

Le coupon élémentaire est remis à neuf que l'action de maintenance sélectionnée soit curative (C) ou de type renouvellement (R). Autrement dit, la pleine barre et la soudure se retrouve dans l'état neuf (N) quelle que soit leur état précédent. Ceci se traduit en termes probabilistes par l'intermédiaire des lois de transition artificielle $Q_{\text{pb}}^{\text{act}}$ et $Q_{\text{sd}}^{\text{act}}$ définies comme suit :

		$Q_{\text{pb}}^{\text{act}}$ (resp. $Q_{\text{sd}}^{\text{act}}$)			
		$X_{\text{pb},t}$ (resp. $X_{\text{sd},t}$)			
$X_{\text{pb},t-1}$ (resp. $X_{\text{sd},t-1}$)	A_{t-1}^s	N	OX1	X2S	SRup
N	C	1	0	0	0
OX1	C	1	0	0	0
X2S	C	1	0	0	0
SRup	C	1	0	0	0
N	R	1	0	0	0
OX1	R	1	0	0	0
X2S	R	1	0	0	0
SRup	R	1	0	0	0

En ne s'intéressant qu'à l'état du coupon élémentaire, une simple réparation et un renouvellement ont exactement le même effet. En revanche, ces deux actions n'ont pas les mêmes coûts ni les mêmes conséquences sur le processus de création ou de suppression de soudures.

Existence de la soudure

Rappelons que les soudures aluminothermiques sont introduites sur la voie suite à la pose de coupons neufs lors d'une opération de maintenance. Chaque réparation entraîne théoriquement l'introduction de deux soudures. Toutefois, lorsque le défaut a lieu au droit d'une soudure, la réparation du coupon correspondant conduit à l'ajout de deux nouvelles soudures de réparation et supprime la soudure défectueuse. Il se peut également que plusieurs soudures soient proches de la position d'un défaut. Dans ce cas, une réparation entraîne généralement le retrait des soudures proches du défaut, faisant ainsi chuter le nombre de soudures total sur la voie. La quantité de soudures n'augmente donc pas forcément linéairement en fonction du nombre de réparations effectuées. Plus précisément, ce phénomène de recouvrement de soudures se produit d'autant plus souvent que les défauts sont peu dispersés, conduisant à des concentrations locales de soudures. À l'inverse, si les défauts apparaissent de manière uniforme sur la voie, la probabilité de faire chuter le nombre de soudures lors d'une réparation est plus faible.

Dans la suite, nous proposons une méthode empirique permettant de tenir compte de cette réalité pratique. En se fixant un contexte \mathbf{z} , la modélisation adoptée permet de calculer l'espérance du nombre de soudures présentes à l'instant t sur la voie étudiée, composée de $N_{ce,\mathbf{z}}$ coupons élémentaires de longueur L_{ce} . Cette quantité, notée $N_{sd,\mathbf{z},t}$, est définie par

$$N_{sd,\mathbf{z},t} = N_{ce,\mathbf{z}} \omega_{sd,\mathbf{z},t}^+ \quad (4.6)$$

où $\omega_{sd,\mathbf{z},t}^+ = P(E_{sd,t} = \text{présente}; \mathbf{z})$ désigne la probabilité d'existence d'une soudure sur le coupon élémentaire à l'instant t .

Décrivons à présent l'approche empirique proposée permettant de caractériser le processus de création/suppression d'une soudure conditionnellement aux actions de maintenance effectuées. Deux situations sont envisageables :

1. L'action de renouvellement est sélectionnée ($A_{t-1}^s = R$). La voie est donc entièrement remise à neuf et par conséquent les soudures de réparation sont toutes supprimées. Néanmoins, un certain nombre de soudures aluminothermiques, noté $N_{sd,\mathbf{z},1}$, est réalisé afin d'assembler les coupons neufs entre eux selon la technique dite des longs rails soudés. Cette quantité de soudures dépend donc de la longueur des rails de renouvellement : une longueur de rail importante implique moins de soudures à réaliser. Par conséquent, la probabilité d'existence d'une soudure sur le coupon élémentaire après un renouvellement est égale à la probabilité d'existence d'une soudure à l'instant initial $\omega_{sd,\mathbf{z},1}^+$ (cf. équation (4.1)), quel que soit le nombre de soudures effectuées dans le passé.
2. Une action corrective est déclenchée suite à la détection d'un défaut (mineur, critique ou rupture). Dans ce cas, il convient de distinguer les deux cas suivants :
 - (a) Aucune soudure n'est présente sur le coupon élémentaire ($E_{sd,t-1} = \text{absente}$). La pose du nouveau coupon s'effectue donc en réalisant deux soudures. D'après la modélisation de la voie considérée, ceci se traduit en ajoutant de manière déterministe une soudure au coupon élémentaire. La probabilité qu'une soudure existe à l'instant t sachant qu'une action corrective a été effectuée et que le

coupon ne possédait pas de soudure est égale à $P(E_{sd,t} = \text{présente} | E_{sd,t-1} = \text{absente}, A_{t-1}^s = C) = 1$.

- (b) Le coupon élémentaire possède déjà une soudure ($E_{sd,t-1} = \text{présente}$). Dans ce cas, il est nécessaire de tenir compte d'un possible recouvrement de soudure. Par conséquent, la probabilité de présence de la soudure après réparation ne vaut plus forcément un, puisqu'en pratique plusieurs soudures peuvent être supprimées lors de l'opération de maintenance.

Afin d'estimer cette probabilité, nous avons été contraint d'étudier la distribution spatiale des avaries. L'objectif est de calculer une estimation de la loi de probabilité des Points Kilométriques (PK) associés aux défauts. Soient pk_i et pk_f le PK initial et le PK final délimitant la section de voie considérée. Notons Y_{pk} la variable aléatoire à valeurs dans $\{pk_i, \dots, pk_f\}$ représentant la PK d'un défaut. Il s'agit d'estimer pour tout $y = pk_i, \dots, pk_f$, la distribution des PK d'avaries, notée $\hat{P}(Y_{pk} = y)$, en exploitant les informations spatiales contenues dans la base AVARIES.

Par la suite, nous réalisons une mesure de la dispersion des défauts. Nous calculons pour cela l'entropie des PK d'avaries. Plus précisément, nous utilisons l'entropie normalisée, notée $H(Y_{pk}) \in [0, 1]$, qui a pour définition

$$H(Y_{pk}) = -\frac{1}{\log(pk_f - pk_i)} \sum_{y=pk_i}^{pk_f} P(Y_{pk} = y) \log P(Y_{pk} = y). \quad (4.7)$$

Lorsque la distribution spatiale des défauts est uniforme, la dispersion est maximale et $H(Y_{pk}) = 1$, tandis qu'à l'inverse si tous les défauts sont localisés au même PK, le lieu des avaries est déterministe et $H(Y_{pk}) = 0$. Autrement dit, plus $H(Y_{pk})$ est proche de un, moins il y a de chance qu'un recouvrement de soudure ait lieu lors d'un changement de coupon.

Nous notons enfin $\tau_{sd,z}^+ = P(E_{sd,t} = \text{présente} | E_{sd,t-1} = \text{présente}, A_{t-1}^s = C; \mathbf{z})$, le taux de création d'une soudure après une opération de maintenance corrective sur un coupon possédant déjà une soudure. Ce taux est fixé de façon à vérifier les deux conditions suivantes :

- (i) Si la dispersion des défauts est uniforme, chaque coupon élémentaire devrait posséder une soudure au bout d'un certain temps. Aussi, la probabilité asymptotique d'existence d'une soudure, notée $\lim_{t \rightarrow \infty} P(E_{sd,t} = \text{présente}; \mathbf{z}) = \omega_{sd,z,\infty}^+$ doit tendre vers 1.
- (ii) Si tous les défauts apparaissent au même PK, seul un coupon sur la section de voie étudiée présente des défauts. Or, d'après l'hypothèse des coupons élémentaires indépendants et identiquement distribués, la probabilité asymptotique qu'un coupon particulier présente tous les défauts est donnée par $\omega_{sd,z,\infty}^+ = 1/N_{ce,z}$.

De façon à vérifier les conditions précédentes, nous utilisons l'entropie définie par l'équation (4.7) afin de traiter les cas intermédiaires. Nous cherchons $\tau_{sd,z}^+$ tel que la probabilité asymptotique d'existence d'une soudure soit égale à :

$$\omega_{sd,z,\infty}^+ = \frac{1}{N_{ce,z}} + H(Y_{pk}) \frac{N_{ce,z} - 1}{N_{ce,z}}.$$

En utilisant les propriétés asymptotiques associées à la chaîne de Markov représentant le processus de suppression/création de la soudure, nous en déduisons

$$\tau_{sd,z}^+ = 2 - \frac{1}{\omega_{sd,z,\infty}^+}.$$

L'approche décrite dans les paragraphes précédents permet de construire la LPC $W_{sd,z}^{\text{act}}$ contrôlant l'évolution du processus d'existence d'une soudure :

		$W_{sd,z}^{\text{act}}$	
		$E_{sd,t}$	
$E_{sd,t-1}$	A_t^s	absente	présente
absente	C	0	1
présente	C	$1 - \tau_{sd,z}^+$	$\tau_{sd,z}^+$
absente	R	$1 - \omega_{sd,z,1}^+$	$\omega_{sd,z,1}^+$
présente	R	$1 - \omega_{sd,z,1}^+$	$\omega_{sd,z,1}^+$

Reprenons l'exemple du contexte z correspondant aux courbes de rayon inférieur à 500 mètres dans le tronçon central du réseau RER A (entre les stations La Défense et Vincennes). Cette zone correspond à $L_{v,z} = 6246$ mètres de rails. En considérant un coupon élémentaire de longueur $L_{ce} = 25$ mètres, la voie étudiée est constituée de $N_{ce,z} = 249.8$ coupons élémentaires indépendants. Les figures 4.10a et 4.10b représentent respectivement la distribution spatiale des avaries pour les files hautes et pour les files basses dans ce contexte. La table 4.2 donne l'entropie normalisée de la localisation des défauts ainsi que la valeur de $\tau_{sd,z}^+$ pour les deux types de files.

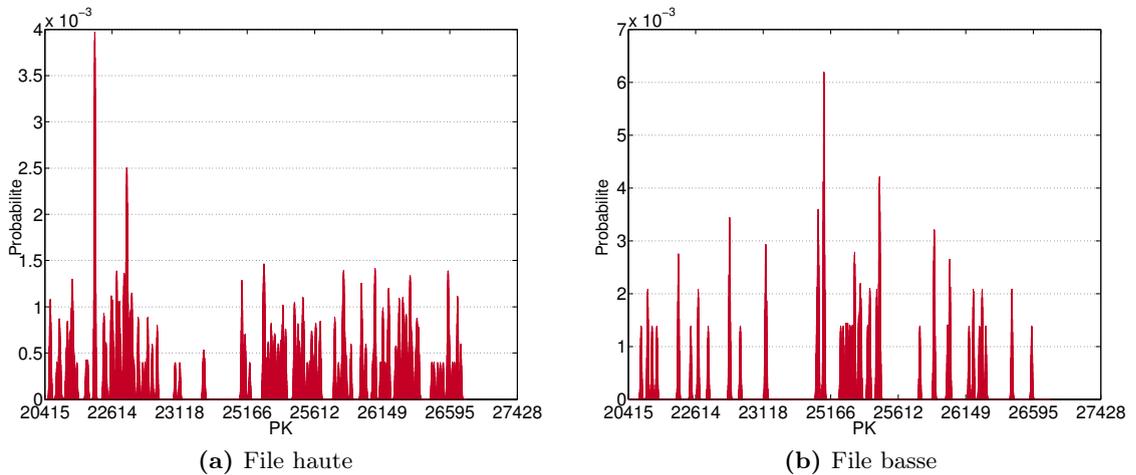


FIG. 4.10 – Distributions spatiales des défauts sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

Nous observons graphiquement que les défauts apparaissent de manière plus dispersée sur les files hautes. Ceci est confirmé numériquement par une entropie des PK de défaut plus importante comparée à celle calculée sur les files basses. Le taux de création d'une soudure est plus élevé d'environ 10% sur les files hautes que sur les files basses.

	File haute	File basse
$H(Y_{pk})$	0.907	0.809
$\tau_{sd,z}^+$	0.898	0.765

TAB. 4.2 – Entropie normalisée de la localisation des défauts et taux de création de soudure dans le contexte des courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

Remarque 4.2 (Notations VIRMALAB)

En reprenant les notations de l'approche VIRMALAB, le processus d'évolution du système (coupon élémentaire) suite à une action de maintenance est caractérisé par la loi de transition artificielle Λ^{act} définie par

$$\Lambda_{\mathbf{z}}^{act} = Q_{pb}^{act} \cdot F_{pb,\mathbf{z}}^{sys} \cdot W_{sd,\mathbf{z}}^{act} \cdot Q_{sd}^{act} \cdot F_{sd,\mathbf{z}}^{sys}. \quad (4.8)$$

D'après les équations (4.1) et 4.8, nous déduisons la LPC de transition générale du système, notée $\Lambda_{\mathbf{z}}$ et définie par

$$\Lambda_{\mathbf{z}} = \Sigma_{ce} \cdot \begin{cases} \Lambda_{\mathbf{z}}^{act} & \text{si action de maintenance} \\ \Lambda_{\mathbf{z}}^{sys} & \text{sinon} \end{cases},$$

4.6 Outil développé

Ces travaux sur l'étude et la prévention des ruptures de rails ont donné lieu au développement d'un outil permettant de comparer différentes stratégies de maintenance. L'objectif est de proposer un outil d'aide à la décision permettant de simuler différents scénarios, en vue de rechercher un compromis entre réduction du nombre de ruptures de rails et diminution des coûts de maintenance.

4.6.1 Description

L'outil développé offre dans un premier temps la possibilité d'exploiter les données REX RATP de façon à estimer les paramètres de dégradation d'un coupon élémentaire conditionnellement à un contexte de voie donné. Rappelons que l'apprentissage du processus de dégradation du coupon élémentaire est réalisé pour une voie caractérisée par un certain contexte noté \mathbf{z} . Les différents paramètres permettant de décrire ce contexte sont résumés dans le tableau 4.3. Un filtrage des bases AVARIES et RAIL est réalisé de manière à obtenir

les effectifs des temps de séjour $(N_{pb,z,s}, N_{sd,z,s}, N_{pb,z,s}^+, N_{sd,z,s}^+)_{s \geq 1}$, ainsi que le taux de création de soudure $\tau_{sd,z}^+$.

Par la suite, l'outil proposé permet la prise en compte des moyens de maintenance déployés. Dans cette application, il s'agit de spécifier les caractéristiques des méthodes de diagnostic. Ceci revient en pratique à déterminer les taux de fausses alarmes et de bonnes détections donnés dans la table 4.4. Les aspects économiques de la maintenance sont, quant à eux, pris en compte en spécifiant les différents coûts répertoriés dans la table 4.5.

Paramètre	Description
Réseau	RER ou métro
Ligne	A ou B pour le RER et 1 à 14 pour le métro
pk_i, pk_f	PK délimitant une zone sur la ligne étudiée
$[RC_{min}, RC_{min}]$	Intervalle des rayons de courbure associés aux courbes à considérer
File	Haute et/ou basse

TAB. 4.3 – Paramètres descriptifs d'une voie à étudier.

Paramètre	Description
τ_{fa}^{us}	Taux de fausse alarme du véhicule d'inspection ultrasonore (V365)
τ_{ox1}^{us}	Taux de détection de la V365 pour un défaut mineur (classé OX1)
τ_{x2s}^{us}	Taux de détection de la V365 pour un défaut critique (classé X2S)
τ_{fa}^{sig}	Taux de fausse alarme de la surveillance par signalisation
τ_{rup}^{sig}	Taux de détection d'une rupture par la signalisation

TAB. 4.4 – Paramètres descriptifs des méthodes de diagnostic.

Paramètre	Description
c_{ind}^{sys}	Coût d'indisponibilité lié à l'apparition d'une rupture
c_{insp}^{us}	Coût d'inspection de la V365 par mètre de voie parcourue
c_{conf}^{us}	Coût de confirmation d'un défaut détecté par la V365
c_{insp}^{sig}	Coût de la surveillance de la voie par la signalisation
c_{conf}^{sig}	Coût de confirmation d'un défaut détecté par la signalisation
c_C^{act}	Coût de réparation d'un coupon par mètre de rail remplacé
c_R^{act}	Coût du renouvellement d'une voie par mètre de rail remplacé

TAB. 4.5 – Paramètres économiques du modèle VIRMLAB.

Lorsque les paramètres descriptifs du modèle sont spécifiés, l'algorithme d'inférence 3.1 dédié à l'approche VIRMLAB peut être utilisé pour évaluer l'utilité d'une politique de maintenance donnée. Dans cette application, cette politique de maintenance est définie par

- la période d'inspection ultrasonore, notée π^{us} ;
- la période de renouvellement de la voie, notée π^{ren} .

Par ailleurs, nous supposons dans cette étude que l'évaluation d'une politique est réalisée selon deux critères. Le premier est économique et correspond au coût moyen sur un horizon temporel T engendré par la stratégie de maintenance adoptée. Le second concerne le nombre de ruptures moyen obtenu en appliquant ladite stratégie. Par conséquent et d'après les équations (4.2), (4.4), (4.5) et (4.3), nous travaillons avec la fonction multi-utilité suivante :

$$f^{\text{util}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}}) = \begin{cases} f^{\text{coût}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}}) = \frac{N_{\text{ce,z}}}{T} \sum_{t=1}^T [C_{\text{z,t}}^{\text{sys}} + C_{\text{z,t}}^{\text{diag}} + C_{\text{z,t}}^{\text{act}}] \\ f^{\text{rup}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}}) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T N_{\text{rup,z,t}} \end{cases},$$

où $f^{\text{coût}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$ et $f^{\text{rup}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$ désignent respectivement sur un horizon temporel T le coût moyen et le nombre de ruptures moyen associés à la politique $(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$. L'objectif est alors de déterminer $\pi^{\text{us}*}$ et $\pi^{\text{ren}*}$ minimisant le coût moyen de la maintenance tout en assurant que le nombre de ruptures reste sous un certain seuil $\nu > 0$. Il s'agit donc de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} (\pi^{\text{us}*}, \pi^{\text{ren}*}) = \arg \min_{(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})} f^{\text{coût}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}}) \\ \text{sous la contrainte :} \\ f^{\text{rup}}(\pi^{\text{us}*}, \pi^{\text{ren}*}) \leq \nu \end{cases}. \quad (4.9)$$

Notons que le temps d'évaluation de la fonction d'utilité pour une politique donnée est de l'ordre de quelques minutes pour un horizon temporel $T = 120$ mois. Néanmoins, du fait que seuls deux paramètres sont à ajuster, une simple étude paramétrique s'avère en général suffisante pour rechercher les éventuelles politiques satisfaisant les contraintes du problème (4.9).

Pour finir, un schéma récapitulatif détaillant les relations entre les différents modules de l'outil développé est présenté dans la figure 4.11.

4.6.2 Résultats

Nous achevons ce chapitre en nous plaçant à nouveau dans le contexte des courbes de rayon inférieure à 500 mètres sur le tronçon central du RER A. Nous présentons quelques résultats sur l'optimisation des cycles d'inspections ultrasonores et de renouvellements de la voie. Les files hautes et les files basses sont traitées séparément conformément aux procédures d'entretien en vigueur à la RATP. Rappelons que les paramètres du modèle de dégradation pour chaque type de files ont été étudiés à la fin de la partie 4.3.4. L'outil développé est utilisé dans un premier temps afin d'évaluer les fonctions $f^{\text{coût}}$ et f^{rup} pour différentes valeurs de π^{us} et π^{ren} , et ce, sur un horizon temporel de 10 ans ($T = 120$ mois). Dans l'étude paramétrique réalisée, nous avons fait varier la période d'auscultation ultrasonore de 1 à 12 mois et la période de renouvellement de 1 à 10 ans. Par ailleurs, la notation $\pi^{\text{us}} = \infty$ (resp. $\pi^{\text{ren}} = \infty$), ou "Inf" dans les illustrations, signifie qu'aucune auscultation ultrasonore

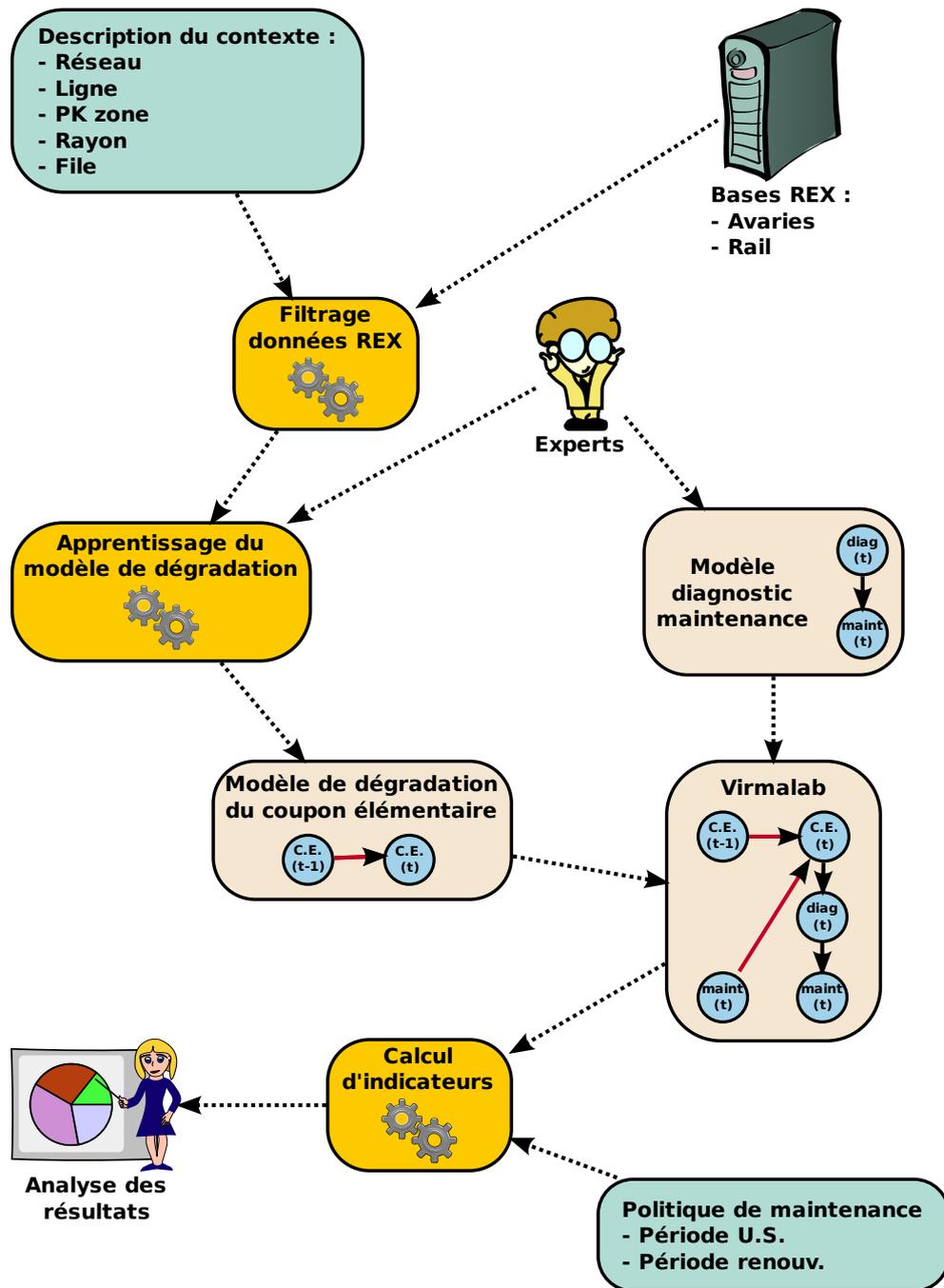


FIG. 4.11 – Schéma de principe de l'outil développé. Les blocs de couleur bleu, rose et orange représentent respectivement les paramètres d'entrée, les modèles construits lors d'une analyse et les traitements réalisés.

(resp. renouvellement) n'est réalisée au cours du scénario. Nous supposons également que l'objectif consiste à déterminer la politique de maintenance permettant de minimiser les coûts de maintenance tout en assurant un nombre de ruptures annuel maximum $\nu_{\text{ext}} = 5$ pour les files hautes et $\nu_{\text{ext}} = 1$ pour les files basses sur les 6246 mètres de voie considérée.

Notons enfin que par soucis de confidentialité, les coûts présentés dans la suite sont fictifs.

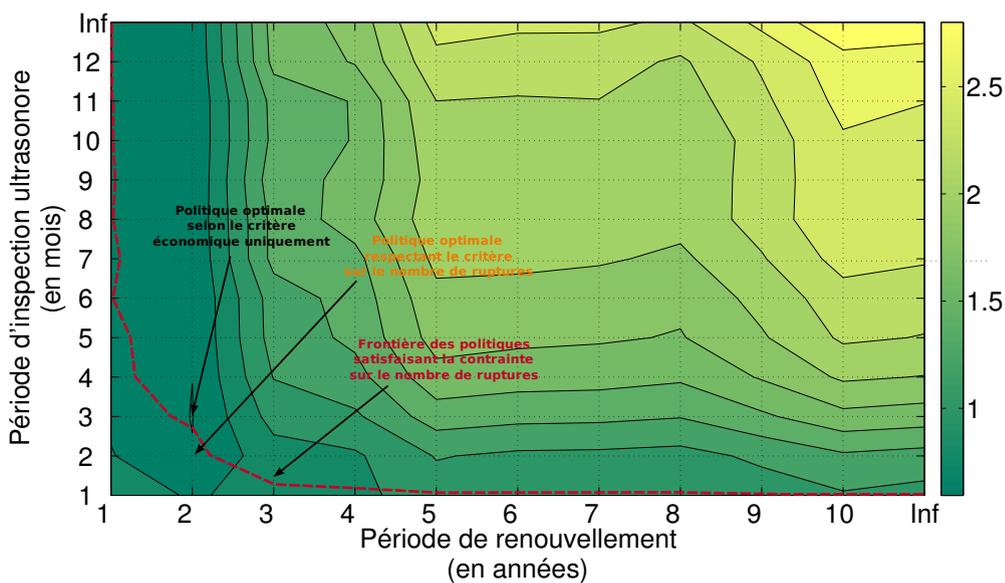
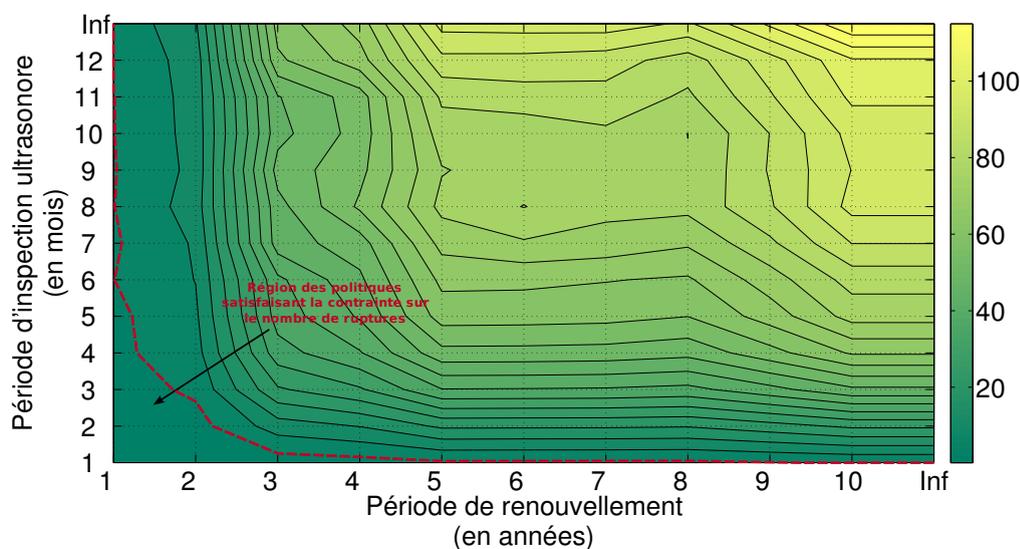


FIG. 4.12 – Coût et nombre de ruptures en fonction de la politique de maintenance des files hautes situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

Dans le cas des files hautes, les résultats de l'étude paramétrique sont présentés dans les figures 4.12b et 4.12a donnant respectivement le coût et le nombre de rupture annuels moyens pour chaque couple π^{us} et π^{ren} . Nous observons sur la figure 4.12b que les stratégies conduisant aux coûts les plus faibles consistent à renouveler les rails tous les 2 ans. En effet, si la voie est remise à neuf plus souvent, le coût de renouvellement augmente le coût global de la maintenance. À l'inverse, lorsque la fréquence des renouvellements est plus faible, les économies réalisées sur la maintenance préventive ne sont pas significatives par rapport

π^{us} (en mois)	π^{ren} (en années)	$f^{\text{rup}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$	$f^{\text{coût}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$
1	1	0.27	9.98
1	2	0.65	7.63
2	1	1.25	8.12
1	3	2.45	9.24
3	1	2.61	7.67
2	2	3.07	6.08
1	4	3.1	9.47
4	1	3.79	7.55
5	1	3.8	7.42
1	8	4.23	10.24
1	7	4.26	10.41
1	6	4.29	10.49
1	5	4.32	11.05
7	1	4.38	7.29
9	1	4.76	7.20
1	9	4.78	10.96
8	1	4.88	7.28
11	1	4.89	7.15
10	1	4.9	7.20
6	1	4.94	7.45

TAB. 4.6 – Coût et nombre de ruptures annuels moyens en fonction des politiques de maintenance satisfaisant la contrainte de $\nu = 5$ ruptures annuelles. Ces résultats concernent les files hautes situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

aux coûts de maintenance corrective. Sans renouvellement régulier, le nombre de soudures augmente et la durée de vie globale de la voie étudiée diminue. La probabilité de rupture devient par conséquent de plus en plus forte, en particulier si l'inspection ultrasonore est peu fréquente. Ceci entraîne finalement des coûts d'indisponibilité importants et explique l'augmentation des coûts globaux.

En ce qui concerne les résultats sur l'occurrence de ruptures présentés dans la figure 4.12a, nous observons naturellement que plus les opérations de maintenance sont fréquentes et moins les défauts ont le temps d'évoluer jusqu'à la rupture.

La table 4.6 liste les stratégies de maintenance satisfaisant la contrainte sur le nombre de ruptures maximum autorisé en file haute, à savoir $\nu_{\text{ext}} = 5$. Parmi cet ensemble de politiques admissibles, nous avons mis en évidence qu'une inspection ultrasonore tous les 2 mois associée à un renouvellement de rails tous les 2 ans se révélait être la stratégie la moins coûteuse.

Après l'étude des files hautes, intéressons nous à présent aux files basses pour lesquelles des

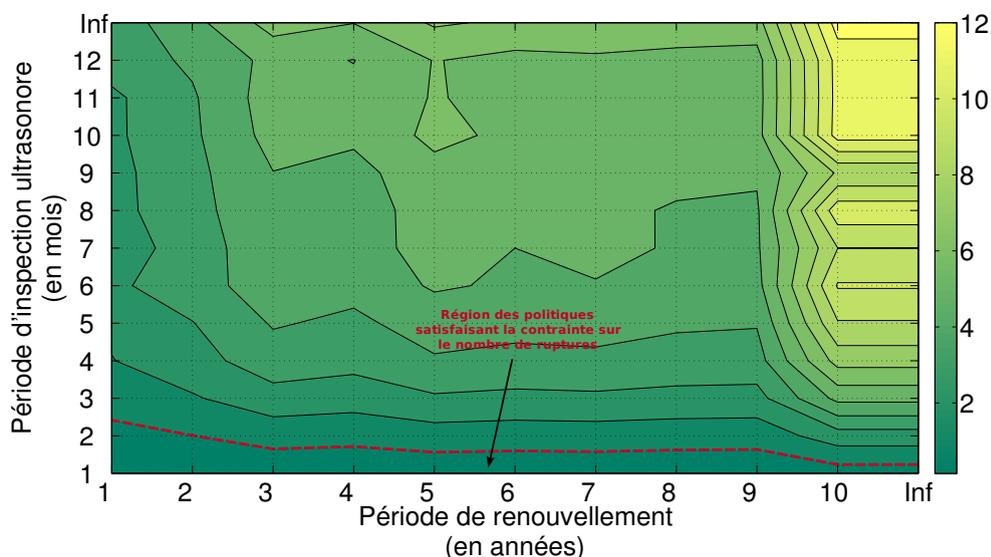
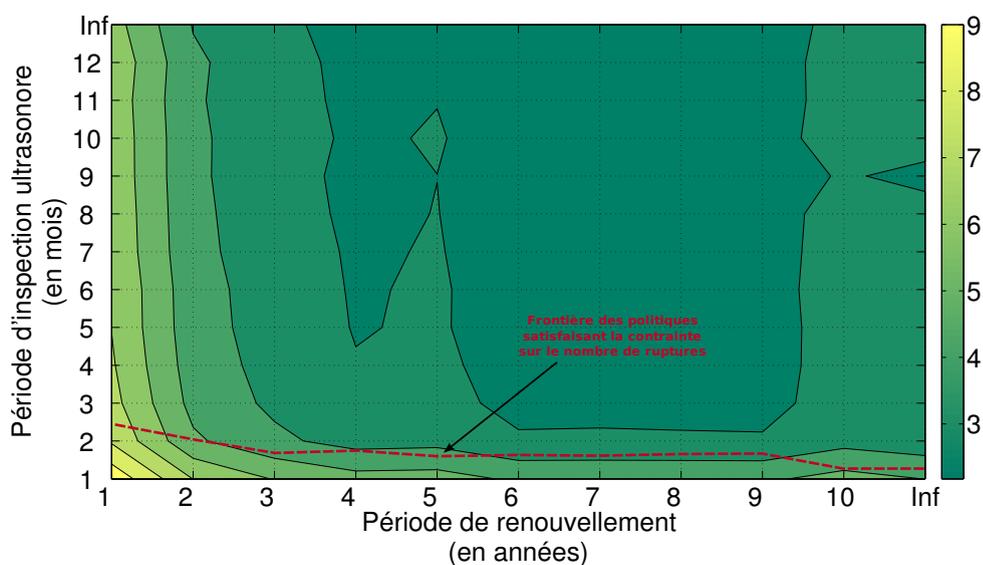
(a) Nombre de ruptures moyen annuel (f^{rup}).(b) Coût moyen annuel ($f^{\text{coût}}$).

FIG. 4.13 – Coût et nombre de ruptures en fonction de la politique de maintenance des files basses situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

résultats analogues sont présentés sur les figures 4.13b et 4.13a. Nous observons dans ce cas que les politiques minimisant les coûts de maintenance consistent à surveiller et à renouveler la voie peu fréquemment. Cette différence avec les files hautes s'explique simplement du fait que la durée de vie des rails est plus élevée sur les files basses. Autrement dit, les coûts engendrés par des auscultations ultrasonores et des renouvellements fréquents ne sont pas justifiés au regard de la vitesse de dégradation de la voie en file basse.

À l'instar du cas précédent, la figure 4.13a montre un accroissement des ruptures avec la

π^{us} (en mois)	π^{ren} (en années) (en années)	$f^{\text{rup}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$	$f^{\text{coût}}(\pi^{\text{us}}, \pi^{\text{ren}})$
1	1	0.14	9.71
1	2	0.21	6.98
1	4	0.27	5.36
1	3	0.29	5.94
1	9	0.29	4.81
1	8	0.3	4.83
1	6	0.31	4.83
1	7	0.31	4.84
1	5	0.32	5.40
1	∞	0.52	4.98
1	10	0.52	5.38
2	1	0.7	7.86
2	2	0.99	5.17

TAB. 4.7 – Coût et nombre de ruptures annuels moyens en fonction des politiques de maintenance satisfaisant la contrainte de $\nu = 1$ ruptures annuelles. Ces résultats concernent les files basses situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

diminution des opérations de maintenance. Notons toutefois que cet accroissement s’effectue par paliers, le premier correspondant à l’augmentation des périodes de renouvellement entre 1 et 5 ans et le second lorsque la période de renouvellement est supérieure ou égale à 10 ans. En effet, que la voie soit auscultée tous les 4 mois ou jamais, nous observons très peu de variations en termes de rupture dès lors que les rails sont renouvelés périodiquement entre 5 et 9 ans. Le premier accroissement des ruptures est essentiellement dû aux soudures qui possèdent une durée de vie inférieure à 4 ans en moyenne (cf. figure 4.5d). Nous observons ensuite que le deuxième accroissement est plus fort que le premier. Ce dernier correspond à la fois à l’apparition de défauts sur les rails, dont la durée de vie est en moyenne entre 9 et 10 ans (cf. figure 4.5c), ainsi qu’aux défauts sur les soudures introduites lors des opérations correctives réalisées 5 ans plus tôt.

Les stratégies de maintenance satisfaisant la contrainte sur le nombre de ruptures maximum autorisé en file basse, à savoir $\nu_{\text{int}} = 1$, sont présentées dans la table 4.7. Deux politiques sont alors remarquables. D’un point de vue purement numérique, une auscultation ultrasonore mensuelle accompagnée d’un renouvellement tous les 9 ans permet de minimiser les coûts de maintenance. Cependant, lors de son passage, le véhicule de surveillance ultrasonore réalise un diagnostic sur les deux files simultanément. Aussi, les périodes de passage sur les files hautes et basses doivent être identiques. La question est alors de savoir s’il faut diminuer d’un mois la période d’auscultation pour les files hautes ou augmenter d’un mois celle des files basses. D’après le table 4.6, la première éventualité occasionne un coût supplémentaire de $7.63 - 6.08 = 1.55$. En revanche, surveiller les files basses tous les 2 mois en les renouvelant tous les 2 ans n’entraîne qu’une augmentation des coûts de $5.17 - 4.81 = 0.36$.

Il s'agit par conséquent de la solution à adopter en pratique.

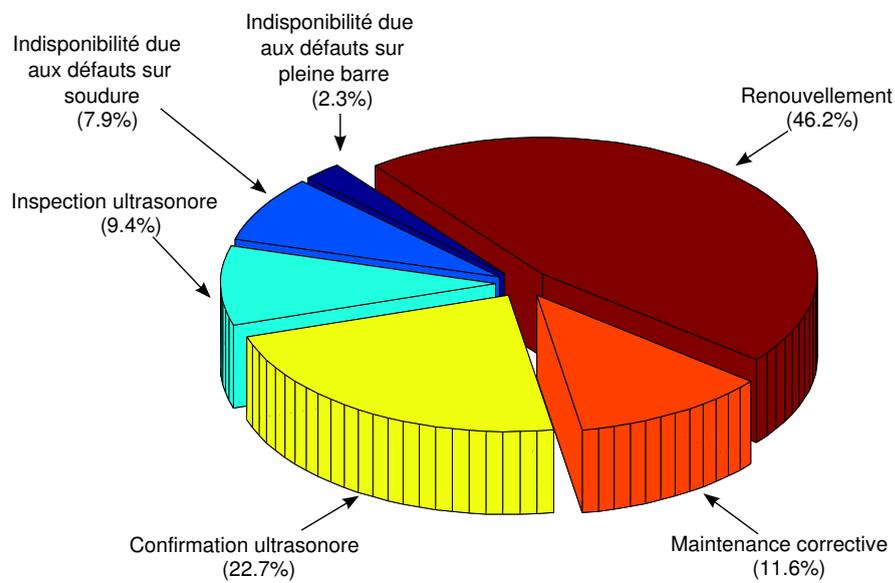
Cette approche permet également d'analyser en détails les propriétés des politiques de maintenance sélectionnées. Il est en effet possible de calculer un grand nombre d'indicateurs permettant de mettre en évidence les divers aspects d'une stratégie donnée. Parmi les indicateurs les plus utiles dans cette application, citons par exemple : le nombre de défauts internes et de ruptures, l'évolution du nombre de soudures au cours du temps, les coûts d'indisponibilité, de diagnostic et de maintenance. À titre d'illustration, nous présentons dans les figures 4.14a et 4.14b la répartition des coûts associée aux politiques de maintenance optimales dans le contexte des files hautes et basses respectivement.

L'observation de ces graphiques montre dans les deux cas que les postes de dépenses les plus importants concernent le renouvellement et la confirmation des inspections ultrasonores. L'impact économique des confirmations est directement lié au taux de fausses alarmes de l'inspection ultrasonore. Par conséquent, ces résultats suggèrent qu'une amélioration du diagnostic ultrasonore pourrait diminuer de manière significative les coûts de maintenance. Nous observons par ailleurs les différences en termes d'indisponibilité entre les files hautes et basses. Le coût de l'indisponibilité due aux défauts sur pleine barre ou soudure représente plus de 10% des dépenses totales sur les files hautes contre moins de 4% sur les files basses. Ces résultats apportent donc une quantification économique de la sensibilité des rails en files hautes.

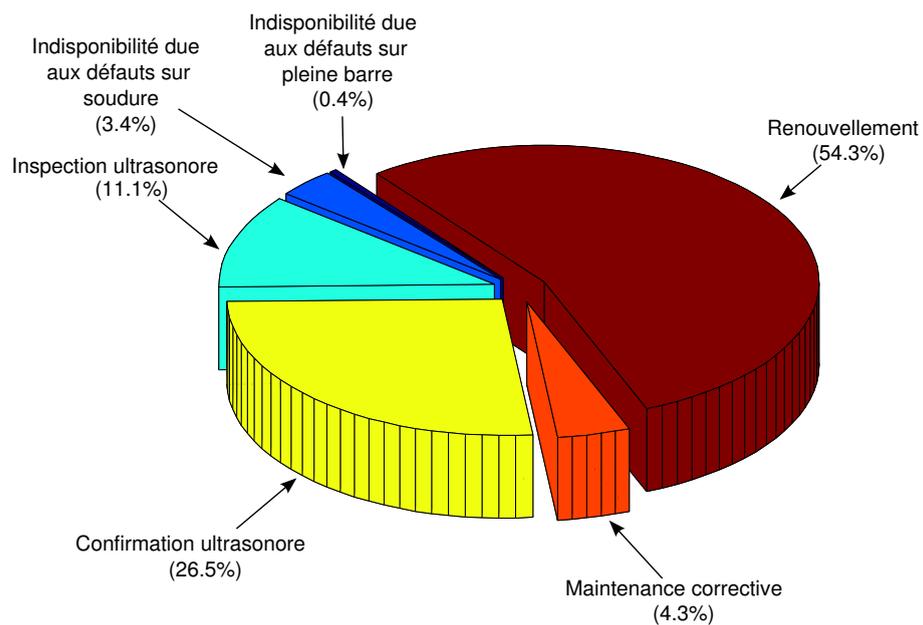
4.7 Conclusions

Ce chapitre détaille l'application de l'approche VIRMALAB afin de modéliser et d'évaluer la maintenance de la voie. Nous montrons que cette problématique industrielle complexe peut se ramener à l'étude d'un système à deux composants (pleine barre et soudure) se dégradant au cours du temps. Le travail de modélisation réalisé illustre ainsi la possibilité de traiter des systèmes multi-composants à partir de l'approche VIRMALAB. Cette application fait également intervenir les modèles graphiques de durée pour la représentation du processus de dégradation de chaque composant. Une analyse des données de REX confirme la pertinence de ce choix par rapport aux solutions classiques reposant sur les chaînes de Markov. Les lois contrôlant les temps d'apparition des défauts s'avèrent en effet bien différentes d'une loi exponentielle. D'autre part, une méthode d'apprentissage utilisant l'algorithme EM est décrite de manière à tenir compte de la grande quantité d'informations censurées dans les bases de REX.

Par la suite, la représentation des procédures de maintenance est abordée. Les deux principales méthodes de surveillance de la voie relativement aux ruptures de rails sont considérées. L'inspection préventive ultrasonore, qui constitue la première méthode, est caractérisée par ses taux de détection de défauts internes et sa période de passage. La seconde méthode, reposant sur la signalisation et réalisant une surveillance continue de la voie, est également intégrée au modèle de manière à repérer les rails cassés. Tout diagnostic de défaut



(a) File haute.



(b) File basse.

FIG. 4.14 – Répartition des coûts associée à un référentiel de maintenance déclenchant une inspection ultrasonore tous les 2 mois et à un renouvellement tous les 2 ans sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.

entraîne la réparation du coupon endommagé. L'opération est préventive si le défaut est repéré avant la rupture et curative sinon. En parallèle, nous tenons également compte des opérations périodiques de renouvellement de la voie étudiée ayant pour effet sa remise à neuf.

Pour finir, nous décrivons comment appliquer cette approche afin d'ajuster la période de l'auscultation ultrasonore et la période des renouvellements de voie dans un contexte donné. La résolution de cette problématique a donné lieu au développement d'un outil d'aide à la décision spécifique à l'ajustement de ces périodes d'intervention. Ce type d'analyse peut donc s'avérer pertinente afin de justifier une augmentation ou une réduction de budget associé à un ou plusieurs postes de maintenance donnés. Notons par ailleurs que cette méthodologie est bien adaptée au traitement d'autres dégradations des rails, telles que l'optimisation des cycles de meulage visant à traiter l'usure ondulatoire et les défauts de fatigue de surface.

Conclusions générales et perspectives

Conclusions

Au cours de ces travaux de thèse, nous avons abordé dans un premier temps la problématique de la représentation d'un processus de dégradation dans le cadre des Modèles Graphiques Probabilistes (MGP), et plus particulièrement dans celui des MGP Markoviens (MGPM). Ce formalisme intuitif, aux capacités de modélisation étendues, est bien adapté pour décrire formellement les relations de dépendance entre les différents composants d'un système complexe évoluant au cours du temps. Nous avons mis en évidence le fait qu'en pratique, les MGPM étaient essentiellement utilisés pour modéliser les aspects dynamiques d'un système sous forme de chaînes de Markov. Cette démarche se traduit nécessairement par le fait que les temps de séjour dans chacun des états du système sont distribués selon des lois géométriques. Or, cette hypothèse est peu réaliste dans bon nombre d'applications. Nous avons alors montré qu'il était possible de dépasser cette limitation en utilisant une structure de MGPM particulière que nous avons appelée Modèle Graphique de Durée (MGD). Une description complète des propriétés probabilistes de cette structure est présentée de façon à mettre en évidence son intérêt pour la modélisation de systèmes possédant une dynamique d'évolution complexe.

Une fois le problème de la représentation du processus de dégradation résolu, l'accent a naturellement été mis sur la modélisation de la maintenance. L'approche que nous proposons dans ce rapport a l'avantage d'être générique et applicable dans différents domaines industriels. Il est en effet possible de décliner le modèle de manière à simuler un grand nombre de politiques de maintenance. En outre, chaque stratégie peut être évaluée par le biais d'un calcul d'utilité reposant sur un algorithme d'inférence spécifique que nous avons développé. Ainsi, sous réserve de posséder une fonction d'utilité associée au système étudié, l'application de méthode d'optimisation visant à ajuster des paramètres de maintenance est envisageable.

Nous achevons ces travaux en déclinant l'approche décrite précédemment afin de réaliser une étude sur la prévention des ruptures de rail. Cette problématique industrielle concrète nous a permis de valider la démarche formelle proposée. Ceci a donné lieu au développement d'un outil de maintenance prévisionnelle permettant d'évaluer l'impact des cycles de

surveillance et de renouvellement des rails. Deux études de cas sont présentées de façon à illustrer l'intérêt d'un tel outil en vue d'ajuster ces cycles de maintenance dans un cadre multi-critère. Nous montrons par exemple que cette méthodologie permet de fournir des arguments numériques dans des situations d'arbitrages associées aux financements des divers postes de maintenance.

Perspectives

Les travaux réalisés au cours de cette thèse ont ouvert plusieurs pistes de recherches et de développements. La majorité des ouvertures concernent des points théoriques ou algorithmiques associés au formalisme des MGP.

Intéressons nous tout d'abord au problème de l'inférence probabiliste dans un MGPM représentant le fonctionnement dynamique d'un système multi-composant. Dans ce cas, le processus de dégradation de chaque composant est lui-même modélisé par un MGPM plus simple, par exemple une chaîne de Markov ou un MGD. Naturellement, lorsque le nombre de composants augmente, les calculs d'inférence d'une tranche temporelle à la suivante deviennent de plus en plus complexes. Une façon de simplifier ces calculs consisterait à exploiter les dépendances entre les composants. Prenons l'exemple d'un système constitué de n composants indépendants. Dans cette situation, les calculs d'inférence dynamiques peuvent se résumer à n calculs locaux peu coûteux d'un point de vue algorithmique. Pourtant, l'utilisation d'une méthode générique reposant sur l'interface temporelle du modèle conduirait au calcul de la loi jointe des n composants, possédant une complexité exponentielle. En pratique, il s'agirait donc d'améliorer l'algorithme de l'interface en tenant compte de l'information portée par les relations de dépendance entre les composants afin de factoriser les calculs en conséquence. Notons que de manière assez surprenante au vue des applications possibles, il existe peu d'articles récents traitant du problème d'inférence dans le cadre des MGPM.

Par ailleurs, il semblerait intéressant de généraliser le fonctionnement probabiliste particulier des MGD. Ce MGPM particulier possède en effet des propriétés probabilistes singulières provenant de ses Lois de Probabilité Conditionnelles (LPC) définies par morceaux et partiellement déterministes. L'exploitation de ces caractéristiques a permis l'élaboration d'un algorithme réalisant des calculs d'inférence exacte dans cette structure bien plus rapidement qu'une méthode générique classique. Le gain venant de la forme particulière de ses LPC, une étude approfondie des LPC définies par morceaux pourrait s'avérer pertinente. Le travail consisterait à optimiser les opérations arithmétiques usuelles (somme et produit) pour ces LPC et d'établir les propriétés mathématiques des opérations avec les LPC classiques. Dès lors, les algorithmes d'inférence exacte génériques pourraient s'appliquer de manière transparente en bénéficiant dans certains cas d'une baisse significative de la complexité.

En se plaçant à présent dans le cadre des problèmes d'apprentissage, nous avons également dû nous intéresser durant ces travaux aux traitements des données de Retour d'EXpérience

(REX), et ce, dans le but d'estimer les paramètres de dégradation du système considéré. Or, comme c'est souvent le cas dans ce type d'étude, de nombreuses données étaient censurées. Des solutions algorithmiques existent permettant d'apprendre les paramètres d'un MGP (structure et LPC) en présence de données manquantes. En revanche, très peu de travaux traitent du cas où les données sont incomplètes (ou partiellement observées). Aussi, le développement de méthodes d'apprentissage génériques permettant de tenir compte de ce type données semble une perspective intéressante.

Dans un registre plus pratique, nous sommes convaincus que la méthode de modélisation proposée peut se décliner à bien d'autres problématiques que la prévention des ruptures de rails. Par exemple en restant dans le contexte ferroviaire, nous pensons en particulier au phénomène d'usure ondulatoire. Cette dernière se présente sous forme d'une ondulation de la surface du rail plus ou moins régulière selon les cas. Elle affecte principalement les voies en courbes qui supportent un trafic homogène (matériels roulants identiques, suivant une marche similaire). Cette usure provoque des nuisances sonores au passage d'un train, conduisant parfois à des plaintes de riverains. En l'absence de mesures préventives efficaces, l'usure ondulatoire est éliminée périodiquement en meulant la surface des rails. L'exploitation du REX sur l'évolution de cette usure permettrait d'appliquer notre méthodologie en vue d'optimiser les cycles de meulage de façon réduire l'insatisfaction des riverains.

Références

- R. Anderson and C. Barkan (2004, January). Railroad accident rates for use in transportation risk analysis. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1863(-1), 88–98.
- M. Arias and F. J. Díez (2007, September). Operating with potentials of discrete variables. *International Journal of Approximate Reasoning* 46(1), 166–187.
- M. S. Arulampalam, S. Maskell, N. Gordon, and T. Clapp (2002). A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-gaussian bayesian tracking. *Signal Processing, IEEE Transactions on* 50(2), 174–188.
- T. Aven and U. Jensen (1999). *Stochastic Models in Reliability*. Stochastic Modelling and Applied Probability. Springer.
- A. Bar-Noy, V. Dreizin, and B. Pattshamir (2004, June). Efficient algorithms for periodic scheduling. *Computer Networks* 45(2), 155–173.
- C. P. L. Barkan, C. T. Dick, and R. Anderson (2003). Railroad derailment factors affecting hazardous materials transportation risk. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1825, 64–74.
- R. Barlow and L. Hunter (1960, January). Optimum preventive maintenance policies. *Operations Research* 8(1), 90–100.
- C. Bérenguer (2008, September). On the mathematical condition-based maintenance modelling for continuously deteriorating systems. *International Journal of Materials and Structural Reliability* 6(2), 133–151.
- S. Bondeux, C. Mielnik, P. Burnet, H. Clément, J. Y. Etienne, R. Gréville, D. Lévy, and A. Naszalyi (2006). La voie de la ratp. Technical report, RATP EST Voie.
- H. Boudali and J. B. Dugan (2005, March). A discrete-time bayesian network reliability modeling and analysis framework. *Reliability Engineering & System Safety* 87(3), 337–349.
- L. Bouillaut, R. Donat, A. Neji, and P. Aknin (2009, June). Estimation of multi-component systems reliability : Comparison of two graphical model approaches. In *proceedings of the 13th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, pp. 1733–1738.
- X. Boyen and D. Koller (1998, July). Tractable inference for complex stochastic processes. In *Uncertainty in artificial Intelligence*, Madison, Wisconsin, pp. 32–42.

- C. Bracquemond (2001, October). *Modélisation stochastique du Vieillissement en temps discret*. Ph. D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble.
- C. Bracquemond and O. Gaudoin (2003). A survey on discrete lifetime distributions. *International Journal on Reliability, Quality, and Safety Engineering* 10(1), 69–98.
- B. Castanier, A. Grall, and C. Berenguer (2005, January). A condition-based maintenance policy with non-periodic inspections for a two-unit series system. *Reliability Engineering & System Safety* 87(1), 109–120.
- E. Castillo, J. M. Gutiérrez, and A. S. Hadi (1996, December). *Expert Systems and Probabilistic Network Models* (Erste ed.). New York, NY, USA : Springer.
- G. Celeux, F. Corset, A. Lannoy, and B. Ricard (2006, July). Designing a bayesian network for preventive maintenance from expert opinions in a rapid and reliable way. *Reliability Engineering & System Safety* 91(7), 849–856.
- B. R. Cobb and P. P. Shenoy (2006, May). Operations for inference in continuous bayesian networks with linear deterministic variables. *International Journal of Approximate Reasoning* 42(1-2), 21–36.
- G. F. Cooper (1990, March). The computational complexity of probabilistic inference using bayesian belief networks. *Artificial Intelligence* 42(2-3), 393–405.
- A. Corana, M. Marchesi, C. Martini, and S. Ridella (1987, September). Minimizing multimodal functions of continuous variables with the “simulated annealing” algorithm. *ACM Trans. Math. Softw.* 13(3), 262–280.
- F. Corset (2003). *Aide à l’optimisation de maintenance à partir de réseaux bayésiens et fiabilité dans un contexte doublement censuré*. Ph. D. thesis, Université Joseph Fourier.
- P. Courtois and P. Delsarte (2006, January). On the optimal scheduling of periodic tests and maintenance for reliable redundant components. *Reliability Engineering & System Safety* 91(1), 66–72.
- R. G. Cowell, A. P. Dawid, S. L. Lauritzen, and D. J. Spiegelhalter (1999). *Probabilistic Networks and Expert Systems*. Berlin-Heidelberg-New York : Springer-Verlag.
- D. R. Cox (1972). Regression models and life-tables. *Journal of the Royal Statistical Society.* 34(2), 187–220.
- F. G. Cozman (2000). Generalizing variable elimination in bayesian networks. In *the IBERAMIA/SBIA Workshops on Probabilistic Reasoning in Artificial Intelligence*, pp. 27–32. Editora Tec Art.
- A. Darwiche (2001, April). Constant-space reasoning in dynamic bayesian networks. *International Journal of Approximate Reasoning* 26(3), 161–178.
- R. Dechter (1999). Bucket elimination : A unifying framework for reasoning. *Artificial Intelligence* 113(1-2), 41–85.
- A. Dempster, N. Laird, and D. B. Rubin (1977). Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society B* 39, 1–38.
- R. C. Dick, C. Barkan, E. Chapman, and M. Stehly (2003, January). Multivariate statistical model for predicting occurrence and location of broken rails. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1825(-1), 48–55.

- R. Donat, L. Bouillaut, P. Aknin, and P. Leray (2008). A dynamic graphical model to represent complex survival distributions. In T. Bedford, J. Quigley, L. Walls, B. Alkali, A. Daneshkhah, and G. Hardman (Eds.), *Advances in Mathematical Modeling for Reliability*, pp. 17–24. Amsterdam : IOS Press.
- R. Donat, L. Bouillaut, P. Aknin, P. Leray, and S. Bondeux (2008, June). Specific graphical models for analysing reliability. In *proceedings of 16th IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation*, pp. 621–626.
- R. Donat, L. Bouillaut, P. Aknin, P. Leray, and D. Levy (2007, July). A generic approach to model complex system reliability using graphical duration models. In *proceedings of the Fifth International Mathematical Methods in Reliability Conference*, Glasgow, Scotland.
- R. Donat, L. Bouillaut, A. Neji, and P. Aknin (2009, July). Comparison of two graphical models approaches for the modelling of multi-components system’s reliability. In *proceedings of the 39th International Conference on Computers & Industrial Engineering*.
- R. Donat, P. Leray, L. Bouillaut, and P. Aknin (2008, May). Réseaux bayésiens dynamiques pour la représentation de modèles de durée en temps discret. In *actes de la 4ème Journée Française sur les Réseaux Bayésiens*.
- R. Donat, P. Leray, L. Bouillaut, and P. Aknin (To appear in 2010). A dynamic bayesian network to represent discrete duration models. *Neurocomputing*.
- J. Dréo, A. Pérowski, P. Siarry, and E. Taillard (2003, September). *Métaheuristiques pour l’optimisation difficile*. Algorithmes. Eyrolles.
- R. A. Fisher (1922). On the mathematical foundations of theoretical statistics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character* 222, 309–368.
- O. François (2006). *De l’identification de structure de réseaux bayésiens à la reconnaissance de formes à partir d’informations complètes ou incomplètes*. Ph. D. thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Rouen.
- M. R. Garey and D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability : A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W. H. Freeman.
- A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern, and D. B. Rubin (2003). *Bayesian Data Analysis* (Second ed.). Texts in statistical Science. Chapman & Hall/CRC.
- W. R. Gilks (1995, December). *Markov Chain Monte Carlo in Practice*. Chapman & Hall/CRC.
- A. Grall, C. Bérenguer, and L. Dieulle (2002, May). A condition-based maintenance policy for stochastically deteriorating systems. *Reliability Engineering & System Safety* 76(2), 167–180.
- A. Grigoriev, J. Vandeklundert, and F. Spieksma (2006, August). Modeling and solving the periodic maintenance problem. *European Journal of Operational Research* 172(3), 783–797.
- J. L. Gross and J. Yellen (2004). *Handbook of Graph Theory*. CRC Press.
- H. O. Hartley (1958, June). Maximum likelihood estimation from incomplete data. *Biometrics* 14(2), 174–194.

- R. A. Howard (2007a, June). *Dynamic Probabilistic Systems, Volume I : Markov Models*. Dover Publications.
- R. A. Howard (2007b, June). *Dynamic Probabilistic Systems, Volume II : Semi-Markov and Decision Processes* (1 ed.). Dover Publications.
- C. Huang and A. Darwiche (1996, October). Inference in belief networks : A procedural guide. *International Journal of Approximate Reasoning* 15(3), 225–263.
- F. Jensen, F. V. Jensen, and S. L. Dittmer (1994). From influence diagrams to junction trees. In *Proceedings of the tenth conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*.
- M. Jordan (1999). *Learning in graphical models*. Cambridge, MA, USA : MIT Press.
- M. Jordan, Z. Ghahramani, T. S. Jaakkola, and L. K. Saul (1999). An introduction to variational methods for graphical models. *Machine Learning* 37(2), 183–233.
- J. D. Kalbfleisch and R. L. Prentice (2002). *The Statistical Analysis of Failure Time Data. Second Edition*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.
- R. E. Kalman (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering* 82(1), 35–45.
- C. W. Kang and M. W. Golay (1999, July). A bayesian belief network-based advisory system for operational availability focused diagnosis of complex nuclear power systems. *Expert Systems with Applications* 17(1), 21–32.
- R. Kay (1977). Proportional hazard regression models and the analysis of censored survival data. *Applied Statistics* 26(3), 227–237.
- E. S. Keeping (1962). *Introduction to Statistical Inference*. Princeton, New Jersey : D. Van Nostrand.
- M. S. A. Khan, A. Khalique, and A. M. Abouammoh (1989). On estimating parameters in a discrete weibull distribution. *Reliability, IEEE Transactions on* 38(3), 348–350.
- U. Kjaerulff (1990, March). Triangulation of graphs : algorithms giving small total state space. Technical report, Department of Mathematics and Computer Science.
- P. Komarek and A. Moore (2000). A dynamic adaptation of ad-trees for efficient machine learning on large data sets. In *Proceedings of the 17th International Conference on Machine Learning*, pp. 495–502.
- H. Langseth and L. Portinale (2007, January). Bayesian networks in reliability. *Reliability Engineering & System Safety* 92(1), 92–108.
- S. L. Lauritzen and D. J. Spiegelhalter (1988). Local computations with probabilities on graphical structures and their application to expert systems. *Journal of the Royal Statistical Society* 50(2), 157–224.
- J. F. Le Bihan (2005). Maintenance préventive et corrective - it09 : Classement des défauts internes, des fissures et ruptures de rails. Technical report, RATP EST Voie.
- J. F. Le Bihan and M. Jouve (2005, March). Prévention des ruptures de rails : Nouvelle politique de renouvellement des rails. Technical report, RATP, Département EST, Unité Voie SLI/PMM.
- N. Limnios and G. Oprisan (2001). *Semi-Markov Processes and Reliability*. Statistics for Industry & Technology. Springer.
- M. Marseguerra, E. Zio, and L. Podofillini (2002, August). Condition-based maintenance optimization by means of genetic algorithms and monte carlo simulation. *Reliability*

- Engineering & System Safety* 77(2), 151–165.
- G. McLachlan and T. Krishnan (1997). *The EM Algorithm and Extensions*. New York : Wiley.
- S. Montani, L. Portinale, A. Bobbio, and D. Codetta-Raiteri (2006, April). Automatically translating dynamic fault trees into dynamic bayesian networks by means of a software tool. In *Proceedings of the First International Conference on Availability, Reliability and Security*, pp. 804–809.
- K. P. Murphy (2002). *Dynamic Bayesian Networks : Representation, Inference and Learning*. Ph. D. thesis, University of California, Berkeley.
- K. P. Murphy and Y. Weiss (2001). The factored frontier algorithm for approximate inference in dbns. In *Proceedings of the 17th Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 378–385.
- K. P. Murphy, Y. Weiss, and M. I. Jordan (1999). Loopy belief propagation for approximate inference : An empirical study. In *Proceedings of the 15th on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 467–475.
- P. Naïm, P. H. Willemin, P. Leray, O. Pourret, and A. Becker (2007). *Réseaux bayésiens* (Troisième ed.). Collection Algorithmes. Paris : Eyrolles.
- R. E. Neapolitan (2003, April). *Learning Bayesian Networks*. Prentice Hall.
- F. S. Nowlan and H. F. Heap (1978). *Reliability-Centered Maintenance*. San Francisco, CA : United Air Lines Inc.
- O. Orringer (1988). Rail testing : strategies for safe and economical rail quality assurance. *Transportation Research Record : Rail Replacement and Maintenance Management* 1174, 28–42.
- M. P. Panos and G. C. Mauricio (2002, January). *Handbook of Applied Optimization*. Oxford University Press.
- J. Pearl (1986, September). Fusion, propagation, and structuring in belief networks. *Artificial Intelligence* 29(3), 241–288.
- J. Pearl (1988, September). *Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems : Networks of Plausible Inference*. Morgan Kaufmann.
- J. Pearl and A. Paz (1985). Graphoids : A graph based logic for reasoning about relevance relations. Technical Report 850038 (R-53-L), Cognitive Systems Laboratory, University of California, Los Angeles.
- L. Podofillini, E. Zio, and J. Vatn (2006). Risk-informed optimisation of railway tracks inspection and maintenance procedures. *Reliability Engineering and System Safety* 91, 20–35.
- M. L. Puterman (2005). *Markov Decision Processes : Discrete Stochastic Dynamic Programming*. Wiley.
- L. Rabiner and B. H. Juang (1993). *Fundamentals of Speech Recognition*. Signal Processing Series. Prentice Hall.
- L. R. Rabiner (2002, August). A tutorial on hidden markov models and selected applications in speech recognition. *Proceedings of the IEEE* 77(2), 257–286.
- M. M. Rao and R. J. Swift (2006). *Probability Theory with Applications*. Springer.

- S. Rodrigues de Morais (2009, November). *Bayesian Network structure learning with applications in feature selection*. Ph. D. thesis, INSA de Lyon.
- D. B. Rubin (1976, December). Inference and missing data. *Biometrika* 63(3), 581–592.
- R. D. Shachter (1988). Probabilistic inference and influence diagrams. *Operations Research* 36(4), 589–604.
- J. Vatn (1997, November). Maintenance optimisation from a decision theoretical point of view. *Reliability Engineering & System Safety* 58(2), 119–126.
- J. Vatn, P. Hokstad, and L. Bodsberg (1996, March). An overall model for maintenance optimization. *Reliability Engineering & System Safety* 51(3), 241–257.
- T. Verma and J. Pearl (1988). Causal networks : Semantics and expressiveness. In *Proceedings of the 4th Workshop on Uncertainty in Artificial Intelligence*, pp. 352–359.
- W. E. Vesely, F. F. Goldberg, N. H. Roberts, and D. F. Haasl (1981). *Fault Tree Handbook*. Washington, DC : U.S. Nuclear Regulatory Commission.
- P. Weber and L. Jouffe (2003, June). Reliability modelling with dynamic bayesian networks. In *Proceedings of the 5th IFAC Symposium on fault Detection, Supervision and Safety of Technical Processes*, Washington D.C., USA.
- B.-C. Wei (1998). *Exponential Family Nonlinear Models*. Springer Verlag.
- N. L. Zhang and D. Poole (1996). Exploiting causal independence in bayesian network inference. *Journal of Artificial Intelligence Research* 5, 301–328.
- J. Zhao, A. H. C. Chan, and M. P. N. Burrow (2007). Probabilistic model for predicting rail breaks and controlling risk of derailment. *Transportation Research Record : Journal of the Transportation Research Board* 1995, 76–83.
- G. Zweig (1996). A forward-backward algorithm for inference in bayesian networks and an empirical comparison with hmms. Master’s thesis, Department of Computer Science, U.C. Berkeley.
- G. Zwingelstein (1996). *La maintenance basée sur la fiabilité - guide pratique d’application de la RCM*. Diagnostic et maintenance. Hermes.

Table des figures

1.1	MGP à quatre variables représentant une machine de production	25
1.2	Exemple d'un 2-MGPM représenté par son modèle initiale et de transition .	40
1.3	Exemple d'un 2-MGPM représenté par 3 tranches de temps successives . . .	41
1.4	1-MGPM représentant l'évolution d'un système de production	43
2.1	Évolution de l'état d'un système dynamique au cours du temps	53
2.2	Représentation graphique d'un MGD	55
2.3	Exemple de MGD représentant un système de production	67
2.4	Temps moyen du calcul d'une itération de l'algorithme 2.2 en fonction de $ \mathcal{X} $ ($T_S = \mathcal{A} = 25$) et de la méthode d'inférence utilisée.	75
2.5	Temps moyen du calcul d'une itération de l'algorithme 2.2 en fonction de T_S ($ \mathcal{X} = \mathcal{A} = 25$) et de la méthode d'inférence utilisée.	76
2.6	Temps moyen du calcul d'une itération de l'algorithme 2.2 en fonction de $ \mathcal{A} $ ($ \mathcal{X} = T_S = 25$) et de la méthode d'inférence utilisée.	76
2.7	Évaluation de la fiabilité du système à partir du modèle théorique et des l'approches MGD et CM.	84
2.8	Évaluation du taux de défaillance du système à partir du modèle théorique et des l'approches MGD et CM.	85
2.9	Évaluation de la durée de vie résiduelle du système à partir du modèle théorique et des l'approches MGD et CM.	86
3.1	Modèle graphique probabiliste markovien associé au modèle VIRMALAB . .	91
3.2	Utilités dans le modèle VIRMALAB	100

3.3	Fiabilité d'un système de production en fonction de ses paramètres de dégradation.	108
3.4	Taux de défaillance d'un système de production en fonction de ses paramètres de dégradation.	109
3.5	Utilité moyenne journalière d'un système de production en fonction de ses paramètres de dégradation et de sa politique de maintenance.	115
3.6	Utilité d'un système de production en fonction des périodes de diagnostic (diagnostics concurrents).	121
3.7	Utilité d'un système de production en fonction des périodes de diagnostic (diagnostics complémentaires).	122
4.1	Illustrations caractéristiques de la voie.	127
4.2	Exemples de ruptures.	128
4.3	Modélisation de la voie.	130
4.4	1-MGPM associé à la dégradation d'un coupon élémentaire.	132
4.5	Distributions du temps avant apparition du premier défaut dans les courbes ayant un rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	139
4.6	Modèle graphique représentant le diagnostic de la voie à l'instant t	140
4.7	Voiture de contrôle ultrasonore V365.	141
4.8	Schéma de principe d'un circuit de voie.	143
4.9	Modèle VIRMALAB associé à la maintenance des ruptures de rails.	146
4.10	Distributions spatiales des défauts sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	151
4.11	Schéma de principe de l'outil développé d'aide à la décision pour la maintenance des rails.	155
4.12	Évaluation des politiques de maintenance sur les files hautes situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	156
4.13	Évaluation des politiques de maintenance sur les files basses situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	158
4.14	Répartition des coûts associée au référentiel de maintenance optimal sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	161
B.1	Exemple de graphe orienté à cinq nœuds.	182

Liste des tableaux

1.1	Résultats d'inférence par la méthode d'élimination dans un 1-MGPM	47
2.1	Détail de la complexité spatiale d'un MGD.	64
2.2	Trajectoires génériques associées à l'évolution naturelle d'un système représenté par un MGD	68
2.3	Exemple de 3 trajectoires associées à l'évolution naturelle du système de production	69
2.4	Exemple de temps de séjour observés dans chaque état d'un système de production	79
2.5	Exemple de transitions observées entre chaque état d'un système de production	79
2.6	Comparaison de résultats d'apprentissage entre les approches MGD et CM .	82
2.7	Comparaison des mesures de fiabilité entre les approches MGD et CM . . .	83
3.1	Complexité spatiale des LPC associées au modèle VIRMALAB.	98
3.2	Utilité d'un système de production en fonction des périodes de diagnostic et de sa politique de maintenance.	114
4.1	Analyse du REX entre les 1 ^{er} janvier 1999 et 2009 associé aux avaries du tronçon central du RER A en fonction du rayon de courbure.	138
4.2	Entropie normalisée de la localisation des défauts et taux de création de soudure dans le contexte des courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A.	152
4.3	Paramètres descriptifs d'une voie à étudier.	153
4.4	Paramètres descriptifs des méthodes de diagnostic.	153

4.5	Paramètres économiques du modèle VIRMALAB.	153
4.6	Évaluation des politiques de maintenance sur les files hautes situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A. .	157
4.7	Évaluation des politiques de maintenance sur les files basses situées sur les courbes de rayon inférieur à 500 mètres sur le tronçon central du RER A. .	159
D.1	Une base de $N = 10$ mesures indépendantes d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	190

Annexe A

Notations

Généralités

$ E $	Cardinal de l'ensemble E .
$\arg \max_{x \in \mathcal{X}} f(x)$	Valeur de la variable x maximisant la fonction f sur \mathcal{X} .
$\mathbb{I}(C)$	Fonction indicatrice de C , c-à-d. $\mathbb{I}(C) = \begin{cases} 1 & \text{si } C \text{ est vraie} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
$CS(x)$	Complexité spatiale de l'objet x .
$CA(x)$	Complexité algorithmique du calcul de l'objet x .
$f = \mathcal{O}(g)$	Se lit " f est en grand O de g " et signifie qu'il existe un réel positif M telle que $f < M g $.
Algorithme EM	Algorithme Espérance-Maximisation, de l'anglais <i>Expectation-Maximisation</i> .

Probabilités

X	Variable aléatoire (v.a.).
\mathcal{X}	Ensemble des valeurs prise par la v.a. X .
x	Réalisation de la v.a. X avec $x \in \mathcal{X}$.
$\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_D)$	Vecteur aléatoire.
$\mathcal{X} = \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_d$	Ensemble des valeurs prises par le vecteur \mathbf{X} .
$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_D)$	Réalisation du vecteur aléatoire \mathbf{X} ($\mathbf{x} \in \mathcal{X}$).
\mathbf{X}_I	Vecteur aléatoire indexé par l'ensemble d'indices $I \subset \mathbb{N}$.
$X \perp\!\!\!\perp Y$	X et Y indépendantes.
$X \perp\!\!\!\perp Y Z$	X et Y indépendantes conditionnellement à Z .
MAP	Maximum A Posteriori.
EAP	Espérance A Posteriori.

Potentiel

$\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_d\}$	Domaine sur D dimensions caractérisées par les ensembles $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_d$.
\mathcal{X}^*	Produit cartésien des ensembles constituant le domaine \mathcal{X} , c'est-à-dire $\mathcal{X}^* = \prod_{d=1}^D \mathcal{X}_d$.
$\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$	Ensemble des potentiels définis sur le domaine \mathcal{X} et à valeurs réelles.
$\pi \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$	Un potentiel réel défini sur \mathcal{X} .
$\text{Dom}(\pi)$	Domaine du potentiel π , c'est-à-dire $\text{Dom}(\pi) = \mathcal{X} = \{\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_d\}$.

Loi de probabilité conditionnelle

$\mathcal{L}^{\mathcal{X} \mathcal{Y}}$	Ensemble des lois de probabilité définies sur le domaine \mathcal{X} conditionnellement au domaine \mathcal{Y} .
LPC	Loi de Probabilité Conditionnelle.
$\mathcal{L}^{\mathcal{X}}$	Ensemble des LPC définies sur le domaine \mathcal{X} (pas de conditionnement).
$p \in \mathcal{L}^{\mathcal{X} \mathcal{Y}}$	Une loi de probabilité définie sur le domaine \mathcal{X} conditionnellement au domaine \mathcal{Y} .
$\mathbf{x} \sim p(\cdot \mathbf{y})$	$\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*$ est une réalisation ou un tirage aléatoire de la loi p lorsque la valeur $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$ est observée.

Graphe

$\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$	Un graphe (orienté).
$\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_N\}$	Ensemble des nœuds du graphe.
$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$	Ensemble des arcs (orientés) du graphe.
$\text{pa}(v_d)$	Ensemble des nœuds parents du nœud d .
$\text{en}(v_d)$	Ensemble des nœuds enfants du nœud d .
$\text{an}(v_d)$	Ensemble des nœuds ancêtres du nœud d .
$\text{de}(v_d)$	Ensemble des nœuds descendants du nœud d .
$\text{nd}(v_d)$	Ensemble des nœuds non descendants du nœud d .
$\text{fa}(v_d)$	Famille du nœud d correspondant au nœud d et à ses parents.
DAG	Graphe orienté sans circuit, de l'anglais <i>Directed Acyclic Graph</i> .

Modèle graphique probabiliste/Réseau bayésien

RB	Réseau Bayésien.
MGP	Modèle Graphique Probabiliste (<i>Graphical Probabilistic Model</i>).
n -MGPM	Modèle Graphique Probabiliste Markovien d'ordre n .
MGD	Modèle Graphique de Durée.
CM	Chaîne de Markov.

Application industriel/Ferroviaire

REX	Retour D'EXpérience.
RATP	Régie Autonome des Transports Parisiens.
RER	Réseau Express Régional.
PK	Point Kilométrique.
RC	Rayon de Courbure.

Éléments sur la théorie des graphes orientés

On distingue trois grandes familles de graphes : les graphes non orientés, semi-orientés et orientés. Pour définir les modèles graphiques probabilistes orientés, seule la dernière catégorie est nécessaire, bien que les graphes non orientés soient couramment utilisés dans certains algorithmes d'inférence.

L'objectif des paragraphes suivants est de présenter la notion de graphe orienté ainsi que le vocabulaire associé. Les définitions énoncées sont illustrées par le graphe donné en figure B.1.

Définition B.1 (Graphe orienté)

Un graphe orienté est un couple $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, où $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_D\}$ représente l'ensemble des D nœuds, ou sommets, et où \mathcal{E} est une partie de l'ensemble des couples $(v_i, v_j) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ représentant les arcs du graphe.

Le graphe de la figure B.1 possède cinq nœuds, d'où $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, et quatre arcs tels que $\mathcal{E} = \{(v_1, v_3), (v_2, v_3), (v_2, v_4), (v_3, v_5)\}$.

Définition B.2 (Parent, enfant, racine et feuille)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté. Nous avons alors les définitions suivantes :

- (i) v_j est un parent de v_i si l'arc (v_j, v_i) existe, c-à-d. si $(v_j, v_i) \in \mathcal{E}$. L'ensemble des parents du nœud v_i est noté $pa(v_i) = \{v_j | (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$.
- (ii) v_j est un enfant de v_i si v_j est un parent de v_i , c-à-d. si $v_j \in pa(v_i)$. L'ensemble des enfants du nœud v_i est noté $en(v_i) = \{v_j | v_j \in pa(v_i)\}$.
- (iii) v_i est une racine du graphe s'il n'a pas de parent, c-à-d. si $pa(v_i) = \emptyset$.
- (iv) v_i est une feuille du graphe s'il n'a pas d'enfant, c-à-d. si $en(v_i) = \emptyset$.

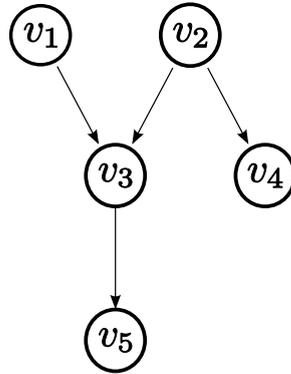


FIG. B.1 – Exemple de graphe orienté à cinq nœuds.

Dans l'exemple, les nœuds v_1 et v_2 sont des racines puisque $\text{pa}(v_1) = \text{pa}(v_2) = \emptyset$. Le parent de v_3 est v_2 , c-à-d. $\text{pa}(v_3) = \{v_2\}$, et les enfants de v_2 sont v_3 et v_4 , c-à-d. $\text{en}(v_2) = \{v_3, v_4\}$. Enfin, v_4 et v_5 sont des feuilles puisque $\text{en}(v_4) = \text{en}(v_5) = \emptyset$.

Définition B.3 (Chemin orienté, circuit et DAG)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$ un graphe orienté. Un chemin orienté entre v_i et v_j , noté $v_i \mapsto v_j$, est une suite de nœuds distincts (v_i, \dots, v_j) telle que pour tout $i < k \leq j$, il existe un arc entre v_{k-1} et v_k , c-à-d. $(v_{k-1}, v_k) \in \mathcal{E}$. Tout chemin du graphe tel que $v_i = v_j$ est appelé circuit. Par ailleurs, les graphes orientés sans circuit sont souvent désignés par l'acronyme anglais DAG (*Directed Acyclic Graph*).

Étant donné que le graphe présenté dans l'exemple ne possède pas de circuit, c'est donc un DAG.

Définition B.4 (Ancêtre, descendant et non descendant)

Soit $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$. Nous avons alors les définitions suivantes :

- (i) v_j est un ancêtre de v_i s'il existe un chemin orienté entre v_j et v_i . L'ensemble des ancêtres du nœud v_i est noté $\text{an}(v_i) = \{v_j \mid v_j \mapsto v_i\}$.
- (ii) v_j est un descendant de v_i si v_i est un ancêtre de v_j , c-à-d. si $v_i \in \text{an}(v_j)$. L'ensemble des descendants du nœud v_i est noté $\text{de}(v_i) = \{v_j \mid v_i \in \text{an}(v_j)\}$.
- (iii) L'ensemble des non descendants du nœud v_i est noté $\text{nd}(v_i) = \mathcal{V} \setminus \text{de}(v_i) \cup \{v_i\}$.

Sur le graphe de la figure B.1, nous lisons par exemple que les ancêtres de v_3 sont v_1 et v_2 , c-à-d. $\text{an}(v_3) = \{v_1, v_2\}$, que son seul descendant est v_5 , c-à-d. $\text{de}(v_3) = \{v_5\}$ et que ses non descendants sont v_1 , v_2 et v_4 , c-à-d. $\text{nd}(v_3) = \{v_1, v_2, v_4\}$.

Annexe C

Éléments sur la théorie des probabilités

Cette annexe a pour vocation de donner quelques éléments sur la théorie des probabilités. Par ailleurs, ce document étant axé sur l'utilisation de modèles graphiques probabilistes discrets et finis, les exemples donnés dans la suite ne font intervenir que des distributions discrètes et finies.

C.1 Rappels de probabilités

Un univers ou espace fondamental est l'ensemble, souvent noté Ω , des issues envisagées d'une expérience aléatoire. Les éléments de Ω sont appelés issues ou encore événements élémentaires. Pour une expérience aléatoire donnée, nous ne considérons pas toujours tous les événements mais seulement ceux qui sont disponibles ou intéressants, d'où la notion de tribu.

Définition C.1 (Tribu et espace probabilisable)

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire. une tribu correspond à toute famille \mathcal{A} de parties de Ω satisfaisants :

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$;
- (ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $\bar{A} \in \mathcal{A}$ (stabilité par passage au complémentaire);
- (iii) si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille dénombrable d'événements alors

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{A} \quad (\text{stabilité par réunion dénombrable}).$$

Le couple (Ω, \mathcal{A}) est alors appelé espace probabilisable.

En prenant l'exemple classique du jeu de pile ou face et en supposant que la pièce utilisée ne puisse tomber sur la tranche, alors dans ce cas, l'univers associé à l'expérience aléatoire d'un lancé est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$. Il existe deux tribus possibles : $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{\text{pile}, \text{face}\}\}$ et

$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{\text{pile}\}, \{\text{face}\}, \{\text{pile}, \text{face}\}\}$. La deuxième tribu est dite exhaustive car elle contient toutes les parties de Ω . Cette tribu est notée 2^Ω ou $\mathcal{P}(\Omega)$.

Définition C.2 (Probabilité et espace probabilisé)

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace probabilisable. Une probabilité ou mesure de probabilité est une application P définie sur \mathcal{A} à valeurs dans $[0, 1]$ qui vérifie :

- (i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;
- (ii) pour toute famille finie ou infinie dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ deux à deux incompatibles (i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset$, si $i \neq j$), alors

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Le triplet (Ω, \mathcal{A}, P) est alors appelé espace probabilisé.

Reprenons l'exemple du pile ou face et considérons l'espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) , avec $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}$ et $\mathcal{A} = 2^{\{\text{pile}, \text{face}\}}$. Il est alors possible de vérifier que l'application \mathbb{P} définie par $P(\{\text{pile}\}) = P(\{\text{face}\}) = 1/2$ est une mesure de probabilité.

Définition C.3 (Variable aléatoire discrète)

Une variable aléatoire (v.a.) discrète est une application d'un espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) vers un autre $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$, avec \mathcal{X} un ensemble fini ou infini dénombrable, telle que pour tous $\{x\}, B \in \mathcal{B}$,

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) = x\}.$$

et

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}.$$

Par ailleurs, Les événements $X^{-1}(\{x\})$ et $X^{-1}(B)$ peuvent être notés $\{X = x\}$ et $\{X \in B\}$ respectivement.

Dans de nombreux cas, notamment dans le cadre de ce document, la tribu associée à l'univers \mathcal{X} est la tribu exhaustive $\mathcal{B} = 2^\mathcal{X}$. Ainsi, il est possible de simplifier les notations en parlant de v.a. définie sur Ω à valeurs dans \mathcal{X} ou uniquement de v.a. à valeurs dans \mathcal{X} . Ceci permet donc, lorsqu'il n'y pas d'ambiguïté, de simplifier les notations en omettant de mentionner les tribus.

Dans la suite de cette annexe, toutes les définitions et théorèmes sont énoncés à partir de variables aléatoires. Toutefois, des énoncés analogues existent en utilisant l'approche ensembliste à partir d'événements.

Définition C.4 (Loi de probabilité d'une v.a. discrète)

Soient (Ω, \mathcal{A}, P) un espace probabilisé et X une v.a. discrète à valeurs dans \mathcal{X} . L'application p_X définie sur \mathcal{X} par

$$p_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}), \forall B \subseteq \mathcal{X},$$

est appelée loi de probabilité ou distribution de la v.a. X . Par abus de langage, $P(X)$ désigne la loi de la v.a. X .

Considérons par exemple la v.a. discrète et finie X à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ dont la loi est définie par

$$P(X = 1) = P(X = 2) = 1/4; P(X = 3) = 1/2.$$

Il est alors possible de représenter cette loi par le vecteur :

$P(X) = p_X$		
X		
1	2	3
1/4	1/4	1/2

Nous abordons à présent la notion de probabilité conditionnelle qui est à la base du formalisme de représentation des modèles graphiques probabilistes.

Définition C.5 (Loi de probabilité conditionnelle discrète)

Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans \mathcal{X} et \mathcal{Y} respectivement. Considérons de plus $B \subseteq \mathcal{Y}$ avec $P(Y \in B) \neq 0$. La loi de probabilité conditionnelle de la v.a. X sachant $\{Y \in B\}$ correspond à la distribution, notée $P(X|Y \in B)$, vérifiant

$$P(X \in A|Y \in B) = \frac{P(X \in A, Y \in B)}{P(Y \in B)}, \forall A \subseteq \mathcal{X}.$$

De plus et par abus de langage, l'application de $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ dans $[0, 1]$ définie par

$$P(X|Y) : \begin{cases} \mathcal{X} \times \mathcal{Y} & \mapsto [0, 1] \\ (x, y) & \mapsto \frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}, P(Y=y) \neq 0 \end{cases} \quad (\text{C.1})$$

est notée $P(X|Y)$.

Définition C.6 (v.a. vectorielle discrète)

Soient X_1, \dots, X_N une suite de v.a. discrètes à valeurs dans $\mathcal{X}_1, \dots, \mathcal{X}_N$ respectivement. Le N -uplet $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N$ est appelé v.a. vectorielle discrète ou vecteur aléatoire discret.

Définition C.7 (Loi jointe discrète)

Soit $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)$ une v.a. vectorielle discrète à valeurs dans $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N$. L'application définie par

$$P(\mathbf{X}) : \begin{cases} \mathcal{X} & \mapsto [0, 1] \\ \mathbf{x} & \mapsto P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) \end{cases},$$

ou de manière équivalente par

$$P(X_1, \dots, X_N) : \begin{cases} \mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N & \mapsto [0, 1] \\ (x_1, \dots, x_N) & \mapsto P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N) \end{cases},$$

est appelée **loi jointe** des variables X_1, \dots, X_N (c-à-d. la loi de la v.a. \mathbf{X}).

Définition C.8 (Marginalisation)

Soient X et Y deux v.a. discrètes à valeurs dans \mathcal{X} et \mathcal{Y} respectivement. Il vient alors par définition :

$$P(X = x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} P(X = x, Y = y), \quad \forall x \in \mathcal{X},$$

ce qui s'écrit également $P(X) = \sum_Y P(X, Y)$. Cette opération est appelée **marginalisation** sur la v.a. X ou **sommation** sur la v.a. Y .

De manière plus générale, soit (X_1, \dots, X_N) un vecteur aléatoire discret à valeurs dans $\mathcal{X}_1 \times \dots \times \mathcal{X}_N$. En considérant le sous vecteur aléatoire $\mathbf{X}_I = (X_i)_{i \in I}$, où $I \subseteq \{1, \dots, N\}$ et $J = \{1, \dots, N\} \setminus I$, nous obtenons

$$P(\mathbf{X}_I = \mathbf{x}_I) = \sum_{\mathbf{x}_J \in \prod_{j \in J} \mathcal{X}_j} P(X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N), \quad \forall I \subseteq \{1, \dots, N\},$$

ce qui s'écrit également $P(\mathbf{X}_I) = \sum_{\mathbf{X}_J} P(X_1, \dots, X_N)$. Il s'agit dans ce cas d'une **marginalisation** sur le vecteur aléatoire \mathbf{X}_J .

Soient X et Y deux v.a. discrètes et finies à valeurs dans $\mathcal{X} = \{1, 2, 3\}$ et $\mathcal{Y} = \{1, 2\}$ respectivement. La loi jointe de X et Y , notée $P(X, Y)$, est donnée par :

$P(X, Y)$						
(X, Y)						
	1	2	3	1	2	3
1	1	1	1	2	2	2
2	1/4	1/12	1/4	0	1/6	1/4

. Les marginalisations sur X et sur Y aboutissent aux deux résultats suivants :

$P(X)$			$P(Y)$	
X			Y	
1	2	3	1	2
1/4	1/4	1/2	7/12	5/12

. De même, en appliquant l'équation (C.1) pour calculer $P(X|Y)$, nous obtenons :

$P(X Y)$			
X			
Y	1	2	3
1	3/7	1/7	3/7
2	0	2/5	3/5

Nous énonçons à présent le théorème de Bayes. Ce dernier est un résultat fondamental dans la théorie des probabilités et est également un outil incontournable de nombreuses méthodes d'inférences dans les modèles graphiques probabilistes.

Théorème C.1 (Bayes)

Soient X et Y deux v.a. discrètes. La loi conditionnelle de la v.a. Y sachant X est donnée par

$$P(Y|X) = \frac{P(X|Y)P(Y)}{P(X)} = \frac{P(X|Y)P(Y)}{\sum_Y P(X, Y)} = \frac{P(X|Y)P(Y)}{\sum_Y P(X|Y)P(Y)}.$$

Ce théorème fondamental, aussi appelé formule d'inversion de Bayes, permet donc d'exprimer la loi de Y conditionnellement à X uniquement en fonction de la loi de X conditionnellement à Y et de la loi de Y . Cette dernière est souvent appelée loi *a priori* de Y .

Théorème C.2 (Bayes généralisé)

Soient X_1, \dots, X_N une suite de v.a. discrètes. La loi jointe des v.a. admet la factorisation suivante :

$$P(X_1, \dots, X_N) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2) \dots P(X_N|X_1, \dots, X_{N-1}).$$

Définition C.9 (Espérance d'une v.a. discrète)

Soit X une v.a. discrète à valeurs dans \mathcal{X} . L'espérance de X , notée $\mathbb{E}[X]$, est définie, sous réserve d'existence, par

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in \mathcal{X}} xP(X = x).$$

De manière plus générale, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)P(X = x),$$

sous réserve que $\mathbb{E}[|g(X)|] = \sum_{x \in \mathcal{X}} |g(x)|P(X = x) < +\infty$.

C.2 Indépendance conditionnelle

La notion d'indépendance conditionnelle se situe au centre du formalisme de la modélisation à partir de modèles graphiques probabilistes. Commençons par définir la notion d'indépendance.

Définition C.10 (Indépendance de deux v.a. discrètes)

Soient X et Y deux v.a. discrètes. X et Y sont dites indépendantes si de manière équivalente

- (i) $P(X|Y) = P(X)$;
- (ii) $P(Y|X) = P(Y)$;
- (iii) $P(X, Y) = P(X)P(Y)$.

Dans ce cas, la notation $X \perp\!\!\!\perp Y$ est utilisée.

Reprenons l'exemple précédent et vérifions si X et Y sont indépendantes. Pour ce faire, il est nécessaire de calculer $P(X)P(Y)$:

$P(X)P(Y)$					
(X, Y)					
1	2	3	1	2	3
1	1	1	2	2	2
7/48	7/48	7/24	0	5/48	5/24

. D'où, $P(X, Y) \neq P(X)P(Y)$ et par conséquent X et Y ne sont pas indépendantes.

Définition C.11 (Indépendance conditionnelle de v.a. discrètes)

Soient X , Y et Z , trois v.a. discrètes. X et Y sont dites indépendantes conditionnellement à Z si de manière équivalente

- (i) $P(X|Y, Z) = P(X|Z)$;
- (ii) $P(Y|X, Z) = P(Y|Z)$;
- (iii) $P(X, Y|Z) = P(X|Z)P(Y|Z)$.

Dans ce cas, la notation $X \perp\!\!\!\perp Y|Z$ est utilisée.

Apprentissage à partir de données incomplètes

D.1 Problématique et notations

Soit X une variable aléatoire discrète et finie à valeurs dans l'ensemble $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_K\}$. Nous supposons que X est distribuée selon la loi $p = (p_k)_{1 \leq k \leq K}$. L'objectif de cette annexe est de présenter une méthode d'apprentissage permettant de calculer une estimation de la loi p , notée $\hat{p} = (\hat{p}_k)_{1 \leq k \leq K}$, à partir de données incomplètes.

Nous supposons dans la suite que les données sont représentées sous forme disjonctive à l'aide d'une matrice de N lignes et K colonnes, notée $\mathbf{D} = (x_{n,k})_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$, où N représente le nombre d'exemples disponibles et K le nombre de valeurs possibles prises par la variable mesurée. Lorsque $x_{n,k} = 1$, cela signifie que la n -ème observation est x_k . La forme disjonctive impose qu'à chaque ligne de la matrice \mathbf{D} , une et une seule colonne contienne le "1". À l'inverse, si $x_{n,k} = 0$, cela indique que la n -ème observation ne prend pas la valeur x_k . Toutefois, il arrive dans certaines situations que la valeur prise par un individu ne soit pas connue avec précision. Dans les cas favorables, des informations permettent d'exclure certaines valeurs réduisant ainsi l'incertitude. En pratique, cela se traduit par une impossibilité de placer le "1" sur la ligne à une donnée dans la matrice \mathbf{D} . Aussi, la notation "?" est introduite de manière à indiquer explicitement les colonnes possibles dans lesquelles se trouve la valeur réelle. Lorsqu'il existe au moins deux $k, k' \in \{1, \dots, K\}$ distincts tels que $x_{n,k} = x_{n,k'} = ?$, la n -ème donnée est dite incomplète ou partiellement observée.

La table D.1 donne un exemple de base de données composée de $N = 10$ mesures indépendantes de la variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, autrement dit avec $K = 4$. Les cinq premières mesures sont complètes alors que les cinq dernières sont incomplètes.

Il existe plusieurs types de données incomplètes remarquables. Quatre formes particulières sont détaillées dans la suite.

n	X			
	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	0	1
2	0	1	0	0
3	0	1	0	0
4	1	0	0	0
5	0	0	1	0
6	?	?	?	0
7	0	?	?	?
8	0	?	?	0
9	?	?	?	?
10	?	0	?	0

TAB. D.1 – Une base de $N = 10$ mesures indépendantes d’une variable aléatoire X à valeurs dans $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

1. Censure à gauche : la n -ème donnée est censurée à gauche à la valeur $x_{k'}$ si pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$x_{n,k} = \begin{cases} ? & \text{si } k \leq k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Dans la table D.1, seule la sixième mesure est censurée à gauche à la valeur x_3 .

2. Censure à droite : la n -ème donnée est censurée à droite à la valeur $x_{k'}$ si pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$x_{n,k} = \begin{cases} ? & \text{si } k \geq k' \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \quad (\text{D.1})$$

Dans la table D.1, seule la septième mesure est censurée à droite à la valeur x_2 .

3. Censure par intervalle : la n -ème donnée est censurée par intervalle entre les valeurs x_{k_1} et x_{k_2} si pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$x_{n,k} = \begin{cases} ? & \text{si } k_1 \leq k \leq k_2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Dans la table D.1, seule la huitième mesure est censurée par intervalle entre x_2 et x_3 .

4. Donnée manquante : la n -ème donnée est manquante si pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $x_{n,k} = ?$. Dans la table D.1, seule la neuvième mesure est manquante.

La dernière mesure de la table D.1 est partiellement observée sans pour autant présenter une forme remarquable.

Nous terminons cette partie en introduisant l’ensemble des informations disponibles $\mathcal{D} = \{x_{n,k}\}_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$. Notons que l’ensemble \mathcal{D} contient la même information que la matrice \mathbf{D} . Cet ensemble permet néanmoins de construire une partition des informations composée

de l'ensemble des informations observées $\mathcal{D}^o = \{x_{n,k} \in \mathcal{D} | x_{n,k} = 1 \text{ ou } x_{n,k} = 0\}$ et de l'ensemble des informations manquantes $\mathcal{D}^m = \{x_{n,k} \in \mathcal{D} | x_{n,k} = ?\}$. Nous posons de plus $\mathcal{N}^I = \{n \in \{1, \dots, N\} | x_{n,k} \in \mathcal{D}^m\}$, l'ensemble des indices associées aux données partiellement observées et $\mathcal{N}^C = \{1, \dots, N\} \setminus \mathcal{N}^I$, l'ensemble des indices associées aux données complètes. Nous en déduisons les deux matrices $\mathbf{D}^C = (x_{n,k})_{\substack{n \in \mathcal{N}^C \\ 1 \leq k \leq K}}$ et $\mathbf{D}^I = (x_{n,k})_{\substack{n \in \mathcal{N}^I \\ 1 \leq k \leq K}}$ représentant respectivement les données complètes et les données incomplètes. Il est intéressant de souligner la différence d'informations contenues dans l'ensemble \mathcal{D}^o et la matrice \mathbf{D}^C en général. Contrairement à l'ensemble \mathcal{D}^o , la matrice \mathbf{D}^C ne contient pas les informations avérées concernant les données incomplètes (position des "0"). Toutefois, cela devient le cas lorsque les données incomplètes sont constituées uniquement de données manquantes.

D.2 Méthode EM

Nous supposons à présent que la probabilité qu'une donnée soit incomplète dépende uniquement des informations observées, c'est-à-dire en termes probabilistes lorsque $P(\mathcal{N}^I | \mathcal{D}) = P(\mathcal{N}^I | \mathcal{D}^o)$. Nous nous plaçons alors dans le cadre des données dites MAR (*Missing At Random*, Rubin (1976)). Soit X une variable aléatoire discrète et finie à valeurs dans $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_K\}$ de loi $p = (p_k)_{1 \leq k \leq K}$. Considérons également $\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{n,k})_{\substack{1 \leq n \leq N \\ 1 \leq k \leq K}}$ une base de N réalisations i.i.d. issues de la variable aléatoire X . Dans les paragraphes suivants, nous détaillons le principe de l'algorithme EM (Hartley (1958), Dempster et al. (1977)) dans le cadre d'utilisation pour l'estimation de la loi discrète et finie $p = (p_k)_{1 \leq k \leq K}$ lorsque les observations disponibles sont de type MAR.

Posons $l(\mathbf{D} | p) = l(\mathbf{D}^C, \mathbf{D}^I | p)$ la log-vraisemblance des données. D'après l'hypothèse i.i.d., Nous avons

$$\begin{aligned}
 l(\mathbf{D}^C, \mathbf{D}^I | p) &= \ln(P(\mathbf{D}^C, \mathbf{D}^I | p)) \\
 &= \ln(P(\mathbf{D}^C | p)) + \ln(P(\mathbf{D}^I | p)) \\
 &= \sum_{n \in \mathcal{N}^C} \sum_{k=1}^K x_{n,k} \ln(p_k) + \sum_{n \in \mathcal{N}^I} \ln \left(\sum_{k | x_{n,k} \neq 0} p_k \right) \\
 &= \sum_{k=1}^K \underbrace{\sum_{n \in \mathcal{N}^C} x_{n,k}}_{=N_k^{\text{obs}}} \ln(p_k) + \sum_{n \in \mathcal{N}^I} \ln \left(\sum_{k | x_{n,k} \neq 0} p_k \right) \\
 l(\mathbf{D}^C, \mathbf{D}^I | p) &= \underbrace{\sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k)}_{\text{vraisemblance des données complètes}} + \underbrace{\sum_{n \in \mathcal{N}^I} \ln \left(\sum_{k | x_{n,k} \neq 0} p_k \right)}_{\text{vraisemblance des données incomplètes}},
 \end{aligned}$$

où N_k^{obs} désigne le nombre d'occurrences de la valeur x_k dans les données complètes. L'expression de la vraisemblance des données incomplètes ne permet pas de déduire une

expression analytique des paramètres \hat{p} maximisant la vraisemblance totale. Ce verrou justifie l'utilisation d'une alternative aux méthodes d'optimisation directes

Le principe de l'algorithme EM consiste dans un premier temps à introduire la matrice des données complétées, notée $\mathbf{D}^{\text{I}+}$, définie pour tout $n \in \mathcal{N}^{\text{I}}$ et tout $k \in \{1, \dots, K\}$ par

$$[\mathbf{D}^{\text{I}+}]_{n,k} = \begin{cases} z_{n,k} & \text{si } x_{n,k} \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

où chaque $z_{n,k}$ est une variable aléatoire de Bernoulli (donc à valeurs dans $\{0, 1\}$) vérifiant pour tout $n \in \mathcal{N}^{\text{I}}$, $\sum_k z_{n,k} = 1$. En d'autres termes, construire $\mathbf{D}^{\text{I}+}$ revient simplement à remplacer les éléments inconnus de la matrice des données incomplètes \mathbf{D}^{I} par des variables aléatoires. La matrice $\mathbf{D}^{\text{I}+}$ est donc une variable aléatoire, tout comme la quantité $l(\mathbf{D}^{\text{C}}, \mathbf{D}^{\text{I}+} | p, \mathcal{D}^{\circ})$, appelée vraisemblance complétée, qui a pour expression

$$l(\mathbf{D}^{\text{C}}, \mathbf{D}^{\text{I}+} | p, \mathcal{D}^{\circ}) = \sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \sum_{n \in \mathcal{N}^{\text{I}}} \sum_{k | x_{n,k} \neq 0} z_{n,k} \ln(p_k) \quad (\text{D.2})$$

Remarquons à présent qu'en se fixant une loi de référence $p^* = (p_k^*)_{1 \leq k \leq K}$, il est possible de calculer la distribution des données incomplètes, c'est-à-dire des $z_{n,k}$, notée $P(\mathbf{D}^{\text{I}+} | p^*, \mathcal{D}^{\circ}) = P((z_{n,k})_{n \in \mathcal{N}^{\text{I}}, k | x_{n,k} \neq 0} | p^*, \mathcal{D}^{\circ})$. Précisément, pour tout $n \in \mathcal{N}^{\text{I}}$ et tout k tel que $x_{n,k} \neq 0$, nous avons

$$P(z_{n,k} = 1 | p^*, \mathcal{D}^{\circ}) = \frac{p_k^*}{\sum_{\ell | x_{n,\ell} \neq 0} p_{n,\ell}^*}. \quad (\text{D.3})$$

Rappelons que la vraisemblance complétée (cf. équation (D.2)) est une variable aléatoire qui, en l'état, ne permet pas la déduction de résultats numériques utilisables en pratique. De manière à contourner cette difficulté, le calcul d'espérance suivant est réalisé :

$$Q(p, p^*) = E_{p^*} [l(\mathbf{D}^{\text{C}}, \mathbf{D}^{\text{I}+} | p, \mathcal{D}^{\circ})]. \quad (\text{D.4})$$

$Q(p, p^*)$ correspond à l'espérance de la vraisemblance complétée d'une loi p quelconque que nous pouvons calculer à partir de la distribution des données incomplètes. De l'équation (D.4), nous construisons la suite $(p^{(i)})_{i \geq 1}$ définie par

$$(p^{(i)}) = \begin{cases} p^{(1)} & \text{donné} \\ p^{(i+1)} = \arg \max_p Q(p, p^{(i)}) & i \geq 2 \end{cases}. \quad (\text{D.5})$$

La méthode EM repose sur le fait que la suite $(p^{(i)})_{i \geq 1}$ converge vers un maximum local de la vraisemblance $l(\mathbf{D}^{\text{C}}, \mathbf{D}^{\text{I}} | p)$ du jeu de données original. Ce résultat permet de déduire le schéma itératif suivant :

1. Choisir une loi initiale $p^{(1)}$.
2. Tant que la suite $(p^{(i)})$ n'a pas convergé :
 - (a) Étape E - Évaluer l'espérance $Q(p, p^{(i)}) = E_{p^{(i)}} [l(\mathbf{D}^{\text{C}}, \mathbf{D}^{\text{I}+} | p, \mathcal{D}^{\circ})]$.
 - (b) Étape M - Trouver la loi $p^{(i+1)}$ telle que $p^{(i+1)} = \arg \max_p Q(p, p^{(i)})$.

Le schéma précédent présente une vision relativement générale de la méthode EM. Dans le cadre de la problématique considérée dans cette annexe, il est possible de détailler les calculs des étapes E et M. D'après l'expression de la log-vraisemblance complétée (cf. équation (D.2)), l'équation (D.4) se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
Q(p, p^*) &= E_{p^*} \left[\sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \sum_{n \in \mathcal{N}^I} \sum_{k | x_{n,k} \neq 0} z_{n,k} \ln(p_k) \right] \\
&= \sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \sum_{n \in \mathcal{N}^I} \sum_{k | x_{n,k} \neq 0} E_{p^*} [z_{n,k}] \ln(p_k) \\
&= \sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}^I | x_{n,k} \neq 0} E_{p^*} [z_{n,k}] \ln(p_k) \\
&= \sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}^I | x_{n,k} \neq 0} P(z_{n,k} = 1 | p^*, \mathcal{D}^o) \ln(p_k) \\
Q(p, p^*) &= \sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} \ln(p_k) + \underbrace{\sum_{k=1}^K \sum_{n \in \mathcal{N}^I | x_{n,k} \neq 0} \left[\frac{p_k^*}{\sum_{\ell | x_{n,\ell} \neq 0} p_{n,\ell}^*} \right]}_{= N_k^{\text{esp}}} \ln(p_k),
\end{aligned}$$

où N_k^{esp} s'interprète comme le nombre d'occurrences espérées de la valeur x_k dans les données incomplètes. Nous obtenons donc au final

$$Q(p, p^*) = \sum_{k=1}^K [N_k^{\text{obs}} + N_k^{\text{esp}}] \ln(p_k).$$

L'équation (D.2) est identique à l'expression d'une log-vraisemblance associée à des données complètes. Par conséquent, trouver la loi $\hat{p} = (\hat{p}_k)_{1 \leq k \leq K}$ maximisant $Q(p, p^*)$ est définie pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ par

$$\hat{p}_k = \frac{N_k^{\text{obs}} + N_k^{\text{esp}}}{\sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} + N_k^{\text{esp}}}.$$

En conclusion, dans le cadre de cette étude, le schéma itératif EM se ramène à :

1. Calculer les effectifs de chaque valeur x_k dans les données complètes :

$$N_k^{\text{obs}} = \sum_{n \in \mathcal{N}^C} x_{n,k}$$

2. Choisir une loi initiale $p^{(1)}$.
3. Tant que la suite $(p^{(i)})$ n'a pas convergé :

- (a) Étape E - Évaluer les effectifs espérés de chaque valeur x_k dans les données incomplètes :

$$N_k^{\text{esp}} = \sum_{n \in \mathcal{N}^I | x_{n,k} \neq 0} \left[\frac{p_k^{(i)}}{\sum_{\ell | x_{n,\ell} \neq 0} p_{n,\ell}^{(i)}} \right].$$

(b) Étape M - En déduire $p^{(i+1)}$ telle que pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$:

$$p_k^{(i+1)} = \frac{N_k^{\text{obs}} + N_k^{\text{esp}}}{\sum_{k=1}^K N_k^{\text{obs}} + N_k^{\text{esp}}}.$$

D.3 Applications

D.3.1 Exemple simple

L'objectif des paragraphes suivants est d'illustrer les étapes de la méthode EM sur les données présentées dans la table D.1. Dans cet exemple, nous avons

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & ? & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{D}^{\text{C}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{D}^{\text{I}} = \begin{bmatrix} ? & ? & ? & 0 \\ 0 & ? & ? & ? \\ 0 & ? & ? & 0 \\ ? & ? & ? & ? \\ ? & 0 & ? & 0 \end{bmatrix}.$$

Les effectifs des données complètes sont $N_1^{\text{obs}} = 1$, $N_2^{\text{obs}} = 2$, $N_3^{\text{obs}} = 1$ et $N_4^{\text{obs}} = 1$. Détaillons à présent les étapes de la méthode sur deux itérations.

1. Initialisons l'algorithme avec la loi $p^{(1)} = [p_1^{(1)}, p_2^{(1)}, p_3^{(1)}, p_4^{(1)}] = [1/4, 1/4, 1/4, 1/4]$.
2. Itération 1.

(a) Étape E - Estimation des données incomplètes :

$$E_{p^{(1)}}[\mathbf{D}^{\text{I}^+}] \approx \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^{\text{esp}} \approx [1.0933, 1.4167, 1.9167, 0.5833].$$

(b) Étape M - Calcul de la loi courante :

$$p^{(2)} \approx [0.2083, 0.3417, 0.2917, 0.1583].$$

3. Itération 2.

(a) Étape E - Estimation des données incomplètes :

$$E_{p^{(2)}} [\mathbf{D}^{I^+}] \approx \begin{bmatrix} 0.2475 & 0.4059 & 0.3465 & 0 \\ 0 & 0.4316 & 0.3684 & 0.2000 \\ 0 & 0.5395 & 0.4605 & 0 \\ 0.2083 & 0.3417 & 0.2917 & 0.1583 \\ 0.4167 & 0 & 0.5833 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^{\text{esp}} \approx [0.8725, 1.7187, 2.0505, 0.3583].$$

(b) Étape M - Calcul de la loi courante :

$$p^{(3)} \approx [0.1873, 0.3719, 0.3050, 0.1358].$$

4. À l'itération 20, l'erreur absolue entre les deux dernières estimations de la loi p est inférieure à 10^{-6} . Nous considérons que l'algorithme a convergé, en obtenant les résultats suivants :

$$E_{p^{(19)}} [\mathbf{D}^{I^+}] \approx \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow N^{\text{esp}} \approx [0, 4, 1, 0] \Rightarrow p^{(20)} \approx [0.1, 0.6, 0.2, 0.1].$$

D.3.2 Estimation d'une loi de durée

Il s'agit à présent d'appliquer l'approche décrite dans cette annexe à l'estimation d'une loi de durée en présence de données censurées à droite. Cette problématique est soulevée dans la partie 4.3.4 de la thèse. Soit S une variable aléatoire discrète et finie représentant une durée. La variable aléatoire S suit une loi $F \in \mathcal{L}^{\{S\}}$, avec $\mathcal{S} = \{1, \dots, T_S\}$ l'ensemble des durées possibles. Nous supposons que les données disponibles arrivent sous la forme suivante :

- N_s : Nombre d'observations de la durée s ;
- N_s^+ : Nombre d'observations d'une censure à droite à la durée s , avec $s \leq T_S - 1$.

Tout d'abord, il faut remarquer que les quantités N_1, N_2, \dots sont identiques aux effectifs $N_1^{\text{obs}}, N_2^{\text{obs}}, \dots$ de la méthode EM et sont par conséquent directement utilisables. En revanche, les effectifs des durées censurées à droite demandent quelques manipulations avant de pouvoir être utilisés dans l'algorithme. Considérons dans un premier temps l'exemple simple où $T_S = 4$, et $N_1^+ = 1$, $N_2^+ = 3$ et $N_3^+ = 2$. D'après la définition d'une censure à droite (cf. équation (D.1)), la matrice des données incomplètes correspondante est donnée par :

	S			
	1	2	3	4
$N_1^+ = 1$?	?	?	?
$N_2^+ = 3$	0	?	?	?
	0	?	?	?
	0	?	?	?
$N_3^+ = 2$	0	0	?	?
	0	0	?	?

Par conséquent à l'itération i de l'algorithme, les effectifs espérés N_1^{esp} , N_2^{esp} , N_3^{esp} et N_4^{esp} vérifient

$$\begin{aligned}
 N_1^{\text{esp}} &= N_1^+ \frac{F^{(i)}(1)}{F^{(i)}(1) + F^{(i)}(2) + F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)}, \\
 N_2^{\text{esp}} &= N_1^+ \frac{F^{(i)}(2)}{F^{(i)}(1) + F^{(i)}(2) + F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)} + N_2^+ \frac{F^{(i)}(2)}{F^{(i)}(2) + F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)}, \\
 N_3^{\text{esp}} &= N_1^+ \frac{F^{(i)}(3)}{F^{(i)}(1) + F^{(i)}(2) + F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)} + N_2^+ \frac{F^{(i)}(3)}{F^{(i)}(2) + F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)} \\
 &\quad + N_3^+ \frac{F^{(i)}(3)}{F^{(i)}(3) + F^{(i)}(4)},
 \end{aligned}$$

et notons que le dernier effectif peut s'exprimer en fonction de N_3^{esp} , $F^{(i)}(3)$ et $F^{(i)}(4)$ comme suit :

$$N_4^{\text{esp}} = \frac{F^{(i)}(4)}{F^{(i)}(3)} N_3^{\text{esp}}.$$

Il est alors possible de généraliser ces résultats pour tout $s \in \{1, \dots, T_S\}$ de la façon suivante :

$$N_s^{\text{esp}} = \begin{cases} F^{(i)}(s) \sum_{s'=1}^s \left[\frac{N_{s'}^+}{\sum_{s''=s'}^{T_S} F^{(i)}(s'')} \right] & \text{si } s \leq T_S \\ \frac{F^{(i)}(T_S)}{F^{(i)}(T_S - 1)} N_{T_S - 1}^{\text{esp}} & \text{si } s = T_S \end{cases}. \quad (\text{D.6})$$

En conclusion, l'estimation des lois de temps de séjour décrites dans la partie 4.3.4 ont été estimées en pratique par la méthode EM décrite dans les paragraphes précédents. Le calcul (D.6) a été utilisé de manière à obtenir les effectifs espérés de chaque temps de séjour censuré à partir des données disponibles.

Démonstrations

E.1 Démonstrations du chapitre 1

Démonstration (Proposition 1.1)

Soit $c > 0$ le coût algorithmique d'une addition ou d'une multiplication entre deux réels. Par définition la somme ou produit de deux potentiels $\pi_1 \in \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ et $\pi_2 \in \mathbb{R}^{\mathcal{Y}}$ nécessite respectivement $|(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^*|$ additions ou multiplications entre deux réels. Par conséquent, le coût algorithmique de telles opérations est de

$$CA(\pi') = |(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^*|c = \mathcal{O}(|(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y})^*|) = CS(\pi').$$

□

Démonstration (Proposition 1.2)

Soit $c > 0$ le coût algorithmique associé à une addition entre deux réels. Par définition de la marginalisation, pour chaque $\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'^*$, le calcul de $\pi'(\mathbf{x}')$ nécessite $|(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}')^*| - 1$ additions. Le coût algorithmique total du calcul de π' vaut donc

$$\begin{aligned} CA(\pi') &= |\mathcal{X}^*|(|(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}')^*| - 1)c \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}^*| |(\mathcal{X} \setminus \mathcal{X}')^*|) \\ &= \mathcal{O}(|(\mathcal{X} \cup \mathcal{X}' \setminus \mathcal{X}')^*|) \\ CA(\pi') &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}^*|) = CS(\pi). \end{aligned}$$

□

Démonstration (Théorème 1.1)

Soit $\mathcal{W} \subsetneq \mathcal{X}$. En considérant p uniquement comme un potentiel, alors $q = \sum_{\mathcal{W}} p \in [0, 1]^{(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \setminus \mathcal{W}}$ par définition de la sommation. Par ailleurs comme p est également une LPC, les domaines \mathcal{X} et \mathcal{Y} sont disjoints, d'où

$$(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \setminus \mathcal{W} = (\mathcal{X} \setminus \mathcal{W}) \cup \mathcal{Y} = \mathcal{X}' \cup \mathcal{Y}.$$

Il s'agit à présent de vérifier que sur le domaine \mathcal{X}' , le potentiel q somme à un. Or pour tout $(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \in (\mathcal{Y} \cup \mathcal{X}')^*$,

$$q(\mathbf{y}, \mathbf{x}') = \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} p(\mathbf{w}, \mathbf{x}' | \mathbf{y}).$$

Par conséquent, pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{Y}^*$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'^*} q(\mathbf{y}, \mathbf{x}') &= \int_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'^*} \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} p(\mathbf{w}, \mathbf{x}' | \mathbf{y}) \\ &= \int_{(\mathbf{x}', \mathbf{w}) \in (\mathcal{W} \cup \mathcal{X}')^*} p(\mathbf{w}, \mathbf{x}' | \mathbf{y}) \\ \int_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}'^*} q(\mathbf{y}, \mathbf{x}') &= \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 1. \end{aligned}$$

D'où $q \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}' | \mathcal{Y}}$.

□

Démonstration (Théorème 1.2)

D'après la définition du produit de deux potentiels, $(p \cdot q) \in [0, 1]^{\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}' \cup \mathcal{W} \cup \mathcal{Z}}$ puisque on a posé $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \setminus \mathcal{W}$. Il reste donc à vérifier que sur le domaine $\mathcal{X} \cup \mathcal{W}$, le potentiel $(p \cdot q)$ somme à un. Nous avons donc pour tout $(\mathbf{y}', \mathbf{z}) \in (\mathcal{Y}' \cup \mathcal{Z})^*$,

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in (\mathcal{X} \cup \mathcal{W})^*} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}') q(\mathbf{w} | \mathbf{z}) &= \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} \int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}', \mathbf{w}') q(\mathbf{w} | \mathbf{z}) \\ &= \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} q(\mathbf{w} | \mathbf{z}) \underbrace{\int_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}^*} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}', \mathbf{w})}_{=1} \\ &\quad \text{car } \mathcal{X} \cap (\mathcal{W} \cup \mathcal{Z}) = \emptyset \\ \int_{(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \in (\mathcal{X} \cup \mathcal{W})^*} p(\mathbf{x} | \mathbf{y}') q(\mathbf{w} | \mathbf{z}) &= \int_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}^*} q(\mathbf{w} | \mathbf{z}) = 1. \end{aligned}$$

D'où $(p \cdot q) \in \mathcal{L}^{\mathcal{X} \cup \mathcal{W} | \mathcal{Y}' \cup \mathcal{Z}}$.

□

E.2 Démonstrations du chapitre 2

Démonstration (Proposition 2.1)

Démontrons cette proposition par récurrence sur t . Pour $t = 1$, le résultat s'obtient immédiatement en appliquant la propriété de factorisation à la loi initiale d'un MGD. En effet, pour tout $x \in \mathcal{X}$, tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$, $\Phi_1^{\Upsilon}(x, s, a)$ vérifie

$$\begin{aligned}\Phi_1^{\Upsilon}(x, s, a) &= P(X_1 = x, S_1 = s, A_1 = a) \\ &= \Phi_1(x, s, a) \\ \Phi_1^{\Upsilon}(x, s, a) &= \alpha_1(x)F_1(x, s)G_1(x, a).\end{aligned}$$

Pour $t \geq 2$, la démonstration repose essentiellement sur la propriété de l'interface gauche et sur la propriété de factorisation appliquée à la loi de transition d'un MGD. Pour tout $t \geq 2$, tout $x \in \mathcal{X}$, tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$, nous avons par définition :

$$\begin{aligned}\Phi_t^{\Upsilon}(x, s, a) &= P(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{t-1}, X_t = x, S_t = s, A_t = a) \\ &= P(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{t-1}) \underbrace{P(X_t = x, S_t = s, A_t = a | \Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{t-1})}_{= P(X_t=x, S_t=s, A_t=a | \Upsilon_{t-1}) \text{ d'après l'hypothèse markovienne d'ordre un}} \\ &= \sum_{\substack{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \\ s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}}} \underbrace{P(\Upsilon_1, \dots, \Upsilon_{t-2}, X_{t-1} = a', S_{t-1} = s', A_{t-1} = a')}_{= \Phi_{t-1}^{\Upsilon}(x', s', a') \text{ par hypothèse de récurrence}} \\ &\quad P(X_t = x, S_t = s, A_t = a | X_{t-1} = a', S_{t-1} = s', A_{t-1} = a') \\ &= \sum_{\substack{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \\ s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}}} \Phi_{t-1}^{\Upsilon}(x', s', a') \\ &\quad \underbrace{P(X_t = x, S_t = s, A_t = a | X_{t-1} = a', S_{t-1} = s', A_{t-1} = a')}_{= Q^{\rightarrow}(x', s', a', x)F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s)G_t(x, a) \text{ d'après l'équation (2.3) et la partie 2.3}} \\ \Phi_t^{\Upsilon}(x, s, a) &= G_t(x, a) \sum_{\substack{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \\ s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}}} \Phi_{t-1}^{\Upsilon}(x', s', a') Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s),\end{aligned}$$

ce qui achève la récurrence.

□

Démonstration (Proposition 2.2)

Lorsque $t = 1$, le calcul $\Phi_t^{\mathbf{r}}$ nécessite le produit des trois LPC $\alpha_1 \in \mathcal{L}^{\mathcal{X}}$, $F_1 \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{S}\}_1|\{\mathcal{X}\}_1}$ et $G_1 \in \mathcal{L}^{\mathcal{A}_1|\{\mathcal{X}\}_1}$. Nous avons donc

$$\Phi_1^{\mathbf{r}} = \underbrace{\alpha_1 \cdot F_1}_{=\pi^{(1)} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_1}} \cdot G_1.$$

$$=\pi^{(2)} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}\}_1}$$

D'après la proposition 1.1, $CA(\pi^{(1)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S)$ et $CA(\pi^{(2)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S|\mathcal{A}|)$, d'où la complexité algorithmique du calcul $\Phi_1^{\mathbf{r}}$ donnée par

$$CA(\Phi_1^{\mathbf{r}}) = CA(\pi^{(1)}) + CA(\pi^{(2)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S|\mathcal{A}|).$$

Lorsque $t \geq 2$, le calcul de $\Phi_t^{\mathbf{r}}$, $t \geq 2$, se décompose de la façon suivante :

$$\Phi_t^{\mathbf{r}} = G_t \underbrace{\sum_{\{\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{S}}, \tilde{\mathcal{A}}\}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{r}} \cdot \underbrace{Q^{\rightarrow} \cdot F^{\rightarrow}}_{=\pi^{(1)} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t|\{\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}\}_{t-1}}}}_{=\pi^{(2)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t}}}_{=\pi^{(3)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}, \mathcal{A}\}_t}},$$

avec $CA(\pi^{(1)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S)$, $CA(\pi^{(2)}) = \mathcal{O}(|\tilde{\mathcal{X}}_{t-1}||\mathcal{X}||\tilde{\mathcal{S}}_{t-1}|T_S||\tilde{\mathcal{A}}_{t-1}|)$, et $CA(\pi^{(3)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}||T_S||\mathcal{A}|)$. D'où,

$$\begin{aligned} CA(\Phi_t^{\mathbf{r}}) &= CA(\pi^{(1)}) + CA(\pi^{(2)}) + CA(\pi^{(3)}) \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|T_S) + \mathcal{O}(|\tilde{\mathcal{X}}_{t-1}||\mathcal{X}||\tilde{\mathcal{S}}_{t-1}|T_S||\tilde{\mathcal{A}}_{t-1}|) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}||T_S||\mathcal{A}|) \\ CA(\Phi_t^{\mathbf{r}}) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S^2 |\mathcal{A}|), \end{aligned}$$

en se plaçant dans le pire des cas d'un point de vue algorithmique, à savoir lorsque $\tilde{\mathcal{X}}_{t-1} = \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{t-1} = \mathcal{S}$ et $\tilde{\mathcal{A}}_{t-1} = \mathcal{A}$.

□

Démonstration (Proposition 2.3)

La preuve de cette proposition s'obtient en décomposant la sommation sur $\tilde{\mathcal{X}}_t$, $\tilde{\mathcal{S}}_t$ et $\tilde{\mathcal{A}}_t$ de l'équation (2.20) selon les trois sous-domaines de définition caractérisant les LPC Q^{\rightarrow} et F^{\rightarrow} . On distingue donc les cas suivants :

- $a' \in \mathcal{A}^{\bar{X}}$ et $s' = 1$ (transition naturelle);
- $a' \in \mathcal{A}_t^{\bar{X}}$ et $s' \geq 2$ (transition déterministe);
- $a' \in \mathcal{A}_t^X$ (transition artificielle).

Appliquons donc cette décomposition à l'équation (2.20), ce qui donne pour tout $x \in \mathcal{X}$,

tout $s \in \mathcal{S}$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\frac{\Phi_t^{\mathbf{Y}}(x, s, a)}{G_t(x, a)} &= \sum_{\substack{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1} \\ s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \\ a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) \\
&= \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \mathbb{I}(s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}) \mathbb{I}(s' = 1) \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') \times \\
&\quad Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) + \\
&\quad \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \setminus \{1\}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') \times \\
&\quad Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) + \\
&\quad \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') \times \\
&\quad Q^{\rightarrow}(x', s', a', x) F^{\rightarrow}(x', s', a', x, s) \\
&= \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \mathbb{I}(1 \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}) \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', 1, a') Q^{\text{sys}}(x', x) F^{\text{sys}}(x', x, s) + \\
&\quad \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \setminus \{1\}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') I(x', x) C(s', s) + \\
&\quad \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}} \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') Q^{\text{act}}(x', a', x) F^{\text{sys}}(x', x, s) \\
&= \underbrace{\mathbb{I}(1 \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}) \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} Q^{\text{sys}}(x', x) F^{\text{sys}}(x', x, s) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', 1, a') +}_{=\Psi_t^{\text{sys}}(x, s)} \\
&\quad \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \setminus \{1\}} \mathbb{I}(s' = s + 1) \sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a') \mathbb{I}(x' = x) + \\
&\quad \underbrace{\sum_{x' \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}} F^{\text{sys}}(x', x, s) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} Q^{\text{act}}(x', a', x) \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x', s', a')}_{=\Psi_t^{\text{act}}(x, s)} \\
&= \Psi_t^{\text{sys}}(x, s) + \Psi_t^{\text{act}}(x, s) + \\
&\quad \mathbb{I}(x \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \sum_{s' \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1} \setminus \{1\}} \mathbb{I}(s' = s + 1) \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x, s', a') \\
\frac{\Phi_t^{\mathbf{Y}}(x, s, a)}{G_t(x, a)} &= \Psi_t^{\text{sys}}(x, s) + \Psi_t^{\text{act}}(x, s) + \\
&\quad \underbrace{\mathbb{I}(x \in \tilde{\mathcal{X}}_{t-1}) \mathbb{I}(2 \leq s + 1 \leq T_S) \mathbb{I}(s \in \tilde{\mathcal{S}}_{t-1}) \sum_{a' \in \tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{Y}}(x, s + 1, a')}_{=\Psi_t^{\text{det}}}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Démonstration (Proposition 2.4)

L'étude de la complexité algorithmique du calcul de $\Phi_t^{\mathbf{r}}$, $t \geq 2$ présenté dans la proposition 2.3 revient dans un premier temps à étudier la complexité des calculs de Ψ_t^{sys} , Ψ_t^{det} et Ψ_t^{act} . Plaçons nous dans le pire des cas d'un point de vue algorithmique, à savoir lorsque $\tilde{\mathcal{X}}_{t-1} = \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{S}}_{t-1} = \mathcal{S}$, $\tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^X = \mathcal{A}^X$ et $\tilde{\mathcal{A}}_{t-1}^{\bar{X}} = \mathcal{A}^{\bar{X}}$. Pour Ψ_t^{sys} , nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \Psi_t^{\text{sys}} &= \underbrace{\sum_{\{\mathcal{X}\}_{t-1}} Q^{\text{sys}} \cdot F^{\text{sys}}}_{= v^{(1)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t}} \cdot \underbrace{\sum_{\{\mathcal{A}^{\bar{X}}\}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{r}}(\cdot, \{1\}, \mathcal{A}^{\bar{X}})}_{= v^{(2)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}\}_{t-1}}} \\ &= \underbrace{\quad}_{= v^{(3)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t}} \end{aligned}$$

avec $CA(v^{(1)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S)$, $CA(v^{(2)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| |\mathcal{A}^{\bar{X}}|)$ et $CA(v^{(3)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S)$. D'où

$$CA(\Psi_t^{\text{sys}}) = CA(v^{(1)}) + CA(v^{(2)}) + CA(v^{(3)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S + |\mathcal{X}| |\mathcal{A}^{\bar{X}}|).$$

Pour ce qui est du calcul Ψ_t^{det} , seule la sommation sur $\mathcal{A}_t^{\bar{X}}$ possède un coût algorithmique non négligeable. Nous avons en effet

$$\Psi_t^{\text{det}} = \underbrace{\sum_{\{\mathcal{A}^{\bar{X}}\}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{r}}(\cdot, \mathcal{S}_{t-1} \setminus \{1\}, \mathcal{A}^{\bar{X}})}_{\in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S} \setminus \{T_S\}\}_t}}$$

D'où,

$$CA(\Psi_t^{\text{det}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}^{\bar{X}}|).$$

Enfin, le calcul de Ψ_t^{act} se décompose comme suit :

$$\begin{aligned} \Psi_t^{\text{act}} &= \sum_{\{\mathcal{X}\}_{t-1}} F^{\text{sys}} \cdot \underbrace{\sum_{\{\mathcal{A}^X\}_{t-1}} Q^{\text{act}} \cdot \sum_{\{\mathcal{S}\}_{t-1}} \Phi_{t-1}^{\mathbf{r}}(\cdot, \cdot, \mathcal{A}^X)}_{= w^{(1)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{A}^X\}_{t-1}}} \\ &= \underbrace{\quad}_{= w^{(2)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t}} \\ &= \underbrace{\quad}_{= w^{(3)} \in [0,1]^{\{\mathcal{X}, \mathcal{S}\}_t}} \end{aligned}$$

avec $CA(w^{(1)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}^X|)$, $CA(w^{(2)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}^X|)$ et $CA(w^{(3)}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S)$ et par conséquent

$$CA(\Psi_t^{\text{act}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}^X| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}^X| + |\mathcal{X}|^2 T_S).$$

La somme de Ψ_t^{sys} , Ψ_t^{det} et Ψ_t^{act} a un coût algorithmique de l'ordre :

$$\begin{aligned} CA(\Psi_t^{\text{sys}} + \Psi_t^{\text{det}} + \Psi_t^{\text{act}}) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 T_S + |\mathcal{X}| |\mathcal{A}^{\bar{X}}|) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}^{\bar{X}}|) + \\ &\quad \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}^X| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}^X| + |\mathcal{X}|^2 T_S) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S) \end{aligned}$$

$$CA(\Psi_t^{\text{sys}} + \Psi_t^{\text{det}} + \Psi_t^{\text{act}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 T_S).$$

Pour finir, le produit par G_t a une complexité en $\mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}|)$ et on en déduit la complexité du calcul de $\Phi_t^{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned} CA(\Phi_t^{\mathbf{r}}) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 T_S) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}|) \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}| T_S |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 |\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2 T_S). \end{aligned}$$

□

E.3 Démonstrations du chapitre 3

Démonstration (Proposition 3.1)

L'objectif de cette démonstration consiste à calculer l'expression de la LPC $G_t = P(A_t|\mathbf{X}_t)$ dans un modèle VIRMALAB. Les relations de dépendance sous-jacentes à ce modèle au sein d'une même tranche t (cf. figure 3.1) conduisent à la factorisation suivante :

$$P(\mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t, A_t) = P(\mathbf{X}_t) \cdot P(\mathbf{D}_t|\mathbf{X}_{t-1}) \cdot P(A_t|\mathbf{D}_t)$$

avec,

$$P(\mathbf{D}_t) = \prod_{\ell=1}^L [P(\delta_{t,\ell}) \cdot P(D_{t,\ell}|\mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})] \cdot P(D_t^{\text{sys}}|D_{t,1}, \dots, D_{t,L}),$$

et

$$P(A_t|\mathbf{D}_t) = P(A_t|D_t^{\text{sys}}).$$

Après division par la loi $P(\mathbf{X}_t)$, l'équation précédente devient

$$\begin{aligned} P(\mathbf{D}_t, A_t|\mathbf{X}_t) &= P(\mathbf{D}_t|\mathbf{X}_{t-1}) \cdot P(A_t|\mathbf{D}_t) \\ \iff P(A_t|\mathbf{X}_t) &= \sum_{\mathbf{D}_t} P(\mathbf{D}_t|\mathbf{X}_{t-1}) \cdot P(A_t|\mathbf{D}_t) \\ \iff P(A_t|\mathbf{X}_t) &= \sum_{D_t^{\text{sys}}} \sum_{\delta_{t,1}, D_{t,1}} \dots \sum_{\delta_{t,L}, D_{t,L}} \prod_{\ell=1}^L [P(\delta_{t,\ell}) \cdot P(D_{t,\ell}|\mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})] \cdot \\ &\quad P(D_t^{\text{sys}}|D_{t,1}, \dots, D_{t,L}) \cdot P(A_t|D_t^{\text{sys}}) \\ \iff P(A_t|\mathbf{X}_t) &= \sum_{D_t^{\text{sys}}} \sum_{\delta_{t,1}, D_{t,1}} P(\delta_{t,1}) \cdot P(D_{t,1}|\mathbf{X}_t, \delta_{t,1}) \cdot \dots \cdot \sum_{\delta_{t,L}, D_{t,L}} P(\delta_{t,L}) \cdot P(D_{t,L}|\mathbf{X}_t, \delta_{t,L}) \cdot \\ &\quad P(D_t^{\text{sys}}|D_{t,1}, \dots, D_{t,L}) \cdot P(A_t|D_t^{\text{sys}}). \end{aligned}$$

En utilisant les notations introduites dans la partie 3.2.2, nous obtenons pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned} G_t(\mathbf{x}, a) &= \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{\delta_{t,1} \in \{0,1\}} \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} P(D_{t,1} = d_1|\mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,1}) \times \dots \times \\ &\quad \sum_{\delta_{t,L} \in \{0,1\}} \sum_{d_L \in \mathcal{D}_L} \delta_{t,L} P(D_{t,L} = d_L|\mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,L}) \Delta^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d) \Gamma(d, a) \\ &= \sum_{d \in \mathcal{D}} \Gamma(d, a) \left[\sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) + (1 - \delta_{t,1}) \mathbb{I}(d_1 = d_\emptyset) \right] \times \dots \times \\ &\quad \left[\sum_{d_L \in \mathcal{D}_L} \delta_{t,L} \Delta_L(\mathbf{x}, d_L) + (1 - \delta_{t,L}) \mathbb{I}(d_L = d_\emptyset) \right] \Delta^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d). \end{aligned}$$

Il s'agit à présent de démontrer que pour tout entier strictement positif L , tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$,

$$\Delta_{t,L}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d) = \left[\sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) + (1 - \delta_{t,1}) \mathbb{I}(d_1 = d_\emptyset) \right] \times \dots \times \left[\sum_{d_L \in \mathcal{D}_L} \delta_{t,L} \Delta_L(\mathbf{x}, d_L) + (1 - \delta_{t,L}) \mathbb{I}(d_L = d_\emptyset) \right] \Delta^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d) \quad (\text{E.1})$$

Pour ce faire, procédons par récurrence sur L . Pour $L = 1$, l'hypothèse (E.1) est vérifiée puisque l'équation (3.11) s'écrit

$$\begin{aligned} \Delta_{t,1}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d) &= \begin{cases} \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) \Delta^{\text{sys}}(d_1, d) & \text{si } \delta_{t,1} = 1 \\ \Delta^{\text{sys}}(d_\emptyset, d) & \text{si } \delta_{t,1} = 0 \end{cases} \\ &= \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) \Delta^{\text{sys}}(d_1, d) + (1 - \delta_{t,1}) \Delta^{\text{sys}}(d_\emptyset, d) \\ &= \sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) \Delta^{\text{sys}}(d_1, d) + (1 - \delta_{t,1}) \mathbb{I}(d_1 = d_\emptyset) \Delta^{\text{sys}}(d_1, d) \\ &= \left[\sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) + (1 - \delta_{t,1}) \mathbb{I}(d_1 = d_\emptyset) \right] \Delta^{\text{sys}}(d_1, d). \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe L telle que la proposition (E.1) soit vraie. La LPC $\Delta_{t,L+1}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d)$ possède pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $d \in \mathcal{D}^{\text{sys}}$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Delta_{t,L+1}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d) &= \begin{cases} \sum_{d_{L+1} \in \mathcal{D}_{L+1}} \Delta_{L+1}(\mathbf{x}, d_{L+1}) \Delta_{t,L}^{\text{rec}}(d_{L+1}, d) & \text{si } \delta_{t,L+1} = 1 \\ \Delta_{t,L}^{\text{rec}}(d_\emptyset, d) & \text{si } \delta_{t,L+1} = 0 \end{cases} \\ &= \left[\sum_{d_{L+1} \in \mathcal{D}_{L+1}} \delta_{t,L+1} \Delta_{L+1}(\mathbf{x}, d_{L+1}) + (1 - \delta_{t,L+1}) \mathbb{I}(d_{L+1} = d_\emptyset) \right] \Delta_{t,L}^{\text{rec}}(d_{L+1}, d). \end{aligned}$$

Par la suite, en utilisant l'hypothèse (E.1), nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta_{t,L+1}^{\text{rec}}(\mathbf{x}, d) &= \left[\sum_{d_{L+1} \in \mathcal{D}_{L+1}} \delta_{t,L+1} \Delta_{L+1}(\mathbf{x}, d_{L+1}) + (1 - \delta_{t,L+1}) \mathbb{I}(d_{L+1} = d_\emptyset) \right] \times \\ &\quad \left[\sum_{d_1 \in \mathcal{D}_1} \delta_{t,1} \Delta_1(\mathbf{x}, d_1) + (1 - \delta_{t,1}) \mathbb{I}(d_1 = d_\emptyset) \right] \times \dots \times \\ &\quad \left[\sum_{d_L \in \mathcal{D}_L} \delta_{t,L} \Delta_L(\mathbf{x}, d_L) + (1 - \delta_{t,L}) \mathbb{I}(d_L = d_\emptyset) \right] \Delta^{\text{sys}}(d_1, \dots, d_L, d_{L+1}, d). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Démonstration (Proposition 3.2)

Il s'agit de calculer pour tout t l'expression de la loi d'interface gauche, notée $\Xi_t = P(\mathbf{X}_t, A_t)$, associée au modèle VIRMALAB. D'après l'équation (3.2), nous avons :

$$P(\mathbf{X}_t, A_t) = \begin{cases} \underbrace{P(\mathbf{X}_1)}_{=\lambda_1} \underbrace{\sum_{\mathbf{D}_1} P(\mathbf{D}_1 | \mathbf{X}_1) \cdot P(A_1 | \mathbf{D}_1)}_{=G_1} & t = 1 \\ \underbrace{\sum_{\substack{\mathbf{X}_{t-1} \\ A_{t-1}}} P(\mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1})}_{=\lambda_t} \underbrace{P(\mathbf{X}_t | \mathbf{X}_{t-1}, A_{t-1})}_{=\Lambda} \cdot \underbrace{\sum_{\mathbf{D}_t} P(\mathbf{D}_t | \mathbf{X}_{t-1}) \cdot P(A_t | \mathbf{D}_t)}_{=G_t} & t \geq 2 \end{cases} .$$

Autrement dit, nous obtenons pour tout t , tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$ et tout $a \in \mathcal{A}$,

$$\Xi_t(\mathbf{x}, a) = \lambda_t(\mathbf{x})G_t(\mathbf{x}, a),$$

avec pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\lambda_t(\mathbf{x}) = \begin{cases} \lambda_1(\mathbf{x}) & t = 1 \\ \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \sum_{a' \in \mathcal{A}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a') \Lambda(\mathbf{x}', a', \mathbf{x}) & t \geq 2 \end{cases} .$$

Lorsque $t \geq 2$, il est possible de séparer la somme sur \mathcal{A} entre $\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}$ et $\mathcal{A}^{\mathbf{X}}$ de façon à exploiter la définition par morceaux de Λ (cf. équation (3.2.2)). Il vient alors pour tout $\mathbf{x} \in \mathcal{X}$,

$$\begin{aligned} \lambda_t(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \sum_{a' \in \mathcal{A}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a') \Lambda(\mathbf{x}', a', \mathbf{x}) \\ &= \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \left[\sum_{a' \in \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a') \underbrace{\Lambda(\mathbf{x}', a', \mathbf{x})}_{=\Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x})} + \sum_{a'' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a'') \underbrace{\Lambda(\mathbf{x}', a'', \mathbf{x})}_{=\Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a'', \mathbf{x})} \right] \\ \lambda_t(\mathbf{x}) &= \sum_{\mathbf{x}' \in \mathcal{X}} \left[\Lambda^{\text{sys}}(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \sum_{a' \in \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a') + \sum_{a'' \in \mathcal{A}^{\mathbf{X}}} \Xi_{t-1}(\mathbf{x}', a'') \Lambda^{\text{act}}(\mathbf{x}', a'', \mathbf{x}) \right] . \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Démonstration (Proposition 3.3)

Il s'agit ici de déterminer pour tout $\ell = 1 \dots, L$ l'expression de la loi associée au ℓ -ème diagnostic, notée $P(D_{t,\ell})$, dans le modèle VIRMALAB. Pour ce faire, il suffit de sommer la

loi jointe du modèle de la tranche t sur toutes les variables, excepté $D_{t,\ell}$. L'application du théorème de factorisation donne ici :

$$\begin{aligned} P(D_{t,\ell}) &= \sum_{\mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t \setminus D_{t,\ell}, A_t} P(\mathbf{X}_t, \mathbf{D}_t, A_t) \\ &= \sum_{\mathbf{X}_t} \sum_{\delta_{t,\ell}} \sum_{D_t^{\text{sys}}} \sum_{A_t} P(\mathbf{X}_t) \cdot \prod_{1 \leq \ell \leq L} [P(\delta_{t,\ell}) \cdot P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})] \cdot \\ &\quad P(D_t^{\text{sys}} | D_{t,1}, \dots, D_{t,L}) \cdot P(A_t | D_t^{\text{sys}}). \end{aligned}$$

Il est alors possible d'extraire le terme $P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})$ du produit des L LPC de diagnostic, comme suit :

$$\begin{aligned} P(D_{t,\ell}) &= \sum_{\mathbf{X}_t} \sum_{\delta_{t,\ell}} \sum_{D_t^{\text{sys}}} \sum_{A_t} P(\mathbf{X}_t) \cdot P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell}) \cdot \prod_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L} [P(\delta_{t,\ell'}) P(D_{t,\ell'} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell'})] \cdot \\ &\quad P(D_t^{\text{sys}} | D_{t,1}, \dots, D_{t,L}) \cdot P(A_t | D_t^{\text{sys}}). \end{aligned}$$

Les sommations sont ensuite réarrangées de manière à obtenir des simplifications :

$$\begin{aligned} P(D_{t,\ell}) &= \sum_{\mathbf{X}_t} P(\mathbf{X}_t) \cdot \sum_{\delta_{t,\ell}} P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell}) \cdot \\ &\quad \prod_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L} \left[\sum_{(\delta_{t,\ell'}, D_{t,\ell'})_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L}} P(\delta_{t,\ell'}) \cdot P(D_{t,\ell'} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell'}) \right] \\ &\quad \underbrace{\sum_{D_t^{\text{sys}}} P(D_t^{\text{sys}} | D_{t,1}, \dots, D_{t,L}) \cdot \underbrace{\sum_{A_t} P(A_t | D_t^{\text{sys}})}_{=1}}_{=1} \\ &= \sum_{\mathbf{X}_t} P(\mathbf{X}_t) \cdot \sum_{\delta_{t,\ell}} P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell}) \cdot \\ &\quad \underbrace{\prod_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L} \left[\sum_{(\delta_{t,\ell'})_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L}} P(\delta_{t,\ell'}) \cdot \underbrace{\sum_{(D_{t,\ell'})_{1 \leq \ell' \neq \ell \leq L}} P(D_{t,\ell'} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell'})}_{=1} \right]}_{=1} \\ P(D_{t,\ell}) &= \sum_{\mathbf{X}_t} P(\mathbf{X}_t) \cdot \sum_{\delta_{t,\ell}} P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell}). \end{aligned}$$

Enfin, en appliquant la définition par morceaux de la LPC $P(D_{t,\ell} | \mathbf{X}_t, \delta_{t,\ell})$ (cf. équation

(3.2.2)), nous obtenons pour tout $d_\ell \in \mathcal{D}_\ell$,

$$\begin{aligned}
P(D_{t,\ell} = d_\ell) &= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda_t(\mathbf{x}) \sum_{\delta_{t,\ell} \in \{0,1\}} P(D_{t,\ell} = d_\ell | \mathbf{X}_t = \mathbf{x}, \delta_{t,\ell}) \\
&= \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda_t(\mathbf{x}) \begin{cases} \Delta_{t,\ell}(\mathbf{x}, d_\ell) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 1 \\ \mathbb{I}(d_\ell = d_\emptyset) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 0 \end{cases} \\
P(D_{t,\ell} = d_\ell) &= \begin{cases} \sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda_t(\mathbf{x}) \Delta_{t,\ell}(\mathbf{x}, d_\ell) & \text{si } \delta_{t,\ell} = 1 \\ \mathbb{I}(d_\ell = d_\emptyset) \underbrace{\sum_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} \lambda_t(\mathbf{x})}_{=1} & \text{si } \delta_{t,\ell} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où le résultat.

□

Démonstration (Proposition 3.4)

D'après les propositions 1.1 et 1.2, la complexité algorithmique du calcul de G_t vérifie

$$CA(G_t) = CA\left(\sum_{\mathcal{D}} \Gamma \cdot \Delta_{t,L}^{\text{rec}}\right) + CA(\Delta_{t,L}^{\text{rec}}). \quad (\text{E.2})$$

Le premier terme de l'équation (E.2) consiste en une somme et un produit de LPC avec $\Gamma \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{A}\}_t | \{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t}$ et $\Delta_{t,L}^{\text{rec}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t | \{\mathcal{X}\}_t}$. D'où,

$$CA\left(\sum_{\mathcal{D}^{\text{sys}}} \Gamma \cdot \Delta_{t,L}^{\text{rec}}\right) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}| |\mathcal{A}|). \quad (\text{E.3})$$

Le second terme correspond à la complexité algorithmique du calcul de $\Delta_{t,L}^{\text{rec}}$. Rappelons que la LPC $\Delta_{t,L}^{\text{rec}}$ désigne le L -ème terme de la suite $(\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}})_{\ell \geq 0}$ définie par (3.11). Le calcul du ℓ -ème terme de cette suite dépend de la valeur de la variable $\delta_{t,\ell}$. Lorsque $\delta_{t,\ell} = 0$, $\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}}$ s'obtient par une simple évaluation de $\Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}$. En revanche, lorsque $\delta_{t,\ell} = 1$, une somme et un produit de LPC sont réalisés. Au regard du temps de calcul, l'évaluation de $\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}}$ dans le premier cas est négligeable par rapport à l'évaluation dans le second. Par conséquent, dans la suite de cette démonstration, nous nous plaçons dans le pire des cas, à savoir lorsque pour tout $\ell = 1, \dots, L$, $\delta_{t,\ell} = 1$. Il vient alors pour tout $\ell = 1, \dots, L$,

$$CA(\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}}) = CA\left(\sum_{d_\ell \in \mathcal{D}_\ell} \Delta_\ell \cdot \Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}\right) + CA(\Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}). \quad (\text{E.4})$$

Par définition, $\Delta_\ell \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}_\ell\}_t | \{\mathcal{X}\}_t}$ et $\Delta_{t,\ell}^{\text{rec}} \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{D}^{\text{sys}}\}_t | \{\mathcal{D}_{\ell+1}, \dots, \mathcal{D}_L\}_t}$, ce qui implique

$$CA\left(\sum_{d_\ell \in \mathcal{D}_\ell} \Delta_\ell \cdot \Delta_{t,\ell-1}^{\text{rec}}\right) = \mathcal{O}\left(|\mathcal{X}| |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \prod_{\ell'=\ell+1}^L |\mathcal{D}_{\ell'}|\right).$$

Par récurrence, l'équation (E.4) se réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} CA(\Delta_{t,L}^{\text{rec}}) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}|) + CA(\Delta_{t,L-1}^{\text{rec}}) \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}|) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}||\mathcal{D}_L|) + CA(\Delta_{t,L-2}^{\text{rec}}) \\ CA(\Delta_{t,L}^{\text{rec}}) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}|) + \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}||\mathcal{D}_L|) + \dots + \mathcal{O}\left(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}| \prod_{\ell'=1}^L |\mathcal{D}_{\ell'}|\right) + CA(\Delta_{t,0}^{\text{rec}}), \end{aligned}$$

avec $CA(\Delta_{t,0}^{\text{rec}}) = CA(\Delta^{\text{sys}}) = 0$ puisque Δ^{sys} est une donnée et n'est donc pas à calculer. Il s'ensuit alors que

$$CA(\Delta_{t,L}^{\text{rec}}) = \mathcal{O}\left(|\mathcal{X}||\mathcal{D}^{\text{sys}}| \sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=1}^L |\mathcal{D}_{\ell'}|\right). \quad (\text{E.5})$$

La démonstration s'achève en remplaçant les deux termes de l'équation E.2 par les expressions obtenues dans les équations E.3 et E.5.

□

Démonstration (Proposition 3.5)

Notons tout d'abord que le temps de calcul de la loi λ_1 est nul puisque cette dernière constitue un des paramètres du modèle VIRMALAB. Lorsque $t \geq 2$, le calcul de λ_t conduit à la manipulation des potentiels/LPC suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_t &= \sum_{\{\mathcal{X}\}_{t-1}} \left[\Lambda^{\text{sys}} \cdot \underbrace{\sum_{\{\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}\}_{t-1}} \Xi_{t-1}(:, \mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}})}_{=\pi^{(1)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_{t-1}} + \sum_{\{\mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}} \underbrace{\Xi_{t-1}(:, \mathcal{A}^{\mathbf{X}})}_{=\pi^{(2)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}_{t-1}, \mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t} \cdot \Lambda^{\text{act}} \right] \\ &= \sum_{\{\mathcal{X}\}_{t-1}} \left[\underbrace{\Lambda^{\text{sys}} \cdot \pi^{(1)}}_{=\pi^{(3)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t} + \underbrace{\sum_{\{\mathcal{A}^{\mathbf{X}}\}_{t-1}} \pi^{(2)}}_{=\pi^{(4)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t} \right] \\ \lambda_t &= \underbrace{\sum_{\{\mathcal{X}\}_{t-1}} \left[\underbrace{\pi^{(3)} + \pi^{(4)}}_{=\pi^{(5)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_{t-1} \cup \{\mathcal{X}\}_t} \right]}_{=\pi^{(6)} \in \mathcal{L}\{\mathcal{X}\}_t}. \end{aligned}$$

La complexité algorithmique du calcul de λ_t vérifie donc

$$\begin{aligned} CA(\lambda_t) &= \underbrace{CA(\pi^{(1)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}|)} + \underbrace{CA(\pi^{(2)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^{\mathbf{X}}|)} + \underbrace{CA(\pi^{(3)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2)} + \underbrace{CA(\pi^{(4)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}|)} + \underbrace{CA(\pi^{(5)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2)} + \underbrace{CA(\pi^{(6)})}_{=\mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2)} \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^{\mathbf{X}}| + |\mathcal{X}|^2 + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}| + |\mathcal{X}|^2 + |\mathcal{X}|^2) \\ &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2 \underbrace{(|\mathcal{A}^{\mathbf{X}}| + |\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}|)}_{=|\mathcal{A}|} + \underbrace{|\mathcal{X}||\mathcal{A}^{\bar{\mathbf{X}}}| + 3|\mathcal{X}|^2}_{\text{négligeable devant le premier terme}}) \\ CA(\lambda_t) &= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|). \end{aligned}$$

En supposant que la LPC $G_t \in \mathcal{L}^{\{\mathcal{A}\}_t|\{\mathcal{X}\}_t}$ a préalablement été calculée à l'aide de la proposition 3.1, la complexité algorithmique de Ξ_t se déduit immédiatement de

$$\Xi_t = \underbrace{\lambda_t \cdot G_t}_{\in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{A}\}_t}} \Rightarrow CA(\Xi_t) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{A}|).$$

Enfin, la loi $P(A_t)$ s'obtenant en sommant Ξ_t sur le domaine $\{\mathcal{X}\}_t$, nous en déduisons directement $CA(P(A_t)) = CS(\Xi_t) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{A}|)$.

□

Démonstration (Proposition 3.6)

Pour tout $\ell = 1, \dots, L$, la complexité algorithmique du calcul de $P(D_{t,\ell})$ dépend de la valeur de $\delta_{t,\ell}$. La situation est similaire à celle du calcul de G_t (cf. proposition 3.1). En effet, lorsque $\delta_{t,\ell} = 0$, le calcul se résume à l'évaluation d'une fonction indicatrice. Ceci est négligeable comparé à la marginalisation effectuée lorsque $\delta_{t,\ell} = 1$. Nous nous plaçons donc dans le pire des cas du point de vue de la complexité algorithmique, à savoir lorsque $\delta_{t,\ell} = 1$. Dans ce contexte, nous avons simplement

$$P(D_{t,\ell}) = \sum_{\{\mathcal{X}\}_t} \underbrace{\lambda_t \cdot \Delta_\ell}_{\in \mathcal{L}^{\{\mathcal{X}, \mathcal{D}_\ell\}_t}} \Rightarrow CA(P(D_{t,\ell})) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}||\mathcal{D}_\ell|). \quad (\text{E.6})$$

□

Démonstration (Proposition 3.7)

Reprenons les notations introduites dans la partie 3.3.1 et posons

$K = \max(K_{\mathbf{X}}, (K_{\delta_\ell}, K_{D_\ell})_{1 \leq \ell \leq L}, K_A)$. La complexité algorithmique du calcul (3.7) vérifie

$$U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}} = \sum_{\{\mathcal{X}\}_t} \underbrace{u_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}}}_{\in \mathbb{R}^{\{\mathcal{X}\}_t}} \cdot \lambda_t \Rightarrow CA(U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{X}|).$$

Nous en déduisons

$$CA(U_{\mathbf{X}_t}) = \sum_{k_{\mathbf{X}}=1}^{K_{\mathbf{X}}} CA(U_{\mathbf{X}_t}^{k_{\mathbf{X}}}) = \mathcal{O}(K_{\mathbf{X}}|\mathcal{X}|) = \mathcal{O}(K|\mathcal{X}|).$$

En suivant le même principe, nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}} = u_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}} \delta_{t,\ell} \\ U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}} = \sum_{\{\mathcal{D}_\ell\}_t} \underbrace{u_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}} \cdot P(D_{t,\ell})}_{\in \mathbb{R}^{\{\mathcal{D}_\ell\}_t}} \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CA(U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}}) = \mathcal{O}(1) \\ CA(U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}}) = \mathcal{O}(|\mathcal{D}_\ell|) \end{array} \right. \\ &\Rightarrow CA(\mathbf{U}_{D_t}) = \sum_{\ell=1}^L \left[\sum_{k_{\delta_\ell}=1}^{K_{\delta_\ell}} CA(U_{\delta_{t,\ell}}^{k_{\delta_\ell}}) + \sum_{k_{D_\ell}=1}^{K_{D_\ell}} CA(U_{D_{t,\ell}}^{k_{D_\ell}}) \right] \\ &\Rightarrow CA(\mathbf{U}_{D_t}) = \sum_{\ell=1}^L [\mathcal{O}(K_{\delta_\ell}) + \mathcal{O}(K_{D_\ell}|\mathcal{D}_\ell|)] \\ &\Rightarrow CA(\mathbf{U}_{D_t}) = \mathcal{O}(KL) + \sum_{\ell=1}^L \mathcal{O}(K|\mathcal{D}_\ell|) \\ &\Rightarrow CA(\mathbf{U}_{D_t}) = \mathcal{O} \left(K \left[L + \sum_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell| \right] \right), \end{aligned}$$

et

$$CA(\mathbf{U}_{A_t}) = \sum_{k_A=1}^{K_A} CA(\mathbf{U}_{A_t}^{k_A}) = \mathcal{O}(K_A|\mathcal{A}|) = \mathcal{O}(K|\mathcal{A}|).$$

D'où le résultat

$$\begin{aligned} CA(\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t}, \mathbf{U}_{\mathbf{D}_t}, \mathbf{U}_{A_t}) &= CA(\mathbf{U}_{\mathbf{X}_t}) + CA(\mathbf{U}_{\mathbf{D}_t}) + CA(\mathbf{U}_{A_t}) \\ &= \mathcal{O}\left(K \left[|\mathcal{X}| + L + \sum_{\ell=1}^L |\mathcal{D}_\ell| + |\mathcal{A}|\right]\right). \end{aligned}$$

□

Démonstration (Proposition 3.8)

L'objectif de cette démonstration est de simplifier l'expression de la complexité associée à l'algorithme 3.1 suivant la complexité du modèle des diagnostics. Dans le meilleur des cas, nous avons $|\mathcal{D}^{\text{sys}}| = |\mathcal{D}_1| = \dots = |\mathcal{D}_L| = 2$ et dans le pire des cas, nous considérons que $|\mathcal{D}^{\text{sys}}| = |\mathcal{D}_1| = \dots = |\mathcal{D}_L| = |\mathcal{X}|$. Remarquons tout d'abord que si $|\mathcal{D}^{\text{sys}}| = |\mathcal{D}_1| = \dots = |\mathcal{D}_L| = C \geq 2$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=1}^L |\mathcal{D}_{\ell'}| &= C \sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=1}^L C \\ &= C(C^L + C^{L-1} + \dots + C) \\ |\mathcal{D}^{\text{sys}}| \sum_{\ell=1}^L \prod_{\ell'=1}^L |\mathcal{D}_{\ell'}| &= C^2 \frac{1 - C^L}{1 - C}. \end{aligned}$$

En se plaçant dans le meilleur des cas, c'est-à-dire en fixant $C = 2$, il vient

$$\begin{aligned} CA_{\text{inf}}(\mathcal{V}_{\text{futil}}) &= \mathcal{O}(T [|\mathcal{X}|(2^{L+2} - 4) + 2|\mathcal{X}||\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|]) \\ &= \mathcal{O}(T [2^{L+2}|\mathcal{X}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|]). \end{aligned}$$

En revanche, dans le pire des cas, c'est-à-dire en fixant $C = |\mathcal{X}|$, nous obtenons

$$\begin{aligned} CA_{\text{sup}}(\mathcal{V}_{\text{futil}}) &= \mathcal{O}\left(T \left[|\mathcal{X}| \times |\mathcal{X}|^2 \frac{1 - |\mathcal{X}|^L}{1 - |\mathcal{X}|} + |\mathcal{X}||\mathcal{A}| + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|\right]\right) \\ &= \mathcal{O}\left(T \left[|\mathcal{X}|^3 \underbrace{\frac{1 - |\mathcal{X}|^L}{1 - |\mathcal{X}|}}_{= \mathcal{O}(|\mathcal{X}|^{L-1})} + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|\right]\right) \\ CA_{\text{sup}}(\mathcal{V}_{\text{futil}}) &= \mathcal{O}(T [|\mathcal{X}|^{L+2} + |\mathcal{X}|^2|\mathcal{A}|]). \end{aligned}$$

D'où le résultat.

□