



HAL
open science

Optimisation et réalisation d'un micro-gyromètre deux axes à poutres vibrantes en silicium

Jérôme Maisonnet

► **To cite this version:**

Jérôme Maisonnet. Optimisation et réalisation d'un micro-gyromètre deux axes à poutres vibrantes en silicium. Micro et nanotechnologies/Microélectronique. Université de Franche-Comté, 2009. Français. NNT: . tel-00476857

HAL Id: tel-00476857

<https://theses.hal.science/tel-00476857>

Submitted on 27 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

Présentée à

L'Université de Franche-Comté

Par

Jérôme MAISONNET

Pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Franche-Comté

Spécialité

Sciences pour l'ingénieur et microtechnique

Optimisation et réalisation d'un micro-gyromètre deux axes à poutres vibrantes en silicium

Soutenue le 20 novembre 2009

| | | |
|--------------------|--------------------|--|
| Rapporteurs | S. BASROUR | Professeur, université Joseph Fourier, Grenoble |
| | A. BOSSEBOEUF | Directeur de recherche CNRS, université Paris-Sud, Orsay |
| Examineurs | B. DULMET | Professeur, ENSMM, Besançon |
| | E. PLESKA | Directeur adjoint de la MRIS, Bagnex |
| | J. BEITIA | Ingénieur SAGEM, Argenteuil |
| | M. DE LABACHELERIE | Directeur de recherche CNRS, FEMTO-ST, Besançon |
| | R. BOURQUIN | Professeur émérite, ENSMM, Besançon |

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire de thèse se sont déroulés au sein du département Temps Fréquence de l'institut FEMTO-ST (UMR-CNRS 61174) à Besançon.

Je tiens tout d'abord à remercier mon directeur de thèse Bernard DULMET Directeur du département Temps Fréquence, de m'avoir fait confiance ainsi que la grande liberté qu'il m'a accordée dans mon travail. Je le remercie aussi pour les longues et nombreuses discussions que nous avons pu avoir sur des domaines très variés.

Je remercie aussi Roger BOURQUIN pour le travail qu'il a effectué sur la détection optique, ainsi que son avis d'expert sur le gyromètre en étoile.

Je tiens à remercier l'ensemble des membres du jury d'avoir bien voulu participer à mon jury de thèse.

- Monsieur Skandar BASROUR Professeur à l'université Joseph Fourier, et responsable **Micro and Nano Systems** (MNS) au laboratoire Technique de l'Informatique et de la Microélectronique pour les systèmes intégrés (TIMA) qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse.
- Monsieur Alain BOSSEBOEUF Directeur de recherche au CNRS et responsable de l'équipe **Micro-Nano-Systèmes** (Minasys) à l'institut d'électronique fondamentale, qui a accepté d'être rapporteur de cette thèse.
- Monsieur Éric PLESKA directeur adjoint de la Mission pour la Recherche et l'Innovation Scientifique à la Direction Générale de l'Armement.
- Monsieur José BEITIA ingénieur et expert en système inertiel à la Sagem.
- Monsieur Michelle DE LABACHELERIE Directeur de recherche au CNRS et directeur de l'institut FEMTO-ST.

Je me dois évidemment de remercier l'ensemble des personnes de la centrale de technologie MIMEMTO, sans quoi ces travaux n'auraient pu avoir lieu. Merci Valérie, Samuel, Jean-Yves, Roland, Gwenn, Laurent-P, Laurent-R, Éric, Denis, et toi aussi Stan je vais te remercier même si y a des jours où je t'aurais bien assommé « ça marchera jamais » et bien oui ça marche.

Pour terminer je tiens à remercier l'ensemble du personnel du département temps fréquence pour leur bonne humeur, spéciale dédicace à Jean-Pierre pour le café. Ainsi qu'un grand merci aux collègues thésards pour m'avoir soutenu, surtout durant la fin, la rédaction ce n'est pas facile alors encore merci.

The only sovereign you can allow to rule you is reason.

Terry Goodking

Table des matières

| | |
|---|----|
| 1 INTRODUCTION..... | 11 |
| 1.1 DEFINITIONS | 11 |
| 1.2 LES CENTRALES INERTIELLES | 13 |
| 1.3 LE GYROMETRE | 14 |
| 1.4 CONTEXTE DES TRAVAUX | 23 |
| 1.5 LE SILICIUM | 25 |
| 1.6 LE GYROMETRE EN ETOILE..... | 28 |
| 1.6.1 Historique..... | 28 |
| 1.6.2 Fonctionnement du gyromètre..... | 31 |
| 1.7 CONCLUSION | 37 |
| 2 LE GYROMETRE A POUTRES VIBRANTES..... | 39 |
| 2.1 MODELE ANALYTIQUE DE LA POUTRE DE BERNOULLI..... | 39 |
| 2.1.1 Poutre en silicium..... | 39 |
| 2.1.2 Équations de mouvement et conditions aux limites | 42 |
| 2.1.3 Équations du mouvement | 43 |
| 2.2 MODELE ELEMENTS FINIS | 47 |
| 2.2.1 Formulation intégrale | 48 |
| 2.2.2 Approximation par sous-domaine et organisation matricielle..... | 49 |
| 2.2.3 Excitation électrostatique | 55 |
| 2.3 BILAN | 69 |
| 3 DIMENSIONNEMENT DU GYROMETRE ET SIMULATION | |

| | |
|---|------------|
| NUMERIQUE | 71 |
| 3.1 SIMULATION MODALE DU GYROMETRE | 71 |
| 3.2 ÉTUDE DE L'EXCITATION ELECTROSTATIQUE | 79 |
| 3.3 BILAN | 88 |
| 4 DETERMINATION DU FACTEUR DE QUALITE D'UNE POUTRE EN FLEXION | 91 |
| 4.1 AMORTISSEMENT THERMOELASTIQUE | 91 |
| 4.2 AMORTISSEMENT VISQUEUX DU A L' AIR | 101 |
| 4.2.1 Amortissement vertical (ou squeeze film damping) | 101 |
| 4.2.2 Amortissement horizontal (ou slide film damping) | 107 |
| 4.3 RESULTATS | 109 |
| 5 REALISATION DU MICRO-GYROMETRE | 111 |
| 5.1 ARCHITECTURE DU GYROMETRE | 111 |
| 5.2 ÉTAPES DE REALISATION | 112 |
| 5.2.1 Matériaux utilisés | 112 |
| 5.2.2 Étapes de réalisation | 115 |
| 5.2.3 Réalisation des électrodes en or | 117 |
| 5.2.4 La gravure anisotrope pour la réalisation de la gravure de 20 µm face arrière et de 360 µm face avant | 118 |
| 5.2.5 Assemblage des wafers | 122 |
| 5.2.6 Dépôt des plots en aluminium | 124 |
| 5.2.7 Finition | 125 |
| 5.3 REALISATION DES MAQUETTES | 127 |
| 5.3.1 Première série de maquettes | 127 |
| 5.3.2 Deuxième série de maquettes | 131 |
| 5.3.3 Réalisation de la détection optique | 132 |
| 5.4 BILAN | 140 |

| | |
|---|-----|
| 6 CONCLUSION | 141 |
| BIBLIOGRAPHIE | 145 |
| TABLE DES FIGURES..... | 149 |
| TABLE DES TABLEAUX..... | 153 |
| TABLE DES GRAPHIQUES | 155 |
| ANNEXES | 157 |
| ANNEXE 1 CHANGEMENT DE BASE D'UN TENSEUR D'ORDRE N | 157 |
| ANNEXE 2 PROGRAMME SCILAB | 160 |
| Fichier principal | 160 |
| Évaluation des matrices élémentaires | 163 |
| Évaluation des fréquences propres par la méthode de Jacobi..... | 167 |
| ANNEXE 3 MASQUES CADENCE | 175 |
| 2 ^{ème} serie de masques..... | 175 |
| ANNEXE 4 PROCEDE DE FABRICATION DE CHARLES HAYE..... | 177 |

Chapitre 1

Introduction

1.1 Définitions¹

Un gyroscope est un appareil capable de fournir une direction de référence, et par la suite une information de rotation angulaire sous la forme d'un écart angulaire compris entre 0° et 360° dans un repère absolu appelé aussi repère inertiel ou galiléen². C'est donc une mémoire de direction géométrique et matérielle dans l'espace. L'écart angulaire fourni est celui qui existe entre un des axes du référentiel du boîtier du gyroscope et la direction de référence.

Le fonctionnement du gyroscope est basé sur une propriété de fixité totale ou partielle dans le repère absolu des phénomènes physiques qu'il exploite. Ceux-ci sont essentiellement de nature mécanique ou optique.

Les premiers gyroscopes fabriqués avaient pour objectif de démontrer que la terre tourne sur

¹LEGER, Pierre, *Gyroscope mécanique vibrant*. Technique de l'ingénieur, traité de mesure et contrôle R1942.

² En physique un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un corps isolé est soit immobile, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Les repères galiléens n'existent pas dans l'univers, cependant en fonction de la précision désirée dans les calculs nous pouvons considérer certains repères comme galiléens. Dans notre cas, où nous nous intéressons à des mouvements terrestres, nous considérons la terre comme un repère galiléen.

elle-même. Le premier gyroscope fabriqué est le pendule de Foucault³, présenté au public en 1851 ; ce pendule garde un plan d'oscillation fixe pendant que la terre tourne sur elle-même. En 1852, Léon Foucault et son collègue Froment s'inspirent des travaux du scientifique allemand Bohnenberger pour fabriquer un nouveau gyroscope. Ce nouvel appareil est la base de la plupart des gyroscopes mécaniques actuels.

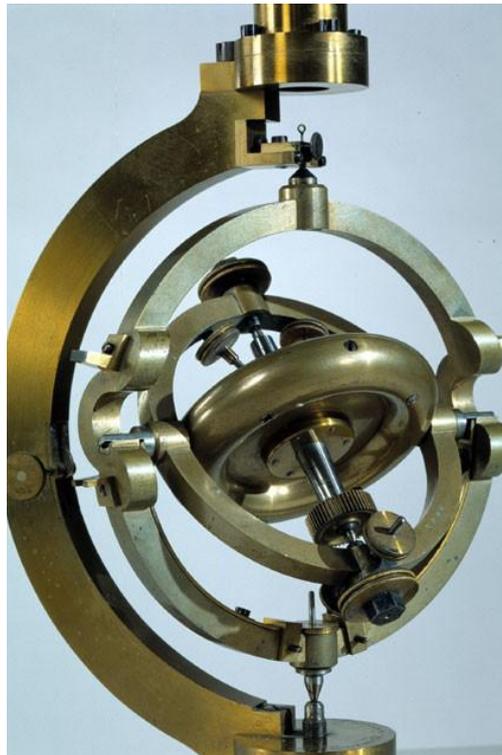


Figure 1—1 : Gyroscope de Foucault.

Un gyromètre est un appareil fournissant une information sur la vitesse de rotation d'un référentiel local (lié au capteur) par rapport à un référentiel galiléen, suivant un ou plusieurs axes. Plusieurs principes peuvent être mis en jeu pour évaluer la rotation. Des phénomènes mécaniques tels que la conservation du moment cinétique ou la force de Coriolis⁴, ou bien des phénomènes optiques tels que l'effet Sagnac⁵.

Il faut noter qu'un gyroscope peut fonctionner en gyromètre, mais l'inverse n'est pas obligatoirement vrai. Ceci est lié à la constitution interne même du dispositif. En effet, dans le

³ Jean Bernard Léon Foucault et né à paris en 1819 et il y meurt en 1868.

⁴ Gaspard-Gustave Coriolis ingénieur et mathématicien français né à paris en 1792 et il y meurt en 1843.

⁵ Georges Sagnac 1869-1928 est un physicien français

cas où le dispositif est symétrique par rapport à son axe de rotation, il est susceptible de remplir la double fonction gyroscope-gyromètre.

1.2 Les centrales inertielles

L'objectif de la navigation est de fournir des systèmes de positionnement performants et fiables, pour assurer les déplacements des gens et des objets dans des conditions difficiles (brouillard, nuit...). Pour cela, il a été récemment développé des systèmes de positionnement par satellites tel que le bien connu GPS⁶ américain ou Galileo⁷ européen. Cependant, ces systèmes étant électroniques, ils sont sensibles aux perturbations électromagnétiques. Il est donc nécessaire de disposer d'un système de positionnement qui prenne le relais en cas de défaillance ou d'impossibilité d'utiliser ce système (sous-marin).

Pour prendre le relais, une centrale inertielle peut être utilisée ; ces centrales ont pour but de donner la position du véhicule en temps réel par rapport à une position de référence. Il existe deux grands types de centrale inertielle, les centrales INU (Inertial Navigation Unit), et les centrales IRU (Inertial Reference Unit). Ces deux types de centrale s'opposent sur leur mode de positionnement. Les centrales INU sont composées en principe de deux accéléromètres perpendiculaires entre eux, et de trois gyroscopes, deux verticaux et le troisième horizontal. Ces centrales sont donc montées de manière à être horizontales durant la navigation. L'autre type de centrale est la centrale IRU, elle se compose de trois accéléromètres et de trois gyromètres. Sur ce type de centrale, les capteurs sont liés au véhicule et donnent donc des mesures dans le référentiel local de ce dernier.

⁶ GPS: Global Positioning System, c'est un système de positionnement par satellite, qui utilise la technique de trilatération, (positionnement par rapport à un point de référence, pour connaître sa position il faut au minimum 3 points donc 3 satellites). Le premier satellite a été déployé en 1978, à l'heure actuelle le système GPS dispose d'environ 24 satellites.

⁷ Galileo qui est le système équivalent au GPS américain est en test depuis 2004. Il devrait être utilisable en 2010. La décision de concevoir leur propre système de positionnement a été prise par les européens dans le but d'être indépendant vis-à-vis du système américain. L'objectif de Galileo est d'atteindre environ 30 satellites vers 2015, et d'offrir au civil une précision allant jusqu'à 4 m en horizontal et 8 m en vertical. À l'heure actuelle, le GPS offre une précision de 20 m.

1.3 Le gyromètre⁸

Introduit dans une boucle d'asservissement, le gyroscope peut contribuer au guidage d'un mobile (par l'indication d'une direction de référence), mais il peut aussi stabiliser un objet par rapport au plan de référence. Présents dans des domaines de hautes-technologies comme l'avionique et l'industrie spatiale, les gyroscopes requièrent de tels niveaux de performances que les coûts de fabrication sont proportionnels aux exigences de précision. Leur utilité ayant aussi été démontrée pour les activités grand public telles que les caméscopes ou la navigation automobile, il est désormais nécessaire de produire des gyroscopes à faibles voire très faibles coût, avec un encombrement minimal. De ce fait, les dispositifs entièrement mécaniques ou à faisceaux laser sont systématiquement écartés. Pour permettre la miniaturisation de ces gyroscopes, les ingénieurs se sont donc tournés vers des dispositifs à structures vibrantes. De plus, même si les moyens financiers à mettre en œuvre sont importants pour réaliser de petits dispositifs, ils peuvent être compensés par le volume important de capteurs à produire. Le principe de fonctionnement est extrêmement simple. Le rotor du gyroscope mécanique classique ainsi que le système à cardan sont remplacés par une seule structure mécanique présentant une symétrie de révolution autour d'un ou de plusieurs de ses axes. La mécanique des vibrations prédit qu'une telle structure possède une infinité de modes propres de vibration et de fréquences associées. Il est alors nécessaire d'en choisir deux de manière judicieuse.

Le premier mode, dit mode primaire, est entretenu au voisinage de la résonance pour maximiser l'énergie cinétique du système. Ce mode primaire est aussi appelé mode d'excitation. Son entretien est assuré par une source d'énergie externe. Sous l'effet d'une giration (imposée au système), il apparaît un transfert d'énergie du mode primaire vers un second mode, dit mode secondaire ou de détection. L'amplitude du mode secondaire ou de détection, est directement proportionnelle à la vitesse de rotation. Celle-ci couple les deux modes de vibration qui interviennent, ce qui constitue le « couplage gyroscopique ». Ce phénomène est bien connu, le couplage étant dû à la force de Coriolis.

Le choix des modes de vibration s'effectue de la manière suivante : le mode d'excitation doit

⁸ BEL, Olivier, *Gyromètre a quartz 2D micro-usiné*. 2001, 120 pages. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.

être tel que lorsque le gyromètre est en rotation autour de son axe sensible, la structure se met à vibrer avec une composante additionnelle détectable. Comme le mode primaire est excité par une source d'énergie externe, on dit que le mode secondaire est « excité par la vitesse angulaire », l'amplitude du mode de détection étant directement proportionnelle à la vitesse de rotation, puisque la force de Coriolis qui excite ce mode est elle-même proportionnelle à cette vitesse angulaire.

Le mode primaire doit posséder une amplitude suffisante pour que la force de Coriolis ne soit pas négligeable lorsque la giration est faible. La vitesse moyenne caractérisant le mode primaire doit être maintenue dans toutes les conditions de fonctionnement. Ce but est plus facilement atteint si la déformée secondaire correspond à un mode propre unique de la structure, associée à une fréquence propre voisine ou égale à la fréquence de résonance primaire.

À partir de ce principe de fonctionnement, de nombreuses structures ont été imaginées au cours du temps avec deux interrogations principales d'un point de vue purement physique : comment exciter la structure et comment détecter le signal. Pour l'excitation, le choix est rapide et l'apport d'énergie électrique reste incontournable puisqu'il est facile à mettre en œuvre. Cet apport est déterminé par le choix du matériau de la structure⁹ [électromagnétique, électrostatique ou piézo-électrique]. Pour la détection, nous pouvons envisager une mesure optique¹⁰, dont la mise en œuvre peut cependant présenter quelques difficultés. En effet, dans le cas de micro-structures, nous utilisons des puces laser dont l'implantation est délicate. C'est cependant une méthode à ne pas négliger puisqu'elle est insensible aux rayonnements magnétiques ou électriques locaux engendrés par l'excitation. Elle demeure toutefois peu économique à l'heure actuelle. Il reste donc la détection électrique qui peut elle-même s'effectuer de trois manières possibles : capacitive, piézo-électrique ou piézo-résistive. Le tableau 1.1 résume quelques unes de ces possibilités.

⁹ L'approche MEMS place les critères de la fabrication devant les spécifications de la mise en œuvre de l'excitation électrique.

¹⁰ SCHROPFER, G., *Multi-axial silicon bulk-micromachined accelerometers with capacitive or optical read-out*. 1998. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.

| Excitation Détection | Capacitive | Piézo-électrique | Piézo-résistive |
|-------------------------|------------|------------------|-----------------|
| Électromagnétique | 11 | | 12 |
| Électrostatique | 13 14 15 | | |
| Piézo-électrique | 16 | 17 | |

Tableau 1-1 : Principe d'excitation et de détection de plusieurs gyroscopes micro-usinés.

¹¹ HASHIMOTO, M., CABUZ, C., MINAMI, K., ESASHI, M., *Silicon resonant angular rate sensor using electromagnetic excitation and capacitive detection*, Proc. Micro System Technologies, pages 763–771, October 1994.

¹² GRÉTILLAT, F., *Silicon micromachined vibrating gyroscopes with piezoresistive detection and electromagnetic excitation*, Thèse de Doctorat, Université de Neuchâtel, 1998.

¹³ PUTTY, M. W. and NAJAFI, K., *A micromachined vibratory ring gyroscope*, Technical Digest of IEEE on Solid-State Sensors and Actuators, pp. 213–220, June 1994.

¹⁴ GREIFF, P., B. Boxenhorn, T. King, L. Niles, *Silicon monolithic micromechanical gyroscope*, Dig. 6th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, pp. 966–968, June 1991.

¹⁵ J. Bernstein, S. Cho, A. T. King, A. Kourepenis, P. Maciel and M. Weinberg, *A micromachined comb-drive tuning fork rate gyroscope*, Proc. 6th IEEE Workshop on Micro Electro Mechanical Systems, pp. 143–148, 1993.

¹⁶ K. Maenaka and T. Shiosawa, *Silicon rate sensor using anisotropic etching technology*, Dig. 7th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, pp. 642–645, June 1993.

¹⁷ J. Söderkvist, *Micromachined gyroscopes*, Dig. 7th International Conference on Solid-State Sensors and Actuators, pp. 638–641, June 1993.

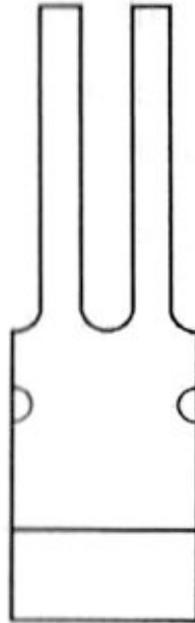


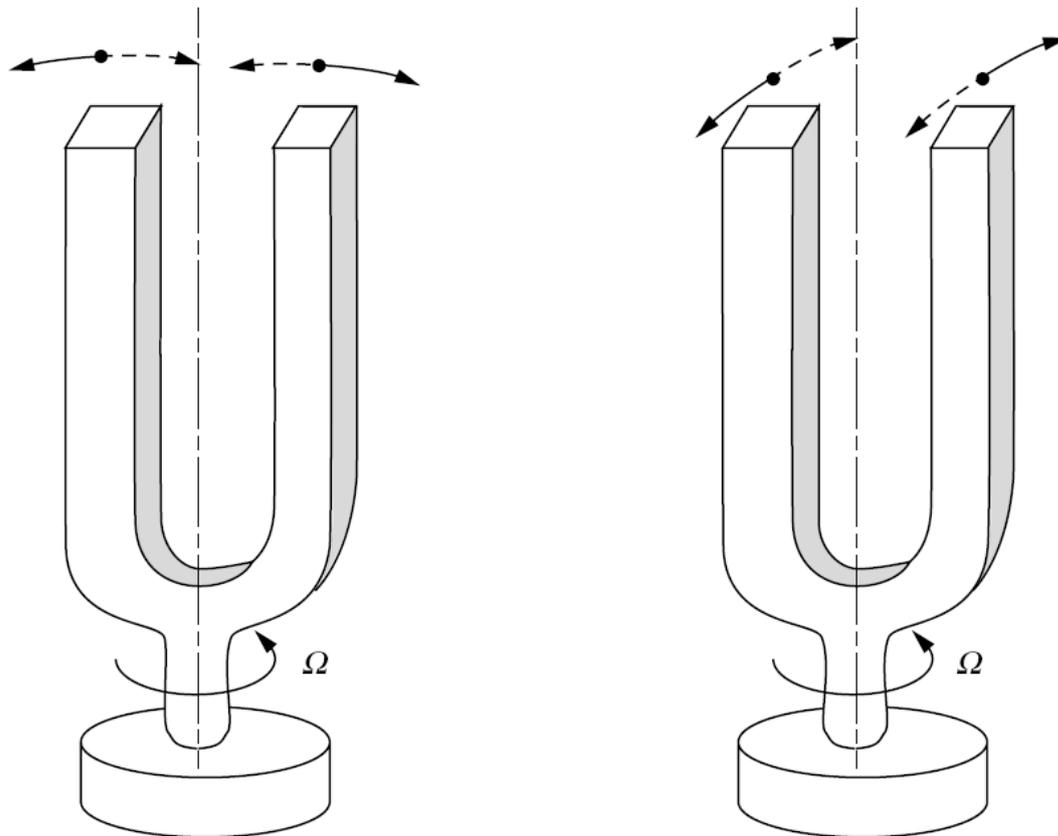
Figure 1—2 : Diapason 1.

Les structures vibrantes sont nombreuses et variées. Cependant, elles ont généralement un point commun : elles utilisent des modes de vibration relativement simples à modéliser. L'une de ces structures couramment étudiée est le diapason Figure 1—2, constitué de deux poutres encastées-libres réunies, soit par un corps compact (diapason n°1^{18 19}), soit par un demi-anneau de section carrée (diapason n°2²⁰).

¹⁸ SODERKVIST, J, *Micromachined gyroscopes*. Dig. 7th International Conference on Solid-State Sensors and Actuator, 1993, page 638-641.

¹⁹ MATSUDO, H., ISHIHARA, M., KAWASAKI, S., YUKAWA, J., and HATANAKA, M., *Quartz crystal element for angular rate sensor*. International Frequency Control Symposium and Exhibition, 2000, pages.91–95.

²⁰ ULITKO, I., *Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope*. International Frequency Control Symposium, 1995, pages. 786–793.



1^{er} mode : vibration naturelle du diapason :
branches en opposition de phase : (mode
entretenu)

2^{ème} mode : vibrations de flexion autour de
l'axe longitudinal induites par les forces de
Coriolis (mesure de la vitesse de rotation Ω)

Figure 1—3 : Diapason 2.

Ce type de gyroscope présente l'avantage d'être simple à réaliser dans des matériaux piézo-électriques tels que le quartz ou la céramique. Les différents modèles mathématiques qui en décrivent le fonctionnement restent relativement simples. De plus, les nombreuses publications traitant de ces types de gyroscope prouvent qu'ils sont une base pour l'élaboration de structures plus complexes. On dédie généralement une poutre à l'excitation de la structure, la seconde servant à recueillir le signal de mesure. Les deux modes de vibration des poutres sont des modes de flexion dans les plans horizontal et vertical du gyroscope. Nous jouons sur le couplage mécanique par la base pour mettre en résonance la structure tout en limitant l'amortissement de celle-ci sur ses points de fixation. Cette solution simple présente des inconvénients majeurs liés au couplage mécanique entre les deux poutres, avec notamment l'apparition d'un couple à l'encastrement. Ce couple va nuire au facteur de qualité car il n'est pas équilibré. Au plan électrique, un problème est la réjection du signal

électrique du primaire sur le signal de détection. Il convient donc d'utiliser une méthode de détection très sélective. Ces couplages s'amplifient lorsque chaque poutre supporte à la fois l'excitation et la détection.

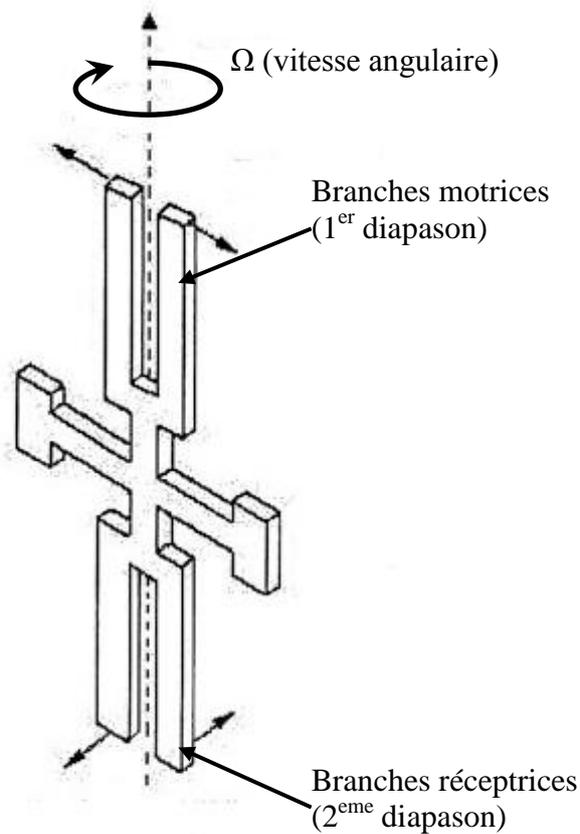


Figure 1—4 : QRS Systron Donner.

Le QRS (Quartz Rate Sensor) de Systron Donner, Figure 1—4, est l'illustration parfaite de cette association de plusieurs poutres. En effet, si la structure est parfaitement symétrique par rapport au centre du dispositif, le couplage mécanique est idéal et l'amortissement par les supports est négligeable, de plus la structure reste équilibrée lorsqu'elle subit une giration.

Un autre exemple est le gyroscope à trois dents²¹ Figure 1—5. Les deux poutres latérales excitent la poutre centrale dans le plan horizontal du gyroscope par réaction mécanique aux

²¹ SATOH, A, OHNISHI, K, TOMIKAWA, Y, *Characteristics of the piezoelectric vibratory gyrosensor constructed using a trident tuning-fork resonator*. IEEE Ultrasonics Symposium, 1998.

encastremets. Cette même poutre centrale sert à mesurer la vitesse angulaire par une vibration dans le plan vertical. L'avantage d'une telle structure est d'assurer une vibration primaire parfaite à la poutre de détection. De plus, cette configuration permet de dédier entièrement la poutre centrale à la mesure, évitant ainsi de faire cohabiter sur celle-ci des électrodes d'excitation et de détection. Le couplage électrique est ainsi minimisé.

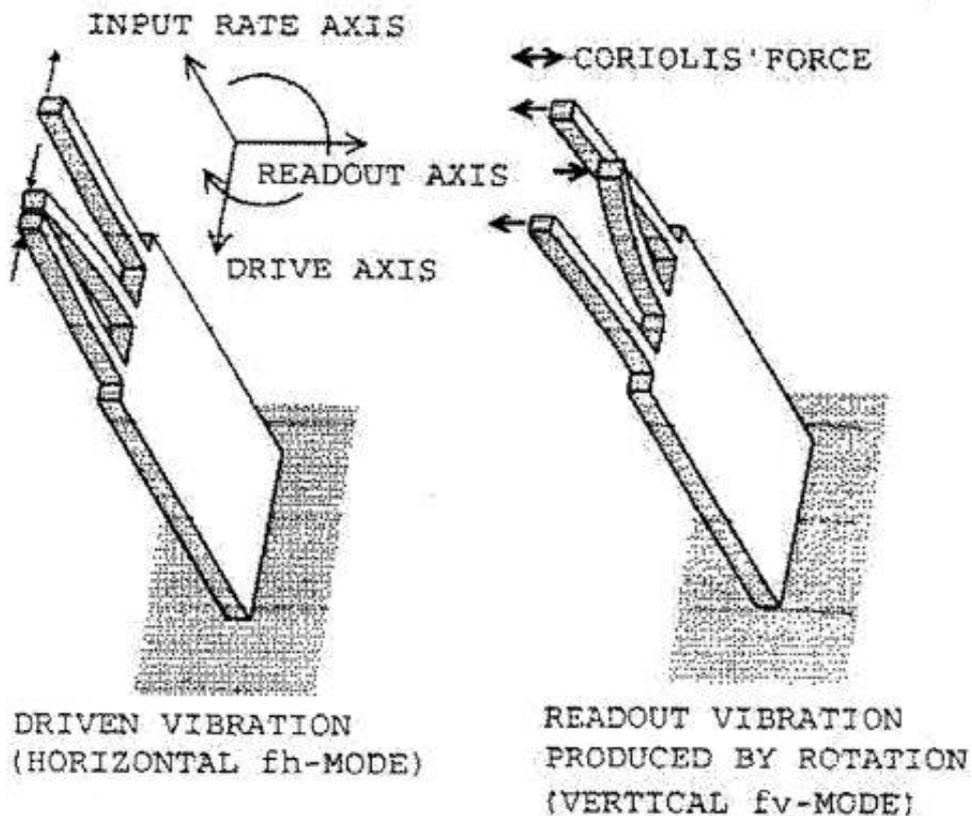


Figure 1—5 : Trident.

Une seconde structure intéressante est l'anneau ou bague, Figure 1—6. Les deux modes de vibration en présence sont des modes de déformation elliptique largement détaillés dans la littérature²² ou les documentations techniques²³. La Figure 1—7 montre les déformées de ce type de gyroscope. Celles-ci se trouvent dans le même plan que la structure.

²² YANG, J.S., FANG, H.Y., and JIANG, Q., *Analysis of a few piezoelectric gyroscopes*. International Frequency Control Symposium and Exhibition, 2000, pages 79–86.

²³ BIENAIME, F., *Théorie des gyros vibrants*. Note technique SAGEM, 1994, n°94-11-2508.

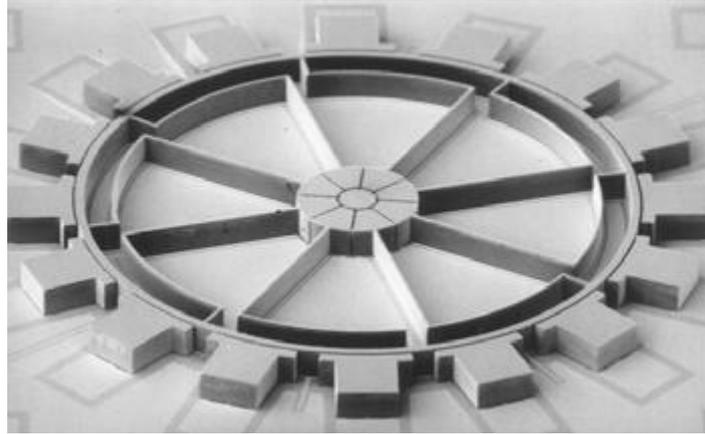


Figure 1—6 : Micro-gyroscope anneau vibrant [Najafi, Michigan].

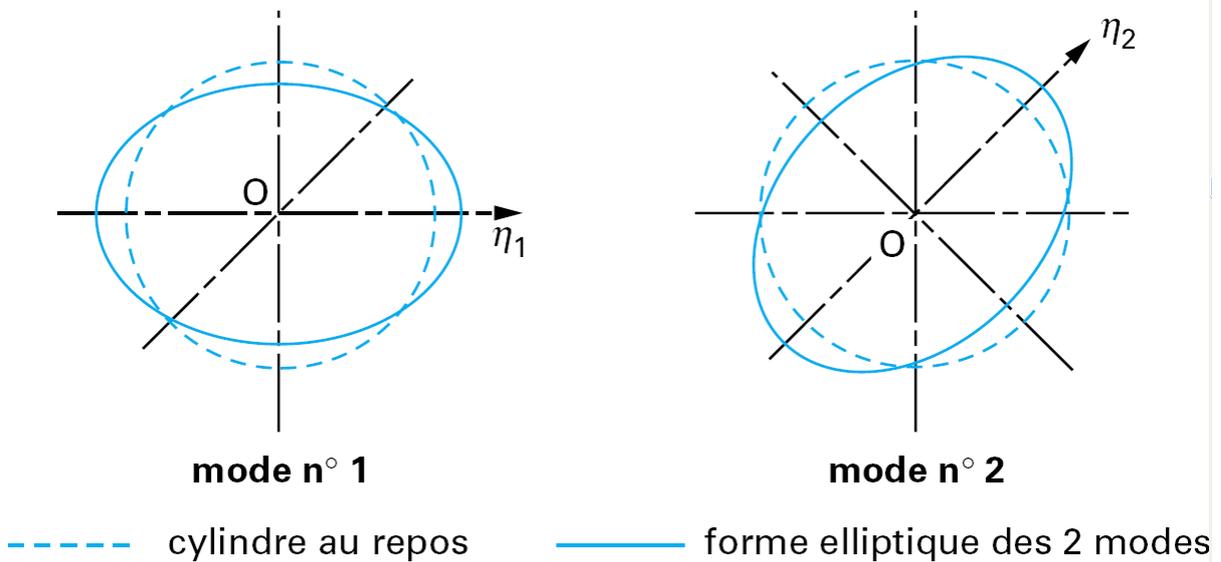


Figure 1—7 : Modes du gyromètre en anneau.

Dans la continuité de ce type de vibration, nous trouvons le HRG²⁴ (Hemispherical Resonator Gyroscope), Figure 1—8, de Litton. Les modes de vibration primaire et secondaire sont de même nature que ceux de l'anneau. Il faut simplement imaginer un effet tridimensionnel à rajouter aux déformées décrites auparavant. Au vu de la Figure 1—8, nous pouvons considérer que les déformées restent concentrées sur la couronne basse du résonateur. Les systèmes de ce type ont joué un rôle important dans l'histoire des gyroscopes (travaux de

²⁴ LYNCH, D.D., *Principle, Design, and Performance*. Symposium Gyro Technology, 1992, Stuttgart, pages 9.1-9.6.

Bryan).

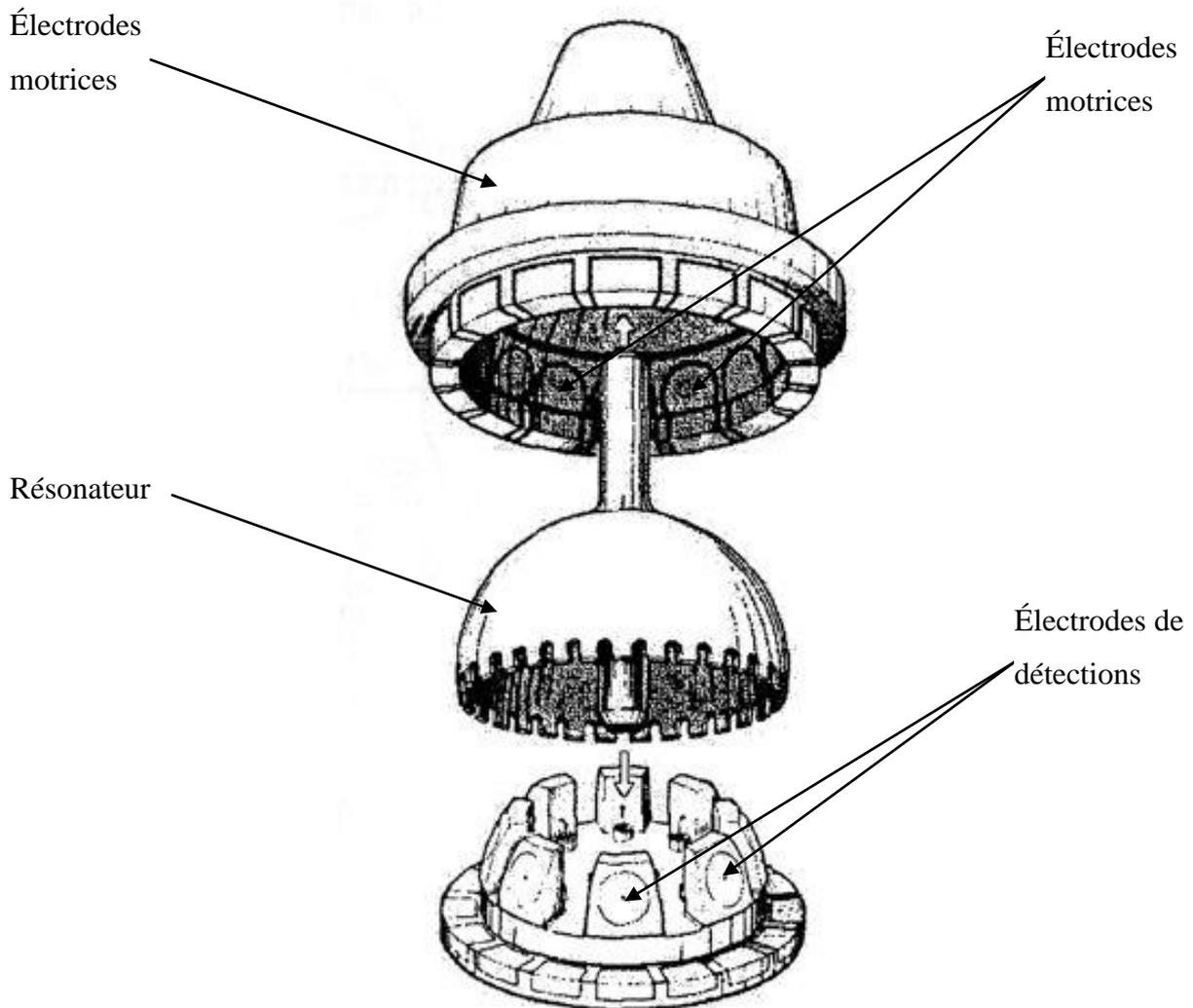


Figure 1—8 : HRG (Hemispherical Resonator Gyroscope).

S'apparentant aux systèmes à bols ou hémisphériques, nous pouvons citer le cylindre creux, dont le mode primaire est une torsion du cylindre et le mode secondaire une déformation en corolle appelé "mode corne". Les informations recueillies à ce jour laissent penser que ce type de gyroscope n'est en réalité pas disponible actuellement sur le marché. Il est important de mentionner dans ce mémoire le *QuapasonTM* de SAGEM²⁵, Figure 1—9. Il est constitué de quatre poutres parfaitement couplées par la base et dimensionnées de telle sorte que le

²⁵ LEGER, Pierre, *QuapasonTM – A new low-cost vibrating gyroscope*. Symposium Gyro technologie, Stuttgart, 1996.

transfert d'énergie par le socle soit nul ou quasi nul. Les deux modes de vibration sont topologiquement différents mais les dimensions de ce gyroscope ont été calculées pour avoir deux modes de vibration à la même fréquence. Nous remarquons que les déformées sont des flexions non perpendiculaires aux axes X ou Y .

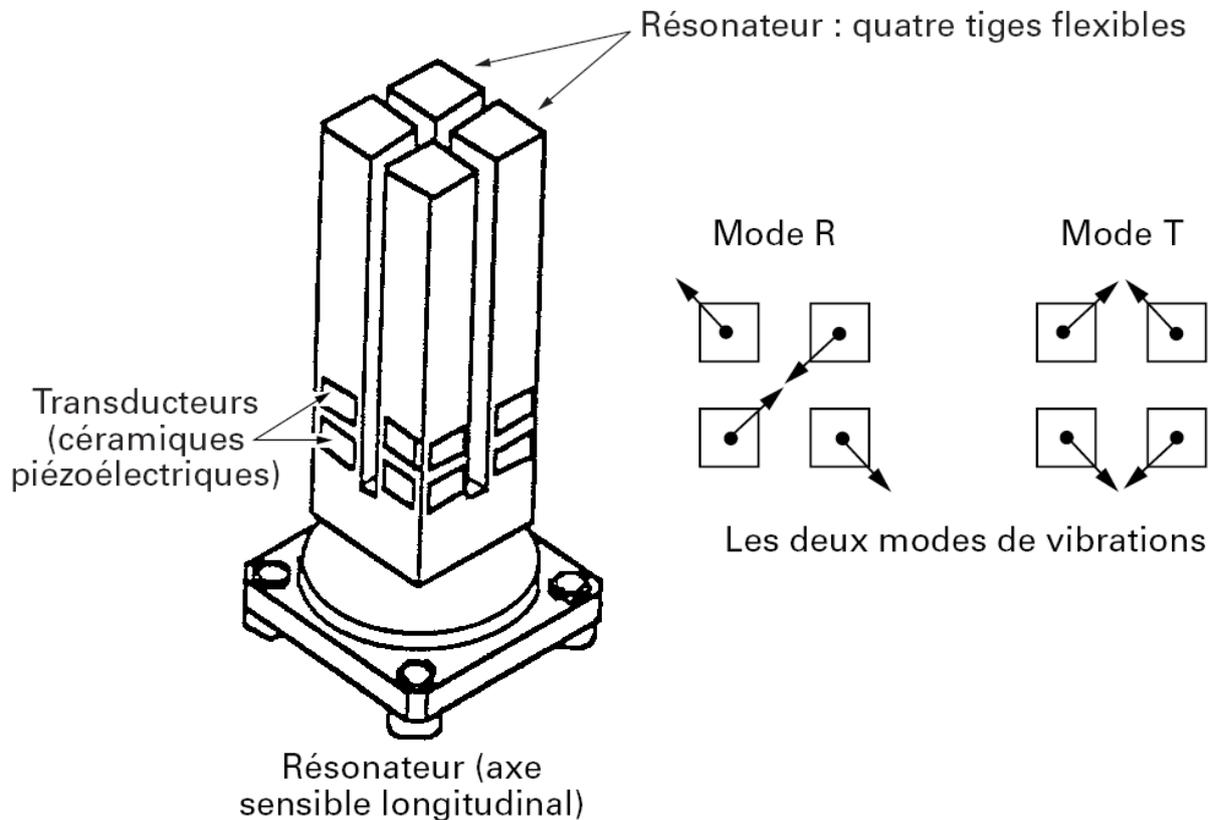


Figure 1—9 : Quapason *TM*.

1.4 Contexte des travaux

Trois thèses ont déjà été réalisées à FEMTO-ST sur le sujet des gyromètres deux axes. La première réalisée par Olivier Bel, intitulée « Gyromètre à quartz 2-D micro-usiné », a été soutenue en 2001. Ensuite Charles Haye²⁶ a soutenu en 2004 une thèse sur le sujet « Conception et réalisation d'un micro-gyromètre sur substrat silicium ». Enfin, la thèse de

²⁶ HAYE, Charles, *Conception et réalisation d'un micro-gyromètre sur substrat silicium*, 2004, 204 pages. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.

Hubert Hantz²⁷, « Étude d'un gyromètre piézoélectrique 2 axes » a été soutenue en 2006.

Même si les problématiques des thèses d'Olivier Bel et Hubert Hantz sont relativement différentes du fait que leurs gyromètres sont fabriqués en quartz, matériau piézo-électrique présentant de bonnes caractéristiques mécaniques, leurs travaux restent primordiaux pour comprendre le fonctionnement du gyromètre en étoile. Il est donc essentiel de citer ces travaux qui sont le point de départ de l'étude, et qui expliquent le principe de fonctionnement du gyromètre à deux axes en étoile.

La thèse de Charles Haye est pour nous le travail initial le plus intéressant au plan technique et peut être considérée comme un point de départ pour l'optimisation et la réalisation de notre capteur. Le point de similitude essentiel de nos deux études est que le matériau utilisé est le même : le silicium. En particulier nous pouvons reprendre à notre compte les résultats des travaux effectués par Charles Haye sur l'étude des symétries du cristal de silicium pour déterminer un plan correct pour la réalisation du gyromètre. De plus cela nous permettra aussi de nous servir de l'expérience qu'il a acquise au Centre de Microtechnologie Industriel de L'EPFL²⁸ pour la réalisation en salle blanche du gyromètre. Cependant, certaines différences importantes seront à prendre en compte, et vont modifier de manière notable le gyromètre. Par exemple, le changement du type de détection du mouvement secondaire, Charles Haye ayant choisi une mesure capacitive avec des peignes interdigités. Dans notre cas, il a été décidé de réaliser une détection par voie optique ; de ce fait les peignes deviennent inutiles et sont supprimés. Leur suppression entraîne alors un redimensionnement du gyromètre pour que ses fréquences propres respectent le cahier des charges.

²⁷ HANTZ, Hubert, *Étude d'un gyromètre piézo-électrique 2 axes*, 2006, 151 pages. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté.

²⁸ École Polytechnique Fédérale de Lausanne

1.5 Le silicium

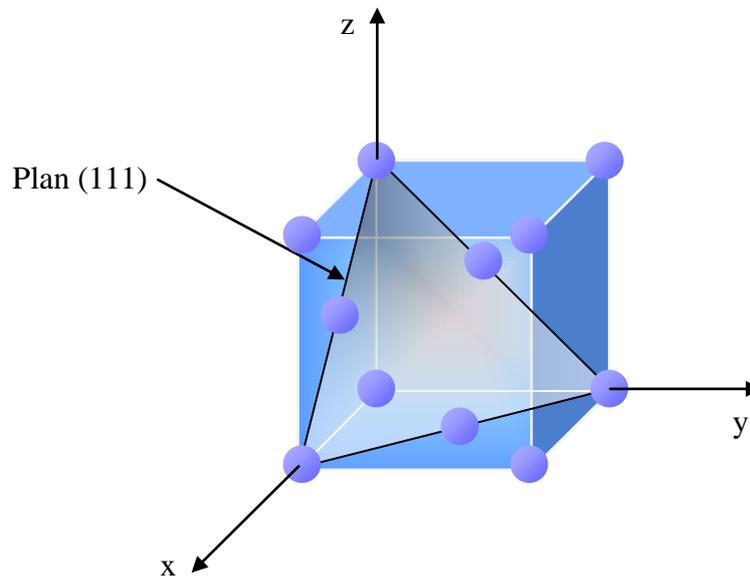


Figure 1—10 : Plan cristallin du silicium.

Le silicium est un monocristal ayant une structure cubique face centrée. Il est principalement fabriqué en utilisant la méthode de Czochralski. Cette méthode consiste à tremper un germe de silicium, lui-même monocristallin, à la surface d'un bain de silicium légèrement chauffé au dessus de son point de fusion, et à tirer à faible vitesse en imprimant une rotation. Cela a pour effet de solidifier le silicium et de reproduire l'orientation du germe.

Le silicium est ensuite découpé en wafers suivant l'orientation souhaitée, et enfin rodé puis poli. Nous pouvons aussi ajouter des étapes de dopage par implantation ionique ou par diffusion sous vide pour améliorer la conductivité du silicium, des méplats sont aussi faits pour reconnaître les différentes orientations et dopages (pour les wafers de taille supérieure à 200 mm, nous faisons plutôt des encoches). Ce qui a fait le succès du silicium en électronique, outre sa caractéristique de semi-conducteur est le fait qu'il est possible d'obtenir des cristaux d'une très grande pureté. Il existe d'ailleurs trois classes de pureté pour le silicium : le silicium métallurgique, de qualité solaire, et de qualité électronique, qui ont des taux de puretés respectifs de 99%, 99.9999%, et 99.99999999%.

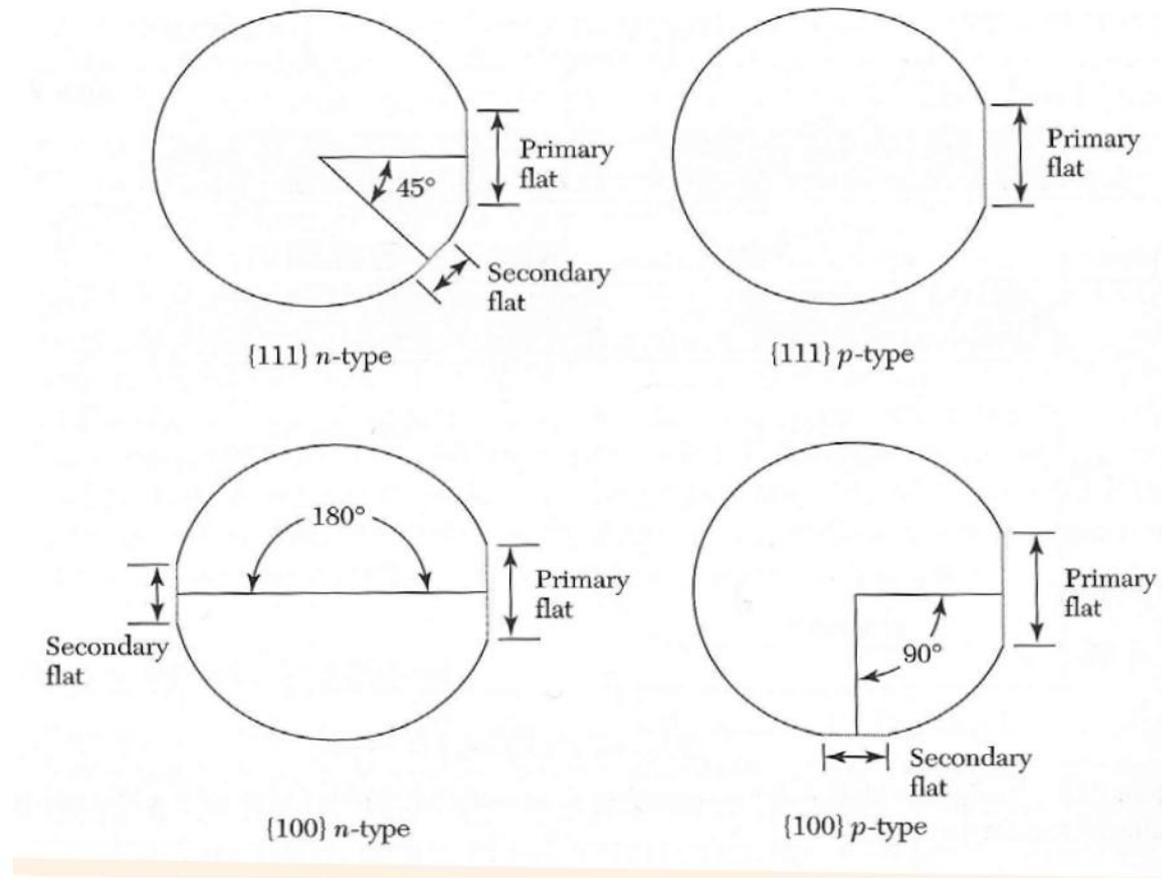


Figure 1—11 : Orientation des wafers, dans la majorité des cas le « Primary flat » est fourni par le plan (110).

Nous reprendrons les constantes matérielles proposées par Charles Haye à partir de la littérature²⁹. Nous avons donc les matrices caractéristiques suivantes dans le plan cristallographique (111) :

La matrice des coefficients élastiques possède la forme suivante :

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} \end{bmatrix}$$

²⁹ ROYER, Daniel et DIEULESAINT, Eugene. Onde élastique dans les solides-propagation libre et guidée, volume 1. Masson, 1996.

La matrice de conductivité thermique a la forme :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

La matrice des coefficients de dilatation présente la même forme, à savoir :

$$[\alpha] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs suivantes :

$$c_{11}=166, c_{12}=63.9, c_{44}=79.6 \text{ en (GPa)}, \lambda=1.31 \text{ (W.cm}^{-1}\text{.K}^{-1}\text{)}, \text{ et } \alpha=2.6 \cdot 10^{-6} \text{ (K}^{-1}\text{)}$$

Comme l'a montré Charles Haye dans sa thèse, si nous effectuons un changement de repère³⁰ pour se placer dans le plan (111), en faisant bien attention à respecter les règles de changement de repère dans un tenseur d'ordre 4 (nous pouvons retrouver en annexe les calculs pour effectuer ce changement de repère), nous retrouvons un tenseur d'élasticité qui a une forme similaire à celle du quartz dans le repère cristallographique. Cette similitude sur la position des coefficients entre les matrices d'élasticité du quartz et du silicium permet de transférer la géométrie du gyromètre en étoile en quartz vers le silicium dans un plan (111). En effet, dans cette configuration, les constantes élastiques du silicium restent inchangées lors d'une rotation de 60° autour de la normale au plan du substrat.

$$[c]_{\text{quartz}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & -c_{14} & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ c_{14} & -c_{14} & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & c_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{14} & \frac{c_{11} - c_{12}}{2} \end{bmatrix}$$

Avec les valeurs suivantes pour le quartz :

³⁰ SEMAY, Claude, SIVESTRE-BRAC, Bernard, *Introduction au calcul tensoriel application à la physique*. 2007, Dunod.

$c_{11}=86.74$, $c_{12}=6.98$, et $c_{13}=11.91$, $c_{14}=-17.91$, $c_{33}=107.2$, et $c_{44}=57.94$ (GPa)

Et pour le silicium dans le plan (111) avec une rotation de 30° suivant l'axe z :

$c_{11}=195$, $c_{12}=54.6$, et $c_{13}=44.9$, $c_{14}=-13.7$, $c_{33}=204$, et $c_{44}=60.5$ (GPa)

1.6 Le gyromètre en étoile

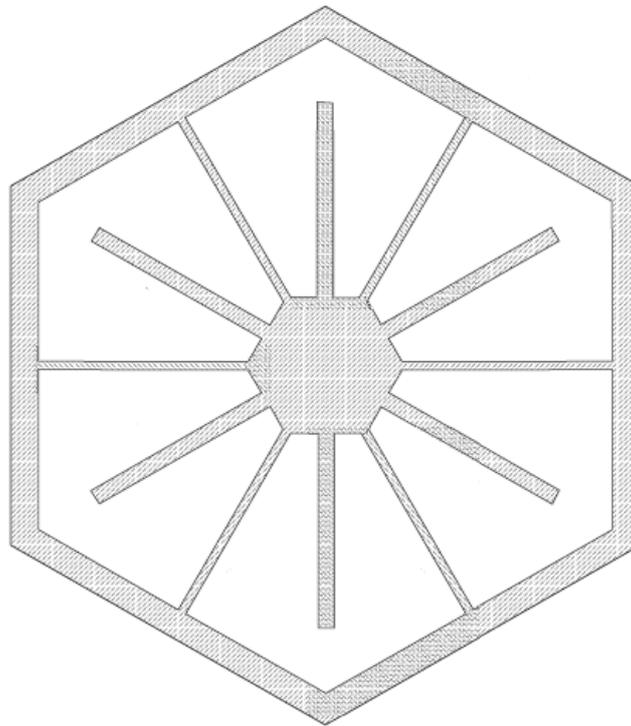


Figure 1—12 : Gyromètre en étoile.

1.6.1 Historique

Ce gyromètre a été pensé par le Professeur Charcosset, qui avait imaginé au départ une structure avec 4 poutres vibrantes en flexion placées à 90° les une des autres. La vibration primaire de ces poutres se fait perpendiculairement au plan, et l'application de la force de Coriolis génère un mouvement de flexion des poutres dans le plan.

L'un des problèmes rencontré par le Professeur était que les wafers de coupe Z en quartz ne convenaient pas pour la symétrie à 90° , la maille du quartz étant hexagonale. Pour y remédier,

il était nécessaire de disposer les poutres à 60° les unes des autres, cela permettant en outre d'avoir une structure équilibrée et donc de piéger l'énergie du résonateur sans perte dans les supports.

Pour des raisons d'anisotropie de l'usinage chimique, les concepteurs ont décidé de relier ces bras par un noyau de forme hexagonale facilitant la réalisation, chaque bras se trouvant au milieu des faces de l'hexagone pour un encastrement idéal.

Pour des raisons semblables, les concepteurs ont décidé de supporter la structure gyroskopique par l'intermédiaire de 3 bras de suspension placés à 120° , l'ensemble étant supporté par un cadre hexagonal.

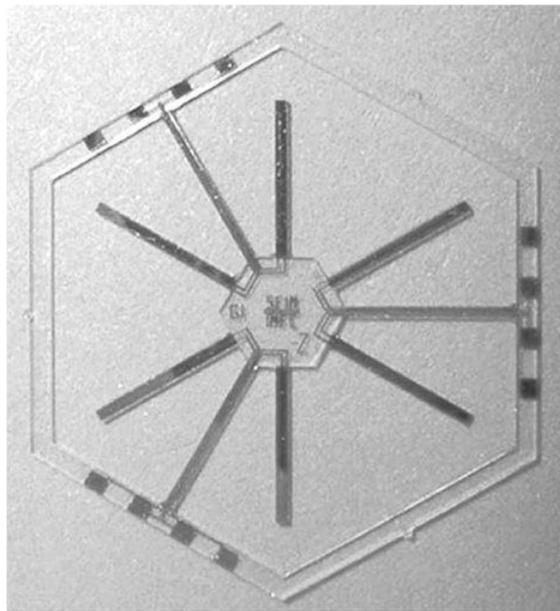


Figure 1—13 : Gyromètre étoile en quartz.

Ces premiers travaux sur les structures en quartz ont permis d'arriver aux conclusions suivantes :

- Il est possible de réaliser des mesures de vitesse angulaire suivant deux axes comme le stipule le brevet.
- Le quartz possède une grande stabilité en température. Le mode primaire possède une faible dérive linéaire, de l'ordre de $0.04\%(^{\circ}/s)$, et la dérive parabolique des modes de détection avoisine $0.006\%(^{\circ}/s)$, entre $27^{\circ}C$ et $70^{\circ}C$.

Lors de la réalisation de prototypes l'usinage humide a montré des limites et notamment le fait :

- qu'il ne permet pas de réaliser des encastrements de qualité, car on assiste à l'apparition de facettes orientées suivant les plans cristallins bien précis.
- qu'un mode parasite (le mode trèfle) s'est alors trouvé proche des deux autres modes et a donc fait chuter le facteur de qualité du système (voir Figure 1—17).

Les techniques d'alignement utilisées alors présentaient trop d'imprécision, le défaut étant typiquement de l'ordre de 5 μm . Puis, le fait de ne pas pouvoir rejeter le mode trèfle affecte le signal de détection.

De cet examen, l'idée est venue de trouver un autre matériau permettant de réaliser ce type d'application, avec les contraintes suivantes : amélioration de la précision d'alignement, et amélioration de la gravure en vue de supprimer les problèmes de facettisation. Le silicium est déjà bien connu, du fait de ses applications en micro-électronique, et il est depuis longtemps le matériau standard dans les MEMS. Les techniques actuelles utilisées en salle blanche permettent assez facilement d'atteindre des précisions d'alignement de l'ordre du micron voire moins, ce qui répond déjà à la première contrainte. De plus, le recours à des techniques de gravure anisotrope, telle que la gravure par plasma (Deep Reactive Ion Etching), doit permettre de supprimer les facettes, et résoudrait la seconde contrainte. A la fin de la thèse de Charles Hays, les conclusions étaient les suivantes :

- Il est possible de réaliser un gyromètre en étoile sur substrat silicium comme dans le cas du quartz.
- Les caractérisations par voie optique ont permis de mettre en évidence une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et les simulations. Les écarts entre les deux n'excèdent pas 0.1% pour les modes d'excitation ou de détection, cela étant en grande partie dû au fait de l'usinage DRIE, qui supprime les facettes créées par l'usinage par voie humide.

Malgré ces résultats encourageants, un certain nombre de problèmes continuent d'apparaître :

À cause de la profondeur importante (520 μm), la gravure du silicium est réalisée en deux étapes, ce qui peut entraîner un défaut d'alignement de l'ordre du micromètre, et donc modifier la vibration du résonateur.

De plus, le phénomène de sous-gravure a eu des effets néfastes sur les peignes interdigités, allant jusqu'à les supprimer dans certain cas.

À cause de la sous-gravure, Charles Hays a été contraint d'arrêter le procédé avant la libération de l'ensemble des parties du capteur. La libération de la structure nécessite alors une action mécanique, ce qui n'a pas été possible dans tous les cas.

L'autre difficulté rencontrée est l'alignement avant la soudure anodique, comme il l'écrit : « les techniques d'alignement furent tout aussi artisanales » page 124. La soudure ne permet donc pas une grande répétabilité, du fait qu'elle dépend beaucoup « du coup de main » de l'utilisateur.

Notre étude débute donc à ce point avec pour objectif de finaliser la modélisation de la structure, d'optimiser l'entretien par excitation électrostatique des modes primaires, la suppression des modes parasites à une fréquence proche des modes d'excitation et de détection.

Il s'agit ensuite d'élaborer un procédé de fabrication fiable grâce aux techniques de salle blanche, et de le mettre en œuvre pour la réalisation de prototypes de gyromètres MEMS, en tenant compte du fait que la détection se fait par voie optique, même si elle ne rentre pas dans le cadre de cette étude. Comme nous le verrons dans la suite, nous utiliserons une excitation électrostatique. Nous appliquerons cette force sur trois des poutres positionnées à 120° , et avec l'aide de l'équilibrage dynamique à la fréquence de résonance, les trois autres poutres se mettront à vibrer.

1.6.2 Fonctionnement du gyromètre

Le gyromètre en étoile est un gyromètre deux axes. Il est constitué de six poutres vibrantes orientées à 60° les unes des autres, et reliées entre elles par un noyau. Ce noyau est lui-même relié au monde extérieur par six suspensions placées entre chaque poutre, comme nous

pouvons le voir sur la Figure 1—12.

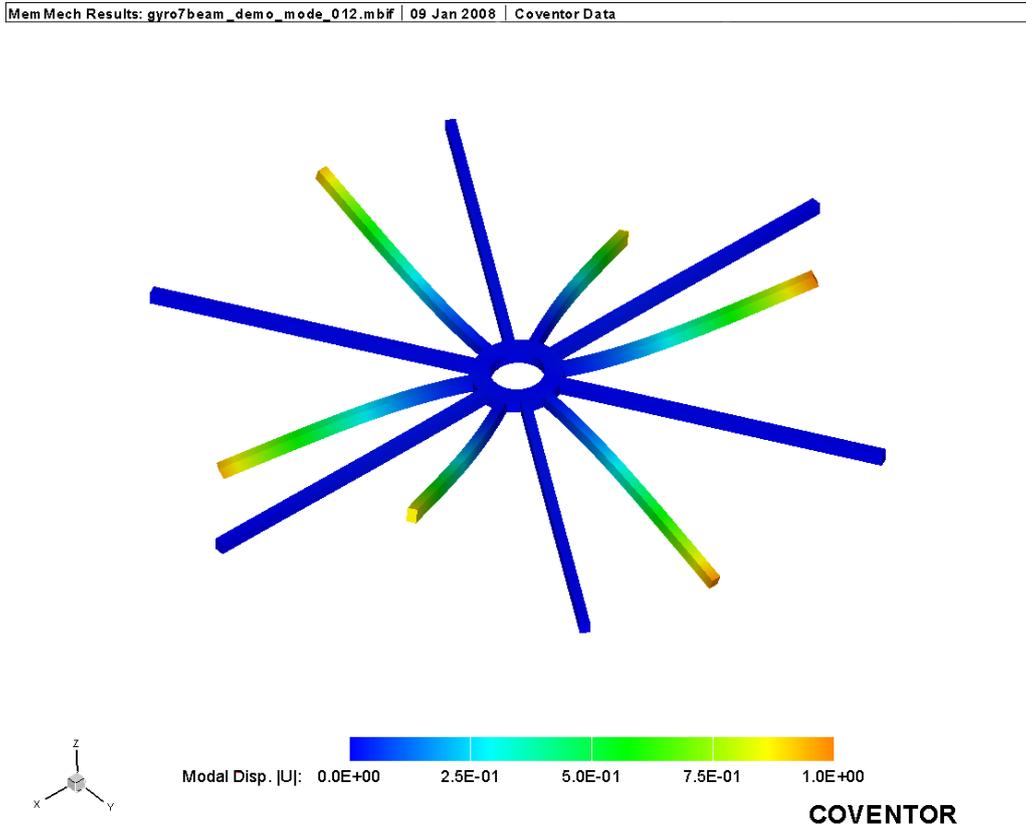


Figure1—14 : Mode Primaire.

Nous utilisons trois des modes propres de la structure pour mesurer la vitesse angulaire. Un premier mode dit *mode primaire* sert de mode d'excitation. Dans ce mode d'excitation, les poutres qui constituent le gyromètre vibrent en flexion suivant un axe normal au plan du gyromètre. Trois des poutres situées à 120° vibrent en phase et avec une même amplitude, et les trois autres vibrent en opposition de phase avec les précédentes, comme nous pouvons le voir sur la Figure1—14. Ce premier mode est un mode équilibré.

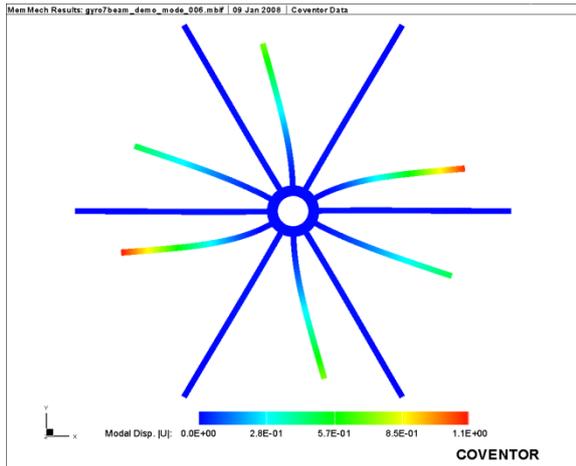


Figure1—15 : Mode Secondaire « Ω_x ».

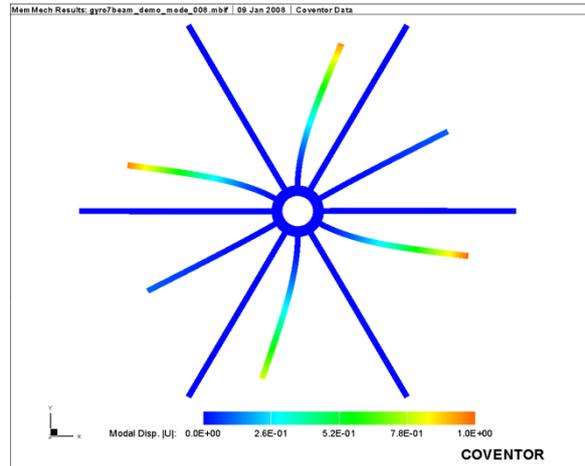


Figure1—16 : Mode Secondaire « Ω_y ».

Les deux autres modes de détection du gyromètre sont des modes de vibration où tout se passe dans le plan du gyromètre. Dans ces modes les poutres vibrent en flexion dans le plan du gyromètre.

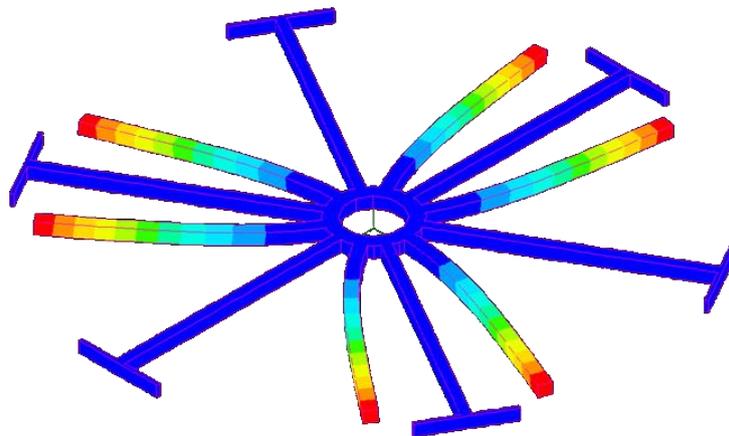


Figure 1—17 : Mode trèfle.

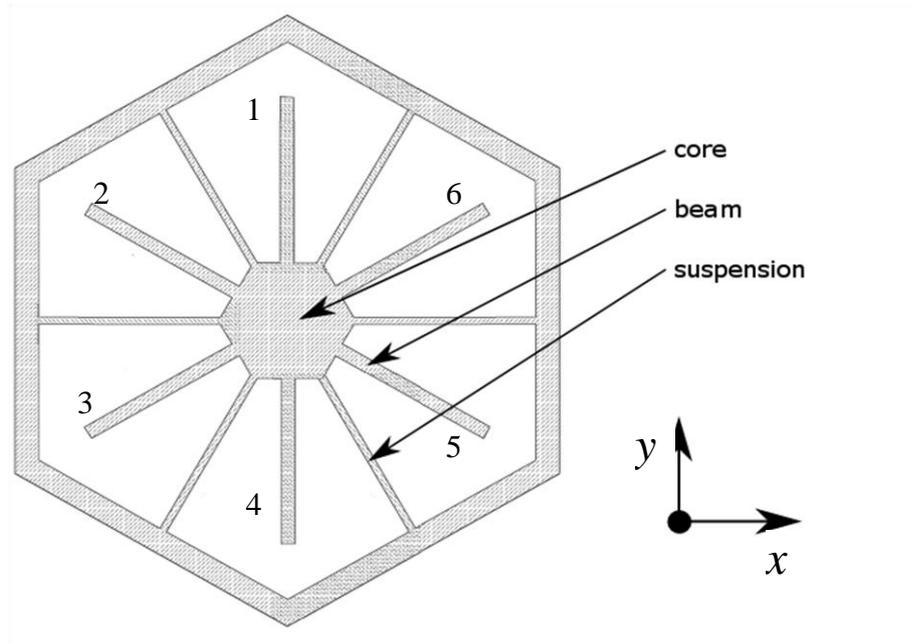


Figure 1—18 : Définition du gyromètre en étoile.

En considérant que le gyromètre se déforme conformément au schéma présenté à la Figure 1.14, nous posons alors pour $n=1$ à 6, les vecteurs amplitudes en bout de chaque poutre. S'il existe une vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ contenue dans le plan XY, nous pouvons alors écrire :

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{i} + \Omega_y \vec{j}$$

Nous définissons alors le vecteur $\vec{\Omega}_n$, représentant la vitesse angulaire appliquée au bout de chaque poutre dans leur repère local respectif $(0, x_n, y_n)$.

Dans le repère local de chaque poutre, la vitesse angulaire s'écrit alors :

$$\vec{\Omega}_n = (-\Omega_x \sin\alpha + \Omega_y \cos\alpha) \vec{i}_n - (\Omega_x \cos\alpha + \Omega_y \sin\alpha) \vec{j}_n$$

La force de Coriolis exercée sur chaque poutre s'écrit alors :

$$\vec{F}_{cn} = 2m\vec{\Omega}_n \wedge \vec{u}_n$$

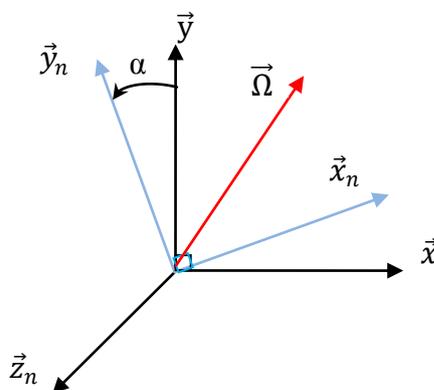
Seule la rotation autour de l'axe de la poutre entraîne un mouvement suivant l'axe \vec{j}_n . Nous

ne considérerons donc que les rotations suivant \vec{i}_n , et nous obtenons alors la force de Coriolis suivante pour chaque poutre :

| | |
|--|---|
| Poutre 1 : $\alpha_1 = 0$ | $\vec{F}_{c1} = 2m\Omega_y\dot{u}_1\vec{j}_1$ |
| Poutre 2 : $\alpha_2 = \frac{\pi}{3}$ | $\vec{F}_{c2} = 2m\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_x + \frac{1}{2}\Omega_y\right)\dot{u}_2\vec{j}_2$ |
| Poutre 3 : $\alpha_3 = \frac{2\pi}{3}$ | $\vec{F}_{c3} = -2m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_x + \frac{1}{2}\Omega_y\right)\dot{u}_3\vec{j}_3$ |
| Poutre 4 : $\alpha_4 = \pi$ | $\vec{F}_{c4} = -2m\Omega_y\dot{u}_4\vec{j}_4$ |
| Poutre 5 : $\alpha_5 = \frac{4\pi}{3}$ | $\vec{F}_{c5} = 2m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_x - \frac{1}{2}\Omega_y\right)\dot{u}_5\vec{j}_5$ |
| Poutre 6 : $\alpha_6 = \frac{5\pi}{3}$ | $\vec{F}_{c6} = 2m\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\Omega_x + \frac{1}{2}\Omega_y\right)\dot{u}_6\vec{j}_6$ |

Tableau 1-2 : Récapitulatif des forces sur chaque poutre en fonction des rotations suivant l'axe X et l'axe Y.

Nous observons qu'il existe une redondance dans les informations : les poutres 1, 2 et 3 donnent la même réponse que les poutres 4, 5 et 6 respectivement. Nous obtenons les forces de Coriolis suivantes dans le cas d'une rotation suivant l'axe X ou l'axe Y :



| | |
|---|---|
| $\vec{\Omega} = \Omega_x$ | $\vec{\Omega} = \Omega_y \vec{j}$ |
| $\vec{F}_{c1} = \vec{0}$ | $\vec{F}_{c1} = 2m\Omega_y \dot{u}_1 \vec{j}_1$ |
| $\vec{F}_{c2} = -m\sqrt{3}\Omega_x \dot{u}_2 \vec{j}_2$ | $\vec{F}_{c2} = m\Omega_y \dot{u}_2 \vec{j}_2$ |
| $\vec{F}_{c3} = -m\sqrt{3}\Omega_x \dot{u}_3 \vec{j}_3$ | $\vec{F}_{c3} = -m\Omega_y \dot{u}_3 \vec{j}_3$ |

Tableau 1-3 : Récapitulatif des forces sur les poutres pour une rotation suivant l'axe X ou suivant l'axe Y.

Le gyromètre en étoile est donc, comme l'ensemble des capteurs inertiels, un capteur passif. Contrairement aux capteurs actifs³¹ qui convertissent directement la grandeur mesurée en grandeur électrique, les capteurs passifs utilisent un élément intermédiaire, basé sur un phénomène physique pour réaliser la mesure.

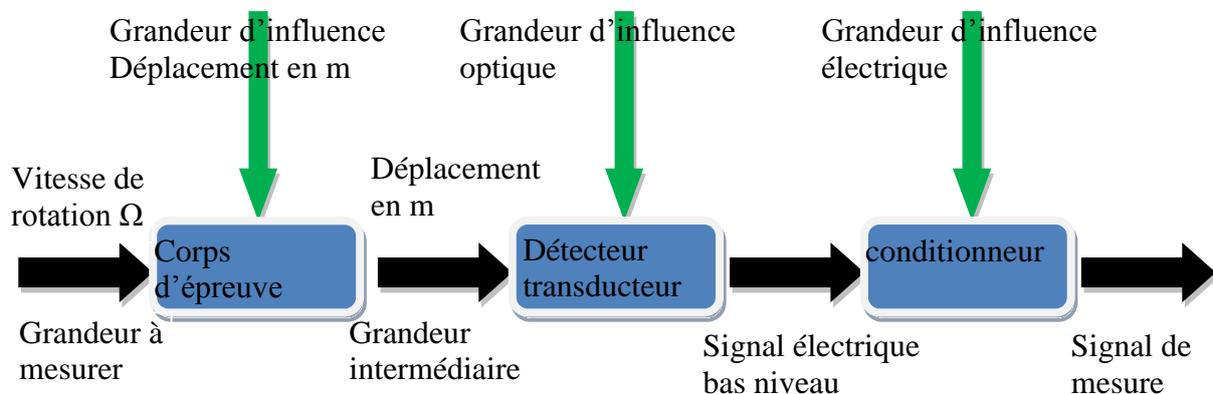


Figure 1—19 : Schéma bloc du gyromètre en étoile.

Dans l'étude qui suit, nous nous intéresserons essentiellement à la partie « corps d'épreuve ». Celui-ci convertit la grandeur à mesurer (la vitesse de rotation du gyromètre) en grandeur intermédiaire (le déplacement des poutres). Nous mettrons en équation l'effet de la force de

³¹ Nous pouvons notamment citer les capteurs piézo-électriques (où une déformation mécanique du cristal entraîne l'apparition de charges aux bornes du cristal), ou bien la thermoélectricité (tel que les thermocouples qui génèrent une f.e.m. qui est fonction de la température à laquelle ils sont soumis).

Coriolis sur une poutre, pour obtenir une idée du fonctionnement du capteur, ainsi qu'un premier dimensionnement de celui-ci. Nous réaliserons ensuite une simulation numérique plus poussée pour dimensionner complètement le gyromètre. Après cela, nous passerons à la phase de réalisation du gyromètre. Nous parlerons un peu de la partie « détecteur transducteur » en fin de document, mais nous ne rentrerons pas dans les détails et n'examinerons pas tous les aspects physiques du principe de mesure, dont nous ne donnerons que les grandes lignes.

1.7 Conclusion

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre les structures existantes sont nombreuses et variées, tant au niveau de leurs méthodes d'excitation ou de détection que de leur conception. Il est difficile de départager ces structures en se basant uniquement sur leur principe de fonctionnement. En réalité, les performances des capteurs dépendent beaucoup du soin appliqué au maintien de l'équilibrage structurel lorsque la giration est appliquée, de la sélectivité des moyens d'excitation et de détection, de la qualité des matériaux, ainsi que de la qualité des techniques d'usinage employées. Ceci rend parfois les développements longs, pour des avancées modestes. Le gyromètre en étoile ne peut produire de bonnes performances sans que de nombreux problèmes aient été réglés, et le travail d'optimisation nécessite des itérations dans la boucle conception-réalisation. Dans le développement du système, il est donc nécessaire de passer à plusieurs reprises du général au particulier, et inversement, comme nous le verrons dans la suite du mémoire.

Chapitre 2

Le gyromètre à poutres vibrantes¹

Il est toujours utile de disposer d'un modèle analytique, même simple, sur lequel nous pouvons nous baser pour comprendre le fonctionnement du capteur. Cela permet ainsi d'évaluer l'influence d'un certain nombre de paramètres du capteur, ainsi que d'avoir une première idée de ses performances. Ces pré-études permettent en outre de valider les calculs faits par des logiciels d'éléments finis en les comparant à des modèles analytiques plus simples, dont la solution est parfaitement établie. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous allons étudier le comportement d'une poutre en flexion soumise à une vitesse angulaire. Enfin, nous tirerons un modèle numérique à partir de ce modèle analytique.

2.1 Modèle analytique de la poutre de Bernoulli

2.1.1 Poutre en silicium

Soit une poutre de silicium orientée suivant la direction x_2 , de longueur L , de hauteur h suivant l'axe x_3 , de largeur b suivant l'axe x_1 , et de masse volumique ρ . Nous formulons les

¹ Dans tout ce chapitre nous adopterons les conventions suivantes : celle d'Einstein (sur les indices en minuscule), la notation de Christoffel (sur les indices derrière les virgules qui désignent la dérivation) ainsi que la notation de Voigt (notation en majuscule pour les indices contractés).

hypothèses de la poutre de Bernoulli² à savoir :

- la section transversale reste orthogonale à la fibre neutre,
- la section de la poutre est indéformable,
- nous négligeons les contraintes de cisaillement.

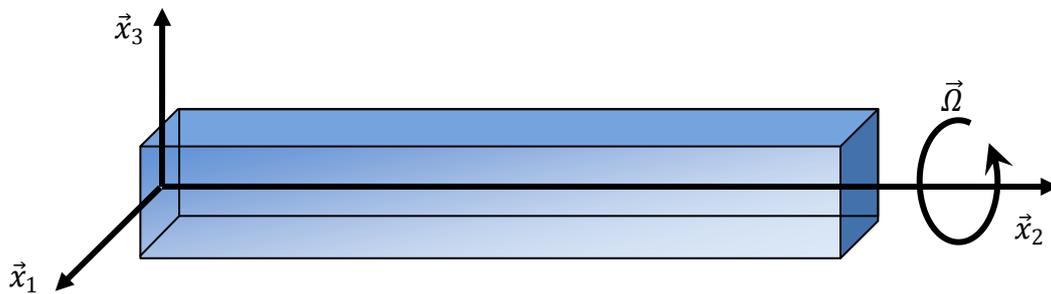


Figure 2—1 : Poutre orientée suivant l'axe x_2 .

Dans ces conditions, le déplacement présente la forme suivante :

$$\begin{aligned}U_1(M, t) &= w_1(x_2, t) \\U_2(M, t) &= -x_1 w_{1,2}(x_2, t) - x_3 w_{3,2}(x_2, t) \\U_3(M, t) &= w_3(x_2, t)\end{aligned}\tag{2-1}$$

où w_1 représente la déflexion locale de la poutre suivant l'axe x_1 en fonction de x_2 ; réciproquement, w_3 représente la déflexion locale de la poutre suivant l'axe x_3 en fonction de x_2 . On considère également qu'il n'y a qu'une contrainte axiale. Le tenseur des contraintes se réduit alors à :

² Ces hypothèses sont valables dans le cas de poutres dites élancées, autrement dit présentant un rapport longueur sur hauteur (ou largeur) supérieur à au moins 10.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

La loi de Hooke³ généralisée s'écrit :

$$T_I = c_{IJ} S_J + n_{IJ} \dot{S}_J$$

$$\begin{aligned} s_{IJ} T_J &= s_{IJ} c_{JK} S_K + s_{IJ} n_{JK} \dot{S}_K \\ &= \delta_{IK} S_K + s_{IJ} n_{JK} \dot{S}_K \\ &= S_I + s_{IJ} n_{JK} \dot{S}_K \end{aligned} \quad (2-3)$$

où δ_{ij} représente le symbole de Kronecker, qui est le tenseur identité. S représente le tenseur des déformations linéarisées :

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(U_{i,j} + U_{j,i})$$

En y substituant les hypothèses de Bernoulli, la loi de Hooke se simplifie :

$$T_2 = \frac{1}{s_{22}}(S_2 + \chi \dot{S}_2),$$

De plus, si la poutre est en rotation $\vec{\Omega}$ autour de son axe x_2 , nous avons :

$$\vec{V}(M, t) = \vec{U}(M, t) + \vec{\Omega} \times \vec{U}(M, t), \quad (2-4)$$

ce qui conduit, pour le champ des vitesses, aux équations:

$$\begin{aligned} V_1(M, t) &= \dot{w}_1 + \Omega w_3 \\ V_2(M, t) &= -x_1 \dot{w}_{1,2} - x_3 \dot{w}_{3,2} \\ V_3(M, t) &= \dot{w}_3 - \Omega w_1 \end{aligned} \quad (2-5)$$

³ Elle a été énoncée par le physicien anglais Robert Hooke en 1678 sous la forme « *ut tensio sic vis* » qui signifie littéralement « *telle extension, telle force* ».

2.1.2 Équations de mouvement et conditions aux limites

Expression de la fonctionnelle de Hamilton⁴

Pour déterminer l'équation de vibration de la poutre en flexion, il faut déterminer les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Hamilton, autrement dit déterminer les extrema de cette fonctionnelle, définie comme suit :

$$H = \int_{t_1}^{t_2} (E_c - E_d) dt \quad (2-6)$$

L'énergie de déformation E_d et l'énergie cinétique E_c sont des grandeurs extensives, ce qui signifie que l'énergie d'un ensemble est égale à la somme des énergies des parties qui constituent cet ensemble. En connaissant la densité d'énergie de déformation, nous pouvons calculer l'énergie de déformation de la poutre.

$$E_d = \frac{1}{2} \iiint_V (T_{ij} S_{ij}) dV \quad (2-7)$$

En utilisant le fait que seule T_2 diffère de zéro, nous arrivons à l'expression suivante pour l'expression de l'énergie de déformation⁵:

$$E_d = \frac{1}{2} \iiint_V \left(\frac{1}{S_{22}} ((S_2)^2 + \chi S_2 \dot{S}_2) \right) dV \quad (2-8)$$

$$E_d = \frac{1}{2S_{22}} \int_0^L \left(I_1 (w_{1,22})^2 + I_3 (w_{3,22})^2 + \chi (I_1 w_{1,22} \dot{w}_{1,22} + I_3 w_{3,22} \dot{w}_{3,22}) \right) dx_2 \quad (2-9)$$

Nous évaluons de la même façon l'énergie cinétique de la poutre, égale à l'énergie cinétique

⁴ En hommage au physicien Irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865).

⁵ Où $I_1 = \iint_S (x_1)^2 dS$ et $I_3 = \iint_S (x_3)^2 dS$ représentent les moments d'inertie de la section droite, et EI_1 et EI_3 représentent les rigidités flexionnelles de la poutre.

de chaque partie qui constitue la poutre, la masse volumique étant constante, car la poutre est fabriquée dans un seul cristal de silicium.

$$E_c = \frac{\rho}{2} \iiint_V (\overline{V(M, t)})^2 dV \quad (2-10)$$

$$E_c = \frac{\rho}{2} \iiint_V \left((V_1(M, t))^2 + (V_2(M, t))^2 + (V_3(M, t))^2 \right) dV \quad (2-11)$$

Nous remplaçons les expressions du champ des vitesses dans l'expression de l'énergie cinétique, dans le cas où la poutre subit une rotation Ω suivant l'axe x_2 .

$$E_c = \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(S(\dot{w}_1^2 + 2\Omega\dot{w}_1w_3 + \Omega^2w_3^2 + \dot{w}_3^2 - 2\Omega\dot{w}_3w_1 + \Omega^2w_1^2) \right. \\ \left. + (I_1\dot{w}_{1,2}^2 + I_3\dot{w}_{3,2}^2) \right) dy \quad (2-12)$$

La fonctionnelle de Hamilton est obtenue en substituant l'expression de l'énergie de déformation et de l'énergie cinétique dans l'équation de Hamilton.

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\rho}{2} \int_0^L \left(S(\dot{w}_1^2 + 2\Omega\dot{w}_1w_3 + \Omega^2w_3^2 + \dot{w}_3^2 - 2\Omega\dot{w}_3w_1 + \Omega^2w_1^2) \right. \right. \\ \left. \left. + (I_1\dot{w}_{1,2}^2 + I_3\dot{w}_{3,2}^2) \right) dx_2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2s_{22}} \int_0^L \left(I_1(w_{1,22})^2 + I_3(w_{3,22})^2 + \chi(I_1w_{1,22}\dot{w}_{1,22} + I_3w_{3,22}\dot{w}_{3,22}) \right) dx_2 \right\} \quad (2-13)$$

2.1.3 Équations du mouvement

Pour obtenir les équations de mouvement, comme nous l'avons précédemment remarqué, il faut déterminer les conditions de stationnarité de la fonctionnelle de Hamilton. Dans notre cas, celles-ci s'expriment de la manière suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial w_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial \dot{w}_i} - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial w_i} + \frac{\partial^3 F}{\partial t^2 \partial \ddot{w}_i} + \frac{\partial^3 F}{\partial x_2^2 \partial w_{i,22}} + \frac{\partial^3 F}{\partial t \partial x_2 \partial \dot{w}_{i,2}} = 0, \quad (2-14)$$

$i = 1$ ou 3 . où la fonctionnelle F est définie par :

$$H = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L F(w_i, x_2, t) dx_2 \right\}. \quad (2-15)$$

Nous obtenons ici deux équations de mouvement :

$$\left. \begin{aligned} -\rho S \ddot{w}_1 - 2\Omega \rho S \dot{w}_3 - 2\dot{\Omega} \rho S w_3 + \rho I_1 \ddot{w}_{1,22} - \frac{I_1}{S_{22}} w_{1,2222} + \Omega^2 w_1 &= 0 \\ -\rho S \ddot{w}_3 - 2\Omega \rho S \dot{w}_1 - 2\dot{\Omega} \rho S w_1 + \rho I_3 \ddot{w}_{3,22} - \frac{I_3}{S_{22}} w_{3,2222} + \Omega^2 w_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-16)$$

Pour résoudre ces équations, nous nous plaçons dans le cas le plus simple, c'est-à-dire que la poutre est fixe dans son référentiel, et nous négligeons l'inertie rotatoire des sections droites.

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 0 \\ \rho I_1 \ddot{w}_{1,22} &= 0 \\ \rho I_3 \ddot{w}_{3,22} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-17)$$

En réinjectant les équations (2-17) dans le système (2-16), le système devient alors :

$$\left. \begin{aligned} \rho S \ddot{w}_1 + \frac{I_1}{S_{22}} w_{1,2222} &= 0 \\ \rho S \ddot{w}_3 + \frac{I_3}{S_{22}} w_{3,2222} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-18)$$

Nous résolvons alors le système par séparation des variables en posant $w_1(x_2, t) = u_1(x_2)f_1(t)$ et $w_3(x_2, t) = u_3(x_2)f_3(t)$. Nous pouvons en déduire les deux équations indépendantes, l'une en fonction de l'espace et l'autre en fonction du temps :

$$\left. \begin{aligned} \ddot{f}_i - \omega_i^2 f_i &= 0 \\ u_i^{(4)} + \omega_i^2 \rho \frac{S S_{22}}{I_i} u_i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-19)$$

L'évolution temporelle s'écrit simplement :

$$f_i(t) = a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t \quad (2-20)$$

Le champ de déplacement est la superposition d'ondes progressives et d'ondes évanescentes qui satisfont les conditions aux limites.

$$u_i = A_i \cos kx_2 + B_i \cosh kx_2 + C_i \sin kx_2 + D_i \sinh kx_2 \quad (2-21)$$

Avec $k_i = \left(\omega_i^2 \rho \frac{Ss_{22}}{I} \right)^{\frac{1}{4}}$

La solution complète s'écrit :

$$w_i = (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) (A_i \cos kx_2 + B_i \cosh kx_2 + C_i \sin kx_2 + D_i \sinh kx_2) \quad (2-22)$$

Les conditions aux limites nous permettent de déterminer le schéma modal :

En $x_2 = 0$:

$$w_i(0, t) = 0 \quad \text{et} \quad w_{i,2}(0, t) = 0$$

En $x_2 = L$:

$$\frac{I_i}{s_{22}} w_{i,222}(L, t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{I_i}{s_{22}} w_{i,22}(L, t) = 0.$$

À partir des conditions aux limites à l'origine $x_2=0$, nous obtenons $A_i = -B_i$, $C_i = -D_i$.

En $x_2=L$ on obtient alors :

$$\begin{pmatrix} -\cos kL - \cosh kL & -\sin kL - \sinh kL \\ \sin kL - \sinh kL & -\cos kL - \sinh kL \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_i \\ C_i \end{pmatrix}$$

Nous avons donc deux possibilités, soit le déterminant est non nul et nous obtenons la solution triviale $w_i(x_2, t) = 0$, qui n'a pas d'intérêt, soit le déterminant est nul ce qui nous donne :

$$\cos kL \cosh kL = -1$$

La solution $kL=\mu$ prend les valeurs suivantes : 1.875, 4.694, 7.854, 17.278, ..., $(2n - 1)\pi/2$, d'où nous déduisons les fréquences propres successives de la poutre. Nous obtenons alors les expressions des pulsations propres de la poutre en fonction de la valeur μ caractérisant le mode considéré (exemple : si $\mu=1.875$, nous avons le premier mode, si $\mu=17.278$, ce sera le quatrième mode de flexion).

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\mu^2}{L^2} \sqrt{\frac{b^2}{12\rho s_{22}}} \\ \omega_3 &= \frac{\mu^2}{L^2} \sqrt{\frac{h^2}{12\rho s_{22}}} \end{aligned} \right\} \quad (2-23)$$

Nous déduisons donc de ces équations l'écart de fréquence entre les deux modes de vibration. Il est proportionnel à la différence entre la largeur et la hauteur de la poutre. Dans le cas du silicium :

$$1/s_{22}[Pa] \text{ module d'Young : } 170 \cdot 10^9$$

$$h[m] \text{ hauteur de la poutre : } 360 \cdot 10^{-6}$$

$$\rho[kg \cdot m^{-3}] \text{ masse volumique : } 2330$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} L &= 6504 \cdot 10^{-6} m \\ b &= 366 \cdot 10^{-6} m \end{aligned}$$

Pour avoir une fréquence f_3 voisine de 12 kHz et un écart de fréquence de 200 Hz.

Grâce à ce modèle très simple, nous pourrions vérifier que le modèle numérique que nous avons développé donne une bonne approximation du résultat.

2.2 Modèle éléments finis⁶

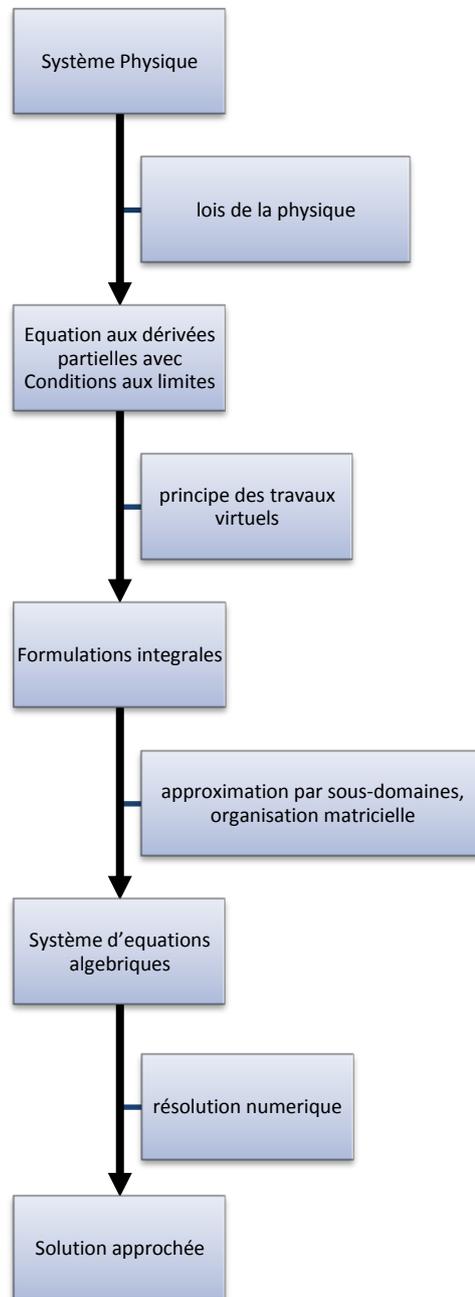


Figure 2—2 : Organigramme d'une modélisation par éléments finis.

⁶ Dans la suite, le symbole δ représente une variation infinitésimale, et non pas le Kronecker δ_{ij} qui prend la valeur 0 si les coefficients i et j sont différents, et 1 s'ils sont égaux.

Au départ, la modélisation éléments finis reprend les mêmes hypothèses que celles du début de ce chapitre. Nous ne détaillerons donc pas ici le calcul de l'énergie cinétique ni de l'énergie de déformation et nous commençons directement par l'écriture de la formulation intégrale.

Le but de cette modélisation ne consiste pas à déterminer précisément des différents modes de vibration (cela pouvant être fait avec des logiciels d'éléments finis usuels prenant en compte l'ensemble des paramètres mécaniques du gyromètre), mais bien à déterminer l'influence d'un certain nombre de paramètres fonctionnels sur les modes de vibration, tels que la vitesse de rotation du gyromètre Ω , ou bien l'influence des tensions d'alimentation. Ce n'est, en général, pas possible de façon intégrée avec des logiciels du commerce.

2.2.1 Formulation intégrale

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \iiint_V [E_c - E_d] dV + \iint_S W dS \right\} dt = 0 \quad (2-24)$$

Où W représente le travail des forces extérieurs.

Nous commençons par évaluer la variation d'énergie cinétique.

$$\begin{aligned} \delta E_c = \rho S \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L [-\ddot{w}_1 \delta w_1 - \ddot{w}_3 \delta w_3 + 2\Omega(-\dot{w}_3 \delta w_1 + \dot{w}_1 \delta w_3) \\ + \Omega^2(w_1 \delta w_1 + w_3 \delta w_3)] dx_2 \end{aligned} \quad (2-25)$$

Ensuite, nous évaluons la variation d'énergie de déformation :

$$\begin{aligned} \delta E_d = \frac{1}{S_{22}} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L [I_1 w_{1,22} \delta(w_{1,22}) + I_3 w_{3,22} \delta(w_{3,22})] dx_2 \\ + \frac{\chi}{S_{22}} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^L [I_1 \dot{w}_{1,22} \delta(w_{1,22}) + I_3 \dot{w}_{3,22} \delta(w_{3,22})] dx_2 \end{aligned} \quad (2-26)$$

Nous évaluons enfin les travaux des forces extérieures qui agissent sur la poutre.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} W dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left[-M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_0 - M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_L + F_{x_1} \delta(w_1)|_0 \right. \\ \left. + F_{x_1} \delta(w_1)|_L + M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_0 + M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_L + F_{x_3} \delta(w_3)|_0 + F_{x_3} \delta(w_3)|_L \right] \quad (2-27)$$

En substituant les équations (2-25), (2-26) et (2-27) dans l'équation (2-24), et en considérant que le principe s'applique quelles que soient les valeurs t_0 et t_1 , nous obtenons alors la formulation variationnelle suivante :

$$\rho S \int_0^L [-\ddot{w}_1 \delta w_1 - \ddot{w}_3 \delta w_3 + 2\Omega(-\dot{w}_3 \delta w_1 + \dot{w}_1 \delta w_3) + \Omega^2(w_1 \delta w_1 + w_3 \delta w_3)] dx_2 \\ - \frac{1}{s_{22}} \int_0^L [I_1 w_{1,22} \delta(w_{1,22}) + I_3 w_{3,22} \delta(w_{3,22})] dx_2 \\ - \frac{\chi}{s_{22}} \int_0^L [I_1 \dot{w}_{1,22} \delta(w_{1,22}) + I_3 \dot{w}_{3,22} \delta(w_{3,22})] dx_2 \quad (2-28) \\ = \left[-M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_0 - M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_L + F_{x_1} \delta(w_1)|_0 \right. \\ \left. + F_{x_1} \delta(w_1)|_L + M_{x_1} \delta(w_{1,2})|_0 + M_{x_1} \delta(w_{1,2})|_L \right. \\ \left. + F_{x_3} \delta(w_1)|_0 + F_{x_3} \delta(w_1)|_L \right]$$

Il est important de noter que notre formulation intégrale dépend des dérivées partielles secondes des coordonnées d'espace et de temps. Cela nous oblige à construire nos éléments finis à partir de fonctions qui soient au moins de classe C^2 dans le domaine de définition. Nous aurions pu choisir d'effectuer une intégration par parties (forme faible) pour abaisser le degré de dérivation et donc utiliser des fonctions de classe C^1 sur le domaine.

2.2.2 Approximation par sous-domaine et organisation matricielle

Nous pouvons modéliser avec une erreur raisonnable la flexion de la poutre dans un plan, en utilisant un seul élément de type Hermite, avec une interpolation cubique pour la déflexion. Les degrés de liberté nécessaires pour un tel élément sont w_1 et $w_{1,2}$ pour la flexion dans le plan (x_1, x_2) , et w_3 et $w_{3,2}$ pour la flexion dans le plan (x_3, x_2) . Les fonctions d'interpolation peuvent être définies de manière indépendante pour les deux directions, ce qui nous permet

d'écrire :

$$\begin{bmatrix} w_i^1 \\ w_{i,2}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & (x_2)^2 & (x_2)^3 \\ 0 & 1 & 2x_2 & 3(x_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (2-29)$$

Ici $i = 1$ ou 3 , et a_i , b_i , c_i et d_i représentent les coefficients généralisés de l'interpolation.

Pour un élément de longueur L , en considérant les extrémités de l'élément on obtient :

$$\begin{bmatrix} w_i^1 \\ w_{i,2}^1 \\ w_i^2 \\ w_{i,2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

En inversant la matrice, nous obtenons directement les valeurs des coefficients des fonctions d'interpolation en fonction des valeurs nodales :

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \\ d_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i^1 \\ w_{i,2}^1 \\ w_i^2 \\ w_{i,2}^2 \end{bmatrix} \quad (2-31)$$

En substituant ces résultats dans (2-29), et en les étendant aux dérivées secondes, nous obtenons le nouveau système :

$$\begin{bmatrix} w_i(x_2) \\ w_{i,2}(x_2) \\ w_{i,22}(x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \\ N_1' & N_2' & N_3' & N_4' \\ N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i^1 \\ w_{i,2}^1 \\ w_i^2 \\ w_{i,2}^2 \end{bmatrix} \quad (2-32)$$

La matrice des fonctions de formes et de leurs dérivées successives est alors la suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 - 3\frac{x_2^2}{L^2} + 2\frac{x_2^3}{L^3} & x_2 - 2\frac{x_2^2}{L} + \frac{x_2^3}{L^2} & 3\frac{x_2^2}{L^2} - 2\frac{x_2^3}{L^3} & -\frac{x_2^2}{L} + \frac{x_2^3}{L^2} \\ -6\frac{x_2}{L^2} + 6\frac{x_2^2}{L^3} & 1 - 4\frac{x_2}{L} + 3\frac{x_2^2}{L^2} & 6\frac{x_2}{L^2} - 6\frac{x_2^2}{L^3} & -2\frac{x_2}{L} + 3\frac{x_2^2}{L^2} \\ -6\frac{1}{L^2} + 12\frac{x_2}{L^3} & -4\frac{1}{L} + 6\frac{x_2}{L^2} & 6\frac{1}{L^2} - 12\frac{x_2}{L^3} & -2\frac{1}{L} + 6\frac{x_2}{L^2} \end{bmatrix} \quad (2-33)$$

Le modèle éléments finis est complètement déterminé dès que l'on a substitué dans (2-28) les derniers résultats obtenus. L'équation scalaire de Hamilton est alors remplacée par une équation algébrique, où les inconnues sont les valeurs des déplacements et de leurs dérivées aux nœuds :

$$\{(1 + \chi p)[K] + 2(p\Omega + \dot{\Omega})[\eta] + (p^2 - \Omega^2)[M]\}\{U\} = \{F\} \quad (2-34)$$

Ici, p est l'opérateur de Laplace pour la dérivation par rapport au temps, et :

$$[K] = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

$$[\eta] = \begin{bmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{bmatrix}$$

$$[M] = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\{U\} = [w_1^1 \quad w_{1,2}^1 \quad w_1^2 \quad w_{1,2}^2 \quad w_3^1 \quad w_{3,2}^1 \quad w_3^2 \quad w_{3,2}^2]^T$$

$$\{F\} = [F_{x_1}^1 \quad -M_{x_3}^1 \quad F_{x_1}^2 \quad -M_{x_3}^2 \quad F_{x_3}^1 \quad M_{x_1}^1 \quad F_{x_3}^2 \quad M_{x_1}^2]^T$$

avec les matrices élémentaires suivantes :

$$[K_1] = \frac{I_1}{S_{22}} [\bar{k}]$$

$$[K_3] = \frac{I_3}{S_{22}} [\bar{k}]$$

$$[\bar{k}] = \int_0^L [N''']^T [N'''] dx_2$$

$$[\bar{\mu}] = \rho S \int_0^L [N]^T [N] dx_2$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

Dans notre cas, toutes les intégrales peuvent être facilement calculées de manière analytique, et nous obtenons les résultats suivants pour la matrice de raideur et la matrice masse élémentaire :

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (2-35)$$

$$[\bar{\mu}] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}L & \frac{11}{210}L^2 & \frac{9}{70}L & -\frac{13}{420}L^2 \\ \frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 & \frac{13}{420}L^2 & -\frac{1}{140}L^3 \\ \frac{9}{70}L & \frac{13}{420}L^2 & \frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 \\ -\frac{13}{420}L^2 & -\frac{1}{140}L^3 & -\frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 \end{bmatrix} \quad (2-36)$$

Si nous imposons un encastrement de la poutre à l'extrémité située à $x_2 = 0$, le déplacement nodal $w_i^1 = 0$ et la rotation $w_{i,2}^1 = 0$ sont nuls, et les lignes et les colonnes correspondantes du système (2-34) peuvent être écartées, leur résolution donnant ultérieurement la réaction et le moment au nœud considéré.

Dans le cas d'un système libre du point de vue de la dynamique, la solution doit être complètement harmonique. Nous pouvons donc utiliser la notation complexe avec $p = j\omega$, et nous obtenons le système aux valeurs propres :

$$\{(1 + \chi j\omega)[K] + 2(j\omega\Omega + \dot{\Omega})[\eta] + (-\omega^2 - \Omega^2)[M]\}\{U\} = \{F\}, \quad (2-37)$$

et :

$$[\bar{K}] = \frac{1}{s_{22}} \begin{bmatrix} \frac{12I_1}{L^3} & -\frac{6I_1}{L^2} & 0 & 0 \\ -\frac{6I_1}{L^2} & \frac{4I_1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12I_3}{L^3} & -\frac{6I_3}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{6I_3}{L^2} & \frac{4I_3}{L} \end{bmatrix}$$

$$[\bar{\eta}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 \\ -\frac{13}{35}L & \frac{11}{210}L^2 & 0 & 0 \\ \frac{11}{210}L^2 & -\frac{1}{105}L^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 & 0 & 0 \\ -\frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 \\ 0 & 0 & -\frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que la matrice $[\bar{K}]$ est composée de deux sous-matrices proportionnelles et, si nous factorisons chaque bloc respectivement par I_1/s_{22} et I_3/s_{22} , nous pouvons définir une nouvelle matrice $[\bar{k}]$. En l'absence de rotation ($\Omega = 0$), nous obtenons deux systèmes séparés mais formellement identiques :

$$\begin{aligned} \left[\frac{I_1}{s_{22}} [\bar{k}] - \omega^2 \rho S [\bar{\mu}] \right] \{W_1\} &= \{0\} \\ \left[\frac{I_3}{s_{22}} [\bar{k}] - \omega^2 \rho S [\bar{\mu}] \right] \{W_3\} &= \{0\} \end{aligned} \tag{2-38}$$

dans lesquels :

$$[\bar{k}] = \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad [\bar{\mu}] = \begin{bmatrix} \frac{13}{35}L & -\frac{11}{210}L^2 \\ -\frac{11}{210}L^2 & \frac{1}{105}L^3 \end{bmatrix}$$

$$\{W_1\} = \begin{Bmatrix} w_1^2 \\ w_{1,2}^2 \end{Bmatrix} \quad \{W_3\} = \begin{Bmatrix} w_3^2 \\ w_{3,2}^2 \end{Bmatrix}$$

Nous observons que les vecteurs propres et les valeurs propres des systèmes définis en (2-38) sont identiques, et nous pouvons alors substituer la fréquence angulaire par un facteur dimensionnel, ce qui nous donne :

$$\alpha^2 = \rho\omega^2 S \frac{S_{22}}{I_1} \quad (2-39)$$

$$\gamma^2 = \rho\omega^2 S \frac{S_{22}}{I_3}$$

Nous obtenons ainsi les deux systèmes suivants :

$$\left. \begin{array}{l} [[\bar{k}] - \alpha^2[\bar{\mu}]] \{w_1\} = \{0\} \\ [[\bar{k}] - \gamma^2[\bar{\mu}]] \{w_3\} = \{0\} \end{array} \right\} \quad (2-40)$$

Pour qu'il y ait une solution autre que la solution $w_1=0$ et $w_3=0$, il faut que les déterminants des deux systèmes précédents soient nuls. On obtient :

$$\alpha^2 = \gamma^2 = \frac{12(51 - 8\sqrt{39})}{L^4}$$

$$\omega = \alpha \sqrt{\frac{I_1}{SS_{22}\rho}} = \frac{12(51 - 8\sqrt{39})}{L^4} \sqrt{\frac{I_1}{SS_{22}\rho}} \cong \frac{1.879^2}{L^2} \sqrt{\frac{I_1}{SS_{22}\rho}}$$

Nous voyons donc que le modèle éléments finis, même avec un seul élément cubique, donne déjà une très bonne approximation de la fréquence de résonance du système, vu que l'erreur par rapport à la valeur calculée page 46 vaut : $(\omega_{an} - \omega_{fem})/\omega_{an} < 0.5\%$.

Dans le modèle précédent, la résolution du problème est immédiate, du fait de la petite taille du système (2×2). Dans les techniques éléments finis, on améliore la précision de façon convergente en augmentant le nombre d'éléments, et donc la taille du système pour obtenir une précision suffisante, surtout pour les modes les plus élevés. Il n'est donc pas envisageable d'établir analytiquement les racines du déterminant. À cet effet, nous pouvons utiliser la méthode dite de Jacobi pour évaluer les fréquences propres d'un système de taille modeste (environ 100), et d'autres méthodes (Givens, puissance inverse) pour des systèmes plus grands. Nous ne rentrerons pas dans le détail de la programmation de cette méthode, mais nous la programmerons par la suite pour évaluer l'impact du nombre d'éléments sur la fréquence de résonance.

2.2.3 Excitation électrostatique

Notre système étant constitué d'une poutre conductrice, à proche distance d'un substrat rigide recouvert partiellement par une électrode métallique, le système correspondant est représenté sur la Figure 2—3. Ici g est le gap initial entre la poutre et le substrat. Dans ce cas, nous devons ajouter l'action de la force électrostatique, ce qui introduit un terme supplémentaire dans le calcul des travaux des forces extérieures sur la poutre.

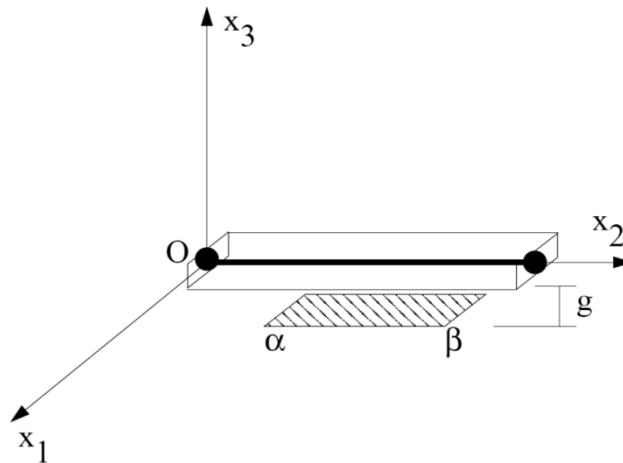


Figure 2—3 : Poutre excitée de manière capacitive.

$$\begin{aligned}
 \delta \int_{t_0}^{t_1} W dt = & \int_{t_0}^{t_1} dt \left[\int_{\alpha}^{\beta} P(x_2) \delta w(x_2) dx_2 - M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_0 - M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_L \right. \\
 & + F_{x_1} \delta(w_1)|_0 + F_{x_1} \delta(w_1)|_L + M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_0 + M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_L + F_{x_3} \delta(w_3)|_0 \\
 & \left. + F_{x_3} \delta(w_3)|_L \right] \quad (2-41)
 \end{aligned}$$

Si nous considérons un condensateur plan idéal, la pression électrostatique qui s'exerce sur la poutre s'écrit simplement :

$$P = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{g} \right)^2, \quad (2-42)$$

où V représente la tension d'excitation entre les deux armatures du condensateur, g représente la distance entre les armatures, et ε_0 est la permittivité absolue du vide. En première approximation, nous considèrerons que la déflexion de la poutre est faible par rapport à la valeur du gap initial et nous effectuerons un développement limité du premier ordre. La pression électrostatique s'écrit alors :

$$P = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{g + w_3} \right)^2 = -\frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{V}{g} \right)^2 \left(1 - 2 \frac{w_3}{g} + o(w_3) \right) \quad (2-43)$$

En interpolant $w_3(x_2)$ à l'aide des fonctions de forme, nous pouvons déterminer complètement l'expression de δW pour l'utiliser dans le modèle éléments finis de la poutre vibrante dans le mode gyroscopique. Si nous nous limitons à un seul élément dans la longueur de la poutre, le modèle est minimal du point de vue de l'analyse structurelle dynamique, mais prend en compte de façon auto-cohérente l'interdépendance non-linéaire entre la déformation de la poutre et la pression électrostatique.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} W dt = \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ [\delta w_1^1 \quad \delta w_{1,2}^1 \quad \delta w_1^2 \quad \delta w_{1,2}^2] \begin{bmatrix} F_{x_1}^1 \\ -M_{x_3}^1 \\ F_{x_1}^2 \\ -M_{x_3}^2 \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + [\delta w_3^1 \quad \delta w_{3,2}^1 \quad \delta w_3^2 \quad \delta w_{3,2}^2] \begin{bmatrix} F_{x_1}^1 \\ M_{x_3}^1 \\ F_{x_1}^2 \\ M_{x_3}^2 \end{bmatrix} - \frac{b\varepsilon_0 V^2}{2g^2} \int_{\alpha}^{\beta} [N]^T \left(1 - \frac{2}{g} [N] \begin{bmatrix} \delta w_3^1 \\ \delta w_{3,2}^1 \\ \delta w_3^2 \\ \delta w_{3,2}^2 \end{bmatrix} \right) dx_2 \right\}$$

$$\{\bar{F}\} = - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{g^2} \right) \int_{\alpha}^{\beta} [N] dx_2 + \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{g^3} \right) \int_{\alpha}^{\beta} [N]^T [N] dx_2 \{\bar{U}\}$$

$$\int_0^L \left\{ \frac{I_1}{S_{22}} (w_{1,22} + \chi \dot{w}_{1,22}) \delta(w_{1,22}) + \rho S (\ddot{w}_1 + 2\Omega \dot{w}_3 + 2\Omega w_3 - \Omega^2 w_1) \delta(w_1) \right.$$

$$\left. + \frac{I_3}{S_{22}} (w_{3,22} + \chi \dot{w}_{3,22}) \delta(w_{3,22}) + \rho S (\ddot{w}_3 - 2\Omega \dot{w}_1 - 2\Omega w_1 - \Omega^2 w_3) \delta(w_3) \right\} dx_2 \quad (2-44)$$

$$= -M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_0 - M_{x_3} \delta(w_{1,2})|_L + F_{x_1} \delta(w_1)|_0 + F_{x_1} \delta(w_1)|_L + M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_0$$

$$- M_{x_1} \delta(w_{3,2})|_L + F_{x_3} \delta(w_3)|_0 + F_{x_3} \delta(w_3)|_L + \int_0^L p(x_2) \delta(w_3) dx_2$$

Le système devient alors :

$$\{[\hat{K}] + p\chi[\bar{K}] + 2(p\Omega + \dot{\Omega})[\bar{\eta}] + (p^2 - \Omega^2)[\bar{M}]\}\{U\} = \{\hat{F}\} \quad (2-45)$$

Ici la force électrostatique vaut :

$$\{\hat{F}\} = - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{2g^2} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} dx_2 \quad (2-46)$$

et la matrice masse se trouve alors modifiée de la manière suivante :

$$[\hat{\mu}] = [\bar{\mu}] - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{g^3} \right) \int_{\alpha}^{\beta} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3^2 & N_3 N_4 \\ 0 & 0 & N_3 N_4 & N_4^2 \end{bmatrix} dx_2 \quad (2-47)$$

Il est alors évident que cette modification de la matrice masse exerce une influence sur les modes propres de la poutre, que nous détaillerons par la suite. Après avoir effectué les intégrations nécessaires, nous obtenons :

$$\{\hat{F}\} = - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{2g^2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\beta^3 - \alpha^3}{L^2} - \frac{\beta^4 - \alpha^4}{2L^3} \\ \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3L} - \frac{\beta^4 - \alpha^4}{4L^2} \end{bmatrix} \quad (2-48)$$

$$[\hat{\mu}] = [\bar{\mu}] - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{g^3} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & B & C \end{bmatrix} \quad (2-49)$$

Dans notre cas, la longueur de l'électrode est égale à la longueur de la poutre, et nous obtenons :

$$A = \frac{13}{35}L \qquad B = -\frac{11}{210}L^2 \qquad C = \frac{1}{105}L^3$$

Il apparaît alors que cette matrice est identique à la matrice masse élémentaire. De plus, le vecteur force du membre de droite de (2-45) devient très simple :

$$\{\hat{F}\} = - \left(\frac{b\varepsilon_0 V^2}{4g^2} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

Notre tâche consiste à trouver la solution du problème en régime permanent avec une tension d'alimentation de la forme $V(t) = V_c + V_0 e^{j\omega t}$. L'utilisation de la notation complexe⁷

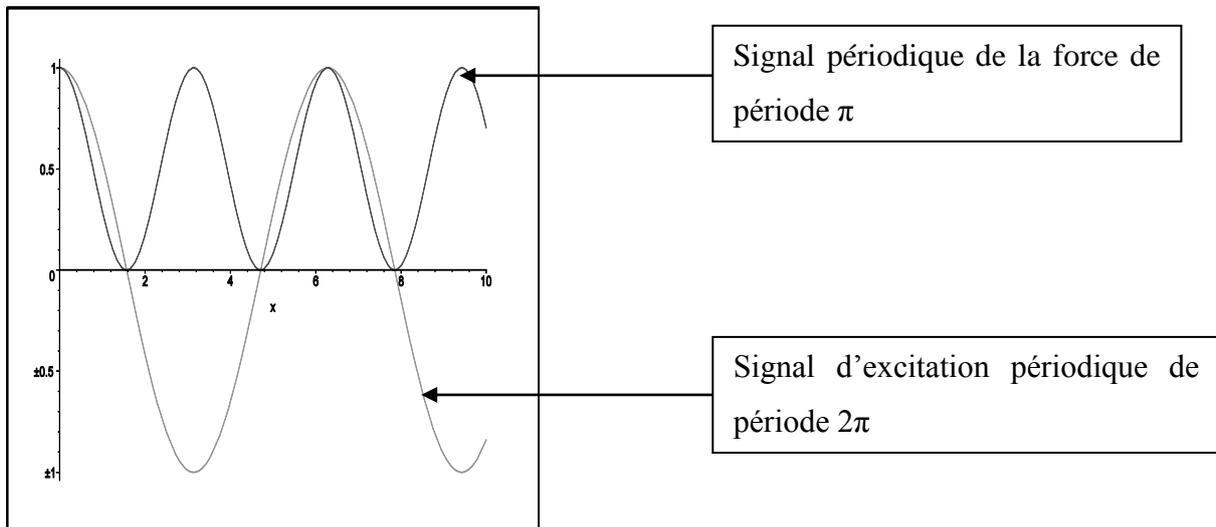
⁷ En effet si z est un complexe $\Re(z^2) \neq \Re(z)^2$

nécessite de la prudence. En effet, la force réelle exercée sur la poutre est égale au carré de la tension réelle, et nous ne pouvons donc pas obtenir la force complexe directement en élevant la tension complexe au carré. Il faut élever la tension réelle au carré et la convertir en notation complexe ensuite, ce qui nous permet d'obtenir l'expression suivante :

$$F = V_c^2 + \frac{V_0^2}{2} + 2V_c V_0 e^{j\omega t} + \frac{V_0^2}{2} e^{2j\omega t}$$

À partir de cette expression, nous observons que l'excitation crée une force statique, une force harmonique à la fréquence d'excitation, et une autre à la fréquence double.

La pression électrostatique dépend du carré de la tension d'alimentation, donc si nous imposons une tension sinusoïdale de valeur moyenne nulle, la force ressemblera à une tension « redressée ». En ce cas, une grande partie de l'énergie fournie par la source servirait à exciter le système à la fréquence double. En pratique, nous imposerons $V_c > V_0$ pour supprimer les problèmes de « redressement » de la force, et être sûr d'exciter à la fréquence de résonance et non à deux fois cette dernière.



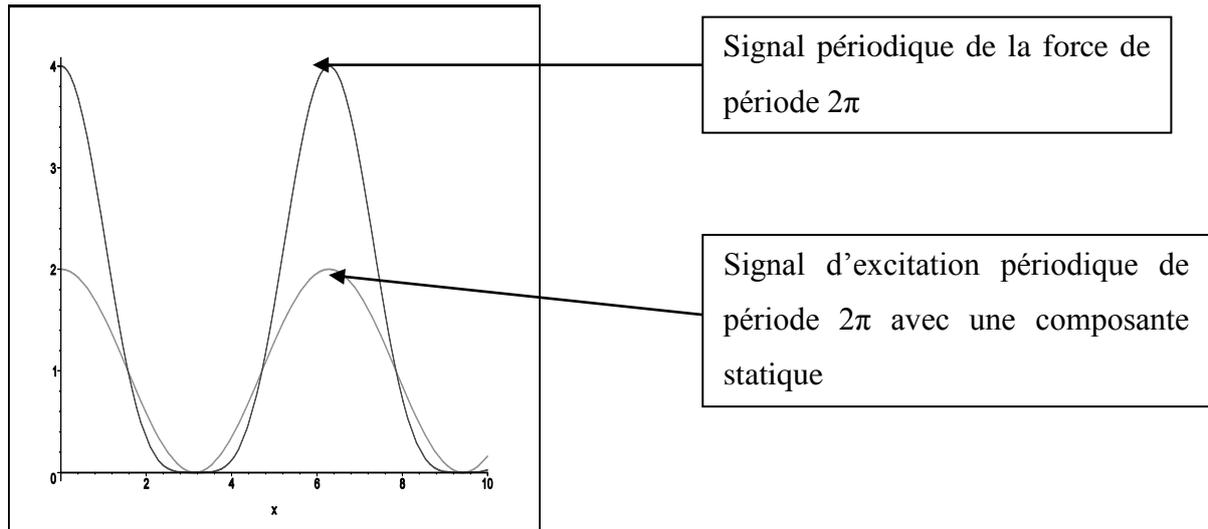


Figure 2—4 : Représentations des forces et de leurs excitations respectives.

Nous pouvons aussi en déduire les fréquences propres du système avec une excitation électrostatique :

$$\left[\frac{I_1}{S_{22}} [\bar{k}] - \omega^2 \rho S [\bar{\mu}] \right] \{w_1\} = \{0\} \quad (2-51)$$

$$\left[\frac{I_3}{S_{22}} [\bar{k}] - \left(\frac{b \varepsilon_0}{g^3} \left(V_c^2 + \frac{V_0^2}{2} \right) + \omega^2 \rho S \right) [\bar{\mu}] \right] \{w_3\} = \{0\}$$

Nous observons donc que la fréquence propre du mode secondaire reste inchangée, contrairement à celle du mode d'excitation, qui se retrouve abaissée. La composante continue du carré de la tension crée une charge statique, et nous obtenons :

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \frac{\mu^2}{L^2} \sqrt{\frac{b^2}{12 \rho S_{22}}} \\ \omega_{3,2} &= \sqrt{\frac{1}{\rho S} \sqrt{\frac{\mu^4 I_3}{L^4 S_{22}} - \frac{b \varepsilon_0}{g^3} \left(V_c^2 + \frac{V_0^2}{2} \right)}} \end{aligned} \right\} \quad (2-52)$$

Ceci implique que nous devons rechercher la solution $[\bar{U}]$ en régime permanent comme une

série de Fourier⁸ de la forme :

$$\lambda_1 = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega t}$$

$$\lambda_3 = b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{jk\omega t}$$

Dans la suite, nous considérerons que la vitesse angulaire Ω est constante.

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_1 K_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 \widehat{K}_3 \end{bmatrix} + p\chi \begin{bmatrix} \lambda_1 K_1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 K_3 \end{bmatrix} + (p^2 - \Omega^2) \begin{bmatrix} \lambda_1 \rho S \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 \rho S \mu \end{bmatrix} \\ & + 2p\Omega \begin{bmatrix} 0 & \lambda_3 \rho S \mu \\ -\lambda_1 \rho S \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-53)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda_1 \omega_1^2 \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 \omega_{3,2}^2 \mu \end{bmatrix} + \chi \begin{bmatrix} \dot{\lambda}_1 \omega_1^2 \mu & 0 \\ 0 & \dot{\lambda}_3 \omega_3^2 \mu \end{bmatrix} - \Omega^2 \begin{bmatrix} \lambda_1 \mu & 0 \\ 0 & \lambda_3 \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ddot{\lambda}_1 \mu & 0 \\ 0 & \ddot{\lambda}_3 \mu \end{bmatrix} \\ & + 2\Omega \begin{bmatrix} 0 & \dot{\lambda}_3 \mu \\ -\dot{\lambda}_1 \mu & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\rho S} P \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-54)$$

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)\lambda_1 + \ddot{\lambda}_1 + \chi \dot{\lambda}_1 \omega_1^2 + 2\Omega \dot{\lambda}_3 = 0 \\ -2\Omega \dot{\lambda}_1 + (\omega_3^2 - \Omega^2)\lambda_3 + \ddot{\lambda}_3 + \chi \dot{\lambda}_3 \omega_3^2 = \frac{1}{\rho S} \frac{b \varepsilon_0 V^2}{4g^2} \end{cases} \quad (2-55)$$

En remplaçant λ_1 et λ_3 dans le système et en intégrant sur la période, nous obtenons un nouveau système avec les coefficients de Fourier :

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2) \left(a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{jk\omega t} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \omega^2 k^2 a_k e^{jk\omega t} + \chi \omega_1^2 \sum_{k=1}^{\infty} j\omega k a_k e^{jk\omega t} + 2\Omega \sum_{k=1}^{\infty} j\omega k b_k e^{jk\omega t} = 0 \\ -2\Omega \sum_{k=1}^{\infty} j\omega k a_k e^{jk\omega t} + (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2) \left(b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{jk\omega t} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} \omega^2 k^2 b_k e^{jk\omega t} + \chi \omega_3^2 \sum_{k=1}^{\infty} j\omega k a_k e^{jk\omega t} = \frac{1}{\rho S} \frac{b \varepsilon_0 V^2}{4g^2} \end{cases}$$

Nous obtenons finalement un nouveau système d'équations où les inconnues sont les

⁸ Joseph Fourier mathématicien est un physicien français. Il naît à Auxerre 1768 et meurt à Paris 1830. Il est célèbre pour ses travaux sur la décomposition de fonctions périodiques en séries trigonométriques.

coefficients de Fourier des séries.

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((\omega_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 k^2 + j\chi\omega_1^2 \omega k)a_k + 2\Omega j\omega k b_k) e^{jk\omega t} = 0 \\ (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2)b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} ((\omega_3^2 - \Omega^2 - \omega^2 k^2 + j\chi\omega_3^2 \omega k)b_k - 2\Omega j\omega k a_k) e^{jk\omega t} = \frac{1}{\rho S} \frac{b\varepsilon_0(V_c^2 + 2V_c V_0 e^{j\omega t} + V_0^2 e^{2j\omega t})}{4g^2} \end{cases}$$

Si $k = 0$,

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2)a_0 = 0 \\ (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2)b_0 = \frac{1}{\rho S} \frac{b\varepsilon_0 V_c^2}{4g^2} \end{cases} \quad (2-56)$$

Si $k = 1$,

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 + j\chi\omega_1^2 \omega)a_1 + 2\Omega j\omega b_1 = 0 \\ (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2 - \omega^2 + j\chi\omega_3^2 \omega)b_1 - 2\Omega j\omega a_1 = \frac{1}{\rho S} \frac{b\varepsilon_0 2V_c V_0}{4g^2} \end{cases} \quad (2-57)$$

Si $k = 2$,

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2 - 4\omega^2 + j2\chi\omega_1^2 \omega)a_k + 4\Omega j\omega b_k = 0 \\ (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2 - 4\omega^2 + j2\chi\omega_3^2 \omega)b_k - 4\Omega j\omega a_k = \frac{1}{\rho S} \frac{b\varepsilon_0 V_0^2}{4g^2} \end{cases} \quad (2-58)$$

Si $k > 2$,

$$\begin{cases} (\omega_1^2 - \Omega^2 - \omega^2 k^2 + j\chi\omega_1^2 \omega k)a_k + 2\Omega j\omega k b_k = 0 \\ (\omega_{3,2}^2 - \Omega^2 - \omega^2 k^2 + j\chi\omega_3^2 \omega k)b_k - 2\Omega j\omega k a_k = 0 \end{cases} \quad (2-59)$$

Après résolution de ces systèmes, nous obtenons la réponse globale du microsystème étudié en fonction des différents paramètres (à savoir les dimensions, les propriétés physiques du matériau utilisé, les tensions d'alimentation, ainsi que la vitesse de rotation).

Dans la pratique, nous serons amenés à augmenter le nombre d'éléments et donc la taille du système. Nous pouvons utiliser différentes méthodes pour résoudre celui-ci. La première méthode consisterait à inverser la matrice, cependant les techniques analytiques d'inversion

de matrices peuvent être coûteuses en temps de calcul. L'autre solution consisterait à utiliser une méthode telle que le pivot de Gauss pour résoudre le système. Malheureusement, cette technique est mal adaptée aux problèmes mal conditionnés (comme le notre où nous cherchons des pics de résonance). C'est pour cela que nous avons utilisé la fonction LSQ de scilab qui permet de résoudre ce genre de système par une méthode des moindres carrés.

L'évaluation des coefficients d'amortissement sera effectuée dans le chapitre 4, dans lequel nous approfondirons l'ensemble des problèmes liés à l'amortissement. Dans ce chapitre nous opterons pour un facteur de qualité d'environ 100 ce qui correspond à nos premiers essais.

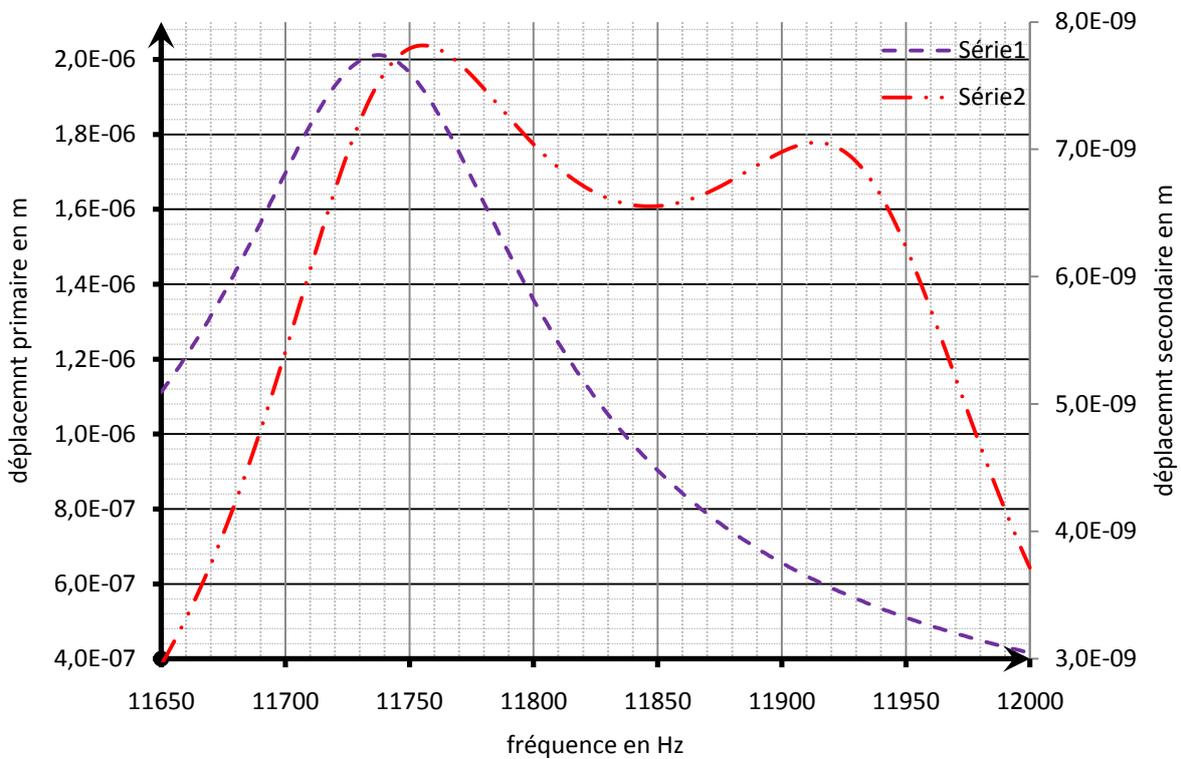


Figure 2—5 : Amplitude de vibration du primaire et du secondaire en fonction de la fréquence d'excitation.

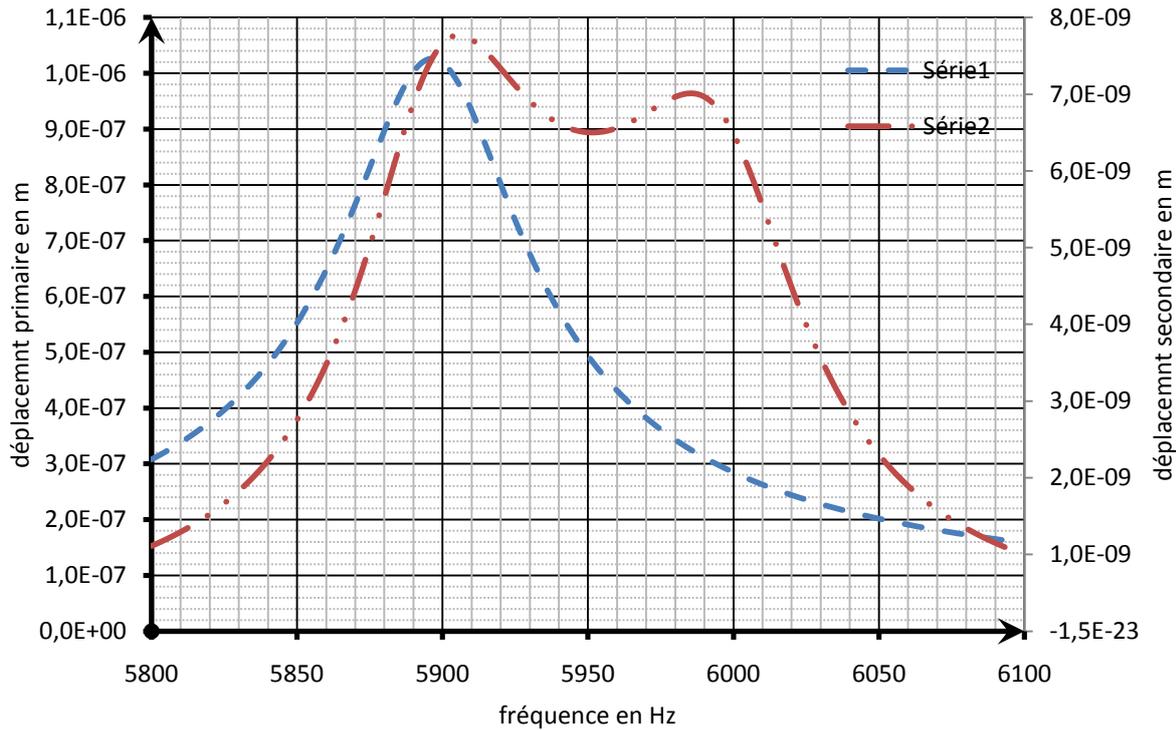


Figure 2—6 : Amplitude de vibration du primaire et du secondaire en fonction de la fréquence d'excitation.

Nous pouvons voir sur les deux graphiques précédents qu'il existe deux zones de vibration pour le gyromètre : une zone pour l'excitation aux fréquences naturelles de la poutre Figure 2—5, et une seconde zone d'excitation, visible sur le graphique ci-dessus Figure 2—6. Cette zone correspond à l'application d'une excitation électrique à la moitié de la fréquence d'excitation de la poutre, en raison du terme en 2ω dans l'expression de la force électrostatique.

Les fréquences de résonance des modes d'excitation et de détection sont décalées par rapport à celles obtenues en l'absence de chargement électrostatique. Cela nous empêche donc de réaliser la mesure « à vide » du gyromètre pour se servir de sa fréquence de résonance comme référence, il sera donc nécessaire dans un second temps de réaliser une boucle à verrouillage de phase pour être au maximum d'amplitude.

De plus, nous observons clairement que la fréquence du premier pic de résonance en amplitude du primaire est décalée par rapport au pic de résonance en amplitude du secondaire. Cela provient du couplage gyroscopique, et implique que pour utiliser le capteur de manière optimale, nous ne pourrions pas utiliser une boucle à verrouillage de phase sur le mode

d'excitation. Celle-ci devra au contraire être calée sur le mode de détection pour obtenir un maximum de signal sur le secondaire.

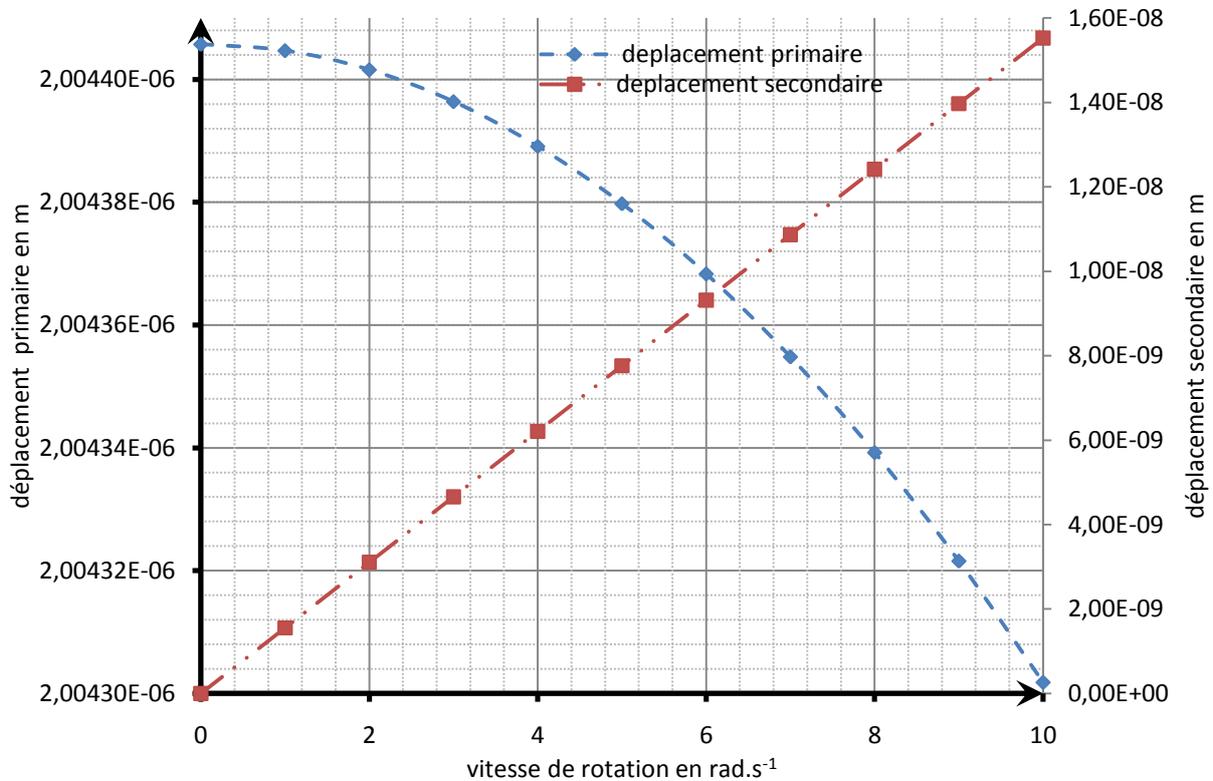


Figure 2—7 : Amplitude de vibration en m en fonction de la vitesse de rotation en rad.s^{-1} à la fréquence de résonance.

Sur le graphique précédent, nous voyons que l'amplitude de vibration du secondaire est proportionnelle à la vitesse de rotation, et que dans la plage de vitesse qui nous intéresse, la variation du déplacement est d'environ 20 nm. La faible « sensibilité » du secondaire, 2 nm/ms^{-1} , nous montre l'importance que va jouer la détection optique du déplacement et la nécessité de pouvoir faire des mesures sub-nanométriques.

Comme nous l'avons dit précédemment, le but de cette modélisation n'est pas la détermination précise des différents modes de vibration. Cependant, nous pouvons améliorer assez facilement la précision du modèle. À cet effet, nous considérons la poutre comme étant composée de plusieurs éléments. Nous ne détaillerons pas le calcul ici, néanmoins dans le programme que nous avons réalisé sous le logiciel Scilab⁹ (cf. Annexe 2 Programme Scilab),

⁹ Scilab est un logiciel de calcul numérique, tel que Matlab, bien que, contrairement à ce dernier, ce logiciel est un freeware. Il a été développé par l'INRIA (Institut national de recherche en informatique et en automatique) et

nous aurons la possibilité de choisir le nombre d'éléments constituant la poutre.

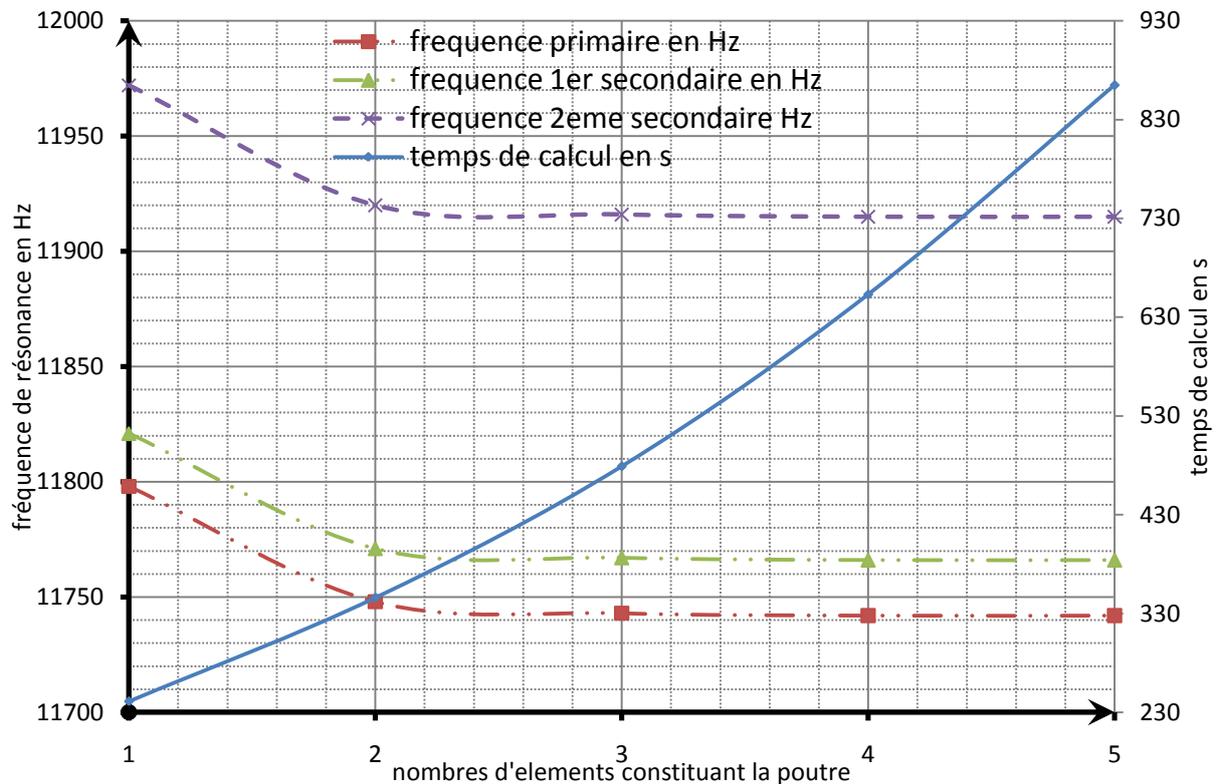


Figure 2—8 : Fréquence de résonance et temps de calcul¹⁰ en fonction du nombre d'élément constituant la poutre.

Nous avons réalisé une première modélisation simple sans tenir compte de la matrice masse modifiée. Nous observons que les fréquences de résonance des trois pics de vibration sont modifiées si nous augmentons le nombre d'éléments, et tendent vers une valeur limite. Ces résultats sont récapitulés sur la Figure 2-8.

Dans le cas d'une poutre simple encastree-guidée, le calcul converge très vite. Il n'est donc pas nécessaire d'ajouter beaucoup d'éléments dans la longueur de la poutre. Nous voyons très nettement sur le graphique précédent que le temps de calcul « explose » dans le cas de ce modèle simple. Même si ce calcul nous donne un premier dimensionnement des poutres pour

L'ENPC (École nationale des ponts et chaussées). Depuis 2003, c'est le consortium Scilab qui s'occupe de son développement.

¹⁰ L'analyse a été réalisée sur un ordinateur Dell Précision 390 avec un processeur Dual-core Intel Core 2 Duo a 2.13 GHz et 1Go de RAM.

obtenir les fréquences souhaitées, il n'est pas suffisant. En effet, le gyromètre réel est une structure plus complexe qui va nécessiter une analyse par éléments finis plus fine pour déterminer de manière précise l'ensemble des dimensions nécessaires à l'obtention de fréquences conformes au cahier des charges. Ceci sera fait dans le chapitre suivant à l'aide du logiciel Systus¹¹.

Cette étude nous a toutefois permis d'avoir un aperçu des déplacements maximum que nous pouvons espérer obtenir avec le cahier des charges, à savoir avec un écart de 200 Hz entre les deux modes de vibration (excitation et détection), fréquences primaire environ 12 kHz et secondaire 12,2KHz. Nous pouvons alors estimer la sensibilité du capteur si nous excitions à la fréquence de résonance du mode primaire. Dans ce cas, nous devons nous intéresser au rapport d'amplitude des termes en $e^{j\omega t}$ et nous retrouvons la formule bien connue pour la sensibilité gyrométrique :

$$\frac{\lambda_1(\omega)}{\lambda_3(\omega)} = \frac{2\omega_{3,2}^2 \Omega}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_{3,2}^2)^2 + \frac{\omega_1^2 \omega_{3,2}^2}{Q^2}}}$$

Nous remarquons d'abord que la sensibilité est directement proportionnelle à la vitesse de rotation Ω . Ensuite, cette sensibilité dépend du facteur de qualité. Nous observons aussi que la sensibilité tend vers une valeur limite $\frac{2\omega_{3,2}^2}{\sqrt{(\omega_1^2 - \omega_{3,2}^2)^2}}$ quand nous augmentons le facteur de qualité. Du point de vue de la sensibilité, il n'y donc pas forcément d'intérêt à augmenter le facteur de qualité au delà de 200 si nous gardons le même écart en fréquence.

¹¹ Systus est un logiciel français de simulation par éléments finis. Il a été développé par l'industrie nucléaire. Ce logiciel a été développé par FRAMATOME ANP (Advanced Nuclear Power) qui est devenu en 2006 Areva NP.

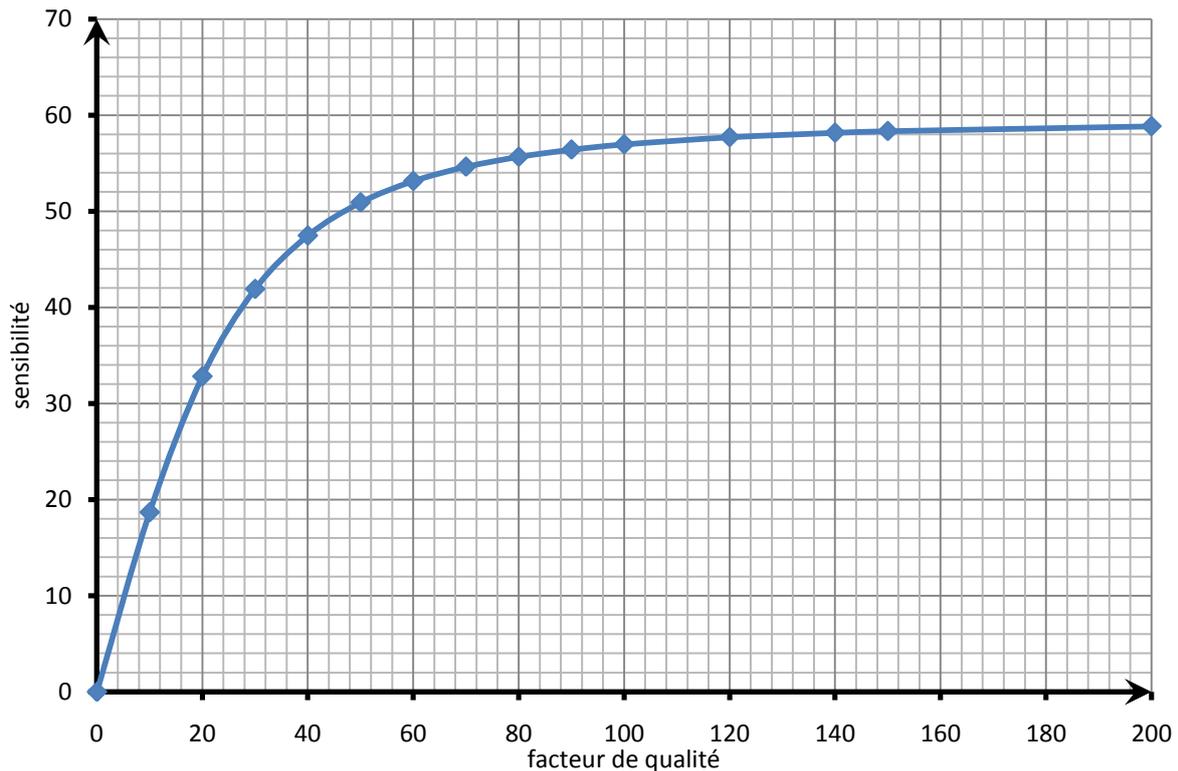


Figure 2—9 : Sensibilité en fonction du facteur de qualité.

Nous avons vu précédemment que nous pouvons exciter la structure aussi bien à sa fréquence propre qu'à la moitié de celle-ci. Dans ce cas, pour calculer la sensibilité du gyromètre, nous nous intéressons aux coefficients en $e^{j2\omega t}$, et l'on observe alors que la sensibilité est la même que précédemment. L'excitation à la fréquence moitié n'apporte donc rien de plus.

Cependant il sera nécessaire de vérifier qu'il n'y a pas de mode parasite du gyromètre dans les environs de la fréquence double. Évidemment, si nous avons un facteur de qualité faible (100) et si nous excitons la poutre à 12 kHz, nous avons aussi une vibration à 24 kHz. S'il existe un mode de vibration aux alentours de 23,8–25,2 kHz, le mode de vibration sera excité et va venir s'ajouter à la vibration initiale. Cette vibration va donc consommer une partie de l'énergie fournie pour l'excitation du primaire, et perturber sa vibration. Il faudra donc vérifier que le gyromètre ne possède pas de mode propre dans cette « zone », et s'il y existe un tel mode, il sera peut être nécessaire d'augmenter le facteur de qualité pour limiter le phénomène.

2.3 Bilan

Pour mettre en œuvre ce premier modèle intégré, nous avons réalisé un programme simple développé sous le logiciel libre Scilab. Ce programme nous permet d'obtenir une idée de la déformation de la poutre, en fonction des quatre types de paramètres suivants :

- dimensions d'une poutre constituant le gyromètre (longueur, largeur, épaisseur),
- propriétés physiques du matériau (masse volumique, module d'Young),
- vitesse de rotation de la poutre,
- facteur de qualité.

Nous avons en outre pu confirmer que la déformation de la poutre est constituée de deux vibrations : une vibration à la fréquence d'excitation et une vibration à la fréquence double.

Ce programme nous permet aussi de déterminer les fréquences de résonances de la poutre, ainsi que de prévoir les déplacements maximum possibles du primaire et du secondaire en fonction d'un facteur de qualité imposé par l'expérience.

Nous établissons ainsi une première estimation de l'influence des tensions d'excitation sur les fréquences de résonance des poutres ainsi que de leur influence sur la sensibilité gyroscopique.

Nous avons tiré de cette étude un premier dimensionnement des poutres pour le gyromètre.

| Longueur | Largeur | Epaisseur |
|--------------------|-------------------|-------------------|
| 6500 μm | 366 μm | 360 μm |

Tableau 2-1 : Récapitulatif du premier dimensionnement des poutres

Chapitre 3

Dimensionnement du gyromètre et simulation numérique

Même si elle nous a permis un premier dimensionnement des poutres du gyromètre, l'analyse des fréquences propres de la poutre en flexion proposée au chapitre 2 n'est pas parfaitement précise. Cette analyse n'a pas pour but, et ne nous permet pas, de connaître précisément les fréquences propres du gyromètre, du fait de sa géométrie complexe et du caractère anisotrope du silicium. Étant donné que la sensibilité du gyromètre dépend beaucoup de l'écart en fréquence des modes d'excitation et de détection, il est indispensable de procéder à une simulation numérique précise à partir d'une proposition de dimensionnement de la structure complète.

3.1 Simulation modale du gyromètre

L'analyse modale a pour objectif de déterminer la fréquence et la déformée des différents modes propres du gyromètre à la fois dans l'absolu et de façon comparative. Comme le nombre de paramètres influençant le comportement dynamique est grand, nous avons décidé de retenir arbitrairement ceux qui nous paraissaient les plus importants. Nous avons choisi d'imposer les dimensions des poutres qui, dans le cas idéal, nous donneraient une fréquence de 12 kHz pour le primaire, et 12,2 kHz pour les modes de détection, conformément au cahier des charges.

Peu avant le début de cette thèse, un projet de fin d'étude fut réalisé par deux étudiants de l'ENSMM. Ils avaient travaillé sur la possibilité de réaliser des résonateurs en flexion excités de manière électrostatique dans des wafers en silicium orientés (100). Dans cette étude, le choix avait été fait de travailler sur des wafers de 380 μm contrairement aux 560 μm des wafers de C. Hays. Ce choix avait essentiellement été motivé par le fait que les wafers étaient disponibles rapidement, et que, contrairement au procédé adopté par Charles Hays à l'EPFL, le procédé d'usinage de Besançon était simple face. Nous avons donc dû effectuer un redimensionnement complet du gyromètre de Charles Hays avec les nouvelles contraintes suivantes :

- suppression des peignes interdigités (la détection ne devant plus être capacitive mais optique),
- épaisseur des wafers de 380 μm ,
- fréquences de travail voisines de 12 kHz,
- séparation des fréquences primaire-secondaire voisines de 200 Hz,
- pas de modes parasites entre les deux modes d'excitation et de détection,
- les modes parasites doivent se trouver 200 Hz au-dessus ou 200 Hz en-dessous des modes d'excitation et de détection.

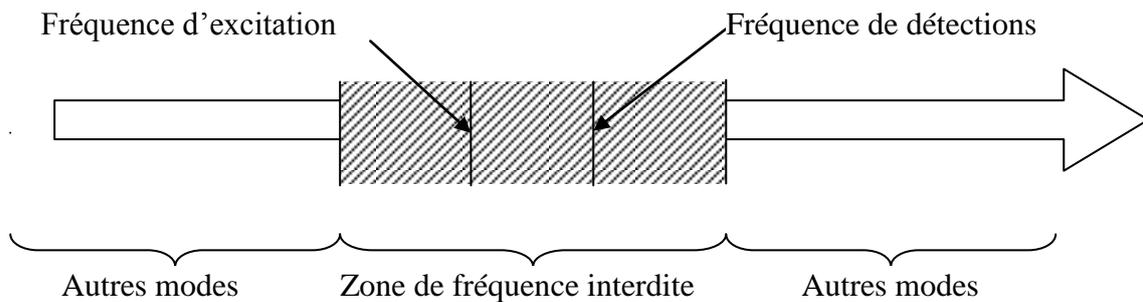


Figure 3—1 : Représentation graphique des positions des fréquences du gyromètre

Une vingtaine de simulations ont alors été réalisées à l'aide du logiciel Systus, de la société ESI, pour arriver à un dimensionnement acceptable vis-à-vis du cahier des charges. Nous avons adopté la forme d'un duodécagone pour le noyau et le perçage central, contrairement à Charles Hays qui avait choisi un cercle pour ce perçage. Cependant, quand nous réalisons un

masque, les cercles sont toujours polygonalisés, c'est pourquoi, pour que l'objet réalisé et la simulation soient en conformité, nous avons choisi un polygone. Dans le Tableau 3-1, le symbole R_e représente le diamètre du cercle circonscrit au polygone du noyau, et R_i celui du perçage. Les notations w , h , représentent respectivement la largeur, la hauteur de la poutre, l_s la longueur des suspensions. N_p et N_s représentent respectivement le nombre d'éléments dans la longueur des poutres et des suspensions. Enfin, nous trouvons dans les trois dernières colonnes la fréquence du primaire, des deux modes secondaires, puis du mode trèfle¹. Nous n'avons pas remis dans le tableau les valeurs des longueurs des poutres qui n'ont pas changé pour l'ensemble des simulations. La longueur a été fixée à $6504 \mu\text{m}$, la largeur des suspensions vaut $275 \mu\text{m}$, les T de suspensions (quand ils existent) sont longs de $2300 \mu\text{m}$ et ont une largeur de $100 \mu\text{m}$.

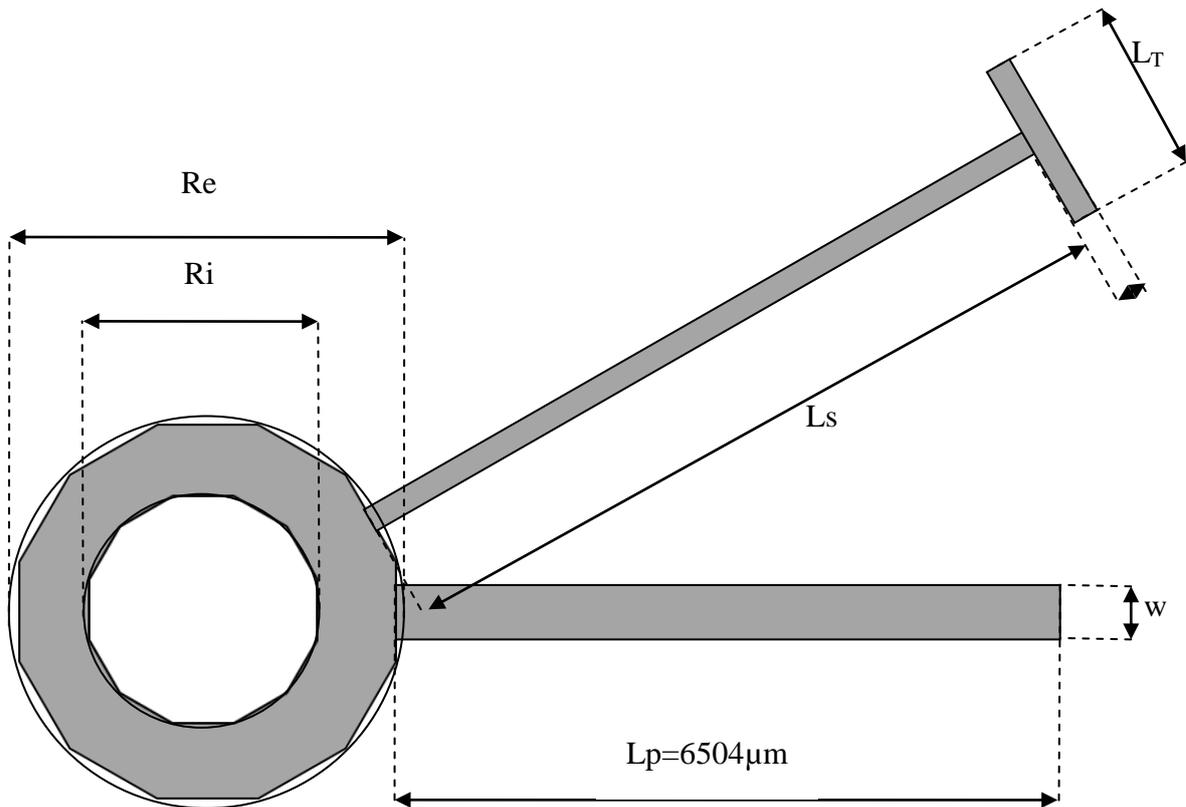


Figure 3—2 : Récapitulatif des dimensions du gyromètre.

Lors d'une première étape, nous avons repris le diamètre de $1700 \mu\text{m}$ pour le rayon extérieur du dodécagone, dimension qu'avait utilisée Charles Haye, ainsi qu'une épaisseur des poutres

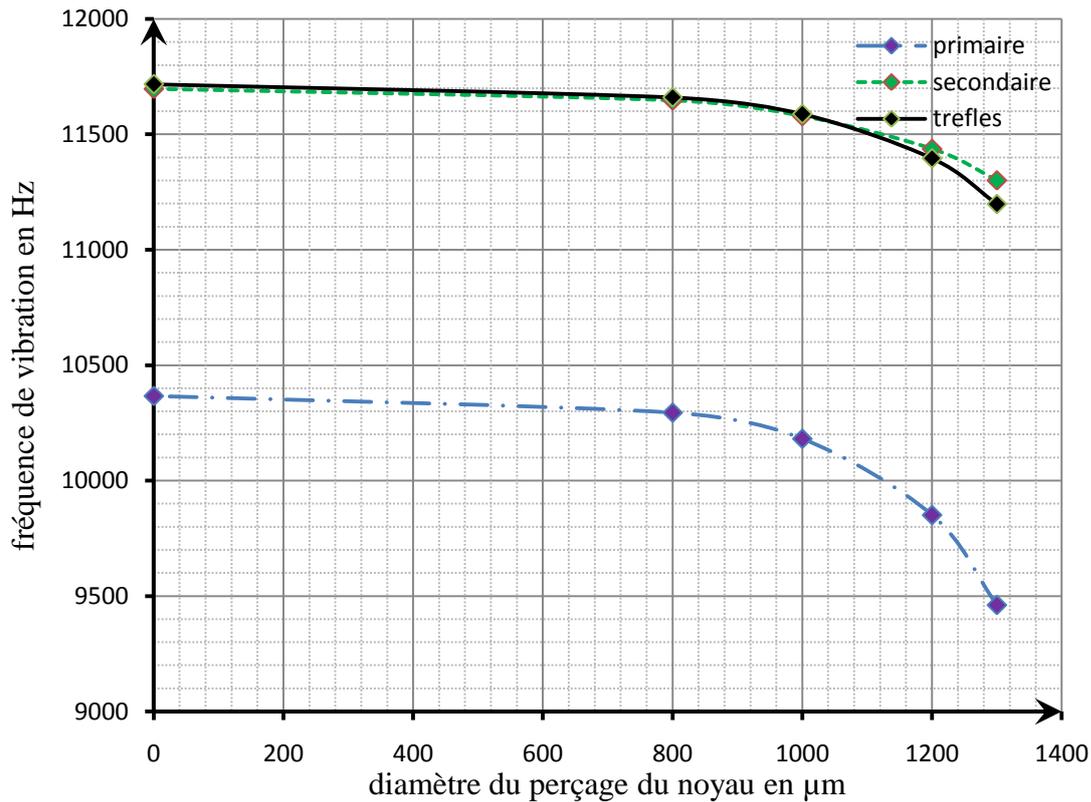
¹ Ce mode est un mode parasite engendré par l'ordre de multiplicité de la structure (cf. thèse de C.HAYE).

de 360 μm pour tenir compte des 20 μm de gap prévus pour l'excitation électrostatique. Ensuite, nous avons essayé plusieurs dimensions de perçage en vue d'ajuster l'écart entre le mode primaire et le mode secondaire. Dans la première série de modélisations, qui correspond aux premières lignes du tableau suivant (modèle light, ..., PLUS-10), nous avons volontairement supprimé les T de suspensions pour limiter le temps de calcul. Comme nous pouvons le voir sur le graphique suivant, cela a rendu impossible le réglage de l'écart en fréquence entre les différents modes du gyromètre. Nous avons donc conclu que, en l'absence des T de suspensions, le perçage du noyau était sans effet sur le réglage de l'écart en fréquence des modes de vibration.

| Nom | Re | Ri | w | h | ls | Np | Ns | P | 2*S | Trèfle |
|----------------|------|------|-----|-----|------|----|----|--------|-------|--------|
| light | 1700 | 1300 | 376 | 360 | 7000 | 13 | 14 | 9461.3 | 11301 | 11198 |
| M-12 | 1700 | 1200 | 376 | 360 | 7000 | 13 | 14 | 9850.8 | 11437 | 11396 |
| M-10 | 1700 | 1000 | 376 | 360 | 7000 | 13 | 14 | 10181 | 11579 | 11588 |
| M-8 | 1700 | 800 | 376 | 360 | 7000 | 13 | 14 | 10294 | 11647 | 11660 |
| PLEIN | 1700 | 0 | 376 | 360 | 7000 | 13 | 14 | 10366 | 11697 | 11717 |
| PLUS-10 | 1700 | 1000 | 376 | 360 | 7000 | 26 | 28 | 10288 | 11630 | 11643 |
| K-6 | 1000 | 600 | 376 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10290 | 11367 | 11401 |
| T-K-6 | 1000 | 600 | 376 | 370 | 7200 | 21 | 24 | 10560 | 11367 | 11401 |
| NK-6 | 1000 | 600 | 355 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10564 | 11041 | 11028 |
| RK-6 | 1000 | 600 | 366 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10305 | 11096 | 11126 |
| SK-6 | 1000 | 600 | 350 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10334 | 10663 | 10689 |
| RM-7 | 1000 | 700 | 340 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 9966 | 10171 | 10133 |

| | | | | | | | | | | |
|--------------|-----------------|------|-----|-----|------|----|----|--------|--------|--------|
| PK-6 | 1000 | 0 | 366 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10607 | 11374 | 11397 |
| RL-11 | 1200 | 1100 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 5173.9 | 8012.6 | 8177.7 |
| RL-10 | 1200 | 1000 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 8341.3 | 9810.1 | 9611.1 |
| Idem | Libre- libre | | | | | | | 7345.1 | 8320.7 | 8493.9 |
| RL-9 | 1200 | 900 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 9597.7 | 10263 | 10162 |
| Idem | Libre- libre | | | | | | | 9586.9 | 9738.1 | 9907.9 |
| SL-9 | 1200 | 900 | 345 | 360 | | | | 9597.3 | 9739.1 | 9914 |
| RL-8 | 1200 | 800 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10105 | 10460 | 10449 |
| SL-8 | 1200 | 800 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10104 | 10292 | 10389 |
| RL-7 | 1200 | 700 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10332 | 10577 | 10594 |
| RL-6 | 1200 | 600 | 345 | 360 | 7200 | 21 | 24 | 10439 | 10645 | 10665 |

Tableau 3-1 : Récapitulatif de l'ensemble des simulations.

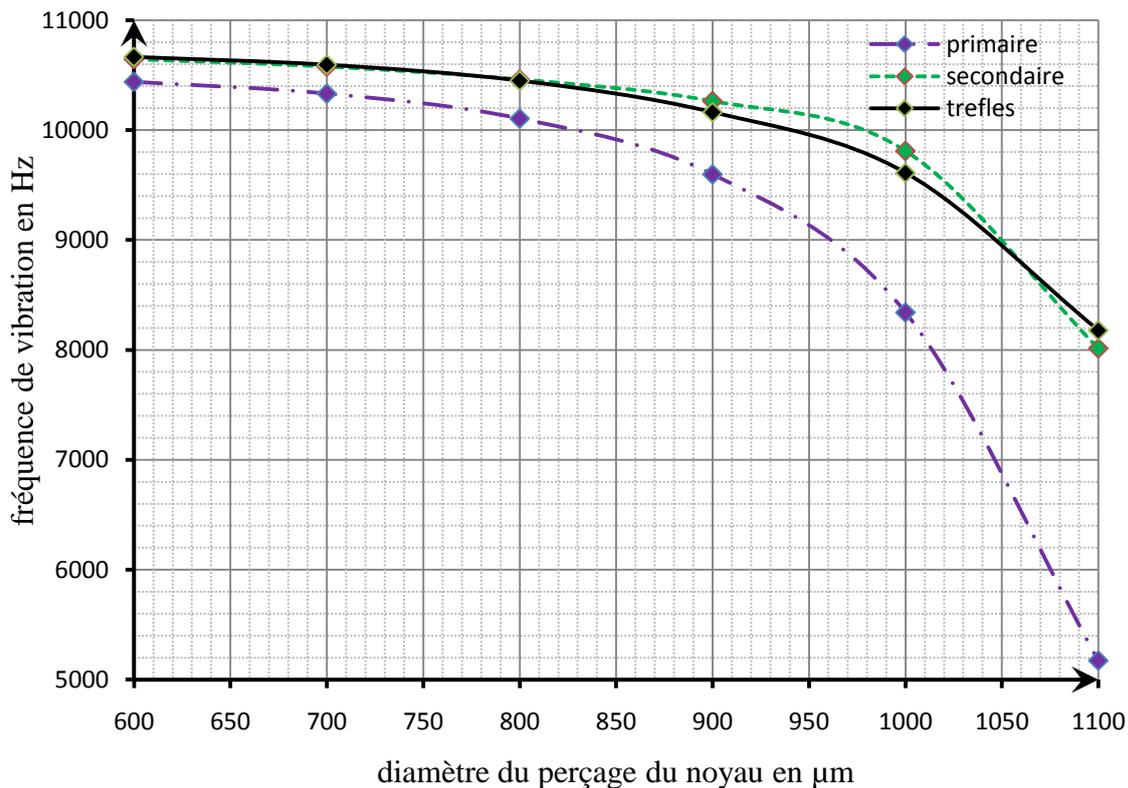


Graphique 3-1 : Fréquence de vibration en fonction du perçage du noyau, simulation light-PLUS-10.

Dans un deuxième temps, n'ayant pas réussi à ajuster l'écart de fréquence entre le primaire et le secondaire, nous avons décidé de modifier la taille du noyau. En effet, dans notre gyromètre, l'épaisseur du noyau est la même que celle de la poutre, et le noyau se comporte en réalité comme une plaque. Nous avons donc une rigidité importante pour les mouvements dans le plan (mode secondaire, mode trèfle), et une rigidité très faible dans le cas des mouvements hors-plan (primaire). Nous avons donc décidé de ramener de 1700 à 1000 le diamètre du noyau (ce sont les simulations K-6 à PK-6), pour se ramener à des conditions semblables d'encastrement entre les deux modes de vibrations. Cette série de simulations n'a pas vraiment modifié la fréquence de vibration du primaire, toutefois elle a permis de diminuer les fréquences de vibration des modes secondaire et trèfle. Cependant, les simulations n'ont toujours pas permis de régler la position du mode trèfle.

Nous avons donc réalisé une nouvelle série de simulations pour rejeter le mode trèfle. Quand nous perçons le noyau, le duodécagone devient une sorte d'anneau relativement mince, qui ne constitue plus un encastrement à proprement parler. Cela entraîne une diminution importante

de la fréquence de résonance sans pour autant modifier l'écart primaire–secondaire. Pour y remédier, nous avons décidé d'augmenter la taille du noyau, le faisant passer de 1000 à 1200 μm . Ensuite, nous avons déterminé une largeur de poutre de 345 μm pour compenser la différence de rigidité entre les deux modes. Enfin, nous avons réalisé un ensemble de simulations pour différentes valeurs de R_i . Comme nous pouvons le voir sur le graphique suivant, l'augmentation du diamètre du perçage diminue les fréquences de vibrations, notamment celle du mode primaire qui diminue plus rapidement.



Graphique 3–2 : Fréquence de vibration en fonction du perçage du noyau, simulation RL.

Néanmoins, ces différentes modifications ne permettaient toujours pas de rejeter le mode trèfle en dehors de la bande interdite. Nous avons donc décidé de réaliser des simulations libre-libre. En effet, si les points de fixation de la structure coïncident avec des nœuds de vibration de celle-ci en mode libre-libre, alors les fréquences calculées dans la première analyse et les fréquences de l'analyse libre-libre devraient être les mêmes. Comme nous pouvons le voir, ce n'est pas le cas, car les fréquences de vibration se trouvent modifiées, et le mode trèfle se trouve rejeté. L'explication réside dans le fait que les suspensions, qui semblent être immobiles dans les simulations, possèdent en réalité un mouvement d'extension compression que nous ne remarquons pas facilement lors du dépouillement du fait qu'il est

plus faible que l'ensemble des autres déplacements. Le fait d'encastrement en bout les suspensions bloque donc la vibration du noyau, et rend impossible le réglage en fréquence. Pour y remédier, il faut donc donner un degré de liberté supplémentaire aux suspensions. Nous avons donc rajouté des T de suspension permettant aux poutres de suspension de se déformer de manière plus libre. De la sorte, nous avons enfin réussi à obtenir une géométrie dont la simulation respecte le cahier des charges : la simulation SL8 encadrée dans le tableau. Pour conclure, nous pouvons donc dire que :

- l'augmentation du diamètre du noyau augmente la rigidité pour les modes dans le plan et la diminue pour les modes hors-plan,
- le perçage du noyau entraîne une chute de l'ensemble des fréquences de résonance, cette chute étant plus importante pour le mode primaire,
- l'ajout des T de suspension est indispensable pour réaliser l'équilibre dynamique de la structure. Ceci implique que les suspensions ont un mouvement, même s'il est petit par rapport à l'ensemble des autres déplacements.

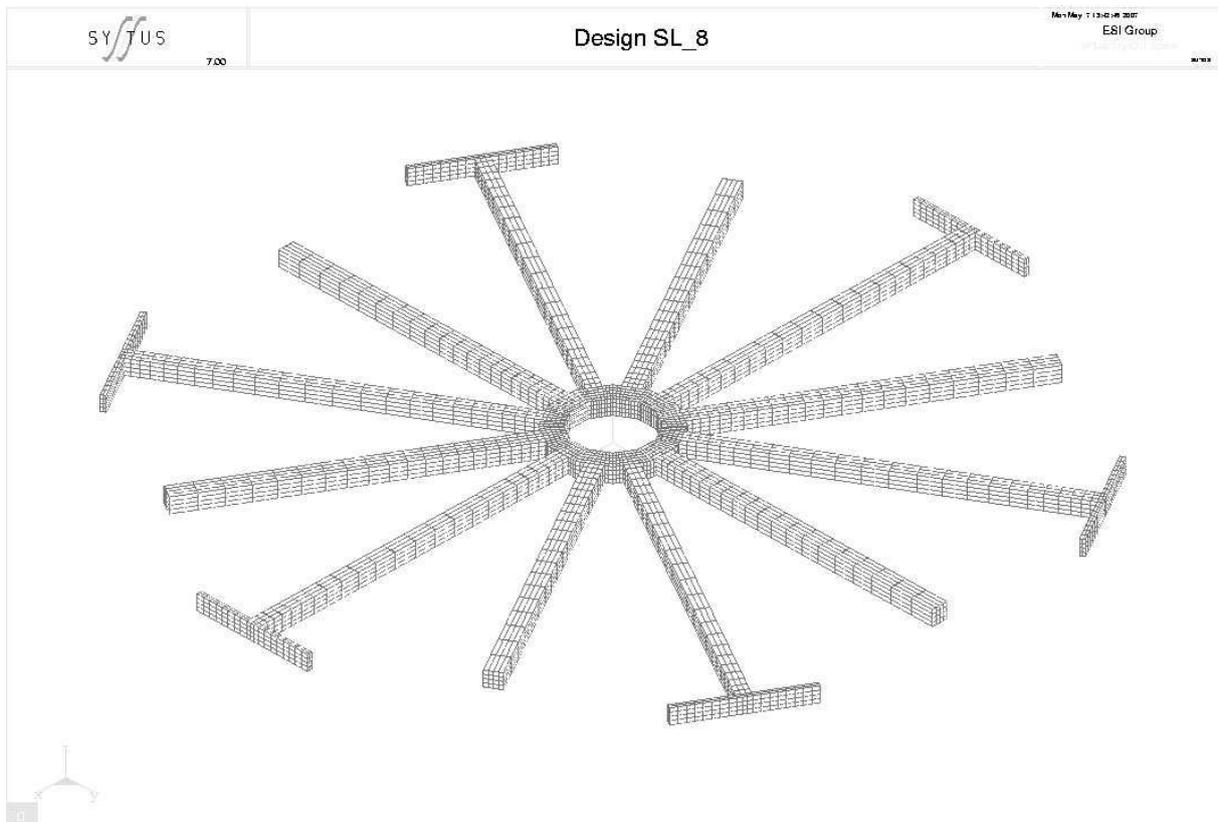


Figure 3—3 : Forme de structure donnant le meilleur résultat, avec son maillage.

Cette structure considérée comme optimisée sera la structure réalisée dans la suite des travaux présentés dans ce mémoire.

3.2 Étude de l'excitation électrostatique

Même si l'analyse modale précédemment décrite reste une étape incontournable, la structure fonctionne en réalité en régime forcé, au moyen de la force électrostatique à la surface des poutres. Nous avons donc été naturellement conduits à étudier les spécificités de l'excitation électrostatique, notamment en tenant compte des effets de l'inévitable composante continue de la force électrostatique. Cette composante continue résulte du fait que la force est proportionnelle au carré de la tension périodique appliquée au système et crée nécessairement une raideur additionnelle statique sur le gyromètre. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, cette raideur additionnelle modifie la fréquence de résonance des poutres.

En pratique, le gyromètre en silicium est excité à l'aide de trois électrodes en or déposées sur un wafer en verre, disposées à une distance de 20 μm des poutres. Le calcul du chapitre 2 pour une simple poutre encastree-libre ne permet pas de représenter l'impact réel de la composante continue de la force d'entretien sur l'ensemble du gyromètre. Nous avons donc effectué un certain nombre de simulations complémentaires pour estimer de manière qualitative les effets de cette précontrainte sur le gyromètre.

À l'aide du logiciel d'éléments finis Coventor², nous avons pu simuler les effets d'une tension statique. Nous n'avons pas cherché à représenter le gyromètre le plus fidèlement possible, l'intérêt n'étant pas de refaire l'analyse modale présentée à la section précédente. Nous avons donc simulé l'influence d'une pression électrostatique sur trois des poutres positionnées à 120°, conformément au cas du gyromètre réel.

La première remarque que nous pouvons immédiatement formuler en examinant la simulation présentée Figure 3—4 est que les bras de suspension se trouvent fortement déformés sous l'effet de la force électrostatique. Ceci entraîne une diminution du gap entre le verre et le silicium, mais modifie aussi l'équilibre dynamique de la structure. En effet, comme nous l'avons vu dans la section précédente, les bras de suspension du gyromètre ne sont pas

² C'est un logiciel par éléments finis spécialisé pour l'étude des micro-dispositifs (MEMS).

totallement immobiles et se déplacent au cours du temps pour accompagner les mouvements du noyau. Il est donc tout à fait possible que cette déformation affecte la vibration du gyromètre et modifie la position des pics de résonance.

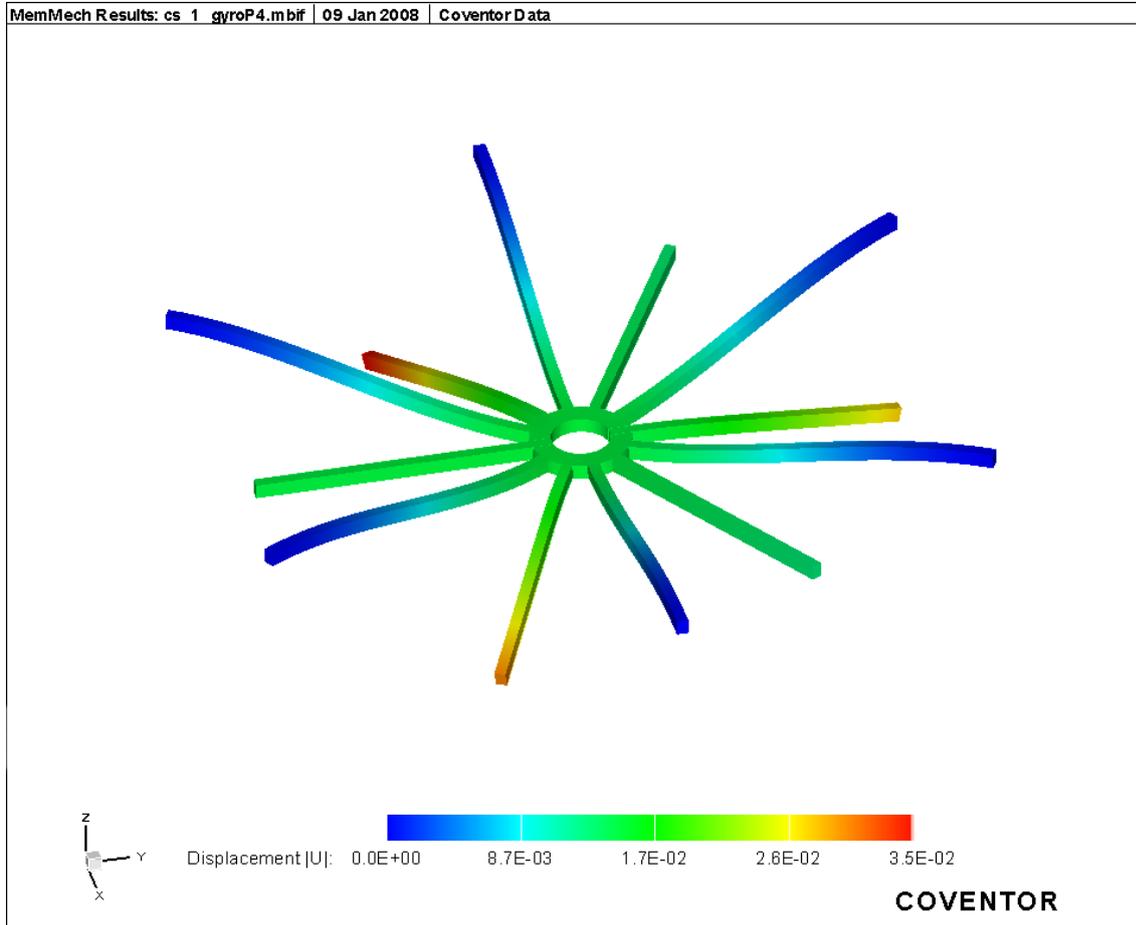


Figure 3—4 : Gyromètre soumis à une pression électrostatique constante.

Un autre effet apparaît sur la simulation statique, même s'il est moins visible que le fléchissement des suspensions. En effet comme nous le voyons sur la Figure 3—5, les trois poutres excitées subissent une déformation correspondant à la charge distribuée qu'elles subissent. On sait par ailleurs que la composante continue de la force électrostatique abaisse la fréquence de résonance par suite du renforcement de cette force consécutivement à la réduction du gap. Cet effet est très connu, et la modélisation présentée au chapitre 2 permet d'en tenir compte. Mais on peut également remarquer que les vibrations des paires de poutres en vis-à-vis ne s'effectuant pas autour de la même déformée statique, ces poutres n'auront pas non plus exactement les mêmes déformées modales, d'où une modification de l'ordre de symétrie du gyromètre, *a priori* néfaste à la qualité du dispositif.

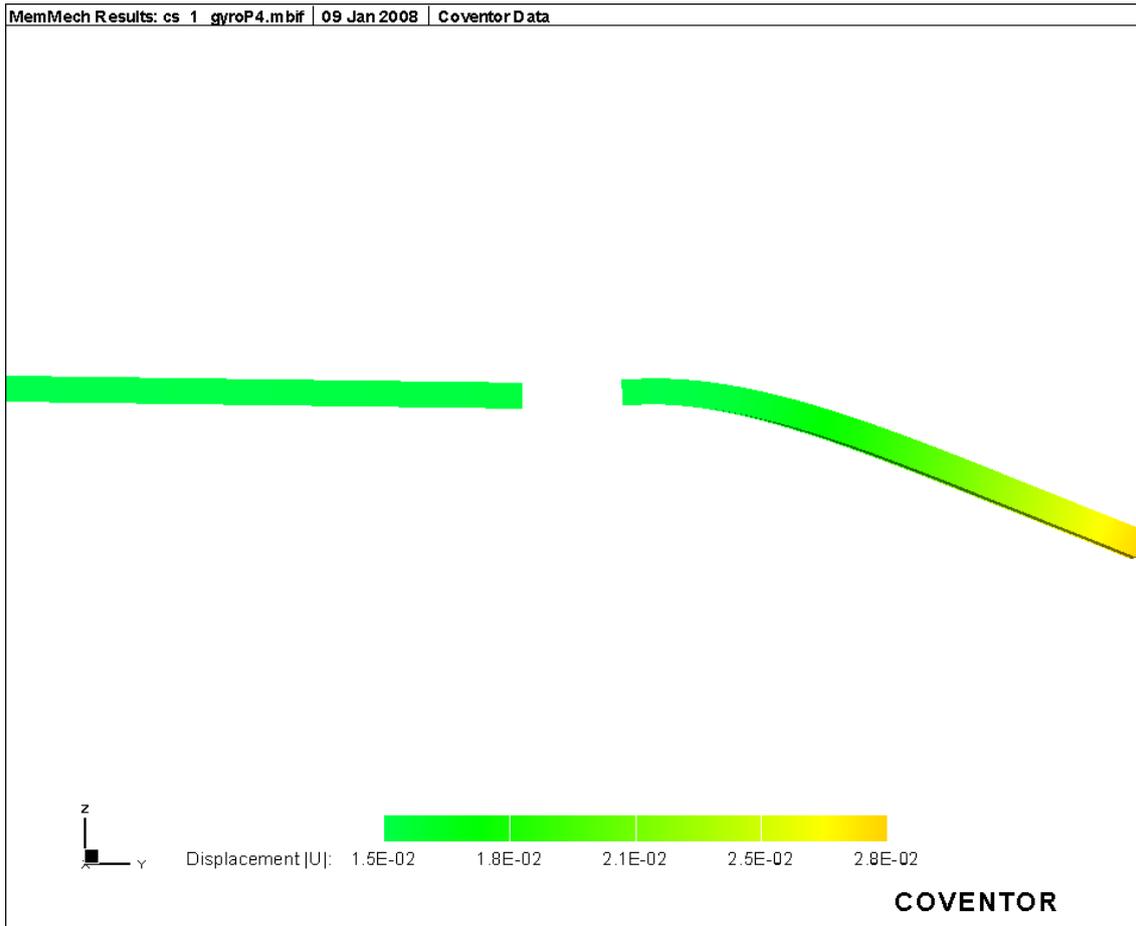


Figure 3—5 : Poutre soumise à la pression électrostatique et sa poutre en vis-à-vis.

L'analyse précédente est purement statique. En effet, à ce jour nous ne disposons pas des outils nécessaires à la réalisation d'une analyse couplée entre l'électrostatique et la mécanique pour obtenir l'influence de la tension d'alimentation sur le régime forcé de la structure complète. L'étude simple que nous avons proposée au chapitre 2 est en ce sens fonctionnellement plus avancée que ce que nous avons pu obtenir à partir des logiciels d'analyse structurelle couramment disponibles sur le marché.

Il est clair que les déformations statiques des suspensions et des poutres modifient les fréquences de résonance, ce qui peut limiter la sensibilité du capteur, celle-ci dépendant directement de la maîtrise de l'écart en fréquence des modes primaire et secondaire.

Nous avons donc établi un nouveau modèle statique simplifié du capteur en considérant une suspension et une poutre. Dans ce modèle, nous considérons que la suspension est encastree à une extrémité et guidée à l'autre, et que la poutre est guidée-libre. Les épaisseurs et largeurs

des suspensions et de la poutre étant plus petites que leurs longueurs respectives, nous pouvons encore utiliser les hypothèses de Bernoulli. À la jonction poutre-suspension, nous pouvons admettre en première approximation que la dérivée du déplacement des deux parties est nulle, du fait que les six suspensions obligent le noyau à se mouvoir de haut en bas sans rotation d'ensemble. Ceci est une approximation dans le cas où le comportement dynamique du noyau lui-même n'est pas pris en compte. Nous avons alors le système décrit sur la figure suivante :

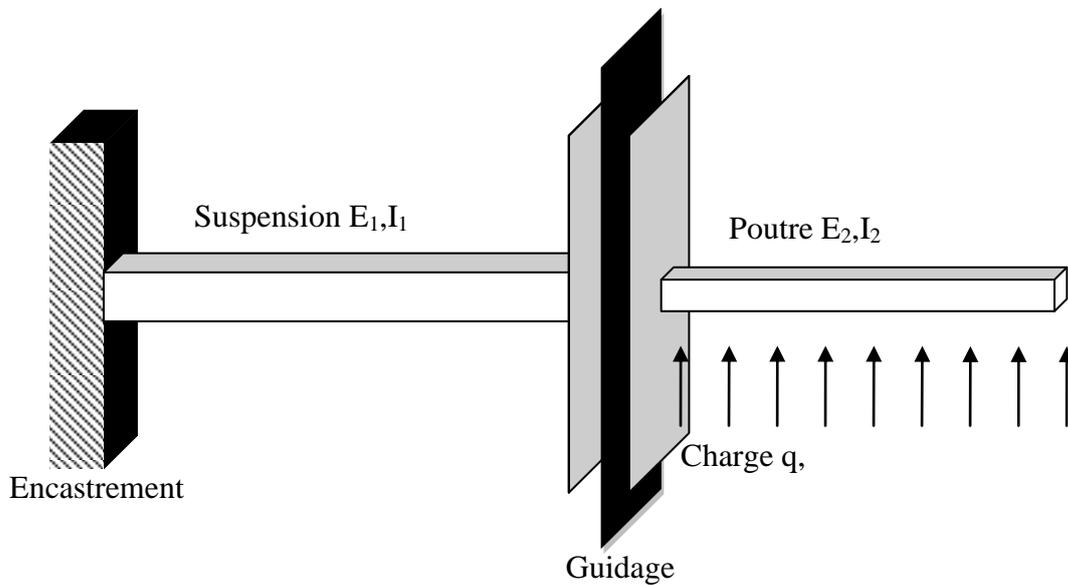


Figure 3—6 : Schéma équivalent des suspensions et des poutres du gyromètre en statique.

Nous pouvons alors écrire que la déflexion de la suspension équivalente aux six suspensions est régie par l'équation de flexion d'une « poutre » qui ne serait soumise à aucun autre chargement que son entraînement par le guidage équivalent au noyau. L' équation s'écrit :

$$-6E_1I_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0$$

La déflexion de la suspension équivalente est donc une fonction polynomiale d'ordre 3. Nous pouvons ensuite écrire une équation similaire pour la poutre gyrométrique associée, en appliquant à celle-ci la charge électrostatique répartie, sachant que seules trois des poutres parmi les six sont actionnées. Nous obtenons alors l'équation du mouvement suivante :

$$-3E_2I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + q = 0$$

Si nous considérons en première approximation que la charge linéique q est constante, nous trouvons aisément que la déflexion de la poutre équivalente est régie par une fonction polynomiale d'ordre 4. Pour déterminer complètement les coefficients de ces deux fonctions, il faut maintenant utiliser les conditions aux limites et de continuité, qui sont :

| | | |
|---------------------------------------|--|---|
| <i>C. L. en $x = 0$</i> | <i>C. L. en $x = L + L_1$</i> | <i>C. C. en $x = L$</i> |
| $w_1 = 0$ | $-3E_2I_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = 0$ | $w_1 = w_2$ |
| $\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0$ | $-3E_2I_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0$ | $\frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0$ |
| | | $-6E_1I_1 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = -3E_2I_2 \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3}$ |

Les suspensions et les poutres forment entre elles des angles de 30° et, comme nous l'avons vu dans le chapitre d'introduction, elles ont donc le même module d'Young en raison de l'orientation (111) du substrat.

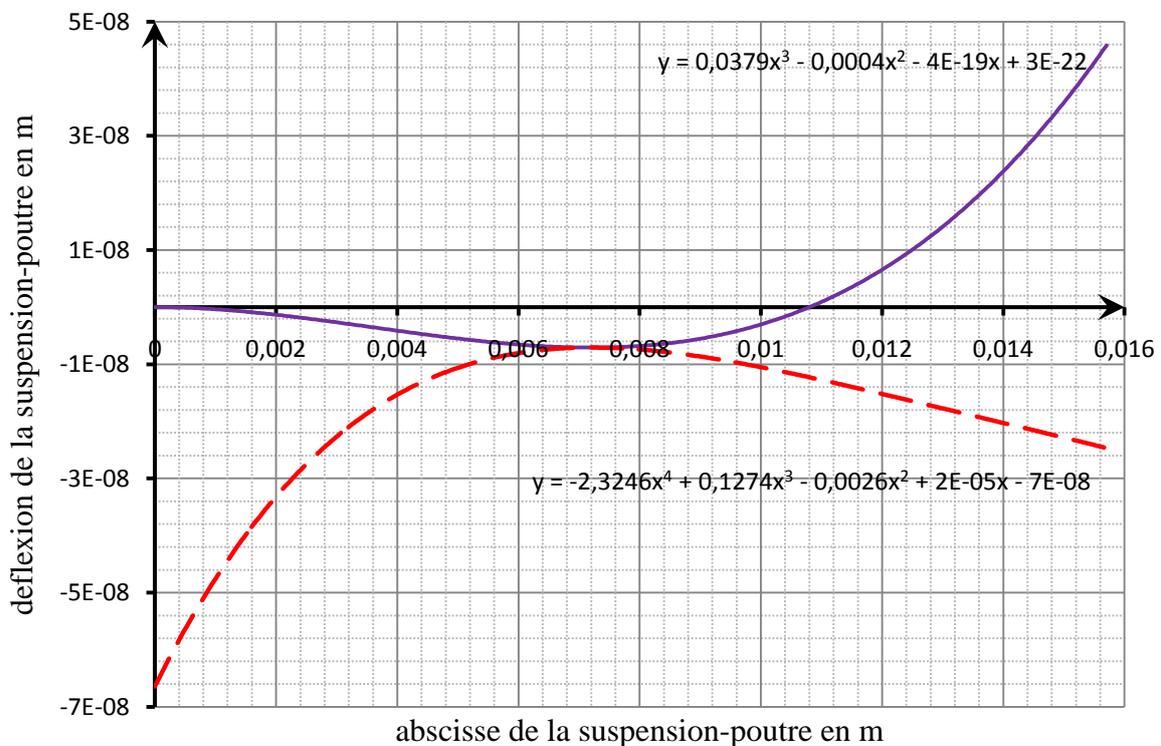
Nous obtenons aisément la déflexion de la suspension équivalente, de la forme $w_1 = \frac{a}{6}x^3 + \frac{b}{2}x^2$, en utilisant les conditions aux limites en $x = 0$. En utilisant les conditions aux limites en $x = L+L_1$ nous obtenons ensuite l'expression de la déflexion, $w_2 = -\frac{qx^4}{24E_2I_2} + \frac{q(L+L_1)x^3}{6E_2I_2} - \frac{q(L+L_1)^2x^2}{4E_2I_2} + cx + d$. En utilisant les conditions de continuité en $x = L$, nous trouvons finalement les déplacements respectifs suivants pour la suspension et la poutre :

$$w_1 = \frac{qL_1x^3}{6E_1I_1} - \frac{qL_1Lx^2}{4E_1I_1}$$

$$w_2 = -\frac{qx^4}{24E_2I_2} + \frac{q(L+L_1)x^3}{6E_2I_2} - \frac{q(L+L_1)^2x^2}{4E_2I_2} + \frac{qL(L^2 + 3LL_1 + 3L_1^2)}{6E_2I_2}x - \frac{qL^2(2L_1LE_2I_2 + L^2E_1I_1 + 4LL_1E_1I_1 + 6L_1^2E_1I_1)}{24E_2I_2E_1I_1}$$

Sur le graphique 3-3 ci-après, la courbe en ligne continue bleue représente la déflexion de la

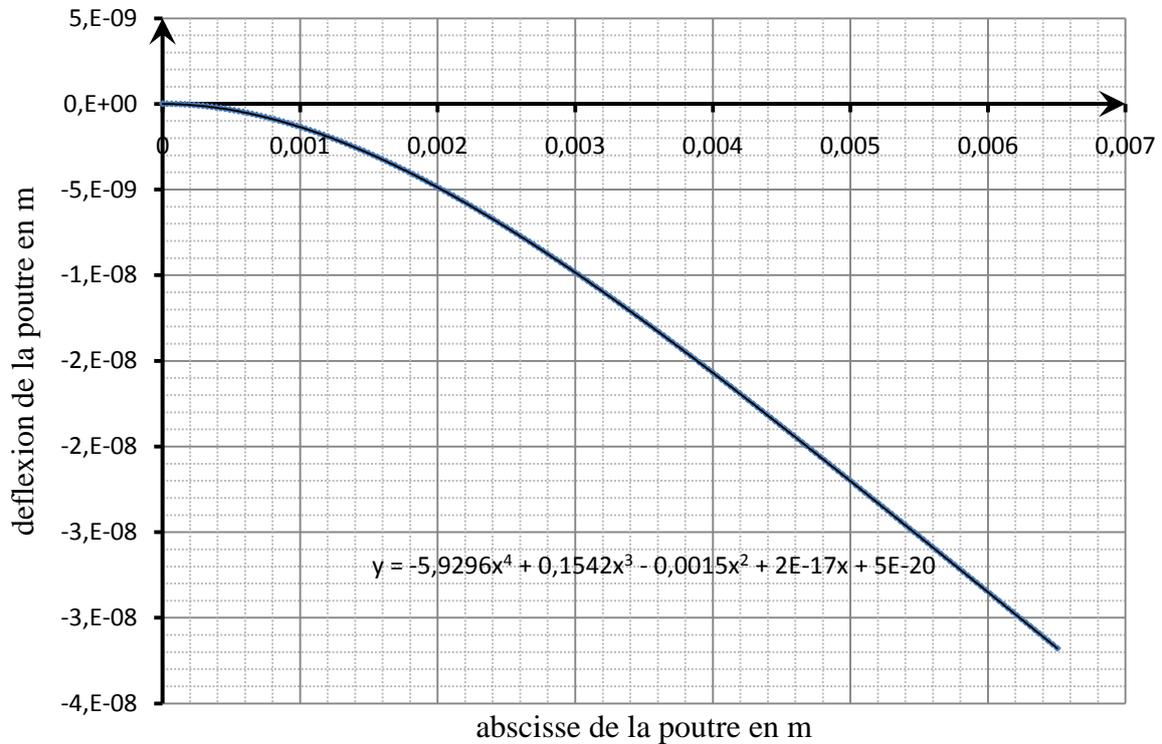
suspension de 0 à 7200 μm , et la ligne en pointillés rouge représente la déflexion de la poutre de 7200 μm à 15704 μm . Ces courbes ont été tracées pour une tension d'alimentation de 100 V, en considérant que nous la distance entre les électrodes vaut 20 μm . Nous voyons clairement que les déflexions de la poutre et de la suspension entraînent une diminution du gap mais aussi une déformation additionnelle de la poutre. La combinaison de ces effets renforce la pression électrostatique qui agit comme une précharge transverse distribuée qui s'oppose à la force de rappel intrinsèque à la poutre. Cette précharge électrostatique entraîne une diminution de la fréquence de résonance de la poutre en réduisant la rigidité dynamique de la poutre. L'effet purement géométrique de la déformation statique sur le comportement modal est par contre plus difficile à évaluer *ex nihilo*.



Graphique 3-3 : Déflexion d'une poutre et d'une suspension équivalente soumise à une charge constante.

Pour estimer l'importance du phénomène, nous pouvons comparer le déplacement statique de l'ensemble suspension-poutre au déplacement dynamique de la poutre en flexion au voisinage de la résonance. Nous retrouvons sur le graphique qui suit le déplacement engendré par la même tension et la même distance entre électrodes, dans le cas d'une poutre encastree-libre. Pour une force donnée, l'obtention de la déflexion dynamique de la poutre peut être

rapidement estimée en multipliant la déflexion statique correspondante par le facteur de qualité du mode considéré. Le Graphique 3–4 représente la déflexion statique de cette poutre.



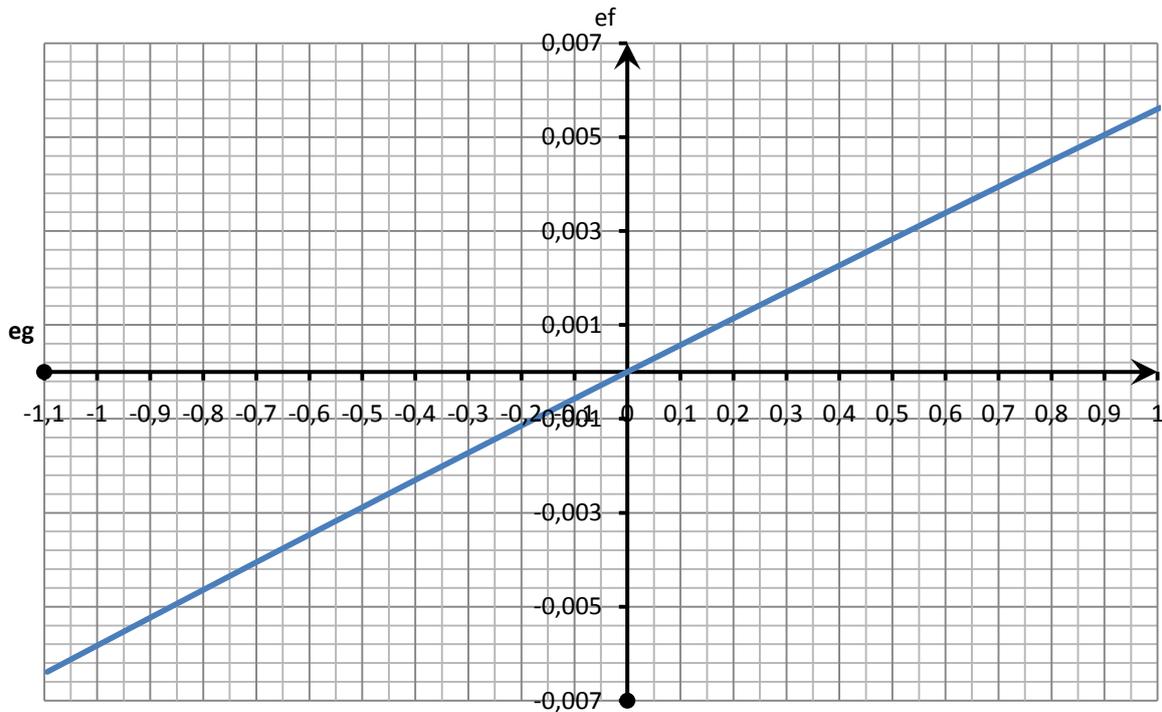
Graphique 3–4 : Déflexion statique d'une poutre seule soumise à une charge constante.

En estimant le facteur de qualité à environ 200, nous pouvons considérer que la diminution du gap reste négligeable et modifie très peu la fréquence de résonance de la poutre. Si nous reprenons l'expression de la fréquence du primaire avec excitation électrostatique, déjà rencontrée au chapitre 2 :

$$\omega_{3,2} = \sqrt{\frac{1}{\rho S} \sqrt{\frac{\mu^4 I_3}{L^4 S_{22}} - \frac{b \varepsilon_0}{g^3} \left(V_c^2 + \frac{V_0^2}{2} \right)}}$$

nous pouvons tracer l'évolution de l'écart relatif en fréquence $ef = \frac{f-f_0}{f_0}$ en fonction de l'écart relatif du gap, $eg = \frac{g-g_0}{g_0}$. Cette courbe est représentée sur le Graphique 3–5. On remarque que, pour la structure étudiée, un écart de 10 nm sur un gap de 20 μm représente un écart inférieur à 0.1%, ce qui entraîne une variation de la fréquence de l'ordre de $5.10^{-4} \%$. La réduction du gap n'a donc pas une influence prédominante sur la variation de fréquence.

Cependant, il reste que la composante continue de la déformation des suspensions et des poutres réduit la symétrie du gyromètre et exerce une certaine influence sur les fréquences de résonance, même s'il reste cependant difficile de prédire avec exactitude l'importance de ce phénomène.



Graphique 3-5 : Evolutions de ef en fonction de eg .

Pour pallier ces défauts, nous avons décidé de proposer des modifications de la structure. Nous avons au départ proposé deux nouvelles structures. Les modifications apportées n'affectent en rien la forme de la partie vibrante, et ne remettront donc pas en cause les analyses modales. Elles portent seulement sur les modalités d'excitation électrostatique et visent à optimiser la génération des forces à l'origine du mouvement électrostatique. Puisque la force électrostatique dépend du carré de la tension, elle ne peut qu'attirer mutuellement les objets et changer le signe de la tension ne change ni la direction, ni le sens de la force. Nous avons alors proposé les structures qui suivent :

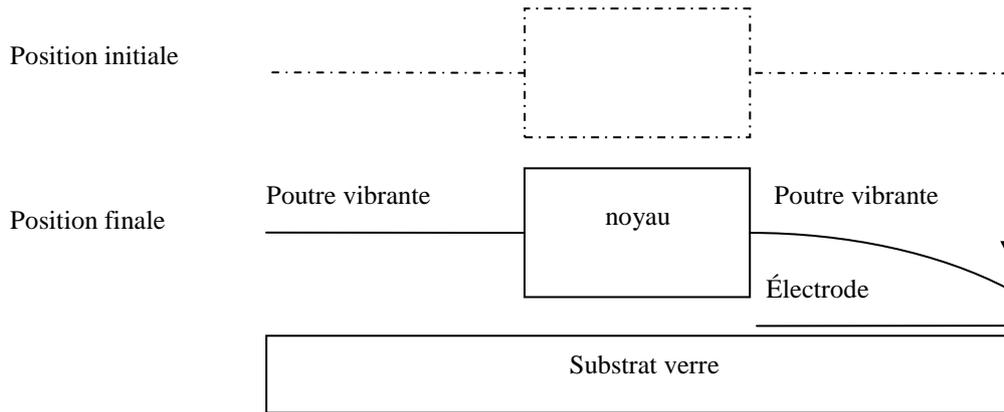


Figure 3—7 : Modèle d'excitation initiale.

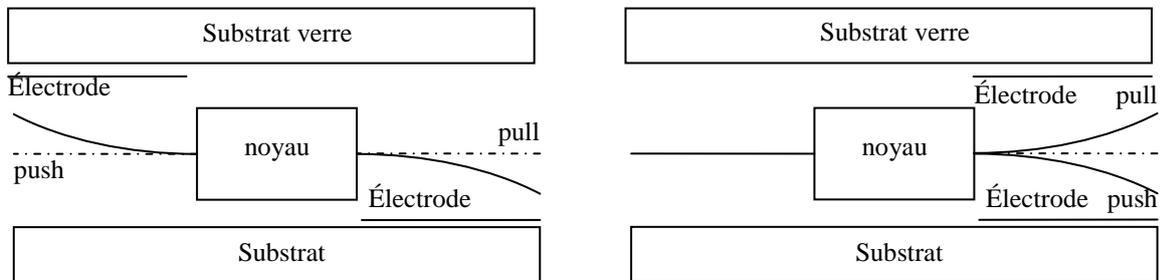


Figure 3—8 : Nouveau modèle d'excitation.

La première figure rappelle le fonctionnement de la première structure avec actionnement du gyromètre uniquement par des électrodes placées en position inférieure.

La seconde configuration envisagée comporte deux jeux d'électrodes, un jeu placé en position inférieure, et un autre jeu placé en position supérieure en face des autres poutres du gyromètre. En alimentant simultanément les deux groupes d'électrodes, nous obtiendrons donc la suppression de la déflexion des suspensions, mais sans supprimer la composante statique de la déformation des poutres, bien que les déformations des deux poutres soit égales. Cette configuration nécessite que les réalisations de la distance poutre électrode soient identiques sur les deux faces, ce qui demande une bonne maîtrise de l'usinage DRIE.

La troisième configuration envisagée comporte également deux jeux d'électrodes, mais contrairement au modèle précédent, les électrodes agissent sur les mêmes poutres. Cela offre

la possibilité de supprimer la déformation des suspensions et des poutres. À cet effet, nous pouvons soit appliquer successivement la même tension aux bornes du gyromètre sur chaque électrode, soit appliquer une tension alternative sur une des électrodes qui créera la vibration, puis une tension constante sur la poutre en regard pour compenser la composante continue de la force électrostatique. De plus, le deuxième condensateur ainsi réalisé peut être vu comme un port additionnel utilisé pour la mesure et le contrôle électrique du déplacement primaire, en mesurant le courant créé par le mouvement de la poutre à tension constante.

Les deux configurations proposées permettent toutes les deux de supprimer la déformation des suspensions. Cependant, seul le deuxième modèle permet de supprimer la précontrainte des poutres elles-mêmes. De surcroît, nous pensons qu'il sera plus aisé d'ajuster la tension d'alimentation que de maîtriser parfaitement l'épaisseur du gap, c'est pourquoi nous avons décidé de réaliser le second modèle. Évidemment, ce nouveau modèle entraînera la modification du processus de fabrication, afin de permettre l'ajout du nouveau jeu d'électrodes.

3.3 Bilan

Nous avons, dans ce chapitre, atteint nos objectifs en définissant un dimensionnement du gyromètre qui nous permette de respecter le cahier des charges, à savoir obtenir des fréquences de l'ordre de la dizaine de kHz pour les modes d'excitation et de détections, avec un écart d'environ 200 Hz entre les fréquences des modes d'excitation et de détection. Les simulations dynamiques réalisées avec Systus prévoient un rejet des modes parasites 200 Hz au-delà des fréquences cibles, seul le mode trèfle subsiste à environ 100 Hz au-dessus des fréquences cibles, mais cela reste acceptable. Le tableau suivant récapitule les dimensions du gyromètre optimisé.

| Re | Ri | w | h | ls | lp | ws | IT | wT |
|------|-----|-----|-----|------|------|-----|------|-----|
| 1200 | 800 | 345 | 360 | 7200 | 6504 | 275 | 2300 | 100 |

Tableau 3-2 : Récapitulatif des dimensions du gyromètre optimisé en μm .

Nous avons aussi analysé rapidement les conséquences des conséquences des non-linéarités intrinsèques à l'excitation électrostatique. Cette étude nous a permis d'appréhender la déformation réelle du gyromètre soumis à une force électrostatique dynamique. À partir de cette analyse, nous avons conçu un système de « double excitation » visant à éliminer la déformation statique associée à la composante continue de la force appliquée. En effet, le désaccord de fréquence entre les poutres entraînées et les poutres libres, si minime soit-il, doit être combattu dans la mesure où les performances du gyromètre sont liées à la conservation de l'équilibrage et de la symétrie de la structure en fonction du signal d'excitation et sur toute l'étendue de mesure du capteur.

Chapitre 4

Détermination du facteur de qualité d'une poutre en flexion

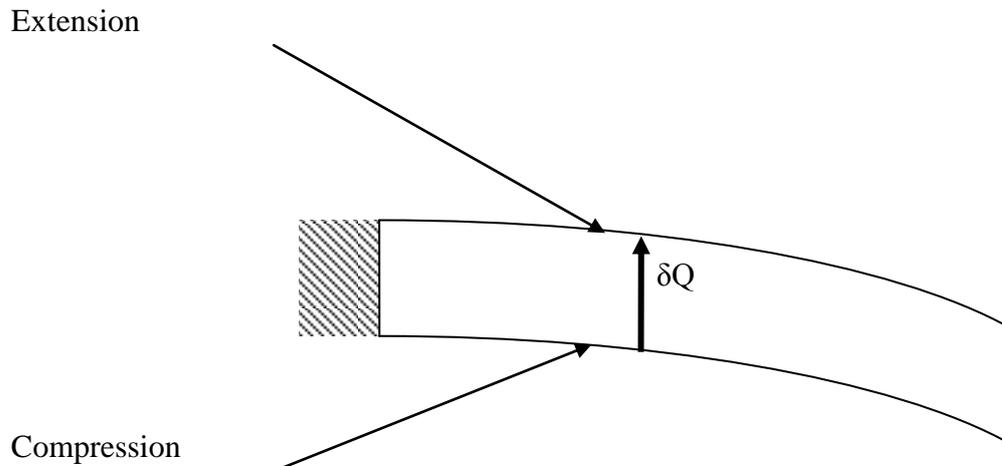
L'amplitude des modes primaire et secondaire du gyromètre dépend évidemment de leurs coefficients de surtension, qui doivent être assez voisins en pratique. La maîtrise du coefficient de surtension est importante pour la détermination de conditions d'excitation optimales pour permettre la détection dans les meilleures conditions possibles. D'une façon générale, le facteur de qualité d'un résonateur est lié aux pertes d'énergie de la structure. Elles peuvent être de plusieurs natures, pertes liées au matériau (pertes thermo-élastiques dues aux variations de température induites par les compressions et extensions successives du matériau), pertes dans la fixation, et pertes dues à l'amortissement de l'air.

4.1 Amortissement thermoélastique

L'amortissement thermo-élastique dans un solide est consécutif à ses changements de volume au cours du temps, qui s'accompagnent de variations de température. Dans le cas d'une poutre en flexion, quand les côtés de la poutre se trouvent successivement étirés (comprimés), ils s'échauffent (se refroidissent). Il apparaît alors des gradients de températures locaux, qui créent un transfert de chaleur δQ irréversible (donc perdu) nécessaire à l'équilibre du solide. Ces phénomènes de dissipation d'énergie ont été étudiés pour la première fois par Zener¹ en

¹ Clarence Zener est un physicien américain né en 1905 et mort en 1993. Il est notamment connu pour ses travaux sur le phénomène qui porte son nom : la diode zener, ainsi que le prix qui porte son nom et qui

1938 pour application dans les aciers. Landau² et Lifchitz³ ont ensuite repris ses travaux.



Graphique 4-1 : Dissipation d'énergie d'une poutre en flexion.

Plus récemment Roukes a proposé une application de ce modèle au silicium [4]. Dans sa thèse proposant une analyse fine d'un gyromètre étoile en quartz [5], Hubert Hantz a proposé une amélioration du modèle de Zener qui tient compte du comportement nécessairement anisotrope d'un cristal piézo-électrique. Nous présentons dans ce paragraphe une adaptation de ce modèle au cas d'une poutre vibrante en silicium.

récompense "les contributions scientifiques exceptionnelles apportées par les chercheurs dans le domaine du frottement interne et de l'atténuation ultrasonore dans les solides"

DUWEL, A. WEINSTEIN, M. GORMAN, J. BORENSTEIN, J. WARD, P., *Quality factors of MEMS gyros and the role of thermoelastic damping*. 15th IEEE International Conference on . Micro Electro Mechanical Systems Las Vegas, 2002, pages 214-219.

² Lev Landau scientifique russe né en 1908 et mort en 1968. Il recevra le prix Nobel pour ses travaux sur la superfluidité de l'hélium liquide.

³ Evguéni Lifchitz est un mathématicien et physicien russe née en 1915 et mort 1986 il est surtout célèbre pour son cours de physique théorique Co-écrit avec Landau.

⁴ LIFSHITZ, Ron, ROUKES, M.L., *Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems*. PHYSICAL REVIEW B, 2000 Volume 61, number 8, pages. 560-5609.

⁵ HANTZ, Hubert, *Étude d'un gyromètre piézoélectrique 2 axes*, 2005, 151 pages. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté.

L'analyse de l'amortissement thermodynamique repose sur une interaction entre les phénomènes élastiques et thermiques. De plus, la piézo-électricité nécessaire dans la thèse de H. Hantz n'est pas de mise pour notre application. Nous pouvons donc reprendre les calculs de Hantz en les simplifiant et en adaptant les notations et lois de comportement au cas d'un substrat silicium.

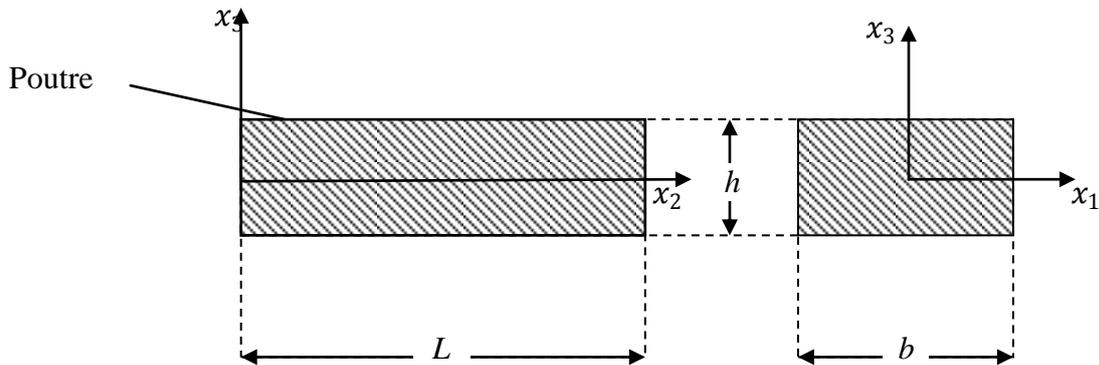


Figure 4—1 : Schéma de la poutre.

Le modèle se construit en combinant une résolution de l'équation de la chaleur (problème de conduction thermique) et de l'équation d'une poutre vibrant en flexion, dans l'approximation de Bernoulli et en tenant compte du comportement thermo-élastique du matériau. Il s'agit d'un problème d'interaction multiphysique, nécessitant une réflexion thermodynamique initiale afin de garantir la pertinence et la cohérence des caractéristiques matérielles utilisées dans les différentes équations. Dans le cas d'un résonateur mécanique, on obtient des lois de comportement cohérentes en définissant les caractéristiques matérielles comme les coefficients d'un développement en série de Taylor d'un potentiel thermodynamique par rapport à des grandeurs indépendantes. Celles-ci peuvent être les déformations ou les contraintes, la température d'une part, et l'entropie d'autre part.

L'énergie interne U qui apparaît dans l'écriture du principe de Carnot n'est pas appropriée pour notre problème, car la variable indépendante pour la partie thermique est l'entropie, comme indiqué par la forme différentielle :

$$dU = T_{ij} dS_{ij} + \theta d\eta,$$

alors qu'on sait que l'équation de la thermique utilise la température, et non pas l'entropie,

comme variable indépendante. En ce cas, il est préférable d'utiliser l'énergie libre, définie par :

$$F = U - \theta\eta \Rightarrow dF = T_{ij} dS_{ij} - \eta d\theta.$$

Dans ces conditions, on obtient :

$$\rho_0[F(S, \theta_0 + \Delta\theta) - F(0, \theta_0)] = \frac{1}{2} c_{ijkl} S_{ij} S_{kl} - \frac{1}{2} \frac{\rho_0 C}{\theta_0} \Delta\theta^2 - \Lambda_{kl} S_{kl} \Delta\theta \quad (4-1)$$

où Λ est le tenseur des coefficients thermo-élastiques de la contrainte, C est la chaleur volumique spécifique à la température de référence et les modules élastiques c_{ijkl} sont définis à température constante. $\Delta\theta = \theta - \theta_0$ représente la variation de température par rapport à une température de référence classiquement 25°C . On déduit de (4-1) l'expression des contraintes et de l'entropie :

$$\begin{aligned} T_{ij} &= \rho_0 \left(\frac{\partial F}{\partial S} \right)_\theta = c_{ijkl} S_{kl} - \Lambda_{kl} \Delta\theta \\ \rho_0 \eta &= -\rho_0 \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)_S = \frac{\rho_0 C}{\theta_0} \Delta\theta + \Lambda_{kl} S_{kl}. \end{aligned} \quad (4-2)$$

Lorsque $T_{ij} = 0$ on obtient :

$$c_{ijkl} S_{kl} = \Lambda_{ij} \Delta\theta. \quad (4-3)$$

En ce cas, la déformation s'identifie à la dilatation thermique conformément à la relation $S_{kl} = \alpha_{kl} \Delta\theta$, et l'on obtient par substitution :

$$\Lambda_{ij} = c_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (4-4)$$

On en déduit immédiatement la loi de comportement suivante pour la thermoélasticité, écrite en notation tensorielle :

$$T_{ij} = c_{ijkl} (S_{kl} - \alpha_{kl} \Delta\theta). \quad (4-5)$$

Cette loi de comportement est celle qui doit être reportée dans l'équation d'équilibre thermique. Nous allons à présent considérer l'équilibre dynamique de la poutre et reprendrons ensuite l'étude détaillée de l'équation de la conduction-diffusion thermique.

Le modèle de Bernoulli décrivant les vibrations de flexion d'une poutre élancée repose sur

l'hypothèse que la contrainte essentielle est la contrainte d'extension-compression suivant l'axe de la poutre. Cela revient à prendre les contraintes plutôt que les déformations comme variables indépendantes de la loi de comportement. Ce résultat est obtenu en dérivant la loi de comportement à partir d'un nouveau potentiel thermodynamique G , la fonction de Gibbs (ou enthalpie libre), définie de la façon suivante :

$$G = F - T_{ij} S_{ij} \Rightarrow dG = dF - TdS - SdT = S_{ij} dT_{ij} - \eta d\theta \quad (4-6)$$

On montre alors facilement que $c_{ijkl} s_{klmn} = \delta_{im} \delta_{ln}$. En représentation matricielle, la matrice des modules de souplesse s est l'inverse de la matrice des modules élastiques c . Dans la représentation (4-6), la loi de comportement thermoélastique cohérente avec (4-5) est alors :

$$S_{ij} = s_{ijkl} T_{kl} + \alpha_{ij} \Delta\theta \quad (4-7)$$

Pour un problème de barreau élané suivant x_2 , seule T_2 est non nulle ; de plus le cristal est cubique, ce qui limite le nombre de coefficients élastiques et de coefficients de dilation non nuls. En notation matricielle, la loi de comportement pertinente à reporter dans l'équation de la dynamique est alors :

$$\begin{aligned} S_1 &= s_{12}^\theta T_2 + \alpha_1 \Delta\theta \\ S_2 &= s_{22}^\theta T_2 + \alpha_2 \Delta\theta \\ S_3 &= s_{32}^\theta T_2 + \alpha_3 \Delta\theta \end{aligned} \quad (4-8)$$

qui correspond à l'équation de comportement thermoélastique simple :

$$T_2 = \frac{1}{s_{22}} (S_2 - \alpha_2 \Delta\theta) = E (S_2 - \alpha_2 \Delta\theta), \quad (4-9)$$

où, par définition, E désigne le module d'Young de la poutre orientée suivant x_2 . Le modèle de Zener est basé sur l'hypothèse que $\Delta\theta$ est une fonction du temps et de l'épaisseur. On admet que l'hypothèse cinématique de Bernoulli reste applicable. Elle se traduit par l'expression suivante de la déformation dynamique d'extension-compression :

$$S_2 = -x_3 \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \quad (4-10)$$

Par report dans (4-9), on obtient :

$$T_2 = -\frac{x_3}{s_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} - \frac{\alpha_2}{s_{22}} \Delta\theta. \quad (4-11)$$

L'équation d'équilibre dynamique d'une poutre en flexion simple est connue :

$$\rho S \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial x_2^2} = 0. \quad (4-12)$$

Après y avoir substitué l'expression du moment fléchissant $M = \iint_S -x_3 T_2 dx_1 dx_3$, ainsi que (4-10) et (4-11), nous obtenons finalement :

$$\rho S \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{I}{s_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\alpha_2}{s_{22}} I_T \right] = 0 \quad (4-13)$$

où $I = \iint_S x_3^2 dx_1 dx_3$ désigne le moment d'inertie à la flexion et $I_T = \iint_S x_3 \theta dx_1 dx_3$.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, l'équation de la chaleur est utilisée seulement pour décrire le transfert thermique dans l'épaisseur de la plaque :

$$\frac{dQ}{dt} = \gamma_i \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial x_i^2} \quad i = 1..3 \quad (4-14)$$

On obtient alors explicitement :

$$\gamma_3 \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial t} (\Lambda_{kl} S_{kl} \theta + C^S \Delta\theta) \quad (4-15)$$

En pratique les équations d'équilibre explicites sont écrites avec des constantes matérielles mesurées et tabulées sous forme matricielle. Nous avons déjà vu que, dans le modèle de Bernoulli, seules subsistent les composantes d'extension-compression S_1 , S_2 et S_3 du tenseur des déformations. L'équation de la chaleur appropriée pour notre problème est donc :

$$\gamma_3 \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial x_3^2} = C^S \frac{\partial \theta}{\partial t} + \Lambda_1 \theta \frac{\partial S_1}{\partial t} + \Lambda_2 \theta \frac{\partial S_2}{\partial t} + \Lambda_3 \theta \frac{\partial S_3}{\partial t} \quad (4-16)$$

Les équations (4-16) et (4-13) constituent le système à résoudre pour déterminer le facteur de qualité thermodynamique.

En substituant l'expression (4-11) de T_2 dans la première et la troisième équation (4-8), on obtient :

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -x_3 \frac{s_{12}}{s_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \left(\alpha_1 - \frac{s_{12}}{s_{22}} \alpha_2 \right) \Delta\theta = x_3 \sigma_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\alpha_1 + \sigma_{12} \alpha_2) \Delta\theta \\
 S_3 &= -x_3 \frac{s_{32}}{s_{22}} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \left(\alpha_3 - \frac{s_{32}}{s_{22}} \alpha_2 \right) \Delta\theta = x_3 \sigma_{32} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + (\alpha_1 + \sigma_{32} \alpha_2) \Delta\theta
 \end{aligned} \tag{4-17}$$

où nous avons introduit les coefficients de Poisson anisotropes σ_{12} et σ_{32} .

Nous remplaçons alors dans (4-16) les déformations par leur valeur :

$$\begin{aligned}
 \gamma_3 \frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial x_3^2} &= C^S \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t} - x_3 [\Lambda_1 \sigma_{12} + \Lambda_2 + \Lambda_3 \sigma_{32}] \theta \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \\
 &+ [\Lambda_1 (\alpha_1 + \sigma_{12} \alpha_2) + \Lambda_3 (\alpha_3 + \sigma_{32} \alpha_2)] \theta \frac{\partial \Delta\theta}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{4-18}$$

Dans la suite, nous posons :

$$\begin{aligned}
 C &= C^S [\Lambda_1 (\alpha_1 + \sigma_{12} \alpha_2) + \Lambda_3 (\alpha_3 + \sigma_{32} \alpha_2)] \theta_0 \\
 \Lambda &= \Lambda_1 \sigma_{12} + \Lambda_2 + \Lambda_3 \sigma_{32}
 \end{aligned} \tag{4-19}$$

Nous considérons ensuite que le mouvement de la poutre ne dépend que de x_2 et de t , et que sa dépendance en fonction du temps est harmonique. De même la température dépendra de x_2 , x_3 et du temps de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 u_3 &= u_3^0(x_2) e^{j\omega t} \\
 \theta &= \theta^0(x_2, x_3) e^{j\omega t}
 \end{aligned} \tag{4-20}$$

Nous obtenons alors :

$$\frac{\partial^2 \Delta\theta}{\partial x_3^2} = \frac{j\omega C}{\gamma_3} \left[\Delta\theta^0 - \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} x_3 \right] \tag{4-21}$$

La solution de l'équation est alors :

$$\Delta\theta^0 - \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} x_3 = A \sin(kx_3) + B \cos(kx_3) \tag{4-22}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 k^2 &= \frac{j\omega C}{\gamma_3} \\
 k &= (1 - j) \sqrt{\frac{\omega C}{2\gamma_3}}
 \end{aligned} \tag{4-23}$$

Il subsiste alors deux inconnues A et B qui sont déterminées grâce aux conditions et aux

limites, en écrivant que le flux de chaleur est nul à l'interface entre le matériau et l'air :

$$\left. \frac{\partial \Delta \theta^0}{\partial x_3} \right)_{x_3 = \pm \frac{h}{2}} = 0 \quad (4-24)$$

Nous obtenons alors l'expression de la température en fonction de l'épaisseur du barreau :

$$\Delta \theta^0 = \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} x_3 \left[x_3 - \frac{\sin(kx_3)}{k \cos\left(k \frac{h}{2}\right)} \right] \quad (4-25)$$

Nous pouvons alors calculer le moment I_T connaissant l'expression de la température :

$$I_T = \iint_A \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} x_3 \left[x_3 - \frac{\sin(kx_3)}{k \cos\left(\frac{kh}{2}\right)} \right] dx_1 dx_3, \text{ qui s'écrit après intégration :}$$

$$I_T = \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} I + \frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \left[\frac{h}{k^2 - \frac{2}{k^3}} \tan\left(\frac{kh}{2}\right) \right] \quad (4-26)$$

On obtient alors l'équation de vibration de la poutre en flexion au voisinage de θ_0 :

$$-\rho A \omega^2 u_3^0 - \frac{I_1}{s_{22}} \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^4} + \frac{\alpha_2}{s_{22}} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \left[\frac{\Lambda \theta_0}{C} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} \left[I + \frac{h}{k^2 - \frac{2}{k^3}} \tan\left(\frac{kh}{2}\right) \right] \right] = 0 \quad (4-27)$$

Nous en déduisons simplement la fréquence de résonance :

$$\omega^2 u_3^0 = \frac{\rho A I}{s_{22}} \left[1 + \frac{\alpha_2 \Lambda \theta_0}{C} \left(1 + \frac{24}{h^3 k^3} \left(\frac{kh}{2} - \tan\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \right) \right] \frac{\partial^4 u_3^0}{\partial x_2^4} \quad (4-28)$$

Nous trouvons alors que :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\alpha_2 \Lambda \theta_0}{C} \left(1 + \frac{24}{h^3 k^3} \left(\frac{kh}{2} - \tan\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \right)} \quad (4-29)$$

Nous effectuons un développement limité et nous obtenons :

$$\omega \cong \omega_0 \left[1 + \frac{\alpha_2 \Lambda \theta_0}{C} \left(1 + \frac{24}{h^3 k^3} \left(\frac{kh}{2} - \tan\left(\frac{kh}{2}\right) \right) \right) \right] \quad (4-30)$$

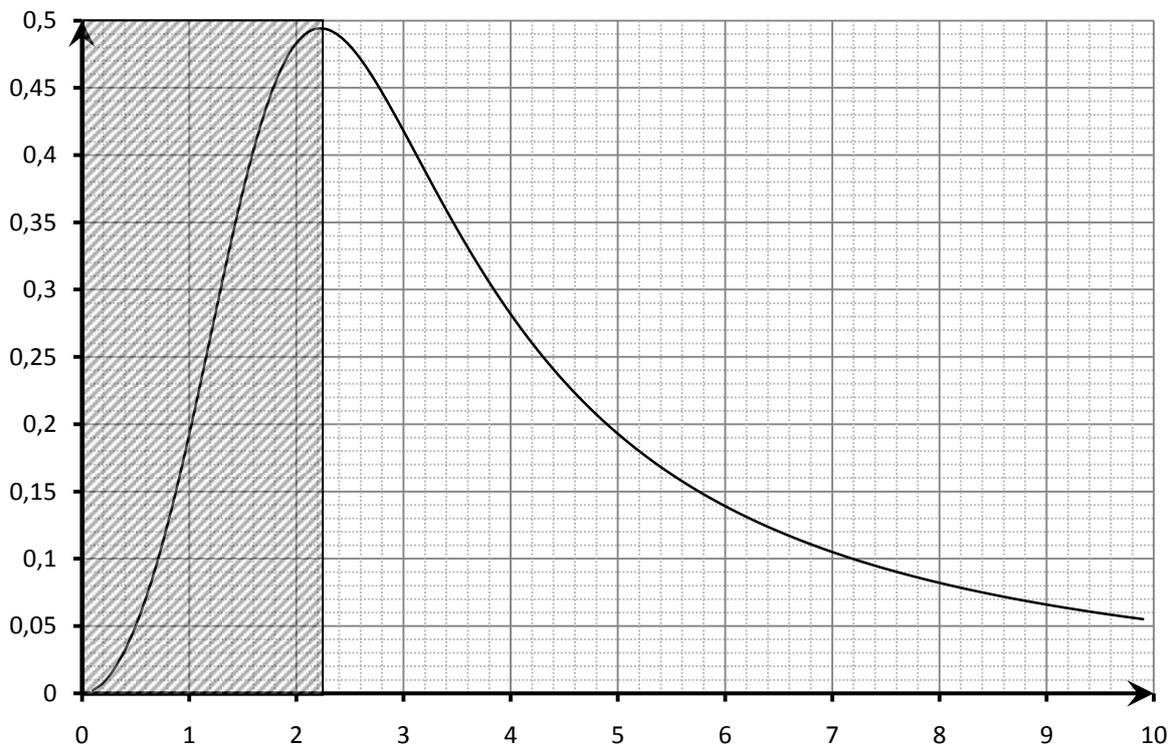
Le coefficient de qualité vaut :

$$Q_t = \frac{1 \operatorname{Re}(\omega)}{2 \operatorname{Im}(\omega)} \quad (4-31)$$

En reportant (4-21) nous obtenons donc l'évolution du facteur de qualité thermoélastique de la poutre avec la fréquence :

$$Q^{-1} = \frac{\alpha_2 \Lambda \theta_0}{C} \left(\frac{6}{\xi^2} - \frac{6 \sinh(\xi) + \sin(\xi)}{\xi^3 \cosh(\xi) + \cos(\xi)} \right) \quad (4-32)$$

$$\xi = h \sqrt{\frac{C \omega_0}{2\gamma_3}} \quad (4-33)$$



Graphique 4-2 : Evolution $\frac{C}{\alpha_2 \lambda \theta_0 Q}$ en fonction de ξ .

Nous voyons sur le graphique précédent que la courbe présente deux zones : la première zone grisée correspond à un régime plus ou moins isotherme et la seconde zone correspond à un régime plus ou moins adiabatique. Dans notre cas, les données sont les suivantes :

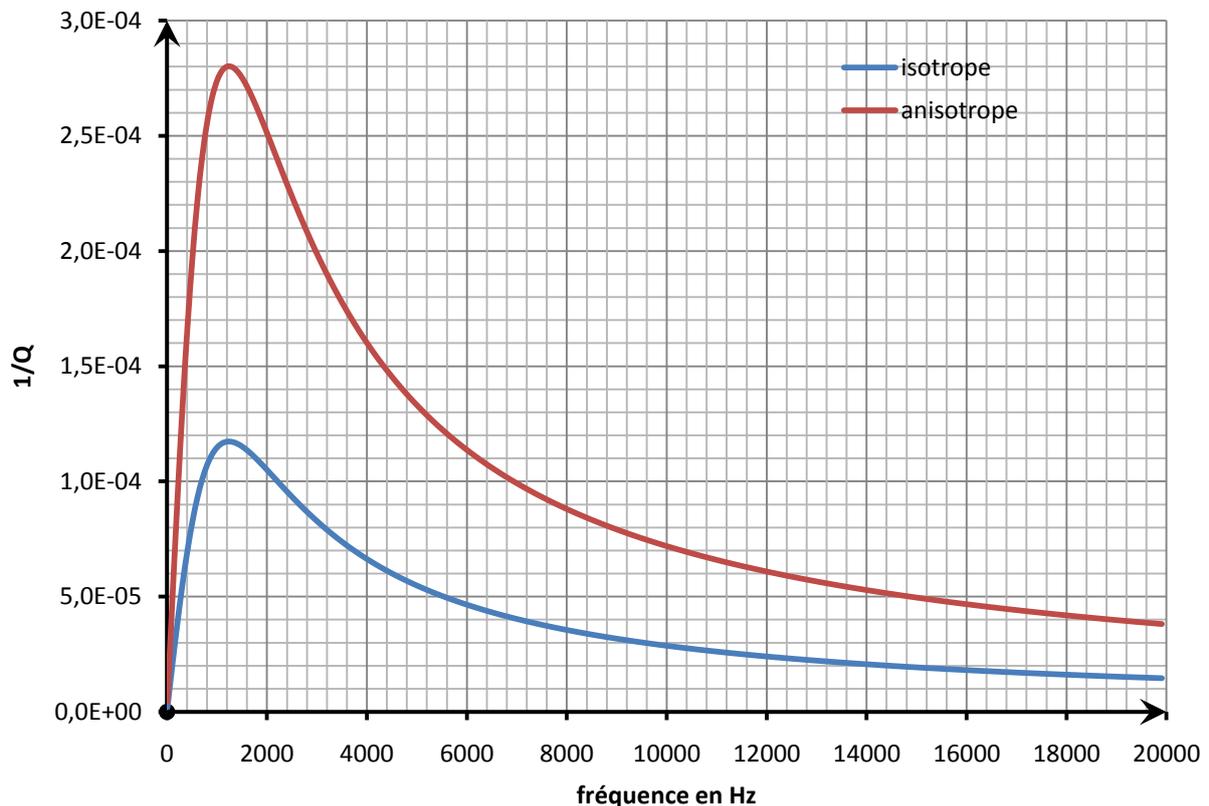
Chaleur spécifique du silicium ou capacité calorifique massique⁶ : $0,7 \text{ J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

⁶ La capacité calorifique massique représente l'énergie à fournir par échange thermique, pour élever d'un Kelvin

Conductivité (ou conductibilité) thermique⁷ 1,31 W.cm⁻¹.K⁻¹

Coefficient de dilatation : 2,6 10⁻⁶ K⁻¹

Nous pouvons tracer la courbe suivante où la trace rouge représente le cas où nous avons tenu compte du caractère anisotrope du matériau, et la courbe en bleu représente le cas où le matériau est considéré comme isotrope (comme dans les travaux originaux de Lifshitz).



Graphique 4-3 : Evolution $\frac{1}{Q}$ en fonction de f .

Nous voyons que le facteur de qualité dans l'approximation isotrope est nettement surestimé. La courbe anisotrope présente un minimum pour ($\xi = 2.225$). Ceci correspond à une fréquence de résonance $f_0 = \frac{1}{2\pi} \frac{\xi^2 2\gamma_3}{h^2 C} = 1243 \text{ Hz}$ et à un facteur de qualité de 3568, pour la fréquence de résonance que nous avons choisie (environ 10 kHz) nous obtenons un facteur de qualité de 13900. Pour la flexion suivant l'axe x_1 , les calculs restent les mêmes. Il est évident que nous ne devons pas exciter les gyromètres à ces fréquences.

la température de la matière par unité de masse.

⁷ La conductivité thermique représente la quantité de chaleur transférée par unité de surface et par unité de temps sous un gradient de température.

4.2 Amortissement visqueux dû à l'air

Dans ce cas, l'amortissement visqueux est dû aux variations de pression dans le fluide. En effet, la mise en mouvement d'un fluide par l'intermédiaire d'un solide modifie son état d'équilibre. Le fluide réagit alors pour minimiser son énergie, pour cela il modifie sa température, sa masse volumique ainsi que sa pression interne. Les variations de celle-ci amortissent le système.

4.2.1 Amortissement vertical (ou squeeze film damping)

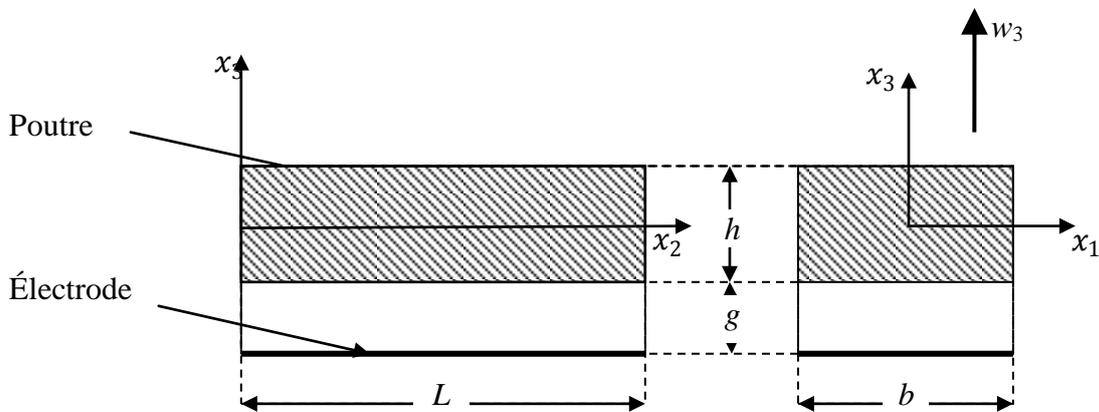


Figure 4—2 : Schémat de la poutre et de son électrode.

Dans le cas d'un mouvement vertical suivant l'axe z , nous considérons une poutre de section rectangulaire encastree à une extrémité et libre à l'autre extrémité. L'équation de vibration de la poutre s'écrit alors :

$$\frac{I_3}{s_{22}} w_{3,2222} + \rho A \ddot{w}_3 = q(x_2, t) \quad (4-34)$$

où $q(x_2, t)$ représente le chargement extérieur de la poutre par unité de longueur : ici, ce chargement est dû au film d'air entre la poutre mobile en silicium et le substrat en verre. Pour déterminer le chargement qu'exerce la pression du fluide, nous devons résoudre les équations

liées à la mécanique des fluides et notamment celle de Navier⁸-Stokes⁹, l'équation de conservation de la masse, l'équation des gaz parfaits ainsi que l'équation de l'énergie. Nous avons alors un système de 6 équations à 6 inconnues. Ces équations s'écrivent dans le cas général :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}) &= \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} - \rho \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ p &= R \rho T \\ \rho_0 C_p \frac{\partial T}{\partial t} &= \lambda_T \Delta T + \frac{\partial p}{\partial t} \end{aligned} \quad (4-35)$$

Ces équations ne sont pas résolues analytiquement à l'heure actuelle. Elles font partie des 7 défis mathématique du prix du millénaire. Nous pouvons toujours trouver des solutions en utilisant des méthodes par élément finis, mais ce serait long à mettre en place, et nous n'avons pas pour but d'étudier les problèmes de mécanique des fluides dans leur ensemble (turbulence, écoulement, etc.) mais uniquement l'amortissement que génère le film d'air sur la vibration de la poutre. Nous adoptons notamment l'hypothèse que les termes d'advection de l'accélération $\left(\rho \left(\vec{v} \cdot \overrightarrow{grad}(v) \right) \right)$ sont négligeables, et nous le justifierons en calculant le nombre de Reynolds¹⁰.

$$Re = s^2 = \frac{\omega g^2 \rho}{\eta} \quad (4-36)$$

Si nous considérons que la poutre est excitée à sa fréquence de résonance, environ 10 kHz, le nombre de Reynolds vaut alors 1.57, ce qui est très inférieur au 2000 de la littérature, nous

⁸ Claude Louis Marie Henri Navier est né à Dijon le 10 février 1785, meurt à Paris le 21 août 1835. Spécialiste de mécanique, il établit en 1821 et 1822 les équations de Navier-Stokes, décrivant la mécanique des fluides, il est aussi à l'origine de la théorie générale de l'élasticité.

⁹ George Gabriel Stokes est né à Skreen le 13 août 1819 et meurt le 1^{er} février 1903 à Cambridge, c'est un mathématicien et physicien irlandais. Ses contributions majeures concernent la mécanique des fluides (notamment sur les fluides visqueux), l'optique et la géodésie.

¹⁰ Ce nombre a été mis en évidence par Osborne Reynolds en 1883. Il sert en mécanique des fluides pour caractériser le type d'écoulement auquel nous avons affaire, et notamment son régime (pour $Re < 2000$ nous avons un écoulement laminaire, $2000 < Re < 3000$ nous avons toujours un écoulement laminaire mais qui n'est plus réversible, et enfin si $Re > 3000$ nous avons alors un écoulement turbulent).

pouvons donc bien négliger le terme d'advection de l'accélération.

Dans le cas d'un film mince, si la réaction est isotherme, nous pouvons simplifier les équations et se ramener à l'équation de Reynolds qui s'écrit :

$$\frac{Pa g^2}{12\eta} \nabla^2 \left(\frac{p(x, y, t)}{Pa} \right) - \frac{\partial p(x, y, t)}{\partial t} \frac{1}{Pa} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{w_3}{g} \right) \quad (4-37)$$

Ici Pa représente la pression ambiante, alors que w_3 est le déplacement de la poutre. La poutre étant suffisamment élancée, nous obtenons une première approximation en négligeant les dérivées suivant x_2 . Nous considérons que le mouvement de la poutre est harmonique, ce qui nous conduira à l'équation suivante :

$$\frac{Pa g^2}{12\eta} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x_2^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{Pa}{g} \frac{\partial w_3}{\partial t} \quad (4-38)$$

A cette équation nous devons adjoindre les conditions aux limites et initiales suivantes :

- La variation de pression pour x_1 égal 0 ou b est nulle, $p(x=0, t)=0$ et $p(x=b, t)=0$,
- Quelque soit x_1 la variation de pression à l'instant initial est aussi nulle, $p(x, t=0) = 0$.

La pression admet alors une solution se décomposant en solutions élémentaires à variables séparables :

$$p = \sum_{n,m} f_{n,m}(t) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) \quad (4-39)$$

Cette solution vérifie déjà les conditions limites, et nous n'aurons donc pas besoin de les vérifier à la fin du calcul. Nous réinjectons ensuite cette solution dans l'équation (4-36), ce qui nous conduit à l'équation :

$$\sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) \left(-\frac{Pa g^2}{12\eta} \left(\frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} \right) f_{n,m}(t) - \frac{\partial f_{n,m}(t)}{\partial t} \right) = \frac{Pa}{g} \frac{\partial w_3}{\partial t} \quad (4-40)$$

Nous utilisons ensuite la propriété d'orthogonalité de la fonction sinus en intégrant suivant x_1 et x_2 sur la surface de la poutre :

$$\iint_S \sin\left(\frac{k\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x_2\right) \sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \left(-\frac{P\alpha g^2}{12\eta} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{L^2}\right) f_{n,m}(t) - \frac{\partial f_{n,m}(t)}{\partial t}\right) dx_1 dx_2 = \iint_S \sin\left(\frac{k\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{p\pi}{L}x_2\right) \frac{Pa}{g} \frac{\partial w_3}{\partial t} dx_1 dx_2$$

Nous arrivons alors à une équation différentielle pour $f_{n,m}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{bL}{4} \left(-\frac{P\alpha g^2}{12\eta} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{L^2}\right) f_{n,m}(t) - \frac{df_{n,m}(t)}{dt}\right) \\ = \iint_S \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \frac{Pa}{g} \frac{\partial w_3}{\partial t} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (4-41)$$

Nous résolvons cette équation de manière classique en cherchant dans un premier temps la solution générale de l'équation sans second membre :

$$\frac{bL}{4} \left(-\frac{P\alpha g^2}{12\eta} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{L^2}\right) f_{n,m}(t) - \frac{df_{n,m}(t)}{dt}\right) = 0 \quad (4-42)$$

Nous trouvons pour solution :

$$f_{n,m}(t) = K_{n,m} e^{\beta_{n,m} t} \quad (4-43)$$

$$\beta_{n,m} = -\frac{P\alpha g^2}{12\eta} \left(\frac{n^2\pi^2}{b^2} + \frac{m^2\pi^2}{L^2}\right) \quad (4-44)$$

Cette solution représente la solution en régime transitoire, dans notre cas elle ne nous intéresse pas car nous cherchons la solution en régime périodique pour évaluer l'énergie dissipée sur une période, proportionnelle au facteur de qualité.

Nous cherchons ensuite une solution de l'équation avec second membre. Dans notre étude, la poutre étant entretenue en vibration, nous pouvons supposer qu'elle est animée d'un mouvement harmonique en fonction du temps, et nous chercherons donc la solution particulière sous la forme d'une fonction harmonique :

$$\begin{aligned} w_3 &= (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))g(x_2) \\ f_{n,m}(t) &= a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) \end{aligned} \quad (4-45)$$

Nous injectons donc ces deux hypothèses dans l'équation (4-39), ce qui nous conduit à un

nouveau problème où les inconnues sont a et b :

$$\begin{aligned} \frac{bL}{4} (\beta_{n,m} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \omega (-a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t))) \\ = \omega (-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \\ \times \iint_S g(x_2) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) \frac{Pa}{g} dS \end{aligned} \quad (4-46)$$

$$\begin{aligned} \beta_{n,m} (a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)) - \omega (-a \sin(\omega t) + b \cos(\omega t)) \\ = \frac{4\omega Pa}{bL g} \iint_S g(x_2) \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) dS \\ \times (-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)) \end{aligned} \quad (4-47)$$

Soit :

$$\begin{bmatrix} \beta_{n,m} & -\omega \\ \omega & \beta_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} B \\ -A \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

D'où on tire :

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{\gamma}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \begin{bmatrix} \beta_{n,m} & \omega \\ -\omega & \beta_{n,m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B \\ -A \end{bmatrix} \quad (4-49)$$

Ceci permet de remplacer a et b par A et B dans l'expression de $f_{n,m}(t)$:

$$f_{n,m}(t) = \frac{\gamma}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} [(\beta_{n,m} B - \omega A) \cos(\omega t) + (-\beta_{n,m} A + \omega B) \sin(\omega t)] \quad (4-50)$$

$$\begin{aligned} f_{n,m}(t) = \frac{1}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \left[\frac{4}{bL} \iint_S \beta_{n,m} w_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) \frac{Pa}{g} dS \right. \\ \left. - \frac{4}{bL} \iint_S \omega^2 w_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b} x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L} x_2\right) \frac{Pa}{g} dS \right] \end{aligned} \quad (4-51)$$

La pression dans le gap s'exprime alors comme suit :

$$p = \sum_{n,m} \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \left[Ae^{\beta_{n,m}t} + \frac{1}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \left[\frac{4}{bL} \iint_S \beta_{n,m} \dot{w}_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \frac{Pa}{g} dS - \frac{4}{bL} \iint_S \omega^2 w_3 \sin\left(\frac{n\pi}{b}x_1\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \frac{Pa}{g} dS \right] \right] \quad (4-52)$$

$$p = \sum_{n,m} \frac{1}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \frac{4b(1 - (-1)^n)^2 Pa}{Ln^2\pi^2} \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) \left[\int_0^L \beta_{n,m} \dot{w}_3 \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) dx_2 - \int_0^L \omega^2 w_3 \sin\left(\frac{m\pi}{L}x_2\right) dx_2 \right] \quad (4-53)$$

En première approximation, nous pouvons considérer que dans l'évaluation de la pression, la poutre a un mouvement indépendant de x_2 . Bien qu'inexacte, cette hypothèse nous permet d'obtenir rapidement une première idée de la pression totale qui s'exerce sur la poutre :

$$pt = \sum_{n,m} \frac{1}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \frac{4bL(1 - (-1)^n)^2 (1 - (-1)^m)^2 Pa}{n^2\pi^2 m^2\pi^2} [\beta_{n,m} \dot{w}_3 - \omega^2 w_3] \quad (4-54)$$

Nous obtenons l'équation suivante pour la vibration de la poutre en répartissant la pression sur la poutre par unité de longueur :

$$\frac{I_3}{s_{22}} w_{3,2222} + \rho A \ddot{w}_3 - \sum_{n,m} \frac{\beta_{n,m}}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \frac{4b(1 - (-1)^n)^2 (1 - (-1)^m)^2 Pa}{n^2\pi^2 m^2\pi^2} \frac{Pa}{g} \dot{w}_3 + \sum_{n,m} \frac{1}{\beta_{n,m}^2 + \omega^2} \frac{4b(1 - (-1)^n)^2 (1 - (-1)^m)^2 Pa}{n^2\pi^2 m^2\pi^2} \frac{Pa}{g} \omega^2 w_3 = 0$$

Avec les dimensions suivantes :

$$1/s_{22}[Pa] \text{ module d'Young}^{11} : 170.10^{-9}$$

¹¹ Thomas Young, physicien britannique est né en 1773 et meurt en 1829. Son excellence dans de nombreux domaines non reliés (physicien, médecin et égyptologue) fait qu'il est considéré comme un polymathe. Si son nom est devenu célèbre avec la définition du module d'Young, il est aussi connu pour ces travaux d'optique sur les fentes d'Young.

$b[m]$ largeur de la poutre : 345.10^{-6}

$\rho[kg.m^{-3}]$ masse volumique : 2330

$A[m^2]$ section de la poutre : $345.360.10^{-12}$

$P_a[Pa]$ pression ambiante a $20^\circ C$: $10.13.10^6$

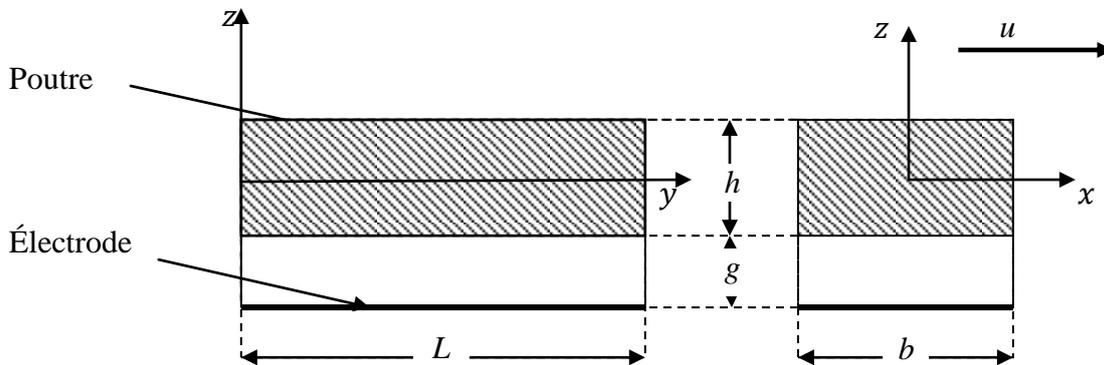
$g[m]$ gap : 20.10^{-6}

$\eta[Pa.s]$ viscosité dynamique pression ambiante et à $20^\circ C$: $18.5.10^{-6}$

$L[m]$ longueur de la poutre : $6504.10^{-6}m$.

Nous trouvons alors que le facteur de qualité de notre dispositif devrait avoisiner les 203. Nous voyons aussi apparaître un terme qui dépend du déplacement de la poutre et qui va créer un décalage en fréquence du mode propre de la poutre.

4.2.2 Amortissement horizontal (ou slide film damping)¹²



¹² C'est travaux ont été inspirés de ceux de Timo VEIJOLA et Anu LEHTOVUORI sur l'amortissement visqueux dans les structures MEMS RF, où la réaction est considérée comme adiabatique, contrairement à notre cas où on nous la considérons isotherme.

VEIJOLA, Timo and LEHTOVUORI, Anu, *MODEL FOR GAS DAMPING IN AIR GAPS OF RF MEMS RESONATORS*. Design, Test, Integration and Packaging of MEMS/MOEMS, DTIP 2007, Stresa, April 24–27, 2007, pp. 156–161.

VEIJOLA, Timo and LEHTOVUORI, Anu, *Numerical and Compact Modelling of Squeeze-film Damping in RF MEMS Resonators*. Design, Test, Integration & Packaging of MEMS/MOEMS, French Riviera 2008.

Figure 4—3 : Schémat de la poutre.

Il existe un autre phénomène qui entraîne une chute du facteur de qualité c'est le « slide film damping ». En partant des équations de Navier-Stokes et en supposant que les dérivées suivant l'axe y sont nulles :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (4-55)$$

Nous supposons aussi dans un premier temps que la variation de pression suivant l'axe x est négligeable devant les variations de vitesse suivant x, z . nous obtenons avec le système suivant :

$$\rho_0 \frac{\partial u}{\partial t} = +\mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (4-56)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} u(x, 0, t) &= 0 \\ u(x, g, t) &= u_0 \end{aligned} \quad (4-57)$$

En considérant que le mouvement est harmonique, et en utilisant la technique de séparation des variables, nous obtenons :

$$j\rho_0\omega uv = \mu [u_{,xx} v + uv_{,zz}] \quad (4-58)$$

Nous écrivons ensuite que :

$$\frac{j\rho_0\omega}{\mu} v = v_{,zz} \quad (4-59)$$

Nous en déduisons que :

$$u = A \cosh(rz) + B \sinh(rz) \quad (4-60)$$

avec :

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{j\rho_0\omega}{\eta} \\ r &= (j+1) \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{\frac{\rho_0\omega}{\eta}} \end{aligned} \quad (4-61)$$

Avec les conditions aux limites, on obtient pour u :

$$u = u_0 \frac{\sinh(rz)}{\sinh(rg)} \quad (4-62)$$

Nous trouvons alors l'expression de la force par unité de surface qui s'exerce sur la poutre suivant x :

$$f_x = \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_g \quad (4-63)$$

Soit :

$$f_x = \eta u_0 \frac{r}{\tanh(rg)} \quad (4-64)$$

Nous trouvons alors que le fluide exerce une charge q sur la poutre qui vaut :

$$q = \operatorname{Re}(b\eta r / \tanh(rg)) \dot{w}_1 \quad (4-65)$$

L'équation gouvernant l'équation de la poutre est alors :

$$\frac{I_1}{s_{22}} w_{1,2222} + \rho A \ddot{w}_1 + \operatorname{Re}(b\eta \frac{r}{\tanh(rg)}) \dot{w}_1 = 0 \quad (4-66)$$

Le coefficient d'amortissement vaut donc :

$$\operatorname{Re}(b\eta r / \tanh(rg)), \quad (4-67)$$

ce qui nous donne un facteur de qualité :

$$Q = \frac{\rho A \omega}{b\eta} \operatorname{Re}\left(\frac{\tanh(rg)}{r}\right) \quad (4-68)$$

Tous calculs faits, nous obtenons un facteur de qualité qui, pour le mouvement dans le plan vaut environ $42 \cdot 10^3$, et pour le mouvement hors-plan, environ 200. Nous voyons donc clairement ici que le phénomène de « slide » film n'a pas un effet aussi important que le phénomène de « raréfaction » de l'air, il peut donc être négligé.

4.3 Résultats

Cette étude montre très clairement que la limitation du facteur de qualité sera essentiellement due à l'amortissement de l'air, et plus particulièrement au phénomène de raréfaction de l'air lors du mouvement hors-plan de la poutre, contrairement au cas des dispositifs piézo-électriques qui sont généralement limités par le facteur thermoélastique. Nous voyons aussi que dans un mouvement combiné normal au plan et dans le plan les pertes dues au « slide film » sont négligeables devant les pertes dues au « squeeze film ».

Nous obtenons un facteur de qualité théorique de l'ordre de 200. Ce facteur de qualité semble suffisant, au vu de l'écart en fréquence des modes d'excitation et de détection, pour garantir une sensibilité gyrométrique maximum, comme nous l'avons vu à la fin du chapitre 2. Néanmoins, ce faible amortissement peut être gênant du fait que la vibration du gyromètre est la combinaison de deux vibrations : une à la fréquence d'excitation et une à la fréquence double. Dans le cas où un mode propre du gyromètre se trouverait dans cette zone nous risquons de l'exciter. Pour éviter ceci, il pourrait être intéressant d'augmenter le facteur de qualité pour limiter la bande passante.

Nous pouvons espérer augmenter d'un facteur 1000 le facteur de qualité en mettant le dispositif sous vide. Cette augmentation permettrait de limiter les déplacements statiques du gyromètre. Nous diminuerions les tensions d'alimentations d'un rapport 30, pour avoir les mêmes déplacements dynamiques, et par conséquent les déplacements statiques se retrouveraient eux aussi diminués d'un facteur 30. Cette diminution des déplacements statiques permet de limiter les précontraintes dans le gyromètre et donc les variations de fréquence dues à la tension d'excitation.

Chapitre 5

Réalisation du micro-gyromètre

Pour des raisons liées au déroulement du projet de recherche contractuel, nous avons dû réaliser un premier gyromètre relativement tôt par rapport à l'analyse, c'est-à-dire en juillet-août 2007, ma thèse ayant débuté le 1^{er} octobre 2006. Comme l'analyse modale n'était alors pas terminée, ce premier gyromètre n'était pas optimisé. Nous pouvons néanmoins nous en servir de base pour valider le processus de fabrication. Dans le Tableau 5-1 suivant nous retrouvons donc les dimensions en micron du premier modèle réalisé ainsi que celles considérées comme optimisées. On voit très bien que les dimensions sont très semblables, ce qui permettra de transférer sans difficulté le processus de fabrication du modèle initiale au modèle optimisé.

5.1 Architecture du gyromètre

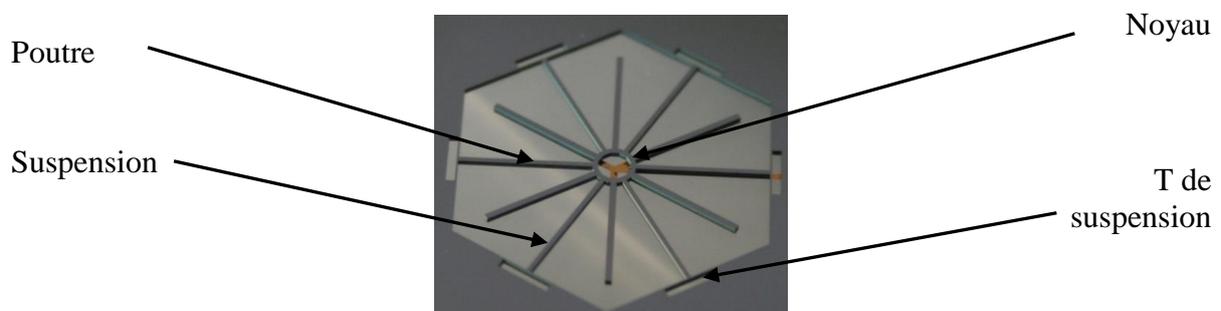


Figure 5—1 : Dimension du gyrometre.

| | 1 ^{er} modèle fabriqué | 2 ^{eme} modèle optimisé |
|--|------------------------------------|-------------------------------------|
| Longueur des poutres | 6504 | 6504 |
| Longueur des suspensions | 7200 | 7200 |
| Noyau central | 1200 | 1200 |
| Largeur des poutres | 366 | 345 |
| Hauteur des poutres et des suspensions | 360 | 360 |
| Largeur des suspensions | 275 | 275 |
| Gap entre électrodes et poutre | 20 | 20 |
| Largeur des T de suspensions | 100 | 100 |
| Longueur des T de suspensions | 3000 | 3000 |
| Perçage centrale | 700 | 800 |

Tableau 5-1 : Récapitulatif des dimensions utilisées.

5.2 Étapes de réalisation

5.2.1 Matériaux utilisés

Les wafers en silicium devront présenter les caractéristiques suivantes :

- Ils doivent être orientés selon le plan (111) pour présenter une symétrie à 60°.
- Diamètre standard 4 pouces, épaisseur 380 μm pour le modèle avec simple excitation, et 400 μm pour le modèle avec excitation alternée.
- Le silicium utilisé doit être conducteur, avec une résistivité comprise dans la plage de 0.001 à 0.002 $\Omega.\text{cm}^{-1}$.
- Enfin, il nous faudra un wafer en pyrex dopé au sodium pour réaliser la soudure anodique.

Vu que nous réalisons un MEMS, l'ensemble des dimensions de l'objet, ainsi que la bonne orientation dans le matériau sont essentielles. Nous avons donc demandé à notre fournisseur des cotes très serrées.

Pour obtenir ces caractéristiques nous nous sommes fournis auprès de la société Siltronic basée à Archamps, qui est spécialisée dans la découpe, le rodage, le polissage et la distribution de wafers en silicium pour la micro-électronique. Nous avons donc commandé les wafers avec les spécifications suivantes :

| Specifications | Prime index : 5938 | Prime index : 5939 |
|-----------------|----------------------|----------------------|
| Diam | 4" (100 ± 0.3 mm) | 4" (100 ± 0.3 mm) |
| Type & dop | P - Boron | P - Boron |
| Orientation | (111) ± 0.05° | (111) ± 0.05° |
| Off orientation | | |
| Resistivity | 0.001 - 0.002 ohm cm | 0.001 - 0.002 ohm cm |
| Primary Flat | // <110> ± 0.1° | // <110> ± 0.1° |
| Secondary Flat | | |
| Thickness | 380 ± 3 µm | 400 ± 3 µm |
| TTV | <= 2 µm | <= 2 µm |
| Bow, Warp | | |
| Edge Rounding | Semi Std | Semi Std |
| Surface | 2 faces polies | 2 faces polies |
| Laser marking | Non | Non |

Figure 5—2 : Caractéristiques des wafers en silicium commandés.

Les délais de livraison de ces wafers ont été voisins de 6 mois (livraison en décembre 2008). Cela s'explique par la difficulté à tenir les cotes demandées. Il faut bien se rendre compte du fait que l'obtention de la tolérance d'épaisseur de +/- 3 µm avec des TTV¹ inférieurs à 2 µm pour des wafers de ce diamètre sont relativement difficiles à obtenir. Nous avons mesuré l'ensemble des wafers, et tous ne respectent pas les spécifications, il a donc fallu sélectionner les meilleurs. Ce problème a d'ailleurs été expliqué par la méthode de mesure employée par le fabricant. Pour mesurer les épaisseurs et les TTV, il effectue des mesures de capacité par

¹ TTV : Total Thickness Variation: représente le défaut de parallélisme du wafer.

rapport à des wafers étalons. Le fait que nos wafers n'étaient pas dans la taille standard (à savoir 525 μm pour le 4 pouces) a induit une erreur sur les mesures. Pour comparaison, en microélectronique, les tolérances sont en général les suivantes :

| Specifications | Prime | index : 3071 |
|-----------------|----------------------------|--------------|
| Diam | 4" | |
| Type & dop | P - Bore | |
| Orientation | (111) \pm 0.5° | |
| Off orientation | | |
| Resistivity | 0.01 - 0.02 | |
| Primary Flat | Semi Std | |
| Secondary Flat | Non | |
| Thickness | 525 \pm 25 μm | |
| TTV | < 10 | |
| Bow, Warp | <= 30 μm | |
| Edge Rounding | Semi Std | |
| Surface | Poli une face | |
| Laser marking | Non | |

Figure 5—3 : Caractéristiques des wafers en silicium standard en microelectronique.

5.2.2 Étapes de réalisation²

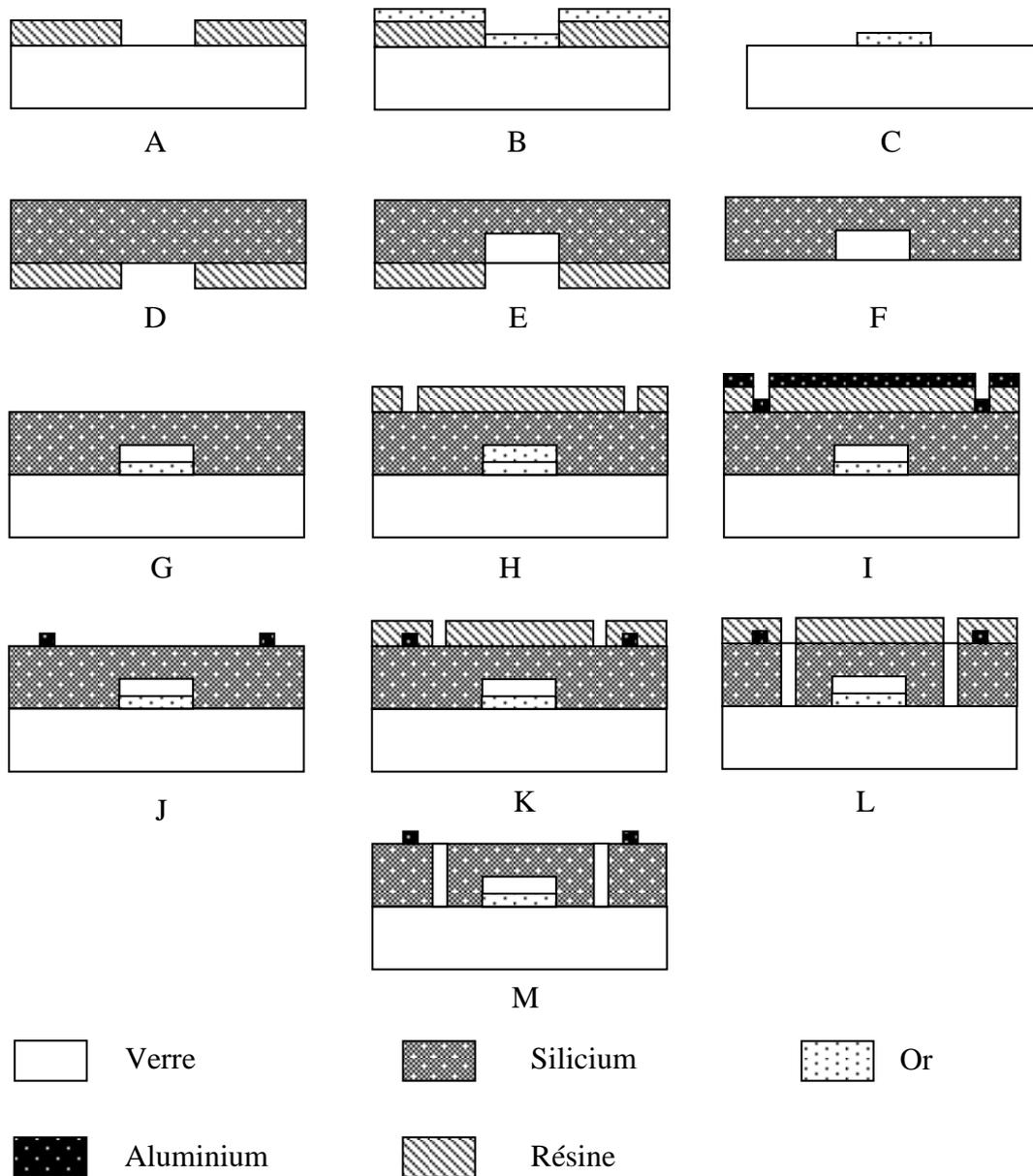


Figure 5—4 : Synoptique du procédé de fabrication des gyromètres.

² En Annexe se trouve les fichiers détaillées de l'ensemble des étapes du procédé de fabrication.

Nous retrouverons aussi en annexe le synoptique du procédé de Charles HAYE à l'EPFL.

- A Lithographie sur le pyrex
- B Dépôt par évaporation de la couche d'or
- C Suppression de la résine
- D Lithographie face arrière sur le silicium
- E Gravure DRIE du silicium face arrière
- F Suppression de la résine
- G Soudure anodique des deux wafers
- H Lithographie face avant sur le silicium
- I Dépôt par pulvérisation cathodique de l'aluminium
- J Suppression de la résine
- K Lithographie face avant sur le silicium
- L Gravure DRIE du silicium
- M Suppression de la résine

Nous pouvons déjà faire un certain nombre de comparaisons entre le procédé de Charles Haye et le nôtre :

- En premier lieu, remarquons que nous n'avons pas besoin de réaliser une couche d'oxydation. Cela facilite déjà grandement l'opération, car, comme l'a précisé Charles Haye, il faut environ une quinzaine d'heures à 1000°C pour obtenir 2 µm de silice, se déduisant évidemment de l'épaisseur totale du wafer.
- La seconde remarque est que la gravure par DRIE du silicium dans le cas de C. Haye est réalisée selon un procédé double face, ce qui pose le problème de l'alignement. Un écart de positionnement des deux masques risque de modifier l'aspect des poutres à section carrée, et donc de modifier les fréquences propres des poutres.
- Nous remarquons aussi que l'amincissement des parties mobiles ainsi que la finition de la gravure profonde sont réalisés ensemble. Cela pose alors le problème de la maîtrise de l'épaisseur gravée. En effet, il faut qu'il reste la même épaisseur à graver pour dégager les parties mobiles et les amincir. Si cette épaisseur de dégagement est trop grande nous allons trop amincir les poutres, si elle est trop faible, nous risquons de générer de la sous-gravure.
- Nous pouvons remarquer pour finir qu'il y a une multiplication des étapes de DRIE (une pour la face avant, une seconde sur la face arrière, et enfin une autre pour la

libération finale de la structure), là où nous n'avons qu'une seule étape. Cette multiplication des étapes est néfaste vu qu'elle nécessite évidemment à chaque fois des procédures d'alignement et/ou de nettoyage correctes pour la bonne maîtrise du procédé de fabrication.

5.2.3 Réalisation des électrodes en or

Nous effectuons une photolithographie simple face sur le wafer en pyrex. Ensuite on réalise le dépôt de couche mince par évaporation, nous utilisons ici un canon à électrons qui vient vaporiser le métal que nous souhaitons déposer, le métal allant ensuite se condenser sur notre substrat. Sur l'équipement que nous possédons à la centrale, on adjoint un canon à ions à la machine, ce canon permet notamment de réaliser un décapage des substrats. Ce décapage est indispensable dans le cas où le substrat est enduit de résine, car il permet en effet de casser les flancs de la résine, pour éviter de voir le dépôt partir au moment du passage dans le bain d'ultrasons. La machine possède en plus un « Contrôle in-situ » qui permet de mesurer précisément l'épaisseur de couche déposée grâce à une balance à quartz. Dans notre cas nous déposons deux couches, une première couche dite couche d'accroche d'environ 200 Å de chrome, puis nous déposons une seconde couche de 1200 Å d'or qui servira d'électrode. Nous finissons cette étape en plongeant le wafer dans un bain d'acétone ou de REMOVER pour supprimer la résine.

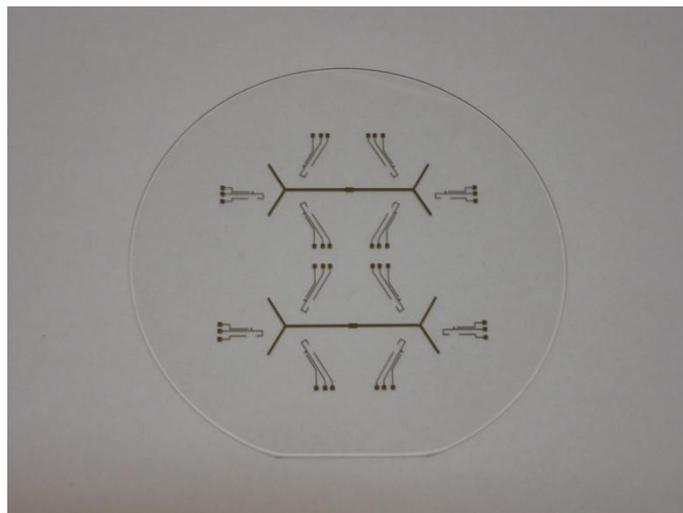


Figure 5—5 : Wafer de pyrex avec ses électrodes en or.



Figure 5—6 : Canon à électrons pour couche mince optique.

5.2.4 La gravure anisotrope pour la réalisation de la gravure de 20 μm face arrière et de 360 μm face avant

Le principe de gravure combine à la fois une action mécanique (bombardement ionique) et une action chimique (entre la surface gravée et le gaz ionisé). Une fois que les atomes de la surface à graver ont été arrachés, ces derniers réagissent avec le gaz, pour former une nouvelle espèce qui est volatile, et qui est ensuite évacuée par le groupe de pompage. Nous parlons ici de gravure sèche car elle s'effectue au sein d'un plasma, par opposition à la gravure humide qui se produit dans un liquide.

Nous pouvons jouer sur quatre paramètres différents pour privilégier plus ou moins un type d'attaque (mécanique ou chimique) : la pression dans la chambre, la température, la puissance, et la polarisation. Si nous voulons une gravure isotrope, sélective nous choisirons

donc de privilégier l'attaque chimique, et donc nous utiliserons une faible polarisation, une pression et une température élevées. Au contraire, dans notre cas, nous voulons une gravure anisotrope pour obtenir des flancs de gravure droits. Nous allons donc privilégier l'attaque mécanique, et donc nous utiliserons une tension de polarisation importante ainsi qu'une pression basse. Pour cela, la centrale MIMENTO s'est équipée d'un nouveau générateur de plasma basse fréquence, qui permet d'augmenter la qualité de la gravure anisotrope.

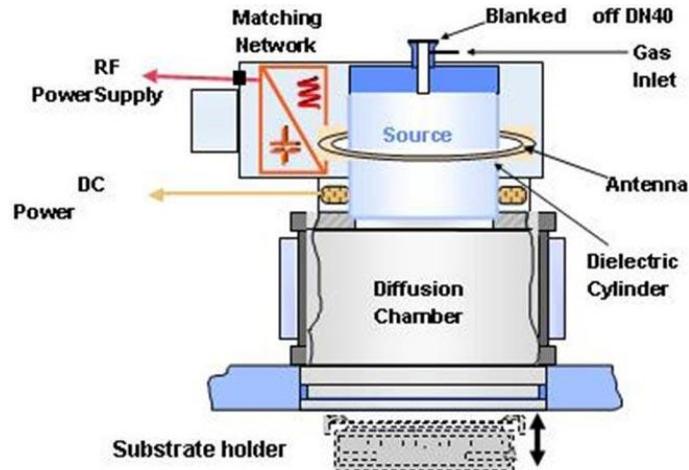


Figure 5—7 : Description de la machine [source CMI].

Description de la machine [source CMI³]

Le sas de transfert : l'ensemble sas/bras de transfert permet de conserver un vide secondaire dans le réacteur à chaque opération de chargement ou déchargement de substrat ce qui optimise les temps de procédé.

La chambre de procédé : Figure 5—7 présente une vue globale du réacteur de la 601 E. nous y retrouvons les principaux éléments : la source ICP⁴, la chambre de diffusion, le porte-substrat cryogénique polarisable, les groupes de pompage et la ligne de gaz.

La source ICP : La source ICP est composée d'une antenne connectée à un générateur RF et

³ Centre de microtechnologie de l'école polytechnique fédérale de Lausanne.

⁴ ICP pour inductively coupled plasma.

placée sur un tube d'alumine. L'énergie du générateur RF (2 kW au maximum) est couplée au plasma par mode inductif. Le courant oscillant à 13.56 MHz dans l'antenne induit un champ électromagnétique dans le tube d'alumine. Des électrons primaires suffisamment mobiles acquièrent de l'énergie (les ions étant trop lourds pour suivre les oscillations du champ électromagnétique). Ces électrons énergétiques vont générer des paires ions/électrons lors de collisions inélastiques avec des neutres. Le plasma est alors créé à l'intérieur du tube d'alumine dans lequel sont injectés les gaz et où la pression est régulée avec l'ensemble vanne de laminage asservie et groupe de pompage secondaire (pompe turbo associée à une pompe primaire sèche). Un bobinage alimenté en 12 V placé autour de la source génère un champ magnétique pour confiner le plasma et limiter les pertes d'électrons sur les parois.

La chambre de diffusion : la chambre de diffusion est placée entre la source plasma ICP et le porte-substrat. Il s'agit d'une zone tampon pour améliorer l'uniformité du plasma. Un champ magnétique permanent est généré par des aimants distribués autour de la chambre de diffusion pour limiter les pertes aux parois et ainsi maintenir au mieux la densité du plasma.

Le porte-substrat cryogénique : Le porte-substrat (PS) cryogénique permet de thermaliser les tranches 4 ou 6 pouces (kit installé) entre -170 °C et la température ambiante. Le contrôle en température du PS est obtenu avec une circulation d'azote liquide et des résistances de chauffe discrètes dont l'alimentation est pilotée par un dispositif de régulation de type PID⁵. La tranche est fixée sur le PS par un clampage mécanique (couronne d'appui sur la circonférence). Ce dispositif est compatible avec des gravures double-face, la face non traitée n'étant pas en contact avec le PS. Les transferts d'énergie entre le corps du PS (thermalisé) et la tranche sont assurés par un film d'hélium dont la pression est ajustable. Le PS est polarisable par un générateur RF (500 W au maximum), ce qui permet de contrôler l'énergie moyenne des ions dans un procédé de gravure.

Les groupes de pompage : l'association pompe turbo-moléculaire (1000 l/s) et pompe primaire sèche fournit un vide secondaire hors procédé de quelques 10^{-7} mbar. En procédé, la puissance de ces groupes de pompage permet de travailler avec des débits gazeux élevés (augmente la vitesse de gravure) tout en maintenant le contrôle des pressions de travail

⁵ PID : proportionnel, intégral, dérivé.

(plasma ON) adaptés à la gravure. Un second ensemble pompe turbo-moléculaire/pompe primaire permet de réaliser le vide dans le sas.

Pour l'usinage du silicium, nous utilisons ici deux gaz successifs, un gaz d'attaque, le SF_6 , et en gaz de passivation, le C_4F_8 (en mode pulsé le gaz d'attaque reste environ 2 secondes et 5 secondes pour le gaz de passivation). Les étapes de passivation ont pour but de protéger les flancs gravés et donc de limiter la sous-gravure latérale. Cette succession d'étapes génère cependant un certain nombre de défauts :

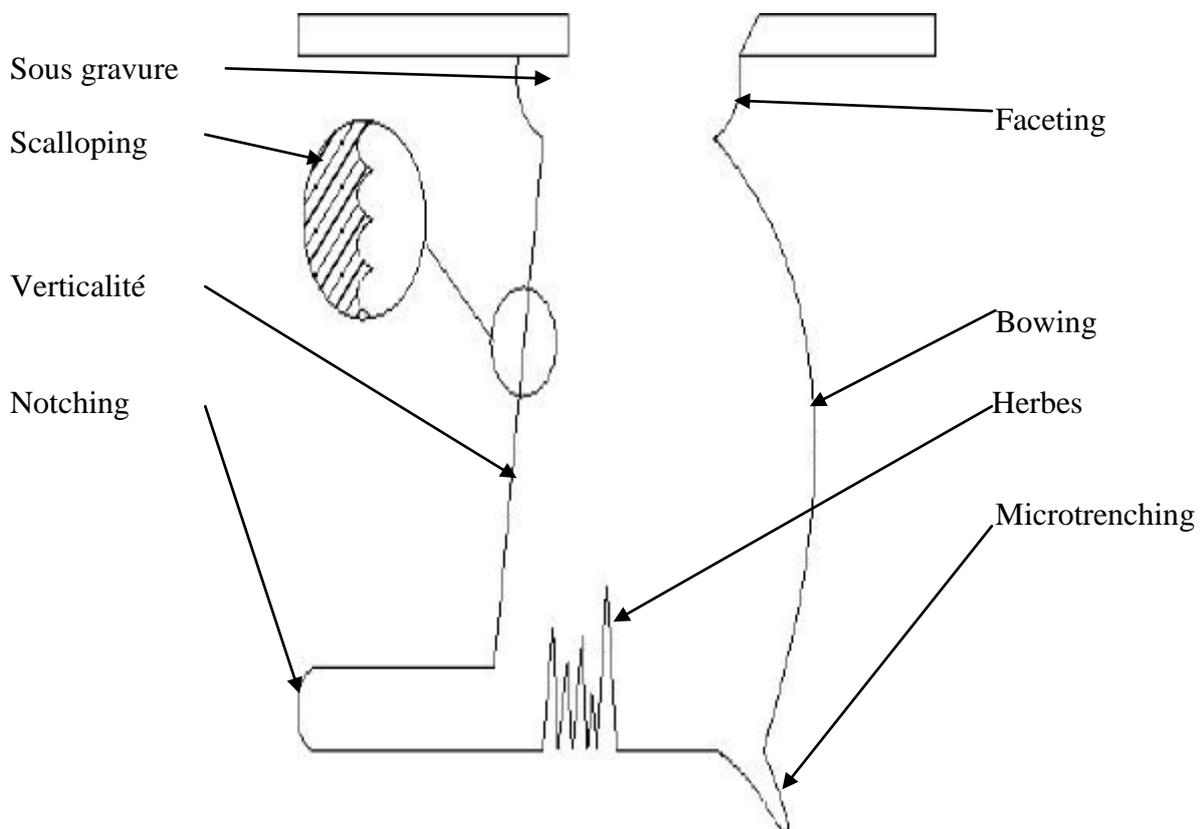


Figure 5—8 : Principaux défauts lors de la gravure par DRIE.

Grâce à l'achat d'un nouveau générateur de plasma basse fréquence, une amélioration non négligeable a été apportée à la réalisation de l'usinage anisotrope profond. Ce nouveau générateur permet d'améliorer la verticalité des flancs et de diminuer le scalloping (cf. Figure 5—8). Il apporte aussi un autre avantage important par rapport aux travaux de Charles Haye :

il n'est plus nécessaire de générer un masque en aluminium pour la DRIE⁶ ; le masque de résine est suffisant, ce qui permet en outre de limiter le nombre d'étapes. À la centrale, nous avons utilisé un masque en résine SPR 7.0 qui possède une sélectivité⁷ de 100.



Figure 5—9 : Bâti de gravure profonde par plasma (DRIE Alcatel).

5.2.5 Assemblage des wafers

Nous réalisons ensuite l'assemblage des wafers par soudure anodique. C'est en 1969 que Wallis et Pomerantz ont découvert le principe de la soudure anodique, qui consiste en l'application d'un champ électrique entre deux plaques : l'une en silicium, et l'autre en verre chauffé. Ceci crée une liaison de type électrostatique entre les deux plaques, du fait que le pyrex est riche en ions sodium (Na^+) et à partir d'une température supérieure à 400°C , ces ions deviennent mobiles. Si nous polarisons alors convenablement l'assemblage, les ions sodium du pyrex se mettent à migrer vers la cathode pour former des cristaux de sodium. La combinaison des charges restant dans le pyrex et des charges du silicium créent alors une

⁶ DRIE contraction de l'anglais Deep Reactive Ion Etching.

⁷ $\text{sélectivité} = \frac{\text{épaisseur de substrat gravé}}{\text{épaisseur de masque gravé}}$

force électrostatique qui colle les deux wafers. Pour que cet assemblage soit résistant, il faut des états de surfaces irréprochables (très faible rugosité, pour cela les surfaces assemblées ne doivent pas être usinées par les autres étapes de microfabrication) ainsi que des surfaces très propres.

Cette technique d'assemblage possède l'avantage (par rapport à la soudure classique) de limiter la température de soudure, et donc de limiter les contraintes thermiques dans les matériaux soudés. De plus, cette technique s'applique très bien au silicium et au pyrex qui ont des coefficients de dilatations thermiques similaires. La soudure anodique est sûrement l'étape la plus critique de la réalisation du gyromètre.

Cependant, cette étape nécessite un nettoyage « impeccable des wafers », pour assurer une bonne soudure. Pour cela, nous avons réalisé le nettoyage des wafers avec un bain de « sulfuric mixture », initialement nous utilisions un piranha (50% d'eau oxygénée, 50% d'acide sulfurique) mais ce mélange était trop agressif pour les électrodes.



Figure 5—10 : Machine de wafer bonding.

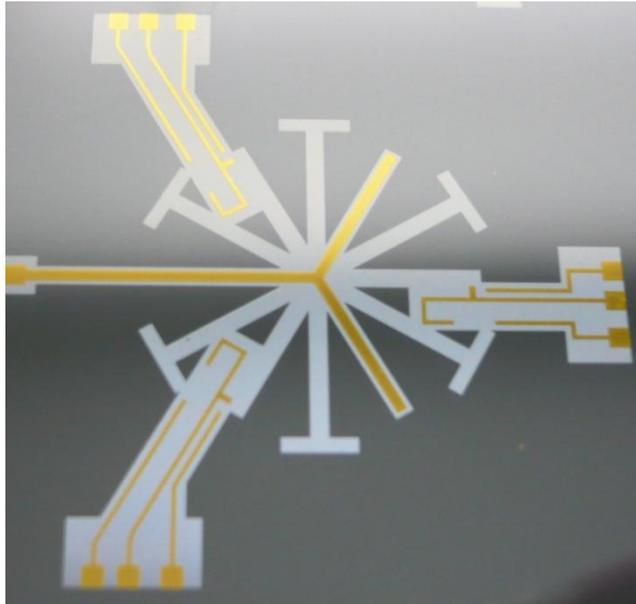


Figure 5—11 : Photo d'un wafer de verre et de silicium après assemblage.

5.2.6 Dépôt des plots en aluminium

Les plots en aluminium sont déposés par pulvérisation cathodique. Cette technique consiste à venir bombarder une cible (le matériau que nous voulons pulvériser) à l'aide d'électrons ou d'ions. En heurtant la cible, ceux-ci vont en arracher des atomes, auxquels ils vont transmettre leur quantité de mouvement. Ces atomes vont alors se condenser sur le substrat pour former un film mince. Pour cela, nous appliquons une différence de potentiel entre la cible et les parois du réacteur. Le système est maintenu à basse pression, ce qui permet la création d'un plasma froid qui va générer les espèces ioniques. Dans le cas de l'aluminium, qui a tendance à s'oxyder facilement au contact de l'air, il est donc nécessaire de procéder à un décapage avant de réaliser le dépôt, de même qu'à un léger nettoyage du substrat pour supprimer les impuretés déposées à la surface, dans le but de permettre une meilleure adhérence de la couche déposée. Ce dernier décapage ne doit pas être trop long pour ne pas endommager la résine. L'avantage de la pulvérisation sur l'évaporation est d'obtenir des couches ayant une meilleure tenue sur le substrat, cela venant du fait que les atomes ont plus d'énergie quand ils viennent frapper celui-ci, ce qui leur permet donc de pénétrer dans les premières couches atomiques. En contrepartie, nous avons souvent un dépôt moins homogène sur l'ensemble du wafer.



Figure 5—12 : Machine de pulvérisation cathodique Plassys.

5.2.7 Finition

La finition commence par la séparation des dispositifs à l'aide d'une scie de précision. Lors de cette étape, un certain nombre de wafers ont été cassés. Il a fallu que l'équipe technologique de FEMTO-ST trouve une solution à ce problème. Après recherche, il s'est avéré que les wafers cassaient à cause de la soudure anodique. En effet, lors de la soudure anodique, les wafers à souder subissent une montée rapide en température, suivie d'une descente rapide à la fin de la soudure, ce qui entraîne une concentration de contraintes importante dans les wafers. Pour résoudre le problème sur les derniers wafers, nous avons effectué un recuit de ceux-ci avec une descente en température lente pour libérer les contraintes.

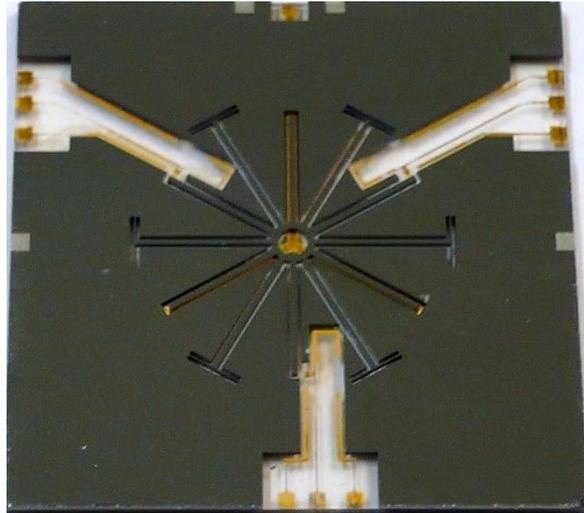


Figure 5—13 : Gyromètre micro-usiné après découpe.

Ensuite, nous avons reporté les wafers sur des boîtiers que nous avons fabriqués pour effectuer les connexions électriques, et nous permettre une manipulation facile des gyromètres.



Figure 5—14 : Machine de « ball bonding ».

5.3 Réalisation des maquettes

5.3.1 Première série de maquettes

Les dimensions des structures réalisées diffèrent légèrement de la structure considérée comme optimum, SL-8. Ceci est dû à la nécessité de gérer les délais de fabrication. Les dimensions retenues pour la réalisation expérimentale sont récapitulées dans le Tableau 5–2. Nous avons donc fait réaliser, pour cette première série de maquettes, un ensemble de 4 masques, réalisés avec les moyens de la centrale MIMENTO, qui dispose d'un générateur de masque laser. Nous avons réalisé les dessins de ces masques à l'aide du logiciel Cadence. L'ensemble des masques réalisés se trouve en annexe.

| Lp | Ls | w | h | Re | Ri |
|------|------|-----|-----|------|-----|
| 6504 | 7200 | 365 | 360 | 1200 | 700 |

Tableau 5–2 : Dimensions retenues pour la première série de maquettes.

Comme nous l'avons déjà mentionné, pour gérer des problèmes de délais, nous avons dû réaliser des gyromètres non optimisés, mais aussi nous fournir en wafers. Nous avons donc acheté des wafers d'épaisseurs 380 μm polis double face, mais avec la tolérance d'épaisseur de $\pm 25 \mu\text{m}$, cette tolérance englobant aussi la TTV.

Un nombre de défauts relativement limité a été constaté au cours de la première campagne de fabrication.

Certains motifs pour la résine du wafer n°1 n'ont pas tenu : il n'y avait alors que sur une moitié du wafer que les plots de centrage était correctement réalisés, ceci a rendu difficile le positionnement du wafer de pyrex et de silicium en vue de l'étape de soudure anodique. Les wafers 3 et 4 ont été correctement alignés.

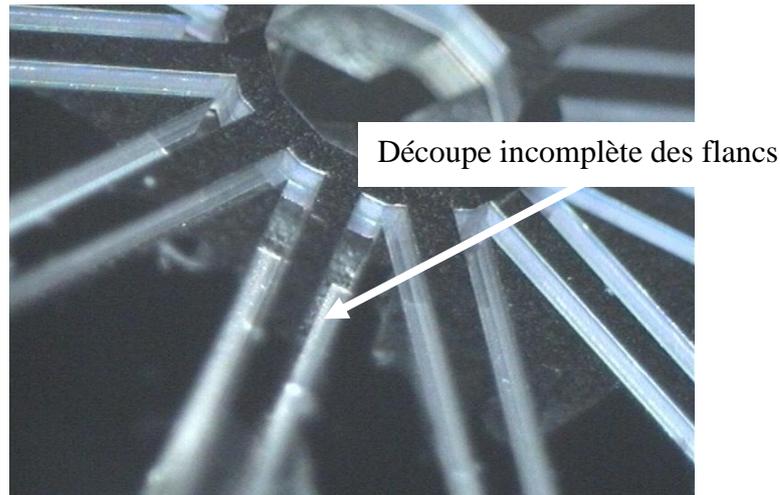


Figure 5—15 : Vue au HI-scope d'un gyromètre insuffisamment découpé.

Il existe des zones sur certains wafers qui n'ont pas été complètement découpées à la fin de l'étape de DRIE, comme nous pouvons l'observer sur la Figure 5—15. Ceci peut facilement s'expliquer à cause du défaut de parallélisme des wafers. Nous estimons ce défaut à environ 15 μm , ceci implique que la découpe est finie à certains endroits du wafer et pas à d'autres. Pour résoudre ce problème, il nous sera nécessaire d'acquérir des wafers de 380 μm avec un défaut de parallélisme beaucoup plus faible, ou bien avec les moyens dont nous disposons à la centrale MIMEMTO, de réaliser nous-mêmes la mise à l'épaisseur de nos wafers.

Sur certains gyromètres nous pouvons observer un début d'attaque de la résine au cours de la DRIE. Ceci se voit très nettement sur la Figure 5—16. La partie unie est le silicium poli, où la résine a bien tenu, et les parties granuleuses les zones attaquées par la DRIE du fait de la disparition de la résine. Ceci est dû au fait que nous avons augmenté le temps de gravure des wafers suivants pour permettre de bien déboucher partout dans le wafer. Ce problème a entraîné la perte d'un gyromètre suite à l'usinage de l'ensemble des T de suspensions. Il nous paraît relativement aisé de résoudre ce problème en augmentant l'épaisseur de résine qui sert de masque à la DRIE, mais ce problème semble aussi lié au problème de tolérance des wafers.

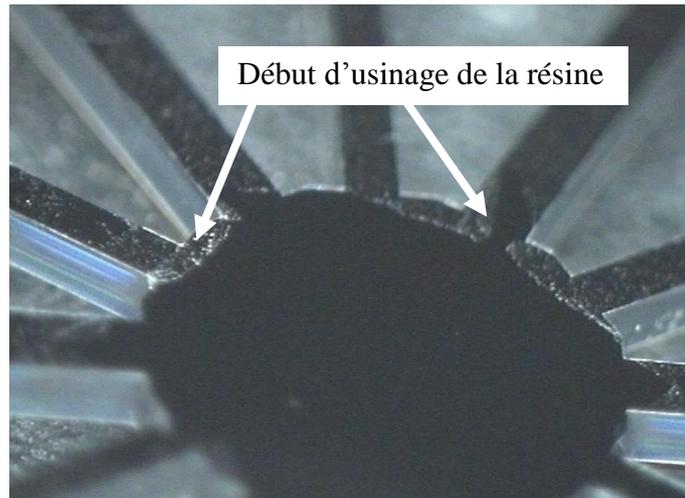


Figure 5—16 : Vue au HI-scope de la partie supérieure du gyromètre ayant subi un début d'attaque de la résine.

Le dernier défaut apparu est ce que l'on appelle de l'herbe, c'est en fait de la poussière de silicium qui s'agglutine avec le polymère de passivation sur le fond de la structure. Ce phénomène peut être gênant en fonction du lieu où il apparaît en créant par exemple des faux contacts. Ce défaut apparaît surtout à la fin du procédé de découpe plasma.

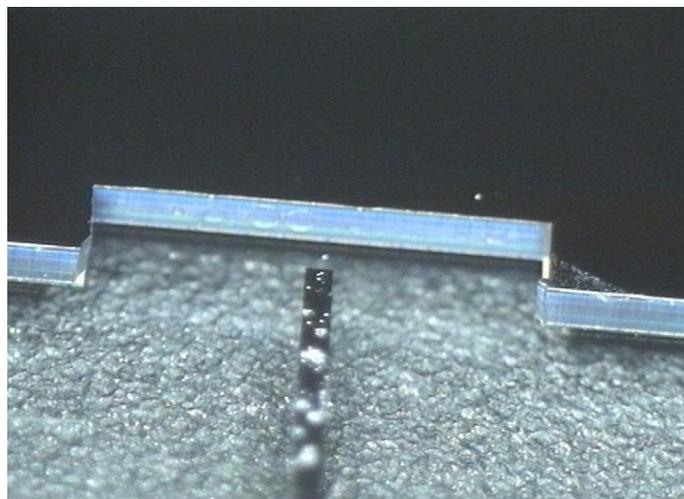


Figure 5—17 : T de suspension complètement disparu après usinage.

Malgré ces problèmes, l'étape de réalisation peut tout de même être considérée comme une réussite. Sur les wafers 3 et 4, nous avons obtenu trois gyromètres qui vibraient, nous avons également récupéré des maquettes fonctionnelles dans les deux premiers wafers. Nous avons

pu observer au microscope un bon alignement des wafers en pyrex et en silicium, ce qui apparaissait comme l'étape critique. Nous pouvons le voir sur les photos suivantes où les bras larges sont les électrodes et les moins larges les poutres.

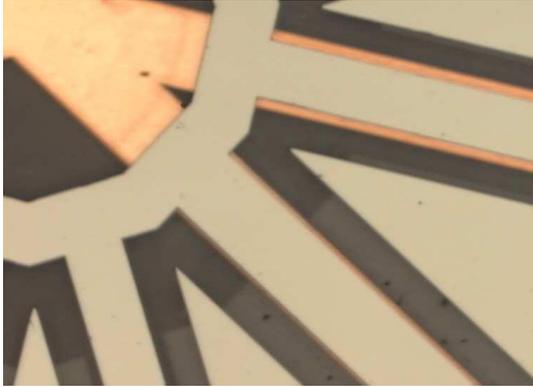


Figure 5—18 : Centrage du silicium par rapport au pyrex(1).

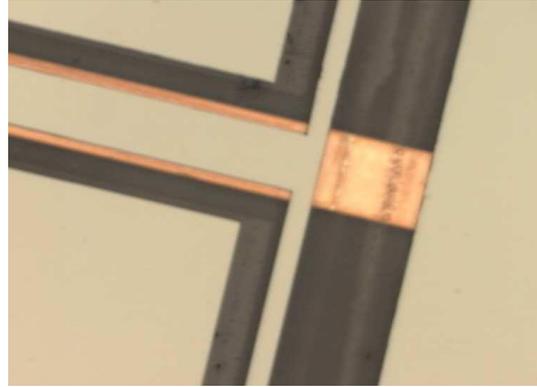


Figure 5—19 : Centrage du silicium par rapport au pyrex(2).

De plus, une observation du gyromètre au HI-scope a pu donner une idée de la bonne verticalité des flancs, comme nous pouvons le voir en examinant les T de suspensions ou le noyau.

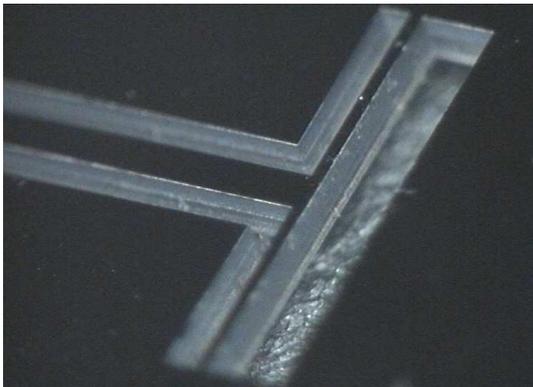


Figure 5—20 : Verticalité des T de suspensions.

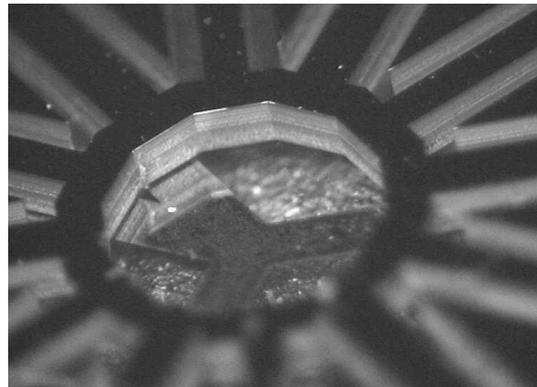


Figure 5—21 : Verticalité au niveau du noyau.

Nous pouvons donc considérer cette première série de maquettes comme une réussite du point de vue de la fabrication, et notamment en ce qui concerne l'alignement pour la soudure anodique. Les problèmes rencontrés ne semblent pas insurmontables et l'acquisition de wafers

avec des tolérances meilleures devrait permettre d'améliorer la qualité des réalisations, notamment pour les problèmes de découpe DRIE et d'usinage de la surface supérieure.

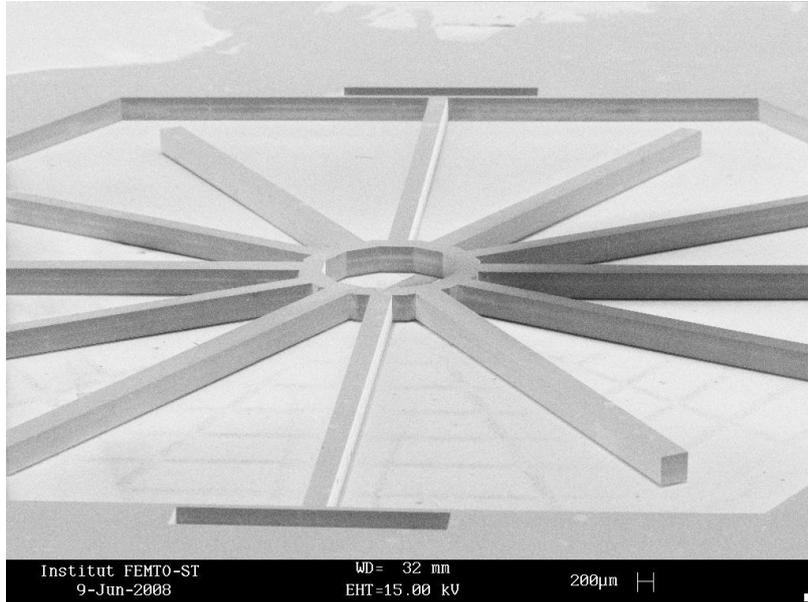


Figure 5—22 : Photo MEB d'un gyromètre micro usiné.

5.3.2 Deuxième série de maquettes

| Lp | Ls | w | h | Re | Ri |
|------|------|-----|-----|------|-----|
| 6504 | 7200 | 345 | 360 | 1200 | 800 |

Tableau 5–3 : Dimensions optimisées pour la deuxième série de maquettes.

Dans la deuxième série, deux types de maquettes ont été réalisés, un type avec une simple excitation des poutres, et un deuxième type avec une excitation de type « push pull » des poutres. L'intérêt de ce deuxième type de maquettes a déjà été expliqué dans le Chapitre 3, « Dimensionnement du gyromètre et simulation numérique ». Pour réaliser cette nouvelle maquette, il faudra néanmoins modifier le processus de fabrication.

- Il faudra en outre réaliser un gap sur la face supérieure du gyromètre, comme pour la face arrière, pour que les électrodes se trouvent aussi à 20µm de la face supérieure.

Ceci implique de modifier la taille des wafers initiaux et de les faire passer à 400 μm .

- Il faudra effectuer une deuxième soudure anodique, après l'usinage DRIE de 360 μm , avec le premier assemblage, et le verre avec les électrodes en verre.
- Enfin, il faudra effectuer un perçage du verre pour libérer les connexions inférieures et supérieures sans risque d'usinage du silicium et des électrodes en or.

La réalisation du second gap ne pose *a priori* pas de problème, il pourra être réalisé en même temps que le premier gap.

La libération des connexions se fera comme suit : premièrement, nous effectuerons une photolithographie sur les deux faces du sandwich, ensuite nous réaliserons un dépôt de cuivre. Nous enlèverons alors la résine pour qu'il ne reste du cuivre que sur les parties à conserver. Enfin, nous tremperons le tout dans un bain de BHF qui va attaquer le verre mais n'attaquera ni le silicium ni l'or.

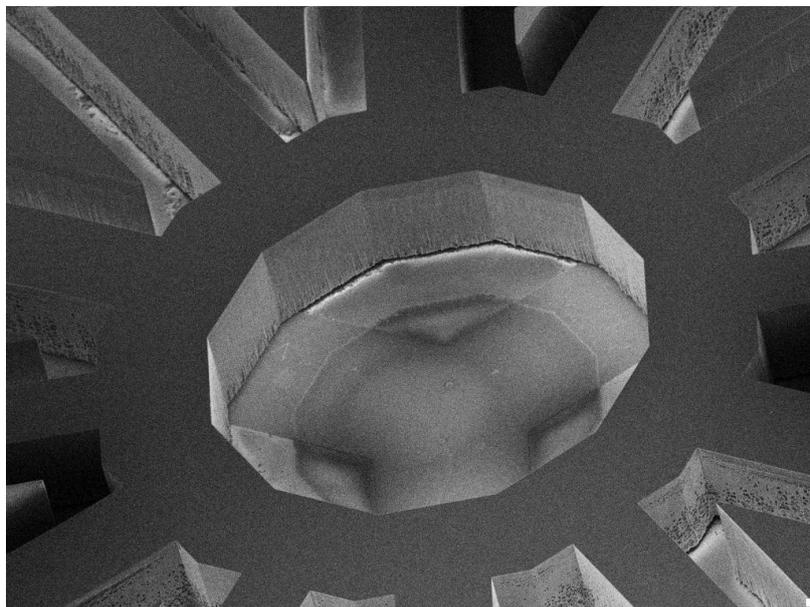


Figure 5—23 : Photo MEB du noyau centrale du gyromètre simple excitation.

5.3.3 Réalisation de la détection optique

La détection du déplacement secondaire est réalisée par voie optique. Cette détection se fait

avec une diode laser par retro-injection. Il a donc fallu prévoir des emplacements pour reporter les diodes laser et leur photo-détecteurs. Les diodes laser, pour être utilisées en retro-injection, doivent être régulées en température. Ne pouvant pas réguler uniquement la diode laser qui est sous forme de puce, et collée sur le support en verre du gyromètre, nous avons décidé de réguler tout le gyromètre en température. Il nous faut donc évaluer toute la puissance nécessaire au module Pelletier pour réguler en température notre gyromètre.

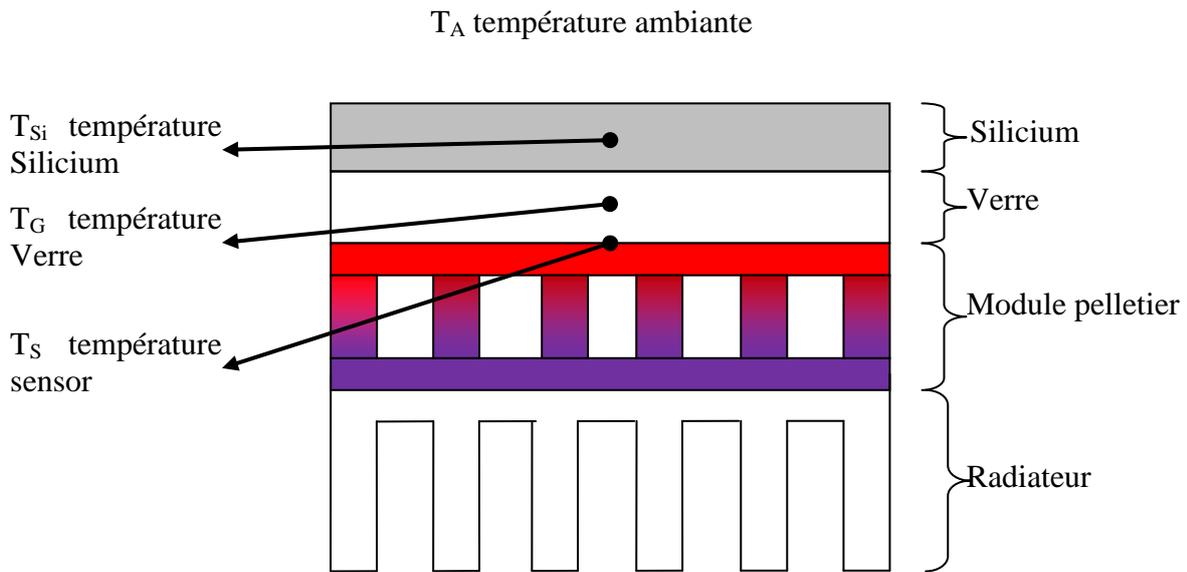


Figure 5—24 : Schéma de l'ensemble Module à effet Peltier-verre-silicium-radiateur.

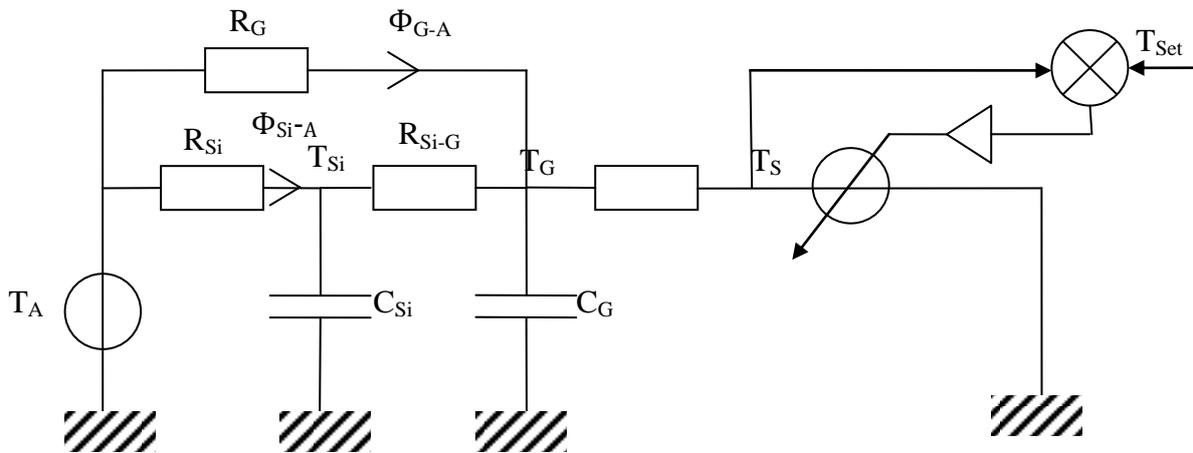


Figure 5—25 : Schéma thermique-électrique équivalent de l'ensemble (Module à effet Peltier-verre-silicium).

$$\begin{aligned}\varphi_{G-A} &\cong h(T_G - T_A) \\ \phi_{G-A} &= S_G * \varphi_{G-A} \\ \phi_{Si-A} &= S_{Si} * \varphi_{Si-A}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_G &= 1 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \times 4 \\ &= 120 \times 10^{-6} \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{Si} &= 0.360 \text{ mm} \times 30 \times 4 + 30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \\ &= 940 \times 10^{-6} \text{ m}^2\end{aligned}$$

$$R_G = \frac{1}{10 \times 120 \times 10^{-6}} = 833 \text{ KW}^{-1}$$

$$R_{Si} = \frac{1}{10 \times 940 \times 10^{-6}} = 106 \text{ KW}^{-1}$$

En régime permanent $T_{Si} \approx T_G$:

$$\begin{aligned}\phi &\cong \phi_{Si-A} + \phi_{G-A} \\ &\cong (9400 \times 10^{-6} + 1200 \times 10^{-6})(25 - 15) \\ &\cong 0,106 \text{ W}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{Si-G} &= \frac{1}{\lambda_{Si}} \frac{120 \times 10^{-6}}{30 \times 30 \times 10^{-6}} + \frac{1}{\lambda_G} \frac{1 \times 10^{-3}}{30 \times 30 \times 10^{-6}} \\
 &= \frac{1}{131} \frac{120 \times 10^{-6}}{30 \times 30 \times 10^{-6}} + \frac{1}{1} \frac{1 \times 10^{-3}}{30 \times 30 \times 10^{-6}} \\
 &= 1 \times 10^{-3} + 1,11 \\
 &\cong 1 \text{ KW}^{-1}
 \end{aligned}$$

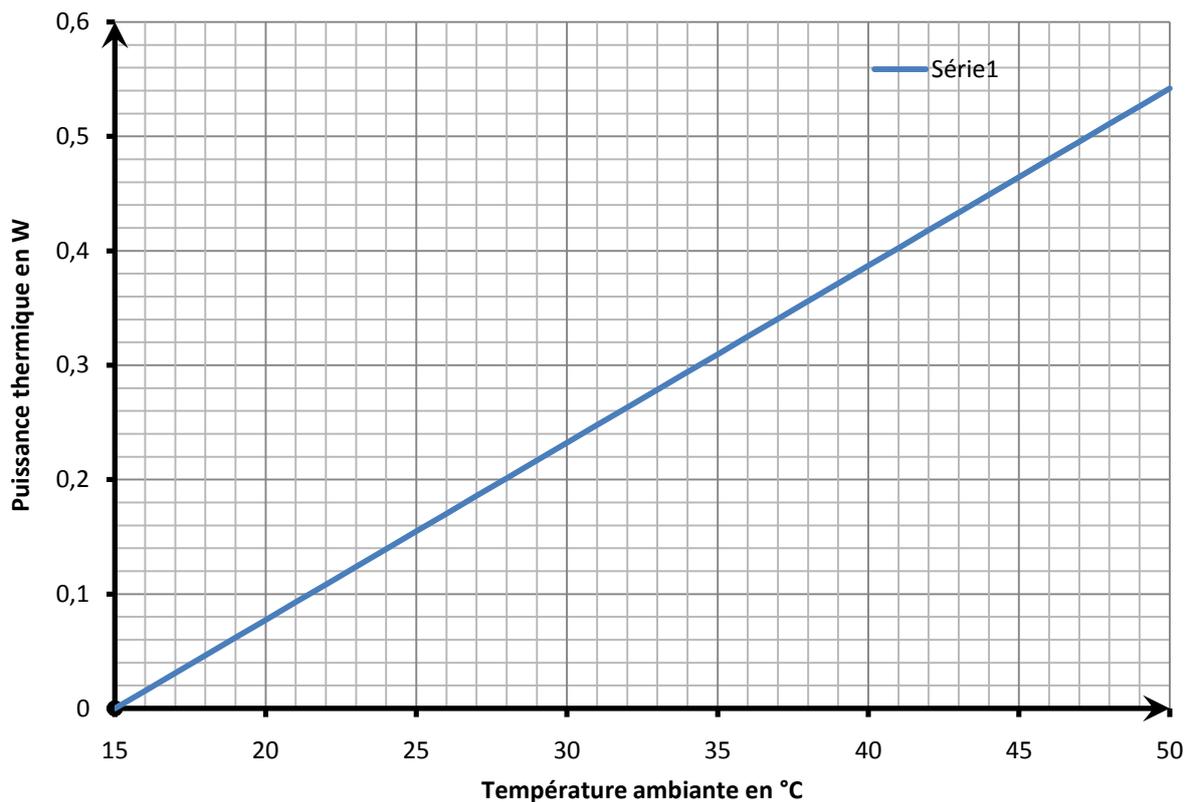
$$\begin{aligned}
 C_{Si} &= \rho_{Si} c_{Si} V_{Si} \\
 &= 2230 \times 0,7 \times 10^3 \times 0,36 \times 30 \times 30 \times 10^{-9} \\
 &= 0,52 \text{ JK}^{-1} \\
 C_G &= \rho_G c_G V_G \\
 &= 2500 \times 720 \times 1 \times 30 \times 30 \times 10^{-9} \\
 &= 1,62 \text{ JK}^{-1}
 \end{aligned}$$

Nous nous retrouvons avec une puissance dissipée pouvant atteindre 106 mW, cette puissance est la puissance minimum du module à effet Peltier. Nous avons acheté un module dissipant 19 W avec des dimensions 20*20 mm. Avec ces nouvelles dimensions, nous recalculons les différentes valeurs du modèle thermique. Dans notre cas, seules les valeurs de R_G changent :

$$\begin{aligned}
 S_G &= 1 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \times 4 - 20 \text{ mm} \times 20 \text{ mm} + 30 \text{ mm} \times 30 \text{ mm} \\
 &= 620 \times 10^{-6} \text{ m}^2
 \end{aligned}$$

$$R_G = \frac{1}{10 \times 620 \times 10^{-6}} = 161 \text{ KW}^{-1}$$

Avec ces nouvelles valeurs nous trouvons qu'il faut une puissance minimum de 154 mW pour passer de 25°C à 15°C.

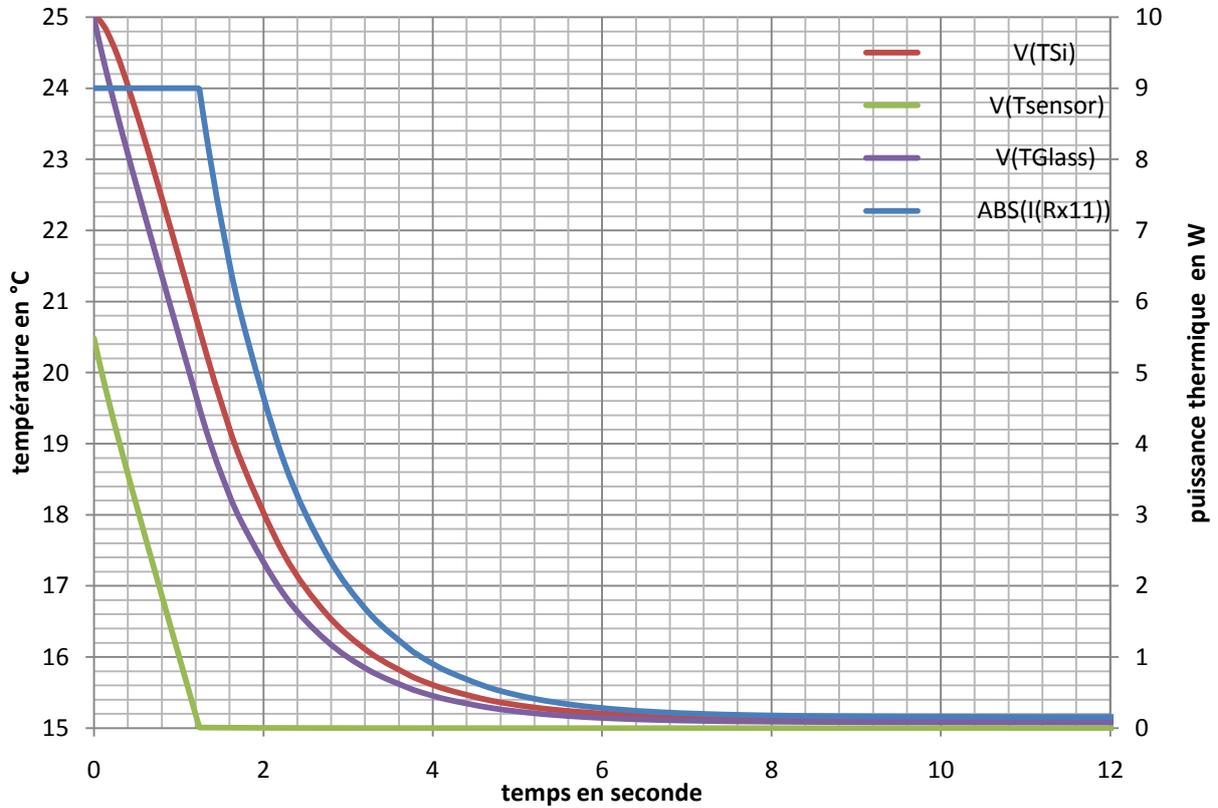


Graphique 5-1 : Courbe représentant la puissance nécessaire pour réguler le dispositif à la température de 15°C en fonction de la température ambiante.

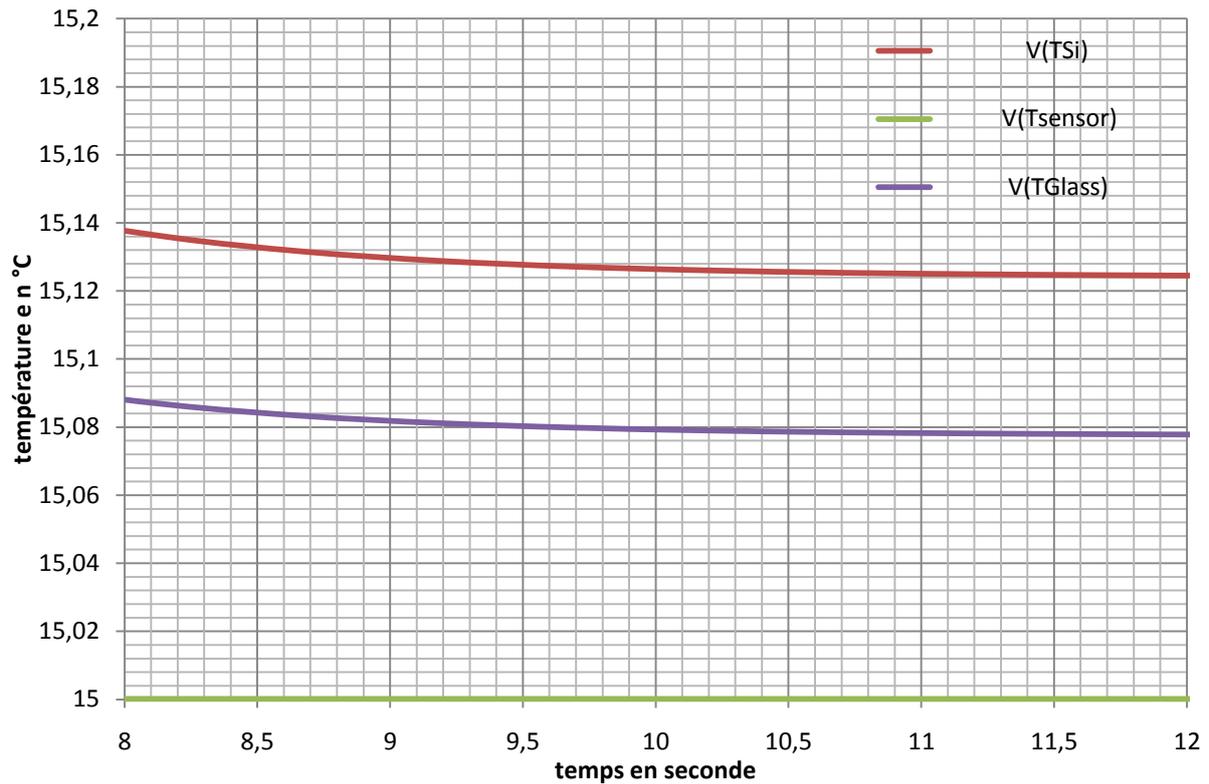
Nous avons limité le courant qui traverse le Module à effet Peltier, ceci a donc limité la puissance thermique dissipée par le module. La puissance dissipée reste encore conséquente, le module pouvant dissiper 9 W, et nous avons 154 mW pour réguler le gyromètre. Nous avons donc effectué ensuite une simulation transitoire pour observer l'évolution de la puissance ainsi que des différentes températures au cours du temps. Pour cette simulation nous avons considéré que le module pouvait dissiper au maximum une puissance thermique de 9 W, que la température ambiante ne varie pas et vaut 25°C et que nous souhaitons réguler le gyromètre à 15°C. Le graphique suivant représente l'évolution des différentes températures, au niveau de la sonde, au niveau du silicium, au niveau du verre, ainsi que la puissance thermique dissipée par le module.

Nous voyons sur le graphique qu'il faut quelques secondes pour permettre au gyromètre de se stabiliser en température ; de plus, si nous faisons un zoom sur la partie stabilisée de la

courbe, nous voyons que la différence entre la température de la sonde et la température de la diode est très faible (de l'ordre du dixième de degré) nous pourrions donc considérer que la température de la sonde et de la diode sont égales.

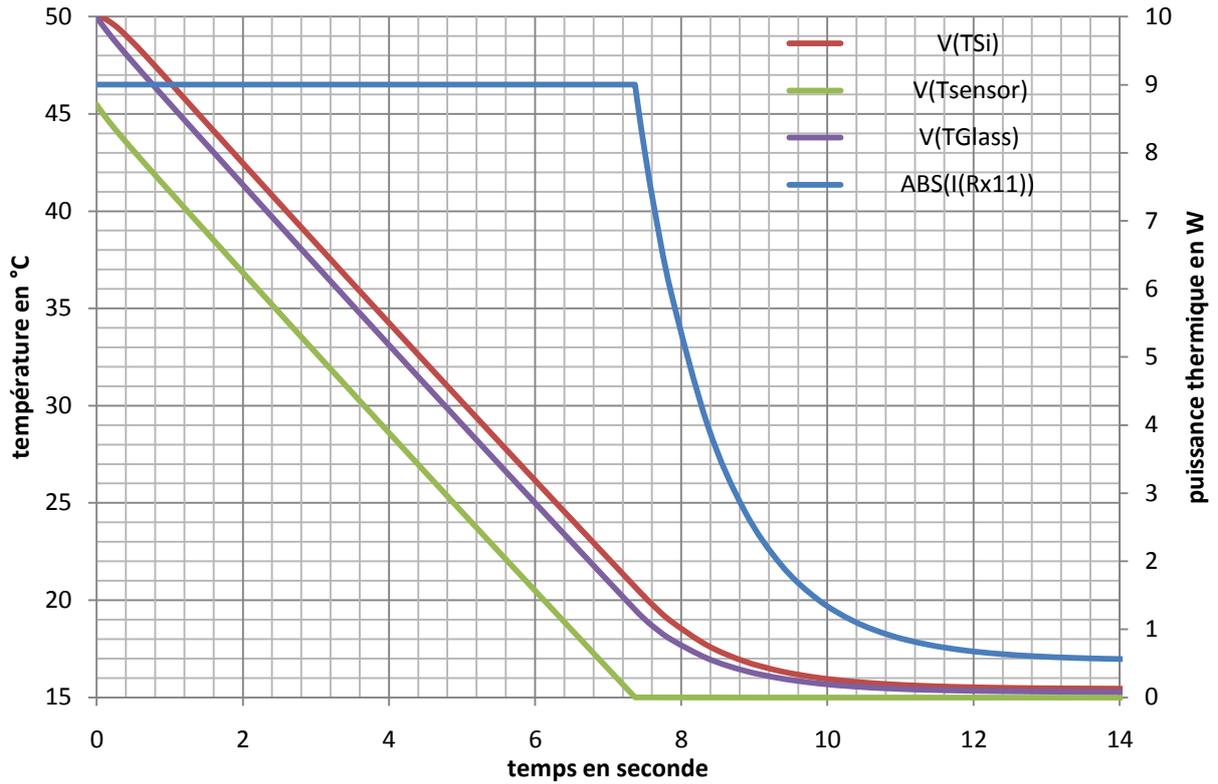


Graphique 5-2 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps ainsi que la puissance dissipée par le module à effet Peltier $T_A=25^\circ\text{C}$.

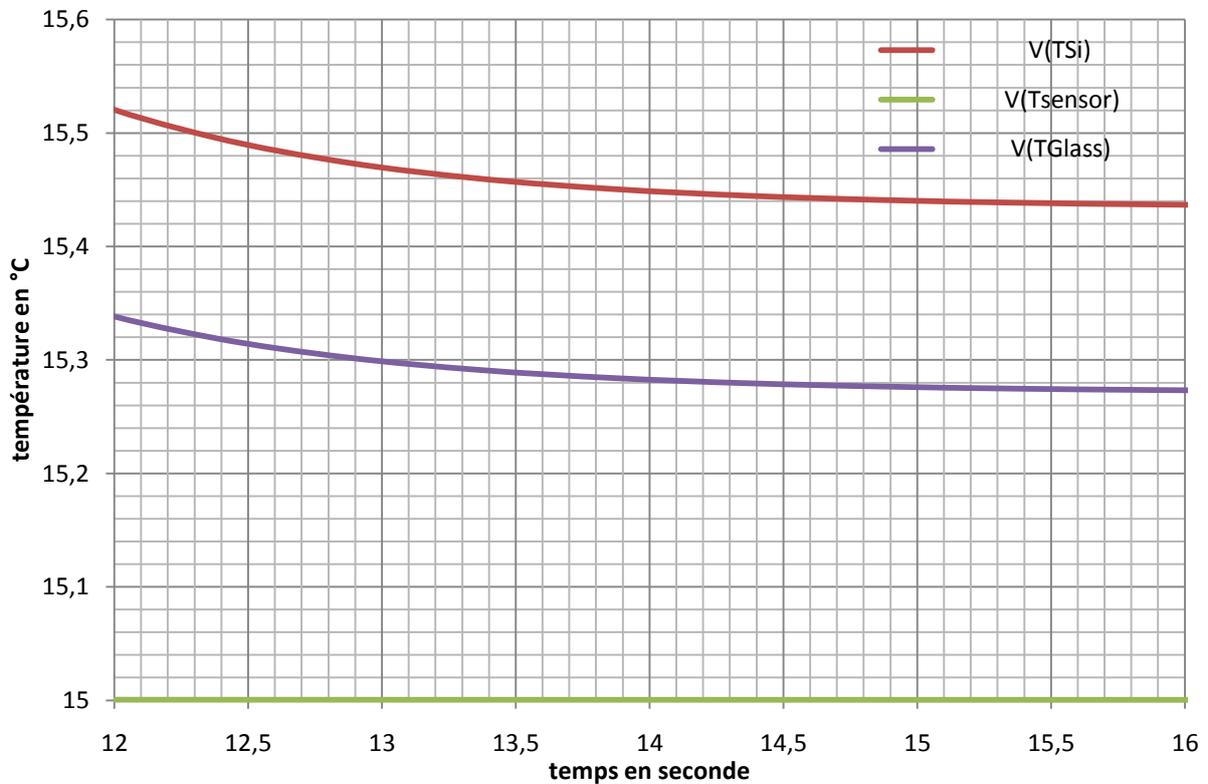


Graphique 5-3 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps $T_A=25^\circ\text{C}$.

Si nous considérons que la température ambiante initiale est de 50°C , nous pouvons voir sur les graphiques que le temps de régulation avant stabilisation des températures augmente légèrement mais reste raisonnable, de l'ordre de quelques secondes. De même qu'une fois stabilisés, les écarts de température aux différents points du capteur sont inférieurs au degré.



Graphique 5-4 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps ainsi que la puissance dissipée par le module à effet Peltier $T_A=50^\circ\text{C}$.



Graphique 5-5 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps $T_A=50^\circ\text{C}$.

5.4 Bilan

Les premières structures ont été réalisées, et ont permis de valider le processus de fabrication, malgré quelques petits défauts dus notamment à la qualité des wafers. Cette première étape de validation du processus de fabrication peut donc être considérée comme une réussite, autant du point de vue de la qualité des usinages par DRIE, que de l'alignement des wafers pendant la phase de soudure anodique. Ces deux étapes étaient déterminantes pour la réussite de la fabrication.

Les secondes maquettes réalisées avec les dimensions optimisées à simple excitation n'ont pas posé de problèmes au niveau du processus de fabrication, celui-ci ayant été validé précédemment. Les différentes mesures effectuées, à l'aide des différents outils de caractérisations des structures, ont montré qu'elles étaient très proches des dimensions théoriques. Il reste donc comme ultime vérification de la qualité des usinages la mesure des fréquences propres du gyromètre.

La fabrication de la dernière série de maquettes s'est bien passée, y compris la phase critique de la réalisation du « sandwich » verre-silicium-verre. À l'heure actuelle, le wafer est quasiment fini, et il ne reste plus que la création des ouvertures pour récupérer les connexions électriques situées entre les deux couches de verre.

Pour finir, l'implantation des puces lasers a été effectuée, cela a été un véritable défi pour l'équipe, les puces ayant été implantées de manière « manuelle » du fait de leur petite taille ($300\mu\text{m} * 300\mu\text{m} * 100\mu\text{m}$). Il reste donc à vérifier que les puces fonctionnent bien et qu'elles ne sont pas en court-circuit.

Chapitre 6

Conclusion

Ce travail se trouve dans la continuité du travail effectué par Charles Haye. Celui-ci a en effet débouché sur une proposition d'une nouvelle étude du gyromètre en étoile en silicium. Dans cette nouvelle étude, la proposition a été faite de remplacer la détection capacitive par une détection optique. Cette modification a permis la suppression des peignes interdigités qui étaient une source de problèmes lors de la réalisation des gyromètres. Cela conduit donc tout naturellement à une reconception globale du gyromètre étoile.

- Une analyse par éléments finis de la structure, sous le logiciel Systus, a permis d'obtenir un spectre des modes propres respectant le cahier des charges, et notamment la réjection des modes dits « parasites » en dehors de la zone sensible. Le mode trèfle, le plus gênant car sensible à la giration, a été rejeté 100 Hz au-delà des modes de détections. Cela a été possible en utilisant des T de suspensions, ces T permettant au noyau de se déplacer plus librement.
- Une étude plus poussée du gyromètre a permis de mettre en évidence les problèmes liés à l'excitation électrostatique. Le problème principal réside en ce cas dans la force constante générée par la pression électrostatique, en l'absence de tension continue. Cette force constante crée une précontrainte qui modifie la fréquence de résonance du gyromètre. Pour pallier ce défaut, un nouveau procédé d'excitation a donc été défini et mis en œuvre.

- Les étapes de fabrication ont été réalisées avec succès, et notamment la réalisation des soudures anodiques avec pré-alignement. En outre, ce nouveau procédé nécessite moins d'étapes que le procédé de Charles Haye, ce qui le rend plus facilement exploitable. La multiplication des étapes en microtechnique étant la principale cause de ratés au niveau des processus de fabrication.

Ces travaux de recherche ont permis d'avancer dans la compréhension du fonctionnement de ce capteur en étoile, nous pouvons en outre en tirer un certain nombre d'enseignements.

L'ensemble des problèmes liés à l'excitation électrostatique :

- déformation statique du gyromètre due à la méthode d'excitation sur trois poutres, et donc la modification de ces fréquences de résonance,
- combinaison de deux vibrations pour la réponse, une vibration à la pulsation ω et une à 2ω , qui entraîne une perte d'énergie dans le système.

Problèmes liés à la faible distance entre la poutre et l'électrode :

- génération d'un film d'air qui va amortir la structure, c'est d'ailleurs la cause d'amortissement structural principal, ce film limite le facteur de qualité,
- ce film va en plus générer un décalage de la fréquence résonance.

Il reste toutefois un travail conséquent à effectuer :

- Le premier travail, qui va s'effectuer durant les mois à venir, est la caractérisation du mode d'excitation hors-plan. Cela pourra être fait avec les moyens de l'Institut FEMTO-ST, et notamment en utilisant les sondes hétérodynes pour cartographier le mode hors-plan et vérifier sa fréquence de résonance. Nous pourrons aussi caractériser les autres modes de vibration hors-plan pour comparer avec les analyses modales.
- Le second travail est la caractérisation des modes de détections, ces modes sont des modes « in-plane » qu'il ne nous est pas possible d'exciter. La caractérisation de ces modes nécessite donc la mise en œuvre d'un banc de mesure où le gyromètre est en rotation, pour générer le couplage gyroscopique. De plus, d'après les simulations les

déplacements du secondaire sont de l'ordre du nanomètre, il faut donc un appareil de mesure capable de faire des mesures de déplacements nanométriques dans le plan, nous pouvons par exemple penser à une mesure stroboscopique.

- L'autre part importante à réaliser est la détection optique par retro-injection. Il existe là aussi deux cas de figure : la mesure du déplacement hors-plan et la mesure de celui « in-plane ». Les différentes expériences réalisées par R. Bourquin sur le sujet ont montré que la mesure de déplacement hors-plan était réalisable dans une plage de quelques nanomètres au micromètre. Il a d'ailleurs effectué des essais sur les premiers gyromètres fabriqués pour se placer dans des conditions similaires au niveau des états de surface du gyromètre. La mesure du déplacement « in-plane » est aussi réalisable mais plus compliquée à mettre en œuvre du fait que les déplacements à mesurer sont inférieurs à la longueur d'onde du laser. Mais il a été montré que c'était possible. Un problème important à soulever est que toutes ces expériences ont nécessité l'utilisation d'une lentille de focalisation. Il est évident que la nécessité d'un système de focalisation rendrait délicat voire impossible la détection par voie optique¹. Nous pourrions alors envisager une détection piézo-électrique, soit par dépôt de matériau piézo-électrique (PZT, AlN) ou par soudure d'un wafer de quartz. Le positionnement des diodes laser a été réalisé mais il est difficile pour l'heure de dire si cette mesure peut fonctionner en l'absence de système de focalisation (lentille).

¹ Nous pouvons réaliser des micro-lentilles pour la détection hors-plan, pas pour la détection « in-plane », il faut de plus pouvoir les aligner.

Bibliographie

- [1] BEL, Olivier, *Gyromètre a quartz 2D micro-usiné*. 2001, 120 pages. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- [2] BIENAIME, F., *Théorie des gyros vibrants*. Note technique SAGEM, 1994, n°94-11-2508.
- [3] CRETIN, B., VAIRAC, P., *Optical detection for scanning microdeformation microscopy*. Applied physics letters, 1997, volume 71, no15, pages 2082-2084.
- [4] DHATT, Gouri, TOUZOT, Gilbert, *Une présentation de la méthode des éléments finis*, 1981 Maloine S.A. édition.
- [5] ROYER, Daniel, DIEULESAINT, Eugene, *Elastic Waves in Solids tome 1 et 2*, 1980, Springer-Verlag Berlin and Heidelberg GmbH & Co. K
- [6] DOUCHET Jacques, ZWAHLEN, Bruno, *Calcul différentiel et intégral*. 1999, Presse polytechniques et universitaires romandes.
- [7] DUWEL, A. WEINSTEIN, M. GORMAN, J. BORENSTEIN, J. WARD, P., *Quality factors of MEMS gyros and the role of thermoelastic damping*. 15th IEEE International Conference on . Micro Electro Mechanical Systems Las Vegas, 2002, pages 214-219.
- [8] HANTZ, Hubert, *Étude d'un gyromètre piézoélectrique 2 axes*, 2005, 151 pages. Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté.
- [9] HAYE, Charles, *Conception et réalisation d'un micro-gyromètre sur substrat silicium*, 2004, 204 pages. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- [10] LEGER, Pierre, *Gyroscope mécanique vibrant*. Technique de l'ingénieur, traité de mesure et contrôle R1942.
- [11] LEGER, Pierre, *QuapasonTM – A new low-cost vibrating gyroscope*. Symposium Gyro technologie, Stuttgart, 1996.

- [12] LIFSHITZ, Ron, ROUKES, M.L., *Thermoelastic damping in micro- and nanomechanical systems*. PHYSICAL REVIEW B, 2000 Volume 61, number 8, pages. 560-5609.
- [13] LYNCH, D.D., *Principle, Design, and Performance*. Symposium Gyro Technology, 1992, Stuttgart, pages 9.1-9.6.
- [14] MATSUDO, H., ISHIHARA, M., KAWASAKI, S., YUKAWA, J., and HATANAKA, M., *Quartz crystal element for angular rate sensor*. International Frequency Control Symposium and Exhibition, 2000, pages.91–95.
- [15] HALL, N.A. OKANDAN, M. LITTRELL, R. SERKLAND, D.K. KEELER, G.A. PETERSON, K. BICEN, B. GARCIA, C.T. DEGERTEKIN, F.L., *Micromachined Accelerometers With Optical Interferometric Read-Out and Integrated Electrostatic Actuation*. Systems, Journal of Microelectromechanical, 2008, volume 17, pages 37-44.
- [16] ROYER, Daniel, DIEULESAINT, Eugene. *Onde élastique dans les solides-propagation libre et guidée*, volume 1. Masson, 1996.
- [17] STAKGOLD, Ivar, *Green's functions and boundary value problems*. John Wiley & Sons Inc, 1979.
- [18] SATOH, A, OHNISHI, K, TOMIKAWA, Y, Characteristics of the piezoelectric vibratory gyrosensor constructed using a trident tuning-fork resonator. IEEE Ultrasonics Symposium, 1998.
- [19] SCHROPFER, G., *Multi-axial silicon bulk-micromachined accelerometers with capacitive or optical read-out*. 1998. Thèse de doctorat, Université de Franche-Comté.
- [20] SEMAY, Claude, SIVESTRE-BRAC, Bernard, *Introduction au calcul tensoriel application a la physique*. 2007, Dunod.
- [21] SODERKVIST, J, *Micromachined gyroscopes*. Dig. 7th International Conference on Solid-State Sensors and Actuator, 1993, page 638-641.
- [22] ULITKO, I., *Mathematical theory of the fork-type wave gyroscope*. International Frequency Control Symposium, 1995, pages. 786–793.
- [23] VAIRAC, P., CRETIN, B., *New structures for heterodyne interferometric probes using double-pass*. Optics communications, 1996, volume 132, no1-2, pages 19-23.

- [24] Xie Mingchun Wang Xiaojing Yu Maohua Zhang Minliang Wang, *Analysis of the Air Damping in MEMS Lateral Driven Microresonators*. International Symposium on High Density packaging and Microsystem Integration, 2007. Shanghai, pages 1-4.
- [25] Xu G., Zhang C. and Jiang Q., *Air-damping Effect on a Micro- and Nano-machined Beam Resonator*. Technical Proceedings of the 2000 International Conference on Modeling and Simulation of Microsystems, pages 579 – 582.
- [26] YANG, J.S., FANG, H.Y., and JIANG, Q., *Analysis of a few piezoelectric gyroscopes*. International Frequency Control Symposium and Exhibition, 2000, pages 79–86.

Table des figures

| | |
|---|----|
| Figure 1—1 : Gyroscope de Foucault. | 12 |
| Figure 1—2 : Diapason 1. | 17 |
| Figure 1—3 : Diapason 2. | 18 |
| Figure 1—4 : QRS Systron Donner. | 19 |
| Figure 1—5 : Trident..... | 20 |
| Figure 1—6 : Micro-gyroscope anneau vibrant [Najafi, Michigan]. | 21 |
| Figure 1—7 : Modes du gyromètre en anneau. | 21 |
| Figure 1—8 : HRG (Hemispherical Resonator Gyroscope). | 22 |
| Figure 1—9 : Quapason <i>TM</i> | 23 |
| Figure 1—10 : Plan cristallin du silicium. | 25 |
| Figure 1—11 : Orientation des wafers, dans la majorité des cas le « Primary flat » est fourni par le plan (110). | 26 |
| Figure 1—12 : Gyromètre en étoile. | 28 |
| Figure 1—13 : Gyromètre étoile en quartz. | 29 |
| Figure1—14 : Mode Primaire. | 32 |
| Figure1—15 : Mode Secondaire « Ω_x ». | 33 |
| Figure1—16 : Mode Secondaire « Ω_y ». | 33 |
| Figure 1—17 : Mode trèfle..... | 33 |
| Figure 1—18 : Définition du gyromètre en étoile. | 34 |
| Figure 1—19 : Schéma bloc du gyromètre en étoile. | 36 |
| Figure 2—1 : Poutre orientée suivant l'axe x_2 | 40 |

| | |
|--|------------------------------------|
| Figure 2—2 : Organigramme d'une modélisation par éléments finis..... | 47 |
| Figure 2—3 : Poutre excitée de manière capacitive..... | 55 |
| Figure 2—4 : Représentation des forces et de leurs excitations respectives..... | 60 |
| Figure 2—5 : Amplitude de vibration du primaire et du secondaire en fonction de la fréquence d'excitation..... | 63 |
| Figure 2—6 : Amplitude de vibration du primaire et du secondaire en fonction de la fréquence d'excitation..... | 64 |
| Figure 2—7 : Amplitude de vibration en m en fonction de la vitesse de rotation en rad.s^{-1} à la fréquence de résonance..... | 65 |
| Figure 2—8 : Fréquence de résonance et temps de calcul en fonction du nombre d'élément constituant la poutre..... | 66 |
| Figure 2—9 : Sensibilité en fonction du facteur de qualité..... | 68 |
| Figure 3—1 : Représentation graphique des positions des fréquences du gyromètre..... | 72 |
| Figure 3—2 : Récapitulatif des dimensions du gyromètre..... | 73 |
| Figure 3—3 : Forme de structure donnant le meilleur résultat, avec son maillage..... | 78 |
| Figure 3—4 : Gyromètre soumis à une pression électrostatique constante..... | 80 |
| Figure 3—5 : Poutre soumise à la pression électrostatique et sa poutre en vis-à-vis..... | 81 |
| Figure 3—6 : Schéma équivalent des suspensions et des poutres du gyromètre en statique.. | 82 |
| Figure 3—7 : Modèle d'excitation initiale..... | 87 |
| Figure 3—8 : Nouveau modèle d'excitation..... | 87 |
| Figure 4—1 : Schémat de la poutre..... | Erreur ! Signet non défini. |
| Figure 4—2 : Schémat de la poutre et de son électrode..... | 101 |
| Figure 4—3 : Schémat de la poutre..... | 108 |
| Figure 5—1 : Dimension du gyrometre..... | 111 |
| Figure 5—2 : Caractéristiques des wafers en silicium commandés..... | 113 |
| Figure 5—3 : Caractéristiques des wafers en silicium standard en microelectronique..... | 114 |
| Figure 5—4 : Synoptique du procédé de fabrication des gyromètres..... | 115 |
| Figure 5—5 : Wafer de pyrex avec ses électrodes en or..... | 117 |

| | |
|--|-----|
| Figure 5—6 : Canon à électrons pour couche mince optique. | 118 |
| Figure 5—7 : Description de la machine [source CMI]. | 119 |
| Figure 5—8 : Principaux défauts lors de la gravure par DRIE. | 121 |
| Figure 5—9 : Bâti de gravure profonde par plasma (DRIE Alcatel). | 122 |
| Figure 5—10 : Machine de wafer bonding. | 123 |
| Figure 5—11 : Photo d'un wafer de verre et de silicium après assemblage. | 124 |
| Figure 5—12 : Machine de pulvérisation cathodique Plassys. | 125 |
| Figure 5—13 : Gyromètre micro-usiné après découpe. | 126 |
| Figure 5—14 : Machine de « ball bonding ». | 126 |
| Figure 5—15 : Vue au HI-scope d'un gyromètre insuffisamment découpé. | 128 |
| Figure 5—16 : Vue au HI-scope de la partie supérieure du gyro ayant subi un début d'attaque de la résine. | 129 |
| Figure 5—17 : T de suspension complètement disparu après usinage. | 129 |
| Figure 5—18 : Centrage du silicium par rapport au pyrex(1). | 130 |
| Figure 5—19 : Centrage du silicium par rapport au pyrex(2). | 130 |
| Figure 5—20 : Verticalité des T de suspensions. | 130 |
| Figure 5—21 : Verticalité au niveau du noyau. | 130 |
| Figure 5—22 : Photo MEB d'un gyromètre micro usiné. | 131 |
| Figure 5—23 : Photo MEB du noyau centrale du gyromètre simple excitation. | 132 |
| Figure 5—24 : Schéma de l'ensemble Module Peletier-verre- silicium-radiateur. | 133 |
| Figure 5—25 : Schéma thermique-électrique équivalent de l'ensemble (Module Peletier-verre-silicium). | 134 |

Table des tableaux

| | |
|---|-----|
| Tableau 1–1 : Principe d'excitation et de détection de plusieurs gyroscopes micro-usinés. ... | 16 |
| Tableau 1–2 : Récapitulatif des forces sur chaque poutre en fonction des rotations suivant l'axe x et l'axe y. | 35 |
| Tableau 1–3 : Récapitulatif des forces sur les poutres pour une rotation suivant l'axe x ou suivant l'axe y. | 36 |
| Tableau 2–1 : Récapitulatif du premier dimensionnement des poutres | 69 |
| Tableau 3–1 : Récapitulatif de l'ensemble des simulations. | 75 |
| Tableau 3–2 : Récapitulatif des dimensions du gyromètre optimisé en μm | 88 |
| Tableau 5–1 : Récapitulatif des dimensions utilisées..... | 112 |
| Tableau 5–2 : Dimensions retenues pour la première série de maquettes. | 127 |
| Tableau 5–3 : Dimensions optimisées pour la deuxième série de maquettes. | 131 |

Table des graphiques

| | |
|--|-----|
| Graphique 3–1 : Fréquence de vibration en fonction du perçage du noyau, simulation light-PLUS-10..... | 76 |
| Graphique 3–2 : Fréquence de vibration en fonction du perçage du noyau, simulation RL.... | 77 |
| Graphique 3–3 : Déflexion d'une poutre et d'une suspension équivalente soumis à une charge constante..... | 84 |
| Graphique 3–4 : Déflexion statique d'une poutre seule soumise à une charge constante. | 85 |
| Graphique 3–5 : Evolutions de ef en fonction de eg | 86 |
| Graphique 4–1 : Dissipation d'énergie d'une poutre en flexion. | 92 |
| Graphique 4–2 : Evolution $Ca2\lambda\theta0Q$ en fonction de ξ | 99 |
| Graphique 5–1 : Courbe représentant la puissance nécessaire pour réguler le dispositif à la température de 15°C en fonction de la température ambiante. | 136 |
| Graphique 5–2 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps ainsi que la puissance dissipée par le module Peletier $T_A=25^\circ\text{C}$ | 137 |
| Graphique 5–3 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps $T_A=25^\circ\text{C}$ | 138 |
| Graphique 5–4 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps ainsi que la puissance dissipée par le module Peletier $T_A=50^\circ\text{C}$ | 139 |
| Graphique 5–5 : Evolution de la température de la sonde, du verre, et du silicium en fonction du temps $T_A=50^\circ\text{C}$ | 139 |

Annexes

Annexe 1 Changement de base d'un tenseur d'ordre n

Dans la base $\{e_i\}$ le vecteur x peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant la convention d'Einstein :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i$$

Et dans la base $\{e'_j\}$ le même vecteur x peut s'écrire sous la forme suivante en utilisant toujours la convention d'Einstein :

$$\vec{x} = x'^j \vec{e}'_j$$

Si on utilise le changement de base suivant :

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij} \vec{e}'_j$$

$$\vec{e}'_j = \beta_{jk} \vec{e}_k$$

On a alors :

$$\vec{e}_i = \alpha_{ij} \beta_{jk} \vec{e}_k = \delta_{ik}$$

Cela nous amène donc au changement de composante suivante pour le vecteur x :

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^i \alpha_{ij} \vec{e}'_j = x'^j \vec{e}'_j$$

D'où :

$$x'^j = x^i \alpha_{ij}$$

En effectuant le raisonnement analogue sur la base $\{e'_j\}$ on arrive au résultat similaire :

$$x^i = x'^j \beta_{jk}$$

Maintenant que nous avons effectué le changement de repère sur un vecteur, nous allons effectuer un changement de repère sur un tenseur d'ordre 2.

Soit un tenseur d'ordre 2 nous pouvons écrire alors qu'il s'exprime dans le repère initial sous la forme suivante :

$$t = t_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j$$

Et dans le nouveau repère :

$$t = t'_{kl} \vec{e}'_k \vec{e}'_l$$

On peut écrire comme dans le cas des vecteurs précédents que :

$$t = t_{ij} \vec{e}_i \vec{e}_j = t_{ij} \alpha_{ik} \vec{e}'_k \alpha_{jl} \vec{e}'_l$$

On obtient donc facilement les formules de changements de repères suivantes pour les composantes du tenseur.

$$t'_{kl} = t_{ij} \alpha_{ik} \alpha_{jl}$$

$$t_{ij} = t'_{kl} \beta_{ik} \beta_{jl}$$

Ces formules peuvent s'étendre à tous tenseur d'ordre n de la manière suivante :

$$t'_{k...l} = \alpha_{ik} \dots \alpha_{jl} t_{i...j}$$

$$\underbrace{t_{i...j}}_{n \text{ indices}} = \underbrace{\beta_{ik} \dots \beta_{jl}}_{n \text{ facteur}} t'_{k...l}$$

Annexe 2 Programme Scilab

Fichier principal

```
function []=p()
clear l1 l2 l3 m1 T m k f3m x3 x1
//*****
//*****
//
//   le répertoire courant doit être celui où il y a les fonctions
//
//*****
//*****
PATH=getcwd();
//*****
//*****
//
//   appel des fonctions dans le répertoire courant
//
//*****
//*****
exec(PATH+'\Matrice.sci');
exec(PATH+'\MatriceE.sci');
exec(PATH+'\maximum.sci');
exec(PATH+'\nulle.sci');
exec(PATH+'\jacobi.sci');
exec(PATH+'\evalambda.sci');
//*****
//*****
//
//   appel des constantes
//
//*****
```

```
//*****
n=5;
Ac=50;
Dc=50;
L=6.5*10^(-3)
[kt3,Mt3,mu,Ft3]=Matrice(n)
[Mt3E]=MatriceE(n)
Omega=5;
eta=800
[liste]=jacobi(n)
for Omega=1:1:10
  for f=11700:1:11800
    [U0,U1,U2,x3,x1]=evalambda(kt3,Mt3,mu,Ft3,Ac,Dc,Omega,f,eta)
    m2($+1)=max(x3)
    m1($+1)=max(x1)
    l1($+1)=f
  end,
  O1($+1)=Omega
  lm1($+1)=max(m1)
  lm2($+1)=max(m2)
  clear m1 m2
end,
//*****
//*****
//**
//  tracé de lambda 1 et lambda 3 en fonction de la fréquence  **
//**
//**
//*****
//*****
xset('window',1);
  plot2d(O1,lm1)
xset('window',2);
  plot2d(O1,lm2)
```

```

[n1,n2]=size(O1)
/**
/**
//
//          écriture dans le fichier resultat1
//          des déplacements modale en bout de poutre
//
/**
/**
u=file('open','resultat1.txt','unknow');
fprintf(u,'f lambda1 lambda3\n');
fprintf(u,'(Hz) (m) (m)\n');
for i=1:n1
fprintf(u,'% .15f % .15f % .15f\n',O1(i),lm2(i),lm1(i));
end;
file('close',u);
[m,k]=max(lm2)
    f3m=l1(k)
/**
/**
//
//          tracé de la déformée de la poutre
//
//
/**
/**
endfunction

```

Évaluation des matrices élémentaires

```
function [kt3,Mt3,mu,Ft3]=Matrice(n)
clear all
PATH=getcwd();
exec(PATH+'\constante.sci');
[L1,b,h,g,Q1,Q3,rho,epsilon,s22,I1,I3,S]=constante()
L=L1/n;
//*****
//*****
//
//          évaluation de la matrice de raideur élémentaire
//
//*****
//*****
ke=[12/L^3, 6/L^2, -12/L^3, 6/L^2;6/L^2, 4/L, -6/L^2, 2/L;-12/L^3, -6/L^2, 12/L^3, -
6/L^2;6/L^2, 2/L, -6/L^2, 4/L]
//*****
//*****
//
//          évaluation de la matrice de raideur globale
//
//*****
//*****
kt=zeros(2*(n+1),2*(n+1))
for t=1:n,
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            kt(2*t+i-2,2*t+j-2)=kt(2*t+i-2,2*t+j-2)+ke(i,j)
        end,
    end,
end,
end,
//*****
```

```

//*****
//
//      évaluation de la matrice de raideur élémentaire      *****
//
//*****
//*****
Me=rho*S*[13/35*L,11/210*L^2,9/70*L,-13/420*L^2;11/210*L^2,1/105*L^3,13/420*L^2,-
1/140*L^3;9/70*L,13/420*L^2,13/35*L,-11/210*L^2;-13/420*L^2,-1/140*L^3,-
11/210*L^2,1/105*L^3]
//*****
//*****
//
//      évaluation de la matrice de masse globale      *****
//
//*****
//*****
Mt=zeros(2*(n+1),2*(n+1))
for t=1:n,
    for i=1:4,
        for j=1:4,
            Mt(2*t+i-2,2*t+j-2)=Mt(2*t+i-2,2*t+j-2)+Me(i,j)
        end,
    end,
end,
//*****
//*****
//
//      ajout des conditions aux limites      *****
//
//*****
//*****
for i=1:2*(n+1)-2,
    for j=1:2*(n+1)-2
        kt2(i,j)=kt(i+2,j+2)
    end
end

```

```

    Mt2(i,j)=Mt(i+2,j+2)
end,
end,
Mt3=zeros(4*n,4*n)
for i=1:2*n,
    for j=1:2*n,
        Mt3(i,j)=Mt2(i,j)
        Mt3(2*n+i,2*n+j)=Mt2(i,j)
    end,
end,
kt3=zeros(4*n,4*n)
for i=1:2*n,
    for j=1:2*n,
        kt3(i,j)=I1/s22*kt2(i,j)
        kt3(2*n+i,2*n+j)=I3/s22*kt2(i,j)
    end,
end,
//*****
//*****
//
//          évaluation de la matrice de couplage global          *****
//
//*****
//*****
mu=zeros(4*n,4*n)
for i=1:2*n,
    for j=1:2*n,
        mu(i,2*n+j)=Mt2(i,j)
        mu(2*n+i,j)=-Mt2(i,j)
    end,
end,
//*****
//*****
//
//*****

```

```
//      évaluation de la Force électrostatique      *****
//
//*****
//*****
Fe=-b*epsilon/2/g^2*[L/2;L^2/12;L/2;-L^2/12]
Ft1=zeros(2*n+2,1)
Ft2=zeros(2*n+2,1)
Ft3=zeros(2*(2*n),1)
for j=1:n,
    for i=1:4
        Ft1(2*j+i-2,1)=0
    end,
end,
for j=1:n,
    for i=1:4
        Ft2(2*j+i-2,1)=Ft2(2*j+i-2,1)+Fe(i)
    end,
end,
for i=1:2*n
    Ft3(i,1)=Ft1(i+2,1)
    Ft3(2*n+i,1)=Ft2(i+2,1)
end,
endfunction
```

Évaluation des fréquences propres par la méthode de Jacobi

```
function[lambda]=jacobi()
//*****
//*****
//
//   le répertoire courant doit être celui où il y a les fonctions
//
//*****
//*****
PATH=getcwd();
//*****
//*****
//
//   appel des fonctions dans le répertoire courant
//
//*****
//*****
exec(PATH+'\permutationC.sci');
exec(PATH+'\permutationL.sci');
exec(PATH+'\Matrice.sci');
n3=3
[K,M,mu,Ft3]=Matrice(n3)
[n,n1]=size(K)
  X=rand(n,n)
  lambda=rand(n,1)
epsilon=10^(-14)
s=1
Flambda=2*epsilon
  for i=n,
    for j=1:n
      gammaK(i,j)=abs(K(i,j))/sqrt(K(i,i)*K(j,j))
      gammaM(i,j)=abs(M(i,j))/sqrt(M(i,i)*M(j,j))
```

```
end,
end,
Fk=max(gammaK)
Fm=max(gammaM)
while (((Fk > epsilon)|(Fm > epsilon)|(Flambda > epsilon))&(s < 10000)),
epsilon=10^(-2*s)
for i=1:n,
for j=1:n,
fk=abs(K(i,j))/sqrt(K(i,i)*K(j,j))
fm=abs(M(i,j))/sqrt(M(i,i)*M(j,j))
//editvar fk
//editvar fm
t=(fk > epsilon)|(fm > epsilon)
if t==%T,
c1=K(i,i)*M(i,j)-M(i,i)*K(i,j)
c2=K(j,j)*M(i,j)-M(j,j)*K(i,j)
c3=K(i,i)*M(j,j)-M(i,i)*K(j,j)
d=c3/2+sign(c3)*sqrt((c3/2)^2+c1*c2)
if d==0,
a=0
b=-K(i,j)/K(j,j)
else
c1=K(i,i)*M(i,j)-M(i,i)*K(i,j)
c2=K(j,j)*M(i,j)-M(j,j)*K(i,j)
c3=K(i,i)*M(j,j)-M(i,i)*K(j,j)
d=c3/2+sign(c3)*sqrt((c3/2)^2+c1*c2)
a=c2/d
b=-c1/d
end,
[K]=permutationC(K,i,j,a,b)
[M]=permutationC(M,i,j,a,b)
[K]=permutationL(K,i,j,a,b)
[M]=permutationL(M,i,j,a,b)
[X]=permutationC(X,i,j,a,b)
```

```
//editvar X
end,
end,
end,
    lambdam=lambda
for i=1:n,
    lambda(i)=K(i,i)*1/M(i,i)
    gammas(i)=abs(lambda(i)-lambdam(i))/abs(lambdam(i))
end,
Flambda=max(gammas)
for i=1:n,
    for j=1:n
        gammaK(i,j)=abs(K(i,j))/sqrt(K(i,i)*K(j,j))
        gammaM(i,j)=abs(M(i,j))/sqrt(K(i,i)*K(j,j))
    end,
end,
for i=1:n,
    gammaK(i,i)=0
    gammaM(i,i)=0
end,
    Fk=max(gammaK)
    Fm=max(gammaM)
    s=s+1
end,
editvar s
//editvar K
//editvar M
//editvar X
editvar sqrt(lambda)/2/%pi
endfunction
```

```
function[L]=permutationC(L,i,j,a,b)
[n1,n2]=size(L)
for k=1:n1,
```

```
Ci(k)=L(k,i)
Cj(k)=L(k,j)
end,
for k=1:n1,
    L(k,i)=Ci(k)+b*Cj(k)
    L(k,j)=a*Ci(k)+Cj(k)
end,
endfunction
```

```
function[L]=permutationL(L,i,j,a,b)
[n1,n2]=size(L)
for k=1:n1,
    Li(k)=L(i,k)
    Lj(k)=L(j,k)
end,
for k=1:n1,
    L(i,k)=Li(k)+b*Lj(k)
    L(j,k)=a*Li(k)+Lj(k)
end,
endfunction
```

```

function [m1,m2]=maximum(U0,U1,U2,f,Ac,Dc)
clear l1 l2 m1 m2
//*****
//*****
//
// le répertoire courant doit être celui où il y a les fonctions
//
//*****
//*****

//*****
//*****
//
// appel des fonctions dans le répertoire courant
//
//*****
//*****

//*****
//*****
//
// appel des constantes
//
//*****
//*****

[s1,s2]=size(U0)
for t=0:1/f/1000:2/f,
    UT0=Dc^2*U0
    UT1=abs(2*Dc*Ac*U1*exp(%i*f*2*pi*t))/abs(Dc^2*U0+Ac^2*U2*exp(%i*f*4*pi*t)
    *exp(%i*f*2*pi*t)
    UT2=Ac^2*U2
    l1($+1)=UT1(s1/2-1)
    l2($+1)=UT1(s1-1)
    T($+1)=t

```

```

end,
    m1=max(l1)
    m2=max(l2)
// editvar l1
// editvar l2
endfunction

```

```

function [l]=nulle(x,d)
[nl,nr]=size(x)
for i=1:nl-1,
    if sign(d(i)) ~= sign(d(i+1)) ,
        if abs(d(i)) < abs(d(i+1)) ,
            l($+1)=x(i)
        else
            l($+1)=x(i+1)
        end,
    end,
end
endfunction

```

```

function [L,b,h,g,Q1,Q3,rho,epsilon,s22,I1,I3,S]=constante()
clear;
//*****
//*****
//**
//          constantes**
//**
//*****
//*****
L=6.504*10^(-3);
b=360*10^(-6);
h=366*10^(-6);
g=20*10^(-6);
Q1=100;
Q3=100;

```

rho=2330;

epsilon=8.85*10^(-12);

s22=1/(170*10^9);

I1=b*h^3/12;

I3=b^3*h/12;

S=b*h;

endfunction

function [U0,U1,U2,x3,x1]=evalambda(kt3,Mt3,mu,Ft3,Ac,Dc,Omega,f,eta)

clear U0 U1 U2 x3 x1

/**

/**

// **

// le répertoire courant doit être celui où il y a les fonctions **

// **

/**

/**

PATH=getcwd();

/**

/**

// **

// appel des fonctions dans le répertoire courant **

// **

/**

/**

for t=0:1/f/1000:1/f

H0=inv(kt3-(Omega^2)*Mt3+(-Dc^2-2*Dc*Ac*exp(i*2*pi*f*t)-
Ac^2*exp(i*4*pi*f*t))*Mt3E)

H1=inv(kt3-((2*pi*f)^2+Omega^2-i*2*pi*f*eta)*Mt3+(-Dc^2-
2*Dc*Ac*exp(i*2*pi*f*t)-
Ac^2*exp(i*4*pi*f*t))*Mt3E+2*i*(2*pi*f)*Omega*mu)

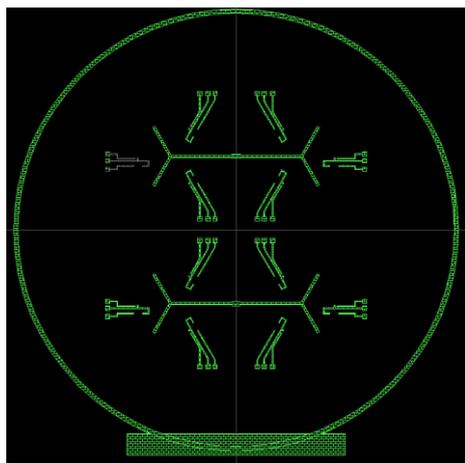
H2=inv(kt3-((4*pi*f)^2+Omega^2-i*4*pi*f*eta)*Mt3+(-Dc^2-
2*Dc*Ac*exp(i*2*pi*f*t)-
Ac^2*exp(i*4*pi*f*t))*Mt3E++4*i*(2*pi*f)*Omega*mu)

```
U0=H0*Ft3*Dc^2
U1=H1*Ft3*Ac*Dc*2
U2=H2*Ft3*Ac^2
x3($+1)=abs(U1(4*n-1))+abs(U2(4*n-1))
x1($+1)=abs(U1(2*n-1))+abs(U2(2*n-1))
end,
clear kt3 Mt3 mu Ft3 Ac Dc Omega f
//*****
//*****
//
//          écriture dans le fichier resultat1
//          des déplacements modale en bout de poutre
//
//*****
//*****
endfunction
```

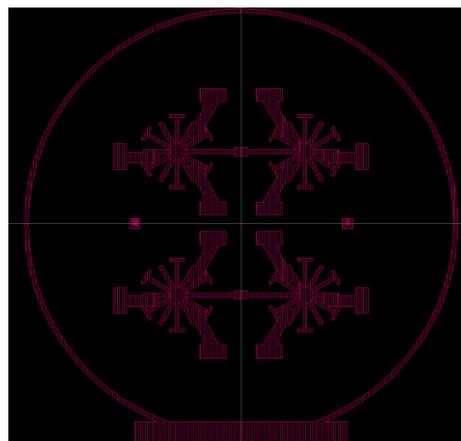
Annexe 3 Masques cadence

2^{ème} série de masques

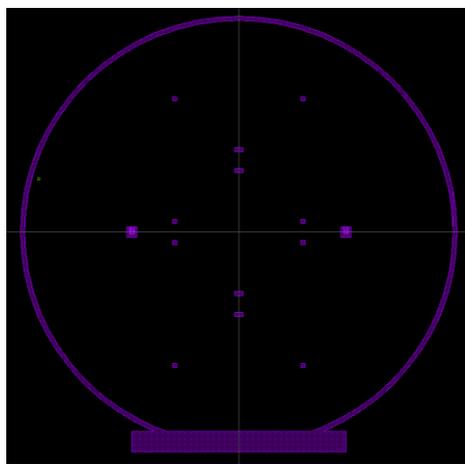
Modèle simple excitations



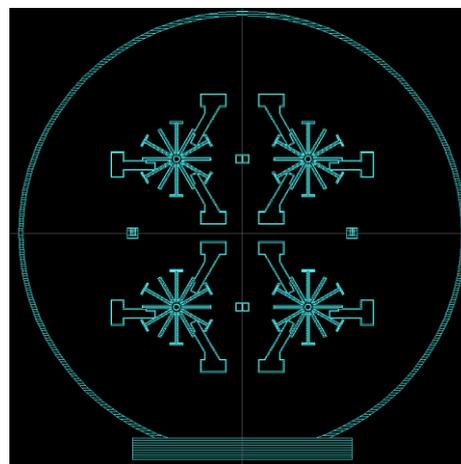
Masque pour les électrodes en or



Masque pour le gap

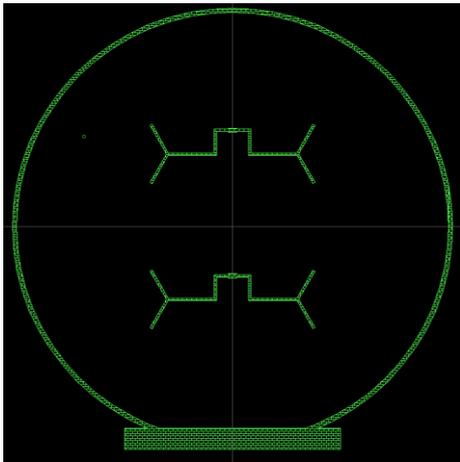


Masque pour les plots en aluminium

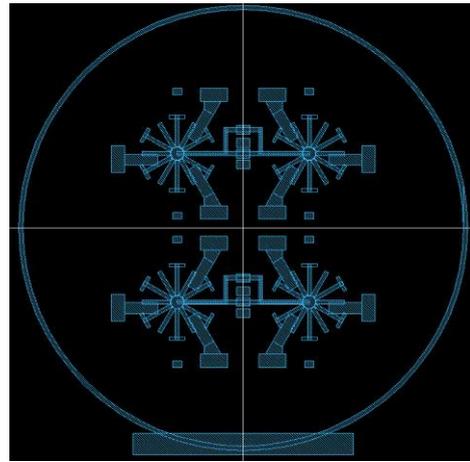


Masque pour la DRIE de 360 µm

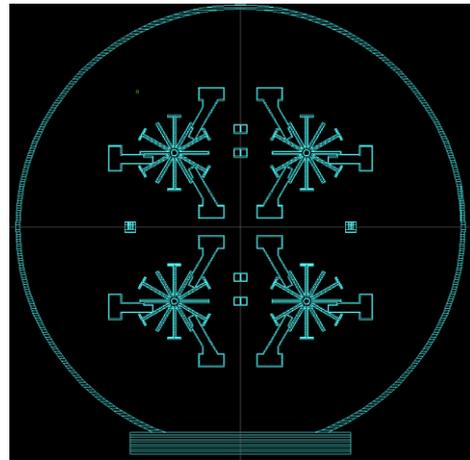
Modèle simple excitations



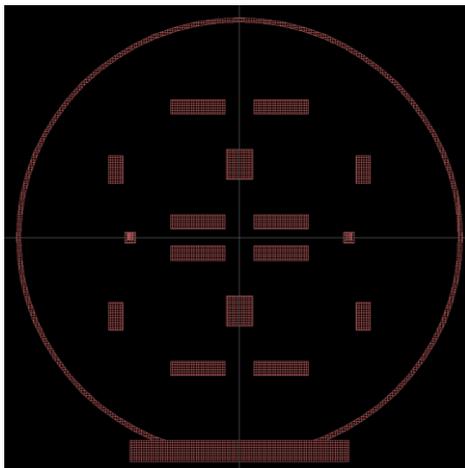
Masque supérieur pour les électrodes en or



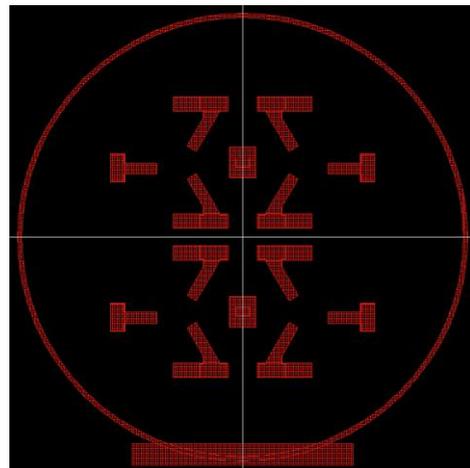
Masque supérieur pour le gap



Masque pour la DRIE de 380µm

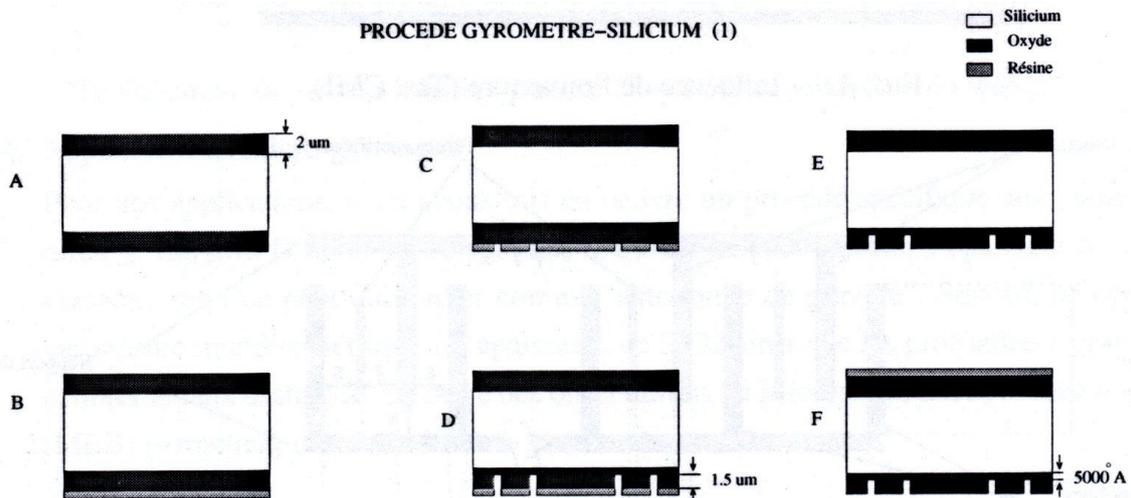


Masque pour l'usinage du verre face arrière



Masque pour l'usinage du verre face avant

Annexe 4 Procédé de fabrication de Charles HAYE



Étape A Le wafer est représenté avec les 2µm d'oxyde de silicium

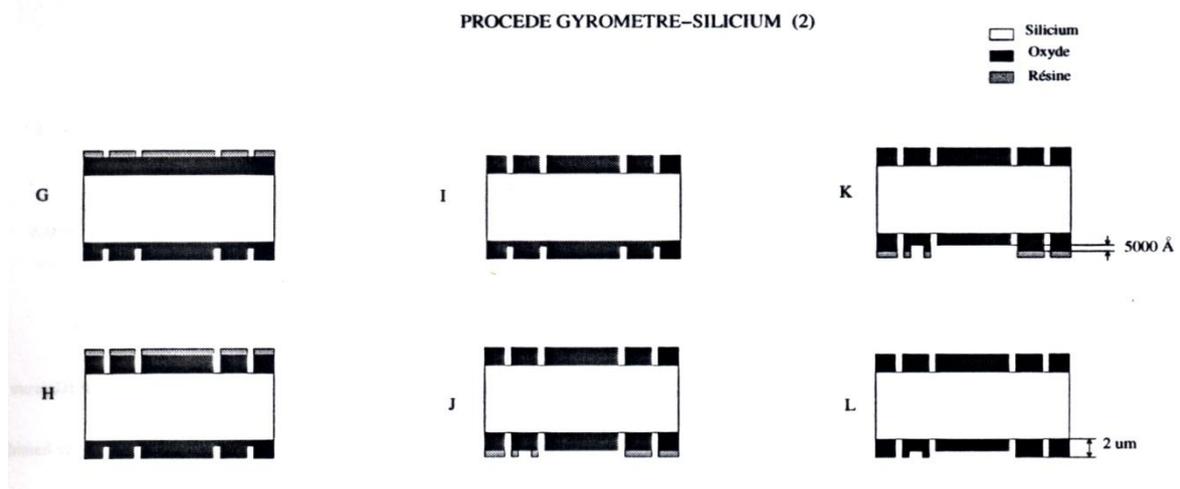
Étape B Enduction de résine en face arrière (résine standard épaisseur de 2,4 µm).

Étape C Première photolithographie (géométrie du gyromètre et détournage masque 1).

Étape D Réalisations de la gravure de la silice sur 1,5 µm par DRIE.

Étape E Nettoyage du wafer après suppression de la résine.

Étape F Dépôt d'une résine identique à l'étape B.



Étape G photolithographie (géométrie du gyromètre et détournage, masque 2 symétrique au masque 1).

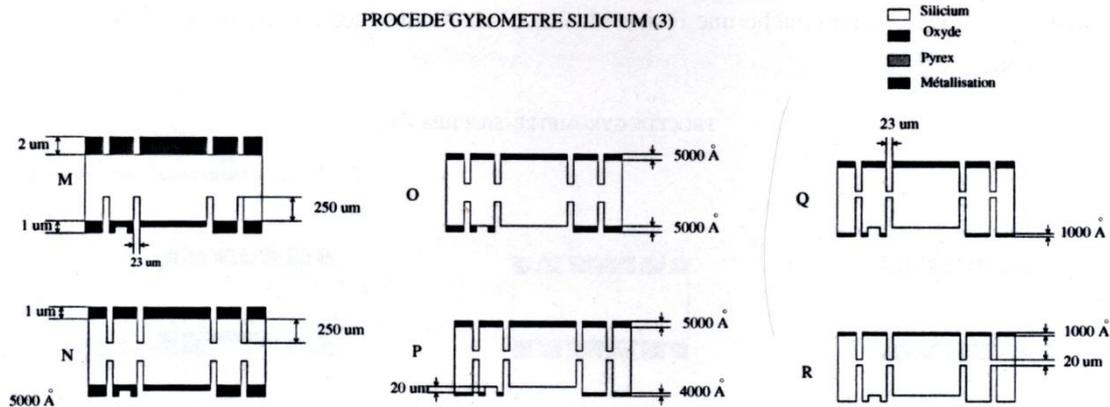
Étape H Ouverture complète de la silice.

Étape I Les restes de résine sont supprimés, puis le wafer est nettoyé.

Étape J photolithographie (pour l'amincissement des parties mobiles, masque 3).

Étape K gravure complète de l'oxyde jusqu'au silicium.

Étape L Les restes de résine sont supprimés, puis le wafer est nettoyé, avant la gravure du silicium.



Étape M Gravure face arrière du gyromètre sur 250 μm de profondeur.

Étape N Gravure face avant du gyromètre sur 250 μm de profondeur.

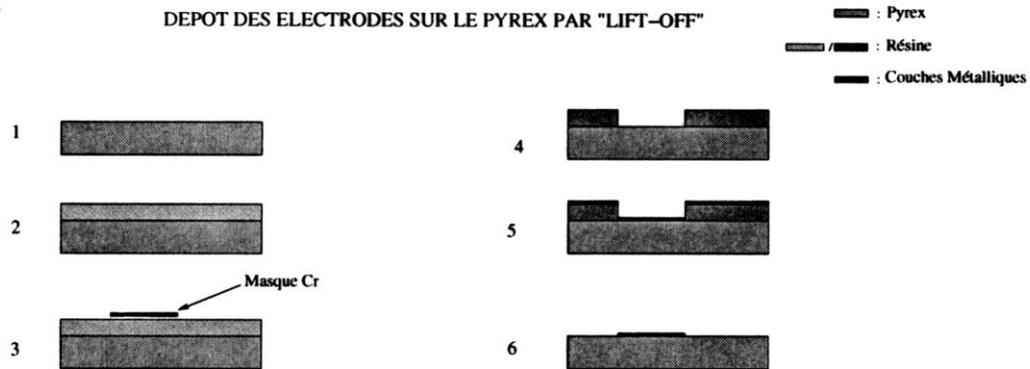
Étape O Élimination de l'oxyde sur la face arrière.

Étape P Gravure de 20 μm en face arrière de toutes les parties mobiles.

Étape Q Amincissement de l'oxyde face arrière sur 3000 Å par voie sèches.

Étape R Finition de la gravure de l'oxyde par BHF, dans le but d'avoir un excellent état de surface pour la soudure.

Dépôt des électrodes sur le pyrex



Étape 1 Wafer de verre polie double face et dopé.

Étape 2 Enduction de résine négative suivit d'un recuit de 98°C.

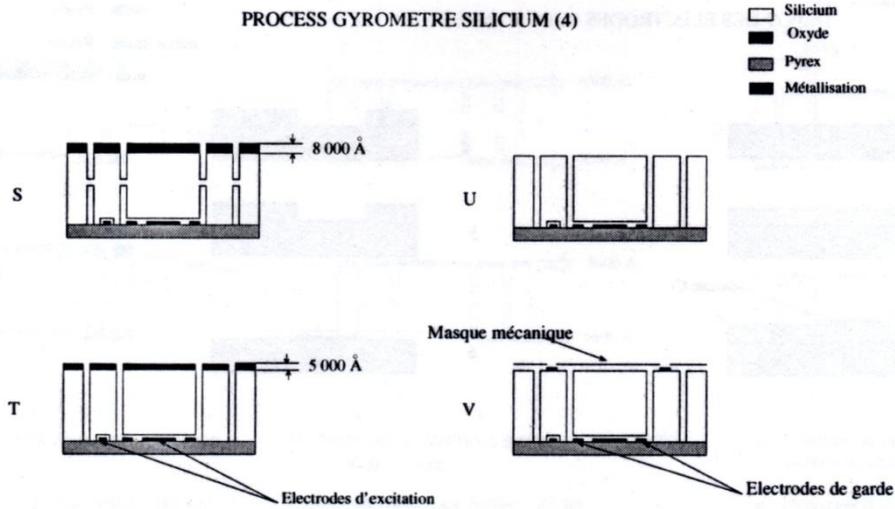
Étape 3 Photolithographie (pour les pistes, masque 4).

Étape 4 Développement de la résine.

Étape 5 Pulvérisation cathodique de 500nm d'aluminium.

Étape 6 Élimination de la résine et nettoyage du wafer.

Dépôt et soudure anodique



Étape S Procédé de soudure anodique avec étape d'alignement au préalable.

Étape T Gravure finale de $20\mu\text{m}$ pour libérer les parties mobiles.

Étape U Gravure par voie sèche pour supprimer les restes de silice.

Étape V réalisations d'un dépôt d'aluminium pour réaliser les plots de détections (réalisé à travers un masque mécanique usiné par DRIE).

Résumé :

Les travaux présentés ont pour objectif l'optimisation et la réalisation d'un gyromètre micro-usiné à poutre vibrante sur substrat silicium. Ces travaux s'inscrivent dans la continuité de thèses précédemment effectuées à FEMTO-ST et consacrées au développement d'une structure de gyromètre en étoile. Cette configuration est appropriée à la réalisation de mesures de vitesse angulaire dans le plan du substrat.

Le contexte de la thèse est constitué par un projet de recherche proposant une évolution du gyromètre silicium avec passage d'une détection capacitive à une détection optique. C'est pourquoi le mémoire propose naturellement un redimensionnement en profondeur du capteur. Ainsi, un nombre important d'études par éléments finis ont été réalisées pour optimiser la structure vibrante. Cette optimisation nous a permis de respecter le cahier des charges vis-à-vis des fréquences d'excitation et de détections, tout en rejetant les modes parasites. Des études électromécaniques complémentaires ont permis de comprendre en détail les spécificités résultant du choix de l'excitation capacitive. Ces travaux ont conduit à l'élaboration d'une structure optimisée, associée à une redéfinition des procédés de fabrication en salle blanche.

Plusieurs séries de capteurs micro-usinés ont ainsi pu être réalisées, donnant lieu à des structures exploitables, validant le nouveau design avec son process associé. Le recours à une sonde hétérodyne a ensuite permis de mesurer les déplacements hors-plan en fonction du signal d'excitation, validant ainsi le comportement dynamique primaire des structures.

Mots clés : effet Coriolis, micro-gyromètre, force électrostatique, silicium, salle blanche, éléments finis.

Abstract :

Work presented aims at the optimization and the realization of a gyrometer micro-machined with vibrating beam on substrate silicon. This work falls under the continuity of theses previously carried out to FEMTO-ST institute and devoted to the development of a structure of star gyrometer. This configuration is appropriate to the realization of velocity angular measurements in the plan of the substrate.

The context of the thesis is consisted a research project submitted an evolution of the gyrometer silicon with passage of a capacitive detection to an optical detection. This is why the report naturally proposes an in-depth redimensioning of the sensor. Thus, a significant number of studies by finite elements were carried out to optimize the vibrating structure. This optimization enabled us to respect the schedule of conditions with respect to the frequencies of excitation and detections, while rejecting the parasitic modes.

Complementary electromechanical studies made it possible to include/understand in detail specificities resulting from the choice of the capacitive excitation. This work led to the development of an optimized structure, associated a redefinition of the manufacturing processes in clean room.

Several series of micro-machined sensors thus could be carried out, giving place to exploitable structures, validating the new design with its associated process. The recourse to a probe heterodyne receiver then made it possible to measure out-plan displacements according to the signal of excitation, thus validating the primary dynamic behavior of the structures.

Key words : Coriolis effect, micro-gyrometer, electrostatic force, silicon, clean room, finite elements.