Reconstruction d'états non classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité

Samuel Deléglise

▶ **To cite this version:**

Samuel Deléglise. Reconstruction d'états non classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2009. Français. NNT : . tel-00477136v2

HAL Id: tel-00477136

https://theses.hal.science/tel-00477136v2

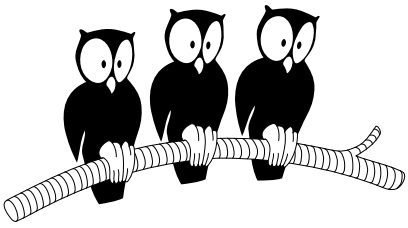
Submitted on 20 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Département de Physique
École Normale Supérieure

Laboratoire Kastler-Brossel



THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Samuel DELEGLISE

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Reconstruction complète d'états non-classiques du champ en électrodynamique quantique en cavité

Soutenue le 3 Décembre 2009
devant le jury composé de :

M.	**Martial DUCLOY**	Examinateur
M.	**Claude FABRE**	Examinateur
M.	**Philippe GRANGIER**	Rapporteur
M.	**Serge HAROCHE**	Directeur de thèse
M.	**Tobias KIPPENBERG**	Rapporteur
M.	**Jean-François ROCH**	Examinateur

A ma mère.

Remerciements

Aussi loin que je me souvienne, construire des machines et comprendre les lois qui régissent le monde a été au coeur de mes préoccupations d'enfants. Je dois avant tout remercier mes parents d'avoir su éveiller cette curiosité et de m'avoir offert une enfance dégagée de tout souci matériel ou affectif.

J'aimerais également remercier mon père d'avoir cru en moi au moment de me lancer dans des études longues, sans doute plus que moi-même. Je mesure aujourd'hui ce que je lui dois.

Je voudrais également remercier Serge Haroche, Jean-Michel Raimond et Michel Brune pour la confiance qu'ils m'ont témoignée en m'accueilliant dans leur groupe et en me confiant leur précieux montage pendant près de quatre ans. Au cours de ces années, leur proche encadrement a non seulement été d'une efficacité redoutable, mais par dessus tout, il m'a sans cesse rappelé la rigueur et l'exigence nécéssaire pour faire aboutir un projet ambitieux. Je remercie en particulier Michel Brune pour ses innombrables conseils techniques et sa connaissance inépuisable de tous les rouages de la « manip ». Sans lui, cette thèse aurait probablement duré plus de dix ans. Jean-Michel Raimond, dont les apparitions éclatantes dans le laboratoire furent assez fréquentes en dépit de son sacerdoce de directeur du laboratoire, a su me transmettre son goût immodéré de la découverte, et je me souviendrai longtemps de son émotion communicative au moment où les premiers signaux se dessinent sur les écrans. Enfin, je remercie Serge Haroche pour qui la beauté d'une expérience de physique constitue une fin en soi et sans qui un projet aussi fou ne pourrait exister.

Je suis également très reconnaissant envers mes prédécesseurs Sebastien Gleyzes, Stefan Kuhr, Christine Guerlin et Julien Bernu, qui ont monté ce dispositif expérimental et m'ont guidé dans ce qui n'était pour moi au début qu'un enchevètrement de câbles, de boîtiers électroniques et de tuyaux. Je profite également de ces pages pour dire toute mon estime pour Igor Dotsenko, qui a rejoint le laboratoire en post-doctorat environ un an après le début de ma thèse, et dont la rigueur, aussi bien expérimentale que théorique restera un modèle pour moi. Je voudrais aussi remercier tous les thésards avec qui j'ai travaillé durement à des aspects particulièrement ingrats mais indispensables de l'expérience (je suis sûr que Clément se rappelera avec émotion de notre semaine de plomberie pour installer le piège à Helium...). Je souhaite beaucoup de réussite à Clément, Igor, Sébastien, Xing Xing et Bruno pour les projets encore plus ambitieux à venir.

Un grand merci à ceux qui ont fait de ce séjour à l'ENS un moment agréable et très enrichissant sur le plan humain : Andreas Emmert, le compagnon de toujours, Clément Sayrin, Gilles Nogues, Adrian Lupascu, Thomas Nirrengarten, Cédric Roux, Xing Xing Zhou et Bruno Peaudecerf.

Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidé à la rédaction de ce Mémoire. Michel, Jean-Michel, Clément et Bruno pour leurs nombreuses relectures et leurs judicieux conseils. Merci également à Philippe Grangier et Tobias Kippenberg d'avoir accepté le rôle de rapporteur à un moment de l'année très chargé.

Pour finir, merci à Thomas (les deux), Andreas, Maguelone et tous ceux qui m'ont cotoyé durant ma vie Parisienne, pour tous les bons moments partagés : je ne sais pas si l'occasion se représentera un jour de partager un barbecue sur un voilier au port de l'arsenal, je garderai donc précieusement ces souvenirs. Merci enfin à Claire de m'avoir supporté et soutenu pendant la longue et difficile période de rédaction du manuscrit.

Table des matières

Introduction **1**

I Description théorique du système atome-champ **9**
I.1 Description quantique d'un mode du champ électromagnétique 9
I.1.1 Le champ quantifié 9
I.1.1.a Opérateur déplacement et états cohérents 11
I.1.2 État quantique d'un système 13
I.1.2.a États purs et mélanges statistiques 13
I.1.2.b L'opérateur densité 13
I.1.2.c Entropie d'un système 15
I.1.2.d Ambiguïté des mélanges statistiques 16
I.1.3 Représentation de l'état du champ dans l'espace des phases 19
I.1.3.a Les fonctions caractéristiques 20
I.1.3.b La fonction Q 21
I.1.3.c La fonction de Wigner 21
I.1.3.d Quelques propriétés des fonctions Q et W 22
I.1.3.e Quelques exemples 23
I.1.4 Description théorique de différents types de mesures quantiques 31
I.1.4.a Mesure quantique idéale de Von Neumann 31
I.1.4.b Mesure généralisée 33
I.1.4.c Mesure Quantique Non-Destructive 35
I.1.5 Principe de la reconstruction complète de l'état 37
I.1.5.a Principe général 37
I.1.5.b Reconstruction par Entropie maximum 38
I.1.5.c Reconstruction par Maximum de vraisemblance 40
I.2 Atomes à deux niveaux 43
I.2.1 La sphère de Bloch 43
I.2.2 Evolution du spin atomique libre dans un champ classique 44
I.2.3 Interférométrie de Ramsey 45
I.3 Interaction atome-champ quantique 47
I.3.1 Le Hamiltonien de Jaynes-Cummings 47
I.3.2 Régime résonnant 49
I.3.2.a Les états habillés 49

I.3.2.b Oscillations de Rabi du vide 49

II Le système expérimental **51**
II.1 Schéma général du dispositif expérimental 51
II.2 Les atomes de Rydberg circulaires 52
II.2.1 Description 52
II.2.2 Un grand dipôle 54
II.2.3 Un grand temps de vie 55
II.2.4 Le champ électrique directeur 55
II.2.5 Un atome à deux niveaux 56
II.3 Cavité micro-onde de grande finesse 58
II.3.1 Une cavité Fabry-Pérot 58
II.3.2 Un grand facteur de qualité 60
II.3.3 Le régime de couplage fort 61
II.4 Le choix de n 63
II.5 Le dispositif expérimental 64
II.5.1 Contrôle des atomes 66
II.5.1.a Préparation des atomes de Rydberg circulaires 66
II.5.1.b Contrôle spatio-temporel des atomes 67
II.5.1.c Contrôle de l'état interne : les zones de Ramsey 72
II.5.1.d Contrôle de la fréquence atomique 73
II.5.1.e Détection des atomes de Rydberg 75
II.5.1.f Préparation d'atomes uniques 75
II.5.1.g Franges de Ramsey expérimentales 77
II.5.2 Contrôle de la cavité 79
II.5.2.a Contrôle de la fréquence du mode 79
II.5.2.b Préparation d'états classiques du champ dans la cavité 80
II.5.3 L'environnement cryogénique 81
II.5.4 Récapitulatif 82

III Mesurer le champ avec des atomes **85**
III.1 L'interaction dispersive 85
III.1.1 Le déplacement lumineux 85
III.1.2 Déphasage d'un dipôle atomique par un état de Fock 86
III.2 Principe de la mesure Non-destructive du nombre de photons 89
III.2.1 Une horloge atomique pour compter les photons 89
III.2.2 Mesure d'une composante arbitraire du vecteur de Bloch 91
III.3 Imperfections expérimentales 94
III.3.1 Contraste fini de l'interféromètre 94
III.3.2 Décalage des franges 97
III.3.3 Effets du nombre aléatoire d'atomes 99
III.4 Différents types de mesures QND 100
III.4.1 Exemple de mesure de von Neumann : mesure de 0 et 1 photons 101

III.4.2 Cas de la mesure de parité . . . 103
III.4.3 Mesure faible : Interférométrie atomique dans le cas général . . . 105
III.4.4 Mesure projective vue comme la limite d'un grand nombre de mesures faibles . . . 109
III.4.4.a POVM à plusieurs atomes . . . 109
III.4.4.b Résultats expérimentaux . . . 112
III.4.4.c Trajectoires Monte-Carlo et moyenne d'ensemble . . . 115
III.4.4.d Reconstruction des populations par un procédé itératif . . . 117

IV Préparation et reconstruction d'états non-classiques du champ 123
IV.1 L'expérience de pensée de Schrödinger revisitée . . . 123
IV.1.1 Déphasage du champ cohérent par un atome . . . 123
IV.1.2 Préparation de l'état chat de Schrödinger . . . 124
IV.1.3 Lien avec la mesure de parité . . . 126
IV.1.4 Effet des imperfections expérimentales . . . 127
IV.1.4.a Non-linéarité du déphasage par photon . . . 127
IV.1.4.b Contraste fini de l'interféromètre . . . 129
IV.2 Reconstruction des états par entropie Maximum . . . 129
IV.2.1 Mesure directe d'une fonction de Wigner Généralisée . . . 131
IV.2.2 Reconstruction de l'état « chat de Schrödinger » . . . 133
IV.2.3 Reconstruction des états de Fock . . . 140
IV.2.3.a Préparation . . . 140
IV.2.3.b Reconstruction . . . 142
IV.3 Méthode du maximum de vraisemblance . . . 147
IV.3.1 Reconstruction sur les données réelles . . . 147
IV.3.2 Mesure du nombre de photons déplacé . . . 149
IV.3.3 Choix des paramètres pour la méthode du maximum de vraisemblance . . . 154
IV.4 Comparaison entre les deux méthodes . . . 157
IV.4.1 Etat à reconstruire . . . 157
IV.4.2 Influence du nombre de points de mesure . . . 159
IV.4.3 Influence de l'erreur statistique . . . 162

V Décohérence du champ piégé 165
V.1 Décrire la relaxation . . . 165
V.1.1 L'équation maîtresse . . . 165
V.1.2 Interprétation en termes d'opérateurs de sauts . . . 166
V.1.3 Relaxation de l'état Chat de Schrödinger . . . 170
V.1.3.a Solution analytique à température nulle . . . 170
V.1.3.b Solution numérique à 0,8 Kelvin . . . 173
V.2 Un film de la décohérence de l'état chat de Schrödinger . . . 176
V.2.1 Commutation entre déplacement et décohérence . . . 180
V.2.2 Transition du chat « vivant et mort » vers le chat « vivant ou mort » . . . 181
V.2.3 Analyse quantitative de la décohérence de l'état chat de Schrödinger . . . 181

V.2.3.a Evaluer la cohérence de l'état chat de Schrödinger 181
V.2.3.b Décohérence de l'état chat de Schrödinger 183

Conclusion **189**

Introduction

La mécanique quantique est née au début du siècle dernier à la suite d'un formidable effort conceptuel visant à expliquer les derniers mystères non résolus par la mécanique classique et l'électromagnétisme : le rayonnement du corps noir, la stabilité et le spectre des atomes, l'effet photoélectrique sont autant d'énigmes qui ont été résolues par la nouvelle théorie. Notre compréhension du monde microscopique a été révolutionnée par l'avènement de la mécanique quantique, ouvrant la voie à de vastes domaines d'application : du transistor au laser en passant par les nanotechnologies, la quasi-totalité des avancées technologiques modernes sont basées sur la mécanique quantique. La chimie moderne et la bio-chimie n'ont pu se développer que grâce à l'existence d'un socle solide permettant d'expliquer le phénomène des liaisons moléculaires. Si jusqu'à présent, aucune expérience n'a pu mettre en défaut cette théorie, elle a pourtant dérangé, et continue de heurter les plus grands esprits par son caractère contre-intuitif et profondément déroutant.

L'état quantique : un objet probabiliste Dans un célèbre article de 1935[1], Einstein, Podolsky et Rosen formulaient pour la première fois très clairement une attaque contre la théorie quantique. Il ne remettaient pas en cause l'*exactitude* de la théorie, mais posaient la question de sa *complétude*. En effet, contrairement à toutes les autres théories physiques, la mécanique quantique ne suppose pas que les valeurs des quantités mesurables préexistent à la mesure. Elle se contente d'associer à un objet une quantité mathématique $|\Psi\rangle$ appelé vecteur d'état. Cet objet mathématique ne permet pas de prédire de façon certaine le résultat de toute mesure mais donne une description *probabiliste* des résultats possibles. Les auteurs font appel à un état quantique délocalisé pour prouver par l'absurde que sous certaines hypothèses (localité), la théorie ne peut être complète. En effet, en faisant interagir deux particules pour un certain temps, on peut les préparer dans un état *intriqué*. Le destin des deux particules reste alors étroitement lié, même si ces dernières sont éloignées l'une de l'autre à des distances arbitrairement grandes. Le résultat d'une mesure effectuée sur la première particule, incertain par nature, est parfaitement corrélé au résultat de la mesure sur la seconde particule. Les auteurs concluent alors que puisque les particules ne peuvent plus interagir à cause de leur séparation spatiale, c'est que les résultats obtenus préexistaient à la mesure. Et de conclure que l'état $|\Psi\rangle$ n'est pas une description complète de la réalité physique des deux particules. Le débat est resté à un niveau purement abstrait et spéculatif jusque dans les années 1960 où John Bell [2] montre qu'une *théorie réaliste locale*, c'est à dire une théorie pour laquelle des « variables cachées » associées à chacune des particules expliqueraient les corrélations entre les résultats, ne peut pas reproduire les corrélations prédites par la

mécanique quantique. La violation des *inégalités de Bell* en 1982 dans une expérience d'Alain Aspect [3] tranche le débat en excluant toute théorie réaliste locale. La résolution expérimentale de cette controverse nous assure donc que le vecteur d'état $|\Psi\rangle$ est la description physique la plus complète du système : aussi étrange que cela puisse paraître, un seul objet mathématique décrit donc une réalité physique non-locale. Ainsi, on a prouvé que le caractère probabiliste des prédictions quantiques ne peut pas se ramener à la simple méconnaissance d'une réalité physique plus profonde.

Le problème de la mesure L'intrication est l'un des phénomènes les plus déroutants de la mécanique quantique. Lors d'une mesure, l'intrication du système avec l'appareil de mesure pose un profond problème d'interprétation de la mécanique quantique : comme nous venons de le voir, la mécanique quantique est par essence une théorie probabiliste. Plus précisément le résultat d'une mesure en mécanique quantique est décrit par une loi de probabilité. Imaginons par exemple un appareil de mesure dont le résultat est affiché à l'aide de la position d'une aiguille sur un cadran, notons $|\rightarrow\rangle$ la position neutre de l'aiguille. Lorsque le système quantique est dans un état $|\psi_1\rangle_S$, l'aiguille pointe dans une première direction, notée $|\uparrow\rangle$. Au contraire, si le système est dans un état $|\psi_2\rangle_S$ orthogonal au précédent, l'aiguille pointe dans une autre direction, notée $|\downarrow\rangle$. On peut alors tout à fait décrire l'interaction du système avec l'appareil de mesure sous forme d'une évolution unitaire :

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle_S \otimes |\rightarrow\rangle &\rightarrow |\psi_1\rangle_S \otimes |\uparrow\rangle \\ |\psi_2\rangle_S \otimes |\rightarrow\rangle &\rightarrow |\psi_2\rangle_S \otimes |\downarrow\rangle \end{aligned} \tag{1}$$

Si l'on tente à présent de mesurer une superposition de différents états propres $|\psi_i\rangle_S$, la transformation (1) mène alors à l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_1\rangle_S + |\psi_2\rangle_S\right] \otimes |\rightarrow\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|\psi_1\rangle_S \otimes |\uparrow\rangle + |\psi_2\rangle_S \otimes |\downarrow\rangle\right]. \tag{2}$$

A ce stade, on ressent un malaise car l'appareil de mesure lui-même est dans un état superposé qui ne correspond pas du tout à notre expérience quotidienne. En particulier on ne retrouve pas le postulat de projection, qui précise que l'aiguille devrait pointer dans l'une des directions $|\uparrow\rangle$ ou $|\downarrow\rangle$ avec probabilité $1/2$ tandis que le système est projeté dans l'état propre correspondant $|\psi_i\rangle_S$ après la mesure. Schrödinger [4] a lui même illustré ce paradoxe par une expérience de pensée encore plus choquante pour notre intuition classique.

Un chat est enfermé dans une boîte équipée d'un système diabolique basé sur une particule radioactive et un compteur Geiger. Un mécanisme est programmé pour libérer une quantité létale de poison lorsque le compteur détecte la désintégration de la particule. Après le temps de demi-vie de la particule, le système {*chat* + *particule*} peut s'écrire de façon analogue à l'état (2) :

$$|\psi\rangle = |\psi_{\text{vivant}}\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_{\text{mort}}\rangle \otimes |2\rangle, \tag{3}$$

où $|\psi_{\text{vivant}}\rangle$ représente la fonction d'onde du chat vivant et $|\psi_{\text{mort}}\rangle$ celle du chat mort, tandis que $|2\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent à l'état de la particule ayant subi ou non une désintégration radioactive. En

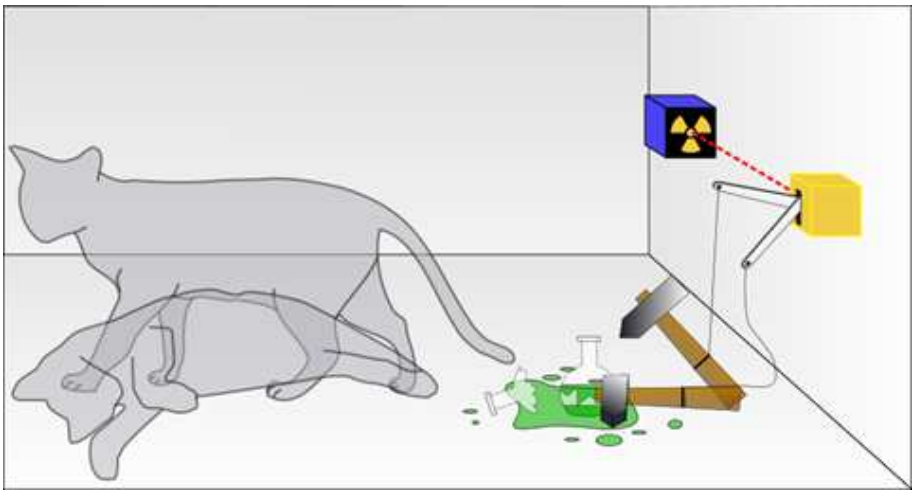


FIG. 1 – Vue d'artiste de l'expérience de pensée du chat de Schrödinger.

particulier, le chat se retrouve dans un état suspendu entre la vie et la mort (voir figure 1). Cette expérience est tellement paradoxale qu'elle amenait Schrödinger lui-même à douter de la réalité physique des objets décrits par la mécanique quantique : décrivant les conséquences auxquelles on aboutit en extrapolant les concepts de la mécanique quantique au monde macroscopique, il emploie ces mots : "One can even set up quite ridiculous cases"[1]. Ainsi, les pères fondateurs de la mécanique quantique eux-même estimaient que les appareils de mesure doivent être exclus de la description quantique.

Ceci n'est pas sans soulever de graves questions sur la signification profonde de la théorie quantique. L'interprétation de Copenhague de la mécanique quantique [5, 6] rejette ces questions en expliquant qu'on ne devrait pas donner de sens physique aux objets mathématiques utilisés pour prédire les résultats de mesure.

Reconstruction d'états quantiques Afin d'éclairer le problème de la mesure en mécanique quantique, nous allons tenter de préparer un système physique dans un état similaire à celui du chat de Schrödinger. Afin de caractériser l'état produit, nous *reconstruirons* expérimentalement l'état quantique du système. Le résultat d'une mesure étant par nature aléatoire, une seule mesure ne peut pas suffire à déterminer l'état $|\Psi\rangle$. De plus, à cause du postulat de projection, une mesure affecte irréversiblement le système mesuré. Ainsi, après une mesure de von Neumann d'une observable O, la valeur de O est parfaitement déterminée et le système ne livrera donc pas plus d'information sur l'observable. Cela montre qu'il faut impérativement disposer de plusieurs *copies* du système pour déterminer complètement son état. En fait, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de copies du système, non seulement pour mesurer la variabilité statistique des résultats de mesure d'une observable donnée, mais également pour mesurer différentes observables sur le système. Pour espérer reconstruire un état quantique, on doit donc disposer d'un système physique permettant de préparer répétitivement un état quantique et de mesurer un grand

[1] Des situations assez ridicules peuvent même être engendrées.

nombre d'observables *incompatibles* entre elles sur le système.

Les progrès récents de la physique expérimentale ont permis de réaliser de telles reconstructions dans un certain nombre de systèmes physiques. L'utilisation de champs électriques oscillants permet de confiner des particules chargées au dessus d'un jeu d'électrodes. On peut alors à la fois manipuler l'état interne et l'état vibrationnel des ions ainsi piégés. Des faisceaux lasers focalisés permettent d'adresser un seul des ions piégés dans une chaîne contenant quelques ions. Plusieurs groupes dans le monde ont pu reconstruire à la fois l'état vibrationnel [7] d'un ion piégé dans le potentiel confinant ainsi que l'état du *registre quantique* formé par l'état interne d'une chaîne d'ions [8]. Ce système est très prometteur dans la perspective de l'information quantique [9, 10, 11, 12]. En effet, chaque ion forme un *quBit* dont l'état interne permet de stocker une combinaison arbitraire de deux états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ avec un temps de cohérence extrêmement long, tandis que le degré de liberté de vibration forme une sorte de *bus quantique* permettant d'effectuer des opérations entre les différents ions du piège[13].

Les progrès dans le domaine de l'optique quantique ont également permis récemment de préparer des faisceaux lumineux se propageant dans l'espace libre dans des états fortement nonclassiques [14, 15, 16]. La lumière d'un faisceau Laser impulsionnel a même été préparée dans un état similaire à celui de l'expérience de pensée du chat de Schrödinger dans le groupe de Philippe Grangier [17]. L'état quantique du faisceau propageant peut être reconstruit en mesurant par détection homodyne différentes *quadratures* du champ. La connaissance de ces observables incompatibles entre elles permet de remonter à l'état quantique du champ [18]. Ces états *non-gaussiens* sont extrêmement prometteurs en cryptographie quantique où ils pourraient être utilisés pour transmettre l'intrication à travers des fibres optiques, rendant ainsi possible la cryptographie quantique à longue distance [19].

Piéger la lumière pour mieux l'étudier L'électrodynamique quantique en cavité est un formidable outil pour réaliser les expériences de pensée qui ont éclairé les débuts de la mécanique quantique. A l'aide d'un dispositif expérimental complexe, on arrive à manipuler deux systèmes physiques très simples et parfaitement contrôlés pour mettre en évidence les phénomènes les plus fondamentaux de la mécanique quantique. Les matériaux supraconducteurs à basse température sont extrêmement réfléchissants pour la micro-onde. L'utilisation de miroirs supraconducteurs permet ainsi de réaliser des résonateurs micro-onde de très grand facteur de qualité, on parvient alors à piéger la lumière pour des temps extrêmement longs [20]. Le champ interagit avec des atomes excités dans les états de Rydberg circulaires. Ces états très stables malgré leurs nombres quantiques élevés permettent de former un système à deux niveaux. L'extrême sensibilité au champ micro-onde des atomes de Rydberg permet de raccourcir la durée de l'interaction. On parle alors de régime de couplage fort : pour une interaction résonnante, l'atome et le champ ont le temps d'échanger de façon cohérente un quantum d'énergie de nombreuses fois avant que l'un des deux systèmes ne relaxe. Ce régime permet de sonder les propriétés quantique du champ piégé.

Notre montage expérimental permet d'envoyer un à un les atomes de Rydberg à l'intérieur de la cavité désaccordée. A cause du désaccord entre la cavité et la transition atomique, il n'y a pas d'échange d'énergie entre les deux systèmes. Toutefois, les photons piégés dans la cavité

modifient la fréquence atomique grâce au phénomène de déplacement lumineux. On détecte alors le déphasage accumulé pendant l'interaction à l'aide d'un interféromètre de Ramsey. On peut ainsi remonter au nombre de photons contenus dans la cavité. Cette technique permet alors de compter le nombre de photons piégés. Nous avons pu démontrer la mesure non-destructive du nombre de photons piégés pour les nombres de photons compris entre 0 et 7. Nous avons ainsi pu observer pour la première fois des sauts quantiques de la lumière. Finalement, en adaptant la procédure pour mesurer d'autres observables que le nombre de photons, il devient possible de reconstruire complètement l'état du champ piégé. On a ainsi inversé le point de vue adopté par beaucoup d'autres expérimentateurs [21, 22, 23, 24] qui consiste à utiliser des photons pour manipuler un système matériel. Dans notre cas, le champ est le système piégé et les atomes sont utilisés pour l'interroger et le manipuler.

De façon parallèle, la physique des circuits supraconducteurs a connu un développement extrêmement rapide ces dernières années, permettant d'atteindre un régime où les propriétés quantiques du circuit peuvent être manipulées et contrôlées avec un grand degré de précision. Les jonctions Josephson, sortes d'inductances non-linéaires, sont à la base d'un nouveau type de quBit. Un atome artificiel assimilable à un système à deux niveaux peut être couplé à un résonateur micro-onde formé d'une ligne coaxiale. Le quBit et le résonateur peuvent être couplés capacitivement afin de contrôler et de mesurer l'état de ce dernier. Le système ainsi obtenu est une autre implémentation des concepts de l'électrodynamique quantique en cavité. Ce système a déjà permis de préparer et de reconstruire des états non-classiques du résonateur [25]. L'intégrabilité de ce système en fait un bon candidat pour d'éventuelles applications au calcul quantique[26, 27, 28]. Toutefois, pour atteindre le seuil de mise en oeuvre des codes correcteurs d'erreurs, une formidable amélioration de la fidélité des opérations entre le résonateur et le quBit est nécessaire. C'est seulement dans ce cas que le calcul quantique deviendrait une alternative crédible face au calcul classique.

La frontière entre les mondes quantique et classique Le postulat de projection repose sur le fait que les objets macroscopiques tels que les appareils de mesure ne peuvent se trouver dans une superposition d'états telle que (3). Se pose alors la question de savoir à partir de quelle *taille* les objets franchissent la frontière séparant le « monde quantique » du « monde classique ». Le phénomène responsable de cette transition, connu sous le nom de *décohérence*, est un processus continu, transformant peu à peu les superpositions quantiques en états classiques. Le phénomène s'explique par la fuite progressive d'information du système vers son environnement. Pour les gros objets fortement couplés à leur environnement, le processus est quasiment instantané, cantonnant l'observation de superpositions quantiques au monde microscopique. Notre dispositif expérimental permet de réaliser des mesures sur des objets de taille intermédiaire, présentant les caractéristiques d'un pointeur classique mais suffisamment petits pour survivre à la décohérence pendant un temps appréciable. En particulier, nous avons pu préparer un état du type chat de Schrödinger, où la phase du champ joue le même rôle que la direction d'un indicateur classique. On peut donc sonder grâce à notre dispositif, l'évolution non-unitaire responsable de la projection progressive de l'état quantique lors d'une mesure. En reconstruisant l'état quantique de notre « appareil de mesure modèle » pour différents délais après sa préparation, on visualise

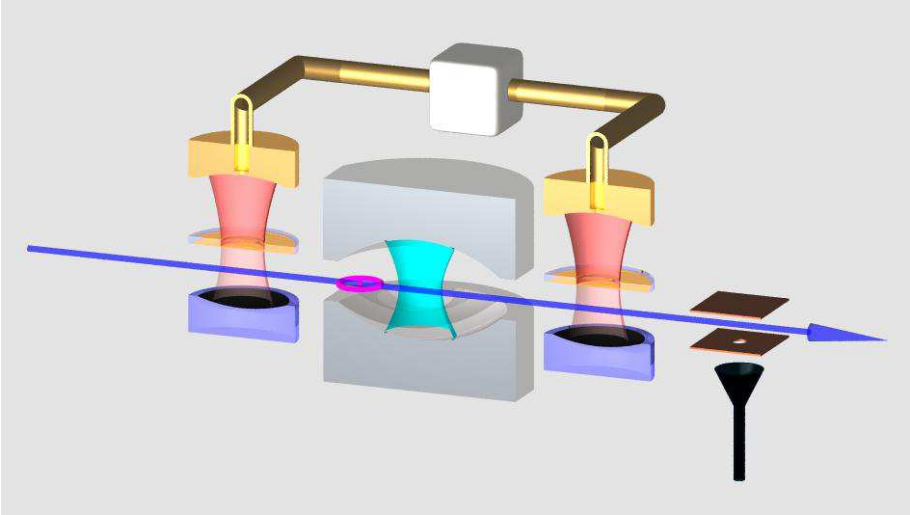


FIG. 2 – Schéma de principe de nos expériences d'électrodynamique quantique en cavité. La cavité de grande finesse est insérée dans un interféromètre de Ramsey formé de deux cavités de faible facteur de qualité. Les atomes de Rydberg traversent un à un l'interféromètre avant d'être détectés par ionisation.

en quelque sorte la transition d'un chat de Schrödinger de l'état « vivant et mort » vers l'état classique « vivant ou mort ».

Expériences présentées dans ce mémoire Les expériences présentées dans ce mémoire n'auraient jamais été possibles sans le travail considérable de Sébastien Gleyzes, Stefan Kuhr, Christine Guerlin et Julien Bernu qui ont rebâti presque intégralement le coeur du dispositif expérimental. Les deux avancées majeures ont été premièrement, la construction d'un nouvel interféromètre de Ramsey (voir figure 2) améliorant grandement la qualité des mesures, et deuxièmement, le développement d'une nouvelle génération de cavités ouvertes compatibles avec les nouvelles contraintes interférométriques. Les nouveaux miroirs sont constitués d'un substrat en cuivre usiné au diamant à l'échelle optique. La grande qualité de surface a permis d'atteindre une finesse record de $4{,}6 \cdot 10^9$ correspondant à un temps de vie moyen macroscopique des photons dans le mode : $0,13$ s ! Un tel temps de vie permet de stocker les états du champ pendant un temps appréciable, et de faire interagir plusieurs atomes successivement avec le champ.

Par le passé, Gilles Nogues [29] avait déjà pu mesurer non-destructivement la présence d'un photon piégé dans la cavité, toutefois, le temps de vie n'excédant pas 1 ms, ne permettait pas de répéter cette mesure plus de trois fois. De plus, la méthode utilisée à l'époque était intrinsèquement limitée à la mesure de photons uniques. La possibilité de faire interagir des centaines d'atomes successivement avec le champ piégé permet à présent de mesurer des nombres de photons élevés et ainsi de préparer divers états de Fock dans la cavité [30]. En répétant la mesure de nombreuses fois, on peut tester le caractère non-destructif de la mesure et observer les sauts quantiques de la lumière entre les différents états de Fock [30, 31]. L'étude statistique de ces trajectoires quantiques individuelles a permis de mesurer les temps de vie des différents états

nombre dans la cavité [32].

En répétant la mesure de nombreuses fois, on peut geler l'évolution cohérente induite normalement par le couplage de la cavité à une source micro-onde classique. Cet effet, baptisé « effet Zénon Quantique » en 1977 par Misra et Sudarshan [33] est une conséquence de la nécessaire *action en retour* de toute mesure en mécanique quantique. Il a déjà été observé dans des systèmes formés de deux niveaux [34, 35, 36, 37, 38, 39, 40], où il se manifeste par le bloquage d'un échange cohérent du type oscillation de Rabi. mais rarement [41] dans un système non-borné comme un mode du champ électromagnétique [42]. Ces résultats ont été décrits en détail dans la thèse de Julien Bernu [43] et je ne les traiterai donc pas dans ce mémoire.

L'interaction d'un atome avec le mode de la cavité permet de préparer le champ dans une superposition de deux états quasi-classiques de phases différentes. Cet état est tout à fait analogue à l'aiguille d'un appareil de mesure classique pointant simultanément dans deux directions différentes. Dans une mesure quantique, c'est cet état extrêmement sensible à la décohérence qui se transforme rapidement en un état classique, provoquant la projection du système mesuré. La décohérence d'un tel état a pu être observée en 1996[44] en étudiant la décroissance des corrélations entre le premier atome et un second atome chargé de mesurer la cohérence de la superposition préparée. Grâce au temps de vie exceptionnelle des cavités actuelles, nous sommes capable de reconstruire complètement le champ piégé après le passage du premier atome. En répétant la reconstruction pour différents délais après la préparation, on peut observer la transformation progressive de la superposition quantique en un état purement classique.

Dans une première partie, nous définirons précisément le concept d'état quantique et nous montrerons sur de nombreux exemples comment on peut commodément le représenter dans le cas d'un mode du champ électromagnétique. Nous introduirons également le formalisme permettant de décrire les différents types de mesures que l'on peut réaliser sur un système quantique, et notamment le formalisme de la mesure généralisée. Ce formalisme très général nous sera utile tout au long du manuscrit pour décrire l'effet des atomes sur le champ, mais également pour comprendre l'effet de la décohérence qui transforme progressivement les états purs en mélanges statistiques. Nous donnerons ensuite plusieurs stratégies générales permettant de reconstruire l'état du champ à partir d'un ensemble de mesures quantiques. Enfin, nous rappellerons l'analogie entre un atome à deux niveaux et un système de spin $1/2$, et en particulier le formalisme de la sphère de Bloch permettant de décrire visuellement toute opération unitaire sur un système de dimension deux. Nous appliquerons ce formalisme à l'interférométrie de Ramsey qui est à la base de toutes nos mesures du champ piégé.

Le second chapitre sera consacré à l'étude du système expérimental. Nous montrerons comment, au prix d'une grande complexité expérimentale, on peut avoir un contrôle quasi-total des deux systèmes mis en jeux. Nous discuterons également les raisons qui ont amené à utiliser précisément les atomes de Rydberg circulaires et les cavités micro-ondes choisis dans le montage actuel.

Dans une troisième partie, nous aborderons le phénomène de déplacement lumineux utilisé pour extraire de l'information sur le champ à l'aide des atomes. Nous reprendrons ensuite le formalisme de la mesure généralisée pour décrire précisément le processus de mesure du champ par les atomes. Je présenterai alors brièvement les résultats obtenus sur les sauts quantiques de la lumière et la décroissance du nombre de photons piégés.

La quatrième partie sera consacrée à la reconstruction complète d'états non-classiques du champ. Je montrerai comment on parvient à préparer un état similaire à celui du chat de l'expérience de pensée de Schrödinger. Nous utiliserons ensuite cet exemple pour mettre en oeuvre les techniques de reconstruction présentées dans le premier chapitre. Nous montrerons qu'on peut améliorer significativement la reconstruction en adoptant une stratégie différente de celle qui a été utilisée lors de la série d'expériences décrite dans ce manuscrit.

Finalement, nous étudierons la décohérence de l'état chat de Schrödinger d'un point de vue théorique avant de présenter un film expérimental de l'évolution de l'état sous l'effet de la décohérence.

Chapitre I

Description théorique du système atome-champ

I.1 Description quantique d'un mode du champ électromagnétique

Notre système expérimental prend le contre-pied de la plupart des expériences d'optique quantique. En effet, plutôt que de piéger des atomes et de les étudier grâce à des faisceaux lumineux, nous sommes parvenus à piéger un champ lumineux suffisamment longtemps pour pouvoir le manipuler et l'interroger à l'aide d'un faisceau d'atomes. Nous accédons ainsi à un système d'étude beaucoup plus riche que celui de l'atome à deux niveaux. En effet, un mode du champ lumineux est formellement analogue à un oscillateur harmonique, il présente une infinité de niveaux énergétiques équidistants et peut être préparé dans une grande variété d'états quantiques. Cette thèse porte sur la reconstruction complète de différents états quantiques du champ piégé. L'état quantique d'un système est un concept statistique et par conséquent, ne peut être reconstruit qu'en réalisant un grand nombre de mesures quantiques à l'aide d'un ensemble de copies du système. Dans ce chapitre, nous allons d'abord nous concentrer sur la description quantique d'un mode isolé du champ électromagnétique. Dans un premier temps, nous rappellerons brièvement le formalisme du champ quantifié, puis nous expliciterons le concept d'état quantique d'un système, ainsi que ses différentes représentations mathématiques. Nous verrons ensuite le formalisme permettant de décrire la mesure sur un système quantique et nous étudierons différentes techniques pour reconstruire l'état quantique d'un système à l'aide d'un grand nombre de mesures quantiques. Finalement, nous introduirons la description quantique d'un atome à deux niveaux et son couplage au champ par le Hamiltonien de Jaynes-Cummings.

I.1.1 Le champ quantifié

La description quantique du champ électromagnétique repose sur la décomposition du rayonnement classique sous forme de modes. La dynamique de chaque mode est celle d'un oscillateur harmonique. Dans une description classique, le champ électrique pour un mode du champ est

donné en tout point $\mathbf{r}$ et en tout instant t par :

$$E(r,t) = \mathcal{E}_0 f(\mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon}\alpha(t) + \boldsymbol{\epsilon}^*\alpha^*(t)). \tag{I.1}$$

$f(\mathbf{r})$ est une fonction complexe définissant le profil spatial du mode. Par convention, $f(\mathbf{r})$ sera normalisée de façon à ce que sa valeur maximum soit de norme unité. Le vecteur unitaire complexe $\boldsymbol{\epsilon}$ décrit la polarisation du mode. Le préfacteur $\mathcal{E}_0$ est homogène à un champ électrique et n'a pas de signification physique à ce stade puisqu'il est redondant avec la normalisation de α. La dynamique se résume à la rotation dans le plan complexe de l'amplitude complexe α à la pulsation ω du mode :

$$\alpha(t) = \alpha(0)e^{-i\omega t}. \tag{I.2}$$

On définit alors les quadratures X et P, analogues aux positions et impulsions (adimensionnées) d'un oscillateur mécanique :

$$X = \mathrm{Re}(\alpha) = \frac{\alpha + \alpha^*}{2} \tag{I.3}$$

et

$$P = \mathrm{Im}(\alpha) = \frac{\alpha - \alpha^*}{2}. \tag{I.4}$$

Afin de quantifier un tel système, on remplace ces variables de quadrature par des opérateurs obéissant aux mêmes relations de commutation que les observables position et impulsion d'une particule :

$$[X, P] = i, \tag{I.5}$$

et dont l'évolution est régie par un hamiltonien analogue à celui d'un oscillateur harmonique :

$$H = \hbar\omega[P^2 + X^2]. \tag{I.6}$$

Il est alors commode d'introduire l'opérateur non-hermitien $a = X + iP$ et son hermitien conjugué $a^\dagger$ vérifiant la relation de commutation :

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}. \tag{I.7}$$

Le champ électrique en n'importe quel point est devenu une observable qui s'écrit alors :

$$E(r) = \mathcal{E}_0 f(\mathbf{r})(\boldsymbol{\epsilon}a + \boldsymbol{\epsilon}^* a^\dagger). \tag{I.8}$$

Le hamiltonien quant à lui peut se réécrire :

$$H = \hbar\omega[a^\dagger a + 1/2]. \tag{I.9}$$

Il est alors aisé de démontrer à l'aide des relations de commutation entre a et $a^\dagger$ que l'opérateur $N = a^\dagger a$ a pour spectre l'ensemble des entiers naturels. L'état fondamental du hamiltonien ou encore état vide $|0\rangle$ a donc une énergie non nulle $\hbar\omega/2$ correspondant aux fluctuations du vide. Les états d'énergie supérieure sont séparés d'une énergie fixe $\hbar\omega$ et s'obtiennent par action répétée de l'opérateur de création $a^\dagger$:

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle. \tag{I.10}$$

Ces états sont appelés états nombres ou états de Fock.

Dans cette version quantifiée du champ électromagnétique, la valeur de $\mathcal{E}_0$ doit être précisée, puisqu'elle définit la valeur du champ électrique correspondant à un photon. On définit le volume V du mode par :

$$V = \int |f(r)|^2 \mathrm{d}^3 r. \tag{I.11}$$

L'énergie associée aux fluctuations de champ électromagnétique dans un état de Fock $|n\rangle$ est alors donnée par[1] :

$$E_0 = \int \epsilon_0 \langle E^2 \rangle = V \langle n | \epsilon_0 \mathcal{E}_0^2 a a^\dagger + a^\dagger a | n \rangle = \epsilon_0 V (2n+1) \mathcal{E}_0^2. \tag{I.12}$$

$\mathcal{E}_0$ s'obtient en écrivant l'égalité entre l'énergie du vide $\hbar\omega/2$ et l'énergie électromagnétique contenue dans le champ d'un demi photon calculée ci-dessus :

$$\frac{1}{2}\hbar\omega = \epsilon_0 V \mathcal{E}_0^2. \tag{I.13}$$

On obtient donc

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V}}. \tag{I.14}$$

Les états nombres définis ci-dessus sont des objets mathématiques fondamentaux puisqu'ils sont les états propres du Hamiltonien. Cependant, il correspondent à des états très étranges et non-classiques du champ. En effet, l'état de Fock étant un état stationnaire, on ne peut pas s'attendre à ce que le champ électrique reste concentré autour d'une valeur moyenne oscillant à la fréquence de résonance. Au contraire, le champ n'a pas une phase déterminée dans un état de Fock et le champ électrique, bien que présentant une valeur moyenne nulle, a une variance croissante avec le nombre de photons. Afin de retrouver des objets ayant des comportements classiques à la limite des grands nombres de quanta, on doit construire des états particuliers appelés états cohérents, formés d'une superposition de différents états de Fock. Ces états s'obtiennent à partir du vide par application d'un opérateur appelé opérateur déplacement.

I.1.1.a Opérateur déplacement et états cohérents

L'opérateur déplacement est défini par la formule :

$$D(\lambda) = e^{\left(\lambda a^\dagger - \lambda^* a\right)}. \tag{I.15}$$

Le paramètre λ est un nombre complexe quelconque décrivant l'amplitude complexe du déplacement. $D(\lambda)$ est un opérateur unitaire qui décrit l'évolution du champ piégé sous l'effet du couplage à une source classique résonnante dont la phase et l'amplitude définissent l'amplitude complexe λ.

[1] L'énergie totale est la somme des énergies électrique et magnétique $E_0 = \int \frac{\epsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle$ ou encore le double de l'énergie électrique puisque l'énergie est équirépartie.

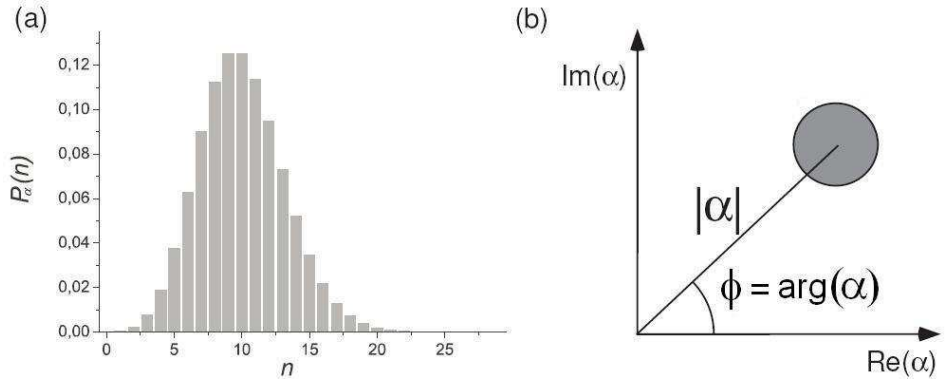


FIG. I.1 – (a) Population des différents nombres de photons dans un état cohérent $|\beta\rangle$ contenant 10 photons en moyenne ($\beta = \sqrt{10}$). (b) représentation du champ cohérent dans l'espace des phases : l'incertitude sur l'amplitude complexe α est représentée par le cercle grisé.

L'action de l'opérateur $D(\alpha)$ sur l'état vide $|0\rangle$ est appelé champ cohérent, noté $|\alpha\rangle$. Il satisfait la propriété :

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{I.16}$$

On montre aisément que le vecteur d'état du champ cohérent s'écrit :

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{I.17}$$

La figure I.1.1.a montre la population des différents états nombres dans le champ cohérent défini par la formule (I.17). Il s'agit d'une loi de Poisson. A la limite des grandes amplitudes β, le champ cohérent devient un objet classique : l'incertitude sur le nombre de photons, donc sur l'énergie, devient négligeable devant l'énergie moyenne. Plus généralement les fluctuations de la phase et de l'amplitude du champ deviennent négligeables devant leurs valeurs moyennes.

L'ensemble des $|\alpha\rangle$ forme une base continue (non-orthogonale) de l'espace des états :

$$\frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}^2\alpha|\alpha\rangle\langle\alpha| = \mathbb{1}. \tag{I.18}$$

D'après la forme (I.9) du Hamiltonien, l'évolution du champ cohérent après un intervalle de temps t est donnée par :

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &\rightarrow e^{-i\omega t/2}e^{-|\alpha|^2/2}\sum_n e^{-i\omega nt}\frac{(\alpha)^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \\ &= e^{-i\omega t/2}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle. \end{aligned} \tag{I.19}$$

Les états cohérents étant une base de l'espace des états, l'évolution *libre* de tout état du champ se résume donc simplement à une rotation dans l'espace des phases. En particulier, après une période, le champ se retrouve dans son état initial.

I.1.2 État quantique d'un système

L'état quantique d'un système est un objet mathématique qui contient toute l'information dont on dispose sur le système. En particulier, il permet de calculer les probabilités de résultat pour n'importe quelle mesure effectuée sur le système. Les résultats d'une mesure sur un système quantique sont incertains par nature. Cependant, on peut distinguer deux sources expliquant la dispersion des mesures effectuées sur des copies successives du système : lorsque le système est préparé systématiquement dans le même vecteur d'état (préparation complète), la dispersion des résultats n'est due qu'au caractère quantique de l'état, et on peut décrire les différentes probabilités de résultats à l'aide du vecteur d'état. En pratique, il est souvent difficile de travailler dans un régime où la seule source de dispersion est le caractère quantique de l'état, le système est en général préparé dans différents vecteurs d'état selon une loi statistique. On parle alors de « mélange statistique ». Cette fois, les sources de dispersions sont à la fois quantiques et classiques. Afin de pouvoir tout de même faire des prédictions quantitatives dans ce cas, on introduit un nouvel outil formel : l'opérateur densité.

I.1.2.a États purs et mélanges statistiques

Un état pur est décrit mathématiquement par la donnée de son vecteur d'état $|\psi\rangle$. Dans le cas d'un mode du champ électromagnétique, on choisira généralement comme base pour écrire le vecteur d'état, la base des états nombres :

$$|\psi\rangle = \sum_{i\in N} C_i|i\rangle, \tag{I.20}$$

avec

$$C_i = \langle i|\psi\rangle. \tag{I.21}$$

La valeur moyenne d'une observable O dans l'état $|\psi\rangle$ est donnée par :

$$\langle O\rangle = \langle\psi|O|\psi\rangle. \tag{I.22}$$

Un mélange statistique, quant à lui, est l'état obtenu lorsque le système est préparé de façon probabiliste dans l'un des vecteurs d'état accessibles. Si l'on note p_i la probabilité que le système soit préparé dans le vecteur d'état $|\psi_i\rangle$, alors, la valeur moyenne de l'observable O est donnée par :

$$\langle O\rangle = \sum_i p_i\langle\psi_i|O|\psi_i\rangle. \tag{I.23}$$

I.1.2.b L'opérateur densité

Afin de décrire de façon commode à l'aide d'un seul objet mathématique l'état du système dans un mélange statistique et dans un cas pur, on introduit l'opérateur densité ρ qui est un opérateur de l'espace des vecteurs d'état vers l'espace des vecteurs d'état. Pour un état pur $|\psi\rangle$, ρ est définie comme le projecteur orthogonal sur $|\psi\rangle$:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \tag{I.24}$$

La valeur moyenne d'une observable O s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\langle O\rangle &= \mathrm{Tr}(O\rho) \\ &= \mathrm{Tr}(O|\psi\rangle\langle\psi|)\end{aligned} \tag{I.25}$$

On voit immédiatement que cette définition coïncide avec (I.22) en considérant la trace dans une base orthonormée contenant le vecteur $|\psi\rangle$.

Dans le cas d'un mélange statistique contenant les différents vecteurs d'état $|\psi_i\rangle$ avec les poids p_i, l'opérateur densité ρ est par définition :

$$\rho = \sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{I.26}$$

La formule (I.25) est également valide dans le cas d'un mélange statistique par linéarité de la trace. Ce dernier point montre que l'opérateur densité est un objet mathématique suffisant pour calculer les valeurs moyennes de toutes les observables (ainsi que tous leurs moments d'ordre plus élevé). L'opérateur densité est donc une représentation mathématique complète de l'état quantique d'un système.

Contraintes sur l'opérateur densité Un opérateur densité satisfait nécessairement les trois conditions suivantes :

1. C'est un opérateur de trace unité. D'après l'expression générale d'un opérateur densité (I.26), on peut calculer la trace d'un opérateur densité quelconque :

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_i p_i = 1. \tag{I.27}$$

   En effet, les p_i s'interprétant comme des probabilités de préparation suivant l'un des $|\psi_i\rangle$, leur somme doit être égale à 1.

2. L'opérateur densité est hermitien. Toujours d'après la formule (I.26),

$$\rho^\dagger = \sum p_i^*|\psi_i\rangle\langle\psi_i| = \rho. \tag{I.28}$$

   En effet, les p_i sont des nombres réels d'après leur interprétation en terme de probabilité.

3. L'opérateur densité est positif : cela signifie que toutes ses valeurs propres doivent être positives. Cette propriété est évidente lorsque les différentes composantes du mélange $|\psi_i\rangle$ sont orthogonales, ρ est alors diagonale dans toute base orthonormée contenant les vecteurs $|\psi_i\rangle$, et ses valeurs propres sont les probabilités p_i, qui sont bien sûr positives. Dans le cas général où l'on considère un mélange d'états non-orthogonaux, considérons, un vecteur propre $|\chi\rangle$ de valeur propre α de ρ. L'action de ρ sur le projecteur $|\chi\rangle\langle\chi|$ est alors :

$$\sum_i p_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i|\chi\rangle\langle\chi| = \alpha|\chi\rangle\langle\chi|. \tag{I.29}$$

En prenant la trace de cette égalité, on obtient immédiatement :

$$\sum_i p_i \left|\langle\chi|\psi_i\rangle\right|^2 = \alpha. \tag{I.30}$$

α est donc un nombre réel positif car il est la somme de nombres réels positifs.

Réciproquement, ces conditions sont évidemment suffisantes, car un opérateur vérifiant ces trois conditions est diagonalisable, et on peut alors interpréter l'état comme le mélange des différents vecteurs propres.

I.1.2.c Entropie d'un système

Entropie en théorie de l'information En théorie de l'information, l'entropie de Shannon associée à une variable aléatoire permet de mesurer l'information délivrée par la donnée du résultat de chaque tirage de la variable. Par exemple, connaissant la fréquence p_i relative des 26 lettres de l'alphabet dans une langue donnée, on peut calculer de la façon suivante l'entropie de Shannon correspondant au nombre de bits d'information contenu en moyenne dans chaque lettre d'un message :

$$H = -\sum_{i=1}^{26} p_i \log p_i. \tag{I.31}$$

La distribution de probabilité qui maximise l'entropie est bien sûr la distribution uniforme. Ce résultat très intuitif signifie que l'incertitude est la plus grande si toutes les valeurs de la variable aléatoire ont les mêmes probabilités de sortir. Dans ce cas, l'entropie de Shannon vaut $-\log_2(\frac{1}{26}) = 4{,}70$ bits.

Compte tenu des fréquences des différentes lettres en anglais par exemple, l'entropie associée à un monogramme dans la langue anglaise ne vaut que 4,14 bits. Cette valeur ne représente la quantité d'information apportée par chaque lettre que si l'on considère les lettres successives comme ayant des lois de probabilité indépendantes. Cette hypothèse est évidemment fausse (la lettre q est généralement suivi par la lettre u par exemple), ce qui tend à réduire encore la quantité d'information apportée par chaque caractère en augmentant la redondance du codage. Le lecteur intéressé pourra consulter l'article fondateur de Shannon [45].

Entropie d'un état quantique De même, pour décrire le « degré de pureté » d'un mélange statistique, on utilise une variable S appelée entropie de von Neumann. Pour un système quantique décrit par l'opérateur densité ρ, elle est définie par :

$$S = -\mathrm{Tr}\left(\rho \ln \rho\right). \tag{I.32}$$

Lorsque le système est dans un état pur, sa matrice densité est un projecteur orthogonal sur cet état, et le logarithme dans la trace s'annule. L'entropie d'un état pur est donc nulle.

Quand la matrice densité possède plusieurs vecteurs propres de valeurs propres non-nulles, elle décrit un mélange statistique. L'opérateur densité étant hermitien, il peut être diagonalisé

dans une base orthonormée. Notons $|\psi_i\rangle$ le i$^{\text{e}}$ vecteur propre de valeur propre non nulle (notée p_i) dans cette décomposition. On peut écrire :

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{I.33}$$

L'entropie est alors donnée par :

$$\begin{aligned} S &= -\mathrm{Tr}\left(\rho \ln\left(\sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right)\right) \\ &= -\mathrm{Tr}\left(\rho \sum_i \ln(p_i)\, |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\right) \\ &= -\sum_i p_i \ln p_i. \end{aligned} \tag{I.34}$$

On reconnaît l'entropie de Shannon associée à une variable aléatoire de loi p_i. Ainsi, plus la préparation de l'état suivant l'une des possibilités $|\psi_i\rangle$ est incertaine, plus l'entropie de Von Neumann est grande.

L'entropie satisfait les deux propriétés :

1. *Concavité* : On peut démontrer que l'entropie est une fonction concave de ρ : c'est à dire que pour un ensemble de valeurs λ_i positives :

$$S\left(\sum_i \lambda_i \rho_i\right) \geq \sum_i \lambda_i S(\rho_i). \tag{I.35}$$

2. *Bornes* : L'entropie $S(\rho)$ est positive et ne s'annule que lorsque ρ est un état pur. De plus, si on note N la dimension de l'espace, l'entropie maximale vaut $\ln(N)$, et elle est atteinte pour un état maximalement mélangé.

I.1.2.d Ambiguïté des mélanges statistiques

Comme nous l'avons vu au I.1.2.b, la matrice densité d'un système représente complètement l'état quantique de ce dernier. En d'autres termes, la matrice densité permet de décrire le mieux possible, compte tenu de la préparation du système, les probabilités de résultats correspondant à la mesure de n'importe quelle observable. Nous allons voir cependant que l'interprétation d'une même matrice densité en terme de préparation du système peut être extrêmement ambiguë.

Ambiguïté des composantes du mélanges Un mélange statistique décrit par une décomposition en une somme de projecteurs :

$$\rho = \sum_{i=0}^{N} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{I.36}$$

peut être vu comme l'état résultant du processus de préparation suivant.

1. tirer d'une variable aléatoire X de loi p_i sur [1..N]
2. préparation du système dans l'état pur $|\psi_i\rangle$ où i est le résultat de la variable aléatoire.

Cependant, la décomposition de ρ suivant une somme de projecteurs n'est pas unique. Il en découle donc que plusieurs processus tels que celui décrit ci-dessus mènent au même résultat physique.

- *Valeurs propres dégénérées* Comme nous l'avons vu précédemment, une base privilégiée dans laquelle considérer la matrice densité est une base propre dans laquelle cette dernière est diagonale. La matrice s'écrit alors comme une somme de projecteurs sur des états orthogonaux. Déjà à ce stade, on peut noter que si la matrice possède des valeurs propres dégénérées, il existe une infinité de bases de diagonalisation.
- *Mélanges d'états non-orthogonaux* Si à présent, on n'exige pas que les différents vecteurs d'état $|\psi_i\rangle$ du mélange soient orthogonaux entre eux, la situation devient beaucoup plus complexe. En effet, dés que la matrice densité n'est pas un projecteur sur un vecteur d'état, il existe une infinité de décompositions de la forme :

$$\rho = \sum_{i=0}^{N} p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|. \tag{I.37}$$

  De plus, le nombre de composantes du mélange N n'est plus limité comme précédemment aux nombres de valeurs propres non-nulles de la matrice densité. En particulier, les composantes du mélange peuvent être plus nombreuses que la dimension de l'espace.

Purification Nous allons ici introduire une dernière méthode de préparation d'un mélange statistique ne faisant pas appel à un processus aléatoire, mais à un système auxiliaire B intriqué avec le système principal A. Afin de produire l'état décrit par la matrice densité :

$$\rho_A = \sum_{i=1}^{N} p_i |\Psi_{\text{a.}}\rangle_i\langle\psi_A|_i, \tag{I.38}$$

le système auxiliaire B devra avoir une dimension supérieure[2] à N. Nous pouvons alors définir N états de référence orthogonaux $|\psi_B\rangle_i$ dans B. Pour produire l'état décrit par ρ_A, il suffit alors de générer à l'aide d'une opération unitaire dans le système total AB l'état pur :

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^{N} p_i |\Psi_{\text{a.}}\rangle_i \otimes |\psi_B\rangle_i. \tag{I.39}$$

Nous pouvons maintenant très facilement montrer que le sous-système restreint à A est décrit par la matrice densité ρ_A. Notons qu'une fois intriqués par l'opération unitaire précédente, les deux systèmes A et B peuvent être éloignés l'un de l'autre à une distance arbitrairement grande

[2]En particulier, l'écriture diagonale de la matrice densité permet de réaliser une purification à l'aide d'un espace de même dimension que A.

sans perdre leurs corrélations. Si à présent, un opérateur (Bob) effectue sur B la mesure d'une observable O du type :

$$O = \sum_i i|\psi_B\rangle_i\langle\psi_B|_i. \tag{I.40}$$

Le résultat de cette mesure lui donne sans ambiguïté le numéro de l'état de référence dans lequel se trouve le sous-système B. La probabilité du résultat i vaut p_i et le système global $A \cdot B$ est immédiatement projeté dans l'état séparable $|\Psi_{\text{a.}}\rangle_i \otimes |\psi_B\rangle_i$. Si le résultat de la mesure n'est pas communiqué à l'opérateur du système A (Alice), elle doit décrire l'état de son système comme le mélange statistique des $|\Psi_{\text{a.}}\rangle_i$ avec les probabilités p_i. C'est-à-dire, avec la matrice densité ρ_A. En pratique, on a remplacé le générateur aléatoire des paragraphes précédents par le résultat de la mesure quantique de O, qui est aléatoire par nature. Cependant, si on pousse le raisonnement un peu plus avant, on notera que la mesure de l'observable O par Bob n'est pas nécessaire. En effet, la description physique du système A par Alice n'a pas pu changer au cours de la mesure de Bob, sinon, cela signifierait que Bob, en choisissant de mesurer ou pas l'observable O, pourrait faire parvenir de l'information à Alice plus vite que la vitesse de la lumière. Ainsi, la bonne description par Alice du sous-système A lorsque $A \cdot B$ est dans l'état intriqué $|\psi_{AB}\rangle$ est la matrice densité ρ_A. L'état pur $|\psi_{AB}\rangle$ du système $A + B$ est appelé une purification de la matrice densité ρ_A.

Le théorème Gisin, Hughston, Josza et Wooters On comprend bien le terme de purification, car il s'agit de considérer un mélange comme une sous-partie d'un état pur $|\psi_{AB}\rangle$ (éventuellement fictif). La matrice densité du système $A \cdot B$ s'écrit :

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}| \tag{I.41}$$

et la matrice densité ρ_A du sous-système A est donnée par

$$\rho_A = \text{Tr}(|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|)_B, \tag{I.42}$$

où $\text{Tr}()_B$ désigne l'opération de trace partielle sur B. Cette forme purifiée a un gros avantage sur la conception stochastique d'un mélange statistique. En effet, Gisin, Hughston, Josza et Wooters [46] ont démontré en 1989 que l'état intriqué (I.39) permet de préparer l'un quelconque des différents mélanges à N composantes décrit par ρ_A en mesurant différentes observables de B. En ce sens, la forme purifiée d'un mélange statistique unit les différentes représentations sous forme de mélanges statistiques.

Nous verrons un exemple de réalisation pratique de 2 différentes représentations d'un mélange statistique au IV.1 lors de la préparation d'un état chat de Schrödinger à l'aide d'un système bipartite formé de l'état de la cavité et d'un atome.

Entropie comme mesure d'intrication La question de mesurer le degré d'intrication d'un état pur d'un système bipartite tel que (I.41) est centrale en théorie quantique de l'information. On peut utiliser l'entropie de von Neumann d'un des sous-système A ou B pour qualifier le degré d'intrication entre A et B. En particulier, il est aisé de montrer

$$\begin{aligned} S(A) = S(B) = S \quad &\text{avec} \quad S(A) = -\text{Tr}\left(\rho_A \ln(\rho_A)\right) \\ &\text{et} \quad S(B) = -\text{Tr}\left(\rho_B \ln(\rho_B)\right). \end{aligned} \tag{I.43}$$

L'entropie S commune aux deux sous-systèmes mesure le degré de pureté des états ρ_A et ρ_B pris séparément. A la limite où l'état S est séparable, les deux états sont purs et ont donc une entropie nulle. Au contraire, plus l'entropie des sous-système est grande, plus l'état de chacun des sous-système pris séparément est loin d'un état pur. cela signifie qu'on perd d'autant plus d'information en considérant les systèmes individuellement plutôt que de considérer l'état quantique du système total. En ce sens, l'entropie S est une mesure de l'intrication entre A et B.

I.1.3 Représentation de l'état du champ dans l'espace des phases

Une des bases de la physique statistique classique est la notion de distribution de probabilité dans l'espace des phases. Pour une particule classique, impulsion et position peuvent être simultanément parfaitement déterminées. La distribution correspondante est donc un pic de Dirac dans le plan (x, p). Afin de décrire l'incertitude statistique sur ces deux variables, on introduit une densité de probabilité $f(x, p)$ positive et normalisée décrivant la probabilité de trouver la particule dans une région de l'espace des phases. Le calcul de n'importe quelle grandeur statistique O sur l'état de la particule est donc une moyenne classique :

$$\langle O \rangle = \int f(x, p) O(x, p) \mathrm{d}x \mathrm{d}p. \tag{I.44}$$

Les physiciens se sont heurtés très tôt au problème d'étendre cette représentation à la description quantique des particules. Dans ce cas, même lorsque la particule est préparée dans un état pur, position et impulsion ne sont pas parfaitement déterminées simultanément. Et dans le cas d'un mélange statistique, encore une fois, incertitude quantique et incertitude classique s'ajoutent. On a néanmoins cherché à généraliser la formule (I.44) au cas d'observables et de champs quantiques. On peut développer toute observable du champ sous forme de produits d'opérateurs $a^\dagger$ et a. Ces produits peuvent être développés dans l'ordre normal (tous les $a^\dagger$ sont placés en premier), antinormal (les a sont en premiers) ou symétrisé. Il existe trois distributions dans l'espace des phases : la fonction Q, la fonction P et la fonction de Wigner (W) qui permettent de calculer la valeur moyenne de toute observable O développée respectivement dans l'ordre normal, antinormal ou symétrique à l'aide d'une formule similaire à (I.44) :

$$\langle a^{\dagger n} a^m \rangle = \int Q(\alpha) \alpha^{*n} \alpha^m \mathrm{d}^2\alpha, \tag{I.45}$$

$$\langle a^n a^{\dagger m} \rangle = \int P(\alpha) \alpha^n \alpha^{*m} \mathrm{d}^2\alpha, \tag{I.46}$$

Et enfin,

$$\langle \mathcal{S}\left(a^n a^{\dagger m}\right) \rangle = \int W(\alpha) \alpha^n \alpha^{*m} \mathrm{d}^2\alpha, \tag{I.47}$$

où $\mathcal{S}\left(a^n a^{\dagger m}\right)$ représente le produit symétrisé de a^n et $a^{\dagger m}$, c'est à dire la moyenne des produits contenant n fois a et m fois $a^\dagger$ dans tous les ordonnancements possibles.

Nous ne démontrerons pas cette propriété dans le cas général, mais nous verrons en particulier que la fonction de Wigner permet de calculer très facilement la distribution de n'importe quelle quadrature $X_\phi = \left(e^{-i\phi}a + e^{i\phi}a^\dagger\right)/\sqrt{2}$

Ces distributions sont définies comme les transformées de Fourrier des fonctions caractéristiques normale, antinormale et symétrique. Nous définirons d'abord les fonctions caractéristiques, puis nous extrairons les propriétés essentielles des fonctions Q et W. La fonction P est très singulière et ne donne que peu d'information visuelle sur l'état quantique du champ. Au contraire, les deux premières donnent une représentation visuelle du champ dans l'espace des phases. Enfin nous verrons sur des exemples que la fonction de Wigner est l'outil le plus utile pour visualiser les propriétés quantiques des états du champ.

I.1.3.a Les fonctions caractéristiques

Les fonctions caractéristiques sont des distributions dans l'espace des phases qui permettent de caractériser complètement l'état du champ. Elles permettent de calculer aisément les différentes distribution dans l'espace des phases et permettent, comme nous le verrons au chapitre V.1.3, de calculer analytiquement l'évolution de l'état sous l'effet de la relaxation.

Fonction caractéristique dans l'ordre symétrique La fonction caractéristique dans l'ordre symétrique dans l'état décrit par la matrice densité ρ est une fonction du paramètre complexe λ définie comme la moyenne de l'opérateur D dans l'état ρ :

$$C_s(\lambda)^\rho = \langle D(\lambda)\rangle = \mathrm{Tr}\left(\rho e^{\lambda a^\dagger - \lambda^* a}\right). \tag{I.48}$$

En particulier, dans le cas d'un état pur, la fonction caractéristique s'écrit :

$$C_s(\lambda)^{|\psi\rangle\langle\psi|} = \langle\psi|D(\lambda)|\psi\rangle. \tag{I.49}$$

Elle s'interprète donc comme le recouvrement entre l'état $|\psi\rangle$ et l'état translaté de l'amplitude complexe λ.

Fonctions caractéristiques dans l'ordre normal et antinormal De la même façon, On définit les fonctions caractéristiques dans l'ordre normal et antinormal par :

$$C_n(\lambda) = \mathrm{Tr}\left(\rho e^{\lambda a^\dagger} e^{-\lambda^* a}\right), \tag{I.50}$$

$$C_{an}(\lambda) = \mathrm{Tr}\left(\rho e^{-\lambda^* a} e^{\lambda a^\dagger}\right). \tag{I.51}$$

D'après l'identité de Glauber :

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{[A,B]/2}, \tag{I.52}$$

valide dès que A et B commutent avec $[A, B]$, on obtient immédiatement :

$$C_n(\lambda) = e^{|\lambda|^2/2} C_s(\lambda) = e^{|\lambda|^2} C_{an}(\lambda). \tag{I.53}$$

L'équation (I.53) permet de retrouver très facilement les deux autres à partir d'une première fonction caractéristique.

I.1.3.b La fonction Q

Définition La fonction Q est par définition, la transformée de Fourrier à deux dimensions de la fonction caractéristique dans l'ordre antinormal C_{an} :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \mathrm{d}^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)} C_{an}(\lambda). \tag{I.54}$$

Expression équivalente de Q On obtient une forme beaucoup plus agréable de la fonction Q en effectuant quelques manipulations algébriques sur la formule (I.54). En introduisant la définition de C_{an} ainsi que la relation de fermeture des états cohérents dans (I.54) :

$$\frac{1}{\pi} \int \mathrm{d}^2\beta |\beta\rangle\langle\beta| = 1, \tag{I.55}$$

on obtient :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi^3} \mathrm{Tr}\left(\rho \int \mathrm{d}^2\lambda \mathrm{d}^2\beta e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)} e^{-\lambda^* a} |\beta\rangle\langle\beta| e^{\lambda a^\dagger}\right) \tag{I.56}$$

$$= \frac{1}{\pi^3} \mathrm{Tr}\left(\rho \int \mathrm{d}^2\lambda \mathrm{d}^2\beta e^{\lambda^*(\alpha-\beta) - \lambda(\alpha^* - \beta^*)} |\beta\rangle\langle\beta|\right). \tag{I.57}$$

Or l'intégration suivant λ donne à un facteur multiplicatif près la distribution de Dirac $\delta(\alpha - \beta)$. On obtient finalement :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} \mathrm{Tr}\,(\rho|\alpha\rangle\langle\alpha|) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|\rho|\alpha\rangle. \tag{I.58}$$

Ainsi la fonction $Q(\alpha)$ s'interprète simplement comme le recouvrement entre l'état ρ et le champ cohérent $|\alpha\rangle$. Les états cohérents formant une base des états du champ, la connaissance de la fonction Q est équivalente à la connaissance de la matrice densité.

I.1.3.c La fonction de Wigner

Définition La fonction de Wigner [47] est donnée par la transformée de Fourier à deux dimensions de la fonction caractéristique dans l'ordre symétrique C_s :

$$W(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \int \mathrm{d}^2\lambda e^{(\alpha\lambda^* - \alpha^*\lambda)} C_S(\lambda). \tag{I.59}$$

On montre aisément (voir [48] p.572) que la fonction de Wigner est normalisée à 1.

Expression équivalente de W On peut également dériver une forme équivalente pour la fonction de Wigner faisant intervenir les éléments de matrices de ρ dans la base des états propres de la position $|x\rangle$. En notant $\alpha = x + ip$:

$$W(x, p) = \frac{1}{\pi} \int \mathrm{d}u e^{-2ipu} \langle x + u/2|\rho|x - u/2\rangle. \tag{I.60}$$

Cette forme montre que la fonction de Wigner est la transformée de Fourrier des éléments non diagonaux de ρ dans la base des vecteurs propres de la position. On peut inverser la transformée de Fourrier et obtenir :

$$\langle x + u/2|\rho|x - u/2\rangle = \int \mathrm{d}p e^{2ipu} W(x, p). \tag{I.61}$$

La connaissance de la fonction de Wigner permet donc de remonter à n'importe quel élément de la matrice densité. En d'autres termes, comme la fonction Q, la fonction de Wigner contient autant d'information sur l'état que la matrice densité.

I.1.3.d Quelques propriétés des fonctions Q et W

Methode de mesure directe de Q et W Les dernières expressions obtenues pour les fonctions Q et W peuvent encore être dérivées de façon à obtenir une définition opératorielle de ces fonctions [49]. On peut réécrire la formule (I.62) en faisant intervenir l'état vide $|0\rangle$ et l'opérateur déplacement :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle 0|D(-\alpha)\rho D(\alpha)|0\rangle. \tag{I.62}$$

La fonction $Q(\alpha)$ s'interprète donc comme la probabilité d'avoir 0 photons dans l'état $\rho(-\alpha) = D(-\alpha)\rho D(\alpha)$ correspondant à l'état ρ déplacé de l'amplitude complexe $-\alpha$.

Pour réécrire l'expression (I.60) sous une forme similaire, introduisons l'opérateur parité Π. Il doit son nom à son action sur les états de Fock :

$$\Pi|n\rangle = (-1)^n|n\rangle. \tag{I.63}$$

Son action sur les états propres de la position et de l'impulsion $|x\rangle$ et $|p\rangle$ est extrêmement simple :

$$\Pi|x\rangle = |-x\rangle \qquad \text{ou encore} \qquad \Pi|p\rangle = |-p\rangle. \tag{I.64}$$

En d'autres termes, l'opérateur parité effectue une symétrie centrale dans l'espace des phases. On démontre facilement cette propriété en étudiant la parité des fonctions d'ondes des états de Fock dans les bases $|x\rangle$ et $|p\rangle$. D'autre part, on peut écrire l'action de l'opérateur déplacement sur les états propres de la position (voir [48] p. 573) :

$$D(\alpha)|x\rangle = e^{-i\,\mathrm{Re}(\alpha)\,\mathrm{Im}(\alpha)} e^{2i\,\mathrm{Im}(\alpha)x}|x + \mathrm{Re}(\alpha)\rangle. \tag{I.65}$$

Ainsi, outre un terme de phase globale, l'opérateur déplacement translate les états propres de la quadrature position de la quantité $\mathrm{Re}(\alpha)$.

L'expression (I.60) peut alors se réécrire :

$$\begin{aligned} W(x, p) &= \frac{1}{\pi}\int \mathrm{d}u\langle u/2|D(-\alpha)\rho D(\alpha)\Pi|u/2\rangle \\ &= \frac{2}{\pi}\mathrm{Tr}\left(D(-\alpha)\rho D(\alpha)\Pi\right). \end{aligned} \tag{I.66}$$

Les deux formules (I.62) et (I.66) montrent la similarité des deux fonctions $Q(\alpha)$ et $W(\alpha)$: tandis que la première s'interprète comme le recouvrement entre l'état ρ déplacé de l'amplitude

complexe $-\alpha$ avec l'état vide $|0\rangle$ (à un facteur $1/\pi$ près), la seconde s'obtient en prenant la valeur moyenne de l'observable $2\Pi/\pi$ dans l'état déplacé de l'amplitude complexe $-\alpha$ [50, 51]. Dans le passé, l'équipe a déjà utilisé cette propriété de la fonction Q pour en mesurer directement des valeurs en des points arbitraires de l'espace des phases (voir [52]). Nous verrons que l'on peut utiliser une méthode similaire pour mesurer la fonction de Wigner (ou du moins une fonction approchante) en des points arbitraires de l'espace des phases.

Bornes de Q et W D'après la formule (I.62), la fonction Q ne peut prendre que des valeurs comprises entre 0 et $1/\pi$. Comme mesure du recouvrement entre ρ et le champ cohérent $|\alpha\rangle$, elle mesure la distribution dans l'espace des phases du champ. La fonction de Wigner quant à elle prend ses valeurs entre les deux valeurs propres de l'observable $2\Pi/\pi$:

$$-2/\pi \leq W(\alpha) \leq 2/\pi. \tag{I.67}$$

Nous verrons par la suite des exemples d'états pour lesquels la fonction de Wigner prends effectivement des valeurs négatives. L'interprétation en terme de densité de probabilité dans l'espace des phases est alors moins intuitive. Cependant, on peut justement prendre l'existence de valeurs négatives dans la fonction de Wigner comme critère pour discriminer des états non-classiques du champ. Nous verrons dans la partie suivante que la fonction de Wigner permet de visualiser beaucoup plus clairement que la fonction Q la cohérence des états de type chat de Schrödinger.

Fonction de Wigner et distributions marginales On obtient la distribution de probabilité pour la quadrature X : $P(x) = \langle x|\rho|x\rangle$ en appliquant la formule I.61 avec $u = 0$:

$$P(x) = \int \mathrm{d}p W(x, p). \tag{I.68}$$

Ce résultat peut être généralisé à n'importe quelle quadrature : Si l'on note x_ϕ et p_ϕ un couple de quadratures orthogonales définies par :

$$X_\phi = X\cos(\phi) + P\sin(\phi) \qquad P_\phi = -X\sin(\phi) + P\cos(\phi). \tag{I.69}$$

La distribution marginale $P(x_\phi)$ s'obtient par intégration sur la quadrature orthogonale :

$$P(x_\phi) = \int dp_\phi W(x_\phi, p_\phi). \tag{I.70}$$

On peut montrer [53] que cette propriété suffit à définir la fonction de Wigner de façon univoque. En effet, aucune autre distribution ne vérifie cette propriété.

I.1.3.e Quelques exemples

Nous allons ici présenter différents états du champ ainsi que leur fonction de Wigner et fonction Q.

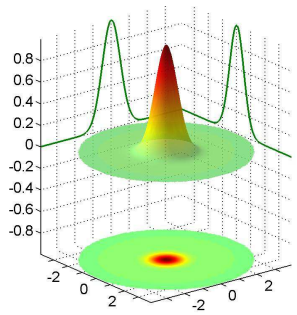


FIG. I.2 – Fonction de Wigner de l'état vide. Les lignes vertes représentent les densités de probabilité des quadratures X et P.

Etat vide Le vide $|0\rangle$ a une énergie $E_0 = \hbar\omega/2$. Cette énergie correspond aux fluctuations de point zéro : les deux quadratures X et P ne pouvant être connues simultanément, les contributions des deux quadratures dans l'Hamiltonien ne peuvent s'annuler toutes deux pour un même état. L'état vide est l'état qui réalise le meilleur compromis entre minimisation de l'énergie associée à la quadrature X et à la quadrature P. Dans cet état, les valeurs moyennes de X et P sont nulles, tandis que leurs fluctuations sont à la limite fixée par la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta X \Delta P = 1/4. \tag{I.71}$$

D'après la formule (I.66), la fonction de Wigner $W^{|0\rangle}(\alpha)$ est la valeur moyenne de la parité dans le champ déplacé de l'amplitude complexe $-\alpha$. Comme nous l'avons vu précédemment, l'opération $D(\alpha)$ appliquée à $|0\rangle$ donne le champ cohérent α. La valeur $W^{|0\rangle}(\alpha)$ dans l'état vide est donc la valeur moyenne de la parité dans le champ cohérent $|-\alpha\rangle$. On calcule aisément cette valeur :

$$\langle -\alpha|\Pi|-\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^{*n}\alpha^n(-1)^n}{n!} = e^{-2|\alpha|^2}, \tag{I.72}$$

d'où

$$W^{\text{vac}}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2}. \tag{I.73}$$

La fonction de Wigner du vide est donc une gaussienne d'écart type $1/2$. La densité de probabilité de n'importe quelle quadrature X_ϕ s'obtient en intégrant la fonction de Wigner le long de la quadrature opposée, elles ont donc toutes une même loi gaussienne de largeur $1/2$:

$$P(X_\phi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-2{X_\phi}^2}. \tag{I.74}$$

La fonction $Q(\alpha)$ du vide est définie comme le recouvrement du vide avec le champ cohérent $|\alpha\rangle$. D'après la décomposition du champ $|\alpha\rangle$ sur la base des états nombres, On obtient donc aisément :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha|^2}. \tag{I.75}$$

Il s'agit donc d'une gaussienne de largeur $1/\sqrt{2}$.

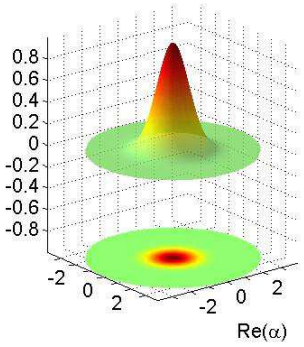
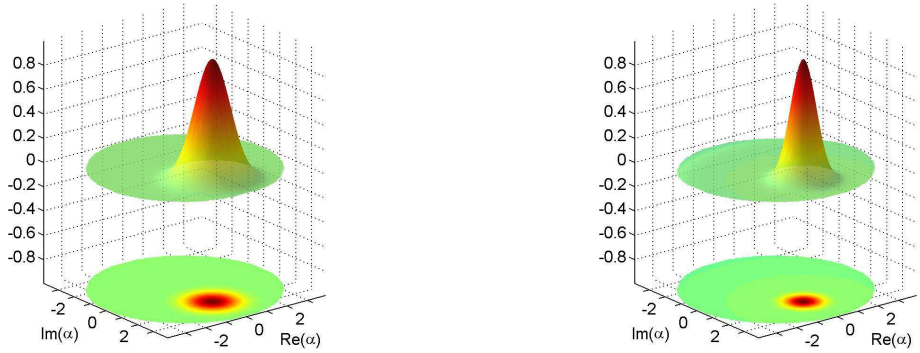


FIG. I.3 – Fonction Q de l'état vide.



(a) Q-function (b) Wigner function

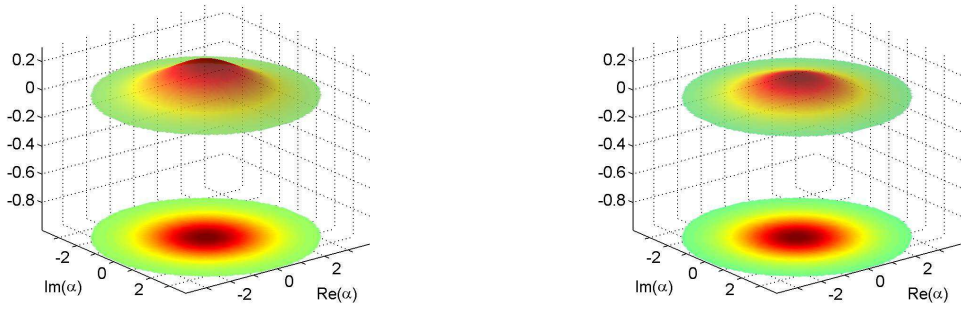
FIG. I.4 – (a) Fonction Q d'un état cohérent $|\beta\rangle$ avec $\beta = \sqrt{3}$. L'axe vertical est gradué en unité de $1/\pi$, (b) fonction de Wigner du même état cohérent (axe vertical en unité de $2/\pi$)

Etats cohérents On montre aisément à l'aide des formules (I.66) et (I.62) que les fonctions Q et W sont translatées de l'amplitude complexe α lorsque l'état subit la transformation $D(\alpha)$. Les fonctions W et Q du champ cohérent $|\beta\rangle$ s'obtiennent donc en translatant celles du vide de l'amplitude complexe β :

$$W^{|\beta\rangle\langle\beta|}(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\beta-\alpha|^2}, \tag{I.76}$$

$$Q^{|\beta\rangle\langle\beta|}(\alpha) = \frac{1}{\pi} e^{-|\alpha-\beta|^2}. \tag{I.77}$$

Champ thermique Le champ thermique est le champ qui s'établit dans une cavité en contact avec un réservoir de température finie. Les populations des différents nombres de photons sont



(a) fonction Q (b) fonction de Wigner

FIG. I.5 – Fonction Q (a) et fonction de Wigner (b) d'un état thermique avec $\bar{n} = 3$.

proportionnelles aux coefficients de Boltzmann aux énergies successives $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$.

$$\rho_{\text{th}} = \sum_n \frac{{n_{\text{th}}}^n}{(n_{\text{th}} + 1)^{n+1}} |n\rangle\langle n|, \tag{I.78}$$

où $n_{\text{th}} = \dfrac{1}{e^{\hbar\omega_0/k_BT} - 1}$ représente le nombre moyen de photons thermiques dans cette distribution. L'état thermique devient sensiblement différent du vide lorsque l'agitation thermique k_BT est du même ordre de grandeur que l'énergie du mode $\hbar\omega$.

Contrairement au cas du champ cohérent, il n'y a aucune cohérence entre les différents états de Fock, ce qui correspond au fait que la phase du champ thermique est complètement brouillée.

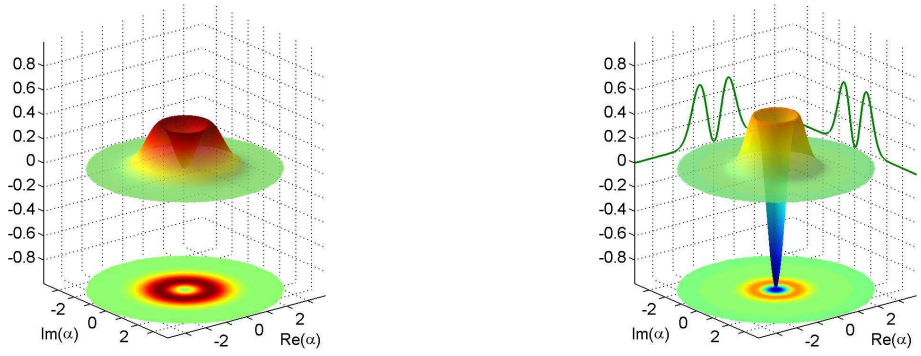
La fonction de Wigner du champ thermique s'obtient en passant par sa fonction caractéristique (voir [48] p. 576) :

$$W^{\rho_{th}}(\alpha) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2n_{\text{th}} + 1} e^{\frac{-2|\alpha|^2}{2n_{\text{th}}+1}}. \tag{I.79}$$

Il s'agit d'une gaussienne centrée à l'origine et de largeur $\sqrt{\frac{2n_{\text{th}}+1}{2}}$. Comme pour l'état vide, les quadratures ont une valeur moyenne nulle, mais leurs fluctuations autour de cette valeur moyenne sont beaucoup plus importantes.

Les exemples que nous venons de voir sont des états purement classiques. En effet ils s'obtiennent par couplage du système à une source classique ou un réservoir thermique et leur fonction de Wigner ne présente pas de valeurs négatives. Nous allons voir à présent des exemples de champs non-classiques, dont la fonction de Wigner ne peut plus s'interpréter comme une densité de probabilité classique car elle prend des valeurs négatives.

Etats de Fock Les états de Fock sont les états que l'on introduit généralement en premier en optique quantique, cependant il sont extrêmement difficiles à générer expérimentalement. En réalisant une mesure non-destructive du nombre de photons piégés dans la cavité, nous avons



(a) fonction Q (b) fonction de Wigner

FIG. I.6 – Fonction Q (a) et fonction de Wigner (b) de l'état de Fock $|n = 1\rangle$

néanmoins pu préparer différents états de Fock. Les résultats seront présentés au chapitre III. La fonction Q des états de Fock est extrêmement facile à calculer :

$$Q^{|n\rangle\langle n|}(\alpha) = \frac{1}{\pi}\langle\alpha|n\rangle\langle n|\alpha\rangle \tag{I.80}$$

$$= \frac{1}{\pi}e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}. \tag{I.81}$$

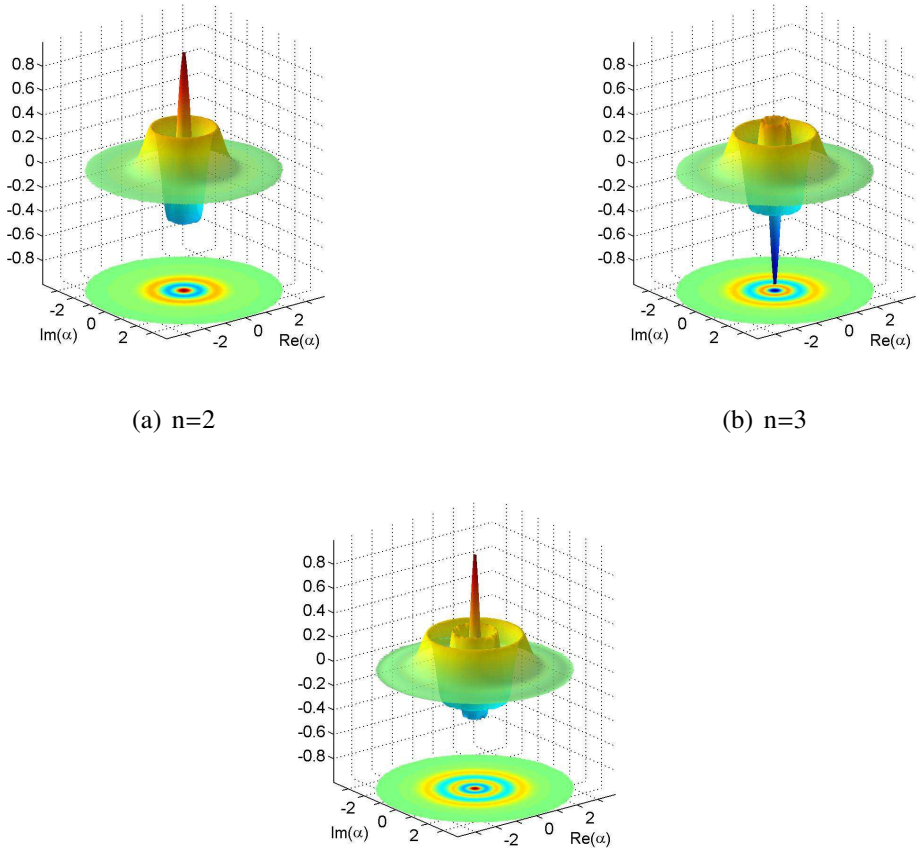
Leur fonction de Wigner s'obtient en calculant la transformée de Fourrier de la fonction caractéristique symétrique. Elle est donnée par la formule :

$$W^{|n\rangle\langle n|}(\alpha) = \frac{2}{\pi}(-1)^n e^{-2|\alpha|^2} L_n(4|\alpha|^2), \tag{I.82}$$

où L_n représente le n^e polynôme de Laguerre. On a notamment $L_n(0) = 1$, ce qui implique que $W(0)$ prend alternativement les valeurs $+2/\pi$ et $-2/\pi$ pour les états de Fock successifs. La fonction de Wigner prend donc la valeur minimale autorisée à l'origine pour tous les états de Fock à nombre de photons impairs. Elle ne peut donc plus être interprétée en terme de densité de probabilité classique.

Les fonctions Q et W de l'état de Fock sont parfaitement symétriques par rotation autour de l'origine, signe que les états de Fock ne possèdent aucune information de phase.

La fonction de Wigner de l'état $|n = 1\rangle$ est représentée sur la figure I.6(b). Elle présente une forme de « chapeau mexicain » retourné. A cause de la partie négative au centre, l'intégration le long de n'importe quelle quadrature montre que la quadrature conjuguée présente une densité de probabilité nulle à l'origine. La fonction de Wigner des états de Fock pour n plus élevé (voir figure I.1.3.e est formée d'anneaux centrés autour de l'origine alternant valeurs positives et négatives. Les états de Fock pour $n \geq 1$ ont tous des parties négatives dans leur fonction de Wigner.



(a) n=2

(b) n=3

(c) n=4

FIG. I.7 – Fonctions de Wigner des états de Fock 2, 3 et 4.

Chats de Schrödinger A la limite d'une grande amplitude β, le champ cohérent se ramène à un état classique dont les fluctuations deviennent négligeables comparées à l'amplitude moyenne. Nous utilisons ces états pour modéliser l'état classique d'un appareil de mesure. La phase du champ cohérent fait office d'aiguille sur le cadran d'un appareil de mesure. L'analogie avec l'expérience de pensée de Schrödinger est frappante. Nous verrons dans la suite qu'on peut effectivement utiliser l'état d'un seul atome pour modifier significativement la phase d'un champ cohérent dans la cavité. On appellera état « chat de Schrödinger de phase » une superposition quantique de deux états cohérents de phases différentes :

$$|\psi_\pm\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_\pm}\left(|\beta e^{i\phi}\rangle \pm |\beta e^{-i\phi}\rangle\right), \tag{I.83}$$

où $\mathcal{N}_\pm$ est un facteur de normalisation donné par :

$$\mathcal{N}_\pm = 2 \pm 2\,\mathrm{Re}\left(\langle\beta e^{i\phi}|\beta e^{-i\phi}\rangle\right). \tag{I.84}$$

On s'intéressera en particulier au cas où les deux champs cohérents ont des phases opposées :

$$|\psi_{\mathrm{pair}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_+}\left(|\beta\rangle + |-\beta\rangle\right), \tag{I.85}$$

$$|\psi_{\mathrm{impair}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_-}\left(|\beta\rangle - |-\beta\rangle\right). \tag{I.86}$$

$|\psi_{\mathrm{pair}}\rangle$ et $|\psi_{\mathrm{impair}}\rangle$ sont états propres de l'opérateur parité comme le montre leur décomposition sur la base des états nombres :

$$|\psi_{\mathrm{pair}}\rangle = \frac{2e^{-|\beta|^2/2}}{\mathcal{N}_+}\sum_{n\ \mathrm{pair}}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle, \tag{I.87}$$

$$|\psi_{\mathrm{impair}}\rangle = \frac{2e^{-|\beta|^2/2}}{\mathcal{N}_-}\sum_{n\ \mathrm{impair}}\frac{\beta^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle. \tag{I.88}$$

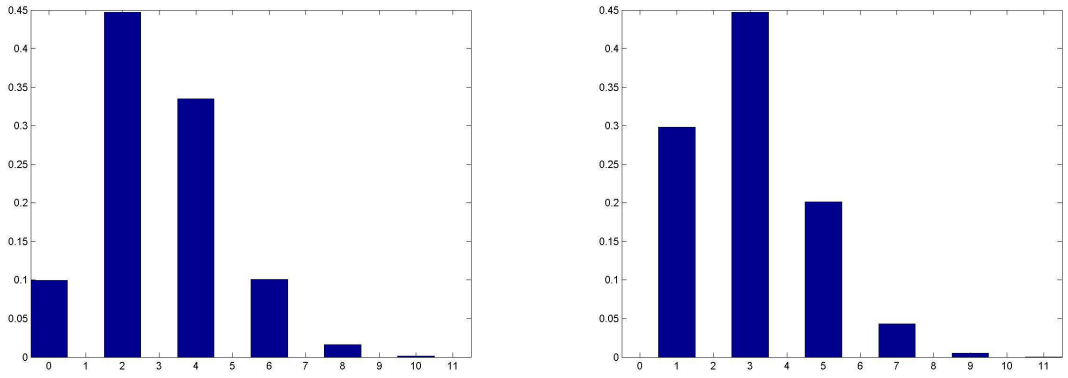
On les appellera donc respectivement « chat pair » et « chat impair ». La figure I.8 illustre cette propriété : La population de chacun des états $|\psi_{\mathrm{pair}}\rangle$ et $|\psi_{\mathrm{impair}}\rangle$ est concentrée respectivement sur les états de Fock à nombre pairs et impairs de photons.

La fonction Q des états $|\Psi_{\mathrm{pair/impair}}\rangle$ s'obtient en développant les produits scalaires avec les états cohérents :

$$Q^{\mathrm{pair/impair}}(\alpha) = \frac{1}{\pi\mathcal{N}_\pm}\left[e^{-|\alpha-\beta|^2} + e^{-|\alpha+\beta|^2} \pm 2e^{-(\alpha^2+\beta^2)}\cos(2\beta\,\mathrm{Im}(\alpha))\right]. \tag{I.89}$$

La fonction de Wigner, quant à elle, s'obtient en passant par la fonction caractéristique (voir [48] p.580) :

$$W^{\mathrm{pair/impair}}(\alpha,t) = \frac{1}{\pi(1 \pm e^{-2|\beta|^2})}\left[e^{-2|\alpha-\beta|^2} + e^{-2|\alpha+\beta|^2} \pm 2e^{-2|\alpha|^2}\cos(4\,\mathrm{Im}(\alpha)\beta)\right]. \tag{I.90}$$



(a) $|\psi_+\rangle$ (b) $|\psi_-\rangle$

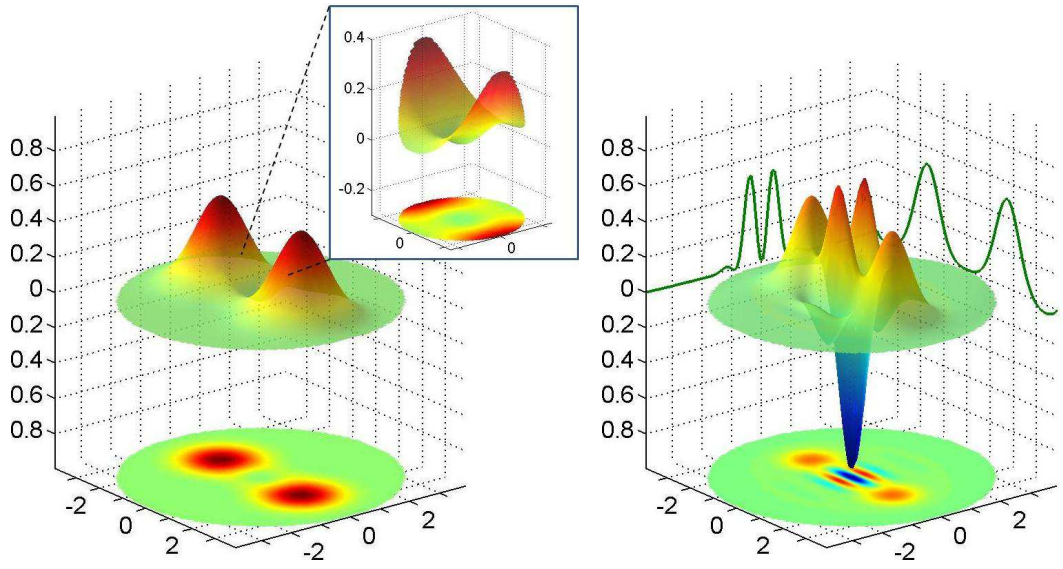
FIG. I.8 – Population des différents états nombres dans les états $|\psi_{\text{pair}}\rangle$ et $|\psi_{\text{impair}}\rangle$.

Les fonctions Q et W de l'état $|\psi_{\text{impair}}\rangle$ sont données sur la figure I.9. On distingue deux pics gaussiens centrés autour des amplitudes complexes β et $-\beta$ qui sont les composantes classiques puisqu'elles représentent la probabilité de trouver une amplitude complexe autour des deux positions classiques de l'aiguille β et $-\beta$. On observe en outre sur les deux fonctions un motif oscillant entre les deux composantes classiques qui caractérise l'interférence quantique entre ces dernières. Ces oscillations, qui sont la signature de la cohérence de la superposition, sont nettement plus visibles sur la fonction de Wigner que sur la fonction Q, où elles sont modulées par l'amplitude gaussienne des composantes classiques.

Mélange statistique Nous allons nous intéresser à un dernier état. Cet état classique est constitué du mélange statistique de deux champs cohérents. Il s'agit de l'état vers lequel le chat de Schrödinger relaxe sous l'effet de la décohérence. On peut écrire la matrice densité d'un tel mélange statistique :

$$\rho_{\text{mélange}} = \frac{1}{2}\left(|\beta\rangle\langle\beta| + |-\beta\rangle\langle-\beta|\right). \tag{I.91}$$

Par linéarité des formules (I.62) et (I.66) par rapport à la matrice densité, les fonctions Q et W de l'état $\rho_{\text{mélange}}$ sont données par la moyenne de ces fonctions pour les états cohérents $|\beta\rangle\langle\beta|$ et $|-\beta\rangle\langle-\beta|$. La figure I.1.3.e montre les fonctions de Wigner et fonctions Q du mélange statistique et de l'état chat pair. Les deux états diffèrent par la présence ou l'absence du jeu d'interférences quantiques entre les deux composantes classiques. On constate que la fonction de Wigner est la mieux adaptée pour évaluer la cohérence quantique d'un tel état. C'est pourquoi, dans la suite, nous utiliserons la fonction de Wigner et non la fonction Q pour représenter les états dans l'espace des phases.



(a) fonction-Q (b) fonction de Wigner

FIG. I.9 – Fonction Q (a) et fonction W (b) de l'état $|\psi_{\text{impair}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}(|\beta\rangle - |-\beta\rangle)$ avec $\beta = \sqrt{3}$. La vignette sur la fonction Q est un agrandissement de la région centrale permettant de distinguer des franges d'oscillations quantiques.

I.1.4 Description théorique de différents types de mesures quantiques

I.1.4.a Mesure quantique idéale de Von Neumann

La mesure idéale introduite par von Neumann permet de décrire la mesure d'une observable O représentée par un opérateur hermitien. Comme opérateur hermitien, O est diagonalisable dans une base orthogonale. Notons o_i ses valeurs propres. On peut alors décomposer O suivant la somme des projecteurs orthogonaux P_i sur ses sous-espaces propres :

$$O = \sum_i o_i P_i. \tag{I.92}$$

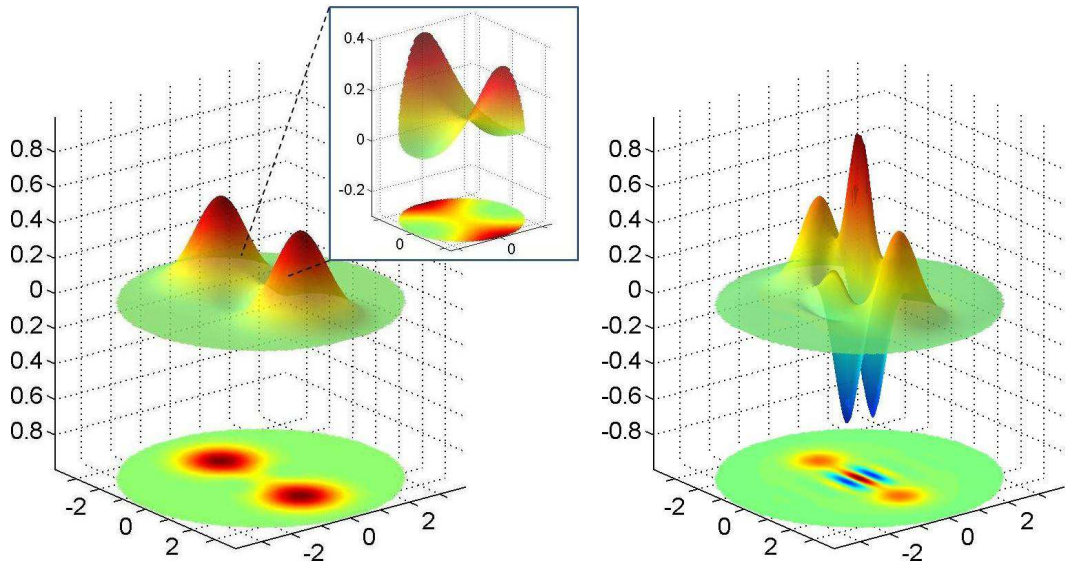
La mesure de O ne peut donner que les résultats discrets o_i. La probabilité d'obtenir le résultat o_i lorsque le système mesuré est dans l'état ρ est donnée par

$$p(o_i) = \text{Tr}(\rho P_i). \tag{I.93}$$

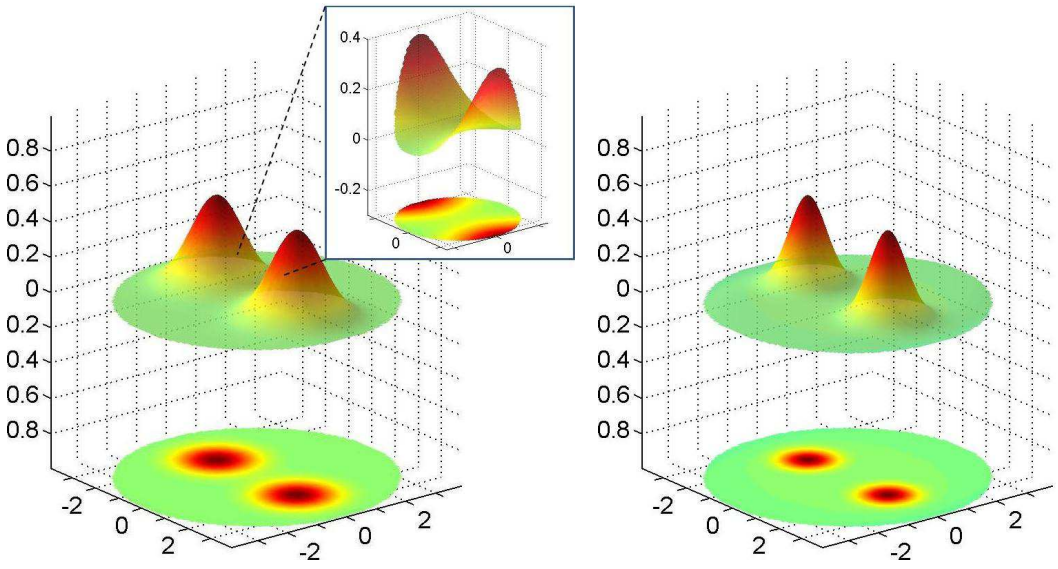
Après obtention du résultat o_i le système est projeté dans le sous-espace propre correspondant :

$$\rho' = \frac{P_i \rho P_i}{p(o_i)}, \tag{I.94}$$

où ρ' représente l'état du système après la mesure. Même si l'effet de cette mesure est très simple, il est très délicat de réaliser une telle évolution dans un protocole de mesure réel. En



(a) fonction Q (b) fonction de Wigner



(c) fonction Q (d) fonction de Wigner

FIG. I.10 – Fonction Q et fonction de Wigner de l'état chat de Schrödinger $|\psi_{\text{pair}}\rangle$ ((a) et (b)) et du mélange statistique $\rho_{\text{mélange}}$ ((c) et (d)).

effet, la plupart des appareils de mesure couplent directement le système quantique à un appareil macroscopique. Le système quantique est alors complètement détruit par le processus de mesure. Afin de préserver le système du couplage à un système macroscopique, on procède en deux temps à l'aide d'un système auxiliaire M appelé mètre : notons $\{|\chi_i\rangle\}$ une base orthonormée de M. On supposera que la dimension de M est supérieure au nombre de valeurs propres de O.

1. Le système S est couplé à M par une transformation unitaire[3] :

$$|\psi\rangle_S \otimes |\chi_0\rangle_M \rightarrow \sum_i P_i|\psi\rangle_S \otimes |\chi_i\rangle_M \tag{I.95}$$

2. Le système auxiliaire est mesuré à l'aide d'une mesure destructive dont les états propres sont les $|\chi_i\rangle_M$. C'est l'intrication entre S et M qui projette le système S dans le sous-espace propre correspondant au résultat de la mesure.

I.1.4.b Mesure généralisée

La mesure de von Neumann décrit la mesure idéale d'une observable O. Cependant, dans la réalité, il est très rare de parvenir à réaliser la transformation unitaire (I.95). En effet, les différents vecteurs propres de O doivent être parfaitement séparés suivant des sous-espaces orthogonaux de M. Dans les cas courants le couplage entre le système et le mètre est trop faible pour réaliser une telle opération, et il est bon de définir un cadre théorique pour décrire ces mesures incomplètes subies par le système. C'est le but du concept de mesure généralisée :

Une mesure généralisée est définie par un ensemble de K opérateurs M_i non nécessairement hermitiques vérifiant la condition :

$$\sum_{i=1}^{K} M_i^\dagger M_i = \mathbb{1}. \tag{I.96}$$

Chaque opérateur M_i, appelé opérateur de Kraus est associé à un résultat de mesure. Pour un système dans l'état $|\psi\rangle$, la probabilité d'obtenir le résultat i est donnée par :

$$p_i = \langle\psi|M_i^\dagger M_i|\psi\rangle \tag{I.97}$$

et le système est alors projeté sur l'état :

$$|\psi\rangle \xrightarrow{\text{résultat i}} |\psi_i\rangle = \frac{M_i|\psi\rangle}{\sqrt{p_i}}. \tag{I.98}$$

Notons à ce stade, que le formalisme de la mesure généralisée impose qu'un état pur soit projeté sur un état pur lorsque la mesure a donné un résultat i. Bien sûr, lorsque le système n'est pas dans un état pur et qu'il est décrit par la matrice densité ρ, la transformation s'applique à chaque composante du mélange et on peut écrire :

$$p_i = \mathrm{Tr}\left(\rho M_i^\dagger M_i\right) \tag{I.99}$$

[3]La transformation indiquée associe en fait un ensemble de vecteurs orthonormés sur un autre ensemble de vecteurs orthonormés. On peut donc l'étendre en une transformation unitaire en complétant les ensembles de vecteurs de départ et d'arriver en des bases orthonormées

et

$$\rho \xrightarrow{\text{mesure i}} \rho_i = \frac{M_i \rho M_i^\dagger}{p_i}. \tag{I.100}$$

L'ensemble des $E_i = M_i^\dagger M_i$ est appelé POVM pour Positive Operator Valued Measure. On voit que si l'on ne s'intéresse qu'aux probabilités de résultats pour la mesure, alors seul l'opérateur E_i est pertinent car la probabilité d'obtenir le résultat i est donné par :

$$p_i = \mathrm{Tr}\left(\rho E_i\right). \tag{I.101}$$

En particulier, l'opérateur E_i étant hermitien, il peut toujours être décomposé sous la forme :

$$E_i = \sqrt{E_i}\,\sqrt{E_i}. \tag{I.102}$$

En d'autres termes, une façon naturelle de réaliser la mesure du POVM E_i consiste à réaliser une mesure donnant le résultat i avec probabilité $\mathrm{Tr}(\rho E_i)$ et projetant le système dans l'état $\sqrt{E_i}\rho\sqrt{E_i}$.

La mesure projective de von Neumann est un premier exemple qui entre dans le cadre de la mesure généralisée avec $E_i = M_i = M_i^\dagger = P_i$ (on parle parfois de Projecteur Valued Measure). Nous allons voir à présent que la mesure généralisée peut toujours être vue comme une mesure projective sur un système auxiliaire de dimension supérieure ou égale à K.

Mesure projective sur un système auxiliaire Nous allons simplement généraliser la méthode pour réaliser une mesure projective à l'aide d'un système auxiliaire. Les états $|\chi_i\rangle_M$ forment toujours une base orthonormée de l'état de l'appareil de mesure.

1. Cette fois, le système est intriqué à l'appareil par l'opération unitaire suivante [4] :

$$|\psi\rangle_S \otimes |\chi_0\rangle_M \rightarrow \sum_i M_i|\psi\rangle_S \otimes |\chi_i\rangle_M. \tag{I.103}$$

2. La mesure du mètre dans la base $|\chi_i\rangle_M$ donne alors bien le résultat i avec la probabilité :

$$p_i = \langle\psi|_S\, {M_i}^\dagger M_i|\psi\rangle_S \tag{I.104}$$

et projette le système dans l'état pur $M_i|\psi\rangle_S / \sqrt{p_i}$.

Par linéarité, les formules (I.99) et (I.100) sont également vérifiées dans le cas d'un mélange statistique.

Si nous avons pris la peine de présenter en détail le concept de mesure généralisée et en particulier leur implémentation en terme de couplage du système à un mètre, c'est que nos expériences mettent en pratique très directement cette idée, le système étant le champ piégé dans la cavité et le mètre, les atomes la traversant. Nous reviendrons sur l'implémentation de ce schéma théorique dans nos manipulations au chapitre III.

[4] Cette opération peut encore une fois être étendue en une opération unitaire en complétant les ensembles orthonormés de départ et d'arrivée pour en faire des bases orthonormées.

Mesure destructive A titre d'exemple et pour montrer la généralité du formalisme de mesure généralisée, nous allons voir qu'il permet également de décrire les mesures les plus courantes que l'on puisse effectuer sur un système quantique : les mesures destructives ne mettent généralement pas en jeu de système auxiliaires. Il existe d'innombrables exemples d'appareils de mesures permettant d'atteindre une sensibilité au niveau de quelques quanta, mais qui détruisent le système lors de sa mesure. Un premier exemple est donné par les dispositifs de comptage de photons uniques (tubes photo-multiplicateurs, photo-diodes à avalanches, ou encore, l'oeil humain !). Dans tous ces dispositifs, la détection du photon s'accompagne de son absorption. On peut alors écrire les opérateurs de Kraus correspondant aux deux événements possibles :

1. pas de photon détecté : $M_0 = |0\rangle\langle 0|$
2. un photon détecté : $M_1 = |0\rangle\langle 1|$

Comme on peut le voir, le champ est dans tous les cas projeté sur l'état vide, ce qui signifie que le photon est détruit en même temps qu'il est détecté. L'ensemble de POVM correspondant est donné par :

$$E_0 = M_0^\dagger M_0 = |0\rangle\langle 0| \tag{I.105}$$

et

$$E_1 = M_1^\dagger M_1 = |1\rangle\langle 1|. \tag{I.106}$$

Il s'agit donc bien d'un ensemble complet de projecteurs orthogonaux dans l'espace $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ correspondant aux projecteurs orthogonaux sur les sous-espaces propres de l'opérateur nombre N.

Contrairement à ce qui se passe dans ces dispositifs mesurant la lumière de façon destructive, la façon « idéale » de mesurer le nombre de photons est la mesure de von Neumann décrite par les opérateurs :

$$M_0 = \sqrt{E_0} = E_0 = |0\rangle\langle 0| \tag{I.107}$$

et

$$M_1 = \sqrt{E_1} = E_1 = |1\rangle\langle 1|. \tag{I.108}$$

Cette mesure préserve le photon après sa détection. On parle alors de *mesure Quantique Non-Destructive*. Une mesure de ce type a été réalisée pour la première fois dans notre groupe en 1999 par Gilles Nogues [29, 54]. Nous avons depuis amélioré significativement le dispositif expérimental, ce qui nous a permis de réaliser des centaines de mesures successives de ce type pendant un temps court devant la relaxation dans la cavité. Nous allons définir précisément au paragraphe suivant les critères permettant de qualifier une mesure quantique de non-destructive.

I.1.4.c Mesure Quantique Non-Destructive

Le concept de mesure Quantique Non-Destructive (QND) a été introduit dans les années 1970 [55, 56, 57]. Outre son intérêt fondamental, il a trouvé un large écho en tant qu'outil expérimental. C'est d'ailleurs dans le cadre de la détection d'ondes gravitationnelles qu'il a été introduit [58]. Il a été mis en pratique sur une grande variété de systèmes physiques. Sur des systèmes analogues à un oscillateur harmonique comme des faisceaux lumineux propageant

[59, 60, 61, 62, 63, 64], le mouvement cyclotron d'un électron [65], ou l'état du champ piégé avec la mesure de Gilles Nogues [54], sur des ensembles de spins 1/2 avec des ions piégés [66], ou sur des systèmes à deux niveaux tels que l'état interne d'un ion piégé [67], des molécules [68] ou plus récemment un quBit supraconducteur [69] ou une boîte quantique [70]. Nous allons montrer ici comment le concept de mesure quantique non destructive s'articule avec celui de la mesure généralisée [71]. Il faut préciser ce que l'on entend par mesure quantique non-destructive puisque toute mesure en mécanique quantique affecte en général l'état du système S à mesurer. En particulier, pour deux observables A et B ne commutant pas, la précision de notre connaissance sur les deux observables est limitée par la relation d'incertitude de Heisenberg :

$$\Delta A \Delta B \geq \langle [A, B] \rangle / 2. \tag{I.109}$$

Puisqu'une mesure quantique de l'observable A réduit le bruit de celle-ci, le bruit de l'observable B est donc augmenté. Cet effet est appelé « action en retour ». Pour certains couples d'observables les fluctuations induites sur B influent sur l'évolution ultérieure de l'observable A. Par exemple, une mesure parfaite de la position x résulte en l'indétermination complète de l'impulsion p. En conséquence, très peu de temps après la mesure, la valeur de la position est à nouveau indéterminée. Dans ce type de cas, une répétition de la mesure ne donne pas nécessairement le même résultat. La communauté s'est accordée pour ne pas donner le qualificatif de mesure non-destructive à ce type de mesure. Pour garantir le critère de répétabilité quel que soit l'intervalle de temps entre deux mesures, l'observable A à mesurer elle-même doit remplir la contrainte suivante pour être une « bonne observable QND » :

$$[H_S, A] = 0, \tag{I.110}$$

où H_S représente le Hamiltonien d'évolution libre du système S. Cette contrainte est en effet équivalente à dire que les sous-espace propres de A sont stables par action de l'opérateur d'évolution H_S.

On exige de plus, pour que la mesure soit non-destructive, que la mesure elle-même ne modifie pas la valeur de l'observable à mesurer. Nous utiliserons le formalisme de la mesure généralisée afin de définir ce critère : notons M_k les différents opérateurs de Kraus associés au protocole de mesure de A. Une condition nécessaire et suffisante pour que les sous-espaces propres de A soient stables par l'action de la mesure peut s'écrire :

$$[M_k, A] = 0 \qquad \forall k. \tag{I.111}$$

Cette condition assure que si le système est préparé dans un état où la valeur de A est parfaitement déterminée, cette valeur reste inchangée à l'issue de la mesure, quelqu'en soit le résultat.

Enfin, pour que la mesure apporte réellement une information sur la valeur de A, on demande qu'au moins un des opérateurs de Kraus M_k dépende de l'observable à mesurer A :

$$\exists\, k \setminus M_k \text{ dépende de } A. \tag{I.112}$$

Dans le cas où l'observable A n'a que des sous-espaces propres de dimension 1, les deux dernières contraintes reviennent simplement à dire que tous les opérateurs M_k sont diagonaux

dans la base formée des vecteurs propres de A, et qu'au moins l'un d'entre eux est différent de l'identité.

En particulier, toute mesure de von Neumann *d'une bonne observable QND* est non destructive. En effet, les opérateurs de Kraus sont les projecteurs sur les sous-espaces propres de A, ils commutent donc avec A. De plus, le résultat de la mesure dépend bien entendu de la valeur de A.

I.1.5 Principe de la reconstruction complète de l'état

Les progrès récents dans différents domaines de la physique expérimentale (optique quantique [14, 17, 16], ions piégés [7], circuits supraconducteurs [25]) ont permis de générer des états de plus en plus non-classiques. Afin de caractériser précisément les états produits et de vérifier leur non-classicité, la solution la plus fiable consiste à reconstruire sans connaissance à priori la matrice densité correspondant à l'état du système [72, 73, 74].

I.1.5.a Principe général

L'état d'un système étant un concept statistique, il est nécessaire de disposer d'un grand nombre de copies du système pour pouvoir le reconstruire. Sur chaque copie, on va mesurer une observable G_ν à l'intérieur d'un ensemble d'observables $\{G_\nu\}_{1\leq\nu\leq Y}$. Il est important de disposer de nombreuses copies du système, à la fois pour mesurer un grand nombre Y d'observables et pour disposer de suffisamment de résultats de mesure de chaque observable pour reconstruire leurs valeurs moyennes $g_\nu = \langle G_\nu \rangle$. Nous allons tenter de séparer le problème selon plusieurs cas limites :

1. Les valeurs moyennes sont mesurées précisément et le jeu d'observables $\{G_\nu\}$ est un ensemble complet (ou quorum [75]), c'est à dire que le système linéaire :

$$\mathrm{Tr}(\rho G_\nu) = g_\nu, \qquad \forall \nu \in [\![1, Y]\!] \tag{I.113}$$

   contraint complètement les éléments de la matrice densité (en particulier, le nombre de contraintes Y doit être supérieur au nombre de variables réelles indépendantes de la matrice densité $N^2 - 1$). Dans ce cas, on peut reconstruire complètement la matrice densité en inversant le système I.113. La méthode utilisée pour reconstruire l'état n'a alors pas grande importance puisque la matrice densité est déterminée sans ambiguïté par les contraintes précédentes.

2. Si les valeurs moyennes sont toujours mesurées suffisamment précisément pour qu'on puisse considérer les contraintes I.113 comme exactes, mais que le jeu d'observables ne forme pas un quorum, on parle alors de niveau d'observation incomplet. Dans ce cas, la question à laquelle nous pouvons espérer répondre est bien plus modeste : il s'agit, non plus de déterminer l'opérateur densité décrivant l'état après préparation, mais celui qui décrit au mieux notre connaissance du système étant donné notre niveau d'observation [76]. La méthode d'entropie maximum [77], présentée au paragraphe I.1.5.b, tente de répondre à cette question.

3. Le dernier cas limite est le cas où le nombre de mesures disponibles pour chaque observable est insuffisant pour extraire précisément les valeurs moyennes $\langle G_\nu \rangle$. On ne dispose que d'un grand nombre d'observables mesurées, avec pour chacune d'entre elle un petit nombre de réalisations ayant donné les différents résultats possibles. On doit alors réaliser une estimation de la matrice densité dans ces conditions. La méthode du maximum de vraisemblance cherche la matrice densité ρ_{me} qui maximise la probabilité des différents résultats de mesure. La méthode du maximum de vraisemblance, ainsi qu'un algorithme itératif permettant de trouver aisément ρ_{me} sera présentée à la section I.1.5.c

I.1.5.b Reconstruction par Entropie maximum

On s'intéresse ici au problème suivant : la valeur moyenne du jeu d'observables $\{G_\nu\}$ est donnée :

$$\langle G_\nu \rangle = g_\nu. \tag{I.114}$$

De plus, on suppose que les $\{G_\nu\}$ forment un ensemble incomplet d'observables. c'est à dire qu'un grand nombre d'opérateurs densités ρ vérifient le jeu de contraintes I.113. Il s'agit alors de déterminer l'opérateur ρ_{me} qui décrit au mieux notre connaissance du système. En d'autres termes, après le comportement aléatoire dû au caractère quantique du système, celui dû à la préparation probabiliste, une troisième source d'aléas s'ajoute, qui vient de la connaissance incomplète de l'observateur sur l'état du système. On cherche donc la matrice densité qui ne contient pas d'autres hypothèses sur l'état du système que les valeurs moyennes mesurées.

Outre le jeu de contraintes I.113, la matrice recherchée doit être normée :

$$\text{Tr}(\rho) = 1 \tag{I.115}$$

Le principe d'entropie maximum consiste à choisir parmi tous les opérateurs ρ vérifiant ces contraintes, celui présentant la plus grande entropie :

$$S(\rho_{me}) = -\text{Tr}(\rho_{me} \ln(\rho_{me})) \geq S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \ln(\rho)) \tag{I.116}$$

pour tout opérateur densité ρ vérifiant (I.113).

Si l'on retourne à notre comparaison avec l'alphabet. La situation est à présent la suivante. Le lecteur a affaire à un langage inconnu dont il ne peut mesurer que certaines propriétés statistiques comme les fréquences de certains caractères par exemple : s'il sait par exemple que le caractère « e » apparaît avec une fréquence de 15%, que le caractère « s » apparaît avec une fréquence de 8% alors qu'il ne sait rien des fréquences d'apparition des autres lettres. L'hypothèse d'entropie maximum consiste alors à considérer qu'étant donné l'état de ses connaissances, la distribution de probabilité la plus fiable est la suivante :

$$\begin{aligned} P_{me}(e) &= 0{,}15 \\ P_{me}(s) &= 0{,}08 \\ P_{me}(X) &= \frac{0{,}77}{24} = 0{,}042 \end{aligned}$$

où $P(X)$ est la probabilité des 24 caractères différents de « e » et « s ». Ce raisonnement nous est somme toute assez familier.

Afin de trouver en pratique l'opérateur ρ_{me} qui maximise S tout en vérifiant les contraintes (I.113), on utilise la méthode des multiplicateurs de Lagrange : on construit la fonctionnelle :

$$L(\rho, \lambda_i) = -\mathrm{Tr}(\rho \ln(\rho)) + \sum_{\nu} \lambda_\nu \left(\mathrm{Tr}(\rho G_\nu) - g_\nu\right) + \lambda_0(\mathrm{Tr}(\rho) - 1), \tag{I.117}$$

où les $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq N}$ sont les multiplicateurs de Lagrange associés aux N contraintes (I.113) et λ_0 est le multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte de normalisation de ρ. Le problème de maximisation sous contraintes se résout en annulant les dérivées partielles de L par rapport à tous les coefficients de ρ :

$$\frac{\partial L}{\partial \rho} = 0, \tag{I.118}$$

ainsi que par rapport à tous les multiplicateurs λ_i :

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0. \tag{I.119}$$

On montre que l'équation (I.118) aboutit à :

$$\rho_0 = \frac{1}{Z} \exp\left(-\sum_{\nu\geq 1} \lambda_\nu G_\nu\right), \tag{I.120}$$

avec $Z = \mathrm{Tr}\left[e^{-\sum_\nu \lambda_\nu G_\nu}\right]$. L'opérateur obtenu est alors par construction un opérateur densité hermitien, normé et positif. En reportant cette forme dans (I.119), on obtient :

$$\mathrm{Tr}(\rho_0 G_\nu) - g_\nu = 0, \qquad \forall \nu \in [\![1, Y]\!]. \tag{I.121}$$

Les $\{\lambda_i\}_{1\leq i\leq M}$ s'obtiennent en résolvant ce système non-linéaire.

Jusqu'ici, on a considéré que les valeurs moyennes mesurées étaient exactes. En réalité, elles sont nécessairement entachées d'un bruit statistique. Il se peut même, en particulier si le nombre de contraintes est grand et que la taille de l'espace de Hilbert est petite, qu'aucun opérateur densité ne vérifie le jeu de contraintes I.121. Dans ce cas, on cherchera les multiplicateurs de Lagrange qui minimisent l'écart quadratique aux mesures χ^2 :

$$\chi^2 = \sum_{\nu=1}^{M} \left(\mathrm{Tr}(\rho_0 G_\nu) - g_\nu\right)^2. \tag{I.122}$$

Cas de la distribution thermique Un premier cas limite est donné lorsque le niveau d'observation se limite à la mesure de la valeur moyenne de l'énergie. Notons $\langle n\rangle = \bar{n}$ la valeur moyenne du nombre de photons qu'on suppose être la seule observable mesurée. D'après l'équation (I.120), ρ doit être choisie suivant la distribution thermique :

$$\rho_{\mathrm{th}} = \frac{1}{Z} e^{-\lambda n}. \tag{I.123}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la valeur de λ à l'aide de l'équation :

$$\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{th}} n) = \bar{n}, \tag{I.124}$$

qui donne $\lambda = \ln\left(\frac{\bar{n}+1}{\bar{n}}\right)$. On obtient finalement :

$$\rho_{\mathrm{th}} = \sum_n \frac{\bar{n}^n}{(\bar{n}+1)^{n+1}} |n\rangle\langle n|. \tag{I.125}$$

Il s'agit de la distribution thermique d'énergie moyenne $\bar{n}$. On retrouve le fait que la distribution thermique est la distribution qui maximise l'entropie à une énergie moyenne donnée.

I.1.5.c Reconstruction par Maximum de vraisemblance

Définition de la vraisemblance Le point de départ de cette méthode est très différent de celui présenté plus haut. On considère un ensemble de mesures décrites par les POVMs :

$$\{E_{\nu,i}\}_{1 \leq \nu \leq N}. \tag{I.126}$$

Comme précédemment, ν représente l'indice de la mesure généralisée (comme G_ν représentait l'indice de l'observable que l'on a choisi de mesurer). On va noter $N_{\nu,i}$ le nombre de mesures généralisées d'indice ν ayant donné le résultat i et $N_{\nu,\mathrm{total}} = \sum_i N_{\nu,i}$ est le nombre total de mesures d'indice ν réalisées sur le système.

On définit alors la vraisemblance (ou likelihood) dans l'état décrit par ρ :

$$L(\rho) = \prod_{\nu,i} p_{\nu,i}^{N_{\nu,i}}, \tag{I.127}$$

où

$$p_{\nu,i} = \mathrm{Tr}\left(\rho E_{\nu,i}\right) \tag{I.128}$$

est la probabilité pour la mesure généralisée d'indice ν de donner le résultat i. La vraisemblance est donc la probabilité – généralement très faible – d'avoir obtenu les fréquences de résultats $f_{\nu,i}$:

$$f_{\nu,i} = N_{\nu,i}/N_{\nu,\mathrm{total}}, \tag{I.129}$$

sachant que le système était préparé dans l'état ρ.

Méthode du maximum de vraisemblance La méthode du maximum de vraisemblance consiste simplement à trouver l'opérateur ρ_{ml} qui maximise $L(\rho)$. La maximisation directe de la fonctionnelle $L(\rho)$ est un problème numérique délicat : en effet, le simple calcul de $L(\rho)$ fait intervenir un produit d'autant de termes qu'il n'y a de résultats de mesures distincts sur le système. Le calcul direct de $L(\rho)$ est donc une opération longue, en particulier lorsque le nombre de mesures augmente. Une première méthode naïve consiste à paramétriser une matrice densité, par exemple en utilisant la forme suivante :

$$\rho = T^\dagger T, \tag{I.130}$$

où T est une matrice triangulaire supérieure : cette forme assure que ρ est hermitienne et positive. On maximise ensuite $L(\rho)$ en variant les coefficients de T. Cette méthode est extrêmement inefficace car l'ajustement a lieu dans un espace de grande dimension, ce qui oblige à calculer un grand nombre de fois $L(\rho)$.

Lvovsky et al. [78] ont proposé une méthode élégante pour maximiser la vraisemblance à l'aide d'un processus itératif : on montre que ρ_{ml} est un point fixe des transformations :

$$\rho \to \rho' = R(\rho)\rho, \tag{I.131}$$

$$\rho \to \rho' = \rho R(\rho), \tag{I.132}$$

où $R(\rho)$ est un opérateur dépendant à la fois des résultats de mesures et de ρ, définit par :

$$R(\rho) = \sum_{\nu,i} \frac{f_{\nu,i}}{p_{\nu,i}} E_{\nu i} \tag{I.133}$$

$$= \sum_{\nu,i} \frac{f_{\nu,i}}{\mathrm{Tr}\,(\rho E_{\nu i})} E_{\nu i}. \tag{I.134}$$

On se convainc aisément que pour la matrice densité cherchée, $f_{\nu,i}/p_{\nu,i} \to 1$ à la limite d'un grand nombre de mesures. En effet, dans cette limite, la fréquence de chaque résultat est proportionnelle à sa probabilité $P_{\nu,i}$. On a donc, pour la matrice ρ cherchée :

$$R(\rho) = \sum_{\nu,i} E_{\nu i} \propto \mathbb{1}, \tag{I.135}$$

à cause de la normalisation des POVM :

$$\sum_{i} E_{\nu i} = \mathbb{1}. \tag{I.136}$$

La méthode proposée par Lvovsky et al. consiste donc à itérer la transformation :

$$\rho_{n+1} = \frac{R(\rho_n)\rho_n R(\rho_n)}{\mathrm{Tr}(R(\rho_n)\rho_n R(\rho_n))}, \tag{I.137}$$

en partant d'une matrice densité ρ_0 initiale quelconque (la multiplication à gauche et à droite permet de conserver l'hermiticité et la positivité de ρ à chaque étape). On peut montrer que la vraisemblance augmente de façon monotone à chaque itération, ρ_n se rapprochant de plus en plus de ρ_{me}.

Maximum d'entropie ou maximum de vraisemblance Dans les paragraphes précédents, un point important n'a pas été discuté. La donnée de base de la méthode d'entropie maximale est l'ensemble des valeurs moyennes d'un jeu d'observables. Néanmoins, dans le cas général, on ne mesure pas des valeurs moyennes, mais des distributions de probabilités pour les différents résultats possibles d'une mesure. Pour être plus précis, séparons le problème suivant les différents cas possibles :

1. Les observables mesurées ne possèdent que deux valeurs propres distinctes. Dans ce cas, la connaissance de la valeur moyenne de l'observable est parfaitement équivalente à la connaissance de la distribution de probabilité des différents résultats possibles (ou encore à la connaissance des moments d'ordre supérieur).

2. Les observables mesurées possèdent plus de deux valeurs propres distinctes. Dans ce cas, en moyennant la distribution de probabilité mesurée afin d'en extraire la valeur moyenne, on perd une quantité d'information certaine. Si l'on veut se ramener au cas précédent, il faut décomposer l'observable mesurée suivant la somme des projecteurs sur ses vecteurs propres P_i (voir (I.92)). Ainsi, on notera $P_\nu(i)$ la probabilité, estimée expérimentalement, d'obtenir le résultat i à l'issue de la mesure de G_ν. La matrice densité doit alors satisfaire le jeu de contraintes :

$$P_\nu(i) = \mathrm{Tr}(P_i\rho). \tag{I.138}$$

   Ainsi, au lieu de M contraintes correspondants aux valeurs moyennes des observables G_ν, la matrice densité doit à présent satisfaire un nombre beaucoup plus grand de contraintes correspondant à chacun des résultats possibles des mesures de G_ν. L'ajustement des multiplicateurs de Lagrange minimisant (I.122) devient alors très vite impraticable à cause du nombre de paramètres libres. De plus, on suppose ici que les mesures donnent directement la probabilité $P_\nu(i)$ de trouver l'état dans un sous-espace propre de l'observable mesurée. En d'autre terme, on doit disposer d'une mesure de von Neumann de G_ν afin de mettre en oeuvre simplement cette méthode.

Le point de départ de la méthode d'entropie maximum est en fait un peu artificiel du point de vue de l'expérimentateur : on suppose en effet que sa connaissance du système est incomplète car certaines observables du quorum lui sont inaccessibles. En réalité, la limitation est d'un autre ordre : l'observateur est limité par le nombre de copies du système dont il dispose (c'est à dire par le temps que les étudiants sont prêts à passer au laboratoire pour acquérir les données). Dans ce cadre, il semble un peu artificiel de mesurer longuement quelques observables du quorum afin de connaître précisément leur valeur moyenne et de ne pas du tout mesurer les autres. En pratique, on va généralement mesurer un ensemble complet d'observables avec un nombre de copies faible pour chaque observable. Si le nombre de valeurs propres des observables est supérieur à deux, l'information contenue dans les valeurs moyennes est incomplète, les moments d'ordre supérieur de la distribution de probabilité contiennent également de l'information. Il est donc plus avantageux de relâcher les contraintes sur les valeurs moyennes (I.113). Au contraire, lorsque les observables sont bivaluées, la totalité de l'information étant dans les valeurs moyennes, il semble logique d'imposer une contrainte forte sur ces dernières. L'estimation par maximum de vraisemblance permet effectivement de prendre en compte les moments d'ordre supérieur des distributions puisqu'elle fait intervenir la fréquence d'apparition de chaque résultat possible au lieu d'imposer une contrainte forte sur la valeur moyenne des mesures.

Pour conclure cette discussion, on pourra retenir que la méthode d'entropie maximum, en posant une contrainte rigide sur les valeurs moyennes des observables mesurées est très bien adaptée aux problèmes où les observables sont bivaluées. Nous l'avons d'ailleurs mise en pratique dans des situations voisines de celle-ci comme nous le verrons au chapitre IV. On préférera

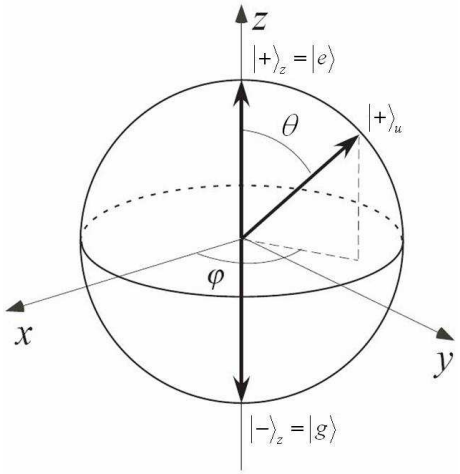


FIG. I.11 – La sphère de Bloch permet de représenter l'état d'un système à deux niveaux

cependant la méthode d'estimation par le maximum de vraisemblance lorsque les observables mesurées possèdent plus de deux valeurs propres distinctes.

I.2 Atomes à deux niveaux

I.2.1 La sphère de Bloch

Nous utilisons des atomes assimilés à des systèmes à deux niveaux. Ils sont donc formellement analogues à n'importe quel spin 1/2. On définit les matrices de Pauli dans la base $\{|e\rangle, |g\rangle\}$:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{I.139}$$

L'état d'un atome est décrit sans ambiguïté par la donnée des valeurs moyennes de ces trois observables :

$$\mathbf{S} = \langle \sigma \rangle. \tag{I.140}$$

Le vecteur à trois dimensions $\mathbf{S}$ est appelé pseudo-spin atomique. Lorsque l'atome est dans un état pur décrit par le vecteur d'état $|\Psi_{\text{a.}}\rangle$:

$$|\Psi_{\text{a.}}\rangle = \cos(\theta/2)|e\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2)|g\rangle, \tag{I.141}$$

l'extrémité du pseudo-spin atomique se trouve sur la surface d'une sphère de rayon unité appelée sphère de Bloch, au point de coordonnées polaires (θ, ϕ). Le pseudo-spin atomique des mélanges statistiques pointe quant à lui, à l'intérieur de la sphère de Bloch.

Il est très important de noter que les observables σ_x, σ_y et σ_z ne commutent pas entre elles. Ainsi, il est impossible de mesurer simultanément les différentes composantes du pseudo-spin atomique sur une seule copie du système.

I.2.2 Evolution du spin atomique libre dans un champ classique

L'intérêt de la sphère de Bloch est de permettre de représenter aisément toute évolution unitaire à l'aide d'une rotation [5]. Nous allons voir que l'analogie avec un spin $1/2$ peut être poussée plus loin. En effet, l'évolution sous l'effet d'un champ oscillant extérieur est équivalente à l'évolution d'un spin $1/2$ dans un champ magnétique bien choisi : le vecteur de Bloch précesse autour de la direction du pseudo-champ magnétique. Nous allons tout d'abord considérer le cas simple où l'évolution n'est pas perturbée par l'application d'un champ extérieur avant d'étudier l'évolution en présence d'un champ extérieur.

Le hamiltonien H_{at} décrivant l'évolution libre est donné par :

$$H_{\text{at}} = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\left(|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|\right) = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\sigma_z, \tag{I.142}$$

en choisissant l'origine des énergies entre les deux niveaux atomiques. On vérifie alors aisément (à l'aide de la formule (I.141) par exemple) que le vecteur de Bloch précesse autour de l'axe O_z à la fréquence Ω_{at}.

Lorsque l'on couple l'atome à un champ classique $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}\sin(\omega_r t + \phi_r)$, l'évolution du champ est indépendante de celle de l'atome, et on peut prendre en compte la présence du champ par un terme supplémentaire H_r dans le Hamiltonien atomique. Si le champ est suffisamment faible et que la dimension de l'atome reste petite devant la longueur d'onde, on peut écrire ce terme :

$$H_r = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(t), \tag{I.143}$$

où $\mathbf{d}$ est l'opérateur dipôle électrique de l'atome (supposé réel) :

$$d = \mathbf{d_{eg}}(\sigma_- + \sigma_+) \qquad \sigma_+ = |e\rangle\langle g| \qquad \sigma_- = |g\rangle\langle e|, \tag{I.144}$$

d'où

$$H_r = -\mathbf{d}_{eg}\cdot\mathbf{E}(\sigma_+ + \sigma_-)\sin(\omega_r t + \phi_r). \tag{I.145}$$

Nous noterons $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_r$ le désaccord entre fréquence atomique et champ Ramsey. On peut alors réécrire le Hamiltonien total sous la forme :

$$H = \frac{\hbar\omega_r}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z + H_r. \tag{I.146}$$

On va ensuite se placer en représentation d'interaction par rapport au premier terme du Hamiltonien, ce qui revient à se placer dans le référentiel tournant à la fréquence ω_r :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z + i\frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma^- e^{i\phi_r} - \sigma^+ e^{-i\phi_r}\right), \tag{I.147}$$

où on a noté $\Omega = \mathbf{d}_{eg}\cdot\mathbf{E}/\hbar$. On a appliqué ici l'approximation séculaire consistant à éliminer tout les termes oscillants à la fréquence $2\omega_r$. On peut réécrire cette expression :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar\delta}{2}\sigma_z + \frac{\hbar\Omega}{2}\left(\sigma_y\cos(\phi_r) - \sigma_x\sin(\phi_r)\right) \tag{I.148}$$

[5] On parle ici d'opérateur unitaire de l'espace des fonctions d'ondes et non de $\mathbb{R}^3$. Ainsi, par exemple, les vecteurs d'état orthogonaux sont représentés par des vecteurs opposés sur la sphère de Bloch

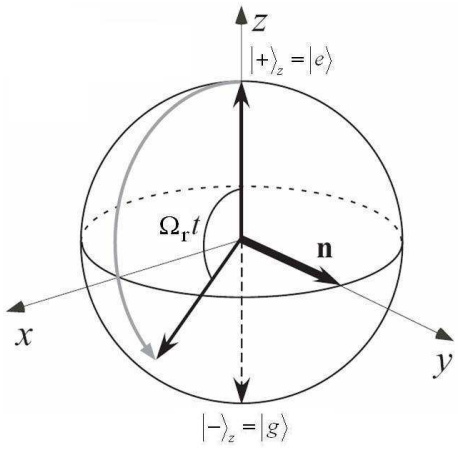


FIG. I.12 – Effet d'une impulsion de micro-onde classique sur le vecteur de Bloch d'un atome initialement préparé dans l'état $|e\rangle$. Le vecteur unitaire **n** autour duquel s'effectue la rotation se trouve dans le plan équatorial. La phase de l'impulsion micro-onde détermine son angle azimutal. Ici, on a choisi $\phi = \pi/2$.

grâce aux identités :

$$\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y). \tag{I.149}$$

On reconnaît alors le Hamiltonien d'un spin 1/2 plongé dans un champ magnétique extérieur :

$$\tilde{H} = \frac{\hbar}{2}\mathbf{\Omega}_{\text{eff}} \cdot \sigma, \tag{I.150}$$

avec

$$\mathbf{\Omega}_{\text{eff}} = \begin{pmatrix} -\Omega \sin\phi_r \\ \Omega \cos\phi_r \\ \delta \end{pmatrix}. \tag{I.151}$$

En particulier, lorsqu'on applique une impulsion micro-onde à résonance avec la fréquence atomique, le champ effectif se trouve dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. En jouant sur la durée de l'interaction (ou sur l'intensité du champ micro-onde), on peut, en partant d'un atome préparé dans l'état $|e\rangle$ ou $|g\rangle$, préparer n'importe quelle superposition atomique :

$$\begin{aligned} |e\rangle \rightarrow &\quad \cos(\alpha/2)|e\rangle - e^{i\phi_r}\sin(\alpha/2)|g\rangle \\ |g\rangle \rightarrow &\quad e^{-i\phi_r}\sin(\alpha/2)|e\rangle + \cos(\alpha/2)|g\rangle, \end{aligned}$$

I.2.3 Interférométrie de Ramsey

L'interférométrie atomique est très similaire à l'interférométrie réalisée avec un faisceau lumineux : au lieu d'utiliser des lames séparatrices pour séparer la fonction d'onde de photons

suivant deux modes spatiaux différents, on applique des impulsions $\pi/2$ de Ramsey pour séparer la fonction d'onde atomique suivant les deux états internes de l'atome $|e\rangle$ et $|g\rangle$.

Une séquence de frange de Ramsey se déroule suivant les étapes suivantes :

1. L'atome initialement préparé dans l'état $|g\rangle$ est soumis à une impulsion $\pi/2$ classique[6]. La fonction d'onde atomique subit donc la transformation unitaire suivante :

$$|g\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle). \tag{I.152}$$

2. L'atome poursuit sa route à travers l'interféromètre où nous supposerons pour l'instant qu'il évolue librement. L'évolution de la fonction d'onde atomique est donc, dans le référentiel tournant à la pulsation ω_r :

$$|\Psi_{\text{a.}}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\delta t/2}|e\rangle + e^{i\delta t/2}|g\rangle). \tag{I.153}$$

   Cette évolution correspond à une rotation du vecteur de Bloch suivant le plan équatorial de la sphère de Bloch à la pulsation δ.

3. L'atome subit ensuite une deuxième impulsion $\pi/2$ dans la seconde zone de Ramsey à l'instant T. La phase ϕ_r de cette impulsion est contrôlée précisément par rapport à la phase de la première. Le choix de cette phase correspond au choix d'une direction particulière $\mathbf{n}$ dans l'équateur de la sphère de Bloch. Le vecteur de Bloch effectue alors une rotation d'angle $\pi/2$ autour du vecteur $\mathbf{n}$.

$$|\Psi_{\text{a.}}\rangle \rightarrow e^{-i\phi_r/2}\cos(\frac{\phi_r - T\delta}{2})|e\rangle + ie^{i\phi_r/2}\sin(\frac{\phi_r - T\delta}{2})|g\rangle, \tag{I.154}$$

4. L'état atomique est finalement détecté dans le détecteur à ionisation. Ainsi, la probabilité de détecter l'atome dans $|e\rangle$ dépend sinusoïdalement de la phase accumulée $T\delta/2$. En fait, cette probabilité est proportionnelle à la composante Oz du vecteur de Bloch juste avant la seconde impulsion de Ramsey.

Les deux dernières étapes permettent ainsi de mesurer une direction arbitraire du pseudo-spin atomique au moment de la deuxième impulsion de Ramsey. En particulier, si la fréquence Ramsey est parfaitement à résonance avec la fréquence atomique, l'effet des deux impulsions $\pi/2$ s'ajoute (on suppose qu'elles sont effectuées toutes les deux avec la même phase $\phi = 0$) et l'atome est détecté dans l'état $|e\rangle$ avec probabilité 1. Au contraire, si la fréquence de Ramsey est très légèrement désaccordée de façon à ce que la superposition atomique acquiert une phase $T\delta/2 = \pi$ au moment de la seconde impulsion de Ramsey, la seconde impulsion annule parfaitement l'effet de la première, et l'atome est détecté dans l'état $|g\rangle$ de façon certaine. La figure I.13 montre la probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ en fonction du désaccord δ pour une séparation de $T = 360{,}3\ \mu\text{s}$ entre les deux impulsions. Ces oscillations sont appelées franges de Ramsey [79] et elles sont à la base du fonctionnement des horloges atomiques [80].

[6]Par simplicité, on choisit la phase $\phi_r = 0$.

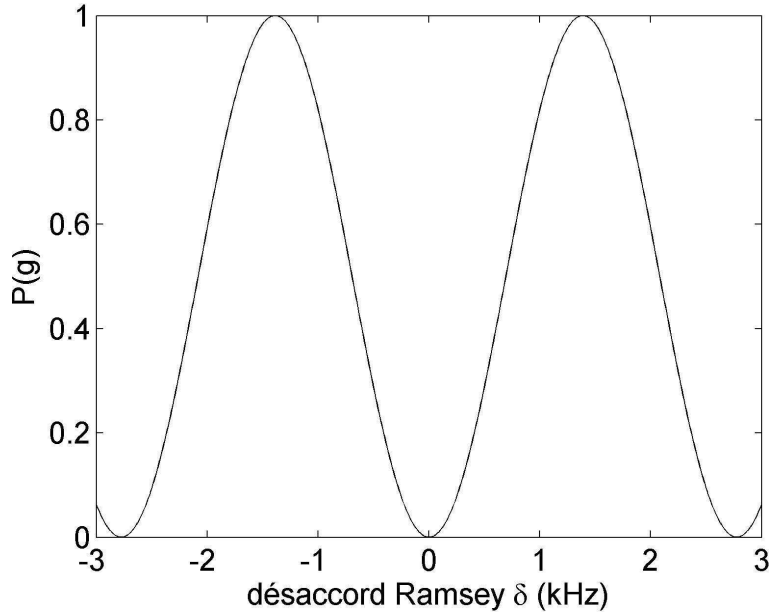


FIG. I.13 – Franges de Ramsey : La probabilité de détecter l'atome dans $|g\rangle$ dépend sinusoïdalement de la phase accumulée entre les deux impulsions de Ramsey.

I.3 Interaction atome-champ quantique

I.3.1 Le Hamiltonien de Jaynes-Cummings

Afin d'étudier l'interaction entre l'atome et la cavité contenant quelques photons, il est nécessaire de garder une description quantique des deux systèmes. L'évolution des deux systèmes n'est alors plus séparable et elle est décrite par un terme d'interaction qui s'écrit dans l'approximation dipolaire électrique :

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{d}\cdot\hat{\mathbf{E}} = -E_0 f(\mathbf{r}) \quad \Big(\mathbf{d}_{eg}\cdot\epsilon|e\rangle\langle g|a + \mathbf{d}^*_{eg}\cdot\epsilon^*|g\rangle\langle e|a^\dagger + \mathbf{d}_{eg}\cdot\epsilon^*|e\rangle\langle g|a + \mathbf{d}^*_{eg}\cdot\epsilon|g\rangle\langle e|a\Big). \tag{I.155}$$

Les deux premiers termes correspondent à des processus résonnants (ou au moins proche de résonance lorsque la fréquence atomique est voisine de la fréquence de la cavité.) : Le champ perd un photon tandis que l'atome gagne un quantum ou encore, le champ gagne un photon tandis que l'atome se désexcite. Les deux derniers termes, correspondant au gain ou à la perte de deux quanta au total par le système sont très fortement non-résonants et seront donc négligés dans la suite. On peut choisir les phases des niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ de sorte que le terme $-\mathbf{d}_{eg}\cdot\epsilon$ soit réel et positif. On note alors $\Omega_0 = -2E_0\mathbf{d}_{eg}\cdot\epsilon/\hbar$. Le hamiltonien d'interaction s'écrit alors :

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar\Omega_0}{2} f(\mathbf{r})(|e\rangle\langle g|a + |g\rangle\langle e|a^\dagger). \tag{I.156}$$

Le paramètre $\Omega_0/2\pi$ caractérise le couplage entre les deux systèmes et est appelé fréquence de Rabi du vide. En effet, il s'agit de la fréquence à laquelle une cavité initialement vide échange

réversiblement un quantum avec un atome initialement excité.

On peut alors écrire le Hamiltonien total connu sous le nom de hamiltonien de Jaynes-Cummings :

$$H_{JC} = \frac{\hbar\omega_{\text{at}}}{2}\sigma_z + \hbar\omega_0(a^\dagger a + 1/2) + \frac{\hbar\Omega_0}{2}f(\mathbf{r})(\sigma^+ a + \sigma^- a^\dagger). \tag{I.157}$$

Il s'agit du hamiltonien décrivant toutes les expériences mettant en jeu un oscillateur harmonique couplé à un spin 1/2. Il s'applique aussi dans le cas des ions piégés ou des qubits supraconducteurs par exemple.

Nous allons diagonaliser ce hamiltonien dans la base des états stationnaires des deux systèmes libres. Remarquons que les espaces du type $\{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}$ sont stables par action du hamiltonien. On peut alors écrire le hamiltonien H_n restreint au sous-espace de base $\{|e,n\rangle, |g,n+1\rangle\}$[7] :

$$H_n = \hbar\begin{pmatrix}\omega_0(n+1)+\delta/2 & \Omega_n/2\\ \Omega_n/2 & \omega_0(n+1)-\delta/2\end{pmatrix}, \tag{I.158}$$

où $\delta = \omega_{\text{at}} - \omega_0$ représente encore une fois le désaccord entre cavité et transition atomique et

$$\Omega_n = \Omega_0\sqrt{n+1} \tag{I.159}$$

est le couplage entre les deux états $|e,n\rangle$ et $|g,n+1\rangle$. Les états propres de ce hamiltonien s'écrivent :

$$\begin{aligned}|+,n\rangle &= \cos\tfrac{\theta_n}{2}|e,n\rangle + \sin\tfrac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle\\ |-,n\rangle &= \sin\tfrac{\theta_n}{2}|e,n\rangle - \cos\tfrac{\theta_n}{2}|g,n+1\rangle,\end{aligned} \tag{I.160}$$

avec

$$\tan\theta_n = \frac{\Omega_n}{\delta}. \tag{I.161}$$

On les appelle « états habillés de l'atome et du champ ». Leurs valeurs propres associées sont :

$$E_{\pm,n} = \hbar\omega_0(n+1) \pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{\Omega_n^2+\delta^2}. \tag{I.162}$$

La figure I.14 montre la variation de ces énergies en fonction du désaccord. A très grand désaccord, les niveaux sont très peu affectés par le couplage et leur énergie est très voisine de celle des niveaux non couplés. A résonance, au contraire, les états propres habillés sont des états où les deux systèmes sont maximalement intriqués et leur énergie diffère maximalement de celle des états non couplés. On sépare donc en général deux régimes de fonctionnement différents. A désaccord nul, le régime d'interaction résonante est caractérisé par un échange cohérent d'énergie entre atome et champ. A grand désaccord, l'interaction dispersive ne donne lieu à aucun échange d'énergie, mais à une modification des niveaux énergétiques. Nous allons étudier dans ce chapitre le cas résonnant. Le régime dispersif, fondamental pour nos mesures non-destructives de la lumière sera étudié en détail au chapitre III.

[7] Pour alléger les notations, on suppose que l'atome est au centre du mode où $f(\mathbf{r}) = 1$.

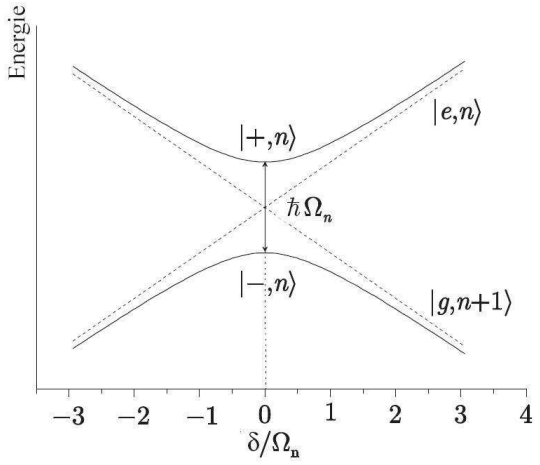


FIG. I.14 – Energie des états habillés en fonction du désaccord atome-champ δ. Les lignes pointillés représentent l'énergie des états non couplés. L'interaction lève la dégénérescence des niveaux à résonance, formant un anticroisement.

I.3.2 Régime résonnant

I.3.2.a Les états habillés

On peut réécrire les états propres du hamiltonien dans le cas résonant ($\delta = 0$) :

$$\begin{aligned} |+,n\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,n\rangle + |g,n+1\rangle\right) \\ |-,n\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|e,n\rangle - |g,n+1\rangle\right). \end{aligned} \tag{I.163}$$

Ces états sont qualifiés d'états habillés de l'atome par le champ en raison de la forte intrication entre les deux systèmes et leurs énergies respectives sont données par :

$$E_{\pm,n} = \hbar\omega_0(n+1) \pm \frac{\hbar}{2}\Omega_n. \tag{I.164}$$

Le système (I.163) peut être inversé afin d'obtenir l'évolution d'un atome initialement préparé dans l'état $|e\rangle$ où $|g\rangle$:

$$\begin{aligned} |e,n\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,n\rangle + |-,n\rangle\right) \\ |g,n+1\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+,n\rangle - |-,n\rangle\right). \end{aligned} \tag{I.165}$$

I.3.2.b Oscillations de Rabi du vide

Supposons que l'atome est préparé dans l'état $|e\rangle$ et la cavité dans l'état vide $|0\rangle$. On peut décomposer l'état du système suivant les états propres du hamiltonien grâce à (I.165) :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}(t=0)\rangle = |e,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,0\rangle + |-,0\rangle). \tag{I.166}$$

Ainsi, l'état évolue aux temps ultérieurs en :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-iE_{+,0}t/\hbar}|+,0\rangle + e^{-iE_{-,0}t/\hbar}|-,0\rangle\right), \tag{I.167}$$

que l'on peut réécrire à un facteur de phase globale près :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}(t)\rangle = \cos\frac{\Omega_0 t}{2}|e,0\rangle - i\sin\frac{\Omega_0 t}{2}|g,1\rangle. \tag{I.168}$$

Le système oscille donc au cours du temps entre l'état initial $|e,0\rangle$ et l'état $|g,1\rangle$. On assiste donc a un échange cohérent d'un quantum d'énergie entre l'atome et le champ. La probabilité de trouver l'atome dans $|e\rangle$ évolue au cours du temps selon :

$$P_e(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos\Omega_0 t). \tag{I.169}$$

Elle oscille donc à la pulsation Ω_0. Ce phénomène est appelé oscillation de Rabi quantique. Il se généralise aisément au cas où le champ contient un nombre de photons non nul à condition de remplacer la fréquence de Rabi Ω_0 par $\Omega_n = \sqrt{n+1}\Omega_0$.

On parle de *régime de couplage fort* lorsque la période de Rabi du vide $T_{\text{rabi}} = 2\pi/\Omega_0$ est à la fois plus courte que le temps de vie de la cavité et que celui du système atomique. Dans ces conditions, on dispose de suffisamment de temps pour intriquer les deux systèmes en les faisant interagir avant qu'ils ne relaxent. Nous allons voir au chapitre suivant que notre système expérimental nous permet d'atteindre très largement le régime de couplage fort.

Chapitre II

Le système expérimental

Nous venons d'étudier un modèle très simple permettant de décrire l'interaction entre un atome à deux niveaux et un mode du champ électromagnétique. Nous allons à présent décrire le système expérimental que nous utilisons pour implémenter le modèle de Jaynes-Cummings. Notre dispositif d'électrodynamique quantique en cavité permet de contrôler et de faire interagir deux systèmes quantiques très simples. Dans une première partie, nous donnerons une vue d'ensemble du dispositif expérimental avant de nous concentrer sur les deux acteurs principaux des expériences : des atomes excités dans les états de Rydberg et une cavité micro-onde de grande finesse. Enfin, nous reviendrons sur le montage expérimental et les techniques utilisées pour manipuler les deux systèmes.

II.1 Schéma général du dispositif expérimental

Le système idéal vers lequel nous aimerions tendre consiste en une série d'atomes à deux niveaux traversant un à un une boîte capable de piéger les photons pour un temps très long. Ce système isolé de son environnement est décrit par le Hamiltonien de Jaynes-Cummings, et permet de générer des états intriqués entre photons piégés et atomes. Afin de se rapprocher au maximum de cette image idéale, nous devons minimiser la relaxation des atomes dans les modes de l'environnement ainsi que les pertes de la cavité et au contraire, maximiser le couplage des atomes et du mode de la cavité. Les cavités offrant les temps de vie les plus longs tout en conservant un encombrement raisonnable sont obtenues dans le domaine des micro-ondes, résonnantes autour de quelques dizaines de gigahertz pour des longueurs d'onde λ de l'ordre du centimètre. Les photons micro-onde, dont l'énergie est plus faible que le gap de certains matériaux supraconducteurs autorisent leur utilisation pour la surface des miroirs. Cela réduit significativement les pertes par effet Joule à la surface du miroir et a permis d'obtenir des temps de vie de l'ordre du dixième de seconde avec nos cavités en Niobium. Les transitions micro-onde utilisées habituellement en physique atomique (transitions Zeeman ou transitions hyperfines) ne sont pas adaptées à notre problème à cause de leur couplage très faible au champ électromagnétique. Nous utilisons des transitions entre états de Rydberg hautement excités. Ces transitions sont très fortement couplées au champ électromagnétique. Il existe une multitude d'états de Rydberg autour d'une énergie

donnée différant par leur moment angulaire. Les états de Rydberg de faible moment angulaire se désexcitent rapidement vers des états de faible énergie via des transitions optiques. Afin de pallier à ce problème nous utilisons les états de Rydberg circulaires pour lesquels les règles de sélection interdisent cette voie de désexcitation. Le temps de vie des atomes de Rydberg circulaires utilisés dans nos expériences est de près de 30 ms, ce qui correspond à un trajet de plusieurs mètres à des vitesses thermiques.

La figure II.1 représente une expérience typique d'électrodynamique quantique en cavité avec des atomes de Rydberg circulaires. Un four contenant une vapeur de Rubidium produit un jet thermique d'atomes dont la vitesse v varie typiquement de 150 à 500 m/s. Les atomes traversent le dispositif expérimental dont le coeur est la cavité supraconductrice C. Ils sont d'abord excités dans les états de Rydberg circulaires dans la boîte B appelée « boîte à circulariser ». Ils traversent ensuite une première cavité de faible facteur de qualité R_1 appelée zone de Ramsey dans laquelle ils peuvent subir des impulsions micro-ondes résonnantes afin de manipuler leur état interne. Ils interagissent ensuite avec la cavité pendant un temps variant de $\lambda/v \approx 10$ à 40 µs selon leur vitesse. Afin de choisir la direction de détection de leur pseudo-spin (voir paragraphe I.2.3), les atomes traversent ensuite une deuxième zone de Ramsey R_2 avant d'être détectés par ionisation dans le détecteur D. On obtient pour chaque atome une information binaire correspondant à la détection de l'atome dans $|g\rangle$ ou $|e\rangle$.

Nous allons étudier dans la suite de ce chapitre, différents aspects de l'expérience en commençant par les atomes de Rydberg utilisés, puis la cavité supraconductrice, et enfin, nous étudierons plus précisément les techniques expérimentales mises en jeu dans nos expériences, telles que la préparation, la sélection en vitesse et la détection des atomes de Rydberg.

II.2 Les atomes de Rydberg circulaires

Nous utilisons dans nos expériences des atomes de Rubidium 85 excités dans les niveaux de Rydberg circulaires. Nous allons passer en revue ici les propriétés fondamentales de ces états.

II.2.1 Description

Un atome de Rydberg est un atome dans lequel un électron de valence a été excité proche du seuil d'ionisation. Le nombre quantique principal n est donc grand, dans nos expériences, $n \approx 50$. On parle d'atome de Rydberg circulaire lorsqu'en plus, le moment angulaire et le nombre magnétique m sont également maximaux :

$$l = |m| = n - 1. \tag{II.1}$$

Dans un état circulaire, la fonction d'onde de l'électron à une forme torique correspondant parfaitement à l'image classique de l'orbite donnée dans la théorie des quanta de Bohr [81]. Le rayon de l'orbite électronique est $a_0 n^2$ où $a_0 = 0{,}53$ Å est le rayon de Bohr. En comparaison, le noyau ionique composé du noyau atomique et des autres électrons a une taille de l'ordre de quelques a_0 et peut par conséquent être considéré comme un objet ponctuel de charge +1 produisant un potentiel en $1/r$ loin du noyau. Dans ces conditions, l'énergie de l'état circulaire de

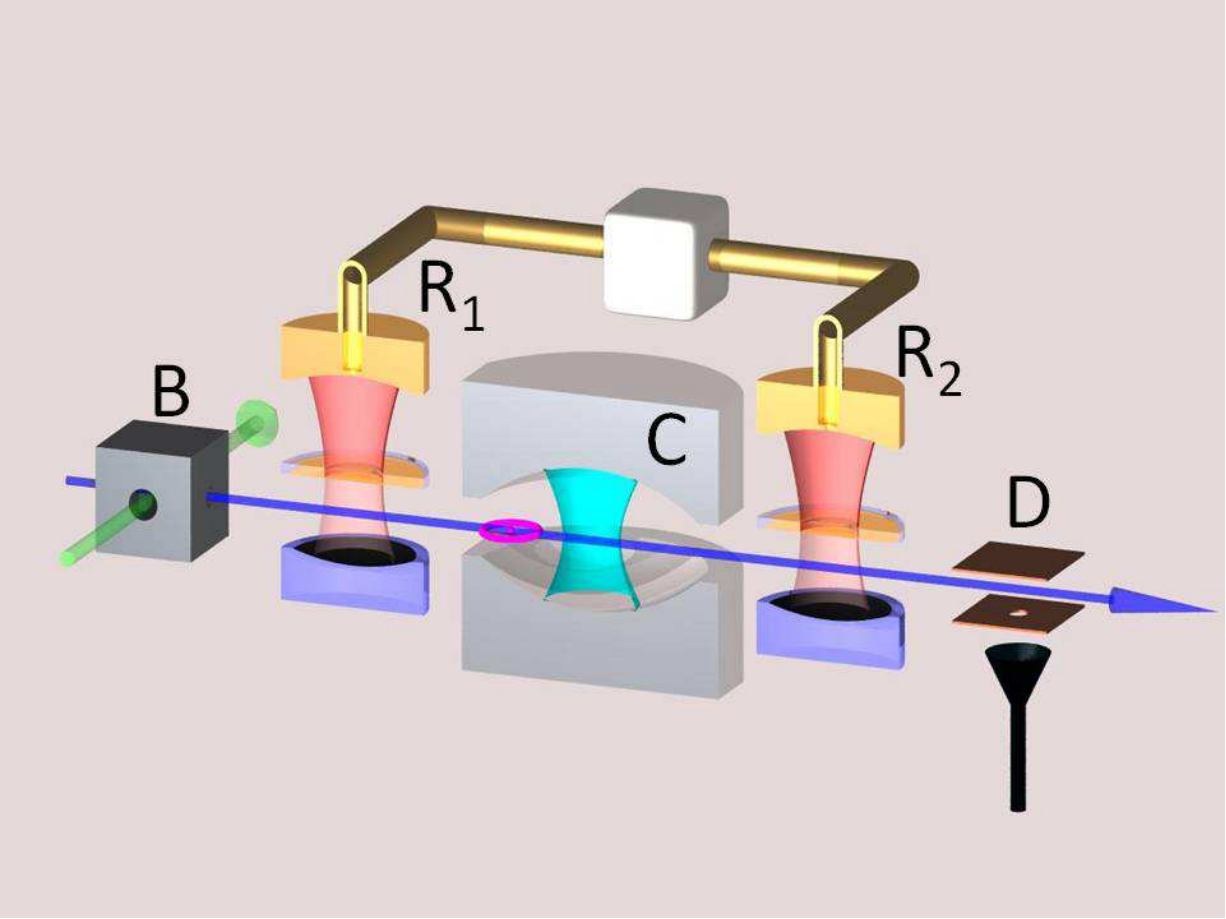


FIG. II.1 – Schéma de principe des expériences d'électrodynamique quantique en cavité avec des atomes de Rydberg circulaires.

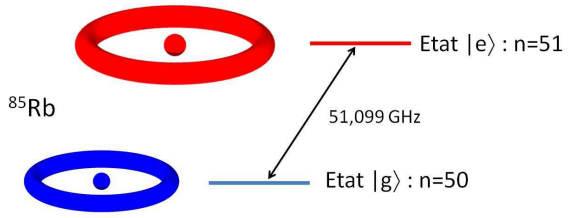


FIG. II.2 – La transition atomique utilisée dans l'expérience relie deux niveaux circulaires successifs, et se situe dans le domaine des micro-ondes à 51,099 GHz

nombre quantique principal n, noté $|n_C\rangle$ est donnée en bonne approximation[1] par :

$$E_n = -\frac{R_{\mathrm{Rb}}}{n^2}, \tag{II.2}$$

où R_{rb} est la constante de Rydberg modifiée pour prendre en compte la masse finie du coeur. La transition entre deux états circulaires successifs $|n_C\rangle \rightarrow |(n-1)_C\rangle$ a donc la fréquence :

$$\omega_n = \frac{R_{\mathrm{Rb}}}{\hbar}\left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2}\right) \approx \frac{R_{\mathrm{Rb}}}{\hbar}\frac{1}{n^3}. \tag{II.3}$$

Nous utilisons dans nos expériences la transition entre les niveaux $|51_C\rangle$ noté $|e\rangle$ et $|50_C\rangle$ noté $|g\rangle$. Comme nous le mentionnions dans la section précédente, cette transition tombe dans le domaine micro-onde autour de 51 GHz et est particulièrement bien adaptée à la réalisation de bons résonateurs pour le champ.

II.2.2 Un grand dipôle

Les états circulaires $|n_C\rangle$ présentent un dipôle électrique moyen nul :

$$\langle n_C|\mathbf{d}|n_C\rangle = q\langle n_C|\mathbf{r}|n_C\rangle = 0. \tag{II.4}$$

Cependant, l'opérateur $\mathbf{d}$ possède des termes non-diagonaux entre deux états circulaires successifs du Hamiltonien que l'on note d_n :

$$d_n = \langle n_C|\mathbf{d}|(n-1)_C\rangle. \tag{II.5}$$

Cette transition est polarisée σ^+ et on peut calculer la valeur du dipôle d_n à partir de la forme des fonctions d'ondes $|(n)_C\rangle$ et $|(n-1)_C\rangle$ (voir [82] p. 108) :

$$d_n = n^2\frac{qa_0}{\sqrt{2}}. \tag{II.6}$$

[1] Cette approximation est bien justifiée dans le cas des niveaux circulaires dont l'orbite électronique est en tout point éloignée du coeur. Le défaut quantique donne une correction extrèmement faible de l'ordre de 20Hz pour l'état $|50_C\rangle$. On pourra se reporter à [82] p. 133 pour plus de détail sur ce phénomène.

De façon assez prévisible, le dipôle atomique varie en n^2 comme la taille de l'orbite autour du coeur. Pour la transition qui nous intéresse entre les niveaux $n = 50$ et $n = 51$, on trouve $d_{51} = 1776 \cdot qa_0$. A titre de comparaison, une transition optique utilisée couramment dans le refroidissement d'atomes alkalins est la raie D_2 dont le dipôle vaut, dans le cas du ^{85}Rb :

$$d_{D2} = 4{,}228 \cdot qa_0, \tag{II.7}$$

soit près d'un facteur 500 plus faible que notre transition. Grâce à leur très grand nombres quantiques, les niveaux de Rydberg circulaires forment donc de véritables antennes ultra-sensibles au champ micro-onde.

II.2.3 Un grand temps de vie

Les niveaux de Rydberg sont soumis, comme tous les niveaux atomiques excités, au phénomène d'émission spontanée. L'atome émet un photon dans les modes de l'environnement sous l'effet des fluctuations du vide de ces modes. A cause des règles de sélection (seules les transitions σ^+, σ^- ou π possèdent un dipôle non-nul), les seules transitions autorisées sont les transitions vers les niveaux de moments cinétiques immédiatement voisins. Cette règle est extrêmement importante dans le cas des atomes de Rydberg circulaires puisqu'elle interdit toutes les transitions autres que la transition $|n_C\rangle \rightarrow |(n-1)_C\rangle$ de fréquence ω_n. Cependant, on pourrait craindre, puisque le dipôle de cette transition croît dramatiquement avec n, que l'émission stimulée par les fluctuations du vide n'explose avec n. Il n'en est rien car la croissance en n^2 du dipôle atomique est compensée par la diminution en ω_n^2 de la densité de mode autour de la fréquence ω_n dans l'espace libre, ainsi que de l'amplitude de leurs fluctuations quantiques qui décroît en $\sqrt{\omega_n}$. Le calcul exact du taux d'émission spontanée de $|n_C\rangle$ vers $|(n-1)_C\rangle$ donne :

$$T_{at}^{-1} = \frac{\omega_n^3 d_n^2}{3\pi\epsilon_0\hbar c}. \tag{II.8}$$

Comme ω_n varie en n^{-3} on en déduit que le taux d'émission spontanée varie comme n^{-5}. De façon intéressante, un calcul purement classique de la puissance électromagnétique rayonnée par l'électron du fait de son accélération centripète donne les mêmes résultats pour $n \gg 1$. Le temps de vie atteint 28,5 ms pour $n = 51$ et 31,5 ms pour $n = 50$.

II.2.4 Le champ électrique directeur

Les paragraphes précédents montrent à quel point il est avantageux de travailler avec les états de Rydberg circulaires. Leur utilisation entraîne cependant de lourdes contraintes expérimentales dont la plus importante est la nécessité d'un champ électrique directeur tout au long du trajet des atomes. En effet, en champs magnétique et électrique nuls, les niveaux de même nombre quantique n, mais de moment cinétique non-maximaux sont dégénérés. Cet ensemble de niveaux dégénérés comprend environ 2500 états pour $n \approx 50$. Sous l'effet de la moindre perturbation de champs, un atome initialement préparé dans le niveau circulaire $|n_C\rangle$ correspondant à un axe de quantification arbitraire se retrouve projeté sur les niveaux elliptiques correspondant à sa

décomposition sur le nouvel axe de quantification. Dans cette situation, les atomes de Rydberg circulaires sont extrêmement instables puisque la moindre fluctuation de champ électrique ou magnétique extérieur suffit à les coupler aux autres niveaux de la multiplicité [83]. Ce phénomène de perte en champ nul est très similaire aux pertes Majorana rencontrées fréquemment dans les pièges magnétiques.

Afin de briser la symétrie sphérique de rotation, source de la dégénérescence, nous devons appliquer un champ électrique directeur F le long de l'axe de l'orbite des atomes. La symétrie sphérique est alors brisée et le nombre quantique l n'est plus conservé. Cependant, puisque la symétrie de révolution autour de l'axe de F est préservée, le nombre quantique m est conservé. Le « bon » nombre quantique remplaçant l est appelé nombre quantique parabolique, noté n_1, compris entre 0 et $n - |m| - 1$. On note donc les états propres du Hamiltonien en présence d'un champ électrique directeur $|n; n_1; m\rangle$.

Les perturbations au premier et second ordre de l'énergie de l'état $|n; n_1; m\rangle$ sous l'effet d'un champ électrique extérieur s'écrivent ([82] p. 85) :

$$E^{(1)} = \frac{3}{2} knF \tag{II.9}$$

$$E^{(2)} = -\frac{1}{16}\left(17n^2 - 3k^2 - 9m^2 + 19\right) n^4 F^2 \tag{II.10}$$

où $k = 2n_1 - n + |m| + 1$ est un nombre variant entre $-(n - |m| - 1)$ et $+(n - |m| - 1)$ par pas de 2 unités lorsque n_1 balaye ses valeurs permises. Ainsi, pour les deux niveaux circulaires de la multiplicité (et pour les $n/2$ niveaux vérifiant aussi $k = 0$), le déplacement au premier ordre par rapport au champ électrique s'annule. Le schéma II.3 montre le spectre des états de Rydberg de la multiplicité $|n = 50\rangle$ et $|n = 51\rangle$ en présence d'un champ électrique. La levée de dégénérescence entre le niveau circulaire et les niveaux de nombre m immédiatement inférieur (ou encore, entre tous niveaux immédiatement voisins sur la figure II.3) est de 100 MHz/(V/cm).

Le terme quadratique en F lève la dégénérescence entre les niveaux subissant exactement le même déplacement à l'ordre 1, il reste cependant beaucoup plus faible que le terme linéaire, et n'est pas visible par conséquent sur le diagramme II.3. Pour les niveaux circulaires, l'annulation du déplacement au premier ordre en F s'interprète physiquement comme l'absence de dipôle permanent dans ces états. La différence entre les termes quadratiques pour deux niveaux circulaires consécutifs $|n_C\rangle$ et $|(n-1)_C\rangle$ permet d'accorder la fréquence de notre transition en variant F avec une sensibilité de 255kHz/(V/cm)^2.

II.2.5 Un atome à deux niveaux

D'après les règles de sélection, le niveau $|e\rangle$ est couplé vers le bas uniquement au niveau $|g\rangle$. Le niveau $|g\rangle$ quant à lui est couplé à la fois au niveau $|n = 50, n_1 = 1, m = 48\rangle$ par une transition σ^-, aux niveaux $|n = 50, n_1 = 0, m = 49\rangle$ et $|n = 50, n_1 = 1, m = 49\rangle$ par une transition π et au niveau $|g\rangle$ par une transition σ^+. A cause de la levée de dégénérescence au premier ordre pour les deux niveaux de nombre quantique $m = 49$, la transition π est fortement non résonnante. Néanmoins, la levée de dégénérescence quadratique est insuffisante pour amener la transition σ^- hors de résonance (la largeur spectrale à considérer est en fait l'inverse du temps d'interaction

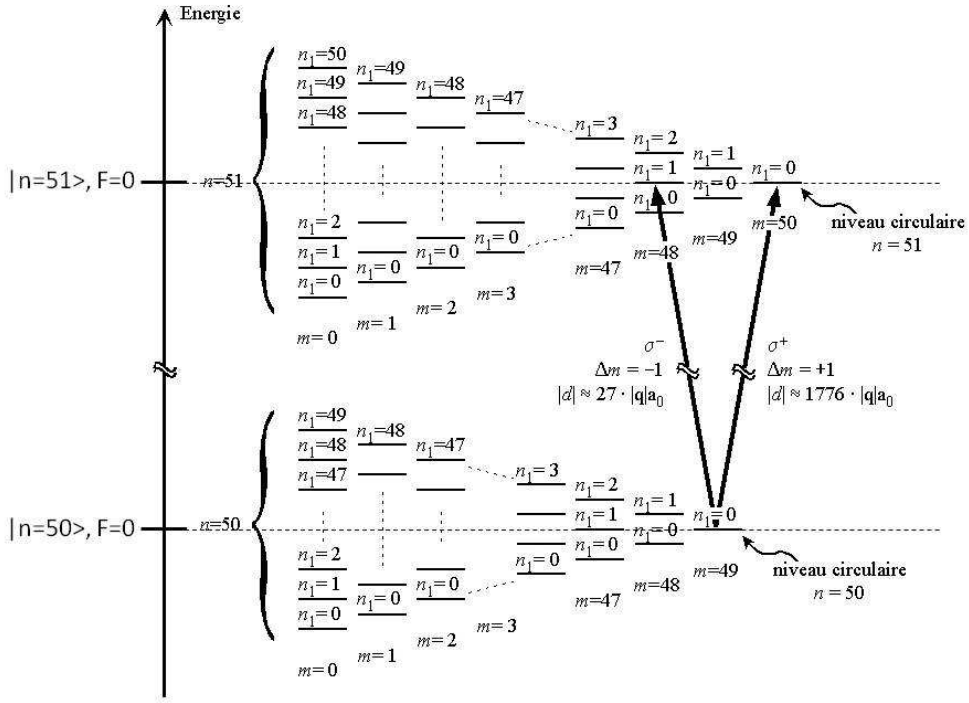


FIG. II.3 – Diagramme d'énergie des niveaux de Rydberg $n = 50$ et $n = 51$ en présence d'un champ électrique. Les deux niveaux indiqués sur l'axe vertical correspondent aux énergies des multiplicités $n = 50$ et $n = 51$ en champ nul.

plutôt que la largeur de la transition). Les deux transitions σ^- et σ^+ sont en concurrence, mais le dipôle de la seconde étant près de 70 fois plus grand que celui de la première, on peut considérer en pratique que la transition σ^+ entre les deux niveaux $|51_C\rangle$ et $|50_C\rangle$ est fermée.

II.3 Cavité micro-onde de grande finesse

Afin d'isoler un mode du champ électromagnétique, nous utilisons une cavité micro-onde. Pour atteindre le régime de couplage fort, le temps de vie de la cavité doit être aussi grand que possible tandis que le volume du mode doit être aussi faible que possible pour augmenter le couplage avec les atomes. Il est communément admis que la conductivité des supraconducteurs est nulle pour une température inférieure à la température critique. Cependant, cette affirmation n'est vraie qu'en régime continu et pour un matériau parfaitement pur. Lorsque le matériau supraconducteur présente des impuretés, même à température nulle la conductivité reste finie pour des courants alternatifs. De plus, pour des courants alternatifs, la résistance augmente avec la fréquence lorsqu'on est à température finie. Ce point explique pourquoi les matériaux supraconducteurs ne sont adaptés qu'aux cavités micro-ondes ou radiofréquences et non aux cavités optiques.

II.3.1 Une cavité Fabry-Pérot

Une solution très intéressante pour réaliser des résonateurs micro-ondes de très grande surtension est d'utiliser des cavités fermées ne contenant que deux petits trous sous coupure à la fréquence de résonance du mode pour faire entrer et sortir les atomes. Malheureusement, cette géométrie ne permet pas d'appliquer un champ électrique directeur à l'intérieur de la cavité (toutes les parois sont au même potentiel puisqu'elle est faite d'un seul bloc de matériau conducteur). De plus les ouvertures pour faire entrer et sortir les atomes de la cavité doivent être suffisamment larges pour que les atomes ne passent pas trop près des surfaces. Sans cela, le champ électrique vu par les atomes serait très inhomogène et mènerait à des déphasages inhomogènes des cohérences atomiques.

La solution choisie a donc été d'utiliser une cavité ouverte composée de deux miroirs en configuration Fabry-Pérot. Le matériau choisi est le Niobium qui est supraconducteur à basse température et confère une excellente réflectivité aux miroirs. La précision sur la forme des miroirs doit être très importante afin de ne pas diffracter les photons à l'extérieur de la cavité, mais bien de les réfléchir dans le mode.

Les modes propres d'une cavité Fabry-Pérot avec des miroirs sphériques peuvent être calculés dans l'approximation paraxiale [84] : On trouve différents modes appelés « modes transverses électromagnétiques » $T_{q,n,m}$, indexés par trois entiers. q correspond au nombre de ventres de l'onde électromagnétique entre les deux miroirs, n et m décrivent le profil transverse. Les modes $TEM_{q,0,0}$ correspondent à un profil transverse gaussien. Leur fréquence de résonance est donnée, toujours dans l'approximation paraxiale :

$$\nu_q = \frac{c}{2d}\left(q + \frac{1}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{d}{R}\right)\right), \tag{II.11}$$

où c est la vitesse de la lumière, R le rayon de courbure des miroirs et d la distance entre les deux miroirs. Dans nos expériences, nous utilisons uniquement le mode $TEM_{9,0,0}$. Les rayons de courbure des miroirs sont d'environ 40 mm. La distance entre ces derniers est ajustée précisément de façon à ce que le mode $TEM_{9,0,0}$ soit résonnant avec la transition atomique à 51,099 GHz.

Le mode spatial TEM_{900} défini ici comprend en fait deux modes de polarisations différentes. Si les miroirs sont parfaitement sphériques, les deux modes sont dégénérés. Cependant, il est impossible expérimentalement d'obtenir une sphéricité parfaite. Il en résulte la levée de dégénérescence entre les modes de polarisation horizontale et verticale notés $\epsilon_\leftrightarrow$ et $\epsilon_\updownarrow$. Le mode de polarisation σ^+, qui s'écrit $\epsilon_\circlearrowright = 1/\sqrt{2}\,(\epsilon_\updownarrow + i\epsilon_\leftrightarrow)$ n'est alors plus un état stationnaire. L'atome est donc couplé aux deux modes propres de la cavité $\epsilon_\updownarrow$ et $\epsilon_\leftrightarrow$ avec une fréquence de Rabi réduite d'un facteur $\sqrt{2}$. Deux cas limites se présentent alors : si la levée de dégénérescence entre les modes $\epsilon_\updownarrow$ et $\epsilon_\leftrightarrow$ est faible devant la fréquence de Rabi, alors, les déphasages entre les photons émis dans chacun des modes restent faibles pendant une période de Rabi, et l'évolution aux temps courts ressemble à celle d'un atome couplé à un seul mode du champ électromagnétique polarisé σ^+. Lorsqu'au contraire, la levée de dégénérescence est bien plus grande que la fréquence de Rabi, alors seul l'un des deux modes est à résonance avec la transition atomique, et on a alors affaire à la situation idéale d'un atome à deux niveaux couplé à un seul mode du champ électromagnétique.

Dans la pratique, la précision de forme atteignable grâce aux meilleurs procédés de polissage diamant est telle qu'on obtiendrait une levée de dégénérescence accidentelle entre les deux modes de l'ordre de 30 kHz. Nous devons comparer cette valeur à la fréquence de Rabi entre atome et cavité qui vaut comme nous le verrons plus loin, près de 50 kHz. La levée de dégénérescence tombe donc en plein dans la région critique où la situation ne correspond pas du tout à l'image idéale d'un atome couplé à un seul mode du champ. Nous avons donc décidé d'augmenter volontairement l'asphéricité des miroirs. En pratique, le substrat de cuivre est usiné selon une forme toroïdale. Le rayon de courbure vaut 39,4 mm suivant une direction et 40,6 mm suivant la direction orthogonale. Ceci assure une levée de dégénérescence de 1,2 MHz entre les deux modes de polarisation.

Dans l'approximation paraxiale, le profil spatial du mode gaussien est donné par[2] :

$$f(r,z) = \frac{w_0}{w(z)} \cos\left(kz - \arctan\left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right) + \frac{r^2 k}{2R(z)}\right) e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}}, \tag{II.12}$$

où $\lambda = c/\nu = 5{,}87$ mm est la longueur d'onde et

$$w_0 = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{d(2R-d)}\right)^{1/2} \approx 5{,}96\,\text{mm} \tag{II.13}$$

est le col du mode au centre de la cavité. $w(z)$ décrit la variation de l'extension transverse du mode lorsque l'on s'éloigne du centre de la cavité, et $R(z)$, celle du rayon de courbure du front d'onde :

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0}\right)^2}, \tag{II.14}$$

[2]On vérifie bien que la convention $f(0,0) = 1$ est respectée.

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right]. \tag{II.15}$$

Le volume du mode vaut :

$$V = \int |f(r)|^2 \mathrm{d}^3 r = \frac{\pi {w_0}^2 d}{4} \approx 769\,\mathrm{mm}^3. \tag{II.16}$$

Le mode est confiné dans un volume de l'ordre de quelques λ^3. Nous verrons que ceci est très avantageux car quelques photons suffisent alors pour obtenir un champ électrique important. L'approximation paraxiale qui a été utilisée ici n'est pas parfaitement justifiée. En effet, la divergence des rayons loin du centre du mode est grande. Néanmoins, les résultats obtenus dans cette approximation sont en très bon accord avec les grandeurs mesurées expérimentalement (mesure du profil transverse du mode [85], volume du mode).

II.3.2 Un grand facteur de qualité

Afin d'atteindre le régime de couplage fort, il est nécessaire d'augmenter au maximum le temps caractéristique de dissipation de l'énergie dans la cavité. Le temps de relaxation du champ noté T_{cav} correspond au temps d'amortissement exponentiel de l'énergie moyenne du champ piégé dans la cavité. Il est lié à la largeur spectrale de la résonance $\Delta\nu$, par la relation $2\pi \cdot \Delta\nu \cdot T_{\mathrm{cav}} = 1$ ([86], p. 372). On caractérise la qualité du résonateur par son facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} = 2\pi \cdot \nu \cdot T_{\mathrm{cav}}, \tag{II.17}$$

ou encore par sa finesse :

$$F = \frac{I_{SL}}{\Delta\nu} = 2\pi \cdot I_{SL} \cdot T_{\mathrm{cav}}, \tag{II.18}$$

où $I_{SL} = c/2d$ est l'intervalle spectral libre. La finesse correspond, à un facteur π près, au nombre d'allers-retours effectués par la lumière entre les miroirs avant d'être perdue. Afin d'augmenter au maximum cette quantité, on doit combattre les deux sources de pertes de photons : les pertes par absorption à la surface des miroirs et les pertes par diffraction à l'extérieur du mode. Pour disposer du meilleur temps de vie possible, il est donc nécessaire de conjuguer une excellente réflectivité, et une excellente qualité de surface et de forme.

Afin d'obtenir la forme la plus précise possible pour les miroirs, nous usinons au diamant un substrat de cuivre (beaucoup plus aisé que l'usinage du Niobium massif). On obtient une rugosité de surface de près de 10 nm rms, et une précision à grande échelle de près de 300 nm crête à crête. Nous déposons ensuite deux couche de 6 µm de Niobium sur ces substrats par pulvérisation cathodique [3].

La courbe II.4 montre la variation du temps de vie de la cavité en fonction de la température du cryostat. La courbe en échelle logarithmique, montre une dépendance exponentielle du temps de vie en fonction de l'inverse de la température jusqu'à une température de 1,2 K où le temps de

[3] Ce procédé est réalisé dans l'équipe de P. Bosland, E. Jacques, et B. Visentin au CEA où il est habituellement utilisé pour réaliser des cavités accélératrices d'accélérateurs de particules [87]

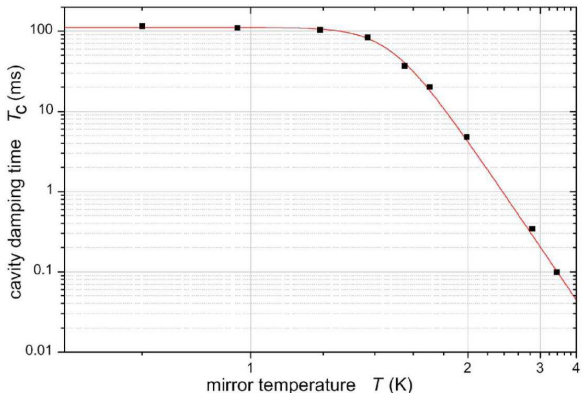


FIG. II.4 – Temps de vie d'une cavité supraconductrice mesuré en fonction de la température du cryostat. L'échelle horizontale est réciproque tandis que l'échelle verticale est logarithmique.

vie sature. Ce point correspond au moment où le temps de vie est limité par la pureté de la couche supraconductrice ou encore par la diffraction à l'extérieur du mode. Le temps de vie atteint aux plus basses températures, de 130 ms correspond à une finesse record [20] pour une cavité Fabry Pérot ouverte de $4{,}6 \cdot 10^9$.

II.3.3 Le régime de couplage fort

Nous avons calculé au paragraphe II.3.1, le volume du mode utilisé. On en déduit donc le champ électrique correspondant aux fluctuations du vide au centre du mode :

$$\mathcal{E}_0 = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2\epsilon_0 V}} \approx 1{,}58 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{V/m}. \tag{II.19}$$

On peut alors évaluer la fréquence de Rabi pour un atome au centre du mode (voir [48] p.152) en n'oubliant pas de diviser la fréquence par $\sqrt{2}$ car les atomes ne sont couplés qu'à un seul mode de polarisation linéaire :

$$\Omega_0 = \frac{2|d| \cdot \mathcal{E}_0 f(0,0)}{\sqrt{2}\hbar} \approx 2\pi \cdot 51\,\mathrm{kHz}, \tag{II.20}$$

qui donne une période de Rabi de $T_{\mathrm{Rabi}} \approx 20\,\mu\mathrm{s}$. Cette valeur est à comparer au temps de dissipation du champ dans la cavité :

$$T_{\mathrm{Rabi}} \ll T_{\mathrm{cav}} = 130\,\mathrm{ms} \tag{II.21}$$

et au temps de relaxation des atomes

$$T_{\mathrm{Rabi}} \ll T_{\mathrm{at}} \approx 30\,\mathrm{ms}. \tag{II.22}$$

Ces quantités sont séparées par plus de 3 ordres de grandeur, ce qui signifie que les deux systèmes sont très loin dans le régime de couplage fort. Afin d'observer le phénomène d'oscillations de Rabi, et d'en mesurer précisément la fréquence, nous réalisons la séquence expérimentale suivante :

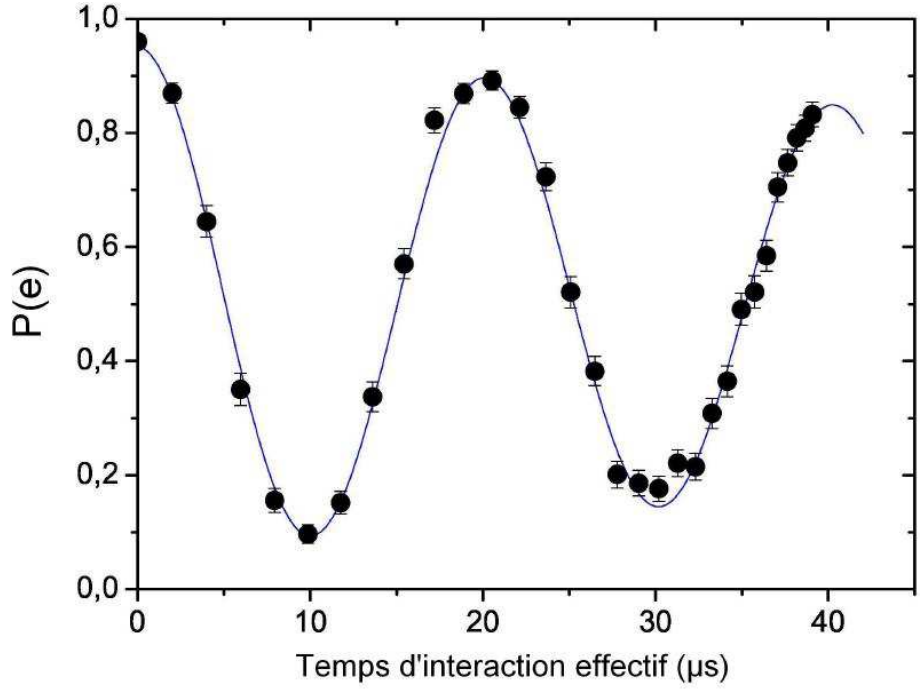


FIG. II.5 – Oscillations de Rabi du vide. La probabilité de détecter dans $|e\rangle$ l'atome initialement préparé dans $|e\rangle$ varie sinusoïdalement avec le temps effectif d'interaction.

1. La cavité est préparée dans l'état vide à l'aide d'une série d'atomes résonnants traversants le mode.
2. Un atome de vitesse v est préparé dans l'état $|e\rangle$ puis traverse le montage jusqu'à la cavité.
3. Un potentiel électrique est appliqué sur le miroir supérieur de la cavité afin de mettre l'atome hors résonance par effet Stark.
4. Le potentiel est brutalement abaissé de façon à mettre l'atome à résonance pour un intervalle de temps de T_{int} centré autour du moment où l'atome est au centre du mode. L'atome est remis hors résonance à l'issue de cet intervalle.
5. L'atome continue sa route jusqu'au détecteur et son état interne est détecté par ionisation.

La figure II.5 représente la proportion d'atomes détectés dans l'état $|e\rangle$ en fonction du temps d'interaction effectif t_{eff} :

$$t_{\text{eff}} = \int_{-T_{\text{int}}/2}^{+T_{\text{int}}/2} e^{-\frac{(vt)^2}{w_0{}^2}} \, \mathrm{d}t. \tag{II.23}$$

Le temps d'interaction est exprimé à l'aide de cette grandeur de façon à prendre en compte le couplage progressif de l'atome lorsqu'il pénètre dans le profil gaussien du mode.

La fréquence mesurée est de 48 kHz[4]. Elle diffère de la valeur théorique car cette dernière est une estimation reposant sur l'approximation paraxiale qui n'est pas parfaitement vérifiée. De plus, un alignement imparfait du jet atomique sur le centre du mode se traduit par une réduction apparente de la pulsation de Rabi.

En pratique, le nombre d'oscillations de Rabi que l'on peut réaliser est limité avant tout par le temps de transit des atomes dans le mode et non par les temps de vie de la cavité ou des atomes. On utilise en fait le grand temps de vie de la cavité afin de faire interagir un grand nombre d'atomes pendant le temps de vie de la cavité.

II.4 Le choix de *n*

Le choix particulier des deux niveaux circulaires $n = 50$ et $n = 51$ résulte d'un arbitrage entre différentes contraintes antagonistes :

1. Le temps de vie des atomes de Rydberg circulaires tend à s'améliorer avec les grandes valeurs de n (la dépendance est en n^5).
2. La variation du couplage avec le mode de la cavité peut être évaluée quantitativement. En effet, le nombre d'oscillations de Rabi que l'on peut effectuer pendant le temps de transit est donné par :

$$N_{\text{rabi}} = \frac{\mathcal{E}_0 d_n}{\hbar} t_{\text{int}}. \tag{II.24}$$

   Le dipôle d_n varie comme n^2 (voir (II.6)), le champs électrique $\mathcal{E}_0$ varie comme[5] $\sqrt{\omega/\lambda^2} \propto \omega^{3/2} \propto n^{-9/2}$ et le temps d'interaction, à vitesse atomique fixée varie comme la taille du col du mode, c'est à dire comme $\lambda \propto n^3$. D'où

$$N_{\text{rabi}} \propto n^{1/2} \tag{II.25}$$

   Cette dépendance pousse à utiliser des valeurs de n élevées. Cependant, la variation est extrêmement lente (la fréquence de résonance par exemple varie comme $1/n^3$). Le couplage n'est donc pas un paramètre très contraignant dans cette discussion.
3. L'effet Stark quadratique est un problème puisqu'il nécessite un grand contrôle de l'homogénéité du champ électrique sur la section du jet atomique. En effet, si différents atomes subissent des déphasages différents suivant leur position transverse dans le jet atomique (ou si le champ électrique fluctue avec le temps), les signaux mesurés seront brouillés par rapport au cas idéal. Une trop grande sensibilité au champ électrique liée à l'utilisation de nombres n trop élevés est un problème grave. La variation de sensibilité à l'effet Stark quadratique est très importante puisqu'elle est proportionnelle à n^6 d'après la formule (II.10).

[4] Une source d'erreur systématique sur cette mesure est due aux effets collectifs qui apparaissent dans les paquets contenants plus d'un atome. Pour plus de détails sur la prise en compte de cet effet, voir la thèse de J. Bernu [43]

[5] On considère ici que le volume du mode varie comme λ^2, ce qui revient à dire que seul le col du faisceau w_0 dépend de λ tandis que l'espacement entre les miroirs d est fixe. On peut en effet garder la distance fixe dans une certaine mesure en utilisant des modes d'ordre différent.

4. De plus, les fréquences de transitions diminuant avec n (en $1/n^3$), on ne peut pas se permettre non plus d'utiliser des états avec n trop élevé sous peine d'avoir une population thermique importante à la fréquence de la transition. Ceci entraînerait d'une part de l'émission stimulée des atomes, et d'autre part le mode de la cavité, résonnant avec les atomes serait peuplé en moyenne d'un nombre de photons important.
5. Finalement, les fréquences de transition trop basses posent également un problème d'encombrement lié à la taille des miroirs. En effet, les miroirs doivent avoir une taille minimum de quelques λ (donc proportionnelle à n^3) afin de recouvrir la zone où l'intensité du mode est significative.

Ces contraintes ont mené à choisir les valeurs actuelles de n, pour lesquelles la fréquence de Rabi est de 50 kHz, permettant d'effectuer une oscillation de Rabi complète pendant le temps de transit des atomes dans la cavité ($\approx 20\,\mu$s) le temps de vie des atomes est près de 50 fois supérieur à leur temps de vol dans le montage (≈ 1 ms), et le nombre moyen de photons thermiques à la fréquence de résonance pour la température de notre cryostat de 0,8 K est de :

$$n_{\text{th}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}} - 1} = 0{,}05. \tag{II.26}$$

De plus, on choisit la valeur minimale du champ électrique directeur compatible avec des pertes atomiques négligeables ($\approx 0{,}2\,\text{V/cm}$). De ce fait, l'effet Stark – quadratique avec le champ directeur – est réduit au minimum pour une variation donnée de F. La réduction de contraste des signaux d'interférométrie atomique par les déphasages inhomogènes constatée expérimentalement est alors de quelques pourcents.

La largeur des miroirs est de 6 cm, soit environ $10\,\lambda$, et grâce à notre choix du mode $TEM_{9,0,0}$, l'espacement entre les mirroirs est de près de 28 mm, permettant de réaliser un champ homogène au niveau du jet atomique.[6].

II.5 Le dispositif expérimental

Nous avons présenté dans la section précédente les deux acteurs principaux de nos expériences : les atomes de Rydberg circulaires et la cavité micro-onde de grande finesse. Nous allons voir dans cette section comment ils sont insérés dans un dispositif expérimental permettant de contrôler au mieux tout les paramètres de leur interaction. La figure II.6 montre un schéma du montage utilisé pour nos expériences. On y distingue deux cavités de haute finesse. En effet, ce montage a été conçu pour réaliser des expériences mettant en jeu des états non-locaux du champ dans les deux cavités. Lors du dernier assemblage du dispositif, nous n'avons pas réussi à accorder la seconde cavité proche de la fréquence de transition atomique. Ainsi, toutes les expériences décrites dans ce mémoire ont été réalisées uniquement avec une cavité de haute finesse et deux zones de Ramsey. La figure II.7 est un plan détaillé de l'intérieur de la boîte d'écrantage du champ.

[6]Un numéro de mode élevé réduit le volume du mode, et donc le couplage entre les deux systèmes, cependant, à l'inverse, il augmente le temps de vie des photons dans la cavité en augmentant l'intervalle spectrale libre.

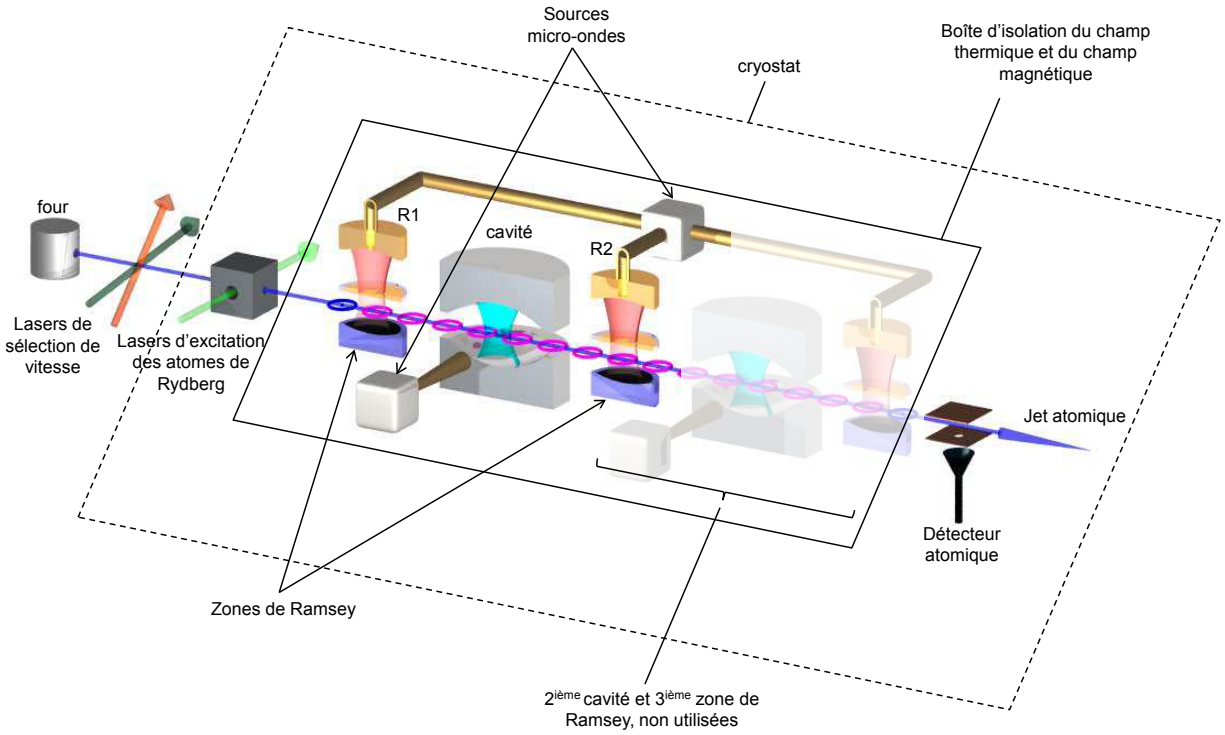


FIG. II.6 – Schéma du dispositif expérimental. Le montage actuel comprend deux cavités de grande finesse en vue de réaliser des expériences sur des champs non-locaux, cependant, la deuxième cavité, montée hors résonance lors du dernier assemblage de l'expérience était inutilisable. Ainsi, les éléments grisés n'ont pas été utilisés dans les expériences décrites dans ce mémoire.

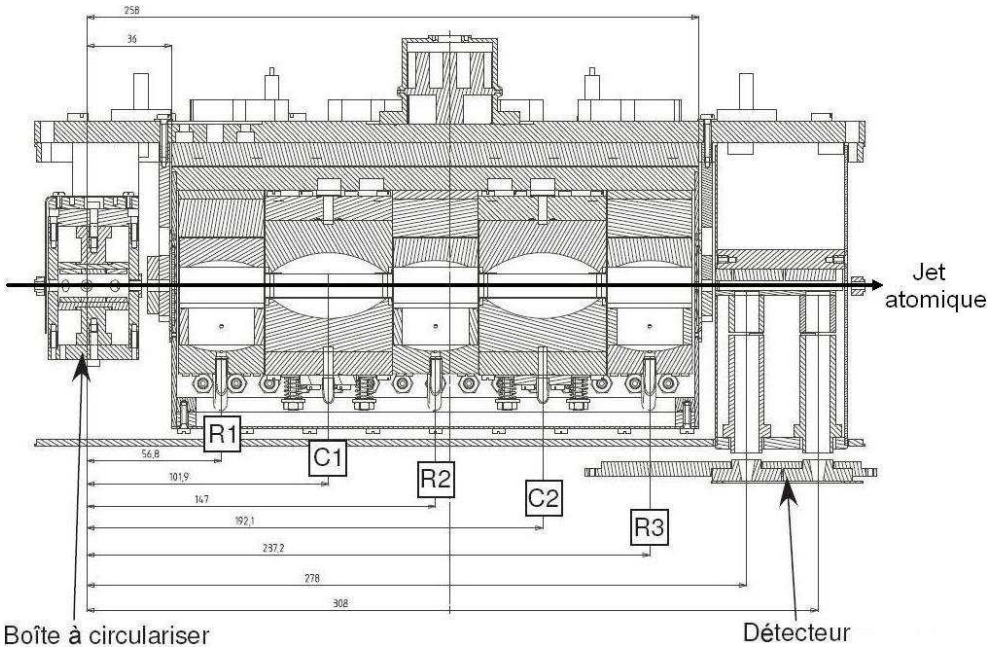


FIG. II.7 – Schéma du coeur du dispositif expérimental. Les pièces vues par les atomes tout le long de leur trajet de la boîte à circulariser jusqu'aux détecteurs sont maintenues à un potentiel bien contrôlé afin de minimiser les inhomogénéités de champ électrique.

II.5.1 Contrôle des atomes

II.5.1.a Préparation des atomes de Rydberg circulaires

La préparation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires est un processus complexe qui nécessite d'apporter à la fois beaucoup d'énergie et beaucoup de moment cinétique aux atomes. La totalité de l'opération a lieu en champ magnétique statique, à l'intérieur d'une boîte appelée « boîte à circulariser » qui permet d'écranter les champs magnétiques extérieurs. Les atomes initialement dans le niveau fondamental $5S_{1/2}$ sont pompés optiquement dans le sous-niveau Zeeman maximal $|F = 3; m_F = 3\rangle$. La circularisation se déroule en trois étapes successives : les atomes sont d'abord excités dans un niveau de n élevé mais de faible moment angulaire ($|52f, m = 2\rangle$) à l'aide de deux transitions optiques et d'une transition micro-onde en champ électrique nul. Les 49 quanta de moment angulaire manquants sont ensuite apportés par l'absorption de photons radiofréquences lors d'un passage adiabatique rapide. Les différentes étapes sont représentées sur la figure II.8 :

1. Les faisceaux lasers de deux diodes à 420 nm et 1015 nm sont superposés et excitent les atomes respectivement dans le sous-niveau $|F = 4, m_F = 4\rangle$ du $6P_{3/2}$ et $|52d; m_J = 5/2\rangle$ par deux transitions σ^+.
2. Une transition micro-onde permet ensuite d'atteindre le niveau $|52f; m_F = 2\rangle$.
3. Un champ électrique est ensuite progressivement établit, transférant adiabatiquement les atomes du niveau $|52f; m_f = 2\rangle$ vers le niveau elliptique $|n = 52; n_1 = 1; m = 2\rangle$. Cette

étape est appelé « Stark switching ».

4. Un champ radiofréquence à 255 MHz est appliqué afin d'apporter les 49 photons σ^+ nécessaires pour atteindre le niveau $|52_C\rangle$. Les transitions σ^+ sont adressées à l'exclusion des transitions σ^- grâce à la levée de dégénérescence due au champ magnétique de 18 G appliqué dans la boîte à circulariser. Les 49 photons sont absorbés efficacement grâce à un passage adiabatique (le champ électrique est balayé de façon à ce que la fréquence des transitions passe à résonance avec la fréquence de la micro-onde appliquée).
5. Malgré le passage adiabatique, près de 20% des atomes sont perdus dans des niveaux elliptiques. Afin de purifier l'ensemble atomique, on réalise une transition micro-onde en champ électrique non-nul résonante avec la transition $|52_C\rangle \rightarrow |51_C\rangle$, ou encore une impulsion à deux photons sur la transition $|52_C\rangle \rightarrow |50_C\rangle$ La transition permet donc de sélectionner uniquement le niveau circulaire désiré. Les états d'énergie supérieure au niveau final sont éliminés par ionisation.

Les taux de pureté obtenus grâce à cette technique atteignent près de 98%.

II.5.1.b Contrôle spatio-temporel des atomes

Les expériences que nous réalisons nécessitent un excellent contrôle de la position des atomes à tout moment lors de leur trajet à l'intérieur du montage. Un premier exemple est donné par l'expérience d'oscillations de Rabi décrite plus tôt : l'impulsion Stark dans la cavité doit être appliquée au moment précis où l'atome est au centre du mode (d'une largeur de 6 mm). En fait, comme nous le verrons, les impulsions dans les zones de Ramsey, ainsi que la détection des atomes nécessitent elles aussi un très bon contrôle de la position atomique. Nous allons présenter ici la technique utilisée pour préparer des atomes de vitesse et de position bien déterminée.

Sélection en vitesse par effet Doppler Le jet d'atomes est produit par un four contenant une vapeur de Rubidium à l'équilibre thermodynamique avec du Rubidium liquide. Le jet atomique est collimaté par le trou de sortie du four (diamètre : 0,7 mm) et par le trou d'entrée de la boîte à circulariser 55 cm plus loin dont le diamètre est également de 0,7 mm. Le jet ainsi produit a une faible extension spatiale transverse, il a une dispersion de vitesse longitudinale Maxwellienne. En sortant du four, les atomes sont equirépartis dans les deux sous-niveaux hyperfins du fondamental $5S_{1/2}$ ($F = 2$ et $F = 3$). Afin de sélectionner une classe d'atomes de vitesse bien précise, on va utiliser des techniques de pompage optique. Le but est d'isoler les atomes ayant la vitesse désirée dans le niveau $F = 3$, point de départ de l'excitation vers les Rydberg. La sélection de vitesse a lieu en deux phases :

1. Un premier laser à 780 nm (appelé dépompeur), perpendiculaire au jet atomique et accordé sur la transition $|5S_{1/2}; F = 3\rangle \rightarrow |5P_{3/2}; F' = 3\rangle$ amène après quelques cycles de fluorescence tous les atomes du jet dans le niveau hyperfin $F = 2$.
2. Un second laser à 780 nm (repompeur), faisant un angle $\theta = 63^\circ$ avec le jet adresse la transition $|5S_{1/2}; F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}; F' = 3\rangle$. Là encore, après quelques cycles de fluorescence, les atomes sont pompés dans le niveau F=3. En réglant le désaccord entre la fréquence

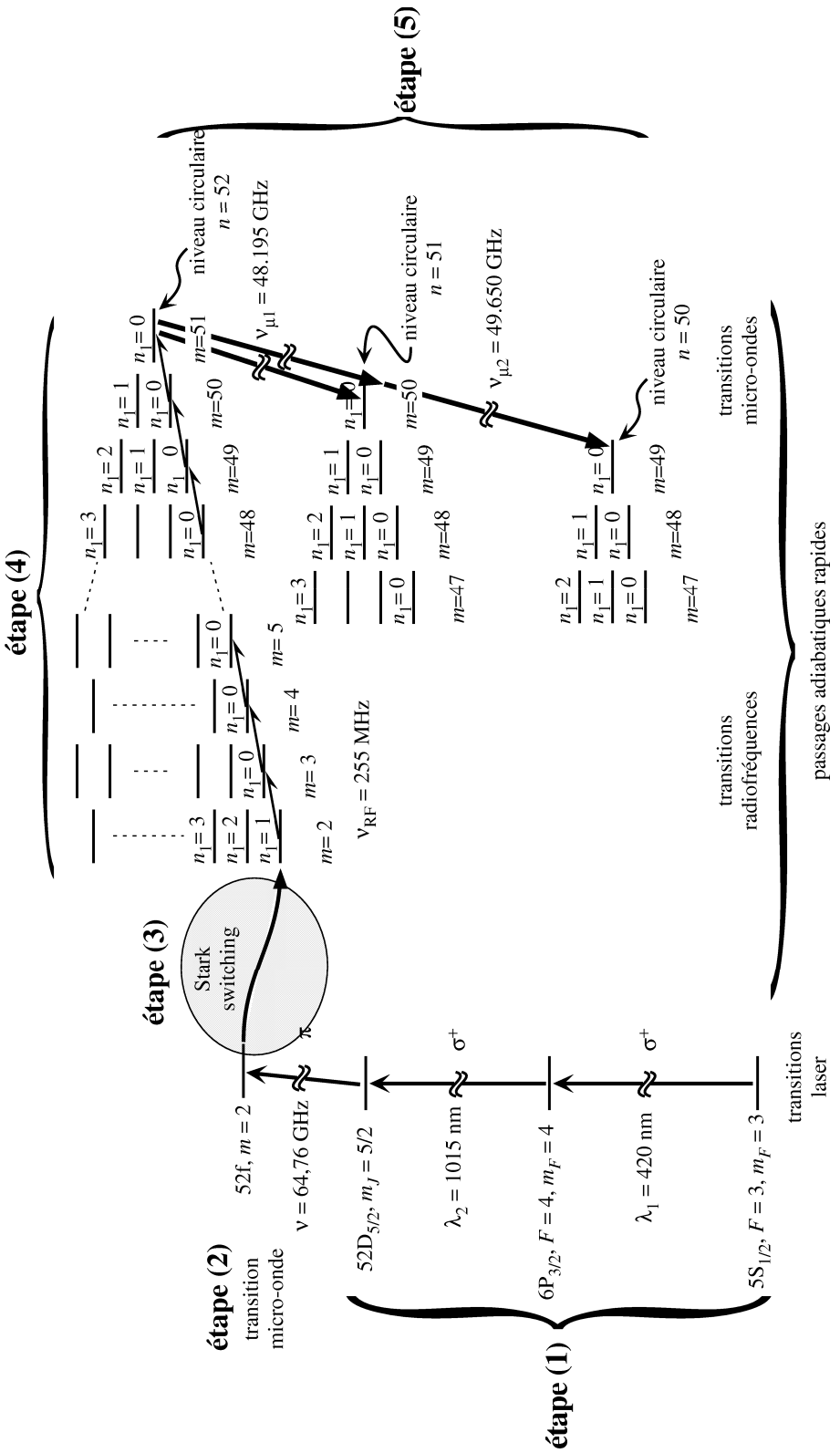


FIG. II.8 – Schéma d'excitation des atomes dans les niveaux de Rydberg circulaires.

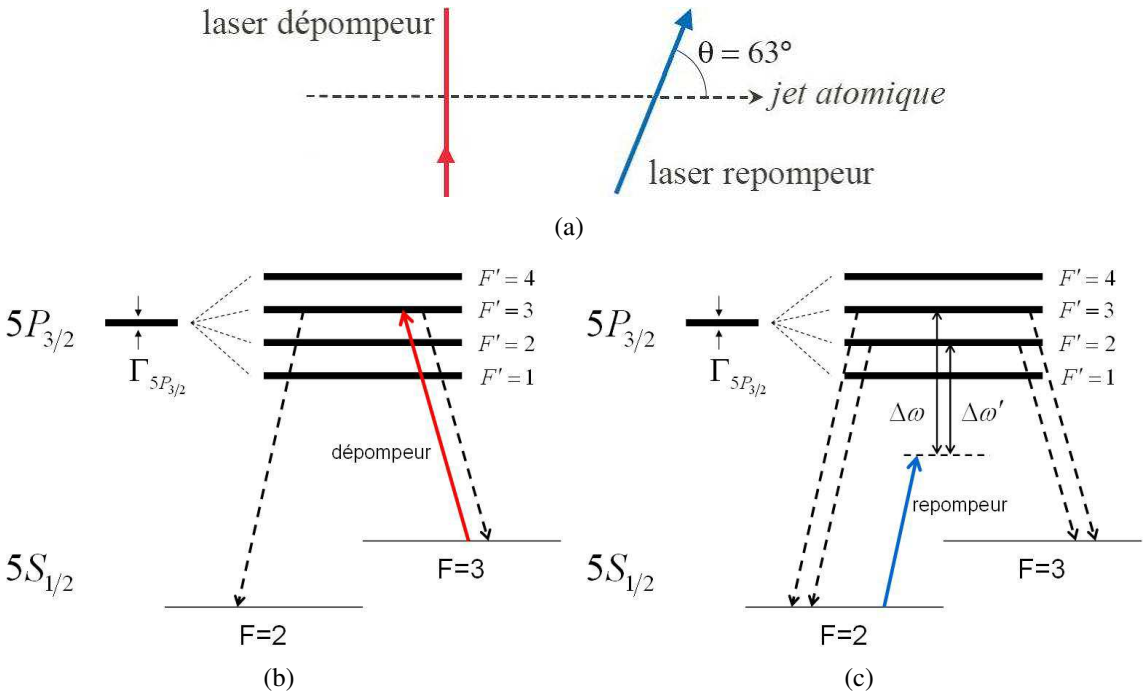


FIG. II.9 – Schéma de principe du dispositif de sélection de vitesse : Le jet atomique rencontre d'abord un laser dépompeur qui pompe tous les atomes dans le sous-niveau $F = 2$, puis un Laser repompeur formant un angle de 63° avec ce dernier. Seuls les atomes ayant la vitesse désirée sont repompés dans le sous-niveau $F = 3$.

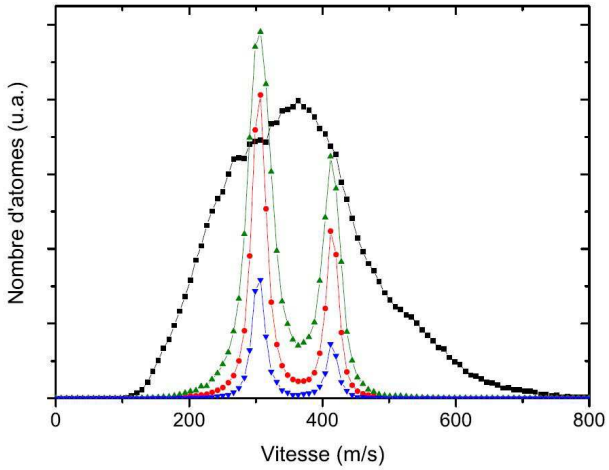


FIG. II.10 – Ces courbes expérimentales montrent la distribution de vitesse des atomes circulaires produits lorsque le dispositif de sélection de vitesse est désactivé (carrés), puis avec une sélection Doppler où laser dépompeur et repompeur sont allumés en continu. Les différentes courbes correspondent à des puissances décroissantes du Laser repompeur (41 µW, 11,5 µW, et 3,1 µW). Les deux pics correspondent aux deux transitions séléctionnés, séparées de 109 m/s. La largeur de la sélection se dégrade pour les puissances croissante. La largeur observée à la puissance la plus faible (3,1 µW), de 16 m/s est proche de la limite imposée par la largeur de raie de la transition.

du laser et la résonance atomique, on sélectionne précisément la classe de vitesse v_{sel} pour laquelle l'effet Doppler compense le désaccord :

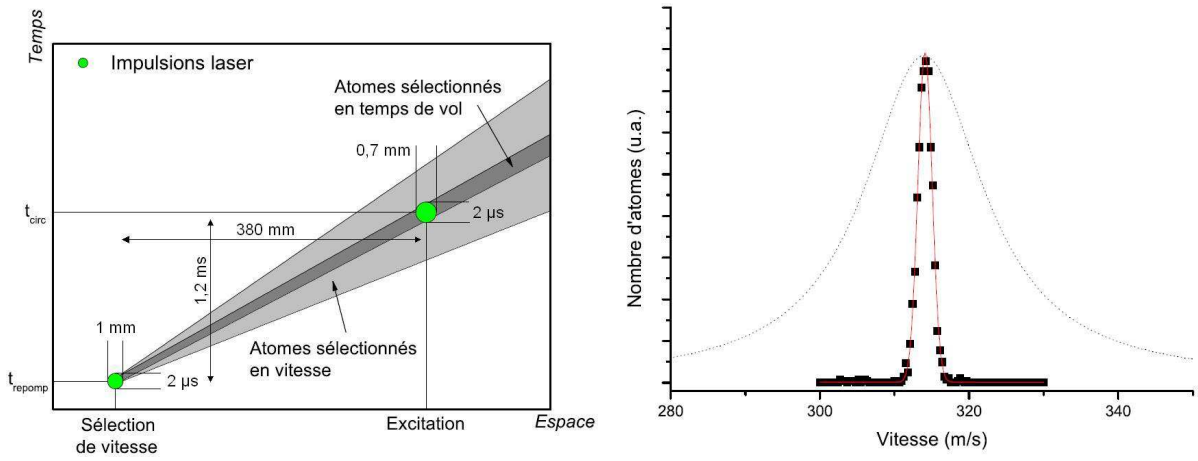
$$\Delta\nu = \nu_{\text{laser}} - \nu_{\text{at}} = \frac{1}{2\pi} \cdot k v_{\text{sel}} \cos(\theta). \tag{II.27}$$

Les différents lasers sont appliqués sur le jet dans une enceinte appelée zone de sélection de vitesse, située entre le trou de sortie du four et l'entrée de la boîte à circulariser. La précision de cette sélection de vitesse est limitée par la largeur spectrale de la transition $|5S_{1/2}; F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}; F' = 3\rangle$ soit $\Gamma_{5P_{3/2}} = 2\pi \cdot 5{,}9\,\text{MHz}$:

$$\Delta v_{\text{sel}} = \frac{\Gamma_{5P_{3/2}}}{k \cos\theta} \approx 10\,\text{m/s}. \tag{II.28}$$

Afin de repomper une proportion importante de la classe de vitesse désirée dans $F = 3$, on utilise un laser relativement intense qui sature la transition, et élargit encore la sélection en vitesse par rapport à ce chiffre. Par ailleurs, une deuxième classe de vitesse est repompée dans le niveau $F = 3$: en effet, les atomes ayant la vitesse $v'_{\text{sel}} = v_{\text{sel}} + 109\,\text{m/s}$ sont à résonance avec la transition $|5S_{1/2}; F = 2\rangle \rightarrow |5P_{3/2}; F' = 2\rangle$. La figure II.10 montre la distribution de vitesse sélectionnée par cette technique. On distingue clairement le pic autour de la vitesse recherchée de 314 m/s et le pic parasite autour de 423 m/s.

Cette sélection de vitesse n'est pas suffisante pour nos besoins : en effet, après avoir parcouru 20 cm dans le montage, deux atomes avec des vitesses de 300 et 400m/s sont séparés de près de



(a) (b)

FIG. II.11 – (a) Principe de la sélection par temps de vol : Dans ce diagramme temps-espace, la trajectoire des atomes est une droite dont la pente correspond à la vitesse. Seule une fine classe de vitesse pour laquelle les atomes passent par les points où le repompeur et le laser d'excitation sont allumés est sélectionnée. Les paramètres expérimentaux sont donnés sur la figure. (b) Distribution de vitesse obtenue expérimentalement pour les paramètres décrit sur la figure (a). La classe de vitesse sélectionnée est centrée sur la vitesse de 314 m/s. La courbe pleine est un ajustement Gaussien dont la largeur est de 1,9 m/s. La courbe pointillée représente à titre de comparaison la distribution de vitesse obtenue par sélection Doppler (Le nombre d'atomes a été renormalisé pour cette courbe).

6 cm. Ce qui ne laisse aucun espoir d'adresser correctement ces atomes dans le détecteur ou dans l'une des cavités du montage.

Sélection en vitesse par temps de vol Afin d'affiner encore la distribution de vitesse sélectionnée, on effectue une sélection de vitesse par temps de vol : L'excitation vers les Rydberg est un processus impulsionnel. Typiquement, les lasers d'excitation des premières étapes sont allumés pendant environ 2 µs. En n'allumant le laser repompeur que pendant quelques microsecondes au niveau de la zone de sélection de vitesse, on ne sélectionne que les atomes ayant la vitesse v (voir figure II.11 :

$$v = \frac{D}{t_{\text{circ}} - t_{\text{repomp}}}, \tag{II.29}$$

où $D = 380\,\text{mm}$ est la distance séparant la zone de sélection de vitesse de la boîte à circulariser, et t_{circ} et t_{repomp} désignent respectivement les temps d'allumage des lasers d'excitation et du repompeur.

La précision d'une telle technique est limitée à la fois par l'étendue spatiale des lasers et par leurs temps d'allumage. Les lasers étant focalisés au niveau du jet atomique avec un col de l'ordre de 1 mm, et allumés pour près de 2 µs, on obtient, pour une vitesse moyenne désirée de 250 m/s par exemple, des paquets d'environ un millimètre avec une dispersion de vitesse

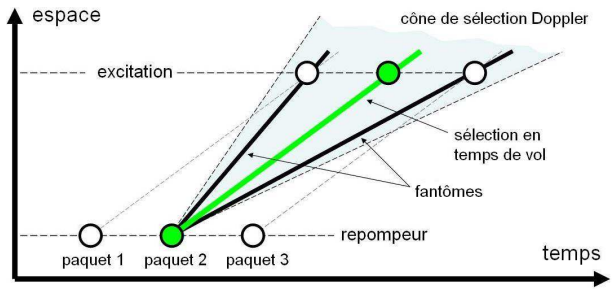


FIG. II.12 – La sélection en temps de vol produit des paquets parasites lorsqu'on tente de préparer des paquets successifs. Ces « fantômes » correspondent aux classes de vitesses sélectionnés par le repompeur du paquet 2 et l'impulsion d'excitation des paquets 1 et 3.

autour de la vitesse moyenne désirée de 1 m/s. Grâce à cette précision, les paquets atomiques restent localisés à mieux que 2 mm tout au long de l'expérience, ce qui suffit pour les adresser efficacement dans les différents éléments du montage.

Intérêt de la sélection Doppler On peut s'interroger sur l'intérêt d'une sélection Doppler alors qu'on vient de voir que la sélection par temps de vol donne une distribution de vitesse beaucoup plus étroite. En pratique, la seule sélection par temps de vol est problématique lorsqu'on souhaite préparer plusieurs paquets monocinétiques successifs. En effet, dans ce cas, les différentes impulsions de repompeur et d'excitation correspondants aux paquets successifs définissent, en plus des paquets à la vitesse souhaitée, des paquets parasites dit « fantômes » dont la vitesse est déterminée par l'intervalle entre le repompeur d'un premier paquet et l'impulsion d'excitation d'un second. La figure II.12 représente l'effet de fantômes sur un schéma temps-espace. Grâce à la sélection Doppler, l'effet de fantômes est fortement réduit puisque seule une fine classe de vitesse autour de la vitesse souhaitée est susceptible d'être excitée. Il suffit alors de bien choisir le temps entre paquets successifs pour que la vitesse des fantômes ne tombe pas dans la fenêtre de sélection Doppler à $v_{\mathrm{sel}} + 109\,\mathrm{m/s}$

II.5.1.c Contrôle de l'état interne : les zones de Ramsey

Afin de manipuler l'état interne des atomes avant et après leur passage dans les cavités supraconductrices, nous utilisons des impulsions de champ micro-onde classique. Ces impulsions ne sont pas effectuées dans l'espace libre mais dans des cavités de faible facteur de qualité appelées « zones de Ramsey ». Le but de ces cavités est de permettre l'adressabilité des atomes individuels : en effet, nous voulons appliquer des impulsions à l'atome se trouvant dans la zone de Ramsey, sans affecter un atome qui pourrait se trouver dans une autre partie du montage. Il est alors indispensable de confiner le champ micro-onde dans l'espace. De plus, afin de contrôler le potentiel électrique des surfaces proches du trajet des atomes, ces dernières doivent être conductrices, donc de réflectivité non-nulle. L'utilisation d'une cavité semble donc toute indiquée, cependant, le choix du facteur de qualité de cette dernière est soumis à différentes contraintes antagonistes :

- Le champ dans les zones de Ramsey doit être classique afin de manipuler l'état interne de l'atome sans l'intriquer avec le mode de la cavité Ramsey. Le volume du mode d'une zone de Ramsey étant du même ordre que celui des cavité supraconductrices (pour des raisons d'encombrement géométrique), il est clair que la fréquence de Rabi du vide sera également de l'ordre de 50 kHz, ainsi, pour réaliser une impulsion de l'ordre de π dans un temps raisonnablement long pour permettre un contrôle électronique de l'impulsion ($\approx 1\,\mu$s), le champ nécessaire est de quelques photons. Afin d'opérer tout de même dans un régime classique, il est alors nécessaire d'utiliser une cavité dont le facteur de qualité correspond à un temps de vie du champ faible devant le temps d'interaction [88].
- Dans ce régime, les échanges d'énergie entre atome et cavité sont régis par l'effet Purcell [89] et en particulier, l'émission spontanée de l'atome est accéléré par la présence de la cavité. Il est donc nécessaire d'utiliser une cavité de faible facteur de qualité afin que le temps de vie des atomes ne soit pas réduit significativement à cause de leur traversée des zones de Ramsey.
- Au contraire, la localisation de la micro-onde à l'intérieur du mode de la cavité impose d'utiliser un facteur de qualité suffisamment grand pour avoir un mode géométriquement bien défini, et ainsi, ne pas inonder le reste du montage de micro-onde.

La figure II.13 montre le schéma d'une zone de Ramsey. La solution choisie consiste à utiliser deux cavités couplées : la première est une cavité de grand facteur de qualité ($Q \approx 2000$) permettant de filtrer efficacement un mode $TEM_{0,0}$. La seconde est une cavité de faible facteur de qualité ($Q \approx 30$) dans laquelle les atomes interagissent avec le champ. Les deux cavités sont couplées par une lame de verre recouverte d'une fine couche d'or. Le champ dans la cavité de faible Q hérite de la bonne géométrie du mode défini par la premièrer cavité. La cavité de faible Q est refermée par un miroir en araldite recouvert de graphite faiblement réfléchissant. Le champ transmit par ce miroir est absorbé par un bloc de « RAM » (Radar Absorbing Material) afin de ne pas fuir dans le reste du montage. On peut ajuster le champ électrique au niveau des atomes en contrôlant le potentiel de la couche d'or et de la couche de graphite.

Le champ dans la zone de Ramsey est injecté par un guide micro-onde représenté sur la figure II.13. Le temps de vie du champ dans une zone de Ramsey est de l'ordre de la nanoseconde, très court devant le temps de passage des atomes dans le mode de la zone de Ramsey (de l'ordre de 20 μs). Ainsi, le temps d'interaction est défini par la durée d'injection du champ. La figure II.14 représente le dispositif d'injection dans les zones de Ramsey. Un même générateur micro-onde à 12,8 GHz est utilisé pour alimenter deux zones de Ramsey successives, assurant la cohérence de phase entre les impulsions dans les deux zones. Les impulsions sont commutées indépendamment dans les deux zones à l'aide de diodes PIN. Le signal est ensuite quadruplé dans une diode Schottky, composant non-linéaire générant entre autres, la quatrième harmonique à 51 GHz.

II.5.1.d Contrôle de la fréquence atomique

Les atomes de Rydberg sont extrêmement sensibles aux champs électriques extérieurs par l'effet Stark quadratique. Comme nous l'avons vu, il est nécessaire de maintenir un champ électrique directeur le plus homogène et le plus faible possible (tout en maintenant les atomes dans l'état circulaire). Toutes les pièces vues par les atomes sur leur trajet depuis la préparation jusqu'à

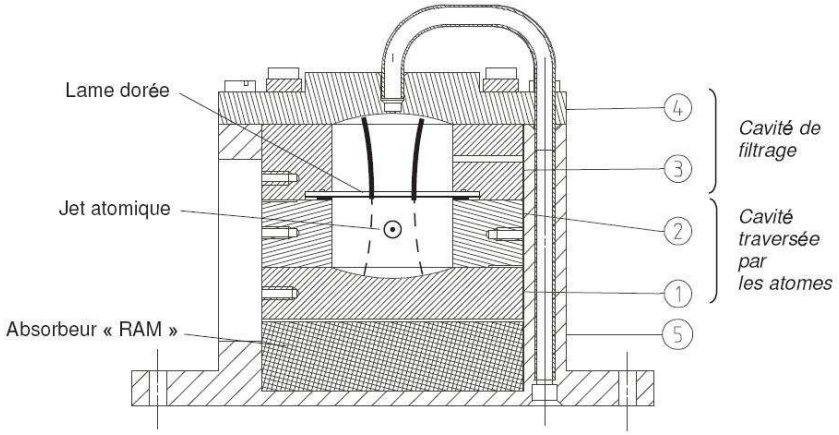


FIG. II.13 – Schéma d'une zone de Ramsey. Le champ micro-onde est d'abord mis en forme spatialement dans une cavité de filtrage. Une partie du champ est transmit à travers la lame dorée dans une cavité de faible Q avant d'être absorbée par le bloc de RAM.

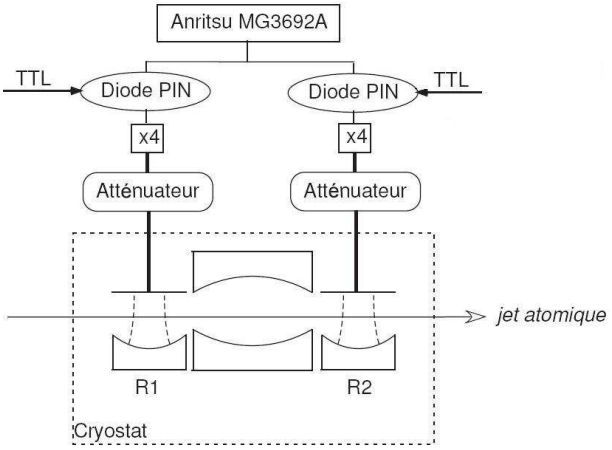


FIG. II.14 – Dispositif d'injection micro-onde dans les zones de Ramsey.

la détection doivent donc être conductrices. Les potentiels appliqués sur ces électrodes doivent être optimisés afin d'obtenir les meilleurs contrastes possibles pour les signaux atomiques.

De même, la transition entre les niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ est sensible au champ magnétique extérieur. La transition est déplacée par effet Zeeman d'environ 1,4 MHz/G. Afin d'éviter les déphasages inhomogènes au sein du jet atomique, il est donc également nécessaire de maintenir un champ magnétique le plus homogène possible le long du trajet des atomes. Toutes les pièces proche des atomes sont donc en matériaux amagnétiques, le champ magnétique terrestre est compensé par des bobines à l'exterieur du cryostat, et la boîte d'écrantage du champ thermique est recouverte d'un matériau de haute perméabilité magnétique (Vitrovac). L'écran ^{3}He du cryostat est recouvert d'indium, matériau supraconducteur à basse température, qui gèle le champ magnétique à l'intérieur de l'écran. Enfin, l'ensemble du cryostat est maintenu à l'intérieur d'un écran de μ-métal permettant d'écranter le champ magnétique extérieur.

Grâce à toutes ces précautions expérimentales, le champ magnétique résiduel à l'intérieur du montage est inférieur à 10 μG et nous arrivons à propager les cohérences atomiques d'une zone de Ramsey à l'autre tout en gardant des signaux de contraste supérieur à 80%.

II.5.1.e Détection des atomes de Rydberg

Il est indispensable pour nous de pouvoir détecter le niveau dans lequel se trouvent les atomes après leur passage dans l'expérience. En réalité, comme nous le verrons au chapitre suivant, la seule information que nous tirons du champ dans la cavité est obtenue indirectement, en faisant interagir des atomes avec le mode, et en détectant leur état final. Un champ d'une centaine de V/cm suffit à ioniser un atome de Rydberg, en effet l'électron très excité est extrêmement proche de la limite d'ionisation. De plus, le champ nécessaire pour arracher l'électron dépend du niveau dans lequel se trouve l'atome de Rydberg. On va donc utiliser ce phénomène d'ionisation des atomes de Rydberg pour détecter leur état final.

Le détecteur utilisé est composé d'une cathode plate, et d'une anode percée d'un trou. En appliquant une rampe de tension sur la cathode, on ionise l'atome de Rydberg situé entre les deux électrodes. L'électron ainsi arraché traverse le trou de l'anode et est ensuite focalisé à l'aide d'un jeu d'électrodes (lentilles électrostatiques) à l'intérieur d'un multiplicateur d'électron. L'instant où l'électron est détecté dans le multiplicateur indique si l'atome se trouvait dans l'état $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. En effet, les premiers sont ionisés dans un champ plus faible – donc plus tôt dans la rampe de tension – que les seconds. La figure II.15 montre un schéma du détecteur ainsi que les différents signaux d'ionisations obtenus pour des atomes dans les états $|g\rangle$, $|e\rangle$ et $|52_C\rangle$. On voit que les différents pics sont assez bien séparés, et permettent de distinguer l'état atomique avec une erreur de moins de 5 %.

II.5.1.f Préparation d'atomes uniques

Le nombre d'atomes dans le jet sortant du four obéit à une loi de Poisson. L'efficacité du processus de circularisation est indépendante du nombre d'atomes dans le paquet. Le nombre d'atomes de Rydberg circulaires produits par paquet est donc lui aussi Poissonnien. Dans certaines circonstances, il n'est pas nécessaire d'avoir un atome unique dans les paquets, dans ce cas,

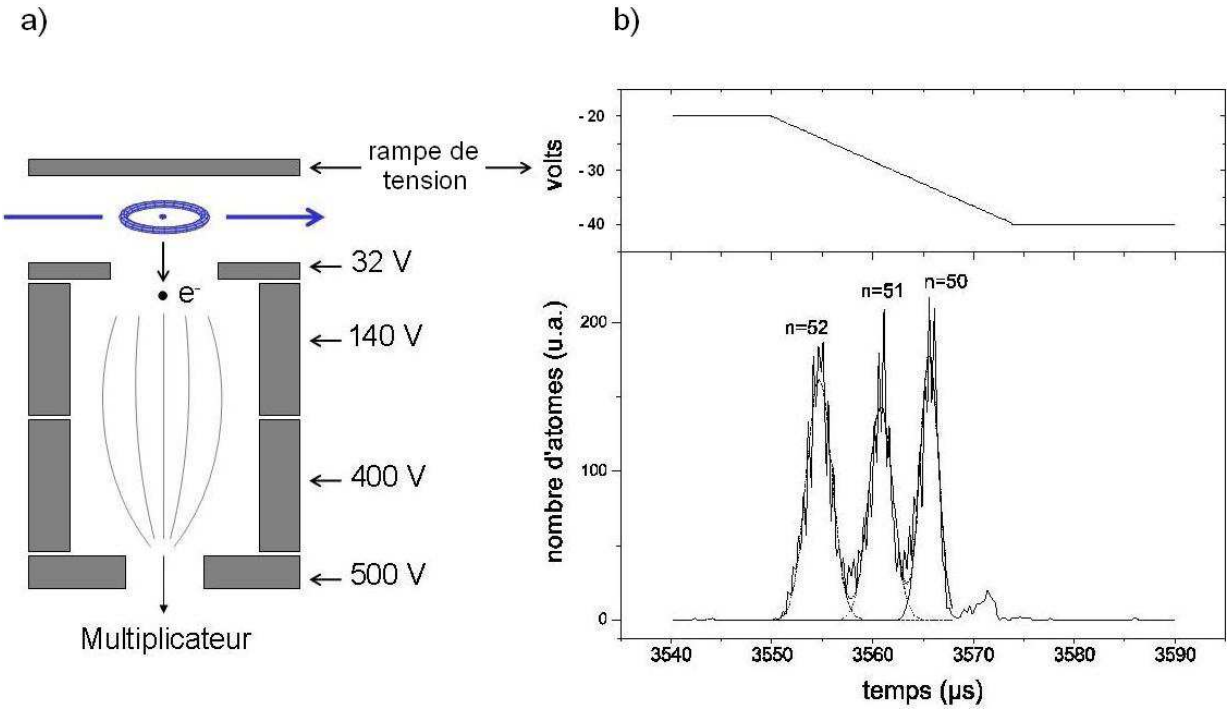


FIG. II.15 – Les atomes de Rydberg sont ionisés dans un champ électrique variable. L'électron est focalisé vers un multiplicateur d'électrons. L'instant auquel l'électron est détecté indique le niveau atomique.

on pourra maximiser le nombre d'atomes par paquet en utilisant des impulsions et des puissances de repompeur élevées. On arrive alors à un nombre moyen d'atomes par paquets de l'ordre de 1, tout en gardant une sélection de vitesse relativement fine. Dans d'autres cas, il est indispensable de n'avoir qu'un atome par paquet au plus. On ne peut pas sélectionner à posteriori les paquets dans lesquels un seul atome a été détecté car l'efficacité de détection des atomes est proche de 0,5. Ainsi, la détection d'un atome de Rydberg n'exclue pas la présence d'un second atome dans le paquet. On travaille donc avec des impulsions laser courtes et peu puissantes afin de diminuer l'efficacité de la circularisation jusqu'à atteindre un nombre d'atomes par paquet de l'ordre de 0,1. La plupart des paquets ne contiennent alors aucun atome, cependant, les paquets à deux atomes sont près de 10 fois moins probables que les paquets à un atome. Ainsi, lorsqu'on détecte un atome, la probabilité qu'il y en ait deux est négligeable.

II.5.1.g Franges de Ramsey expérimentales

Afin de tester que nous sommes capables de préparer correctement les atomes, de manipuler leur état interne dans les zones de Ramsey et de préserver la cohérence de phase au travers des différents éléments du montage, on peut effectuer une expérience d'interféromètrie de Ramsey entre les deux zones R_1 et R_2. On utilise la séquence décrite au paragraphe I.2.3 en ayant pris soin de désaccorder la cavité à plus d'1 MHz de la résonance atomique. De cette façon, les atomes n'interagissent pas avec la cavité qui se trouve au centre de l'interféromètre. Les atomes sont sélectionnés en vitesse de façon à passer dans la première et dans la seconde zone de Ramsey à des instants bien précis. La micro-onde est allumée pendant 2 µs dans chaque zone de Ramsey au moment où l'atome se trouve au centre du mode. On ajuste l'intensité du champ de façon à réaliser des impulsions $\pi/2$. On compte ensuite la proportion d'atomes détectés dans le niveau $|g\rangle$:

$$P(g) = \frac{n_g}{n_e + n_g}, \tag{II.30}$$

où n_e est le nombre d'atomes détectés dans $|e\rangle$ et n_g, le nombre d'atomes détectés dans $|g\rangle$. On balaye ensuite la fréquence du générateur micro-onde afin de changer la phase accumulée par la superposition atomique (dans le référentiel tournant à ω_r). Le signal obtenu est représenté sur la figure II.16. Les barres d'erreurs représentent l'erreur statistique liée au nombre fini d'atomes détectés. Le contraste fini des franges est dû à divers facteurs dont le premier est constitué par les effets de déphasages inhomogènes pour différents atomes du jet. La préparation des atomes dans l'état $|g\rangle$ est imparfaite. Le contraste des impulsions $\pi/2$ elles-mêmes n'est pas parfait car les atomes ne sont pas tous illuminés avec la même intensité lors des impulsions de Ramsey. Enfin, la détection ne distingue pas les deux niveaux avec une fidélité de 100%. Tous ces facteurs réduisent d'autant le contraste des franges de Ramsey. Nous reviendrons en détails sur ces différentes sources d'imperfections expérimentales au chapitre suivant.

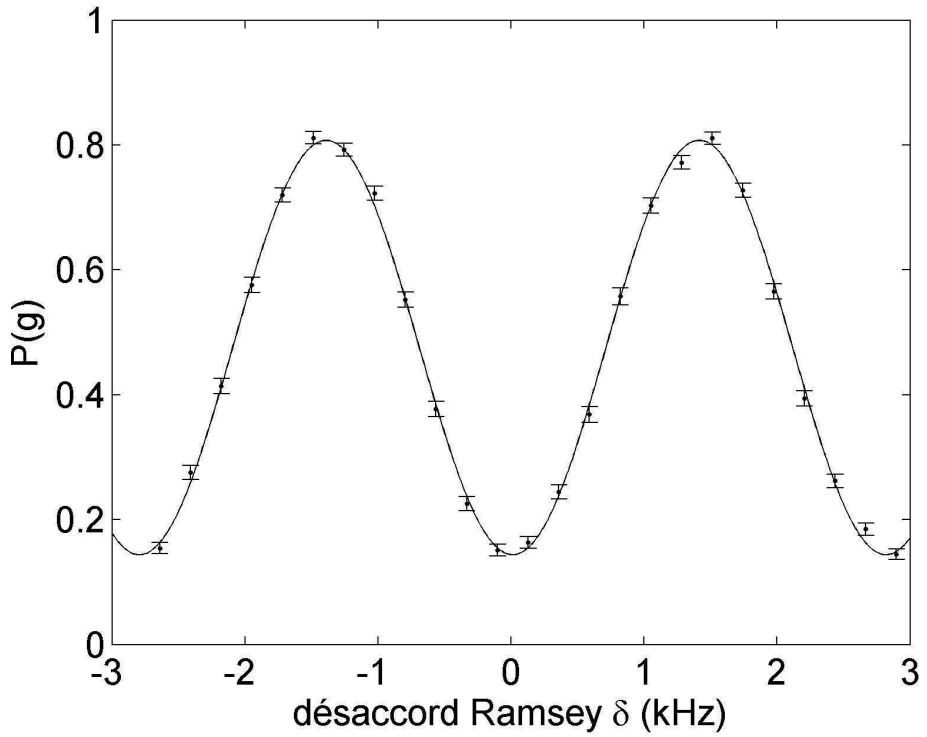
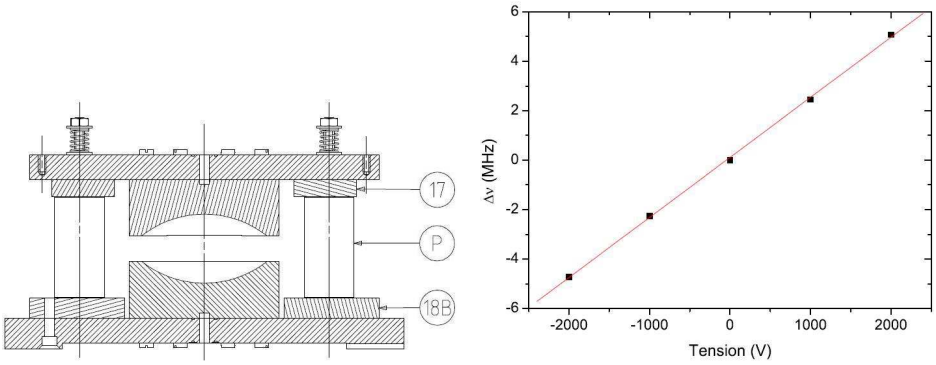


FIG. II.16 – Franges de Ramsey obtenues par interférométrie atomique entre les zones de Ramsey R_1 et R_2. Les deux impulsions sont séparées de 360,3 µs, soit le temps de transit des atomes entre les deux zones de Ramsey. La courbe en trait plein est un ajustement sinusoïdale. Le contraste mesuré est de 75 %.



(a) Bloc cavité (b) Résonance/tension piézos

FIG. II.17 – (a) Schéma d'un bloc cavité. 17 et 18B sont les cales en cuivre permettant d'ajuster grossièrement la distance entre les miroirs entre chaque remontage et P est un tube piézoélectrique utilisé pour compenser les petits écarts de fréquences en appliquant une tension à froid.(b) Variation de la fréquence de résonance en fonction de la tension appliquée sur les tubes piezoélectriques.

II.5.2 Contrôle de la cavité

II.5.2.a Contrôle de la fréquence du mode

Dans les expériences que nous réalisons, il est important de pouvoir accorder la résonance de la cavité sur la transition atomique, ou bien à un désaccord connu de l'ordre de la fréquence de Rabi. Il est donc nécessaire de contrôler la résonance de la cavité au niveau du kilohertz. Cette précision sur la fréquence correspond à un réglage de la séparation entre les miroirs au nanomètre près. Les deux miroirs sont séparés par des cylindres piézoélectriques (voir figure II.17). En appliquant une tension entre l'intérieur et l'extérieur des tubes piézoélectriques, on fait varier leur longueur. La sensibilité de la résonance atomique à la tension appliquée est de 2,4 kHz/V. La gamme d'accord est limitée par la tension maximale applicable aux tubes piézoélectriques avant qu'ils ne claquent et elle vaut environ 7 MHz. Ce chiffre est extrêmement important, car il définit la précision avec laquelle doit être monté le bloc cavité afin de pouvoir être mis à résonance avec les atomes. Ainsi, la résonance doit être à moins de 3,5 MHz de la fréquence atomique en l'absence de tension sur les tubes piézoélectriques, afin de pouvoir être accordée. Cette tolérance en fréquence correspond à une tolérance de deux microns environ sur l'espacement des miroirs. Afin d'atteindre une telle précision lors du montage du bloc cavité, nous utilisons des cales en cuivre disposées entre les tubes piézoélectriques et les supports des miroirs. Ces pièces sont amincies progressivement à l'acide jusqu'à obtenir la fréquence souhaitée. C'est à cause de l'imprécision de la procédure de montage des miroirs que la seconde cavité s'est retrouvée hors résonance lors du dernier montage.

II.5.2.b Préparation d'états classiques du champ dans la cavité

Nous allons voir ici quelques techniques expérimentales permettant de préparer des états classiques tels que le vide, ou un état cohérent dans la cavité.

Préparation de l'état vide Comme nous l'avons vu précédemment, l'état thermique correspondant à l'équilibre thermique de la cavité à 0,8 K contient un nombre très faible de photons. Cet état ressemble donc en bonne approximation à l'état vide. En principe, il suffit donc d'attendre que la cavité relaxe vers l'équilibre thermodynamique pour préparer l'état vide. En pratique, il a fallu prendre de nombreuses précautions pour empêcher les photons venus des parties plus chaudes d'entrer jusque dans le mode de la cavité. En particulier, tous les trous dans la boîte d'écrantage du champ sont sous-coupure pour la fréquence de résonance. Ceci a permis d'observer effectivement un nombre de photons thermique à l'équilibre de 0,05, comme attendu théoriquement. Cependant, le temps caractéristique de la relaxation, donné par T_{cav}, vaut plus d'un dixième de seconde dans notre cas. Il est donc essentiel de disposer d'une technique pour réinitialiser rapidement le champ dans le vide après chaque expérience, sans quoi, les temps d'acquisition seraient inacceptables.

Afin d'absorber rapidement les photons qui pourraient rester dans le mode, on envoie un grand nombre d'atomes dans l'état $|g\rangle$ à l'intérieur de la cavité résonante. Afin de maximiser la probabilité d'absorption, on balaye la fréquence atomique de part et d'autre de la résonance de la cavité par effet Stark pendant la traversée du mode par les atomes. Les niveaux $|g, n\rangle$ se connectent alors adiabatiquement aux niveaux $|e, n-1\rangle$ via les niveaux habillés, assurant l'absorption d'un photon pour chaque atome traversant le mode. Cette technique est plus efficace que l'absorption résonnante, pour laquelle la durée optimale d'interaction dépend du nombre de photons comme $1/\sqrt{n}$ via la fréquence de Rabi.

Préparation d'un état cohérent Nous allons présenter ici une technique fondamentale pour la suite, qui consiste à implémenter l'opérateur déplacement dans notre système. Comme nous l'avons vu au chapitre I, l'opérateur déplacement $D(\alpha)$ correspond au couplage de la cavité à une source classique d'amplitude complexe α.

Le mode de la cavité est couplé faiblement aux modes de l'environnement via les pertes par diffraction. Ce couplage est extrêmement faible, comme en témoigne le temps de vie record de nos cavités, cependant on peut en tirer partie pour diffracter des photons à l'intérieur du mode de la cavité. Pour déplacer le champ dans la cavité, il suffit donc de générer un champ cohérent dans l'environnement de la cavité. Pour cela, nous couplons une source classique à un guide d'onde débouchant entre les deux miroirs sur le côté de la cavité. L'injection est très inefficace, mais elle est suffisante pour produire les champs de quelques photons dont nous avons besoin. De plus, le couplage dans le mode est décrit par un coefficient très faible, mais constant. Ainsi, en contrôlant l'amplitude et la phase de l'impulsion injectée, on contrôle l'amplitude complexe du déplacement opéré sur le champ dans la cavité.

Il faut cependant prendre garde que l'ensemble de la boîte d'écrantage du champ est inondée de micro-onde dans le processus. C'est pourquoi on doit s'assurer qu'aucun atome ne se trouve à l'intérieur de cette dernière pendant que le champ est allumé. C'est seulement une fois que l'on a

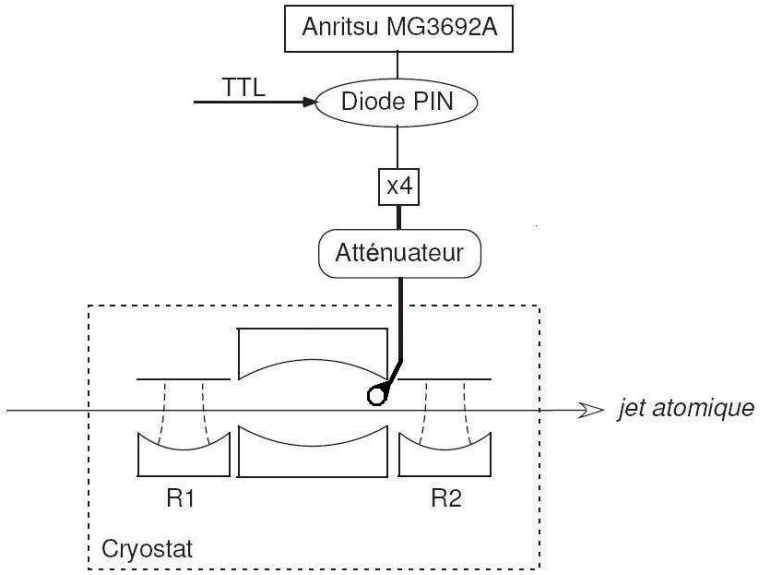


FIG. II.18 – Schéma du dispositif d'injection dans les cavités de grande finesse.

coupé l'impulsion que la micro-onde va s'amortir très vite dans les modes de la boîte d'écrantage tandis qu'elle va survivre dans celui de la cavité du fait de son très grand temps de vie.

Le dispositif d'injection est représenté sur la figure II.18. Nous utilisons un synthétiseur Anritsu de fréquence et puissance réglable autour de 12,8 GHz. Le signal est commuté par une diode PIN afin de contrôler précisément la durée de l'injection, puis il est quadruplé pour atteindre la fréquence de 51,09 GHz.

II.5.3 L'environnement cryogénique

Une grosse contrainte expérimentale est due au fait que nous travaillons dans un environnement cryogénique. Cette contrainte est néanmoins indispensable pour réduire le champ thermique à 51 GHz, nuisible pour le temps de vie des atomes de Rydberg et problématique pour la préparation d'états de faibles nombres de photons dans la cavité. D'autre part, les miroirs supraconducteurs doivent être refroidis à une température suffisamment basse pour que leur temps de vie ne soit pas limité par la résistance de surface du supraconducteur. Le point de fonctionnement de 0,8 K de notre cryostat permet d'avoir un nombre de photons moyen à 51 GHz très faible, de près de 0,05. D'autre part, nous avons vu sur la figure II.4, que le temps de vie atteignait sa valeur limite en dessous de 1,2 K.

Cette température est atteinte en plaçant le montage à l'intérieur d'un cryostat à deux étages : Un schéma du cryostat est donné sur la figure II.19. Un réservoir d'azote liquide écrante d'abord le rayonnement thermique extérieur, permettant de réduire les pertes de la zone refroidie à l'Helium liquide. Un second écran thermique est maintenu à 4 Kelvin par un réservoir d'Helium 4, puis un premier cryogénérateur est refroidi à 1,2 Kelvin en faisant subir une détente adiabatique à l'Hélium 4. L'Helium 3 d'un circuit fermé est liquéfié au contact de ce cryogénérateur. L'he-

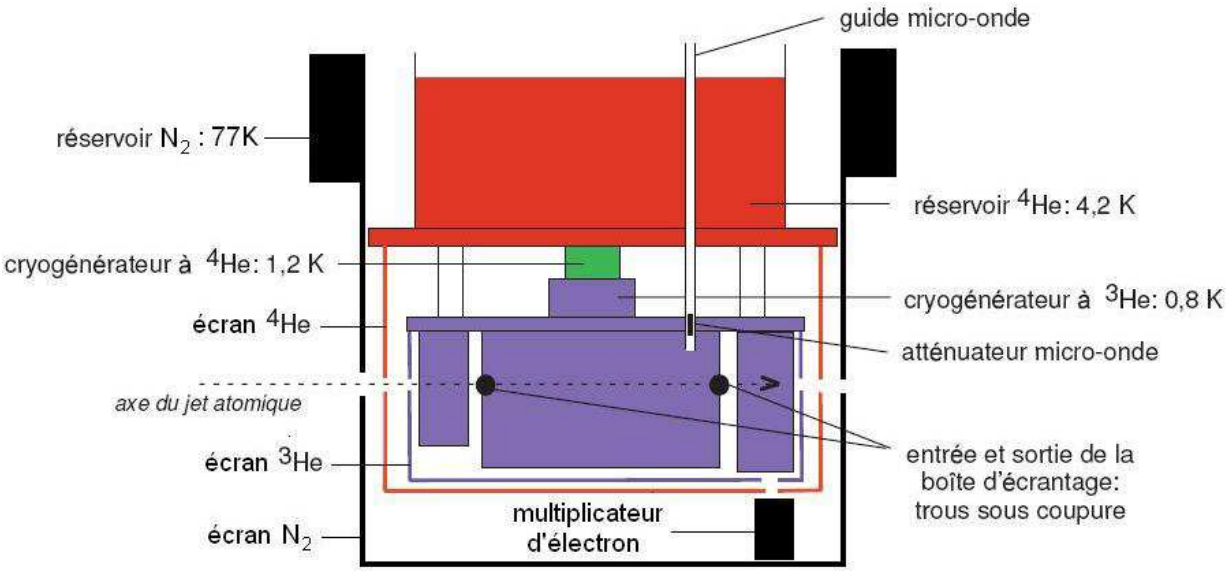


FIG. II.19 – Schéma du cryostat utilisé pour maintenir les cavités à 0,8 K et pour maintenir cette température le long du trajet des atomes de Rydberg circulaires.

lium 3 liquide subit ensuite une détente adiabatique permettant d'atteindre 0,8 K. L'ensemble du dispositif expérimental, depuis la boîte à circulariser jusqu'aux électrodes des détecteurs est thermalisé à cette température, abrité par un écran thermique à 0,8 Kelvin.

Il est essentiel que les différents écrans thermiques empêchent le rayonnement micro-onde d'entrer à l'intérieur du montage et de peupler le mode de la cavité ou bien de stimuler l'émission des atomes. Ainsi, les différents trous permettant de faire passer les lasers ou les atomes doivent être « sous-coupure » pour la longueur d'onde considérée $\lambda = 6$ mm à 51 GHz. Afin d'écranter encore mieux le coeur de l'expérience du champ thermique, les cavités et les zones de Ramsey sont placées à l'intérieur d'une boîte d'écrantage supplémentaire entièrement étanche au rayonnement à 51 GHz. Les seules ouvertures de cet écran sont deux trous sous coupures pour laisser entrer et sortir les atomes. D'autre part, les guides d'onde servant à acheminer la micro-onde jusqu'au montage laissent passer par définition, le champ micro-onde à 51 GHz. Afin d'empêcher les photons thermiques d'envahir le montage par ces différents guides, on utilise des atténuateurs à chaque étage du cryostat. Le signal et le champ thermique sont atténués à chaque étage, de sorte que le fond thermique soit faible devant le fond à 0,8 K en arrivant au niveau du montage.

II.5.4 Récapitulatif

Nous avons montré dans ce chapitre, qu'au prix d'une grande complexité expérimentale, nous sommes parvenus à mettre en oeuvre deux systèmes simples parfaitement contrôlés. Le temps de vie du champ piégé dans la cavité, comme celui des atomes de Rydberg circulaires utilisés sont très grands devant la période de Rabi, caractéristique du couplage entre les deux systèmes. Ceci signifie que nos deux systèmes interagissent – très largement – dans le régime de couplage fort. En prenant garde de lever la dégénérescence entre les deux modes de polarisation, ainsi qu'en

utilisant des paquets contenant un faible nombre d'atomes, nous avons pu réaliser la situation idéale d'un atome unique interagissant avec un mode unique du champ électromagnétique. En outre, nous contrôlons parfaitement la durée de l'interaction et le désaccord entre atome et champ grâce à la sélection en vitesse des atomes et au contrôle de leur fréquence par effet Stark. Enfin, nous sommes capable de préparer la cavité dans l'état vide de tout photons. Nous allons voir par la suite comment nous pouvons utiliser les atomes pour préparer les états non-classiques présentés au chapitre I et reconstruire complètement leur matrice densité afin de les caractériser.

Chapitre III

Mesurer le champ avec des atomes

Dans ce chapitre, nous allons tout d'abord décrire précisément l'interaction entre les atomes et le champ dans le cas dispersif. Puis nous verrons comment les atomes peuvent être utilisés pour extraire de l'information sur l'état du champ dans la cavité. Dans la section I.1.4, nous présentions différents types de mesures quantiques pouvant être décrites par un protocole en deux étapes : le système à mesurer est intriqué à un système auxiliaire (appelé mètre), puis le mètre est mesuré à l'aide d'un détecteur classique. Notre dispositif expérimental permet de réaliser cette situation idéale en considérant le champ dans la cavité comme le système à mesurer et les atomes comme un système auxiliaire dont l'état est détecté classiquement par le détecteur à ionisation. Nous verrons qu'on peut utiliser les atomes pour mesurer non-destructivement le nombre de photons dans la cavité. Cette expérience a déjà été réalisée par le passé, elle est décrite en détail dans les thèses de mes prédécesseurs Sébastien Gleyzes, Christine Guerlin et Julien Bernu. Nous n'insisterons pas ici sur les résultats expérimentaux obtenus dans ces différentes thèses, mais nous utiliserons cette fois le formalisme présenté au I.1.4 pour décrire de façon précise le processus de mesure utilisé ainsi que son action en retour sur le champ. Cette description théorique est importante car on s'appuiera dessus pour reconstruire la matrice densité du champ au chapitre IV.

III.1 L'interaction dispersive

A la section I.3, nous avons diagonalisé le Hamiltonien d'interaction atome-champ. Nous allons à présent étudier les conséquences des résultats obtenus lorsque le désaccord atome-champ δ est non-nul.

III.1.1 Le déplacement lumineux

Les équations (I.160) et (I.162) donnent les états propres et les énergies propres du Hamiltonien d'interaction dans chaque sous-espace $\{|g,n\rangle, |e,n-1\rangle\}$. A résonance, on assistait à un échange cohérent entre les deux états $|g,n\rangle$ et $|e,n-1\rangle$. Dans le régime dispersif, ces oscillations sont fortement réduites à cause de la levée de dégénérescence entre les niveaux non-couplés.

L'effet le plus marquant consiste alors en la modification de la fréquence de transition entre les niveaux $|+,n\rangle$ et $|-,n-1\rangle$ selon la valeur du couplage (voir figure III.1). En l'absence de couplage, il s'agit simplement de la transition entre les états $|e,n\rangle$ et $|g,n\rangle$, dont la fréquence est celle de la transition atomique ω_{at}. Lorsqu'on introduit un couplage entre champ et atome, l'énergie du niveau supérieur s'élève d'une quantité ΔE_+, tandis que celle du niveau inférieur s'abaisse de la quantité ΔE_- comme l'indique le schéma de la figure III.1. Ainsi, la fréquence de transition augmente à cause du couplage atome-champ. Ce phénomène est connu sous le nom de déplacement lumineux. La différence d'énergie s'écrit, pour un atome au centre du mode[1] :

$$\begin{aligned} E_{+,n} - E_{-,n-1} &= \hbar\omega_0 + \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{\Omega_n^2+\delta^2} + \sqrt{\Omega_{n-1}^2+\delta^2}\right] \\ &= \hbar\omega_{\mathrm{at}} + \Delta E_+(n) - \Delta E_-(n), \end{aligned} \tag{III.1}$$

avec

$$\begin{aligned} \Delta E_+(n) &= \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{\Omega_n^2+\delta^2} - \delta\right] \\ \Delta E_-(n) &= \frac{\hbar}{2}\left[\delta - \sqrt{\Omega_{n-1}^2+\delta^2}\right]. \end{aligned} \tag{III.2}$$

Ainsi, l'énergie de la transition est déplacée d'une quantité $\Delta E(n,\delta,\Omega_0) = \Delta E_+(n) - \Delta E_-(n)$ par rapport aux états non-couplés :

$$\Delta E(n,\delta,\Omega_0) = \frac{\hbar}{2}\left[\sqrt{\Omega_n^2+\delta^2} + \sqrt{\Omega_{n-1}^2+\delta^2}\right] - \hbar\delta. \tag{III.3}$$

On voit que ce déplacement dépend du nombre de photons présents dans le champ. C'est cette remarque fondamentale qui est à la base de notre mesure non-destructive du nombre de photons.

Pour bien comprendre l'effet de l'interaction, nous allons étudier le cas limite où le désaccord δ est grand devant le couplage Ω_n (pour les nombres de photons n considérés), on peut alors développer l'expression ci-dessus en ne gardant que les termes d'ordre le plus bas en Ω_n/δ :

$$\begin{aligned} \Delta E(n,\delta \gg \Omega_n) &= \frac{\hbar(\Omega_n^2+\Omega_{n-1}^2)}{4\delta} \\ &= \frac{\hbar\Omega_0^2}{2\delta}(n+1/2). \end{aligned} \tag{III.4}$$

On voit que dans ce cas, le déplacement énergétique est *linéaire* en fonction du nombre de photons.

III.1.2 Déphasage d'un dipôle atomique par un état de Fock

Considérons un atome préparé dans l'état :

$$|\Psi_{\mathrm{a.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle). \tag{III.5}$$

[1] Lorsque l'atome n'est pas parfaitement au centre du mode, il faut remplacer le couplage Ω_n par le couplage au point $\mathbf{r}$ considéré $\Omega_n f(\mathbf{r})$.

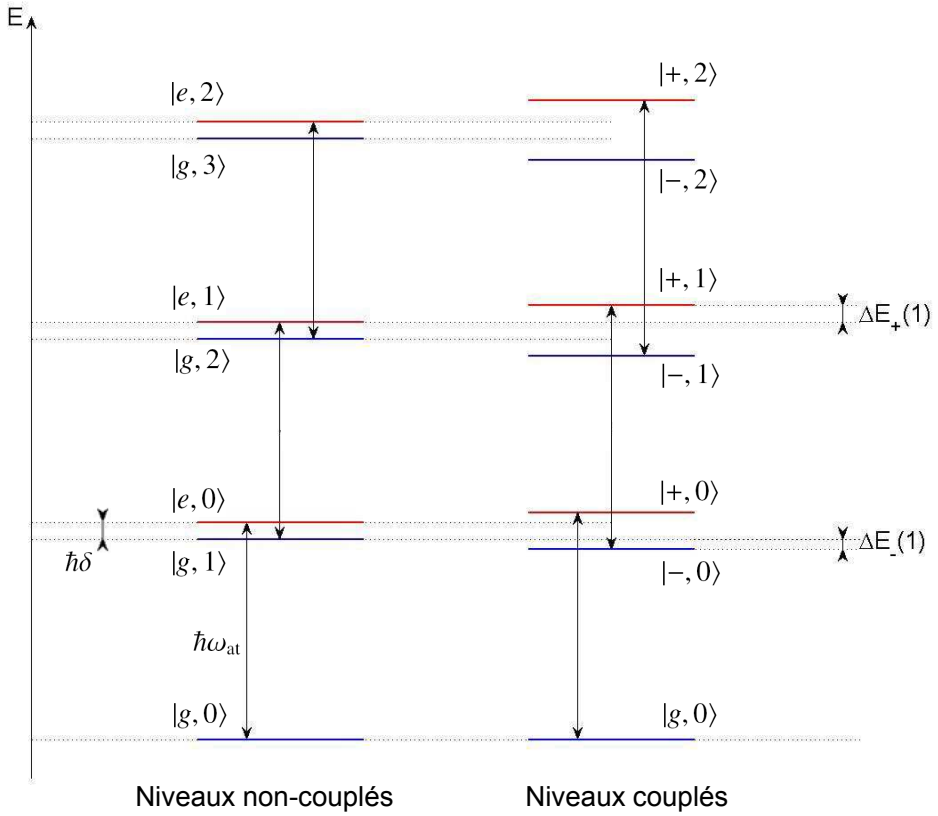


FIG. III.1 – Les énergies propres du Hamiltonien atome-champ dans le cas non-résonant. A gauche : cas d'un couplage nul. A droite, cas d'un couplage fini. Les énergies propres sont déplacées d'une quantité $\Delta E_+(n)$ pour les états $|+,n\rangle$, et $\Delta E_-(n)$ pour les états $|-,n\rangle$. La fréquence de la transition entre les niveaux $|e,n\rangle$ et $|g,n\rangle$ est donc déplacée d'une quantité $\Delta E(n) = \Delta E_+(n) - \Delta E_-(n)$.

Lorsqu'il pénètre dans le mode de la cavité, grâce à la forme gaussienne de ce dernier, le couplage s'établit doucement entre atome et champ. La force du couplage est caractérisée par la fréquence de Rabi au point considéré $\Omega_0 f(\mathbf{r})$. On supposera que la cavité contient un nombre de photons n bien déterminé. La composante $|e\rangle$ de la fonction d'onde atomique suit alors adiabatiquement[2] l'état propre $|+, n\rangle$ tandis que la composante $|g\rangle$ suit $|-, n-1\rangle$, avant de ressortir de la cavité dans les états initiaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$. Nous allons nous placer en représentation d'interaction par rapport au Hamiltonien d'évolution libre de l'atome. Les niveaux d'énergie atomiques sont modifiés par les quantités $\Delta E_\pm(n)$. Chaque composante de la superposition atomique va donc accumuler, lors de sa traversée de la cavité, une phase $\Phi_\pm(n)$:

$$\Phi_\pm(n) = \frac{1}{\hbar}\int \Delta E_\pm(n, \delta, \Omega_0 f(\mathbf{v}t))\mathrm{d}t, \tag{III.6}$$

où $\mathbf{v}$ est la vitesse de l'atome, supposée constante. Ainsi, l'état atomique subit la transformation suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle + |e\rangle)|n\rangle \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\Phi_-(n)}|g, n\rangle + e^{-i\Phi_+(n)}|e, n\rangle\right) \tag{III.7}$$

$$\equiv \quad |+_n\rangle \otimes |n\rangle. \tag{III.8}$$

La superposition atomique acquiert donc une phase totale $\Phi(n)$:

$$\Phi(n) = \Phi_+(n) - \Phi_-(n) = \frac{1}{\hbar}\int \Delta E(n, \delta, \Omega_0 f(\mathbf{v}t))\mathrm{d}t. \tag{III.9}$$

On peut symétriser l'équation (III.8) à condition de faire intervenir le terme de phase globale $\Theta(n)$:

$$\Theta(n) = \frac{\Phi_+(n) + \Phi_-(n)}{2}. \tag{III.10}$$

La superposition atomique s'écrit alors :

$$|+_n\rangle = \frac{e^{-i\Theta(n)}}{\sqrt{2}}\left(e^{i\Phi(n)/2}|g\rangle + e^{-i\Phi(n)/2}|e\rangle\right). \tag{III.11}$$

A la limite des grands désaccords δ, puisque $\Delta E(n, \delta, \Omega_0)$ dépend linéairement de n, la phase accumulée $\Phi(n)$ varie elle aussi linéairement avec n. Le facteur de phase globale, quant à lui, devient indépendant de n. Dans ce cas, l'équation (III.11) se simplifie :

$$|+_n\rangle = \frac{e^{-i\Phi_0/4}}{\sqrt{2}}\left[e^{i\frac{\Phi_0}{2}(n+1/2)}|g\rangle + e^{-i\frac{\Phi_0}{2}(n+1/2)}|e\rangle\right], \tag{III.12}$$

où Φ_0 est le déphasage produit par un photon sur la superposition atomique :

$$\Phi_0 = \frac{1}{2\delta}\int \Omega_0^2 f^2(\mathbf{v}t)\mathrm{d}t. \tag{III.13}$$

[2]En fait, la condition d'adiabaticité n'est pas parfaitement vérifiée pour nos atomes dont le temps de transit est de près de 40 µs. Cependant, comme souvent dans ce cas, l'approximation adiabatique est assez robuste et l'intégration numérique du Hamiltonien d'interaction montre que les conclusions de ce paragraphe restent vraies à condition de considérer un mode de forme symétrique.

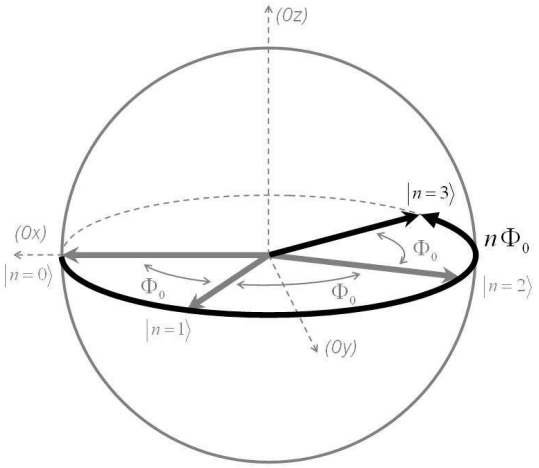


FIG. III.2 – Evolution du vecteur de Bloch lors d'une interaction dispersive avec le champ supposé dans un état de Fock. La fréquence Ramsey a été ajustée ici pour que le vecteur de Bloch soit aligné avec (Ox) lorsque la cavité est dans l'état vide.

La figure III.2 montre dans ce cas les vecteurs de Bloch $|+_0\rangle$, $|+_1\rangle$, $|+_2\rangle$ et $|+_3\rangle$ correspondants à l'interaction avec une cavité contenant 0, 1, 2 ou 3 photons. La courbe III.3 montre, quant à elle, la variation de $\Phi(n)$ pour différentes valeurs du désaccord δ. La non-linéarité du déphasage en fonction du nombre de photons devient importante lorsque le désaccord devient du même ordre que la fréquence de Rabi. On notera que ces courbes ont une ordonnée à l'origine non nulle. En effet, le couplage des atomes à une cavité vide de photons déplace le niveau $|e\rangle$. Ce phénomène s'interprète comme le déplacement lumineux dû aux fluctuations du vide et il est connu sous le nom de déplacement de Lamb.

III.2 Principe de la mesure Non-destructive du nombre de photons

La méthode utilisée pour compter le nombre de photons repose sur l'interaction dispersive entre champ et atomes. On utilise la technique d'interférométrie de Ramsey présentée au I.2.3 pour mesurer la phase accumulée $\Phi(n)$, et ainsi remonter au nombre de photons piégés n.

III.2.1 Une horloge atomique pour compter les photons

Nous venons de montrer qu'une superposition atomique subit un déphasage sous l'effet d'un état de Fock $|n\rangle$ dans la cavité et se transforme en l'état $|+_n\rangle$. Si le champ ne se trouve pas dans un état de Fock, l'état du champ et de l'atome est alors intriqué après l'interaction :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) \otimes \left(\sum_n c_n|n\rangle\right) \rightarrow \sum_n c_n|+_n\rangle \otimes |n\rangle. \tag{III.14}$$

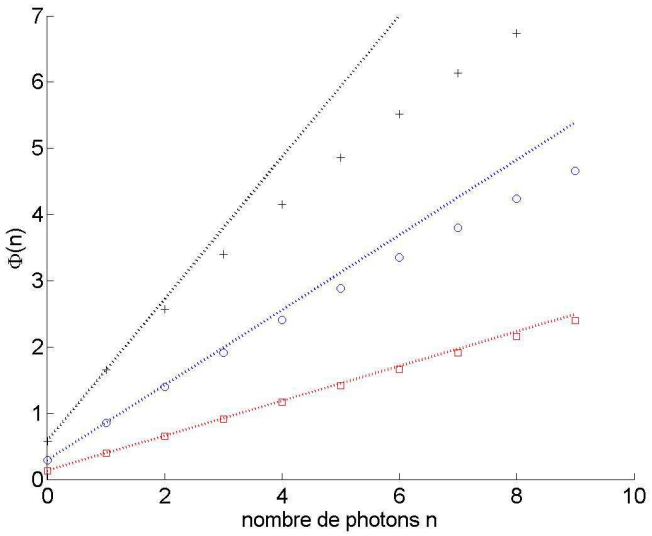


FIG. III.3 – Déphasage $\Phi(n)/\pi$ subi par la superposition atomique en fonction du nombre de photons pour une vitesse $v = 250\text{m/s}$, et un désaccord $\delta = 55\,\text{kHz}$ (croix), $120\,\text{kHz}$ (ronds), $270\,\text{kHz}$ (carrés). Les courbes en traits pointillés correspondent à un ajustement linéaire sur les deux premiers points. L'ordonnée à l'origine de ces différentes courbes correspond au déplacement de Lamb aux différents désaccords δ.

La situation après l'interaction avec la cavité peut se décrire en termes simples de la façon suivante :

1. Une première impulsion $\pi/2$ déclenche une horloge atomique : l'aiguille de cette horloge est le pseudo-spin atomique qui tourne dans le plan équatorial de la sphère de Bloch.
2. A cause du phénomène de déplacement lumineux, le rythme de cette horloge est légèrement perturbé par la présence des photons dans le mode de la cavité.
3. La position finale de l'aiguille sur le cadran dépend donc du nombre de photons piégés dans la cavité.

La complexité du problème réside en fait dans la nature quantique de l'aiguille de l'horloge. En effet, il s'agit d'un spin 1/2 dont la direction ne peut pas être déterminée à l'aide d'une seule copie du système. Si l'on disposait d'un grand nombre N_{at} de copies de l'atome ayant subi la même interaction, alors l'état pourrait s'écrire :

$$\sum_n c_n |n\rangle \otimes \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} |+_n\rangle. \tag{III.15}$$

Chacun des états $\prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} |+_n\rangle$ correspond à un état cohérent du spin collectif $N_{\text{at}}/2$ et devient à la limite des grands N_{at} un objet classique dont les fluctuations deviennent très faibles devant la valeur moyenne. Une mesure directe du pseudo-spin collectif, en distinguant sans ambiguïté les

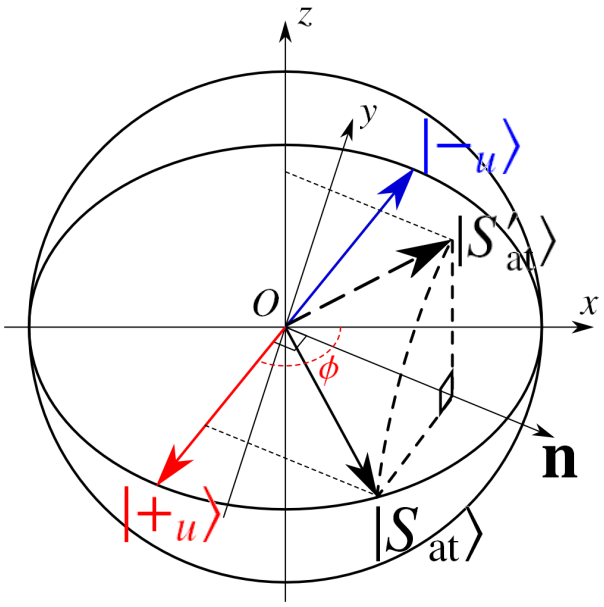


FIG. III.4 – Afin de détecter l'état atomique $|S_{\rm at}\rangle$ dans la base $\{|+_u\rangle, |-_u\rangle\}$, il convient d'appliquer une impulsion $\pi/2$ de phase ad hoc pour que le vecteur de Bloch de l'atome effectue une rotation d'un quart de tour autour du vecteur **n** perpendiculaire à la direction *Ou*. Le vecteur de Bloch pointe alors dans la direction $|S'_{\rm at}\rangle$. Finalement, la probabilité de détecter l'atome dans $|e\rangle$ n'est autre que la composante $|\langle +_u|S_{\rm at}\rangle|^2$ recherchée.

différentes directions $|+_n\rangle$, aurait donc pour effet de projeter immédiatement le champ dans l'état nombre correspondant à la valeur trouvée[3]. Nous allons étudier dans la suite la situation réelle, dans laquelle les atomes sont détectés un à un.

III.2.2 Mesure d'une composante arbitraire du vecteur de Bloch

Nous allons écrire ici l'opérateur de Kraus décrivant l'évolution du champ lors de la détection d'un atome. On écrira d'abord la transformation subie lorsque le champ est préparé dans un état nombre. En effet, la transformation subie par les vecteurs d'une base définit sans ambiguïté un opérateur linéaire.

Lorsque le champ est préparé dans un état de Fock $|n\rangle$, l'état du système atome-champ après l'interaction est donné d'après (III.11) par :

$$|\Psi_{\rm a.c.}(n)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\Theta(n)} \left(e^{i\Phi(n)/2}|g\rangle + e^{-i\Phi(n)/2}|e\rangle \right) \otimes |n\rangle. \qquad \text{(III.16)}$$

A sa sortie de la cavité, on peut choisir de détecter chaque atome suivant une direction arbitraire *Ou*. La figure III.4 rappelle comment procéder pour mesurer une direction arbitraire du

[3] Dans cette discussion, on ne considère que les nombres de photons n pour lesquels $\Phi(n) < 2\pi$. Ainsi, la direction du vecteur de Bloch détermine sans ambiguïté un états de Fock.

pseudo-spin atomique dans le plan équatorial de la sphère de Bloch. Notons ϕ l'angle azimutal de la direction de mesure *Ou*. Nous devons alors réexprimer (III.16) dans la base atomique adaptée $\{|+_u\rangle, |-_u\rangle\}$. Rappelons l'expression des vecteurs $|+_u\rangle$ et $|-_u\rangle$:

$$\begin{aligned} |+_u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle\right) \\ |-_u\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle - e^{i\phi}|g\rangle\right). \end{aligned} \tag{III.17}$$

On peut alors réexprimer la fonction d'onde (III.16) du système atome-champ dans cette nouvelle base :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}(n)\rangle = e^{-i(\phi/2+\Theta(n))}\left[\cos\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right)|+_u\rangle - i\sin\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right)|-_u\rangle\right]\otimes|n\rangle. \tag{III.18}$$

Elle montre que la probabilité $P_e(n,\phi)$ de détecter l'atome dans $|e\rangle$ (après la dernière impulsion $\pi/2$) varie comme :

$$P_e(n,\phi) = \cos^2\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right) = \frac{1+\cos(\Phi(n)-\phi)}{2}. \tag{III.19}$$

L'interprétation géométrique est évidente lorsqu'on se rappelle qu'on mesure en fait la composante *Ou* du pseudo-spin atomique après l'interaction tel que représenté sur la figure III.4.

A présent, lorsque le champ se trouve initialement dans un état quelconque

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n|n\rangle, \tag{III.20}$$

l'état après interaction s'écrit comme la superposition :

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n|\Psi(n)\rangle. \tag{III.21}$$

En factorisant cette expression suivant les états atomiques, on obtient :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}\rangle = e^{-i\phi/2}|+_u\rangle\otimes\left(\sum_n c_n e^{-i\Theta(n)}\cos\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right)|n\rangle\right) - ie^{-i\phi/2}|-_u\rangle\otimes\left(\sum_n c_n e^{-i\Theta(n)}\sin\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right)|n\rangle\right). \tag{III.22}$$

Ainsi, si l'atome est détecté dans l'état $|e\rangle$ après la rotation, le champ est projeté sur l'état :

$$\begin{aligned} |\Psi_{e,\phi}\rangle &= \sum_n c_n e^{-i\Theta(n)}\cos\left(\frac{\Phi(n)-\phi}{2}\right)|n\rangle \\ &= M_e(\phi)|\Psi\rangle, \end{aligned} \tag{III.23}$$

où on a introduit l'opérateur de Kraus $M_e(\phi)$ correspondant à la détection d'un atome dans l'état $|e\rangle$:

$$M_e(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\Theta(0)}\cos\left(\frac{\Phi(0)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . & . & . \\ 0 & e^{-i\Theta(1)}\cos\left(\frac{\Phi(1)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & e^{-i\Theta(2)}\cos\left(\frac{\Phi(2)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix}. \tag{III.24}$$

De même, l'opérateur de Kraus correspondant à la détection d'un atome dans l'état $|g\rangle$ est donné par :

$$M_g(\phi) = \begin{pmatrix} e^{-i\Theta(0)}\sin\left(\frac{\Phi(0)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . & . & . \\ 0 & e^{-i\Theta(1)}\sin\left(\frac{\Phi(1)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & e^{-i\Theta(2)}\sin\left(\frac{\Phi(2)-\phi}{2}\right) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix}. \tag{III.25}$$

Les opérateurs du POVM correspondant $E_{1\text{at.}}(i,\phi) = M_i(\phi)^\dagger M_i(\phi)$:

$$E_{1\text{at.}}(|e\rangle,\phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\cos(\Phi(0)-\phi) & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1+\cos(\Phi(1)-\phi) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 1+\cos(\Phi(2)-\phi) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix} \tag{III.26}$$

et

$$E_{1\text{at.}}(|g\rangle,\phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-\cos(\Phi(0)-\phi) & 0 & . & . & . & . \\ 0 & 1-\cos(\Phi(1)-\phi) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & 1-\cos(\Phi(2)-\phi) & 0 & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix} \tag{III.27}$$

correspondent bien à la loi de probabilité (III.19).

Les opérateurs de Kraus (III.24) et (III.25) montrent que la mesure est non-destructive. En effet, l'observable mesurée $N = a^\dagger a$ est une bonne observable QND puisqu'elle commute avec le Hamiltonien d'évolution libre. De plus, les opérateurs M_e et M_g sont diagonaux dans la base des états nombres, ce qui montre que le nombre de photons n'est pas modifié par la mesure. Finalement, sauf cas pathologiques ($\Phi(n) = 2\pi n$ par exemple), les opérateurs de Kraus ne sont pas proportionnels à l'identité, ce qui signifie que la mesure donne une certaine information sur le nombre de photons dans le champ. Nous étudierons spécifiquement à la section III.4 la situation correspondant à chaque choix de la valeur de δ.

III.3 Imperfections expérimentales

La description donnée ci-dessus permet de rendre compte de l'évolution du système atome-champ lors des mesures interféromètriques réalisées par les atomes. Cependant, cette description est incomplète puisqu'elle suppose que l'interféromètre possède un contraste parfait, ce qui n'est pas le cas. Les franges de Ramsey présentées à la figure II.16 présentent en effet un contraste réduit par rapport au cas idéal. Nous allons essayer d'identifier plusieurs sources d'erreurs possibles. Puis nous tenterons d'unifier au maximum la description de ces différentes sources d'erreur.

III.3.1 Contraste fini de l'interféromètre

Comme nous l'avons expliqué au chapitre II, les déphasages inhomogènes agissant sur les différents atomes du jet peuvent être responsables d'une réduction de contraste. Les erreurs de détection atomique sont également une source d'erreur assez évidente pouvant mener à une réduction de contraste. Nous montrerons que ces deux sources d'erreurs sont parfaitement équivalentes et qu'elles peuvent être décrites par un formalisme relativement simple.

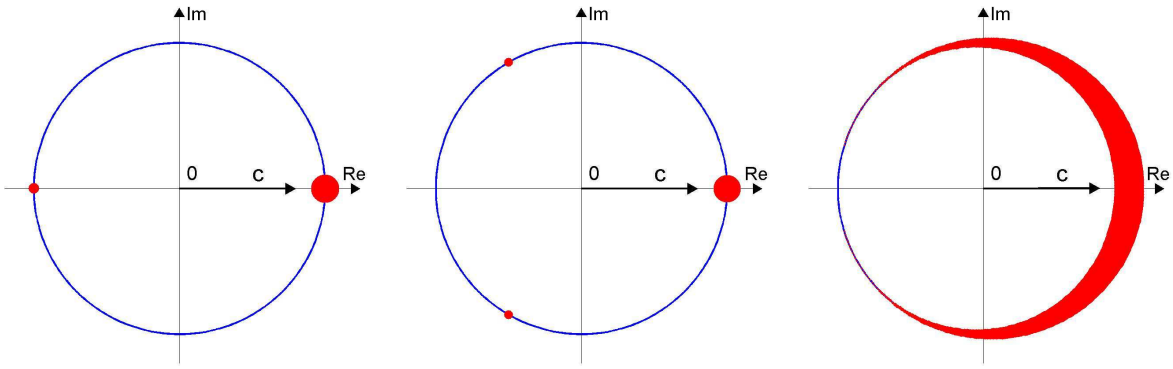
Déphasages inhomogènes Nous avons vu au chapitre II que les atomes du jet sont soumis à des déphasages inhomogènes. On peut par exemple supposer que chaque atome, suivant sa position dans le jet ou son instant d'arrivée accumule une phase supplémentaire Φ_{bruit} représentée par une variable aléatoire. Le point important est que ce bruit de phase n'a aucune corrélation avec le champ dans la cavité. On peut alors considérer que l'atome est détecté dans un interféromètre parfait suivant la phase $\phi + \Phi_{\text{bruit}}$. Par soucis de simplicité, nous considérerons que la variable aléatoire Φ_{bruit} prends ses valeurs dans un ensemble discret $\{\phi_k\}$, la généralisation à une variable continue étant immédiate. Nous noterons w_k la loi des $\{\phi_k\}$. Ainsi, la probabilité de mesurer l'atome selon la phase $\phi + \phi_k$ au lieu de ϕ vaut w_k. Nous supposerons que l'origine des phases ϕ a été choisie de sorte que la loi $\{\phi_k\}$ soit centrée sur 0.

Les franges de Ramsey ainsi obtenues sont alors la moyenne des franges parfaites déphasées de ϕ_k pour toutes les valeurs possibles de k. Le contraste résultant c se calcule aisément en passant aux notations complexes :

$$c = \sum_k w_k e^{i\phi_k}. \tag{III.28}$$

La quantité ci-dessus est réelle et positive d'après le choix effectué sur l'origine des phases.

Erreurs de détection De même, les erreurs de détection peuvent expliquer le contraste fini des franges de Ramsey. En effet, la figure II.15 montre que les signaux d'ionisation des niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$ ont un certain recouvrement. Ainsi, on peut considérer que les atomes ne subissent pas de déphasages inhomogènes avant d'être détectés, mais qu'avec une probabilité ϵ, le signal qui nous parvient est l'opposé du niveau dans lequel l'atome a été détecté. En fait, on peut utiliser le même formalisme que ci-dessus pour décrire cette source d'erreur. En effet, la détection d'un atome dans $|e\rangle$ avec la phase ϕ est parfaitement équivalente à la détection d'un atome dans $|g\rangle$



(a) (b) (c)

FIG. III.5 – Les points $e^{i\phi_k}$ sont représentés sur le cercle unité par un point rouge de surface proportionnelle à leur poids statistique w_k. La flèche noire représente le contraste c de l'interféromètre ($c = \sum_k w_k e^{i\phi_k}$). Les différentes figures correspondent à un interféromètre dont le contraste fini est dû uniquement aux fausses détections atomiques (a), à un brouillage de phase prenant trois valeurs discrètes $\phi_0 = 0$, $\phi_1 = 2\pi/3$ et $\phi_2 = -2\pi/3$ (b), ou encore, à un brouillage continu de la phase de détection (c).

avec la phase $\phi + \pi$. Ainsi, on peut considérer que les erreurs de détection correspondent à des erreurs de π de la phase de lecture. Le formalisme ci-dessus permet donc de décrire la situation en prenant $\phi_0 = 0$, $w_0 = 1 - \epsilon$ et $\phi_1 = \pi$, $w_1 = \epsilon$. Le contraste obtenu est alors $c = 1 - 2\epsilon$. La figure III.5 illustre la similarité des deux sources d'erreurs.

On peut alors écrire dans le cas général la transformation $\rho \rightarrow \mathcal{L}(\rho) = \rho_e$ subie par la matrice densité ρ lors de la détection d'un atome dans $|e\rangle$ par exemple. Cette transformation n'est pas décrite par un opérateur de Kraus puisqu'elle transforme un état pur en un *mélange statistique*. Ce type de transformation est appelée carte quantique, il s'agit de la transformation la plus générale pouvant décrire un processus physique quelconque ([48] p.173). En particulier, la décohérence, qui elle aussi transforme des états purs en mélanges statistiques, est décrite par une transformation de ce type. Nous allons tenter ici d'expliciter la carte quantique obtenue pour une loi $\{\phi_k, w_k\}$ donnée. L'état obtenu ρ_e est alors le mélange statistique des différents états obtenus pour chacune des phases de détection $\phi + \phi_k$.

$$\rho_e = \sum_k P(k|e) \frac{M_e(\phi + \phi_k)\rho M_e^\dagger(\phi + \phi_k)}{\mathrm{Tr}(M_e(\phi + \phi_k)\rho M_e^\dagger(\phi + \phi_k))}, \tag{III.29}$$

où $P(k|e)$ est la probabilité que la phase $\phi+\phi_k$ ait été utilisée sachant que l'atome a été détecté dans $|e\rangle$. Cette probabilité s'obtient grâce à la loi de Bayes d'inversion des probabilités conditionnelles. Nous réutiliserons très prochainement cette formule :

$$P(k|e) = \frac{P(k)}{P(e)} P(e|k). \tag{III.30}$$

Ici, $P(k) = w_k$ est la probabilité que la phase $\phi + \phi_k$ ait été utilisée, $P(e)$ est la probabilité de détecter l'atome dans $|e\rangle$ à partir de l'état ρ, et $P(e|k)$ est la probabilité de détecter l'atome dans

$|e\rangle$ sachant que la phase $\phi + \phi_k$ a été utilisée. Cette probabilité est donnée par :

$$P(e|k) = \mathrm{Tr}(M_e(\phi + \phi_k)\rho M_e^\dagger(\phi + \phi_k)). \tag{III.31}$$

Ainsi, l'équation (III.29) se simplifie :

$$\rho_e = \frac{1}{P(e)} \sum_k w_k M_e(\phi + \phi_k)\rho M_e^\dagger(\phi + \phi_k). \tag{III.32}$$

Nous allons montrer à présent que si l'on considère deux lois $\{\phi_k, w_k\}$ aboutissant au même contraste c, les cartes quantiques définies par la formule (III.32) sont identiques. Ainsi, on pourra parler d'un interféromètre de contraste c sans se soucier dans le détail de savoir si les déphasages inhomogènes ou les erreurs de détection sont à l'origine de ce contraste fini. Les différentes décompositions de la carte quantique selon la formule (III.32) sont appelées décompositions sous forme de somme de Kraus.

On suppose que le champ avant la transformation est dans un état pur $|\Psi\rangle$, la généralisation à un mélange statistique étant immédiate. On peut alors écrire le vecteur d'état du champ après l'interaction avec un atome dans $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle)$:

$$|\Psi_{\text{a.c.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle \otimes |\Psi_1\rangle + |g\rangle \otimes |\Psi_2\rangle), \tag{III.33}$$

où $|\Psi_1\rangle$ (respectivement $|\Psi_2\rangle$) est le vecteur d'état du champ après interaction avec un atome dans $|e\rangle$ (respectivement $|g\rangle$). L'atome subit ensuite une deuxième impulsion de ramsey de phase $\phi = \phi + \phi_k$ avec la probabilité w_k. Dans ce cas, le vecteur d'état du système atome-champ s'écrit :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}(k)\rangle = \frac{1}{2}\left[|e\rangle - e^{i(\phi+\phi_k)}|g\rangle\right] \otimes |\Psi_1\rangle + \left[e^{-i(\phi+\phi_k)}|e\rangle + |g\rangle\right] \otimes |\Psi_2\rangle. \tag{III.34}$$

On peut alors exprimer l'action de $M_e(\phi + \phi_k)$ sur le vecteur d'état du champ $|\Psi\rangle$:

$$\begin{aligned} M_e(\phi + \phi_k)|\Psi\rangle =& \langle e|\Psi_{\text{a.c.}}(k)\rangle \\ =& \frac{1}{2}\left[|\Psi_1\rangle + e^{-i(\phi+\phi_k)}|\Psi_2\rangle\right]. \end{aligned} \tag{III.35}$$

Finalement, la carte quantique (III.32) se réécrit en fonction de $|\Psi_1\rangle$ et $|\Psi_2\rangle$:

$$\begin{aligned} \rho_e &= \frac{1}{P(e)} \sum_k w_k \left[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + e^{i(\phi+\phi_k)}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| + e^{-i(\phi+\phi_k)}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|\right] \\ &= \frac{1}{P(e)}\left[\left(\sum_k w_k\right)|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \left(\sum_k w_k\right)|\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + \left(\sum_k w_k e^{i(\phi+\phi_k)}\right)|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| + \left(\sum_k w_k e^{-i(\phi+\phi_k)}\right)|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|\right] \\ &= \frac{1}{P(e)}\left[|\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + |\Psi_2\rangle\langle\Psi_2| + ce^{i\phi}|\Psi_1\rangle\langle\Psi_2| + ce^{-i\phi}|\Psi_2\rangle\langle\Psi_1|\right]. \end{aligned} \tag{III.36}$$

Ainsi, l'état final (III.36) ne dépend pas du détail des sources d'erreur, mais uniquement du contraste final dû aux déphasages inhomogènes et aux erreurs de détection. On vient dans ce

cas particulier de démontrer qu'une même carte quantique pouvait être écrite de plusieurs façons équivalentes. En particulier, on choisira la forme la plus simple correspondant au scenario où les atomes sont détectés dans le « mauvais » état avec une probabilité $\epsilon = (1-c)/2$. La carte quantique correspondante s'écrit alors :

$$\rho_e = \frac{1}{P(e)}\left(\frac{1+c}{2}M_e(\phi)\rho M_e^\dagger(\phi) + \frac{1-c}{2}M_g(\phi)\rho M_g^\dagger(\phi)\right). \tag{III.37}$$

La probabilité de détecter l'atome dans $|e\rangle$ est donnée par le facteur de normalisation $P(e)$:

$$\begin{aligned} P(e) &= \mathrm{Tr}\left(\frac{1+c}{2}M_e(\phi)\rho M_e^\dagger(\phi) + \frac{1-c}{2}M_g(\phi)\rho M_g^\dagger(\phi)\right) \\ &= \mathrm{Tr}\left[\left(\frac{1+c}{2}M_e^\dagger(\phi)M_e(\phi) + \frac{1-c}{2}M_g^\dagger(\phi)M_g(\phi)\right)\rho\right], \end{aligned} \tag{III.38}$$

où on a utilisé la permutation circulaire des opérateurs dans la trace. Plus généralement, lorsque la mesure dans l'état i est décrite par la carte quantique :

$$\rho \to \frac{1}{P(i)}\sum_k w_k M_k(i,\phi)\rho M_k^\dagger(i,\phi), \tag{III.39}$$

on reconnaît l'expression du POVM $E_{1\text{at.}}(i,\phi)$ dans la formule suivante :

$$P(i) = \mathrm{Tr}\left(E_{1\text{at.}}(i,\phi)\rho\right), \tag{III.40}$$

avec

$$E_{1\text{at.}}(i,\phi) = \sum_k w_k M_k^\dagger(i,\phi)M_k(i,\phi). \tag{III.41}$$

Ainsi, le POVM décrivant un interféromètre de contraste fini c est donné par :

$$E_{1\text{at.}}(i,\phi) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \pm c\cos(\Phi(0)-\phi) & 0 & . & . \\ 0 & 1 \pm c\cos(\Phi(1)-\phi) & 0 & . \\ . & 0 & 1 \pm c\cos(\Phi(2)-\phi) & 0 \\ . & . & 0 & . \\ . & . & . & . \quad . \\ . & . & . & . \quad . \end{pmatrix}, \tag{III.42}$$

où le signe + correspond à $i = |e\rangle$, tandis que le signe − correspond à $i = |g\rangle$. Le POVM rend déjà mieux compte des franges observées sur la figure II.16. Cependant, en observant de près ces franges, outre la réduction de contraste, on remarque en plus un décalage (ou offset) de la valeur moyenne. Nous allons présenter plusieurs sources d'erreurs pouvant expliquer cet effet.

III.3.2 Décalage des franges

Les processus que nous allons décrire ici ne rentrent plus dans le cadre du III.2.2, nous devons donc vérifier qu'ils ne compromettent pas le caractère non-destructif de la mesure. Il n'est

pas nécessaire de vérifier les critères (I.110) et (I.112) puisque le premier porte uniquement sur l'observable à mesurer tandis que le dernier sert à vérifier que la mesure apporte bien de l'information sur cette observable. Les processus décrits ici sont des événements parasites que l'on n'utilise pas pour extraire de l'information sur le nombre de photon. Le seul point à vérifier est que l'observable nombre de photons n'est pas modifiée par ces processus. En d'autres termes, on doit montrer que l'opérateur de Kraus associé à chacun des processus suivants est diagonal dans la base des états nombres[4].

Si la préparation atomique est imparfaite, on peut imaginer qu'un certain nombre d'atomes non-circulaires soient produits. En l'absence de transitions autour de la fréquence de résonance de la cavité, ils n'interagissent pas avec le champ, mais peuvent être faussement détectés dans les niveaux $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. Si cette détection n'est pas équilibrée entre les deux canaux, les franges seront décalées vers le niveau le plus probable. Les opérateurs de Kraus associés à la détection d'un atome de ce type sont alors proportionnels à l'identité, puisque le phénomène est indépendant du champ dans la cavité.

Un deuxième effet pouvant expliquer le décalage des franges est l'émission spontanée des atomes. En effet, entre leur préparation et leur détection, les atomes passent un certain temps (de l'ordre d'une milliseconde) dans une superposition des niveaux $|e\rangle$ et $|g\rangle$. Il existe donc une probabilité non nulle (le temps de vie de l'état $|e\rangle$ vaut environ 30 ms) pour que la composante $|e\rangle$ de la fonction d'onde se désexcite vers $|g\rangle$. Si cela arrive après la seconde zone de Ramsey, l'atome sera détecté dans l'état $|g\rangle$, déséquilibrant ainsi les franges d'interférences vers le niveau $|g\rangle$.

En toute rigueur, il existe des opérateurs de Kraus pour décrire la détection d'un atome ayant émis avant sa traversée de la cavité, d'autres pour les atomes ayant émis après leur passage dans la cavité, et finalement un autre pour la détection d'un atome ayant émis après le passage dans la seconde zone de Ramsey. Nous ne tenterons certainement pas d'écrire le détail de ces différents opérateurs de Kraus. Cependant, lorsque la cavité est préparée dans un état de Fock, l'émission spontanée d'un atome dans l'environnement n'affecte pas le nombre de photons dans la cavité. En d'autres termes, tous ces opérateurs de Kraus sont diagonaux dans la base des états nombres.

Le seul processus susceptible de changer le nombre de photons dans la cavité est l'émission ou l'absorption par un atome dans cette dernière. Comme nous l'avons vu plus tôt, le couplage adiabatique de l'atome au champ dans la cavité bloque ce phénomène. Nous avons en fait montré sur des données expérimentales [90] que le taux d'émission d'un atome dans la cavité[5] est inférieur à 10^{-4}. Ainsi, on peut considérer que le caractère non-destructif de la mesure n'est pas compromis par l'émission spontanée.

Nous pouvons à présent écrire le POVM correspondant aux franges décalées de la figure

[4]Les seuls opérateurs commutant avec l'observable nombre de photons N sont les opérateurs diagonaux dans la base des états nombres puisque les sous-espaces propres de N sont de dimension 1.

[5]Ce nombre est à comparer au nombre maximum d'atomes traversant le mode de la cavité pendant un temps de vie, qui vaut quelques centaines.

II.16. En notant A la valeur moyenne de ces franges, on obtient :

$$E_{1\text{at.}}(i,\phi) = \begin{pmatrix} A \pm c/2\cos(\Phi(0)-\phi) & 0 & . & . & \\ 0 & A \pm c/2\cos(\Phi(1)-\phi) & 0 & . & \\ . & 0 & A \pm c/2\cos(\Phi(2)-\phi) & 0 & \\ . & . & 0 & . & \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{III.43}$$

III.3.3 Effets du nombre aléatoire d'atomes

Paquets à plusieurs atomes Comme nous l'avons vu au II, le nombre d'atomes dans chaque paquet est aléatoire. Nous devons donc comprendre l'effet des paquets atomiques contenant plus d'un atome. Lorsque deux atomes se trouvent simultanément dans la cavité désaccordée, ils peuvent échanger de façon cohérente un quantum d'énergie dans un processus appelé collision assistée par la cavité [91, 92]. Un photon est échangé de façon cohérente par l'intermédiaire de la cavité. Lorsque cette dernière contient initialement n photons, les deux processus suivants peuvent avoir lieu :

$$|e_1, g_2, n\rangle \rightarrow |g_1, g_2, n+1\rangle \rightarrow |g_1, e_2, n\rangle \tag{III.44}$$

ou

$$|e_1, g_2, n\rangle \rightarrow |e_1, e_2, n-1\rangle \rightarrow |g_1, e_2, n\rangle. \tag{III.45}$$

Les deux processus interfèrent destructivement, et dans l'approximation dispersive $\delta \gg \Omega_0$, le taux d'échange résultant est indépendant du nombre de photons n initialement présents. En particulier, la pulsation d'échange Ω_{col} est identique à celle obtenue pour une cavité initialement vide. Pour deux atomes au centre du mode :

$$\Omega_{\text{col}} = \Omega_0^2/\delta. \tag{III.46}$$

Lorsque le désaccord δ est faible, par exemple $\delta \approx \Omega_0$, la pulsation d'échange dépend du nombre de photons dans la cavité. Néanmoins, pour une cavité initialement vide, on obtient :

$$\Omega_{\text{col}} \approx \Omega_0 = 50\,\text{kHz}. \tag{III.47}$$

Ainsi, pendant le temps de transit des atomes dans le mode ($\approx 20\,\text{ms}$), deux atomes ont le temps d'échanger complètement un quantum d'énergie. Ce phénomène brouille totalement les franges d'interférence. En effet, lorsque deux atomes dans l'état $\frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + e^{i\phi}|g\rangle)$ traversent l'interféromètre, les parties $|e\rangle$ et $|g\rangle$ de leurs fonctions d'onde se mélangent pour former un état intriqué. L'état en question ne produit pas les mêmes franges que celles obtenues pour des paquets monoatomiques. Aux faibles désaccords, l'effet est le plus grand, et il dépend du nombre de photons puisque l'approximation dispersive n'est pas vérifiée. Au contraire, aux grands désaccord, le mélange des fonctions d'onde atomiques est plus faible et l'effet est indépendant du nombre de photons. Pour les valeurs intermédiaires du désaccord, on doit donc supposer que le contraste des

franges que l'on obtiendrait avec une cavité préparée dans un état de Fock à n photons décroît avec la valeur de n. On peut alors écrire un POVM tenant compte de cet effet :

$$E_{1\text{at.}}(i,\phi) = \begin{pmatrix} A \pm c(0)/2\cos(\Phi(0)-\phi) & 0 & . & . \\ 0 & A \pm c(1)/2\cos(\Phi(1)-\phi) & 0 & . \\ . & 0 & A \pm c(2)/2\cos(\Phi(2)-\phi) & 0 \\ . & . & 0 & . \\ . & . & . & . \quad . \\ . & . & . & . \quad . \end{pmatrix}, \tag{III.48}$$

où $c(n)$ est le contraste des franges dans n photons[6]. Là encore, puisque le photon échangé ne passe que « virtuellement » par la cavité, il n'y a pas d'échange de photons avec cette dernière. En d'autres termes l'opérateur de Kraus concerné est diagonal dans la base des états de Fock.

Effet des atomes non-détectés Finalement, nos mesures sont également affectées par la possibilité de ne pas détecter un atome. En effet, chaque paquet contient un nombre d'atomes dont la variance est poissonnienne avec un nombre moyen de l'ordre de 0,1 atomes, si bien que la plupart des paquets ne contiennent pas d'atomes. Si l'efficacité de détection était parfaite, on pourrait alors identifier immédiatement les paquets contenant un atome[7]. Comme cette dernière est proche de 50 %, pour chaque atome détecté, un autre paquet contenant un atome a statistiquement traversé la cavité. L'effet de cet atome dont l'état final n'est pas connu est une mesure non-lue sur le champ. Ceci n'affecte pas les franges mesurées par l'interféromètre ou le POVM de la mesure, cependant, nous verrons au paragraphe III.4.4 des cas de figure où cette mesure non-lue perturbe l'état préparé dans la cavité.

Pour conclure cette section, nous venons ici de dresser une liste des différentes erreurs pouvant intervenir lors de la mesure du champ par un atome. Nous avons ainsi pu établir différentes versions du POVM correspondants aux niveaux d'approximation successifs dans la prise en compte de ces erreurs. Dans la suite, nous utiliserons l'expression (III.43). L'expression (III.48) souligne le fait que le POVM précédent est une approximation, d'autant mieux vérifiée que le flux atomique est bas et que le désaccord est grand. Finalement, même si nous n'avons pas écrit tous les opérateurs de Kraus associés aux différentes erreurs possibles, nous nous sommes assurés qu'ils étaient tous diagonaux dans la base des états nombres, préservant ainsi le caractère QND de la mesure.

III.4 Différents types de mesures QND

Nous allons discuter ici la forme exacte de la mesure suivant la valeur choisie de δ. Nous allons voir que pour une valeur particulière du désaccord, la détection d'un atome réalise une

[6] On peut aussi attendre des effets de déphasage des franges à cause des collisions assistées. Dans ce cas, le déphasage $\Phi(n)$ doit lui aussi être modifié pour prendre en compte cet effet.

[7] De même, les paquets contenants deux atomes et plus pourraient être systématiquement ignorés si l'efficacité de détection était parfaite.

mesure idéale de von Neumann. Nous verrons que dans le cas général, la description précise de la mesure fait appel au formalisme de la mesure généralisée. Dans la suite de ce chapitre, sauf mention contraire, on considérera par soucis de clarté que l'interféromètre est parfait et que le déphasage par photon est linéaire ($\Phi(n) = (n + 1/2)\Phi_0$).

III.4.1 Exemple de mesure de von Neumann : mesure de 0 et 1 photons

Le premier réglage que nous allons étudier a été utilisé en 2006 pour réaliser la première observation des sauts quantiques de la lumière[31][85]. Il permet de distinguer les sauts quantiques de la lumière entre l'état vide et l'état à un photon. Pour cela, le désaccord est choisi de façon à ce que le déphasage accumulé en présence d'un photon Φ_0 soit égal à π. La valeur de δ correspondante est d'environ 58 kHz. Dans ce cas, après interaction de l'atome avec un état de Fock à n photons, l'état du système atome-champ est donné par la formule (III.12) :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}\rangle = \frac{e^{in\pi/2}}{\sqrt{2}}\left(e^{-i(n+1/2)\pi}|e\rangle + |g\rangle\right)|n\rangle. \tag{III.49}$$

Dans l'expérience de 2006, nous nous sommes intéressés aux fluctuations engendrées par le rayonnement du corps noir à la température du cryostat de 0,8 K. Dans ces conditions, les seuls états peuplés de façon non-négligeable sont les états vide $|0\rangle$ et à un photon $|1\rangle$. Nous allons donc dans un premier temps restreindre notre étude au sous-espace formé de ces deux vecteurs de base. Si l'on suppose que le champ est initialement préparé dans l'état suivant :

$$|\Psi\rangle = c_0|0\rangle + c_1|1\rangle. \tag{III.50}$$

Alors, l'état après interaction devient :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{a.c.}}\rangle &= c_0\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|e\rangle + |g\rangle\right)|0\rangle + c_1\frac{i}{\sqrt{2}}\left(i|e\rangle + |g\rangle\right)|0\rangle \\ &= c_0|+\rangle_y|0\rangle + c_1|-\rangle_y|1\rangle, \end{aligned} \tag{III.51}$$

où on a noté $|\pm\rangle_y$ les états propres de l'opérateur σ_y. Le pseudo-spin atomique est représenté dans la sphère de Bloch sur la figure III.6 pour les deux valeurs possibles de n. La composante Oy du pseudo-spin est parfaitement corrélée avec le nombre de photons. Afin de mesurer l'atome dans la base Oy, il suffit alors d'appliquer une impulsion $\pi/2$ suivant Ox dans la seconde zone de Ramsey afin de ramener l'axe Oy sur la direction verticale Oz. La probabilité $P(e)$ de détecter l'atome dans l'état $|e\rangle$ est donc donnée par :

$$P(e) = |c_0|^2 \tag{III.52}$$

et l'état du champ après cette détection est donc immédiatement projeté sur

$$|\Psi\rangle = |0\rangle, \tag{III.53}$$

tandis que l'atome sera détecté dans $|g\rangle$ avec la probabilité $P_g = |c_1|^2 = 1 - P_e$, donnant lieu à la projection du champ dans l'état $|\Psi\rangle = |1\rangle$.

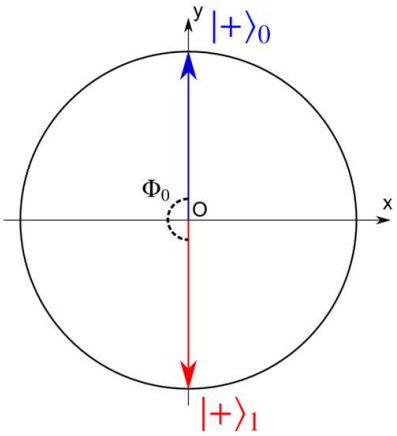


FIG. III.6 – L'équateur de la sphère de Bloch après l'interaction dispersive avec la cavité pour une valeur de $\Phi_0 = \pi$. Pour les nombres de photons inférieurs à 2, la composante y du pseudo-spin atomique est parfaitement corrélée avec le nombre de photons.

Les opérateurs de Kraus correspondant sont donc donnés par les projecteurs :

$$M_e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{III.54}$$

et

$$M_g = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{III.55}$$

On peut vérifier qu'ils correspondent bien aux opérateurs des formules (III.24) et (III.25) dans le cas où $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$ et avec la phase de l'impulsion Ramsey adaptée à la mesure de S_y, c'est à dire $\phi = \pi/2$. Ces deux opérateurs sont en fait des projecteurs, ainsi, plusieurs mesures de ce type répétées rapidement donnent nécessairement le même résultat et dans ce cas, la mesure réalisée par un seul atome correspond bien à une mesure idéale de von Neumman.

En fait, deux mesures successives peuvent parfois donner un résultat différent si l'évolution entre les mesures est perturbée par un autre terme que le hamiltonien libre (voir (I.9). En particulier, dans notre cas, le couplage de la cavité à son environnement par les mécanismes de relaxation induisent une probabilité non-nulle de sauter d'un état propre de l'observable à l'autre entre deux mesures. La figure III.7 montre deux trajectoires quantiques individuelles. Les résultats de détection de 2500 atomes ayant traversé successivement l'interféromètre sont représentés par une barre rouge (respectivement bleue) pour les atomes détectés dans l'état $|e\rangle$ (respectivement $|g\rangle$). On distingue très clairement des inversions soudaines dans la statistique de détection des atomes. La plupart du temps, les atomes sont majoritairement détectés dans l'état $|e\rangle$ indiquant que la cavité est dans l'état vide. Par moment, un photon d'origine thermique entre dans le mode

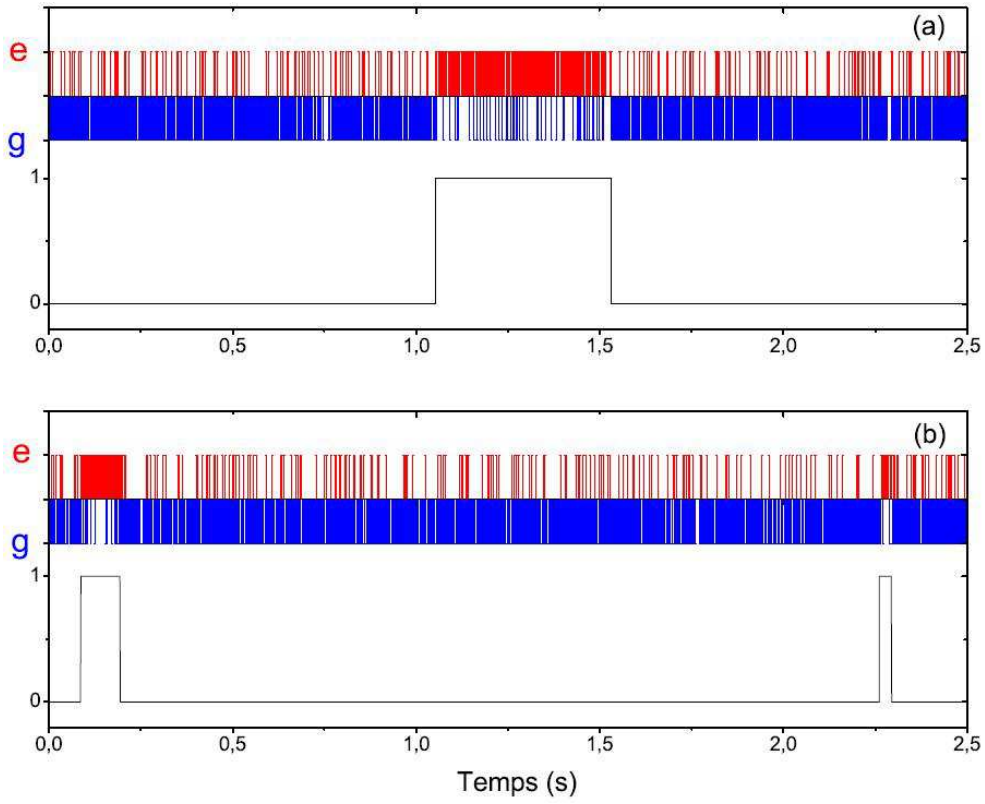


FIG. III.7 – Deux trajectoires quantiques individuelles. Chaque atome détecté est représenté par une barre bleue pour les atomes dans l'état $|e\rangle$ et une barre rouge pour les atomes dans $|g\rangle$. En dessous de chaque séquence, on a représenté le résultat d'un vote majoritaire à 8 atomes permettant de filtrer les erreurs de détection. (a) Présence exceptionnellement longue d'un photon dans le mode. (b) Trajectoire plus typique.

de la cavité. Du fait du caractère projectif de la mesure, la transition entre les deux états propres $|0\rangle$ et $|1\rangle$ se traduit par un saut quantique instantané à l'échelle de la mesure. Les erreurs sont dues au contraste fini de l'interféromètre. Bien qu'ayant déjà été observées dans de nombreux systèmes matériels[93][68][65][94][95][96], cette mesure a constitué la première observation de trajectoires stochastiques de type Monte-Carlo pour la lumière[31].

III.4.2 Cas de la mesure de parité

Nous allons à présent étudier le cas où le désaccord prend la même valeur que précédemment, mais sans restreindre l'espace du champ à 0 ou 1 photon. On va cette fois traiter le problème en utilisant directement la forme des opérateurs de Kraus dérivée précédemment. D'après (III.24) et (III.25), les opérateurs de Kraus dans le cas précis où $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$ et avec le réglage

$\phi = \pi/2$ sont donnés par :

$$M_{\text{pair}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & -1 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & & & & \\ . & . & . & . & & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & & \\ . & . & . & . & & & & . & \\ . & . & . & . & & & & & . \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\text{impair}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & -1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & & & & \\ . & . & . & . & & 1 & & & \\ . & . & . & . & & & . & & \\ . & . & . & . & & & & . & \\ . & . & . & . & & & & & . \end{pmatrix}, \tag{III.56}$$

et le POVM correspondant est donné par l'ensemble des deux opérateurs :

$$E_{\text{pair}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 1 & & & & \\ . & . & . & . & & . & & & \\ . & . & . & . & & & . & & \\ . & . & . & . & & & & . & \\ . & . & . & . & & & & & . \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{\text{impair}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & 0 & 1 & 0 & . & . & . & . \\ . & . & . & 0 & 0 & & & & \\ . & . & . & . & & 1 & & & \\ . & . & . & . & & & . & & \\ . & . & . & . & & & & . & \\ . & . & . & . & & & & & . \end{pmatrix}, \tag{III.57}$$

Ainsi, si le champ est préparé dans l'état arbitraire :

$$|\Psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \tag{III.58}$$

La probabilité P_e d'obtenir un atome dans $|e\rangle$ est donnée par :

$$P_e = \sum_{n \text{ pair}} |c_n|^2 \tag{III.59}$$

et l'état du champ est alors projeté sur :

$$|\Psi_{\text{pair}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_e}} \sum_{n \text{ pair}} c_n (-1)^{n/2} |n\rangle. \tag{III.60}$$

Au contraire, l'atome est détecté dans $|g\rangle$ avec la probabilité :

$$P_g = \sum_{n \text{ impair}} |c_n|^2 \tag{III.61}$$

et l'état du champ est alors projeté sur :

$$|\Psi_{\text{impair}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_g}} \sum_{n \text{ impair}} c_n (-1)^{(n-1)/2} |n\rangle. \tag{III.62}$$

La différence des probabilités de détection $P_e - P_g$ donne donc bien l'espérance de l'observable parité $P = (-1)^n$ dans l'état $|\Psi\rangle$.

Les opérateurs M_{pair} et M_{impair} ne sont pas des projecteurs puisqu'ils possèdent deux valeurs propres distinctes -1 et 1. Cependant, l'action de cette mesure est extrêmement proche de celle d'une mesure idéale de von Neumann. En effet, les états obtenus dans le cas de la mesure de von Neumann sont

$$|\Psi_{\text{pair idéal}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_e}} \sum_{n \text{ pair}} c_n |n\rangle \tag{III.63}$$

et

$$|\Psi_{\text{impair idéal}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{P_g}} \sum_{n \text{ impair}} c_n |n\rangle. \tag{III.64}$$

Ces états se déduisent des états $|\Psi_{\text{pair}}\rangle$ et $|\Psi_{\text{impair}}\rangle$ par une transformation triviale qui consiste à laisser évoluer le champ pendant un quart de période d'oscillation. Cette différence a cependant une certaine importance pratique.

Nous verrons au chapitre suivant que c'est l'une des transformations décrites par M_{pair} ou M_{impair} qui permet de générer un état chat de Schrödinger à partir d'un simple champ cohérent. Nous étudierons à ce moment là l'effet du contraste fini sur l'état produit.

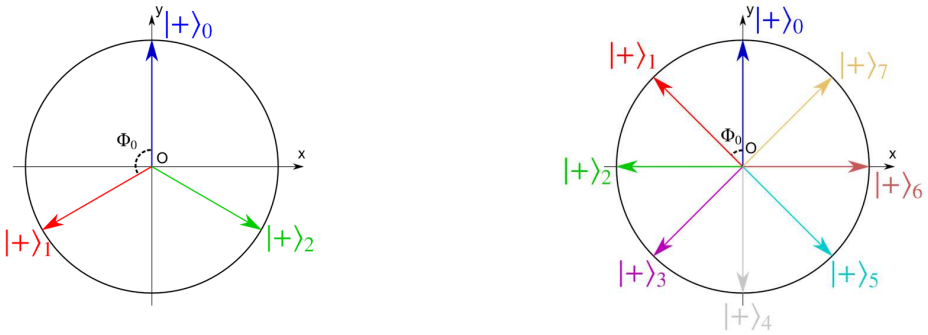
III.4.3 Mesure faible : Interférométrie atomique dans le cas général

Dans cette partie, nous allons étudier le cas général où le déphasage par photon Φ_0 est strictement inférieur à π. La figure III.8 montre par exemple la situation après l'interaction avec un déphasage par photon (supposé linéaire) $\Phi_0 = 2\pi/3$ (a) et $\Phi_0 = \pi/4$ (b). On voit à présent que les états atomiques $|+_n\rangle$ ne sont plus orthogonaux (au sens des états quantiques). Cela signifie que la mesure réalisée sur un atome ne permet pas de projeter le champ sur un état de Fock. Il semble en effet évident que la détection d'un atome dans l'un des deux niveaux $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ ne permet pas de distinguer parmi q possibilités pour le nombre de photons piégés avec $q > 2$. Dans ce cas, l'action de chaque atome est qualifiée de mesure faible.

On choisira de mesurer le pseudo-spin atomique suivant une direction arbitraire ϕ. le POVM $E_{1\text{at.}}(|e\rangle, \phi)$ correspondant à la détection d'un atome dans $|e\rangle$ est donné par la formule (III.43). Cette matrice montre que la probabilité $P(e, \phi|n)$ de détecter l'atome dans $|e\rangle$ avec la phase de mesure ϕ lorsque la cavité est préparée dans l'état $|n\rangle$ a une variation sinusoïdale :

$$P(e, \phi|n) = E_{1\text{at.}}(|e\rangle, \phi)_{n,n} = A + \frac{c}{2} \cos\left(\Phi(n) - \phi\right). \tag{III.65}$$

L'interprétation géométrique de cette formule est évidente puisqu'on mesure en fait la composante suivant la direction ϕ du vecteur de Bloch ayant subit la rotation $\Phi(n)$ lors de l'interaction. La figure III.9 illustre cette propriété. Il est clair sur cette figure qu'un seul atome ne permet pas de dire sans ambiguïté le nombre de photons piégés, et ce, même si le contraste de l'interféromètre est parfait. Nous allons considérer dans la suite un interféromètre imparfait, dont toutes les erreurs possibles sont décrites par les opérateurs de Kraus $\{M_k\}$ avec la loi $\{w_k\}$.



(a) $\Phi_0 = 2\pi/3$ (b) $\Phi_0 = \pi/4$

FIG. III.8 – Représentation du pseudo-spin atomique dans le plan équatorial de la sphère de Bloch après interaction dispersive avec un champ contenant n photons. (a) Pour une valeur de $\Phi_0 = 2\pi/3$. (b) Pour une valeur de $\Phi_0 = \pi/4$.

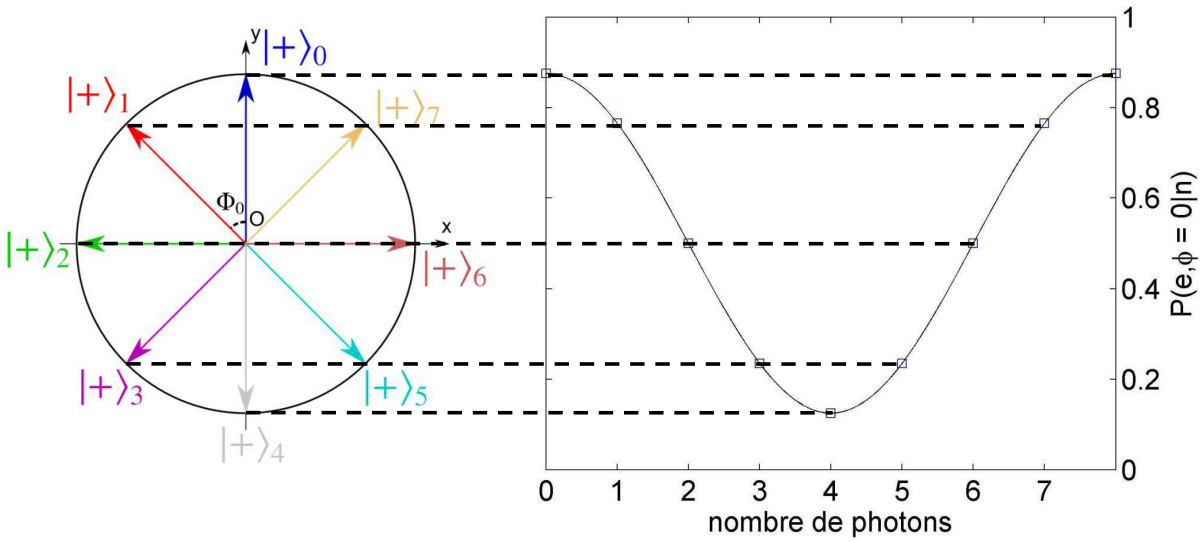


FIG. III.9 – La probabilité de détecter l'atome dans $|e\rangle$ lors d'une mesure avec la phase ϕ varie sinusoïdalement avec le nombre de photons.

La détection d'un atome dans l'état i avec la phase ϕ correspond à l'application de la carte quantique suivante :

$$\rho \rightarrow \frac{1}{P_i} \sum_k w_k M_k(i,\phi) \rho M_k^\dagger(i,\phi), \tag{III.66}$$

où le facteur de normalisation P_i correspond à la probabilité d'avoir détecté l'atome dans i. On appellera $P(n) = \rho_{n,n}$ la population du n^{e} état de Fock :

$$P(n) = \text{Tr}(\rho |n\rangle\langle n|). \tag{III.67}$$

En particulier, la formule (III.66) permet de calculer l'évolution des populations lors de la détection d'un atome. Après avoir détecté un atome dans i avec la phase ϕ, la population du n^{e} état de Fock devient :

$$P(n|i,\phi) = \frac{1}{P_i} \text{Tr}\left[\sum_k w_k M_k(i,\phi) \rho M_k^\dagger(i,\phi) |n\rangle\langle n| \right]. \tag{III.68}$$

Puisque les opérateurs $M_k(i,\phi)$ et $M_k^\dagger(i,\phi)$ sont diagonaux dans la base des états de Fock, ils commutent avec le projecteur $|n\rangle\langle n|$. On peut donc regrouper les termes en utilisant également la permutation circulaire des opérateurs dans la trace :

$$\begin{aligned} P(n|i,\phi) &= \frac{1}{P_i} \text{Tr}\left[\sum_k w_k M_k^\dagger(i,\phi) M_k(i,\phi) \rho |n\rangle\langle n| \right] \\ &= \frac{1}{P_i} \text{Tr}\left[E_{\text{1at.}}(i,\phi) \cdot \rho \cdot |n\rangle\langle n| \right] \\ &= \frac{1}{P_i} \left[E_{\text{1at.}}(i,\phi) \right]_{n,n} \cdot P(n). \end{aligned} \tag{III.69}$$

La population du n^{e} état de Fock est donc multipliée par le n^{e} coefficient diagonal de l'opérateur $E_{\text{1at.}}(i,\phi)$. En fait, le coefficient $\left[E_{\text{1at.}}(i,\phi)\right]_{n,n}$ n'est autre que la probabilité conditionnelle de détecter l'atome dans i avec la phase ϕ sachant que le champ est dans l'état $|n\rangle$:

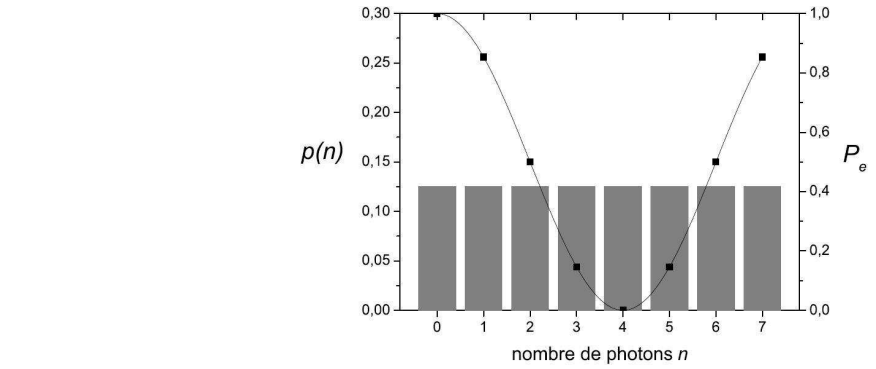
$$\left[E_{\text{1at.}}(i,\phi)\right]_{n,n} = P(i,\phi|n). \tag{III.70}$$

La formule (III.69) n'est donc rien d'autre que l'expression de la loi de Bayes d'inversion des probabilités conditionnelles :

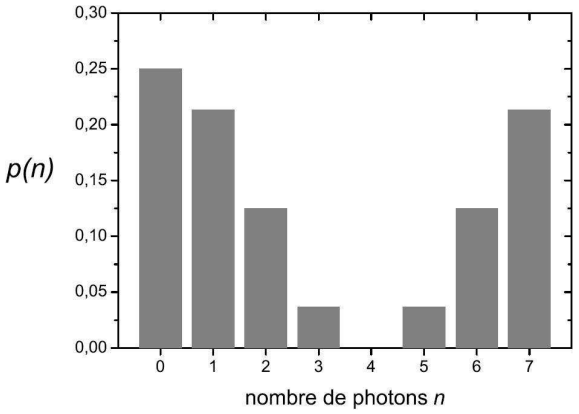
$$P(n|i,\phi) = \frac{P(n)}{P_i} P(i,\phi|n). \tag{III.71}$$

Comme nous venons de le voir, l'application directe de cette formule nécessite toutefois de vérifier que la mesure est bien non-destructive.

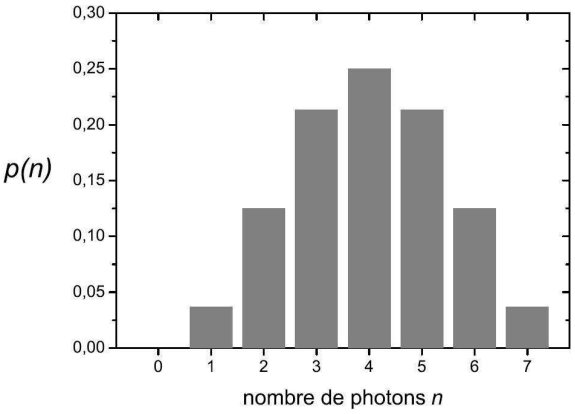
La figure III.10 montre l'évolution de la distribution de probabilité lors de la détection d'un atome dans l'état $|e\rangle$ ou dans l'état $|g\rangle$. Après la détection atomique, certains états de Fock voient leur population augmenter tandis que d'autres la voient diminuer. Ceci peut même aller jusqu'à l'exclusion totale de certains nombre de photons si le contraste de l'interféromètre est parfait. L'idée de notre protocole de mesure est d'envoyer des atomes successifs pour décimer peu à peu les populations jusqu'à ce qu'un seul état de Fock ne survive. On parle d'un protocole de « mesure par décimation ».



(a) $P(n)$



(b) $P(n|e, \phi = 0)$



(c) $P(n|g, \phi = 0)$

FIG. III.10 – Evolution des populations lors de la détection d'un atome pour un déphasage par photon $\Phi_0 = \pi/4$ et une phase de mesure $\phi = 0$. (a) Probabilités initiales des états de Fock (barres grises, axes de gauche). On prend ici l'exemple d'un champ initial complètement inconnu dont la distribution de probabilités est donc uniforme (de $n = 0$ à $n = 7$). Les points et la courbe noirs correspondent aux probabilité conditionnelles de détection de l'atome dans l'état $|e\rangle$ (axe de droite). (b) Populations des états de Fock après la mesure si l'atome a été détecté dans $|e\rangle$. (c) Populations des états de Fock après la mesure si l'atome a été détecté dans $|g\rangle$.

III.4.4 Mesure projective vue comme la limite d'un grand nombre de mesures faibles

III.4.4.a POVM à plusieurs atomes

Nous allons utiliser dans ce paragraphe le formalisme de la mesure généralisée afin de décrire les expériences réalisées en 2006[30, 90] visant à mesurer des nombres de photons allant jusqu'à $n = 7$. Le désaccord utilisé à l'époque était de $\delta = 2\pi \cdot 272\,\text{kHz}$ et il correspond à un déphasage par photon de $\Phi_0 \approx \pi/4$ comme sur les figures III.9(b) et III.10. Afin de décimer progressivement tous les nombres de photons sauf un, nous mesurons le pseudo-spin des atomes successifs dans des directions ϕ différentes. Nous avons utilisé les quatre phases de mesure correspondant aux quatre différentes bases $(|+\rangle_{n=0}, |+\rangle_{n=4})$, $(|+\rangle_{n=1}, |+\rangle_{n=5})$, $(|+\rangle_{n=2}, |+\rangle_{n=6})$ et $(|+\rangle_{n=3}, |+\rangle_{n=7})$ formées par les états atomiques finaux possibles. Ces phases ϕ, que nous indexerons par a,b,c et d sont espacées de $\Phi_0 = \pi/4$. Les atomes sont envoyés successivement dans l'interféromètre et détectés suivant l'une des directions de mesure[8].

Comme nous l'avons vu au paragraphe précédent, lors de la traversée de l'interféromètre par un atome, le champ subit une transformation complexe, cependant, ses populations se déduisent facilement des populations initiales et de l'opérateur du POVM correspondant au résultat de la détection atomique. Ainsi, lorsque deux atomes successifs traversent l'interféromètre, les populations subissent la transformation suivante :

$$P(n|i_1, \phi_1, i_2, \phi_2) = \frac{1}{P_{i_1} P_{i_2}} \left[E_{1\text{at.}}\,(i_1, \phi_1)\right]_{n,n} \cdot \left[E_{1\text{at.}}\,(i_2, \phi_2)\right]_{n,n} \cdot P(n), \tag{III.72}$$

où (i_k, ϕ_k) est le couple contenant le résultat de la détection du k^{e} atome ($i_k = |e\rangle$ ou $|g\rangle$) ainsi que sa phase de détection. Finalement, après la détection d'un grand nombre N_{at} d'atomes, les populations sont transformées par :

$$P(n|i_1, \phi_1, i_2, \phi_2 ... i_{N_{\text{at}}}, \phi_{N_{\text{at}}}) = \frac{1}{Z}(E_{N\text{at.}})_{n,n} P(n). \tag{III.73}$$

où $E_{N\text{at.}}$ est le POVM à N_{at} atomes, défini par :

$$E_{N_{\text{at}}} = E_{1\text{at.}}(i_1, \phi_1) \cdot E_{1\text{at.}}(i_2, \phi_2) \cdots E_{1\text{at.}}(i_{N_{\text{at}}}, \phi_{N_{\text{at}}}). \tag{III.74}$$

et Z est un facteur de normalisation donné par :

$$Z = \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} P_{i_k} \tag{III.75}$$

On introduira la fonction $\Pi_{N_{\text{at}}}(n) = \left[E_{N_{\text{at}}}\right]_{n,n}$. Elle est définie par un produit de sinusoïdes[9] :

$$\Pi_{N\text{at.}}(n) = \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} \left[A + \frac{c \cdot i_k \cdot \cos(\Phi(n) - \phi_k)}{2}\right], \tag{III.76}$$

[8] La séquence des phases de détection utilisée pour des atomes successifs est aléatoire car la présence des atomes dans chaque paquet est elle-même aléatoire.

[9] On peut utiliser la formule (III.76) pour étendre la définition de $\Pi_{N_{\text{at}}}$ aux paramètres non-entiers.

où par convention, i_k vaut $+1$ lorsque le k^{e} atome a été détecté dans $|e\rangle$ et -1 lorsqu'il a été détecté dans $|g\rangle$. La fonction $\Pi_{N_{\text{at}}}$ est appelée fonction de décimation, elle réduit la probabilité de certains nombres de photons au profit d'autres nombres de photons.

Limite de la fonction de Décimation Comme produit de sinusoïdes, $\Pi_{N_{\text{at}}}(x)$ tend vers une fonction très piquée à la limite où N_{at} tend vers l'infini. Si l'on se contente d'une seule phase de mesure ϕ_1, la fonction $\Pi_{N_{\text{at}}}(x)$ reste parfaitement symétrique autour de la phase ϕ_1 choisie. Au contraire, si l'on utilise plus d'une phase (l'idéal étant deux phases ϕ_1 et ϕ_2 orthogonales), la fonction de décimation présente un unique pic en x_0 tel que $\Phi(x_0) \in [0, 2\pi]$. La fonction possède alors un pic x_j dans chaque intervalle $[2j\pi, 2(j+1)\pi]$. Si l'on prend comme exemple le cas de figure utilisé dans les expériences de 2006, $\Phi(n)$ couvre une plage de 2π lorsque n varie entre 0 et 7 photons. La fonction $\Pi_{N_{\text{at}}}(n)$ devient très piquée autour d'un seul maximum compris dans cet intervalle. Ainsi, pour les grands nombres d'atomes, $\Pi_{N_{\text{at}}}$ décime tous les nombres de photons sauf un. Restreint à l'espace contenant les nombres de photons inférieurs à 7, l'opérateur $E_{N\text{at.}}$ tend donc vers l'un des 8 projecteurs :

$$E_\infty(n) = |n\rangle\langle n|. \tag{III.77}$$

Ainsi, la mesure devient une mesure de von Neumann à la limite où le nombre d'atomes N_{at} est grand et où l'espace est restreint aux sous-espace où $\Phi(n) < 2\pi$.

Commentaire sur la méthode Il est intéressant de noter que la transformation subie par le champ lors du passage d'un atome est extrêmement complexe (voir (III.32)). A priori, la complexité de cette carte augmente avec le nombre d'atomes, cependant, à la limite d'un *grand nombre d'atomes* et dans un *espace restreint*, cette carte quantique tend à se simplifier pour devenir la simple expression d'une mesure projective. En effet, la seule carte quantique donnant lieu à la mesure non destructive du POVM (III.77) est la mesure de von Neumann décrite par les mêmes projecteurs $|n\rangle\langle n|$.

On peut alors se demander ce que devient la mesure si on ne restreint pas la dimension de l'espace. Dans ce cas, le POVM obtenu a plusieurs coefficients non-nuls. Par exemple, pour un déphasage par photon $\Phi(n) = \pi/4(n + 1/2)$, on sélectionne les nombres de photons modulo 8. Cette fois, l'expression du POVM ne définit pas sans ambiguïté une seule carte quantique. En particulier, on peut se demander si la méthode produit une superposition cohérente des différents états de Fock sélectionnés ou un mélange statistique. On peut aisément répondre à cette question en considérant le tout premier niveau d'approximation (III.26). En effet, avec un interféromètre de contraste parfait, la transformation correspondant à la série de N_{at} détections atomiques est une opération *unitaire* décrite par l'opérateur de Kraus :

$$|\Psi\rangle \to |\Psi'\rangle = \frac{1}{Z} \prod_{k=1}^{N_{\text{at}}} M_{i_k}(\phi_k)|\Psi\rangle. \tag{III.78}$$

L'état s'écrit alors à la limite où N_{at} est suffisamment grand (avec N_{at} pair) :

$$|\Psi'\rangle = c_n|n\rangle + c_{n+8}|n+8\rangle + c_{n+16}|n+16\rangle \cdots \tag{III.79}$$

De même, après la détection du $(N_{\text{at}}+1)^{\text{e}}$ atome dans l'état i avec la phase ϕ, l'état va subir l'action de l'opérateur de Kraus correspondant :

$$\begin{aligned} |\Psi'\rangle &= \frac{1}{P_i} M_i(\phi)\,(c_n|n\rangle + c_{n+8}|n+8\rangle + c_{n+16}|n+16\rangle\cdots) \\ = \frac{1}{P_i} &\Big(M_i(\phi)_{n,n}\cdot c_n|n\rangle \\ &+ M_i(\phi)_{n+8,n+8}\cdot c_{n+8}|n+8\rangle \\ &+ M_i(\phi)_{n+16,n+16}\cdot c_{n+16}|n+16\rangle\cdots\Big) \end{aligned} \tag{III.80}$$

Or, si l'on se reporte à l'expression (III.24) des opérateurs de Kraus à un atome (dans le cas très dispersif où $\Phi(n) = \pi/4(n+1/2)$ et $\Theta(n) = \pi/8$), on notera d'une part que les coefficients complexes $M_i(\phi)_{n,n}$, $M_i(\phi)_{n+16,n+16}\cdots$ sont égaux, d'autre part, que les coefficients $M_i(\phi)_{n+8,n+8}$, $M_i(\phi)_{n+24,n+24}\cdots$ sont égaux entre eux et opposés aux précédents. Cela signifie que l'état quantique après détection du $(N_{\text{at}}+1)^{\text{e}}$ atome devient :

$$|\Psi'\rangle = c_n|n\rangle - c_{n+8}|n+8\rangle + c_{n+16}|n+16\rangle\cdots \tag{III.81}$$

Ainsi, la phase quantique de la superposition dépend de la parité du nombre d'atomes détectés. En pratique, dès que le nombre d'atomes est important, la parité du nombre d'atomes ayant réellement traversé l'interféromètre n'est plus corrélée avec la parité du nombre d'atomes détectés à cause de l'efficacité finie du détecteur. On aboutit ainsi au mélange statistique des états $|\Psi\rangle$ et $|\Psi'\rangle$, qui est équivalente au mélange statistique des différents états de Fock (ces deux états ont en effet la même matrice densité)[10]. Ainsi, il n'est pas possible dans l'état actuel des choses de préparer par la méthode de mesure non-destructive du nombre de photons une superposition du type :

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|n\rangle + |n+8\rangle). \tag{III.82}$$

On pourrait s'affranchir de ce problème en remplaçant la transition $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ par la transition $|i\rangle \leftrightarrow |g\rangle$ où $|i\rangle$ n'est pas affecté par le phénomène de déplacement lumineux (aucune transition partant de $|i\rangle$ proche de résonance). Le niveau circulaire de nombre quantique principal $n = 49$ a par exemple déjà été utilisé par le passé en tant que « niveau auxiliaire » (voir [54][11]). Une telle technique présenterait le désavantage de nécessiter des temps d'interaction plus long, ou des désaccords plus faibles pour obtenir un même déphasage $\Phi(n)$ puisque le déplacement lumineux n'affecte qu'un des deux niveaux de la transition. Cependant, le calcul de l'opérateur de Kraus (III.24) montre que dans ce cas, les coefficients $M_i(\phi)_{n,n}$, $M_i(\phi)_{n+8,n+8}$, $M_i(\phi)_{n+16,n+16}$... sont tous égaux.

[10] On peut voir la préparation et la détection probabiliste des atomes comme une erreur de mesure et la traiter en utilisant une carte quantique. Le résultat serait bien entendu identique.

[11] Le principe de la mesure était alors différent puisque l'on mesurait le déphasage produit par une oscillation de Rabi complète sur la transition résonnante $|g\rangle \leftrightarrow |e\rangle$ à l'aide du niveau auxiliaire $|i\rangle$.

III.4.4.b Résultats expérimentaux

Préparation Afin d'observer jusqu'à $n = 7$ photons, il faut au préalable préparer le mode dans un état pouvant contenir jusqu'à $n = 7$ photons. Nous avons choisi d'injecter un champ cohérent de nombre moyen de photons $n \approx 3$. La population de cet état s'étale alors de $n = 0$ à $n = 7$, les nombres plus élevés de photons ayant une population négligeable. La séquence expérimentale est la suivante :

1. On commence par préparer l'état vide à l'aide d'une série d'atomes résonnants.
2. Un petit champ cohérent est ensuite injecté dans la cavité.
3. Enfin, on envoie une longue série d'atomes dans l'interféromètre. Chaque atome mesure l'une des quatre phases a, b, c ou d. La phase de mesure alterne entre ces quatre valeurs pour les paquets atomiques successifs. La séquence des phases utilisées réellement semble aléatoire car la plupart des paquets atomiques ne contiennent pas d'atomes.

Problème du temps de mesure Nous avons expliqué au III.4.4 que la mesure tendait vers une mesure projective lorsque le nombre d'atomes N_{at} tendait vers l'infini. C'est pourquoi on a intérêt à utiliser un grand nombre d'atomes consécutifs pour décimer les populations. Cependant, il n'est pas possible d'augmenter indéfiniment N_{at}. En effet, le temps de mesure doit rester court devant le temps de relaxation du champ. Il faut donc trouver un compromis entre la précision de la mesure, qui augmente avec N_{at} et le temps de mesure qui augmente également avec N_{at}. L'étude du meilleur compromis a été réalisée dans le travail de thèse de Christine Guerlin [90]. La valeur optimale trouvée est de $N_{\text{at}} = 110$ atomes. En utilisant un flux atomique de 0,3 atomes par paquet, une mesure dure alors 26 ms en moyenne. Cette durée, assez courte devant le temps de vie de la cavité est cependant plus longue que les temps de vie des nombres de photons élevés notamment $T_7 \approx T_{\text{cav}}/7 \approx 16\,\text{ms}$. Néanmoins, pour résoudre le nombre de photons sur une trajectoire unique sans tenir compte d'aucune information à priori et sans tenir compte des résultats atomiques ultérieurs, il s'agit de la meilleur estimation possible. Nous verrons un peu plus loin que l'on peut utiliser un ensemble statistique de trajectoires afin de reconstruire les populations moyennes du champ à l'instant t avec une bien meilleure résolution temporelle. Cette méthode sera présentée un peu plus loin, il s'agit déjà d'une forme de reconstruction de l'état quantique du champ.

Projection progressive du champ sur un état de Fock Afin de supposer le moins possible de connaissance à priori sur le champ, nous partirons d'une distribution de probabilité plate pour tous les états de Fock. A chaque atome détecté, notre connaissance de l'état quantique est modifiée. Pour des nombres d'atomes détectés N_{at} croissants de 0 à 110 atomes, on peut suivre l'évolution des populations dans le champ jusqu'à l'obtention d'un état proche d'un état de Fock. La formule (III.73) permet en effet de calculer à partir de la distribution de probabilité initiale, la distribution après la détection de N_{at} atomes.

La figure III.11 montre deux résultats typiques d'une telle analyse sur deux réalisations particulières de l'expérience. La figure (c) montre l'évolution des probabilités des différents états nombre en fonction du nombre d'atomes détectés. On vérifie bien que malgré des probabilités

initiales égales pour tous les nombres de photons, ($P_0(n) = 1/8$), seul un nombre de photons n conserve une probabilité notablement non-nulle après $N_{\text{at}} = 110$ atomes détectés. Ce protocole réalise bien la mesure idéale de von Neumann du nombre de photons, puisque les atomes ont pour effet de projeter la fonction d'onde sur un état propre de l'observable mesurée. En particulier, le résultat ne dépend pas de l'hypothèse de départ sur les populations à condition que tous les nombres de photons aient une probabilité non-nulle dans la distribution initiale.

Vérification des postulats de la mesure Il est intéressant de noter que les conditions expérimentales sont identiques pour les deux réalisations (notamment l'intensité du champ injecté dans la cavité). Les résultats sont pourtant différents : l'état cohérent initial est donc bien composé de plusieurs nombres de photons différents. Les postulats de la mesure prédisent que la statistique des résultats de la mesure du nombre de photons d'un champ cohérent d'amplitude α doit vérifier une loi de Poisson de paramètre $\bar{n} = |\alpha|^2$:

$$p(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \tag{III.83}$$

On notera la différence de notation : $p(n)$ est la probabilité de mesurer n, elle est rattachée à la statistique des résultats sur l'ensemble de toutes les réalisations de l'expérience, tandis que $P_N(n)$ est la probabilité, inférée à partir de la mesure, que l'on soit dans l'état $|n\rangle$ pour une réalisation particulière.

Il est intéressant de confronter nos mesures avec la prédiction du postulat fondamental. Pour cela, nous devons commencer par attribuer un résultat à notre mesure. Les trajectoires présentées sur la figure III.11 convergent parfaitement vers un nombre de photons bien déterminé. Il existe cependant des trajectoires pour lesquelles la mesure est ambiguë. Nous estimons donc le nombre de photons pour une réalisation donnée par la formule :

$$\langle n \rangle = \sum_n n \cdot P_N(n). \tag{III.84}$$

Nous construisons ensuite l'histogramme des résultats $\langle n \rangle$ pour toutes les réalisations. Cet histogramme est présenté sur la figure III.12. Plusieurs remarques importantes peuvent être faites. Premièrement, à un petit fond près, seuls les canaux correspondant à des nombres entiers sont significativement remplis. Le fond peut avoir deux origines. Pour quelques réalisations, le processus de décimation n'a pas été suffisamment efficace pour éliminer tous les états sauf un. Pour d'autres, la mesure n'étant pas instantanée, un saut quantique faisant passer le nombre de photons d'une valeur à une autre peut avoir lieu pendant la mesure. Les premiers atomes tendent à mesurer un certain nombre de photons puis les derniers tendent à en mesurer un autre. Ces deux mesures partielles se moyennent et indiquent donc un nombre intermédiaire.

On peut aussi ajuster une distribution poissonienne sur les canaux entiers, l'accord est alors très bon à l'exception du canal $\langle n \rangle = 0$. Cet écart est dû au fait que, avec un déphasage par photon $\Phi_0 \simeq \pi/4$, notre mesure du nombre de photons est en réalité une mesure modulo 8 : l'état $|8\rangle$ induira un déphasage de 2π indistinguable d'un déphasage nul. Le canal $\langle n \rangle = 0$ mesure donc $p(0) + p(8)$. Une poissonienne légèrement modifiée par ce repli modulo 8 est maintenant en parfait accord et donne un nombre moyen $\bar{n} = 3{,}48 \pm 0{,}04$.

(a)

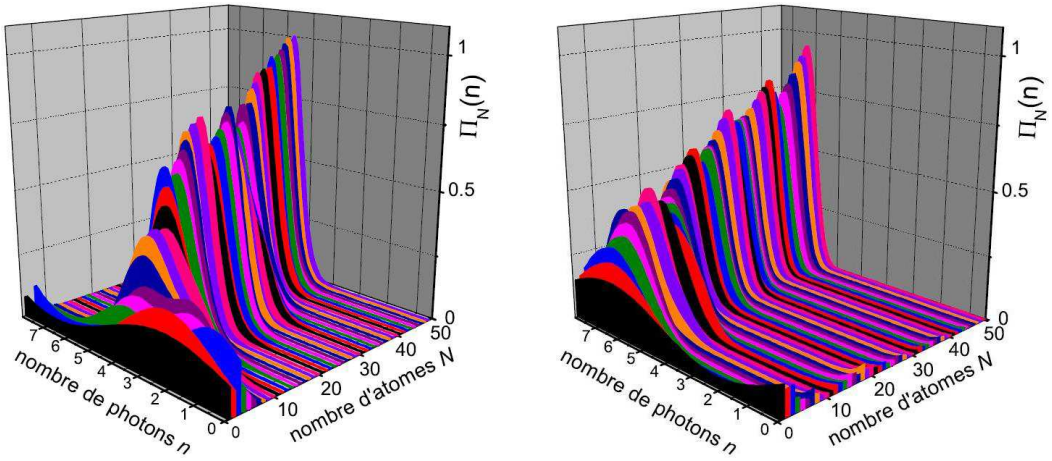
i ddcbccabcdaadaabadddbadbc
j ggegggggggggeegggeggeggggg

i ddcaddabbccdccbcdaabbccab
j eeegeeeggeggeeeeeegegegge

i dababbaacbccdadccdcbaaacc
j egegeeggegegegeggegegggggg

i bcdaddaabbbbdbdcdccadaada
j eeegegegeeeeegeeegggeggeg

(b)



(c)

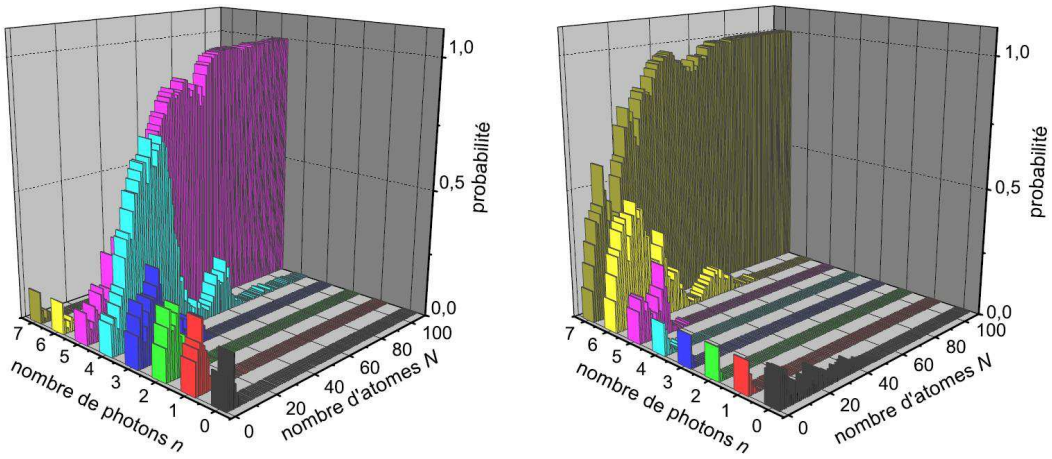


FIG. III.11 – *Réduction progressive des probabilités du champ vers un état nombre pour deux réalisations particulières de l'expérience. (a) Résultats des 50 premières détections atomiques (j,i) où l'on note j l'état atomique et i la phase de mesure. (b) Evolution de la fonction de décimation* $\Pi_N(n)$ *en fonction de N au cours des* 50 *premières détections atomiques. (c) Probabilités des nombres de photons en fonction du nombre N d'atomes détectés variant de 0 à 110.*

Nous confirmons ainsi les deux premiers postulats de la mesure de von Neumann : la mesure ne donne que des résultats contenus dans le spectre de l'observable mesurée et la probabilité de chacun des résultats est donnée par l'équation (I.93). Nous pouvons également interpréter ces résultats comme une confirmation des descriptions quantiques des champs classiques : une source classique produit un champ dont les $p(n)$ suivent une loi de Poisson, ceci est compatible avec la description d'un état classique par un état cohérent. Enfin, nous verrons très prochainement que le postulat de projection est bien vérifié, lui aussi, par notre mesure.

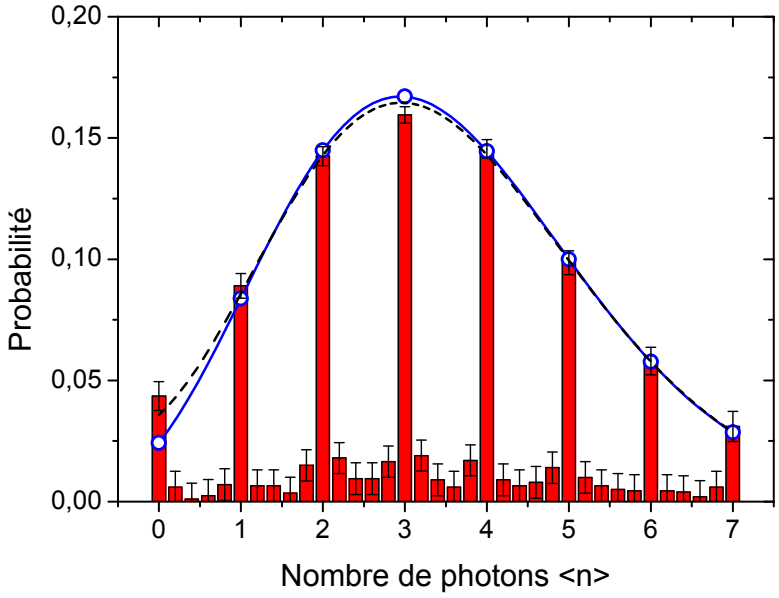


FIG. III.12 – *Histogramme des valeurs de* $\langle n \rangle$ *inférées sur 2000 réalisations et normalisé à 1. Seuls les canaux correspondant à des nombres entiers de photons sont significativement représentés. Ces canaux sont bien ajustés par une distribution poissonienne (courbe pleine) à l'exception du canal* $\langle n \rangle = 0$. *La prise en compte de notre mesure modulo 8 dans la distribution poissonienne (tirets) donne un parfait accord pour un nombre moyen de photons de* $3{,}48 \pm 0{,}04$.

III.4.4.c Trajectoires Monte-Carlo et moyenne d'ensemble

Les histogrammes de la figure III.11 semblent bien montrer que le champ est projeté sur un état de Fock à l'issue du processus de décimation. Afin de vérifier cela, nous allons mesurer le champ de façon répétée. Nous devrions alors voir apparaître un comportement de sauts quantiques semblable au cas de la mesure de photon unique III.4.1. Nous allons utiliser une fenêtre glissante de $N_{\text{at}} = 110$ atomes afin de mesurer l'évolution du champ. La figure III.13 présente la suite des deux séquences dont nous avons montré sur la figure III.10 la projection initiale sur $|5\rangle$ et $|7\rangle$. La valeur de $\langle n \rangle$ démarre à 3,5 à cause de la distribution initialement plate $P_0(n)$ entre

$n = 0$ et $n = 7$. Les premières 26 ms correspondent à la projection progressive du champ sur l'état de Fock. Puis apparaît une succession de paliers et de sauts quantiques traduisant la relaxation du champ. Nous sommes donc capables de suivre en temps réel la projection d'un état cohérent sur un état de Fock puis sa relaxation photon par photon vers le vide (ou le champ thermique plus précisément). De plus, de nombreux paliers visibles sur ces dernières figures contiennent plusieurs mesures indépendantes (séparées d'environ 26 ms). Le postulat de projection est donc bien lui aussi vérifié par notre mesure.

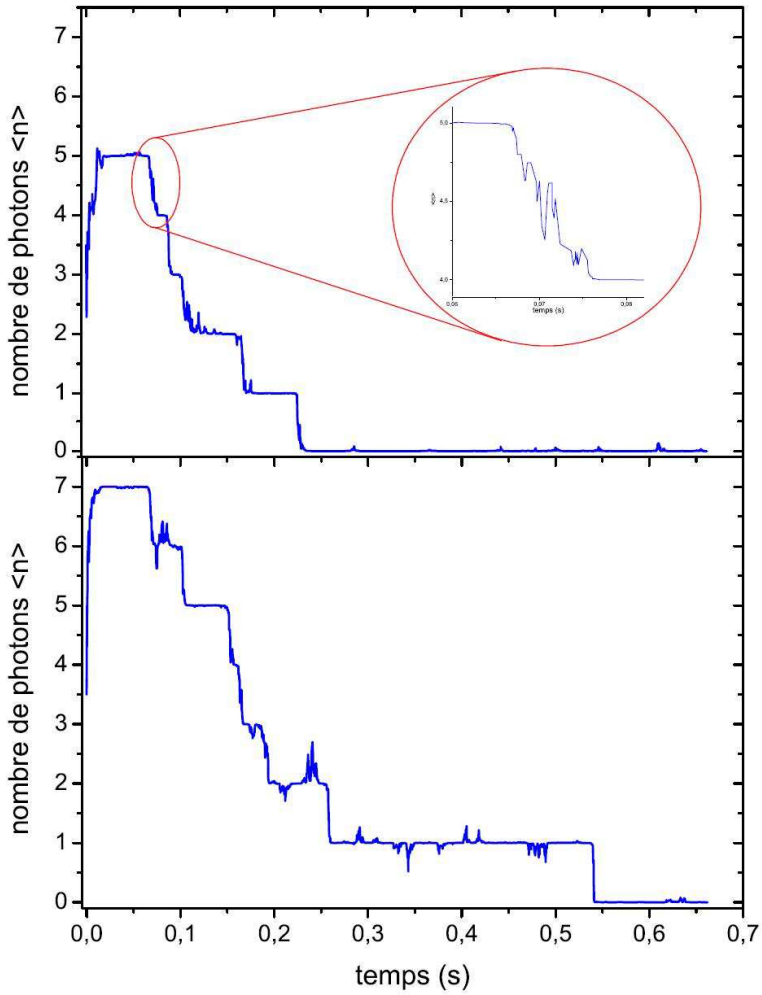


FIG. III.13 – *Deux trajectoires quantiques correspondant aux champs dont la mesure initiale est analysée sur la figure III.10. Les deux graphes présentent le nombre de photons moyen $\langle n \rangle$ évalué par une fenêtre de décimation glissante de N = 110 atomes, pendant une durée totale de 0,7 s. L'insert montre un agrandissement de la portion de la première trajectoire entre 0,06 et 0,08 s pendant laquelle le nombre de photons saute de 5 vers 4.*

Nos mesures répétées transforment l'évolution déterministe en trajectoires stochastiques avec des sauts à des instants aléatoires. Comme notre mesure est non-destructive, la moyenne de toutes

ces trajectoires stochastiques doit redonner l'amortissement continu et exponentiel d'un champ classique avec la constante de temps classique de la cavité T_{cav}.

L'évolution de la valeur moyenne $\overline{\langle n \rangle}$ des nombres de photons est présentée sur la figure III.14. L'ajustement exponentiel est quasiment indistinguable de la courbe expérimentale. La constante de temps trouvée $T_{relax} = 133 \pm 1$ ms est en parfait accord avec la mesure précédente $T_{cav} = 130 \pm 4$ [20]. La valeur finale $n_{lim} = 0{,}095 \pm 0{,}010$ est légèrement supérieure à la valeur attendue $n_{th} = 0{,}05$. Cet écart est dû à la convergence imparfaite du processus de décimation. Avec $N = 110$ atomes, la probabilité inférée par la décimation d'avoir un photon n'est jamais rigoureusement nulle même lorsque la cavité est effectivement vide. La prise en compte de cet effet permet de comprendre quantitativement la valeur de l'asymptote observée ([43] p. 106).

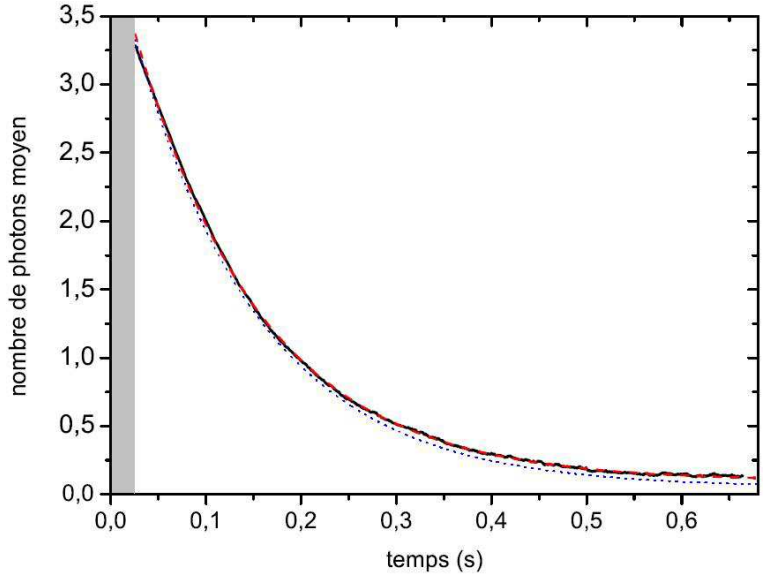


FIG. III.14 – *Moyenne sur toutes les réalisations du nombre de photons inféré $\langle n \rangle$ au cours du temps. L'ajustement exponentiel (pointillés rouges) est indistinguable des points expérimentaux. La courbe en pointillés bleus est la prédiction purement théorique. La zone grisée correspond aux 26 premières ms nécessaires à la détection des 110 atomes réalisant la première mesure.*

III.4.4.d Reconstruction des populations par un procédé itératif

L'histogramme de la figure III.12 montre qu'en répétant la mesure un grand nombre de fois, on obtient les populations de l'état initial. Nous nous sommes ensuite intéressés à la relaxation des états de Fock : l'objectif est de mesurer l'évolution des populations $P(n, t|n_0)$ lorsque le champ est préparé à $t = 0$ dans un état de Fock cible n_0. On peut alors obtenir les taux de fuite depuis l'état de Fock n_0 vers les autres états de Fock. L'idée consiste donc à sélectionner les trajectoires quantiques pour lesquelles le champ est proche de l'état de Fock cible, puis de suivre l'évolution ultérieure des populations. Néanmoins, le temps de mesure nécessaire pour décimer complètement les populations comme nous venons de le faire aux paragraphes précédents est de

près de 26 ms. Ce temps est comparable au temps de vie des états de Fock dont nous aimerions mesurer la relaxation. Nous avons donc mis en oeuvre une méthode permettant de reconstruire les populations du champ en utilisant un nombre d'atomes N_{at} beaucoup plus faible que les 110 atomes utilisés dans les paragraphes précédents. Ce travail est traité en détail dans la thèse de Julien Bernu [43] et dans un article de 2008 [32]. Plus que sur les résultats physiques obtenus, nous insisterons surtout ici sur la méthode de traitement des données expérimentales afin d'entrer progressivement dans le sujet de la reconstruction des états quantiques.

Les taux de fuite que nous aimerions mesurer sont donnés par l'équation pilote :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}P(n,t)}{\mathrm{d}t} &= \kappa(1+n_b)(n+1)P(n+1,t)\\ &- \kappa[(1+n_b)n+n_b(n+1)]P(n)\\ &+ \kappa n_b n P(n-1).\end{aligned} \tag{III.85}$$

où $\kappa = 1/T_{\mathrm{cav}}$ est le taux de perte de la cavité et n_b est le nombre moyen de photons thermiques à la fréquence ν_{cav} dans l'environnement de la cavité. On retrouve bien à la limite où la température est nulle ($n_b = 0$), le temps de vie du n^{e} état de Fock :

$$T_n = T_{\mathrm{cav}}/n. \tag{III.86}$$

Ainsi, on doit pouvoir mesurer des phénomènes dont la constante de temps est de l'ordre de $T_{\mathrm{cav}}/7 \approx 18\,\mathrm{ms}$ pour les plus courts. On mesure l'évolution des populations $P(t)$ en analysant les données d'une fenêtre glissante de N_{at} atomes successifs dont les instants de détection sont centrés autour de t. Ainsi, si l'on se contente d'utiliser la méthode précédente, l'instant de la première mesure après la sélection des trajectoires correspondant au temps nécessaire pour rassembler 110 atomes, est de près de 26 ms. Comme nous le disions en introduction, cela ne laisse aucun espoir de mesurer correctement les temps de vie des états de Fock de nombre n élevé.

Une première idée consiste alors à réduire le nombre d'atomes N_{at} dans la fenêtre afin de réduire le temps de mesure. Chaque fois que le champ a une population dans l'état de Fock cible n_0 proche de 1 ($P(n_0) > 70\,\%$), on commence à enregistrer l'évolution ultérieure en considèrant qu'elle appartient à une nouvelle réalisation d'indice r. Partant des probabilités plates initiales $P_0(n) = 1/8$, on infère la distribution de population $p(n,t)$ pour toutes les fenêtre suivantes de N_{at} atomes.

$$p^{(r)}(n,t) = \frac{1}{Z^{(r)}} P_0(n) \cdot \Pi^{(r)}_{N_{\mathrm{at}},t}(n), \tag{III.87}$$

où $\Pi^{(r)}_{N_{\mathrm{at}},t}(n)$ est la fonction de décimation construite à l'aide des N_{at} atomes dont l'instant d'arrivée est centré autour de t. L'exposant $^{(r)}$ indique les variables dépendant de la réalisation particulière considérée. Lorsque N_{at} est grand, comme nous l'avons vu, on a affaire à une mesure projective, ainsi, la distribution $p^{(r)}(n)$ est indépendante de la distribution à priori $P_0(n)$ (à condition qu'aucun des $P_0(n)$ ne soit nul). Cependant, si l'on réduit le nombre d'atomes N_{at}, la fonction de décimation n'exclut pas totalement tous les nombres de photons sauf un : on réalise une mesure faible. La distribution $p^{(r)}(n)$ est alors biaisée par le choix de la distribution à priori $P_0(n)$. Cependant, si l'on considère l'ensemble des réalisations sélectionnées, on peut reconstruire une distribution moyenne $P_1(n)$:

$$P_1(n,t) = \overline{p(n,t)}^{(r)}, \tag{III.88}$$

où la moyenne porte sur les différentes réalisations du champ. Cette nouvelle distribution, même si elle est biaisée par le choix de la distribution initiale $P_0(n)$, est toutefois plus proche de la distribution réelle. On peut alors partir de cette nouvelle distribution pour calculer les populations dans chaque réalisation en remplaçant $P_0(n)$ par $P_1(n,t)$ dans (III.15). Afin de s'affranchir totalement du biais lié à la distribution initiale $P_0(n)$, il suffit donc d'itérer un grand nombre de fois la transformation :

$$P_{l+1}(n,t) \equiv \overline{P_l(n,t)\cdot\Pi^{(r)}_{N_{\rm at},t}(n)}^{(r)}. \tag{III.89}$$

La distribution $P_l(n,t)$ tend alors vers une distribution indépendante du choix initial $P_0(n)$ lorsque l tend vers l'infini. Nous allons voir un peu plus loin qu'il s'agit de la distribution maximisant la vraisemblance compte tenu de la série de résultats de mesures obtenus. On peut ensuite recommencer le processus en sélectionnant les trajectoires proches d'un autre nombre de photons n_0.

La figure III.15 montre l'évolution temporelle des distributions obtenues pour les réalisations ayant convergé vers les états de Fock $n_0 = 0$ à 7 à l'instant $t = 0$. Le nombre d'atomes choisi pour la fenêtre est de $N_{\rm at} = 25$, ce qui correspond à un temps de mesure de 6 ms. Comme attendu, les huit valeurs de $P(n_0, t|n_0)$ sont maximales pour $t = 0$. La valeur de $P(n_0, 0|n_0)$ correspond à la fidélité de la procédure de sélection de l'états de Fock n_0. On obtient les valeurs... . Ces chiffres proches de 1 confirme que deux mesures successives donnent bien en général le même résultat. Aux temps long ($t > 400$ ms), l'état $|0\rangle$ est toujours le plus probable, révélant l'évolution irréversible du champ vers le fond thermique proche du vide. Pour $n_0 = 0$, la probabilité $P(0,t|0)$ décroît légèrement en dessous de 1, tandis que $P(1,t|0)$ augmente jusqu'à atteindre une valeur d'équilibre autour de 0,06. Cela reflète le processus de thermalisation du mode en contact avec un bain thermique à 0,8 K. Pour $n_0 = 1$, on observe une décroissance exponentielle de $P(1,t|1)$, parallèlement à l'augmentation de $P(0,t|1)$. Ce que nous observons ici est la relaxation d'un photon vers le vide [31]. Pour $n_0 > 1$, $P(n_0, t|n_0)$ décroît exponentiellement avec un taux augmentant pour les valeurs croissantes de n_0. Les fonctions $P(n,t|n_0)$ pour $n = n_0 - 1$, $n_0 - 2$,...1 présentent un maximum à des instants successifs, reflètant la cascade du nombre de photons de n_0 à 0.

Les courbes en trait plein sont obtenues en ajustant les taux de départ sur le début des courbes expérimentales. Les taux obtenus sont en très bon accord avec l'équation pilote (III.85) (voir [32]). En particulier, la relaxation des populations n'est pas affectée par le processus de mesures répétées car l'intervalle entre deux mesures successives est bien plus long que le temps de mémoire de l'environnement[12].

Commentaire sur la méthode précédente Nous allons montrer ici que la méthode précédente n'est rien d'autre que la méthode proposée par Lvovsky (voir I.1.5.c) pour trouver l'opérateur densité maximisant la vraisemblance. En effet, la fonction de décimation $\Pi_{N_{\rm at}}(n)$ n'est autre que l'élément diagonal de l'opérateur du POVM $(E_{N\rm at.})_{n,n}$. On peut alors interpréter la formule (III.87)

[12] Afin d'observer l'effet Zenon quantique, on peut par exemple coupler la cavité à une source classique dont le temps de cohérence est lui, plus long que l'écart entre deux mesures. La mesure répétée empêche alors le champ de croître dans la cavité (voir [42]).

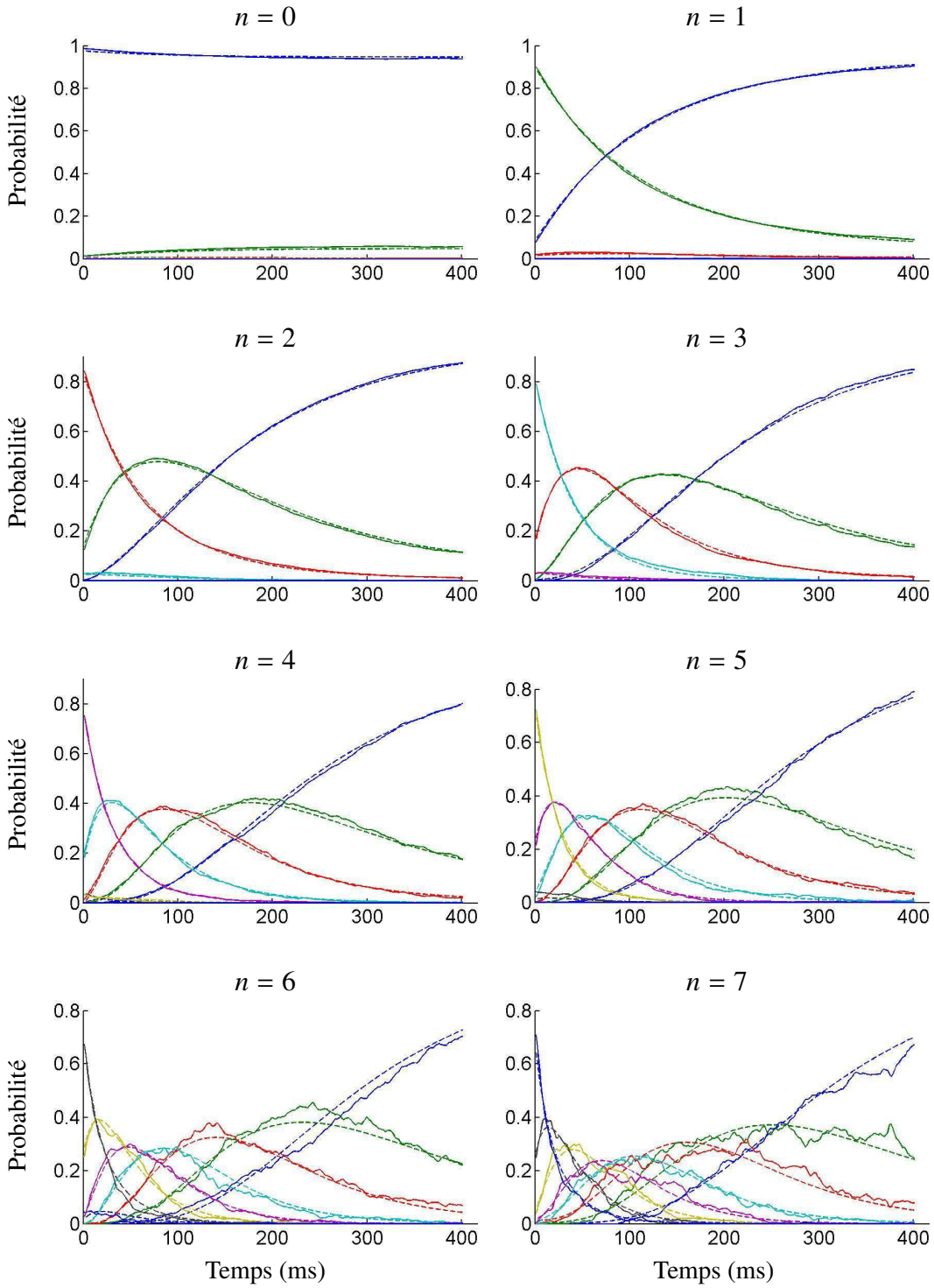


FIG. III.15 – *Évolution des populations mesurées $P(k,t|n)$ (traits pleins) et ajustées $\mathcal{P}(k,t|n)$ (tirets). Les valeurs de k allant de 0 à 7 sont respectivement représentées en bleu, vert, rouge, cyan, mauve, jaune, noir et bleu. Les huit séries de courbes correspondent à la sélection des différents états de Fock $|n\rangle$.*

en terme d'éléments diagonaux de la matrice densité[13] :

$$p^{(r)}(n) = \left[\frac{E^{(r)}_{N\text{at.}} \rho_0}{\mathrm{Tr}\left(E^{(r)}_{N\text{at.}} \rho_0 \right)} \right]_{n,n} . \tag{III.90}$$

où ρ_0 est une matrice densité choisie *à priori*, par exemple $\rho_0 = \mathbb{1}/N$. Ainsi, l'équation (III.89) se traduit par :

$$\rho_{l+1} \equiv R_0(\rho_l)\rho_l \tag{III.91}$$

avec

$$R_0(\rho_l) = \frac{1}{N_r} \sum_{r=1}^{N_r} \left[\frac{E^{(r)}_{N\text{at.}}}{\mathrm{Tr}\left(E^{(r)}_{N\text{at.}} \rho_l \right)} \right]. \tag{III.92}$$

L'opérateur $R_0(\rho_l)$ étant diagonal, deux itérations de la transformation (III.91) correspondent à une itération de l'opération :

$$\rho \rightarrow R_0(\rho)\rho R_0(\rho). \tag{III.93}$$

On reconnaît là l'équation (I.137) permettant de trouver la matrice densité correspondant au maximum de vraisemblance. Cependant, comme l'opérateur $R_0(\rho_l)$ est diagonal, il est clair que le résultat final va dépendre de la matrice initiale ρ_0 choisie. En fait, la vraisemblance des matrices densités par rapport à l'ensemble de mesures réalisées est *indépendante de leurs éléments non-diagonaux*. Nous verrons à la fin du chapitre suivant que cette méthode permet de reconstruire complètement l'état du champ lorsqu'on l'applique à des mesures dont le POVM présente des éléments non-diagonaux.

[13] On a abandonné le paramètre t pour simplifier les notations.

Chapitre IV

Préparation et reconstruction d'états non-classiques du champ

Nous avons vu au chapitre précédent que l'on pouvait utiliser les atomes afin d'interroger le champ piégé. En particulier, un grand nombre d'atomes successifs permettent de réaliser une mesure très proche de la mesure idéale de von Neumann du nombre de photons. En la répétant un grand nombre de fois, cette mesure donne donc accès aux populations d'un état quantique du champ. Dans ce chapitre, nous montrerons qu'en adaptant la méthode précédente, on peut reconstruire la matrice densité complète du champ piégé. Grâce à ce procédé, nous avons reconstruit plusieurs états non-classiques du champ. Le premier état non-classique que nous avons préparé et reconstruit est l'état « chat de Schrödinger ». Il est produit grâce à l'interaction d'un atome avec un champ cohérent. L'atome, en réalisant une mesure de parité, agit en retour sur la phase du champ et prépare un état « chat de Schrödinger ». Nous décrirons en détail ce procédé dans une première partie. Nous reconstruirons un tel état, ainsi que des états de Fock produits par la technique de mesure QND du nombre de photons à l'aide de la méthode d'entropie maximum. Nous présenterons ensuite la technique du maximum de vraisemblance sur l'exemple de l'état *chat de Schrödinger*. Nous montrerons finalement sur des simulations qu'il est possible d'améliorer significativement la reconstruction en adoptant une stratégie de mesure différente.

IV.1 L'expérience de pensée de Schrödinger revisitée

IV.1.1 Déphasage du champ cohérent par un atome

Lors de la description de l'interaction dispersive au chapitre précédent, nous avons vu que la présence des photons dans le mode déphasait les atomes traversant la cavité. On peut cependant décrire cette interaction en adoptant le point de vue du champ plutôt que celui de l'atome [97]. Supposons que la cavité se trouve dans un état cohérent d'amplitude complexe α et qu'un atome préparé dans l'état $|g\rangle$ traverse le mode. On peut alors décomposer l'état initial dans la base des états nombres :

$$|g,\alpha\rangle = \sum_n e^{-|\alpha|^2/2} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |g,n\rangle \,. \tag{IV.1}$$

Après que l'atome ait traversé le mode de la cavité, chaque état $|g,n\rangle$ a accumulé une phase $\Phi_{-}(n)$:

$$|g,\alpha\rangle \rightarrow \sum_n e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\Phi_{-}(n)}|g,n\rangle. \tag{IV.2}$$

Cette expression devient, à la limite fortement dispersive $\delta \gg \Omega_n$:

$$|g,\alpha\rangle \rightarrow \sum_n e^{|-\alpha|^2/2}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-in\Phi_0/2}|g,n\rangle. \tag{IV.3}$$

Ce qui peut se récrire :

$$\sum_n e^{-|\alpha|^2/2}\frac{\left(\alpha e^{-i\Phi_0/2}\right)^n}{\sqrt{n!}}|g,n\rangle = \left|g,\alpha e^{-i\Phi_0/2}\right\rangle. \tag{IV.4}$$

De la mème manière on vérifie que :

$$|e,\alpha\rangle \rightarrow e^{i\Phi_0/2}\left|e,\alpha e^{i\Phi_0/2}\right\rangle. \tag{IV.5}$$

Ainsi, le passage d'un atome dans l'état $|e\rangle$ (respectivement $|g\rangle$), déphase le champ d'un angle $\Phi_0/2$ (respectivement $-\Phi_0/2$). L'atome joue donc le même rôle qu'un milieu diélectrique dont l'indice de réfraction serait différent suivant que l'atome est dans l'état $|e\rangle$ ou dans l'état $|g\rangle$.

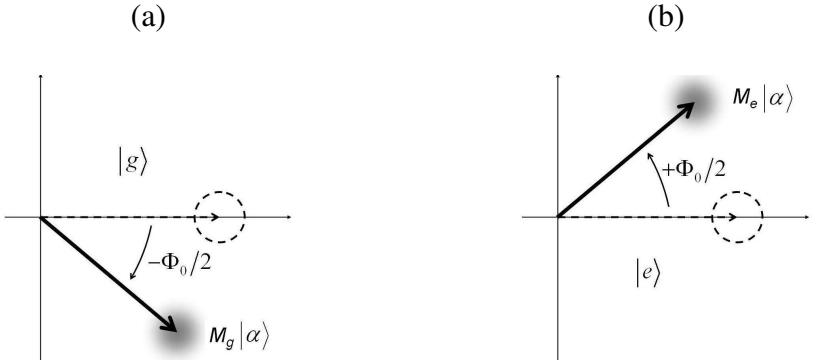


FIG. IV.1 – *Évolution du champ dans le plan de Fresnel tournant à la fréquence ω_0 en présence d'un atome dans (a) $|g\rangle$ ou (b) $|e\rangle$.*

IV.1.2 Préparation de l'état chat de Schrödinger

La préparation de l'état chat de Schrödinger s'appuie sur cet effet de déphasage. L'atome joue le rôle d'un aiguilleur quantique chargé de déphaser le champ dans une direction dépendant de son état. La préparation a lieu suivant les étapes suivantes :

1. Le champ est d'abord réinitialisé dans l'état vide à l'aide d'une série d'atomes résonnants
2. Un petit champ cohérent est injecté dans la cavité.

3. A l'aide d'une impulsion $\pi/2$ de phase $\phi_r = 0$, on prépare un atome dans la superposition $|\Psi_{\text{a.}}\rangle = (|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$. En interagissant avec le champ, ce dernier sépare la fonction d'onde du champ cohérent dans deux directions opposées.

Si l'on s'en tient là, le système atome-champ se trouve dans l'état :

$$|\Psi_{\text{a.c.}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle + |g\rangle|\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right), \tag{IV.6}$$

On a bien affaire au cas de figure de l'expérience de pensée de Schrödinger. En effet, un système microscopique – l'atome – est intriqué avec un objet classique – le champ – dans une superposition de deux états différents. Il apparaît alors clairement que si l'atome poursuit sa route jusqu'au détecteur, sa détection aura pour effet immédiat de projeter l'état du champ sur l'un des deux états classiques :

$$|\Psi_e\rangle = |\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle \qquad \text{ou} \qquad |\Psi_g\rangle = |\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle. \tag{IV.7}$$

Afin d'éviter cela, on réalise une impulsion $\pi/2$ dans la seconde zone de Ramsey de même phase $\phi_r = 0$ que la première, on « efface » alors l'information que l'atome porte sur l'état du champ. L'état du système atome-champ devient :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{a.c.}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle - |g\rangle\right)|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|e\rangle + |g\rangle\right)|\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}|e\rangle\left(|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle + |\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right) + \frac{1}{2}|g\rangle\left(|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle - |\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right). \end{aligned} \tag{IV.8}$$

La détection de l'atome dans l'état $|e\rangle$ projette donc le champ sur l'état :

$$|\psi_+\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_+}\left(|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle + |\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right), \tag{IV.9}$$

tandis que la détection de l'atome dans $|g\rangle$ le projette sur :

$$|\psi_-\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}_-}\left(|\alpha e^{i\Phi_0/2}\rangle - |\alpha e^{-i\Phi_0/2}\rangle\right). \tag{IV.10}$$

Ces deux états sont extrêmement intéressants à cause de leur caractère non-classique comme nous l'avons vu au chapitre *I*.

Remarque Juste avant la deuxième impulsion de Ramsey, le système et le champ sont maximalement intriqués[1]. Si l'on écrit la matrice densité partielle du champ (obtenue en traçant sur l'espace atomique), on obtient la matrice densité du mélange statistique ρ_{mixt} :

$$\rho_{\text{mixt}} = \frac{1}{2}|\Psi_+\rangle\langle\Psi_+| + \frac{1}{2}|\Psi_-\rangle\langle\Psi_-|. \tag{IV.11}$$

En fait, le système atome-champ forme une purification du mélange statistique ρ_{mixt}. L'impulsion $\pi/2$ est une opération locale réalisée sur l'atome. Elle ne peut donc pas modifier la matrice

[1] Ceci n'est vrai qu'à la limite des grandes amplitudes

densité partielle du champ. Cependant, elle permet de mesurer une observable différente de σ_z sur l'atome (en l'occurence σ_y). Si l'atome est détecté suivant la base σ_z, le mélange statistique ρ_{mixt} correspond au mélange des deux états classiques $|\Psi_e\rangle$ et $|\Psi_g\rangle$. Si l'atome est détecté suivant σ_y, le mélange statistique ρ_{mixt} correspond au mélange des deux états non-classiques $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$. En triant les réalisations suivant le résultat de la détection atomique, on obtient alors les états purs $|\psi_+\rangle$ et $|\psi_-\rangle$. Cette opération est une illustration directe du théorème de Gisin, Hughston, Josza et Wooters décrit au I.1.2.d.

IV.1.3 Lien avec la mesure de parité

En réalité, la préparation de l'état chat de Schrödinger se résume à l'étape élémentaire d'une mesure QND décrite au chapitre précédent. En effet, l'atome est d'abord préparé dans l'état $(|e\rangle + |g\rangle)/\sqrt{2}$, puis il interagit dispersivement avec le champ avant d'être détecté suivant une direction du plan équatorial de la sphère de Bloch. Nous avons donc déjà écrit l'effet d'une telle mesure sur le champ. Elle est décrite par les opérateurs de Kraus (III.24) et (III.25). En particulier, un cas très intéressant est celui où le déphasage par photon Φ_0 vaut π. Dans ce cas, on réalise une mesure de parité, et le champ est projeté par les opérateurs de Kraus (III.56) sur des états propres de la parité. Si l'on prépare un chat de Schrödinger à partir du champ cohérent $|\beta\rangle$:

$$|\beta\rangle = e^{-|\beta|^2/2} \sum_n \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \tag{IV.12}$$

les états produits sont :

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{pair}}\rangle &= M_{\text{pair}}|\beta\rangle \\ &= \frac{2e^{-|\beta|^2/2}}{\mathcal{N}} \sum_{n \text{ pair}} (-1)^{n/2} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \\ &= \frac{2e^{-|\beta|^2/2}}{\mathcal{N}} \sum_{n \text{ pair}} \frac{(i\beta)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \tag{IV.13}$$

et

$$\begin{aligned} |\psi_{\text{impair}}\rangle &= M_{\text{impair}}|\beta\rangle \\ &= \frac{2e^{-|\beta|^2/2}}{\mathcal{N}} \sum_{n \text{ impair}} \frac{(i\beta)^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \end{aligned} \tag{IV.14}$$

On reconnaît les états chat de Schrödinger maximalement séparés introduits au I.1.3.e avec les composantes classiques $|i\beta\rangle$ et $|-i\beta\rangle$. Ainsi, c'est l'action en retour de la mesure de parité sur la phase du champ qui produit l'état chat de Schrödinger.

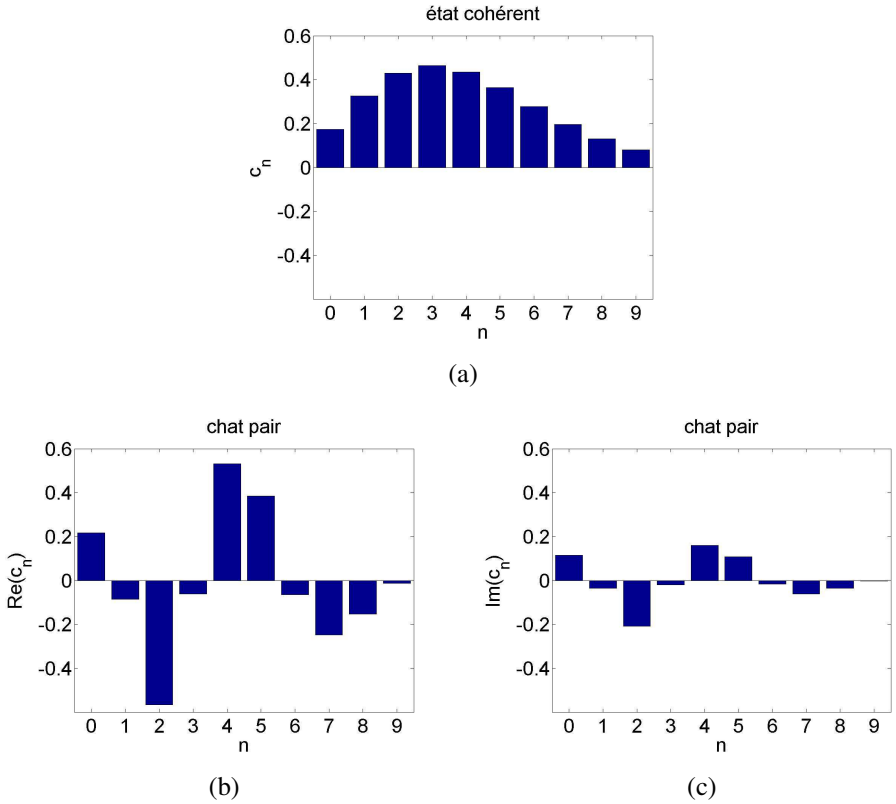


FIG. IV.2 – (a) Coefficients $c_n = \langle n|\beta\rangle$ du champ cohérent avec $\beta = \sqrt{3{,}5}$. Parties réelles et imaginaires ((b) et (c)) des coefficients $c_n = \langle n|\psi'_+\rangle$ de l'état chat de Schrödinger pair obtenu par interaction dispersive d'un atome avec un champ cohérent de 3,5 photons. Le désaccord choisi est de 51 kHz.

IV.1.4 Effet des imperfections expérimentales

IV.1.4.a Non-linéarité du déphasage par photon

Dans ce qui précède, nous avons utilisé les opérateurs M_{pair} et M_{impair} ne tenant pas compte de la non-linéarité du déphasage par photon. En particulier, lorsque le désaccord δ est du même ordre que la pulsation de Rabi Ω_0, comme c'est le cas pour obtenir $\Phi_0 \approx \pi$, la non-linéarité du déphasage par photons devient importante et il faudra tenir compte de cette correction. La figure IV.3 montre les parties réelles et imaginaires des éléments de matrice de l'opérateur $M'_- = M_e(\phi = \Phi(0))$ obtenus en injectant l'expression correcte de $\Phi(n)$ dans (III.24). On peut alors calculer l'état produit par l'action de la mesure atomique sur un champ cohérent :

$$|\psi'_\pm\rangle = M'_\pm|\beta\rangle. \tag{IV.15}$$

La figure IV.2 montre les coefficients du vecteur $|\psi'_+\rangle$ dans la base des états nombres pour un état chat de Schrödinger préparé à partir d'un champ cohérent contenant $\bar{n} = 3{,}5$ photons en moyenne. La fonction de wigner correspondante est représentée sur la figure IV.4(a).On reconnaît bien

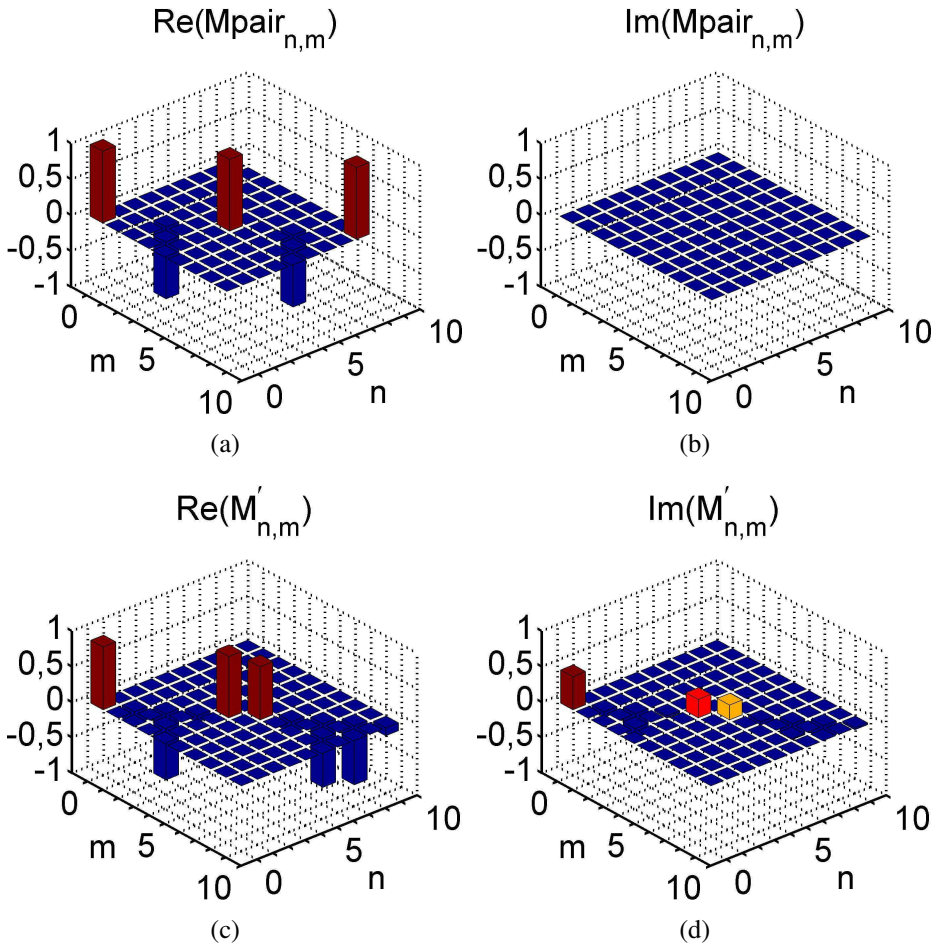


FIG. IV.3 – (a) et (b) : les éléments de l'opérateur de Kraus M_{pair} correspondant à un déphasage parfaitement linéaire $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$. (c) et (d) : les éléments de l'opérateur de Kraus M'_+ correspondant à un déphasage non-linéaire calculé pour $\delta = 51$ kHz.

deux composantes classiques, cependant, elles sont séparées d'un angle inférieur à π. En effet, à la limite des champs classiques où $\bar{n} \gg \Delta n$, on peut écrire la séparation θ des deux composantes classiques :

$$\theta = \left.\frac{\partial \Phi(n)}{\partial n}\right|_{\bar{n}}. \tag{IV.16}$$

Dans notre cas, on trouve une séparation $\theta = 0{,}75\pi$. De plus, les composantes classiques présentent une forme allongée indiquant un effet de compression du champ. Ceci est dû à la non linéarité du déphasage par photon autour de $\bar{n}$.

IV.1.4.b Contraste fini de l'interféromètre

L'analyse ci-dessus suppose que le contraste de l'interféromètre est parfait. En effet, l'action d'un atome traversant ce dernier est décrite par un seul opérateur de Kraus. On peut aisément inclure l'effet des erreurs de détection et des déphasages inhomogènes grâce à la formule (III.37). Cette formule montre que l'état produit lorsqu'un atome est détecté dans i est en fait le mélange statistique de deux états :

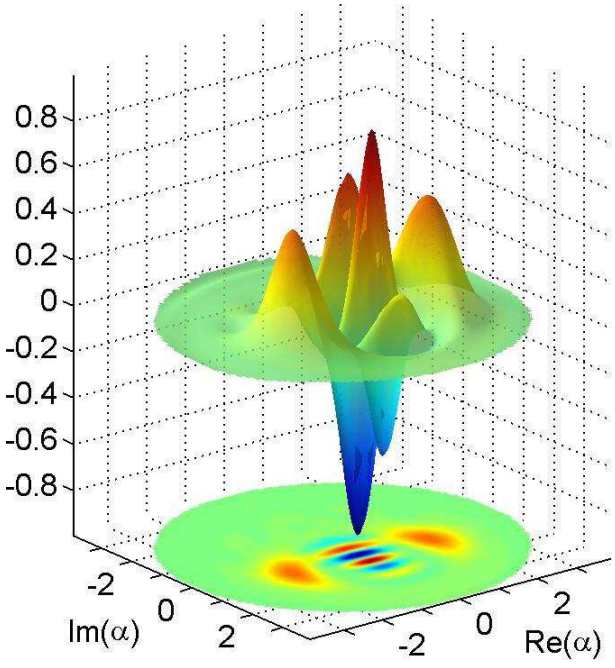
1. L'état chat correspondant à la détection atomique dans i avec la probabilité $(1 + c)/2$.
2. L'état chat de parité opposée correspondant à la détection d'un atome dans l'état opposé avec la probabilité $(1 - c)/2$,

où c est le contraste de l'interféromètre supposé réduit uniquement à cause des erreurs de détection et des déphasages inhomogènes. Comme nous l'avons discuté au I.1.3.e, la fonction de Wigner d'un tel état présente les mêmes composantes classiques que le chat décrit précédemment, mais les franges d'interférences ont un contraste réduit d'un facteur c car elles sont la moyenne des deux jeux de franges en opposition de phases. La figure IV.4(b) montre la fonction de Wigner obtenue pour un interféromètre de contraste $c = 60\,\%$

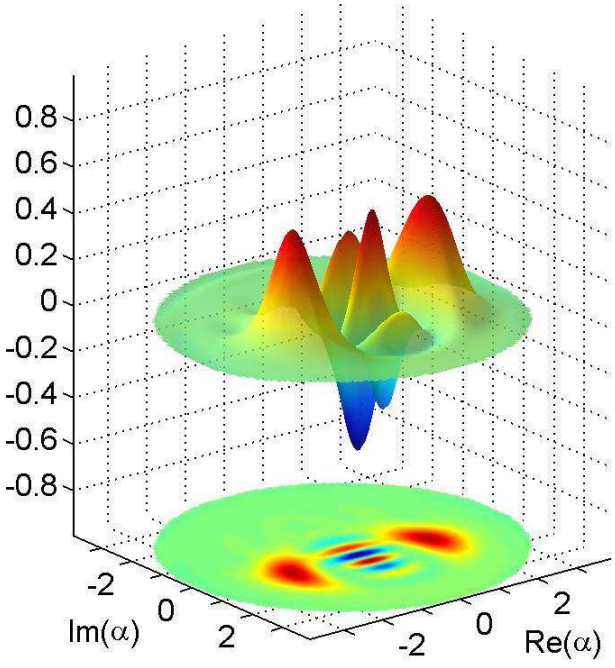
On peut également prendre en compte l'effet des atomes mal préparés, par exemple, les niveaux elliptiques de la multiplicité $n = 52$ mal purifiés qui pourraient être confondus avec les niveaux circulaires au moment de la détection. Si l'on suppose qu'ils n'interagissent pas avec le champ, il faut ajouter au mélange ci-dessus une composante correspondant au champ cohérent initial non modifié. On estime que ce genre d'impuretés représente environ 5 % des atomes produits.

IV.2 Reconstruction des états par entropie Maximum

Nous allons à présent suivre l'approche « historique » pour décrire les différentes techniques de reconstruction des états du champ. Dans cette section, nous présenterons l'ensemble des états reconstruits à l'aide de la méthode du Maximum de l'entropie présentée au chapitre I, avant de passer ensuite aux autres techniques de reconstruction.



(a)



(b)

FIG. IV.4 – (a) Fonction de Wigner du chat $|\psi'_+\rangle$ obtenu par interaction dispersive d'un atome avec un champ cohérent de 3,5 photons pour un désaccord de 51 kHz. (b) Fonction de Wigner de l'état correspondant préparé avec un interféromètre de contraste 60 %. Le contraste des franges d'interférences est réduit par rapport au chat pur.

IV.2.1 Mesure directe d'une fonction de Wigner Généralisée

Comme nous l'avons vu au chapitre I, une méthode de mesure directe de la fonction de Wigner a été proposée par Lutterbach et Davidovich [51] en 1997. Cette mesure repose sur l'expression (I.66). En effet, cette formule montre que la fonction de Wigner de l'état ρ au point d'amplitude complexe α, $W^{\rho}(\alpha)$, est donnée par la valeur moyenne de la parité dans le champ déplacé de l'amplitude complexe $-\alpha$. La méthode de mesure de $W^{\rho}(\alpha)$ est alors très simple, il suffit dans une première étape d'injecter un champ cohérent d'amplitude complexe $-\alpha$ afin de déplacer l'état à mesurer dans le plan complexe :

$$\rho \rightarrow \rho(-\alpha) = D(-\alpha)\rho D(\alpha). \tag{IV.17}$$

La deuxième étape consiste alors à mesurer la valeur moyenne de la parité dans l'état $\rho(-\alpha)$. Pour cela, on utilise la méthode décrite au III.4.2 : le déphasage par photon doit donc être parfaitement linéaire ($\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$). On effectue alors une mesure QND du champ avec la phase ϕ. La différence des probabilités de détection $P_e - P_g$ est alors donnée par :

$$\begin{aligned} P_e - P_g &= \mathrm{Tr}(\rho(-\alpha)E_{1\mathrm{at.}}(|e\rangle, \phi)) - \mathrm{Tr}(\rho(-\alpha)E_{1\mathrm{at.}}(|g\rangle, \phi)) \\ &= \mathrm{Tr}(\rho(-\alpha)(E_{1\mathrm{at.}}(|e\rangle, \phi) - E_{1\mathrm{at.}}(|g\rangle, \phi))). \end{aligned} \tag{IV.18}$$

Si l'on reprend la définition (III.26) avec $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$, on obtient :

$$P_e - P_g = \cos\left(\Phi(0) - \phi\right) \mathrm{Tr}\left(\rho(-\alpha)\Pi\right). \tag{IV.19}$$

Ainsi, quelque soit le choix de la phase de mesure ϕ, on mesure bien la parité du nombre de photons. Cependant, le contraste du signal mesuré est maximum pour $\phi = \pi/2$. On retrouve bien la conclusion du paragraphe III.4.2 : pour mesurer la parité du champ, il faut réaliser une mesure QND avec $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$ suivant la phase $\phi = \pi/2$. Tout autre choix de phase n'a pour seul effet que de réduire l'amplitude du signal mesuré. Cette méthode permet alors de mesurer n'importe quel point de la fonction de Wigner, et ainsi en principe, d'identifier sans ambiguïté l'état quantique du champ.

En réalité, il faut tenir compte de la non-linéarité du déphasage par photon. Le POVM (III.26) introduit au chapitre précédent tient compte de cet effet. On définit alors l'opérateur $\Pi'(\phi)$:

$$\begin{aligned} \Pi'(\phi) &= E_{1\mathrm{at.}}(|e\rangle, \phi) - E_{1\mathrm{at.}}(|g\rangle, \phi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\left(\Phi(0) - \phi\right) & 0 & . & . & . & . \\ 0 & \cos\left(\Phi(1) - \phi\right) & 0 & . & . & . \\ . & 0 & \cos\left(\Phi(2) - \phi\right) & 0 & . & . \\ . & . & & . & & \\ . & . & & & . & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{IV.20}$$

Contrairement au cas de l'opérateur Π, l'observable mesurée dépend du choix de phase ϕ. On garde donc explicitement le paramètre ϕ dans la définition de $\Pi'(\phi)$. En particulier, on peut

mesurer deux phases orthogonales $\Pi'(\Phi(0))$ et $\Pi'(\Phi(0)+\pi/2)$. Ces deux quantités correspondent à la partie réelle et imaginaire de l'opérateur complexe $\tilde{\Pi}$:

$$\tilde{\Pi} = \Pi'(\Phi(0)) + i\Pi'(\Phi(0)+\pi/2) = \begin{pmatrix} e^{i[\Phi(0)-\Phi(0)]} & 0 & . & . & . & . \\ 0 & e^{i[\Phi(1)-\Phi(0)]} & 0 & . & . & . \\ . & 0 & e^{i[\Phi(2)-\Phi(0)]} & 0 & . & . \\ . & . & . & . & & \\ . & . & & & . & \\ . & . & & & & . \end{pmatrix}. \quad \text{(IV.21)}$$

Il est clair que lorsque le déphasage par photon est voisin de π, la partie imaginaire $\Pi'(\Phi(0)+\pi/2)$ est quasiment nulle, et la partie réelle $\Pi'(\Phi(0))$ est très similaire à Π. On appellera parité généralisée l'« observable complexe » $\tilde{\Pi}$ et on définit la fonction de Wigner généralisée :

$$W^{\rho}(\alpha)_{\text{gen}} = \text{Tr}\left(D(-\alpha)\tilde{\Pi}D(\alpha)\right). \quad \text{(IV.22)}$$

Dont les parties réelles et imaginaires sont définies par des valeurs moyennes d'observables :

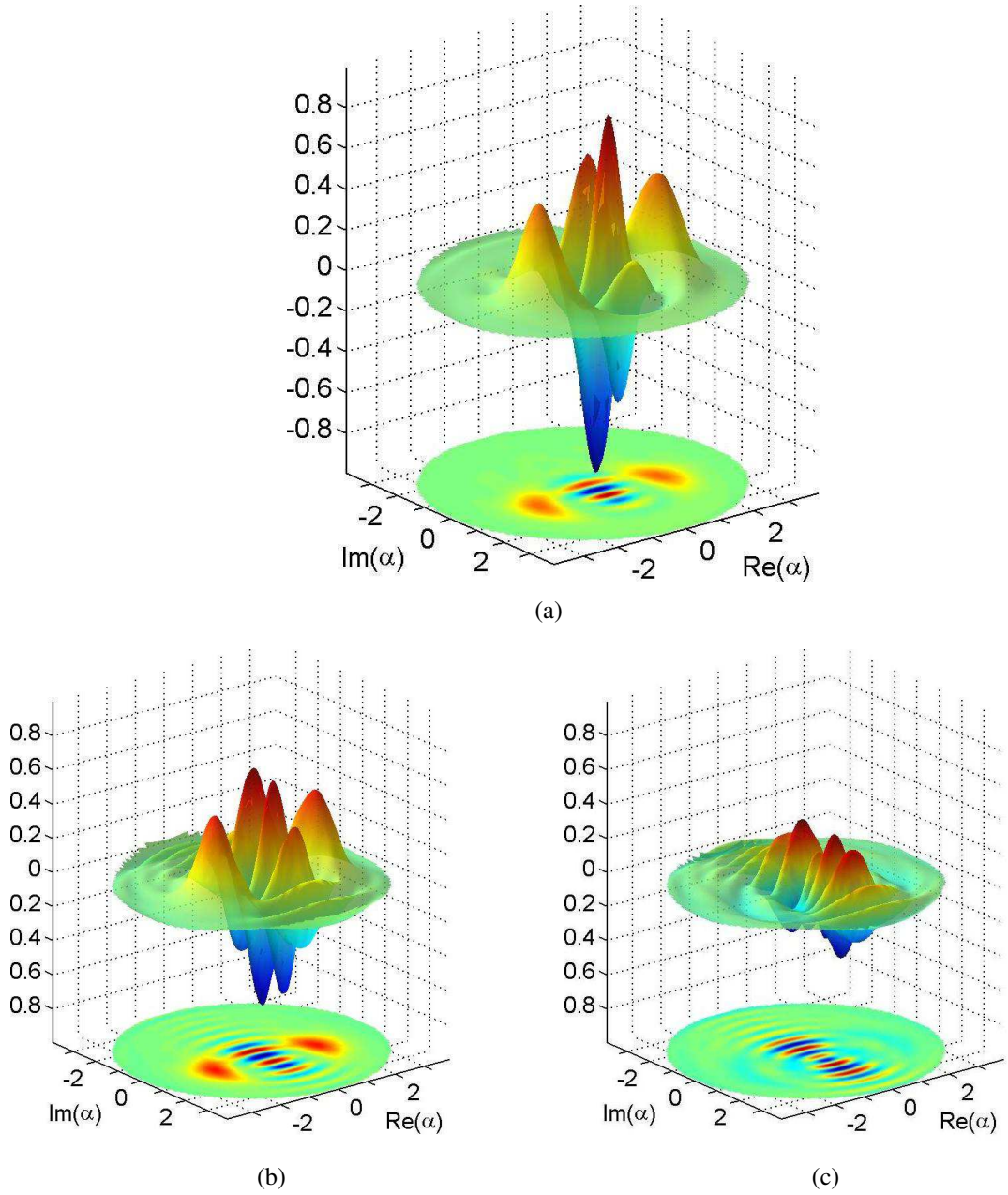
$$\text{Re}(W^{\rho}(\alpha)_{\text{gen}}) = \text{Tr}\left[D(-\alpha)\Pi'(\Phi(0))D(\alpha)\right], \quad \text{(IV.23)}$$

$$\text{Im}(W^{\rho}(\alpha)_{\text{gen}}) = \text{Tr}\left[D(-\alpha)\Pi'(\Phi(0)+\pi/2)D(\alpha)\right]. \quad \text{(IV.24)}$$

La figure IV.5 rappelle la fonction de Wigner du chat de Schrödinger étudié précédemment et montre à titre de comparaison les parties réelle et imaginaire de sa fonction de Wigner généralisée. On peut récapituler la méthode utilisée pour mesurer le point de la fonction de Wigner généralisée d'amplitude complexe α sur l'état ρ :

1. Le champ est réinitialisé dans l'état vide à l'aide d'une série d'atomes résonnants.
2. On utilise la méthode de préparation ad'hoc pour que le champ dans la cavité soit dans l'état ρ.
3. L'état ρ est d'abord déplacé dans le plan complexe de l'amplitude $-\alpha$ grâce à l'injection d'un petit champ cohérent.
4. Une série d'atomes traverse l'interféromètre avant d'être détectée. On compte le nombre d'atomes détectés dans $|e\rangle$ et dans $|g\rangle$ au sein de cette réalisation particulière.
5. Le protocole est ensuite répété un grand nombre de fois. Les résultats des détections atomiques venant des différentes réalisations sont moyennés ensemble afin d'évaluer la différence des probabilités $P_e - P_g$, égale à la fonction de Wigner généralisée (partie réelle ou imaginaire selon la phase de mesure) au point α.

La figure IV.2.1 montre des mesures expérimentales de la fonction de Wigner généralisée (partie réelle) le long d'une coupe circulaire passant par les composantes classiques et le long d'une coupe rectiligne au milieu des franges d'oscillations sur l'axe réel. On a superposé les données provenant du chat pair et du chat impair afin de mettre en évidence la différence entre les composantes classiques autour desquelles les deux fonctions sont identiques et les interférences quantiques autour desquelles elles sont opposées.



(a)

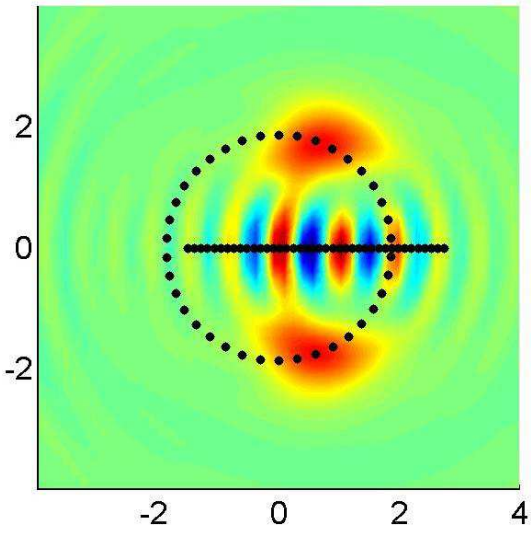
(b)

(c)

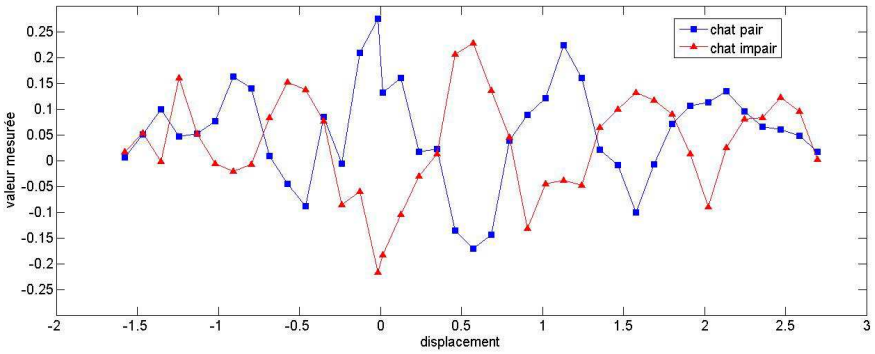
FIG. IV.5 – (a) Fonction de Wigner du chat $|\Psi'_+\rangle$ préparé à partir d'un champ cohérent contenant 3,5 photons en moyenne pour un désaccord $\delta = 51$ kHz, partie réelle (b) et imaginaire (c) de la fonction de Wigner généralisée.

IV.2.2 Reconstruction de l'état « chat de Schrödinger »

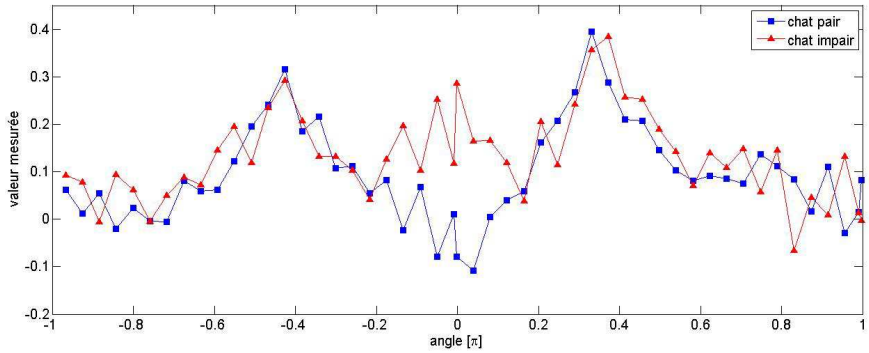
Nous venons de voir une méthode permettant de mesurer directement une fonction approchante de la fonction de Wigner. On ne peut cependant pas se satisfaire de cette analyse pour plusieurs raisons. Premièrement, la fonction mesurée n'est pas exactement la fonction de Wigner



(a)



(b)



(c)

FIG. IV.6 – Deux coupes de la partie réelle de la fonction de Wigner généralisée. La figure (a) montre le résultat attendu théoriquement. Les valeurs mesurées sur la coupe rectiligne et sur la coupe circulaire sont représentées respectivement en (b) et (c) en bleu (carrés) pour le chat pair et en rouge (triangles) pour le chat impair. Les franges d'oscillations sont bien en opposition de phase tandis que les composantes classiques sont identiques. Les fluctuations rapides des signaux mesurés sont dues au bruit statistique.

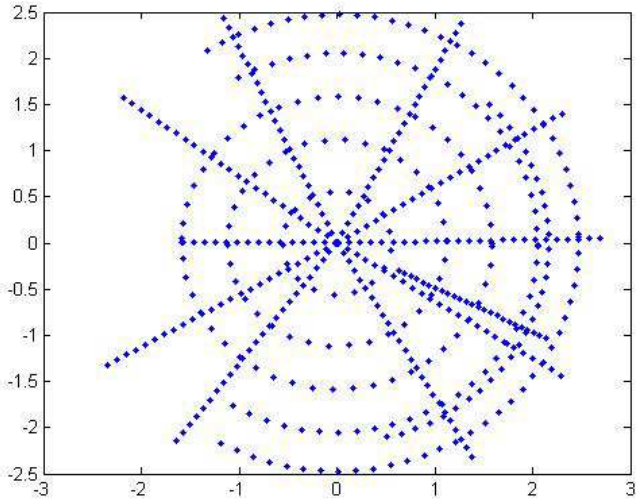


FIG. IV.7 – Les différents point de mesure de la fonction de Wigner généralisée α_ν dans le plan complexe.

du champ. De plus, Les points mesurés sont tous entachés d'un bruit statistique et le nombre de points dont nous disposons ne permet pas de réaliser une interpolation satisfaisante de la fonction en tout les points de l'espace des phases. En outre, la fonction de Wigner possède une certaine régularité[2]. Ainsi, les différents points de la fonction de Wigner apportent une information redondante et nous verrons qu'il suffit en pratique d'un petit nombre de points de mesure pour pouvoir reconstruire l'état.

La méthode du maximum de l'entropie présentée au chapitre I permet naturellement de réaliser cette reconstruction. Les valeurs de la fonction de Wigner généralisée en différents points du plan complexe seront les observables utilisées pour contraindre la matrice densité. Ces quantités directement accessibles à l'expérience ont toutes les chances de contraindre complètement la matrice densité à cause de leur ressemblance avec la fonction de Wigner. On notera $\{G(\alpha_i)\}$ les différentes observables correspondant à la mesure de la partie réelle de la fonction de Wigner généralisée au point d'amplitude complexe α_i, et on notera g_i les valeurs moyennes mesurées :

$$g_i = \langle G(\alpha_i)\rangle = \mathrm{Tr}\left[D(\alpha_i)\rho D(-\alpha_i)\cos(\Phi(\hat{N}) - \Phi(0))\right]. \tag{IV.25}$$

Il est très simple de varier la phase ou l'amplitude du nombre complexe α en balayant la fréquence du générateur servant à injecter le champ dans la cavité ou la durée de l'injection. Nous pouvons ainsi facilement obtenir différentes « coupes » de forme circulaires ou rectilignes dans le plan complexe. La figure IV.7 montre par exemple les différents points α_i utilisés pour reconstruire un état chat de Schrödinger. Au total, nous disposons de $N_{\text{points}} \approx 600$ couples (α_i, g_i). L'état doit alors vérifier le jeu de contraintes :

$$\mathrm{Tr}(\rho G(\alpha_i)) = g_i, \tag{IV.26}$$

[2]Ceci est d'autant plus vrai que l'espace de Hilbert est restreint.

tout en présentant l'entropie la plus grande possible. Nous avons vu au chapitre I qu'une méthode pour résoudre ce problème consiste à partir d'une matrice densité de la forme :

$$\rho_0 = \frac{1}{Z} \exp\left(- \sum_{\nu \geq 1} \lambda_\nu G_\nu \right) \tag{IV.27}$$

et de trouver la valeur des multiplicateurs de Lagrange λ_ν qui minimise l'écart aux points expérimentaux :

$$\chi^2 = \sum_{\nu=1}^{M} (\mathrm{Tr}(\rho_0 G_\nu) - g_\nu)^2. \tag{IV.28}$$

La figure IV.8(a) présente le résultat obtenu en réalisant toutes les opérations dans un espace de Hilbert très grand ($N = 20$). On distingue déjà à ce stade les caractéristiques physiques attendues : deux composantes classiques nettement séparées et un jeu de franges oscillants entre valeurs négatives et positives au centre. Néanmoins, la fonction de Wigner présente de nombreuses « vaguelettes » sans origine physique. Ces oscillations rapides sont dues au bruit statistique que l'on peut observer par exemple sur la figure IV.2.1. En effet, en permettant les nombres de photons très élevés, on autorise des oscillations très rapides de la fonction de Wigner généralisée. Ainsi, pour s'ajuster sur les fluctuations statistiques des données expérimentales, la matrice densité va faire intervenir des nombre de photons élevés correspondant à des bruits à haute fréquence sur la fonction de Wigner. En quelque sorte, ce problème est inhérent à la méthode d'entropie maximum puisque la matrice densité choisie doit impérativement reproduire les valeurs moyennes mesurées. Afin de lisser ces oscillations rapides, on peut utiliser un argument physique. Etant donnée l'énergie injectée initialement dans la cavité, on sait que le nombre de photons dans le champ ne peut excéder une dizaine. On va donc reconstruire l'état dans un espace de Hilbert de dimension réduite. De plus, l'état obtenu n'est pas centré sur l'origine de l'espace des phases, mais entre les deux composantes classiques au point d'amplitude complexe $\alpha_{\mathrm{centre}} = 0{,}8$. Cela signifie que le nombre de photons moyens sera le plus faible si l'on définit l'origine des phases au point α_{centre}. On va donc effectuer la reconstruction en choisissant ce point pour origine de l'espace des phases et en utilisant des opérateurs G_ν tronqués jusqu'à $N = 10$. On effectue alors l'opération formelle suivante sur la matrice densité obtenue afin de la redéplacer dans l'espace des phases[3] :

$$\rho = D(\alpha_{\mathrm{centre}}) \rho D(-\alpha_{\mathrm{centre}}). \tag{IV.29}$$

La figure IV.8(b) montre le résultat obtenu. Les oscillations rapides ont bel et bien disparu de la fonction de Wigner reconstruite. La figure IV.9 présente les données expérimentales pour les deux coupes présentées plus tôt, ainsi que la valeur moyenne obtenue par les différentes procédures de reconstruction. On voit que les deux dernières procédures reproduisent assez bien les différents motifs obtenus. Cependant, les grandes excursions de la valeur moyenne mesurée (à l'occasion des passages dans les composantes classiques et les franges d'oscillation) sont toujours sous-évaluées. Ceci est certainement dû au fait que la plupart des points expérimentaux

[3]Cette opération est effectuée dans un espace de Hilbert agrandit afin de ne pas distordre l'état du champ dans l'opération.

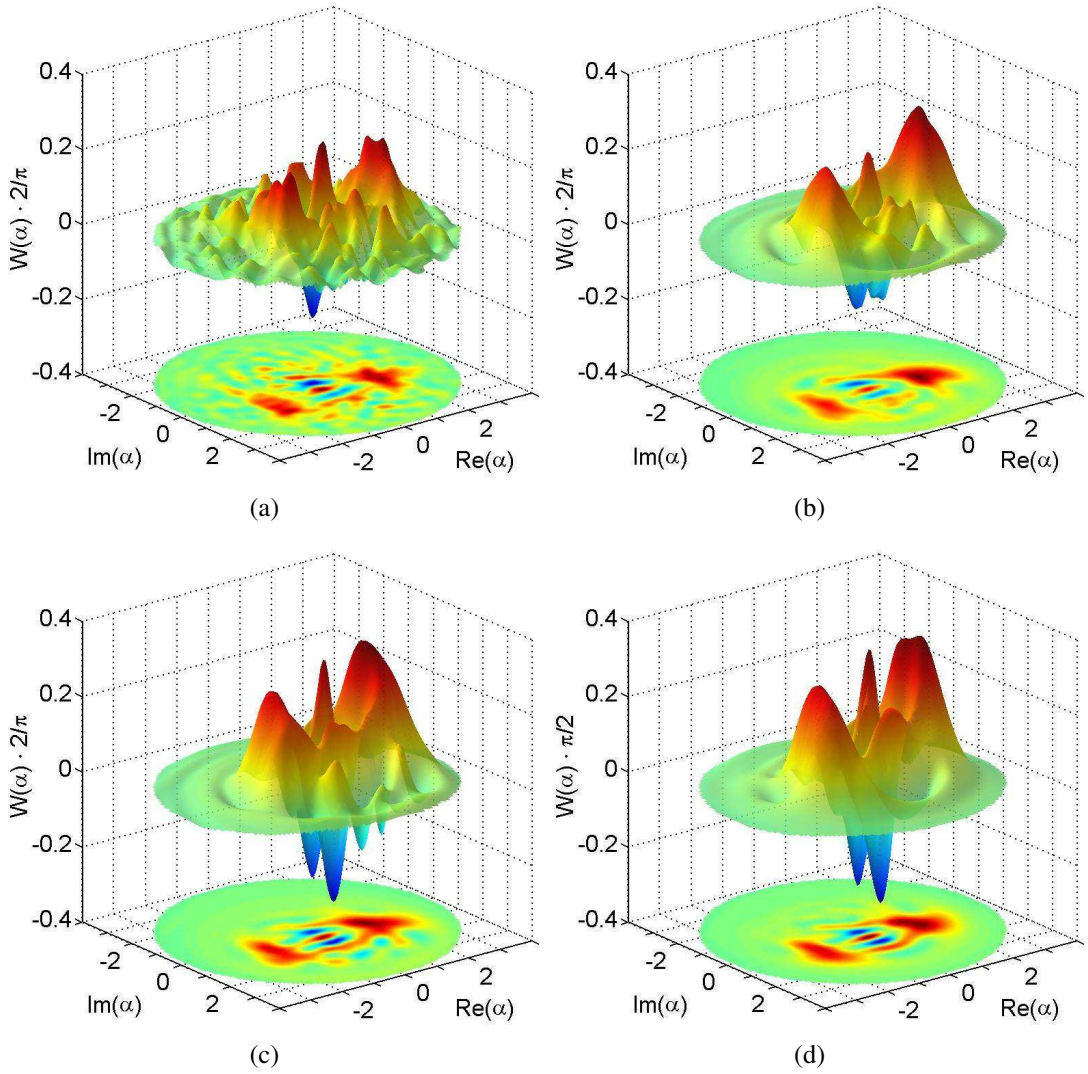


FIG. IV.8 – (a) Fonction de Wigner de l'état chat de Schrödinger pair reconstruit par entropie maximum dans un espace de Hilbert de dimension 20. (b) Le même état reconstruit dans un espace de dimension 11 centré autour de l'amplitude complexe α_{centre}. (c) A présent, on utilise en plus la loi (IV.31) pour pondérer l'importance des différents points expérimentaux. (d) La dernière étape consiste à tronquer la matrice densité finale en une matrice de dimension 11 (après application du déplacement $D(\alpha_{\text{centre}})$.

mesurent un signal proche de 0. Ainsi, l'ajustement sur les données expérimentales s'efforce essentiellement de reproduire le bruit statistique autour de 0 plutôt que de reproduire les quelques motifs intéressants où le signal prend des valeurs conséquentes. Afin de donner plus de poids aux motifs intéressants, on pondère simplement les contraintes en fonction de la valeur moyenne mesurée. On a par exemple utilisé la loi suivante :

$$\kappa_\nu = \frac{1}{0{,}1 + (g_\nu + 0{,}05)^2}. \tag{IV.30}$$

Le résultat est donné sur la figure IV.8(c). L'état a encore une fois été reconstruit dans un espace de Hilbert de dimension 11 centré sur α_{centre}. Cette fois, la minimisation de la distance aux points a été réalisée avec la fonction suivante :

$$\chi^2 = \sum_{\nu=1}^{M} \frac{(\mathrm{Tr}(\rho_0 G_\nu) - g_\nu)^2}{\kappa_\nu}. \tag{IV.31}$$

La figure IV.9 permet de se rendre compte que l'ajustement passe à présent beaucoup mieux par les points de forte valeur absolue. Finalement, afin de lisser la fonction de Wigner obtenue, on tronque les nombres de photon supérieurs à $n = 10$ dans la matrice densité résultant du dernier déplacement (IV.29). Encore une fois, l'argument physique utilisé est que le champ ne peut pas contenir des nombres de photons plus grand que le champ cohérent injecté initialement. Le résultat final est représenté sur la figure (IV.8(d)).

La fidélité de l'état reconstruit ρ par rapport à l'état pur (IV.2) peut se calculer par la simple formule :

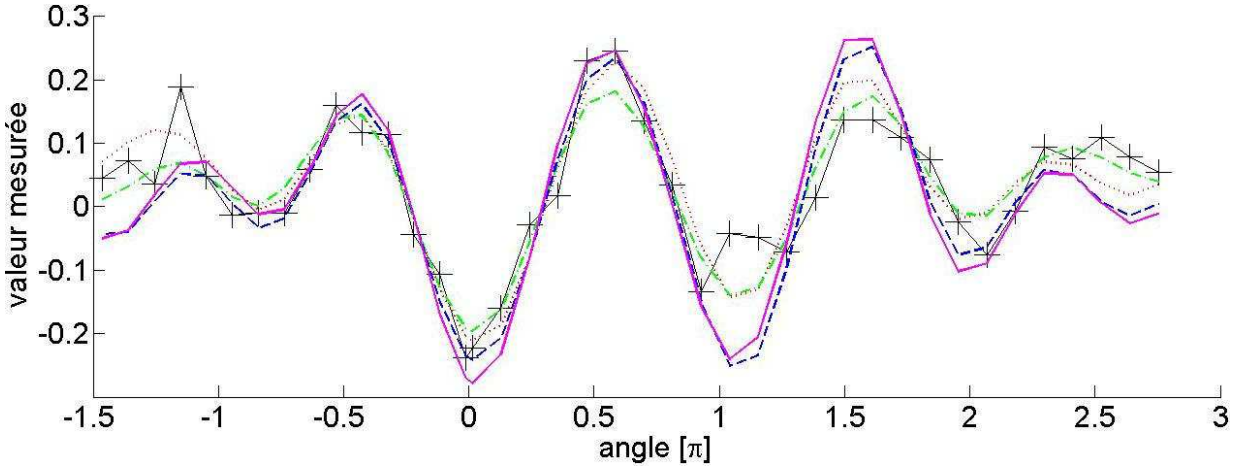
$$f = \mathrm{Tr}(\rho |\psi'_+\rangle\langle\psi'_+|) = 0{,}43. \tag{IV.32}$$

Pour tenir compte du contraste fini de l'interféromètre, on doit définir la fidélité de deux mélanges statistiques ρ_1 et ρ_2. La formule généralement utilisée dans la communauté est la suivante [98] :

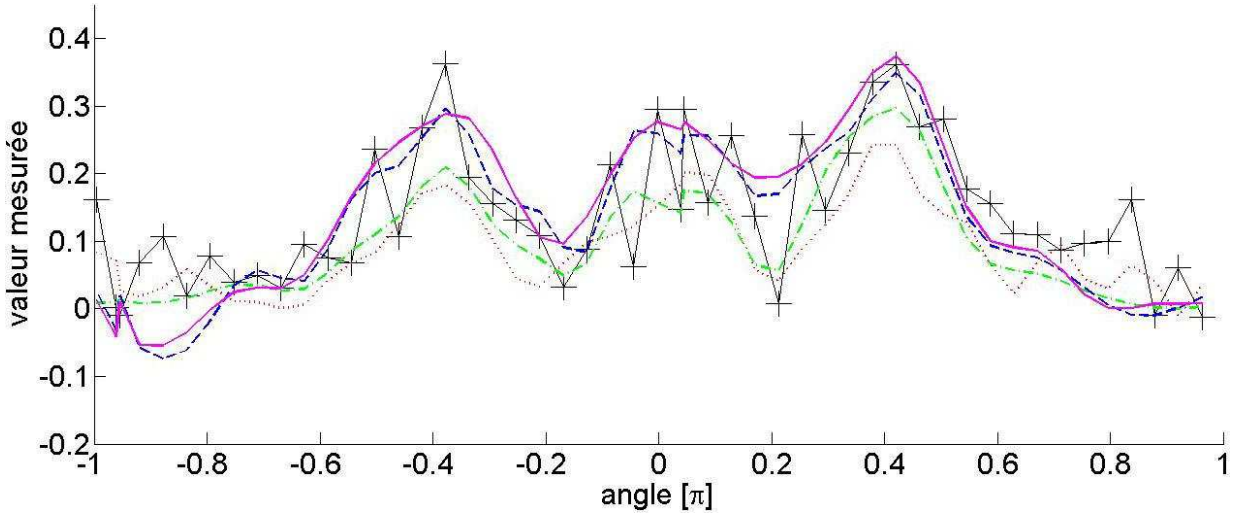
$$f = \mathrm{Tr}\left[\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}\right]^2. \tag{IV.33}$$

Elle possède toutes les propriétés naturelles attendues pour une telle grandeur. On peut alors calculer la fidélité de l'état reconstruit par rapport au chat obtenu avec un interféromètre de contraste fini. Par exemple, avec un interféromètre de contraste 54 %, on obtient une fidélité $f = 0{,}64$.

Si l'état obtenu présente qualitativement toutes les caractéristiques physiques attendues, l'étude quantitative de sa fidélité par rapport à l'état idéal montre qu'il reste une grande marge pour de possibles améliorations. Nous avons toutefois reconstruit des chats de Schrödinger de tailles plus modeste. Dans ce cas, la reconstruction est plus facile car la dimension réduite de l'espace de Hilbert diminue d'autant le nombre de degrés de liberté. La figure IV.10 montre par exemple la fonction de Wigner d'un état chat de Schrödinger crée à partir d'un champ cohérent contenant 2,1 photons en moyenne. L'état a été reconstruit dans un espace de Hilbert de dimension 7 et le poids des contraintes associées à chacun des points de mesure est identique. Les fidélités de l'état pair et de l'état impair par rapport à l'état pur correspondant sont respectivement 66,7 % et



(a)



(b)

FIG. IV.9 – Les valeurs mesurées pour les points expérimentaux de la figure IV.2.1 dans le cas du chat impair sont représentés par les croix noirs. La ligne en pointillés rouges correspond aux valeurs obtenues dans le cas de la reconstruction directe dans un espace de Hilbert de dimension 20 (voir IV.8(a)). La ligne interrompue verte correspond à la reconstruction dans un espace tronqué de dimension 11 (voir IV.8(b)). Enfin la ligne en tirets bleues représente les points obtenus lorsqu'on pondère l'importance des points expérimentaux suivant la valeur mesurée (voir IV.8(c)).

72,9 %. Ces fidélités montent à 89,0 % et 78,7 % lorsqu'on considère un état idéal préparé avec un interféromètre de contraste fini $c = 0{,}7$. On obtient même les fidélités de 90,8 % et 85,4% en introduisant un champ cohérent à hauteur de 3 % dans l'état idéal pour le chat pair et de 7 % pour le chat impair. Ainsi, pour cet état de plus petite taille, l'essentiel des imperfections est dû à la préparation imparfaite du champ. La reconstruction quant à elle reproduit assez fidèlement l'état préparé.

Nous allons tout de même voir dans la suite que tout espoir n'est pas perdu pour reconstruire efficacement des états de « grande taille » nécessitant un espace de Hilbert plus grand.

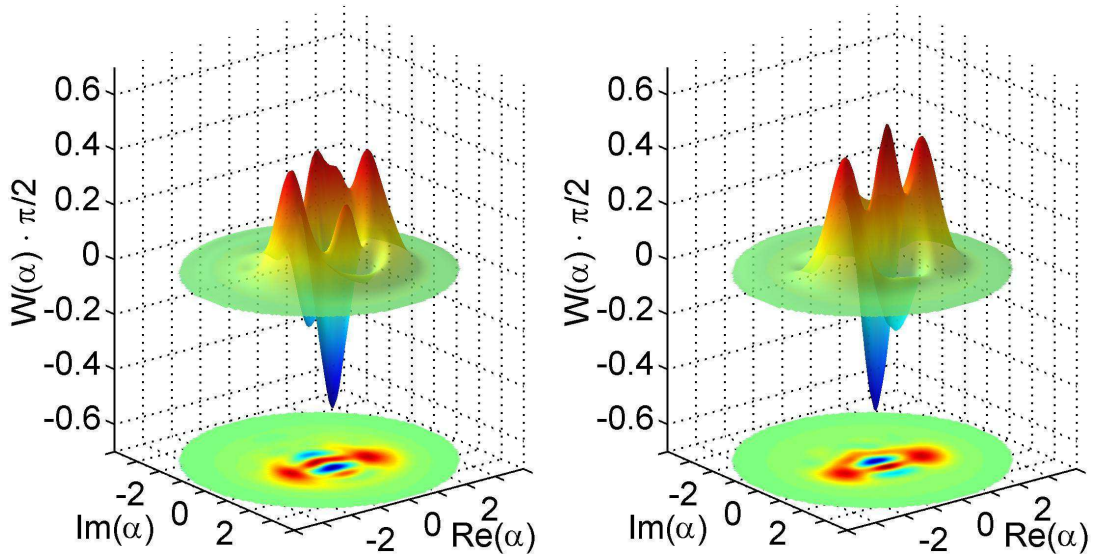


FIG. IV.10 – Les fonctions de Wigner d'états chat de Schrödinger pairs et impairs reconstruits par la méthode d'entropie maximum. Ces états ont été préparés par interaction d'un atome avec un champ cohérent de 2,1 photons en moyenne. Le désaccord est de 65 kHz. La reconstruction a lieu dans un espace de Hilbert de dimension 7.

IV.2.3 Reconstruction des états de Fock

Afin de compléter notre galerie d'états non-classiques du champ, nous avons également reconstruit les états de Fock produits par la méthode de mesure non-destructive du nombre de photons. Nous allons voir dans une première partie le protocole exact utilisé pour produire les états de Fock $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$. Nous présenterons les fonctions de Wigner obtenues après reconstruction de l'état par la méthode d'entropie maximum.

IV.2.3.a Préparation

La préparation des états de Fock a lieu en plusieurs étapes :

1. La cavité est réinitialisée dans l'état vide à l'aide d'une série d'atomes résonnants.
2. Un champ cohérent de $\bar{n}$ photons en moyenne est injecté dans la cavité.
3. Le champ est mesuré par 250 paquets atomiques séparés de 81 µs. Le flux atomique est réglé à environ 0,2 atomes par paquet, ainsi on détecte environ 50 atomes dans chaque réalisation. La moitié des atomes est détecté suivant la phase $\phi = 0$, et l'autre moitié suivant $\phi = \pi/2$.

Le désaccord choisi est de $\delta = 2\pi \cdot 120\,\text{kHz}$. Il correspond approximativement à un déphasage par photon de $\Phi_0 = \pi/2$. La valeur choisie résulte d'un compromis entre la meilleure préparation des états de Fock et l'efficacité de la reconstruction par entropie maximum. En effet, afin de distinguer parmi le plus grand nombre d'états de Fock possibles, on a intérêt à utiliser un grand désaccord tel que celui utilisé dans les expériences du chapitre précédent. Au contraire, en réduisant la valeur du déphasage par photon on brouille de plus en plus la fonction de Wigner généralisée. Nous avons choisi un désaccord intermédiare permettant de compter le nombre de photons modulo 4 tout en mesurant une fonction de Wigner généralisée proche de la fonction de Wigner.

Optimisation de la préparation des états Dans le chapitre précédent, nous avons décrit la méthode de mesure des états nombre par décimation des populations. Nous n'avons pas du tout tenté d'introduire l'effet de la relaxation dans notre analyse. En effet, le but de ces expériences était dans une certaine mesure d'observer l'effet de la relaxation sur les populations atomiques. Il aurait donc été peu convainquant d'introduire au préalable notre connaissance de la relaxation dans l'analyse. Pour la préparation des états de Fock, au contraire, on peut se permettre d'utiliser toute notre connaissance sur le champ afin d'affiner au maximum la préparation des états désirés. On va donc ajouter dans l'analyse faite au III.4.4, l'effet de la relaxation entre deux atomes successifs. De plus, cette fois, il n'y a pas de raison d'initialiser la décimation avec une distribution de population plate. En effet, nous connaissons l'amplitude du champ cohérent injecté $\bar{n}$ et pouvons donc en déduire les populations de l'état initial.

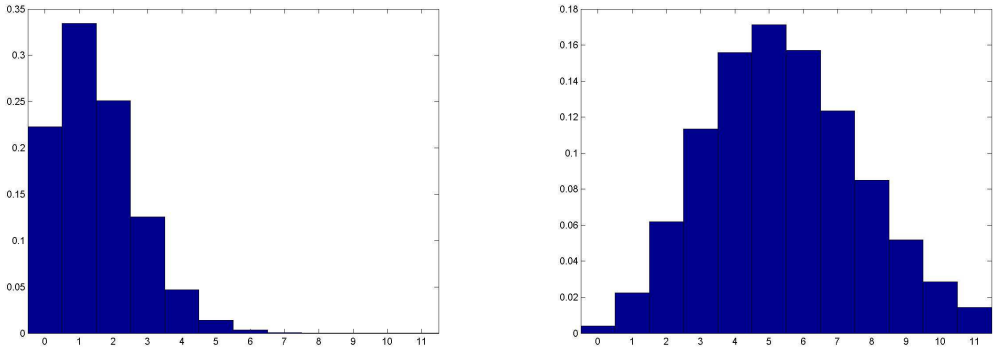
$$P_0(n) = e^{-\bar{n}} \frac{\bar{n}^n}{n!}. \tag{IV.34}$$

L'évolution de notre connaissance sur le champ à l'occasion de la détection de chaque atome est toujours décrite par (III.69). Cependant, entre deux atomes successifs, le champ évolue sous l'effet de la relaxation. En particulier, l'équation pilote (III.85) donne l'évolution des populations. Ainsi, en intégrant numériquement le système d'équations différentielles, on obtient aisément l'évolution des populations pendant la durée Δt séparant deux détections atomiques successives. En partant de la distribution de population $P_0(n)$ et en alternant le calcul de la relaxation entre deux atomes successifs et la transformation (III.69), on peut calculer les populations $\{P_{\text{final}}(n)\}$ à l'issue de l'ensemble de la procédure de préparation.

Même si les atomes mesurent le nombre de photons modulo 4, il n'est pas nécessaire de réaliser l'analyse sur des distributions ne contenant que 4 photons au maximum. En effet, le calcul proposé ici tient compte de toute l'information dont nous disposons sur l'état du champ. En particulier, lorsque le champ cohérent initial présente une probabilité négligeable d'avoir plus de 4 photons, l'information est prise en compte dans la distribution initiale $P_0(n)$.

Sélection des états de Fock La préparation des différents états de Fock est probabiliste. En effet, par nature, le résultat de la mesure du nombre de photons est aléatoire. Cependant, on peut trier à posteriori les réalisations suivant le nombre de photons trouvé. De plus, on va rejeter les réalisations dans lesquels le résultat est ambigu. Le tri est réalisé à l'aide de la distribution finale $P_{\text{final}}(n)$. On utilise deux séquences différentes pour préparer les états $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ et $|3\rangle$ d'une part et $|4\rangle$ d'autre part. Les premiers sont préparés en mesurant le nombre de photons dans un champ contenant 1,5 photons en moyenne. La figure IV.11 montre les populations dans un tel état. La population dans $n = 4$ est négligeable devant la population dans $n = 0$. La situation est donc similaire à celle du chapitre III. La mesure du nombre de photons modulo 4 produit essentiellement les nombres de photons 0, 1, 2 et 3.

Afin d'obtenir l'état $n = 4$, on injecte un champ contenant 5,5 photons en moyenne. La population d'un tel état est donnée sur la figure IV.11. Cette fois, la population dans $|4\rangle$ est majoritaire devant la population dans $|0\rangle$. La distribution initiale $P_0(n)$ favorise donc nettement le premier par rapport au deuxième. Ainsi, on obtiendra de nombreuses trajectoires quantiques pour lesquelles la probabilité finale $P_{\text{final}}(4)$ est majoritaire. Cependant, la qualité de la sélection devient de moins en moins bonne lorsque le nombre de photons augmente car le temps de vie des nombres de photons élevé devient de plus en plus faible. Ainsi, l'effet de la relaxation entre deux mesures se fait de plus en plus sentir. Nous avons ainsi fixé des seuils différents sur les probabilités des différents états de Fock. Les réalisations pour lesquelles $P_{\text{final}}(n) > 0{,}9$ sont sélectionnées pour l'état $|n\rangle$ pour $n = 0, 1, 2$ et 3. Les réalisations pour lesquelles $P_{\text{final}}(4) > 0{,}8$ sont sélectionnées pour $|4\rangle$.



(a) (b)

FIG. IV.11 – Population des différents états de Fock dans un champ cohérent contenant (a) 1,5 photons en moyenne, (b) 5,5 photons en moyenne.

IV.2.3.b Reconstruction

Compte tenu de la valeur du désaccord ($\delta = 120\,\text{kHz}$), le déphasage par photon est proche de $\pi/2$. Dans cette situation, les parties imaginaires et réelles de la fonction de Wigner généralisée contiennent autant d'information l'une que l'autre. La figure IV.12 montre les différents points de

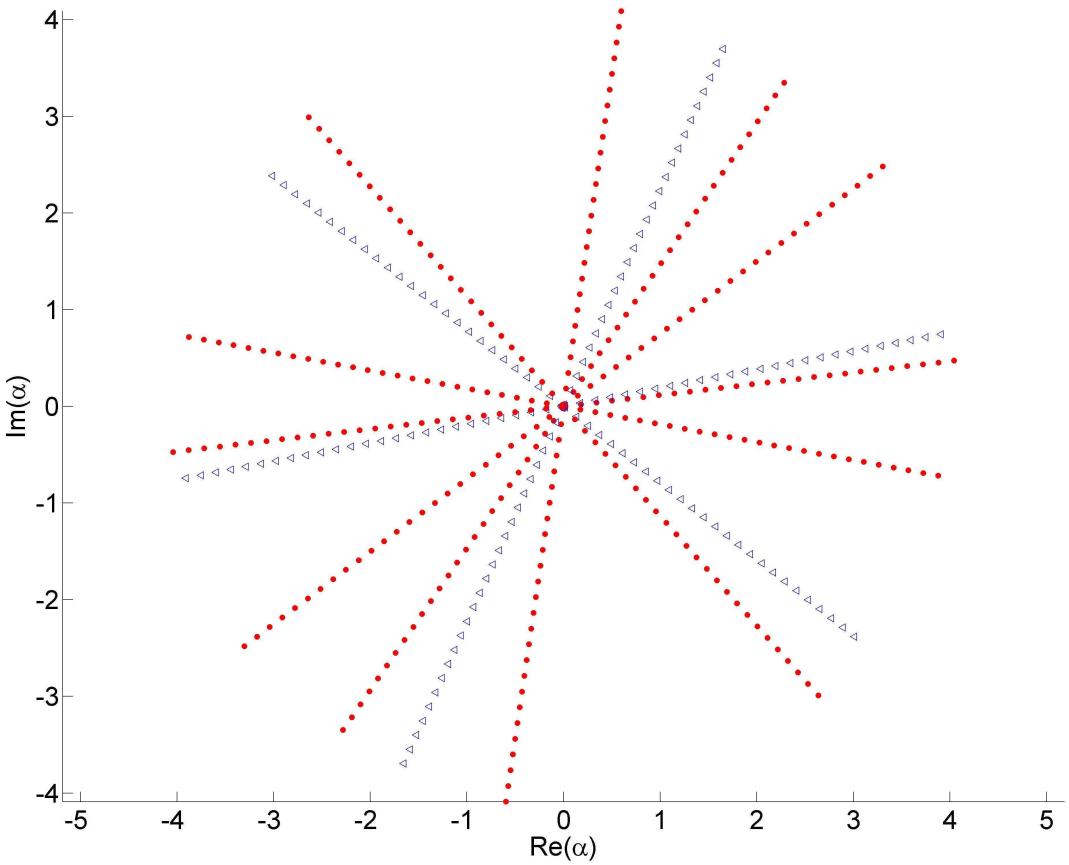


FIG. IV.12 – Représentation dans le plan complexe des points de mesure utilisés pour reconstruire les états de Fock. Les points bleus correspondent aux points de mesure de la partie réelle de la fonction de Wigner généralisée. Les triangles rouges sont les points où l'on a mesuré sa partie imaginaire.

mesure α_ν dans le plan complexe, nous avons mesuré la partie réelle de la fonction de Wigner généralisée pour les points bleus et la partie imaginaire pour les triangles rouges. La reconstruction a alors lieu comme décrit dans la partie I.1.5.b en utilisant les opérateurs :

$$G(\alpha_\nu) = D(\alpha_i)\Pi'(\Phi(0))D(-\alpha_i) \tag{IV.35}$$

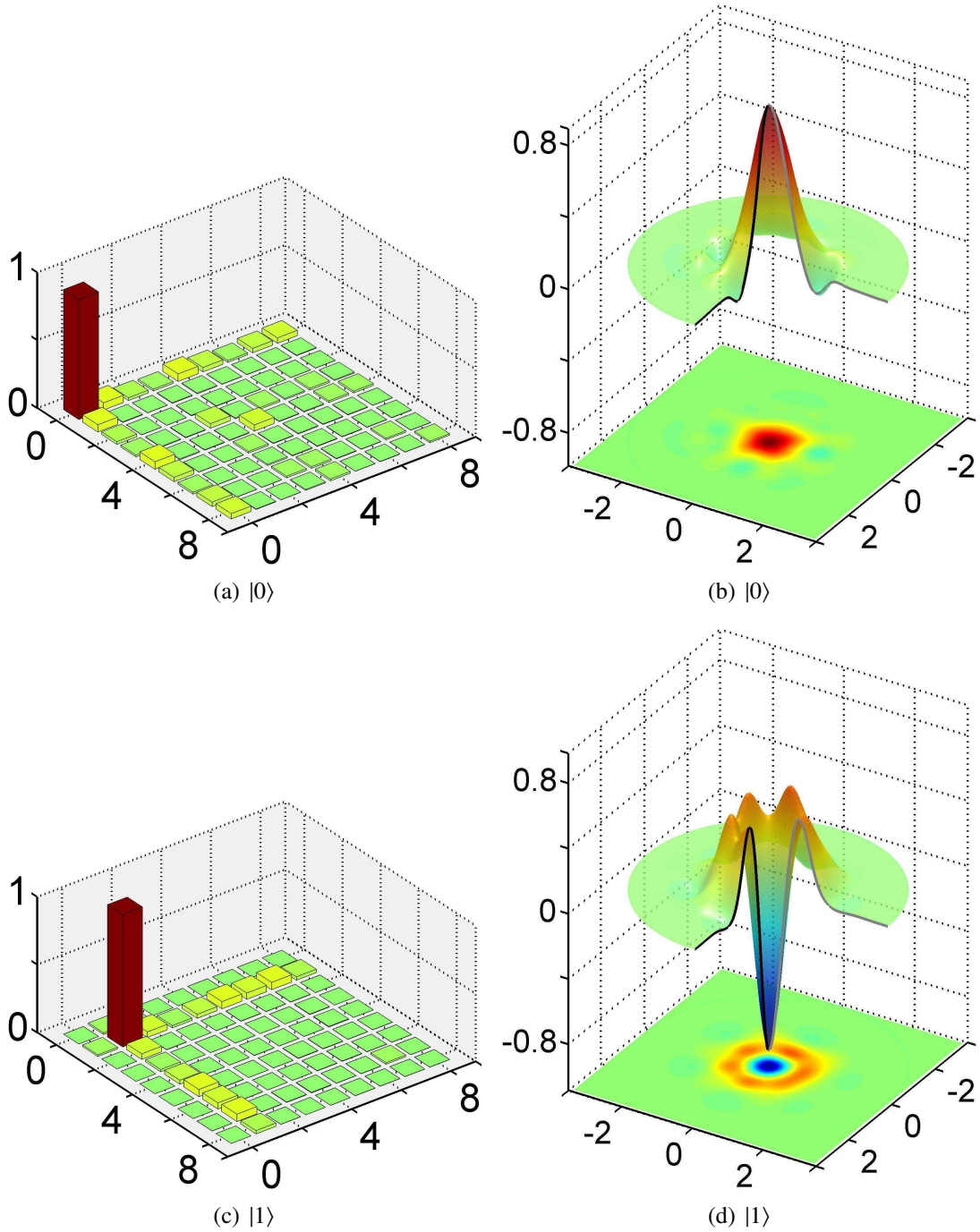
pour les premières mesures, et

$$G'(\alpha_\nu) = D(\alpha_i)\Pi'(\Phi(0) + \pi/2)D(-\alpha_i) \tag{IV.36}$$

pour les secondes. Les matrices densités reconstruites pour les états $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ et $|4\rangle$ ainsi que les fonctions de Wigner correspondantes sont données sur les figure IV.13 à IV.15.

Afin de comparer ces états aux états de Fock idéaux, on calcule la fidélité :

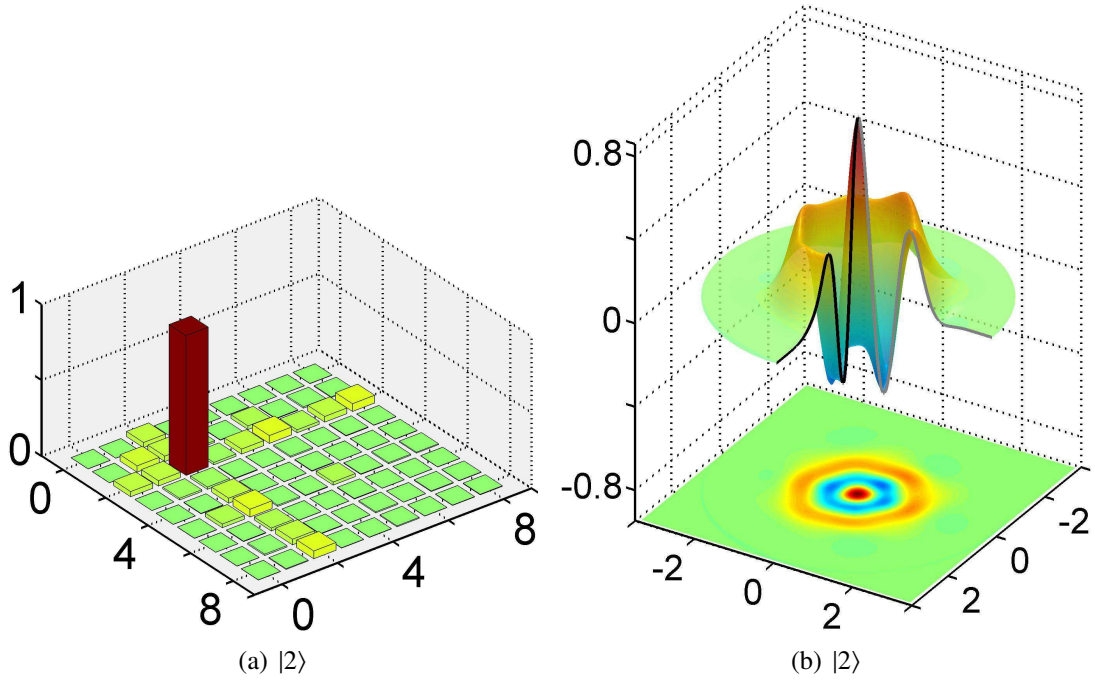
$$f = \langle n|\rho|n\rangle. \tag{IV.37}$$



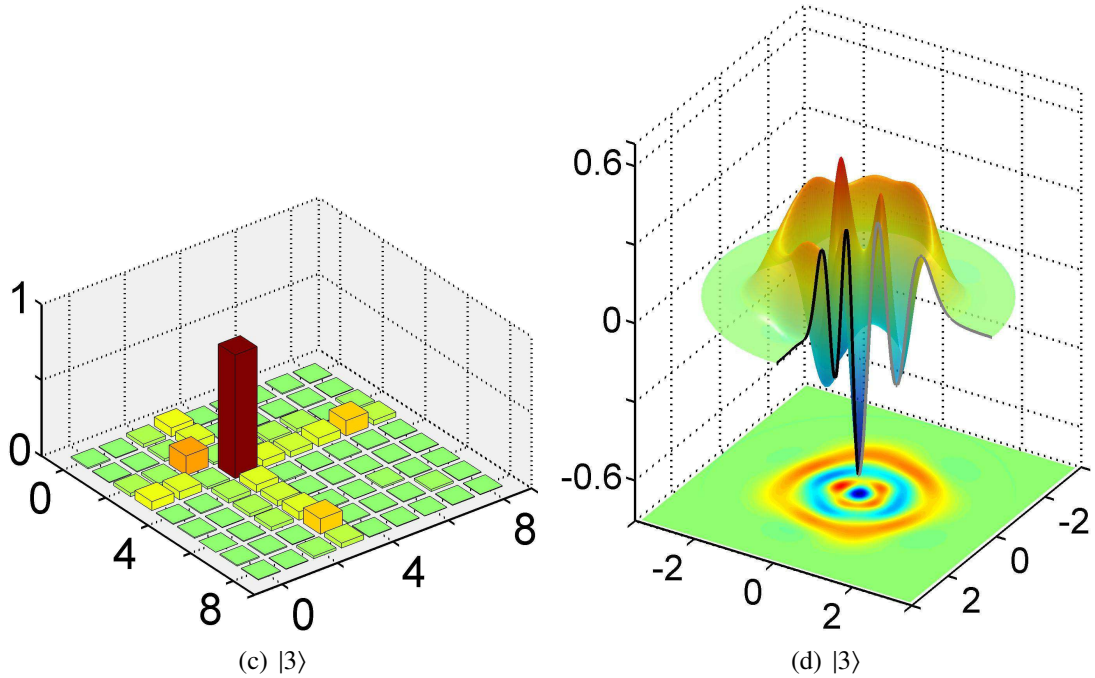
(a) $|0\rangle$ (b) $|0\rangle$

(c) $|1\rangle$ (d) $|1\rangle$

FIG. IV.13 – Modules des éléments des matrices densités reconstruites ((a) et (c)) et fonctions de Wigner correspondantes ((b) et (d)) pour les états de Fock $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

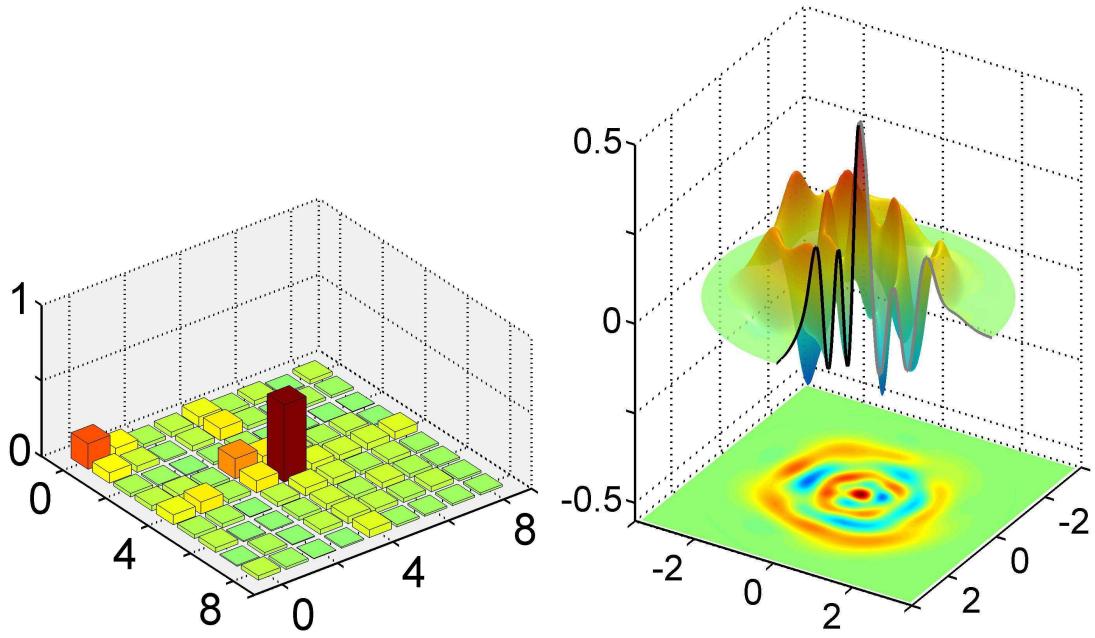


(a) $|2\rangle$ (b) $|2\rangle$



(c) $|3\rangle$ (d) $|3\rangle$

FIG. IV.14 – Modules des éléments des matrices densités reconstruites ((a) et (c)) et fonctions de Wigner correspondantes ((b) et (d)) pour les états de Fock $|2\rangle$ et $|3\rangle$.



(a) $|4\rangle$ (b) $|4\rangle$

FIG. IV.15 – Modules des éléments de la matrice densité reconstruite (a) et fonction de Wigner correspondante (b) pour l'état de Fock $|4\rangle$.

La fidélité n'est autre que la population dans l'état de Fock cible. On obtient $f = 0{,}89, 0{,}98, 0{,}92, 0{,}82$ et $0{,}51$ pour les 5 états de Fock reconstruits. Le défaut essentiel que l'on peut remarquer sur les matrices densités des états de n élevés consiste en un pic parasite sur le coefficient diagonal $n-1$. Ce pic est dû à la relaxation de l'état entre la préparation et la reconstruction. En effet, la mesure de la fonction de Wigner généralisée a lieu grâce à une série de 100 paquets atomiques séparés de 81 µs commençant près d'une milliseconde après la préparation des états de Fock[4]. Ainsi, le milieu de la fenêtre de détection correspond à un délai de $\Delta t = 5\,\text{ms}$ après la fin de la préparation des états de Fock. On peut alors calculer cet effet au premier ordre en $\Delta t/t_{\text{cav}}$. D'après la formule (III.85), si on suppose que les niveaux autres que n_0 sont initialement vides, le taux de croissance initiale de $|n_0 - 1\rangle$ est donné par :

$$\frac{\mathrm{d}P(n_0 - 1, t = 0)}{\mathrm{d}t} = \kappa(1 + n_b) n_0 P(n_0, 0). \tag{IV.38}$$

où $n_b = 0{,}05$ est le nombre de photons thermiques à 0,8 K, et $\kappa = 1/T$. On trouve ainsi au bout

[4]Ce délai est le temps nécessaire pour appliquer l'impulsion micro-onde de déplacement. En effet, on doit attendre que les atomes soient détectés avant d'appliquer cette impulsion, sous peine de détruire leur état interne.

de Δt le rapport des populations :

$$\begin{aligned} P(0,\Delta t)/P(1,\Delta t) &= \frac{\Delta t}{t_{\text{cav}}}(1+n_b)\cdot 1 = 4\,\% \\ P(1,\Delta t)/P(2,\Delta t) &= 8{,}1\,\% \\ P(2,\Delta t)/P(3,\Delta t) &= 12{,}1\,\% \\ P(3,\Delta t)/P(4,\Delta t) &= 16{,}2\,\%. \end{aligned} \tag{IV.39}$$

On peut comparer ces prédictions aux résultats expérimentaux :

$$\begin{aligned} P(0,\Delta t)/P(1,\Delta t) &< 1\,\% \\ P(1,\Delta t)/P(2,\Delta t) &= 4{,}5\,\% \\ P(2,\Delta t)/P(3,\Delta t) &= 16\,\% \\ P(3,\Delta t)/P(4,\Delta t) &= 26\,\%. \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Les chiffres obtenus sont donc en assez bon accord avec la prédiction théorique.

On peut également noter sur la matrice densité de l'état $|4\rangle$ une contamination par l'état $|0\rangle$. Ceci a pour origine la périodicité modulo 4 de la mesure QND. Finalement, on note la présence d'éléments non-diagonaux non-nuls de la matrice densité et de façon équivalente, une dépendance angulaire de la fonction de Wigner. Ces imperfections sont dues au bruit statistique de la reconstruction. En particulier, il ne faut pas y voir une manifestation des cohérences entre l'état $|0\rangle$ et $|4\rangle$, puisque, comme nous l'avons vu au III.4.4, lorsque la mesure sélectionne de façon ambiguë différents états de Fock, l'état produit est un mélange statistique plutôt qu'une superposition cohérente des deux états de Fock.

IV.3 Méthode du maximum de vraisemblance

Dans cette section, nous allons appliquer la méthode de reconstruction par maximisation de la vraisemblance au contexte de notre expérience. Dans une première partie, nous mettrons en oeuvre la méthode sur les données réelles obtenues lors de la dernière série d'expérience. Plus précisément, nous réutiliserons les données correspondant à l'état « chat de Schrödinger » de la figure (IV.8). Nous tenterons ensuite de définir le jeu de paramètres expérimentaux le mieux adapté à cette méthode de reconstruction.

IV.3.1 Reconstruction sur les données réelles

Pour bien comprendre où se situe la différence essentielle entre la méthode d'entropie maximum et de maximum de vraisemblance, nous allons revenir sur le procédé expérimental utilisé.

1. Le champ est réinitialisé et préparé dans l'état ρ à déterminer.
2. Le champ subit un déplacement $D(\alpha_v)$.

3. Une série d'atomes interagit avec le champ déplacé $\rho(\alpha_\nu)$ avant d'être détectée. Les atomes sont tous détectés avec une même phase ϕ de l'interféromètre. Notons i_k le résultat de la k^{e} détection atomique ($i_k = |e\rangle$ ou $|g\rangle$).
4. Les étapes précédentes sont recommencées avec le même déplacement α_ν pour accumuler suffisamment de statistique avant de passer au point suivant.

Dans la méthode d'entropie maximum, les détections atomiques provenant de toutes les réalisations de l'expérience effectuées avec un même déplacement α_ν sont moyennées entre elles pour obtenir la probabilité de détecter un atome dans $|g\rangle$. Le point de départ de la méthode de maximisation de la vraisemblance consiste au contraire à attribuer un opérateur du POVM à *chaque mesure effectuée sur une nouvelle réalisation du système*. Dans notre cas, il faut noter que chaque réalisation du champ est mesurée par plusieurs atomes. Ainsi, une mesure du champ par la série de N_{at} atomes ayant donné les résultats $\{i_k\}_{k\in[1,N_{\text{at}}]}$ est décrite par l'opérateur :

$$E_{N\text{at.}} = \prod_k E_{1\text{at.}}(i_k, \phi). \tag{IV.41}$$

Cependant, la mesure a eu lieu sur le champ déplacé et non sur le champ initial. La probabilité P d'obtenir la série $\{i(k)\}_{k\in[1,N_{\text{at}}]}$ est donc donnée par :

$$\begin{aligned} P &= \text{Tr}(\rho(\alpha_\nu)E_{N\text{at.}}) \\ &= \text{Tr}(D(\alpha_\nu)\rho D(-\alpha_\nu)E_{N\text{at.}}) \\ &= \text{Tr}(\rho D(-\alpha_\nu)E_{N\text{at.}}D(\alpha_\nu)). \end{aligned} \tag{IV.42}$$

(IV.43)

On identifie donc immédiatement l'opérateur du POVM correspondant au résultat $(\{i_k\}, \alpha_\nu)$:

$$E(\{i_k\}, \alpha_\nu) = D(-\alpha_\nu)E_{N\text{at.}}D(\alpha_\nu). \tag{IV.44}$$

En fin de compte, il n'existe qu'un nombre fini d'opérateurs possibles. L'ordre dans lequel sont détectés les atomes n'ayant pas d'importance, la simple donnée du nombre d'atomes détectés dans $|e\rangle$ suffit à définir la partie atomique du POVM. Il existe donc au total $N_{\text{at}} \cdot N_{\text{points}}$ opérateurs différents. On ne considérera que les $N_{\text{at}} = 5$ premiers atomes afin d'obtenir un temps de mesure comparable à celui utilisé dans la méthode d'entropie maximum[5] :

$$E_{N\text{at.}}(n_e) = E_{1\text{at.}}^{n_e}(|e\rangle, \phi)E_{1\text{at.}}^{N_{\text{at}}-n_e}(|g\rangle, \phi), \tag{IV.45}$$

où n_e est le nombre d'atomes détectés dans $|e\rangle$ parmi les N_{at} premiers atomes détectés. Ainsi, l'opérateur total s'écrit :

$$E_{N\text{at.}}(n_e, \alpha_\nu) = D(-\alpha_\nu)E_{N\text{at.}}(n_e)D(\alpha_\nu). \tag{IV.46}$$

Par exemple, dans le cas du chat de Schrödinger que nous allons reconstruire, le nombre de points de déplacements différents est de 600 et le nombre d'opérateurs différents est de 3000 (5

[5] A cause des collisions assistées par la cavité, le flux atomique doit être réduit drastiquement lorsque les atomes sont proches de résonance (voir III.3.3). C'est pourquoi, dans ce régime de faible désaccord on doit se contenter d'un nombre d'atomes aussi faible pour garder un temps de mesure raisonnable.

résultats atomiques différents possibles). A présent, il s'agit de lister les fréquences d'apparition de chacun de ces résultats. On notera N_{ν,n_e} le nombre d'*occurrences* du résultat (α_ν, n_e). Nous avons vu au chapitre III que l'estimation réalisant le maximum de vraisemblance s'obtient en itérant la transformation suivante :

$$\rho_{n+1} = \frac{R(\rho_n)\rho_n R(\rho_n)}{\mathrm{Tr}(R(\rho_n)\rho_n R(\rho_n))}, \tag{IV.47}$$

avec

$$R(\rho) = \sum_{\nu,n_e} \frac{N_{\nu,n_e} E_{N\mathrm{at.}}(n_e, \alpha_\nu)}{\mathrm{Tr}\left[\rho E_{N\mathrm{at.}}(n_e, \alpha_\nu)\right]}. \tag{IV.48}$$

La figure IV.16 montre les matrices $\rho_5, \rho_{20}, \rho_{100}$, obtenues en partant de $\rho_0 = \mathbb{1}/N$ dans un espace de Hilbert de dimension $N = 30$. La figure IV.17(a) montre la fonction de Wigner calculée à partir de la matrice densité ρ_{100}.

D'une façon similaire à ce qui a été fait dans la méthode d'entropie maximum, afin de régulariser la fonction de Wigner obtenue, on peut tronquer la dimension de l'espace de Hilbert. On utilise la même astuce qui consiste d'abord à déplacer l'état au centre de l'espace des phases en lui appliquant la transformation formelle :

$$\rho \to D(-\alpha_{\mathrm{centre}})\rho D(\alpha_{\mathrm{centre}}). \tag{IV.49}$$

La matrice densité est ensuite tronquée en une matrice 9×9, puis renormalisée. La trace de la matrice obtenue à l'issue de la troncature est de 0,95, ce qui montre que l'essentiel de la population se situe dans les nombres de photons inférieurs à 9. Finalement, la fonction de Wigner de l'état obtenu est représentée sur la figure IV.17. La fidélité de l'état par rapport à l'état pur $|\Psi'_{\mathrm{pair}}\rangle$ est de 0,34. La fidélité incluant le contraste de l'interféromètre est de 0,49. Ces chiffres sont toujours assez faibles et sont liés à des imperfections que l'on peut observer sur la fonction de Wigner. On remarque que les deux composantes classiques sont déséquilibrées l'une par rapport à l'autre. On peut également tenter de reconstruire avec la même méthode le chat de Schrödinger impair. La fonction de Wigner obtenue est représentée sur la figure IV.17. Les fidélités par rapport au chat pur et au chat tenant compte du contraste sont comparables aux valeurs précédentes (0,34 et 0,51 respectivement). Cette fois, les composantes classiques ont un poids égal, par contre, les franges d'interférences semblent légèrement distordues. Nous discuterons un peu plus loin de l'origine possible de ces effets.

IV.3.2 Mesure du nombre de photons déplacé

A présent, nous allons adopter une nouvelle approche, qui nous permettra de comprendre que la méthode précédente n'extrait pas autant d'information que possible sur le système. Cette technique a été utilisée par le passé pour reconstruire les états quantiques l'état quantique du mode de vibration d'un ion piégé [7] et celui d'un résonateur linéaire à l'aide d'un quBit supraconducteur [25]. Les données issues de notre expérience ne sont pas adaptées à cette méthode, mais son étude nous aidera à mieux comprendre comment choisir le type de mesures permettant la reconstruction la plus efficace.

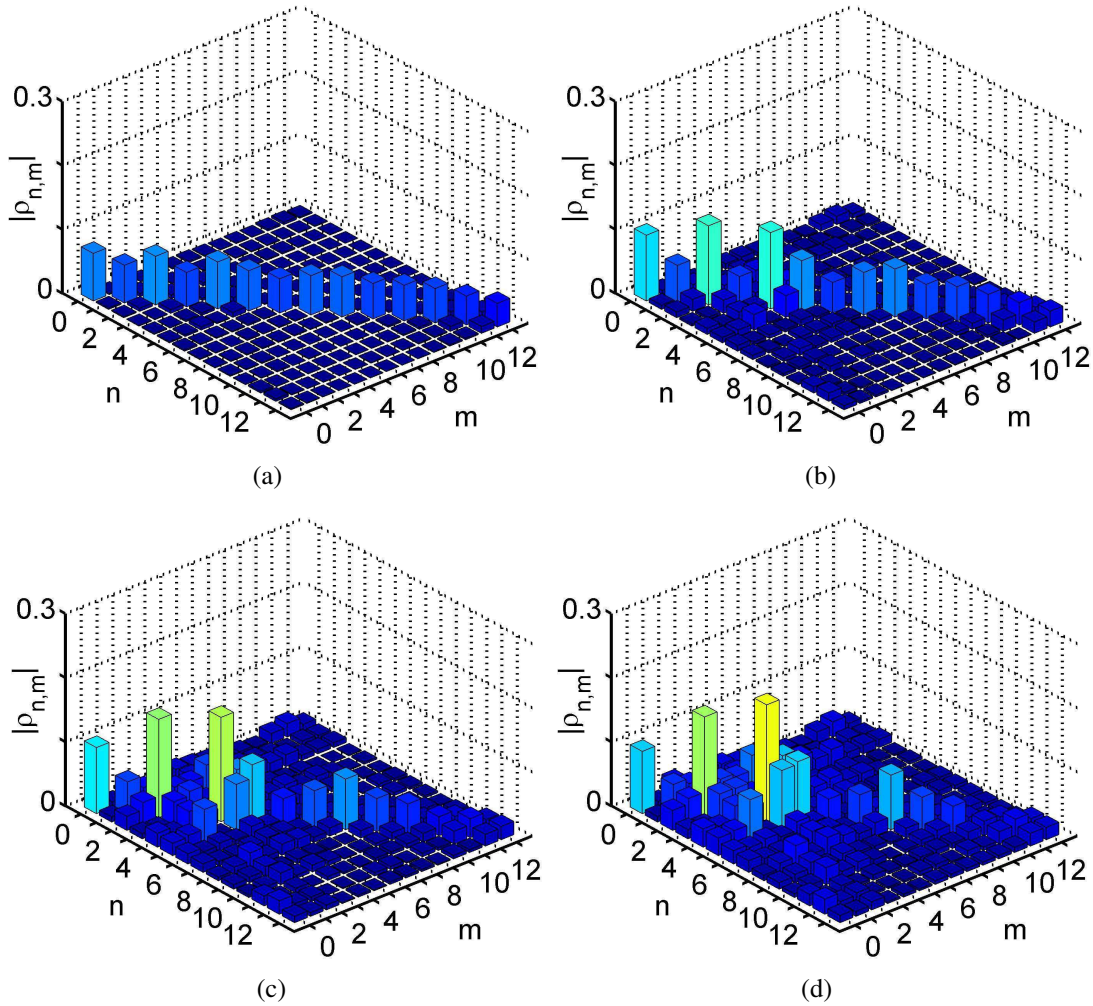


FIG. IV.16 – Modules des 15 premiers éléments de la matrice densité (a) ρ_5, (b) ρ_{20}, (c) ρ_{50} et (d) ρ_{100}. La matrice densité converge vers le point fixe de la transformation.

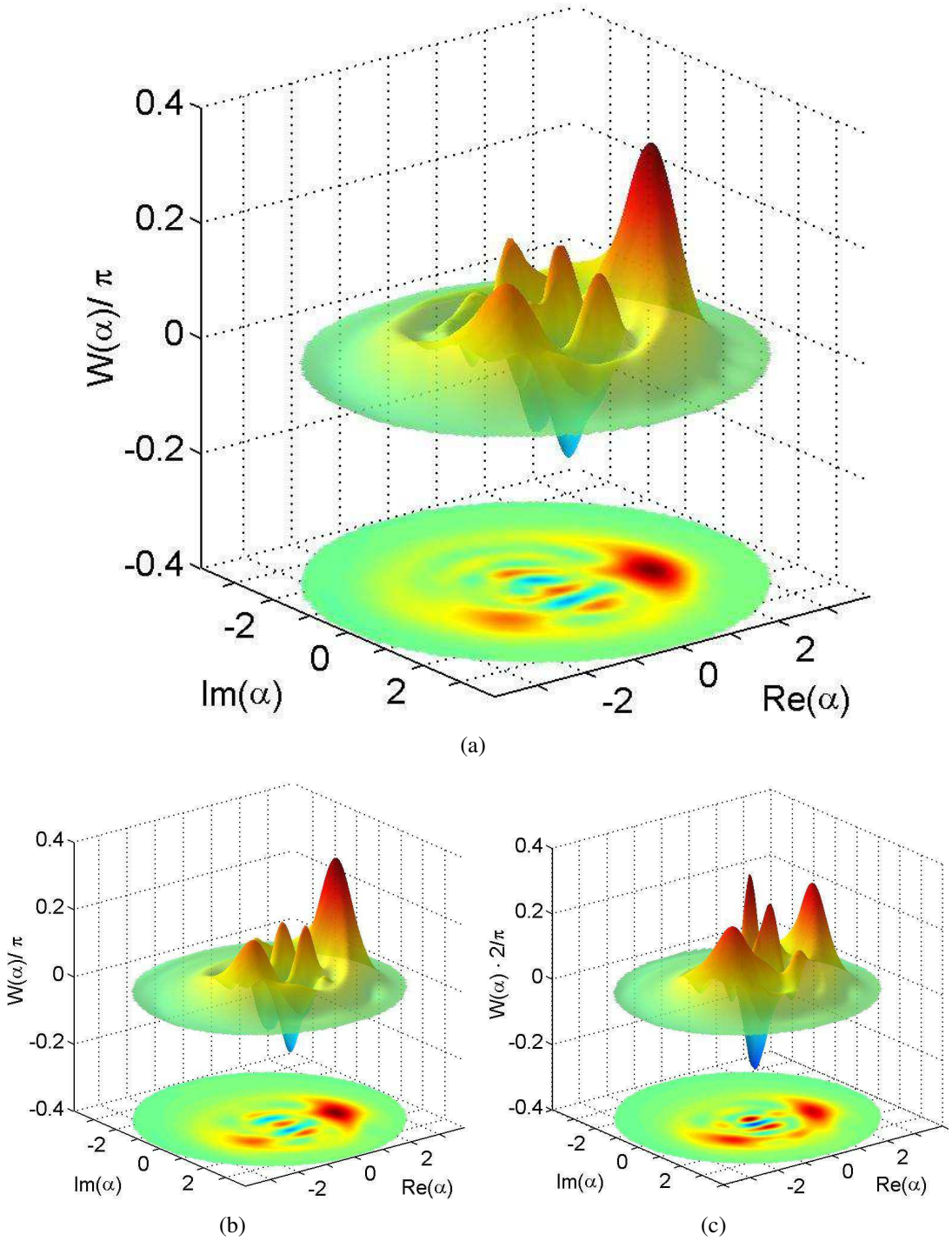


FIG. IV.17 – (a) Fonction de Wigner du chat pair calculée à partir de la matrice densité ρ_{100}. (b) La fonction de Wigner a été obtenue en déplaçant l'état ρ_{100} de l'amplitude $-\alpha_{\text{centre}}$, en tronquant la matrice obtenue à la dimension 9, en la renormalisant et en la redéplaçant de l'amplitude α_{centre}. (c) Fonction de wigner du chat impair, obtenue de la même manière.

Dans les deux cas, les auteurs disposent de techniques permettant de mesurer les populations d'un état quantique. Afin de reconstruire complètement la matrice densité, la méthode utilisée est similaire à la notre : l'état est déplacé par homodynage en différents points de l'espace des phases avant de réaliser une mesure portant sur les populations de l'état déplacé. La figure IV.18 illustre cette idée en montrant les différentes distributions de population obtenues pour un état chat de Schrödinger déplacé en différents points α_ν de l'espace des phases.

Après avoir accumulé un certain nombre de mesures, l'expérimentateur possède un ensemble de distributions de populations $\{P_\nu(n)\}$ correspondant à chacun des déplacements α_ν dans l'espace des phases. L'état du champ doit alors vérifier « au mieux » le jeu d'équations :

$$P_\nu(n) \approx \mathrm{Tr}\left[D(\alpha_\nu)\rho D(-\alpha_\nu)|n\rangle\langle n|\right]. \tag{IV.50}$$

Ce jeu d'équations forme un système linéaire sur-contraint portant sur les éléments de la matrice densité. On peut se contenter d'inverser ce système pour estimer la matrice densité qui satisfait au mieux les contraintes (IV.50) au sens des moindres carrés. Cette technique a déjà été utilisée telle quelle dans les groupes de J. Martinis [25] et D. Wineland [7].

Cette méthode est assez instructive. En effet, nous avons vu au chapitre précédent que la mesure QND du nombre de photons appliquée sur un grand nombre de réalisations permettait d'accéder à la distribution de population. On notera par exemple la similarité entre la figure III.12 du chapitre précédent et la figure IV.18 (b) de l'exemple ci-dessus. On peut alors imaginer reconstruire des histogrammes de ce type après avoir déplacé le champ pour appliquer une telle méthode d'inversion linéaire. La quantité d'information apportée par chaque *réalisation du champ* grâce à ce procédé est alors facile à comparer à celle obtenue par la mesure d'une fonction de wigner généralisée sur une seule réalisation du champ. On considérera en particulier les deux cas limites suivants :

- Si le déphasage par photon est rigoureusement donné par $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$, l'observable que nous mesurions précédemment est la parité du champ déplacé (ou encore fonction de Wigner au point α_ν). Chaque réalisation du champ donne alors une information binaire. En effet, bien que le champ soit mesuré par plusieurs atomes, ils doivent tous donner le même résultat puisqu'ils réalisent une mesure projective du champ. En réalité, l'utilité de détecter plusieurs atomes se limite à l'élimination des erreurs de l'interféromètre.
- Au contraire, avec la méthode proposée dans ce paragraphe, à la limite où le nombre d'atomes utilisés dans une fenêtre de mesure est suffisamment grand, on réalise une mesure projective du nombre de photons. Supposons qu'on arrive à résoudre les nombres de photons de 0 à 7 comme dans le chapitre précédent. Chaque réalisation du champ apporte alors 3 bits d'information, soit 3 fois plus que la méthode précédente.

En effet, on comprend aisément que la parité moyenne du champ soit une grandeur moins intéressante que l'histogramme complet des populations. En réalité, compte tenu du nombre d'atomes détectés pendant le temps de mesure, la mesure n'est pas tout à fait projective. Cependant, nous avons vu au III.4.4.d une méthode de décimation itérative permettant de reconstruire les populations du champ même dans le cas où la projection est incomplète. On peut donc s'attendre à obtenir, pour un *nombre de répétitions de l'expérience identique*, une meilleure reconstruction en utilisant la technique décrite ici.

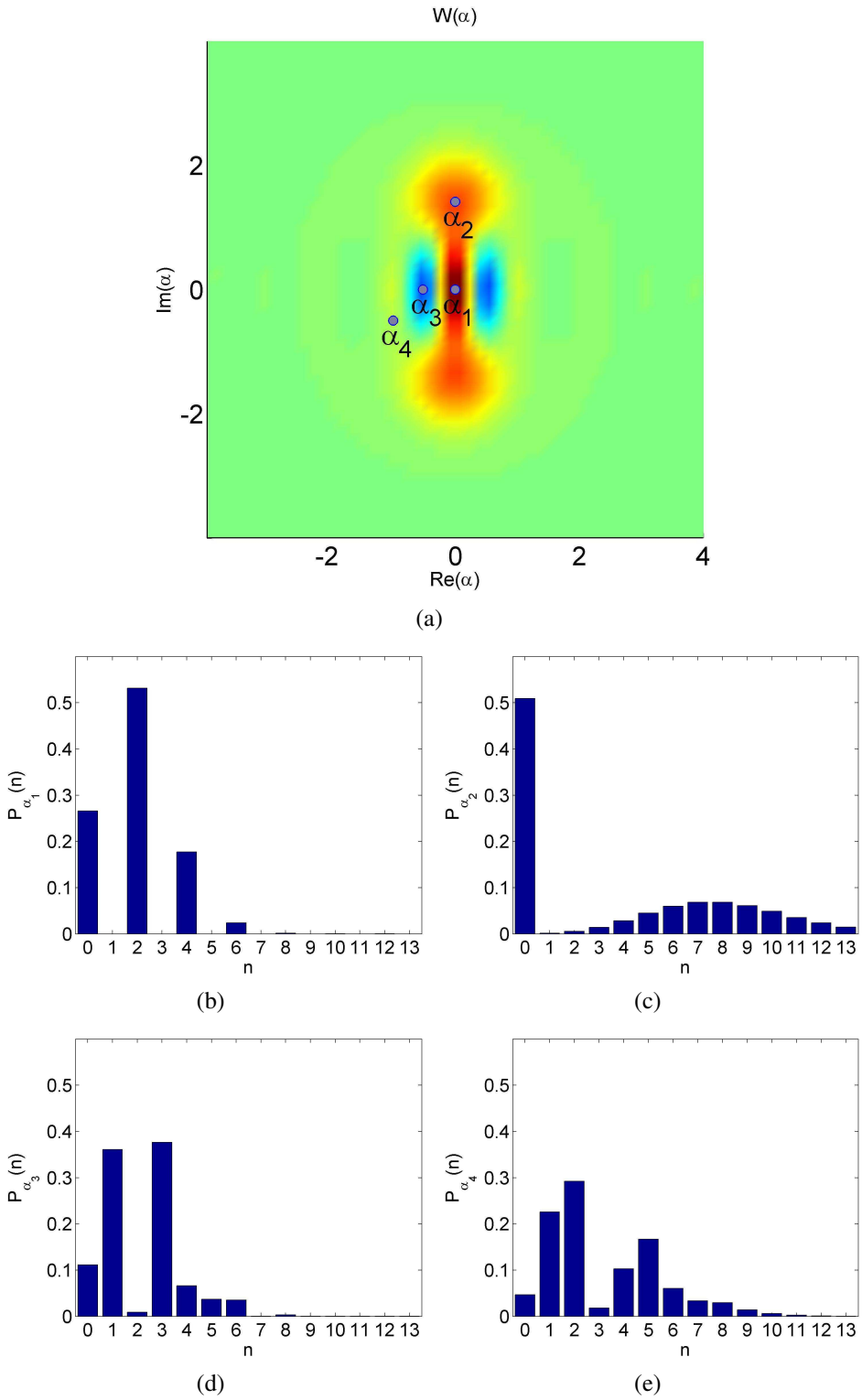


FIG. IV.18 – (a) La fonction de Wigner d'un chat de Schrödinger pair idéal $|\Psi_{\text{pair}}\rangle = (|\beta\rangle + |-\beta\rangle)/\mathcal{N}_+$ avec $\beta = i\sqrt{2}$. Les histogrammes (b) à (e) représentent les populations dans les états déplacés de l'amplitude complexe α_ν. L'histogramme (b) représente la distribution de population dans l'état non-déplacé ($\alpha_1 = 0$). Seuls les nombres pairs de photons sont peuplés, ce qui implique que $W^{|\Psi_{\text{pair}}\rangle}(0) = 2/\pi$. La figure (c) représente la population de l'état déplacé de l'amplitude complexe $\alpha_2 = \beta$. L'état après déplacement s'écrit donc $|\Psi\rangle = (|0\rangle + |-2\beta\rangle)\mathcal{N}_+$. La distribution de population est bien essentiellement la moyenne entre celle de l'état vide et celle d'un champ cohérent centré autour de $2\sqrt{2}$ (donc autour de $\bar{n} = 8$). Les deux dernières valeurs de α_ν sont quelconques

En réalité, cette méthode d'inversion linéaire n'est pas pleinement satisfaisante. A cause du bruit statistique, la matrice densité obtenue en inversant le système peut être non-physique. En outre, puisqu'on commence par reconstruire les populations à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance, il semble bien naturel de mener cette méthode jusqu'au bout. On va donc adapter la méthode du maximum de vraisemblance au cas d'une mesure atomique similaire à celle décrite au chapitre précédent.

IV.3.3 Choix des paramètres pour la méthode du maximum de vraisemblance

On va donc considérer la séquence expérimentale suivante :

1. Le champ est réinitialisé et préparé dans l'état ρ à déterminer.
2. Le champ subit un déplacement $D(\alpha_\nu)$.
3. Une série d'atomes réalise une mesure QND du nombre de photons.
4. Les étapes précédentes sont recommencées avec le même déplacement α_ν pour accumuler suffisamment de statistique avant de passer au point suivant.

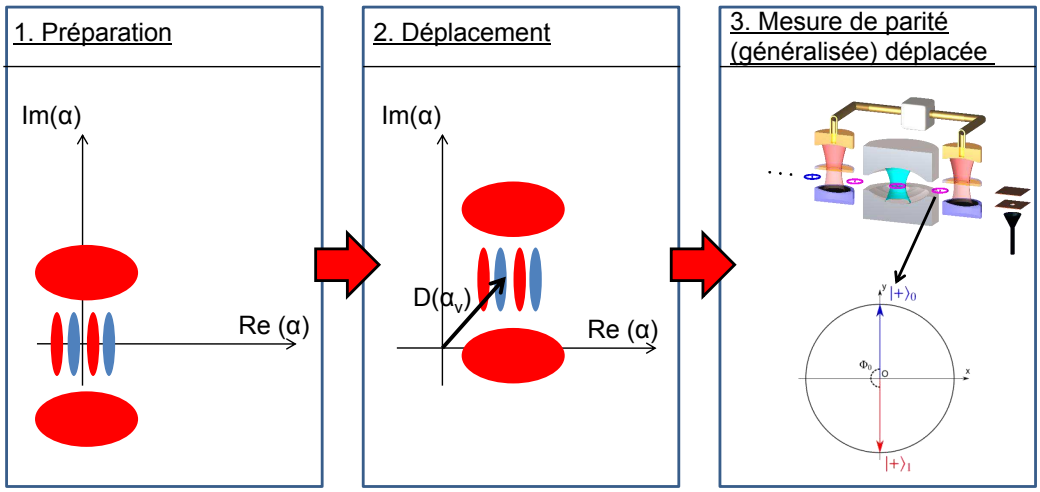
Au fond, la seule différence avec la méthode présentée au paragraphe IV.3.1 est la nature de la mesure atomique à l'étape 3 (voir figure IV.19). Les données que nous avons prises lors de la dernière série d'expériences étaient destinées à être traitées par l'algorithme d'Entropie maximum. Nous avons donc réalisé une mesure atomique aussi proche que possible d'une mesure de parité (voir III.4.2). Nous comprenons à présent qu'il aurait été plus judicieux de réaliser une mesure QND permettant de distinguer un grand nombre d'états de Fock comme au paragraphe III.4.4. Il aurait donc fallu utiliser un grand désaccord correspondant à un déphasage par photon faible et plusieurs phases de mesure permettant de décimer correctement les nombres de photons.

Nous allons tout de même inclure la possibilité d'utiliser plus d'une phase de mesure par réalisation du champ dans le formalisme de la méthode du maximum de vraisemblance présentée un peu plus haut. En effet, pour décimer au mieux les populations dans l'état déplacé, les atomes interagissant successivement avec le champ doivent être détectés suivant des phases différentes. Afin de simplifier au maximum la procédure de reconstruction, on supposera que les atomes sont détectés suivant deux phases de mesure orthogonales ϕ_1 et $\phi_2 = \phi_1 + \pi/2$. De plus, nous n'utiliserons que les $N_{\text{at}}/2$ premiers atomes détectés suivant chaque phase. Puisque l'ordre dans lequel sont détectés les atomes n'a pas d'importance, la partie atomique du POVM est parfaitement définie par la donnée du nombre d'atomes n_{e1} détectés dans $|e\rangle$ suivant la phase ϕ_1 et du nombre d'atomes n_{e2} détectés dans $|e\rangle$ suivant la phase ϕ_2. Il existe donc au total $(N_{\text{at}}/2)^2 \cdot N_{\text{points}}$ opérateurs différents :

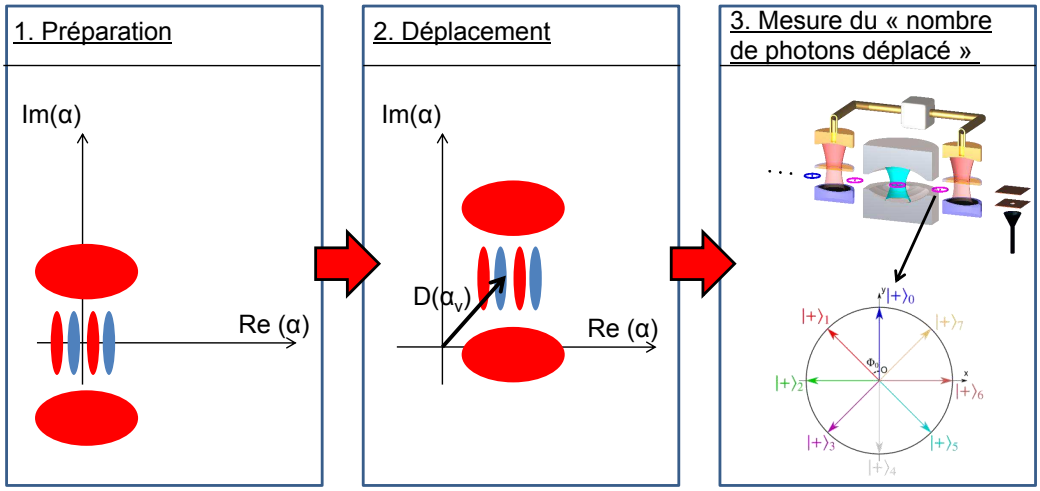
$$E_{N\text{at.}}(n_{e1}, n_{e2}) = E_{1\text{at.}}^{n_{e1}}(|e\rangle, \phi_1) \cdot E_{1\text{at.}}^{N_{\text{at}}/2-n_{e1}}(|g\rangle, \phi_1) \cdot E_{1\text{at.}}^{n_{e2}}(|e\rangle, \phi_2) \cdot E_{1\text{at.}}^{N_{\text{at}}/2-n_{e2}}(|g\rangle, \phi_2), \tag{IV.51}$$

et l'opérateur total s'écrit :

$$E_{N\text{at.}}(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu) = D(-\alpha_\nu) E_{N\text{at.}}(n_{e1}, n_{e2}) D(\alpha_\nu). \tag{IV.52}$$



(a)



(b)

FIG. IV.19 – Schéma de principe de la procédure de reconstruction. La mesure a lieu en 3 étapes successives. La dernière étape consiste à mesurer le champ déplacé par interférométrie atomique. (a) Les données expérimentales dont nous disposons ont été prises avec un réglage voisin de celui de la mesure de parité (voir III.4.2). (b) Il est plus avantageux d'utiliser un réglage permettant de distinguer parmi un grand nombre d'états de Fock (voir III.4.4).

On utilise ensuite toujours la même méthode itérative pour maximiser la vraisemblance. Remarquons à présent que dans le cas où $\alpha_\nu = 0$, le POVM obtenu est le même que celui de la mesure QND à plusieurs atomes (III.74). La méthode proposée ici n'est donc rien d'autre que l'extension de la méthode présentée au paragraphe III.4.4.d au cas où la mesure QND est précédée d'un déplacement. Nous allons d'ailleurs étudier comme précédemment ce que devient le POVM à la limite où le nombre d'atomes utilisés est grand.

Limite des opérateurs du POVM Nous avons vu au chapitre précédent que la mesure atomique se simplifiait en une mesure de von Neumann du nombre de photons dans la limite des grands nombres d'atomes. Afin de mieux comprendre l'observable mesurée dans le cas général d'un déplacement non-nul, on peut réécrire les opérateurs (IV.52) à la limite des grands nombres d'atomes :

$$E_\infty(n, \alpha_\nu) = D(-\alpha_\nu)|n\rangle\langle n|D(\alpha_\nu). \tag{IV.53}$$

Ces opérateurs sont des projecteurs sur les états de Fock déplacés $|n\rangle_{-\alpha_\nu}$:

$$|n\rangle_{-\alpha_\nu} = D(-\alpha_\nu)|n\rangle. \tag{IV.54}$$

En particulier, on voit que pour effectuer une mesure de von Neumann de cette quantité, il faudrait que la mesure soit décrite par un opérateur de Kraus correspondant à ce même projecteur. Il conviendrait donc d'abord de déplacer le champ de $-\alpha_\nu$, mesurer projectivement le nombre de photons et finalement redéplacer le champ de α_ν. Dans notre protocole, cette dernière étape est absente, nous ne réalisons donc pas une mesure non-destructive du « nombre de photons déplacé », nous reviendrons sur ce point au chapitre suivant. Néanmoins, les probabilités de détection ne sont pas affectées par l'absence de la dernière étape, postérieure aux détections atomiques.

Analyse des expériences réalisées Nous venons de voir que les données expérimentales n'ont pas été prises dans les conditions optimales pour la méthode du maximum de vraisemblance. Toutefois, en prenant en compte l'ensemble des corrélations entre atomes, la méthode du maximum de vraisemblance devrait donner de meilleurs résultats que la méthode d'entropie maximum. En effet, le déphasage par photon étant différent de $\Phi(n) = \pi(n + 1/2)$, la partie réelle de la fonction de Wigner généralisée est une observable à plus de deux valeurs propres. On perd donc de l'information en prenant la valeur moyenne de cette observable dans la méthode du maximum de l'entropie. Toutefois, les résultats expérimentaux semblent montrer que cette dernière méthode est plus efficace. Il est vraisemblable que la reconstruction par maximum de vraisemblance soit affectée par une mauvaise calibration des opérateurs du POVM. En effet, nous avions noté sur les fonction de Wigner des états reconstruits par le maximum de vraisemblance (voir figure IV.17) des distorsions globales qui ne s'expliquent vraisemblablement pas par du bruit statistique.

La reconstruction expérimentale a été faite à l'aide des opérateurs $E_{1\text{at.}}(|e\rangle, \phi)$ et $E_{1\text{at.}}(|g\rangle, \phi)$ de l'équation (III.43) dans laquelle on a injecté le déphasage par photon $\Phi(n)$ donné par la formule théorique. Cette dernière est sujette à diverses sources d'imprécision comme la connaissance imparfaite de la fréquence de Rabi, le désaccord imprécis entre cavité et atome, la forme du

mode qui est calculée dans notre cas en utilisant l'approximation paraxiale. De plus, dans la forme du POVM utilisée, le contraste est supposé indépendant du nombre de photons, ce dont on peut douter pour les désaccords faibles (voir III.3.3). Pour que la reconstruction soit correcte, le déphasage par photon $\Phi(n)$ et le contraste des franges dans n photons $c(n)$ (voir III.3.3) doivent être justes jusqu'à des nombres de photons n très élevés. En pratique, pour certaines valeurs du déplacement α_v, l'état déplacé $\rho(\alpha_v)$ possède, des populations non-négligeables jusqu'à des nombres de photons autour de $n = 20$.

Il serait donc préférable d'utiliser une calibration expérimentale du POVM atomique plutôt qu'une formule théorique. Lorsque le désaccord est faible, la seule calibration possible de ces paramètres consiste à comparer des franges de Ramsey réalisées dans le vide, et des franges de Ramsey réalisées dans un photon (voir [85]). Lorsque le désaccord est plus grand, comme par exemple le désaccord $\delta = 2\pi \cdot 272\,\text{kHz}$ choisi au chapitre précédent pour réaliser une mesure QND des nombres de photons pour $n = 0$ à 7, on peut obtenir une calibration expérimentale des paramètres du POVM atomique jusqu'à $n = 7$. Cette fois, la plage de calibration couvre plus d'un tiers des « populations utiles » dans la reconstruction. On pourra ce reporter au travail de thèse de Julien Bernu [43] pour une description détaillée de la méthode permettant de calibrer efficacement les paramètres expérimentaux. On a donc, encore une fois, tout intérêt de travailler avec un désaccord important permettant de distinguer un grand nombre d'états de Fock différents.

IV.4 Comparaison entre les deux méthodes

Comme nous venons de le discuter, les données dont nous disposons ne permettent pas de reconstruire au mieux l'état du champ à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. Nous allons donc utiliser des données simulées pour comparer les deux méthodes.

IV.4.1 Etat à reconstruire

La figure IV.20 montre l'état dont nous allons simuler la reconstruction. Le champ de matrice densité ρ_{sim} est un mélange statistique à trois composantes (orthogonales à la limite des grandes amplitudes) :

1. Un champ cohérent de 4 photons en moyenne à hauteur de 5 %.
2. Le chat de Schrödinger pair crée à partir de ce même champ cohérent grâce à l'interaction d'un atome avec la cavité désaccordée de 51 kHz à hauteur de 80 %.
3. Le chat de Schrödinger impair correspondant à hauteur de 15 %.

Cet état permet de simuler la préparation imparfaite d'un chat de Schrödinger. Le mélange entre les deux chats de parité opposée est le résultat d'une préparation avec un interféromètre de contraste 65 %. Le champ cohérent correspond à la possibilité d'un atome faussement détecté dans l'état circulaire (par exemple un atome dans les niveaux électroniques inférieurs n'ayant pas d'influence sur le champ).

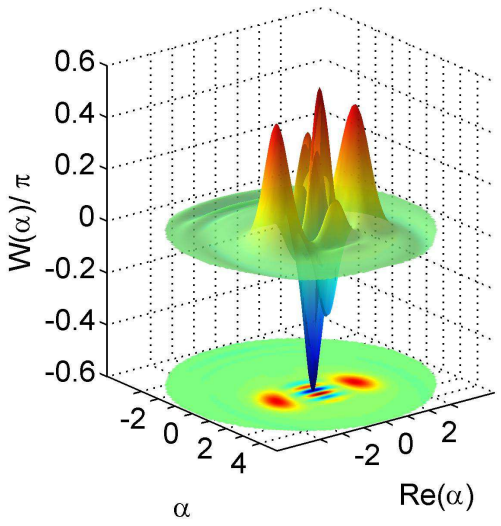


FIG. IV.20 – Fonction de Wigner de l'état à reconstruire.

Protocoles expérimentaux envisagés Afin de se placer dans les conditions optimales pour chacune des deux méthodes, on a considéré deux scénarii expérimentaux réalistes pour reconstruire le champ à priori inconnu ρ_{sim}.

1. Le désaccord choisi est de 51 kHz dans le cas de la reconstruction par entropie maximum et de 272 kHz dans le cas de la reconstruction par maximum de vraisemblance. Dans le premier cas, cette valeur permet de mesurer une fonction de Wigner généralisée aussi proche que possible de la fonction de Wigner. Dans le second cas, on a choisi le désaccord correspondant aux mesures non-destructives des nombres de photons présentées au chapitre précédent. On peut alors espérer mesurer les populations modulo 8 dans l'état déplacé $\rho(\alpha_v)$ grâce à ce réglage.
2. Dans la méthode d'entropie maximum, on n'utilise qu'une direction de mesure σ_y tandis que dans la reconstruction par maximum de vraisemblance, on utilise deux phases de mesure orthogonales permettant de discriminer sans ambiguïté la direction du pseudo-spin atomique modulo 2π.
3. Le nombre d'atomes détectés à la suite d'une même réalisation du champ est un paramètre extrêmement important pour la méthode du maximum de vraisemblance. On utilisera deux phases de mesure orthogonales et on considérera les 15 premiers atomes dans chacune des phases. Ce nombre d'atomes ne permet pas de réaliser une projection complète du champ sur un état de Fock, mais elle résulte du compromis avec le temps de mesure qui doit rester court devant le temps de décohérence de l'état (voir chapitre V). Dans la méthode d'entropie maximum, cette quantité est moins importante puisque les atomes successifs apportent dans une large mesure une information redondante. On considérera que la mesure a lieu suivant une seule phase à l'aide de 7 atomes successifs. Ces chiffres correspondent tous deux à un temps de mesure d'environ 5 ms pour des conditions expérimentales réalistes.

4. Dans les deux cas, on suppose un contraste de l'interféromètre réaliste de 60 %.

IV.4.2 Influence du nombre de points de mesure

Nous allons tenter de séparer les différents écueils pouvant mener à une distorsion du signal reconstruit. Au I.1.5.a nous introduisions la notion de niveau d'observation. On parle de niveau d'observation complet lorsque la connaissance *exacte* des observables mesurées définit parfaitement l'état. Dans un premier temps, nous comparerons, pour un jeu de déplacements $\{\alpha_\nu\}$ donné, la fidélité des états reconstruits sans introduire aucun bruit statistique dans les données. Nous allons comparer trois protocoles :

1. La méthode d'entropie maximum, en utilisant les valeurs moyennes exactes pour les observable $G(\alpha_i)$:
$$g_i = \mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{sim}} G(\alpha_i)), \tag{IV.55}$$
2. La méthode du maximum de vraisemblance. Afin de ne pas introduire de bruit statistique, les *fréquences* d'apparition des différents opérateurs du POVM sont calculées exactement[6] :
$$f_{\alpha_\nu, n_{e1}, n_{e2}} = C^{ne1}_{N_{\mathrm{at}}} \cdot C^{ne2}_{N_{\mathrm{at}}} \cdot \mathrm{Tr}\left[\rho_{\mathrm{sim}} E_{N\mathrm{at.}}(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu)\right]. \tag{IV.56}$$
3. Finalement, à titre d'expérience témoin, on reconstruira l'état à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance dans la limite où la mesure atomique est parfaitement projective pour tous les nombres de photons de l'espace de Hilbert. Les opérateurs $E_{N\mathrm{at.}}(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu)$ sont donc remplacés par
$$E_\infty(n, \alpha_\nu) = D(\alpha_\nu)|n\rangle\langle n|D(-\alpha_\nu), \forall n \in [0, N]. \tag{IV.57}$$

Le dernier protocole extrait en quelque sorte, pour un jeu de valeurs $\{\alpha_\nu\}$ donné, le maximum d'information possible sur le champ en ne s'autorisant que des mesures de populations sur les états déplacés en $\{\alpha_\nu\}$.

N'étant plus tributaires d'une quelconque contrainte technique (nous réalisons ici des simulations), nous choisirons un quadrillage carré de l'espace des phases couvrant la zone[7] $\alpha = -1-2{,}5i$ à $\alpha = 2{,}5 + 2{,}5i$. On va faire varier la densité de points de façon à comparer les performances des trois méthodes. La figure IV.21 présente les différents résultats sous forme de tableau. La figure IV.21 résume les fidélités obtenues en fonction du nombre de points utilisés. Dans un premier temps, on utilise uniquement 4 points de l'espace des phases. Le système est alors largement sous-contraint. Cependant, la méthode « témoin » donne déjà d'assez bons résultats avec une fidélité de près de 82 %. Lorsqu'on augmente le nombre de points, les états reconstruits par les deux dernières méthodes voient leur fidélité augmenter rapidement, tandis qu'il faut attendre les

[6] Les coefficients du binôme sont présents pour prendre en compte l'ordre des détections atomiques.

[7] Il faut prendre garde à ce que les états déplacés en chacun des points α_ν soient toujours contenus dans l'espace de Hilbert. C'est pourquoi nous n'utilisons pas de valeurs de $\mathrm{Re}(\alpha_\nu)$ fortement négatives. De façon empirique, il semble que la méthode d'entropie maximum s'accommode bien de ce genre de dépassements, tandis que la méthode du maximum de vraisemblance y est plus sensible. Toutefois, pour cette dernière, on obtiendrait également un ensemble complet d'observables en considérant le carré de coins $\alpha = -1{,}5 - 1{,}5i$ à $\alpha = 1{,}5 + 1{,}5i$.

grilles d'une centaine de points pour que la méthode d'entropie maximum s'approche de l'état simulé. Pour les très grands nombres de points, les états reconstruits par les trois méthodes approchent d'une fidélité de 1, témoignant du fait que le niveau d'observation complet est atteint[8].

Le nombre de points nécessaires pour atteindre le niveau d'observation complet est donc bien plus grand dans le cas de la méthode d'entropie maximum. Cela n'est pas du à la méthode de reconstruction en elle-même, mais au quorum d'observables considéré. En effet, pour la première méthode, à chaque point est associé une seule contrainte, contre $N = 30$ pour la méthode « témoin ». On comprend donc aisément pourquoi le niveau d'observation complet est atteint beaucoup plus lentement pour la première.

[8]Le fait que la fidélité ne rejoigne pas tout à fait la valeur 1 asymptotiquement vient des imperfections des méthode de reconstruction : les calculs ont lieu dans un espace de Hilbert de dimension fini, la précision de l'ajustement pour la méthode d'entropie maximum ou encore le nombre fini d'itérations de la transformation (IV.47) pour la méthode du maximum de vraisemblance ne peuvent pas être rendus arbitrairement grands pour des raisons de temps de calcul.

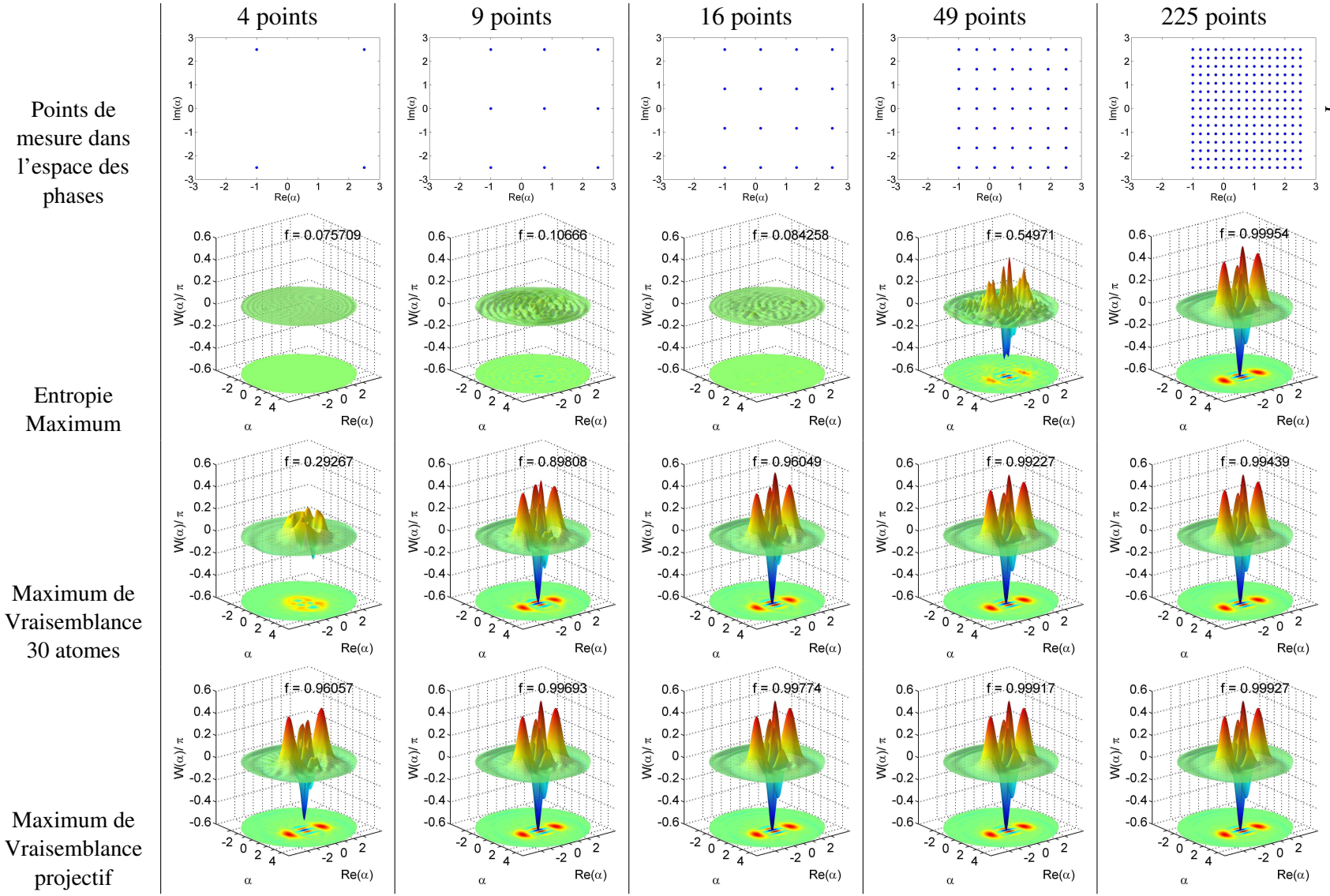


FIG. IV.21 – Résultats de la reconstruction par trois méthodes différentes. La première ligne montre les points de mesure α_ν dans l'espace des phases. Les lignes suivantes montrent les fonctions de Wigner de l'état reconstruit par entropie maximum (deuxième ligne), maximum de vraisemblance avec quinze atomes détectés suivant chaque phase par répétition (troisième ligne), et enfin, les résultats obtenus en utilisant les POVM (I.100) (dernière ligne). La fidélité de chaque état par rapport à l'état simulé est donnée en surimpression.

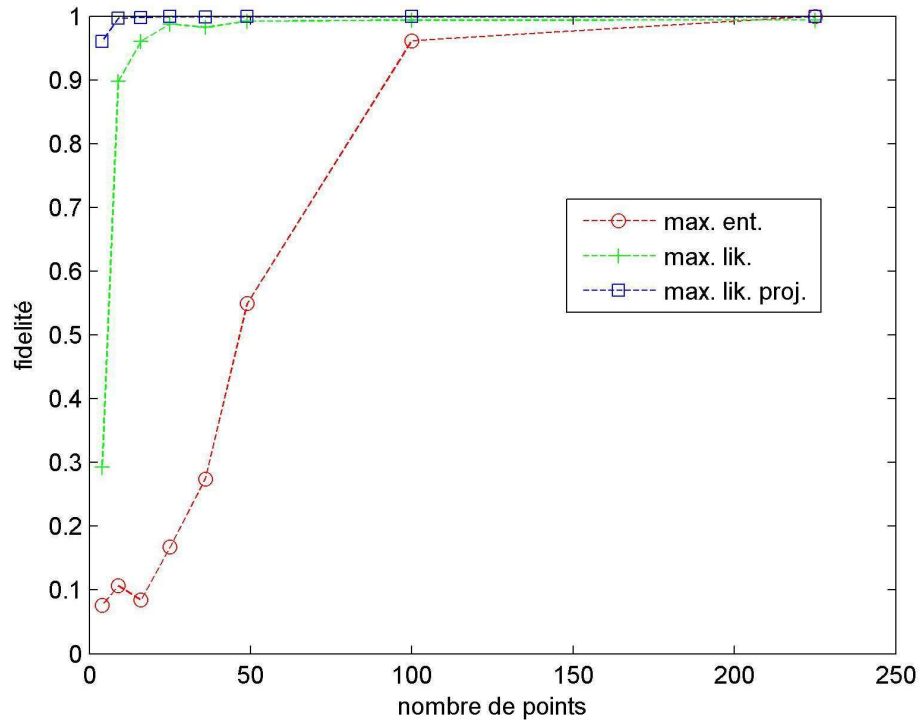


FIG. IV.22 – Evolution de la fidélité de l'état reconstruit en fonction du nombre de points de mesure dans l'espace des phases.

IV.4.3 Influence de l'erreur statistique

En suivant la classification des erreurs faite au paragraphe I.1.5.a, nous allons à présent nous intéresser à l'influence des erreurs statistiques sur les états reconstruits. Les résultats ci-dessus sont obtenus en introduisant les valeurs exactes pour les signaux mesurés. On pourrait alors craindre que la fidélité de l'état reconstruit ne se dégrade très vite lorsqu'on introduit du bruit statistique. Nous allons donc simuler une reconstruction réalisée avec un nombre fini de réalisations différentes du système. Afin de ne pas utiliser plus de points de mesure que nécessaire, nous allons nous placer au point de saturation des courbes précédentes (figure IV.22). Pour chaque déplacement α_ν, on simule donc un nombre fini $N_{\text{réalisations}}$ de réalisations dont le résultat est tiré au hasard suivant les probabilités :

$$P(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu) = C_{N_{\text{at}}}^{ne1} \cdot C_{N_{\text{at}}}^{ne2} \cdot \text{Tr}\left[\rho_{\text{sim}} E_{N\text{at.}}(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu)\right]. \tag{IV.58}$$

Les résultats atomiques sont ensuite moyennés sur toutes les réalisations pour la méthode d'entropie maximum. Les opérateurs $E_{N\text{at.}}(n_{e1}, n_{e2}, \alpha_\nu)$ utilisés sont simplement conservés tels quels avec le nombre d'occurrences correspondant pour la méthode du maximum de vraisemblance. La figure IV.23 montre la fidélité des états reconstruits en fonction de $N_{\text{réalisations}}$. On a utilisé une grille de 100 points pour la méthode d'entropie maximum, tandis qu'on a utilisé seulement 25 points pour le maximum de vraisemblance.

Bien que le nombre de points utilisé soit 4 fois plus faible avec la méthode du maximum

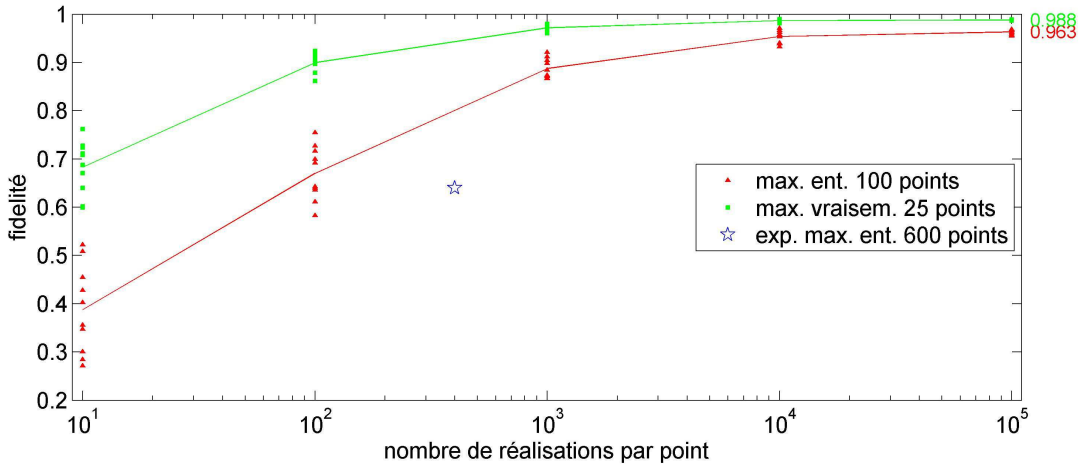


FIG. IV.23 – Evolution de la fidélité en fonction du nombre de réalisations du système utilisées. Les nuages de points correspondent à des reconstructions réalisées à partir de différents jeux de données simulées, afin d'évaluer la variabilité du résultat. Les traits pleins représentent la fidélité moyenne obtenue. Enfin, l'étoile bleue représente la fidélité obtenue lors de notre reconstruction expérimentale par la méthode d'entropie maximum avec une grille de 600 points.

de vraisemblance, la fidélité reste sensiblement meilleure pour tous les nombres de réalisations étudiés. Par exemple, si l'on souhaite atteindre une fidélité de 90 %, on doit préparer près de 2000 copies par point pour le maximum d'entropie, tandis qu'une centaine suffit pour le maximum de vraisemblance. En outre, tenant compte du fait que le nombre de points est 4 fois plus faible pour le maximum de vraisemblance, le temps d'acquisition peut être réduit d'un facteur 80 en utilisant la seconde méthode ! La fidélité obtenue pour les données réelles à l'aide de la méthode d'entropie maximum est représentée sur la même figure. Malgré le nombre de points de mesure important, la fidélité est en-dessous de la valeur attendue. Cela semble indiquer que le facteur limitant est à chercher du côté d'une mauvaise calibration des paramètres expérimentaux, ou de dérives de ces paramètres au cours de l'expérience. Dans les deux cas on gagnerait à utiliser la seconde méthode car elle autorise une calibration précise du POVM (III.48) tout en permettant de réduire significatievement les temps d'acquisition, et donc les dérives à long terme.

Conclusion Nous avons étendu notre reconstruction des populations d'un état quelconque du champ à la reconstruction complète de sa matrice densité. Nous avons effectué la reconstruction sur divers états non-classiques du champ, l'état chat de Schrödinger ainsi que des états de Fock. Ces états sont produits par l'action en retour de la mesure QND du nombre de photons. L'interaction avec un seul atome génère un état chat de Schrödinger, tandis que le passage successif d'un grand nombre d'atomes prépare un état de Fock. La reconstruction complète du champ, en mesurant la matrice densité du champ sans introduire de connaissance à priori sur ce dernier a permis de vérifier notre compréhension de l'action en retour de la mesure sur le champ. Par ailleurs, nous avons ouvert des pistes pour améliorer le procédé de reconstruction utilisé lors de la dernière série d'expériences. Nous allons à présent utiliser une technique de reconstruction

résolue en temps afin d'observer l'effet de la décohérence sur l'état chat de Schrödinger.

Chapitre V

Décohérence du champ piégé

L'état chat de Schrödinger que nous avons présenté précédemment est un paradigme dans l'étude de la frontière entre mondes classiques et quantiques. Il fait partie d'une classe d'états extrêmement choquants pour notre intuition classique. Une variable classique macroscopique (la phase du champ) possède simultanément deux valeurs différentes. Néanmoins, ces états sont des éléments de l'espace de Hilbert au même titre que les états classiques dont ils sont la superposition. Si la mécanique quantique prétend expliquer le monde qui nous entoure, elle doit donc expliquer pourquoi nous n'observons jamais ce genre de superpositions à l'*échelle macroscopique*. Nous verrons que la relaxation a un effet radical sur les états de type chat de Schrödinger. Elle réduit extrêmement rapidement les cohérences jusqu'à ce que l'état du champ ne devienne qu'un simple mélange statistique. Ce phénomène, d'autant plus rapide que la taille de la superposition est importante est connu sous le nom de décohérence. En répétant notre procédé de reconstruction complète de l'état pour des instants successifs, nous avons pu étudier l'évolution d'états chats de Schrödinger sous l'effet de la décohérence. Nous étudierons dans un premier temps le phénomène de décohérence d'un point de vu théorique, en nous appuyant sur le formalisme de la mesure généralisé, avant d'observer les résultats expérimentaux.

V.1 Décrire la relaxation

Dans cette première partie, nous allons écrire la carte quantique décrivant l'évolution de la matrice densité sous l'effet de la relaxation. Cette transformation est connue sous le nom d'équation maîtresse. Nous interpréterons ensuite le résultat à l'aide du formalisme des opérateurs de Kraus.

V.1.1 L'équation maîtresse

Nous avons déjà donné au chapitre III le système d'équations permettant de décrire l'évolution des populations sous l'effet de la relaxation. Nous allons le généraliser ici en écrivant le système d'équations différentielles vérifié par la matrice densité du champ. Ce système, connu sous le nom d'équation maîtresse peut s'obtenir en étudiant le couplage de la cavité à un en-

vironnement modèle composé d'un bain d'oscillateurs harmoniques (voir [99] p 130). Nous ne reprendrons pas le calcul ici, mais nous nous contenterons d'en donner le résultat. En représentation d'interaction, l'évolution de la matrice densité du champ est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \kappa(1+n_{\mathrm{th}})(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho + \frac{1}{2}\rho a^\dagger a) + \kappa n_{\mathrm{th}}(a^\dagger \rho a - \frac{1}{2}aa^\dagger\rho - \frac{1}{2}\rho aa^\dagger), \tag{V.1}$$

où n_{th} est toujours le nombre de photons thermiques dans l'environnement autour de la fréquence de résonance. En particulier, lorsque l'environnement est à température nulle, l'équation maîtresse se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \kappa(a\rho a^\dagger - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho - \frac{1}{2}\rho a^\dagger a). \tag{V.2}$$

Il est à noter que ce système d'équations ne décrit l'évolution du système que sur des échelles de temps relativement longues. En effet, elle fait appel à l'hypothèse Markovienne qui n'est valide que lorsqu'on considère des intervalles de temps plus long que le temps de mémoire de l'environnement. En particulier, elle prédit que la fuite de population d'un état de Fock commence linéairement en temps. En réalité, sur une échelle de temps de l'ordre de la période $2\pi/\omega_{\mathrm{cav}}$, la population a un taux de départ quadratique en temps. Néanmoins ces échelles de temps ne sont absolument pas accessibles à la mesure dans notre système et l'équation maîtresse décrit très bien l'évolution aux échelles de temps qui nous intéressent[1].

Nous allons immédiatement donner une explication physique de chacun des termes présents dans (V.1).

V.1.2 Interprétation en termes d'opérateurs de sauts

La situation considérée pour obtenir l'équation (V.1) est extrêmement complexe puisqu'elle met en jeu le couplage du système avec un environnement comprenant un nombre infini de degrés de liberté. Cependant, le résultat est étonnement simple et il peut être compris comme le résultat de l'interaction du système avec un environnement fictif beaucoup plus restreint. Nous allons considérer la carte quantique induite par la relaxation du système pendant un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$:

$$\begin{aligned}\rho(t+\mathrm{d}t) &= (1-\kappa\mathrm{d}t)\rho(t)\\ &+ \kappa\mathrm{d}t(1+n_{\mathrm{th}})(a\rho(t)a^\dagger + \frac{1}{2}\rho(t) - \frac{1}{2}a^\dagger a\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)a^\dagger a)\\ &+ \kappa\mathrm{d}t n_{\mathrm{th}}(a^\dagger\rho(t)a + \frac{1}{2}\rho(t) - \frac{1}{2}aa^\dagger\rho(t) - \frac{1}{2}\rho(t)aa^\dagger).\end{aligned} \tag{V.3}$$

Afin d'étudier en détail cette carte quantique, nous allons considérer son action sur un état pur $\rho(t) = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. La généralisation à un mélange statistique étant alors triviale. En remarquant que

[1] En particulier, c'est parce que nos mesures QND du nombre de photons sont séparées d'un temps bien plus long que le temps de mémoire de l'environnement qu'elles ne bloquent pas la relaxation par effet Zenon.

les préfacteurs $\epsilon_1 = \kappa \mathrm{d}t(1 + n_{\mathrm{th}})$ et $\epsilon_2 = \kappa \mathrm{d}t n_{\mathrm{th}}$ sont des quantités infinitésimales à l'ordre 1 en dt, on peut identifier (V.3) comme le développement à l'ordre 1 en dt de la carte quantique suivante :

$$\begin{aligned} \rho(t + \mathrm{d}t) &= (1 - \frac{\epsilon_1}{2} a^\dagger a - \frac{\epsilon_2}{2} a^\dagger a)|\Psi\rangle\langle\Psi|(1 - \frac{\epsilon_1}{2} a^\dagger a - \frac{\epsilon_2}{2} a^\dagger a) \\ &+ \epsilon_1 a|\Psi\rangle\langle\Psi|a^\dagger \\ &+ \epsilon_2 a^\dagger|\Psi\rangle\langle\Psi|a. \end{aligned} \tag{V.4}$$

On reconnaît la transformation :

$$\rho(t + \mathrm{d}t) = \sum_k M_k \rho(t) M_k^\dagger, \tag{V.5}$$

avec $M_0 = (\mathbb{1} - \frac{\epsilon_1}{2} a^\dagger a - \frac{\epsilon_2}{2} a^\dagger a)$, $M_1 = \sqrt{\epsilon_1} a$ et $M_2 = \sqrt{\epsilon_2} a^\dagger$. Ces opérateurs vérifient bien (au premier ordre en dt) :

$$\sum_k M_k^\dagger M_k = \mathbb{1}. \tag{V.6}$$

Ainsi, la carte quantique décrivant la relaxation est *identique* aux temps courts à celle d'une mesure généralisée à trois composantes dont on ne lirait pas le résultat (on parle alors de mesure non-lue). On peut donc imaginer un environnement modèle E de dimension 3, beaucoup plus simple que l'environnement réel de la cavité. On notera $\{|e_0\rangle, |e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ une base orthonormée de E, et nous supposerons qu'il est est initialisé dans l'état $|e_0\rangle$. La carte quantique (V.3) s'obtient alors en faisant interagir le système et l'environnement selon l'opération unitaire :

$$|\Psi\rangle \otimes |e_0\rangle \to \sum_k M_k |\Psi\rangle \otimes |e_k\rangle. \tag{V.7}$$

Dans le cas général, le système et l'environnement sont alors intriqués. Afin de terminer la mesure généralisée, on mesure finalement l'état de l'environnement de façon destructive. La mesure réinitialise alors E dans son état initial. Elle peut être décrite par les opérateurs de Kraus suivants :

1. $|e_0\rangle\langle e_1|$: Un photon a fuit du système vers l'environnement (M_1 est en effet proportionnel à l'opérateur annihilation a).
2. $|e_0\rangle\langle e_2|$: Un photon de l'environnement pénètre dans le système. (M_2 est proportionnel à l'opérateur création $a^\dagger$).
3. $|e_0\rangle\langle e_0|$: L'état de l'environnement n'a pas changé.

La probabilité des deux premiers événements dépend linéairement de l'intervalle de temps dt considéré. Lorsque l'on détecte un état de l'environnement différent de $|e_0\rangle$, le système *saute* dans l'un des états $\frac{a|\Psi\rangle}{|a|\Psi\rangle|}$ ou $\frac{a^\dagger|\Psi\rangle}{|a^\dagger|\Psi\rangle|}$. Au contraire, si l'état de l'environnement reste $|e_0\rangle$, le système ne subit aucun saut quantique, mais une évolution douce décrite par M_0. M_0 ne diffère en effet de l'identité que par une quantité infinitésimale en dt. Ainsi, en l'absence de saut, le système subit tout de même une évolution continue différente de l'identité. Nous illustrerons cette propriété quelque peu paradoxale un peu plus loin sur l'exemple du champ cohérent. Enfin, compte tenu de la forme des opérateurs de Kraus de la mesure sur E, l'environnement fictif est réinitialisé

dans l'état $|e_0\rangle$ avant de considérer l'intervalle de temps suivant. L'évolution moyenne obtenue à l'aide de cette subdivision du temps en fenêtres infinitésimales successives permet alors de reproduire l'évolution décrite par l'équation maîtresse (V.1).

Ce modèle décrit donc l'évolution du champ comme une suite de sauts quantiques séparés par des évolutions continues. Ce sont les sauts quantiques, intervenants à des instants aléatoires, qui transforment les états purs en mélanges statistiques. Cependant, comme nous en avons eu un exemple au III.3.1, la formule (V.5) n'est pas la seule décomposition sous forme de somme de Kraus de la carte quantique V.3. Par exemple, la base suivant laquelle l'état de E est mesurée n'a aucune importance (Dans tous les cas, la matrice densité du système est transformée par l'opération de trace partielle sur E). Cependant, en choisissant de mesurer l'état de E suivant une autre base, par exemple $\{|e_0\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle + |e_2\rangle), \frac{1}{\sqrt{2}}(|e_1\rangle - |e_2\rangle)\}$, les sauts quantiques seront décrits par d'autres opérateurs M_1', M_2' :

$$M_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}(M_1 + M_2) \tag{V.8}$$

et

$$M_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(M_1 - M_2). \tag{V.9}$$

En outre, comme nous l'avions vu sur l'exemple du paragraphe III.3.1, le nombre d'opérateurs de Kraus intervenants dans les différentes décompositions est lui-même variable. Une analyse détaillée de plusieurs décompositions équivalentes d'un même processus de décohérence est donnée dans l'ouvrage [48] (p. 405).

Les trajectoires quantiques obtenues dans ces différents « processus modèles » sont donc purement fictives, et ne représentent en aucun cas l'évolution du système réel, qui lui, est couplé à un environnement beaucoup plus complexe que E. On peut par contre utiliser de telles trajectoires fictives dans des simulations Monte-Carlo à condition de ne considérer que les valeurs moyennes sur un grand nombre de trajectoires[100, 101, 102]. On a pu observer des trajectoires de ce type au chapitre III uniquement parce que le système était mesuré de façon répétée suivant une base particulière.

Application : relaxation des états cohérents à $T = 0$ Afin d'illustrer le raisonnement précédent, on va l'appliquer au cas des états cohérents. Ce raisonnement n'est bien entendu pas original, on pourra par exemple se référer à [48] p. 197, pour une discussion plus détaillée. Il est cependant reproduit dans ce manuscrit par soucis de clarté. Nous allons dans un premier temps décrire la relaxation d'un état cohérent à l'aide du formalisme des opérateurs de saut. Considérons donc que la cavité est préparée dans l'état $|\beta\rangle$ à l'instant initial $t = 0$.

$$\rho(t = 0) = |\beta\rangle\langle\beta|. \tag{V.10}$$

A température nulle ($n_{\text{th}} = 0$), la dynamique décrite par (V.3) se simplifie puisque le passage d'un photon de l'environnement vers la cavité devient impossible. Ainsi, il ne reste qu'un opérateur de saut M_1 décrivant la détection d'un photon dans l'environnement :

$$M_1 = \sqrt{\kappa \mathrm{d}t}\, a. \tag{V.11}$$

L'évolution en l'absence de saut est décrite quant à elle par l'opérateur M_0 :

$$M_0 = \mathbb{1} - \frac{\kappa \mathrm{d}t}{2} a^\dagger a. \tag{V.12}$$

Ainsi, après un intervalle de temps infinitésimal dt, le champ aura subi un saut quantique (un « clic » est détecté dans l'environnement) avec la probabilité $p_c = \kappa \mathrm{d}t \langle\beta|a^\dagger a|\beta\rangle = \kappa \mathrm{d}t|\beta|^2 = \kappa \mathrm{d}t\bar{n}$. Dans ce cas, le champ reste inchangé puisque $|\beta\rangle$ est un état propre de l'opérateur de saut. Au contraire, si aucun saut ne s'est produit, le champ subit la transformation :

$$|\beta\rangle \to \frac{M_0|\beta\rangle}{|M_0|\beta\rangle|} \approx |\beta - \kappa \mathrm{d}t/2\rangle. \tag{V.13}$$

Ainsi, en l'absence de saut pendant un temps t, le champ subit une décroissance exponentielle :

$$|\beta\rangle \to |\beta e^{-\kappa t/2}\rangle. \tag{V.14}$$

L'évolution est donc très paradoxale : on observe une décroissance exponentielle du champ lorsqu'aucun photon n'est détecté dans l'environnement, tandis que le champ reste inchangé lors de la perte d'un photon dans l'environnement. Ceci est une conséquence de la loi de Bayes. En effet, à cause de la forme de l'opérateur de saut, la probabilité de perdre un photon est d'autant plus grande que le nombre de photons dans le champ est grand. Plus quantitativement, la probabilité de détecter un photon sachant qu'il y a n photons dans le champ est donnée par :

$$p(c|n) = \kappa \mathrm{d}t n. \tag{V.15}$$

Ainsi, la détection d'un photon modifie notre connaissance du nombre de photons présents avant le « clic ». La loi de Bayes permet d'exprimer la probabilité que le champ *ait compté n* photons avant le « clic » sachant qu'un photon a été détecté.

$$p(n|c) = p(n)\frac{p(c|n)}{p_c}, \tag{V.16}$$

où $p(n)$ est la probabilité à priori que le champ contienne n photons et p_c est la probabilité d'observer un « clic ». En remplaçant $p(n|c)$ et p_c par leurs expressions et en se rappelant la forme de $p(n)$ pour un champ cohérent on obtient :

$$p(n|c) = \frac{n}{\bar{n}} p(n) = p(n-1). \tag{V.17}$$

Ainsi, l'information apportée par la détection décale la statistique des nombres de photons d'exactement une unité. Ceci est une propriété unique de l'état cohérent découlant de la statistique poissonnienne de sa population. Finalement, puisqu'un photon a été perdu du fait de la détection, la statistique du nombre de photons reste inchangée dans le processus.

L'autre partie de l'apparent paradoxe consiste à expliquer comment l'amplitude du champ peut diminuer sans pour autant que des photons ne soient perdus dans l'environnement. Là encore, il s'agit d'une conséquence de la loi de Bayes : plus il s'écoule de temps sans qu'aucun

photon ne soit détecté, plus les petits nombres de photons deviennent probables par rapport aux grands. Il est important que les petits nombres de photons aient une probabilité non-nulle dans l'état initial. Par exemple, pour un état de Fock dans lequel toute la population est concentrée sur un nombre de photon, la décroissance du champ n'a lieu que lorsqu'un « clic » est détecté dans l'environnement. En ce sens, ces trajectoires quantiques sont beaucoup plus intuitives dans le cas des états de Fock. Cependant, les trajectoires quantiques des états cohérents sont parfaitement déterministes puisque les sauts quantiques ne modifient pas ces derniers. Les états cohérents sont alors appelés états pointeurs pour le processus de relaxation décrit par l'opérateur M_1.

V.1.3 Relaxation de l'état Chat de Schrödinger

V.1.3.a Solution analytique à température nulle

Nous allons tout d'abord décrire la relaxation de l'état chat de Schrödinger à température nulle. Cette hypothèse est une assez bonne approximation de la situation expérimentale. En effet, compte tenu de la fréquence considérée et de la température du cryostat, le nombre moyen de photons dans l'environnement est faible ($\bar{n} \approx 0{,}05$). L'hypothèse $T = 0$ simplifie beaucoup le problème, puisque dans ce cas, la carte quantique engendrée par (V.2) peut être exprimée à l'aide d'un seul opérateur de saut. Nous allons donner une solution analytique de l'évolution de $\rho(t)$ sous l'effet de l'équation maîtresse (V.2).

Relaxation et fonction caractéristique L'équation (V.2) portant sur la matrice densité est équivalente à une équation différentielle sur la fonction caractéristique $C_n^\rho(t)$. Nous ne reproduirons pas la démonstration de cette propriété. On pourra notamment consulter les ouvrages de Barnett et Radmore ([99] p. 176) ou encore Haroche et Raimond ([48] p.582).

$$\frac{\mathrm{d}C_n^\rho}{\mathrm{d}t}(\lambda, \lambda^*, t) = -\frac{\kappa}{2}\left[\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda} + \lambda^*\frac{\partial}{\partial\lambda^*}\right]C_n^\rho. \tag{V.18}$$

On peut alors aisément se convaincre que l'ansatz suivant [99] :

$$C_n^\rho(\lambda, \lambda^*, t) = C_n^\rho(e^{-\kappa t/2}\lambda, e^{-\kappa t/2}\lambda^*, 0). \tag{V.19}$$

vérifie l'équation (V.18) en l'injectant dans cette dernière. Cette formule est extrêmement puissante puisqu'elle donne une expression analytique de la fonction caractéristique à tout instant t lorsque le champ relaxe dans un environnement à température nulle. On peut alors dériver l'expression en fonction du temps de n'importe quel état du champ.

Relaxation de l'état chat On va considérer l'état chat de Schrödinger :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}\left[|\alpha e^{i\phi}\rangle + e^{-i\Psi}|\alpha e^{-i\phi}\rangle\right]. \tag{V.20}$$

où α est supposé réel. La distance entre les deux composantes classiques est :

$$D = 2|\alpha|\sin\phi = 2\sqrt{\bar{n}}\sin\phi. \tag{V.21}$$

La matrice densité est :

$$\rho = \frac{1}{\mathcal{N}^2}\left[|\beta\rangle\langle\beta| + |\beta^*\rangle\langle\beta^*| + e^{i\Psi}|\beta\rangle\langle\beta^*| + \text{h.c.}\right]. \tag{V.22}$$

avec $\beta = e^{i\phi}\alpha$. On reconnaît quatre termes dont la signification physique est transparente. On peut de plus calculer la fonction caractéristique associée à chacun de ces termes :

– Les termes $|\beta\rangle\langle\beta|$ et $|\beta^*\rangle\langle\beta^*|$ correspondent aux composantes classiques du chat. On calcule aisément la fonction caractéristique dans l'ordre normale correspondant à ces champs cohérents à l'aide de la formule (I.50) :

$$\begin{aligned} C_n^{|\beta\rangle}(\lambda,\lambda^*) &= \text{Tr}\left(|\beta\rangle\langle\beta|e^{\lambda a^\dagger}e^{-\lambda^* a}\right) \\ &= \text{Tr}\left(e^{-\lambda^* a}|\beta\rangle\langle\beta|e^{\lambda a^\dagger}\right) \\ &= e^{-\lambda^*\beta+\lambda\beta^*}. \end{aligned} \tag{V.23}$$

– Les termes croisés correspondent aux cohérences entre les composantes classiques. De même, on peut calculer leur contribution à la fonction caractéristique :

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(|\beta\rangle\langle\beta^*|e^{\lambda a^\dagger}e^{-\lambda^* a}\right) &= e^{(\lambda-\lambda^*)\beta}\text{Tr}\left(|\beta\rangle\langle\beta^*|\right) \\ &= e^{(\lambda-\lambda^*)\beta}\langle\beta^*|\beta\rangle \\ &= e^{(\lambda-\lambda^*)\beta}e^{-D^2/2}e^{iD^2/(2\tan\phi)}. \end{aligned} \tag{V.24}$$

Ainsi, la fonction caractéristique de l'état chat est donnée par :

$$C_n(\lambda,\lambda^*) = e^{-\lambda^*\beta+\lambda\beta^*} + e^{-\lambda^*\beta^*+\lambda\beta} + e^{i\Psi}e^{(\lambda-\lambda^*)\beta}e^{-D^2/2}e^{iD^2/(2\tan\phi)} + c.c. \tag{V.25}$$

On peut à présent obtenir l'évolution de cette fonction grâce à la formule (V.19) :

$$C_n(\lambda,\lambda^*,t) = C_n(\lambda\epsilon,\lambda^*\epsilon,0), \tag{V.26}$$

avec

$$\epsilon = e^{-\kappa t/2}. \tag{V.27}$$

On reconnaît alors immédiatement la fonction caractéristique de l'état suivant :

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{\mathcal{N}'^2}\left[|\epsilon\beta\rangle\langle\epsilon\beta| + |\epsilon\beta^*\rangle\langle\epsilon\beta^*|\right. \\ &+ \left. e^{-D^2(1-\epsilon^2)/2}e^{i\Psi}e^{iD^2(1-\epsilon^2)/(2\tan\phi)}|\epsilon\beta\rangle\langle\epsilon\beta^*| + \text{h.c.}\right]. \end{aligned} \tag{V.28}$$

La première ligne décrit la relaxation vers l'origine des deux composantes classiques. La constante de temps pour l'amplitude[2] est de $2/\kappa = 2T_{\text{cav}}$. Les termes de la deuxième ligne décrivent l'évolution des cohérences. D'une part, la phase de la superposition tourne d'une quantité $\bar{n}\sin(2\phi)(1 -$

[2]On retrouverait bien une dépendance en T_{cav} si on étudiait la relaxation de l'énergie moyenne.

ϵ^2). D'autre part l'amplitude des cohérences est amortie de façon très rapide puisqu'elles sont multipliées par un facteur ξ :

$$\xi = e^{-2\bar{n}(1-\epsilon^2)\sin^2\phi}. \tag{V.29}$$

Pour les temps t petits devant $T_{\rm cav}$, on obtient, au premier ordre en $t/T_{\rm cav}$:

$$\xi = e^{-D^2\kappa t/2}. \tag{V.30}$$

Ainsi, la constante de temps décrivant l'amortissement des cohérences est donnée par :

$$T_{\rm D} = 2T_{\rm cav}/D^2. \tag{V.31}$$

Le temps d'amortissement des cohérences est donc inversement proportionnel à la séparation entre les composantes classiques de la superposition. Ainsi, pour les grandes superpositions, ce temps devient très court. Ceci montre que les superposition quantiques d'objets macroscopiques sont extrêmement fragiles en présence de relaxation. Voilà pourquoi on n'observe pas à notre échelle d'objets de type « chat de Schrödinger ».

Evolution de la fonction de Wigner On peut alors calculer la fonction de Wigner à partir de l'expression de la matrice densité (V.28). Dans le cas simple des chats pair et impair maximalement séparés ($\phi = \pi/2$ et $\Psi = 0$ ou π) :

$$\begin{aligned} W^{\rm pair/impair}(\alpha,t) &= \frac{1}{\pi(1 \pm e^{-2|\beta|^2})}\Big[e^{-2|\alpha-\beta\epsilon|^2} + e^{-2|\alpha+\beta\epsilon|^2} \\ &\pm 2e^{-2|\alpha|^2}e^{-2|\beta|^2(1-\epsilon^2)}\cos(4\,{\rm Im}(\alpha)\beta\epsilon)\Big]. \end{aligned} \tag{V.32}$$

La figure V.1 montre la fonction obtenue pour plusieurs instants successifs après la préparation. La relaxation a lieu suivant deux constantes de temps séparées. Dans un premier temps très court T_D, les franges d'oscillations quantiques sont amorties et l'état se transforme en un mélange statistique des deux composantes classiques (deuxième ligne de l'expression). Avec une constante de temps beaucoup plus lente ($2T_{\rm cav}$ pour l'amplitude), les composantes classiques se rapprochent de l'origine jusqu'à ce que l'état soit confondu avec le vide (première ligne).

Interprétation en terme d'opérateurs de saut. Il est extrêmement intéressant d'interpréter le résultat précédent du point de vue des opérateurs de sauts introduits au V.1.2. Le raisonnement similaire réalisé sur les états cohérents au V.1.2 nous sera bien entendu très utile. On va considérer comme précédemment un état chat maximalement séparé :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}(|i\alpha_0\rangle + |-i\alpha_0\rangle). \tag{V.33}$$

En l'absence de saut, on retrouve par linéarité de l'opérateur de Kraus M_0, la même dynamique que précédemment pour chacune des composantes classiques :

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}'}(|i\alpha(t)\rangle + |-i\alpha(t)\rangle), \tag{V.34}$$

où $\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\kappa t/2}$.

Lorsqu'un photon est détecté dans l'environnement, le saut quantique suivant a lieu :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &\rightarrow M_1|\Psi(t)\rangle/|M_1|\Psi(t)\rangle| \\ &= \frac{i}{\mathcal{N}'}(|i\alpha(t)\rangle - |-i\alpha(t)\rangle). \end{aligned} \tag{V.35}$$

Ainsi, le « clic » s'accompagne d'un saut de parité de l'état chat. Comme ce saut a lieu à un instant aléatoire, la probabilité $c(t)$ pour que le champ ait la même parité que le champ initial décroît initialement[3] exponentiellement avec une constante de temps proportionnelle au temps moyen nécessaire pour perdre un photon. Soit $c(t) \approx 1 - \bar{n}\kappa t$. On peut alors écrire la matrice densité du champ à l'instant t comme le mélange statistique suivant :

$$\rho(t) = \frac{1 + c(t)}{2}\rho^{\text{pair}}(t) + \frac{1 - c(t)}{2}\rho^{\text{impair}}(t), \tag{V.36}$$

avec

$$\rho^{\text{pair}}(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_+^{\,2}}\left(|i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}\rangle + |-i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}\rangle\right)\left(\langle i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}| + \langle -i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}|\right) \tag{V.37}$$

et

$$\rho^{\text{impair}}(t) = \frac{1}{\mathcal{N}_-^{\,2}}\left(|i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}\rangle - |-i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}\rangle\right)\left(\langle i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}| - \langle -i\alpha_0 e^{-\kappa t/2}|\right). \tag{V.38}$$

Les fonctions de Wigner de l'état $\rho^{\text{pair}}(t)$ et $\rho^{\text{impair}}(t)$ présentent des franges d'interférence en opposition de phase. Ainsi, l'état décrit par (V.36) présente des franges dont le contraste est proportionnel au taux de mélange $c(t)$. On retrouve bien entendu le résultat de l'équation (V.32) aux temps courts.

V.1.3.b Solution numérique à 0,8 Kelvin

L'analyse que nous venons de réaliser à température nulle permet de bien comprendre le mécanisme et les effets de la décohérence. En particulier, l'évolution est simplement donnée par la combinaison de deux effets : le rapprochement progressif des composantes classiques vers l'origine et l'amortissement rapide de la cohérence entre ces dernières. Cette simplicité de l'évolution est due au fait que les états cohérents sont des états propres du seul opérateur de saut présent. Les choses deviennent plus complexes à température finie à cause de l'apparition d'un opérateur de saut supplémentaire correspondant au gain d'un photon provenant de l'environnement. L'opérateur de saut décrivant ce processus est $M_2 = \sqrt{\kappa \mathrm{d}t n_{\text{th}}}a^\dagger$. Par ailleurs, la perte des photons dans l'environnement est stimulée par la présence des photons thermiques, comme le montre la nouvelle forme de l'opérateur de saut $M_1 = \sqrt{\kappa \mathrm{d}t(1 + n_{\text{th}})}a$. Le problème de l'évolution du chat de Schrödinger dans ces conditions est beaucoup plus complexe puisque les états cohérents ne sont pas états propres de l'opérateur de saut M_2. En particulier, il est clair que leur relaxation s'accompagne d'une déformation puisque l'état d'équilibre n'est plus l'état cohérent $|0\rangle$, mais un état

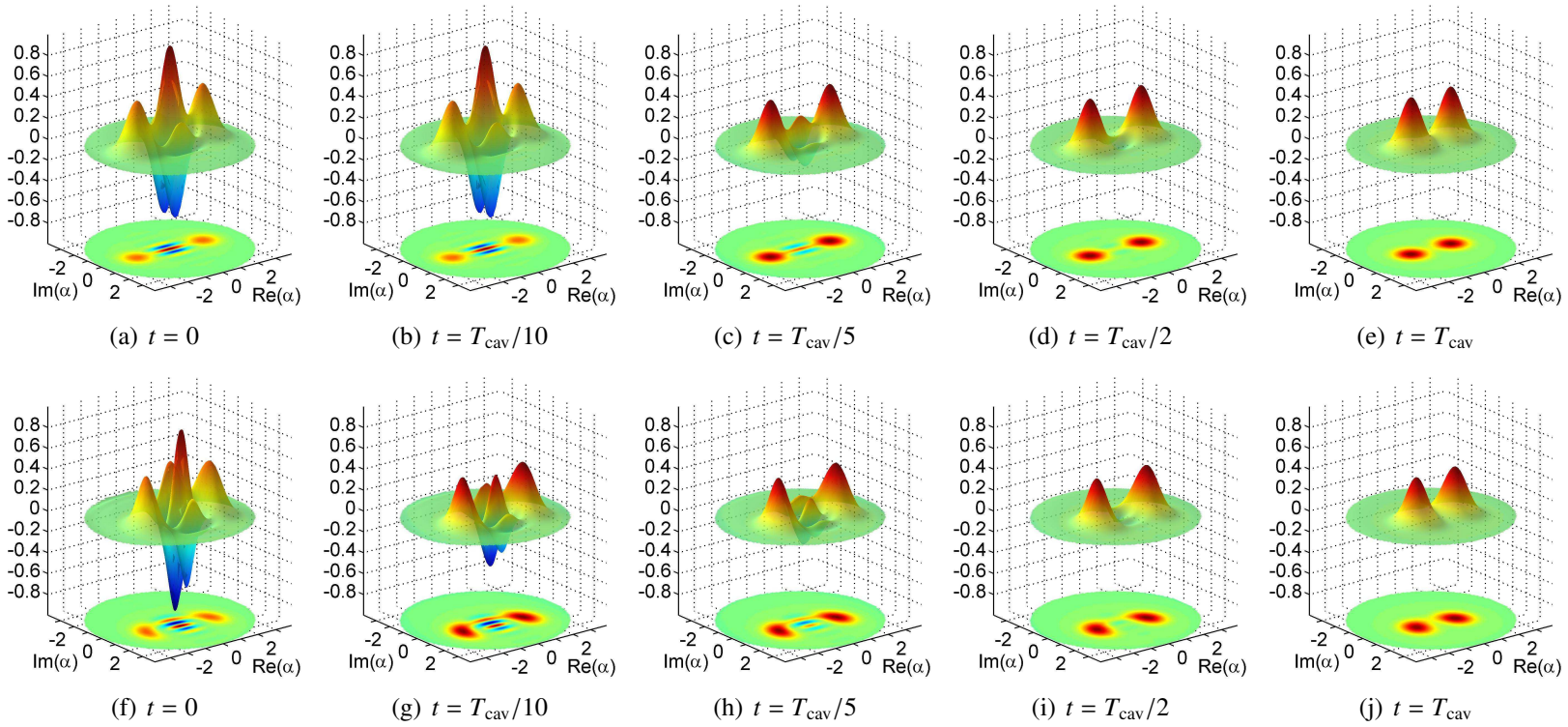
[3] Pour les temps plus longs, il faut prendre en compte la possibilité qu'un nombre pair de sauts ramène le champ dans l'état initial.

thermique. Néanmoins, dans notre dispositif expérimental, le nombre de photons thermique est assez faible ($n_{\text{th}} = 0{,}05$) et la description qualitative du paragraphe précédent est toujours assez proche de la réalité. Afin d'obtenir une description quantitative du phénomène de décohérence incluant l'effet de la température finie et de la forme imparfaite du chat préparé initialement, nous allons avoir recours à une résolution numérique de l'équation maîtresse (V.1).

Nous allons donc considérer comme état initial l'état chat $|\psi'_{\pm}\rangle$ (voir équation (IV.15)), produit par interaction d'un atome avec un champ cohérent en tenant compte de la non-linéarité du déphasage par photon.

$$\rho(t = 0) = |\Psi'_{\pm}\rangle\langle\Psi'_{\pm}|. \tag{V.39}$$

On intègre alors l'équation pilote (V.1) afin d'obtenir la matrice densité $\rho(t)$ aux instants ultérieurs. La figure V.1 montre la fonction de wigner de l'état $\rho(t)$ pour cinq instants successifs $t = 0$, $t = T_{\text{cav}}/10$, $t = T_{\text{cav}}/5$, $t = T_{\text{cav}}/2$ et $t = T_{\text{cav}}$. On observe toujours le même type d'évolution suivant deux constantes de temps séparées. Dans un premier temps, les franges d'interférences s'amortissent rapidement, puis les composantes classiques s'approchent de l'origine avec le temps caractéristique de la relaxation $t = T_{\text{cav}}$.



(a) $t = 0$ (b) $t = T_{\text{cav}}/10$ (c) $t = T_{\text{cav}}/5$ (d) $t = T_{\text{cav}}/2$ (e) $t = T_{\text{cav}}$

(f) $t = 0$ (g) $t = T_{\text{cav}}/10$ (h) $t = T_{\text{cav}}/5$ (i) $t = T_{\text{cav}}/2$ (j) $t = T_{\text{cav}}$

FIG. V.1 – La première ligne représente l'évolution de la fonction de Wigner d'un état chat de Schrödinger maximalement séparé dans un environnement à température nulle tel que décrit par la solution analytique (V.32) pour $\alpha = \sqrt{3{,}5}$. La deuxième ligne montre la même évolution pour un chat produit à l'aide d'un atome désaccordé de 51 kHz par rapport à la fréquence de la cavité interagissant avec un champ cohérent d'amplitude $\alpha = \sqrt{3{,}5}$. Cette fois, on considère la situation réaliste où le nombre moyen de photons thermiques dans l'environnement est de 0,05. Les images correpondent aux instants $t = 0$, $t = T_{\text{cav}}/10$, $t = T_{\text{cav}}/5$, $t = T_{\text{cav}}/2$ et $t = T_{\text{cav}}$.

On peut alors s'attendre à ce que la décohérence initiale soit plus rapide à température finie. En effet, les sauts quantiques sont activés d'un facteur $(1 + n_{\text{th}})$ par la présence des photons thermiques dans l'environnement. Afin de quantifier précisément cet effet, on peut par exemple étudier le taux de décroissance du contraste des franges en fonction de la température. La figure V.2 montre l'évolution du maximum des franges pour des températures croissantes. On observe bien une diminution du temps de décohérence lorsque la température augmente. Plus précisément, les pentes à l'origine de ces cinq courbes donnent les temps de décohérence suivants : $T_D = \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\right)^{-1} = 22{,}0$, 19,8, 16,4, 13,0 et 10,2 ms pour les cinq nombres d'occupation thermique $n_{\text{th}} = 0$, 0,05, 0,15, 0,3 et 0,5. Vladimir Buzek a obtenu en 1992 [103] une formule théorique du temps de décohérence d'une superposition de deux champs cohérents en présence d'un bain thermique :

$$T_D = \frac{2T_{\text{cav}}}{D^2(1 + 2n_{\text{th}}) + 4n_{\text{th}}}. \tag{V.40}$$

Où D est la séparation entre les deux composantes classiques. Dans notre cas, on peut obtenir cette distance par un petit calcul géométrique :

$$D = 2\sqrt{\bar{n}}\sin\theta. \tag{V.41}$$

où $\sqrt{\bar{n}}$ est l'amplitude du champ cohérent injecté initialement, et θ est le déphasage moyen subi par le champ cohérent, donné par la formule (IV.16). Nous obtenons $\theta = 0{,}37\,\pi$ pour $\bar{n} = 3{,}5$ photons. Ainsi, la distance entre les composantes classiques vaut $D^2 = 11{,}8$ photons. Les temps de décohérence obtenus sont en excellent accord avec ceux issus de la méthode numérique (voir V.2). Comme on pouvait s'y attendre, la distorsion de l'état initial n'influe pas de façon significative sur le processus de décohérence. De plus, on voit que pour les conditions expérimentales qui sont les nôtres, la température de l'environnement se traduit par une correction minime de l'ordre de 10 % du temps de décohérence.

V.2 Un film de la décohérence de l'état chat de Schrödinger

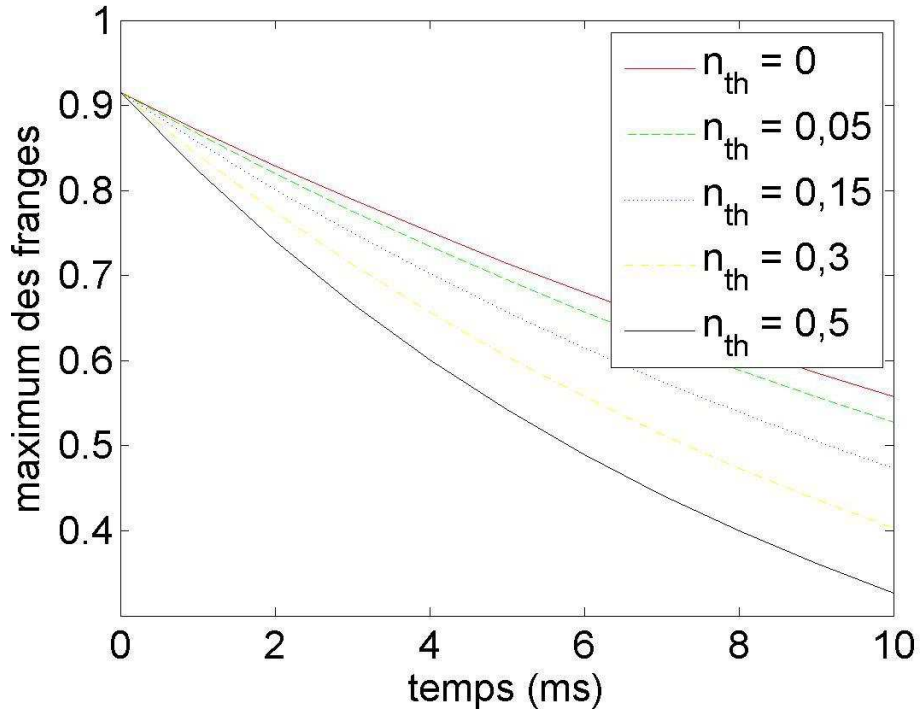
Grâce aux procédés de reconstruction présentés au chapitre précédent, nous pouvons obtenir un film image par image semblable à V.1 de la décohérence de l'état chat de Schrödinger. Il suffit en principe de reconstruire l'état du champ pour plusieurs délais successifs après la préparation. Plus précisément, pour obtenir ce film image par image on peut envisager le scénario « idéal » suivant (voir figure V.3(a)) :

1. La cavité est préparée dans l'état ρ dont nous voulons étudier la décohérence.
2. Le champ décohère pendant un délai τ sous l'effet de la relaxation.

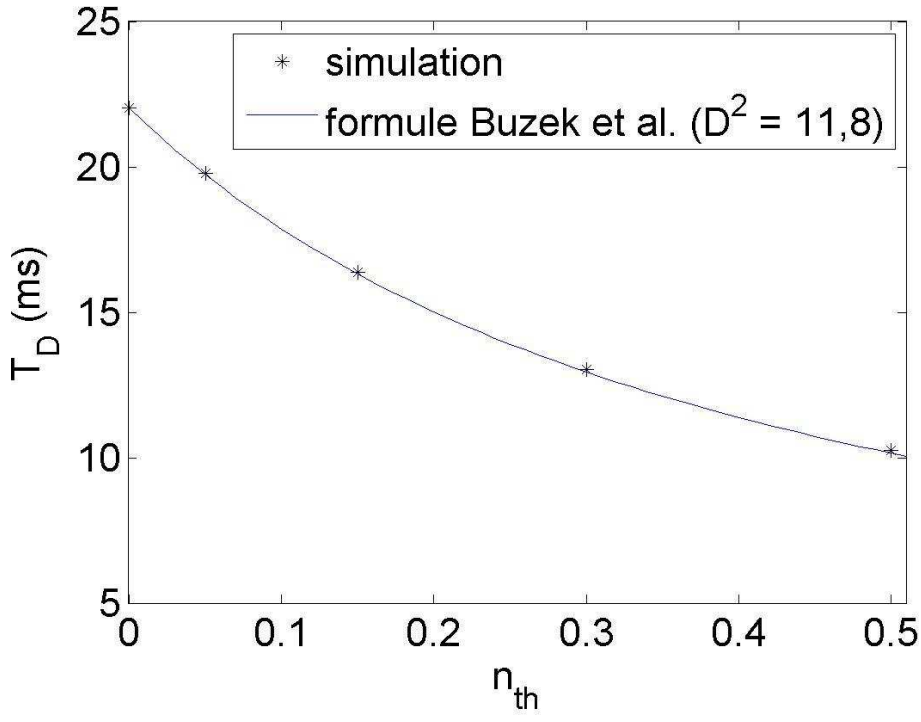
$$\rho \to \rho(\tau) = \mathcal{L}(\rho, \tau), \tag{V.42}$$

   où $\mathcal{L}(t)$ est l'opérateur décrivant la relaxation entre les instants 0 et t.
3. Le champ est déplacé d'une amplitude α_ν par injection d'un champ cohérent :

$$\rho \to \rho(\alpha_\nu) = D(\alpha_\nu)\rho D(-\alpha_\nu). \tag{V.43}$$



(a)



(b)

FIG. V.2 – (a) Evolution du maximum des franges (maximum sur l'axe réel) en fonction du temps pour cinq valeurs différentes de la température. (b) Temps de décohérence en fonction du nombre moyen de photons thermiques déduit des courbes précédentes. Les temps de décohérence obtenus par simulation sont en excellent accord avec la formule (V.40).

4. Une courte série d'atomes mesure les éléments diagonaux de la matrice densité déplacée.

On répète le processus un grand nombre de fois avec le même déplacement α_ν pour moyenner les mesures des éléments diagonaux de ρ. On répète l'opération pour différents déplacements α_ν afin de reconstruire complètement l'état du champ $\rho(\tau)$. Finalement, afin d'obtenir des images successives, on répète l'opération en variant le délai τ entre préparation et reconstruction.

En pratique, une telle technique nécessiterait un temps d'acquisition colossal. En effet, chaque « image » du film nécessite la reconstruction complète de l'état du champ, soit plusieurs dizaines d'heures d'acquisition de données. Afin d'économiser le temps de mesure, nous allons considérer une procédure légèrement différente (voir figure V.3(c)) :

1. La cavité est préparée dans l'état ρ dont nous voulons étudier la décohérence.
2. Le champ est déplacé d'une amplitude α_ν par injection d'un champ cohérent :

$$\rho \rightarrow \rho(\alpha_\nu) = D(\alpha_\nu)\rho D(-\alpha_\nu). \tag{V.44}$$

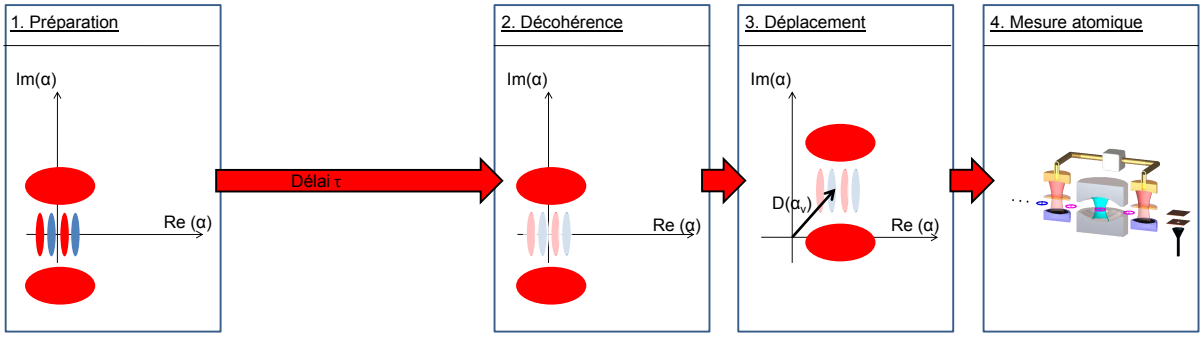
3. Une longue série d'atomes mesure continuement l'évolution des éléments diagonaux de la matrice densité déplacée. On reconstruit alors l'état de façon résolue en temps.

Ce procédé a l'énorme avantage d'éviter de répéter la séquence pour chaque image du film puisqu'on obtient directement les données pour tout les délais successifs τ_i après la préparation. Néanmoins, nous avons déjà noté au paragraphe IV.3.3, que la mesure des « populations déplacées » au point α_ν n'était pas non-destructive[4]. Il n'est donc pas du tout évident que le résultat final soit identique au celui obtenu avec le scénario idéal. Nous allons voir qu'il est tout de même possible d'obtenir le résultat souhaité grâce à ce protocole « rapide ». Comme nous l'avons vu au chapitre III, la mesure continue des populations du champ ne modifie pas la dynamique de leur relaxation. Ainsi, les populations moyennes obtenues pour une fenêtre de mesure quelconque ne sont pas affectées par la présence des atomes précédents. On peut donc remplacer par la pensée le scénario ci-dessus par le suivant (voir figure V.3(b)) :

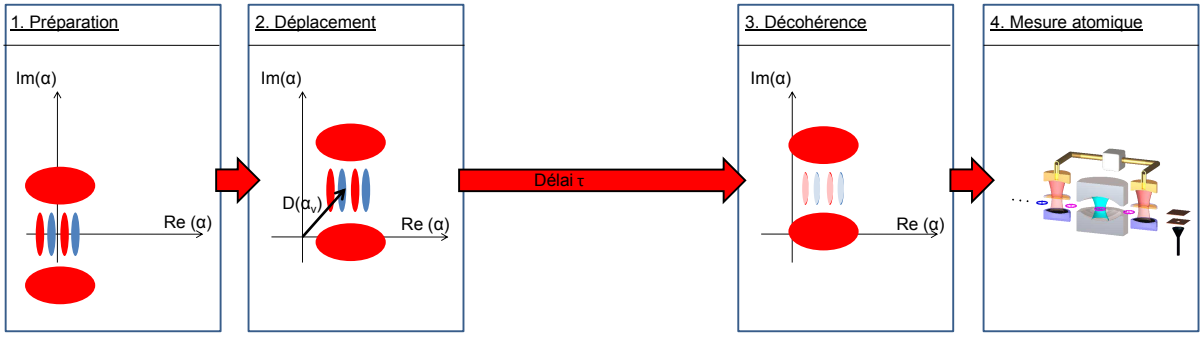
1. La cavité est préparée dans l'état ρ.
2. Le champ est déplacé d'une amplitude α_ν.
3. L'état déplacé $\rho(\alpha_\nu)$ décohère pendant un délai τ sous l'effet de la relaxation.
4. Une courte série d'atomes mesure finalement les éléments diagonaux de la matrice densité.

Il n'est cependant toujours pas évident que l'état reconstruit soit le même que l'état que nous aurions obtenu en attendant le délai τ_i avant la reconstruction. En effet, dans ce cas, la relaxation agit sur l'état initial ρ, tandis que dans le scénario ci-dessus, la relaxation a lieu sur l'état déplacé $\rho(\alpha_\nu)$. Toutefois, Nous allons montrer que les deux dynamiques sont liées par une relation extrêmement simple.

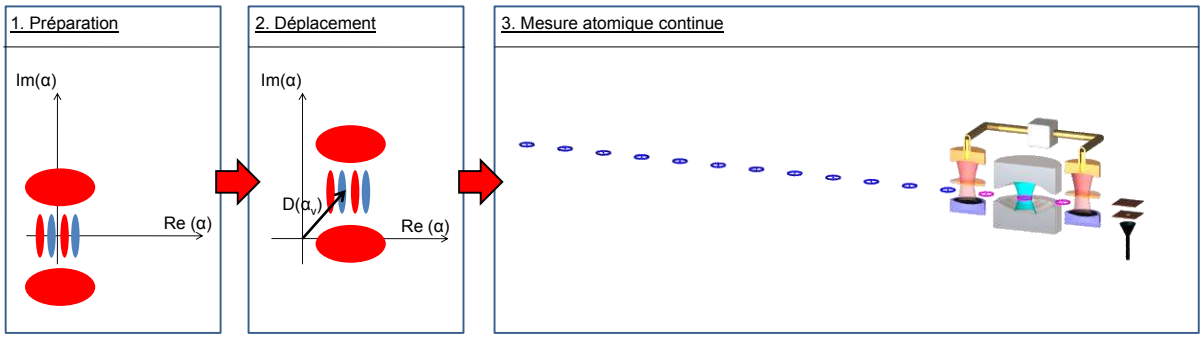
[4]Nous avions vu qu'il faudrait la compléter par le déplacement $D(-\alpha_\nu)$ pour qu'elle devienne non-destructive.



(a)



(b)



(c)

FIG. V.3 – Trois stratégies possibles pour reconstruire l'état $\mathcal{L}(\rho, \tau)$: (a) Le scénario idéal consiste à préparer l'état ρ, le laisser relaxer pendant un temps τ, puis mettre en oeuvre la procédure de reconstruction habituelle. (b) Le champ est préparé dans l'état ρ et immédiatement déplacé en un point de mesure α_v. On laisse relaxer l'état déplacé pendant une durée τ avant de mesurer le signal atomique. (c) Comme précédemment la décohérence a lieu sur l'état déplacé, cependant, la mesure atomique à l'instant τ est précédée d'une série de « mesures atomiques non-lues ».

V.2.1 Commutation entre déplacement et décohérence

Nous voulons comparer l'état obtenu au moment où les atomes vont commencer à mesurer les populations dans le scénario idéal :

$$\rho_1(\alpha_v, \tau) = D(\alpha_v)\mathcal{L}(\rho, t)D(-\alpha_v), \tag{V.45}$$

avec l'état obtenu dans le scénario réel après un délai τ suivant le déplacement :

$$\rho_2(\alpha_v, \tau) = \mathcal{L}\left(D(\alpha_v)\rho D(-\alpha_v), \tau\right). \tag{V.46}$$

Afin d'obtenir des résultats analytiques sur la décohérence du champ, on va utiliser la fonction caractéristique. On peut inverser la formule (I.50) pour obtenir l'expression de la matrice densité en fonction de la fonction caractéristique symétrisée :

$$\rho(t) = \frac{1}{\pi}\int C_s(\lambda, t)D(-\lambda)\mathrm{d}^2\lambda. \tag{V.47}$$

Nous avons déjà montré qu'à température nulle, le processus de relaxation se traduisait par une évolution extrêmement simple de la fonction caractéristique dans l'ordre normal ((V.19). A température finie, on peut également montrer [99] que la fonction caractéristique dans l'ordre normal évolue suivant la formule analytique :

$$C_s(\lambda, t) = K(\lambda, \tau)C_s(e^{-\kappa t/2}\lambda, 0), \tag{V.48}$$

avec

$$K(\lambda, \tau) = e^{-n_{\mathrm{th}}|\lambda|^2(1-e^{-\kappa t})}. \tag{V.49}$$

On en déduit, d'après (I.53) l'évolution de la fonction caractéristique dans l'ordre symétrisé :

$$\begin{aligned} C_n(\lambda, \tau) &= e^{-|\lambda|^2/2}C_s(\lambda, \tau) \\ &= e^{-|\lambda|^2/2}K(\lambda, \tau)C_s(e^{-\kappa t/2}\lambda, 0) \\ &\equiv A(\lambda)\mathrm{Tr}\left[\rho D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})\right]. \end{aligned} \tag{V.50}$$

On en déduit une expression de l'opérateur $\mathcal{L}(\tau)$:

$$\mathcal{L}(\rho, \tau) = \frac{1}{\pi}\int A(\lambda)D(-\lambda)\mathrm{Tr}\left[\rho D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})\right]\mathrm{d}^2\lambda. \tag{V.51}$$

On peut maintenant exprimer $\rho_1(\alpha, \tau)$ et $\rho_2(\alpha, \tau)$ à l'aide de la formule ci-dessus :

$$\rho_1(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi}\int A(\lambda)D(\alpha)D(-\lambda)D(-\alpha)\mathrm{Tr}\left[\rho D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})\right]\mathrm{d}^2\lambda \tag{V.52}$$

et

$$\rho_2(\alpha, \tau) = \frac{1}{\pi}\int A(\lambda)D(-\lambda)\mathrm{Tr}\left[\rho D(-\alpha)D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})D(\alpha)\right]\mathrm{d}^2\lambda. \tag{V.53}$$

Ces quantités se réexpriment en utilisant les identités de commutation des opérateurs déplacements.

$$\rho_1(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi}\int A(\lambda)e^{-\alpha^*\lambda+\alpha\lambda^*}D(-\lambda)\mathrm{Tr}\left[\rho D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})\right]\mathrm{d}^2\lambda \tag{V.54}$$

et

$$\rho_2(\alpha,\tau) = \frac{1}{\pi}\int A(\lambda)e^{-\alpha^*\lambda e^{-\kappa\tau/2}+\alpha\lambda^* e^{-\kappa\tau/2}}D(-\lambda)\mathrm{Tr}\left[\rho D(\lambda e^{-\kappa\tau/2})\right]\mathrm{d}^2\lambda. \tag{V.55}$$

En comparant ces deux formules, on obtient :

$$\rho_1(\alpha e^{-\kappa\tau/2}) = \rho_2(\alpha). \tag{V.56}$$

Cela signifie qu'on peut reconstruire l'état en utilisant le protocole « rapide » à condition de redimensionner d'un facteur $e^{-\kappa\tau/2}$ l'amplitude des points de mesure utilisés dans la reconstruction.

V.2.2 Transition du chat « vivant et mort » vers le chat « vivant ou mort »

Nous avons appliqué ce principe à l'état chat de Schrödinger du chapitre précédent. La première colonne de la figure V.4 montre l'état chat impair reconstruit pour quatre instants successifs. Chaque état est reconstruit par la méthode d'entropie maximum décrite au I.1.5.b. Chaque image représente l'état reconstruit à partir d'une dizaine d'atomes détectés dans une fenêtre centrée autour de l'instant τ. On observe bien la disparition rapide des franges d'interférences aux temps courts et un léger rapprochement des composantes classiques aux temps les plus longs. Les formes fluctuantes des fonctions de Wigner sont dues au bruit statistique de la reconstruction.

La deuxième colonne de la figure V.4 montre la même évolution dans le cas de l'état chat pair. Afin de bien mettre en évidence les effets d'interférences quantiques, on a également représenté la différence des chats pair et impair. Comme attendu, seules les interférences quantiques, de signe opposé dans les deux fonctions de Wigner, subsistent. De plus le rapport signal sur bruit est amélioré d'un facteur $\sqrt{2}$ puisque le signal est augmenté d'un facteur deux dans l'opération. Finalement, On peut également faire la somme des deux fonctions de Wigner afin de ne garder que les composantes classiques de l'état chat de Schrödinger.

V.2.3 Analyse quantitative de la décohérence de l'état chat de Schrödinger

Les résultats expérimentaux présentés jusqu'ici confirment bien qualitativement le modèle théorique introduit au début de ce chapitre. Nous allons tenter à présent de tirer quantitativement le temps de décohérence des films précédents. Compte tenu du bruit statistique affectant la reconstruction, il semble difficile de tirer des conclusions quantitatives sur l'évolution du maximum des franges d'interférence. Nous devons donc trouver un autre critère simple permettant de filtrer le bruit de la reconstruction pour évaluer la cohérence des différents états reconstruits.

V.2.3.a Evaluer la cohérence de l'état chat de Schrödinger

Remarquons tout d'abord l'équivalence, à température nulle entre les trois critères suivants :

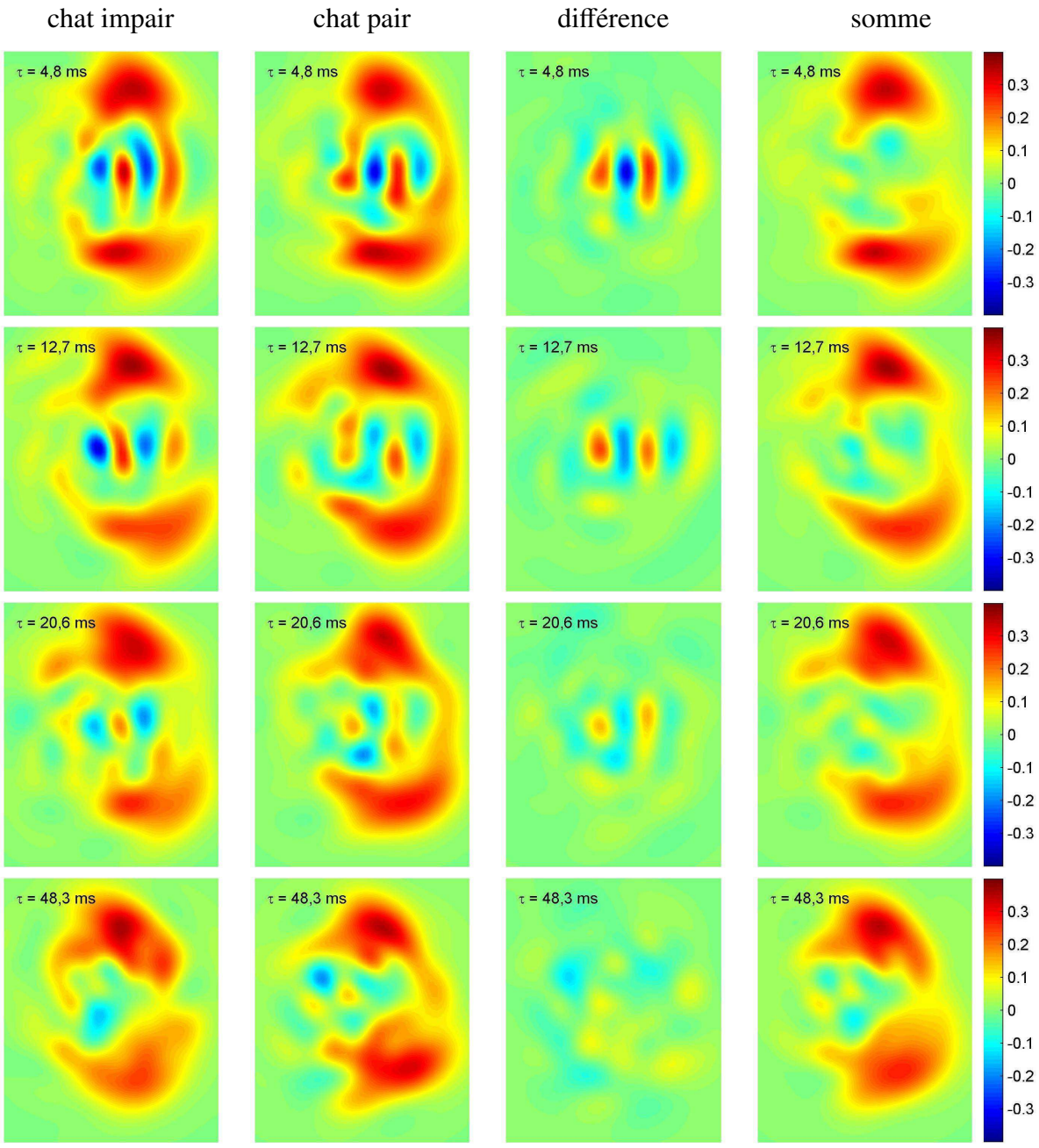


FIG. V.4 – Première et deuxième colonnes : évolution de la fonction de Wigner des chats impair et pair. troisième colonne : différence des fonctions de Wigner du chat pair et impair. Quatrième colonne : somme de ces fonctions.

1. Le contraste des franges d'interférence de la fonction de Wigner.
2. Le taux de mélange $c(t)$ entre les états chat pair et chat impair.
3. L'amplitude des termes croisés $|\epsilon\beta^*\rangle\langle\epsilon\beta^*|$ de la matrice densité (V.28).

Le troisième critère suggère la possibilité de mesurer le degré de cohérence directement sur la matrice densité de l'état. Néanmoins, les éléments de la matrice densité résultent de la somme des quatre termes de l'équation (V.28). Afin de séparer les éléments de matrice provenant des termes classiques de ceux provenant des termes croisées, on va réaliser un déplacement formel dans l'espace des phases.

$$\rho(\beta) = D(\beta)\rho D(-\beta). \tag{V.57}$$

où β est la position de l'une des composantes classiques du chat. Dans le cas du chat idéal $|\psi_{\text{pair}}\rangle = \frac{1}{\mathcal{N}}(|\beta\rangle + |-\beta\rangle)$, cette transformation a pour effet de transformer l'état en :

$$|\psi_{\text{pair}}\rangle \rightarrow \frac{1}{\mathcal{N}}(|0\rangle + |2\beta\rangle). \tag{V.58}$$

La matrice densité prend alors une forme tout à fait particulière :

$$\rho(\beta) = \frac{1}{\mathcal{N}^2}\left(|0\rangle\langle 0| + |2\beta\rangle\langle 2\beta| + |0\rangle\langle 2\beta| + |2\beta\rangle\langle 0|\right). \tag{V.59}$$

Cette fois, les éléments de matrice concernés par les différents termes sont bien séparés les un des autres. La figure V.5 montre une telle matrice densité pour $|\beta\rangle = i\sqrt{3{,}5}$. On distingue clairement l'élément de matrice $\rho_{0,0}$ correspondant à la composante classique $|0\rangle$, un groupe d'éléments non nuls distribués autour de l'élément diagonal $\rho_{11,11}$ correspondants à l'état cohérent $|2\beta\rangle$ et finalement Les éléments $\rho_{0,n}$ et $\rho_{n,0}$ pour $n \approx 11$ correspondants aux termes croisés $|0\rangle\langle 2\beta|$ et $|2\beta\rangle\langle 0|$. Ainsi, on peut identifier d'un coup d'oeil l'amplitude de ces termes croisés.

V.2.3.b Décohérence de l'état chat de Schrödinger

On voit sur la figure V.4 qu'il n'est pas évident d'identifier le centre d'une composante classique. Nous définirons donc l'amplitude β d'une composante classique comme le déplacement à appliquer de façon à maximiser la composante $(0, 0)$ de la matrice densité déplacée $\rho(\beta) = D(\beta)\rho D(-\beta)$. Ainsi, la première étape de la méthode précédente est définie de façon parfaitement objective par ce critère. La figure V.6 montre les matrices densités déplacées pour l'état « chat impair » obtenus aux instants τ = 4,8, 12,7, 20,6 et 48,3 ms. On identifie clairement les quatre parties distinctes dans la matrice densité. A présent, pour mesurer la décroissance des cohérences, on considère la quantité :

$$C = \sum_{n\geq 5} |\rho_{n,0}|. \tag{V.60}$$

Notons immédiatement que cette grandeur n'est pas normalisée à 1 pour un chat pur. Nous ne considérerons donc que la variation relative de cette valeur au cours du temps. La somme commence à l'élément $n = 5$ pour éviter de compter les éléments de matrice parasites voisins de

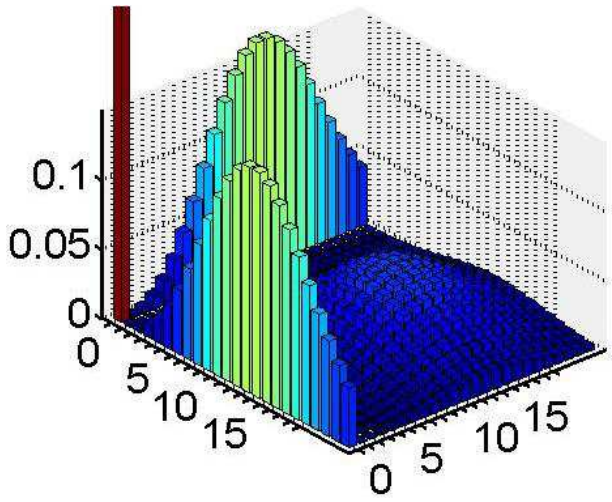


FIG. V.5 – Modules des éléments de la matrice densité $\rho(\beta)$. On distingue bien quatre « secteurs » où les éléments sont non-nuls, correspondants chacun à un terme de l'expression (V.59).

zéro dus à la distorsion de la composante classique. La figure V.8 montre l'évolution de $C(t)$ au cours du temps pour les différents états considérés plus haut. Les barres d'erreur sont obtenues en répétant la reconstruction sur différentes sous-parties des données expérimentales : on rejette aléatoirement la moitié des données expérimentales et l'état est reconstruit avec les données restantes. En réitérant le processus pour différents tirages, on obtient une évaluation de l'erreur statistique. Pour plus de clarté, les barres d'erreur ne sont représentées que sur l'état pair. La ligne noire est un ajustement exponentiel commun aux deux jeux de données. On inclue un décalage correspondant au bruit résiduel des éléments de la matrice densité. Le temps de décroissance obtenu est de 17 ± 3 ms. En bon accord avec la valeur théorique de 19,8 ms prédite par la formule (V.40).

Afin de tester la dépendance du temps de décohérence en fonction de la taille du chat, nous avons réalisé cette analyse sur un chat de taille plus faible. Le champ cohérent utilisé pour préparer le chat contient 2,7 photons en moyenne et le désaccord est de 60kHz. La séparation des composantes classiques correspondante vaut $D^2 = 10{,}3$ photons. La figure V.7 montre l'évolution de la fonction de Wigner ainsi que celle de la quantité $C(t)$ définie précédemment. Un ajustement commun sur les deux états donne cette fois un temps de décohérence $T_D = 21 \pm 4$ ms, contre un temps théorique de 22,5 ms. On observe donc bien le ralentissement du phénomène de décohérence lorsque la taille du chat diminue [104].

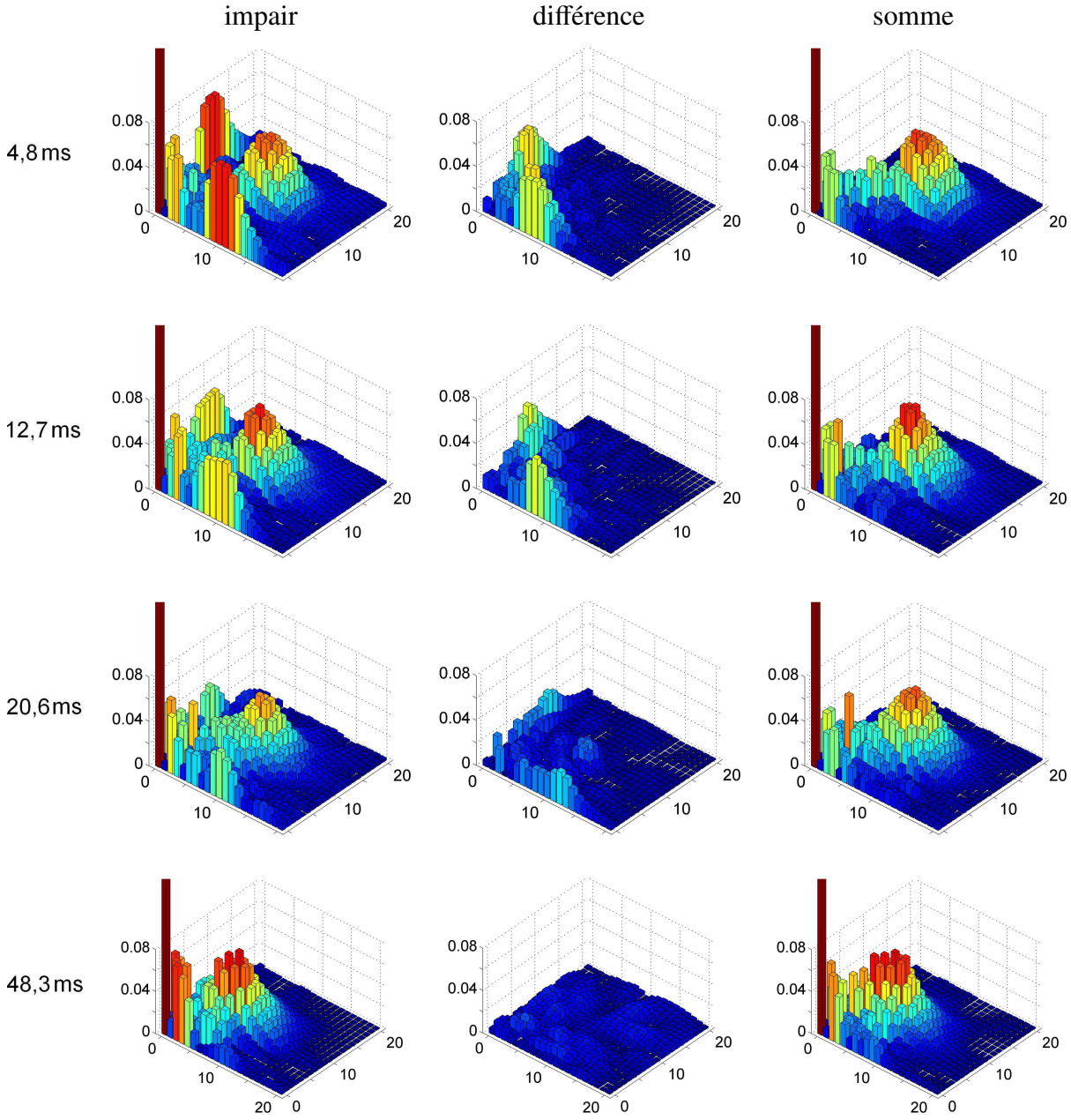


FIG. V.6 – Module des éléments de la matrice densité déplacée (chat impair) reconstruite pour les quatre instants successifs τ = 4,8, 12,7, 20,6 et 48,3 ms. Les éléments $\rho_{0,0}$, tronqués sur les images sont voisins de 0,38 sur l'ensemble des images.

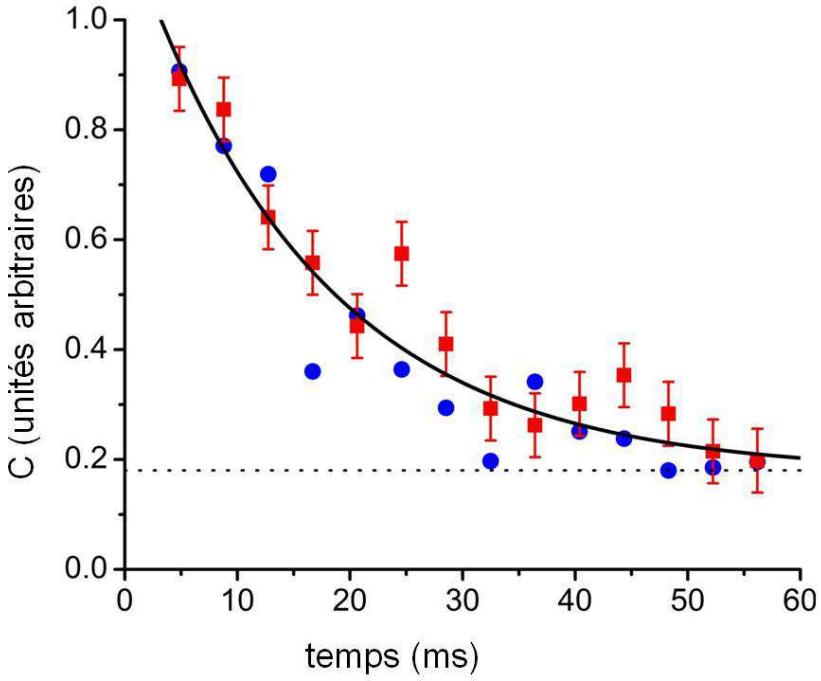


FIG. V.7 – Cohérence $C(t)$ évaluée comme la somme des modules des éléments $\rho_{0,n}(\tau)$ / $n \geq 5$. Les points rouges correspondent au chat pair et les points bleus, au chat impair. Les barres d'erreurs (non représentées pour le chat impair pour plus de lisibilité) sont obtenues en effectuant la reconstruction sur des partitions aléatoires des données expérimentales. Le trait noir représente un ajustement exponentiel donnant un temps de décohérence $T_D = 17 \pm 3$ ms.

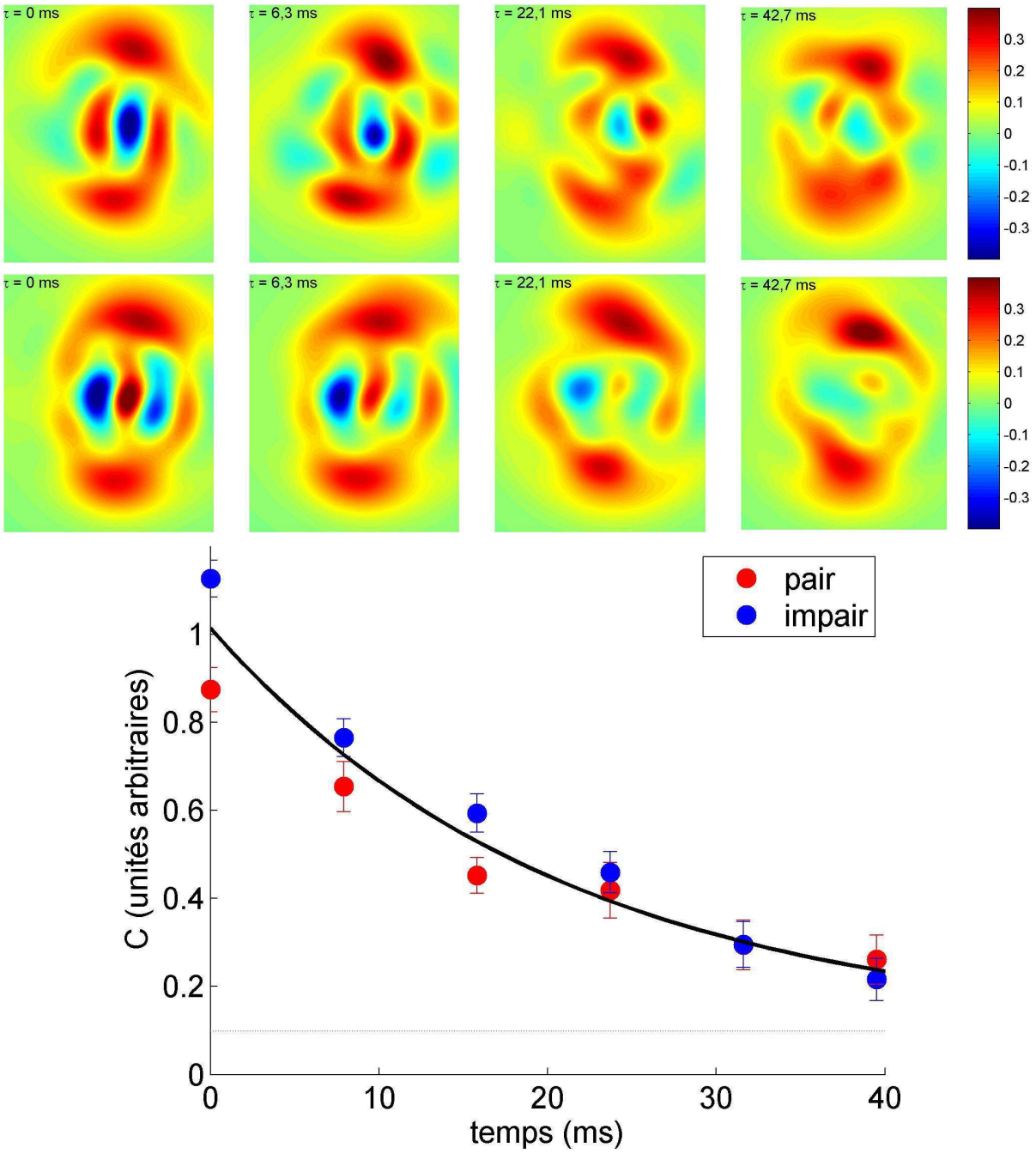


FIG. V.8 – Reconstruction résolue en temps de chats de Schrödinger de séparation $D^2 = 10{,}3$ photons. La première ligne représente quatre images successives de la fonction de Wigner du chat impair, la deuxième ligne représente la fonction de Wigner du chat pair aux mêmes instants $\tau = 0$, 6,3, 22,1 et 42,7 ms. Enfin, les courbes composées des points bleus et rouges montre la cohérence des états pairs et impairs en fonction du temps. La ligne noir est un ajustement exponentiel commun aux deux jeux de données. Le temps de décohérence obtenu est de $T_D = 21 \pm 4$ ms.

Conclusion

La mise en place au cours de mon travail de thèse d'une mesure non-destructive du nombre de photons piégés dans une cavité micro-onde a ouvert de nombreuses perspectives. Le principe même de ce procédé permet d'éclairer sur un exemple concret le concept délicat de mesure quantique. De plus, l'application directe de la mesure non-destructive a permis d'observer pour la première fois les sauts quantiques de la lumière. Ces trajectoires quantiques individuelles similaires aux trajectoires utilisées dans les simulations Monte-carlo redonnent bien l'évolution continue décrite par l'équation maîtresse lorsqu'on les moyenne entre elles. On a d'ailleurs pu confirmer quantitativement que les temps de vie des états de Fock variaient bien comme T_{cav}/n. Nous avons même pu mesurer la légère correction due à la présence des photons thermiques.

Cette mesure du nombre de photons est à la base d'une procédure permettant de reconstruire les états quantiques du champ. Nous avons ainsi pu reconstruire les états produits par l'action en retour de la mesure du nombre de photons. Nous avons pu vérifier que le champ était bien projeté sur un état de Fock à l'issue de la mesure QND. La mesure de parité effectuée par un seul atome permet en outre de préparer un état de type « chat de Schrödinger ». Nous avons reconstruit tout ces états en mesurant une fonction de Wigner généralisée du champ en de nombreux points de l'espace des phases. Nous avons montré dans ce manuscrit qu'il était possible d'améliorer significativement la reconstruction en utilisant plutôt la mesure QND du nombre de photons pour mesurer les populations dans l'état déplacé en différents points de l'espace des phases.

L'état chat de Schrödinger permet de mieux comprendre la frontière entre les mondes quantiques et classiques. La phase du champ jouant alors le rôle d'un indicateur classique préparé dans une superposition de deux valeurs différentes. La reconstruction d'un tel état permet de quantifier la cohérence entre les composantes classiques. En particulier, la fonction de Wigner du champ est un outil permettant de visualiser immédiatement le degré de cohérence de l'état chat de Shrödinger. En reconstruisant l'état pour plusieurs instants successifs après sa préparation, nous avons pu tester notre compréhension du phénomène de décohérence.

Perspectives

Grâce au temps de vie de plus de 100 ms de nos cavités, nous pouvons imaginer mesurer une superposition de près de 100 photons avant qu'elle ne soit détruite par la décohérence. En réalité, la limitation principale vient du temps d'interaction entre atome et cavité. Nous avons vu tout au long du manuscrit les effets de la non-linéarité du déplacement lumineux avec le nombre de photons. En particulier, pour la préparation de superpositions de taille importante, le déphasage

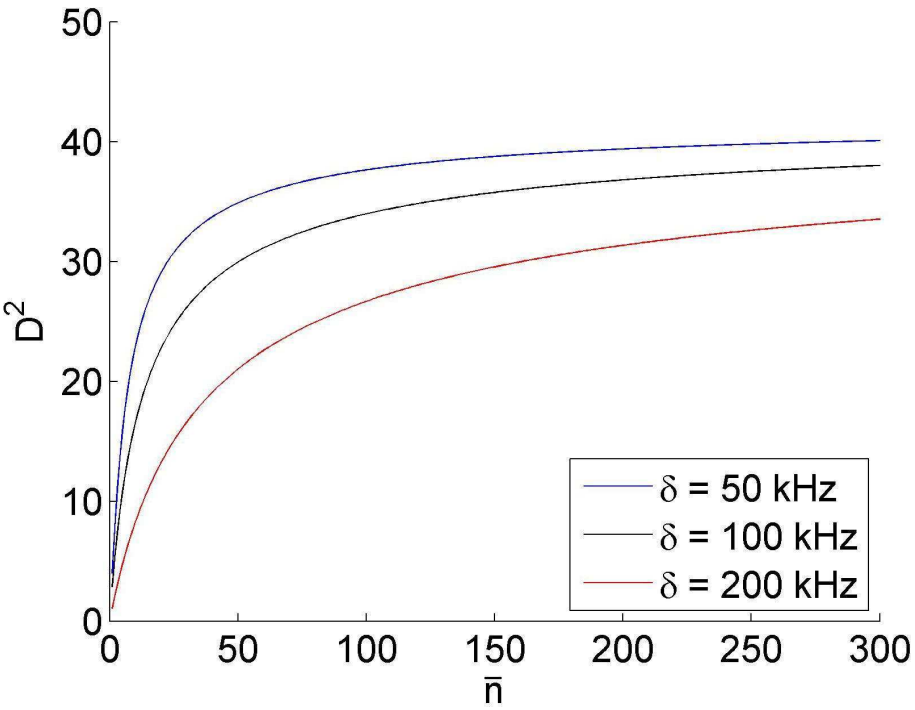


FIG. V.9 – Taille de la superposition produite (en nombre de photons) en fonction du nombre de photons dans le champ cohérent injecté pour différentes valeurs du désaccord atome-champ.

θ des composantes classiques produit par le passage d'un atome diminue pour les nombres de photons importants :

$$\theta = \left.\frac{\partial \Phi(n)}{\partial n}\right|_{\bar{n}}, \tag{V.61}$$

La taille du chat produit est donnée quant à elle par :

$$D^2 = \bar{n}\,[2 \cdot \sin(\theta)]^2 \tag{V.62}$$

où $\bar{n}$ est le nombre de photons injectés initialement dans la cavité. La figure V.9 montre la saturation de la distance des composantes classiques avec le nombre de photons injectés pour différentes valeurs du désaccord. Ainsi, il devient nécessaire de rallonger la durée d'interaction entre le champ et les atomes pour pouvoir augmenter le déphasage produit par le passage d'un atome et pour travailler avec des désaccords plus importants. Les atomes utilisés pour les expériences de préparation d'états chat de Schrödinger ont une vitesse de 250 m/s. La préparation d'atomes plus lents est aujourd'hui difficile à cause de la faible proportion des petites classes de vitesses dans la distribution maxwellienne des vitesses à la sortie du four. De façon plus fondamentale, en dessous d'une cinquantaine de mètres par seconde, la flèche subie par les atomes du jet sous l'effet de la gravité deviendra trop gênante. Ainsi, il n'est guère possible d'augmenter les temps d'interaction dans la version actuelle du montage.

Une nouvelle version du montage devrait permettre de préparer des atomes de Rydberg circulaires à partir d'un jet atomique vertical. Ces atomes très lents devraient permettre dans une

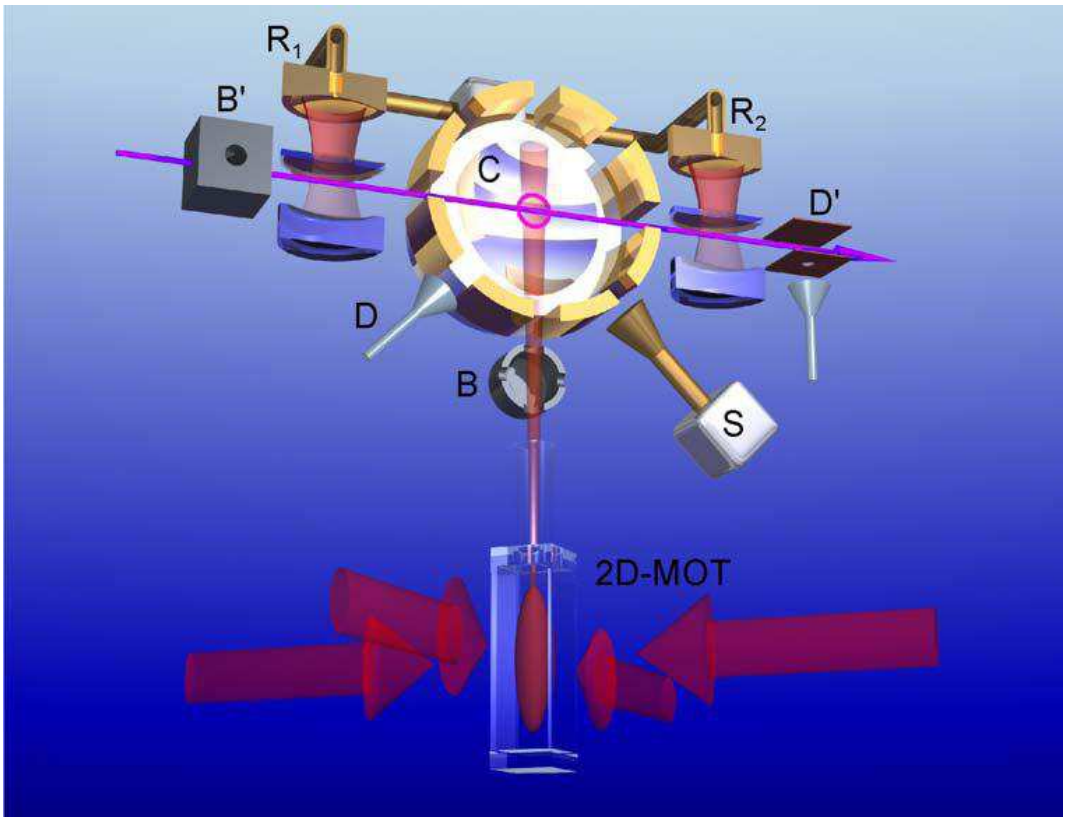


FIG. V.10 – Schéma de principe du futur montage expérimental. En plus des possibilités du montage actuel, un jet atomique vertical permettra de faire interagir des atomes lents avec la cavité.

première version du montage, d'atteindre des temps d'interaction de l'ordre de la milliseconde. Outre la possibilité de préparer des superpositions de grande taille, un tel montage permettra d'accéder à toute une nouvelle physique très riche. Par exemple, il deviendrait possible d'adresser directement les niveaux habillés de l'atome par le champ par spectroscopie lorsque l'atome se trouve dans le mode de la cavité. La figure V.10 montre un schéma du montage prévu : comme dans le montage actuel, un jet d'atomes rapides traverse un interféromètre de Ramsey dans lequel est inséré la cavité micro-onde de grande finesse. En outre, un jet vertical composé d'atomes extraits d'un piège magnéto-optique permettra de préparer dans une seconde boîte à circulariser des atomes lents dans les états de Rydberg. Les atomes pénètrent dans le mode de la cavité par le côté de cette dernière et seront détectés « sur place » par un jeu d'électrodes adapté.

Notre dispositif actuel permet de préparer des états de Fock par application d'une mesure QND du nombre de photons sur un état cohérent. Toutefois, cette technique est longue (la mesure QND implique de nombreux atomes) et aléatoire. En effet, le champ n'est pas préparé dans l'état de Fock désiré de façon déterministe. Le nouveau montage permettra, à l'aide d'un seul atome, de préparer la cavité dans un état de Fock cible. En effet, lorsqu'on injecte un champ cohérent dans la cavité contenant un atome dont une des transitions $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ est proche de résonance, le système atome-champ se trouve dans une superposition cohérente d'états habillés.

Le déplacement lumineux présentant une dépendance en fonction du nombre de photons, on peut exciter sélectivement l'atome habillé dans un niveau auxiliaire $|f\rangle$. La détection de l'atome dans le niveau $|f\rangle$ aura alors pour effet de projeter le champ sur l'état de Fock sélectionné.

Si l'interaction d'un atome dans $[|e\rangle + |g\rangle] / \sqrt{2}$ avec un champ cohérent produit un état de type chat de Schrödinger, on peut aller plus loin en réitérant l'opération plusieurs fois. Une marche aléatoire à une dimension est un processus en plusieurs étapes dans lequel, à chaque étape, le système est déplacé d'une quantité a dans une direction ou dans la direction opposée suivant le résultat d'un tirage aléatoire (un tirage à pile ou face avec une pièce par exemple). Classiquement, après N étapes, la position du système présente une dispersion en $a\sqrt{N}$. On peut à présent considérer une marche aléatoire quantique, par exemple, si la pièce de pile ou face est remplacée par un atome à deux niveaux dont on mélange les niveaux à chaque étape par une impulsion $\pi/2$. Dans ce cas, tout les chemins possibles interfèrent entre eux et on peut montrer que la fonction d'onde après N étapes est essentiellement centrée autour des valeurs maximales du déplacement $\pm aN$ (voir figure V.11). Bien sûr, ce processus est extrêmement sensible à la décohérence : si l'information sur le chemin suivi vient à fuir dans l'environnement, les interférences entre les différents chemins disparaissent. Le dispositif expérimental proposé permet de mettre en pratique une telle marche aléatoire en utilisant un atome lent pour déphaser le champ dans une direction dépendant de l'état interne. On applique ensuite sur place une impulsion $\pi/2$ à l'atome avant de passer à l'étape suivante. Ainsi, la marche aléatoire concerne la position du champ dans l'espace des phases (voir figure V.11). La marche aléatoire a lieu sur un cercle plutôt que sur une droite, ce qui présente l'intérêt supplémentaire d'autoriser des phénomènes d'interférences avec les chemins ayant effectué un tour complet autour du cercle. On peut finalement reconstruire à l'aide des méthodes décrites dans ce mémoire (en utilisant le jet d'atomes rapides) la distribution du champ dans l'espace des phases après N étapes, et ainsi, observer la transition entre la marche aléatoire classique et la marche aléatoire quantique sous l'effet de la décohérence.

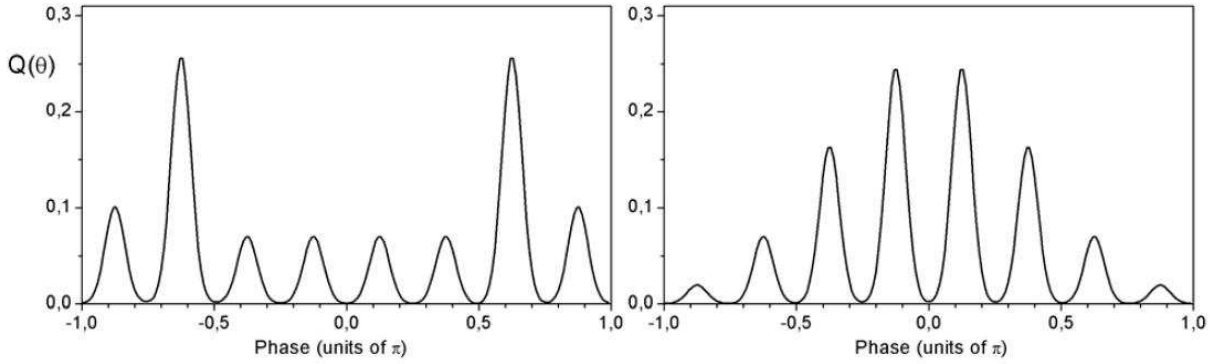


FIG. V.11 – Comparaison entre une marche aléatoire quantique et une marche aléatoire classique dans un système d'électrodynamique quantique en cavité. A gauche, distribution de phase du champ (fonction Q sur un cercle) après 9 étapes d'une marche aléatoire quantique partant d'un champ cohérent contenant 36 photons en moyenne. L'incrément de phase à chaque étape est de $\pi/8$. A droite, distribution de phase pour la marche aléatoire classique correspondante obtenue en mesurant l'atome à chaque étape.

Bibliographie

[1] A. Einstein, B. Podolsky et N. Rosen, "Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete ?", *Phys. Rev.* **47**, 777 (1935).

[2] J. Bell, "On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox", *Phys. (N.Y)* **1**, 195 (1964).

[3] A. Aspect, P. Grangier et G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem", *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981).

[4] E. Schrödinger, "Die gegenwärtige Situation in der Quantenmechanik", *Naturwissenschaften* **23**, 807, 823, 844 (1935).

[5] N. Bohr, *La théorie atomique et la description des phénomènes (1929)*, J. Gabay, Paris (1993).

[6] J. von Neumann, *Mathematishe grundlagen der quanten-mechanik*, Verlag Julius-Springer, Berlin (1932).

[7] D. Leibfried, D. M. Meekhof, B. E. King, C. Monroe, W. M. Itano et D. J. Wineland, "Experimental determination of the motional quantum state of a trapped atom", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4281 (1996).

[8] C. Roos, M. Riebe, H. Haffner, W. Hansel, J. Benhelm, G. Lancaster, C. Becher, F. Schmidt-Kaler et R. Blatt, "Control and measurement of three-qubit entangled states", *Science* **304**, n^o 5676, 1478–1480 (JUN 4 2004), ISSN 0036-8075.

[9] D. Kielpinski, C. Monroe et D. J. Wineland, "Architecture for a large-scale ion-trap quantum computer", *Nature (London)* **417**, 709 (2002).

[10] S. Gulde, M. Riebe, G. P. T. Lancaster, C. Becher, J. Eschner, H. Häffner, F. Schmidt-Kaler, I. L. Chuang et R. Blatt, "Implementation of the Deutsch-Jozsa algorithm on an ion-trap quantum computer", *Nature (London)* **421**, 48 (2003).

[11] F. Schmidt-Kaler, H. Häffner, M. Riebe, S. Gulde, G. P. T. Lancaster, T. Deuschle, C. Becher, C. F. Roos, J. Eschner et R. Blatt, "Realization of the Cirac-Zoller controlled-NOT quantum gate", *Nature (London)* **422**, 408 (2003).

[12] D. Leibfried, B. DeMarco, V. Meyer, D. Lucas, M. Barrett, J. Britton, W. M. Itano, B. Jelenkovic, C. Langer, T. Rosenband et D. J. Wineland, "Experimental demonstration of a robust, high-fidelity geometric two ion-qubit phase gate", *Nature (London)* **422**, 412 (2003).

[13] J. I. Cirac et P. Zoller, "Quantum Computations with Cold Trapped Ions", *Phys. Rev. Lett.* **74**, 4091 (1995).

[14] A. I. Lvovsky, H. Hansen, T. Aichele, O. Benson, J. Mlynek et S. Schiller, "Quantum state reconstruction of the single-photon Fock state", *Physical Review Letters* **87**, n° 5 (2001).

[15] A. Zavatta, S. Viciani et M. Bellini, "Quanturn-to-classical transition with, single-photon-added coherent states of light", *Science* **306**, n° 5696, 660–662 (2004), 20 AMER ASSOC ADVANCEMENT SCIENCE WASHINGTON 866EN.

[16] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri, J. Laurat et P. Grangier, "Generating optical Schrodinger kittens for quantum information processing", *Science* **312**, n° 5770, 83–86 (APR 7 2006), ISSN 0036-8075.

[17] A. Ourjoumtsev, H. Jeong, R. Tualle-Brouri et P. Grangier, "Generation of optical "Schrodinger cats' from photon number states", *Nature (London)* **448**, n° 7155, 784–786 (AUG 16 2007), ISSN 0028-0836.

[18] A. Ourjoumtsev, R. Tualle-Brouri et P. Grangier, "Quantum homodyne tomography of a two-photon fock state", *Phys. Rev. Lett.* **96**, n° 21 (JUN 2 2006), ISSN 0031-9007.

[19] A. Ourjoumtsev, F. Ferreyrol, R. Tualle-Brouri et P. Grangier, "Preparation of non-local superpositions of quasi-classical light states", *Nature Physics* **5**, n° 3, 189–192 (MAR 2009), ISSN 1745-2473.

[20] S. Kuhr, S. Gleyzes, C. Guerlin, J. Bernu, U. Hoff, S. Deléglise, S. Osnaghi, M. Brune, J. Raimond, S. Haroche et al., "Ultrahigh finesse Fabry-Pérot superconducting resonator", *Appl. Phys. Lett.* **90**, 164101 (2007).

[21] D. Schrader, I. Dotsenko, M. Khudaverdyan, Y. Miroshnychenko, A. Rauschenbeutel et D. Meschede, "Neutral Atom Quantum Register", *Phys. Rev. Lett.* **93**, n° 15, 150501 (Oct 2004).

[22] I. Bloch, "Ultracold quantum gases in optical lattices", *Nature Physics* **1**, n° 1, 23–30 (Oct 2005), ISSN 1745-2473.

[23] J. Reichel, W. Hansell et T. Hansch, "Atomic micromanipulation with magnetic surface traps", *Phys. Rev. Lett.* **83**, n° 17, 3398–3401 (Oct 25 1999), ISSN 0031-9007.

[24] R. Blatt et D. Wineland, "Entangled states of trapped atomic ions", *Nature* **453**, n° 7198, 1008–1015 (JUN 19 2008), ISSN 0028-0836.

[25] M. Hofheinz, H. Wang, M. Ansmann, R. C. Bialczak, E. Lucero, M. Neeley, A. D. O'Connell, D. Sank, J. Wenner, J. M. Martinis et A. N. Cleland, "Synthesizing arbitrary quantum states in a superconducting resonator", *Nature (London)* **459**, n° 7246, 546–549 (May 28 2009), ISSN 0028-0836.

[26] J. Majer, J. M. Chow, J. M. Gambetta, J. Koch, B. R. Johnson, J. A. Schreier, L. Frunzio, D. I. Schuster, A. A. Houck, A. Wallraff, A. Blais, M. H. Devoret, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf, "Coupling superconducting qubits via a cavity bus", *Nature* **449**, n° 7161, 443–447 (2007).

[27] E. Lucero, M. Hofheinz, M. Ansmann, R. C. Bialczak, N. Katz, M. Neeley, A. D. O'Connell, H. Wang, A. N. Cleland et J. M. Martinis, "High-fidelity gates in a single josephson qubit", *Phys Rev Lett* **100**, n° 24, 247001 (2008), 18643615.

[28] L. DiCarlo, J. M. Chow, J. M. Gambetta, L. S. Bishop, B. R. Johnson, D. I. Schuster, J. Majer, A. Blais, L. Frunzio, S. M. Girvin et R. J. Schoelkopf, "Demonstration of two-qubit algorithms with a superconducting quantum processor", *Nature* **460**, n° 7252, 240–244 (2009), diCarlo, L. Chow, J. M. Gambetta, J. M. Bishop, Lev S. Johnson, B. R. Schuster, D. I. Majer, J. Blais, A. Frunzio, L. Girvin, S. M. Schoelkopf, R. J.

[29] G. Nogues, *Détection sans destruction d'un seul photon. Une expérience d'électrodynamique quantique en cavité*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1999).

[30] C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, M. Brune, J. Raimond et S. Haroche, "Progressive field-state collapse and quantum non-demolition photon counting", *Nature (London)* **448**, 889 (2007).

[31] S. Gleyzes, S. Kuhr, C. Guerlin, J. Bernu, S. Deléglise, U. Hoff, M. Brune, J. Raimond et S. Haroche, "Quantum jumps of light recording the birth and death of a photon in a cavity", *Nature (London)* **446**, n° 15/03, 297 (2007).

[32] M. Brune, J. Bernu, C. Guerlin, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Gleyzes, S. Kuhr, I. Dotsenko, J. M. Raimond et S. Haroche, "Process Tomography of Field Damping and Measurement of Fock State Lifetimes by Quantum Nondemolition Photon Counting in a Cavity", *PHYSICAL REVIEW LETTERS* **101**, n° 24 (DEC 12 2008), ISSN 0031-9007.

[33] B. Misra et E. Sudarshan, "The Zeno's paradox in quantum theory", *J. Math. Phys.* **18**, 756 (1977).

[34] W. Itano, D. Heinzen, J. Bollinger et D. Wineland, "Quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **41**, n° 5, 2295 (1990).

[35] C. Balzer, R. Huesmann, W. Neuhauser et P. Toschek, "The quantum Zeno effect–evolution of an atom impeded by measurement", *Opt. Commun.* **180**, n° 1-3, 115–120 (2000).

[36] K. Mølhave et M. Drewsen, "Demonstration of the continuous quantum Zeno effect in optical pumping", *Phys. Lett. A* **268**, n° 1-2, 45 (2000).

[37] L. Schulman, "Continuous and pulsed observations in the quantum Zeno effect", *Phys. Rev. A* **57**, n° 3, 1509 (1998).

[38] T. Nakanishi, K. Yamane et M. Kitano, "Absorption-free optical control of spin systems : The quantum Zeno effect in optical pumping", *Phys. Rev. A* **65**, n° 1, 13404 (2001).

[39] B. Nagels, L. J. F. Hermans et P. L. Chapovsky, "Quantum Zeno Effect Induced by Collisions", *Phys. Rev. Lett.* **79**, n° 17, 3097 (Oct 1997).

[40] P. Kwiat, A. White, J. Mitchell, O. Nairz, G. Weihs, H. Weinfurter et A. Zeilinger, "High-Efficiency Quantum Interrogation Measurements via the Quantum Zeno Effect", *Phys. Rev. Lett.* **83**, n° 23, 4725 (1999).

[41] M. Fischer, B. Gutiérrez-Medina et M. Raizen, "Observation of the Quantum Zeno and Anti-Zeno Effects in an Unstable System", *Phys. Rev. Lett.* **87**, n° 4, 40402 (2001).

[42] J. Bernu, S. Deleglise, C. Sayrin, S. Kuhr, I. Dotsenko, M. Brune, J. M. Raimond et S. Haroche, "Freezing Coherent Field Growth in a Cavity by the Quantum Zeno Effect", *Phys. Rev. Lett.* **101**, n° 18 (OCT 31 2008), ISSN 0031-9007.

[43] J. Bernu, *Mesures QND en Électrodynamique Quantique en Cavité : Production et Décohérence d'États de Fock - Effet Zénon*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2008).

[44] M. Brune, E. Hagley, J. Dreyer, X. Maître, A. Maali, C. Wunderlich, J.-M. Raimond et S. Haroche, "Observing the progressive decoherence of the meter in a quantum measurement", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4887 (1996).

[45] C. Shannon, "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal* **27**, n° 3, 379–423 (1948), ISSN 0005-8580.

[46] N. Gisin, "Stochastic quantum dynamics and relativity", *Helvetica physica acta* **62**, n° 4, 363–371 (May 1989), ISSN 0018-0238.

[47] E. Wigner, "On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium", *Physical Review* **40**, n° 5, 749–759 (1932).

[48] S. Haroche et J. Raimond, *Exploring the Quantum, Atoms, Cavities, and Photons*, Oxford Graduate Texts (2006).

[49] K. Cahill et R. Glauber, *Phys. Rev.* **177**, 1857 (1969).

[50] B.-G. Englert, N. Sterpi et W. Walther, "Parity states in the one-atom maser", *Opt. Commun.* **100**, 526 (1993).

[51] L. Lutterbach et L. Davidovich, "Method for direct measurement of the Wigner function in cavity QED and ion traps", *Phys. Rev. Lett.* **78**, n° 13, 2547 (1997).

[52] J. Raimond, T. Meunier, P. Bertet, S. Gleyzes, P. Maioli, A. Auffeves, G. Nogues, M. Brune et S. Haroche, "Probing a quantum field in a photon box", *Journal of physics B-atomic molecular and optical physics* **38**, n° 9, Sp. Iss. SI, S535–S550 (MAY 14 2005), ISSN 0953-4075.

[53] J. Bertrand et P. Bertrand, "A tomographic approach to Wigner function", *Foundations of Physics* **17**, n° 4, 397–405 (APR 1987), ISSN 0015-9018.

[54] G. Nogues, A. Rauschenbeutel, S. Osnaghi, M. Brune, J. M. Raimond et S. Haroche, "Seeing a single photon without destroying it", *Nature (London)* **400**, 239 (1999).

[55] V. B. Braginsky, Y. I. Vorontsov et K. Thorne, "Quantum Nondemolition Measurements", *Science* **209**, n° 4456, 547 (1980).

[56] V. B. Braginsky et Y. I. Vorontsov, "Quantum-mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental technique", *Physics-Uspekhi* **17**, n° 5, 644 (1975).

[57] K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann et V. D. Sandberg, "Quantum Nondemolition Measurements of Harmonic Oscillators", *Phys. Rev. Lett.* **40**, n° 11, 667 (Mar 1978).

[58] K. S. Thorne, R. W. P. Drever, C. M. Caves, M. Zimmermann et V. D. Sandberg, "Quantum Nondemolition Measurements of Harmonic Oscillators", *Phys. Rev. Lett.* **40**, n° 11, 667 (Mar 1978).

[59] J. P. Poizat et P. Grangier, "Exprimental realization of a quantum optical tap", *Physical Review Letters* **70**, n° 3, 271–274 (1993).

[60] J. F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J. M. Courty et S. Reynaud, "Quantum Non-demolition measurements in optics - a review and some recent experimental results", *Applied Physics B-Photophysics and Laser Chemistry* **55**, n° 3, 291–297 (1992).

[61] P. Grangier, J. A. Levenson et J. P. Poizat, "Quantum non-demolition measurements in optics", *Nature* **396**, n° 6711, 537–542 (1998).

[62] J. A. Levenson, I. Abram, T. Rivera, P. Fayolle, J.-C. Garreau et P. Grangier, "Quantum optical cloning amplifier", *Phys. Rev. Lett.* **70**, 267 (1993).

[63] S. F. Pereira, Z. Y. Ou et H. J. Kimble, "Backaction evading measurements for quantum nondemolition detection and quantum optical tapping", *Phys. Rev. Lett.* **72**, 214 (1994).

[64] J. F. Roch, K. Vigneron, P. Grelu, A. Sinatra, J. P. Poizat et P. Grangier, "Quantum non-demolition measurements using cold trapped atoms", *Physical Review Letters* **78**, n° 4, 634–637 (1997).

[65] S. Peil et G. Gabrielse, "Observing the Quantum Limit of an Electron Cyclotron : QND Measurements of Quantum Jumps between Fock States", *Phys. Rev. Lett.* **83**, n° 7, 1287 (Aug 1999).

[66] D. J. Wineland, J. J. Bollinger, W. M. Itano et D. J. Heinzen, "Squeezed atomic states and projection noise in spectroscopy", *Phys. Rev. A* **50**, n° 1, 67 (Jul 1994).

[67] T. Sauter, W. Neuhauser, R. Blatt et P. E. Toschek, "Observation of Quantum Jumps", *Phys. Rev. Lett.* **57**, n° 14, 1696 (Oct 1986).

[68] T. Basche, S. Kummer et C. Braeuchle, "Direct spectroscopic observation of quantum jumps of a single molecule", *Nature (London)* **373**, n° 6510, 132 (1995).

[69] A. Lupascu, S. Saito, T. Picot, P. de Groot, C. Harmans et J. Mooij, "Quantum non-demolition measurement of a superconducting two-level system", *Nature Phys.* **3**, 119 (2006).

[70] T. Meunier, I. Vink, L. Willems van Beveren, F. Koppens, H. Tranitz, W. Wegscheider, L. Kouwenhoven et L. Vandersypen, "Nondestructive measurement of electron spins in a quantum dot", *Phys. Rev. B* **74**, n° 19, 195303 (2006).

[71] H.-P. Breuer et F. Petruccione, *The theory of open quantum systems*, Oxford university press (2002).

[72] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer et A. Faridani, "Measurerment of the Wigner distribution and the density-matrix of a light mode using optical homodyne tomography - application to squeezed states and the vacuum", *Physical Review Letters* **70**, n° 9, 1244–1247 (1993), 23 AMERICAN PHYSICAL SOC COLLEGE PK KN887.

[73] S. Schiller, G. Breitenbach, S. F. Pereira, T. Muller et J. Mlynek, "Quantum statistics of the squeezed vacuum by measurement of the density matrix in the number state representation", *Physical Review Letters* **77**, n° 14, 2933–2936 (1996), 27 AMERICAN PHYSICAL SOC COLLEGE PK VJ723.

[74] M. G. A. Paris et J. Rehacek, *Quantum state estimation*, Springer (2004).

[75] W. Band et J. Park, "Quantum state determination - quorum for a particule in one dimension", *American Journal of Physics* **47**, n° 2, 188–191 (1979), ISSN 0002-9505.

[76] E. T. Jaynes, "INFORMATION THEORY AND STATISTICAL MECHANICS .2", *Physical Review* **108**, n° 2, 171–190 (1957).

[77] V. Buzek, G. Adam et G. Drobny, "Quantum state reconstruction and detection of quantum coherences on different observation levels", *Physical Review A* **54**, n° 1, 804–820 (1996), 75 AMERICAN PHYSICAL SOC COLLEGE PK UX034.

[78] A. Lvovsky, "Iterative maximum-likelihood reconstruction in quantum homodyne tomography", *JOURNAL OF OPTICS B-QUANTUM AND SEMICLASSICAL OPTICS* **6**, n° 6, Sp. Iss. SI, S556–S559 (JUN 2004), ISSN 1464-4266.

[79] N. Ramsey, *Molecular beams*, International series of monographs on physics, Oxford, 1985 (1956).

[80] W. Itano et N. Ramsey, "Accurate measurement of time", *Scient. Am.* **269**, n° 1, 56 (1993).

[81] R. Hulet et D. Kleppner, "Rydberg Atoms in" Circular" States", *Phys. Rev. Lett.* **51**, n° 16, 1430 (1983).

[82] J. Hare, *Étude théorique et expérimentale des atomes de Rydberg circulaires : vers une mesure directe de la constante de Rydberg en unités de fréquence*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (1991).

[83] M. Gross et J. Liang, "Is a circular Rydberg atom stable in a vanishing electric field ?", *Phys. Rev. Lett.* **57**, n° 25, 3160 (1986).

[84] H. Kogelnik et T. Li, "Laser beams and resonators", *Appl. Opt* **5**, n° 10, 1550 (1966).

[85] S. Gleyzes, *Vers la préparation de cohérences quantique macroscopiques : réalisation d'un montage à deux cavités supraconductrices*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2006).

[86] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, second édition (1975).

[87] P. Bosland, A. Aspart, E. Jacques et M. Ribeaudeau, "Preparation and RF tests of L-band superconducting niobium-coated copper cavities", dans "1998 Applied Superconductivity Conference", tome 9, pages 896–899, Ieee-Inst Electrical Electronics Engineers Inc, Palm Desert, California (1998), 13 NEW YORK 2 Part 1 225LY.

[88] J. Kim, K. Romero, A. Horiguti, L. Davidovich, M. Nemes et A. Piza, "Classical behavior with small quantum numbers : The physics of Ramsey interferometry of Rydberg atoms", *Phys. Rev. Lett.* **82**, n° 24, 4737–4740 (June 14 1999), ISSN 0031-9007.

[89] E. M. Purcell, "Spontaneous Emission Probabilities at Radio Frequencies", *Phys. Rev.* **69**, 681 (1946).

[90] C. Guerlin, *Mesure quantique non destructive répétée de la lumière : états de Fock et trajectoires quantiques*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2007).

[91] S. Osnaghi, P. Bertet, A. Auffeves, P. Maioli, M. Brune, J.-M. Raimond et S. Haroche, "Coherent control of an atomic collision in a cavity", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 037902 (2001).

[92] S. Zheng et G. Guo, "Efficient scheme for two-atom entanglement and quantum information processing in cavity QED", *Phys. Rev. Lett.* **85**, n° 11, 2392–2395 (SEP 11 2000), ISSN 0031-9007.

[93] W. Nagourney, J. Sandberg et H. Dehmelt, "Shelved Optical Electron Amplifier : Observation of Quantum Jumps", *Phys. Rev. Lett.* **56**, 2797 (1986).

[94] P. Maioli, *Détection non destructive d'un atome unique par interaction dispersive avec un champ mésoscopique dans une cavité*, Thèse de doctorat, Université Paris 6 (2004).

[95] A. Lupaşcu, C. Verwijs, R. Schouten, C. Harmans et J. Mooij, "Nondestructive Readout for a Superconducting Flux Qubit", *Phys. Rev. Lett.* **93**, n° 17, 177006 (2004).

[96] J. Berezovsky, M. Mikkelsen, O. Gywat, N. Stoltz, L. Coldren et D. Awschalom, "Nondestructive Optical Measurements of a Single Electron Spin in a Quantum Dot", *Science* **314**, n° 5807, 1916 (2006).

[97] M. Brune, S. Haroche, J. M. Raimond, L. Davidovich et N. Zagury, "Manipulation of photons in a cavity by dispersive atom-field coupling : Quantum-nondemolition measurements and generation of ''Schrödinger cat'' states", *Phys. Rev. A* **45**, n° 7, 5193 (Apr 1992).

[98] R. Jozsa, "Fidelity for mixed quantum states", *Journal of modern optics* **41**, n° 12, 2315–2323 (Dec 1994), ISSN 0950-0340.

[99] S. M. Barnett et R. P. M., *Methods in Theoretical Quantum Optics*, Oxford university press, second édition (1997).

[100] J. Dalibard, Y. Castin et K. Mølmer, "Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics", *Phys. Rev. Lett.* **68**, n° 5, 580 (1992).

[101] G. Lindblad, "On the generators of quantum dynamical semigroups", *Commun. Math. Phys.* **48**, n° 2, 119 (1976).

[102] M. Plenio et P. Knight, "The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics", *Rev. Mod. Phys.* **70**, n° 1, 101 (1998).

[103] M. Kim et V. Buzek, "Schroedinger-cat states at finite temperature - influence of a finite-temperature heat bath on quantum interferences", *Phys. Rev. A* **46**, n° 7, 4239–4251 (OCT 1 1992), ISSN 1050-2947.

[104] S. Deleglise, I. Dotsenko, C. Sayrin, J. Bernu, M. Brune, J.-M. Raimond et S. Haroche, "Reconstruction of non-classical cavity field states with snapshots of their decoherence", *NATURE* **455**, n° 7212, 510–514 (SEP 25 2008), ISSN 0028-0836.

[105] J. A. Wheeler et W. H. Zurek, *Theory of Measurement*, Princeton University Press, Princeton (1983).