HAL
open science

Propagation acoustique dans les milieux poreux hétérogènes

Zine El Abiddine E.A. Fellah

To cite this version:

Zine El Abiddine E.A. Fellah. Propagation acoustique dans les milieux poreux hétérogènes. Acoustique [physics.class-ph]. Université de la Méditerranée - Aix-Marseille II, 2007. tel-00477405

HAL Id: tel-00477405

https://theses.hal.science/tel-00477405

Submitted on 29 Apr 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mémoire
d'Habilitation à Diriger des Recherches

Titre du projet de recherche réalisé :

Propagation acoustique dans les milieux poreux hétérogènes.

Présenté par
Zine El Abiddine FELLAH
CR1 au LMA, CNRS Marseille

Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, CNRS-UPR 7051, 31 chemin Joseph Aiguier, Marseille, 13402, France

Mél : Fellah@lma.cnrs-mrs.fr

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à Mr. Claude Depollier, Professeur à l'Université du Maine (France), qui m'a accueilli au sein de son équipe et a encadré ma thèse de Doctorat. Je le remercie tout particulièrement pour m'avoir initié à la recherche, son suivi scientifique, sa disponibilité et ses encouragements pendant toutes ces années. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Mr. Mohamed Fellah, Professeur à la Faculté de Physique de l'Université d'Alger (USTHB) pour sa collaboration scientifique très fructueuse notamment pour la résolution mathématique des équations de propagations dans le régime temporel (haute et basse fréquence). Je le remercie pour son aide scientifique qui a été déterminante pour la résolution des problèmes directs.

Je voudrai également remercier Mr. Walter Lauriks, Professeur à l'Université Catholique de Louvain (Belgique) qui a facilité mon arrivée en Belgique au Laboratoire d'Acoustique et de Thermique pour un poste post-doctoral. Je le remercie d'avoir cru en mes idées scientifiques et d'avoir mis à ma disposition les moyens nécessaires pour les réaliser.

Je remercie Messieurs Vitali Gusev, Professeur à l'Université du Maine, Claude Boutin, Professeur à l'école nationale des travaux publics de l'État (ENTPE)à Vaulx-en-Velin et Patrick Chabrand, Professeur à la Faculté des Sciences de Luminy à Marseille, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs au sein du jury de cette Habilitation Universitaire.

Je voudrai également remercier Messieurs Jean-Marc Conoir, Directeur de recherche CNRS au Laboratoire d'Acoustique Ultrasonore et d'Electronique de l'Université du Havre et Jean Kergomard, Directeur de Recherches au Laboratoire d'Acoustique et de Mécanique de Marseille, d'avoir accepté de participer au jury de cette Habilitation.

Je ne veux pas oublier Monsieur Jean Yves Chapelon ,Directeur du laboratoire INSERM (unité 556) pour m'avoir accueilli pendant deux années consécutives au sein de son laboratoire. Je le remercie pour ses encouragements et son aide scientifique.

Que ma famille, amis et collègues (Erick Ogam, Farid Mitri, Naima Sebaa) soient ici chaleureusement remerciés.

A la mémoire de ma grand mère "El Alia".

Table des matières

1 Curriculum Vitae détaillé. 6
1.1 Etat civil . . . 6
1.2 Formation . . . 6
1.3 Publications . . . 6
1.4 Résumé des activités en matière de recherche . . . 6
1.4.1 Thèse de Doctorat (Le Mans) . . . 6
1.4.2 Stage de Post Doctorat à Leuven (Belgique) . . . 6
1.4.3 Stage de Post Doctorat à l'INSERM (Lyon) . . . 6
1.4.4 Chercheur CR1 au CNRS (Marseille) . . . 7
1.5 Encadrement . . . 7
1.5.1 Encadrement de projets . . . 7
1.5.2 Encadrement de thèses . . . 7
1.6 Collaborations scientifiques . . . 7
1.7 Distinctions . . . 8
1.8 Expertise . . . 8
1.8.1 Articles . . . 8
1.8.2 Projets . . . 8
1.9 Description des activités d'enseignement . . . 8

2 Matériaux poreux à structure rigide : Modèle du Fluide Equivalent 10
2.1 Introduction . . . 10
2.2 Paramètres décrivant les matériaux poreux . . . 11
2.3 Hypothèses . . . 12
2.4 Modèles des susceptibilités dynamiques . . . 13
2.4.1 Le modèle de Johnson pour la tortuosité dynamique . . . 13
2.4.2 Le modèle équivalent pour la compressibilité dynamique . . . 13
2.4.3 Les extensions des Modèles par Pride et Lafarge . . . 14
2.5 Modélisation temporelle de la propagation : régime asymptôtique . . . 15
2.5.1 Notion de dérivée fractionnaire et équation de propagation . . . 15
2.5.2 Solution de l'équation de propagation (Modèle Johnson-Allard) . . . 17
2.5.3 Solution de l'équation de propagation (Modèle Pride-Lafarge) . . . 19
2.5.4 Opérateur de réflexion et de transmission . . . 20
2.5.5 Simulations numériques . . . 21
2.5.6 Onde transmise . . . 24
2.5.7 Onde réfléchie par la première interface en incidence normale . . . 25
2.5.8 Onde réfléchie par la première interface en incidence oblique . . . 28
2.5.9 Onde réfléchie par la première et la seconde interface . . . 33
2.5.10 Onde réfléchie et onde transmise . . . 40
2.5.11 Multicouches . . . 43
2.6 Régime Visqueux . . . 53
2.6.1 Conclusion . . . 59

3 Causalité : Vérification des relations de Kramers-Kronig 61
3.1 Introduction . . . 61
3.2 Rappels Mathématiques et Notations . . . 61
3.3 Théorie . . . 62
3.4 Equation d'onde dans le domaine temporel . . . 63
3.5 Théorie causale . . . 64
3.6 Application aux milieux poreux . . . 66
3.7 Causalité du modèle de Johnson . . . 68

3.8 Conclusion 69

4 Matériaux poreux à structure souple : Modèle de Biot 70
4.1 Introduction 70
4.2 Modélisation temporelle de la théorie de Biot 70
4.2.1 Ondes Longitudinales 71
4.2.2 Opérateurs de réflexion et de transmission 72
4.2.3 Sensibilité des Paramètres de la théorie de Biot modifiée 73
4.2.4 Mesures Ultrasonores 79
4.2.5 Conclusion 80
4.3 Caractérisation ultrasonore de l'os humain : problème inverse 82
4.3.1 Problème inverse 82
4.3.2 Mesures ultrasonores 85
4.3.3 Conclusion 90

5 Définition du Projet de Recherche 91
5.1 Introduction : les besoins et les enjeux 91
5.2 Situation actuelle de la recherche acoustique dans le domaine des matériaux poreux ; ouverture sur des recherches futures 91
5.3 Equation de Propagation dans un milieu poreux inhomogène à structure rigide . 92
5.3.1 Conclusion 95
5.4 Projet de recherche : propagation acoustique dans les matériaux inhomogènes et techniques de caractérisation 95

A Solution de l'équation de Propagation : Modèle de Johnson-Allard 97
A.1 Calcul de $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\right)$ 97
A.1.1 Cas ou $\Delta^2 = 0$ 97
A.1.2 Cas où $\Delta^2 > 0$ 97

B Solution de l'équation de propagation : Modèle de Pride-Lafarge. 102

C Calul de la transformée de Laplace inverse 105

D Calcul des opérateurs de réflexion et de transmission 106

E Expressions développées des opérateurs de réflexion et de transmission. 108

F Expressions des opérateurs de réflexion et de transmission pour un bi-couches de milieux poreux 110

G Opérateur de réflexion dans le régime visqueux 112

H Conditions aux limites : théorie de Biot 115

I Opérateurs de réflexion et de transmission : théorie de Biot 116

J Production Scientifique du Candidat et Enseignement 126
J.1 Journaux internationaux à comité de lecture 126
J.2 Conférences invitées internationales avec publication dans des Actes 128
J.3 Congrès internationaux avec publication dans des Actes 128
J.4 Congrès nationaux sans publication d'Actes 130
J.5 Ouvrages 130
J.6 Séminaires invités 131

J.7 Transfert de connaissances 131
J.8 Descriptif des Enseignements 131

1 Curriculum Vitae détaillé.

1.1 Etat civil

Né le 22-04-1975.
Adresse professionnelle : Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique de Marseille, CNRS-UPR 7051, 31 chemin Joseph Aiguiller 13402 Marseille cedex 20.
Téléphone : 04 91 16 42 54. Fax 04 91 16 42 54
Mél. : Fellah@lma.cnrs-mrs.fr.

1.2 Formation

-1996 : DES (Diplome d'Etudes Supérieures), "Physique des matériaux", USTHB, Alger.
-1997 : DEA "Acoustique Appliquée", LAUM, Le Mans.
-2000 : Doctorat en Acoustique.
-2001 : Demi-ATER au LAUM, Le Mans (durée 12 mois).
-2002 : Post doctorat à l'Université de Louvain (durée 12 mois).
-2003 : Post doctorat à l'INSERM, Lyon (durée 24 mois)

1.3 Publications

-33 Publications dans des revues internationales.
-2 Conférences invitées.
-4 Participations à des ouvrages.
-30 Communications dans des actes de congrès.
Le détail est donné à la fin de ce mémoire

1.4 Résumé des activités en matière de recherche

1.4.1 Thèse de Doctorat (Le Mans)

Titre : Contribution à la propagation des ondes acoustiques dans les matériaux poreux : approche temporelle. Soutenue le 15 Décembre 2000. La thèse a été préparée au sein du laboratoire d'Acoustique de l'Université du Maine (LAUM) sous la direction du Prof. C. Depollier. L'objectif était la modélisation de la propagation acoustique dans les milieux poreux dans le domaine temporel. Le concept de dérivée fractionnaire a été introduit et utilisé. Il s'est avéré bien adapté à la description des pertes et à la caractérisation des poreux.

1.4.2 Stage de Post Doctorat à Leuven (Belgique)

Ce stage d'une année s'est déroulé au sein du laboratoire d'Acoustique et de Thermique de l'Université Catholique de Louvain sous la direction du Prof. W. Lauriks. Ce stage avait deux objectifs : le premier était de vérifier la causalité des modèles de relaxation décrivant les pertes dans les milieux poreux suite à un doute apparu dans la littérature ; le second objectif consistait à proposer une nouvelle méthode dynamique de mesure de la porosité qui était jusque là mesurée seulement en régime statique, à partir des mesures en réflexion en utilisant une nouvelle génération de transducteur aériens (Ultran).

1.4.3 Stage de Post Doctorat à l'INSERM (Lyon)

Ce stage de deux années s'est déroulé au laboratoire Application des ultrasons à la thérapie, INSERM, unité 556 sous la direction du Dr. Jean Yves Chapelon. Le but de ce stage était la modélisation de la propagation ultrasonore dans les tissus biologiques poreux avec application

aux tissus osseux. Les ondes de Biot ont été mises en évidence expérimentalement et ont été exploitées pour la caractérisation acoustique des tissus osseux.

1.4.4 Chercheur CR1 au CNRS (Marseille)

J'ai été recruté en qualité de chercheur CNRS (CR1) au laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (LMA) de Marseille en octobre 2004, par la section interdiciplinaire 44 "Modélisation mathématiques dans les tissus biologiques". Depuis mon recrutement, j'ai crée une nouvelle opération de recherche "Onde et vibration dans les poreux". J'ai proposé de nouvelles techniques ultrasonores de caractérisation des tissus osseux en résolvant le problème inverse sur l'os spongieux en utilisant des ondes ultrasonores longitudinales et de cisaillement. J'ai mis en place de nouveaux dispositifs de caractérisation des mousses plastiques ainsi que de nouveaux logiciels.

1.5 Encadrement

1.5.1 Encadrement de projets

- Encadrement du stage de dernière année d'école d'ingénieur (100%) de Nadir Moussaoui, " Caractérisation acoustiques des matériaux poreux ", durée : 6 mois (2005), LMA-CNRS, Marseille.
- Encadrement du stage de DEA de Nesrine Amirouche (100%), " Résolution numérique des équations de propagation dans les poreux hétérogènes .", durée : 1 an (2003-2004), INSERM Lyon.
- Encadrement du stage de deuxième année d'école d'ingénieur (100%) de Julien Royer, " Réalisation d'un code de calcul sur la propagation dans les poreux à structure rigide ", durée : 2 mois (Juillet-Aout 2003).

1.5.2 Encadrement de thèses

- Co-encadrement de la thèse de Sylvain Berger (50 %) en collaboration avec C. Depollier (50%) " Détermination des propriétés mécaniques et acoustiques des matériaux poreux à structure souple : Application à la caractérisation ultrasonore des tissus osseux", 2000-2004. Thèse en collaboration avec l'Université Catholique de Louvain (Belgique) / l'Université du Maine (France).
- Co-encadrement de la thèse de Naima Sebaa (40%) en collaboration avec W. Lauriks (30%) et C. Depollier (30%) " Caractérisation acoustique des matériaux poreux à structure souple et rigide en hautes et basses fréquences", 2003-2006. Thèse en collaboration avec l'unité 556 INSERM de Lyon (France)/ l'Université Catholique de Louvain (Belgique).
- Co-encadrement de la thèse de Laurent Deryck (40%) en collaboration avec W. Lauriks (30%) et A. Wirgin (30%) " Propagation acoustique dans les milieux inhomogènes (dispersion fréquentielle et spatiale)", 2004-2007. Thèse en collaboration avec l'unité 556 de L'INSERM de Lyon (France) / l'Université Catholique de Louvain (Belgique).
- Co-encadrement de la thèse de Sylvain Erard (40%) en collaboration avec E. Ogam (30%) et A. Wirgin (30%) "Caractérisation vibroacoustique des tissus osseux ", 2005-2007. Thèse arrêtée LMA Marseille.
- Co-encadrement de la thèse de E. Ogam (30%) en collaboration de A. Wirgin (70%), "Caractérisation vibroacoustique des tissus biologiques" 2004-2007.

1.6 Collaborations scientifiques

Grâce à mon parcours scientifique : Alger - Le Mans - Louvain - Lyon - Marseille, et aux rencontres que j'ai faites durant mes stages Post Doctoraux, j'ai pu développer plusieurs collaborations scientifiques qui se sont avérées très fructueuses avec les équipes de recherche de

l'Université Catholique de Louvain en Belgique notemment avec le Prof. W. Lauriks, S. Berger et N. Sebaa sur l'aspect expérimental et l'inversion de données pour la cractérisation acoustique des poreux. Je collabore toujours avec mon ancien directeur de thèse le Prof C. Depollier sur des idées de modélisation de la propagation dans les matériaux poreux inhomogènes, ainsi qu'avec le Prof. M. Fellah du laboratoire de Physique Théorique-USTHB-Alger où j'effectue fréquemment des séjours pour le développement de l'aspect mathématique de la résolution des équations d'ondes dans le domaine temporel et sur les techniques numériques.

1.7 Distinctions

Prix **Yves Rocard** décerné par la Société Française d'Acoustique (S.F.A) récompensant un jeune chercheur dans le domaine de l'Acoustique.

1.8 Expertise

1.8.1 Articles

Referee d'articles pour des revues internationales : Acta-Mechanica (2002) , Journal of the Acoustical Society of America (2003-2005), Journal of Sound and Vibration (2003), Proceedings A of the Royal Society (2005). International Journal of Mathematics and Mathematical Science (2005).

1.8.2 Projets

Expert d'un projet (de 3 ans) à la fondation de la Recherche pour l'Aéronautique et l'Espace.

1.9 Description des activités d'enseignement

1997 $\mapsto$ 2000 : Doctorat, vacations	185 h (équivalent TD) au total.
2000 $\mapsto$ 2001 : Demi-ATER, vacations,	141 h (équivalent TD) au total.
2004 $\mapsto$ 2004 : Demi-ATER,	96 h (équivalent TD) au total.
2005 $\mapsto$ 2007 : CNRS vacation,	24 h (cours).

Matières	Type	Niveau, lieu	heures
Electroacoustique Mécanique Vibrations Instrumentation, Métrologie Mathématiques	TD TP TP TD	DEUST Vibration, Acoustique Signal, Université du Maine.	60 30 48 30
Mathématiques	TD	Licence CMAO, Le Mans.	16
Electronique	TD	DEUG SM, Le Mans.	30
Electronique Thermodynamique, Relativité, Optique, Ondes.	TP TP-TD	DEUG MIAS-SM, Le Mans.	105 66
Matériaux.	TP	Licence professionnelle Ingénierie Acoustique et Vibrations Université du Maine.	24
Résistance des Matériaux.	TP	DEUG MIAS-SM, Le Mans.	105
Mathématiques.	Cours-TD	Licence Génie Informatique MIAGE (Méthodes Informatique Appliquées à la Gestion) Lyon1.	34
Modélisation Mathématique en Mécanique des milieux continus.	TD	MMIM (Maîtrise en Mathématiques Informatique et Modélisation) Lyon1.	29
Milieux poreux	Cours	3ème année Ecole Centrale de Marseille (Acoustique, Son et Environnements)	24

Note : le contenu des enseignements est présenté à la fin de ce mémoire.

2 Matériaux poreux à structure rigide : Modèle du Fluide Equivalent

2.1 Introduction

Un matériau poreux est un milieu diphasique constitué d'une partie solide (squelette) et d'une partie fluide. Lors de la propagation d'une onde sonore dans un tel milieu, des interactions entre ces deux phases de natures différentes ont lieu, donnant diverses propriétés physiques non usuelles au milieu poreux. Ne serait-ce qu'en ce qui concerne les propriétés du fluide, la grande surface de contact entre solide et fluide, qui est la caractéristique principale des poreux induit de nouveaux phénomènes de diffusion et de transport dans le fluide, en relation avec la micro-géométrie particulière de l'espace poreux. De nombreuses applications sont concernées par la compréhension du comportement des ondes acoustiques dans de tels milieux. En géophysique, on s'intéresse à la propagation des ondes acoustiques dans les roches poreuses, pour obtenir les informations sur la composition des sols et sur leur contenu en fluide. Les compagnies pétrolières ont fortement contribué à l'étude des propriétés acoustiques des milieux poreux naturels. En médecine, la caractérisation des milieux poreux tels que l'os trabéculaire, est utile pour diagnostiquer l'ostéoporose, maladie du tissu osseux qui se manifeste par la détérioration de la microarchitecture de l'os.

Les matériaux poreux saturés d'air sont souvent utilisés comme absorbant acoustique pour lutter contre les nuisances sonores. Les mousses polyuréthanes, les feutres ou les laines de verre sont trois exemples de matériaux employés fréquemment dans les industries aéronautique et automobile et dans le bâtiment. Généralement, lorsqu'une onde acoustique se propage dans un matériaux poreux saturé d'air, la structure reste immobile et indéformable vis à vis de l'excitation acoustique, ceci est dû à la lourdeur et la raideur du squelette de la structure par rapport à l'air. On parle alors de matériau poreux à structure rigide, dans ce cas, on utilise le modèle du fluide équivalent où les effets visco-thermique sont déconnectés [103]. Les interactions fluide-structure responsables de l'atténuation sonore (particulièrement importante dans les poreux), sont décrites par deux susceptibilités dynamiques ; la tortuosité et la compressibilité dynamique. La tortuosité dynamique [56] décrit les effets inertiels et visqueux, la compressibilité dynamique [22, 2] représente les effets thermiques. Une prédiction du comportement acoustique du matériau poreux requiert la détermination des deux susceptibilités dynamiques. Ces dernières ne peuvent dépendre que des caractéristiques physiques du fluide ainsi que de la géométrie du domaine fluide. La propagation du son dans un fluide saturant fait intervenir à la fois un caractère de transport et de un caractère de diffusion. Le caractère de transport est lié au fait qu'un mouvement global fluide/solide est induit lors de la propagation. Le caractère de diffusion est lié aux dilatations/compressions du fluide. Celles-ci ont pour résultat une variation de température fluide/solide (ce dernier restant à température ambiante) entraînant une diffusion de la chaleur, non négligeable si le fluide est un gaz. En outre, dans le cas de la propagation du son, la fréquence du mouvement joue un rôle important. Aux deux extrémités basses fréquences et hautes fréquences, les équations qui gouvernent le comportement acoustique du fluide se simplifient et les paramètres entrant en jeu sont différents. Il est clair que le caractère du mouvement est modifié aux différentes fréquences, le fluide sonde différents aspects de la micro géométrie. En principe on doit s'attendre à ce qu'il existe une infinité de paramètres géométriques. Mais d'un autre coté, d'un point de vue pratique, l'information apportée par un jeu fini de paramètres basses et hautes fréquences peut être suffisante pour décrire les susceptibilités dynamiques. Pour une fréquence donnée, on peut définir une épaisseur de couche limite, respectivement visqueuse et thermique $\delta = (2\eta/\omega\rho_f)^{1/2}$, $\delta' = (2\kappa/\rho_f C_p \omega)^{1/2}$, η où est la viscosité, ρ_f la densité du fluide, κ le coefficient de conduction thermique, C_p la chaleur spécifique à pression constante et ω la pulsation. Les grandeurs δ et δ' sont respectivement les profondeurs de pénétration des mouvement rotationels visqueux et isothermal. La couche limite considérée est " petite " si la profondeur de

pénétration est petite devant un " rayon " caractéristique des pores. On se situe alors dans les hautes fréquences. La situation inverse correspond aux basses fréquences. En haute fréquences, les effets inertiels sont décrits par la tortuosité α_∞, les pertes visco-thermiques par les longueurs visqueuses et thermiques Λ et Λ', respectivement. En basses fréquences, les effets inertiels sont représentés par le paramètre inertiel de Pride α_0, et les échanges visco-thermiques par les perméabilités visco-thermique k_0 et k'_0. La porosité ϕ est un paramètre jouant un rôle important aussi bien en haute qu'en basse fréquence.

2.2 Paramètres décrivant les matériaux poreux

Il existe plusieurs paramètres géométriques que l'on peut associer à une structure poreuse. Certains dépendent uniquement de la forme du solide poreux et ne varient pas lorsqu'on dilate ou change l'échelle du solide. C'est le cas de la porosité et de la tortuosité. D'autres dépendent des dimensions, c'est le cas des perméabilités visqueuses et thermiques qui varient, à forme égale comme une surface et des longueurs caractéristiques visqueuses et thermiques qui varient comme des longueurs.

- **Porosité** ϕ : La porosité d'un matériau poreux saturé par un fluide est définie par le rapport du volume du fluide saturant le milieu poreux sur le volume total de l'échantillon. Cette grandeur est sans dimension et pouvant varier de 0 (matériau solide non poreux) à 1 (fluide libre).

- **Tortuosité** α_∞ : La tortuosité est un paramètre géométrique décrivant l'aspect sinueux des pores et le couplage inertiel entre fluide et la structure du matériau en régime haute fréquence. La tortuosité prend sa plus faible valeur ($\alpha_\infty = 1$) dans le cas de matériaux poreux ayant des pores droits et de grandes valeurs ($\alpha_\infty = 1.5$, 2) pour les matériau les plus résistifs.

- **Résistivité spécifique au passage d'un fluide** σ : Lorsqu'un matériau poreux placé dans un tube aux parois étanches, est traversé par un fluide, il apparaît une différence de pression entre ces deux faces libres. Il existe une relation de proportionnalité entre débit Q_v et chute de pression ΔP donnée par la loi de Darcy $\Delta P = RQ_v$, le coefficient R correspond à la résistance au passage du fluide et peut donc se définir comme le rapport $\Delta P/Q_v$. Pour un matériau poreux homogène, cette résistance est proportionnelle à la longueur d de l'échantillon et inversement à la section de sa droite S. On peut définir alors, la résistivité comme étant la résistance spécifique au passage d'un fluide. Notée σ, cette résistivité est définie par : $\sigma = (S/d)R$.

- **Perméabilité visqueuse** k_0 : La perméabilité statique visqueuse est reliée à la résistivité au passage du fluide par la relation $k_0 = \eta/\sigma$, η est la viscosité dynamique du fluide. La perméabilité visqueuse est un paramètre géométrique, homogène à une surface (elle s'exprime en m^2), elle est indépendante de la nature du fluide saturant et ne dépend que de la géométrie interne du matériau poreux. Ce paramètre représente la section effective des pores pour l'écoulement du fluide, il est connecté au comportement basse fréquence des échanges visqueux entre le fluide saturant et la structure du poreux.

- **Longueur caractéristique visqueuse** Λ : Les travaux de Johnson *et al* [56] en 1987 caractérisation des effets visqueux en haute fréquence en introduisant la longueur caractéristique visqueuse Λ donnée par $\frac{2}{\Lambda} = \frac{\int_S u^2 dS}{\int_V u^2 dV}$ où u est la vitesse microscopique d'un fluide parfait incompressible, S l'aire de l'interface entre les phases solide et fluide et V le volume du fluide. La longueur Λ est donc un paramètre géométrique. Cette définition vaut pour

une surface solide fluide régulière et pour une épaisseur de couche limite faible devant le rayon de courbure caractéristique de l'interface. Lorsque la surface des pores présente des singularités (pointes), cette définition de la longueur caractéristique n'est plus valable. Le paramètre Λ est un indicateur de la taille des pores étroits, lieu privilégié des échanges visqueux.

- **Longueur caractéristique thermique** Λ' : En 1991, Champoux et Allard [22] ont introduit par analogie avec Johnson *et al* [56] un paramètre géométrique appelé longueur caractéristique thermique donnée par $\frac{2}{\Lambda'} = \frac{\int_S dS}{\int_V dV}$. En d'autres termes Λ' est le double du rapport du volume fluide sur la surface de contact totale entre le solide et le fluide. Le facteur 2 est introduit pour que dans le cas des pores cylindriques, Λ' correspond au rayon des pores. La longueur Λ' est un indicateur de la taille des grands pores, lieu privilégié des échanges thermiques.

- **Perméabilité thermique** k'_0 : L'étude des effets visqueux et thermiques montre qu'il existe des similitudes entre ces deux effets. Mis à part le fait que, pour les effets visqueux intervient le champ de vecteur vitesse et que pour les effets thermiques c'est le champ scalaire de la température excédentaire, les équations régissant ces grandeurs sont similaires. Partant de l'équation de diffusion de la chaleur, Lafarge [63, 64] introduit l'équivalent d'une loi de Darcy pour la température excédentaire en introduisant un nouveau paramètre : la perméabilité thermique k'_0 qui est l'inverse de la constante de piégeage.

2.3 Hypothèses

Les matériaux poreux naturels (roches) ou artificiels (céramiques, laines de verre, mousses plastiques...) possèdent une microgéométrie complexe qui rend difficile toute approche microscopique. Pour appliquer les résultats de la mécanique des milieux continus aux poreux, il est nécéssaire de travailler à une échelle plus grande permettant une description macroscopique. Pour cela quelques hypothèses simplificatrices doivent être prises en compte.

- **Continuité** : Nous considérons une perturbation de petite amplitude de l'état d'équilibre thermodynamique ambiant, perturbation liée au passage de l'onde sonore dans le fluide saturant. Nous supposons que les dimensions des pores sont suffisamment grandes, de sorte qu'à l'échelle microscopique le fluide peut encore être considéré comme un milieux continu.

- **Homogénéité** : Comme les matériaux poreux possèdent une structure désordonnée résultant d'une hétérogénéité microscopique, les paramètres décrivant sa géométrie doivent être définis à une échelle macroscopique où la microgéométrie est caractérisée de façon statistique. Les variables décrivant le mouvement sont par conséquent des grandeurs résultant d'une moyenne des quantitées définies à l'échelle microscopique sur un élément de volume macroscopique.

- **Grande longueur d'onde** : Pour appliquer les outils de la mécanique des milieux continus, la longueur d'onde des différentes ondes pouvant se propager dans le matériau est supposée grande devant la taille du volume d'homogénéisation. Cette condition nous permet de négliger les effets de la diffusion et de la dispersion spatiale et de considérer le fluide comme étant incompressible à l'échelle du pore.

- **Isotropie** : Dans cette étude, les milieux poreux sont supposés isotropes. Cette hypothèse est souvent vérifée, même si certains matériaux poreux artificiels présentent une légère anisotropie dont on peut tenir compte dans les différents modèles de propagation.

– **Structure rigide** : L'hypothese de structure rigide signifie que l'onde sonore ne se propage que dans le fluide, ce qui est généralement réalisé avec une bonne approximation quand la structure est trop lourde et / ou trop raide, pour être mise en mouvement par les mouvements acoustiques du fluide. Pour modéliser la propagation dans les matériaux à structure rigide, la théorie de Biot qui prend en compte les mouvements du fluide et du solide ne sera pas nécessaire. Seule le domaine connexe occupé par le fluide nous interesse et, la structure étant indéformable vis-à-vis de la perturbation acoustique, les éventuelles portions fluides enfermées par la structure n'interviennent pas.

2.4 Modèles des susceptibilités dynamiques

Il existe plusieurs modèles décrivant les échanges inertiels, visqueux et thermiques entre fluide et structures. Nous présenterons ici les plus élaborés.

2.4.1 Le modèle de Johnson pour la tortuosité dynamique

Johnson *et al* [56] ont proposé un modèle simple décrivant la fonction $\alpha(\omega)$, tortuosité dynamique, lorsque la structure poreuse est saturée par un fluide visqueux newtonien. Ce modèle peut être appliqué au cas de nos structures poreuses saturées par de l'air. Deux paramètres du modèle, la tortusité α_∞ et la longueur carcatéristique visqueuse Λ interviennent dans une limite haute fréquence :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty \left(1 - \frac{2}{\Lambda}\left(\frac{\eta}{j\omega\rho_0}\right)^{1/2}\right), \qquad \omega \longrightarrow \infty. \tag{1}$$

où j est l'imaginaire pur ($j^2 = -1$), η la viscosité dynamique du fluide, ω la pulsation, ρ_0 la densité du fluide.
Dans la limite basse fréquence, un troisième paramètre intervient, la perméabilité visqueuse $k_0 = \frac{\eta}{\sigma}$ (ayant la dimension d'une surface), σ étant la résistance spécifique au passage du fluide. L'expression de la tortuosité dynamique dans ce domaine de fréquence est donnée par :

$$\alpha(\omega) = -\frac{\eta\phi}{\rho_0 k_0 j\omega}, \qquad \omega \longrightarrow 0 \tag{2}$$

La signification des quantités α_∞, Λ, k_0 a été donnée précédemment. Johnson *et al* supposent que ces trois paramètres géométriques fournissent une information suffisante sur la microgéométrie. L'expression générale proposée pour $\alpha(\omega)$ est alors celle de la fonction analytique la plus simple vérifiant ces limites :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty \left(1 - \frac{1}{jx}\sqrt{1 - \frac{M}{2} j\, x}\right) \qquad \text{où} \qquad x = \frac{\omega\alpha_\infty\rho_0}{\sigma\phi} \quad \text{et} \quad M = \frac{8k_0\alpha_\infty}{\phi\Lambda^2}. \tag{3}$$

2.4.2 Le modèle équivalent pour la compressibilité dynamique

Un modèle semblable au précédent a été établi pour la dependence en fréquence des échanges thermiques entre le fluide et la structure, dans le cas où la capacité calorifique de la partie solide est grande. Le résultat est un modèle à deux paramètres, Λ' et k_0'/ϕ, les quantités Λ', et k_0' pour les effets thermiques jouant respectivement le rôle de Λ et k_0 pour les effets visqueux. Dans une limite haute fréquence, Allard et Champoux [22, 2] ont montré le comportement suivant de $\beta(\omega)$:

$$\beta(\omega) = 1 - \frac{2(\gamma-1)}{\Lambda'}\left(\frac{\eta}{P_r\rho_0}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{j\omega}\right)^{1/2}, \qquad \omega \longrightarrow \infty, \tag{4}$$

où Pr est le nombre de Prandt, K_a le module de compressibilité du fluide et γ la constante adiabatique. Comme précédemment, ce comportement suppose que l'épaisseur de couche limite thermique δ' devient petite devant tout rayon de courbure caractéristique de l'interface. On peut voir qu'il n'existe pas l'équivalent de la tortuosité α_∞ pour les effets thermiques ; à trés hautes fréquence $\beta(\omega)$ tend vers 1 alors que $\alpha(\omega)$ tend vers la tortuosité α_∞.

Dans une limite basse fréquence, Lafarge [63, 64] a montré que :

$$\beta(\omega) = \gamma + \frac{(\gamma-1)\rho_0 k_0' P_r}{\eta\phi\, j\omega}, \qquad \text{lorsque} \qquad \omega \longrightarrow 0. \tag{5}$$

où k_0', qui a la même dimension (surface) que la perméabilité de Darcy k_0, est un paramètre analogue au paramètre k_0, mais adapté au problème thermique. L'expression générale proposée pour $\beta(\omega)$ est alors celle de la fonction analytique la plus simple vérifiant les limites (4) et (5) :

$$\beta(\omega) = \gamma - (\gamma-1)/\left[1 - \frac{1}{j\,x'}\sqrt{1 - \frac{M'}{2} j\,x'}\right] \qquad \text{où} \qquad x' = \frac{\omega\rho_0 k_0' P_r}{\eta\phi} \quad \text{et} \quad M' = \frac{8k_0'}{\phi\Lambda'^2}.$$

la grandeur k_0', introduite par Lafarge et appelée perméabilité thermique par analogie à la perméabilité visqueuse.

2.4.3 Les extensions des Modèles par Pride et Lafarge

Le développement de Johnson *et al* en haute fréquence pour la tortuosité dynamique s'arrête au terme $\frac{1}{\sqrt{j\omega}}$, Pride *et al* [89] ont proposé la suite du dévelopement au second terme correctif et qui est en $\frac{1}{j\omega}$. Le dévelopement asymptotique de la tortuosité dynamique désormais s'écrit de la manière suivante :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty\left(1 - \frac{2}{\Lambda}\left(\frac{\eta}{j\omega\rho_0}\right)^{1/2} - \frac{\sigma\phi(1-p)}{j\omega\rho_0\alpha_\infty}\right), \qquad \omega \longrightarrow \infty. \tag{6}$$

Le paramètre de Pride p [89, 63] est un paramètre géométrique sans dimension relié à un terme correctif α_0 jouant le rôle de l'inertie du fluide à basses fréquences :

$$p = \frac{M}{4\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_\infty} - 1\right)}, \qquad \text{où} \qquad M = \frac{8k_0\alpha_\infty}{\phi\Lambda^2}.$$

Le dévelopement basse fréquence de la tortuosité dynamique est donc donné par :

$$\alpha(\omega) = -\frac{\eta\phi}{\rho_0 k_0 j\omega} + \alpha_0, \qquad \omega \longrightarrow 0 \tag{7}$$

La nouvelle expression de la fonction analytique prenant en compte les dévelopements (6) et (7) est donnée par :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty\left(1 - \frac{1}{jx}\left(1 - p + p\sqrt{1 - \frac{M}{2p^2} j\,x}\right)\right),$$

La valeur de p dépend de la géométrie des pores, par exemple dans le cas des pores cylindriques à section circulaire, on montre que $p = 3/4 = 0.75$. Pour des sections de forme rectangulaire, on obtient des valeurs proches de celles-ci.

Pour les effers thermiques, Lafarge [63, 64] propose une expression semblable pour la compressibilité dynamique thermique en introduisant également un paramètre sans dimension p' et

donnant une correction au modèle d'Allard et Champoux en haute fréquence. L'expression de la compressibilité dynamique est alors donnée par :

$$\beta(\omega) = 1 - (\gamma - 1)\left[\frac{2}{\Lambda'}\left(\frac{\eta}{P_r\rho_0}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{j\omega}\right)^{1/2} + \left(\frac{\eta\phi}{k_0' P_r\rho_0}\right).\left(\frac{1-p'}{j\omega}\right)\right], \qquad \omega \longrightarrow \infty. \tag{8}$$

Le paramètre p' est relié à α_0', équivalent thermique de α_0, qui décrit l'inertie thermique fluide à basse fréquence [63] :

$$p' = \frac{M'}{4(\alpha_0' - 1)}.$$

L'expression générale de la compressibilité dynamique sera alors donnée par :

$$\beta(\omega) = \gamma - (\gamma - 1)/\left[1 - \frac{1}{j\,x'}\left(1 - p' + p'\sqrt{1 - \frac{M'}{2p'^2} j\,x'}\right)\right].$$

On peut remarquer que les modèles de Pride et Lafarge se réduisent à ceux de Johnson et Allard lorsque $p = 1$ et $p' = 1$. Nous verrons dans la suite l'influence de ces paramètres sur la propagation.

2.5 Modélisation temporelle de la propagation : régime asymptôtique

L'utilisation des signaux transitoires lors de la caractérisation acoustique des milieux poreux est très utilisée expérimentalement. Ces signaux possèdent un large contenu fréquentiel rendant ainsi compliquées certaines approches fréquentielles (comme le problème de déroulement du spectre de phase). Les méthodes fréquentielles sont très efficaces pour les signaux monochromatiques, cependant pour les signaux transitoires, l'approche temporelle [27, 93, 79, 24, 50] est la mieux adaptée pour plusieurs raisons : 1-l'analyse temporelle est naturellement bornée (limitée) par la durée finie des implusions ; 2-la modélisation temporelle est souvent plus facile à développer, car plus proche de la réalité exprimentale ; 3-dans de nombreuses situations, l'introduction du paramètre temps facilite l'analyse des résultats expérimentaux ; 4-pour certaines applications, elle est rapide puisqu'elle évite les allers et retours entre domaine temporel et fréquentiel par FFT ; 5-elle fournit une solution élégante au problème direct indispensable pour la résolution du problème inverse ;6 -enfin, elle est mieux adaptée pour les comparaisons simulation-expérience. En contre partie de ces avantages, il est nécessaire d'utiliser un nouveau formalisme mathématique. Dans l'approche fréquentielle, les grandeurs pertinentes concernant la caractérisation des milieux poreux sont des fonctions de la fréquence qu'on peut interpréter comme des susceptibilités. Alors que les techniques fréquentielles conduisent aux réponses fréquentielles du milieu, dans l'approche temporelle, on s'intéresse plutôt à ces réponses impulsionelles.

2.5.1 Notion de dérivée fractionnaire et équation de propagation

Dans le régime asymptôtique correspondant aux hautes fréquences, les interactions fluide-structure sont décrites par les expressions (1) et (4) selon le modèle de Johnson-Allard. Ecrire les équations dans le domaine temporel revient à prendre la transformée de Fourier inverse de (1) et (4). L'équivalent temporel de $-j\omega$ est $\partial/\partial t$, alors que l'équivalent temporel de $\sqrt{j\omega}$ est une dérivée fractionnaire d'ordre 1/2. La définition de la dérivée fractionnaire d'ordre ν est donnée par [90] :

$$D^{\nu}[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\int_0^t (t-u)^{-\nu-1} x(u)du, \tag{9}$$

où $\Gamma(x)$ représente la fonction eulérienne de première espèce [1]. D'après la définition (9), les expressions des facteurs de réponses $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ sont alors données dans le domaine temporel par [27] :

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &\xrightarrow{t} \alpha_\infty \delta(t) + \chi_v(t), \\ \beta(\omega) &\xrightarrow{t} \delta(t) + \chi_{th}(t), \end{aligned}$$

où $\delta(t)$ représente la distribution de Dirac et les opérateurs $\chi_v(t)$ et $\chi_{th}(t)$ sont donnés par :

$$\begin{aligned} \chi_v(t) &= \frac{2\rho_f \alpha_\infty}{\Lambda} \sqrt{\frac{\eta}{\pi \rho_f}}\, t^{-1/2}, \\ \chi_{th}(t) &= \frac{2(\gamma-1)}{K_a \Lambda'} \sqrt{\frac{\eta}{\pi Pr \rho_f}}\, t^{-1/2}, \end{aligned}$$

Dans ce modèle, la convolution temporelle de $t^{-1/2}$ avec une fonction, est interprété comme un opérateur de dérivée fractionnaire. Les équations de bases sont données par [27] :

$$\rho_f \alpha_\infty\, \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r},t) + \int_0^t \chi_v(t-t')\, \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r},t')\, dt' = -\nabla p(\mathbf{r},t), \tag{10}$$

$$\frac{1}{K_a}\, \partial_t p(\mathbf{r},t) + \int_0^t \chi_{th}(t-t')\, \partial_t p(\mathbf{r},t')\, dt' = -\nabla.\mathbf{v}(\mathbf{r},t). \tag{11}$$

Ces relations constitutives dans le domaine temporel vérifient le principe de causalité. Dans ces équations, p est la pression acoustique, $\mathbf{v}$ la vitesse particulaire. Le paramètre α_∞ reflète la réponse instantannée du milieu poreux et décrit le couplage inertiel entre fluide et structure. Par réponse instantanné, nous entendons que la réponse temporelle est plus petite que l'échelle du temps caractéristique à la variation du champ acoustique. Les suceptibilités χ_v et χ_{th} sont des opérateurs mémoire qui déterminent la dispersion du milieu.

Nous suposons que le milieu varie uniquement avec l'épaisseur x, et que l'onde incidente est plane et normale à la surface du matériau. La pression acoustique est notée par $p(x,t)$. Nous supposons que le champ de pression est nul pour les instants antérieurs à 0. L'équation d'onde pour le champ de pression acoustique d'un milieu poreux dispersif ayant une structure rigide est obtenue à partir des équations constitutives (10, 11), et est de la forme :

$$\partial_x^2 p(x,t) - \frac{1}{c_0^2}\left[\alpha_\infty \partial_t^2 p(x,t) + \left(\alpha_\infty K_a \chi_{th} + \frac{\chi_v}{\rho_f} + c_0^2 \chi_{th} * \chi_v\right) * \partial_t^2 p(x,t)\right] = 0, \tag{12}$$

où $c_0 = (K_a/\rho_f)^{1/2}$ est la vitesse du fluide libre. Les notations suivantes sont utilisées pour les intégrales de convolution :

$$[f * g](x,t) = \int_0^t f(x,t-t') g(x,t') dt'.$$

L'équation de propagation(12) peut être écrite comme :

$$\frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} - A \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial t^2} - B \int_0^t \frac{\partial^2 p(x,t)/\partial t'^2}{\sqrt{t-t'}} dt' - C \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0, \tag{13}$$

où les coefficients A, B et C sont constants et donnés par :

$$A = \frac{\rho_f \alpha_\infty}{K_a}, \quad B = \frac{2\alpha_\infty}{K_a} \sqrt{\frac{\rho_f \eta}{\pi}} \left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{Pr}\Lambda'}\right) \quad C = \frac{4\alpha_\infty(\gamma-1)\eta}{K_a \Lambda \Lambda' \sqrt{Pr}},$$

respectivement. Le coefficient A donne la vitesse $c = 1/\sqrt{\rho_f \alpha_\infty / K_a}$ de l'onde dans l'air saturant le milieu poreux. α_∞ joue le rôle de l'indice de réfraction du milieu poreux qui change la valeur de la vitesse de $c_0 = \sqrt{K_a/\rho_f}$ dans l'espace libre à $c = c_0/\sqrt{\alpha_\infty}$ dans le milieu poreux. Les autres coefficients dépendent essentiellement des longueurs caractéristiques Λ et Λ' et expriment les interactions fluide-structure de nature visco-thermique. La constante B décrit la dispersion du signal et C l'atténuation de l'amplitude de l'onde (sans dispersion).

L'équation de propagation (13) décrit l'évolution de l'onde acoustique à l'intérieur du matériau poreux. Les conditions aux limites n'ayant pas été introduites, le milieu poreux est supposé être infini. Les coefficients de l'équation de propagation ne dépendent pas de la porosité, en effet, la porosité apparaît au niveau des interfaces du matériau poreux via les relations de continuité du débit acoustique (le débit est égal à la porosité multiplié par la vitesse). Ce paramaître apparaît naturellement au niveau de la réflexion et la transmission d'une onde acoustique par un matériau poreux.

La solution de l'équation de propagation (13) est donnée par la fonction de Green G du milieu poreux définie par :

$$p(x,t) = \int_0^t G(x, t-t')p(0,t)dt',$$

où p est la pression acoustique dans le milieu poreux et $p(0,t)$ le signal incident.

2.5.2 Solution de l'équation de propagation (Modèle Johnson-Allard)

Pour résoudre l'équation de propagation et obtenir la fonction de Green du milieu, nous allons résoudre [28] l'équation (13) en utilisant la méthode de trabsformée de Laplace prenant en compte les conditions initiales de causalité suivantes :

$$p(x,t)|_{t=0} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = 0. \tag{14}$$

Notons par $P(x,z)$ la transformée de Laplace de $p(x,t)$ définie par :

$$P(x,z) = \mathcal{L}\left[p(x,t)\right] = \int_0^\infty \exp(-zt)p(x,t)dt,$$

et la transformée de Laplace inverse par :

$$p(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[P(x,z)\right].$$

En utilisant les relation suivantes :

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1, \qquad \mathcal{L}\left[H(t)\right] = \frac{1}{z} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{z}},$$

où $H(t)$ est la fonction saut de Heaviside, la transformée de Laplace de l'équation d'onde (13) est :

$$\frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial x^2} - z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{C}{z} + B\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right)P(x,z) = -\left(\frac{1}{c^2} + B\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right)\left(zp(x,0) + \frac{\partial p(x,0)}{\partial t}\right) - Cp(x,0). \tag{15}$$

En prenant en compte les conditions initiales (14), l'équation (15) se simplifie en

$$\frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial x^2} - z^2\left(\frac{1}{c^2} + \frac{C}{z} + B\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right)P(x,z) = 0,$$

qui est une équation différentielle du second ordre à coefficients réels constants. La solution générale de l'équation est donc :

$$P(x,z) = e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\varphi(z) + e^{\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\psi(z),$$

où $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont deux fonctions indépendantes de x et :

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{Cc^2}{z} + Bc^2\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right) = z^2 + Bc^2\sqrt{\pi}z\sqrt{z} + Czc^2 = z(z + b'\sqrt{z} + c'). \tag{16}$$

Dans l'équation (16), les constantes b' et c' sont positives et sont données par :

$$b' = Bc^2\sqrt{\pi} \quad \text{and} \quad c' = Cc^2. \tag{17}$$

En retenant la solution finie à l'infini, qui correspond à la solution physique de notre problème, on a

$$P(x,z) = e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\varphi(z).$$

La solution de l'équation (13) est la transformée de Laplace inverse de $P(x,z)$. On obtient ainsi :

$$p(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\varphi(z)\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\right) * \mathcal{L}^{-1}\left(\varphi(z)\right).$$

Le coeur du problème est le calcul de la transformée de Laplace inverse (voir Annexe A) du terme $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\right)$. Ceci a été bien étudié dans la référence [28]. En posant :

$$\Delta^2 = b'^2 - 4c', \tag{18}$$

il est facile de vérifier que Δ^2 est toujours positif dans le cadre du modèle de Johnson-Allard. Quand $\Delta = 0$, la solution de l'équation de propagation (13) est donnée [28] par :

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'x}{c}\int_{x/c}^{t}\frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(\tau - x/c)}\right)p(0,t-\tau)d\tau, & \text{si} \quad t > x/c, \end{cases} \tag{19}$$

où $p(0,t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\varphi(z)\right)$. Dans ce cas la fonction de Green est donnée [28, 29] par :

$$G(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'x}{c}\frac{1}{(t - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(t - x/c)}\right), & \text{if} \quad t > x/c, \end{cases} \tag{20}$$

Quand $\Delta^2 > 0$, la solution générale de l'équation de propagation est donnée par :

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ \frac{x}{c}\int_{x/c}^{t}\left(\frac{b'}{4\sqrt{\pi}}\frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(\tau - x/c)}\right) + \Delta\int_0^{\tau - x/c}h'(\xi)d\xi\right)p(0,t-\tau)d\tau, & t > x/c. \end{cases} \tag{21}$$

où :

$$h'(\xi) = -\frac{1}{4\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{(\tau-\xi)^2 - x^2/c^2}}\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{(\tau-\xi)^2 - x^2/c^2} + b'(\tau-\xi)\right)^2}{16\xi}\right)$$
$$\times\left(\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{(\tau-\xi)^2 - x^2/c^2} + b'(\tau-\xi)\right)^2}{8\xi} - 1\right)\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Dans ce cas, la fontion de Green est donnée par :

$$G(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ \frac{x}{c}\left(\frac{b'}{4\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(t - x/c)}\right) + \Delta\int_0^{t - x/c}h'(\xi)d\xi\right), & \text{si} \quad t > x/c. \end{cases} \tag{22}$$

2.5.3 Solution de l'équation de propagation (Modèle Pride-Lafarge)

Les extensions (A) de Pride-Lafarge (6,8) s'expriment dans le domaine temporel [30] en utilisant la définition de dérivée fractionnaire :

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha_\infty \left(\delta(t) + \frac{2}{\Lambda} \left(\frac{\eta}{\rho_f} \right)^{1/2} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} + \frac{\sigma\phi(1-p)}{\rho_f \alpha_\infty} \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} \right),$$

$$\tilde{\beta}(t) = \delta(t) + (\gamma - 1) \left(\frac{2}{\Lambda'} \left(\frac{\eta}{P_r \rho_f} \right)^{1/2} \frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}} + \frac{\eta\phi(1-p')}{k_0' P_r \rho_f} \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}} \right),$$

$\tilde{\alpha}(t)$ et $\tilde{\beta}(t)$ sont les opérateurs de tortuosité et compressibilité. Dans ces équations, l'opérateur $\frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}}$ réprésente l'intégrale temporelle :

$$\frac{\partial^{-1} x(t)}{\partial t^{-1}} = \int_0^t x(t')dt',$$

et le semi-opérateur $\frac{\partial^{-1/2}}{\partial t^{-1/2}}$ représente la dérivée fractionnaire. Dans ce cas, les équations de base sont données par :

$$\rho_f \alpha_\infty \, \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \chi_v'(t - t') \, \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{r}, t') \, dt' = -\nabla p(\mathbf{r}, t), \tag{23}$$

$$\frac{1}{K_a} \, \partial_t p(\mathbf{r}, t) + \int_0^t \chi_{th}'(t - t') \, \partial_t p(\mathbf{r}, t') \, dt' = -\nabla . \mathbf{v}(\mathbf{r}, t), \tag{24}$$

où les opérateurs $\chi_v'(t)$ et $\chi_{th}'(t)$ sont donnés par :

$$\chi_v'(t) = \frac{2\rho_f \alpha_\infty}{\Lambda} \sqrt{\frac{\eta}{\pi \rho_f}} \, t^{-1/2} + \sigma\phi(1-p) \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}},$$

$$\chi_{th}'(t) = \frac{2(\gamma - 1)}{K_a \Lambda'} \sqrt{\frac{\eta}{\pi P r \rho_f}} \, t^{-1/2} + \frac{(\gamma - 1)\eta\phi(1-p')}{k_0' P_r \rho_f} \frac{\partial^{-1}}{\partial t^{-1}},$$

Dans ces expressions, les convolutions expriment la nature dispersive du matériau poreux. Elles prennent en compte l'effet mémoire, où la réponse du milieu à l'excitation de l'onde n'est pas instantannée mais prend un certain temps.
L'equation de propagation peut être facilement obtenue à partir de (23, 24). L'equation de propagation obtenue a exactement la même forme que l'équation (13), la seule différence apparaît au niveau du coefficient $C = \left(\frac{4\alpha_\infty(\gamma-1)\eta}{K_a \Lambda \Lambda' \sqrt{Pr}} + \frac{\sigma\phi(1-p)}{K_a} + \frac{\alpha_\infty(\gamma-1)\eta\phi(1-p')}{K_a k_0' P_r} \right)$, cependant, nous verrons que sa solution est différente. Comme le coefficient C change, les coefficients c' et Δ donnés par les équation (17, 18) changent aussi. Avec les extensions de Pride-Lafarge, le coefficient Δ^2 peut être negatif [30], on pose alors :

$$\Delta'^2 = -\Delta^2 \Longrightarrow \Delta'^2 = 4c' - b'^2. \tag{25}$$

Dans ce cas, $f(z)$ donnée par l'équation (16) peut être mise sous la forme :

$$f(z) = \left(z + \frac{b'}{2}\sqrt{z} \right)^2 + \left(\frac{\Delta'\sqrt{z}}{2} \right)^2. \tag{26}$$

En utilisant les équations (25 et 26) et les calculs analytiques donnés dans l'Annexe B , nous obtenons la solution de l'équation de propagation quand Δ^2 est négatif :

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ \int_{x/c}^t \left[F_1(\tau) + \int_0^{\tau - x/c} H(\xi,\tau) d\xi + j \int_0^{\tau - x/c} \Xi(\xi,\tau) d\xi \right] p(0, t-\tau) d\tau & \text{si} \quad t > x/c. \end{cases} \tag{27}$$

avec

$$F_1(\tau) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} b' \frac{x}{c} \frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}} \exp\left(-\frac{b'^2 x^2}{16(\tau - x/c)}\right), \quad j^2 = -1.$$

Les fonctions $H(\xi, \tau)$ et $\Xi(\xi, \tau)$ sont données par les relations suivantes dans lesquelles t est remplacé par τ :

$$H(\xi, t) = \frac{\Delta'}{4\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{c} \frac{1}{\sqrt{(t-\xi)^2 - x^2/c^2}} \frac{1}{\xi^{3/2}} \times$$
$$\int_{-1}^{1} \left[\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{4\xi} \cos\left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{8\xi}\right) - \left(\frac{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2}{8\xi} - 1\right) \sin\left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{8\xi}\right)\right] \exp\left(-\frac{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2}{16\xi}\right) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}$$

et

$$\Xi(\xi, t) = -\frac{\Delta'}{4\pi\sqrt{\pi}} \frac{x}{c} \frac{1}{\sqrt{(t-\xi)^2 - x^2/c^2}} \frac{1}{\xi^{3/2}}$$
$$\int_{-1}^{1} \left[\left(\frac{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2}{8\xi} - 1\right) \cos\left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{8\xi}\right) + \frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{4\xi} \sin\left(\frac{\mathcal{A}\mathcal{B}}{8\xi}\right)\right] \exp\left(-\frac{\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}^2}{16\xi}\right) \frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},$$

où

$$\mathcal{A} = \Delta' \mu \sqrt{(t-\xi)^2 - x^2/c^2} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{B} = b'(t - \xi).$$

La fonction de Green est donnée par [30] :

$$G(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \le t \le x/c, \\ F_1(t) + \int_0^{t-x/c} H(\xi, t) d\xi + j \int_0^{t-x/c} \Xi(\xi, t) d\xi & \text{si} \quad t > x/c. \end{cases} \tag{28}$$

2.5.4 Opérateur de réflexion et de transmission

Pour une tranche de matériau poreux occupant le domaine $0 \le x \le L$, les champs incident et diffus sont reliés par des opérateurs de diffusions (i.e. opérateurs de réflexion et de transmission) du matériau. Ce sont des opérateurs [31] représentés sous forme intégrale :

$$p^r(x,t) = \int_0^t \tilde{R}(\tau) p^i \left(t - \tau + \frac{x}{c_0}\right) d\tau, \tag{29}$$

$$p^t(x,t) = \int_0^t \tilde{T}(\tau) p^i \left(t - \tau - \frac{L}{c} - \frac{(x-L)}{c_0}\right) d\tau. \tag{30}$$

Dans les équations (29) et (30) les fonctions $\tilde{R}$ et $\tilde{T}$ représentent les noyaux de réflexion et de transmission, respectivement. Ces opérateurs sont indépendents du champ incident et ne dépendent que des propriétés du matériau.
Pour expliciter les opérateurs de réflexion et de transmission, nous supposons [31] que le champ de pression et le débit acoustique sont continus aux interfaces du matériau :

$$\begin{aligned} p(0^+, t) &= p(0^-, t), & p(L^-, t) &= p(L^+, t) \\ v(0^-, t) &= \phi v(0^+, t), & v(L^+, t) &= \phi v(L^-, t) \end{aligned} \tag{31}$$

Les expressions de $\tilde{R}$ et $\tilde{T}$ sont données par (voir Annexe D) :

$$\tilde{R}(t) = \left(\frac{-\phi + \sqrt{\alpha_\infty}}{\phi + \sqrt{\alpha_\infty}}\right) \sum_{n \ge 0} \left(\frac{\phi - \sqrt{\alpha_\infty}}{\phi + \sqrt{\alpha_\infty}}\right)^{2n} \left[G\left(t, 2n\frac{L}{c}\right) - G\left(t, (2n+2)\frac{L}{c}\right)\right],$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}}{\left(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi\right)^2} \sum_{n \ge 0} \left(\frac{\phi - \sqrt{\alpha_\infty}}{\phi + \sqrt{\alpha_\infty}}\right)^{2n} G\left(t + \frac{L}{c_0}, (2n+1)\frac{L}{c}\right).$$

où G est la fonction de Green du milieu. Ces expressions prennent en compte les n réflexions multiples à l'intérieur du matériau poreux. Vu la grande atténuation des ondes acoustiques dans les milieux poreux saturés d'air, les réflexions multiples sont negligeables. Nous nous contenterons alors uniquement des réflexions aux interfaces $x = 0$ et $x = L$. Dans ce cas, les expressions des opérateurs de réflexion et de transmission se simplifient (Annexe E) comme suit :

$$\tilde{R}(t) = \frac{\sqrt{\alpha_\infty} - \phi}{\sqrt{\alpha_\infty} + \phi}\delta(t) - \frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}(\sqrt{\alpha_\infty} - \phi)}{(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi)^3} G\left(t, \frac{2L}{c}\right), \tag{32}$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}}{(\phi + \sqrt{\alpha_\infty})^2} G\left(t + \frac{L}{c}, \frac{L}{c}\right), \tag{33}$$

où $\delta(t)$ est la fonction Dirac. Le premier terme du second membre de l'équation (32) : $\left((\sqrt{\alpha_\infty} - \phi)/(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi)\right)\delta(t)$ est équivalent à la réponse réfléchie instantanné du matériau poreux. ce terme correspond à l'onde réfléchie par la première interface $x = 0$. Il dépend uniquement de la porosité et la tortuosité du matériau. L'onde réfléchie à la première interface a l'avantage de ne pas être dispersive, mais simplement atténuée. Ceci montre qu'il est possible de mesurer la porosité et la tortuosité du matériau poreux juste en mesurant la première onde réfléchie.

Le terme du second membre de l'équation (32) : $-\frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}(\sqrt{\alpha_\infty}-\phi)}{(\sqrt{\alpha_\infty}+\phi)^3} G\left(t, \frac{2L}{c}\right)$ correspond à la réflexion par la seconde interface $x = L$. Ce terme dépend de la fonction de Green du milieu qui décrit la propagation et la dispersion de l'onde acoustique ayant effectué un aller-retour dans la tranche de matériau poreux. La fonction de Green dépend de la tortuosité, et des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique Λ et Λ' du matériau, mais ne dépend pas de la porosité. Expérimentalement, cette seconde contribution à la réflexion ne peut être mesurée que pour les matériaux faiblement résistifs, car le signal acoustique est très atténué.

Etudiant la sensibilité [32] de la porosité sur l'opérateur de transmission $\tilde{T}(t)$. En prenant la dérivée de $\tilde{T}(t)$ par rapport à la porosité ϕ, on obtient :

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi} = \frac{4\sqrt{\alpha_\infty}(\sqrt{\alpha_\infty} - \phi)}{\left(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi\right)^3} G\left(t + \frac{L}{c}, \frac{L}{c}\right),$$

quand, $\phi \longrightarrow \sqrt{\alpha_\infty}$, la dérivée $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi} \longrightarrow 0$. Ceci montre que lorsque nous tendons vers un fluide libre, ou pour les matariaux poreux faiblement résistifs ayant de faibles valeurs de porosité et de tortuosité (proche de 1), la sensibilité de la porosité sur l'onde transmise tend vers zéro. Plus généralement, pour une large gamme de matériaux poreux saturés d'air, le terme : $\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \phi}$ reste très petit. Finalement, nous pouvons conclure que l'opérateur de transmission dépend de tous les paramètres, mais la faible sensibilité de la porosité, rend impossible la determination de ce paramètre à partir de données transmises.

2.5.5 Simulations numériques

Considérant un échantillons poreux saturé d'air M1 ayant les propriétés physiques suivantes : épaisseur 0.8 cm, tortuosité $\alpha_\infty = 1.5$, longueur caractéristique visqueuse $\Lambda = 25$ μm, longueur caractéristique thermique $\Lambda' = 75$ μm, résistance spécifique au passage du fluide σ =200000 Nm^{-4} s, porosité $\phi = 0.82$ et perméabilité thermique $k'_0 = 2.77\,10^{-10}\,\mathrm{m}^2$. Un signal transmis simulé a été calculé à partir de l'équation (30). Le signal d'entrée ainsi que son spectre sont donnés dans la figure 1.

La figure 2 montre une comparaison entre deux signaux transmis, le premier (trait plein) correspond à la partie réelle de la solution (27) du modèle de Pride-Lafarge quand $p = p' = 0.7$ et le second (pointillé) correspond à la solution (21) du modèle de Johnson-Allard ($p = p' = 1$). Nous avons choisi les mêmes valeurs pour p et p' pour simplifier cette étude. Cette valeur spécifique de 0.7 est valide uniquement pour les matériaux poreux ayant des pores circulaires. Dans le cas général, les valeurs de p et p' peuvent être différentes de 0.7 (voir la référence [63]). A noter qu'il

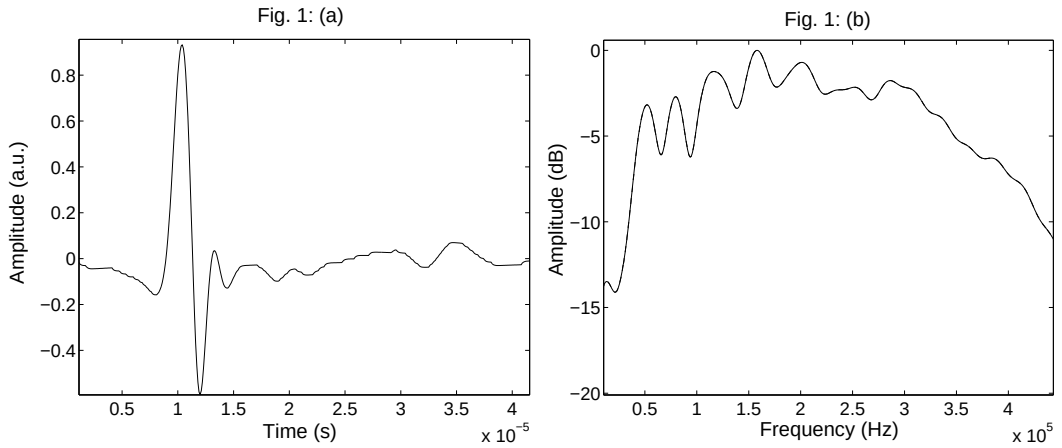

FIG. 1 – (a) Signal incident, (b) Spectre du signal incident

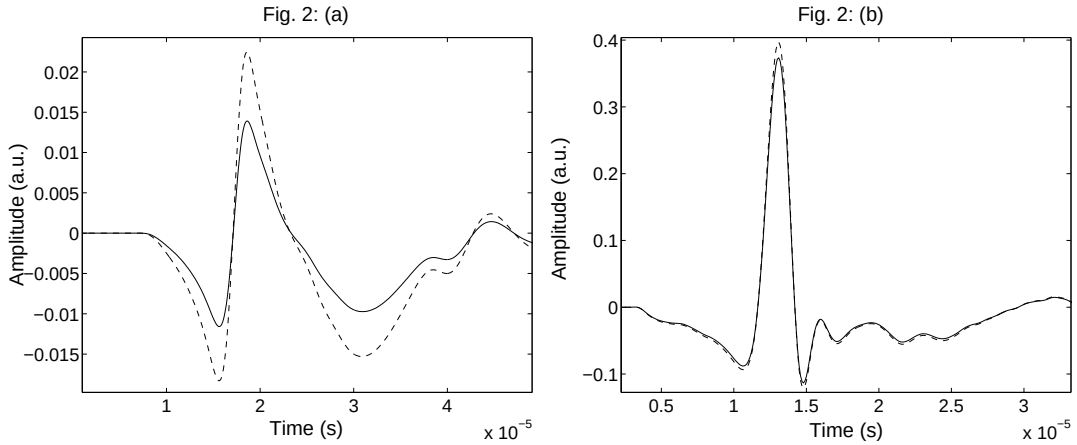

FIG. 2 – (a) : Comparaison entre le signal transmis simulé correspondant à la partie réelle de la solution de Pride-Lafarge (Eq. 27) pour $p = p' = 0.7$ (trait plein), et le signal simulé correspondant à la solution de Johnson-Allard (Eq. 21) pour $p = p' = 1$ (pointillé) pour l'échantillon M1, (b) : Comparaison entre le signal transmis simulé correspondant à à la partie réelle de la solution de Pride-Lafarge (Eq. 27) pour $p = p' = 0.7$ (trait plein), et le signal transmis simulé correspondant à la solution de Johnson-Allard (Eq. 21) pour $p = p' = 1$ (pointillé) pour l'échantillon M2.

est possible d'avoir des valeurs positives de Δ pour d'autres valeurs de p et p'.
A partir de la figure 2(a), nous remarquons un important changement sur l'amplitude de l'onde. En augmentant p et p' de 0.7 à 1, l'amplitude de l'onde augmente de 65% de sa valeur initiale. Ce résultat peut être prédit par le fait que lorsque les valeurs de p et p' augmentent, le coefficient C diminue et donc l'amplitude de l'onde diminue à cause des interactions inertielles, visqueuses et thermiques entre fluide et structure entre fluide et structure. Ce phénomène est beaucoup plus important pour les matériaux poreux résistifs. La figure 2(b) montre la même comparaison que la figure 2(a) pour un autre échantillon M2 moins résistif, ayant les paramètres suivants : épaisseur 0.8 cm, tortuosité $\alpha_\infty = 1.05$, longueur caractéristique visqueuse $\Lambda = 300$ μm, longueur caractéristique thermique $\Lambda' = 900$ μm, résistivité spécifique au passage du fluide σ=20000 Nm^{-4}s, porosity $\phi = 0.96$ and thermal permeability $k'_0 = 2.77\,10^{-9}\,\mathrm{m}^2$. Dans la figure 2(b), l'influence des paramètres p et p' sur l'atténuation est plus petite que celle dans la figure 2(a). Nous pouvons conclure que les paramètres p and p' jouent un rôle important dans l'atténuation acoustique, spécialement pour les milieux résistifs.

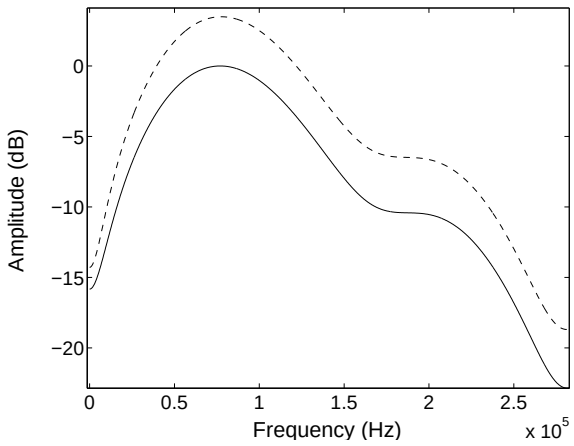

FIG. 3 – Spectre du signal transmis simulé pour $p = p' = 0.7$ Eq. (27) (trait plein) et spectre du signal transmis simulé pour $p = p' = 1$ (Eq. 21) (poitillés).

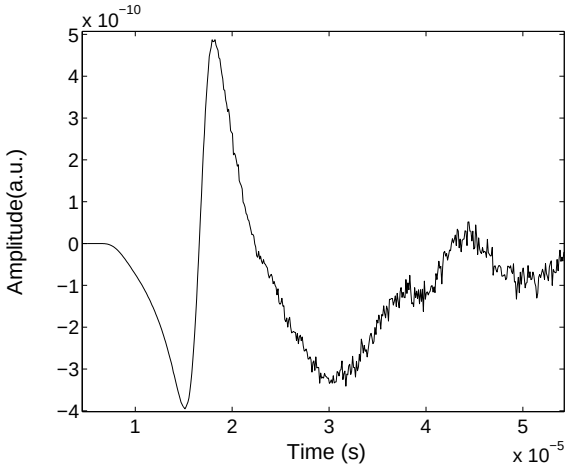

FIG. 4 – Signal transmis simulé correspondant à la partie imaginaire de la solution (27) du modèle de Pride-Lafarge

Il est possible de constater à partir des figures 2 que lorsque les valeurs de p et p' changent de 0.7 à 1, la forme d'onde change uniquement au niveau de l'amplitude de l'onde et non pas en dispersion. La figure 3 montre les spectres des deux signaux simulés donnés dans la figure 2(a). A partir des spectres de deux signaux simulés, il est possible de voir qu'ils ont les mêmes bandes passantes, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dispersion. Ce dernier résultat montre que p et p' jouent un rôle important dans l'atténuation de l'onde acoustique mais pas sur sa dispersion.
La figure 4 montre la partie imaginaire de la solution (27) pour $p = p' = 0.7$ (échantillon M1). L'amplitude de la partie imaginaire de la solution est très petite en comparaison avec la partie réelle (figure 2(a)), c'est la raison pour laquelle uniquement la partie réelle de la solution correspondant à la solution physique est prise en compte quand une comparaison avec l'expérience est effectuée. Il est possible d'écrire la fonction de Green donnée par l'équation (28) comme $G = G1 + iG2 =| G |\mathrm{e}^{i\theta}$, $\tan\theta = G_2/G_1 \ll 1$. Ceci nous mène à la conclusion que toutes les composantes du signal ont la même phase (très petite) θ qui est de ce fait un facteur physique non essentiel.

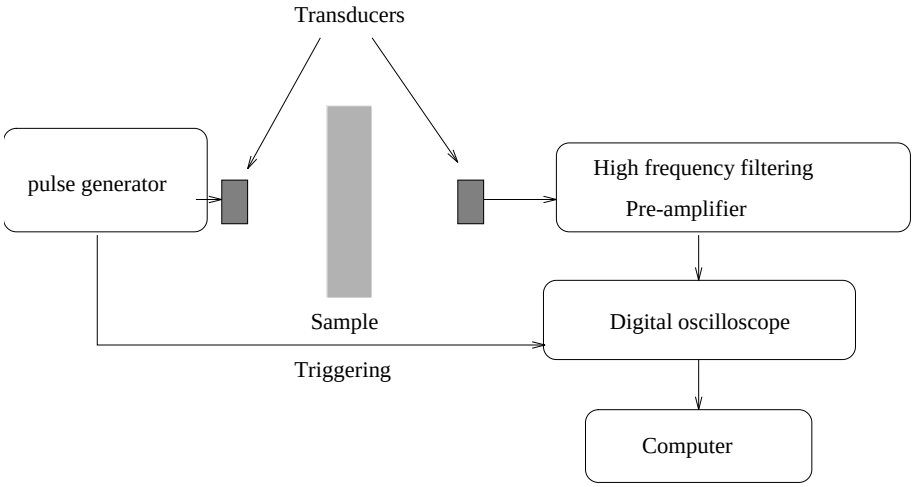

FIG. 5 – Dispositif expérimental pour les mesures en transmission

2.5.6 Onde transmise

L'expression (33) montre que l'onde transmise dépend de la porosité ϕ et des paramètres hautes fréquences décrivant la propagation acoustique dans le matériau (toruosité α_∞ et des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique Λ et Λ'). L'étude de la sensibilité de la porosité (dans le paragraphe précédent) a montré que l'effet de la propagation décrit par la fonction de Green masque carrément l'effet des interfaces. Rappelons que la fonction de Green G est indépendante de la porosité et l'effet des interface apparaît via le terme $\frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}}{(\phi+\sqrt{\alpha_\infty})^2}$ dans l'expression de l'opérateur de transmission (33). La faible sensibilité de la porosité en transmission rend sa détermination impossible.

La résolution du problème inverse en utilisant les ondes transmises a permis la détermination de la tortuosité et des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique. A noter que le rapport entre les deux longueurs a été fixé à 3 [69, 8, 75, 32] . Actuellement l'unique méthode permettant la détermination séparée des deux longueurs est basée sur le principe de saturation du poreux par deux fluides différents [68]. Les deux longueurs caractéristiques agissent de la même manière sur le dispersion et l'atténuation du signal transmis. Il n'est donc pas possible mathématiquement de remonter à deux inconnues donnant le même effet physique sur la forme d'onde. Nous nous contenterons dans nos travaux de fixer un rapport arbitraire entre les deux longueurs. La tortuosité agit sur la vitesse du front d'onde (retard du signal transmis par rapport au signal incident) et sur l'atténuation de l'amplitude de la forme d'onde. Alors que les longueurs caractéristiques agissent sur la dispersion et l'atténuation du signal.

Les expériences ont été effectuées [31] dans l'air en utilisant (dans un premier temps) deux transducteurs Panametrics V389 piezoelectriques ayant une fréquence centrale de 250 KHz dans l'air et une bande passante à 6dB allant de 60 kHZ à 420 kHz. Des impulsions de 900V provenant d'un générateur/amplificateur d'implusions 5058PR Panametrics sont amplifiées et filtrées au dessus de 1 Mhz. Les perturbations électroniques sont supprimées en effectuant un moyennage sur l'oscilloscope. Le dispositif expérimental est montré dans la figure 5. Un échantillon de mousse plastique saturé d'air d'épaisseur $5cm$ et de porosité $\phi = 0.98$ a été caractérisé en résolvant le problème inverse en utilisant des données expérimentales d'onde transmise. Le problème inverse se présente de la manière suivante : connaissant le signal incident (d'entrée) et le signal transmis ou réfléchi (sortie), quelles sont les valeurs des paramètres α_∞, Λ et Λ' du modèle ? Une solution exacte de ce problème est quasi impossible ; même si on peut démontrer mathématiquement que cette solution existe, la complexité de l'algorithme et du temps de calcul sont démesurés

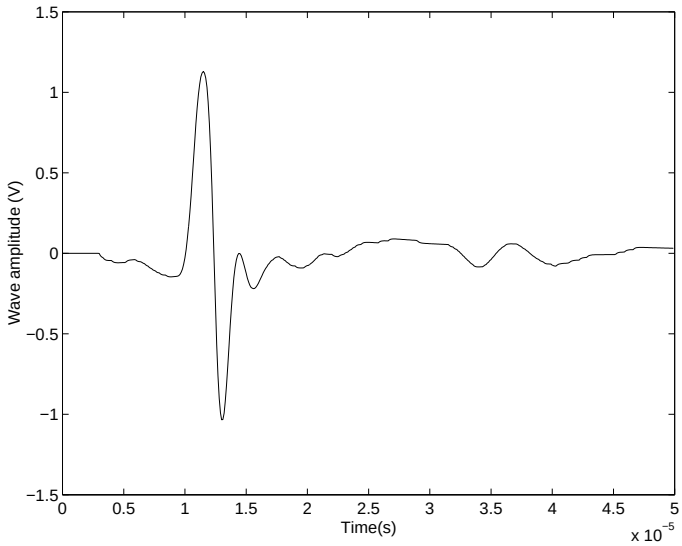

FIG. 6 – Signal incident expérimental

quand au gain que procure une solution exacte par rapport à une solution approchée. On peut donc se satisfaire d'une estimation de ces paramètres. Une méthode simple à mettre en oeuvre et relativement efficace consiste à minimiser l'erreur entre les signaux expérimentaux $s(t)$ et théoriques $p^t(x,t)$. Le problème inverse consiste à trouver les valeurs des paramètres α_∞, Λ et Λ' qui minimisent la fonction :

$$U(\alpha_\infty, \Lambda, \Lambda') = \int_0^t (p^t(t) - p^t_{exp}(t))^2 dt$$

où $p^t_{exp}(t)$ est le signal expérimental transmis et $p^t(t)$ représente le signal transmis théorique prédit par l'équation (30). Cependant, vue la non-linéarité de ces équations, la solution analytique du problème inverse par la méthode des moindres carrés est difficile. Dans notre cas, nous chercherons une solution numérique de la méthode des moindres carrés qui minimise la fonction $U(\phi, \alpha_\infty, \Lambda, \Lambda')$ définie par :

$$U(\alpha_\infty, \Lambda, \Lambda') = \sum_{i=1}^{i=N} (p^t(t_i) - p^t_{exp}(t_i))^2,$$

où $p^t_{exp}(t_i)_{i=1,2,\ldots N}$ représente l'ensemble des valeurs discrètes du signal transmis expérimental et $p^t(x,t_i)_{i=1,2,\ldots N}$ est l'ensemble des valeurs discrètes du signal transmis simulé.
La figure (7) montre une comparaison entre un signal transmis expérimental et signal transmis simulé obtenu par optimisation en résolvant le problème inverse. Les paramètres optimisés sont : $\alpha_\infty = 1.05$, $\Lambda = 208\mu m$ et $\Lambda' = 624\mu m$. Nous remarquons qu'il y'a une bonne concordance entre courbes théorique et expérimentale. Cet échantillon de mousse plastique a été caractérisé en utilisant des techniques classiques obtenant les valeurs suivantes : $\alpha_\infty = 1.04$, $\Lambda = 200\mu m$ et $\Lambda' = 600\mu m$. Nous constatons qu'il y'a un faible écart entre les valeurs des paramètres optimisés en résolvant le problème inverse et ceux obtenus par les méthodes classiques [2, 68, 69].

Nous pouvons conclure que l'onde transmise nous permet de caractériser le milieu poreux en obtenant des valeurs de la tortuosité et des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique.

2.5.7 Onde réfléchie par la première interface en incidence normale

L'onde réfléchie à la première interface possède l'avantage de ne pas être dispersive, puisqu'elle est instantanément réfléchie par la première interface du matériau poreux [33]. Cette

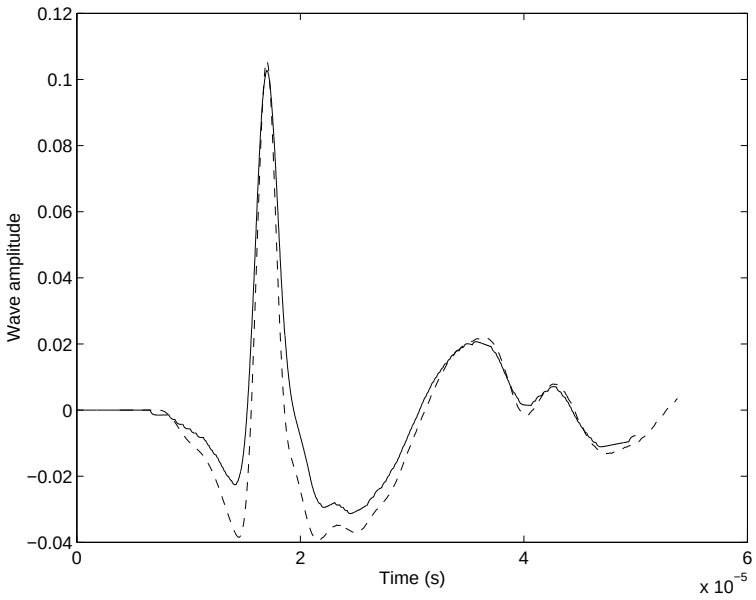

FIG. 7 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé)

onde n'a pas le temps de se propager à l'intérieur du milieu, elle est juste atténuée par le terme : $(\sqrt{\alpha_\infty} - \phi)/(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi)$. L'onde réfléchie par la première interface est très sensible à la porosité et la tortuosité, nous essayerons d'exploiter l'onde réfléchie pour remonter à la porosité qui ne peut être obtenue en transmission. Le problème inverse consiste à trouver la valeur de la porosité qui minimise la fonction U définie par :

$$U(\phi) = \sum_{i=1}^{i=N} (p^r(t_i) - p^r_{exp}(t_i))^2,$$

où $p^r(t_i)_{i=1,2,\ldots N}$ représente l'ensemble des valeurs discrètes du signal réfléchi simulé donné par l'eq. 29 et $p^r_{exp}(t_i)_{i=1,2,\ldots N}$ est l'ensemble des valeurs discrètes du signal réfléchi expérimental. L'onde réfléchie par la première interface est donnée par :

$$p^r(t_i) = \frac{a-1}{a+1} p^i(t_i) \qquad \text{où} \qquad a = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}.$$

$p^i(t_i)_{i=1,2,\ldots N}$ représente l'ensemble des valeurs discrètes du signal incident. Pour minimiser $U(a)$, nous devons avoir :

$$\frac{\partial U}{\partial a} = 0. \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} > 0.$$

donc

$$2 \sum_{i=1}^{i=N} \frac{(a+1)-(a-1)}{(a+1)^2} p^i(t_i) \left(\frac{a-1}{a+1} p^i(t_i) - p^r_{exp}(t_i) \right) = 0.$$

et

$$\sum_{i=1}^{i=N} p^i(t_i) \left(\frac{a-1}{a+1} p^i(t_i) - p^r_{exp}(t_i) \right) = 0.$$

La valeur de la porosité est donnée par :

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} p^i(t_i)\left(p^i(t_i) - p^r_{exp}(t_i)\right)}{\sum_{i=1}^{i=N} p^i(t_i)\left(p^i(t_i) + p^r_{exp}(t_i)\right)}\sqrt{\alpha_\infty}. \tag{34}$$

Le terme de dérivée seconde est donné par :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = -\frac{8}{(a+1)^3}\sum_{i=1}^{i=N}\left(\frac{a-1}{a+1}\left(p^i(t_i)\right)^2 - p^r_{exp}(t_i).p^i(t_i)\right) + \frac{8}{(a+1)^4}\sum_{i=1}^{i=N}\left(p^i(t_i)\right)^2,$$

A partir de l'équation (34), nous avons :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} = -\frac{2}{(a+1)}\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{8}{(a+1)^4}\sum_{i=1}^{i=N}\left(p^i(t_i)\right)^2$$

quand $\frac{\partial U}{\partial a} = 0$, la condition $\frac{\partial^2 U}{\partial a^2} > 0$ est toujours vérifiée car $a > 1$, ($\alpha_\infty > 1$ et $\phi < 1$).

La relation (34) donne l'expression de la porosité en fonction de la tortuosité et de l'ensemble des valeurs discrètes du signal incident et réfléchi. Nous utiliserons cette relation pour déterminer la valeur de la porosité à partir des données expérimentales des champs incident et réfléchi.
Les expériences [33] ont été effectuées dans l'air en utilisant deux transducteurs aériens Ultran NCT202 ayant comme fréquence centrale 190 kHz et une bande passante à 6dB allant de 150 kHz à 230 kHz. Ce transducteur est utilisé aussi bien en émetteur qu'en récepteur. Des implusions de 400V proviennent d'un générateur-amplificateur 5052PR Panametrics. Le dispositif expérimental est donné dans la figure 8.

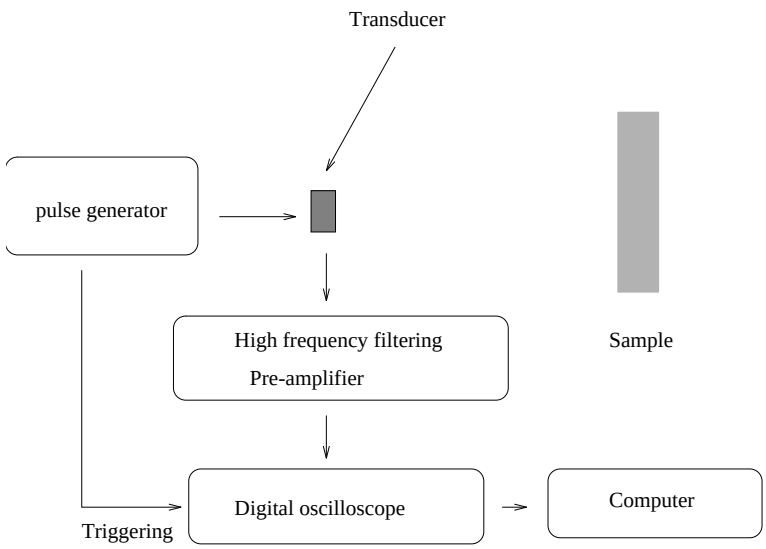

Fig. 8 – Dispositif expérimental pour les mesures en réflexion

La figure 9 montre le signal incident généré par le transducteur et le signal réfléchi par la mousse plastique ($\alpha_\infty = 1.7 \pm 0.01$, $\Lambda = 23\mu m$ and $\Lambda' = 69\mu m$). La figure 10 montre leurs spectres. A partir des spectres des deux signaux, nous constatons qu'ils ont la même bande passante, ce qui signifie qu'il n'y a pas de dispersion. Ce phénomène est en accord avec les prévisions théoriques de l'onde réfléchie à la première interface.

En utilisant les données expérimentales des ondes incidente et réfléchie et la relation (34), la valeur de la porosité optimisée est $\phi = 0.82 \pm 0.01$. Cette valeur est obtenue sur la base d'une

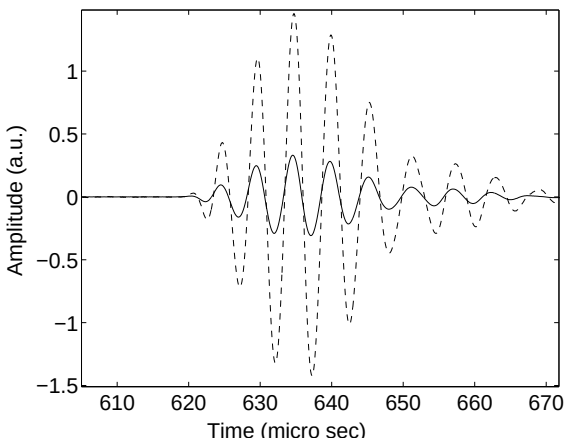

FIG. 9 – Signal expérimental incident (pointillé) et signal expérimental réfléchi (trait plein)

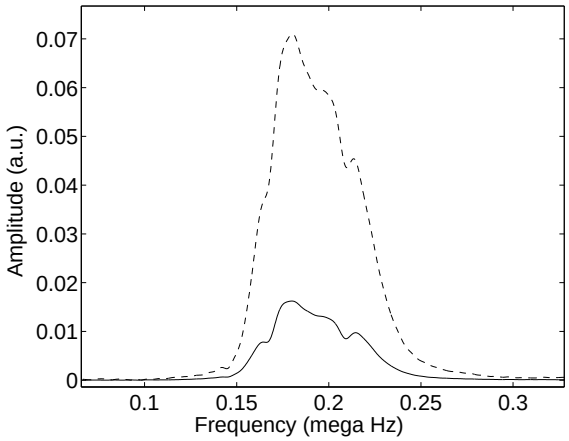

FIG. 10 – Spectre du signal incident (pointillé) et spectre du signal réfléchi expérimental (trait plein).

moyenne de valeurs, sa précision est calculée connaissant la précision de la tortuosité par la relation : $\frac{\delta\phi}{\phi} = \frac{1}{2}\frac{\delta\alpha_\infty}{\alpha_\infty}$, où $\delta\phi$ est la précision de la porosité et $\delta\alpha_\infty$ est celle de la tortuosité.

La figure 11 montre une comparaison entre signaux expérimentaux réfléchi et incident pour la valeur optimisée de la porosité, la différence entre les deux courbes est petite, ce qui nous permet de conclure que la valeur optimisée de la porosité est bonne. La valeur de porosité a été obtenue en utilisant le porosimètre classique [10, 70, 23] : $\phi = 0.8 \pm 0.05$.
L'avantage de cette technique de mesure de la porosité basée sur l'onde réfléchie à la première interface est sa simplicité devant le porosimètre qui nécessite plus d'étapes de mesures compliquées et un dispositif de mesure expérimental plus onéreux.

2.5.8 Onde réfléchie par la première interface en incidence oblique

Considérons le cas d'une incidence oblique [34, 35, 36, 37] sur un matériau poreux. La géométrie du problème est donnée par la figure 12.

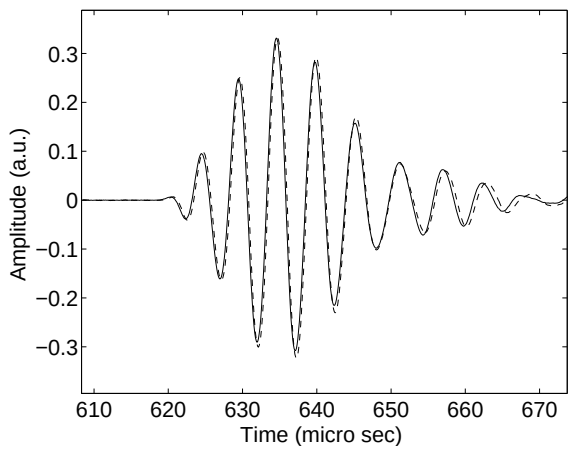

FIG. 11 – Comparaison entre signal réfléchi expérimental (trait plein) et signal réfléchi théorique (pointillé).

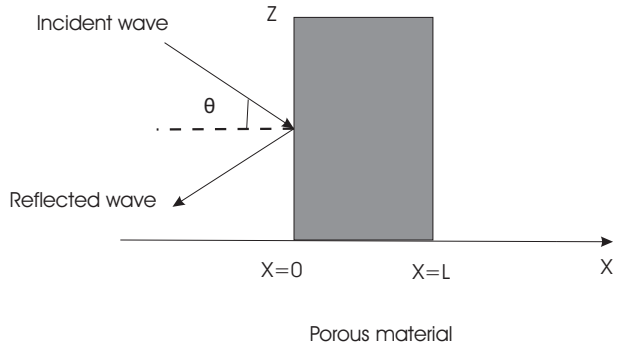

FIG. 12 – géométrie du problème

Dans le plan (xoz), les équations constitutives (10, 11) sont écritent sous la forme :

$$\rho_f \alpha_\infty \frac{\partial v_x(x,z,t)}{\partial t} + \frac{2\rho_f \alpha_\infty}{\Lambda}\left(\frac{\eta}{\pi \rho_f}\right)^{1/2} \int_0^t \frac{\partial v_x(x,z,t')/\partial t'}{\sqrt{t-t'}} dt' = -\frac{\partial p(x,z,t)}{\partial x},$$

$$\rho_f \alpha_\infty \frac{\partial v_z(x,z,t)}{\partial t} + \frac{2\rho_f \alpha_\infty}{\Lambda}\left(\frac{\eta}{\pi \rho_f}\right)^{1/2} \int_0^t \frac{\partial v_z(x,z,t')/\partial t'}{\sqrt{t-t'}} dt' = -\frac{\partial p(x,z,t)}{\partial z},$$

$$\frac{1}{K_a}\frac{\partial p(x,z,t)}{\partial t} + \frac{2(\gamma-1)}{K_a \Lambda'}\left(\frac{\eta}{\pi \rho_f P_r}\right)^{1/2} \int_0^t \frac{\partial p(x,z,t')/\partial t'}{\sqrt{t-t'}} dt' = -\frac{\partial v_x(x,z,t)}{\partial x} - \frac{\partial v_z(x,z,t)}{\partial z},$$

où v_x, v_z sont les composantes de la vitesse particulaire le long des axes x et z.

Dans ces équations, les convolutions expriment la nature dispersive du matériau poreux. Elles prennent en compte les effets mémoire dûs au fait que la réponse du milieu à l'onde excitatrice n'est pas instantanée.

Dans la région $x \leq 0$, l'onde de pression incidente est donnée par :

$$p^i(x,z,t) = p^i\left(t - \frac{x\cos\theta}{c_0} - \frac{z\sin\theta}{c_0}\right),$$

où c_0 est la vitesse du fluide libre $(x \leq 0)$; $c_0 = \sqrt{K_a/\rho_f}$.

Dans ce cas l'équation de propagation dans le domaine temporel est donnée par :

$$\frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial x^2} - A\frac{\partial^2 p(x,z,t)}{\partial t^2} - BD^{3/2}[p(x,z,t)] - C\frac{\partial p(x,z,t)}{\partial t} = 0,$$

où les coefficients A, B et C sont constants

$$A = \frac{1}{c_0^2}(\alpha_\infty - \sin^2\theta), \quad B = \frac{2\alpha_\infty}{K_a}\sqrt{\frac{\rho_f \eta}{\pi}}\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{Pr}\Lambda'}\right) \quad \text{and} \quad C = \frac{4\alpha_\infty(\gamma-1)\eta}{K_a \Lambda\Lambda'\sqrt{Pr}}.$$

La vitesse du front d'onde c est modifiée par l'angle d'incidence θ ; $c = c_0/\sqrt{\alpha_\infty - \sin^2\theta}$.
Dans ce contexte, les champs incident et réfléchi sont liés par l'opérateur de réflexion donné par :

$$p^r(x,t,\theta) = \int_0^t \tilde{R}(\tau,\theta)\, p^i\left(t - \tau + \frac{x\cos\theta}{c_0}\right) d\tau = \tilde{R}(t,\theta) * p^i(t) * \delta\left(t + \frac{x\cos\theta}{c_0}\right).$$

L'expression de l'opérateur de réflexion prenant en compte les n réflexions multiples dans la matériau est donné par :

$$\tilde{R}(t,\theta) = \left(\frac{1-E}{1+E}\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-E}{1+E}\right)^{2n}\left[F\left(t, 2n\frac{L}{c}\right) - F\left(t, (2n+2)\frac{L}{c}\right)\right],$$

avec

$$E = \frac{\phi\sqrt{1 - \frac{\sin^2\theta}{\alpha_\infty}}}{\sqrt{\alpha_\infty}\cos\theta}.$$

En considérant l'onde réfléchie à la première interface du matériau, on obtient le coefficient de réflexion :

$$r(t,\theta) = \left(\frac{1-E}{1+E}\right)\delta(t).$$

Le coefficient de réflexion à la première interface s'annule pour l'angle critique θ_c

$$r(t,\theta) = 0 \Longrightarrow \sin\theta_c = \sqrt{\frac{\alpha_\infty(\alpha_\infty - \phi^2)}{\alpha_\infty^2 - \phi^2}}.$$

La figure 13 montre la variation du coefficient de réflexion à la première interface r avec l'angle d'incidence θ, pour une valeur de porosité $\phi = 0.9$, et pour différentes valeurs de tortuosité.
La figure 14 montre la variation de r avec l'angle d'incidence, pour une valeur de tortuosité $\alpha_\infty = 1.1$, et pour différentes valeurs de la porosité. Quand l'angle d'incidence est $\theta < \theta_c$, le coefficient de réflexion diminue lentement avec l'angle d'incidence, et quand il est $\theta > \theta_c$, le coefficient de réflexion augmente rapidement avec l'angle. On peut aussi voir à partir des figures 13 et 14 que la sensibilité de la variation de la porosité est plus importante que la sensibilité de la tortuosité sur le coefficient de réflexion à la première interface.
Nous déterminons la porosité et la tortuosité en résolvant le problème inverse pour les ondes réfléchies par la première interface, et en prenant en compte les données expérimentales pour différents angles d'incidence. Le problème inverse consiste à trouver les valeurs des paramètres ϕ, α_∞, qui minimisent la fonction :

$$U(\phi,\alpha_\infty) = \sum_{\theta_i}\sum_{t_i}\left[p^r(x,\theta_i,t_i) - r(\theta_i,t_i) * p^i(x,\theta_i,t_i)\right]^2,$$

où $p^r(x,\theta_i,t_i)$ représente l'ensemble des valeurs discrètes du signal réfléchi expérimental pour différentes valeurs d'angle d'incidence θ_i, $r(\theta_i,t_i)$ est le coefficient de réflexion à la première

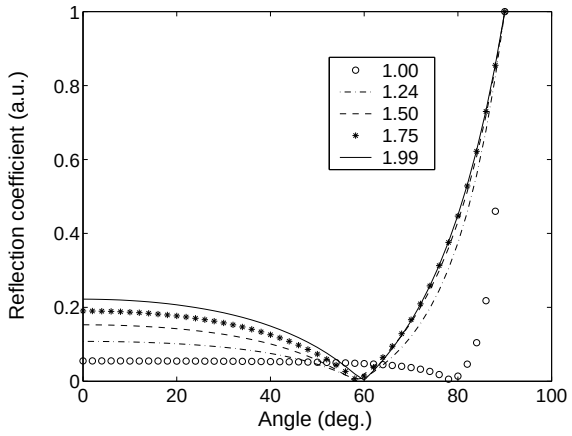

FIG. 13 – Variation du coefficient de réflexion à la première interface r avec l'angle d'incidence θ, pour une valeur de porosité $\phi = 0.9$, et pour différentes valeurs de tortuosité $\alpha_\infty = 1.99$ (trait plein), $\alpha_\infty = 1.75$ (étoile), $\alpha_\infty = 1.5$ (pointillé), $\alpha_\infty = 1.24$ (dashdot line) et $\alpha_\infty = 1.$ (cercle)
.

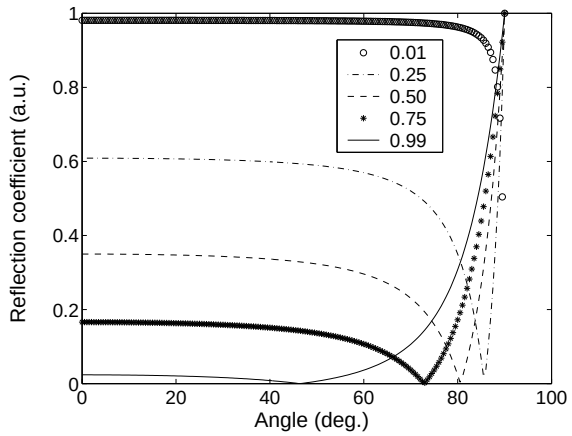

FIG. 14 – Variation de r avec l'angle d'incidence, pour une valeur de tortuosité $\alpha_\infty = 1.1$, et pour différentes valeurs de porosité $\phi = 0.99$ (trait plein), $\phi = 0.75$ (étoile), $\phi = 0.50$ (pointillé), $\phi = 0.25$ (dashdot line) and $\phi = 0.01$ (cercle).

interface et $p^i(x, \theta_i, t_i)$ est le signal expérimental incident. Le terme $r(\theta_i, t_i) * p^i(x, \theta_i, t_i)$ représente le signal réfléchi simulé. Le problème inverse est résolu numériquement par la méthode des moindres carrés. Les expériences sont effectuées dans l'air en utilisant deux transducteurs Ultran NCT202 ayant une fréquence centrale à 190kHz et une bande passante à 6dB allant de 150kHz à 230kHz. Un goniomètre optique a été utilisé pour positionner les transducteurs. Un générateur d'impulsions 5052PR Panametrics est utilisé comme émetteur/récepteur. Le dispositif expérimental est donné dans la la figure 15. Considérons une mousse plastique caractérisée en utilisant les techniques classiques ; porosité $\phi = 0.86$, tortuosité $\alpha_\infty = 1.5$. Le problème inverse a été résolu pour cette mousse en utilisant l'onde réfléchie à la première interface et pour différents angles d'incidence. Les figures 16, 17 montrent la variation de la fonction de minimisation U avec la porosité et la tortuosité. Les valeurs reconstruites de porosité et tortuosité correspondant à la position du minimum de la fonction de minimisation sont : $\phi = 0.85$ et $\alpha_\infty = 1.6$. La figure 18 montre une comparaison entre le coefficient de réflexion à la première interface théorique en utilisant les valeurs de porosité et tortuosité obtenues par résolution du problème inverse et le

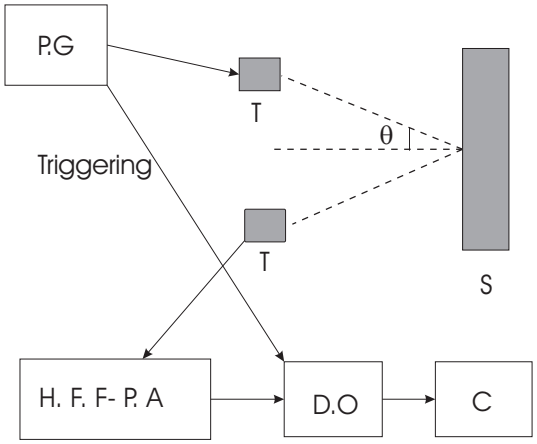

Fig. 15 – Dispositif expérimental pour les mesures en réflexion en incidence oblique : P.G : générateur d'impulsion, H. F. F-P. A : filtre haute fréquence-pré-amplificateur, , D. O : oscilloscope digitale, C : ordinateur, S : échantillon.

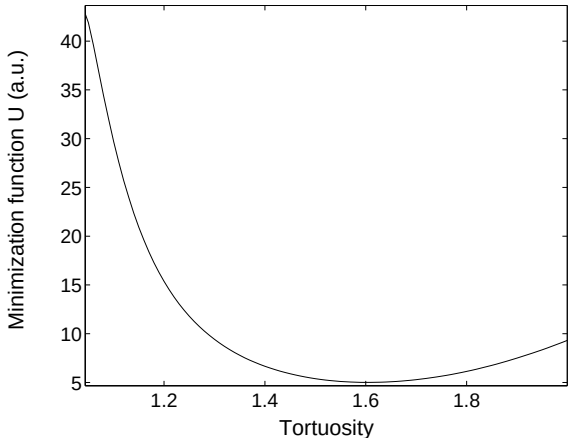

Fig. 16 – Variation de la fonction de minimisation U avec la tortuosité.

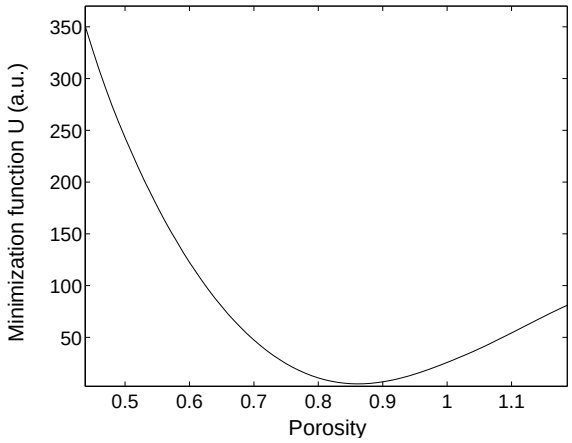

Fig. 17 – Variation de la fonction de minimisation U avec la porosité.

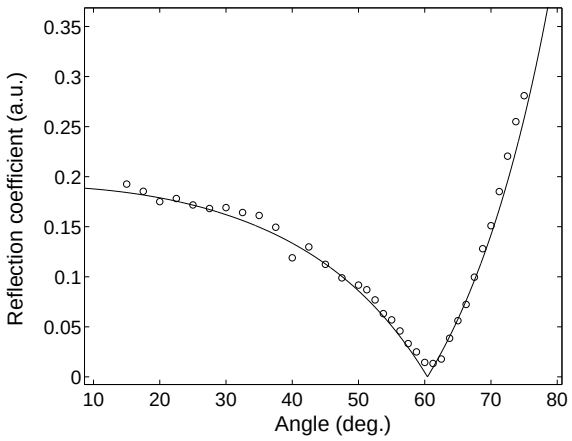

FIG. 18 – Comparaison entre le coefficient de réflexion à la première interface simulé avec les valeurs de ϕ et α_∞ inversées (trait plein) et les données expérimentales du coefficient de réflexion (cercle).

coefficient de réflexion expérimental. La correspondance entre théorie et expérience est bonne, ce qui nous permet de conclure que cette méthode basée sur la résolution du probème inverse est appropriée pour déterminer la porosité et la tortuosité des matériaux poreux à structure rigide.

Les valeurs inversées de porosité et tortuosité sont proches de celles obtenues en utilisant les méthodes classiques. Générallement, il est facile d'évaluer la tortuosité à partir des ondes transmises, ce n'est pas le cas pour la porosité à cause de sa faible sensibilité dans le mode transmis. La sensibilité de la porosité et la tortuosité a été étudiée dans ce chapitre montrant son effet sur le coefficient de réflexion à la première interface. Cette étude montre que la réflexion est beaucoup plus sensible à la porosité qu'à la tortuosité, spéciallement quand l'angle d'incidence est inférieur à sa valeur critique, pour laquelle le coefficient de réflexion s'annule.

Cette méthode est une alternative au porosimètre utilisé pour la mesure de la porosité ou aux méthodes ultrasonores basées sur les ondes transmises pour la détermination de la tortuosité.

L'avantage de ce concept utilisant l'onde réfléchie à la première interface est sa simple analyse, similaire au concept de l'onde transmise, qui est cependant plus compliqué. L'onde réfléchie à la première interface n'est pas sujette à la dispersion mais est simplement atténuée, ses bandes passantes fréquentielle et temporelle sont les mêmes que celles du signal incident, et sa détection expérimentale est facile pour les milieux résistifs comparés aux données transmises.

2.5.9 Onde réfléchie par la première et la seconde interface

Nous proposons dans cette partie une méthode [38] ultrasonore pour l'évaluation acoustique des paramètres de matériaux poreux saturés d'air (ou un autre gaz). Cette méthode est basée sur la détection expérimentale d'ondes réfléchies par la première et la seconde interface du matériau. Généralement l'approche ultrasonore conventionnelle peut être utilisée pour déterminer la tortuosité et les longeurs caractéristiques visqueuse et thermique à partir des ondes transmises [31, 38]. La porosité ne peut être mesurée en transmission à cause de sa faible sensibilité[31, 32]. L'utilisation de l'onde réfléchie à la première interface en incidence oblique permet la détermination de la porosité et la tortuosité[34, 35, 36, 37], mais ceci n'est pas possible en incidence normale [33]. L'utilisation des données expérimentales des ondes réfléchies à la première et la seconde interface en incidence normale simultanément permet d'obtenir la porosité, la tortuosité et des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique [38]. Comme pour les approches ultrasonores dédiées à la caractérisation des matériaux poreux saturés par un gaz, les deux longueurs caractéristiques sont estimées individuellement en fixant un rapport entre elles [8, 75]. Des es-

sais expérimentaux sont effectués en utilisant des mousses plastiques faiblement résistives. Des résultats numériques et expérimentaux sont discutés.

Rappelons l'expression de l'opérateur de reflexion d'un matériaux poreux dans le cadre du modèle du fluide équivalent (equation 32) :

$$\tilde{R}(t) = \frac{\sqrt{\alpha_\infty} - \phi}{\sqrt{\alpha_\infty} + \phi}\delta(t) - \frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}(\sqrt{\alpha_\infty} - \phi)}{(\sqrt{\alpha_\infty} + \phi)^3} G\left(t, \frac{2L}{c}\right), \tag{35}$$

$\delta(t)$ est la distribution Dirac et G représente la fonction de Green du matériau poreux. Le premier terme de l'expression (35) correspond à la réflexion à la première interface ($x = 0$) du matériau et le second terme à la réflexion par la seconde interface ($x = L$). La détection expérimentale de la contribution de la seconde interface dépend énormément de l'épaisseur de l'échantillon et des propriétés acoustiques (porosité, tortuosité, longeur caractéristique visqueuse et thermique) du matériau. Il peut être interessant de mesurer la contribution à la seconde réflexion, parce qu'elle pourrait offrir une méthode alternative pour déterminer les paramètres acoustiques qui sont actuellement mesurés uniquement par le mode transmis. En effet, l'onde réfléchie par la seconde interface dépend de la fonction de Green du milieu G qui dépend des paramètres ultrasonores. Cette onde est diffusive par rapport à l'onde réfléchie par la première interface.

Sensibilité des paramètres acoustiques :

Dans cette section, des simulations numériques d'ondes réfléchies par une tranche de matériau poreux sont effectuées en faisant varier les paramètres acoustiques (α_∞, ϕ, Λ et Λ'). Une variation de 50% est appliquée sur les paramètres. Le signal incident utilisé dans la simulation et son spectre sont donnés dans la figure 19. Les valeurs numériques choisies pour les paramètres

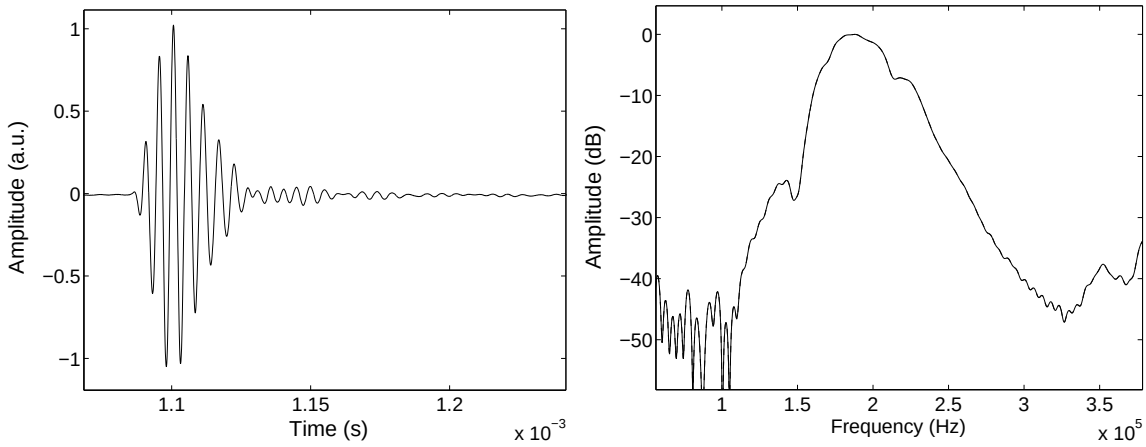

Fig. 19 – Signal incident et son spectre

physiques du matériau poreux sont : épaisseur $L = 1cm$, tortuosité $\alpha_\infty = 1.05$, longueur caractéristique visqueuse $\Lambda = 300\mu m$, longueur caractéristique thermique $\Lambda' = 900\mu m$ et porosité $\phi = 0.97$. Le résultat de la simulation est donné dans la figure 20. Dans la figure 20, les deux signaux correspondent aux ondes réfléchies par la première et la seconde interface. La vitesse de la première onde est la vitesse du son dans l'air libre $c_0 = 340ms^{-1}$ et la vitesse de la seconde onde qui se propage à l'intérieur du matériau, est égale à $331ms^{-1}$ ($c = c_0/\sqrt{\alpha_\infty}$).

La figure 21 montre les résultats obtenus après réduction de la porosité de 50% de sa valeur initiale. Le premier signal (trait plein) correspond au signal réfléchi simulé pour $\phi = 0.97$ et le second (pointillé) à $\phi = 0.48$. Les valeurs des autres paramètres ont été maintenues constantes ($L = 1cm$, $\alpha_\infty = 1.05$, $\Lambda = 300\mu m$ et $\Lambda' = 900\mu m$). On peut voir la sensibilité de la porosité

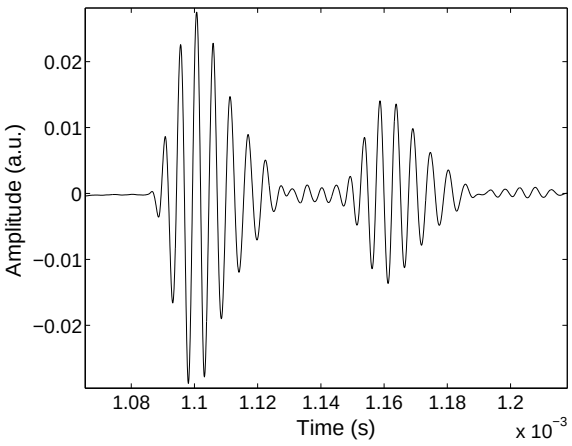

FIG. 20 – Signal réfléchi simulé

pour une variation de 50%. Il y'a un important changement au niveau des amplitudes des deux ondes (première et seconde interface). En réduisant la porosité, les amplitudes des deux ondes ont augmenté de 775% et 800% de leurs valeurs initiales, respectivement. Ce résultat peut être prédit par le fait que lorsque la porosité diminue, le milieu poreux devient plus résistif et l'onde incidente est donc plus réfléchie par le milieu poreux. Lorsque l'épaisseur décroit de 50% de sa valeur

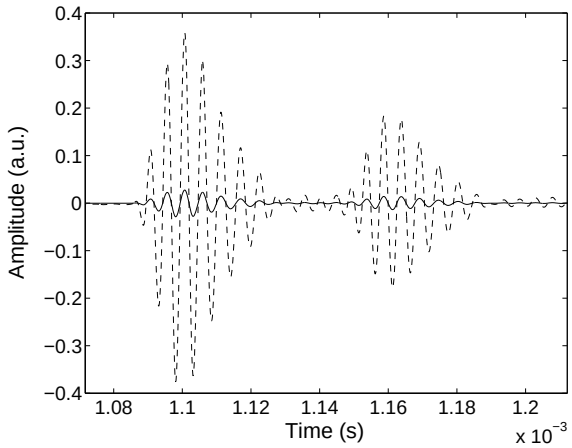

FIG. 21 – Comparaison entre signaux réfléchis simulés correspondant à $\phi = 0.97$ (trait plein) et $\phi = 0.48$ (pointillé).

initiale, le signal réfléchi aussi change. Les valeurs des paramètres ultrasonores ont été gradées constants ($\alpha_\infty = 1.05$, $\phi = 0.97$, $\Lambda = 300\mu m$, $\Lambda' = 900\mu m$). La figure 22 montre une comparaison entre deux signaux réfléchis ayant deux épaisseurs différentes. Le premier (trait plein) correspond à une épaisseur de 1 cm et le second (pointillé) à 0.5 cm. En diminuant l'épaisseur du matériau, la distance propagée par la seconde onde réfléchie dans le milieu poreux décroit ainsi que son atténuation, ceci augmente l'amplitude de 40% de sa valeur initiale dans la seconde onde réfléchie. Analisons maintenant l'effet de la tortuosité. La figure 23 montre une comparaison entre deux signaux réfléchis simulés, le premier (trait plein) correspond à $\alpha_\infty = 1.05$ et le second signal (pointillé) à $\alpha_\infty = 1.57$. Dans cette simulation, les valeurs de l'épaisseur, porosité, tortuosité et longueurs caractéristiques ont été gardées constantes ($L = 1cm$, $\Lambda = 300\mu m$, $\Lambda' = 900\mu m$ and $\phi = 0.97$). A partir des deux signaux de la figure 23, on peut voir que la tortuosité joue un rôle important sur les ondes réfléchies. En augmentant la valeur de la tortuosité, la vitesse de

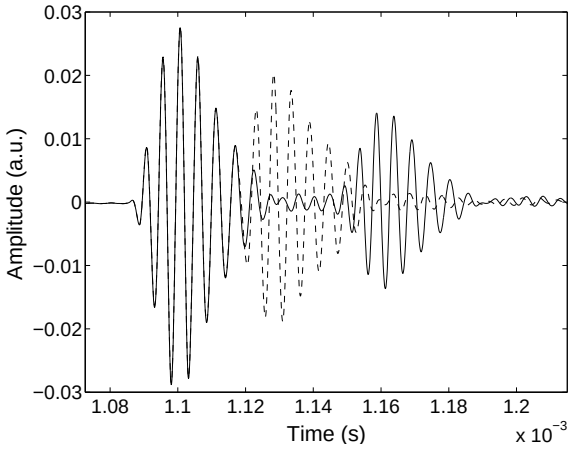

FIG. 22 – Comparaison entre signaux réfléchis simulés correspondant à $L = 1cm$ (trait plein) et $L = 0.5cm$ (pointillé).

l'onde réfléchie par la seconde interface diminue de $331ms^{-1}$ à $270ms^{-1}$. Cependant, l'amplitude des deux ondes augmente, l'onde réfléchie par la première interface augmente de 420% de son amplitude initiale et l'onde réfléchie par la seconde interface augmente de 250% de son amplitude initiale. En augmentant la tortuosité, le couplage inertiel entre fluide et structure augmente également, le milieu poreux devient plus résistif et donc les opérateurs de réflexion (35) de la première et la seconde interface augmentent. En même temps, l'onde réfléchie par la seconde interface est plus retardée et son amplitude moins amplifiée par rapport à l'onde réfléchie par la première interface, ceci s'explique par les pertes additionelles d'origine inertielle dans l'onde

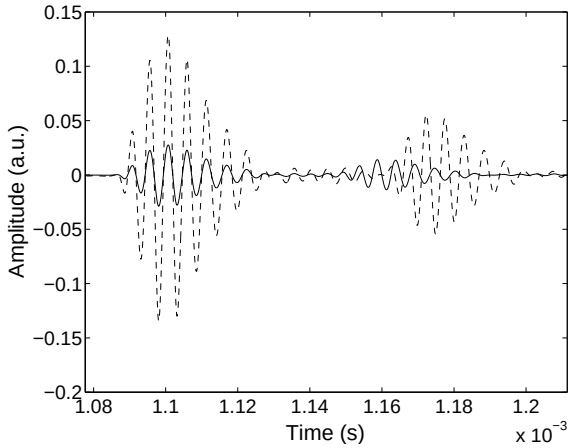

FIG. 23 – Comparaison entre deux signaux réfléchis simulés correspondant à $\alpha_\infty = 1.05$ (trait plein) et $\alpha_\infty = 1.57$ (pointillé).

réfléchie à la seconde interface dûes au phénomène de propagation.

La figure 24 montre la sensibilité de la longueur caractéristique visqueuse Λ sur l'onde réfléchie par la seconde interface (l'onde réfléchie par la première interface n'est pas affectée par Λ). Le signal représenté en trait plein correspond à $\Lambda = 300\mu m$ et en pointillé à $\Lambda = 150\mu m$. Les valeurs des autres paramètres ont été gardées constantes ($L = 1cm$, $\alpha_\infty = 1.05$, $\Lambda' = 900\mu m$ et $\phi = 0.97$). On peut voir que l'amplitude de l'onde réfléchie par la seconde interface a diminué de 85% de sa valeur initiale. Un tout petit changement est observé sur la vitesse de l'onde réfléchie par la seconde interface dû au phénomène de dispersion gouverné par Λ. Cette longueur

apparaît dans l'expression de la tortuosité dynamique (1), et comme le montre cette simulation numérique, Λ joue un rôle moins important sur les ondes réfléchies que la tortuosité. Dans le mode transmis la longueur caractérsitique visqueuse joue un rôle important dans la dispersion, spéciallement pour les matériaux poreux résistifs. La figure 25 montre une comparaison entre

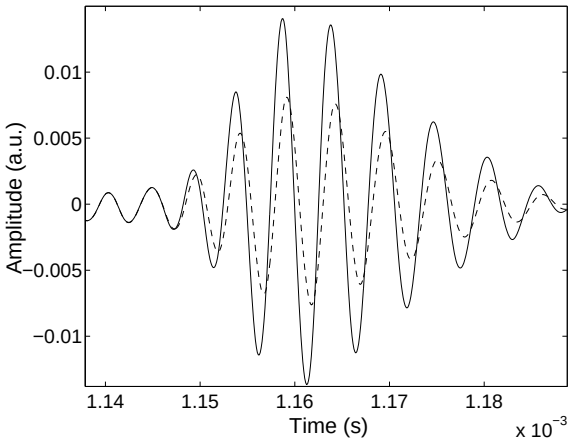

FIG. 24 – Comparaison entre signaux réfléchis à la seconde interface correspondant à $\Lambda = 300\mu m$ (trait plein) et $\Lambda = 150\mu m$ (pointillé).

deux signaux réfléchis simulés correspondants à deux valeurs différentes de la longueur caractéristique thermique Λ' (uniquement l'onde réfléchie par la seconde interface est représentée dans la figure 25, l'onde réfléchie par la première interface n'est pas affectée par Λ'). La première onde (trait plein) correspond à $\Lambda' = 900\mu m$ et la seconde (pointillé) correspond à $\Lambda' = 450\mu m$. Un tout petit changement est observé au niveau de l'onde réfléchie par la seconde interface, pour laquelle son amplitude a diminué de 8% de sa valeur initiale. A partir de cette étude, nous

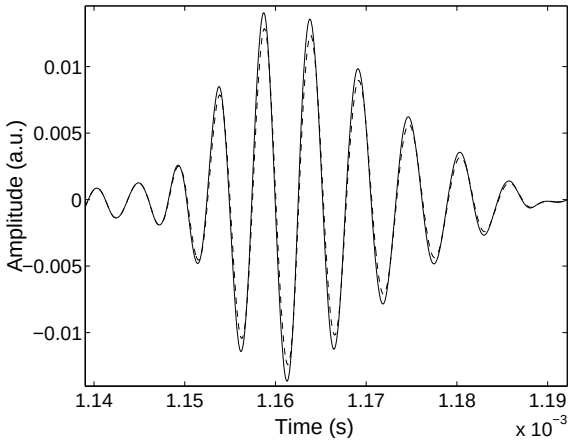

FIG. 25 – Comparaison entre signaux simulés réfléchis par la seconde interface correspondant à $\Lambda' = 900\mu m$ (trait plein) et $\Lambda' = 450\mu m$ (pointillé)

pouvons connaître la sensibilité de chaque paramètre physique utilisé dans cette théorie. Les paramètres mis en jeu dans le processus de propagation et de dispersion comme les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique, apparaissent uniquement dans l'onde réfléchie par la seconde interface. Cette onde se propage à l'intérieur du matériau poreux et est ainsi sujette aux interactions visco-thermiques entre fluide et structure, responsables des pertes de l'onde acoustique dans le matériau poreux. Cependant l'onde réfléchie par la première interface est

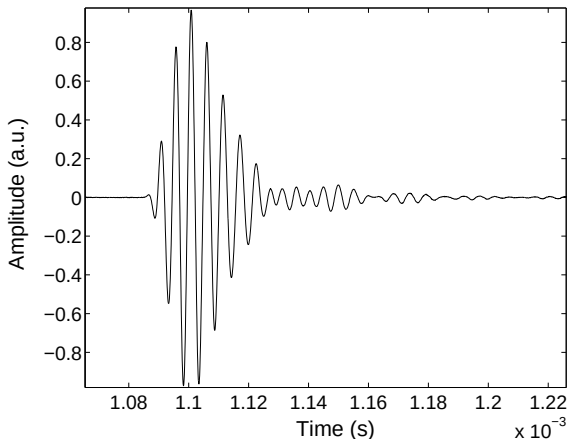

FIG. 26 – Signal incident expérimental généré par le tranducteur

immédiatement réfléchie par le matériau et ne se propage pas à l'intérieur du matériau poreux. Cette onde n'est pas sensible aux paramètres décrivant le phénomène de dispersion comme Λ et Λ'.

Notons qu'à partir de ces simulations, certains paramètres comme la porosité ϕ, la tortuosité α_∞ et l'épaisseur jouent un rôle important simultanément sur les deux ondes réfléchies par la première et la seconde interface relativement aux autres paramètres qui agissent uniquement sur l'une des deux ondes.

Essayons de résoudre le problème inverse pour ϕ, α_∞, Λ et Λ' sur l'onde réfléchie par la première et la seconde interface simultanément. Vue la faible sensibilité de Λ' sur la réponse réfléchie du matériau poreux, le rapport Λ'/Λ est fixé à 3. Notons que (Λ'/Λ) est classiquement fixé entre 2 et 3 pour les mousses plastiques.

Le problème inverse consiste à trouver les valeurs des paramètres ϕ, α_∞ et Λ qui minimisent la fonction :

$$U(\phi, \alpha_\infty, \Lambda) = \sum_{i=1}^{i=N} (p^r_{exp}(x, t_i) - p^r(x, t_i))^2,$$

Nous utilisons le même dispositif expérimental développé dans les chapitres pércedents pour les ondes réfléchies en incidence normale. Un transducteur Ultran NCT202 de fréquence centrale à 190kHz est utilisé comme émetteur/récepteur.
Considérons un échantillon de matériau poreux d'une épaisseur de $1.00 \pm 0.01cm$. Cet échantillon a été caractérisé par les méthodes classiques obtenant les valeurs suivantes : $\phi = 0.94 \pm 0.005$, $\alpha_\infty = 1.07 \pm 0.005$, $\Lambda = 200 \pm 5\mu m$ et $\Lambda' = 600 \pm 15\mu m$.
La figure 26 montre le signal expérimental généré par le transducteur. Après résolution du problème inverse, nous trouvons les valeurs suivantes des paramètres : $\phi = 0.945 \pm 0.005$, $\alpha_\infty = 1.065 \pm 0.005$, $\Lambda = 210 \pm 5\mu m$ and $\Lambda' = 630 \pm 15\mu m$. En utilisant ces valeurs, nous représentons dans les figures 27, 28 et 29 les variations de la fonction de minimisation U avec la porosité, tortuosité et la longueur caractéristique visqueuse, respectivement. La figure 30 donne une comparaison entre le signal réfléchi expérimental et le signal réfléchi simulé à partir des valeurs optimisées de ϕ, α_∞, Λ et Λ'. La différence entre les deux courbes est petite, ce qui nous permet de conclure que les valeurs optimisées des paramètres physiques sont correctes.

Cette méthode semble être efficace pour l'estimation des paramètres physiques necessaires à la description de la propagation acoustique dans les matériaux poreux saturés d'air comme les mousses plastiques. Cependant, lorsque l'onde réfléchie par la seconde interface ne peut être détectée expérimentalement à cause de l'atténuation importante de l'onde acoustique à l'intérieur

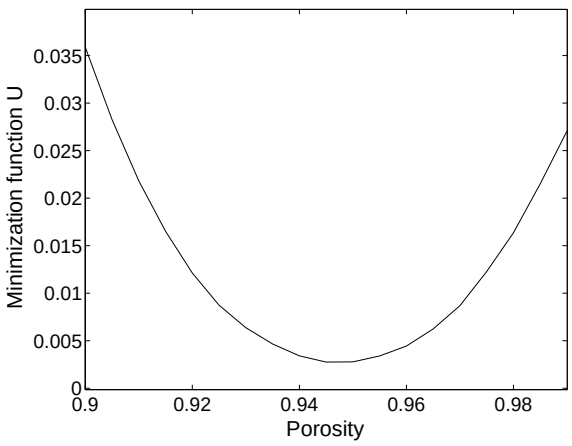

FIG. 27 – Variation de la fonction de minimisation U avec la porosité pour $\alpha_\infty = 1.065$ et $\Lambda = 210\mu m$

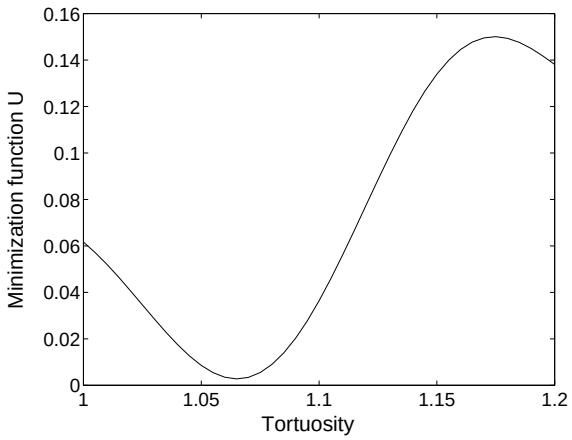

FIG. 28 – Variation de la fonction de minimisation U avec la tortuosité pour $\phi = 0.945$ et $\Lambda = 210\mu m$

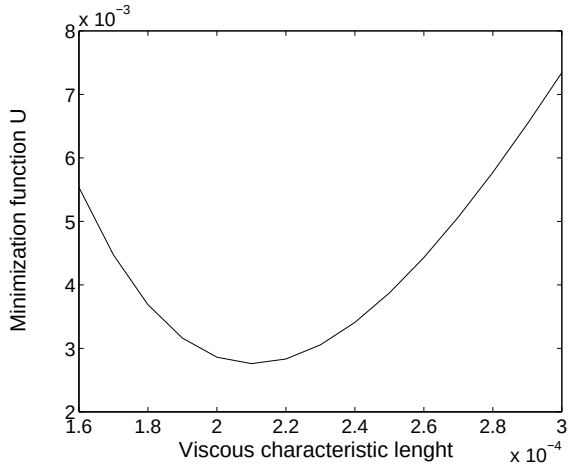

FIG. 29 – Variation de la fonction de minimisation U avec la longueur caractéristique visqueuse pour $\phi = 0.945$ et $\alpha_\infty = 1.065$

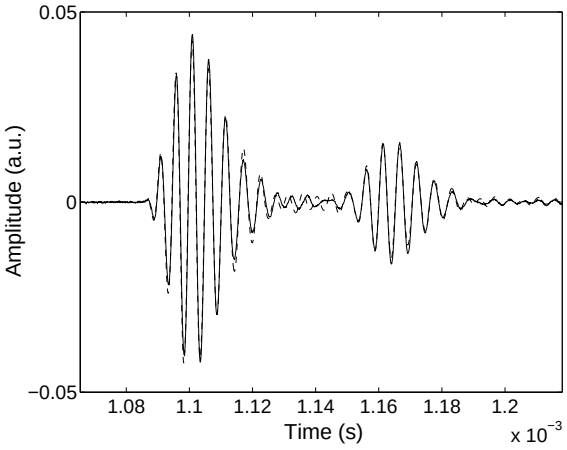

FIG. 30 – Comparaison entre le signal réfléchi expérimental (trait plein) et simulé (pointillé) pour les valeurs ($\alpha_\infty = 1.065$, $\phi = 0.945$ and $\Lambda = 210\mu m$)

du matériau poreux, cette détermination de paramètres ne peut avoir lieu, car l'onde réfléchie à la première interface ne donne qu'une relation entre α_∞ et ϕ.

2.5.10 Onde réfléchie et onde transmise

Cette partie concerne la caractérisation ultrasonore des milieux poreux saturés d'air par résolution du problème inverse en exploitant les données expérimentales [32]. Il est généralement facile de résoudre le problème inverse en utilisant les données transmises [31, 39, 40] obtenant ainsi des valeurs optimisées de porsité, tortuosité, longueurs caractéristiques visqueuse et thermique. Ceci n'est pas le cas pour la porosité à cause de sa faible sensibilité dans le mode transmis. La reflexion est une alternative à la transmission, car elle fournit une bonne estimation de la porosité et la tortuosité en utilisant les données d'ondes réfléchies par la première interface. Les longueurs caractéristique visqueuse et thermique ne peuvent être déterminées par l'onde réfléchie à la première interface [33, 34, 35, 36, 37]. L'onde réfléchie par la seconde interface peut être détectée expérimentalement uniquement pour les milieux poreux faiblement résistifs. Dans ce cas, les longueurs caractéristiques peuvent être estimées [38]. Mais pour les milieux poreux résistifs, la seconde contribution de la réflexion est très atténuée et sa détection expérimentale est difficile. Nous proposons, dans ce chapitre, de résoudre le problème inverse numériquement par la méthode des moindres carrés, en utilisant les données expérimentales réfléchies et transmises. Nous déterminons simultanément tous les paramètres physiques intervenant dans la propagation ; la minimisation entre théorie et expérience est faite dans le domaine temporel. Le problème inverse est bien posé et sa solution est unique.

Problème inverse

Le problème inverse consiste à trouver les valeurs des paramètres ϕ, α_∞ et Λ qui minimisent la fonction U :

$$U(\phi, \alpha_\infty, \Lambda) = \sum_{i=1}^{i=N} (p^r_{exp}(x, t_i) - p^r(x, t_i))^2 + \sum_{i=1}^{i=N} (p^t_{exp}(x, t_i) - p^t(x, t_i))^2, \tag{36}$$

Les expériences sont effectuées dans l'air en utilisant deux paires de transducteurs Ultran, la première paire : NCG200-D13 de fréquence centrale de 195 kHz et de bande passante de 6 dB allant 140 kHz à 250 kHz, et l'autre paire : NCG100-D25 ayant une fréquence centrale de 105

kHz et une bande passante allant de 70 kHz à 130 kHz.
Des impulsions de 400 V sont délivrées par un générateur d'implusion Panametrics 5058PR. Pour les mesures en transmission, nous avons utilisé le le dispositif expérimental donné par la figure 5, et pour les mesures en réflexion le dispositif donné par la figure 8.

Considérons une mousse plastique résistive, d'épaisseur 0.7 ± 0.01 cm. L'échantillon poreux a été caractérisé en utilisant les methodes classiques obtenant les valeurs suivantes des paramètres physiques $\phi = 0.7 \pm 0.05$, $\alpha_\infty = 1.25 \pm 0.05$, $\Lambda = (50 \pm 10)\mu$m.
Considérons les données expérimentales de la première paire de transducteur Ultran NCG200-D13. Le signal généré par le transducteur (mesuré sans échantillon) est donné par la figure 31 en pointillé. Le signal expérimental mesuré est donné dans la même figure (31) en trait plein. Le signal transmis à travers le matériau est naturellement atténué, retardé et déformé dû au

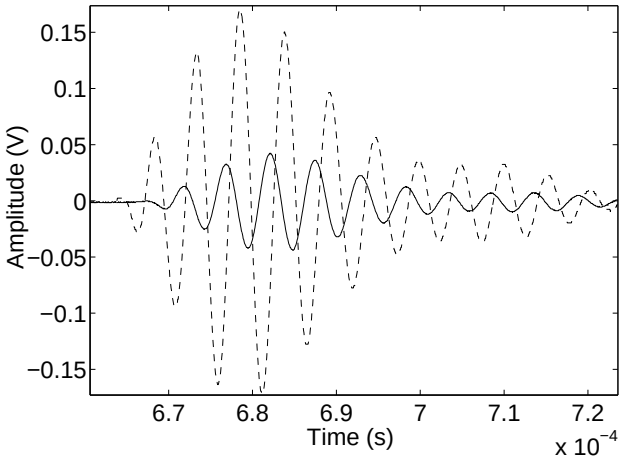

Fig. 31 – Signal incident expérimental (pointillé) et signal transmis (trait plein) en utilisant la paire de transducteur Ultran NCG200-D13 (140 kHz - 250 kHz)

phénomène de dispersion. Dans le mode réfléchi (avec un seul transducteur agissant en émetteur et récepteur), on montre dans la figure 32 le signal réfléchi expérimental (trait plein) et le signal incident expérimental (pointillé). Le signal incident a été mesuré en mettant un miroir acoustique (plaque rigide) à la même position de l'échantillon poreux. Le signal réfléchi mesuré correspond à la réflexion par la première interface ; c'est la raison pour laquelle les deux signaux ont le même temps d'arrivée. En résolvant le problème inverse en utilisant simultanément les données expérimentales réfléchie et transmise (Eq. 36), nous trouvons les valeurs optimisées suivantes : $\phi = 0.74$, $\alpha_\infty = 1.26$ and $\Lambda = 66\mu$m. En utilisant une paire de ces valeurs, nous présentons dans les figures 33, 34 et 35, la variation de la fonction de minimisation U donnée par l'équation (36) avec la porosité, tortuosité et longueur caractéristique visqueuse, respectivement. Nous constatons que la variation de la fonction de minimisation avec chaque paramètre physique présente un minimum correspondant à la solution mathématique du problème inverse. Le fait que la fonction de minimisation U présente un seul minimum montre que le problème inverse est bien posé mathématiquement et qu'il y'a unicité de la solution. Dans la figure 36, nous comparons le signal transmis expérimental et le signal transmis simulé pour les valeurs optimisées de porosité, tortuosité et longueur caractéristique visqueuse. Une comparaison entre signal réfléchi simulé et expérimental est donnée dans la figure 37. La différence entre théorie et expérience est faible pour les modes réfléchi et transmis, ce qui nous permet de conclure que les paramètres physiques ont été bien identifiés. Le problème inverse a été résolu avec le même échantillon en considérant la seconde paire de transducteur : Ultran NCG100-D25 de fréquence centrale de 105 kHz et une bande passante à -6dB allant de 70 kHz à 130 kHz. Les valeurs des paramètres optimisées sont :

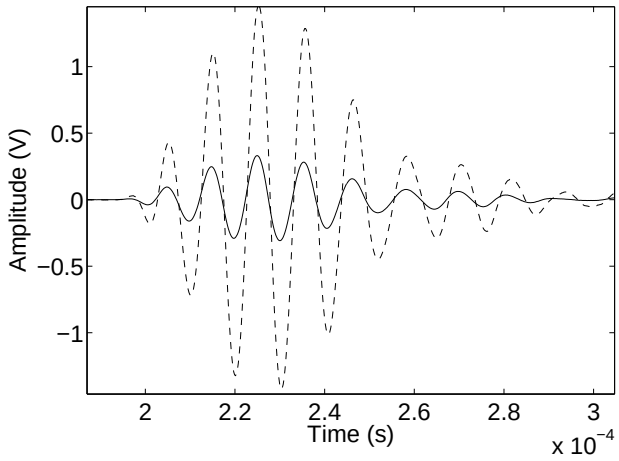

FIG. 32 – Signal incident expérimental (pointillé) et signal réfléchi (trait plein) en utilisant le transducteur Ultran NCG200-D13 (140 kHz - 250 kHz)

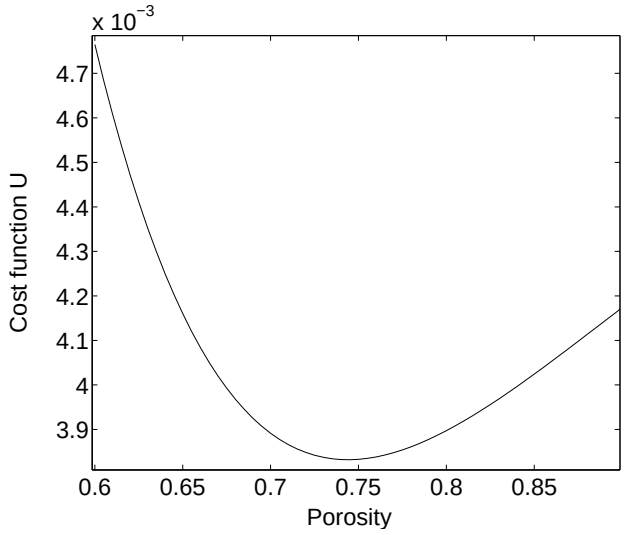

FIG. 33 – Variation de la fonction de minimisation U avec la porosité pour $\alpha_\infty = 1.26$ et $\Lambda = 42\mu$m.

$\phi = 0.72$, $\alpha_\infty = 1.21$, $\Lambda = 42\mu$m. Ici aussi, nous obtenons une bonne estimation des paramètres. Nous remarquons qu'en utilisant les deux paires de transducteurs correspondants à différentes bandes de fréquences, les valeurs optimisées obtenues en utilisant cette méthode sont proches de celles produites en utilisant les méthodes classiques [69, 31, 35]. Cette méthode semble être efficace pour l'estimation des paramètres physiques essentiels à la description de la propagation du son dans les milieux poreux saturés d'air comme les mousses plastiques. L'avantage de la résolution du problème inverse en utilisant les données réfléchies et transmises ensemble est la détermination complète de tous les paramètres acoustiques ultrasonores (ϕ, α_∞ et Λ). En minimisant simultanément sur la réflexion et la transmission, une moyenne de l'information physique contenue dans les deux modes est obtenue avec une bonne précision.

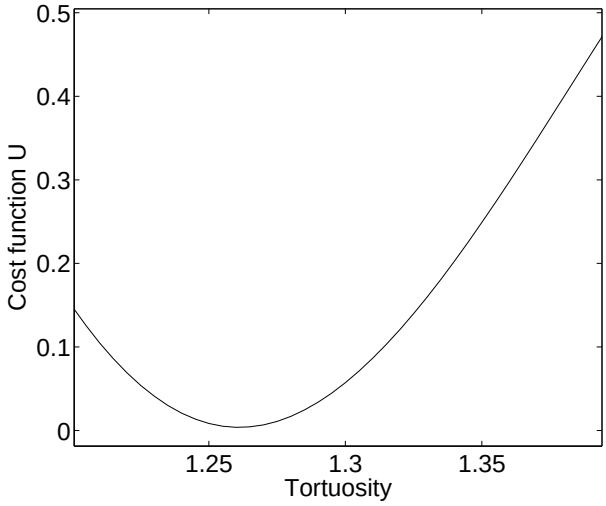

FIG. 34 – Variation de la fonction de minimisation U avec la tortuosité pour $\phi = 0.74$ et $\Lambda = 42\mu$m.

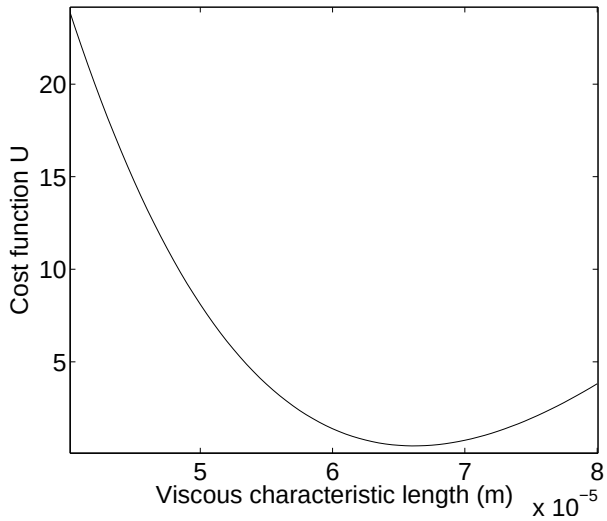

FIG. 35 – Variation de la fonction de minimisation U avec la longueur caractéristique visqueuse pour $\phi = 0.74$ et $\alpha_\infty = 1.26$.

2.5.11 Multicouches

Cette partie concerne une modélisation temporelle de la propagation d'onde transitoire dans un bicouche de matériau poreux [41]. Une dérivation analytique des opérateurs de transmission et de réflexion est donnée dans le domaine temporel. Ces opérateurs temporels sont les réponses du milieu à une impulsion acoustique incidente. Les expressions obtenues prennent en compte les réflexions multiples au niveau des interfaces du matériau bicouche. Le milieu poreux bicouche est constitué de deux tranches de matériaux poreux homogènes isotropes ayant une structure rigide. Chaque tranche poreuse est décrite par le modèle du fluide équivalent, dans lequel, les effets inertiels sont décrits par la tortuosité, les pertes visco-thermiques du milieu sont décrites par deux susceptibilités qui dépendent des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique.

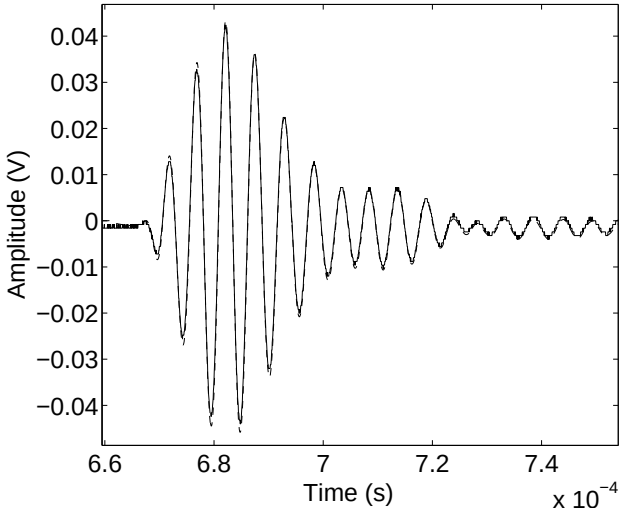

FIG. 36 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) $\alpha_\infty = 1.26$, $\phi = 0.74$ and $\Lambda = 42\mu$m.

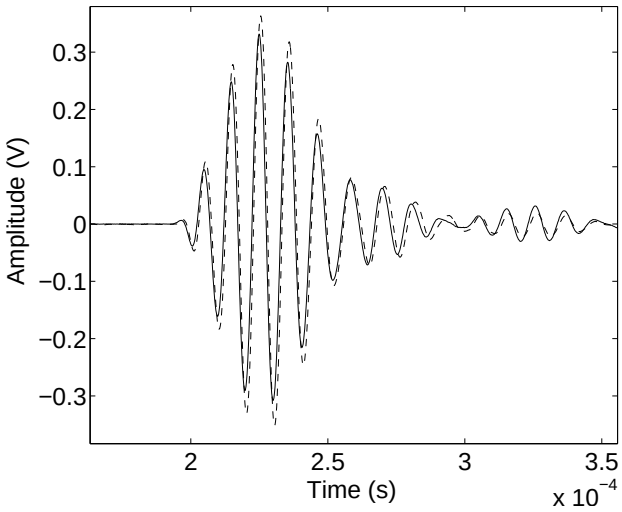

FIG. 37 – Compraison entre signal réfléchis expérimental (trait plein) et signal réfléchis simulé (pointillé) : $\alpha_\infty = 1.26$, $\phi = 0.74$ and $\Lambda = 42\mu$m.

Les résultats expérimentaux et numériques sont donnés pour des ondes transmises et réfléchies par le bicouche du milieu poreux formé par des échantillons de mousses plastiques saturées d'air.

Formulation du problème :
Considérant un bicouche de milieu poreux constitué de deux tranches homogènes avec des paramètres acoustiques différents. La géométrie du problème est donnée dans la figure 38. La première tranche poreuse occupe la région $0 \leq x \leq \ell$ et la seconde occupe la région $\ell \leq x \leq L$. Chaque tranche poreuse est supposée isotrope et ayant une structure rigide. Une courte impulsion acoustique affecte le milieu en incidence normale par la gauche (fluide libre - région (1)). Ceci produit un champ de pression acoustique $p_i(x,t)$, $i = 2,3$ et un champ de vitesse acoustique $v_i(x,t)$, $i = 2,3$ à l'intérieur de chaque couche (le symbole $i = 2,3$ caractérise les régions (2) et

(3), respectivement) qui satisfont l'équation de propagation (12). Nous supposons que le champ

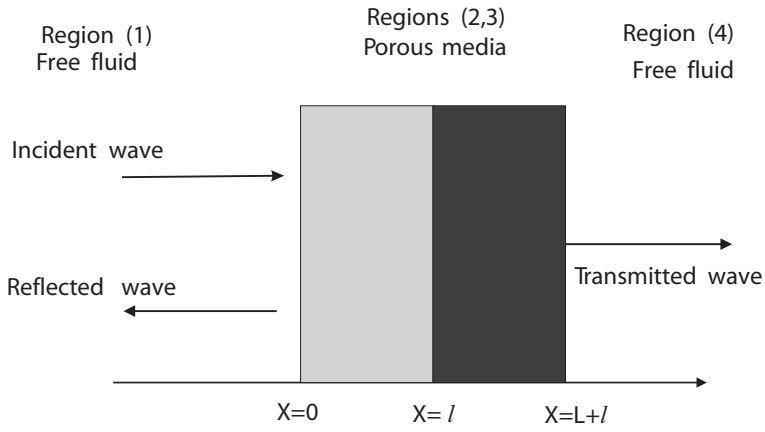

FIG. 38 – Géométrie du bicouche

de pression est continu aux limites de chaque couche.

$$p(0^+,t) = p(0^-,t), \quad p(\ell^-,t) = p(\ell^+,t), \quad p\left((\ell+L)^-,t\right) = p\left((\ell+L)^+,t\right) \tag{37}$$

(où $\pm$ dénote la limite de la gauche et de la droite respectivement) et aux conditions initiales (14). Si l'onde incidente est envoyée dans la région $x \leq 0$ (region (1)), donc le champ de pression dans la région de la gauche du matériau bicouche est exprimé comme la somme des champs incident et réfléchi.

$$p_1(x,t) = p^i\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + p^r\left(t + \frac{x}{c_0}\right), \qquad x < 0,$$

où, $p_1(x,t)$ est le champ dans la région $x < 0$, p^i et p^r dénote les champs incident et réfléchi respectivement. Le champ transmis est aussi produit dans la région droite du bicouhe, prenant la forme :

$$p_4(x,t) = p^t\left(t - \frac{\ell}{c_2} - \frac{L}{c_3} - \frac{x-\ell-L}{c_0}\right), \qquad x > \ell + L.$$

($p_4(x,t)$ est le champ dans la région (4) : $x > \ell+L$ et p^t le champ transmis). c_2 et c_3 représentent les vitesses acoustiques dans les régions (2) et (3) respectivement, définies par la relation $c_i = c_0/(\alpha_i)^{1/2}$, $i = 2,3$, où α_i représente la tortuosité de chaque couche poreuse.

Les champs incident et diffus sont reliés par les opérateurs de diffusion (i.e., opérateurs de réflexion et transmission) pour le matériau. Ce sont des opérateurs définis par :

$$p^r(x,t) = \int_0^t \tilde{R}(\tau)p^i\left(t - \tau + \frac{x}{c_0}\right)d\tau = \tilde{R}(t) * p^i(t) * \delta\left(t + \frac{x}{c_0}\right).$$
$$p^t(x,t) = \int_0^t \tilde{T}(\tau)p^i\left(t - \frac{\ell}{c_2} - \frac{L}{c_3} - \frac{x-\ell-L}{c_0}\right)d\tau = \tilde{T}(t) * p^i(t) * \delta\left(t - \frac{\ell}{c_2} - \frac{L}{c_3} - \frac{x-\ell-L}{c_0}\right),$$

où $\delta(t)$ est la distribution de Dirac. Les opérateurs $\tilde{R}$ et $\tilde{T}$ sont les noyaux de réflexion et de transmission. Dans la région $x \leq 0$, le champ $p_1(x,t)$ est donné par :

$$p_1(x,t) = \left[\delta\left(t - \frac{x}{c_0}\right) + \tilde{R}(t) * \delta\left(t + \frac{x}{c_0}\right)\right] * p^i(t).$$

Pour simplifier l'analyse, nous utilisons la transformée de Laplace qui est plus apropriée à notre problème. Notons par $\tilde{P}_i(x,z)$, $i = 1,2,3,4$ la transformée de Laplace de $p_i(x,t)$, $i = 1,2,3,4$ définie par :

$$\tilde{P}_i(x,z) = \mathcal{L}\left[p_i(x,t)\right] = \int_0^\infty \exp(-zt)p_i(x,t)dt.$$

La transformée de Laplace du champ externe au milieu bicouche est donnée par :

$$\tilde{P}_1(x,z) = \left[\exp\left(-z\frac{x}{c_0}\right) + R(z)\exp\left(z\frac{x}{c_0}\right)\right]\varphi(z), \quad x \leq 0, \tag{38}$$

$$\tilde{P}_4(x,z) = T(z)\exp\left[-\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3} + \frac{x-\ell-L}{c_0}\right)z\right]\varphi(z), \quad x \geq \ell + L, \tag{39}$$

Ici $\tilde{P}_1(x,z)$ and $\tilde{P}_4(x,z)$ sont les tranfromées de Laplace du champ du coté droit et gauche du milieu poreux bicouche respectivement, $\varphi(z)$ dénote la transformée de Laplace du champ incident $p^i(t)$ et finallement $R(z)$ et $T(z)$ sont les transformées des opérateurs de réflexion et de transmission respectivement.

Les champs de pression acoustique $p_i(x,t)$, $i = 2,3$ à l'intérieur de chaque couche du milieu poreux (région (2) et (3)) satisfons à l'équation de propagation (12), qui peut être écrite dans le domaine de Laplace sous la forme :

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}_i(x,z)}{\partial x^2} - \frac{f_i(z)}{c_i^2}\tilde{P}_i(x,z) = 0, \quad i = 2,3, \qquad 0 \leq x \leq \ell + L, \tag{40}$$

La fonction $f_i(z)$ est donnée par l'expression suivante :

$$f_i(z) = z^2 c_i^2 \left(\rho_f \alpha_i + \tilde{\chi}_{vi}(z)\right).\left(1/Ka + \tilde{\chi}_{thi}(z)\right) \quad i = 2,3, \tag{41}$$

où $\tilde{\chi_{vi}}(z)$ et $\tilde{\chi_{thi}}(z)$ représentent les transformées de Laplace de $\chi_{vi}(t)$ et $\chi_{thi}(t)$ respectivement et leurs expressions dans le domaine temporel sont données par :

$$\chi_{vi}(t) = \frac{2\rho_f \alpha_i}{\Lambda_i}\sqrt{\frac{\eta}{\pi\rho_f}}\, t^{-1/2}, \qquad i = 2,3.$$

$$\chi_{thi}(t) = \frac{2(\gamma-1)}{K_a \Lambda_i'}\sqrt{\frac{\eta}{\pi P_r \rho_f}}\, t^{-1/2}, \qquad i = 2,3.$$

Λ_i and Λ_i', $i = 2,3$ sont les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique de chaque couche poreuse. En développant l'expression (41), nous obtenons la relation suivante pour $f_i(z)$

$$f_i(z) = z^2 + 2\sqrt{\frac{\eta}{\rho}}\left(\frac{1}{\Lambda_i} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{P_r}\Lambda_i'}\right)z\sqrt{z} + \frac{4(\gamma-1)\eta}{\rho_f \Lambda_i \Lambda_i' \sqrt{P_r}}z, \qquad i = 2,3, \tag{42}$$

La solution de l'équation (40) est donnée par :

$$\tilde{P}_i(x,z) = \left[A_i(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_i(z)}}{c_i}x\right) + B_i(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_i(z)}}{c_i}x\right)\right]\varphi(z), \quad i = 2,3, \tag{43}$$

où les coefficients $A_i(z)$ et $B_i(z)$ peuvent être déterminés par les conditions physiques aux limites de chaque couche poreuse, et seront explicités ci-dessous.

Opérateurs de réflexion et de transmission

Pour determiner les coefficients de réflexion et de transmission, nous utilisons les relations de continuité des champs de pression (Eqs. 37) données dans le domaine de Laplace par :

$$\tilde{P}_1(0^-,z) = \tilde{P}_2(0^+,z), \qquad \tilde{P}_2(\ell^-,z) = \tilde{P}_3(\ell^+,z), \qquad \tilde{P}_3\left((\ell+L)^-,z\right) = \tilde{P}_4\left((\ell+L)^+,z\right). \tag{44}$$

En utilisant les expressions des champs de pression de chaque couche (Eqs. 38, 39, 43) et les conditions (44), nous obtenons les relations suivantes pour les coefficients $A_i(z)$ and $B_i(z)$, $i = 2, 3$, et les coefficients $R(z)$ et $T(z)$

$$A_2(z) + B_2(z) = \tilde{P}_2(0, z) = 1 + R(z), \tag{45}$$

$$A_2(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right) + B_2(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right) = A_3(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}\ell\right) + B_3(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}\ell\right), \tag{46}$$

$$A_3(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell + L)\right) + B_3(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell + L)\right) = T(z)\exp\left[-\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3}\right)z\right]. \tag{47}$$

L'équation d'Euler dans chaque région est écrite sous la forme :

$$\rho_f \alpha_i\, \partial_t v_i(x, t) + \chi_{vi}(t) * \partial_t v_i(x, t) = -\partial_x p_i(x, t), \qquad i = 1, ..., 4. \tag{48}$$

Dans ces équations, $v_i(x, t)$ $i = 1, 4$ est le champ de vitesse dans les régions (1), (4). A noter que dans les régions (1) et (4), correspondants au fluide libre, les valeurs de porosité et de tortuosité sont égales à 1 ($\alpha_1 = \alpha_4 = 1$ et $\phi_1 = \phi_4 = 1$), et les susecptibilités s'annulent (χ_{vi}=0, $i = 1, 4$) à l'extérieure du bicouche.

L'équation de continuité du flux entre chaque interface ($x = 0$, $x = \ell$ et $x = \ell + L$) est donnée par :

$$\phi_i v_i(x, t) = \phi_{i+1}\, v_{i+1}(x, t), \qquad i = 1, 2, 3, \tag{49}$$

où ϕ_i, $i = 1, ..., 4$ est la porosité dans chaque couche.

En utilisant les relations (178) et (49), nous obtenons les relations suivantes entre pression acoustique $p_i(x, t)$ et les propriétés physiques de chaque couche :

$$\phi_{i+1}\left[\rho_f\, \alpha_i \partial_x p_{i+1}(x, t) + \chi_{vi}(t) * \partial_x p_{i+1}(x, t)\right] = \phi_i\left[\rho_f\, \alpha_{i+1} \partial_x p_i(x, t) + \chi_{v(i+1)}(t) * \partial_x p_i(x, t)\right], \quad i = 1, 2, 3. \tag{50}$$

En utilisant la tranformée de Laplace de l'équation (50) et le champ de pression pour chaque couche (Eqs. 38, 39 et 43), nous obtenons les relations suivantes aux interfaces de chaque couche :

$$B_2(z) - A_2(z) = K_1(R(z) - 1), \tag{51}$$

$$B_3(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}\ell\right) - A_3(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}\ell\right) = K_2\left(B_2(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right) - A_2(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\right), \tag{52}$$

$$B_3(z)\exp\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell + L)\right) - A_3(z)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell + L)\right) = K_3 T(z)\exp\left(-\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3}\right)z\right). \tag{53}$$

avec :

$$K_1 = \frac{\sqrt{\alpha_2}}{\phi_2}, \quad K_2 = \frac{\phi_2\sqrt{\alpha_3}}{\phi_3\sqrt{\alpha_2}}, \quad K_3 = \frac{\sqrt{\alpha_3}}{\phi_3}, \quad K_1 K_2 = K_3. \tag{54}$$

En utilisant les relations 45-47 et 51-53 (Annexe F), nous obtenons les expressions suivantes des coefficients de réflexion et de transmission :

$$R(z) = d_1 \frac{\Gamma(z)}{\Xi(z)}, \tag{55}$$

$$T(z) = h_1 \exp\left(\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3}\right)z\right)\frac{\exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell - \frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)}{\Xi(z)}, \tag{56}$$

avec

$$\Gamma(z) = \quad 1 + d_2 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right) + d_3 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right) - d_4 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell - 2\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right),$$

$$\Xi(z) = \quad 1 + h_2 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right) + h_3 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right) + h_4 \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell - 2\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right).$$

$$d_1 = \frac{K_1 - 1}{K_1 + 1}, \quad d_2 = \frac{(K_1+1)(K_2-1)}{(K_1-1)(K_2+1)}, \quad d_3 = \frac{(K_3-1)(K_2-1)}{(K_3+1)(K_2+1)}, \quad d_4 = -\frac{(K_3-1)(K_1+1)}{(K_3+1)(K_1-1)},$$
$$h_1 = \frac{4K_1K_2}{(1+K_3)(1+K_1+K_2+K_3)}, \quad h_2 = \frac{(1-K_2)(1-K_1)}{(1+K_1)(1+K_2)}, \quad h_3 = \frac{(K_3-1)(1-K_2)}{(K_3+1)(1+K_2)},$$
$$h_4 = \frac{(1-K_3)(K_1-1)}{(1+K_3)(K_1+1)}.$$

Pour exprimer les réflexions multiples dans les couches poreuses, nous écrivons les coefficients de réflexion et de transmission comme suit :

$$R(z) = d_1\Gamma(z)\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\Xi(z)-1)^n,$$
$$T(z) = h_1 \exp\left(\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3}\right)z\right)\exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell - \frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(L)\right)\sum_{n\geq 0}(-1)^n(\Xi(z)-1)^n.$$

En utilisant l'identité :

$$(x+y+z)^n = \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{n!}{n_1!n_2!n_3!}\, x^{n_1}y^{n_2}z^{n_3},$$

où $n! = \Gamma(n+1)$, les expressions de réflexion et de transmission deviennent :

$$R(z) = d_1\Gamma(z)\sum_{n\geq 0}(-1)^n n! \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{h_2^{n_1}h_3^{n_2}h_4^{n_3}}{n_1!n_2!n_3!}\exp\left(-2\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}(n_1+n_3)\ell\right) \times \exp\left(-2\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(n_2+n_3)L\right)$$

et

$$T(z) = h_1 \exp\left(\left(\frac{\ell}{c_2} + \frac{L}{c_3}\right)z\right)\sum_{n\geq 0}(-1)^n n! \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{h_2^{n_1}h_3^{n_2}h_4^{n_3}}{n_1!n_2!n_3!}\exp\left(-\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}(2n_1+2n_3+1)\ell\right) \times \exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(2n_2+2n_3+1)L\right).$$

En posant $z = j\omega$, où $j^2 = -1$ et où ω est la pulsation, nous pouvons facilement déduire les expressions des coefficients de réflexion et de transmission dans le domaine fréquentiel.

Rappelons que la transformée de Laplace inverse de $\exp\left(-\frac{\ell}{c_2}\sqrt{f_2(z)}\right)$ et $\exp\left(-\frac{L}{c_3}\sqrt{f_3(z)}\right)$ sont les fonctions de Green de la première et la seconde couche du milieu poreux, respectivement.

Dans le domaine temporel, l'opérateur de transmission est exprimé par :

$$\tilde{T}(t) = h_1 \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{h_2^{n_1} h_3^{n_2} h_4^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} G_2\left[t+\frac{\ell}{c_2}, (2n_1+2n_3+1)\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t+\frac{L}{c_3}, (2n_2+2n_3+1)\frac{L}{c_3}\right]$$

où G_i, $i = 2, 3$ est la fonction de Green des couches poreuses (2) et (3) respectivement. L'opérateur de réflexion est exprimé par la relation :

$$\tilde{R}(t) = d_1 \sum_{n\geq 0}(-1)^n n! \sum_{n_1+n_2+n_3=n} \frac{h_2^{n_1} h_3^{n_2} h_4^{n_3}}{n_1! n_2! n_3!} [G_2\left[t, 2(n_1+n_3)\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t, 2(n_2+n_3)\frac{L}{c_3}\right] +$$
$$d_2 G_2\left[t, 2(n_1+n_3+1)\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t, 2(n_2+n_3)\frac{L}{c_3}\right] + d_3 G_2\left[t, 2(n_1+n_3)\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t, 2(n_2+n_3+1)\frac{L}{c_3}\right] +$$
$$d_4 G_2\left[t, 2(n_1+n_3+1)\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t, 2(n_2+n_3+1)\frac{L}{c_3}\right]].$$

Si nous prenons en compte uniquement les premières réfléxions aux interfaces $x = 0$, $x = \ell$ et $x = L$, l'expression de l'opérateur réfléxion devient :

$$\tilde{R}(t) = d_1\delta(t) + d_1(d_2 - h_2) G_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right] + d_1(d_4 - h_4 - d_2 h_3 - d_3 h_2 + 2h_2 h_3) G_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t, 2\frac{L}{c_3}\right]. \quad (57)$$

L'opérateur de transmission décrivant la première onde transmise à travers les deux couches du matériau poreux sans réfléxions internes est exprimé par :

$$\tilde{T}(t) = h_1 G_2\left[t+\frac{\ell}{c_2}, \frac{\ell}{c_2}\right] * G_3\left[t+\frac{L}{c_3}, \frac{L}{c_3}\right] = h_1 \int_0^t G_2\left[\tau+\frac{\ell}{c_2}, \frac{\ell}{c_2}\right] G_3\left[t-\tau+\frac{L}{c_3}, \frac{L}{c_3}\right] d\tau. \quad (58)$$

Le premier terme du coté droit de l'équation (57) : $d_1\delta(t) = \left((\sqrt{\alpha_2} - \phi_2)/(\sqrt{\alpha_2} + \phi_2)\right)\delta(t)$ est équivalent à la réponse réfléchie instantannée de la première couche (région 2). La partie de l'onde équivalente à ce terme, correspond à l'onde réfléchie par la première interface $x = 0$ de la première couche poreuse. Elle dépend uniquement de la porosité et la tortuosité de la première couche poreuse. L'onde réfléchie par la première interface possède l'avantage de ne pas être dispersive, mais simplement atténuée par le facteur d_1. Ce résultat est en accord avec les conclusions obtenues dans les chapitres précédents concernant l'onde réfléchie par une tranche de matériau poreux. Ceci montre qu'il est possible de mesurer la porosité et la tortuosité de la première couche juste en mesurant sa première onde réfléchie.

Le second terme du coté droit de l'équation (57) : $d_1(d_2 - h_2)F_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right]$ correspond à la contribution à la réflexion par la seconde interface $x = \ell$. Ce terme dépend de la porosité et la tortuosité des deux couches poreuses. La fonction de Green F_2 décrit la propagation et la dispersion d'une onde acoustique ayant parcourue un aller-retour à l'intérieur de la première couche du milieu poreux. La fonction de Green dépend des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique Λ et Λ' de la première couche (région 2). Ce résultat signifie qu'il est possible d'obtenir une information de toutes les propriétés acoustiques (porosité, tortuosité, longueurs caractéristiques visqueuse et thermique) de la première couche (région 2), et aussi, la porosité et la tortuosité de la seconde couche (région 3), mais les longueurs caractéristiques de la secoude couche poreuse (région 3) n'interviennent pas.

Finallement, le terme : $d_1(d_4 - h_4 - d_2 h_3 - d_3 h_2 + 2h_2 h_3)F_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right] * F_3\left[t, 2\frac{L}{c_3}\right]$ représente la contribution à la réflexion par la troisième interface $x = L$. L'onde correspondante fait un aller-retour à l'intérieur des deux couches poreuses. Evidemment cette contribution de l'onde dépend de tous les paramètres acoustiques de chaque couche.

L'avantage des expressions obtenues dans le domaine temporel des opérateurs de réfléxion et de transmission (Eqs. 57 et 58) est de montrer analytiquement l'effet des paramètres acoustiques (porosité, tortuosité, longueurs caractéristiques visqueuse et thermique) de chaque couche poreuse sur les contributions de la réflexion par les interfaces du bicouche poreux.

Validation expérimentale

Comme application de ce modèle, plusieurs simulations numériques pour les ondes réfléchies et transmises par deux bicouches sont comparées aux données expérimentales [41]. Les expériences sont effectuées dans l'air en utilisant deux transducteurs Ultran NCT202 avec une fréquence centrale de 190kHz dans l'air et une bande passante à -6dB allant de 150kHz à 230kHz. Des implusions de 400V sont délivrées par un générateur Panametrics 5052PR. Le dispositif expérimental est celui donné par la figure 5. Le signal expérimental incident généré par le transducteur ainsi que son spectre sont donnés par la figure 103. Les mesures sont effectuées sur

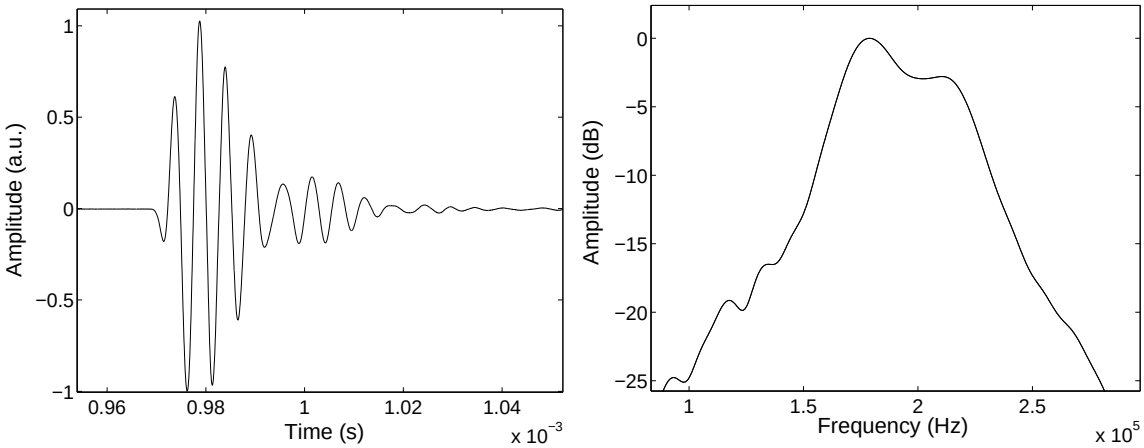

Fig. 39 – Signal incident génére par le transducteur en mode transmis et son spectre

des échantillons de mousses plastiques M1-M4. Leurs caractéristiques acoustiques sont déterminées indépendemment en utilisant les méthodes classiques [31]. Les paramètres acoustiques des échantillons de mousses plastiques sont donnés dans la tableau suivant :

Matériau	M1	M2	M3	M4
Longueur caractéristique visqueuse (Λ (μm))	200	30	330	230
Longueur caractéristique thermique (Λ' (μm))	600	90	990	690
Tortuosité (α)	1.07	1.4	1.02	1.05
Porosité (ϕ)	0.97	0.85	0.90	0.98

Trois échantillons de bicouches de matériaux poreux sont considérés, le premier est composé de 0.86 cm de M1 et 0.81 cm de M2, le second de 4.13 cm de M1 et 1.99 cm de M3 et finalement le troisième de 2.98 cm de M1 et 1.99 cm de M3. Des simulations numériques et résultats expérimentaux pour les trois échantillons des matériaux bicouches sont présentés dans les figures 40, 41 et 42, respectivement. Les résultats numériques sont obtenus à partir de la convolution de l'opérateur de transmission (Eq. 58) avec le signal généré par le transducteur donné par la figure 103. Nous pouvons voir à partir des figures 40-42 une bonne corrélation entre le signal transmis expérimental (trait plein) et le signal simulé (pointillé). Ce résultat valide l'expression de l'opérateur de transmission (Eq. 58).

Les ondes réfléchies sont étudiées en utilisant un autre dipositif experimental donné par la figure 8. Un transducteur est utilisé comme émetteur et récepteur. Le signal expérimental

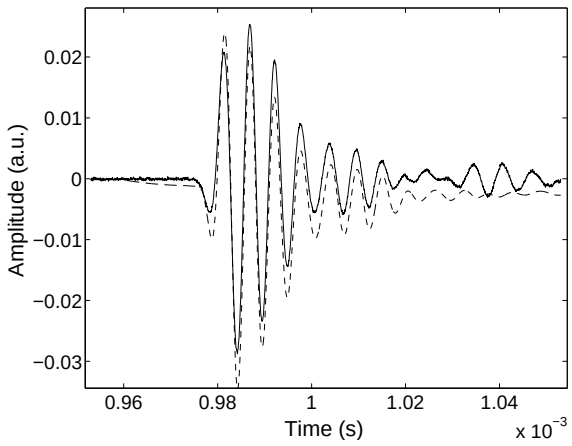

FIG. 40 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour un milieu bicouche constitué de 0.86 *cm* de M1 et 0.81 *cm* de M2.

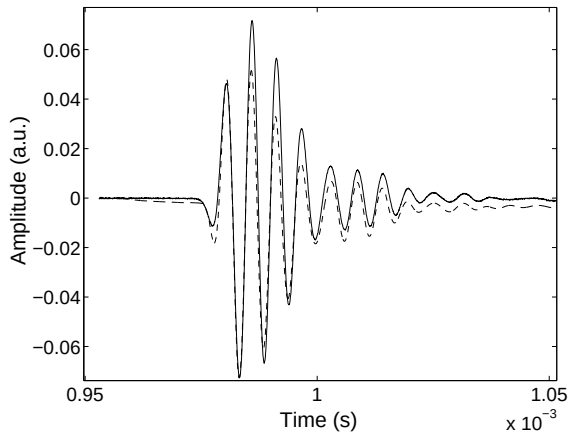

FIG. 41 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour un milieu bicouche constitué de 4.13 *cm* de M1 et 1.99 *cm* de M3.

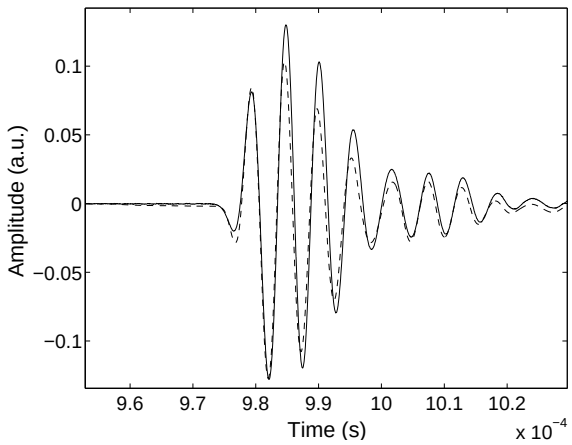

FIG. 42 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour un milieu bicouche constitué de 2.98 *cm* de M1 et 1.99 *cm* de M3.

incident utilisé dans le mode réfléchi et son spectre sont donnés dans la figure 43.

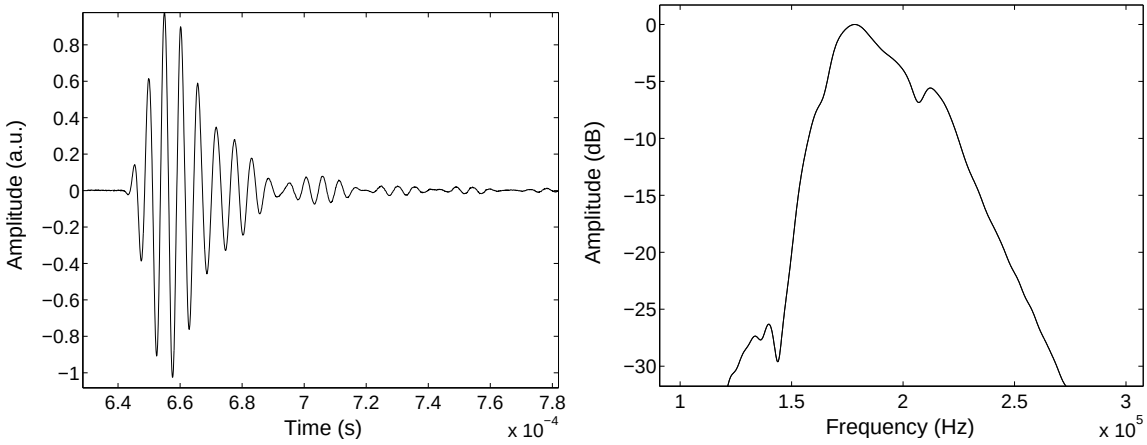

FIG. 43 – Signal incident en mode réfléchi et son spectre.

Un bicouche de matériau poreux constitué de 1.11 cm de M4 et 0.87 cm de M1 est considéré. La figure 44 montre une comparaison entre signal réfléchi simulé (pointillé) et signal réfléchi expérimental (trait plein). Le signal simulé a été obtenu par la convolution de l'opérateur de réflexion donné par l'équation (57) avec le signal incident donné par la figure 43. Nous pouvons constater qu'il y'a trois signaux réfléchis sur la figure 44. Le premier correspond à la réflexion par la première couche M4 ($x = 0$) par la première interface, cette onde réfléchie correspond au premier terme du coté droit de l'équation (57) : $d_1\delta(t) = \left((\sqrt{\alpha_2} - \phi_2)/(\sqrt{\alpha_2} + \phi_2)\right)\delta(t)$. La seconde onde réfléchie donnée par la figure 44 correspond à la réflexion entre la seconde interface M4 et la première interface M1 ($x = \ell$), cette onde correspond au second terme du coté droit de l'équation (57) : $d_1(d_2 - h_2)F_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right]$. Finallement le troisième signal cor-

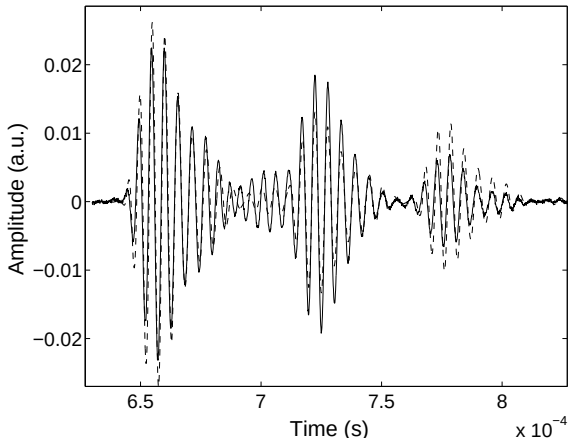

FIG. 44 – Comparaison entre signal réfléchi expérimental (trait plein) et signal simulé réfléchi (pointillé) pour un milieu bicouche constitué de 1.11 cm de M4 et 0.87 cm de M1.

respond à la réflexion par la seconde interface M1 ($x = L$), qui est donnée par le terme : $d_1(d_4 - h_4 - d_2h_3 - d_3h_2 + 2h_2h_3)F_2\left[t, 2\frac{\ell}{c_2}\right] * F_3\left[t, 2\frac{L}{c_3}\right]$. Générallement, il n'est pas possible de voir d'autres contributions à la réfléxion expérimentalement à cause de la haute atténuation des ondes ultrasonores dans les mousses plastiques saturées d'air. Cependant, la troisième contribution à la réfléxion à $x = L$ n'est pas toujours détectée expérimentallement ; par exemple la figure

45 montre une comparaison entre prédictions théoriques (pointillé) et données expérimentales (trait plein) pour un bicouche constitué de 0.88 cm de M1 et 0.83 cm de M2. L'atténuation acoustique dans la mousse plastique M2 est plus importante que dans les autres échantillons. L'échantillon M2 a une grande valeur de tortuosité et de faibles valeurs des longueurs caractéristiques en comparaison avec celles des autres échantillons de mousses plastiques, ce qui indique une grande absorption acoustique. Dans la figure 45, nous pouvons voir uniquement les deux ondes réfléchies correspondant à la réfléxion par la première interface M1 (première couche) ($x = 0$) et la réflexion entre la seconde interface de M1 et la première interface ($x = \ell$) de M2 (seconde couche) respectivement. L'onde réfléchie par la seconde M2 interface ($x = L$) est totalement absorbée par les deux couches, M1 et M2. La figure 45 montre également que l'amplitude de la seconde onde réfléchie est plus importante que celle de la première. Ceci est dû à la haure résistivité de l'échantillon M2 en comparaison avec celle de l'échantillon M1 et l'épaisseur de M1 qui joue aussi un rôle important dans l'atténuation de l'onde réfléchie à la seconde interface $x = \ell$.

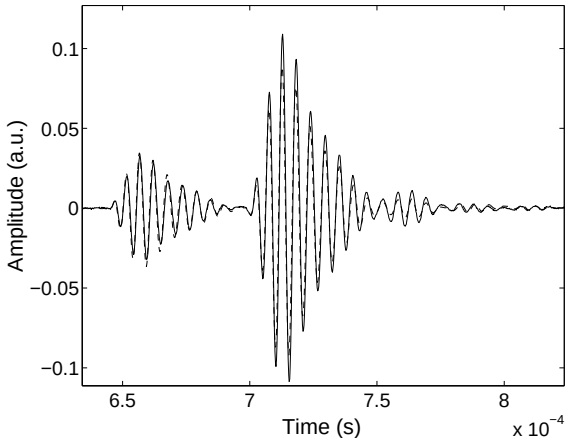

Fig. 45 – Comparaison entre le signal réfléchi expérimental (trait plein) et le signal réfléchi simulé (pointillé) pour un matériau bicouche constitué de 0.88 cm de M1 et 0.83 cm de M2.

Conclusion

Dans ce chapitre les expressions analytiques des opérateurs de réflexion et de transmission ont été explicitées pour un bicouche de milieu poreux constitué de deux matériaux homogènes isotropes. Des expressions simples ont été obtenues entre ces opérateurs et les paramètres acoustiques du milieu. Nous avons montré [41] que ces opérateurs sont égaux à la somme de la contribution de chaque interface du milieu poreux bicouche. L'avantage des expressions analytiques des opérateurs de réflexion et de transmission dans le domaine temporel est de montrer facilement l'effet des paramètres acoustiques dans les réfléxions multiples aux interfaces du bicouche.
Des mesures ultrasonores dans les modes réfléchis et transmis ont été étudiées en utilisant différents dispositifs expérimentaux. Une petite différence a été observée entre prédictions théoriques et données expérimentales dans les deux modes (réfléxion et transmission). Ceci permet de conclure que les expressions des opérateurs de diffusion obtenus sont correctes.

2.6 Régime Visqueux

Dans ce domaine, les forces visqueuses sont importantes dans tout le fluide, le cycle de compression/dilatation dans le milieu poreux est assez lent pour permettre un échange thermique

entre fluide et structure. En même temps la température de la structure est pratiquement inchangée par le passage de l'onde sonore à cause de la grande valeur de sa chaleure spécifique par rapport à celle du fluide : la structure agit comme un thermostat. Dans ce cas la compressibilité isothermale est directement applicable. Ce domaine correspond aux fréquences pour lesquelles l'épaisseur de peau visqueuse $\delta = (2\eta/\omega\rho_0)^{1/2}$ est plus grande que le rayon des pores r,

$$\frac{\delta}{r} \gg 1.$$

On a alors affaire aux basses fréquences. Pour celles-ci, nous considerons les approximations basses fréquences du facteur de réponse $\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$. Quand $\omega \to 0$, la tortuosité dynamique $\alpha(\omega)$ et la compressibilité dynamique $\beta(\omega)$ prennent la forme :

$$\alpha(\omega) = -\frac{\sigma\phi}{i\omega\rho},$$
$$\beta(\omega) = \gamma.$$

pour une onde se propageant le long de la direction ox, les formes généralisées des équations de base dans le domaine temporel deviennent :

$$\sigma\phi V = -\frac{\partial p}{\partial x} \qquad \text{and} \qquad \frac{\gamma}{K_a}\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

où l'équation d'Euler est réduite à la loi de Darcy qui définit la résistivité spécifique au passage du fluide $\sigma = \eta/k_0$. L'équation d'onde dans le domaine temporel est donnée par :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma\phi\gamma}{K_a}\right)\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \tag{59}$$

Les champs qui varient dans le domaine temporel, la pression, la vitesse acoustique, satisfont à une équation de diffusion correspondant à une constante de diffusion :

$$D = \frac{K_a}{\sigma\phi\gamma}.$$

Un résultat similaire a été donné par Jonhson [57]. Cependant, la constante adiabatique γ n'apparait pas dans le modèle de Johnson dans lequel l'interaction thermique est négligée. La constante de diffusion D est liée à la constante de Darcy k_0 (appelé aussi la perméabilité visqueuse) par la relation :

$$D = \frac{K_a k_0}{\eta\phi\gamma},$$

où η est la viscosité du fluide.
L'équation (59) est résolue par la méthode de Laplace en prenant en compte les conditions initiales et aux limites (31).
La solution de l'équation de diffusion (59) donne la fonction de Green G du milieu en régime visqueux :

$$G(x,t) = \frac{x\sqrt{D}}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2\,D}{4t}\right).$$

L'opérateur de transmission est donné par

$$\tilde{T}(t) = D(t) * G(L,t),$$

avec :

$$D(t) = -\frac{8}{B^2}\left(1+\frac{t}{B^2}\right)\exp\left(\frac{t}{B^2}\right)\mathrm{Erfc}\left(\frac{\sqrt{t}}{B}\right)+\frac{4}{B\sqrt{\pi t}}\left(2\frac{t}{B^2}+1\right), \qquad B=\frac{1}{\eta}\sqrt{\phi^3\gamma\sigma^3\rho},$$

où Erfc est la fonction erreur complémentaire [48]. L'opérateur de réflexion est donné par :

$$\tilde{R}(t) = (f(t)+k(t)) * g(t),$$

où $g(t)$ représente le signal d'entrée et :

$$f(t) = \frac{1}{B^2}\left(t - t^2/B\right)\exp\left(-t/B\right),$$
$$k(t) = \frac{2B}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{B^2y^2}{4t}\right)\left(\frac{y^2B^2}{2t}-1\right)\left(y-y^2\right)\exp\left(-y\right)dy.$$

Sensibilité des paramètres acoustiques en réflexion

Dans ce chapitre, des simulations numériques d'ondes réfléchies par une tranche de matériau poreux sont effectuées en faisant varier les valeurs des paramètres géométriques indépendants décrits dans le chapitre précédent. Une variation de 50% est appliquée aux paramètres (résistance spécifique au passage du fluide σ et la porosité ϕ). Les valeurs numériques choisies pour les paramètres physiques correspondent aux matériaux acoustiques communs, comme l'épaisseur $L = 4cm$, porosité $\phi = 0.9$ et la résistance spécifique au passage du fluide $\sigma = 30000$ N m^{-4}s et le rayon des pores $r = 70\mu$m.

Le signal incident utilisé dans la simulation et le signal simulé réfléchi sont donnés dans la partie gauche de la figure 46. Leurs spectres sont donnés dans la partie droite de la figure 46. A

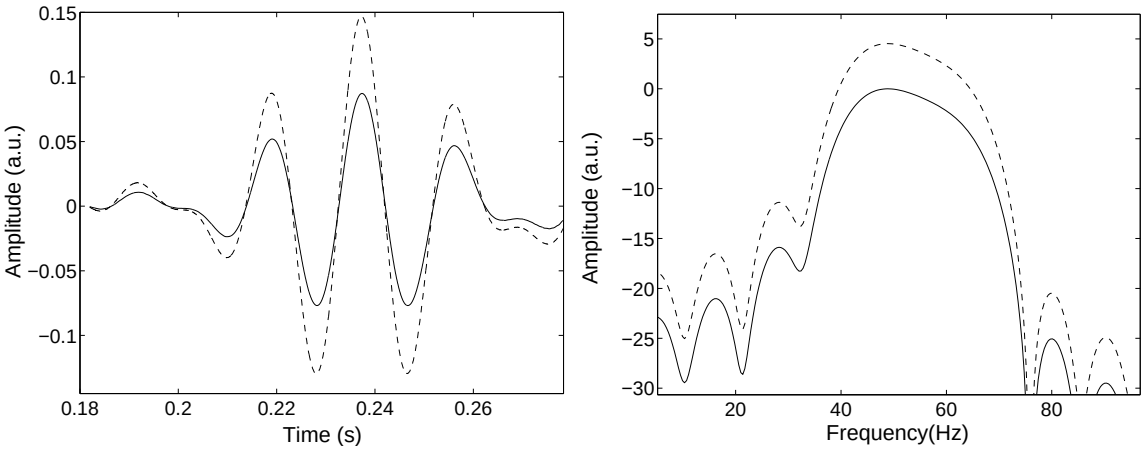

Fig. 46 – Signal incident (pointillé) et signal réfléchi simulé (trait plein)

partir du signal de la figure 46, nous pouvons constater que l'onde réfléchie est juste atténuée sans dispersion en comparaison avec le signal incident, les deux signaux ont la même bande passante.

La figure 47 montre les résultats de la simulation après réduction de résistivité spécifique au passage du fluide de 50% de sa valeur initiale. Le premier signal (pointillé) correspond au signal réfléchi simulé pour $\sigma = 30000$ N m^{-4}s et le second (trait plein) pour $\sigma = 15000$ N m^{-4}s. Les valeurs des autres paramètres ont été gardées constantes ($L = 4cm$ et porosité $\phi = 0.9$). La sensibilité de la résistivité en mode réfléchi peut être constatée pour un changement de 50%. En

réduisant la résistivité, l'amplitude de l'onde réfléchie décroit de 30 % de sa valeur initiale. Ce résultat peut être expliqué par le fait que lorsque la résistivité décroit, les pertes dûes aux effets visqueux dans le matériau poreux deviennent moins importantes, le milieu est moins résistif et donc l'amplitude de l'onde réfléchie décroit. En réduisant la porosité de 50% de sa valeur

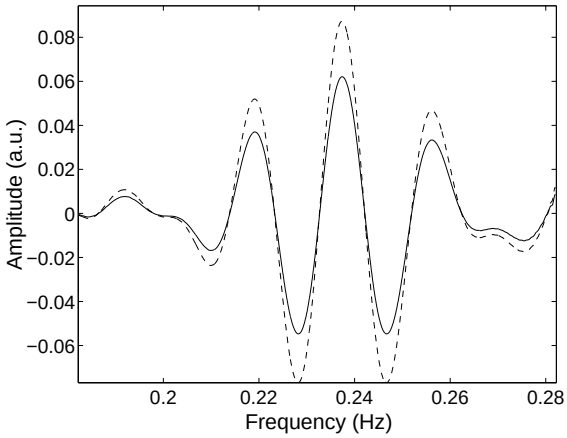

FIG. 47 – Comparaison entre signaux réfléchis simulés correspondant à $\sigma = 30000\mathrm{N}m^{-4}s$ (pointillé) et $\sigma = 15000\mathrm{N}m^{-4}s$ (trait plein)
.

initiale, aucun changement n'apparaît dans l'onde réfléchie. Nous pouvons conclure qu'il n'ya aucune sensibilité importante de la porosité dans le mode réfléchi.
Nous pouvons aussi conclure à partir de cette étude que la résistivité est le paramètre le plus important dans la description des pertes en milieu visqueux (basse fréquence). Nous évaluerons ce paramètre dans le chapitre suivant en résolvant le problème inverse en utilisant les données expérimentales des ondes réfléchies.

Problème inverse

La diffusion des ondes acoustiques par une tranche de matériau poreux dans le domaine visqueux (basse fréquence) est caractérisée par les deux paramètres : porosité ϕ et résistivité σ, des valeurs qui sont crutiales pour la description du comportement des ondes sonores dans de tels matériaux. Il est important de développer de nouvelles méthodes expérimentales et outils mathématiques pour leurs estimations. Le problème inverse élementaire associé à une tranche de matériau poreux peut être posé comme suit : à partir des mesures de signaux réfléchis à l'extérieur de la tranche, trouver les valeurs des paramètres du milieu. L'étude de la sensibilité de la porosité dans le chapitre précédent montre que ce paramètre ne peut être estimé en mode réfléchi aux basses fréquences à cause de sa faible sensibilité. Cependant nous avons montré dans la section pércédente que la résistivité possède une sensibilité significative en mode réfléchi. Nous allons essayer de déterminer σ en résolvant le problème inverse pour les ondes réfléchies par une tranche de matériau poreux.
Le problème inverse est de trouver la valeur du paramètre σ qui minimise dans au sens des moindres carrés la fonction U définie par :

$$U(\sigma) = \sum_{i=1}^{i=N} (p^r_{exp}(x, t_i) - p^r(x, t_i))^2, \tag{60}$$

avec les notations habituelles. Dans le chapitre suivant la solution du problème inverse sera déterminée en utilisant des données réfléchies expérimentales.

Mesures acoustiques

Comme application de ce modèle, quelques simulations numériques sont comparées aux résultats expérimentaux. Pour vérifier la condition de basse fréquence dans les mousses plastiques saturées d'air, les rayons des pores doivent être compris entre 40μm et 100μm, les composantes fréquentielles des signaux expérimentaux doivent être inférieures à 1 Khz.
Les expériences sont effectuées dans un guide, ayant un diamètre de 5 cm et une longueur de 50 m. Cette longueur a été choisie pour permettre la propagation des signaux transitoires en basse fréquence. Il n'est pas important de garder le guide droit, il peut être enroulé pour économiser l'espace sans aucune perturbation sur les signaux réfléchis (la fréquence de coupure du guide est de $f_c \sim$ 4kHz).
Une source sonore "Brand" constitué d'un haut-parleur "Realsitic 40-9000. Des impulsions proviennent d'un générateur synthétique "Standford Research System" model DS345-30 MHz. Les signaux sont amplifiés et filtrés en utilisant un modèle "SR 650-Dual channel filter, Standford Research Systems". Les signaux (incident et réfléchi) sont mesurés en utilisant le même microphone (Bruel&Kjaer, 4190). Le signal incident est mesuré en posant un réflecteur total à la même position que l'échantillon poreux. Le dispositif expérimental est montré dans la figure 48.

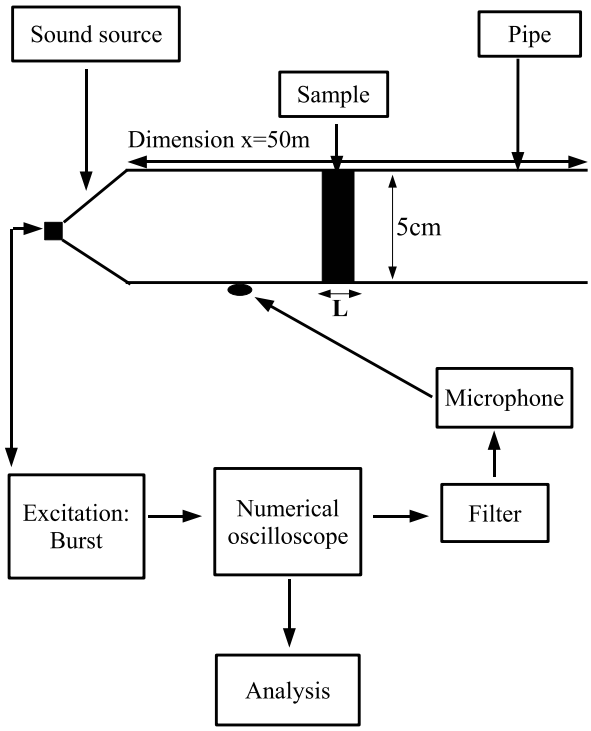

FIG. 48 – Dispositif expérimental de mesures en réflexion en régime visqueux.

Considérant un échantillon cylindrique de mousse plastique M1 de dimètre 5cm et d'une épaisseur de 3 cm. La résistivité de l'échantillon M1 a été mesurée en utilisant la Méthode de Bies et Hansen [12], obtenant la valeur : $\sigma = 40000 \pm 6000 Nm^{-4}s$.
La partie gauche de la figure 49 montre le signal incident expérimental (trait plein) généré par un haut parleur dans la bande de fréquence (35 - 75) Hz, et un signal expérimental réfléchi

(pointillé). La partie droite de la figure 50 montre leurs spectres respectifs. A partir des spectres des deux signaux, nous pouvons constater qu'ils ont pratiquement la même bande passante ce qui signifie qu'il n'ya pas de dispersion.
Après résolution du problème inverse numériquement pour la résistivité, nous trouvons les valeurs suivantes : $\sigma = 40500 \pm 2000 Nm^{-4}s$. Nous présentons dans la figure 50 la variation de la fonction de minimisation U donnée par l'équation (60) avec la résistivité σ. La figure 51 montre une comparaison entre signal réfléchi expérimental et signal réfléchi simulé pour la valeur optimisée de la résistivité. La différence entre les deux courbes est petite, ce qui permet de conclure que la valeur optimisée de la résistivité est bonne. Essayons de résoudre maintenant

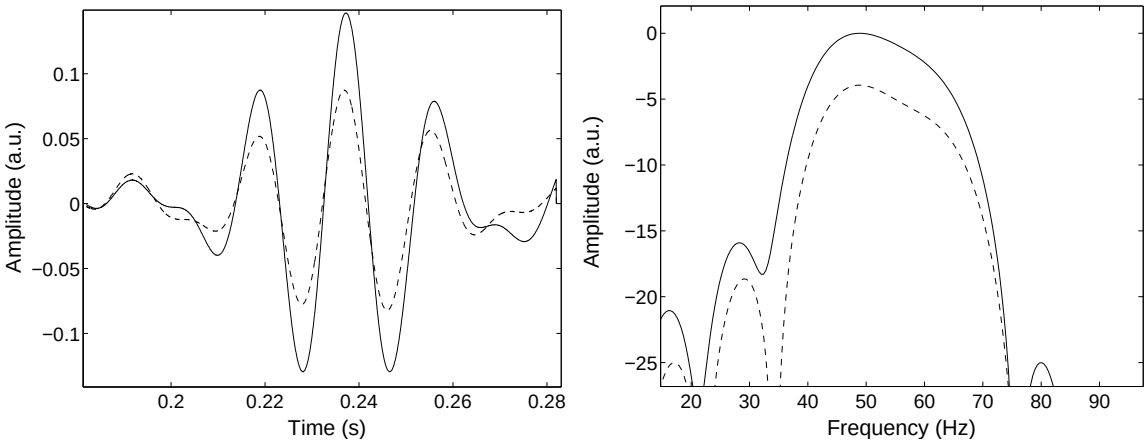

Fig. 49 – Signaux expérimentaux, incident (trait plein) et réfléchi (pointillé).

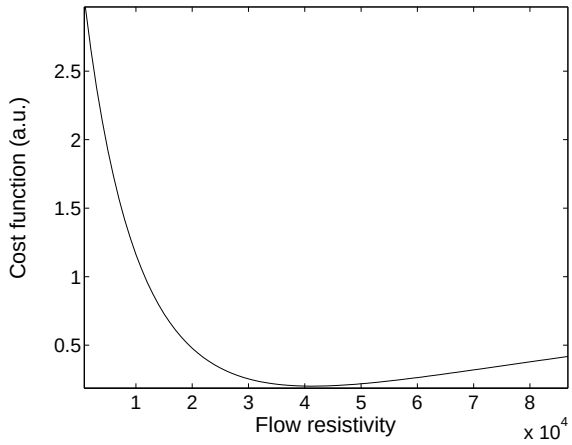

Fig. 50 – Variation de la fonction de minimisation U avec la résistance spécifique au passage du fluide σ

le problème inverse pour le même échantillon M1 dans la bande fréquentielle (45 - 100) Hz. Le signal expérimental incident généré par le haut parleur, le signal réfléchi ainsi que leurs spèctres respectifs sont donnés dans la figure 52, nous pouvons voir que dans ce cas la fréquence centrale du signal est à 70 Hz. En résolvant le problème inverse et en minimisant la fonction U (voir figure de gauche de 53), on obtient la valeur suivante de la résistivité : $\sigma = 39500 \pm 2000 Nm^{-4}s$. La figure de droite de 53 montre une comparaison entre signal réfléchi expérimental et signal simulé obtenu par optimisation du problème inverse. Ici aussi, la corrélation entre prédictions théoriques et données expérimentales est bonne. Cette étude a été faite dans le domaine de

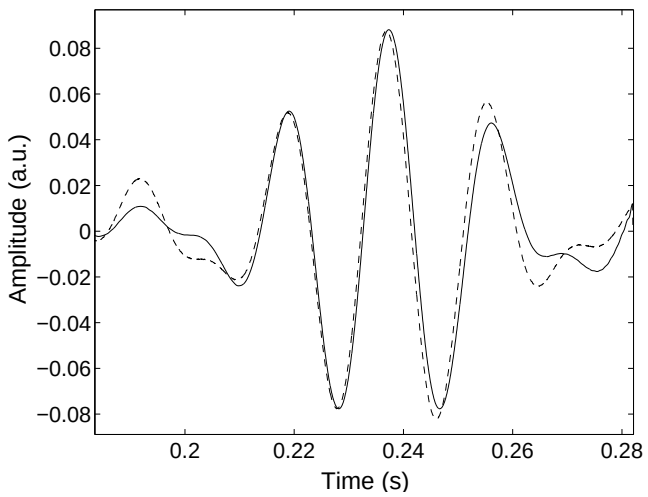

FIG. 51 – Comparaison entre signal réfléchi expérimental (pointillé) et signal réfléchi simulé (rtait plein)

fréquence (80 - 140) Hz et a aussi donné de bons résultats ($\sigma = 41500 \pm 2000 Nm^{-4}s$). On peut constater que pour les différents domaines de fréquences du signal expérimental incident, les valeurs optimisées obtenues en utilisant cette méthode sont proches de celles obtenues en utilisant les méthodes classiques (Bies and Hansen [12]).

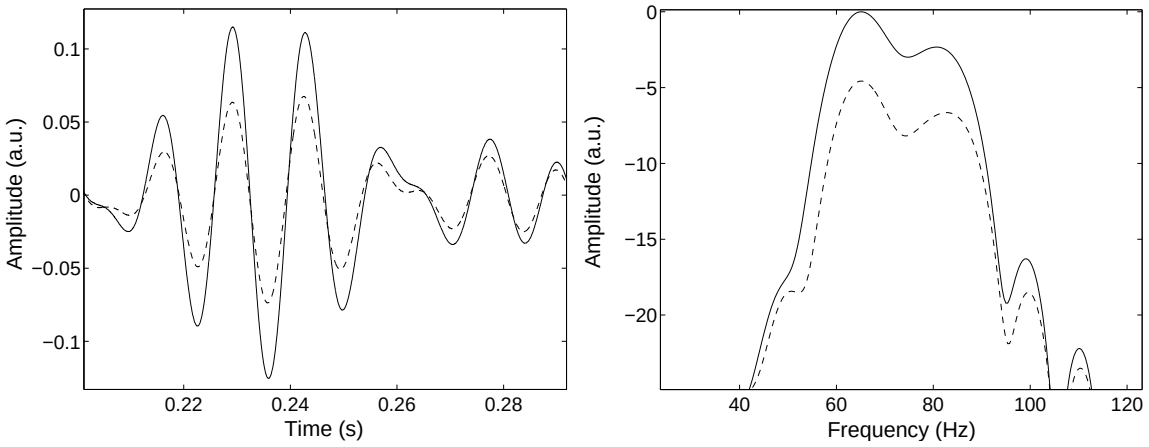

FIG. 52 – Signaux expérimentaux incident et réfléchis, ainsi que leurs spèctres

2.6.1 Conclusion

Dans ce chapitre, une estimation de la résistance spécifique au passage du fluide σ a été donnée en résolvant le problème inverse pour les ondes réfléchies par une tranche de matériau poreux saturé par l'air. le problème inverse est résolu numériquement par la méthode des moindres carrés. Les valeurs reconstruites de la résistance spacifique au passage du fluide sont proches de celles obtenues en utilisant les méthodes calssiques. Cette méthode est une alternative aux méthodes usuelles [12].

Dans ce régime visqueux, l'équation de propagation est réduite à une équation de diffusion (au sens diffusion de la chaleur), l'intéraction de l'impulsion sonore avec le fluide saturant le milieu poreux a été décrite par le modèle du fluide équivalent. La sensibilité de la porosité et résistivité

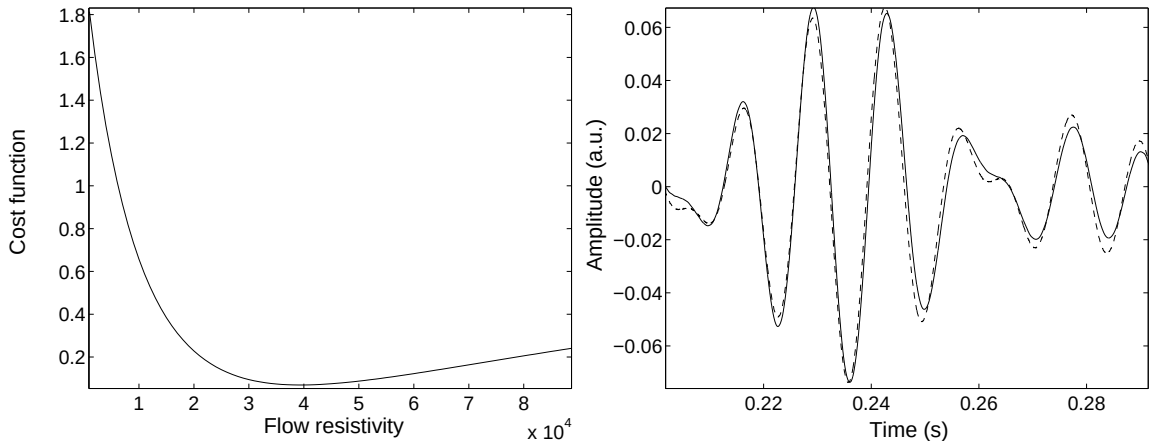

FIG. 53 – A gauche : Variation de la fonction de minimisation U avec σ. A droite : Comparaison entre signal réfléchi expérimental (pointillé) et théorique (trait plein).

a été étudiée et a montré son effet sur l'onde réfléchie par le matériau. Cette étude a montré que la réflexion est beaucoup plus sensible à la résistivité qu' à la porosité, l'effet de cette dernière dans le mode réfléchi est négligeable.
L'avantage principal de ce concept est sa simplicité. L'onde diffusive au basse fréquence n'est pas sujette à la dispersion, mais est simplement atténué, sa bande passante fréquentielle et temporelle est la même que celle du signal incident, de plus sa détéction expérimentale est simple pour les milieux résistifs en comparaison avec l'onde transmise propagative dans le domaine asymptôtique (haute fréquence).

3 Causalité : Vérification des relations de Kramers-Kronig

La propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux ayant une structure rigide est bien décrite par plusieurs modèles [56, 2]. Un doute concernant la causalité de ces modèles a été émis dans la littérature [11]. Une vérification de la causalité de ces modèles est étudiée dans ce chapitre en utilisant les relations de dispersion de Kramers-Kronig adaptées aux lois d'atténuation en puissance de la fréquence. Nous montrons [44] par plusieurs méthodes que ces modèles vérifient bien la causalité en haute et basse fréquences. L'équation d'onde dans le domaine temporel ainsi que la théorie temporelle de la causalité ont été traitée.

3.1 Introduction

Les rélations de Kramers-Kronig permettent de vérifier la causalité et la consistance d'un modèle théorique. L'étude des relations de dispersions basées sur la causalité a débuté en 1926 avec les travaux de Kronig reliant la dispersion et l'absorption des rayons X [62]. En 1927, Kramers a montré que l'existance des relations de dispersion en électromagnétisme implique qu'il n' ya pas de signal pouvant se propager dans un milieux plus vite que la vitesse de la lumière (causalité relativiste) [61]. Les bases générales des relations causales de dispersion ont été établies en utilisant les restrictions physiques sur le comportement d'un système linéaire stable [80]. En plus de leurs applications originales en électromagnétisme, les relations de Kramers-Kronig ont été utilisées dans différentes disciplines, spécialement en physique nucléaire, phénomènes de diffusion d'ondes [97, 47] et en Ingénierie électrique [16, 49, 85, 18, 83, 91]. Leur application en acoustique a été moins dévelopée. Ginzberg a été parmi les premiers en 1955 à proposer leurs utilisation en acoustique [46], ensuite ces relations ont été étudiées [101] et utilisées dans différents domaines comme la géophysique [52], l'acoustique sous marine [102], le contrôle non destructif et les ultrasons médicaux [102, 81, 82, 54, 9].

3.2 Rappels Mathématiques et Notations

L'utilisation fréquente de l'analyse de la tranformée de Fourier dans ce chapitre nous amène à définir certaines notations. La double transformée de Fourier dans le domaine temporel et spatial définie comme dans les références [94, 87, 55], par :

$$\begin{aligned} P(k,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p(z,t)e^{-i(kz-\omega t)}dz\,dt. \\ V(k,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v(z,t)e^{-i(kz-\omega t)}dz\,dt. \end{aligned} \tag{61}$$

Ici les variables d'espace z et nombre d'onde k ont une tranformée de Fourier conventionnelle désignée par FT_- et son inverse FT_-^{-1}. La transformée temporelle t et angulaire ω n'est pas conventionnelle dans le sens ou l'argument de l'exponentielle dans la transformée a un " $+i$" plutôt que " $-i$" comme dans l'équation (61) ; donc, les notations FT_+ et FT_+^{-1} sont pour le type " $+i$" et son inverse " $-i$".
Les dérivées correspondantes sont :

$$\begin{aligned} FT_-\left(\frac{\partial^n p}{\partial z^n}\right) &= (ik)^n P, \\ FT_+\left(\frac{\partial^n p}{\partial t^n}\right) &= (-i\omega)^n P. \end{aligned}$$

Les dérivées d'ordre plus élevé seront exprimées ultérieurement par les notations $p_{z^n} = \partial^n p/\partial z^n$. Par exemple si $n = 2$, $p_{zz} = \partial^2 p/\partial z^2$.
Nous utiliserons également la définition de la dérivée fractionnaire pour établir l'équation de

propagation dans le domaine temporel, nous généraliserons alors la définition de la transformée d'ordre fractionnaire :

$$FT_{+}^{-1}(-i\omega)^{\nu}P = D^{\nu}[P(t)],$$

où $D^{\nu}[x(t)]$ est la dérivée fractionnaire d'ordre ν définie par l'équation (9). La dérivée fractionnaire ne représente pas les variations locales de la fonction, au contraire, elle agit comme un opérateur intégral de convolution.

Dans ce chapitre, nous allons appliquer les distributions [71] et leurs tranformées pour l'écriture de l'équation d'onde dans le domaine temporel et celles des relations causales.
Quelques distributions peuvent être utilisées avec la transformée de Fourier conventionnelle utilisée pour le temps/fréquence lorsque la valeur de y est impaire :

$$FT_{+}^{-1}[\omega^{y}\mathrm{sgn}(\omega)] = y!/[\pi(it)^{y+1}], \tag{62}$$

$$FT_{+}[\mathrm{sgn}(t)/t^{y+1}] = -2(i)^{y}\omega^{y}[\ln \mid \omega \mid +W]/y!, \tag{63}$$

où $\mathrm{sgn}(\omega)$ est la fonction signe et W est une constante supposée nulle.
Un autre cas interessant est celui où y est non-entier. Pour les non entiers, les distributions appropriées sont données par :

$$FT_{+}^{-1}(\mid \omega \mid^{y}) = \Gamma(y+1)\cos[(y+1)\pi/2]/(\pi \mid t \mid^{y+1}), \tag{64}$$

$$FT_{+}[\mathrm{sgn}(t)/ \mid t \mid^{y+1}] = i\,\pi\,\mathrm{sgn}(\omega) \mid \omega \mid^{y} /y!\sin[(y+1)\pi/2] \tag{65}$$

Ce cas est plus général que la définition de la dérivée fractionnaire donné par Ref. [90] dans l'équation (62).

3.3 Théorie

Dans une variété de milieux (comme les milieux poreux, liquides et tissus) et sur une bande finie, l'atténuation des ondes acoustiques est modélisée par une dépendance en puissance de la fréquence [95, 51, 4, 99, 74, 100, 98] :

$$a = a_0 \mid \omega \mid^{y} \tag{66}$$

où ω est la pulsation, et a_0 a comme unité Np/m et les pertes sont en $\exp(-az)$. Le signe valeur absolue est la conséquence des propriétés d'absorption comme une fonction de la fréquence, y est un nombre réel positif. Pour la plupart des matériaux, l'exposant y a une valeur comprise entre 0 et 2. Ceci pose un problème [95] pour la vérification des relations de Kramers-Kronig. En effet le théorème de Paley-Wiener [84] stipule que pour une fonciton de transfert de la forme :

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j\theta(\omega)} = (e^{-\alpha(\omega)z})e^{j\beta(\omega)z}$$

le logarithme de A doit vérifier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \ln A(\omega) \mid}{1+\omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mid \alpha(\omega) \mid}{1+\omega^2} d\omega < \infty,$$

et A doit être de carré sommable pour que la condition de causalité soit vérifiée [85]. Ces restrictions imposent des valeurs de la puissance de $a(\omega)$ inférieures à 1. Une théorie alternative causale temporelle a été développée [95] pour les milieux ayant une atténuation en puissance de la fréquence, à cause de la non validité des relations classiques de Kramers-Kronig. La clé

du développement de la théorie causale temporelle est l'utilisation des distributions, qui généralisent les fonctions ordinaires pour représenter les quantités physiques comme le coefficient d'atténuation et la vitesse de phase). Les distributions ont été utilisés pour les mesures en dispersion dans d'autres disciplines de la physique, comme la physique des particules, mais elles n'ont pas été beaucoup utilisées pour les mesures ultrasonores, avec comme exception la théorie causale temporelle. En considérant le nombre d'onde complexe comme une distribution, le théorème généralisé de Paley-Wiener [86] devient vérifiable et permet la relaxation des restrictions imposées.

3.4 Equation d'onde dans le domaine temporel

Il est possible d'écrire une relation de dispersion générale pour la porpagation des ondes ultrasonores dans une grande variété de milieux [94] :

$$k^2(\omega) = (\omega/c)^2 + i2(\omega/c)(\alpha_0 \mid \omega \mid^y), \tag{67}$$

où $k(\omega) = b(\omega) + ia(\omega)$, c est la vitesse du milieu, cette relation est valide si $(a(\omega)/b(\omega))^2 \ll 1$, cette inégalité définie un domaine de fréquence fini, dans lequel l'équation d'onde générale dévelopée est valide. Cette approximation est souvent utilisée dans le cas linéaire [82, 87, 60] et non linéaire comme les équations de Burger's et les équations KZK [77]. Dans le cas des milieux poreux, cette approximation est bien vérifiée quand $\delta/r \ll l$, qui est le domaine des hautes fréquences (régime visqueux). Multipliant (67) par i^2P, nous obtenons l'équation d'onde généralisée dans le domaine fréquentiel :

$$(ik)^2P - (-i\omega/c)^2P - i^3 2(\omega/c)(\alpha_0 \mid \omega \mid^y)P = 0 \tag{68}$$

Dans le domaine temporel, tous les coefficients des termes différentiels des équations d'ondes sont réels et constants. Cette caractéristique assure des résultats réels pour des excitations réelles. Lorsque la solution d'onde plane est utilisée dans le domaine fréquentiel utilisant la compressibilité complexe [82] ou la constante élastique complexe [6], elle ne peut être appliquée directement à la solution au cas de l'impulsion, comme cela a été prouvé par Nachman [76]. Le problème se pose lorsque nous essayons de transformer l'équation de propagation générale (68) dans le domaine fréquentiel pour revenir au domaine spatial et temporel, comme cela a été discuté dans la référence [27, 93], en utilisant la transformée de Fourier conventionnelle (61), l'inversion par la transformée k et ω est définie uniquement lorsque y est un nombre pair n :

$$p_{zz} - 1/c^2 p_{tt} - (-1)^{n/2} 2\alpha_0/c p_{t^{n+1}} = 0. \tag{69}$$

Pour les autres puissances de y, les relations (61), ne permettent pas de trouver des termes différentiels avec des constantes réelles. C'est le cas pour la propagation dans les matériaux poreux en haute fréquence où l'introduction de la définition de la dérivée fractionnaire est nécessaire pour écrire l'équation d'onde dans le domaine temporel. L'approche adoptée par Szabo [93] consiste à appliquer les distributions et leurs transformées au problème [71], si y est impair, nous pouvons écrire l'équation (67) sous la forme équivalente :

$$k^2(\omega) = (\omega/c)^2 + i\omega(2\alpha_0/c)\mathrm{sgn}(\omega)\omega^y \tag{70}$$

Pour ce cas, des distributions appropriées peuvent être utilisées pour écrire l'équation de propagation dans le domaine temporel :

$$p_{zz} - 1/c^2 p_{tt} + (2/\pi c)\alpha_0(y+1)!(-1)^{(y+1)/2}/p * 1/t^{(y+2)} = 0. \tag{71}$$

Un autre ensemble de distributions correspondent au cas où y est non entier, des distributions appropriées à ce cas sont données dans l'éq. 64, ce cas non entier inclu le cas des dérivées

fractionnaires définies antérieurement par l'équation (9), l'équation de propagation générale dans le domaine temporel est donnée par :

$$p_{zz} - (1/c^2)p_{tt} + (2/\pi c)\alpha_0\Gamma(y+2)\cos[(y+1)\pi/2]p * 1/ \mid t \mid^{(y+2)} = 0. \tag{72}$$

En résumé cette equation d'onde peut être exprimée sous une forme compacte sous la forme :

$$p_{zz} - 1/c^2 p_{tt} - (2/c)\partial/\partial t[L_{s,y,t} * p] = 0. \tag{73}$$

où $L_{s,y,t}$ est un opérateur de pertes, fonction du temps t, des pertes a et y et il diffère selon que y est pair, impair ou non entier.

3.5 Théorie causale

La causalité signifie que les effets ne peuvent pas précéder la cause. Pour une forme d'onde temporelle initialisée à $t = 0$, son spectre caractéristique doit vérifier certaines conditions de telle sorte que le temps complet s'annule pour $t < 0$. Une étude détaillée de la causalité peut être trouvée dans Gitterman et Halpern [47] et Toll [97] et avec plus de détails dans Nussenveig [80]. Les parties réelle et imaginaire d'une fonction de transfert complexe causale sont reliées par les transformées de Hilbert comme cela a été montré dans le théorème de Tichmarch [96].
Pour prendre avantage des relations de transformées de Hilbert, nous définissons comme dans [94, 99] un facteur de propagation :

$$s(\omega) = -a(\omega) + ib'(\omega) \tag{74}$$

avec

$$b'(\omega) = b_0 + b'(\omega) \tag{75}$$

où $b'(\omega)$ est le terme de dispersion important pour la propagation causale, $b_0 = \omega/c$, $c = c_0/\sqrt{\alpha_\infty}$ dans le régime haute fréquence et $c = c_0/\sqrt{\alpha_0}$ dans le domaine basse fréquence. Dans le domaine très basse fréquence, nous n'avons pas un mode de propagation et donc $b_0 = 0$. Les relations de Hilbert causales relient la partie réelle et imaginaire de la constante de propagation [80, 97, 47, 16]. $a(\omega)$ et $b'(\omega)$ sont reliés par :

$$b'(\omega) = [-1/(\pi\omega)] * [-a(\omega)], \tag{76}$$
$$-a(\omega) = [1/(\pi\omega)] * b'(\omega). \tag{77}$$

En définissant

$$L_{a,y,t} = FT_+^{-1}[-a(\omega)],$$
$$L_{b',y,t} = FT_+^{-1}[b'(\omega)]. \tag{78}$$

il est facile d'écrire les relations d'Hilbert dans le domaine temporel données par :

$$L_{b',y,t} = -i\,\mathrm{sgn(t)}L_{a,y,t} \tag{79}$$
$$L_{a,y,t} = i\,\mathrm{sgn(t)}L_{b',y,t} \tag{80}$$

Les équations (79, 80) sont les relations temporelles causales. Ces relations sont les transformées de Fourier des transformées de Hilbert [47]. Comme les distributions dans le domaine temporel satisfisant aux équations (79, 80) n'ont pas de restrictions sur la valeur de y, elles ont une plus grande validité (pour $y > 1$) que les relations de Kramers-Kronig exprimées dans le domaine fréquentiel.

Dans le domaine fréquentiel, les relations de Kramers-Kronig nécessitent la connaissance de a ou b' à toutes les fréquences, cependant, dans le domaine temporel, chaque convolution

de l'opérateur temporel causal est naturellement limité par une longueur finie de la pression incidente de l'opérateur de propagation total.
L'opérateur de propagation temporel $L_{s,y,t} = FT_+^{-1}[s(\omega)]$ est donné par :

$$\begin{aligned} L_{s,y,t} &= L_{a,y,t} + iL_{b',y,t} \\ &= [1 + \mathrm{sgn}(t)]L_{a,y,t} \\ &= 2H(t)L_{a,y,t} \end{aligned} \tag{81}$$

Ici $H(t)$ est la fonction saut Heaviside définie par :

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \tag{82}$$

L'équation d'onde finale est donnée dans le domaine temporel par :

$$p_{zz} - 1/c^2 p_{tt} - (4/c)\partial/\partial t[H(t)L_{a,y,t} * p] = 0, \tag{83}$$

grâce à la fonction Heaviside, l'opérateur temporel $L_{s,y,t}$ est causal.
Il est facile de trouver les relations de dispersion causales [95, 99] pour une atténuation en puissance de la fréquence. Le terme de dispersion relative est donné par :

$$b'(\omega) = FT_+[L_{b',y,t}], \tag{84}$$

l'opérateur de perte, trouvé à partir de l'équation (78) en utilisant les distributions, s'exprime suivant trois cas, tout dépend si y est pair, impair ou non entier. Ces résultats avec l'équation (79) et les distributions, peuvent être utilisées pour obtenir les resultats de dispersion au dessus.
Pour $y = 0$ ou pair

$$L_{b,y,t} = 0, \tag{85}$$

donc

$$b'(\omega) = 0 \tag{86}$$

Pour y impair, à partir des références [94, 95] et l'équation (79) et (84), nous avons la transformée suivante :

$$b'(\omega) = FT_+ \left([-i\,\mathrm{sgn}(t)][-a_0(-1)^{(y+1)/2} y!/(\pi t^{y+1})] \right), \tag{87}$$

utilisant la distribution donnée par l'équation (63), il vient :

$$b'(\omega) = -2a_0\omega^y[\ln \mid \omega \mid + W]/\pi. \tag{88}$$

Pour y non entier, nous avons les tranformées suivantes :

$$b'(\omega) = FT_+ \left([-i\,\mathrm{sgn}(t)] \left(-a_0 y(y+1)\cos[(y+1)\pi/2]/(\pi \mid t \mid^{y+1}) \right) \right). \tag{89}$$

Aussi avec l'aide de la distribution donnée par l'équation (65), nous trouvons :

$$b'(\omega) = -a_0 \cot[(y+1)\pi/2]\omega \mid \omega \mid^{y-1}. \tag{90}$$

3.6 Application aux milieux poreux

Il est facile de calculer le nombre d'onde acoustique $k(\omega)$ dans le milieux poreux en utilisant les expressions asmptôtiques de la tortuosité et la compressibilité dynamique données dans le premier chapitre. En haute fréquence, $k(\omega)$ est donné par :

$$k(\omega) = \left(\frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{c_0}\right)\omega + \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{c_0}\sqrt{\frac{\eta}{2\rho_f}}\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{P_r}\Lambda'}\right)\sqrt{\omega}(1+i), \qquad \omega \longrightarrow 0. \tag{91}$$

L'atténuation acoustique peut être déduite facilement :

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{c_0}\sqrt{\frac{\eta}{2\rho_f}}\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{P_r}\Lambda'}\right)\sqrt{\omega}. \tag{92}$$

Nous remarquons que l'atténuation acoustique est sous la forme d'une loi en puissance de la fréquence : $a(\omega) = a_0\omega^y$ avec $y = 0.5$ et $a_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{c_0}\sqrt{\frac{\eta}{2\rho_f}}\left(\frac{1}{\Lambda} + \frac{\gamma-1}{\sqrt{P_r}\Lambda'}\right)$. Nous nous retrouvons donc dans le cas où y est non entier. A partir de la théorie causale (Eq. 90) le terme de dispersion prévue doit être égal à :

$$b'(\omega) = -a_0 \cot(3\pi/4)\sqrt{\omega}, \tag{93}$$

ce terme de dispersion coïncide excatement avec celui donné par le modèle de Johnson-Allard (Eq. 91). Les relations de Kramers-Kronig sont donc bien vérifiées. Le modèle de Johnson-Allard est donc causal en haute fréquence. Quelques simulations numériques sont comparées aux résultats expérimentaux dans le domaine haute fréquence. Les expériences sont effectuées dans l'air en utilisant deux transducteurs Ultran NCT202 ayant une fréquence centrale à 190 kHz dans l'air et une bande passante à 6 dB étendue de 150 kHz à 230 kHz. Des impulsions de 400V proviennent d'un générateur Panametrics 5052PR (figure 5). La figure (54) montre une

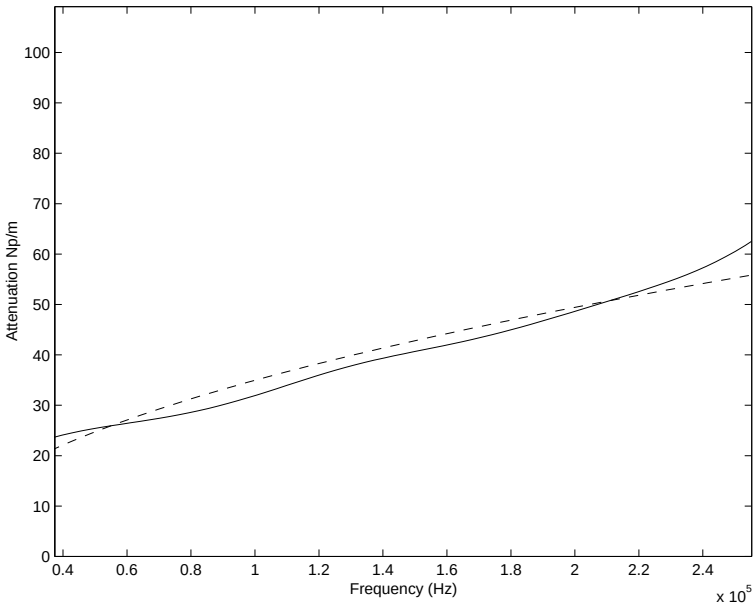

FIG. 54 – Comparaison entre le modèle de Johnson-Allard de l'atténuation (pointillé) et données expérimentales (trait plein).

comparaison avec les données expérimentales de l'atténuation de la mousse plastique M ayant les paramètres suivants : $\alpha_\infty = 1.07$, $\phi = 0.96$, $\Lambda = 220\mu m$ and $\Lambda' = 660\mu m$ et les données

simulées de l'atténuation en utilisant le modèle de Johnson-Allard (Eq. 92).
La vitesse d'onde dans le domaine fréquentiel dans le milieu poreux $c(\omega)$ est donnée par :

$$c(\omega) = \frac{1}{\frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{c_0} + \frac{\beta'(\omega)}{\omega}} \tag{94}$$

pour les valeurs non entières de y, l'expression de $b'(\omega)$ est donnée par les relations de Kramers-Kronig et la théorie causale (Eq. 90), l'expression de la vitesse d'onde dans ce cas sera donnée par :

$$c(\omega) = \frac{1}{\frac{\sqrt{\varepsilon_\infty}}{c_0} - \alpha_0 \cot[(y+1)\pi/2] \mid \omega \mid^{y-1}}. \tag{95}$$

La figure (55) montre une comparaison entre la vitesse d'onde causale (Eq. 95) pour la mousse plastique M (modèle de Johnson-Allard de l'atténuation) et les données expérimentales de la vitesse d'onde. Ces résultats confirment la causalité du modèle de Johnson-Allard en haute fréquence. Notons que ces résultats sont en contradiction avec l'analyse donnée par Berthelot [11] dans laquelle l'auteur arrive à la conclusion que le modèle de Johnson-Allard n'est pas causal en haute fréquence. Dans le régime basse fréquence le nombre d'onde est donné par :

$$k(\omega) = \frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{\phi\sigma}{\rho_f \varepsilon_0}}(1+i)\sqrt{\omega}, \qquad \omega \longrightarrow 0. \tag{96}$$

l'atténuation acoustique peut être déduite :

$$a(\omega) = \frac{1}{c_0}\sqrt{\frac{\phi\sigma}{\rho_f \varepsilon_0}}\sqrt{\omega}. \tag{97}$$

Dans ce cas aussi $y = 0.5$, nous ne sommes pas en mode propagatif, nous avons donc $b_0 = 0$, nous sommes dans la même situation que le domaine haute fréquence avec les relations de Kramers-Kronig adaptées aux cas des valeurs non entières de y.
Pour tester les modèles de matériau poreux à toutes les fréquences, nous devons utiliser la relation générale du nombre d'onde $k(\omega)$ donnée :

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\alpha(\omega)\beta(\omega)} \tag{98}$$

$\alpha(\omega)$ et $\beta(\omega)$ sont donnés par les modèles de Johnson, Allard et Lafarge, l'atténuation qui est la partie imaginaire du nombre d'onde n'est pas une loi en puissance de la fréquence dans ce cas général et il n'est pas possible d'utiliser l'analyse développée précedemment, nous devons donc utiliser la relation générale de de Kramers-Kronig donnée par les équations (76 et 77). La figure 56 montre une comparaison entre la vitesse d'onde simulée par les relations de Kramers-Kronig et la vitesse d'onde simulée en utilisant la partie réelle de $k(\omega)$:

$$c(\omega) = \frac{\omega}{b(\omega)}. \tag{99}$$

Le faible écart entre les deux courbes est essentiellement dû aux simulations numériques. Il est possible de prouver la causalité du modèle de Johnson à toutes les fréquences par une simple analyse sans utiliser les relations de Kramers-Kronig, le pararaphe suivant sera consacré à cette étude. La même analyse peut être effectuée pour le modèle d'Allard et Lafarge.

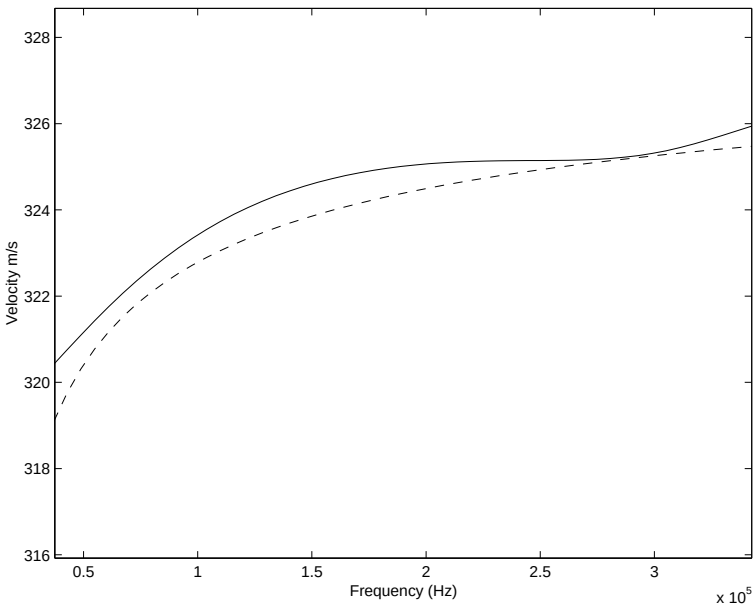

FIG. 55 – Comparaison entre la vitesse d'onde calculée par les relations de Kramers-Kronig en utilisant le modèle de Johnson-Allard pour l'atténuation (pointillé) et données expérimentales de la vitesse d'onde (trait plein).

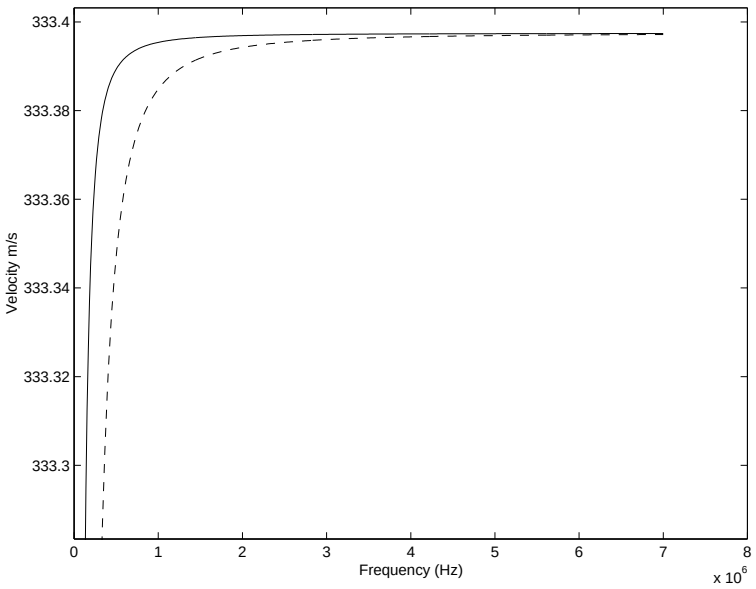

FIG. 56 – Comparaison entre la vitesse d'onde simulée à partir des relations de Kramers-Kronig dans le cas général et la vitesse d'onde obtenue par la partie réelle du nombre d'onde à toutes les fréquences.

3.7 Causalité du modèle de Johnson

Considérons la tortuosité dynamique ou la perméabilité. La pulsation ω peut être considérée comme une variable complexe. Ces fonctions sont considérées comme des distributions. Une très bonne description de leurs propriétés générales est donnée dans Laudau et Lifshitz [66]. La condition de causalité est vérifiée si $\mathrm{Im}(\omega) < 0$, la condition de grande longueur d'onde qui est

spécifique à notre problème nécéssite en plus, que les singularités se situent sur l'axe imaginaire [56]. Tous les zéros, pôles du modèle de la torutosité dynamique doivent être dans le domaine $\mathrm{Im}(\omega) < 0$ de l'axe imaginaire. La tortuosité dynamique $\alpha(\omega)$ est donnée par :

$$\alpha(\omega) = \alpha_\infty \left(1 + \frac{F(-i\tilde{\omega})}{-i\tilde{\omega}}\right), \qquad F(-i\tilde{\omega}) = \left(1 - \frac{M}{2} i\tilde{\omega}\right)^{1/2}$$

où

$$\tilde{\omega} = \omega \left(\frac{\alpha_\infty \rho_f k_0}{\eta\phi}\right) \qquad \text{et} \qquad M = \frac{8\alpha_\infty}{\Lambda^2 \phi k_0}$$

Pour que le modèle soit causal ; chaque pôle, point de branchement, ou zéro $\tilde{\omega} = \tilde{\omega_s}$, de $\alpha(\omega)$, il faut avoir $\mathrm{Im}(\tilde{\omega_s}) \leq 0$. Pour que la condition de grande longueur d'onde soit vérifiée, il faut aussi avoir $Re(\tilde{\omega_s}) = 0$.
Nous pouvons aussi considérer les singularités de la permébilité dynamique : $\frac{k_0}{F(-i\tilde{\omega})-i\tilde{\omega}}$; point de branchement à $\tilde{\omega} = \tilde{\omega_s}$, tel que $1 - \frac{M}{2} i\tilde{\omega_s} = 0$, i.e la fréquence $\tilde{\omega} = \tilde{\omega_s}$ est purement imaginaire négative. Dans ce cas la condition de causalité et de grande longueur d'onde est respéctée. Il y'a un pôle à $\tilde{\omega} = \tilde{\omega_p}$, tel que :

$$F(-i\tilde{\omega_p}) - i\tilde{\omega_p} = 0. \tag{100}$$

En posant $z = i\tilde{\omega_p}$, il y'a un pôle de la perméabilité (zéro de la tortuosité dynamique) quand z vérifie :

$$\sqrt{1 - \frac{M}{2} z} = z, \tag{101}$$

A partir de l'eq. 101 : z est réel et positif, Il n'y a pas d'autres singularités de la perméabilité. Pour établir la causalité, il suffit que toutes les solutions $\tilde{\omega_p}$ de l' Eq. 100 aient $\mathrm{Im}(\tilde{\omega_p}) \leq 0$, i.e les solutions z de l'équation de (101) telles que : $\mathrm{Re}(z) \geq 0$.
La condition de grande longueur d'onde nécessite, en plus, $\mathrm{Im}(z) = 0$. ces conditions sont bien vérifiées et le modèle de Johnson *et al* respecte la causalité et la condition de grande longueur d'onde.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre, une vérification des relations de Kramers-Kronig du modèle de Johnson, Allard et Lafrage a été donnée. Les domaines haute et basse fréquences ont été considérés et il a été montré que l'atténuation obéït à une loi en puissance de la fréquence dans les deux domaines de fréquences. Des relations simplifiées de Kramers-Kronig adaptées au cas des milieux ayant une dépendence en puissance de la fréquence ont été utilisées pour prouver la causalité de ces modèles dans les deux régimes de fréquence. La théorie causale dans le domaine temporel ainsi que les équations de propagation temporelle ont été également traitées.

4 Matériaux poreux à structure souple : Modèle de Biot

4.1 Introduction

Lorsque la structure d'un matériau poreux n'est pas rigide, le modèle du fluide équivalent sur lequel est basée l'étude des chapitres précédents ne s'applique plus puisque les ondes se propagent dans le squelette et dans le fluide saturant. Les interactions fluide structure jouent alors un rôle essentiel dans le phénomène de propagation. La prise en compte de ces effets a été largement développée par Biot [13, 14] pour les applications en recherche pétrolière dès les années 50. Le principal succés de ce modèle est la prédiction de trois modes de propagation : deux modes longitudinaux que sont les ondes dites rapide et lente (ou de première et seconde espèce) et un mode transversal.

Dans le modèle de Biot [13, 14], le milieu poreux est traité comme un continuum constitué d'une phase solide et d'un fluide saturant. La phase solide constitue le squelette dont l'espace des pores est rempli par le fluide. Par ailleurs on considère que la porosité occluse fait partie du solide. De ce fait, les deux phases sont connexes, c'est à dire qu'il est possible de passer d'un point à un autre du matériau par un chemin contenu dans le solide et par un chemin contenu dans le fluide. Pour appliquer les méthodes de la mécanique des milieux continus, il est nécessaire que l'on puisse considérer le milieu comme homogène, c'est à dire que la longueur d'onde est grande devant la taille du volume d'homogénéisation. Enfin on considère que la théorie est linéaire, c'est à dire que les déplacements du solide et du fluide sont petits.
Il existe plusieurs méthodes pour établir les équations du mouvement du solide et du fluide dans la théorie de Biot. La méthode de l'homogénéisation [19, 7, 78] est certainement la plus rigoureuse et est souvent citée comme une justification à posteriori des autres méthodes comme par exemple celle du Lagrangien. Toutefois cette dernière méthode telle qu'elle est décrite par Johnson [57] a l'avantage de démontrer que le modèle de propagation de Biot est la théorie la plus générale pour une description linéaire des interactions fluide structure dans les milieux diphasiques. Son inconvénient majeur est la non prise en compte des pertes viscothermiques qu'entraîne la propagation des ondes dans ces milieux. Plusieurs auteurs ont proposé des solutions numériques aux équations de Biot pour des applications géophysiques [78, 17, 20]. Nous proposons ici une généralisation de l'approche temporelle developpée dans le cadre des matériaux à structure rigide au cas des matériaux à structure souple.

4.2 Modélisation temporelle de la théorie de Biot

Les équations de mouvement du squelette et du fluide sont donnés par les équations d'Euler appliquées au Lagrangien. Ici $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{U}$ sont les déplacements des phases solide et fluide. Dans ce cas, les équations de mouvement sont données par :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\rho}_{11}(t) * \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} + \widetilde{\rho}_{12}(t) * \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}}{\partial t^2} &= P\overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{u}) + Q\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{U}) - N\overrightarrow{\nabla} \wedge (\overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{u}), \\
\widetilde{\rho}_{12}(t) * \frac{\partial^2 \overrightarrow{u}}{\partial t^2} + \widetilde{\rho}_{22}(t) * \frac{\partial^2 \overrightarrow{U}}{\partial t^2} &= Q\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{u}) + R\overrightarrow{\nabla}(\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{U}). \qquad (102)
\end{aligned}$$

Dans ces équations ; $*$ représente la convolution temporelle, P, Q et R sont les constantes élastiques généralisées reliées au module d'incompressibilité du fluide K_f, le module du solide élastique K_s et le module du squelette poreux K_b. N est le module de cisaillement. Les relations qui relient explicitement P, Q, R à ϕ, K_f, K_s, K_b, et N sont données par :

$$P = \frac{(1-\phi)(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})K_s + \phi\frac{K_s}{K_f}K_b}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}} + \frac{4}{3}N, \quad Q = \frac{(1-\phi-\frac{K_b}{K_s})\phi K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}, \quad R = \frac{\phi^2 K_s}{1-\phi-\frac{K_b}{K_s}+\phi\frac{K_s}{K_f}}.$$

Les opétareurs temporels $\widetilde{\rho}_{11}(t)$, $\widetilde{\rho}_{12}(t)$ et $\widetilde{\rho}_{22}(t)$ représentent les opérateurs de couplage massique entre fluide et structure et sont donnés par :

$$\widetilde{\rho}_{11}(t) = \rho_{11} + \frac{2\phi\alpha_\infty}{\Lambda}\left(\frac{\rho_f\eta}{\pi t}\right)^{1/2}, \quad \widetilde{\rho}_{12}(t) = \rho_{12} - \frac{2\phi\alpha_\infty}{\Lambda}\left(\frac{\rho_f\eta}{\pi t}\right)^{1/2},$$
$$\widetilde{\rho}_{22}(t) = \rho_{22} + \frac{2\phi\alpha_\infty}{\Lambda}\left(\frac{\rho_f\eta}{\pi t}\right)^{1/2}.$$

Les coefficients de Biot, ρ_{mn} sont les "coefficients de masse" et sont reliés aux densités du solide (ρ_s) et du fluide (ρ_f) par $\rho_{11} + \rho_{12} = (1-\phi)\rho_s$ and $\rho_{12} + \rho_{22} = \phi\rho_f$, $\rho_{12} = -\phi\rho_f(\alpha_\infty - 1)$.

4.2.1 Ondes Longitudinales

Les équations d'ondes de compression et de rotation peuvent être obtenues en utilisant les potentiels déplacements vecteur et scalaire, respectivement. Deux potentiels scalaires pour le squelette et le fluide, $\widetilde{\Phi_s}$ et $\widetilde{\Phi_f}$ sont définis pour les ondes de compression donnant :

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\nabla}\Phi_s, \qquad \overrightarrow{U} = \overrightarrow{\nabla}\Phi_f.$$

Dans ce cas les équations 102 deviennent :

$$\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi_f \end{pmatrix} + \frac{2\phi\rho_f\alpha_\infty}{\Lambda}\sqrt{\frac{\eta}{\rho_f}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial^{3/2}}{\partial t^{3/2}} \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} \Delta \begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi_f \end{pmatrix}, \tag{103}$$

où Δ est le Laplacian. Le résultat de la résolution de ce système d'équations est l'existance de deux modes longitudinaux distincts appelés mode lent et mode rapide. Le système (103) peut être exprimé sur la base des ondes lente et rapide Φ_1 et Φ_2 respectivement par :

$$\Delta \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{\lambda}_1(t) & 0 \\ 0 & \widetilde{\lambda}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}$$

où $\widetilde{\lambda}_1(t)$ et $\widetilde{\lambda}_2(t)$ sont les opérateurs temporels correspondant aux valeurs propres du système (103). Leurs expressions sont données par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_1(t) &= -\frac{1}{2}\left(\tau_1 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\tau_2 - \frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}\right)\frac{\partial^{3/2}}{\partial t^{3/2}} \\ &- \frac{1}{4}\left(\frac{\tau_2^2}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}} - \frac{(\tau_1\tau_2 - 2\tau_4)^2}{2(\tau_1^2 - 4\tau_3)^{3/2}}\right)\frac{\partial}{\partial t}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda}_2(t) &= -\frac{1}{2}\left(\tau_1 + \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{1}{2}\left(\tau_2 + \frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}\right)\frac{\partial^{3/2}}{\partial t^{3/2}} \\ &+ \frac{1}{4}\left(\frac{\tau_2^2}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}} - \frac{(\tau_1\tau_2 - 2\tau_4)^2}{2(\tau_1^2 - 4\tau_3)^{3/2}}\right)\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned}$$

avec

$$\tau_1 = R'\rho_{11} + P'\rho_{22} - 2Q'\rho_{12}, \quad \tau_2 = A\left(P' + R' + 2Q'\right), \quad \tau_3 = \left(P'R' - Q'^2\right)\left(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2\right),$$
$$\text{and} \quad \tau_4 = A\left(P'R' - Q'^2\right)\left(\rho_{11} + \rho_{22} - 2\rho_{12}\right).$$

Le système d'équations (103) montre que les ondes lente et rapide obéissent à la même équation de propagation développée dans le cadre du modèle du fluide équivalent (équation 13).

Les vecteurs propres $(1, \widetilde{\Im}_1(t))$ et $(1, \widetilde{\Im}_2(t))$ associés aux valeurs propres $\widetilde{\lambda}_1(t)$ et $\widetilde{\lambda}_2(t)$ lient les potentiels solide et fluide Φ_s et Φ_f, respectivement aux ondes lente et rapide Φ_1 et Φ_2 par les relations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \Phi_s \\ \Phi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \widetilde{\Im}_1(t) & \widetilde{\Im}_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \tag{104}$$

les expressions analytiques des opérateurs temporels $\widetilde{\Im}_1(t)$ et $\widetilde{\Im}_2(t)$ sont données par :

$$\begin{aligned} \widetilde{\Im}_1(t) &= \frac{\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}{2\tau_7} + \frac{t^{-1/2}}{4\tau_7^2\sqrt{\pi}} \times \\ &\left[\left(\tau_2 - 2\tau_6 - \frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}} \right) 2\tau_7 + \left(\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3} \right) 2\tau_6 \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Im}_2(t) &= \frac{\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}{2\tau_7} + \frac{t^{-1/2}}{4\tau_7^2\sqrt{\pi}} \times \\ &\left[\left(\tau_2 - 2\tau_6 + \frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}} \right) 2\tau_7 + \left(\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3} \right) 2\tau_6 \right], \end{aligned}$$

où

$$\tau_5 = \left(R'\rho_{11} - Q'\rho_{12}\right) \quad \tau_6 = A\left(R' + Q'\right), \quad \tau_7 = \left(R'\rho_{12} - Q'\rho_{22}\right).$$

Les opérateurs de réflexion et de transmission peuvent être obtenus en utilisant les expressions des valeurs propres et les conditions aux limites [45] données dans l'annexe H.

4.2.2 Opérateurs de réflexion et de transmission

Quand l'onde sonore dans le fluide excite un milieu poreux en incidence normale, une partie est réfléchie dans le fluide, une partie est transmise dans le milieu poreux comme une onde rapide, et une partie est transmise comme une onde lente. Pour une incidence oblique, une partie est aussi transmise comme une onde de cisaillement. Dans cette étude nous ne prendrons en compte que la réflexion et la transmission en incidence normale. Les amplitudes de ces ondes réfléchies et transmise sont déterminées par les conditions aux limites.
Dans cette section, quelques notations sont introduites, la géométrie du problème est donnée dans la figure 57. Un milieu poreux homogène occupe la région $0 \leq x \leq L$. Ce milieu est isotrope et a une structure élastique. Une impulsion courte excite le milieu en incidence normale du coté gauche. Elle génère des déplacements solide et fluide $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{U}$ respectivement, à l'intérieur du milieu poreux, et satisfons aux équations de propagation (102). Les champs incident, réflechi et

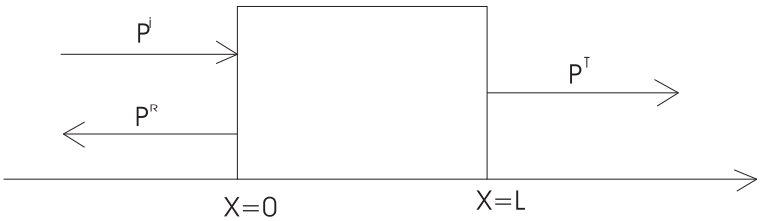

Fig. 57 – Géométrie du problème

transmis sont reliés par les opérateurs de réflexion et de transmission définis par :

$$p^r(x,t) = \int_0^t \tilde{\mathcal{R}}(\tau) p^i\left(t - \tau + \frac{x}{c_0}\right) d\tau = \tilde{\mathcal{R}}(t) * p^i(t) * \delta\left(t + \frac{x}{c_0}\right), \tag{105}$$

$$p^t(x,t) = \int_0^t \tilde{\mathcal{T}}(\tau) p^i\left(t - \tau - \frac{(x-L)}{c_0}\right) d\tau = \tilde{\mathcal{T}}(t) * p^i(t) * \delta\left(t - \frac{(x-L)}{c_0}\right), \tag{106}$$

où $*$ dénote l'opération de convolution temporelle. Dans l'équation (105) et (106) les fonctions $\tilde{\mathcal{R}}$ et $\tilde{\mathcal{T}}$ sont les opérateurs de réflexion et de transmission respectivement, pour une incidence du coté gauche. A noter que la limite inférieure d'intégration dans (105), (106) est égale à 0, ce qui est équivalent à supposer que l'onde incidente excite le matériau à $t = 0$.
Les opérateurs donnés dans l'équation (105) et (106) sont indépendants du champ incident utilisé dans les expériences et ne dépendent que des propriétés des matériaux. En utilisant les conditions aux limites [45] rappelées dans l'annexe H et les caluls dans le domaine de Laplace (annexe I), nous obtenons les expressions des opérateurs de réflexion et de transmission :

$$\tilde{R}(t) = -\delta(t) + 2P(t) * \left(\delta(t) + \frac{1}{U}\sum_{n\geq 0}\left(S'G_2(t, 2(n+1)l) - SG_1(t, 2(n+1)l)\right)\right), \tag{107}$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{2}{U}\sum_{n\geq 0} P(t) * \left(SG_1(t, 2(n+1)l) - S'G_2(t, 2(n+1)l)\right). \tag{108}$$

où

$$P(t) = -\frac{1}{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - v\exp\left(v^2 t\right)\mathrm{Erfc}(v\sqrt{t})\right),$$

les facteurs U, v dépendent des propriétés physiques du milieu poreux (voir annexe I). Erfc est la fonction erreur complémentaire [48], G_1 est la fonction de Green associée au parcourt de l'onde lente et G_2 à l'onde rapide. Rappelons que l'expression de la fonction de Green est donnée dans le premier chapitre par l'équation 22. Les expressions de $\tilde{R}(t)$ et $\tilde{T}(t)$ sont générales et prennent en compte les n réflexion internes des interfaces du matériaux poreux.

4.2.3 Sensibilité des Paramètres de la théorie de Biot modifiée

Dans cette section des simulations numériques des ondes transmises sont effectuées en faisant varier les paramètres d'un matériau poreux correspondant à un os spongieux décrit acoustiquement par la théorie de Biot modifiée. Une variation de 20% est appliquée aux paramètres physiques. La première simulation est donnée. Les valeurs numériques choisies pour les paramètres physiques sont les suivants : épaisseur 0.7cm, porosité $\phi = 0.83$, tortuosité $\alpha_\infty = 1.05$, longueur caractéristique visqueuse Λ=5μm, densité du solide $\rho_s = 1960\mathrm{Kgm}^{-3}$, module d'incompressibilité du fluide $K_f = 2.28$GPa, module volumique du solide élastique $K_s = 20$GPa, module volumique du squelette poreux $K_b = 3.3$GPa, module de cisaillement du squelette $N = 2.6$GPa, viscosité du fluide η=10^{-3}Kg.m.s^{-1}, densité du fluide ρ_f=1000 Kgm^{-3}. Le résultat de la simulation est donné dans la figure 58. Dans cette figure, les deux signaux correspondent aux ondes de compression rapide et lente respectivement. Leur vitesses sont : 3890ms^{-1} et 1450ms^{-1} respectivement.
Etudions la sensibilité de la porosité, en effet ce paramètre important apparaît dans toutes les théories de la propagation sonore dans les milieux poreux. La porosité est la fraction relative, par volume, du fluide contenu dans le matériau. Contrairement aux autres paramètres intervenant dans les différents phénomènes ayant lieu lors de la propagation acooustique dans les milieux poreux aux hautes fréquences, comme la tortuosité et la longueur caractéristique visqueuse, ou au basses fréquences comme la résistivité ou la perméabilité, la porosité est un paramètre clé

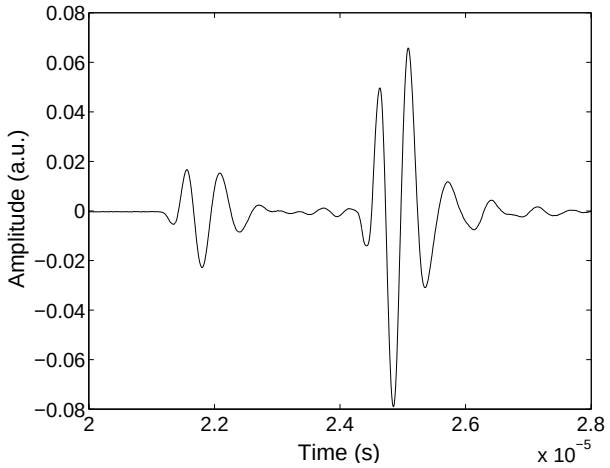

FIG. 58 – Signal transmis simulé pour l'échantillon M1

jouant un rôle important dans la propagation à toutes les fréquences (aussi bien en régime visqueux qu'en régime asymptôtique).
La figure 59 montre les résultats obtenus après réduction de la porosité de 20% de sa valeur initiale. Le premier signal (trait plein) correspond au signal simulé transmis pour $\phi = 0.83$ et le second (pointillé) pour $\phi = 0.66$. Les valeurs des autres paramètres ont été gardés constants. On peut constater la sensibilité de la porosité pour une variation de 20%. Un important changement est observé pour les amplitudes des deux ondes (rapide et lente). En diminuant la porosité, l'amplitude de l'onde rapide croît de 300% de sa valeur initiale, alors que celle de l'onde lente décroît de 33%. Ce résultat peut être expliqué par le fait que lorsque la porosité diminue, la proportion du solide dans le matériau poreux augmente et le couplage entre les deux phases du milieu poreux favorise la phase solide plutôt que la phase fluide. Les vitesses des deux ondes également changent. La vitesse de l'onde rapide, ainsi que celle de l'onde lente diminue. La vitesse de l'onde rapide diminue de 3890 ms^{-1} à 3050 ms^{-1} et la vitesse de l'onde lente de 1450 ms^{-1} à 1400 ms^{-1}. Lorsque l'épaisseur diminue de 20% de sa valeur initiale, le signal transmis

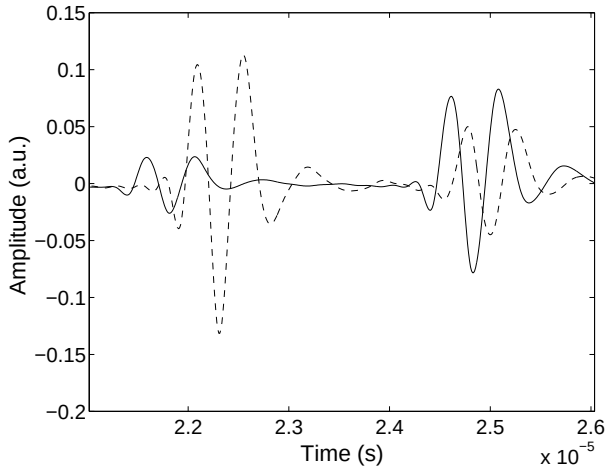

FIG. 59 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à $\phi = 0.83$ (trait plein) et $\phi = 0.66$ (pointillés).

change aussi. La figure 60 montre une comparaison entre deux signaux transmis avec deux valeurs d'épaisseurs différentes. La première (trait plien) correspond à une épaisseur de 0.7cm et

la seconde (pointillé) à une épaisseur de 0.56cm. On peut voir que le temps d'arrivée de l'onde lente n'a pas changé en comparaison avec le temps d'arrivée de l'onde rapide qui a changé considérablement. La vitesse de l'onde lente est très proche de la vitesse de l'onde acoustique dans l'eau, et changer l'épaisseur du milieu n'a pas eu un effet majeur sur le temps d'arrivée de l'onde lente. Cependant la vitesse de l'onde rapide est plus grande que la vitesse de l'eau et le fait de réduire l'épaisseur du milieu poreux retarde le temps d'arrivée de l'onde rapide. Notons aussi que l'amplitude de l'onde lente est moins atténuée quand l'épaisseur décroît, alors qu'un petit changement apparaît sur l'amplitude de l'onde rapide. L'augmentation de l'amplitude de l'onde lente est de 73% de sa valeur initiale. La force de l'onde lente est moins affectée par la conversion des pertes causées par la différence d'impédance, que par la propagation des pertes dûes à l'atténuation visqueuse. Cependant, la force de l'onde rapide est plus affectée par la conversion des pertes causées par la grande différence d'impédance, que par la propagation des pertes due à l'atténuation visqueuse. Un autre paramètre important dans la description de la propagation

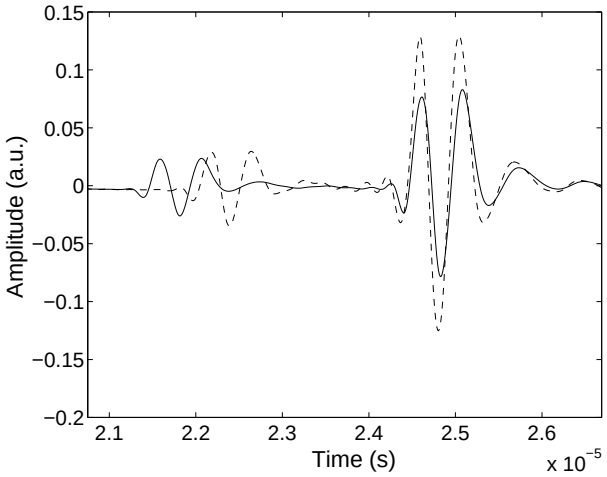

FIG. 60 – Comparaison entre deux signaux transmis correspondant à $L = 0.7$cm (trait plein) et $L = 0.56$cm (pointillé).

ultrasonore dans le milieu poreux est la tortuosité α_∞. Ce paramètre géométrique est utilisé dans la description des intéractions inertielles entre fluide et structure dans le milieu poreux en hautes fréquences. La tortuosité exprime la sinuosité et le changement du diamètre des pores. Pour les pores cylindriques ayant un angle ϑ avec la direction de propagation, $\alpha_\infty = 1/\cos^2\vartheta$, la tortuosité peut être évaluée par les mesures électriques [3], ou en utilisant un superfluide ^{4}He comme un fluide saturant les pores [56]. Il peut être aussi évalué en utilisant les techniques comme les mesures ultrasonores d'ondes transmises (voir premier chapitre). La figure 61 montre une comparaison entre deux signaux transmis simulés, le premier (trait plein) correspond à une tortuosité de $\alpha_\infty = 1.05$ et le second (pointillé) à une tortuosité de $\alpha_\infty = 1.26$. A partir des deux signaux, on constate que la tortuosité joue une rôle important dans la propagation. En augmentant la valeur de la tortuosité, les vitesses des deux ondes rapide et lente ont diminué. La vitesse de l'onde rapide a diminué de 3890ms^{-1} à 3500ms^{-1} et la vitesse de l'onde lente de 1450ms^{-1} à 1308ms^{-1}. Cependant, lorsque l'amplitude de l'onde lente est atténuée (de 64% de son amplitude initiale), l'onde rapide est amplifiée (de 295% de sa valeur initiale). En augmentant la tortuosité, les couplages inertiels entre fluide et structure aussi augmentent, et donc l'onde lente est plus atténuée. Ceci est observé dans le cas des matériaux poreux saturés d'air comme les mousses plastiques (voir chapitre 1). La figure 62 montre la sensibilité de la longueur caractéristique visqueuse Λ introduite par Johnson et al [56] pour décrire les échanges visqueux entre fluide et structure. Le signal présenté en trait plein correspond à Λ =5μm et en pointillés à Λ =6μm. A partir des deux signaux, on peut voir que l'effet de Λ est observé uniquement sur l'amplitude

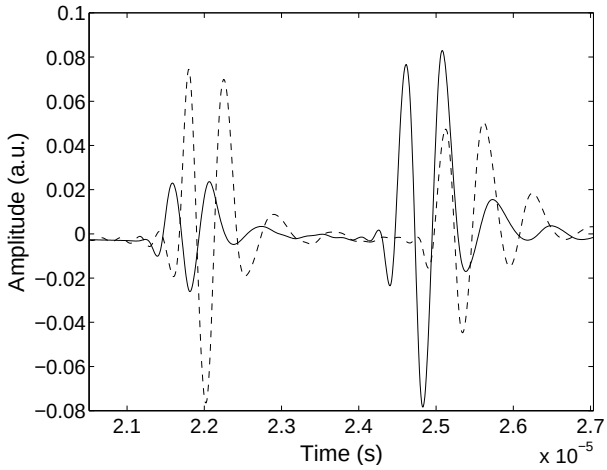

FIG. 61 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à $\alpha_\infty = 1.05$ (trait plein) et $\alpha_\infty = 1.26$ (pointillés).

de l'onde lente, son amplitude croît de 66% de sa valeur initiale. L'amplitude de l'onde rapide reste pratiquement inchangée. Aucun changement significatif n'est observé sur les vitesses ou les temps d'arrivés des deux ondes. Générallement les milieux poreux les plus résistifs (ayant une faible perméabilité), ont une plus petite valeur de leur longueur caractéristique visqueuse. Cette longueur (liée aux échanges visqueux) nous donne une idée des rayons des pores étroits dans le milieu qui sont les lieux priviligiés des échanges visqueux [56]. Cette longueur apparaît dans le second terme dans l'expression de la tortuosité dynamique aux hautes fréquences, et comme la simulation numérique le montre, Λ joue un rôle moins important en transmission que la tortuosité α_∞, qui apparaît au premier ordre dans l'expression de la tortuosité dynamique (équation 1). La figure 63 montre une comparaison entre deux signaux transmis simulés pour deux valeurs

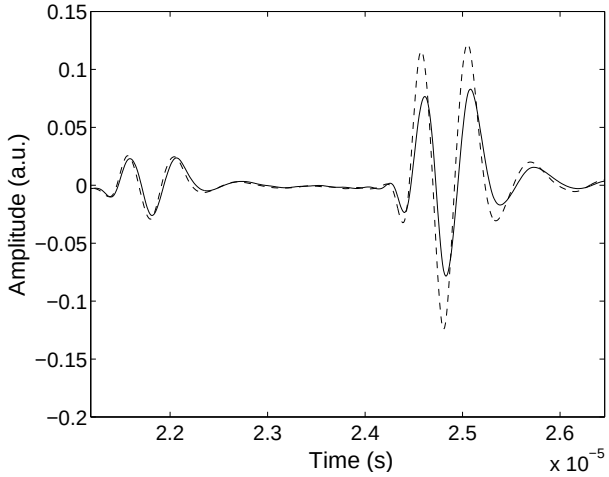

FIG. 62 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à Λ=5μm (trait plein) et α_∞=6μm (pointillé)

différentes de densités du solide ρ_s. Le premier signal (trait plein) correspond à ρ_s=1960kg/m^3 et le second (pointillés) à ρ_s=1568kg/m^3. L'onde lente demeure inchangée (amplitude et vitesse), alors que la vitesse de l'onde rapide change. Quand la densité du solide augmente, la vitesse de l'onde rapide augmente, sa valeur change de 3890ms^{-1} à 4200ms^{-1}. La figure 64 montre une

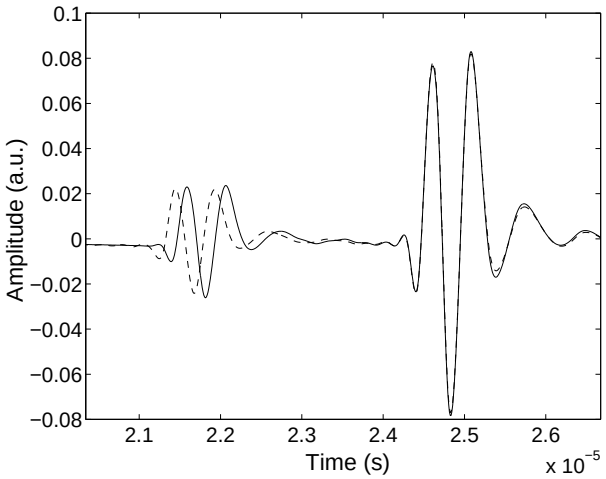

FIG. 63 – Comparaison entre signaux simulés transmis correspondant à $\rho_s = 1960\text{Kg/m}^3$ (trait plein) et $\rho_s = 1568\text{Kg/m}^3$ (pointillés)

comparaison entre signaux simulés transmis correspondant à une valeur du module d'incompressibilité du fluide $K_f = 2.28\text{GPa}$ (trait plein) et $K_f = 1.82\text{GPa}$ (pointillés). La simulation montre qu'en augmentant la valeur du module d'incompressibilité du fluide, la vitesse de l'onde lente décroît (de 1450ms^{-1} à 1190ms^{-1}) et est plus atténuée (20% de son amplitude initiale). Aucun changement majeur n'est observé sur la vitesse de l'onde rapide. L'amplitude de l'onde rapide décroît de 1.2% de son amplitude initiale. Nous pouvons conclure que le module d'incompressibilité du fluide K_f joue un rôle important essentiellement pour l'onde lente. Comme

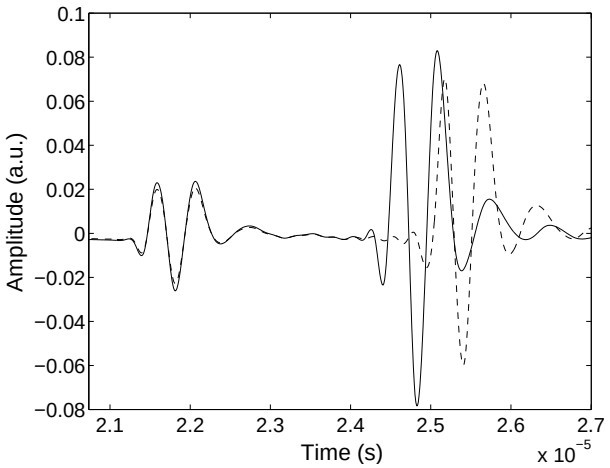

FIG. 64 – Comparaison entre signaux simulés transmis correspondant à $K_f = 2.28\text{GPa}$ (trait plein) et $K_f = 1.82\text{GPa}$ (pointillés).

dans les paragraphes précédents, la figure 65 montre l'effet du module d'incompressibilité du solide K_s en comparant les ondes simulées transmises. La courbes en trait plein montre le signal transmis pour $K_s = 20\text{GPa}$ et la courbe en pointillés pour $K_s = 16GPa$. En diminuant la valeur de K_s, la vitesse de l'onde rapide est inchangée alors que son amplitude diminue de 1.1% de sa valeur initiale. Cependant l'onde lente est amplifiée de 1.1% et sa vitesse augmente (de 1450ms^{-1} à 1460ms^{-1}). Dans ce cas on peut voir que la sensibilité du module d'incompressibilité du solide n'est pas très importante pour un changement de 20% dans les deux ondes rapide et

lente. La figure 66 montre la sensibilité du module d'incompressibilité du squelette K_b du milieu

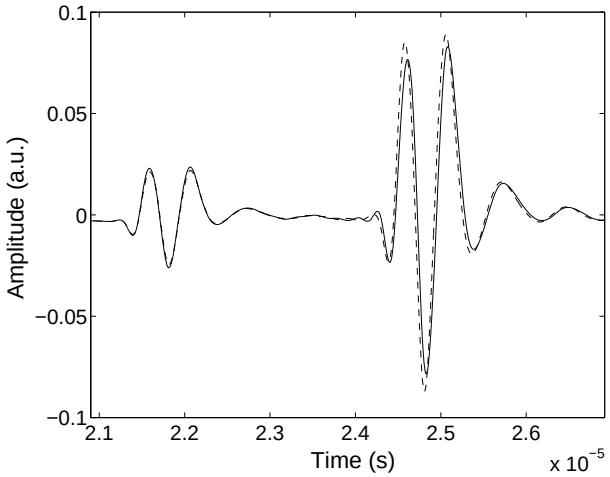

FIG. 65 – Comparaison entre signaux simulés transmis correspondant à $K_s = 20$GPa (trait plein) et $K_s = 16$GPa (pointillés)

poreux. Le signal transmis représenté en trait plein correspond à $K_b = 3.3$GPa et en pointillés à $K_b = 2.64$GPa. En diminuant la valeur de K_b, l'amplitude de l'onde lente est plus atténuée (1.05% de sa valeur initiale) et sa vitesse est plus petite (de 1450ms^{-1} à 1445ms^{-1}). L'amplitude de l'onde rapide augmente (1.2% de sa valeur initiale) alors que sa vitesse diminue de 3890ms^{-1} à 3707ms^{-1}. La sensibilité du paramètre K_b n'est pas négligeable pour les amplitudes et vitesses des ondes rapide et lente.

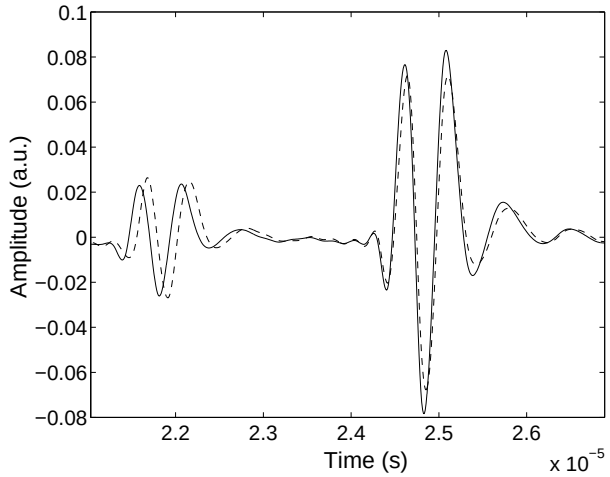

FIG. 66 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à $K_b = 3.3$GPa (trait plein) et $K_b = 2.64$GPa (pointillés).

Finallement, la figure 67 montre une comparaison entre deux signaux simulés transmis correspondant à deux valeurs du module de cisaillement du squelette N. Le premier signal (trait plein) correspond à un module de cisaillement de $N = 2.6$GPa et le second (pointillé) à $N = 2.08$GPa. Dans ce cas l'amplitude de l'onde lente a diminué de 2.5% de sa valeur initiale alors que sa vitesse est inchangée. Pour l'onde rapide, uniquement la vitesse a changé, en diminuant de 3890ms^{-1} à 3690ms^{-1}. A partir de cette étude, nous pouvons tirer des informations sur la sensibilité de chaque paramètre physique utilisé dans cette théorie. Quelques paramètres jouent un rôle im-

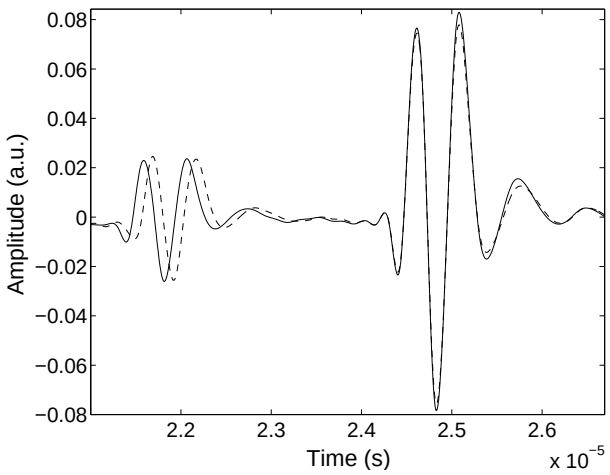

FIG. 67 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à $N = 2.6$GPa (trait plein) et $N = 2.08$GPa (pointillés).

portant dans la forme d'onde de l'onde lente, comme la longueur caractéristique visqueuse Λ et le module d'incompressibilité du fluide K_f. Cependant d'autres paramètres jouent un rôle important dans la forme d'onde de l'onde rapide, comme la densité du solide ρ_s et le module de cisaillement N.
Notons aussi qu'à partir de ces simulations que certains paramètres comme la porosité ϕ, tortuosité α_∞, épaisseur, module d'incompressibilité du solide K_s et le module d'incompressibilité du squelette K_b, jouent simultanément un rôle important sur les formes d'ondes des ondes rapide et lente. La sensibilité des paramètres de la théorie de Biot modifiée en transmission dépend étroitement du couplage entre les phases solide et fluide du matériau poreux et donc des autres paramètres qui ont été gardés constants durant cette étude.

4.2.4 Mesures Ultrasonores

Comme application de ce modèle, quelques simulations numériques sont comparées avec des résultats expérimentaux. Les expériences sont effectuées dans l'eau en utilisant deux transducteurs piezoélectrique Panametrics A 306S ayant une fréquence centrale de 2.25 MHz dans l'eau. Des impulsions de 400 V proviennent d'un générateur/récepteur 5058PR Panametrics. Le dispositif expérimental est donné dans la figure 5. Des échantillons d'os humain spongieux (faces parallèles) de têtes fémorales sont pérparés en enlevant la moelle et le sang qui les sature, et sont saturées d'eau. Les transducteurs excitent ces échantillons d'une impulsion sonore. Quand l'impulsion arrive à la surface de l'échantillon, une partie est réfléchie, une est transmise comme onde rapide et l'autre est transmise comme onde lente. Quand certaines composantes de l'impulsion rencontre la seconde surface, des effets similaires prennent place : une partie est transmise dans le fluide et une autre partie est réfléchie en onde rapide et lente. Les caractéristiques de l'échantillon sont mesurés en utilisant les méthodes standard [56, 3, 67, 58] et sont données dans le tableau suivant :

Paramètres	M1	M2	M3
L (cm)	0.7	0.5	0.38
ρ_s (Kg/m^3)	1960	1960	1960
ϕ	0.83	0.77	0.88
α_∞	1.05	1.01	1.02
Λ (μm)	5	2.7	5
K_s (GPa)	20	20	26
K_b (GPa)	3.3	4	1.3
N (GPa)	2.6	1.7	0.35

Les caractéristiques du fluide saturant (eau) sont : module d'incompressibilité $K_f = 2.28$ GPa, densité $\rho_f = 1000\text{Kgm}^{-3}$, viscosité $\eta = 10^{-3} Kg.m.s^{-1}$. Le signal incident expérimental généré par le transducteur ainsi que son spectre sont donnés dans la figure 68. Les figures 69, 70 et

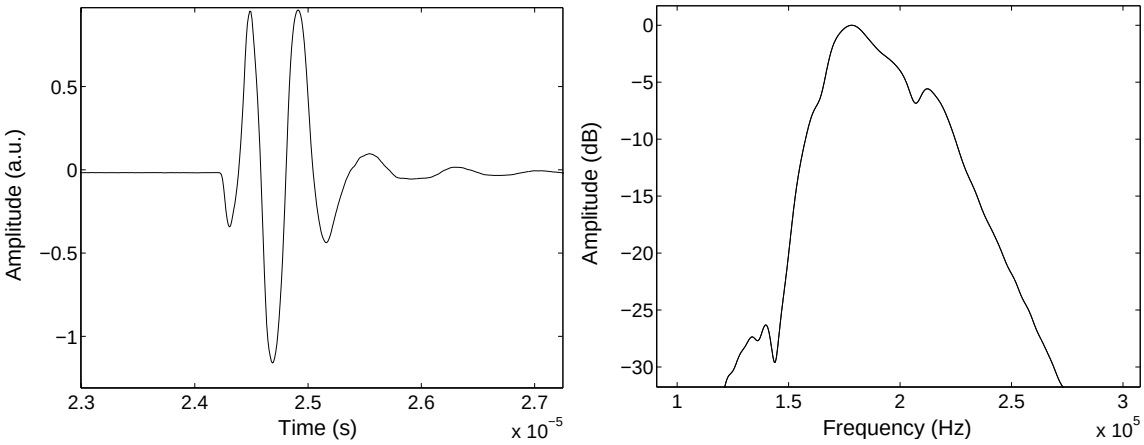

FIG. 68 – Signal incident et son spectre.

71 montrent une comparaison entre signaux expérimentaux (trait plein) et simulés (pointillé) pour les échantillons osseux M1, M2 et M3 respectivement. Les signaux transmis traversent l'os spongieux dans la direction des trabécules (direction x). Pour certaines situations, les ondes rapide et lente se superposent, et sont fonction du couplage entre les deux phases du milieu poreux. Les données expérimentales et prédictions théoriques sont proches, ce qui nous permet de conculre que la théorie de Biot modifiée utilisant le modèle de Johnson *et al* est bien adaptée à la description de la propagation d'onde ultrasonore dans l'os spongieux.

4.2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, Une modélisation temporelle de la propagation ultrasonore dans un milieu poreux à structure souple est effectuée. Le calcul analytique des réponses du milieu (opérateurs de réflexion et de transmission) pour une tranche de tissus osseux sont établis. Ce calcul est basé sur la théorie de Biot modifiée par le modèle de Johnson *et al* pour décrire les intéractions visqueuses entre fluide et structure. Des simulations numériques des ondes transmises dans le domaine temporel sont données en variant les paramètres du milieu poreux. Une variation de 20% est appliquée aux paramètres physiques décrivant la propagation. La sensibilité de chaque paramètre a été étudiée, montrant ainsi l'importance de la valeur de ces paramètres sur les vitesses et atténuations des ondes lente et rapide, respectivement. Une validation expérimentale

de ce modèle en utilisant les ondes transmises à travers des échantillons d'os spongieux humain a été effectuée et a fournit un très bon accord entre théorie et expérience.

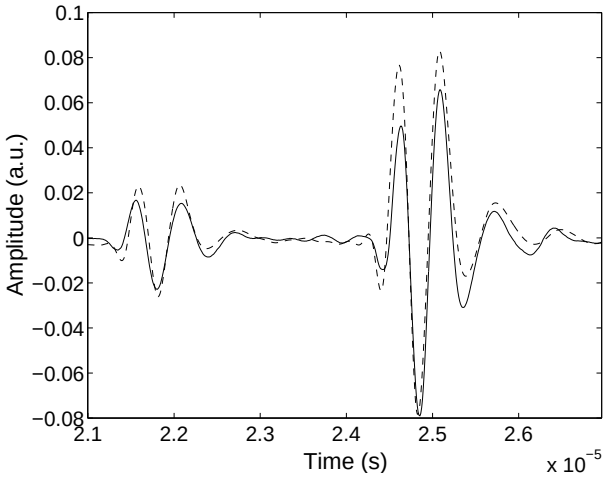

Fig. 69 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour l'échantillon osseux M1.

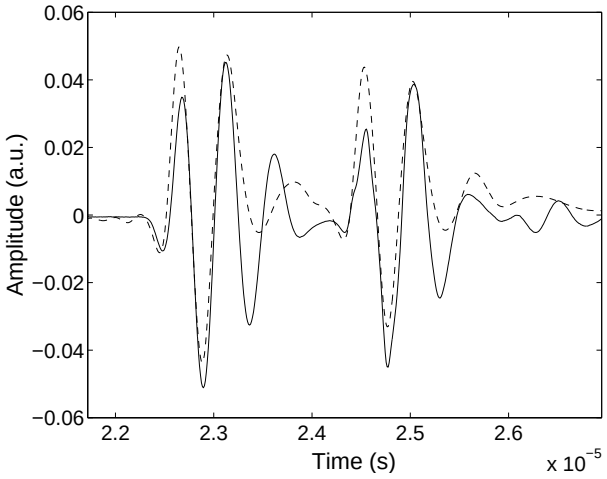

Fig. 70 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour l'échantillon osseux M2.

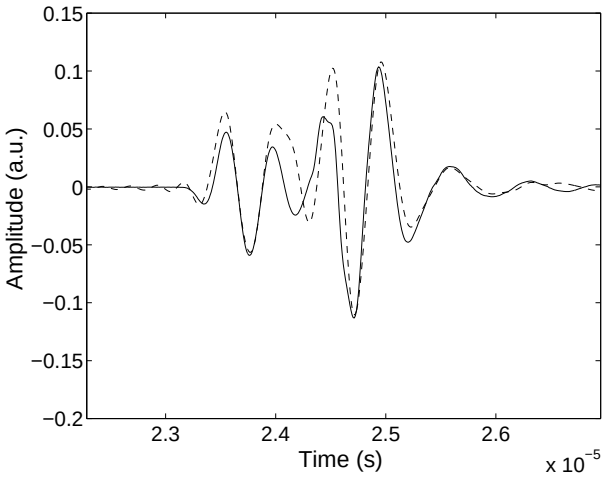

FIG. 71 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) pour l'échantillon osseux M3.

4.3 Caractérisation ultrasonore de l'os humain : problème inverse

Ce chapitre concerne la caractérisation ultrasonore de l'os humain spongieux en résolvant le problème inverse [92] et en utilisant les signaux expérimentaux transmis. La propagation ultrasonore dans l'os spongieux est modélisée en ultilisant la théorie de Biot modifiée par le modèle de Johnson *et al* pour les échanges visqueux entre fluide et structure. La sensibilité du module de Young et le coefficient de Poisson du squelette est étudiée montrant leurs effets sur les formes d'ondes des ondes rapides et lentes. Le problème inverse est résolu numériquement par la méthode des moindres carrés. Cinq paramètres sont inversés : la porosité, tortuosité, longueur caractéristique visqueuse, module de Young et le coefficient de Poisson du squelette. La minimisation de la divergence entre pérdictions théoriques et données expérimentales est faite dans le domaine temporel. Le problème inverse est bien posé et sa solution est unique. Des résultats expérimentaux pour les ondes transmises lente et rapide à travers des échantillons d'os spongieux humains sont donnés et comparés aux prédictions théoriques.
Le module de Young et le coefficient de Poisson du solide E_s, ν_s et du squelette E_b, ν_b dépendent des modules d'incompressibilité du solide, du squelette et du module de cisaillement par les relations :

$$K_s = \frac{E_s}{3(1-2\nu_s)}, \qquad K_b = \frac{E_b}{3(1-2\nu_b)}, \qquad N = \frac{E_b}{2(1+\nu_b)}. \tag{109}$$

4.3.1 Problème inverse

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, la propagation ultrasonore dans une tranche de tissus osseux est conditionée par plusieurs paramètres : porosité ϕ, tortuosité α_∞, longueur caractéristique visqueuse Λ, densité du fluide η, module de Young du solide élastique E_s, module de Young du squelette E_b, coefficient de Poisson du solide élastique ν_s, coefficient de Poisson du squelette poreux ν_b, densité du solide ρ_s, le module d'incompressibilité du fluide saturant K_f et la densité du fluide ρ_f. Il est important de développer de nouvelles méthodes expérimentales et des outils efficaces [25] pour leur estimation. Le problème inverse élementaire associé à une tranche d'os spongieux peut être posé comme suit : A partir des mesures du signal transmis à l'extérieur d'une tranche, trouver les valeurs des paramètres du milieu.
Résoudre le problème inverse pour tous les paramètres de Biot en utilisant uniquement les données expérimentales transmises est difficile, pour ne pas dire impossible. Pour une telle carac-

térisation, d'autres données expérimentales seront necessaires pour obtenir une solution unique. Pour cette raison, et dans cette contribution, nous limitons l'inversion à cinq paramètres : E_b, ν_b, ϕ, α_∞ et Λ. Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la sensibilité du formes d'ondes transmises aux variations de ϕ, α_∞ and Λ. La sensibilité de E_b et ν_b est examinée dans le paragraphe suivant.

Considérons un échantillon d'os spongieux ayant les caractéristiques suivantes : épaisseur $L = 12.5\ mm$, $\phi = 0.9$, $\alpha_\infty = 1.13$, $\eta = 10^{-3}$Kg.m.s^{-1}, $\rho_f = 1000$Kgm^{-3}, $\Lambda = 8\mu m$, $\rho_s = 1990$ Kgm^{-3}, $K_f = 2.4GPa$, $\nu_s = 0.35$, $E_s = 10GPa$, $\nu_b = 0.25$ and $E_b = 4.16GPa$.
Le signal incident utilisé dans la simulation ainsi que son spectre sont donnés par la figure 72 Le signal transmis simulé peut être calculé dans le domaine temporel en utilisant l'expression de

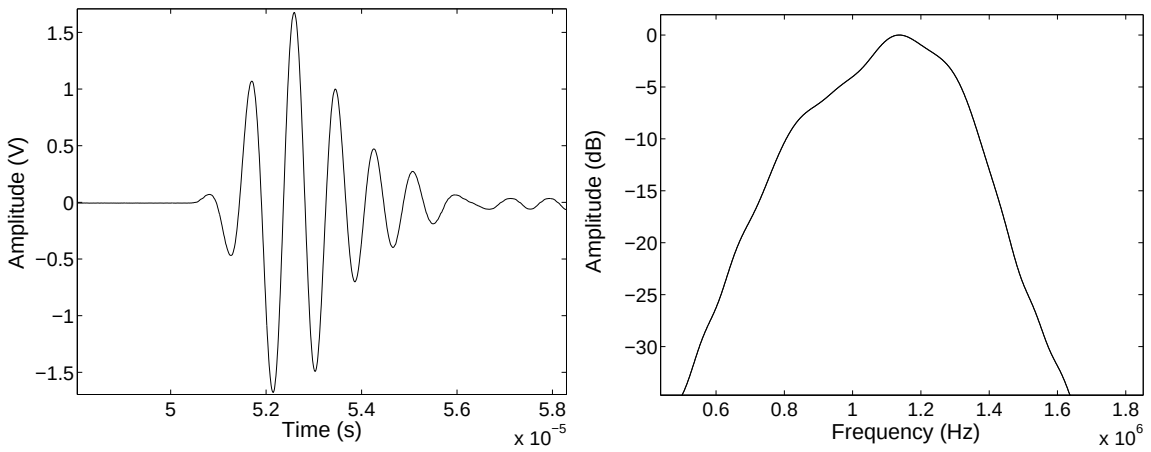

Fig. 72 – Signal incident (à gauche) et son spectre (à droite)

l'opérateur de transmission dans le domaine temporel (équation 108). Utilisant le signal incident donné par la figure 72 et les paramètres de Biot donnés ci dessus, nous avons présenté dans la figure 73 une comparaison entre deux signaux transmis simulés correspondant à un module de Young du squelette poreux, $E_b = 4.16GPa$ (trait plein) et $E_b = 2.08GPa$ (pointillé). Les ondes lente et rapide peuvent être facilement détectées. La simulation montre qu'en diminuant la valeur de E_b, l'atténuation de l'onde lente augmente, alors que l'amplitude de l'onde rapide reste inchangée. Dans la figure 74 une comparaison est faite entre vitesses simulées des ondes rapides et lentes, respectivement, pour $E_b = 4.16GPa$ (trait plein) et $E_b = 2.08GPa$ (pointillé). On peut voir que les deux vitesses sont sensibles au module de Young du squelette poreux, spécialement l'onde rapide. Quand le coefficient de Poisson du squelette poreux ν_b diminue de 50% de sa valeur initiale, le signal transmis change aussi. La figure 75 compare les signaux transmis pour deux valeurs du coefficient de Poisson. Le premier (trait plein) correspond à un coefficient de Poisson de $\nu_b = 0.25$ et le second (pointillé) à un coefficient de Poisson de $\nu_b = 0.125$. On peut voir que les temps d'arrivée de l'onde lente et rapide ont changé. En diminuant la valeur du coefficient de Poisson, les vitesses des deux ondes diminuent. La figure 76 montre la diminution des deux vitesses dans la bande passante fréquentielle du signal incident utilisé dans la simulation. On note aussi à partir de la figure 75 que l'amplitude de l'onde lente est plus atténuée quand le coefficient de Poisson diminue, alors qu'un petit changement apparaît au niveau de l'amplitude de l'onde rapide.
La sensibilité de E_b et ν_b avec l'onde transmise dépend fortement du couplage entre les phases fluide et solide du matériau poreux, et donc des autres paramètres qui ont été maintenus constants durant cette étude. Cette analyse montre qu'il y'a une réelle sensibilité des formes d'ondes transmises à E_b et ν_b (i.e., aux atténuations et vitesses des ondes lente et rapide), et donc il sera possible de résoudre le problème inverse pour E_b et ν_b. L'algorithme d'inversion

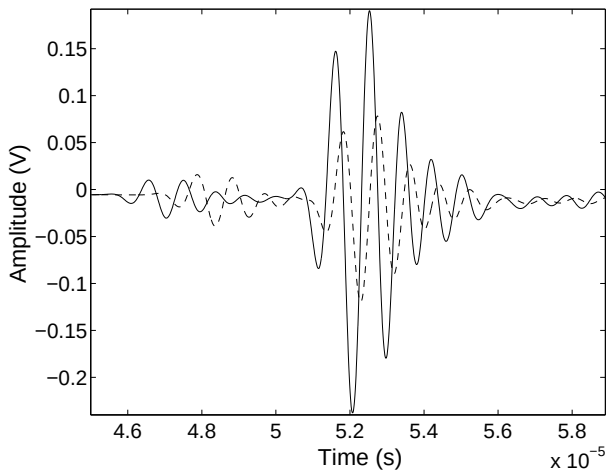

FIG. 73 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondant à $E_b = 4.16GPa$ (trait plein) et $E_b = 2.08GPa$ (pointillé).

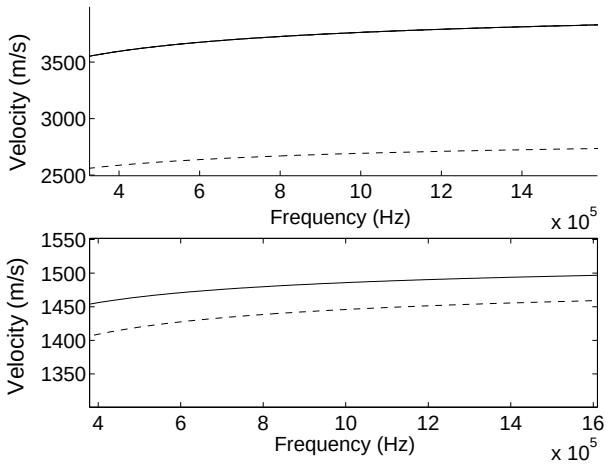

FIG. 74 – Comparaison entre vitesses simulées des ondes lente et rapide correspondants à $E_b = 4.16GPa$ (trait plein) et $E_b = 2.08GPa$ (pointillé).

pour l'identification des valeurs des paramètres de la tranche dans le mode transmis est basé sur la procédure suivante : trouver les valeurs des paramètres ϕ, α_∞, Λ, E_b et ν_b tel que le signal transmis décrit le problème de propagation de la meilleure manière possible (e.g., au sens des moindres carrés). Le problème inverse consiste à déterminer les paramètres ϕ, α_∞, Λ, E_b et ν_b qui minimisent la fonction coût :

$$U(\phi, \alpha_\infty, \Lambda, E_b, \nu_b) = \sum_{i=1}^{i=n} (p^t_{exp}(x, t_i) - p^t(x, t_i))^2, \tag{110}$$

où $p^t_{exp}(x, t_i)_{i=1,2,\ldots n}$ est l'ensemble discret des valeurs du signal transmis expérimental et $p^t(x, t_i)_{i=1,2,\ldots n}$ l'ensemble discret des valeurs du signal transmis simulé. La section suivante est consacrée à la solution du problème inverse basé sur les données transmises expérimentales. Pour la solution itérative du problème inverse, nous utiliserons la méthode du Simplex (Nedler Mead) [65] qui ne nécessite pas le calcul analytique ou numérique des gradients.

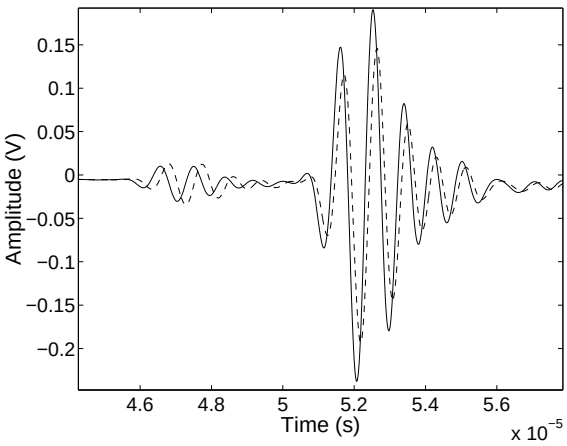

FIG. 75 – Comparaison entre signaux transmis simulés correspondants à $\nu_b = 0.25$ (trait plein) et $\nu_b = 0.125$ (pointillé).

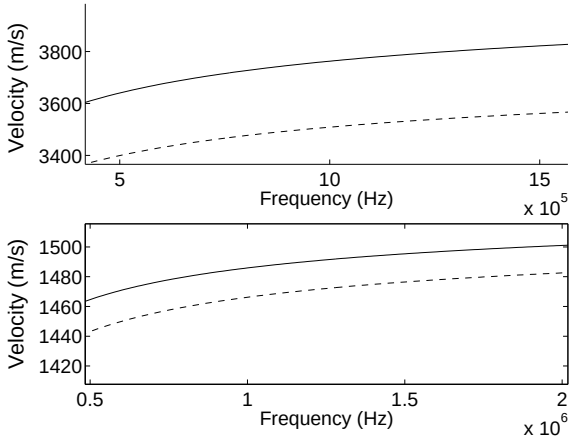

FIG. 76 – Comparaison entre vitesses simulées des ondes lentes et rapides correspondant à $\nu_b = 0.25$ (trait plein) et $\nu_b = 0.125$ (pointillé)
.

4.3.2 Mesures ultrasonores

Comme application à ce modèle, quelques simulations numériques sont comparées aux résultats expérimentaux. Les expériences sont effectuées dans l'eau en utilisant deux transducteurs A 303S Panametrics piézoélectriques ayant une fréquence centrale de 1 MHz dans l'eau, et un diamètre de 1cm. Des implusions de 400V proviennent d'un générateur/récepteur d'impulsion 5058PR Panametrics. Le dispositif expérimental est donné dans la figure 5. Des échantillons de têtes fémorales sont coupés en faces parallèles. Le liquide saturant les pores (sang et moelle) est retiré des échantillons d'os et susbstitué d'eau. La taille du faisceau ultrasonore est très petite par rapport à la taille des échantillons.
Les signaux transmis expérimentaux traversent le tissus osseux dans la même direction que l'alignement des trabécules (direction x). Les caractéristiques du fluide sont : module d'incompressibilité $K_f = 2.28$ GPa, densité $\rho_f = 1000\text{Kgm}^{-3}$, viscosité $\eta = 10^{-3} Kg.m.s^{-1}$.
Considérons un échantillon d'os spongieux M1 (tête fémorale) d'épaisseur 11.2 mm et une densité solide $\rho_s = 1990\text{Kgm}^{-3}$. Le module de Young $E_s = 13GPa$ et le coefficient de Poisson $\nu_s = 0.3$ de l'os solide sont pris de la littérature [5]. La figure 77 montre un signal incident ex-

périmental. Le problème inverse est résolu en minimisant la fonction $U(\phi, \alpha_\infty, \Lambda, E_b, \nu_s)$ donnée par l'équation 110. Un large domaine de variation est utilisé pour l'estimation de la valeur de chaque paramètre dans la résolution du problème. Le domaine de variation des paramètres est : $\alpha_\infty \in [1, 2]$, $\Lambda \in [1,\ 200]\mu m$, $\phi \in [0.5, 0.99]$, $\nu \in [0.1, 0.5]$ and $E_b \in [0.5, 5]$GPa. Les variations

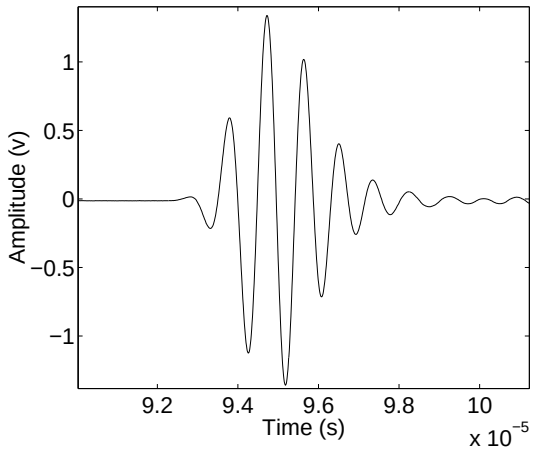

Fig. 77 – Signal incident expérimental pour l'échantillon osseux M1

de la fonction coût avec les paramètres physiques présente un minimum net correspondant à la solution mathématique du problème inverse. Ceci montre que le problème inverse est bien posé mathématiquement, et que la solution est unique. Le minimum correspondant à la solution du roblème inverse, est clairement observé pour chaque paramètre. Après résolution du problème inverse, nous trouvons les valeurs suivantes des paramètres optimisés : $\phi = 0.64$, $\alpha_\infty = 1.018$, $\Lambda = 10,44\mu m$, $\nu_b = 0.28$ and $E_b = 4.49$ GPa. Utilisant ces valeurs, nous présentons dans les figures 78-79 les variations de la fonction de minimisation avec deux valeurs des paramètres inversés. Pour montrer clairemet la solution du problème inverse, la variation de U dans les figures 78-80 est donnée uniquement autour des valeurs des minima des paramètres inversés.
Dans la figure 81, une comparaison est faite entre signal transmis expérimental et le signal

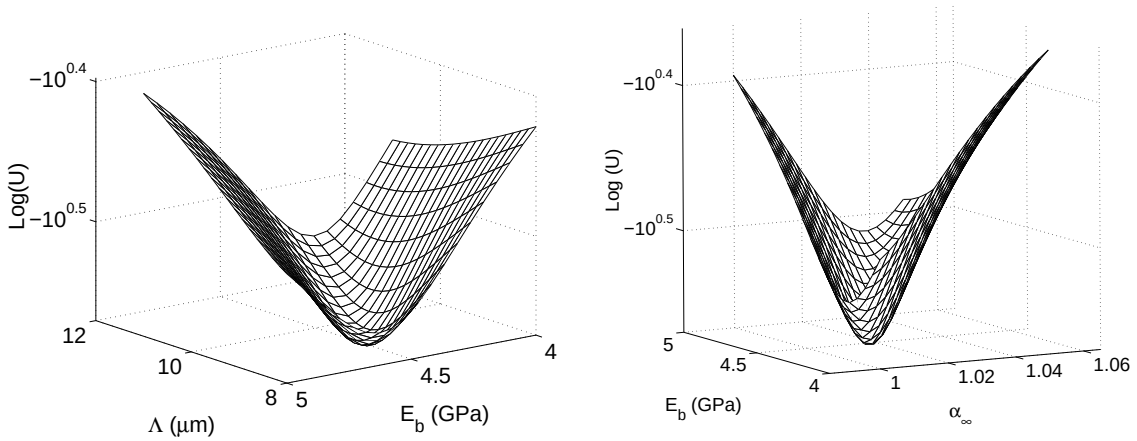

Fig. 78 – A gauche : Variation de la fonction de minimisation U avec la longueur caractéristique visqueuse Λ et le module de Young du squelette poreux E_b. A droite : Variation de la fonction de minimisation U avec le module de Young du squelette poreux E_b et la tortuosité α_∞.

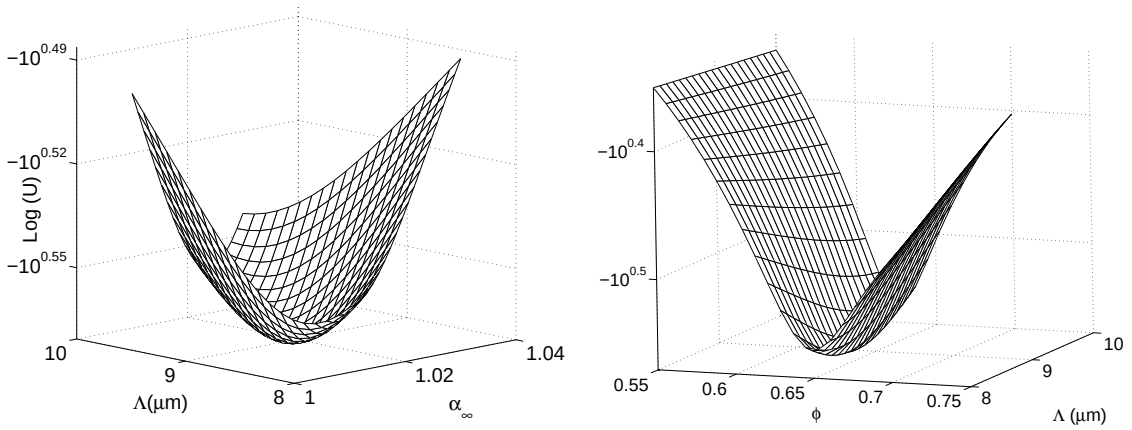

FIG. 79 – A droite : Variation de la fonction de minimisation U avec la longueur caractéristique visqueuse Λ et la tortuosité α_∞. A droite : Variation de la fonction de minimisation U avec la porosité ϕ et la longueur caractéristique visqueuse Λ.

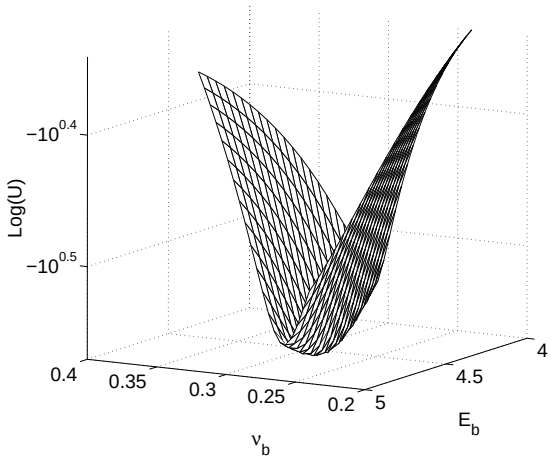

FIG. 80 – Variation de la fonction de minimisation U avec le coefficient de Poisson ν_b et le module de Young du squelette poreux E_b.

transmis simulé en utilisant les valeurs reconstruites de α_∞, ϕ, Λ, ν_b and E_b. La différence entre les deux courbes est petite, ce qui nous permet de conclure que les valeurs optimisées des paramètres physiques sont correctes. Les ondes lente et rapide prédites par la théorie de Biot sont facilement détectées dans le signal transmis. L'onde lente semble être moins atténuée que l'onde rapide. Dans d'autres applications [88], l'onde lente est générallement plus atténuée et dispersive que l'onde rapide. Nous observons, généralement le phénomène opposé pour les échantillons d'os spongieux ; ceci peut être expliqué par les différents ordres de grandeur de la magnitude des paramètres physiques (grande porosité, petite tortuosité,...etc).

Considérons maintenant la résolution du problème inverse pour l'échantillon M2 (tête fémorale) d'épaisseur 12 mm. En résolvant le problème inverse, les valeurs optimisées obtenues sont : $\phi = 0.79$, $\alpha_\infty = 1.052$, $\Lambda = 10,12\mu m$, $\nu_b = 0.25$ and $E_b = 2.47$ GPa. La figure 82 montre une comparaison entre le signal transmis expérimental et le signal simulé obtenu par optimisation après résolution du problème inverse. Ici aussi la corrélation entre prédictions théoriques et données expériemntales est satisfaisante.

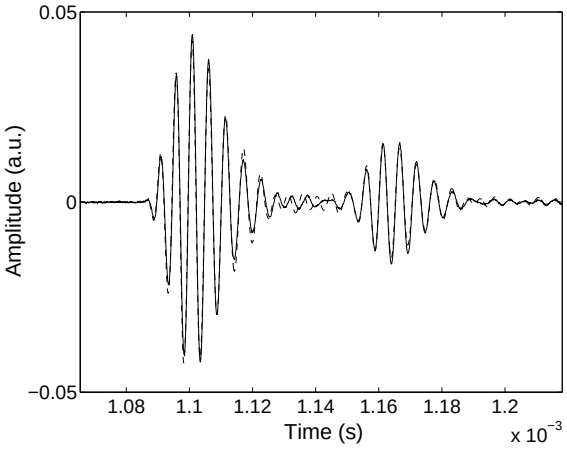

FIG. 81 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plien) et signal transmis simulé (pointillé) en utilisant les valeurs reconstruites de α_∞, ϕ, Λ, ν_b et E_b (échantillon M1)
.

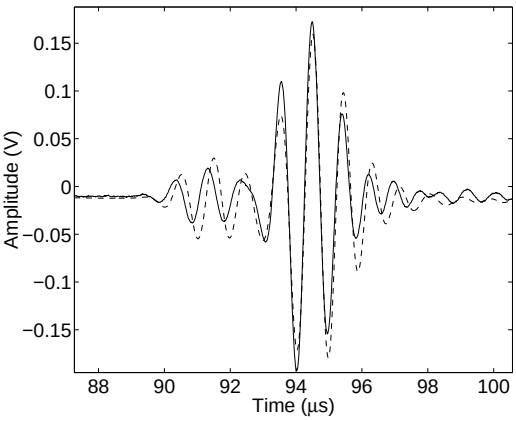

FIG. 82 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plein) et signal transmis simulé (pointillé) en utilisant les valeurs reconstruites de α_∞, ϕ, Λ, ν_b and E_b (échantillon M2)
.

En utilisant un autre échantillon de tissus osseux spongieux (tête fémorale) M3 d'épaisseur 10.2 mm, les résultats après résolution du problème inverse sont : $\phi = 0.72$, $\alpha_\infty = 1.1$, $\Lambda = 14.97\mu m$, $\nu_b = 0.22$ et $E_b = 3.1GPa$. Dans la figure 83, nous comparons le signal transmis expérimental et le signal transmis simulé en utilisant les valeurs reconstruites des paramètres physiques. La corrélation entre les deux courbes est excellente.

Dans une seconde étape, les échantillons d'os sont séchés et leurs paramètres physiques (ϕ, α_∞, Λ, E_b et ν_b) sont mesurés par des techniques dévéloppées initialement pour les matériaux poreux saturés d'air comme les mousses plastiques ou fibreux. Lorsque le liquide saturant le tissu osseux est retiré des pores et remplacé par l'air, un découplage partiel des ondes de Biot prend effet [67] dû à la différence de densité entre la structure et l'air. Les particules du fluide n'ont pas assez de masse pour générer le mouvement de la structure solide, et donc l'onde lente se propage dans le fluide où elle est détéctée par le transducteur. Les troix paramètres ;α_∞, ϕ et Λ sont déterminés en mesurant l'onde lente se propageant dans l'air saturant le tissu osseux. Par exemple, la porosité ϕ et la tortuosité α_∞ sont déterminées en mesurant l'onde réfléchie par la première interface de l'échantillon osseux en incidence oblique. La longueur caractéristique

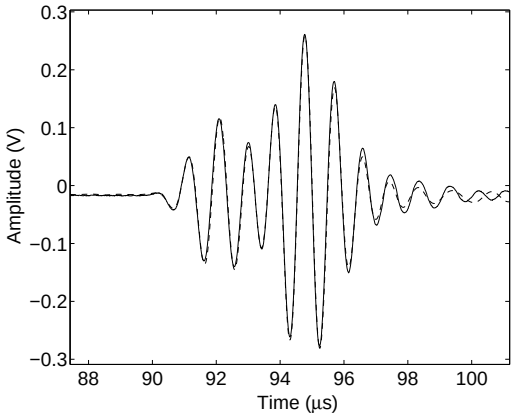

FIG. 83 – Comparaison entre signal transmis expérimental (trait plien) et simulé (pointillé) en utilisant les valeurs reconstruites de α_∞, ϕ, Λ, ν_b and E_b (échantillon M3).

visqueuse Λ est évaluée en mesurant l'onde transmise.
Avec une excitation acoustique en contact [67], l'onde rapide se propage dans la structure solide et quelques particules d'air bougent avec le solide. La vitesse de l'onde rapide se rapproche de la vitesse de la structure solide mesurée dans le vide et est donnée par : $v_L = \sqrt{\frac{K_b+\frac{4}{3}N}{(1-\phi)\rho_s}}$. En mesurant la vitesse de l'onde rapide pour un échantillon dont les pores sont remplies d'air, on trouve $K_b + 4/3N$. Le module de cisaillement N peut être évalué indépendamment en mesurant la vitesse de l'onde de cisaillement. L'expression de la vitesse de l'onde de cisaillement est donnée par : $v_T = \sqrt{\frac{N}{(1-\phi)\rho_s}}$. En mesurant expérimentalement v_L et v_T, on déduit K_b et N, et donc les valeurs de E_b et ν_b en utilisant la relation (3). Les valeurs expérimentales des vitesses longitudinale et transversale v_L et v_T, pour les échantillons d'os M1, M2 et M3, et leurs valeurs déduites de E_b et ν_b sont données dans le tableau III.

Echantillons d'os spongieux	M1	M2	M3
Vitesse d'onde longitudinale v_L (m/s)	3031	2797	2149
Vitesse d'onde transversale $v_T(m/s)$	1573	1486	1381
Module de Young du squelette poreux : E_b (GPa)	4.65	2.4	2.59
Coefficient de Poisson du squelette poreux : ν_b	0.31	0.24	0.21

Une comparaison entre les valeurs optimisées de ϕ, α_∞, Λ, ν_b et E_b obtenues en résolvant le problème inverse, et celles évaluées avec les échantillons d'os sec sont données pour les trois échantillons M1, M2 et M3 dans le tableau suivant :

Méthodes et paramètres	E_b (GPa)	ν_b	ϕ	α_∞	Λ (μm)
Problème inverse (M1)	4.49	0.28	0.64	1.018	9.1
Os sec (M1)	4.65	0.31	0.71	1.02	10.44
Problème inverse (M2)	2.47	0.25	0.79	1.052	10,12
Os sec (M2)	2.4	0.24	0.75	1.045	15
Problème inverse (M3)	3.1	0.22	0.64	1.1	14.97
Os sec (M3)	2.59	0.21	0.59	1.08	19.5

On constate que les valeurs optimisées obtenues par la résolution du problème inverse sont proches de celles obtenues pour les échantillons d'os sec ; sauf peut être pour la valeur de la longueur caractéristique visqueuse de l'échantillon M2, pour la quelle la différence est de 50%. Notons que la longueur caractéristique visqueuse est le paramètre le plus difficile à obtenir avec une bonne précission. Ce paramètre dépend étroitement de l'atténuation de l'onde transmise par l'os spongieux sec, qui est très importante dans l'air. Les signaux transmis simulés obtenus en utilisant les valeurs optimisées (figures 81, 82, 83) reproduisent correctement les signaux transmis expérimentaux. Ceci nous permet de conclure que cette méthode est bien adaptée à la caractérisation des tissus osseux spongieux.

Dans des travaux antérieurs, McKelvie [72, 73] a montré que les prédictions de la théorie de Biot sont en meilleur accord avec les données expérimentales que les pérdictions obtenues par les théories de diffusion. Les auteurs prévoient correctement l'atténuation acoustique mais pas la tendence de la vitesse ultrasonore. Inversement Williams[19] trouve de bons résultats pour la vitesse de l'onde rapide en utilisant une formulation limité de la théorie de Biot sur des échantillons de tibia et de têtes fémorales bovine. Williams[19] a étendu sa formulation de la théorie de Biot pour considérer l'atténuation en utilisant la formulation de la tortuosité dynamique[25] (utilisé dans ce chapitre). Un bon accord a été obtenu pour la vitesse de l'onde rapide. Pour l'atténuation, bien que les tendences prédites étaient similaires à celles observées expérimentalement dans l'os spongieux, les valeurs expérimentales sont considérablement plus importantes que celles prédites par la théorie de Biot. Hosokawa et Otani [53] ont obtenus de meilleurs résultats pour les vittesses d'ondes (rapide et lente) que pour l'atténuation acoustique. Dans la plupart de ces études, les auteurs n'ont pas pris en compte les pertes dûes aux réflexions des interfaces en prenant en compte le problème de réflexion et de transmission par une tranche d'os spongieux. En plus, le problème inverse n'a pas été étudié pour la détermination des paramètres physiques à partir des données expérimentales.
Dans la première partie de ce chapitre [45], la théorie de Biot moifiée a été appliquée pour résoudre le problème direct (calcul de la réflexion et la transmission) pour la propagation ultrasonore dans un tissus osseux. Le problème direct consiste à déterminer les champs internes et externes sous excitation d'une onde acoustique connue. Les champs réfléchis et transmis sont déduits à partir des champs internes et aux conditions aux limites. Dans cette seconde partie, le problème inverse a été résolu pour la détermination des valeurs des paramètres du milieu en utilisant les données expérimentales incidentes et transmises. Dans ce problème de caractérisation, les pertes dûes aux réflections par les interfaces des échantillons, et ceux des échanges visqueux entre fluide et structure ont été prises en compte. Les comparaison entre atténuations acoustiques théorique et expérimentales, ainsi que vitesses d'ondes (lente et rapide) sont données simultanément dans le domaine temporel en utilisant les signaux transmis. Les résultats obtenus dans cette étude sont encourageants pour la caractérisation ultrasonore de l'os spongieux, les données expérimentales réfléchies seront étudiées ultérieurement.

4.3.3 Conclusion

La caractérisation de l'os spongieux a été traitée en résolvant le problème inverse numériquement en utilisant les signaux transmis expérimentaux. Cinq paramètres physiques (porosité ϕ, tortuosité α_∞, longueur caractéristique visqueuse Λ, coefficient de Poisson ν_b et module de Young du poreux E_b) sont inversés. L'analyse de sensibilité de ν_b et E_b a été étudiée, montrant l'importance des valeurs de ces paramètres sur les vitesses des ondes lente et rapide et sur l'atténuation. Les valeurs optimisées de ces paramètres physiques sont comparées avec celles obtenues avec les techniques initiallement développées pour les matériaux poreux saturés d'air (os sec) donnant de bons résultats. La comparaison entre théorie et expérience valide la méthode proposée.

5 Définition du Projet de Recherche

5.1 Introduction : les besoins et les enjeux

Les matériaux poreux sont omniprésents dans notre environnement. Le sol et les roches en sont les exemples naturels les plus courants et dont la caractérisation présente un intérêt de premier ordre dans de multiples domaines (géologie, industrie pétrolière, ...). Les matériaux de construction (comme les bétons et les revêtements routiers), les matériaux dits acoustiques et bien d'autres utilisés dans les transports, le bâtiment, les infrastructures, etc., trouvent aujourd'hui des applications dans le domaine de la réduction des nuisances sonores (au cours des vingt dernières années, les normes acoustiques devenues de plus en plus sévères font de la lutte contre les nuisances sonores un facteur économique clé). Les matériaux en usage dans les structures et les micro-structures sont aujourd'hui soumis à des contrôles non destructifs de plus en plus sévères et la demande de performances accrues de ces contrôles reste totalement à l'ordre du jour. Enfin, les tissus vivants, tissus osseux (os spongieux), poumons, etc., font l'objet d'analyses de plus en plus poussées en vue du diagnostic de certaines pathologies (telle l'ostéoporose), analyses qui nécessitent leur description précise en termes de matériaux. Ainsi, qu'il s'agisse d'études relevant de la sismique, de l'acoustique de l'environnement, du contrôle non destructif, du diagnostic médical, pour en rester à l'essentiel, les enjeux considérables (en termes d'application des techniques acoustiques appliquées aux matériaux) ouvrent encore largement la voie à des études fondamentales sur la propagation dans les milieux complexes, la modélisation de leurs caractéristiques et de leurs défauts, les techniques expérimentales à mettre en oeuvre pour les caractériser, les moyens à prévoir pour assurer le transfert vers les applications. C'est dans ce cadre général que s'inscrit ce projet de recherche.

5.2 Situation actuelle de la recherche acoustique dans le domaine des matériaux poreux ; ouverture sur des recherches futures

Plusieurs modèles ont été développés pour décrire la propagation acoustique dans les matériaux poreux, le modèle le plus général et le plus connu, proposé à l'origine par les géophysiciens, étant le modèle de Biot [1]. Ce modèle a été adapté pour la description des matériaux poreux saturés d'air [2]. En particulier des nouveaux paramètres ont été introduits pour étendre la validité du modèle à un large domaine fréquentiel et pour l'élargir aux milieux poreux à micro-géométries très différentes (fibres, pores, grains).

En fait, les modèles plus particulièrement utilisés pour décrire la propagation des ondes acoustiques dans les milieux poreux sont de deux types : le modèle de Biot et le modèle du fluide équivalent. i- Le modèle de Biot Ce modèle est applicable aux matériaux poreux à structure souple saturés par un fluide, dans lesquels les ondes acoustiques se propagent aussi bien dans la structure solide que dans le fluide, donnant lieu à trois types d'ondes qui cohabitent : les ondes transversales et les ondes longitudinales lentes et rapides. Ce modèle est particulièrement bien adapté au cas des matériaux poreux saturés par un fluide lourd visqueux tels que les tissus osseux et les roches. ii- Le modèle du fluide équivalent Ce modèle, cas particulier du précédent en ce que la structure est supposée immobile et dans lequel par suite seule l'onde longitudinale dans le fluide se propage, est utilisé pour décrire le comportement des matériaux poreux saturés par un fluide léger tel que l'air, matériaux acoustiques (mousses plastiques, fibreux) ou granulaires.

Concernant la caractérisation des matériaux poreux, plusieurs méthodes (modélisation et techniques expérimentales associées) [3] ont été développées, qui permettent d'obtenir les paramètres acoustiques et mécaniques de ces matériaux. Mais ces méthodes ne sont applicables qu'aux matériaux homogènes, matériaux dont les propriétés physiques sont considérées comme indépendantes du point. Or la plupart des matériaux poreux sont inhomogènes (les propriétés mécaniques et acoustiques sont fonctions du point) : c'est le cas aussi bien des matériaux artificiels (mousses poreuses, fibreuses et céramiques), que des matériaux naturels (tissus osseux,

roches ou matériaux granulaires).

Cette lacune dans les méthodes d'investigation des matériaux inhomogènes ouvre un vaste champ d'études, défi scientifique aux aspects théoriques et expérimentaux fondamentaux, et aux enjeux industriels de tout premier ordre dans de nombreux domaines d'activités. C'est l'objet du présent projet que de proposer des modèles de propagation acoustique dans les matériaux poreux inhomogènes et d'y associer des techniques d'inversion permettant de caractériser ces milieux.

5.3 Equation de Propagation dans un milieu poreux inhomogène à structure rigide

Dans cette partie, un modèle temporel de la propagation ultrasonore dans un milieu poreux inhomogène est proposé. Le modèle temporel du fluide équivalent est considéré, dans lequel l'onde acoustique ne se propage que dans le fluide saturant. Dans ce modèle, les effets inertiels sont décrits par la tortuosité inhomogène et les pertes visco-thermiques par deux susceptibilités qui dépendent des longueurs caractéristiques visqueuse et thermique. Le milieu est unidimensionnel et ses paramètres physiques (porosité, tortuosité et longueurs caractéristiques) dépendent de l'épaisseur. Une équation de propagation généralisée pour la propagation d'onde ultrasonore transitoire est établie.

Considérons la propagation d'ondes acoustiques ultrasonores dans un milieu poreux inhomogène à structure rigide. Dans ce milieu, les paramètres acoustiques (porosité, tortuosité, longueur caractéristique visqueuse et thermique) dépendent de l'épaisseur. Pour une onde se propageant le long de l'axe x, les intéractions fluide-structure sont décrites par les opérateurs de relaxation inhomogènes : $\alpha(x,t)$ et $\beta(x,t)$ donnés par :

$$\alpha(x,t) = \alpha_\infty(x)\left(\delta(t) + \frac{2}{\Lambda(x)}\left(\frac{\eta}{\pi\rho_f}\right)^{1/2} t^{-1/2}\right),$$

$$\beta(x,t) = \left(\delta(t) + \frac{2(\gamma-1)}{\Lambda'(x)}\left(\frac{\eta}{\pi Pr\rho_f}\right)^{1/2} t^{-1/2}\right).$$

Dans ces équations, la tortuosité $\alpha_\infty(x)$, les longueurs caractéristiques visqueuse et thermique $\Lambda(x)$ and $\Lambda'(x)$ dépendent de l'épaisseur du matériau poreux pour décrire les pertes inhomogènes dans le matériau.

Dans ce contexte, les équations de base [21, 26] sont données par :

$$\rho\alpha(x,t) * \frac{\partial}{\partial t}\left[v(x,t).\phi(x)\right] = -\phi(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}, \tag{111}$$

$$\frac{\phi(x)}{K_a}\beta(x,t) * \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[v(x,t).\phi(x)\right], \tag{112}$$

où $\phi(x)$ représente la variation de la porosité avec l'épaisseur.

Considérons l'équation d'Euler (111) et l'équation constitutive (112) dans un milieu poreux inhomogène infini. En posant $w(x,t) = v(x,t)\phi(x)$, $a(x) = \frac{2}{\Lambda(x)}\sqrt{\frac{\eta}{\rho\pi}}$ and $b(x) = \frac{2(\gamma-1)}{\Lambda'(x)}\sqrt{\frac{\eta}{P_r\rho\pi}}$, on obtient :

$$\rho\alpha_\infty(x)\left[\delta(t) + \frac{a(x)}{\sqrt{t}}\right] * \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = -\phi(x)\frac{\partial p(x,t)}{\partial x}, \tag{113}$$

$$\frac{\phi(x)}{K_a}\left[\delta(t) + \frac{b(x)}{\sqrt{t}}\right] * \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}. \tag{114}$$

On note $P(x,z)$ la transformée de Laplace de $p(x,t)$ définie par :

$$P(x,z) = \mathcal{L}\left[p(x,t)\right] = \int_0^\infty \exp(-zt)p(x,t)dt.$$

La transformée de Laplace des équations 113, 114 donne :

$$\rho\alpha_\infty(x)\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zW(x,z) = -\phi(x)\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}, \tag{115}$$

$$\frac{\phi(x)}{K_a}\left[1+b(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zP(x,z) = -\frac{\partial W}{\partial x}(x,z), \tag{116}$$

où $W(x,z)$ est la transformée de Laplace de $w(x,t)$. En dérivant l'équation 115 par rapport à x, on obtient :

$$\begin{aligned}&\rho\frac{\partial\alpha_\infty(x)}{\partial x}\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zW(x,z)+\rho\alpha_\infty(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x}\sqrt{\frac{\pi}{z}}zW(x,z)\\&+\rho\alpha_\infty(x)\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]z\frac{\partial W(x,z)}{\partial x} = -\phi(x)\frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}.\end{aligned} \tag{117}$$

Le premier terme de l'équation 117 donne :

$$\rho\frac{\partial\alpha_\infty(x)}{\partial x}\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zW(x,z) = \frac{\partial\alpha_\infty(x)}{\alpha_\infty(x)\partial x}\rho\alpha_\infty(x)\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zW(x,z),$$

et en prenant en compte 115, on obtient :

$$\rho\frac{\partial\alpha_\infty(x)}{\partial x}\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]zW(x,z) = -\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\phi(x)\frac{\partial\ln(\alpha_\infty(x))}{\partial x}. \tag{118}$$

L'intégration spatiale de l'équation 116 de 0 à x donne :

$$W(x,z) = W(0,z)-\frac{1}{K_a}\int_0^x\phi(y)\left(1+b(y)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right)zP(y,z)dy.$$

En prenant les conditions de causalité $t\leq 0$: $v(0,t) = \frac{\partial v(0,t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow W(0,z) = 0$, et en multipliant les deux membres par rapport à z, on obtient :

$$zW(x,z) = -\frac{1}{K_a}\int_0^x\phi(y)\left(1+b(y)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right)z^2P(y,z)dy. \tag{119}$$

En utilisant les équations 117 et 119, on obtient :

$$\rho\alpha_\infty(x)\frac{\partial a(x)}{\partial x}\sqrt{\frac{\pi}{z}}zW(x,z) = -\frac{\rho\alpha_\infty(x)}{K_a}\frac{\partial a(x)}{\partial x}\int_0^x\phi(y)\left(\sqrt{\frac{\pi}{z}}z^2P(y,z)+\pi b(y)zP(y,z)\right)dy \tag{120}$$

En remplaçant $\frac{\partial W(x,z)}{\partial x}$ par son expression donnée par 116 dans l'équation 117, on obtient :

$$\begin{aligned}\rho\alpha_\infty(x)\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]z\frac{\partial W(x,z)}{\partial x} &= -\frac{\rho\alpha_\infty(x)\phi(x)}{K_a}\left[1+a(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]\left[1+b(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}\right]z^2P(x,z)\\&= -\frac{\rho\alpha_\infty(x)\phi(x)}{K_a}\left[1+(a(x)+b(x))\sqrt{\frac{\pi}{z}}+\frac{\pi a(x)b(x)}{z}\right]z^2P(x,z)\end{aligned} \tag{121}$$

L'équation 117 prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\phi(x)\frac{\partial\ln\alpha_\infty(x)}{\partial x}\\&-\frac{\rho\alpha_\infty(x)}{K_a}\frac{\partial a(x)}{\partial x}\int_0^x\phi(y)\left(\sqrt{\frac{\pi}{z}}z^2P(y,z)+\pi b(y)zP(y,z)\right)dy\\&-\frac{\rho\alpha_\infty(x)\phi(x)}{K_a}\left[1+(a(x)+b(x))\sqrt{\frac{\pi}{z}}+\frac{\pi a(x)b(x)}{z}\right]z^2P(x,z)\\&= -\phi(x)\frac{\partial^2P(x,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\frac{\partial\phi(x)}{\partial x}\end{aligned} \tag{122}$$

Après quelques manipulations mathématiques dans l'équation 122, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c^2(x)}z^2P(x,z) + B'(x)\sqrt{\frac{\pi}{z}}z^2P(x,z) + D'(x)zP(x,z) \\
&+\frac{\partial a(x)}{\partial x}\frac{1}{c^2(x)\phi(x)}\int_0^x \phi(y)\left[\sqrt{\frac{\pi}{z}}z^2P(y,z) + \pi b(y)zP(y,z)\right]dy \\
&= \frac{\partial^2 P(x,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial P(x,z)}{\partial x}\left[\frac{\partial \ln\phi(x)}{\partial x} - \frac{\partial \ln\alpha_\infty(x)}{\partial x}\right],
\end{aligned} \tag{123}$$

où

$$\frac{\rho\alpha_\infty(x)}{K_a} = \frac{1}{c^2(x)}; \qquad \frac{\rho\alpha_\infty(x)}{K_a}\left[a(x)+b(x)\right] = B'(x) \qquad \text{and} \qquad \frac{\rho\alpha_\infty(x)}{K_a}\pi a(x)b(x) = D'(x)$$

Utilisant la transformée de Laplace inverse de l'équation 123 et les conditions initiales : $\frac{\partial p}{\partial t}(x,0) = p(x,0) = 0$ [28, 29], on a aboutit à l'équation de propagation générale :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t) - B'(x)\int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} - D'(x)\frac{\partial p}{\partial t}(x,t) \\
&-\frac{\partial a(x)}{\partial x}\frac{1}{c^2(x)\phi(x)}\int_0^x \phi(y)\left[\int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(y,t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} + \pi b(y)\frac{\partial p}{\partial t}(y,t)\right]dy - \frac{\partial p}{\partial x}(x,t)\varphi(x) = 0,
\end{aligned} \tag{124}$$

avec

$$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x}\ln\frac{\alpha_\infty(x)}{\phi(x)}$$

L'équation (124) est l'équation de propagation générale dans un milieu poreux inhomogène avec perte. Cette équation est très importante pour le traitement des problèmes direct (calcul des réponses du milieu) et inverse (caractérisation). Il est facile de trouver le cas spécial du milieu poreux inhomogène, i.e. quand $\alpha_\infty(x)$, $\phi(x)$, $\Lambda(x)$ et $\Lambda'(x)$ deviennent constants (indépendant de x), on trouve $B'(x) = B$, $D'(x) = C$, $\varphi(x) = \partial a(x)/\partial x = 0$. Dans ce cas, l'équation d'onde généralisée (Eq. 124) est réduite à l'équation de propagation dans un matériau inhomogène (Eq. 13).

- Le premier et le second terme dans l'équation de propagation (124) : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{c^2(x)}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t)$ décrit la propagation (translation temporelle) via la vitesse du front d'onde $c(x)$. La tortuosité inhomogène $\alpha_\infty(x)$ apparaît comme l'indice du milieu qui change la vitesse d'onde de $c_0 = \sqrt{K_a/\rho}$ dans l'espace libre à $c(x) = c_0/\sqrt{\alpha_\infty(x)}$ dans le milieu poreux. A partir de ces équation, on peut voir que les effets inertiels (représentés par le profil spatial de la tortuosité $\alpha_\infty(x)$) modifient la vitesse du front d'onde.
- Le troisième terme dans l'équation de propagation (124) : $B'(x)\int_0^t \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(x,t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$ contient une dérivée fractionnaire temporelle d'ordre 3/2. Ce terme est le plus important pour décrire la dispersion, les effets mémoire (l'histoire de l'onde dûe aux temps de relaxations visco-thermiques), et l'atténuation acoustique dans les matériaux poreux. Ces effets sont dûes aux pertes dans le milieu modélisés par les échanges visco-thermiques entre fluide et structure, et décrits par les longueurs caractéristiques $\Lambda(x)$ et $\Lambda'(x)$. Ce terme résulte de la convolution temporelle de l'opérateur dérivée fractionnaire de la tortuosité $\alpha(x,t)$ et compressibilité $\beta(x,t)$. Il est sensible à la variation spatiale de la tortuosité $\alpha_\infty(x)$. Les composantes hautes fréquences du signal transitoire sont les plus sensibles à ce terme (dû à la dérivée fractionnaire).

- Le quatrième terme de l'équation de propagation (124) : $D'(x)\frac{\partial p}{\partial t}(x,t)$ est un terme d'atténuation, il résulte de l'atténuation de l'amplitude de l'onde sans dispersion. Ce terme décrit l'atténuation acoustique dûe aux intéractions visco-thermique entre fluide et structure, et à l'atténuation acoustique causée par la variation spatiale de la tortuosité. Les composantes basse fréquence du signal transitoire sont les plus sensibles à ce terme.
- Le dernier terme : $\varphi(x)\frac{\partial p}{\partial x}(x,t)$ décrit l'atténuation causée par la variation spatiale de la tortuosité et la porosité. Contrairement aux autres termes, ces deux termes sont indépendants des temps de relaxations du milieu et donc aux composantes fréquentielles du signal acoustique (i.e. il n'ya pas de dérivée temporelle).
- La variation spatiale de la porosité $\phi(x)$ apparaît dans l'équation de propagation uniquement à travers les deux derniers termes. Rappelons que dans le cas inhomogène, l'équation de propagation (Eq. 13) est indépendante de la porosité, ce paramètre apparait dans la réponse d'un milieu homogène quand les conditions aux limites du problème sont introduits [29].
- Finnalement, le terme $-\frac{\partial a(x)}{\partial x}\frac{1}{c^2(x)\phi(x)}\int_0^x\left[\int_0^t\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}(y,t-\tau)\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}+\pi b(y)\frac{\partial p}{\partial t}(y,t)\right]dy$ décrit la variation spatiale de l'inhomogénéité du milieu poreux dûe à la dispersion temporelle (visqueuse et thermique) du milieu.

5.3.1 Conclusion

Dans cette partie, l'équation d'onde a été établie pour un matériau poreux inhomogène en utilisant le calcul fractionnaire. Les différents termes de l'équation de propagation montrent comment la variatiion spatiale de la tortuosité, porosité et longueurs caractéristiques affectent la propagation. Les travaux futurs seront concentrés sur les problèmes direct (calul des opérateurs de réflexion et de transmission) et inverse (détermination des profiles de $\alpha_\infty(x)$, $\phi(x)$, $\Lambda(x)$ et $\Lambda'(x)$).

5.4 Projet de recherche : propagation acoustique dans les matériaux inhomogènes et techniques de caractérisation

De manière générale, la nature multiphasique d'un milieu joue un rôle très important dans le processus d'atténuation acoustique (c'est le cas dans les matériaux poreux qui contiennent à la fois une phase fluide et une phase solide). Ce sont en effet les interactions de nature inertielle, visqueuse et thermique entre les différentes phases du milieu qui dissipent l'énergie des ondes acoustiques. Dans les études expérimentales, les signaux en usage sont des impulsions (ou burst) le plus souvent très brèves (contraintes incontournables du fait de la nature des matériaux et des éprouvettes utilisées) alors que les modèles restent exprimés dans le domaine fréquentiel. Par suite, une modélisation dans le domaine temporel adaptée aux milieux étudiés peut être porteuse d'espoir, surtout si elle peut être assortie de méthodes et techniques de traitement du signal adaptées. Les interactions fluide-structure sont alors prises en compte par des opérateurs pseudo-différentiels pour modéliser l'effet mémoire des matériaux, facteurs exprimés par des opérations de convolution décrivant la dispersion et l'atténuation des ondes acoustiques, ce qui confère aux études à mener un caractère fondamental qui, au-delà de la formulation théorique à mettre en place pour accéder à des solutions exploitables, conduira à mettre en oeuvre le problème inverse associé et à adapter les techniques expérimentales.

Cette stratégie de résolution des problèmes direct et inverse de propagation dans les matériaux poreux est de surcroît encore rendue plus complexe si le matériau considéré est inhomogène du fait que les coefficients des équations de propagation sont des fonctions du point. C'est ainsi que la richesse d'informations qui peut résulter de ces nouveaux formalismes serait de nature à permettre à terme l'accès aux paramètres utiles, dans toute leur complexité.

Pour préciser ces propos, rappelons d'abord que lors de la propagation dans un matériau

poreux homogène, l'onde acoustique obéit à une équation de propagation aux dérivées partielles fractionnaires [4]. Les coefficients de l'équation d'onde sont indépendants du point (les propriétés acoustiques et mécaniques du matériau sont les mêmes en tous points) et les dérivées fractionnaires (produits de convolutions) traduisent la dispersion et l'atténuation des ondes dues aux interactions fluide/structure. La résolution du problème direct passe par le calcul de la fonction de Green du milieu (solution élémentaire de l'équation de propagation), puis des opérateurs de réflexion et transmission (opérateurs de diffusion). La résolution du problème inverse associé permet de déterminer les propriétés mécaniques et acoustiques à partir des données expérimentales, à savoir les caractéristiques des signaux transmis et/ou réfléchis par le matériau (en regard du signal cible).

La situation est différente dans le cas d'un matériau inhomogène, où la dispersion spatiale des caractéristiques du matériau est représentée par des coefficients de l'équation d'onde qui dépendent du point. La recherche de la solution analytique de ce type de problème n'est pas triviale. C'est un des points clés de ce projet de recherche que chercher à résoudre le problème direct par une analyse en ondes contrapropagatives (méthode de séparation des ondes) de façon à exprimer la solution de l'équation de propagation en termes d'intégrales premières, porteuses d'informations sur la position et la valeur des inhomogénéités. Il reste que cette méthode de séparation des ondes conduit à un formalisme dans lequel le champ acoustique est représenté par la superposition de deux composantes, qui ne sont pas des ondes au sens physique du terme ; néanmoins elles possèdent toutes les propriétés nécessaires à l'application de la méthode des caractéristiques. Par suite, l'expression des champs aller et retour peut être déterminée par des méthodes inspirées de celles développées en géométrie différentielle qui généralisent la notion de trièdre mobile.

Le cas d'une propagation unidirectionnelle sera considéré de façon à mener une étude approfondie préalable dans un espace de dimension 2 sous-tendu par la fonction déplacement et sa dérivée première. Au cours de son évolution dans le milieu, l'onde décrit alors une trajectoire dans l'espace des phases où, à chaque point, est associé un couple d'ondes " aller " et " retour " de sorte que leur somme donne le champ total tandis que leur différence conduit à la dérivée première du champ déplacement. En tout point de la trajectoire de l'onde dans l'espace des phases, est donc associée une base locale (ou un repère mobile) dont les deux vecteurs ne sont autres que chacune des ondes du couple d'ondes "aller" et "retour", les éléments de ce couple changeant lors du passage d'un point à un autre dans l'espace des phases en raison des inhomogénéités du milieu.

L'exposé qui précède est limité à l'étude analytique directe de la propagation dans les milieux poreux non homogènes que je propose de mener dans les années qui viennent. Il est bien clair au demeurant qu'une telle étude n'a de sens que dans la mesure où l'on s'intéresse à l'ensemble des problèmes soulevés dans le domaine des matériaux avec des objectifs d'application et dans la mesure où elle peut s'en nourrir. C'est ainsi que ce projet porte également sur l'étude des problèmes inverses rencontrés (des collaborations seront là mises en oeuvre), sur celle des techniques expérimentales à mettre en oeuvre pour leur caractérisation (qui même si elles restent classiques, elles auront à être adaptées au propos), et sur l'analyse et le traitement des signaux dans leur spécificité. Ces travaux sur le long terme pourront évidemment trouver des applications qui dépassent le cadre des matériaux poreux non homogènes, ce qui à nos yeux confère à ces études un intérêt beaucoup plus large que celui qui entre dans le cadre actuel du projet, d'autant plus que son originalité au niveau national et international nous semble avérée.

A Solution de l'équation de Propagation : Modèle de Johnson-Allard

A.1 Calcul de $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}}\right)$

En posant $\Delta^2 = b'^2 - 4c'$, il est facile de vérifier Δ^2 est toujours positif. Dans ce cas, nous pouvons écrire $f(z)$ comme

$$f(z) = z\left((\sqrt{z} + \frac{b'}{2})^2 - \frac{\Delta^2}{4}\right),$$

où $f(z)$ est toujours positif car $b' > 0$, $c' > 0$ et $z > 0$. Nous avons donc

$$P(x,z) = \varphi(z)\exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{(z + \frac{b'}{2}\sqrt{z})^2 - (\frac{\Delta\sqrt{z}}{2})^2}\right), \tag{125}$$

et nous distinguons deux cas, quand $\Delta^2 = 0$ ou $\Delta^2 > 0$.

A.1.1 Cas ou $\Delta^2 = 0$

Quand $\Delta^2 = 0$, la solution $P(x,z)$ peut être écrite sous la forme :

$$P(x,z) = \varphi(z)\exp\left(-\frac{x}{c}(z + \frac{b'}{2}\sqrt{z})\right).$$

En utilisant la relation :

$$\mathcal{L}^{-1}\exp\left(-\frac{x}{c}z\right) = \delta(t - x/c),$$

et la relation [48] p 341.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{b'}{2}\frac{x}{c}\sqrt{z}\right)\right] = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'x}{c}\frac{1}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2t}\right), \qquad t > 0,$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{x}{c}(z + \frac{b'}{2}\sqrt{z})\right)\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{x}{c}z\right)\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{b'x}{2c}\sqrt{z}\right)\right] \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'x}{c}\frac{1}{(t - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(t - x/c)}\right), \quad t \geq x/c.\end{aligned}$$

La solution de l'équation de propagation (13) dans ce cas est donnée par :

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad 0 \leq t \leq x/c, \\ \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'x}{c}\int_{x/c}^{t}\frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}}\exp\left(-\frac{b'^2x^2}{16c^2(\tau - x/c)}\right)g(t-\tau)d\tau, & \text{if} \quad t > x/c, \end{cases}$$

où $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(\varphi(z))$.

A.1.2 Cas où $\Delta^2 > 0$

Utilisons la relation [48], p 722.

$$\int_0^\infty \frac{\exp\left(-a\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} I_0(bx)xdx = \frac{\exp\left(-y\sqrt{a^2 - b^2}\right)}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

où $I_0(x)$ est la fonction de Bessel modifiée, et a, b sont constants. En utilisant le changement de variable $\zeta = \sqrt{x^2+y^2}$, nous obtenons :

$$\int_y^{+\infty} \exp(-a\zeta) I_0\left(b\sqrt{\zeta^2-y^2}\right) d\zeta = \frac{\exp\left(-y\sqrt{a^2-b^2}\right)}{\sqrt{a^2-b^2}}. \tag{126}$$

En dérivant les deux cotés de l' equation (126) par rapport à y, et en utilisant les résultats $I_0(0)=1$ et $I_0'(x)=I_1(x)$, nous obtenons la relation :

$$\exp\left(-y\sqrt{a^2-b^2}\right) = \exp(-ay) + by\int_y^{+\infty} \exp(-a\zeta)\frac{I_1\left(b\sqrt{\zeta^2-y^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2-y^2}} d\zeta. \tag{127}$$

En choisissant dans l'équation (127) les expressions $y=\frac{x}{c}$, $a = z+\frac{b'}{2}\sqrt{z}$ and $b=\frac{\Delta\sqrt{z}}{2}$, nous trouvons :

$$\exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}\right) = \exp\left(-(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z})\frac{x}{c}\right) + \frac{\Delta\sqrt{z}}{2}\frac{x}{c}\int_{x/c}^{+\infty} \exp\left(-(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z})\zeta\right)\frac{I_1\left(b\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}} d\zeta. \tag{128}$$

Rappelons que la représentation intégrale de la fonction de Bessel $I_\nu(z)$ est [48]

$$I_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}\exp(\pm zt)dt.$$

Quand $\nu=0$, nous obtenons la relation :

$$I_0(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-zt)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

En dérivant les deux cotés par rapport à z, on trouve que :

$$I_0'(z) = I_1(z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\exp(-zt)tdt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Pour chaque réel $\wp > 0$, et en substituant $\wp z$ à la place de z, nous obtenons :

$$I_1(\wp z) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\exp(-\wp zt)\frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}},$$

qui, avec le changement de variable $y=\wp t$, donne :

$$I_1(\wp z) = -\frac{1}{\pi\wp}\int_{-\wp}^{\wp}\exp(-zy)\frac{y}{\sqrt{\wp^2-y^2}}dy. \tag{129}$$

En multipliant les deux cotés de l'Eq. (129) par $\exp(-rz)$, pour chaque réel positif r, nous avons :

$$\exp(-rz)I_1(\wp z) = -\frac{1}{\pi\wp}\int_{-\wp}^{\wp}\exp-(z(y+r))\frac{y}{\sqrt{\wp^2-y^2}}dy,$$

qui, avec le changement de variable $y+r=\tau$, donne :

$$\exp(-rz)I_1(\wp z) = -\frac{1}{\pi\wp}\int_{r-\wp}^{r+\wp}\exp(-z\tau)\frac{\tau-r}{\sqrt{(\wp-\tau+r)(\wp+\tau-r)}}d\tau.$$

En introduisant la distribution de Heaviside H :

$$H(r+\wp-\tau)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad \tau\leq r+\wp\\ 0 & \text{if} \quad \tau>r+\wp\end{cases}$$

et

$$H(r-\wp-\tau)=\begin{cases}1 & \text{if} \quad \tau\leq r-\wp\\ 0 & \text{if} \quad \tau>r-\wp\end{cases}$$

nous écrivons (pour $r\geq\wp$)

$$\exp(-rz)I_1(\wp z)=-\frac{1}{\wp\pi}\int_0^\infty \exp(-z\tau)\frac{(\tau-r)\left(H(r+\wp-\tau)-H(r-\wp-\tau)\right)}{\sqrt{(\wp-\tau+r)(\wp+\tau-r)}}d\tau.$$

En conséquence :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\exp(-rz)I_1(\wp z)\right)=\Im(t)=-\frac{1}{\pi\wp}\frac{(t-r)\left(H(r+\wp-t)-H(r-\wp-t)\right)}{\sqrt{(\wp-t+r)(\wp+t-r)}}.$$

Sois $F(z)$ la transformée de Laplace-Carson de $\Im(t)$, sui est définie par

$$F(z)=z\int_0^\infty \exp(-\tau z)\Im(\tau)d\tau.$$

Nous avons donc :

$$F(z)=z\exp(-rz)I_1(\wp z).$$

Rappelons que [48], p 341 que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(\sqrt{z})\right)=\frac{1}{2\sqrt{\pi y^3}}\int_0^\infty\left(\frac{\tau^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{4y}\right)\Im(\tau)d\tau,\quad y>0.$$

qui implique que un réel constant M

$$\mathcal{L}^{-1}\left(MF(\sqrt{z})\right)=\bar{d}(y)=\frac{M}{2\sqrt{\pi y^3}}\int_0^\infty\left(\frac{\tau^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{4y}\right)\Im(\tau)d\tau,\quad y>0.$$

En substituant par son expression $\Im(t)$, $\bar{d}(y)$ (pour $r\geq\wp$)

$$\begin{aligned}\bar{d}(y) &= -\frac{M}{2\wp\pi\sqrt{\pi y^3}}\int_0^\infty\left(\frac{\tau^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{4y}\right)\frac{(\tau-r)\left(H(r+\wp-\tau)-H(r-\wp-\tau)\right)}{\sqrt{(\wp-\tau+r)(\wp+\tau-r)}}d\tau,\\ &= -\frac{M}{2\wp\pi\sqrt{\pi y^3}}\int_{r-\wp}^{r+\wp}\left(\frac{\tau^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{\tau^2}{4y}\right)\frac{(\tau-r)}{\sqrt{(\wp-\tau+r)(\wp+\tau-r)}}d\tau.\end{aligned}$$

En posant $\tau-r=u$, nous avons

$$\bar{d}(y)=\frac{-M}{2\wp\pi\sqrt{\pi y^3}}\int_{-\wp}^{\wp}\left(\frac{(u+r)^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{(u+r)^2}{4y}\right)\frac{udu}{\sqrt{\wp^2-u^2}},$$

qui, avec le changement de variable $u=\wp\tau$ (pour $\wp>0$), peut être écrit comme

$$\bar{d}(y)=\frac{-M}{2\pi^{3/2}y^{3/2}}\int_{-1}^{1}\left(\frac{(\wp\tau+r)^2}{2y}-1\right)\exp\left(-\frac{(\wp\tau+r)^2}{4y}\right)\frac{\tau d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}. \tag{130}$$

Donc nous choisissons M, $\wp$, r tel que

$$M=M(\zeta)=\frac{\Delta}{2}\frac{x}{c}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}},\qquad \wp=\wp(\zeta)=\frac{\Delta}{2}\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2},\qquad r=r(\zeta)=b'\zeta/2. \tag{131}$$

Remarquons que $r \geq \wp$. En conséquence

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Delta\sqrt{z}}{2}\frac{x}{c}\exp\left(-\frac{b'}{2}\sqrt{z}\right)\frac{I_1\left(\frac{\Delta\sqrt{z}}{2}\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}}\right)=\bar{d}(y).$$

Puisque $\mathcal{L}^{-1}\left(\exp(-\zeta z)\right)=s(y)=\delta(y-\zeta)$, nous trouvons

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\Delta\sqrt{z}}{2}\frac{x}{c}\left(\exp-\left(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z}\right)\zeta\right)\frac{I_1\left(\frac{\Delta\sqrt{z}}{2}\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}}\right)=s*\bar{d}$$

$$=\int_0^\tau s(y)\bar{d}(\tau-y)dy=\int_0^\tau \delta(y-\zeta)\bar{d}(\tau-y)dy=\bar{d}(\tau-\zeta).$$

Ecrivons $\bar{d}(\tau-\zeta)$ explicitement, en remplaçant M, $\wp$ et r (donné par l'Eq. (131)) dans l'équation (130). Le résultat est $(y>0)$

$$\bar{d}(y)=-\frac{\Delta}{4\pi^{3/2}}\frac{x}{c}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}}\frac{1}{y^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+b'\zeta\right)^2}{16y}\right)$$
$$\times\left(\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+b'\zeta\right)^2}{8y}-1\right)\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Il suit

$$\bar{d}(\tau-\zeta)=-\frac{\Delta}{4\pi^{3/2}}\frac{x}{c}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}}\frac{1}{(\tau-\zeta)^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+b'\zeta\right)^2}{16(\tau-\zeta)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+b'\zeta\right)^2}{8(\tau-\zeta)}-1\right)\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},\quad \tau>\zeta.$$

La transformée inverse du second terme dans le coté droit de l'équation (128) est

$$G(\tau)=\int_{x/c}^{\tau}\bar{d}(\tau-\zeta)d\zeta,\qquad \text{car}\qquad \tau>\zeta. \tag{132}$$

Dans cette intégrale, nous utilisons le changement de variable $\tau-\zeta=\xi$, et nous trouvons que

$$G(\tau)=\int_0^{\tau-x/c}\bar{d}(\xi)d\xi,$$

où

$$\bar{d}(\xi)=-\frac{\Delta}{4\pi^{3/2}}\frac{x}{c}\frac{1}{\sqrt{(\tau-\xi)^2-x^2/c^2}}\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{(\tau-\xi)^2-x^2/c^2}+b'(\tau-\xi)\right)^2}{16\xi}\right)$$
$$\times\left(\frac{\left(\mu\Delta\sqrt{(\tau-\xi)^2-x^2/c^2}+b'(\tau-\xi)\right)^2}{8\xi}-1\right)\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

En définissant $\bar{d}(\xi) = \Delta \frac{x}{c} h(\xi)$, $G(\tau)$ devient donc

$$G(\tau) = \Delta \frac{x}{c} \int_0^{\tau - x/c} h(\xi) d\xi.$$

La solution générale de l'équation de propagation est donnée par

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leq t \leq x/c, \\ u(x,t) + \int_{x/c}^{t} G(\tau) g(t-\tau) d\tau, & \text{if} \quad t > x/c, \end{cases}$$

où $u(x,t)$ correspond à la solution quand $\Delta = 0$ donné par l'équation (126) et a la forme

$$u(x,t) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \frac{b'x}{c} \int_{x/c}^{t} \frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}} \exp\left(-\frac{b'^2 x^2}{16c^2(\tau - x/c)}\right) g(t-\tau) d\tau.$$

Finallement, nous écrivons $p(x,t)$ comme

$$p(x,t) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad 0 \leq t \leq x/c, \\ \frac{x}{c} \int_{x/c}^{t} \left(\frac{b'}{4\sqrt{\pi}} \frac{1}{(\tau - x/c)^{3/2}} \exp\left(-\frac{b'^2 x^2}{16c^2(\tau - x/c)}\right) + \Delta \int_0^{\tau - x/c} h(\xi) d\xi \right) g(t-\tau) d\tau, & t > x/c. \end{cases}$$

Il est facile de montrer que cette solution est continue à l'interface $x = 0$ du matériau poreux. Nous avons donc :

$$\lim_{x \to 0} p(x,t) = p(0,t) = g(t).$$

B Solution de l'équation de propagation : Modèle de Pride-Lafarge.

Utilisons la relation [48]

$$\int_0^{\infty} \frac{\exp\left(-a\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} J_0(bx)xdx = \frac{\exp\left(-y\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad (a,b) > 0.$$

où $J_0(x)$ est la fonction de Bessel, et a, b sont des constantes. En utilisant le changement de variables $\zeta = \sqrt{x^2+y^2}$, nous obtenons

$$\int_y^{+\infty} \exp(-a\zeta) J_0\left(b\sqrt{\zeta^2-y^2}\right) d\zeta = \frac{\exp\left(-y\sqrt{a^2+b^2}\right)}{\sqrt{a^2+b^2}}. \tag{133}$$

En dérivant les deux cotés de l'équation (133) par rapport à y, et en utilisant les résultats

$$J_0(0) = 1 \quad \text{and} \quad \frac{\partial J_0(x)}{\partial x} = -J_1(x),$$

nous obtenons la relation

$$\exp\left(-y\sqrt{a^2+b^2}\right) = \exp(-ay) - by \int_y^{+\infty} \exp(-a\zeta) \frac{J_1\left(b\sqrt{\zeta^2-y^2}\right)}{\sqrt{\zeta^2-y^2}} d\zeta. \tag{134}$$

En choisissant dans l'équation (134) les expressions $y = \frac{x}{c}$, $a = z + \frac{b'}{2}\sqrt{z}$ and $b = \frac{\Delta'\sqrt{z}}{2}$, nous trouvons

$$\exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}\right) = \exp\left(-(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z})\frac{x}{c}\right) - \frac{\Delta'\sqrt{z}}{2}\frac{x}{c}\int_{x/c}^{+\infty} \exp\left(-(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z})\zeta\right) \frac{J_1\left(\frac{\Delta'\sqrt{z}}{2}\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}\right)}{\sqrt{\zeta^2-\frac{x^2}{c^2}}} d\zeta. \tag{135}$$

Le premier terme dans le coté droit de l'équation (135) a été calculé dans l'annexe A

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp -\frac{x}{c}\left(z+\frac{b'}{2}\sqrt{z}\right)\right] = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{b'\,x}{c}\frac{1}{(t-x/c)^{3/2}}\exp\left[-\frac{b'^2x^2}{16c^2(t-x/c)}\right].$$

La représentation intégrale de la fonction de Bessel $J_1(z)$ est donnée [48] par

$$J_1(z) = \frac{z}{\pi}\int_{-1}^{1} \exp(i\,z\,t)\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

En substituant $\wp z$ à la place de z, nous obtenons

$$J_1(\wp z) = \frac{\wp\,z}{\pi}\int_{-1}^{1} \exp(i\wp z\,t)\sqrt{1-t^2}\,dt,$$

où, avec, le changement de variable $T = -i\wp t$, nous obtenons

$$J_1(\wp z) = -\frac{iz}{\pi}\int_{-i\wp}^{i\wp} \exp(-zT)\sqrt{1+\frac{T^2}{\wp^2}}\,dT.$$

Nous avons donc

$$\mathcal{L}^{-1}\left[J_1(\wp z)\right] = \frac{d}{dt}\left(-\frac{i}{\pi}\sqrt{1+\frac{t^2}{\wp^2}}\right) \qquad \text{pour} \qquad -i\wp \le t \le i\wp,$$

ce qui signifie que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[J_1(\wp z)\right] = -\frac{i}{\pi}\frac{1}{\wp^2}\frac{t}{\sqrt{1+\frac{t^2}{\wp^2}}} \qquad \text{for} \qquad -i\wp \le t \le i\wp.$$

Nous déduisons donc les relations

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp(-\frac{b'}{2}\zeta\, z)J_1(\wp z)\right] = -\frac{i}{\pi}\frac{1}{\wp^2}\frac{t-\zeta b'/2}{\sqrt{1+\frac{(t-\eta b'/2)^2}{\wp^2}}} \quad \text{for} \quad -i\wp \le t-\frac{b'}{2}\zeta \le i\wp,$$

ce qui donne (annexe C)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{z}\exp\left(-\frac{b'}{2}\zeta\sqrt{z}\right)J_1(\wp\sqrt{z})\right] =$$
$$\frac{-i}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{\wp^2}\frac{1}{t^{3/2}}\int_{\frac{b'}{2}\zeta-i\wp}^{\frac{b'}{2}\zeta+i\wp}\exp(-u^2/4t)\left(\frac{u^2}{2t}-1\right)\frac{u-\zeta b'/2}{\sqrt{1+\frac{(u-\zeta b'/2)^2}{\wp^2}}}du. \tag{136}$$

En changeant de variable dans l'équation(136)

$$\mu = \frac{u-\zeta b'/2}{i\wp} \Longrightarrow du = i\wp\, d\mu,$$

nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{z}\exp(-\zeta\sqrt{z}b'/2)J_1(\wp\sqrt{z})\right] =$$
$$\frac{i}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp-\left(\frac{(i\wp\mu+\zeta b'/2)^2}{4t}\right)\left[\frac{(i\wp\mu+\zeta b'/2)^2}{2t}-1\right]\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}. \tag{137}$$

Il suit à partir de (137) que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{z}\exp\left(-\zeta(z+\sqrt{z}b'/2)\right)J_1(\wp\sqrt{z})\right] =$$
$$\frac{i}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t-\zeta)^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{(i\wp\mu+\zeta b'/2)^2}{4(t-\zeta)}\right)\left[\frac{(i\wp\mu+\zeta b'/2)^2}{2(t-\zeta)}-1\right]\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}, \quad t \ge \zeta \ge x/c. \tag{138}$$

Choisissons $\wp$ tel que

$$\wp = \wp(\zeta) = \frac{\Delta'}{2}\sqrt{\zeta^2 - x^2/c^2}. \tag{139}$$

En conséquent, l'équation (138) devient

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{z}\exp\left(-\zeta(z+\sqrt{z}b'/2)\right)\frac{J_1\left[\frac{\Delta'}{2}\sqrt{z}\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}\right]}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}}\right] = \frac{i}{2\pi\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}}\frac{1}{(t-\zeta)^{3/2}}\times$$
$$\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+\zeta b')^2}{16(t-\zeta)}\right)\times\left[\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+b'\zeta)^2}{8(t-\zeta)}-1\right]\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

Nous pouvons maintenant calculer la transformée inverse de l'équation (135)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right] = -\frac{i\Delta'}{4\pi\sqrt{\pi}}\frac{x}{c}\int_{x/c}^{t}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}}\frac{1}{(t-\zeta)^{3/2}}\times$$
$$\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+\zeta b')^2}{16(t-\zeta)}\right)\times\left[\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{\zeta^2-x^2/c^2}+\zeta b')^2}{8(t-\zeta)}-1\right]\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}.$$

En utilisant le changement de variables $t-\zeta=\xi$, nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{x}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right]=\int_0^{t-x/c}h(\xi,t)d\xi,$$

avec

$$\begin{aligned} h(\xi,\tau) &= -\frac{i\Delta'}{4\pi\sqrt{\pi}}\frac{x}{c}\frac{1}{\sqrt{(t-\xi)^2-x^2/c^2}}\frac{1}{\xi^{3/2}}\int_{-1}^{1}\exp\left(-\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{(t-\xi)^2-x^2/c^2}+b'(t-\xi))^2}{16\xi}\right)\times \\ &\quad \left[\frac{(i\Delta'\mu\sqrt{(t-\xi)^2-x^2/c^2}+b'(t-\xi))^2}{8\xi}\right]\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}}. \end{aligned}$$

En séparant les parties réelles et imaginaires de la fonctiton $h(\xi,t)$, nous obtenons

$$h(\xi,t)=H(\xi,t)+i\,\Xi(\xi,t).$$

C Calul de la transformée de Laplace inverse

Si $f(u)$ est la transformée inverse de la fonction $g(z)$

$$g(z) = \int_0^\infty \exp(-zu) f(u) du.$$

La transformée de Laplace inverse de $\sqrt{z} g(z)$ est

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sqrt{z}\, g(z)\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{t^{3/2}} \int_0^\infty \left(\frac{u^2}{2t} - 1\right) \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right) f(u) du.$$

Dans notre cas

$$g(z) = \exp(-z\frac{b'}{2}\xi) J_1(\wp z)$$

et

$$f(u) = -\frac{i}{\pi} \frac{1}{\wp^2} \frac{u - \xi b'/2}{\sqrt{1 + \frac{(u-\xi b'/2)^2}{\wp^2}}}, \qquad -i\wp \leq u - \xi b'/2 \leq i\wp.$$

ce qui donne la relation (136).

D Calcul des opérateurs de réflexion et de transmission

L'équation d'Euler est écrite dans les régions (1) ($x \leq 0$) et (2) ($0 \leq x \leq L$) sous la forme :

$$\rho_f \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}|_{x=0} = -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \qquad x \leq 0, \tag{140}$$

$$\rho_f \tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t}|_{x=0} = -\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{141}$$

où $v_1(x,t)$ et $v_2(x,t)$ sont les vitesses acoustiques dans les régions (1) et (2) respectivement. Dans l'espace libre (région (1)), l'opérateur tortuosité est égal à 1. L'équation de continuité du flux à $x = 0$ est donnée par :

$$v_1(x,t) = \phi v_2(x,t), \tag{142}$$

où ϕ est la porosité du milieu. A partir de (157), (158) et (156) il est facile d'écrire

$$\tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \phi \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \tag{143}$$

avec

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{c_0}\left(-\delta(t) + \tilde{R}(t)\right) * \frac{\partial p^i(t)}{\partial t}. \tag{144}$$

La transformée de Laplace de l'équation 159 donne une relation entre le coefficient de réflexion et de transmission.

$$(R(z)-1)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) = \frac{\phi c_0}{c}\frac{\sqrt{f(z)}}{z\alpha(z)}\left[T(z)\exp\left(\frac{-L\,z}{c}\right) - (1+R(z))\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right], \tag{145}$$

où $\alpha(z)$ est la transformée de Laplace inverse de $\tilde{\alpha}(t)$. A l'interface $x = L$, l'équation d'Euler est écrite dans les deux régions (2) et (3) ($x \geq L$) comme :

$$\begin{aligned} \rho_f \tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t}|_{x=L^-} &= -\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=L^-} \\ \rho_f \frac{\partial v_3(x,t)}{\partial t}|_{x=L^+} &= -\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+}. \end{aligned} \tag{146}$$

A $x = L$, la continuité du flux de vitesse donne la relation

$$v_3(L^+,t) = \phi v_2(L^-,t). \tag{147}$$

A partir des équations 163-162, nous avons :

$$\tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+} = \phi \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=L^-}, \tag{148}$$

avec

$$\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+} = -\frac{1}{c_0}\tilde{T}(t) * \frac{\partial p^i}{\partial t}|_{t=L/c}, \tag{149}$$

la transformée de Laplace de l'équation (164) donne :

$$T(z)\exp\left(-\frac{L}{c}z\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) = \frac{\phi c_0}{c}\frac{\sqrt{f(z)}}{z\alpha(z)}\left[-T(z)\exp\left(-\frac{L}{c}z\right)\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + 1 + R(z)\right]. \tag{150}$$

Les fonctions $R(z)$ et $T(z)$ obtenues à partir des équations 161 et 166 sont le coefficient de réflexion ($R(z)$) et le coefficient de transmission ($T(z)$) donné par :

$$R(z) = \frac{\left(-\frac{\phi^2}{\alpha_\infty}+1\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}{2\frac{\phi}{\sqrt{\alpha_\infty}}\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + \left(\frac{\phi^2}{\alpha_\infty}+1\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}, \tag{151}$$

$$T(z) = \frac{2\frac{\phi}{\sqrt{\alpha_\infty}}\ \exp\left(\frac{L}{c}\right) z}{2\frac{\phi}{\sqrt{\alpha_\infty}}\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + \left(\frac{\phi^2}{\alpha_\infty}+1\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}. \tag{152}$$

Le développement de ces expressions en séries d'exponentielles (Annexe E) et la transformée de Laplace inverse donnent les opérateurs de réflexion et de transmission.

$$\tilde{R}(t) = \left(\frac{-\phi+\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi+\sqrt{\alpha_\infty}}\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\phi-\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi+\sqrt{\alpha_\infty}}\right)^{2n}\left[G\left(t, 2n\frac{L}{c}\right) - G\left(t, (2n+2)\frac{L}{c}\right)\right],$$

$$\tilde{T}(t) = \frac{4\phi\sqrt{\alpha_\infty}}{\left(\sqrt{\alpha_\infty}+\phi\right)^2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{\phi-\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi+\sqrt{\alpha_\infty}}\right)^{2n} G\left(t+\frac{L}{c_0}, (2n+1)\frac{L}{c}\right).$$

E Expressions développées des opérateurs de réflexion et de transmission.

En posant $a = \frac{\sqrt{\alpha_\infty}}{\phi}$, à partir des équations (161) et (166), nous obtenons le système :

$$a\,(-1+R(z))\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) = T(z)\exp\left(-\frac{L}{c}z\right) - (1+R(z))\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right),$$
$$a\,T(z)\exp\left(-\frac{L}{c}z\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) = -T(z)\exp\left(-\frac{L}{c}z\right) + R(z) + 1,$$

la solution est donnée par

$$R(z) = \frac{\left(a^2-1\right)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}{2\,a\,\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + (a^2+1)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)},$$
$$T(z) = \frac{2\,a\,\exp\left(\frac{L}{c}z\right)}{2\,a\,\cosh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + (2+1)\sinh\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}.$$

qui correspond aux expressions données par les équations (151 et 152). Le coefficient de reflexion $R(z)$ peut être écrit comme

$$R(z) = \frac{(a^2-1)\left[\exp\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) - \exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right]}{2a\left[\exp\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + \exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right] + (a^2+1)\left[\exp\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) - \exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right]}$$

et son équivalent à

$$R(z) = \left[\frac{a^2-1}{(a+1)^2}\right]\frac{1-\exp\left(-2\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}{1-\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2\exp\left(-2\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}.$$

A partir de l'identité

$$\frac{1}{1-\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2\exp\left(-2\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n}\exp\left(-2n\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)$$

$R(z)$ a la forme suivante :

$$R(z) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n}\left[\exp\left(-2n\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) - \exp\left(-2(n+1)\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right].$$

L'opérateur de réflexion $\tilde{R}(t)$ est donné par la transformée de Laplace inverse de cette équation

$$\tilde{R}(t) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n}\left[G\left(t, 2n\frac{L}{c}\right) - G\left(t, 2(n+1)\frac{L}{c}\right)\right]$$

De la même manière, le coefficient de transmission est donné par :

$$T(z) = \frac{4a\,\exp\left(\frac{L}{c}z\right)}{2\,a\left[\exp\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) + \exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right] + (a^2+1)\left[\exp\left(\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right) - \exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)\right]}$$

qui peut être écrit comme :

$$T(z) = \frac{4\,a\,\exp\left(\frac{L}{c}z\right)\exp\left(-\frac{L}{c}\sqrt{fz}\right)}{(a+1)^2 - (a-1)^2\exp - \left(2\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right)}.$$

En développant cette relation en série, nous obtenons

$$T(z) = \frac{4a}{(a+1)^2}\exp\left(\frac{L}{c}z\right)\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n}\exp\left(-(2n+1)\frac{L}{c}\sqrt{f(z)}\right),$$

qui avec la transformée de Laplace inverse donne l'opérateur de transmission :

$$\tilde{T}(t) = \frac{4\,a}{(a+1)^2}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^{2n} F\left(t+\frac{L}{c},(2n+1)\frac{L}{c}\right). \tag{153}$$

L'opérateur de réflexion est obtenu avec $n = 0$ et $x = L$ dans l'équation (153) :

$$\tilde{R}(t) = \left(\frac{a-1}{a+1}\right)\left[\delta(t) - \frac{4\,a}{(a+1)^2}F\left(t, 2\frac{L}{c}\right)\right].$$

L'opérateur de transmission est obtenu avec $n = 0$ et $x = L$ dans l'équation (153) :

$$\tilde{T}(t) = \frac{4\,a}{(a+1)^2}F\left(t+\frac{L}{c},\frac{L}{c}\right).$$

F Expressions des opérateurs de réflexion et de transmission pour un bi-couches de milieux poreux

En utilisant les équations 45 et 51, nous pouvons écrire le système d'équations suivant donnant les rélations entre $A_2(z)$, $B_2(z)$ et $R(z)$

$$\begin{pmatrix} A_2(z) \\ B_2(z) \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1+R(z) \\ K_1(R(z)-1) \end{pmatrix}. \tag{154}$$

A partir des équations 47 et 53, nous avons

$$\begin{pmatrix} A_3(z) \\ B_3(z) \end{pmatrix} = \frac{T'(z)}{2}\begin{pmatrix} (1+K_3)\exp\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell+L)\right) \\ (1-K_3)\exp\left(-\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}(\ell+L)\right) \end{pmatrix}. \tag{155}$$

où $T'(z) = T(z)\exp\left(-\left(\frac{\ell}{c_2}+\frac{L}{c_3}\right)z\right)$.

En utilisant les équations 154, 155 et Eqs. 46, 52, nous obtenons le système linéaire suivant donnant les coefficients de réfléxion et de transmission $R(z)$ et $T(z)$:

$$\begin{aligned}
&R\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)+K_1\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\right]-T'(z)\times \\
&\left[\cosh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+K_3\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)\right]=K_1\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)-\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right), \\
&R\left[K_2\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)+K_3\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\right]+T'(z)\times \\
&\left[\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+K_3\cosh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)\right]=K_3\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)-K_2\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right).
\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}
D(z) = {} & (1+K_3^2)\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+ \\
& (K_1+K_2K_3)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+ \\
& 2K_3\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+ \\
& (K_2+K_1K_3)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
D_1(z) = {} & (K_1-K_2K_3)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+ \\
& (K_3^2-1)\cosh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right)+ \\
& (K_1K_3-K_2)\sinh\left(\frac{\sqrt{f_2(z)}}{c_2}\ell\right)\cosh\left(\frac{\sqrt{f_3(z)}}{c_3}L\right).
\end{aligned}$$

Donc, nous avons les expressions suivantes de $R(z)$ et $T(z)$

$$R = \frac{D_1(z)}{D(z)} \qquad \text{and} \qquad T'(z) = \frac{2K_1K_2}{D(z)},$$

qui sont équivalentes aux expressions (55) et (56).

G Opérateur de réflexion dans le régime visqueux

En notant par $P(x,z)$ la transformée de Laplace de $p(x,t)$ définie par

$$P(x,z) = \mathcal{L}\left[p(x,t)\right] = \int_0^\infty \exp(-zt)p(x,t)dt.$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1, \qquad \text{and} \qquad \mathcal{L}\left[H(t)\right] = \frac{1}{z},$$

La transformée de Laplace de l'équation de diffusion (59) satisfaisant les conditions de causalité : $p(x,t)|_{t=0} = 0$ and $\frac{\partial p}{\partial t}|_{t=0} = 0$ est donné par

$$\frac{\partial^2 P_2(x,z)}{\partial x^2} - Dz\, P_2(x,z) = 0,$$

où $P_2(x,z)$ est la transformée de Laplace de la pression acoustique $p_2(x,t)$ à l'intérieure du matériau poreux pour $0 \leq x \leq L$.

La transformée de Laplace du champ à l'extérieur du matériau est donné par

$$P_1(x,z) = \left[\exp\left(-z\frac{x}{c_0}\right) + R(z)\exp\left(z\frac{x}{c_0}\right)\right]\varphi(z), \qquad x \leq 0,$$
$$P_3(x,z) = T(z)\exp\left[-\frac{(x-L)}{c_0}z\right]\varphi(z), \qquad x \geq L.$$

Ici $P_1(x,z)$ et $P_3(x,z)$ sont respectivement la transformée de Laplace du champ à gauche et à droite du matériau, $\varphi(z)$ dénote la transformée de Laplace du champ incident $p^i(t)$ et finallement R(z) et T(z) sont les transformées de Laplace des opérateurs de réflexion et de transmission respectivement.
La transformée de Laplace des conditions de continuité (31) sont données par

$$P_2(0^+,z) = P_1(0^-,z) \qquad \text{and} \qquad P_2(L^-,z) = P_3(L^+,z),$$

où $P_1(0^-,z)$ et $P_3(L^+,z)$ sont les tranformées de Laplace de $p_1(x,t)$ et $p_3(x,t)$ respectivement donnés par

$$P_1(0^-,z) = (1+R(z))\,\varphi(z) \qquad \text{and} \qquad P_3(L^-,z) = T(z)\,\varphi(z),$$

Pour dériver les coeffcients de réflexion et de transmission, les conditions aux limites du flux de la vitesse acoustique aux interfaces $x = 0$ et $x = L$ sont nécessaires.
L'équation de continuité du flux à $x = 0$ est donnée par

$$v_1(x,t) = \phi v_2(x,t), \tag{156}$$

où ϕ est la porosité du milieu. L'équation d'Euler est écrite dans les régions (1) ($x \leq 0$) et (2) ($0 \leq x \leq L$) comme :

$$\rho_f \frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t}|_{x=0} = -\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \qquad x \leq 0, \tag{157}$$
$$\rho_f \tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t}|_{x=0} = -\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \qquad 0 \leq x \leq L, \tag{158}$$

où $v_1(x,t)$ et $v_2(x,t)$ sont le champ de vitesse acoustique dans les régions (1) et (2) respectivement. Dans le fluide libre (région (1)), l'opérateur de tortuosité est égale à 1. A partir des équations (156), (157) et (158) il est facile d'écrire :

$$\tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \phi \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=0}, \tag{159}$$

avec

$$\frac{\partial p_1(x,t)}{\partial x}|_{x=0} = \frac{1}{c_0}\left(-\delta(t) + \tilde{R}(t)\right) * \frac{\partial p^i(t)}{\partial t}. \tag{160}$$

La transformée de Laplace de l'équation 159 donne une relation entre le coefficient de réflexion et de transmission.

$$(R(z)-1)\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right) = \phi\rho_0 c_0 \frac{\sqrt{D\,z}}{z\alpha(z)}\left[T(z) - (1+R(z))\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right)\right], \tag{161}$$

où $\alpha(z)$ est la transformée de Laplace de $\tilde{\alpha}(t)$.
A l'interface $x = L$, la continuité du flux de vitesse donne la relation

$$v_3(L^+,t) = \phi v_2(L^-,t). \tag{162}$$

A $x = L$, l'équation d'Euler est écrite dans les deux régions (2) et (3) ($x \geq L$) comme :

$$\begin{aligned} \rho_f \tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t}|_{x=L^-} &= -\frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=L^-} \\ \rho_f \frac{\partial v_3(x,t)}{\partial t}|_{x=L^+} &= -\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+}. \end{aligned} \tag{163}$$

A partir des équations 162-163, nous avons :

$$\tilde{\alpha}(t) * \frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+} = \phi \frac{\partial p_2(x,t)}{\partial x}|_{x=L^-}, \tag{164}$$

avec

$$\frac{\partial p_3(x,t)}{\partial x}|_{x=L^+} = -\frac{1}{c_0}\tilde{T}(t) * \frac{\partial p^i}{\partial t}|_{t=L/c_0}, \tag{165}$$

La transformée de Laplace de l'équation (164) donne :

$$T(z)\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right) = \phi\rho_0 c_0 \frac{\sqrt{D\,z}}{z\alpha(z)}\left[1 + R(z) - T(z)\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right)\right]. \tag{166}$$

En posant

$$B = \frac{\phi\rho_0 c_0\sqrt{D}}{z\alpha(z)} = \sqrt{\frac{\rho_0^3\phi\gamma}{\eta k_0}}. \tag{167}$$

Les coefficients de réfléxion et de transmission sont la solution du système d'équations (Eqs. 161 et 166)

$$\begin{cases} R(z)\left(\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right) + B\sqrt{z}\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right)\right) - B\sqrt{z}\,T(z) = \sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right) - B\sqrt{z}\,\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right), \\ -R(z)B\sqrt{z} + T(z)\left(\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right) + B\sqrt{z}\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right)\right) = B\sqrt{z}. \end{cases} \tag{168}$$

R(z) est donné par :

$$R(z) = \frac{(1-B^2 z)\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right)}{2B\sqrt{z}\cosh\left(L\sqrt{D\,z}\right) + (1+B^2 z)\sinh\left(L\sqrt{D\,z}\right)}, \tag{169}$$

Le Développement de ces expressions en séries d'exponentielles (Annexe E) donne le coefficient de réflexion.

$$R(z) = \frac{1-B\sqrt{z}}{1+B\sqrt{z}}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1-B\sqrt{z}}{1+B\sqrt{z}}\right)^{2n}\left(\exp\left(-2nL\sqrt{D\,z}\right) - \exp\left(-2(n+1)L\sqrt{D\,z}\right)\right). \tag{170}$$

Ces expressions prennent en compte les réflexions multiples dans le matériau.

Dans la plus part des cas, dans les milieux poreux saturés d'air, les effets des réflexions multiples sont négligeables à cause de la grande atténuation des ondes sonores dans ces milieux. En prenant en compte uniquement la première réflexion à l'interface $x = 0$ et $x = L$, le coefficient de réflexion dans le matériau devient :

$$\begin{aligned} R(z) &= \frac{1 - B\sqrt{z}}{1 + B\sqrt{z}} \left(1 - \frac{4B\sqrt{z}}{(1 + B\sqrt{z})^2} \exp\left(-2L\sqrt{D\,z}\right)\right) \\ &= \frac{1 - B\sqrt{z}}{1 + B\sqrt{z}} - \frac{4B\sqrt{z}(1 - B\sqrt{z})}{(1 + B\sqrt{z})^3} \exp\left(-2L\sqrt{D\,z}\right) \end{aligned} \tag{171}$$

L'opérateur de réflexion est calculé en prenant en compte la transformée inverse du coefficient de réflexion :
Rappelons que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1 - B\sqrt{z}}{(1 + B\sqrt{z})}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[-1 + \frac{2}{B}\frac{1}{\sqrt{z} + 1/B}\right] \\ &= -\delta(t) + \frac{2}{B\sqrt{\pi\,t}} - \frac{2}{B^2}\exp\left(t/B^2\right)\operatorname{erfc}(\sqrt{t}/B), \end{aligned} \tag{172}$$

où erfc est la fonction Erreur complémentaire [1].
En posant

$$g(z) = \frac{Bz - 1}{(1 + Bz)^3} = \frac{1}{B^2}\frac{z - 1/B}{(1/B + z)^3},$$

nous obtenons

$$\mathcal{L}^{-1}\left[g(z)\right] = f(t) = \frac{1}{B^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{z - 1/B}{(1/B + z)^3}\right] = \frac{1}{B^2}\left(t - t^2/B\right)\exp\left(-t/B\right).$$

En utilisant la relation

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{z}\,g\left(\sqrt{(z)}\right)\right] &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right)\left(\frac{u^2}{2t} - 1\right) f(u)du \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}B^2}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right)\left(\frac{u^2}{2t} - 1\right)\left(u - \frac{u^2}{B}\right)\exp\left(-\frac{u}{B}\right)du, \end{aligned}$$

avec le changement de variable : $u/B = y$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4B\sqrt{z}\,(B\sqrt{z} - 1)}{(1 + B\sqrt{z})^3}\right] &= \frac{2}{B\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t}\right)\left(\frac{u^2}{2t} - 1\right)\left(u - \frac{u^2}{B}\right)\exp\left(-\frac{u}{B}\right)du, \\ &= \frac{2B}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{B^2y^2}{4t}\right)\left(\frac{y^2B^2}{2t} - 1\right)\left(y - y^2\right)\exp\left(-y\right)dy. \\ &= k(t) \end{aligned}$$

L'opérateur de réflexion est donné par

$$\tilde{R}(t) = (f(t) + k(t)) * g(t) \tag{173}$$

H Conditions aux limites : théorie de Biot

Soient σ_{ij}^s et σ_{ij}^f les tenseurs de contraintes du squelette et du fluide respectivement, et $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{ij} + u_{ji})$ le tenseur de déformation du squelette. Les équations de contraintes déformations dans le milieu poreux [45] sont données par

$$\sigma_{ij}^s = \left[(P - 2N)\nabla\overrightarrow{u} + Q\nabla\overrightarrow{U}\right]\delta_{ij} + N(u_{ij} + u_{ji}), \tag{174}$$

$$\sigma_{ij}^f = -\phi p_f \delta_{ij} = (R\nabla\overrightarrow{U} + Q\nabla\overrightarrow{u})\delta_{ij}. \tag{175}$$

p_f est la pression du fluide. Nous supposons que le champ de pression et la contrainte normale dans le milieu poreux sont continus aux limites du matériau, à $x = 0$

$$\sigma^f(0^+, t) = -\phi p_1(0^-, t), \quad \sigma^s(0^+, t) = -(1 - \phi)p_1(0^-, t), \tag{176}$$

et, à $x = L$

$$\sigma^f(L^-, t) = -\phi p_3(L^+, t), \quad \sigma^s(L^-, t) = -(1 - \phi)p_3(L^+, t), \tag{177}$$

σ^f et σ^s sont les contraintes normales du fluide et du solide respectivement, à l'intérieur du milieu poreux. L'expression de σ^s est donnée par l'équation (174)

$$\sigma^s = (P - 2N)\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{u} + Q\overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{U} + 2N\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{178}$$

Pour les ondes longitudinales, la relation (178) sera donnée par

$$\sigma^s(x, z) = (P - 2N)\,\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2\Phi_f}{\partial x^2} + 2N\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial x^2}. \tag{179}$$

La relation de contrainte déformation dans le fluide est donnée par l'équation (175)

$$\sigma^f = R\vec{\nabla}\cdot\vec{U} + Q\vec{\nabla}\cdot\vec{u}, \tag{180}$$

pour une propagation le long de l'axe x, nous avons

$$\sigma^f(x, z) = R\frac{\partial^2\Phi_f}{\partial x^2} + Q\frac{\partial^2\Phi_s}{\partial x^2}. \tag{181}$$

Utilisant la relation (104), nous obtenons la relation

$$\sigma^f(x, z) = \left(\widetilde{\Im}_1(t)R + Q\right)\frac{\partial^2\Phi_1(z)}{\partial x^2} + \left(\widetilde{\Im}_2(t)R + Q\right)\frac{\partial^2\Phi_2(z)}{\partial x^2}, \tag{182}$$

Pour dériver les coefficients de réflexion et de transmission, les conditions aux limites du flux de vitesse aux interfaces $x = 0$ et $x = L$ sont nécessaires. La relationde continuité du flux à $x = 0$ est écrite sous la forme

$$v_1(0^-, t) = (1 - \phi)\,v_s(0^+, z) + \phi v_f(0^+, z), \tag{183}$$

où v_1 est le champ de vitesse acoustique dans la région (1) ($x \leq 0$), v_s et v_f sont les champs de pression du solide et du fluide respectivement, à l'intérieur du matériau. L'équation de continuité du flux à $x = L$ est donnée par

$$v_3(L^+, t) = (1 - \phi)\,v_s(L^-, t) + \phi v_f(L^-, t), \tag{184}$$

ici v_3 est le champ de vitesse acoustique dans la région (3) ($x \geq L$). Utilisant ces conditions aux limites aux interfaces $x = 0$ et $x = L$, nous obtenons l'expression du coefficient de transmission et de réflexion.

I Opérateurs de réflexion et de transmission : théorie de Biot

Dans le domaine de Laplace, les coefficients de réflexion $R(z)$ et de transmission $T(z)$ sont donnés par

$$R(z) = \frac{z^2\left[F_4^2(z) - F_3^2(z)\right] + 1}{\left[zF_3(z) - 1\right]^2 - z^2F_4^2(z)}, \tag{185}$$

$$T(z) = \frac{2zF_4(z)}{z^2F_4^2(z) - \left[zF_3(z) - 1\right]^2}, \tag{186}$$

où les fonctions $F_3(z)$ et $F_4(z)$ sont définies par

$$F_3(z) = F_1(z)\cosh\left(l\sqrt{\lambda_1}\right) + F_2(z)\cosh\left(l\sqrt{\lambda_2}\right), \qquad F_4(z) = F_1(z) + F_2(z),$$

avec

$$F_i(z) = \rho c_f\left[1 + \phi(\Im_i - 1)\right]\sqrt{\lambda_i}\frac{\psi_i(z)}{\sinh l\sqrt{\lambda_i}\psi(z)}; \qquad i = 1,2 \qquad \Im_i(z) = A + \frac{B_i}{\sqrt{z}} \tag{187}$$

avec les notations, pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
&\lambda_i(z) = C_iz^2 + D_iz\sqrt{z} + G_iz,\\
&A = \frac{\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}{2\tau_7},\\
&B_i = \frac{1}{4\tau_7^2}\left[\left(\tau_2 - 2\tau_6 + (-1)^i\frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}\right)2\tau_7 + \left(\tau_1 - 2\tau_5 - \sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}\right)2\tau_6\right],\\
&C_i = \frac{1}{2}\left(\tau_1 + (-1)^i\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}\right),\\
&D_i = \frac{1}{2}\left(\tau_2 + (-1)^i\frac{\tau_1\tau_2 - 2\tau_4}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}}\right),\\
&G_i = (-1)^i\frac{1}{4}\left(\frac{\tau_2^2}{\sqrt{\tau_1^2 - 4\tau_3}} - \frac{(\tau_1\tau_2 - 2\tau_4)^2}{2\left(\tau_1^2 - 4\tau_3\right)^{3/2}}\right),\\
&\psi_1(z) = \phi Z_2(z) - (1-\phi)Z_4(z),\\
&\psi_2(z) = (1-\phi)Z_3(z) - \phi Z_1(z),\\
&\psi(z) = 2\left(Z_1(z)Z_4(z) - Z_2(z)Z_3(z)\right),\\
&Z_1(z) = \left(P + Q\Im_1(z)\right)\lambda_1(z),\\
&Z_2(z) = \left(P + Q\Im_2(z)\right)\lambda_2(z),\\
&Z_3(z) = \left(Q + R\Im_1(z)\right)\lambda_1(z),\\
&Z_4(z) = \left(Q + R\Im_1(z)\right)\lambda_2(z).
\end{aligned}$$

Les expressions (185) et (186) peuvent être décomposées en simples éléments comme :

$$\begin{aligned}
R(z) &= -1 + \frac{1}{1 - z\left(F_3(z) - F_4(z)\right)} + \frac{1}{1 - z\left(F_3(z) + F_4(z)\right)},\\
T(z) &= \frac{1}{1 - z\left(F_3(z) - F_4(z)\right)} - \frac{1}{1 - z\left(F_3(z) + F_4(z)\right)}.
\end{aligned}$$

Ces nouvelles expressions nécessitent le calcul de $F_3(z) - F_4(z)$ et $F_3(z) + F_4(z)$. A partir des équations (187) :

$$F_3(z) - F_4(z) = 2\rho c_f \left([1 + \phi\,(\Im_1(z) - 1)] \sqrt{\lambda_1} \tanh\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_1}\right) + [1 + \phi\,(\Im_2(z) - 1)] \sqrt{\lambda_2} \tanh\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_2}\right)\right),$$

$$F_3(z) + F_4(z) = 2\rho c_f \left([1 + \phi\,(\Im_1(z) - 1)] \sqrt{\lambda_1} \coth\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_1}\right) + [1 + \phi\,(\Im_2(z) - 1)] \sqrt{\lambda_2} \coth\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_2}\right)\right),$$

sachant que

$$\sqrt{\lambda_1(z)}\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(P+Q) - Q + \Im_2(z)\,[Q(R+Q) - R]}{2(Q^2 - PR)(\Im_1(z) - \Im_2(z))}\frac{1}{\sqrt{\lambda_1(z)}},$$
$$\sqrt{\lambda_2(z)}\frac{\psi_2(z)}{\psi(z)} = \frac{\phi(P+Q) - Q + \Im_1(z)\,[Q(R+Q) - R]}{2(Q^2 - PR)(\Im_1(z) - \Im_2(z))}\frac{1}{\sqrt{\lambda_2(z)}},$$

En limite haute fréquence, $z \to \infty$, nous déduisons les développements suivants :

$$\sqrt{\lambda_1(z)}\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = \frac{\alpha}{\sqrt{z}} + \frac{\beta}{z} + \frac{\gamma}{s\sqrt{z}} + ...$$
$$\sqrt{\lambda_2(z)}\frac{\psi_1(z)}{\psi(z)} = \frac{\alpha'}{\sqrt{z}} + \frac{\beta'}{z} + \frac{\gamma'}{s\sqrt{z}} + ...$$

où nous avons noté

$$\alpha = \frac{\alpha_1 a_1}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)}, \qquad \beta = \frac{\alpha_1 b_1 + a_1\beta_1}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)}, \qquad \gamma = \frac{\alpha_1 d_1 + b_1\beta_1}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)},$$
$$\alpha' = \frac{\alpha_1 a_2}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)}, \qquad \beta' = \frac{\alpha_1 b_2 + a_2\beta_2}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)}, \qquad \gamma' = \frac{\alpha_1 d_2 + b_2\beta_2}{2(Q^2 - PR)(B_1 - B_2)},$$
$$\alpha_1 = \phi(Q+P) - Q + A\,[Q(Q+R) - R]\,, \quad \beta_1 = B_1\,[Q(Q+R) - R]\,, \quad \beta_2 = B_2\,[Q(Q+R) - R]\,,$$
$$a_i = \frac{1}{\sqrt{C_i}}, \quad b_i = -\frac{D_i}{2C_i\sqrt{C_i}}, \quad d_i = \left(\frac{3D_i^2}{8C_i\sqrt{C_i}} - \frac{1}{2}\frac{G_i}{C_i\sqrt{C_i}}\right), \quad i = 1, 2.$$

Les quantités $z\,[F_3(z) - F_4(z)]$ et $z\,[F_3(z) + F_4(z)]$ peuvent être écrites suivant les développements

$$\begin{aligned}\frac{z\,[F_3(z) - F_4(z)]}{2\rho c_f} = \quad & \left[(1 - \phi + \phi A)(\alpha\sqrt{z} + \beta) + \alpha\phi B_1\right] \tanh\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda}\right) \\ & - \left[(1 - \phi + \phi A)(\alpha'\sqrt{z} + \beta') + \alpha'\phi B_2\right] \tanh\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_2}\right), \\ \frac{z\,[F_3(z) + F_4(z)]}{2\rho c_f} = \quad & \left[(1 - \phi + \phi A)(\alpha\sqrt{z} + \beta) + \alpha\phi B_1\right] \coth\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda}\right) \\ & - \left[(1 - \phi + \phi A)(\alpha'\sqrt{z} + \beta') + \alpha'\phi B_2\right] \coth\left(\frac{l}{2}\sqrt{\lambda_2}\right).\end{aligned}$$

Prenant en compte les développements de $\tanh x$ et $\coth x$ en série de puissances de $\exp(-x)$ donnés par

$$\tanh x = 1 - \sum_{n\geq 0}(-1)^n \exp\left(-2(n+1)x\right), \qquad \coth x = 1 + \sum_{n\geq 0}\exp\left(-2(n+1)x\right),$$

les expressions précédentes peuvent être données par

$$\begin{aligned}\frac{z\left[F_3(z)-F_4(z)\right]}{2\rho c_f} = \quad & (1-\phi+\phi A)\left[(\alpha-\alpha')\sqrt{z}+\beta-\beta'\right]+\phi(\alpha B_1-\alpha' B_2)\\ & -2\left[(1-\phi+\phi A)(\alpha\sqrt{z}+\beta)+\phi B_1\alpha\right]\sum_{n\geq 0}(-1)^n\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)\\ & +2\left[(1-\phi+\phi A)(\alpha'\sqrt{z}+\beta')+\phi B_2\alpha'\right]\sum_{n\geq 0}(-1)^n\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{z\left[F_3(z)+F_4(z)\right]}{2\rho c_f} = \quad & (1-\phi+\phi A)\left[(\alpha-\alpha')\sqrt{z}+\beta-\beta'\right]+\phi(\alpha B_1-\alpha' B_2)\\ & +2\left[(1-\phi+\phi A)(\alpha\sqrt{z}+\beta)+\phi B_1\alpha\right]\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)\\ & -2\left[(1-\phi+\phi A)(\alpha'\sqrt{z}+\beta')+\phi B_2\alpha'\right]\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right).\end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned}&U=2\rho c_f(1-\phi+\phi A)(\alpha-\alpha'), \qquad V=2\rho c_f\left[(1-\phi+\phi A)(\beta-\beta')+\phi(\alpha B_1-\alpha' B_2)\right],\\ &S=4\rho c_f(1-\phi+\phi A)\alpha \qquad T=2\rho c_f\left[2(1-\phi+\phi A)\beta+\phi B_1\alpha\right], \qquad S'=4\rho c_f(1-\phi+\phi A)\alpha',\\ &T'=2\rho c_f\left[2(1-\phi+\phi A)\beta'+\phi B_2\alpha'\right].\end{aligned}$$

Nous obtenons pour $R(z)$ et $T(z)$ les expressions suivantes

$$\begin{aligned}&R(z)=-1+\\ &\frac{1}{1-U\sqrt{z}-V+(s\sqrt{z}+T)\sum_{n\geq 0}(-1)^n\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)-(S'\sqrt{z}+T')\sum_{n\geq 0}(-1)^n\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)}\\ &+\frac{1}{1-U\sqrt{z}-V+(s\sqrt{z}+T)\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)-(S'\sqrt{z}+T')\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&T(z)=\\ &\frac{1}{1-U\sqrt{z}-V+(s\sqrt{z}+T)\sum_{n\geq 0}(-1)^n\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)-(S'\sqrt{z}+T')\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)}\\ &-\frac{1}{1-U\sqrt{z}-V+(s\sqrt{z}+T)\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)-(S'\sqrt{z}+T')\sum_{n\geq 0}\exp\left(-(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)}.\end{aligned}$$

En prenant $z\to\infty$, nous obtenons :

$$\frac{S\sqrt{z}+T}{1-U\sqrt{z}-V}\sim\frac{-S}{U},$$

après de simples calculs, nous obtenons les expressions suivantes des coefficients de réflexion et de transmission dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned}R(z)&=-1+\frac{2}{1-V-U\sqrt{z}}\left(1+\frac{1}{U}\sum_{n\geq 0}\left(S'\exp\left(-2(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)-S\exp\left(-2(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)\right)\right),\\ T(z)&=\frac{2}{U\left(1-V-U\sqrt{z}\right)}\sum_{n\geq 0}\left(S\exp\left(-2(n+1)l\sqrt{\lambda_1}\right)-S'\exp\left(-2(n+1)l\sqrt{\lambda_2}\right)\right).\end{aligned}$$

Nous allons prendre la transformée de Laplace inverse des coefficients de réflexion et de transmission. Nous avons

$$P(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{1-V-U\sqrt{z}}\right] = -\frac{1}{U}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}\int_0^\infty \exp\left(-\frac{u^2}{4t} - vu\right)du,$$
$$P(t) = -\frac{1}{U}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}} - v\exp\left(v^2 t\right)\operatorname{Erfc}(v\sqrt{t})\right),$$

où $v = \frac{V-1}{U}$ et Erfc est la fonction erreur. Pour une constante positive k.
La transformée de Laplace inverse de $\exp\left(-k\sqrt{\lambda_i}\right)$, où k est une constante positive, donne la fonction de Green du milieu pour le mode i :

$$G_i(t,k) = \mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-k\sqrt{\lambda_i}\right)\right] = \begin{cases} 0 \qquad if \qquad 0 \le t \le k\sqrt{C_i} \\ \\ \Xi_i(t) + \Delta_i \int_0^{t-k\sqrt{C_i}} H_i(t,\xi)d\xi \quad \text{if} \quad t \ge k\sqrt{C_i} \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned}
&\Xi_i(t) = \frac{D_i}{4C_i\sqrt{\pi}}\frac{1}{(t-k\sqrt{C_i})^{3/2}}\exp\left(-\frac{D_i^2k^2}{16C_i(t-k\sqrt{C_i})}\right)\\
&H_i(t,\xi) = \frac{1}{4\pi^{3/2}\xi^{3/2}}.\frac{h_i(t,\xi)}{r_i(t,\xi)},\\
&r_i(t,\xi) = \left[(t-\xi)^2 - K^2C_i\right]^{1/2},\\
&h_i(t,\xi) = \int_{-1}^{1}\left[2k(t,\xi,\mu)-1\right]\exp\left(-k(t,\xi,\mu)\right)\frac{\mu d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}},\\
&k(t,\xi,\mu) = \left(\Delta_i\mu r_i(t,\xi) + D_i(t-\xi)/C_i\right)^2/16\xi,\\
&\Delta_i = \left(D_i^2 - 4C_iG_i\right)/C_i^2
\end{aligned}$$

Les opérateurs de réflexion et de transmission sont donnés par

$$\tilde{R}(t) = -\delta(t) + 2P(t) * \left(\delta(t) + \frac{1}{U}\sum_{n\ge 0}\left(S'G_2(t,2(n+1)l) - SG_1(t,2(n+1)l)\right)\right)$$
$$\tilde{T}(t) = \frac{2}{U}\sum_{n\ge 0}P(t) * \left(SG_1(t,2(n+1)l) - S'G_2(t,2(n+1)l)\right).$$

Références

[1] M. Abramowitz et T.A. Stegun, "Handbook of mathematical functions", National bureau of standards, U.S. Governement Printing Office, Washington, DC. Chap. 6, p. 358 (1968).

[2] J.F. Allard and Y. Champoux, "New empirical equations for sound propagation in rigid frame fibrous materials", *J. Acoust. Soc. Am.*, **91**, p. 3346, (1992).

[3] J.F. Allard, "Propagation of Sound in Porous Media : Modeling Sound Absorbing Materials", Chapman and Hall, London (1993).

[4] N. Akashi, J. Kushibiki et F. Dunn, "Acoustic properties of egg yolk and albumen in the frequency range 20-400 MHz", *Journal of Acoustical Society of America* **102**, p. 3774, (1997).

[5] R.B. Ashman and J.Y. Rho, "Elastic Modulus of Trabecular Bone Material", *J. Biomech.* **21**, p. 177 (1988).

[6] B.A. Auld, Acoustic fields and waves in solids. Chap. 3 Vol. 1. Second edition. Florida. Krieger Publishing Company, Malabar, (1990).

[7] J.L. Auriault, L. Borne and R. Chambon, "Dynamics of porous saturated media, checking of the generalized law of Dracy", *J. Acoust. Soc. Am.*, **77**, p. 1641, (1985).

[8] C. Ayrault, A. Moussatov, B. Castagnède and D. Lafarge, "Ultrasonic characterization of plastic foams via measurements with static pressure variations", *Applied Physics Letters* **74** 3224, (1999).

[9] J.C. Bamber Physical principles of medical ultrasonics, p. 118 C. R. Hill Wiley, Chischester (1986).

[10] L.L. Beranek, "Acoustic impedance of porous materials", J. Acoust. Soc. Am., **13**, p. 248 (1942).

[11] Y.H. Berthelot, "Surface acoustic impedance and causality", *Journal of the Acoustical Society of America*, **109**, p. 1736 (2001).

[12] D.A. Bies and C.H. Hansen, "Flow resistance information for acoustical design", *Appl. Acoust.* **13**, p. 357 (1980).

[13] M.A. Biot, "The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range", *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, p. 168 (1956).

[14] M.A. Biot, "The theory of propagation of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Higher frequency range", *J. Acoust. Soc. Am.* **28**, p. 179 (1956).

[15] M. A. Biot and D.G. Willis, "The elastic coefficient of the theory of consolidation", *J. Appl. Mechanics*, **24**, p. 594,(1957).

[16] H.W. Bode, "Network analysis and feedback amplifier design", Chap. 14. Van Nostrand, New-York (1945).

[17] C. Boutin, G. Bonnet and P.Y. Bard, "Green's functions and associated sources in infinite and stratified poroelastic media", *Geophys. J. R.astr. Soc.*, **90**, p. 521, (1987).

[18] R. N. Bracewell, "The Fourrier transform and its applications", McGraw-Hill, New-York (1978).

[19] R. Burridge and J.B. Keller, "Poroelasticity equations derived from microstructure", *J. Acoust. Soc. Am.*, **70**, p. 1140, (1981).

[20] J.M. Carcione and G. Quiroga-Goode, "Full frequency-range transient solution for compressional waves in a fluid-saturated viscoacoustic porous medium", *Geophys. Prospect.,***44**, p. 99, (1996).

[21] J.M. Carcione, *Wave fields in real media : wave propagation in anisotropic, anelastic and porous media*, (K. Helbig and S. Treitel, Pergamon, (2001).

[22] Y. Champoux, J.F. Allard, "Dynamic tortuosity and bulk modulus in air-saturated porous media", *J. Appl. Phys*, **70**, p. 1975, (1991).

[23] Y. Champoux, M.R. Stinson and G.A. Daigle, "Air-based system for the measurement of porosity", *J. Acoust. Soc. Am.*, **89**, p. 910 (1991).

[24] W. Chen and S. Holm, "Modified Szabo's wave equation models for lossy media obeying frequency power law", *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, p. 3024 (2003).

[25] N.P. Chortiros, "An inversion for Biot parameters in water-saturated sand", *J. Acoust. Soc. Am.* **112** (5), p. 1853 (2002).

[26] C. Depollier, Z.E.A. Fellah et M. Fellah "Propagation of transient acoustic signals in layered media : fractional equations for scattering operators", J. Non Linear Dynamics, **38**, p. 181, (2005).

[27] Z.E.A Fellah and C.Depollier, "Transient acoustic wave propagation in rigid porous media : A time domain approach", *J. Acoust. Soc. Am.* **107**. (2), p.683, (2000).

[28] Z.E.A. Fellah, M. Fellah, W. Lauriks, C. Depollier, Y. Angel et J.Y. Chapelon, " Solution in time domain of ultrasonic propagation equation in porous material", *Wave motion*, **38**, p. 151, Juin 2003.

[29] Z.E.A. Fellah, C. Depollier et M. Fellah, "Direct and inverse scattering problem in porous material having a rigid frame by fractional calculus based method", *J. Sound. Vib.* 244 (2), p. 3659 (2001).

[30] Z.E.A. Fellah, C. Depollier, M. Fellah, W. Lauriks et J.Y. Chpaleon, "Influence of dynamic tortuosity and compressibility on the propagation of transient waves in porous media", *Wave Motion.* 41 (2) p. 145, (2005). Article classé 12ème au TOP 25 de Wave Motion.

[31] Z.E.A. Fellah, M. Fellah, W. Lauriks et C. depollier, " Direct and inverse scattering of transient acoustic waves by a slab of rigid porous material.", *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (1), p. 61, (2003).

[32] Z.E.A. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, M. Fellah, C. Depollier et W. Lauriks, "Ultrasonic characterization of porous materials : Inverse problem" accepté pour publication au J. Sound and Vib. (2006).

[33] Z.E.A. Fellah, S. Berger, W. Lauriks, C. Depollier et M. Fellah, " Measurement of the porosity of porous materials having a rigid frame via reflected waves : A time domain analysis with fractional derivatives.", *J. App. Phys*, **93**, p. 296, (2003).

[34] Z.E.A. Fellah, S. Berger, W. Lauriks, C. Depollier et J.Y. Chapelon, "Inverse problem in air-saturated porous media via reflected waves", *Rev. Sci. Inst.* **74** (5), p. 2871, (2003).

[35] Z.E.A. Fellah, S. Berger, W. Lauriks, C. Depollier, C. Aristégui et J. Y. Chapelon, "Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence", *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (5), p. 2424 (2003).

[36] Z.E.A. Fellah, S. Berger, W. Lauriks, C. Depollier, P. Trompette et J.Y. Chapelon, "Ultrasonic measuring of the porosity and tortuosity of air- saturated random packings of beads", *J. Appl. Phys.* **93**, p. 9352 (2003).

[37] Z.E.A. Fellah, F. Mitri, C. Depollier, S. Berger, W. Lauriks et J.Y. Chapelon, "Characterization of porous materials having a rigid frame via reflected waves", *J. Appl. Phys.* **94**, p. 7914, (2003).

[38] Z.E.A. Fellah, C. Depollier, S. Berger, W. Lauriks, P. trompette et J.Y. Chapelon, "Detemination of transport parameters in air saturated porous materials via ultrasonic reflected waves", *J. Acoust. Soc. Am.* **113** (5), 2003.

[39] Z.E.A. Fellah, C. Depollier et M. Fellah, " Application of fractional calculus to the propagation in rigid porous materials : Validation via ultrasonic measurements ", *Acta Acustica*

united with Acustica, **87**, p. 34, (2002). Article classé 10ème parmis les articles les plus cites d'Acta Acustica de 2000 à 2006.
$http://www.eaa-fenestra.org/Products/ActaAcustica/most_cited/$

[40] Z.E.A. Fellah, C. Depollier et M. Fellah " Direct and inverse scattering problem in porous material having a rigid frame by fractional calculus based method ", *J. Sound. Vib.* **244** (2), p. 3659, (2001).

[41] Z.E.A. Fellah, A. Wirgin, M. Fellah, C. Depollier, N. Sebaa, W. Lauriks, "A time domain model of transient acoustic wave propagation in double-layered porous media." *J. Acoust. Soc. Am.* **118** (2) p. 661, (2005).

[42] Z.E.A. Fellah, M. Fellah, N. Sebaa, W. Lauriks et C. Depollier "Measuring permeability of porous materials at low frequency range via acoustic transmitted waves, *J. Acoust. Soc. Am.* **119** (4) p. 1926, (2006).

[43] N. Sebaa, Z.E.A. Fellah, M. Fellah,W. Lauriks et C. Depollier, "Measuring Flow Resistivity of Porous Material Via Acoustic Reflected Waves". **J. Appl. Physics**. **98**, (2005).

[44] Z.E.A. Fellah, S. Berger, W ; Lauriks et C. Depollier, " "Verification of Kramers-Kroning relationships in porous materials having a rigid frame ", *J. Sound. Vib.* **270**, p. 865, (2004).

[45] Z.E.A. Fellah, J.Y. Chapelon, S. Berger, W. Lauriks et C. Depollier, "Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone : Application of Biot theory", *J. Acoust. Soc. Am.* 116 (1), 61-73, Juillet 2004. Sélectionné pour publication dans le Journal of Biological Physics Research (15 Juillet 2004).

[46] V.L. Ginzberg, "Concerning the general relationship between absorption and dispersion of sound waves", *Sov. Phys. Acoust.* **1**, p. 32 (1955).

[47] M. Gitterman et V. Halpern, "Qualitative analysis of physical problems", Chap. 4. Academic Press, New York (1981).

[48] I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, Table of Integrals, Series, and Products, 4th Edition, Academic Press, New York, 1965.

[49] E. A. Guillemin, " Theory of linear physical systems", Chap. 18. John Wiley and sons, New-York (1963).

[50] A. Hanyga, V.E. Rok, "Wave propagation in micro-heterogeneous porous media : a model based on an integro-differential wave equation", *J. Acoust. Soc. Am.* **107**, p. 2965, (2000).

[51] P. He, "Simulation of ultrasound pulse propagation in lossy media obeying a frequency power law", *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control* **45**, p. 114 (1998).

[52] C.W. Horton, " Dispersion relationships in sediments and sea water", *Journal of the Acoustical Society of America*, **55**, p. 547 (1974).

[53] A. Hosokawa and T. Otani, "Ultrasonic wave propagation in bovine cancellous bone" J. Acoust. Soc. Am. **101**, p. 558 (1997).

[54] M.S. Hygues, S.M. Handley et J.G. Miller, "Nearly local Kramers-Kröning relations applied to porous epoxy", *Proceedings of the 1987 IEEE Ultrasonics Symposium, IEEE New-York*, p. 1041 (1987).

[55] J.D. Jakson, "Classical electrodynamics", Wiley New-York second edition (1975).

[56] D. L. Johnson, J. Koplik, and R. Dashen, "Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated porous media", *J. Fluid. Mech.* **176**, p. 379, (1987).

[57] D.L. Johnson, "Recent developements in the acoustic properties of porous media in Proc. Int. School of Physics Enrico Fermi", Cours XCIII ed.D. Sette North Holland Publishing Co. Amsterdam, p. 255, (1986).

[58] D.L. Johnson, T.J. Plona and H. Kojima, "Probing porous media with first and second sound. II. Acoustic properties of water-saturated porous media", *J. Appl. Phys.* **76** (1), p. 115 (1994).

[59] G. Kirchhoff, "Ueber die Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung", *Annalen der Physik Leipzig* **134**, 177-93 (1868) (English translation 1974 in : R. B. Lindsay, ed., Physical Acoustics, Downden, Hutchinson and Ross, Stroudsburg).

[60] L.E. Kinsler, A.R. Frey, A.B. Coppens et J.V. Sanders, "Fundamentals of Acoustics". New York, Wiley. (1982).

[61] H. A. Kramers, "La diffusion de la lumière par les atomes", *Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, Como*, **2**, p. 545 (1927).

[62] R. D. L. Krönig, "On the theory of dispersion of X-rays" *Journal of the Optical Society of America*, **12**, p. 547 (1926).

[63] D. Lafarge, "Propagation du son dans les matériaux poreux à structure rigide saturés par un fluide viscothermique. Thèse de l'Université du Maine (1993).

[64] D. Lafarge, P. Lemarnier, J. F. Allard and V. Tarnow, "Dynamic compressibility of air in porous structures at audible frequencies" *Journ. Acoust. Soc. Am*, (102),**4**, 1995,(1996).

[65] Lagarias, J.C., J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, "Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions," *SIAM Journal of Optimization*, **9**, p. 112 (1998).

[66] L. Landau and E. Lifchitz, "Mécanique de fluides", *Editions Mir*, Moscou, (1971).

[67] W. Lauriks, J. Thoen, I. Van Asbroeck, G. Lowet and G. Vanderperre, "Propagation of ultrasonic pulses through trabecular bone" *J. Phys. Coll.* (Paris) **4**, p. 1255 (1994).

[68] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, N.R. Brown, M. Melon , B. Castagnède, "Determination of viscous and thermal characteristic lengths of plastic foams by ultrasonic measurements in helium and air" ,*J. Appl. Phys.* **80**, p. 2009, (1996).

[69] P. Leclaire, L. Kelders, W. Lauriks, C. Glorieux, and J. Thoen, ŞDetermination of the viscous characteristic length in air-filled porous materials by ultrasonic attenuation measurements,Ť *J. Acoust. Soc. Am.* **99**, p. 1944, (1996).

[70] R.W. Leonard, "Simplified porosity measurements", *J. Acoust. Soc. Am.*, **20**, p. 39 (1948).

[71] M.J. Lighthill, "Introduction to Fourier analysis and Generalised functions", Chap.3 , Cambridge University Press, Cambridge (1962).

[72] M.L. McKelvie, "Ultrasonic propagation in Cancellous bone, PhD thesis, Hull, UK, University of Hull,(1988).

[73] M.L. Mckelvie and S.B. Palmer, "The interaction of ultrasound with cancellous bone" *Phys. Med. Biol.* **36**, No 10, p. 1331 (1991).

[74] J. Mobley, K.R. Waters, C.S. Hughes, C.S. Hall, J.N. Marsh, G.H. Brandenburger et J. G. Miller 2000, "Kramers-Kronig relations applied to finite bandwidth data from suspensions of encapsulated microbubbles", *Journal of the Acoustical Society of America* **108**, p. 2091(2000).

[75] A. Moussatov, C. Ayrault and B. Castagnède, "Porous material characterization-ultrasonic method for estimation of tortuosity and characteristic length using a barometric chamber", *Ultrasonics* **39** 195, (2001).

[76] A.I. Nachman, J.F. Smith et R.C. Waag, "An equation for acoustic propagation in inhomogeneous media with relaxation losses", *Journal of Acoustical Society of America*, **88**, (1990).

[77] B.K. Novikov, O.V. Rudenko et V.I. Timoshenko, "Nonlinear underwater acoustics". AIP, New York, English translation by R. T. Beyer. (1987).

[78] A.N. Norris, "On the viscodynamic operator in Biot's equations of poroelasticity", *J. Wave Mat. Interact.*, **1**, p. 365, (1986).

[79] V. Norton and J. C. Novarini, "Including dispersion and attenuation directly in time domain for wave propagation in isotropic media", *J. Acoust. Soc. Am.* **113**, p. 3024 (2003).

[80] H.M. Nussenzveig, "Causality and dispersion relations", p. 3, (1972). Academic press, New York.

[81] M. O'Donnel, E.T. Jaynes et J.G. Miller, "General realtionships between ultrasonic attenuation and dispersion" *Journal of the Acoustical Society of America*, **63**, 1935-1937 (1978).

[82] M. O'donnel, E.T. Jaynes et J.G. Miller, "Kramers-Kröning relationship between ultrasonic attenuation and phases velocity", *Journal of the Acoustical Society of America*, **69**, p. 696 (1978).

[83] A. V. Oppenhein et R.W. Shafer, "Discrete time signal processing", Chap. 10. Prentice-Hall, Englewood Cliffs. NJ (1989).

[84] R.A.C. Paley et N. Wiener 1934, "Fourier transforms in the complex domain", *American Mathematical Society, colloque Publication*, **19**, p. 116 (1934).

[85] A. Papoulis, "The Fourrier integral and its applications", Chap. 10. Reissue Edition, McGraw-Hill, New-York (1962).

[86] E. Pfaffelhuber, "Generalised impulse response and causality", *IEEE Transactions on Circuit Theory* **CT-18**, p. 218 (1971).

[87] A.D. Pierce, "Acoustics, an introduction to its physical priciples and applications", Chap. 10. Acoustical Society of America, Woodbury, New York (1989).

[88] T.J. Plona, "Observation of a second bulk compressional wave in a porous medium at ultrasonic frequencies", *App. Phys. Lett.* **36** (4), p. 259, (1980).

[89] S. R. Pride, F. D. Morgan and A. F. Gangi, "Drag forces of porous media acoustics.", *Phys. Rev. B*, **47**, p. 4964, (1993).

[90] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, "*Fractional Integrals and Derivatives Theory and Applications*" Gordon and Breach Publishers, Amsterdam, (1993).

[91] M.E. Schafer et P.A. Lewin, "Use of time spectrometry in fluid attenuation measurement", *Proceedings of the 1989 IEEE Ultrasonics Symposium, IEEE New-York*, p. 973 (1989).

[92] N. Sebaa, Z.E.A. Fellah, M. Fellah, E. Ogam, A. Wirgin, F.G. Mitri, W. Lauriks et C. Depollier "Ultrasonic characterization of human cancellous bone using Biot theory : Inverse problem" *J. Acoust. Soc. Am.* **120** (4) p. 1816, (2006).

[93] T.L. Szabo, "Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law", *J. Acoust. Soc. Am.* **96**, p. 491, (1994).

[94] T. L. Szabo, "Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency law", *Journal of the Acoustical Society of America* **96**, p. 491, (1993).

[95] T.L. Szabo, Causal theories and data for acoustic attenuation obeying a frequency power law, *Journal of Acoustical Society of America* **97**, p. 14 (1995).

[96] E.C. Titchmarsh, "Introduction to the theory of Fourier integrals", Chap. 5. Oxford : Clarendon press, London, (1948).

[97] J. S. Toll, "Causality and the dispersion relations : logical fundations", *Physical Review*, **104**, p. 1760 (1927).

[98] R.L. Trousil, K.R. Waters et J.G. Miller, "Experimental validation of the use of Kramers-Kronig relations to eliminate the phase sheet ambiguity in broadband phase spectroscopy", *Journal of the Acoustical Society of America* **109**, p. 2236 (2001).

[99] K.R. Waters, M.S. Hughes, G.H. Brandenburger et J.G. Miller, "On a time-domain representation of the Kramers-Kroning dispersion relations", *Journal of the Acoustical Society of America* **108**, p. 2114 (2000).

[100] K.R. Waters, M.S. Hughes, J. Mobley, G.H. Brandenburger et J.G. Miller, " On the applicability of Kramers-Kronig relations for ultrasonic attenuation obeying a frequency power law", *Journal of the Acoustical Society of America* **108**, p. 556 (2000).

[101] R.L. Weaver et Y.H. Pao, "Dispersion relation for linear wave propagation in homogeneous and inhomogeneous media, *Journal of Mathematical Physics* **22**, p. 1909 (1981).

[102] D.J. Wingham 1985, " The dispersion of sound in sediment", *Journal of the Acoustical Society of America* **78**, p. 1757(1985).

[103] C. Zwikker et C. W. Kosten, “Sound Absorbing materials”, Elsevier (1949).

J Production Scientifique du Candidat et Enseignement

J.1 Journaux internationaux à comité de lecture

1. **Z.E.A. FELLAH** et C. DEPOLLIER, " Transient acoustic wave propagation in rigid porous media : A time domain approach ", J. Acoust. Soc. Am. 107 (2), 683-689, Février 2000.
2. **Z.E.A. FELLAH** et C. DEPOLLIER, " On the propagation of acoustic pulses in porous rigid media : A time domain approach ", J. Comp. Acoust. 9 (3), 1163-1173, Septembre 2001.
3. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Direct and inverse scattering problem in porous material having a rigid frame by fractional calculus based method ", J. Sound. Vib. 244 (2), 3659-3666, Juillet 2001.
4. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Application of fractional calculus to the propagation in rigid porous materials : Validation via ultrasonic measurements ", Acta Acustica united with Acustica, 87, 34-40, 2002. Article classé 10ème parmis les articles les plus cites d'Acta Acustica de 2000 à 2006.
$http : //www.eaa - fenestra.org/Products/ActaAcustica/most_cited/$
5. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Measurement of the porosity of porous materials having a rigid frame via reflected waves : A time domain analysis with fractional derivatives. ", J. App. Phys, 93, 296-303, Janvier 2003.
6. **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, " Direct and inverse scattering of transient acoustic waves by a slab of rigid porous material.", J. Acoust. Soc. Am. 113 (1), 61-73, Janvier 2003.
7. **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH , W. LAURIKS , C. DEPOLLIER, Y. ANGEL et J.Y. CHAPELON, " Solution in time domain of ultrasonic propagation equation in porous material", Wave motion, 38, 151-163, Juin 2003.
8. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER et J.Y. CHAPELON, "Inverse problem in air-saturated porous media via reflected waves", Rev. Sci. Inst. 74 (5), 2871-2879, Mai 2003.
9. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER, C. ARISTEGUI et J.Y. CHAPELON, "Measuring the porosity and the tortuosity of porous materials via reflected waves at oblique incidence", J. Acoust. Soc. Am. 113 (5), 2424-2433 Mai 2003.
10. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS , C. DEPOLLIER, P. TROMPETTE et J.Y. CHAPELON, "Ultrasonic measuring of the porosity and tortuosity of air- saturated random packings of beads", J. Appl. Phys. (93), 9352-9359, Juin 2003.
11. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, S. BERGER, W. LAURIKS, P. TROMPETTE et J.Y. CHAPELON, "Detemination of transport parameters in air saturated porous materials via ultrasonic reflected waves", J. Acoust. Soc. Am. 113 (5), Novembre 2003.
12. **Z.E.A. FELLAH**, F. MITRI, C. DEPOLLIER, S. BERGER, W. LAURIKS, J.Y. CHAPELON, "Characterization of porous materials having a rigid frame via reflected waves", J. Appl. Phys. 94 (12), 7914-7924, Décembre 2003.
13. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Verification of Kramers-Kroning relationships in porous materials having a rigid frame ", J. Sound. Vib. 270, 865-885, Mars 2004.
14. F.G. MITRI, **Z.E.A. FELLAH** et J.Y. CHAPELON, " Acoustic backscattering form-function of absorbing cylinder targets ", J. Acoust. Soc. Am. 115 (4), 1411-1413, Avril 2004.

15. F. G. MITRI, **Z.E.A. FELLAH**, E. CLOSSET, P. TROMPETTE et J.Y. CHAPELON, "Determination of object resonances by vibro-acoustography and their associated modes ", Ultrasonics, 42, 537-543, Avril 2004.
16. **Z.E.A. FELLAH**, J.Y. CHAPELON, S. BERGER, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone : Application of Biot theory", J. Acoust. Soc. Am. 116 (1), 61-73, Juillet 2004. Sélectionné pour publication dans le Journal of Biological Physics Research (15 Juillet 2004).
17. C. DEPOLLIER, **Z.E.A. FELLAH** et M. FELLAH, "Propagation of transient acoustic signals in layered media : fractional equations for scattering operators", J. Non Linear Dynamics, 38, 181-190, 2005.
18. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, M. FELLAH, W. LAURIKS et J.Y. CHAPELON, "Influence of dynamic tortuosity and compressibility on the propagation of transient waves in porous media", Wave Motion. 41 (2) 145-161, Février 2005. Article classé 12ème au TOP 25 de Wave Motion.
19. **Z.E.A. FELLAH**, A. WIRGIN, M. FELLAH, C. DEPOLLIER, N. SEBAA, W. LAURIKS, "A time domain model of transient acoustic wave propagation in double-layered porous media." J. Acoust. Soc. Am. 118 (2) 661-670, Aout 2005
20. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Measuring Flow Resistivity of Porous Material Via Acoustic Reflected Waves". J. Appl. Physics. 98, 2005.
21. **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, N. SEBAA, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Measuring permeability of porous materials at low frequency range via acoustic transmitted waves, J. Acoust. Soc. Am. 119 (4) 1926-1928, 2006.
22. F.G. MITRI and **Z.E.A. FELLAH**, " Theoretical calculation of the acouctic radiation force on layered cylinders in a plane standing wave - comparison of near and far field solutions", Journal of Physics A : Mathematical and General, 39 6085-6096, 2006.
23. M. FELLAH, **Z.E.A. FELLAH** and C. DEPOLLIER, "Transient wave propagation in inhomogeneous porous materials : Application of fractional calculus." Signal Processing 86 (10) 2658-2667, 2006.
24. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER and W. LAURIKS, "Application of fractional calculus to ultrasonic wave propagation in human cancellous bone", Signal Processing (10) 2668-2677, 2006.
25. F.G. MITRI et **Z.E.A. FELLAH**, "Amplitude-modulated acoustic radiation force experienced by elastic and viscoelastic spherical shells in progressive waves", Ultrasonics, 44 (3) 287-296, 2006.
26. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, E. OGAM, A. WIRGIN, F. MITRI et W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Ultrasonic characterization of human cancellous bone using Biot theory : Inverse problem" J. Acoust. Soc. Am. 120 (4) 1816- 1824, 2006.
27. **Z.E.A. FELLAH**, F.G. MITRI, M. FELLAH, E. OGAM et C. DEPOLLIER, "Ultrasonic characterization of porous materials : Inverse problem", J. Sound and Vib, (302), 746-759, 2007.
28. F. MITRI et **Z.E.A. FELLAH**, "New expressions for the radiation force function of spherical targets in stationary and quasi-stationary waves", Arch. Appl. Mech. DOI 10.1007/s00419-006-0073-1, 2007.
29. F. MITRI et **Z.E.A. FELLAH**, "Acoustic radiation force on coated cylinders in plane progressive waves", J. Sound and Vib. (308), 190-200, 2007.

30. L. DERYCK, J.P. GROBY, P. LECLAIRE, A. WIRGIN, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER and **Z.E.A. FELLAH**, Acoustic wave propagation in a macroscopically inhomogeneous porous medium saturated by a fluid, Appl. Phys. Lett, (90), 181901, 2007.
31. E. OGAM, A. WIRGIN, **Z.E.A. FELLAH** et Y. XU, "Experimental and theoretical non-linear dynamic response of intact and cracked bone-likespecimens with various b boundary conditions",J. Vib. Acoust, (129), 541, 2007.
32. **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, E. OGAM, N. SEBAA, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, Measuring permeability of porous materials at low frequency range via acoustic transmitted waves", Rev. Sci. Inst, (78), 114902- 10, 2007.
33. L. DERYCK, W. LAURIKS, **Z.E.A. FELLAH**, A. WIRGIN , J.P. GROBY, P. LECLAIRE, C. DEPOLLIER, Acoustic wave propagation and internal fields in rigid frame macroscopically inhomogeneous porous media, J. Appl. Phys, (102), 024910-11, 2007.

J.2 Conférences invitées internationales avec publication dans des Actes

1. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, M. FELLAH, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, " Direct and inverse scattering of transient acoustic waves by a slab of rigid porous material ", Forum Acusticum, Sevilla, Espagne, 16-20 Septembre 2002. CD-ROM official publication, ISBN : 84-87985-06-8.
2. **Z.E.A. FELLAH**, J.Y. CHAPELON, S. BERGER, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, "Ultrasonic wave propagation in human cancellous bone : Application of Biot theory", 148th Meeting of the Acoustical Society of America, San Diego California, 15-19 Novembre 2004.

J.3 Congrès internationaux avec publication dans des Actes

1. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, A. AKNINE et A. BRESINI, " Scattering of acoustic waves by porous media having a rigid frame", 16th International Congress on Acoustics and 135th Meeting of the Acoustical Society of America, Editors : Patricia. K. Kuhl and Laurence A. Crum, University of Washington, Seattle, WA. 2321-2313, 1998.
2. **Z.E.A. FELLAH** et C. DEPOLLIER, " Propagation of an ultrasonic impulse in porous media having a rigid frame ", Forum Acusticum, Berlin, J. Acoust. Soc. Am.105, 1384, CD-ROM ASA Berlin 1999.
3. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Propagation of ultrasonic pulses in porous elastic solids : A time domain analysis with fractional derivatives ", Fifth International Conference on Mathematical and Numerical aspects of Waves propagation, 10-14 Juillet, SIAM-INRIA, 73-78, 2000. Edited by Alfredo Bermudez et al., Universidad de Santiago de Compostela, Espagne.
4. G. GONON, **Z.E.A. FELLAH** et C. DEPOLLIER, " Filtering in fractional Fourier domain : Application to the Biot waves ", International Conference on Signal Processing and Communications, 19-22 Septembre, Marbella, Espagne, Signal Processing and Communications, SPC, IASTED/ACTA Press, 303-307, 2000.
5. **Z.E.A. FELLAH** et C. DEPOLLIER, " Propagation acoustique dans les poreux : analogies électromagnétiques ", 16ème Colloque International Optique Hertzienne et Diélectriques, (OHD), 85-88, 3-4 Septembre 2001. Editeurs : Gilles Silly, Jean-Yves Buzaré, Université du Maine.
6. S. BERGER, **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, B. CASTAGNEDE et M. FELLAH, " An approach to direct and inverse time domain scattering of acoustic waves from rigid porous materials ", 5th International Student Conference on Electrical Engineering, May 24, 2001, Prague, Czech Republic.

7. S. BERGER, **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER et B. CASTAGNEDE , " Sound Transmission Through Layered Porous Media and Reciprocity ", 17th International congress on Acoustics, Rome, ICA CD-ROM, Septembre 2-7, 2001.
8. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Scattering of acoustic waves by inhomogeneous porous media having a rigid frame ", 17th International congress on Acoustics, Rome, ICA CD-ROM, Septembre 2-7, 2001.
9. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, " Direct and inverse scattering problems in porous elastic media : a time domain analysis with fractional derivatives ", 2nd Biot Conference on Poromechanics, Grenoble, France, Août 26-28, 651-656, 2002, Poromechanics II, J. L. Auriault et al., Editors, A. A. Balkema Publishers.
10. **Z.E.A. FELLAH**, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, " Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law : application to the porous materials ", AMRTMA conference, Fréjus, France, 18-22 June, in A. Wirgin (ed.) Acoustics, Mechanics and the related topics of Mathematical Analysis, World scientific, Singapour, 2002.
11. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, M. FELLAH, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER, " Direct and Inverse scattering of transient acoustic waves by slab of porous material ", 2nd Instrumentation and Measurement in Petroleum Applications Conference IMPAC-2002, October 21-22, 2002 - Boumerdès, Algeria.
12. C. ARISTEGUI, Y.C. ANGEL et **Z.E.A. FELLAH** "Using coherent waves to evaluate dynamic material properties", Ultrasonics World Congress Proceedings, 7-10 Septembre, 463-466, WCU 2003.
13. **Z.E.A. FELLAH**, S. BERGER, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER et J.Y. CHAPELON, "Ultrasonic wave propagation in human cacellous bone : Application of Biot theory", Congrès commun CFA/DAGA (Congrès Français d'Acoustique et le Congrès Allemand d'Acoustique), Strasbourg 22-25 Mars 2004.
14. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, M. FELLAH, W. LAURIKS, C. DEPOLLIER et J.Y. CHAPELON, "A time domain characterization of porous materials at audio frequency". Congrès commun CFA/DAGA (Congrès Français d'Acoustique et le Congrès Allemand d'Acoustique), Strasbourg 22-25 Mars 2004.
15. F.G. MITRI, S. CHEN, **Z.E.A. FELLAH**, P. TROMPETTE et J.Y. CHAPELON, " The dynamic radiation force on cylinder : theory and simulations ". Congrès commun CFA/DAGA (Congrès Français d'Acoustique et le Congrès Allemand d'Acoustique), Strasbourg 22-25 Mars 2004.
16. **Z.E.A. FELLAH**, N. SEBAA, W. LAURIKS et C DEPOLLIER, "Characterization of porous materials at audio frequency", IEEE International Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control, pp 658-661,Montréal, 24-27 Aout 2004.
17. N. SEBAA, **Z.E.A FELLAH**, W. LAURIKS and C. DEPOLLIER, "Application de la théorie de Biot sur un tissu biologique', 17ème congrès Français de Mécanique, Troyes, Septembre 2005.
18. N. SEBAA, **Z.E.A FELLAH**, W. LAURIKS and C. DEPOLLIER, "Direct and Inverse scattering problems in cancelous bone : Application of Biot theory', 3rd Biot Conference on Poromechanics, May 2005.
19. L. DERYCK, **Z.E.A FELLAH**, W. LAURIKS, A. WIRGIN and C. DEPOLLIER, "Acoustical characterization of 1D non homogeneous lossless porous materials", International Conference Waves 2005, June 20-24, 2005.
20. L. DERYCK, **Z.E.A FELLAH**, W. LAURIKS, A. WIRGIN and C. DEPOLLIER, "Caractérisation acoustique de matériaux poreux inhomogènes : première approche du problème inverse dans le domaine temporel ", 17ème congrès Français de Mécanique, Troyes, Septembre 2005.

21. L. DERYCK, **Z.E.A. FELLAH**, A. WIRGIN, C. DEPOLLIER and M. FELLAH, "Characterization of acoustical parameters in 1D and 2D heterogeneous porous material", Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, December 2005.
22. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, W. LAURIKS and C. DEPOLLIER, "Ultrasonic characterization of cancellous bone", Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, December 2005.
23. **Z.E.A. FELLAH**, E. OGAM, M. FELLAH, C. DEPOLLIER and W. LAURIKS, "Characterization of air saturated porous materials", Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, December 2005.
24. E. OGAM, A. WIRGIN, **Z.E.A. FELLAH**, J.P. GROBY, W. LAURIKS, J.Y. CHAPELON, C. DEPOLLIER, L. DERYCK, R. GILBERT, N. SEBAA, T. SCOTTI, and Y. XU, "Recovery of the mechanical parameters of long bones from their vibroacoustic impulse response", Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, December 2005.
25. J.-P. GROBY, E. OGAM, A. WIRGIN, **Z.E.A. FELLAH**, W. LAURIKS, J.-Y. CHAPELON, C. DEPOLLIER, L. DERYCK, R. GILBERT, T. SCOTTI, N. SEBAA, and Y. XU, "2D Mode excitation in a porous slab saturated with air in the high frequency approximation, Symposium on the Acoustics of Poro-Elastic Materials, December 2005.
26. J.-P. GROBY, C. TSOGKA, A. WIRGIN, E. OGAM and **Z.E.A. FELLAH**, "A time domain method to model viscoelastic wave propagation in cortical long bones", International Society for Analysis, its Applications and Computation, ISAAC Congress, 25-30 Juillet 2005, Univiersity of Catania, Italy.
27. N. SEBAA, **Z.E.A. FELLAH**, W. LAURIKS and C. DEPOLLIER, "Propagation ultrasonore dans l'os spongieux", Congrès Français d'Acoustique, CFA-2006, Tours.

J.4 Congrès nationaux sans publication d'Actes

1. **Z.E.A FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Caractérisation des matériaux poreux par une méthode acoustique ", Colloque Interdisciplinaire en Instrumentation, Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, 31 Janvier 1er Fevrier 2001. Cs2-
2. **Z.E.A FELLAH**, C. DEPOLLIER et M. FELLAH, " Caractérisation des matériaux poreux ", Journées d'Acoustique Physique, Sous-Marine et Ultrasonore, Marseille, Mars, 2001.

J.5 Ouvrages

1. **Z.E.A. FELLAH**, W. LAURIKS et C. DEPOLLIER, " Time domain wave equations for lossy media obeying a frequency power law : application to the porous materials " in A. Wirgin (ed.) Acoustics, Mechanics and the related topics of Mathematical Analysis, World scientific, Singapour, 2002.
2. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, M. FELLAH, "Modélisation temporelle de la propagation acoustique dans un matériau poreux", Matériaux et Acoustique, M. Brnueau, C. Potel, Hermes editions, 211- 254, 2006.
3. **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, M. FELLAH, W. LAURIKS, "Mesures des parameters acoustiques des matériaux poreux", Matériaux et Acoustique, M. Brnueau, C. Potel, Hermes editions, 183-184, 2006.
4. N. SEBAA, **ZEA FELLAH**, C. DEPOLLIER et W. LAURIKS, " Théories poroélastiques pour la caractérisation des tissus osseux ", Matériaux et Acoustique, M. Brnueau, C. Potel, Hermes editions, 343-349, 2006.

J.6 Séminaires invités

1. **Z.E.A. FELLAH**, Characterization of porous materials at high and low frequency range ", Laboratoire d'Acoustique et de Thermique de Louvain, Belgique, invité par W. Lauriks, Avril 2001.
2. **Z.E.A. FELLAH**, " Modélisation de la propagation dans les milieux poreux géophysiques, utilisation des dérivées fractionnaires", Laboratoire GéoAzur, CNRS-UNSA-UPMC-IRD, équipe Géoscience Marine, invité par J. Virieux, S. Operto et A. Ribodetti, Février 2003.
3. **Z.E.A. FELLAH**, " Ultrasonic characterization of human cancellous bone ", Laboratoire de Biomécanique de Louvain, Belgique, invité par G. Van Der Perre, Avril 2003.
4. **Z.E.A. FELLAH**, " Acoustic characterization of porous materials : A time domain approach ", invité par le Laboratoire de Schlumberger-Doll Research, 36 Old Quarry Rd Ridgefield, CT 06877, USA, Mars 2004.
5. **Z.E.A. FELLAH**, " Caractérisation acoustique des matériaux poreux", Centre Européen de Recherche et d'Enseignement des Géosciences de l'Environnement Laboratoire (CEREGE) Aix en Provence, invité par Ginette Saracco (2004).

J.7 Transfert de connaissances

– **Z.E.A. FELLAH**, C. DEPOLLIER, M. FELLAH et W. LAURIKS, "Caractérisation complète des matériaux acoustiques par des mesures ultrasonores", Acoustique et Techniques, Vol 36, 26-32, Mars 2004.

J.8 Descriptif des Enseignements

– Mathématiques (2000/2001) ***TD, 16h, Licence CMAO.***
Systèmes de coordonnées, coordonnées curvilignes, opérateurs différentiels dans les différents systèmes de coordonnées. Analyse tensorielle, algèbre tensorielle, symboles de Christoffel, différentielle absolue, dérivée covariante, techniques de calcul dans R3.

– Electronique (1997 $\mapsto$ 2001) ***TD 30h, SM 2ème année.***
Dipôle en régime permanent sinusoïdal, transitoire. Réseaux linéaires. Les semi- conducteurs. Diode, transistors, amplificateurs. Les fonctions logiques.

– Electro-acoustique (1997$\mapsto$2001) ***TD 60 h, DEUST Vibration Acoustique Signal 1 ère et 2 ème années.***
Systèmes mécaniques et acoustiques à constantes localisées, Analogies électromécaniques et électroacoustiques, Principes de transduction, Microphones, Haut-parleurs, accéléromètres, charges acoustiques. Interfaces électriques. Electronique de puissance, amplification, système bouclé.

– Vibrations (1998 $\mapsto$ 1999) ***TP, 12 h, DEUST Vibration Acoustique Signal 2ème année.***
Vibrations libres et forcées de poutres avec conditions d'encastrement variables. Etude des modes propres d'un touret à meuler : modes de tangage, lacet et pompage ; couplages : réponse vibroacoustique. Etude vibroacoustique d'un ventilateur : analyse spectrale, moment de balourd. Etude vibratoire d'un haut-parleur électrodynamique : résonance, impédance motionnelle, coefficient de couplage électromécanique, rendement. Etude de l'effet Doppler par réflexion d'une onde ultrasonore sur un haut-parleur pour cible.

- Intrumentation / Métrologie (1997 $\mapsto$ 2001) ***TP, 48h, DEUST Vibration Acoustique Signal, 2ème année.***
  Principaux capteurs en vibration et acoustique. Incertitudes de mesure et tolérance. Chaînes de mesure et environnement. Acquisition et conditionnement du signal.

- Optique (2000 $\mapsto$ 2001) ***TP 20h, DEUG MIAS-SM 2ème année***
  Phénomènes d'interférences. Superposition d'ondes lumineuses et notion de cohérence. Diffraction de la lumière par une fente. Principe d'Huygens-Fresnel. Notion de transparence et de transformée de Fourier. Etude de systèmes interférentiels : les fentes d'Young et les miroirs de Fresnel.

- Thermodynamique (2000 $\mapsto$ 2001) ***TP 16h, DEUG MIAS-SM 2ème année***
  Application des principes 1 et 2 : relation entre grandeurs thermodynamiques. Application aux gaz parfaits et gaz réels - Gaz de Van der Walls. Application : matériaux diélectriques, magnétiques.

- Relativité (2000 $\mapsto$ 2001) ***TD 16h, DEUG MIAS 2ème année***
  Principe de relativité restreinte et la transformation de Lorentz. Cinématique et dynamique relativiste. Formalisme quadri-dimensionnel de Minkowski. Equivalence masse-énergie Collision relativistes - Structure et stabilité du noyau atomique.

- Ondes (2000 $\mapsto$ 2001) ***TP 14 h, DEUG MIAS 2ème année.***
  Ondes mécaniques : cas de la corde. Ondes électromagnétiques : la densité de courant de déplacement et les équations de Maxwell, les équations de propagation des champs E et B hors des sources, les solutions en ondes planes. Propagation dans le vide et dans les milieux - Condition aux limites.

- Mathématiques (1997 $\mapsto$ 2001) ***TD, 30h, DEUST Vibration Acoustique Signal, 1ère année.***
  Nombres complexes, dérivées théorème des accroissements finis, développements limités d'une fonction d'un ou plusieurs variables et formule de Taylor, application au calcul d'erreurs. Calcul intégral : changement de variable dans une intégrale, application aux calculs des longueurs, d'aires, de volumes. Equations différentielles linéaires à coefficients constants. Courbes paramétrées, fonctions vectorielles. Elements de géométrie affine euclidienne en dimension 2 ou 3.

- Résistance des matériaux (RDM) (2004) ***TP-TD, 30h, ISTIL (Lyon), 1ère année d'école d'ingénieur.***
  -Théorie des Poutres : Contraintes principales et directions principales, déformation d'une poutre droite, flambage. -Mécanique générale : Frottement sec, modèle de Coulomb, frottement visqueux, résistance au roulement, puissance, travail, rendement, inerties, principe fondamentale de la dynamique, énergie cinétique, énergie potentielle de pesanteur, énergie potentielle d'un ressort, théorème d'énergie cinétique. -Calcul d'erreurs : Evaluation de l'erreur commise sur une grandeur mesurée, prise en compte des erreurs sur chaque terme dans le calcul d'une expression, prise en compte des erreurs pour tracer les courbes. -Bases théoriques de l'élasticité : Etude de contraintes en un point d'un corps, tenseur des contraintes, contraintes principales et direction principales, état plan de la contrainte, état de déformation en un point d'un corps, tenseur des déformations, directions principales de déformation, état pseudo plan de déformation, loi de comportement du matériau. -Expérimentation des phénomènes liés aux frottements, roulements, rendements, travaux, inerties, et énergies : Mise en évidence de la résistance au roulement, comportement d'un

ressort, solide en contact avec frottement sec, rendement, dynamique, équilibre-travaux-énergies, étude d'une poulie seule, poulie différentielle. -Extensométrie : Utilisation de jauges d'extensométrie et caractérisation d'un matériau, notion de déformation, principe de jauges d'extensométrie, pont d'extensométrie, poutre avec trois jauges, poutre avec jauge supérieure et jaue inférieure. -Photoélastométrie : Initiation à la photoélasticimétrie, confrontation des observations à la téorie des poutres, modèle photoélasticimétrie, méthode d'analyse de la lumière, détermination de l'ordre de la frange, détermination des contraintes, poutre en compression, poutre en flexion simple, poutre percée en compression. Flexion déviée. Centre de flexion.

– Modélisation Mathématique en Mécanique des milieux continus (2004). ***TD, 29h MMIM (Lyon), Maîtrise en Mathématiques Informatique et Modélisation.***
-Description d'un système en mouvement : géométrie et cinématique -Loi fondamentale de la dynamique - Le tenseur des contraintes et applications - Tenseur de Cauchy - Tenseur de Piola-Kirchhoff - Puissance réelle et puissance virtuelle - Tenseur des déformations - Tenseur des taux de déformation - Notion de loi de comportement - Equations d'énergie - Equation des chocs. -La physique des fluides : Propriétés générales des fluides newtoniens - Ecoulement des fluides parfaits - Fluides visqueux et thermohydraulique - Magnétohydrodynamique et confinement inertiel des plasmas - Combustions - Equations de l'atmosphère et de l'océan. -La mécanique des solides : Equations générales de l'élasticité linéaire - Problèmes classiques d'élastostatique - Théorème de l'énergie - Dualité - Formulations variationelles - Introduction aux lois de comportement non linéaire et à l'homogénéisation. -Quelques phénomènes ondulatoires : Equations d'ondes linéaires en mécanique - L'équation des solitons : Equation de korteweg- de Vries - L'équation de Schrodinger non linéaire.