

Continuation dans les problèmes de contact

Cédric Pozzolini

Sous la direction d'Alain Léger (CNRS - LMA - Marseille)

mercredi 14 Janvier 2009

Objectif : Etudier la courbe $\lambda \mapsto u(\lambda)$

Cas bilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{H} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{H}. \end{array} \right.$$

Cas unilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \text{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}(u, \lambda)). \end{array} \right.$$

Objectif : Etudier la courbe $\lambda \mapsto u(\lambda)$

Cas bilatéral

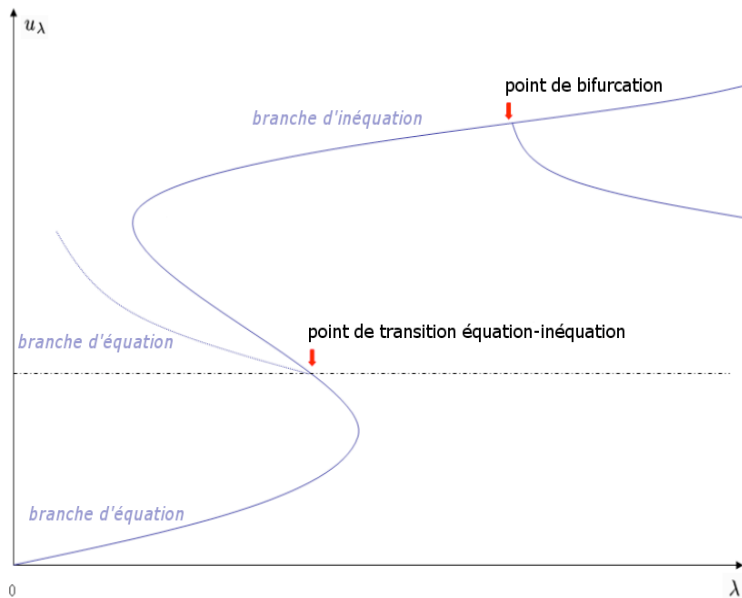
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{H} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{H}. \end{array} \right.$$

Cas unilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}(u, \lambda)). \end{array} \right.$$

Décrire numériquement la façon dont la déformation d'une plaque évolue sous un chargement variable au voisinage d'un obstacle.

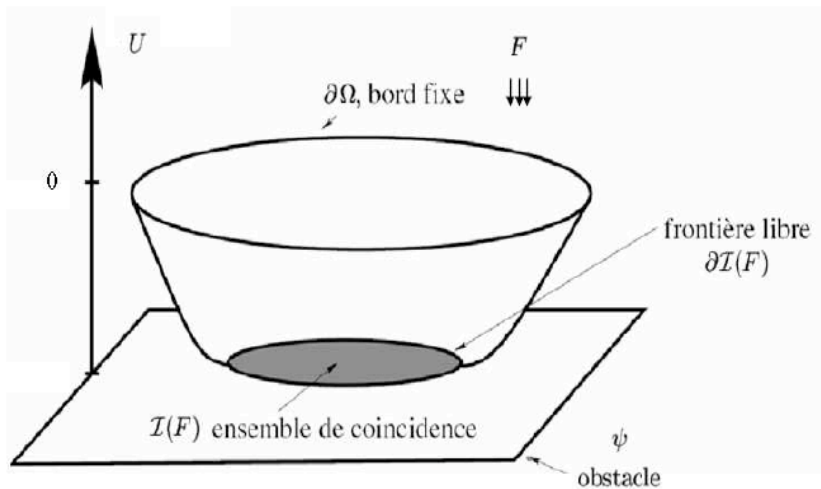
Un exemple de diagramme de bifurcations



- 1 Résultats connus sur le problème de l'obstacle pour la membrane
 - Cadre
 - Sur la frontière libre
 - Théorème de D. Schaeffer
 - Sensibilité dans \mathbb{H}^1
- 2 Problème de l'obstacle pour une plaque
 - Cadre
 - Régularités
 - Résultat de stabilité
 - Preuve
 - Sensibilité dans \mathbb{H}^2
- 3 Conclusions & Perspectives
 - Conclusions
 - Perspectives Géométriques
 - Perspectives : Sensibilité - Bifurcations

Résultats connus sur le problème de l'obstacle pour la membrane

Visualisation de la zone de contact d'une membrane poussée sur un obstacle plat



Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle ψ

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
 - $G > \psi$ sur $\partial\Omega$
 - Contact sans frottement
 - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle ψ

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
 - $G > \psi$ sur $\partial\Omega$
 - Contact sans frottement
 - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle ψ

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
 - $G > \psi$ sur $\partial\Omega$
 - Contact sans frottement
 - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle ψ

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
 - $G > \psi$ sur $\partial\Omega$
 - Contact sans frottement
 - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle ψ

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
 - $G > \psi$ sur $\partial\Omega$
 - Contact sans frottement
 - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

Régularités

Théorème : Régularité de la solution U

Soient Ω un domaine borné du plan avec $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$, $F \in L^p(\Omega)$, pour $p \geq 2$, $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$, et $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$, $\psi < G$ sur $\partial\Omega$. Alors U minimum sur $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$, donc $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, si $p > 2$, $\alpha < 1$.

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ si $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$.

Régularités

Théorème : Régularité de la solution U

Soient Ω un domaine borné du plan avec $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$, $F \in L^p(\Omega)$, pour $p \geq 2$, $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$, et $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$, $\psi < G$ sur $\partial\Omega$. Alors U minimum sur $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$, donc $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, si $p > 2$, $\alpha < 1$.

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ si $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$.

Régularités

Théorème : Régularité de la solution U

Soient Ω un domaine borné du plan avec $\partial\Omega$ de classe $C^{1,1}$, $F \in L^p(\Omega)$, pour $p \geq 2$, $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$, et $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$, $\psi < G$ sur $\partial\Omega$. Alors U minimum sur $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$, donc $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$, si $p > 2$, $\alpha < 1$.

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$ si $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ et $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$.

Exemple de contact tangent

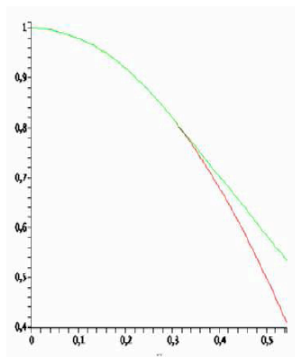
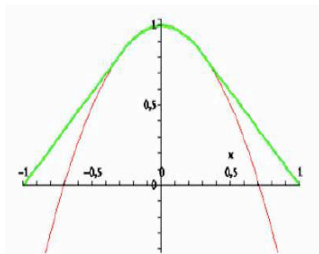
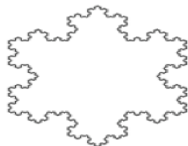


FIG.: décollement au bord de la zone de contact avec $\psi(r) := 1 - 2r^2$

Hypothèse de non-dégénérescence



Théorème : (L. Caffarelli - 1981)

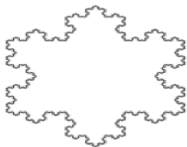
Soient $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $F \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{1,1}(\Omega)$ (avec $0 < \alpha < 1$) et $\psi \in C^{1,1}(\Omega) \cap \mathbb{W}_{loc}^{3,1}(\Omega)$, avec $\psi(x) < G(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$. **Sous l'hypothèse de non-dégénérescence :**

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \Omega$$

la frontière libre $\partial\mathcal{I}(F)$ de U solution de (1) est de mesure de 1-Hausdorff localement finie, donc **de mesure de Lebesgue nulle**.

* La preuve utilise le principe du maximum

Hypothèse de non-dégénérescence



Théorème : (L. Caffarelli - 1981)

Soient $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$, $F \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{1,1}(\Omega)$ (avec $0 < \alpha < 1$) et $\psi \in C^{1,1}(\Omega) \cap \mathbb{W}_{loc}^{3,1}(\Omega)$, avec $\psi(x) < G(x)$, $\forall x \in \partial\Omega$. **Sous l'hypothèse de non-dégénérescence :**

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \Omega$$

la frontière libre $\partial\mathcal{I}(F)$ de U solution de (1) est de mesure de 1-Hausdorff localement finie, donc **de mesure de Lebesgue nulle**.

★ La preuve utilise le principe du maximum

Exemples de D. Schaeffer

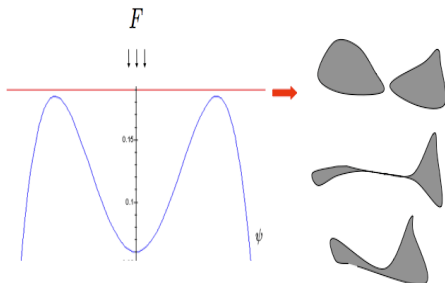
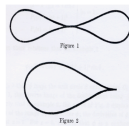


FIG.: Comment engendrer des singularités de type "cusps" sur $\mathcal{I}(F)$?



Le problème fort associé à une zone de contact lisse

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega. \\ U \geq \psi & \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U = \partial_n \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right.$$

* si nous supposons que $\mathcal{I}(F)$ est une surface assez régulière...

Le problème fort associé à une zone de contact lisse

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega. \\ U \geq \psi & \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U = \partial_n \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right.$$

★ si nous supposons que $\mathcal{I}(F)$ est une surface assez régulière...

Stabilité de la zone de contact au sens de Schaeffer

Théorème : D. Schaeffer - 1975

Soient Ω un C^∞ -domaine borné de \mathbb{R}^2 , $\psi \equiv 0$ et $G = 1$. Considérons le problème

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}_{0,1}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV d\Omega \end{array} \right.$$

Supposons qu'il existe $F^\circ \in C^\infty(\bar{\Omega})$ satisfaisant :

- (i) : $F^\circ \geq \delta_0 > 0$ sur $\mathcal{I}(F^\circ)$;
- (ii) : $\mathcal{I}(F^\circ)$ est une surface lisse (C^∞).

Alors pour F suffisamment proche de F° dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, la zone de contact $\mathcal{I}(F)$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathcal{I}(F^\circ)$.

Stabilité de la zone de contact au sens de Schaeffer

Théorème : D. Schaeffer - 1975

Soient Ω un C^∞ -domaine borné de \mathbb{R}^2 , $\psi \equiv 0$ et $G = 1$. Considérons le problème

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}_{0,1}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV d\Omega \end{array} \right.$$

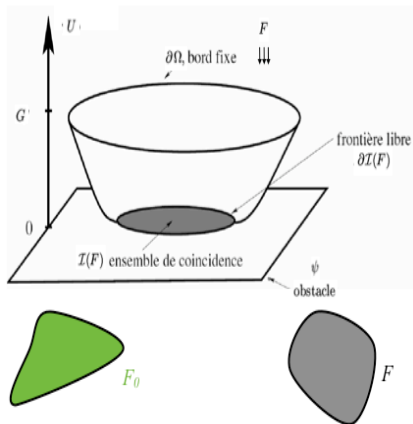
Supposons qu'il existe $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ satisfaisant :

- (i) : $F^\circ \geq \delta_0 > 0$ sur $\mathcal{I}(F^\circ)$;
- (ii) : $\mathcal{I}(F^\circ)$ est une surface lisse (C^∞).

Alors pour F suffisamment proche de F° dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, la zone de contact $\mathcal{I}(F)$ est C^∞ -difféomorphe à $\mathcal{I}(F^\circ)$.

Traduction du Théorème de Schaeffer

STABLE



INSTABLE



Le problème fort associé au Théorème de Schaeffer

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta U = F^\circ & \text{sur} & \Omega \setminus \mathcal{I}(F^\circ). \\ U = 1 & \text{sur} & \partial\Omega. \\ U \geq 0 & \text{sur} & \Omega. \\ \partial_n U = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}(F^\circ). \\ U = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}(F^\circ). \end{array} \right.$$

★ La preuve de D. Schaeffer se fait par le Théorème des *fonctions implicites* de Nash - Moser.

Un pas de plus vers la continuation

Quand la force F varie...

L'objectif est de savoir calculer $\partial_F U(F)$ avec $U = U(F)$ solution de

$$(4) \quad \inf_{V \in \mathbb{K}_{\psi, G}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega,$$

$$\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\psi, G} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

$$U = \text{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

Un pas de plus vers la continuation

Quand la force F varie...

L'objectif est de savoir calculer $\partial_F U(F)$ avec $U = U(F)$ solution de

$$(4) \quad \inf_{V \in \mathbb{K}_{\psi, G}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega,$$

$$\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\psi, G} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

Un développement limité

Théorème : dérivée directionnelle de $U(F)$

Soit Ω un domaine borné de classe C^2 de \mathbb{R}^2 , $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} < 0$. Dans le problème (4) l'application $F \mapsto U(F)$ de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est directionnellement différentiable et sa dérivée dans la direction H est la solution Z_0 du problème

$$\min_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla Z\|^2 + HZ d\Omega,$$

i.e $Z_0 := U'_0(\cdot, H)$ si $F := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$ avec $t \geq 0$ et U_0 solution de (4) associée à F_0 .

C'est à dire que U admet le développement limité suivant :

$$U(F) = U(F_0) + tZ_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0.$$

* La première preuve fut donnée par A. Haraux en 1977.

Un développement limité

Théorème : dérivée directionnelle de $U(F)$

Soit Ω un domaine borné de classe C^2 de \mathbb{R}^2 , $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} < 0$. Dans le problème (4) l'application $F \mapsto U(F)$ de $L^2(\Omega)$ dans $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$ est directionnellement différentiable et sa dérivée dans la direction H est la solution Z_0 du problème

$$\min_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla Z\|^2 + HZ d\Omega,$$

i.e $Z_0 := U'_0(\cdot, H)$ si $F := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$ avec $t \geq 0$ et U_0 solution de (4) associée à F_0 .

C'est à dire que U admet le développement limité suivant :

$$U(F) = U(F_0) + tZ_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0.$$

★ La première preuve fut donnée par A. Haraux en 1977.

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\text{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\text{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \text{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est polyédrique en $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \text{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est polyédrique en $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est polyédrique en $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est polyédrique en $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est polyédrique en $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 1

Pour $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$, et $\forall h \in \mathbb{H}$:

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$: cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$: cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$: cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$: cône critique

Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe \mathbb{K} est **polyédrique en** $u \in \mathbb{K}$, si pour tout $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- \mathbb{K} est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de \mathbb{K} .

Outils de la preuve 2

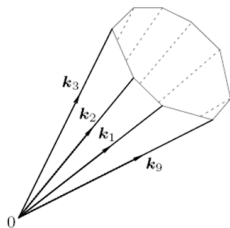


FIG.: un cône polyédral.

Outils de la preuve 3

Théorème (A. Haraux - 1977)

Soit \mathbb{K} un convexe **polyédrique** d'un espace de Hilbert \mathbb{H} . Alors $\forall u, h \in \mathbb{H}$ la courbe $t \mapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th)$ est coniquement différentiable en 0, et $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$, c'est à dire

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) + t \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}(h) + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \forall t > 0.$$

Appliquer à :

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

avec

$$\mathbb{K} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

Outils de la preuve 3

Théorème (A. Haraux - 1977)

Soit \mathbb{K} un convexe **polyédrique** d'un espace de Hilbert \mathbb{H} . Alors $\forall u, h \in \mathbb{H}$ la courbe $t \mapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th)$ est coniquement différentiable en 0, et $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$, c'est à dire

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) + t \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}(h) + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall t > 0.$$

Appliquer à :

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

avec

$$\mathbb{K} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

Problème de l'obstacle pour une plaque

Cadre

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle ψ

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
- $D = 1$ rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans \mathbb{H}_0^2 (Lions-Stampacchia).

Cadre

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle ψ

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
- $D = 1$ rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans \mathbb{H}_0^2 (Lions-Stampacchia).

Cadre

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle ψ

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
- $D = 1$ rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans \mathbb{H}_0^2 (Lions-Stampacchia).

Cadre

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle ψ

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
- $D = 1$ rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans \mathbb{H}_0^2 (Lions-Stampacchia).

Cadre

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle ψ

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- U : le déplacement normal
- $D = 1$ rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans \mathbb{H}_0^2 (Lions-Stampacchia).

Régularités de U

Théorème (B. Schild - 1984)

Soient Ω un domaine plan, borné de classe $C^{2,\alpha}$, avec $\alpha \in]0, 1[$, $F \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, alors la solution U minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec $\mu(\Omega) < +\infty$.

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si $\partial\Omega$ est $C^{4,\alpha}$ par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- D^2U n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

Régularités de U

Théorème (B. Schild - 1984)

Soient Ω un domaine plan, borné de classe $C^{2,\alpha}$, avec $\alpha \in]0, 1[$, $F \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, alors la solution U minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec $\mu(\Omega) < +\infty$.

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si $\partial\Omega$ est $C^{4,\alpha}$ par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- D^2U n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

Régularités de U

Théorème (B. Schild - 1984)

Soient Ω un domaine plan, borné de classe $C^{2,\alpha}$, avec $\alpha \in]0, 1[$, $F \in L^p(\Omega)$, $p > 1$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, alors la solution U minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec $\mu(\Omega) < +\infty$.

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si $\partial\Omega$ est $C^{4,\alpha}$ par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- D^2U n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

La réaction au contact n'est ni à densité ni atomique.

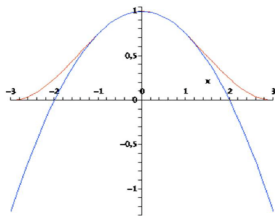


FIG.: plaque épousant un obstacle $\psi(r) = 1 - r^2/4$ suivant un disque de rayon δ .

$$\frac{d^3}{dr^3} U(r) > 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathbb{B}(0, \delta) \text{ et } \frac{d^3}{dr^3} U(r) = 0 \text{ sur } \mathbb{B}(0, \delta).$$

Corollaire du Théorème de Schild

Pour $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $F \in L^2(\Omega)$, $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$, la mesure associée à la solution U de (13) n'a pas de partie atomique.

La réaction au contact n'est ni à densité ni atomique.

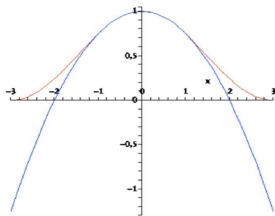


FIG.: plaque épousant un obstacle $\psi(r) = 1 - r^2/4$ suivant un disque de rayon δ .

$$\frac{d^3}{dr^3} U(r) > 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathbb{B}(0, \delta) \text{ et } \frac{d^3}{dr^3} U(r) = 0 \text{ sur } \mathbb{B}(0, \delta).$$

Corollaire du Théorème de Schild

Pour $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $F \in L^2(\Omega)$, $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$, la mesure associée à la solution U de (13) n'a pas de partie atomique.

Résultat de stabilité « à la Schaeffer »

Théorème de stabilité pour le bilaplacien (Léger-Pozzolini - 2007)

Soient Ω un C^∞ -domaine borné de \mathbb{R}^2 , $\psi \equiv 0$ et $G = 1$. Considérons le problème

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k} \text{ vérifiant} \\ \inf_{V \in \mathbb{k}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\Delta V|^2 - FV d\Omega \end{array} \right.$$

avec $\mathbb{k} := \{V \in \mathbb{H}^2(\Omega) / V|_{\partial\Omega} = 1, V \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$

et supposons que pour $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$, les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$(8) \quad \begin{array}{l} (i) \quad -F^\circ \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}^\circ. \\ (ii) \quad \mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ) \text{ soit une surface lisse à bord, (i.e } C^\infty). \end{array}$$

Alors pour F suffisamment proche de F° dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, $\mathcal{I}(F)$ est une surface lisse difféomorphe à $\mathcal{I}(F^\circ)$.

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,

\mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \rightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit **résoluble**. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes
 pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \rightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \| (u, F)\|_{\lambda+m})$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation
 $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit **résoluble**. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution
 est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit résoluble. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit résoluble. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit résoluble. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\overline{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit résoluble. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,
 \mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes
 pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation
 $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit **résoluble**. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution
 est également de classe C^∞ .

Stratégie générale 1

Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$ voisinage ouvert de $(0, 0)$,

\mathbb{T} un opérateur non-linéaire d'ordre m vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour $\lambda \geq \sigma$:

(H1) $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$ tel que $\mathbb{T}[0, 0] = 0$;

(H2) $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$;

(H3) $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$;

(H4) $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$ tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$;

(H5) $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$ tel que $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$ et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$.

Alors il existe $\epsilon > 0$ et $\kappa \geq \lambda$ tels que pour tout F tel que $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$, l'équation $\mathbb{T}[u, F] = 0$ soit résoluble. De plus si F est de classe C^∞ , alors la solution est également de classe C^∞ .

Perturbation de la frontière libre

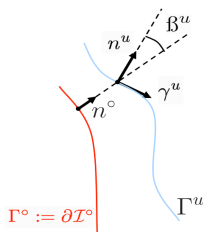


FIG.: Perturbation par Υ^u de la courbe $\Gamma^\circ := \partial\mathcal{I}^\circ$

- $\Upsilon^u : \partial\mathcal{I}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\Upsilon^u(X) := X + u(X)n^\circ(X)$
- Soit la fonction \tilde{h}^u carré de la courbure (normale) : $\tilde{h}^u = \frac{1}{(\cos(\beta^u))^2}$

La fonctionnelle $\mathbb{T}[u, F]$

Appliquer ce théorème des fonctions implicites pour résoudre :

$$\mathbb{T}[u, F] = 0$$

Avec

$$\mathbb{T}[u, F] := \partial_{\bar{n}^0}^2 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

Où U^u est solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U^u = F & \text{dans} & \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur} & \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}^u. \end{array} \right.$$

\mathcal{I}^u est la région bordée par Γ^u .

Visualisation du domaine extérieur

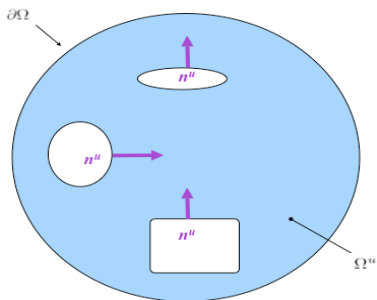
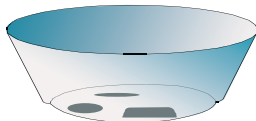


FIG.: Le domaine extérieur $\Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u$.



Calcul de $\partial_u \Gamma$

$$\partial_u \Gamma([u, F]; v) = \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]_{|\varepsilon=0}$$

$$\partial_u \Gamma([u, F]; v) = \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 W & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right.$$

Calcul de $\partial_u \mathbb{T}$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]_{|\varepsilon=0}$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 W & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0} W + v \partial_{n^0}^2 U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right.$$

Calcul de $\mathbb{L}_{u,F}$

Sous la condition de raccord des courbures normales

$$\mathbb{T}[u, F] = \partial_{n^0}^2 U^u \circ \Upsilon^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u$$

L'opérateur de multiplication par $\mathbb{L}_{u,F}$ est une approximation à erreur quadratique de $\partial_u \mathbb{T}$:

$$\mathbb{L}_{u,F} := \partial_{n^0}^3 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

Calcul de $\mathbb{L}_{u,F}$

Sous la condition de raccord des courbures normales

$$\mathbb{T}[u, F] = \partial_{n^0}^2 U^u \circ \Upsilon^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u$$

L'opérateur de multiplication par $\mathbb{L}_{u,F}$ est une **approximation à erreur quadratique** de $\partial_u \mathbb{T}$:

$$\mathbb{L}_{u,F} := \partial_{n^0}^3 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

Dérivées sur la frontière libre

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U^u & = & F \quad \text{dans} \quad \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u & = & 1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \\ \partial_n U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \\ U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{I}^u. \end{array} \right.$$

Proposition

Soit U^u la solution de (9). Alors

$$\partial_{n^\circ}^4 U^u = \cos^4(\beta^u) F, \text{ sur } \Gamma^u$$

pourvu que $U^u = \partial_{n^\circ} U^u = \partial_{n^\circ}^2 U^u = 0$ sur Γ^u .

Définition de $\ell_{U,F}$

$$\ell_{U,F} := \frac{1}{\mathbb{L}_{U,F}}$$

Dans un voisinage tubulaire de Γ° ($t \geq 0$) :

$$\begin{aligned}
 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^\circ(X, 0)}{=0} + \\
 &\quad \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^\circ(X, 0)}{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 U^\circ(X, 0) \\
 &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 U^\circ(X, 0) + o(t^4).
 \end{aligned}$$

Alors $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ > 0$ sur Γ° puisque Γ° est compacte et que $\partial_{n^\circ}^4 U^\circ = F^\circ$ sur Γ° , avec $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$ sur \mathcal{I}° .

Définition de $\ell_{U,F}$

$$\ell_{U,F} := \frac{1}{\mathbb{I}_{U,F}}$$

Dans un voisinage tubulaire de Γ° ($t \geq 0$) :

$$\begin{aligned} 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^\circ(X, 0)}{=0} + \\ &\quad \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^\circ(X, 0)}{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 U^\circ(X, 0) \\ &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 U^\circ(X, 0) + o(t^4). \end{aligned}$$

Alors $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ > 0$ sur Γ° puisque Γ° est compacte et que $\partial_{n^\circ}^4 U^\circ = F^\circ$ sur Γ° , avec $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$ sur \mathcal{I}° .

La solution trouvée est la bonne ...

Proposition

Soit (u, F) satisfaisant $\mathbb{T}[u, F] = 0$, et soit U^u solution de

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{dans } \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases}$$

Alors pour u suffisamment petit, et F proche de F° , on a : $U^u > 0$ sur $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$.

Ceci achève la preuve.

La solution trouvée est la bonne ...

Proposition

Soit (u, F) satisfaisant $\mathbb{T}[u, F] = 0$, et soit U^u solution de

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{dans } \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases}$$

Alors pour u suffisamment petit, et F proche de F° , on a : $U^u > 0$ sur $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$.

Ceci achève la preuve.

Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, avec $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$ un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact $K_\psi \subset \Omega$ est dit \mathbb{H}^2 - ψ -admissible si $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

($h \equiv \psi$ sur $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$)

avec $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$ sur ∂K_ψ ,

avec n normale extérieure à ∂K_ψ).

- Dans \mathbb{R}^1 un segment, ou dans \mathbb{R}^2 une surface régulière sont \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, avec $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$ un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact $K_\psi \subset \Omega$ est dit \mathbb{H}^2 - ψ -admissible si $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

($h \equiv \psi$ sur $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$)

avec $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$ sur ∂K_ψ ,

avec n normale extérieure à ∂K_ψ).

- Dans \mathbb{R}^1 un segment, ou dans \mathbb{R}^2 une surface régulière sont \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, avec $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$ un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact $K_\psi \subset \Omega$ est dit \mathbb{H}^2 - ψ -admissible si $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

($h \equiv \psi$ sur $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$)

avec $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$ sur ∂K_ψ ,

avec n normale extérieure à ∂K_ψ).

- Dans \mathbb{R}^1 un segment, ou dans \mathbb{R}^2 une surface régulière sont \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, avec $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$ un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact $K_\psi \subset \Omega$ est dit \mathbb{H}^2 - ψ -admissible si $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

($h \equiv \psi$ sur $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$)

avec $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$ sur ∂K_ψ ,

avec n normale extérieure à ∂K_ψ).

- Dans \mathbb{R}^1 un segment, ou dans \mathbb{R}^2 une surface régulière sont \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ tel que $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, avec $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$ un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact $K_\psi \subset \Omega$ est dit \mathbb{H}^2 - ψ -admissible si $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$:

($h \equiv \psi$ sur $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$)

avec $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$ sur ∂K_ψ ,

avec n normale extérieure à ∂K_ψ).

- Dans \mathbb{R}^1 un segment, ou dans \mathbb{R}^2 une surface régulière sont \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Théorème (I. Sokolowski - 1993)

Soient $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ avec $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$ puis $\partial\Omega$ de classe C^2 , $\mathbb{K} := \mathbb{k}_\psi$. Soit $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^b)$ la projection métrique d'un élément $h \in \mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, et soit ν la mesure de Radon positive définie par

$$\int_{\Omega} \varphi d\nu = \int_{\Omega} \Delta(\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h) - h) \Delta\varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Alors le convexe \mathbb{k}_ψ est polyédrique en $u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)$ si et seulement si le support de la mesure ν associée à u est \mathbb{H}_0^2 - ψ -admissible.

Application pour une poutre en flexion sur $\Omega :=]0, 1[$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}, \\ \int_{\Omega} u''(v - u)'' dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right.$$

Théorème : différentiabilité dans le cas polyédrique

Dans le problème (11), posons $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$, $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, et $f_0 \in L^2(\Omega)$ telle que :

- (i) $\psi^{(4)} - f_0 \geq \delta_0 > 0$ p.p. sur $\mathcal{I}(f_0)$;
- (ii) la zone de contact $\mathcal{I}(f_0)$ est \mathbb{H}^2 - ψ -admissible ;

Soit $f_t := f_0 + th$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et $h \in L^2(\Omega)$.

Alors $u'_0(\cdot, h) := z_0$ existe et $z_0 = 0$ sur $\mathcal{I}(f_0)$ et

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h, & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(f_0), \\ z_0 = z'_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \text{ et } \partial\mathcal{I}(f_0) \end{array} \right.$$

Application pour une poutre en flexion sur $\Omega :=]0, 1[$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}, \\ \int_{\Omega} u''(v - u)'' dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right.$$

Théorème : différentiabilité dans le cas polyédrique

Dans le problème (11), posons $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$, $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, et $f_0 \in L^2(\Omega)$ telle que :

- (i) $\psi^{(4)} - f_0 \geq \delta_0 > 0$ p.p. sur $\mathcal{I}(f_0)$;
- (ii) la zone de contact $\mathcal{I}(f_0)$ est \mathbb{H}^2 - ψ -admissible ;

Soit $f_t := f_0 + th$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, et $h \in L^2(\Omega)$.

Alors $u'_0(\cdot, h) := z_0$ existe et $z_0 = 0$ sur $\mathcal{I}(f_0)$ et

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h, & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(f_0), \\ z_0 = z'_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \text{ et } \partial\mathcal{I}(f_0) \end{array} \right.$$

Flexion d'une poutre encastree sur un obstacle plat 1

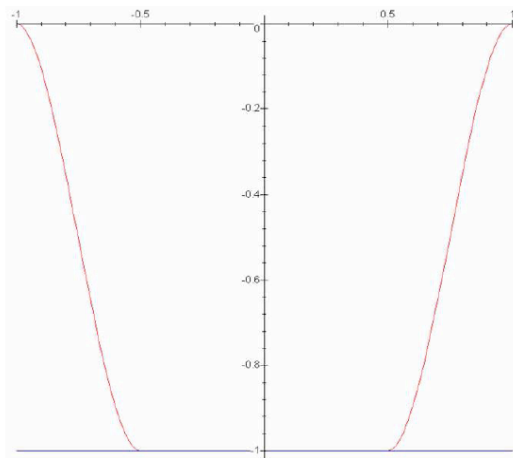


FIG.: poutre soumise à un champ de forces $f(x, t) = -t$, au-dessus d'un obstacle $\psi(x) = -1$: la zone de contact est un segment $[-y, y]$, avec $y = 1 - \sqrt[4]{\frac{72}{t}}$, pour $t > 72$.

Flexion d'une poutre encastree sur un obstacle plat 2

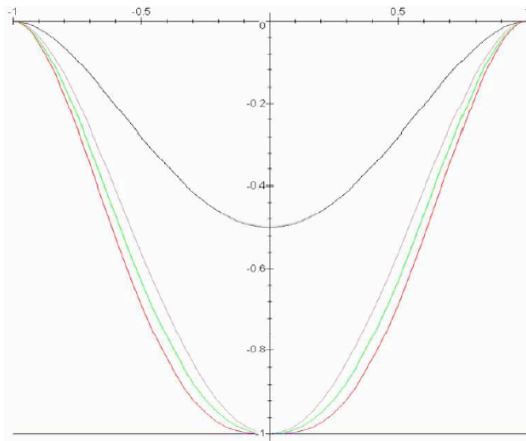


FIG.: poutre soumise à un champ de forces $f(x, t) = -t$, au-dessus d'un obstacle $\psi(x) = -1$: contact tangent avec réaction ponctuelle $t = 25$
 contact avec étalement imminent et réaction ponctuelle $t = 72$.

Valeur optimale & problème de l'obstacle pour la plaque

Trouver $u_\lambda \in \mathbb{K} / \inf_{v \in \mathbb{K}_{CH}} J(v, t) = \text{Val}(u_t)$

$$\text{Val}(u_t) \leq \text{Val}(u_0) + t\text{Val}(L) + \frac{t^2}{2} \text{Val}(Q) + o(t^2).$$

$$\text{Val}(u_t) \geq \text{Val}(u_0) + t\text{Val}(L) + \frac{t^2}{2} \text{Val}(QR) + o(t^2)$$

Quand la force F varie...

L'objectif est de savoir calculer $\partial_F U(F)$ avec $F \in L^2(\Omega)$ et $U := U(F) \in \mathbb{K}_\psi$ minimisant l'énergie

$$\min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

$\mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$

Valeur optimale & problème de l'obstacle pour la plaque

Trouver $u_\lambda \in \mathbb{K}$ / $\inf_{v \in \mathbb{K}_{CH}} J(v, t) = Val(u_t)$

$$Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(Q) + o(t^2).$$

$$Val(u_t) \geq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(QR) + o(t^2)$$

Quand la force F varie...

L'objectif est de savoir calculer $\partial_F U(F)$ avec $F \in L^2(\Omega)$ et $U := U(F) \in \mathbb{K}_\psi$ minimisant l'énergie

$$\min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

$\mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$

Ensembles tangents d'ordre 1 & 2

- Le cône tangent à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in X / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\} = \overline{\text{Cs}}_{\mathbb{K}}(u)$$

- L'ensemble tangent extérieur d'ordre 2 à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}^2(u) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

- L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Ensembles tangents d'ordre 1 & 2

- Le cône tangent à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in X / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\} = \overline{\text{Cs}}_{\mathbb{K}}(u)$$

- L'ensemble tangent extérieur d'ordre 2 à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}^2(u) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

- L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 à \mathbb{K} en u :

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

Calcul de l'espace tangent intérieur à l'ordre 2

Proposition

Soient $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$, $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$ $\mathbb{K} := \mathbb{k}_\psi$ avec $\psi < 0$ sur $\partial\Omega$, $u \in \mathbb{K}$ et $h \in T_{\mathbb{K}}(u) := \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I} = \{u = \psi\}\}$ Alors :
Le cône tangent intérieur d'ordre 2 s'écrit

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \{w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / w(X) \geq s_{u,h}(X), \forall X \in \bar{\Omega}\},$$

où la fonction $s_{u,h} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est définie par

$$s_{u,h}(X) := \begin{cases} 0, & \text{si } X \in \text{int}(\mathcal{I}), \quad \text{et } h(X) = 0, \\ \theta_{u,h}(X), & \text{si } X \in \partial\mathcal{I}, \quad \text{et } h(X) = 0, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec

$$\theta_{u,h}(X) := \limsup_{\substack{X' \rightarrow X \\ (u-\psi)(X') > 0}} \frac{([-h(X')])_+^2}{2(u(X') - \psi(X'))}$$

Finitude du σ -terme pour une plaque en flexion sur ψ

$$(13) \quad \min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

Théorème

Soient $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} < 0$, et Ω un domaine du plan de classe $C^{4,\alpha}$.

Supposons : **(H1)** les lignes de contact sont des courbes de classe C^2 et

$\forall X \in \mathcal{I}_0^{ess}$, $\partial_n^2(U_0 - \psi)(X) > 0$.

(H2) le nombre de composantes connexes de \mathcal{I}_0^{ess} est fini.

(H3) $\text{Supp}(\mu_0)$ est union finie de surfaces \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Alors le problème quadratique (Q) associé à (13)

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\mathcal{I}_0^{ess}} \theta_{Z, U_0} d\mu_0$$

admet une solution unique Z_0 , avec :

$\theta_{Z, U_0}(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$ fini pour tout $Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \text{Supp}(\mu_0), v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0 \setminus \text{Supp}(\mu_0)\}$.

Finitude du σ -terme pour une plaque en flexion sur ψ

$$(13) \quad \min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

Théorème

Soient $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} < 0$, et Ω un domaine du plan de classe $C^{4,\alpha}$.

Supposons : **(H1)** les lignes de contact sont des courbes de classe C^2 et

$\forall X \in \mathcal{I}_0^{ess}$, $\partial_n^2(U_0 - \psi)(X) > 0$.

(H2) le nombre de composantes connexes de \mathcal{I}_0^{ess} est fini.

(H3) $\text{Supp}(\mu_0)$ est union finie de surfaces \mathbb{H}^2 - ψ -admissibles.

Alors le problème quadratique (Q) associé à (13)

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\mathcal{I}_0^{ess}} \theta_{Z, U_0} d\mu_0$$

admet une solution unique Z_0 , avec :

$\theta_{Z, U_0}(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$ fini pour tout $Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \text{Supp}(\mu_0), v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0 \setminus \text{Supp}(\mu_0)\}$.

Différentiabilité dans le cas non-polyédrique

Théorème

Plaçons-nous sous les hypothèses **(H1)-(H3)**, imposons $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$, $\psi|_{\partial\Omega} < 0$, et Ω un domaine du plan de classe $C^{4,\alpha}$.

Soit U_0 la solution de (13) associée à F_0 , alors nous avons l'estimation suivante de la fonction valeur optimale :

$$\text{Val}(U_t) - \text{Val}(U_0) - t\text{Val}(L) = \frac{t^2}{2} \text{Val}(Q) + o(t^2)$$

En outre $Z_0(\cdot) := U'_0(\cdot, H)$ existe et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 Z_0 = H + \theta_{Z_0, U_0} \mu_{L,0} & \text{sur } \Omega \setminus (\mathcal{I}(F_0) \setminus \mathcal{T}(F_0)) \\ Z_0 = 0 = \partial_n Z_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n Z_0 = 0 & \text{sur } \partial\text{Supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \text{Supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \end{array} \right.$$

Flexion d'une poutre encastrée sur un obstacle plat

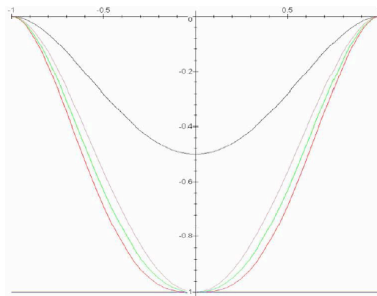


FIG.: poutre soumise à un champ de forces $f(x, t) = -t$, au-dessus d'un obstacle $\psi(x) = -1$: contact tangent avec réaction ponctuelle $24 \leq t < 72$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0^{(4)} = h + \theta_{z_0, u_0}(0) \mu_0^0 \delta_0 \quad \text{sur }]-1, 1[, \\ z_0(-1) = 0 = z_0(1) \\ z_0'(-1) = 0 = z_0'(1) \end{array} \right.$$

Quand il y a raccord des courbures : pour $t = 72$???

Flexion d'une poutre encastrée sur un obstacle plat

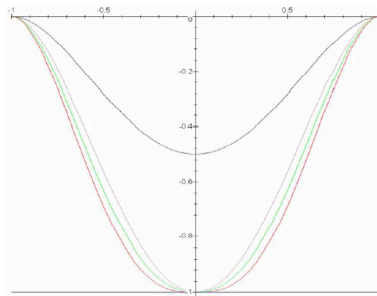


FIG.: poutre soumise à un champ de forces $f(x, t) = -t$, au-dessus d'un obstacle $\psi(x) = -1$: contact tangent avec réaction ponctuelle $24 \leq t < 72$:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0^{(4)} = h + \theta_{z_0, u_0}(0) \mu_0^0 \delta_0 \quad \text{sur }]-1, 1[, \\ z_0(-1) = 0 = z_0(1) \\ z_0'(-1) = 0 = z_0'(1) \end{array} \right.$$

Quand il y a raccord des courbures : pour $t = 72$???

Instabilité de la zone de contact : poutre

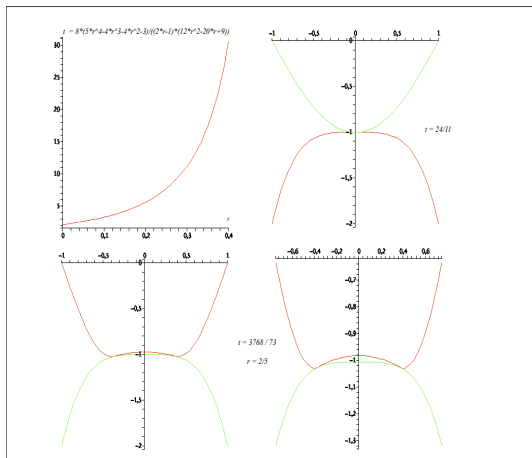


FIG.: poutre élastique en appui simple soumise à un champ de forces $f(x, t) = -t\delta_{x=1/2} - t\delta_{x=-1/2}$, au-dessus d'un obstacle $\psi(x) = -1 - x^4$: la zone de contact est formée de 2 points si $t > 24/9$; d'un seul point si $24/11 \leq t < 24/9$.

Instabilité de la zone de contact : plaque circulaire

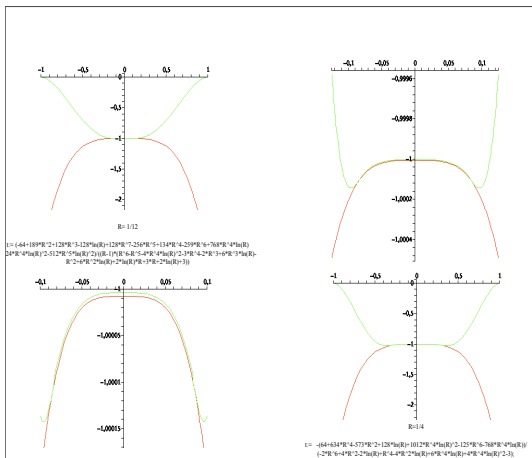


FIG.: plaque élastique circulaire encastée en $r = 1$ soumise à un champ de forces $F(r, t) = -t$ au-dessus d'un obstacle $\psi(r) = -1 - 2r^4$:

la zone de contact est un disque si $t > 128$, c'est un cercle pour $64 < t < 128$.

Conclusions & Perspectives

En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

Stabilité au sens de Schaeffer pour les plaques de von Kármán

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, l'équilibre d'une plaque de von Kármán au-dessus d'un obstacle ψ est donné par (U, χ) tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = [\Theta + \chi; U] + F + \mu(F) & \text{dans } \Omega. \\ \Delta^2 \chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega. \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

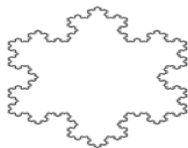
En adaptant le résultat de B. Schild : $U \in C^2(\Omega)$

Sur la frontière libre

Conjecture : *Dans le problème de l'obstacle pour une plaque linéaire en flexion, la frontière libre bordant une partie d'intérieur non-vide de $\mathcal{I}(F)$ est localement de mesure de Hausdorff finie sous la condition de non-dégénérescence :*

$$\Delta^2 \psi - F \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}(F),$$

avec ψ , F et Ω lisses.



Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

Merci de votre attention...

जयत्