

# Continuation dans les problèmes de contact

Cédric Pozzolini

Sous la direction d'Alain Léger (CNRS - LMA - Marseille)

mercredi 14 Janvier 2009

**Objectif** : Etudier la courbe  $\lambda \mapsto u(\lambda)$

## Cas bilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{H} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{H}. \end{array} \right.$$

## Cas unilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \text{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}(u, \lambda)). \end{array} \right.$$

**Objectif** : Etudier la courbe  $\lambda \mapsto u(\lambda)$

## Cas bilatéral

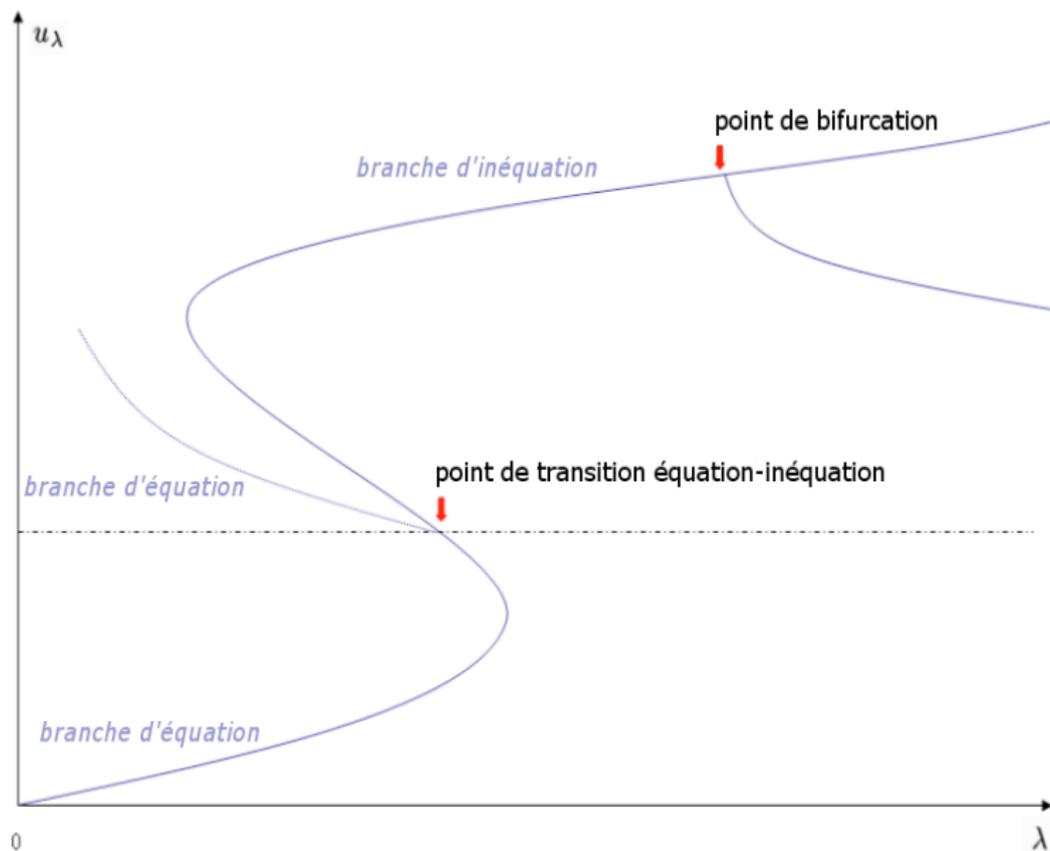
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{H} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{H}. \end{array} \right.$$

## Cas unilatéral

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ \langle u - \mathbf{B}(u, \lambda) | v - u \rangle \geq 0, \forall v \in \mathbb{K}. \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{K} \text{ tel que :} \\ u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\mathbf{B}(u, \lambda)). \end{array} \right.$$

Décrire numériquement la façon dont la déformation d'une plaque évolue sous un chargement variable au voisinage d'un obstacle.

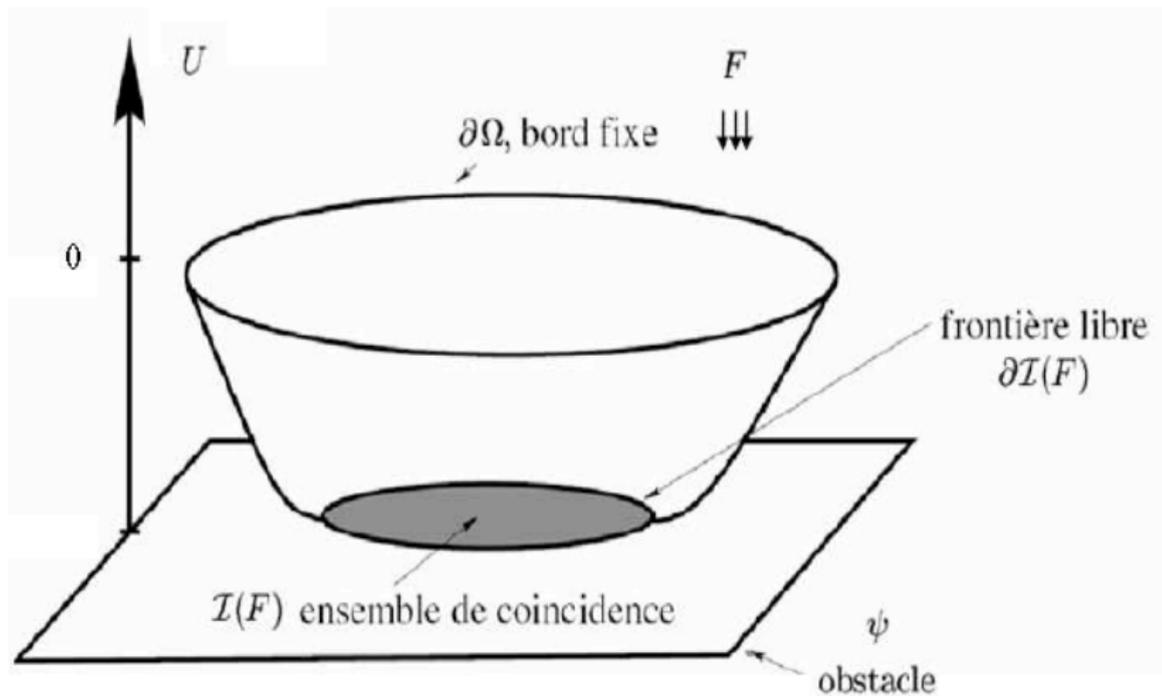
# Un exemple de diagramme de bifurcations



- 1 Résultats connus sur le problème de l'obstacle pour la membrane
  - Cadre
  - Sur la frontière libre
  - Théorème de D. Schaeffer
  - Sensibilité dans  $\mathbb{H}^1$
- 2 Problème de l'obstacle pour une plaque
  - Cadre
  - Régularités
  - Résultat de stabilité
  - Preuve
  - Sensibilité dans  $\mathbb{H}^2$
- 3 Conclusions & Perspectives
  - Conclusions
  - Perspectives Géométriques
  - Perspectives : Sensibilité - Bifurcations

# Résultats connus sur le problème de l'obstacle pour la membrane

# Visualisation de la zone de contact d'une membrane poussée sur un obstacle plat



# Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle  $\psi$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
  - $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$
  - Contact sans frottement
  - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

# Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle  $\psi$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \bar{\Omega} \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
  - $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$
  - Contact sans frottement
  - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

# Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle  $\psi$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
  - $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$
  - Contact sans frottement
  - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

# Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle  $\psi$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
  - $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$
  - Contact sans frottement
  - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

# Modèle mathématique de la membrane en présence d'un obstacle

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Petites déformations d'une membrane sur un obstacle  $\psi$

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta U = -F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{sur } \overline{\Omega} \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
  - $G > \psi$  sur  $\partial\Omega$
  - Contact sans frottement
  - Existence et unicité d'un équilibre :
- Théorème de Lions-Stampacchia (1967)

# Régularités

## Théorème : Régularité de la solution $U$

Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ , pour  $p \geq 2$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$ , et  $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$ ,  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ . Alors  $U$  minimum sur  $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie  $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$ , donc  $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , si  $p > 2$ ,  $\alpha < 1$ .

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux  $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$  si  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$ .

# Régularités

## Théorème : Régularité de la solution $U$

Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ , pour  $p \geq 2$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$ , et  $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$ ,  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ . Alors  $U$  minimum sur  $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie  $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$ , donc  $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , si  $p > 2$ ,  $\alpha < 1$ .

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux  $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$  si  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$ .

# Régularités

## Théorème : Régularité de la solution $U$

Soient  $\Omega$  un domaine borné du plan avec  $\partial\Omega$  de classe  $C^{1,1}$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ , pour  $p \geq 2$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^p(\Omega)$ , et  $G \in \mathbb{H}^{3/2}(\partial\Omega)$ ,  $\psi < G$  sur  $\partial\Omega$ . Alors  $U$  minimum sur  $\mathbb{K}_{\psi,G} = \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$

$$(1) \quad J(V, F) := \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega$$

vérifie  $U \in \mathbb{H}^p(\Omega) \cap \mathbb{H}_G^1(\Omega)$ , donc  $U \in C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})$ , si  $p > 2$ ,  $\alpha < 1$ .

- l'ensemble de coïncidence est

$$\mathcal{I}(F) := \{X \in \Omega / U(X) = \psi(X)\}.$$

- (J. Frehse - 1973) au mieux  $U \in C^{1,1}(\bar{\Omega})$  si  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega)$  et  $\psi \in \mathbb{W}^{2,\infty}(\Omega)$ .

# Exemple de contact tangent

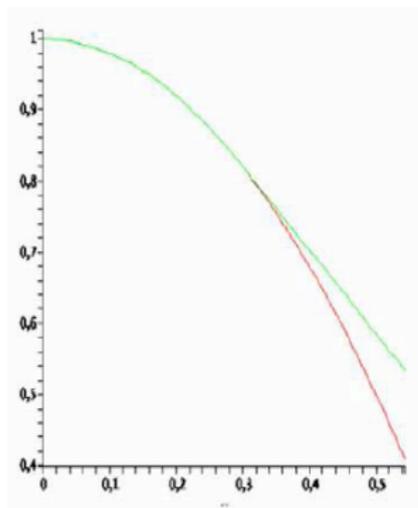
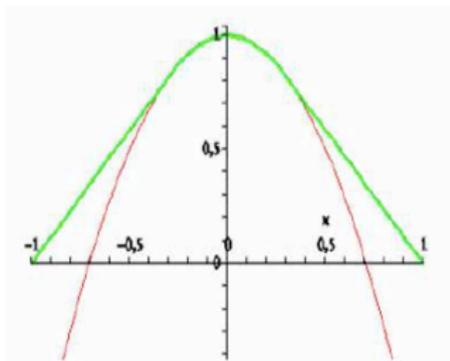
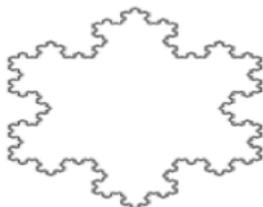


FIG.: décollement au bord de la zone de contact avec  $\psi(r) := 1 - 2r^2$

# Hypothèse de non-dégénérescence



**Théorème : (L. Caffarelli - 1981)**

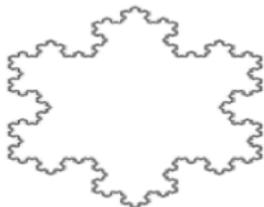
Soient  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ,  $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap W^{1,1}(\Omega)$  (avec  $0 < \alpha < 1$ ) et  $\psi \in C^{1,1}(\Omega) \cap W_{loc}^{3,1}(\Omega)$ , avec  $\psi(x) < G(x)$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ . **Sous l'hypothèse de non-dégénérescence :**

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \Omega$$

la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(F)$  de  $U$  solution de (1) est de mesure de 1-Hausdorff localement finie, donc **de mesure de Lebesgue nulle**.

\* La preuve utilise le principe du maximum

# Hypothèse de non-dégénérescence



**Théorème : (L. Caffarelli - 1981)**

Soient  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ,  $G \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ ,  $F \in C^{0,\alpha}(\Omega) \cap \mathbb{W}^{1,1}(\Omega)$  (avec  $0 < \alpha < 1$ ) et  $\psi \in C^{1,1}(\Omega) \cap \mathbb{W}_{loc}^{3,1}(\Omega)$ , avec  $\psi(x) < G(x)$ ,  $\forall x \in \partial\Omega$ . **Sous l'hypothèse de non-dégénérescence :**

$$(F - \Delta\psi) \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \Omega$$

la frontière libre  $\partial\mathcal{I}(F)$  de  $U$  solution de (1) est de mesure de 1-Hausdorff localement finie, donc **de mesure de Lebesgue nulle**.

★ La preuve utilise le principe du maximum

## Exemples de D. Schaeffer

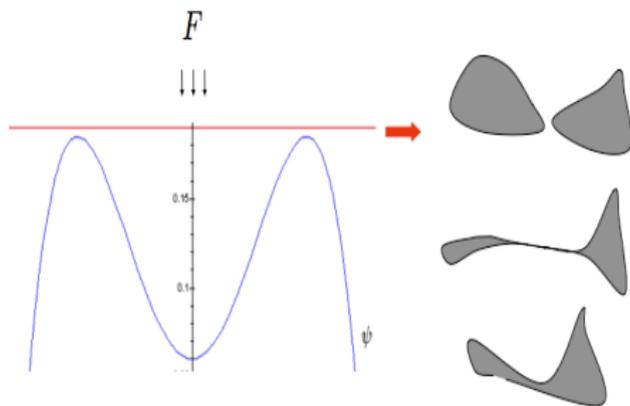
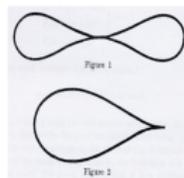


FIG.: Comment engendrer des singularités de type "cusps" sur  $\mathcal{I}(F)$  ?



# Le problème fort associé à une zone de contact lisse

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega. \\ U \geq \psi & \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U = \partial_n \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right.$$

\* si nous supposons que  $\mathcal{I}(F)$  est une surface assez régulière...

# Le problème fort associé à une zone de contact lisse

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta U = F & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F). \\ U = G & \text{sur } \partial\Omega. \\ U \geq \psi & \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U = \partial_n \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \\ U = \psi & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F). \end{array} \right.$$

★ si nous supposons que  $\mathcal{I}(F)$  est une surface assez régulière...

# Stabilité de la zone de contact au sens de Schaeffer

## Théorème : D. Schaeffer - 1975

Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \equiv 0$  et  $G = 1$ . Considérons le problème

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}_{0,1}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV d\Omega \end{array} \right.$$

Supposons qu'il existe  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$  satisfaisant :

- (i) :  $F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F^\circ)$ ;
- (ii) :  $\mathcal{I}(F^\circ)$  est une surface lisse ( $C^\infty$ ).

Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ , la zone de contact  $\mathcal{I}(F)$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

# Stabilité de la zone de contact au sens de Schaeffer

## Théorème : D. Schaeffer - 1975

Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \equiv 0$  et  $G = 1$ . Considérons le problème

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \text{ réalisant le minimum} \\ \inf_{V \in \mathbb{K}_{0,1}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV d\Omega \end{array} \right.$$

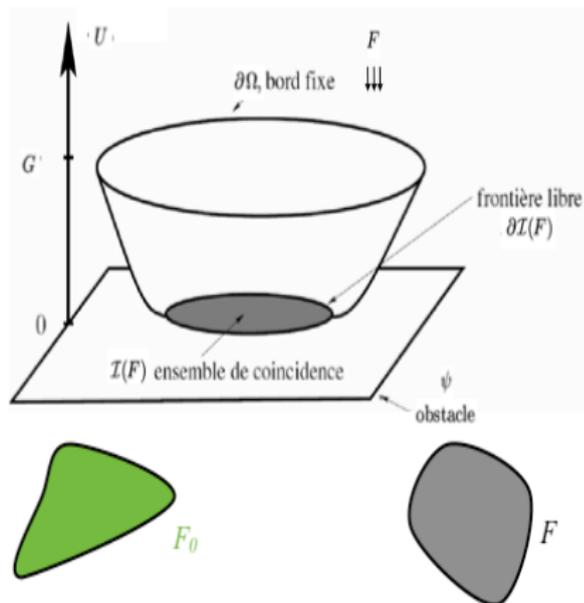
Supposons qu'il existe  $F^\circ \in C^\infty(\bar{\Omega})$  satisfaisant :

- (i) :  $F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}(F^\circ)$ ;
- (ii) :  $\mathcal{I}(F^\circ)$  est une surface lisse ( $C^\infty$ ).

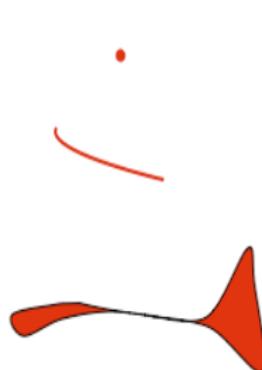
Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\bar{\Omega})$ , la zone de contact  $\mathcal{I}(F)$  est  $C^\infty$ -difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

# Traduction du Théorème de Schaeffer

STABLE



INSTABLE



# Le problème fort associé au Théorème de Schaeffer

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \Delta U = F^\circ & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(F^\circ). \\ U = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U \geq 0 & \text{sur } \Omega. \\ \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F^\circ). \\ U = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}(F^\circ). \end{array} \right.$$

★ La preuve de D. Schaeffer se fait par le Théorème des *fonctions implicites* de Nash - Moser.

# Un pas de plus vers la continuation

Quand la force  $F$  varie...

L'objectif est de savoir calculer  $\partial_F U(F)$  avec  $U = U(F)$  solution de

$$(4) \quad \inf_{V \in \mathbb{K}_{\psi, G}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega,$$

$$\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\psi, G} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

$$U = \text{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

# Un pas de plus vers la continuation

Quand la force  $F$  varie...

L'objectif est de savoir calculer  $\partial_F U(F)$  avec  $U = U(F)$  solution de

$$(4) \quad \inf_{V \in \mathbb{K}_{\psi, G}} \int_{\Omega} \|\nabla V\|^2 + 2FV \, d\Omega,$$

$$\mathbb{K} := \mathbb{K}_{\psi, G} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

# Un développement limité

## Théorème : dérivée directionnelle de $U(F)$

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ . Dans le problème (4) l'application  $F \mapsto U(F)$  de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  est directionnellement différentiable et sa dérivée dans la direction  $H$  est la solution  $Z_0$  du problème

$$\min_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla Z\|^2 + HZ d\Omega,$$

i.e  $Z_0 := U'_0(\cdot, H)$  si  $F := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$  avec  $t \geq 0$  et  $U_0$  solution de (4) associée à  $F_0$ .

C'est à dire que  $U$  admet le développement limité suivant :

$$U(F) = U(F_0) + tZ_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0.$$

\* La première preuve fut donnée par A. Haraux en 1977.

# Un développement limité

## Théorème : dérivée directionnelle de $U(F)$

Soit  $\Omega$  un domaine borné de classe  $C^2$  de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \in L^\infty(\Omega) \cap \mathbb{H}^1(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ . Dans le problème (4) l'application  $F \mapsto U(F)$  de  $L^2(\Omega)$  dans  $\mathbb{H}_0^1(\Omega)$  est directionnellement différentiable et sa dérivée dans la direction  $H$  est la solution  $Z_0$  du problème

$$\min_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla Z\|^2 + HZ d\Omega,$$

i.e  $Z_0 := U'_0(\cdot, H)$  si  $F := F_0 + tH \in L^2(\Omega)$  avec  $t \geq 0$  et  $U_0$  solution de (4) associée à  $F_0$ .

C'est à dire que  $U$  admet le développement limité suivant :

$$U(F) = U(F_0) + tZ_0 + o(t), \text{ avec } t \geq 0.$$

★ La première preuve fut donnée par A. Haraux en 1977.

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\text{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\text{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \text{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \text{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \mathbf{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est polyédrique en  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \mathbf{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\mathbf{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \mathbf{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 1

Pour  $\mathbb{K} \subset \mathbb{H}$ , et  $\forall h \in \mathbb{H}$  :

$$\|h - \text{pr}_{\mathbb{K}}(h)\|_{\mathbb{H}} = \inf_{v \in \mathbb{K}} \|h - v\|_{\mathbb{H}}$$

$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) := \{h \in \mathbb{H} / \exists t > 0, u + th \in \mathbb{K}\}$  : cône de support.

$\text{N}_{\mathbb{K}}(u) := \{x^* \in X^* / \langle x^*, z - u \rangle \leq 0, \forall z \in \mathbb{K}\}$  : cône normal.

$\text{T}_{\mathbb{K}}(u) := \overline{\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u)}$  : cône tangent.

$\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u) := \text{T}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*)$  : cône critique

## Définition de la polyédricité

- Nous disons que le convexe  $\mathbb{K}$  est **polyédrique en**  $u \in \mathbb{K}$ , si pour tout  $u^* \in \text{N}_{\mathbb{K}}(u)$ ,

$$\text{Cs}_{\mathbb{K}}(u) \cap \ker(u^*) \text{ est dense dans } \text{Cr}_{\mathbb{K}}(u).$$

- $\mathbb{K}$  est dit polyédrique s'il est polyédrique en tout point de  $\mathbb{K}$ .

# Outils de la preuve 2

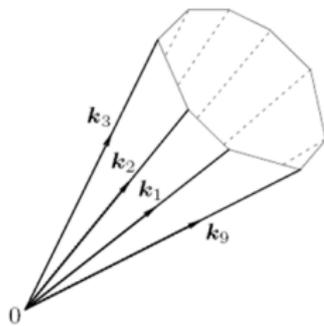


FIG.: un cône polyédral.

# Outils de la preuve 3

## Théorème (A. Haraux - 1977)

Soit  $\mathbb{K}$  un convexe **polyédrique** d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Alors  $\forall u, h \in \mathbb{H}$  la courbe  $t \mapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th)$  est coniquement différentiable en 0, et  $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$ , c'est à dire

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) + t \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}(h) + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall t > 0.$$

Appliquer à :

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

avec

$$\mathbb{K} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

## Outils de la preuve 3

## Théorème (A. Haraux - 1977)

Soit  $\mathbb{K}$  un convexe **polyédrique** d'un espace de Hilbert  $\mathbb{H}$ . Alors  $\forall u, h \in \mathbb{H}$  la courbe  $t \mapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th)$  est coniquement différentiable en 0, et  $\mathbf{d}^+ \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) = \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}$ , c'est à dire

$$\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u + th) = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u) + t \mathbf{pr}_{\text{Cr}_{\mathbb{K}}(u)}(h) + o(t, h), \quad \forall h \in \mathbb{H}, \quad \forall t > 0.$$

Appliquer à :

$$U = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(\Delta^{-1}(F))$$

avec

$$\mathbb{K} := \{V \in \mathbb{H}^1(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega, V = G > \psi \text{ sur } \partial\Omega.\}$$

# Problème de l'obstacle pour une plaque

# Cadre

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle  $\psi$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
- $D = 1$  rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans  $\mathbb{H}_0^2$  (Lions-Stampacchia).

# Cadre

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle  $\psi$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
- $D = 1$  rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans  $\mathbb{H}_0^2$  (Lions-Stampacchia).

# Cadre

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle  $\psi$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
- $D = 1$  rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans  $\mathbb{H}_0^2$  (Lions-Stampacchia).

# Cadre

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle  $\psi$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
- $D = 1$  rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans  $\mathbb{H}_0^2$  (Lions-Stampacchia).

# Cadre

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , nous considérons la solution du problème aux limites :

Flexion d'une plaque encadrée au-dessus d'un obstacle  $\psi$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = F + \mu(F) & \text{dans } \Omega \\ (U - \psi)\mu(F) = 0 & \text{dans } \Omega \\ U \geq \psi & \text{sur } \bar{\Omega} \\ \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

- $U$  : le déplacement normal
- $D = 1$  rigidité à la flexion
- Contact sans frottement
- Existence et unicité d'un équilibre dans  $\mathbb{H}_0^2$  (Lions-Stampacchia).

# Régularités de $U$

## Théorème (B. Schild - 1984)

Soient  $\Omega$  un domaine plan, borné de classe  $C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , alors la solution  $U$  minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si  $\partial\Omega$  est  $C^{4,\alpha}$  par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- $D^2U$  n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

# Régularités de $U$

## Théorème (B. Schild - 1984)

Soient  $\Omega$  un domaine plan, borné de classe  $C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , alors la solution  $U$  minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si  $\partial\Omega$  est  $C^{4,\alpha}$  par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- $D^2U$  n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

# Régularités de $U$

## Théorème (B. Schild - 1984)

Soient  $\Omega$  un domaine plan, borné de classe  $C^{2,\alpha}$ , avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $F \in L^p(\Omega)$ ,  $p > 1$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , alors la solution  $U$  minimisant l'énergie

$$(6) \quad \min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

vérifie

$$U \in \mathbb{H}_{loc}^{2,\infty}(\Omega) \cap \mathbb{H}_{loc}^3(\Omega) \cap C^2(\Omega),$$

avec  $\mu(\Omega) < +\infty$ .

$$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$$

- Le résultat est toujours vrai si  $\partial\Omega$  est  $C^{4,\alpha}$  par morceaux et présente des coins convexes (Léger-Pozzolini - 2007).
- $D^2U$  n'est pas mieux que continue (Caffarelli-Friedman - 1979).

# La réaction au contact n'est ni à densité ni atomique.

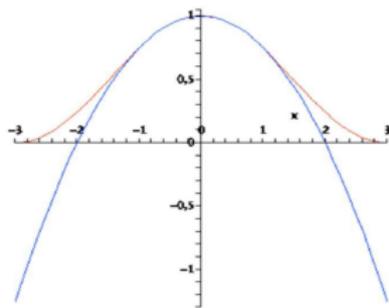


FIG.: plaque épousant un obstacle  $\psi(r) = 1 - r^2/4$  suivant un disque de rayon  $\delta$ .

$$\frac{d^3}{dr^3} U(r) > 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathbb{B}(0, \delta) \text{ et } \frac{d^3}{dr^3} U(r) = 0 \text{ sur } \mathbb{B}(0, \delta).$$

## Corollaire du Théorème de Schild

Pour  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\bar{\Omega})$ , la mesure associée à la solution  $U$  de (13) n'a pas de partie atomique.

# La réaction au contact n'est ni à densité ni atomique.

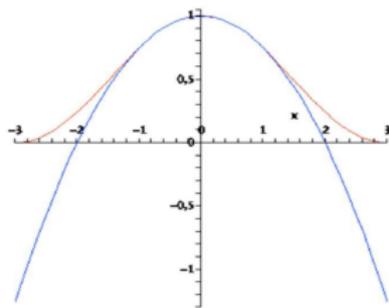


FIG.: plaque épousant un obstacle  $\psi(r) = 1 - r^2/4$  suivant un disque de rayon  $\delta$ .

$$\frac{d^3}{dr^3} U(r) > 0 \text{ sur } \Omega \setminus \mathbb{B}(0, \delta) \text{ et } \frac{d^3}{dr^3} U(r) = 0 \text{ sur } \mathbb{B}(0, \delta).$$

## Corollaire du Théorème de Schild

Pour  $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$ ,  $F \in L^2(\Omega)$ ,  $\psi \in C^2(\overline{\Omega})$ , la mesure associée à la solution  $U$  de (13) n'a pas de partie atomique.

# Résultat de stabilité « à la Schaeffer »

## Théorème de stabilité pour le bilaplacien (Léger-Pozzolini - 2007)

Soient  $\Omega$  un  $C^\infty$ -domaine borné de  $\mathbb{R}^2$ ,  $\psi \equiv 0$  et  $G = 1$ . Considérons le problème

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k} \text{ vérifiant} \\ \inf_{V \in \mathbb{k}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} |\Delta V|^2 - FV d\Omega \end{array} \right.$$

avec  $\mathbb{k} := \{V \in \mathbb{H}^2(\Omega) / V|_{\partial\Omega} = 1, V \geq 0 \text{ sur } \Omega\}$

et supposons que pour  $F^\circ \in C^\infty(\overline{\Omega})$ , les deux conditions suivantes soient satisfaites :

$$(8) \quad \begin{array}{l} (i) \quad -F^\circ \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}^\circ. \\ (ii) \quad \mathcal{I}^\circ := \mathcal{I}(F^\circ) \text{ soit une surface lisse à bord, (i.e } C^\infty). \end{array}$$

Alors pour  $F$  suffisamment proche de  $F^\circ$  dans  $C^\infty(\overline{\Omega})$ ,  $\mathcal{I}(F)$  est une surface lisse difféomorphe à  $\mathcal{I}(F^\circ)$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,

$\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \rightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit **résoluble**. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes  
 pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \rightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  
 $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit **résoluble**. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution  
 est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes  
 pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0 \|(u, F)\|_{\lambda+m})$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  
 $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution  
 est également de classe  $C^\infty$ .

# Stratégie générale 1

## Théorème des fonctions implicites (D. Schaeffer - 1975)

Soient  $\mathcal{O} \subset C^\sigma(\Gamma^\circ) \times C^\sigma(\bar{\Omega})$  voisinage ouvert de  $(0, 0)$ ,  
 $\mathbb{T}$  un opérateur non-linéaire d'ordre  $m$  vérifiant les cinq hypothèses suivantes pour  $\lambda \geq \sigma$  :

(H1)  $\mathbb{T} : \mathcal{O} \longrightarrow C^{\sigma-m}(\Gamma^\circ)$  tel que  $\mathbb{T}[0, 0] = 0$  ;

(H2)  $\|\mathbb{T}[u, F]\|_\lambda \leq c_0 (\|(u, F)\|_{\lambda+m} + 1)$  ;

(H3)  $\|\mathbb{T}[u, F_1] - \mathbb{T}[u, F_2]\|_{\sigma-m} \leq c_1 \|F_1 - F_2\|_\sigma$  ;

(H4)  $\exists \mathbb{L}_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^\sigma(\Gamma^u), C^{\sigma-m}(\Gamma^u))$  tel que

$\|\mathbb{T}[u+w, F] - \mathbb{T}[u, F] - \mathbb{L}_{u,F}(w)\|_{\sigma-m} \leq c_2 (\|\mathbb{T}[u, F]\|_\sigma \|w\|_\sigma + \|w\|_\sigma^2)$  ;

(H5)  $\exists \ell_{u,F} \in \mathcal{L}^*(C^{\sigma+m}(\Gamma^u), C^\sigma(\Gamma^u))$  tel que  $\forall (u, F) \in \mathcal{O}'$ ,

$(\mathbb{L}_{u,F} \circ \ell_{u,F})(w) := w$  et

$\|\ell_{u,F}(w)\|_\lambda \leq c_3(\lambda) (\|w\|_{\lambda+m} + \|w\|_0) \|(u, F)\|_{\lambda+m}$ .

Alors il existe  $\epsilon > 0$  et  $\kappa \geq \lambda$  tels que pour tout  $F$  tel que  $\|F\|_\kappa \leq \epsilon$ , l'équation  $\mathbb{T}[u, F] = 0$  soit résoluble. De plus si  $F$  est de classe  $C^\infty$ , alors la solution est également de classe  $C^\infty$ .

# Perturbation de la frontière libre

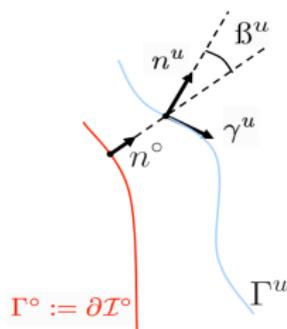


FIG.: Perturbation par  $\Upsilon^u$  de la courbe  $\Gamma^\circ := \partial\mathcal{I}^\circ$

- $\Upsilon^u : \partial\mathcal{I}^\circ \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\Upsilon^u(X) := X + u(X)n^\circ(X)$
- Soit la fonction  $\tilde{h}^u$  carré de la courbure (normale) :  $\tilde{h}^u = \frac{1}{(\cos(\beta^u))^2}$

# La fonctionnelle $\mathbb{T}[u, F]$

Appliquer ce théorème des fonctions implicites pour résoudre :

$$\mathbb{T}[u, F] = 0$$

Avec

$$\mathbb{T}[u, F] := \partial_{\bar{n}^0}^2 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

Où  $U^u$  est solution du problème aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U^u = F & \text{dans} & \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur} & \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur} & \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur} & \partial\mathcal{I}^u. \end{array} \right.$$

$\mathcal{I}^u$  est la région bordée par  $\Gamma^u$ .

# Visualisation du domaine extérieur

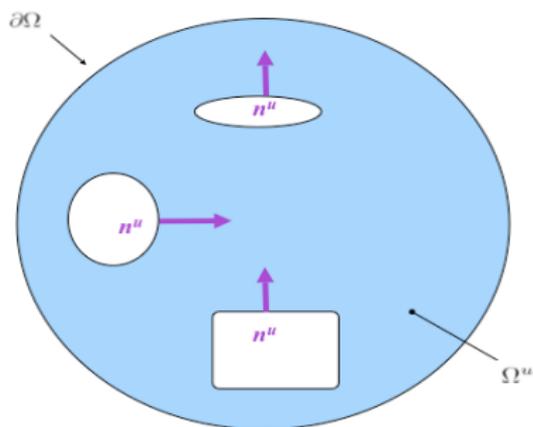
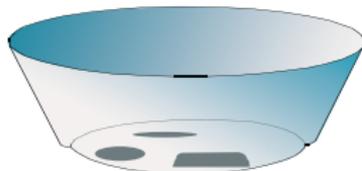


FIG.: Le domaine extérieur  $\Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u$ .



Calcul de  $\partial_u \Gamma$ 

$$\partial_u \Gamma([u, F]; v) = \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]_{|\varepsilon=0}$$

$$\partial_u \Gamma([u, F]; v) = \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 W & = & 0 \quad \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ W & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right.$$

Calcul de  $\partial_u \mathbb{T}$ 

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = \frac{d}{d\varepsilon} T[u + \varepsilon v, F]_{|\varepsilon=0}$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = \partial_{n^0}^2 W + v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{llll} \Delta^2 W & = & 0 & \text{sur } \Omega^u \\ W & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n W & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ W & = & 0 & \text{sur } \Gamma^u \\ \partial_{n^0} W + v \partial_{n^0}^2 U^u & = & 0 & \text{sur } \Gamma^u \end{array} \right.$$

# Calcul de $\mathbb{L}_{u,F}$

Sous la condition de raccord des courbures normales

$$\mathbb{T}[u, F] = \partial_{n^0}^2 U^u \circ \Upsilon^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = v \partial_{n^0}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u$$

L'opérateur de multiplication par  $\mathbb{L}_{u,F}$  est une approximation à erreur quadratique de  $\partial_u \mathbb{T}$  :

$$\mathbb{L}_{u,F} := \partial_{n^0}^3 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

# Calcul de $\mathbb{L}_{u,F}$

Sous la condition de raccord des courbures normales

$$\mathbb{T}[u, F] = \partial_{n^\circ}^2 U^u \circ \Upsilon^u = 0 \text{ sur } \Gamma^u$$

$$\partial_u \mathbb{T}([u, F]; v) = v \partial_{n^\circ}^3 U^u \text{ sur } \Gamma^u$$

L'opérateur de multiplication par  $\mathbb{L}_{u,F}$  est une **approximation à erreur quadratique** de  $\partial_u \mathbb{T}$  :

$$\mathbb{L}_{u,F} := \partial_{n^\circ}^3 U^u \circ \Upsilon^u \text{ sur } \Gamma^u$$

# Dérivées sur la frontière libre

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \Delta^2 U^u & = & F \quad \text{dans} \quad \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u & = & 1 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \\ \partial_n U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \\ U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u & = & 0 \quad \text{sur} \quad \partial\mathcal{I}^u. \end{array} \right.$$

## Proposition

Soit  $U^u$  la solution de (9). Alors

$$\partial_{n^\circ}^4 U^u = \cos^4(\beta^u) F, \quad \text{sur } \Gamma^u$$

pourvu que  $U^u = \partial_{n^\circ} U^u = \partial_{n^\circ}^2 U^u = 0$  sur  $\Gamma^u$ .

# Définition de $\ell_{U,F}$

$$\ell_{U,F} := \frac{1}{\mathbb{L}_{U,F}}$$

Dans un voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$  ( $t \geq 0$ ) :

$$\begin{aligned}
 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^\circ(X, 0)}{=0} + \\
 &\quad \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^\circ(X, 0)}{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 U^\circ(X, 0) \\
 &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 U^\circ(X, 0) + o(t^4).
 \end{aligned}$$

Alors  $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ > 0$  sur  $\Gamma^\circ$  puisque  $\Gamma^\circ$  est compacte et que  $\partial_{n^\circ}^4 U^\circ = F^\circ$  sur  $\Gamma^\circ$ , avec  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}^\circ$ .

# Définition de $\ell_{U,F}$

$$\ell_{U,F} := \frac{1}{\mathbb{I}_{U,F}}$$

Dans un voisinage tubulaire de  $\Gamma^\circ$  ( $t \geq 0$ ) :

$$\begin{aligned} 0 \leq U^\circ(X, t) &= \overbrace{U^\circ(X, 0)}{=0} + \overbrace{t \partial_{n^\circ} U^\circ(X, 0)}{=0} + \\ &\quad \overbrace{\frac{t^2}{2} \partial_{n^\circ}^2 U^\circ(X, 0)}{=0} + \frac{t^3}{6} \partial_{n^\circ}^3 U^\circ(X, 0) \\ &\quad + \frac{t^4}{4!} \partial_{n^\circ}^4 U^\circ(X, 0) + o(t^4). \end{aligned}$$

Alors  $\partial_{n^\circ}^3 U^\circ > 0$  sur  $\Gamma^\circ$  puisque  $\Gamma^\circ$  est compacte et que  $\partial_{n^\circ}^4 U^\circ = F^\circ$  sur  $\Gamma^\circ$ , avec  $-F^\circ \geq \delta_0 > 0$  sur  $\mathcal{I}^\circ$ .

# La solution trouvée est la bonne ...

## Proposition

Soit  $(u, F)$  satisfaisant  $\mathbb{T}[u, F] = 0$ , et soit  $U^u$  solution de

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{dans } \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases}$$

Alors pour  $u$  suffisamment petit, et  $F$  proche de  $F^\circ$ , on a :  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$ .

Ceci achève la preuve.

# La solution trouvée est la bonne ...

## Proposition

Soit  $(u, F)$  satisfaisant  $\mathbb{T}[u, F] = 0$ , et soit  $U^u$  solution de

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta^2 U^u = F & \text{dans } \Omega^u = \Omega \setminus \mathcal{I}^u. \\ U^u = 1 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \\ \partial_n U^u = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{I}^u. \end{cases}$$

Alors pour  $u$  suffisamment petit, et  $F$  proche de  $F^\circ$ , on a :  $U^u > 0$  sur  $\Omega \setminus \mathcal{I}^u$ .

Ceci achève la preuve.

# Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  ?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact  $K_\psi \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  :

( $h \equiv \psi$  sur  $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$ )

avec  $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$  sur  $\partial K_\psi$ ,

avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K_\psi$ ).

- Dans  $\mathbb{R}^1$  un segment, ou dans  $\mathbb{R}^2$  une surface régulière sont  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

# Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  ?

Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact  $K_\psi \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  :

( $h \equiv \psi$  sur  $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$ )

avec  $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$  sur  $\partial K_\psi$ ,

avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K_\psi$ ).

- Dans  $\mathbb{R}^1$  un segment, ou dans  $\mathbb{R}^2$  une surface régulière sont  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

# Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  ?

## Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact  $K_\psi \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  :

( $h \equiv \psi$  sur  $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$ )

avec  $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$  sur  $\partial K_\psi$ ,

avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K_\psi$ ).

- Dans  $\mathbb{R}^1$  un segment, ou dans  $\mathbb{R}^2$  une surface régulière sont  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

# Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  ?

## Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact  $K_\psi \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  :

( $h \equiv \psi$  sur  $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$ )

avec  $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$  sur  $\partial K_\psi$ ,

avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K_\psi$ ).

- Dans  $\mathbb{R}^1$  un segment, ou dans  $\mathbb{R}^2$  une surface régulière sont  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

# Admissibilité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

Une CNS pour la polyédricité dans  $\mathbb{H}^2(\Omega)$  ?

## Définition : admissibilité (J. Sokolowski)

Soit  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  tel que  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , avec  $\Omega (\subset \mathbb{R}^N)$  un domaine borné, à bord suffisamment régulier.

Un compact  $K_\psi \subset \Omega$  est dit  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible si  $\forall h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega)$  :

( $h \equiv \psi$  sur  $K_\psi \implies h \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) \cap \mathbb{H}^2(\Omega \setminus K_\psi)$ )

avec  $h = \psi, \partial_n h = \partial_n \psi$  sur  $\partial K_\psi$ ,

avec  $n$  normale extérieure à  $\partial K_\psi$ ).

- Dans  $\mathbb{R}^1$  un segment, ou dans  $\mathbb{R}^2$  une surface régulière sont  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.
- Les points isolés en dimension 1, et les courbes planes en dimension 2, ne sont pas  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

# Polyédricité dans $\mathbb{H}^2(\Omega)$

## Théorème (I. Sokolowski - 1993)

Soient  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$  puis  $\partial\Omega$  de classe  $C^2$ ,  $\mathbb{K} := \mathbb{k}_\psi$ . Soit  $\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(u^b)$  la projection métrique d'un élément  $h \in \mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ , et soit  $\nu$  la mesure de Radon positive définie par

$$\int_{\Omega} \varphi d\nu = \int_{\Omega} \Delta(\mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h) - h) \Delta\varphi d\Omega, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

Alors le convexe  $\mathbb{k}_\psi$  est polyédrique en  $u = \mathbf{pr}_{\mathbb{K}}(h)$  si et seulement si le support de la mesure  $\nu$  associée à  $u$  est  $\mathbb{H}_0^2$ - $\psi$ -admissible.

Application pour une poutre en flexion sur  $\Omega := ]0, 1[$ 

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}, \\ \int_{\Omega} u''(v - u)'' dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right.$$

## Théorème : différentiabilité dans le cas polyédrique

Dans le problème (11), posons  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $f_0 \in L^2(\Omega)$  telle que :

- (i)  $\psi^{(4)} - f_0 \geq \delta_0 > 0$  p.p. sur  $\mathcal{I}(f_0)$  ;
- (ii) la zone de contact  $\mathcal{I}(f_0)$  est  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible ;

Soit  $f_t := f_0 + th$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et  $h \in L^2(\Omega)$ .

Alors  $u'_0(\cdot, h) := z_0$  existe et  $z_0 = 0$  sur  $\mathcal{I}(f_0)$  et

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h, & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(f_0), \\ z_0 = z'_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \text{ et } \partial\mathcal{I}(f_0) \end{array} \right.$$

Application pour une poutre en flexion sur  $\Omega := ]0, 1[$ 

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in \mathbb{k} = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq \psi\}, \\ \int_{\Omega} u''(v - u)'' dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx, \quad \forall v \in \mathbb{k}. \end{array} \right.$$

## Théorème : différentiabilité dans le cas polyédrique

Dans le problème (11), posons  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ , et  $f_0 \in L^2(\Omega)$  telle que :

- (i)  $\psi^{(4)} - f_0 \geq \delta_0 > 0$  p.p. sur  $\mathcal{I}(f_0)$  ;
- (ii) la zone de contact  $\mathcal{I}(f_0)$  est  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissible ;

Soit  $f_t := f_0 + th$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et  $h \in L^2(\Omega)$ .

Alors  $u'_0(\cdot, h) := z_0$  existe et  $z_0 = 0$  sur  $\mathcal{I}(f_0)$  et

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{ll} z_0^{(4)} = h, & \text{sur } \Omega \setminus \mathcal{I}(f_0), \\ z_0 = z_0' = 0, & \text{sur } \partial\Omega \text{ et } \partial\mathcal{I}(f_0) \end{array} \right.$$

## Flexion d'une poutre encastree sur un obstacle plat 1

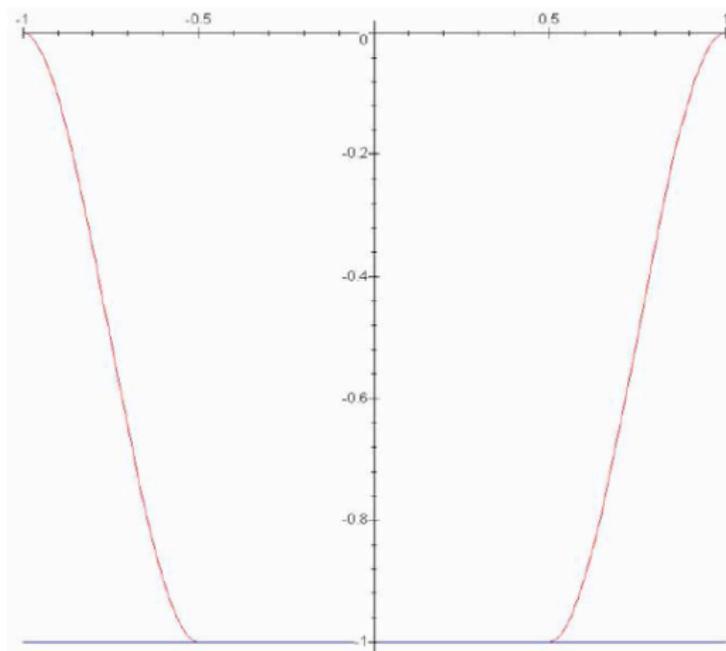


FIG.: poutre soumise à un champ de forces  $f(x, t) = -t$ , au-dessus d'un obstacle  $\psi(x) = -1$  : la zone de contact est un segment  $[-y, y]$ , avec  $y = 1 - \sqrt[4]{\frac{72}{t}}$ , pour  $t > 72$ .

## Flexion d'une poutre encastree sur un obstacle plat 2

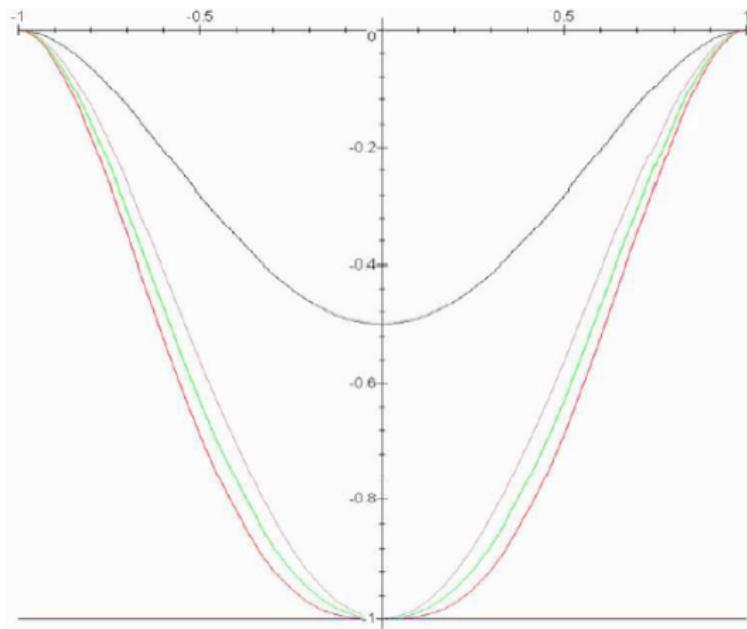


FIG.: poutre soumise à un champ de forces  $f(x, t) = -t$ , au-dessus d'un obstacle  $\psi(x) = -1$  : contact tangent avec réaction ponctuelle  $t = 25$   
 contact avec étalement imminent et réaction ponctuelle  $t = 72$ .

# Valeur optimale & problème de l'obstacle pour la plaque

Trouver  $u_\lambda \in \mathbb{K} / \inf_{v \in \mathbb{K}_{CH}} J(v, t) = Val(u_t)$

$$Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(Q) + o(t^2).$$

$$Val(u_t) \geq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(QR) + o(t^2)$$

Quand la force  $F$  varie...

L'objectif est de savoir calculer  $\partial_F U(F)$  avec  $F \in L^2(\Omega)$  et  $U := U(F) \in \mathbb{k}_\psi$  minimisant l'énergie

$$\min_{V \in \mathbb{k}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

$\mathbb{k}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$

# Valeur optimale & problème de l'obstacle pour la plaque

Trouver  $u_\lambda \in \mathbb{K}$  /  $\inf_{v \in \mathbb{K}_{CH}} J(v, t) = Val(u_t)$

$$Val(u_t) \leq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(Q) + o(t^2).$$

$$Val(u_t) \geq Val(u_0) + tVal(L) + \frac{t^2}{2} Val(QR) + o(t^2)$$

Quand la force  $F$  varie...

L'objectif est de savoir calculer  $\partial_F U(F)$  avec  $F \in L^2(\Omega)$  et  $U := U(F) \in \mathbb{K}_\psi$  minimisant l'énergie

$$\min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

$\mathbb{K}_\psi := \{V \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / V \geq \psi \text{ dans } \Omega\}$

## Ensembles tangents d'ordre 1 &amp; 2

- Le cône tangent à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in X / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\} = \overline{\text{Cs}}_{\mathbb{K}}(u)$$

- L'ensemble tangent extérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}^2(u) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

- L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

## Ensembles tangents d'ordre 1 &amp; 2

- Le cône tangent à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u)/t = \{h \in X / \text{dist}(u + th, \mathbb{K}) = o(t), t \geq 0\} = \overline{\text{Cs}}_{\mathbb{K}}(u)$$

- L'ensemble tangent extérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}^2(u) := \limsup_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

- L'ensemble tangent intérieur d'ordre 2 à  $\mathbb{K}$  en  $u$  :

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u) := \liminf_{t \downarrow 0} (\mathbb{K} - u - th) / \left(\frac{1}{2}t^2\right)$$

## Calcul de l'espace tangent intérieur à l'ordre 2

## Proposition

Soient  $\mathbb{H} := \mathbb{H}_0^2(\Omega)$ ,  $\psi \in \mathbb{H}^2(\Omega)$   $\mathbb{K} := \mathbb{k}_\psi$  avec  $\psi < 0$  sur  $\partial\Omega$ ,  $u \in \mathbb{K}$  et  $h \in T_{\mathbb{K}}(u) := \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I} = \{u = \psi\}\}$  Alors :  
Le cône tangent intérieur d'ordre 2 s'écrit

$$T_{\mathbb{K}}^{i,2}(u, h) = \{w \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / w(X) \geq s_{u,h}(X), \forall X \in \bar{\Omega}\},$$

où la fonction  $s_{u,h} : \bar{\Omega} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est définie par

$$s_{u,h}(X) := \begin{cases} 0, & \text{si } X \in \text{int}(\mathcal{I}), \quad \text{et } h(X) = 0, \\ \theta_{u,h}(X), & \text{si } X \in \partial\mathcal{I}, \quad \text{et } h(X) = 0, \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec

$$\theta_{u,h}(X) := \limsup_{\substack{X' \rightarrow X \\ (u-\psi)(X') > 0}} \frac{([-h(X')])_+^2}{2(u(X') - \psi(X'))}$$

# Finitude du $\sigma$ -terme pour une plaque en flexion sur $\psi$

$$(13) \quad \min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

## Théorème

Soient  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $\Omega$  un domaine du plan de classe  $C^{4,\alpha}$ .

Supposons : **(H1)** les lignes de contact sont des courbes de classe  $C^2$  et

$\forall X \in \mathcal{I}_0^{ess}$ ,  $\partial_n^2(U_0 - \psi)(X) > 0$ .

**(H2)** le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{I}_0^{ess}$  est fini.

**(H3)**  $\text{Supp}(\mu_0)$  est union finie de surfaces  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

Alors le problème quadratique (Q) associé à (13)

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\mathcal{I}_0^{ess}} \theta_{Z, U_0} d\mu_0$$

admet une solution unique  $Z_0$ , avec :

$\theta_{Z, U_0}(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$  fini pour tout  $Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \text{Supp}(\mu_0), v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0 \setminus \text{Supp}(\mu_0)\}$ .

Finitude du  $\sigma$ -terme pour une plaque en flexion sur  $\psi$ 

$$(13) \quad \min_{V \in \mathbb{K}_\psi} J(V, F) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\Delta V|^2 d\Omega - \int_{\Omega} FV d\Omega$$

## Théorème

Soient  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $\Omega$  un domaine du plan de classe  $C^{4,\alpha}$ .

Supposons : **(H1)** les lignes de contact sont des courbes de classe  $C^2$  et

$\forall X \in \mathcal{I}_0^{ess}$ ,  $\partial_n^2(U_0 - \psi)(X) > 0$ .

**(H2)** le nombre de composantes connexes de  $\mathcal{I}_0^{ess}$  est fini.

**(H3)**  $\text{Supp}(\mu_0)$  est union finie de surfaces  $\mathbb{H}^2$ - $\psi$ -admissibles.

Alors le problème quadratique (Q) associé à (13)

$$\inf_{Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0)} \int_{\Omega} ((\Delta Z)^2 - HZ) d\Omega - \int_{\mathcal{I}_0^{ess}} \theta_{Z, U_0} d\mu_0$$

admet une solution unique  $Z_0$ , avec :

$\theta_{Z, U_0}(X^0) = \varsigma_{U_0, Z}(X^0) = (\nabla_n Z(X^0))^2 (\nabla_n^2(U_0(X^0) - \psi(X^0)))^{-1}$  fini pour tout  $Z \in \text{Cr}_{\mathbb{K}}(U_0) = \{v \in \mathbb{H}_0^2(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \text{Supp}(\mu_0), v \geq 0 \text{ sur } \mathcal{I}_0 \setminus \text{Supp}(\mu_0)\}$ .

## Différentiabilité dans le cas non-polyédrique

## Théorème

Plaçons-nous sous les hypothèses **(H1)-(H3)**, imposons  $\psi \in \mathbb{H}^4(\Omega)$ ,  $\psi|_{\partial\Omega} < 0$ , et  $\Omega$  un domaine du plan de classe  $C^{4,\alpha}$ .

Soit  $U_0$  la solution de (13) associée à  $F_0$ , alors nous avons l'estimation suivante de la fonction valeur optimale :

$$\text{Val}(U_t) - \text{Val}(U_0) - t\text{Val}(L) = \frac{t^2}{2} \text{Val}(Q) + o(t^2)$$

En outre  $Z_0(\cdot) := U'_0(\cdot, H)$  existe et vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta^2 Z_0 = H + \theta_{Z_0, U_0} \mu_{L,0} & \text{sur } \Omega \setminus (\mathcal{I}(F_0) \setminus \mathcal{T}(F_0)) \\ Z_0 = 0 = \partial_n Z_0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \partial_n Z_0 = 0 & \text{sur } \partial\text{Supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \\ Z_0 = 0 & \text{sur } \text{Supp}(\mu_0) \setminus \mathcal{T}(F_0) \end{array} \right.$$

## Flexion d'une poutre encastrée sur un obstacle plat

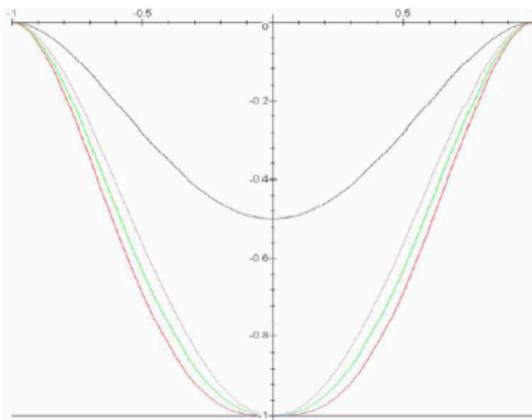


FIG.: poutre soumise à un champ de forces  $f(x, t) = -t$ , au-dessus d'un obstacle  $\psi(x) = -1$  : contact tangent avec réaction ponctuelle  $24 \leq t < 72$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0^{(4)} = h + \theta_{z_0, u_0}(0) \mu_0^0 \delta_0 \quad \text{sur } ]-1, 1[, \\ z_0(-1) = 0 = z_0(1) \\ z_0'(-1) = 0 = z_0'(1) \end{array} \right.$$

Quand il y a raccord des courbures : pour  $t = 72$  ???

## Flexion d'une poutre encastrée sur un obstacle plat

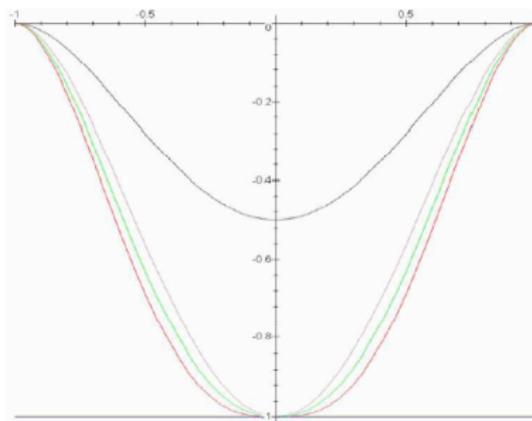


FIG.: poutre soumise à un champ de forces  $f(x, t) = -t$ , au-dessus d'un obstacle  $\psi(x) = -1$  : contact tangent avec réaction ponctuelle  $24 \leq t < 72$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0^{(4)} = h + \theta_{z_0, u_0}(0) \mu_0^0 \delta_0 \quad \text{sur } ]-1, 1[, \\ z_0(-1) = 0 = z_0(1) \\ z_0'(-1) = 0 = z_0'(1) \end{array} \right.$$

Quand il y a raccord des courbures : pour  $t = 72$  ???

# Instabilité de la zone de contact : poutre

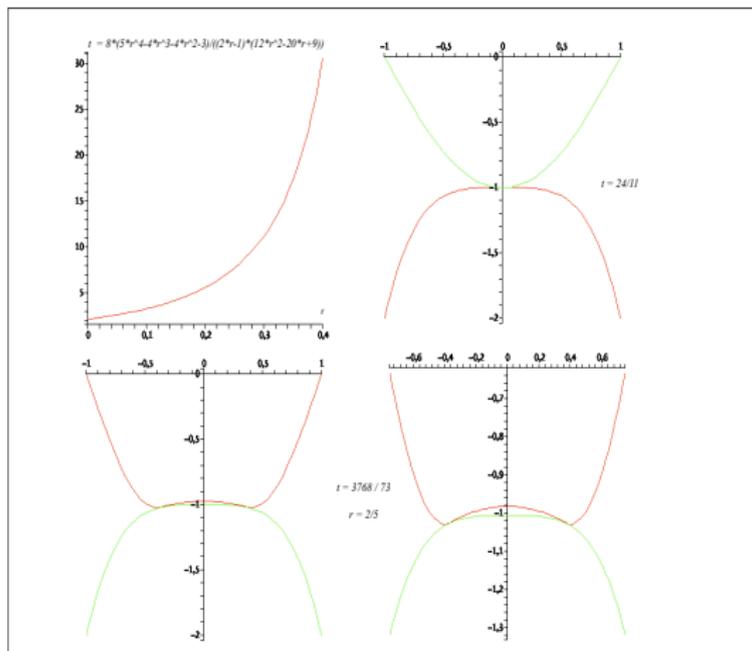


FIG.: poutre élastique en appui simple soumise à un champ de forces  $f(x, t) = -t\delta_{x=1/2} - t\delta_{x=-1/2}$ , au-dessus d'un obstacle  $\psi(x) = -1 - x^4$  : la zone de contact est formée de 2 points si  $t > 24/9$  ; d'un seul point si  $24/11 \leq t < 24/9$ .

# Instabilité de la zone de contact : plaque circulaire

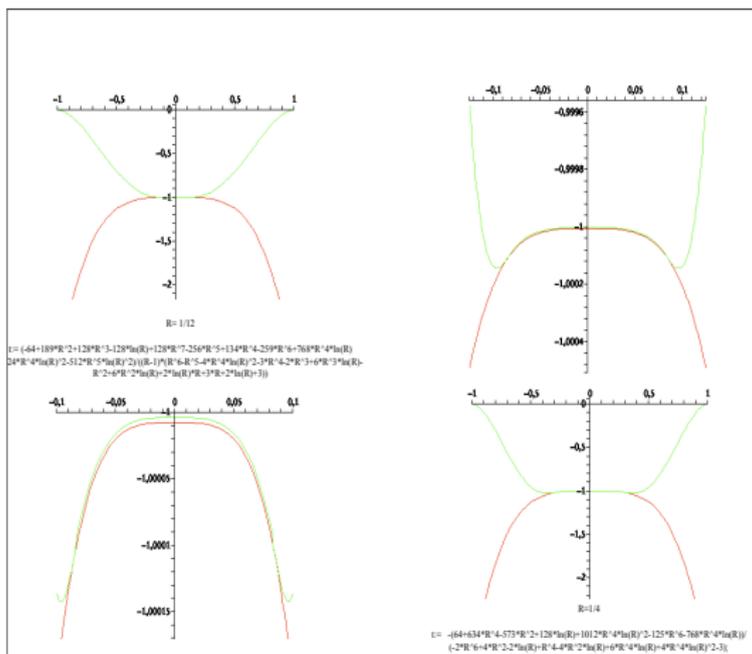


FIG.: plaque élastique circulaire encastée en  $r = 1$  soumise à un champ de forces  $F(r, t) = -t$  au-dessus d'un obstacle  $\psi(r) = -1 - 2r^4$  :

la zone de contact est un disque si  $t > 128$ , c'est un cercle pour  $64 < t < 128$ .

# Conclusions & Perspectives

# En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

# En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

# En résumé :

- Conjecture de Schaeffer : Variante d'un Théorème de R. Monneau.
- Résultat géométrique de stabilité pour le bilaplacien.
- Calculs des dérivées directionnelles pour le problème de contact de la plaque en flexion.

# Stabilité au sens de Schaeffer pour les plaques de von Kármán

Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , l'équilibre d'une plaque de von Kármán au-dessus d'un obstacle  $\psi$  est donné par  $(U, \chi)$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} D\Delta^2 U = [\Theta + \chi; U] + F + \mu(F) & \text{dans } \Omega. \\ \Delta^2 \chi = -[U; U] & \text{dans } \Omega. \\ U = \partial_n U = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ \chi = \partial_n \chi = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \\ 0 \leq (U - \psi) \perp \mu(F) \geq 0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right.$$

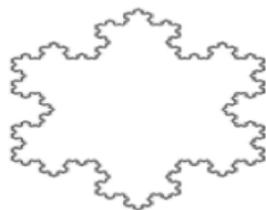
En adaptant le résultat de B. Schild :  $U \in C^2(\Omega)$

# Sur la frontière libre

**Conjecture :** *Dans le problème de l'obstacle pour une plaque linéaire en flexion, la frontière libre bordant une partie d'intérieur non-vide de  $\mathcal{I}(F)$  est localement de mesure de Hausdorff finie sous la condition de non-dégénérescence :*

$$\Delta^2 \psi - F \geq \delta_0 > 0 \text{ sur } \mathcal{I}(F),$$

avec  $\psi$ ,  $F$  et  $\Omega$  lisses.



# Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

# Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

# Sensibilité et Bifurcations pour les plaques de von Kármán

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } U \in \mathbb{k}_\psi \text{ tel que :} \\ U = \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda)), \\ \text{avec } \mathbf{B}(U, \lambda) := -\lambda \mathbf{L}(U) + \mathbf{C}(U) - \check{F}. \end{array} \right.$$

- L'allure du diagramme de bifurcation est connue (méthodes topologiques)
- Propriétés de différentiabilité de

$$\lambda \longmapsto \mathbf{pr}_{\mathbb{k}_\psi}(\mathbf{B}(U, \lambda))$$

Merci de votre attention...

जयत्