



HAL
open science

Contribution à la l'analyse et à la simulation numériques des équations cinétiques décrivant un plasma chaud

Stéphane Dellacherie

► **To cite this version:**

Stéphane Dellacherie. Contribution à la l'analyse et à la simulation numériques des équations cinétiques décrivant un plasma chaud. Mathématiques [math]. Université Paris-Diderot - Paris VII, 1998. Français. NNT: . tel-00479816

HAL Id: tel-00479816

<https://theses.hal.science/tel-00479816>

Submitted on 3 May 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ
DENIS DIDEROT**

Spécialité

MATHÉMATIQUES

Présentée par

Stéphane DELLACHERIE

Pour obtenir le titre de Docteur de l'Université Denis DIDEROT PARIS VII

Sujet de la thèse

**CONTRIBUTION À L'ANALYSE ET À LA SIMULATION
NUMÉRIQUES DES ÉQUATIONS CINÉTIQUES
DÉCRIVANT UN PLASMA CHAUD**

Laboratoire d'accueil

**COMMISSARIAT à l'ÉNERGIE ATOMIQUE
Centre de BIII**

Soutenue le mardi 3 novembre 1998 devant le jury composé de

| | | |
|-------------------------|--------------------|--|
| Claude BARDOS | Président du jury | ENS Cachan et CNRS |
| François GOLSE | Directeur de thèse | ENS Ulm et Université Paris VII |
| Benoît PERTHAME | Rapporteur | ENS Ulm et Université Paris VI |
| Pierre DEGOND | Rapporteur | Université Toulouse III et CNRS |
| Bruno DESPRÉS | Examinateur | Université Paris VI et CEA-BIII |
| Rémi SENTIS | Examinateur | Ingénieur de Recherche CEA-BIII |
| Frédéric DONEDDU | Examinateur | Ingénieur de Recherche CEA-Saclay |
| Bruno DUBROCA | Examinateur | Ingénieur de Recherche CEA-CESTA |

(...)

Ils se dirent quelques mots et la musique débuta ;

ils prirent l'accord, elle sur le piano, lui sur le violon.

Ils jouèrent la « Sonate à Kreutzer » de Beethoven.

Connaissez-vous le premier presto? Le connaissez-vous? Ah! ...

Posdnicheff poussa un soupir et se tut pendant longtemps.

- Chose terrible que cette sonate! Surtout ce presto!

Et chose terrible en général que la musique!

(...)

« La Sonate à Kreutzer », chapitre XXIII, Léon Tolstoï

À mes Parents et à ma Sœur Delphine,

À mes Grands-Parents,

À mon Oncle Claude, Clown et Mathématicien,

À ma Famille,

À mes amis Musiciens et Mélomanes,

À la Chaconne, œuvre magistrale du Répertoire.

Remerciements

Je remercie le Commissariat à l'Énergie Atomique pour m'avoir accordé une bourse de recherche de trois années et pour m'avoir permis d'intégrer complètement le Laboratoire Codes Nucléaire/Plasma (CEA-BIII/DCSA/MLS/CNP).

Mes remerciements vont bien-sûr en particulier à mes directeurs de thèse Rémi Sentis et François Golse qui ont su m'orienter dans mes recherches tout en me laissant une excellente autonomie. Au delà de l'aspect universitaire, c'est aussi le côté humain de l'encadrement dont je leur suis redevable.

Je remercie chaleureusement Christophe Buet, ingénieur de recherche au CEA, avec qui une collaboration amicale et fructueuse a pu se nouer. Un grand merci aussi à Bruno Després et à Michel Cessenat qui ont relu ma thèse avec beaucoup d'attention.

Parmi les ingénieurs du CEA qui, par leur accueil et leur disponibilité, ont su me mettre en confiance, je citerai plus particulièrement Gérard Samba et Christian Quine. Et, de façon plus générale, merci à toute l'équipe du Laboratoire CNP.

Je remercie aussi Danièle Babonneau, ingénieur de recherche au CEA, ainsi que Danièle et François Mourot qui m'ont convaincu de postuler à une bourse de thèse du CEA.

Que Claude Lemouillour soit aussi remerciée pour sa gentillesse et son efficacité.

À tous les thésards et thésardes du département DCSA, que vous soyez pianiste, clarinetteste, danseuse, joueur de booling ou encore amateur de Luis Sepúlveda : un grand merci pour votre amitié et votre bonne humeur.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction générale | 11 |
| 1 Sur la résolution numérique d'un modèle cinétique ionique couplé à une équation d'énergie électronique | 17 |
| Introduction de la première partie | 19 |
| 1 Établissement du modèle et de ses propriétés | 23 |
| 1.1 Équation cinétique pour la population ionique | 24 |
| 1.1.1 L'opérateur de collision ion / ion | 24 |
| 1.1.2 L'opérateur de collision ion / électron et l'opérateur de Fokker-Planck linéaire | 25 |
| 1.2 Quasi neutralité | 26 |
| 1.3 Équations macroscopiques ionique et électronique | 28 |
| 1.3.1 Bilan ionique | 28 |
| 1.3.2 Équation d'énergie électronique | 29 |
| 1.4 Résumé du modèle cinétique et limite fluide formelle | 30 |
| 1.5 Théorèmes H et entropie totale du plasma | 31 |
| 1.5.1 Théorème H pour l'opérateur de collision ion / ion | 31 |
| 1.5.2 Théorème H pour l'opérateur de collision ion / électron | 31 |
| 1.5.3 Inégalité entropique pour le système général dans le cas mono-espèce | 34 |
| 2 Principe général de la méthode numérique | 37 |
| 2.1 Schéma général | 38 |
| 2.2 Traitement du champ électrique en géométrie cartésienne | 40 |
| 2.3 Résolution de l'équation d'énergie électronique et évaluation du gradient de pression électronique | 42 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3 | Résolution de l'opérateur de collision ion / électron en géométrie cartésienne | 45 |
| 3.1 | Sur le modèle continu | 46 |
| 3.1.1 | Propriétés de conservation sur un domaine borné | 46 |
| 3.1.2 | Sur la convergence vers l'équilibre thermodynamique du système continu (3.1) | 47 |
| 3.2 | Sur le schéma semi-discret | 48 |
| 3.3 | Traitement explicite | 64 |
| 3.3.1 | Positivité et conservation de l'équilibre thermodynamique | 65 |
| 3.3.2 | Décroissance de l'entropie et convergence vers l'équilibre thermodynamique | 70 |
| 3.3.3 | Lien entre la moyenne entropique et la moyenne de Chang et Cooper | 76 |
| 3.3.4 | Discussion sur les avantages et inconvénients de la moyenne entropique | 77 |
| 3.3.5 | Conclusion sur l'approche explicite | 79 |
| 3.4 | Traitement semi-implicite | 80 |
| 3.4.1 | Conservation de l'équilibre thermodynamique du schéma semi-implicite | 81 |
| 3.4.2 | Remarque sur la positivité du schéma semi-implicite | 82 |
| 4 | Traitement du champ électrique et des collisions ion / électron en géométrie axisymétrique | 85 |
| 4.1 | L'opérateur de collision ion / électron en coordonnées axisymétriques | 85 |
| 4.2 | Traitement du champ électrique | 87 |
| 4.3 | Traitement semi-implicite des collisions ion / électron | 88 |
| 5 | Résultats numériques dans le cas cartésien pour l'opérateur de collision ion / électron | 93 |
| 6 | Sur un schéma numérique semi-discret appliqué à l'opérateur de Fokker-Planck ion/ion isotrope | 101 |
| 6.1 | L'opérateur de collision ion / ion isotrope | 102 |
| 6.2 | Sur le schéma semi-discret | 102 |
| 6.3 | Résultats numériques | 115 |
| | Conclusion de la première partie | 117 |
| | Annexe | 118 |

| | | |
|----------|--|------------|
| A | Discrétisation de l'équation de Fokker-Planck linéaire en géométrie cartésienne: utilisation de la moyenne entropique | 119 |
| A.1 | Définition du schéma numérique | 120 |
| A.2 | Positivité du schéma | 121 |
| A.3 | Convergence vers l'équilibre thermodynamique | 124 |
| A.4 | Remarques | 126 |
| B | Sur le schéma numérique de Chang et Cooper appliqué à l'opérateur de Fokker-Planck linéaire | 129 |
| B.1 | L'opérateur de collision ion / électron: rappels | 130 |
| B.2 | Discrétisation de l'équation de Fokker-Planck linéaire en géométrie cartésienne: utilisation du schéma de Chang et Cooper | 131 |
| B.2.1 | Le schéma explicite de Chang et Cooper | 132 |
| B.2.2 | Équivalence entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau non logarithmique du schéma de Chang et Cooper | 134 |
| B.3 | Positivité du schéma | 136 |
| B.4 | Convergence vers l'équilibre thermodynamique | 138 |
| B.5 | Utilisation du schéma de Chang et Cooper dans le cas des collisions ion / électron | 140 |
| B.6 | Conclusion | 141 |
| C | Sur un modèle cinétique multi-espèce à un degré de liberté | 143 |
| C.1 | Établissement d'un modèle cinétique multi-espèce à un degré de liberté | 144 |
| C.1.1 | L'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) | 144 |
| C.1.2 | L'opérateur de collision $C_{\alpha\alpha}$ | 150 |
| C.2 | Équations d'Euler multi-espèce | 152 |
| C.3 | Développement asymptotique au second ordre de l'opérateur de collision ion / électron | 155 |
| D | Publications | 159 |
| 2 | Couplage instationnaire cinétique/fluide dans un plasma: vers un traitement cinétique du point chaud | 161 |
| | Introduction de la deuxième partie | 163 |
| 1 | Résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles planes: mise en œuvre d'un schéma cinétique lagrangien | 167 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 1.1 | Rappels sur les schémas cinétiques de Deshpande et de Perthame sur grille fixe | 168 |
| 1.2 | Extension en grille variable dans le cas monodimensionnel plan des schémas cinétiques de Deshpande et de Perthame | 170 |
| 1.2.1 | Résolution de l'équation d'advection pure sur un maillage en mouvement : extension du schéma upwind classique . . . | 170 |
| 1.2.2 | Établissement du schéma cinétique sur une grille variable pour les équations d'Euler | 176 |
| 1.2.3 | Conditions aux limites et première interprétation cinétique du schéma | 180 |
| 1.3 | Résolution en variables lagrangiennes | 181 |
| 1.3.1 | Mise en place du schéma cinétique lagrangien : calcul de la vitesse lagrangienne aux interfaces | 181 |
| 1.3.2 | Passage à l'ordre 2 | 184 |
| 1.4 | Résultats numériques dans le cadre lagrangien | 185 |
| 1.4.1 | Équations d'Euler isentropiques | 186 |
| 1.4.2 | Équations d'Euler classiques | 187 |
| 1.5 | Conclusion | 189 |
| 2 | Couplage instationnaire de l'équation cinétique de Lions, Perthame et Tadmor avec sa limite fluide | 195 |
| 2.1 | Le modèle cinétique de Lions, Perthame et Tadmor | 195 |
| 2.2 | Résolution numérique de l'équation de L.P.T. | 198 |
| 2.2.1 | Phase d'advection et conditions aux limites | 199 |
| 2.2.2 | Phase de collisions | 200 |
| 2.3 | Couplage du modèle L.P.T. avec Euler isentropique et choix de la fonction χ pour la construction du schéma cinétique | 201 |
| 2.3.1 | Choix de la fonction χ | 201 |
| 2.3.2 | Interface cinétique / fluide lagrangienne « stricte » | 202 |
| 2.3.3 | Interface cinétique / fluide eulérienne mobile | 203 |
| 2.3.4 | Résumé de la technique de couplage | 205 |
| 2.4 | Résultats numériques | 206 |
| 2.4.1 | Équation de L.P.T. | 206 |
| 2.4.2 | Couplage L.P.T. / Euler isentropique | 207 |
| 2.5 | Conclusion | 208 |
| 3 | Couplage instationnaire de l'équation cinétique de Bhatnagar, Gross et Krook avec les équations d'Euler | 215 |
| 3.1 | L'équation cinétique de B.G.K. et sa limite fluide | 215 |
| 3.2 | Résolution numérique de l'équation de B.G.K. | 217 |

| | | |
|----------|--|------------|
| 3.3 | Traitement de l'interface cinétique / fluide et choix de la fonction χ pour la construction du schéma cinétique | 217 |
| 3.4 | Résultats numériques | 218 |
| 3.4.1 | Tube à choc de Sod avec $\gamma = 3$ et $\omega = 10^4$ | 218 |
| 3.4.2 | Tube à choc de Sod avec $\gamma = 3$ et $\omega = \omega(\rho)$ | 219 |
| 3.4.3 | Remarque sur le choix de la vitesse lagrangienne aux interfaces du maillage | 221 |
| 3.5 | Conclusion | 221 |
| 4 | Couplage cinétique / fluide dans un plasma : application à l'étude de la formation du point chaud | 227 |
| 4.1 | Le modèle physique | 228 |
| 4.2 | Résolution numérique des équations cinétiques | 229 |
| 4.3 | Résolution numérique des équations fluides | 230 |
| 4.3.1 | Principe de résolution | 230 |
| 4.3.2 | Traitement de la conductivité thermique électronique | 232 |
| 4.3.3 | Conditions aux limites | 233 |
| 4.3.4 | Test numérique : choc plan Mach 2 initié par un piston | 233 |
| 4.3.5 | Remarque | 234 |
| 4.4 | Mise en œuvre du couplage | 235 |
| 4.5 | Validation numérique du couplage : tube à choc de Sod | 236 |
| 4.6 | Application à l'étude de la formation du point chaud | 236 |
| 4.6.1 | Simulation d'un dépôt d'énergie « photonique » sur les électrons | 237 |
| 4.6.2 | Premier cas test de type FCI : couplage avec différents choix de grille pour le domaine fluide | 238 |
| 4.6.3 | Deuxième cas test de type FCI : effets cinétiques sur la fusion | 240 |
| 4.7 | De l'utilité de la moyenne entropique | 242 |
| | Conclusion de la deuxième partie | 253 |
| | Annexe | 254 |
| A | Calcul des demi-flux du schéma cinétique | 255 |
| A.1 | Équations d'Euler isentropiques | 256 |
| A.1.1 | Calcul de $\mathfrak{S}_{i+1/2}^{\pm}$ | 256 |
| A.1.2 | Calcul de $\wp_{i+1/2}^{\pm}$ | 257 |
| A.2 | Équations d'Euler | 258 |
| A.2.1 | Calcul de $\mathfrak{S}_{i+1/2}^{\pm}$ | 259 |
| A.2.2 | Calcul de $\wp_{i+1/2}^{\pm}$ | 260 |
| A.2.3 | Calcul de $\mathfrak{N}_{i+1/2}^{\pm}$ | 261 |

| | | |
|----------|---|------------|
| A.3 | Résumé | 261 |
| A.3.1 | Équations d'Euler isentropiques | 261 |
| A.3.2 | Équations d'Euler | 262 |
| B | Preuve de la proposition 1.5 | 265 |
| B.1 | Cas des équations d'Euler isentropiques | 265 |
| B.2 | Cas des équations d'Euler | 266 |
| | | |
| 3 | Évaluation de la distribution des particules α et des neutrons issus de la réaction de fusion thermonucléaire $D + T \rightarrow \alpha + n + 17,6 \text{ Mev}$ | 267 |
| | Introduction de la troisième partie | 269 |
| | | |
| 1 | Le modèle physique utilisé | 271 |
| 1.1 | Les équations de Boltzmann adaptées à la réaction de fusion $D + T \rightarrow \alpha + n + 17.6 \text{ Mev}$ | 272 |
| 1.1.1 | Le modèle de choc réactif | 273 |
| 1.1.2 | Cinématique de la réaction de fusion | 274 |
| 1.1.3 | Opérateurs de perte P_D et P_T | 276 |
| 1.1.4 | Opérateurs de gain G_α et G_n | 276 |
| 1.2 | À propos de la section efficace nucléaire σ_{DT} | 277 |
| 1.3 | Définition du taux de réaction nucléaire | 279 |
| | | |
| 2 | Convergence de G_α vers un Dirac en énergie | 283 |
| 2.1 | Mise en évidence des paramètres ε_α et ε_n | 283 |
| 2.2 | Convergence de G_α vers un Dirac en énergie | 286 |
| | | |
| 3 | Présentation de la méthode de Monte-Carlo utilisée pour l'étude numérique de la réaction $D + T \rightarrow \alpha + n$ | 291 |
| 3.1 | La méthode de Monte-Carlo appliquée au calcul d'intégrales | 291 |
| 3.2 | La méthode de Cheremissin : biaisage par des maxwelliennes | 293 |
| 3.3 | Calcul du taux de réaction nucléaire | 294 |
| 3.4 | Calcul des distributions f_α et f_n | 297 |
| 3.5 | Calcul des opérateurs de perte P_D et P_T | 300 |
| | | |
| 4 | Résultats numériques | 303 |
| 4.1 | Taux de réaction nucléaire | 304 |
| 4.1.1 | Calcul de τ à l'équilibre thermodynamique | 304 |
| 4.1.2 | Influence d'effets cinétiques sur la valeur de τ | 305 |
| 4.2 | Distribution des particules α et des neutrons | 309 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4.2.1 | Résultats en fonction de la température à l'équilibre thermodynamique | 309 |
| 4.2.2 | Lissage de G_α et G_n par une fonction analytique à l'équilibre thermodynamique | 310 |
| 4.2.3 | L'effet Doppler et la formule de Brysk | 314 |
| 4.2.4 | Influence des vitesses macroscopiques à l'équilibre thermodynamique: collision de plasmas | 316 |
| 4.2.5 | Exemple de calcul de G_α dans le cas où f_D et f_T ne sont plus maxwelliennes | 318 |
| 4.3 | Influence des paramètres numériques | 319 |
| 5 | Bilan d'énergie et évaluation des opérateurs P_D et P_T à l'équilibre thermodynamique local | 323 |
| 5.1 | Bilan d'énergie à l'équilibre thermodynamique | 323 |
| 5.2 | Étude théorique de l'influence des opérateurs de perte P_D et P_T sur la température du milieu | 327 |
| 5.2.1 | Premier cas | 327 |
| 5.2.2 | Deuxième cas | 330 |
| 5.2.3 | Résumé | 330 |
| 5.3 | Étude numérique | 330 |
| 5.3.1 | Évaluation de δE_α , δE_n et $\delta E_{\alpha,n}$ à l'équilibre thermodynamique | 330 |
| 5.3.2 | Calcul des opérateurs de perte P_D et P_T | 331 |
| | Conclusion de la troisième partie | 335 |
| | Annexe | 336 |
| A | Cinématique et calcul du jacobien | 337 |
| A.1 | Cinématique de la réaction | 337 |
| A.2 | Calcul du jacobien J | 338 |
| B | Majoration de la dispersion des particules α et des neutrons autour de leur vitesse de création standard | 341 |
| C | Validation de la méthode de Cheremissin pour l'étude d'un gaz raréfié | 347 |
| C.1 | Les équations de Boltzmann | 347 |
| C.2 | La méthode de Cheremissin | 348 |
| C.2.1 | Biaisage par des maxwelliennes | 348 |
| C.2.2 | Correction Cheremissin | 350 |
| C.3 | Résultats numériques | 351 |

| | | |
|-------|---|------------|
| C.3.1 | Relaxation de température | 351 |
| C.3.2 | Calcul d'un choc plan Mach 2 initié par un piston | 352 |
| | Conclusion générale | 357 |
| | Bibliographie | 359 |

Introduction générale

Depuis plusieurs décennies, le Commissariat à l'Énergie Atomique (CEA) étudie la possibilité de réaliser la fusion thermonucléaire du deutérium avec le tritium à l'aide de puissants lasers (on pourra consulter sur ce sujet [1] ainsi que les ouvrages généraux [2] et [3]).

L'idée est de comprimer et de chauffer une sphère de rayon de l'ordre du millimètre contenant un mélange de deutérium-tritium gazeux et cryogénique dans le but d'atteindre les conditions thermodynamiques de la fusion thermonucléaire. La compression est obtenue via un dépôt violent d'énergie sur la surface externe de la sphère de deutérium-tritium. Ce dépôt d'énergie peut être réalisé de deux façons :

- en attaque directe : le faisceau laser arrive directement sur la surface externe de la sphère ;

- en attaque indirecte : l'énergie laser est d'abord convertie en rayons X grâce à l'impact du laser sur la surface interne d'un cylindre contenant la sphère et formant ainsi une cavité (ce cylindre est habituellement constitué d'or et ses dimensions sont de l'ordre du centimètre). Puis, les rayons X éclairent la sphère.

Dans les deux cas, le dépôt d'énergie a pour effet de chauffer puis d'ioniser la surface externe de la sphère qui se détend dans le milieu environnant. Par « effet fusée », une onde de choc centripète est alors créée entraînant un effondrement de la sphère de deutérium-tritium sur elle-même. Notons que l'attaque indirecte a le mérite de permettre un dépôt d'énergie sur la sphère beaucoup plus uniforme que l'attaque directe, l'émission des rayons X étant isotrope ; malheureusement, cette technique entraîne une chute du rendement à cause de la conversion laser / rayons X.

Puis cette onde de choc centripète, en arrivant au centre de la sphère, augmente considérablement la température et la densité du milieu fusible permettant ainsi d'obtenir au centre les premières réactions de fusion thermonucléaire : on parle

ici de la *formation du point chaud*. On espère ensuite que ces premières réactions vont à leur tour chauffer le milieu et ainsi permettre l'auto-entretien des réactions de fusion et donc la formation d'une onde thermonucléaire partant du centre et brûlant le reste du deutérium-tritium: l'*ignition* est alors obtenue.

C'est parce que cette mise en condition de fusion de la sphère de deutérium-tritium est obtenue par un choc hydrodynamique que l'on parle de *Fusion par Confinement Inertiel* (une autre alternative serait de confiner le deutérium-tritium dans un tokamak à l'aide d'un puissant champ magnétique: c'est le cas de la *Fusion par Confinement Magnétique*). Remarquons que la *Fusion par Confinement Inertiel* revient à simuler en laboratoire le phénomène astrophysique de supernovae mais à des échelles de temps et d'espace beaucoup plus petites.

L'ensemble de ce processus - d'une durée de quelques nanosecondes - est très complexe car une très grande variété de phénomènes physiques ont lieu avec leur propre échelle caractéristique de temps et d'espace.

C'est ainsi que le dépôt direct ou indirect de l'énergie laser nécessite l'étude des phénomènes de type interactions laser / matière, phénomènes compliqués car engendrant bon nombre d'instabilités (instabilités de type Brillouin, Raman et filamentation: cf. [4] et [5]). Dans le cas de l'attaque indirecte, il faudra aussi étudier la physique de la conversion X (cf. [6]).

Ensuite, ce sont les problèmes hydrodynamiques de la propagation du choc dans un milieu à plusieurs températures (températures ionique, électronique et radiative) et constitué de plusieurs matériaux couplés à la présence d'un champ électro-magnétique (équations d'Euler de la magnétohydrodynamique) et couplés aux phénomènes de rayonnement qui doivent être traités (interaction photon / électron). Apparaissent alors des effets fortement non linéaires liés aux instabilités hydrodynamiques (instabilités de type Rayleigh-Taylor, Richtmyer-Meshkov) donnant naissance à la turbulence (cf. [7]).

Enfin, ce sont les réactions thermonucléaires qui doivent être décrites lors de la formation du point chaud puis la propagation de l'onde thermonucléaire lorsqu'il y a ignition. Une première approche est d'utiliser les équations d'Euler pour un plasma chaud c'est à dire les équations d'Euler avec températures ionique et électronique (et radiative) auxquelles on ajoute des termes sources pour la prise en compte de ces réactions de fusion. Un modèle plus précis sera celui constitué des équations cinétiques de Vlasov-Fokker-Planck (équations qui décrivent les interactions coulombiennes ion / ion et ion / électron) couplées à une équation de transport de l'énergie électronique, les réactions thermonucléaires étant décrites par un

modèle de type Boltzmann : seul ce modèle physique pourra prendre en compte les éventuels déséquilibres thermodynamiques du deutérium et du tritium, la résolution des équations d'Euler à plusieurs températures supposant implicitement que chaque composant du plasma est toujours à l'équilibre thermodynamique local avec lui-même.

On conçoit que la description tant physique que mathématique de tout ces phénomènes est source de grandes difficultés. Pour le physicien, il s'agira de montrer qu'il est possible d'isoler certaines étapes du processus décrit ci-dessus ; pour le mathématicien, outre l'étude théorique des équations (en particulier pour la turbulence), il s'agira de proposer des méthodes numériques suffisamment robustes et raisonnablement coûteuses en temps CPU pour simuler ces différentes étapes.

Cette thèse est uniquement consacrée à l'étude numérique de la formation du point chaud. Les codes actuels du CEA décrivent cette étape en supposant que le plasma est toujours à l'équilibre thermodynamique : ce sont donc les équations d'Euler pour un plasma chaud qui sont résolues. Or, un simple calcul montre que le libre parcours moyen ionique peut devenir au moment de la formation du point chaud, sinon supérieur, au moins comparable au rayon de la sphère de deutérium-tritium. L'on s'est donc posé la question de la validité des résultats donnés par ces codes notamment en terme de production de neutrons et de particules α (qui sont les produits de fusion). Pour prendre en compte ces déséquilibres thermodynamiques, on doit décrire le plasma de deutérium-tritium au niveau cinétique c'est à dire à l'aide des équations de Vlasov-Fokker-Planck, les réactions nucléaires étant traitées avec les équations de Boltzmann réactives : c'est alors la distribution ionique (densité de probabilité dans l'espace des phases) qui est solution de ces équations.

Le plan de cette thèse est donc le suivant :

Celle-ci est composée de trois parties que le lecteur pourra lire indépendamment les unes des autres sans difficulté. Bien que ces parties soient donc relativement indépendantes, l'on a toute fois essayé de garder une cohérence et une uniformité maximales dans les diverses notations.

Notons dès ici que les phénomènes radiatifs sont « oubliés ».

Dans une première partie, l'on décrit les équations cinétiques de Vlasov-Fokker-Planck couplées à l'équation de transport de l'énergie électronique en rappelant ses principales propriétés (limite fluide formelle et théorème H en particulier) et le principe général pour résoudre numériquement ces équations.

Puis, l'on propose un nouveau schéma numérique pour la prise en compte des interactions ion / électron, schéma numérique conservatif et stable sous un certain critère de type *CFL* (Courant-Friedrich-Levy) dans sa version explicite et possédant aussi de bonnes propriétés dans sa version semi-implicite (en particulier, ce schéma préserve l'équilibre thermodynamique). Pour construire ce schéma, on a établi la notion de *moyenne entropique* pour définir la distribution ionique à l'interface entre deux mailles de la grille en vitesse microscopique.

Des résultats numériques montrent que ce schéma est extrêmement robuste et précis, beaucoup plus que celui maintenant classique proposé par Chang et Cooper (cf. [17]) : il est en effet possible de décrire avec ce schéma les échanges d'énergie dus aux collisions ion / électron sur un maillage en vitesse microscopique très grossier, propriété numérique importante puisque la formation du point chaud entraîne une augmentation très forte de la température du milieu. En effet, lorsque le maillage en vitesse est fixé au début du calcul et que celui-ci est raisonnable, les distributions ioniques initiales sont mal discrétisées puisque les températures initiales sont faibles ; certains auteurs comme [8] et [10] remédient à ce problème en adaptant à chaque pas de temps le maillage en vitesse microscopique en fonction de la température locale. Notons que V.A. Mousseau a aussi relevé l'existence de cette difficulté dans le cadre de la simulation de la *Fusion par Confinement Magnétique* (cf. [14], §6.2, p. 150). V.A. Mousseau explique en effet que l'utilisation du schéma de Chang et Cooper sur un maillage en vitesse fixé ne permet pas de bien traiter les cas réalistes car il coexiste aussi des zones à très basse température et des zones à très haute température dans les expériences de *Fusion par Confinement Magnétique*.

Enfin, l'on a aussi pu constater que le schéma utilisant la *moyenne entropique* possède de très bonnes propriétés dans le cas particulier des interactions ion / ion isotropes en vitesse.

Dans les annexes A et B, l'on montre d'autre part que l'utilisation de la moyenne entropique et de la moyenne de Chang et Cooper possèdent des propriétés équivalentes lorsque l'on discrétise l'équation de Fokker-Planck linéaire.

L'annexe C concerne la description d'un modèle cinétique de type Boltzmann à un degré de liberté, modèle permettant d'une part de retrouver les équations d'Euler classiques pour un plasma multi-espèce et d'autre part de retrouver l'équation de Fokker-Planck ion / électron à un degré de liberté ceci laissant envisager la possibilité de construire une méthode numérique de type Monte-Carlo très simple pour résoudre cet opérateur de Fokker-Planck.

L'annexe D rassemble deux publications qui résument ce qui a été présenté dans cette partie sur la résolution numérique de l'opérateur de collision ion / électron.

La deuxième partie est consacrée au problème du couplage cinétique / fluide dans un plasma. Eu égard au temps CPU très important utilisé pour résoudre les équations

tions de Vlasov-Fokker-Planck, on doit se poser la question de la possibilité de ne résoudre ces équations cinétiques que là où c'est nécessaire c'est à dire au centre de la sphère de deutérium-tritium, le reste pouvant être traité a priori avec les équations d'Euler.

Tout d'abord, les schémas cinétiques proposés par S.M. Desphande et par B. Perthame pour résoudre les équations d'Euler sur une grille fixe (cf. [42] et [44]) sont généralisés dans le cadre d'une grille variable : on construit ainsi un schéma cinétique lagrangien.

L'on compare ensuite ce schéma cinétique lagrangien au schéma lagrangien de B. Desprès (cf. [71]) sur des cas tests classiques (tube à choc de Sod et tube à choc de Noh). On constatera que ce schéma cinétique lagrangien est plus diffusif que celui de B. Desprès ce qui entraîne une très forte atténuation du phénomène classique de wall heating des schémas lagrangiens.

Ensuite, l'on propose une méthode de couplage cinétique / fluide dans le cadre d'un plasma chaud. On montre alors, avec un modèle cinétique simplifié, qu'un traitement cinétique du point chaud peut être beaucoup plus précis qu'un traitement de celui-ci avec le modèle fluide. On établit d'autre part que le couplage, sous certaines conditions, permet aussi de bien traiter la formation du point chaud mais en un temps de calcul plus faible que celui résultant du cas où tout est traité avec le modèle cinétique.

La troisième partie traite au niveau cinétique les réactions de fusion thermonucléaire. Cette étude est nécessaire car, les ions deutérium et tritium pouvant ne pas être à l'équilibre thermodynamique notamment à la formation du point chaud, les formules donnant les taux de réaction nucléaire utilisées dans les codes actuels peuvent ne pas être valables.

On s'est donc attaché à décrire les équations de Boltzmann adaptées à la description cinétique de ces réactions puis une méthode numérique de type Monte-Carlo pour simuler celles-ci (la méthode de Cheremissin : cf. [40] et [41]) ; dans l'annexe C, on valide cette méthode pour le cas de l'équation de Boltzmann classique).

On a ainsi pu constater que les déséquilibres thermodynamiques rencontrés dans la seconde partie peuvent en effet invalider les formules actuelles donnant le nombre de neutrons et de particules α produites.

Première partie

Sur la résolution numérique d'un
modèle cinétique ionique couplé à
une équation d'énergie
électronique

Introduction de la première partie

Dans les plasmas chauds du type des plasmas rencontrés en *Fusion par Confinement Inertiel*, la longueur caractéristique L de variation des quantités hydrodynamiques (longueur de gradient) peut descendre jusqu'à quelques microns et dans certaines situations, notamment à des températures de quelques KeV , le libre parcours moyen des ions peut être supérieur à cette valeur L voire même au rayon de la sphère de deutérium-tritium. C'est pourquoi, dans ces cas, il est légitime de se poser la question de la validité des modèles hydrodynamiques et de l'intérêt d'utiliser un modèle de type cinétique.

Dans cette première partie, on se propose donc d'une part de décrire un modèle cinétique traitant au niveau cinétique les échanges d'énergie entre les ions et les électrons et d'autre part une méthode numérique pour résoudre les équations obtenues. Ce modèle est constitué par :

- o une équation d'évolution du type Vlasov-Fokker-Planck pour la population ionique ;
- o une relation de quasi-neutralité donnant la densité électronique et la vitesse électronique ;
- o une équation régissant l'évolution de la température électronique, les électrons étant supposés être à l'équilibre thermodynamique entre eux.

On pourra consulter [8], [9] et [25] pour une justification physique et mathématique de ce modèle cinétique ainsi que le travail de C. Villani (cf. [27]) pour une étude théorique très complète des opérateurs cinétiques de type Fokker-Planck.

Le CEA dispose déjà de deux codes cinétiques - le code PROCIONS par exemple (cf. [10] ; voir aussi [8], [9] et [11]) - qui résolvent ces opérateurs de Fokker-Planck,

codes qui utilisent la technique des potentiels de Rosenbluth. Malheureusement, ces codes doivent faire face à deux défauts majeurs :

- d'une part la méthode numérique n'étant pas conservative, il s'avère nécessaire de procéder à une phase de correction en impulsion et en énergie. Notons que les propriétés de conservativité pour l'opérateur de Fokker-Planck ion / ion ne sont pas non plus vérifiées dans le schéma proposé par [12] ni pour l'opérateur de Fokker-Planck de type ion / électron dans le schéma proposé par [13] (voir aussi [14]). On peut cependant rappeler que récemment des schémas conservatifs pour résoudre l'opérateur de Fokker-Planck ion / ion ont été testés au CEA (cf. [15]);

- d'autre part, les différences entre la température initiale et la température atteinte lors de l'ignition des réactions thermonucléaires (formation du point chaud) sont telles qu'une dilatation du maillage en vitesse microscopique en fonction de la température du plasma a dû être mise en place pour que les distributions ioniques soient discrétisées avec une bonne précision durant tout le calcul. Cette dilatation semble en effet nécessaire car si le maillage est fixé, soit l'épaisseur des mailles est suffisamment fine sur une large plage de température mais alors le temps CPU et la mémoire requis par l'ordinateur deviennent prohibitifs, soit l'épaisseur des mailles est trop grande pour permettre une bonne discrétisation des distributions ioniques lorsque la température est faible. Soulignons que cette technique de dilatation des mailles complexifie notablement les algorithmes de calcul et ne favorise pas l'obtention d'un schéma conservatif (notamment lors de la phase de transport des ions).

L'objectif principal de cette partie est de construire un nouveau schéma numérique de résolution de l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron qui soit conservatif et dont on puisse étudier les propriétés de stabilité au-moins dans le cas explicite sachant que, dans la pratique, l'on utilisera un schéma semi-implicite basé sur le schéma explicite décrit ici. On pourra alors espérer d'un tel schéma conservatif qu'il puisse traiter correctement les collisions ion / électron aussi bien sur un maillage fin que sur un maillage grossier en vitesse.

Le plan de cette première partie est le suivant :

Au premier chapitre, nous explicitons rapidement les différentes caractéristiques du modèle dans le cadre des plasmas avec une seule espèce d'ion et nous donnons les propriétés générales de conservation et de décroissance de l'entropie dans le cadre tridimensionnel en vitesse.

Au deuxième chapitre, l'on décrit un schéma global de résolution numérique de

ce modèle.

Au troisième chapitre, l'on propose pour une géométrie cartésienne une méthode de résolution conservative de l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron discrétisé à partir de la formulation convection-diffusion (par opposition à la formulation dite de Landau) en introduisant la notion de *moyenne entropique*.

En étudiant avec précision la version semi-discrète de ce schéma, l'on établit l'existence d'un unique état d'équilibre thermodynamique maxwellien pour ce schéma. Puis, l'on montre que la version explicite de ce schéma accepte comme état d'équilibre cet unique état d'équilibre maxwellien, et que ce schéma - avec un critère de type *CFL* sur le pas de temps - préserve la positivité de la distribution ionique et de la température électronique tout en assurant la décroissance de l'entropie. Dans l'annexe A, l'on établira que ce schéma explicite appliqué à l'opérateur de Fokker-Planck linéaire converge vers l'équilibre thermodynamique sous un critère de type *CFL*.

On construit ensuite le schéma numérique semi-implicite correspondant à ce schéma totalement explicite en implicitant la partie diffusion, schéma qui a la bonne propriété de conserver la masse, la quantité de mouvement et l'énergie mais aussi l'équilibre thermodynamique.

Puis, dans un quatrième chapitre, l'on montre que les résultats concernant la résolution semi-implicite de l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron peuvent s'étendre à des géométries non cartésiennes.

Au cinquième chapitre, l'on présente des résultats numériques attestant du bon comportement du schéma numérique semi-implicite traitant les collisions ion / électron dans le cas cartésien. On montre en particulier que l'utilisation de la moyenne entropique permet de réduire le nombre de mailles du domaine des vitesses.

Ces résultats numériques montrent aussi que la moyenne entropique donne des résultats équivalents à ceux donnés par la moyenne introduite par Chang et Cooper (cf. [17]), moyenne fréquemment utilisée (cf. [10], [12] et [13]). *Mais ils faut noter que Chang et Cooper n'ont démontré aucune propriété d'existence d'un état d'équilibre et de convergence vers cet équilibre pour leur schéma numérique.* On montrera cependant dans l'annexe B que, *dans le cas linéaire*, le schéma totalement explicite de Chang et Cooper converge effectivement vers un état d'équilibre maxwellien, le cas non linéaire restant semble-t-il hors de portée.

On pourra aussi remarquer que lorsque le maillage en vitesse est grossier, le schéma utilisant la moyenne entropique est plus précis que celui utilisant la moyenne de Chang et Cooper.

Enfin, au sixième chapitre, l'on montrera que les résultats obtenus avec la moyenne entropique pour l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron semi-discret peuvent s'étendre au cas de l'opérateur de Fokker-Planck ion / ion isotrope. Des résultats numériques attestent aussi du bon comportement du schéma proposé lorsque le maillage en vitesse est grossier.

Dans l'annexe C, l'on montrera comment retrouver à partir d'un modèle de type Boltzmann à un degré de liberté les équations macroscopiques pour un plasma multi-espèce ainsi que l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron à l'aide d'un développement asymptotique. Cette annexe, à vocation pédagogique, permet ainsi de comprendre simplement comment l'on passe formellement de l'opérateur de Boltzmann à l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron puis de Fokker-Planck à Euler multi-espèce.

Dans l'annexe D, on trouvera deux publications qui traitent de ce qui a été présenté dans cette partie sur la résolution numérique de l'opérateur de collision ion / électron.

Chapitre 1

Établissement du modèle et de ses propriétés

Dans cette partie, on décrit un modèle cinétique pour les ions et macroscopique pour les électrons, modèle pouvant traiter les échanges d'énergie entre les divers constituants d'un plasma chaud. On ne considérera par ailleurs que le cas où il n'y a qu'une seule espèce d'ion. Ce modèle est décrit par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f - \frac{\nabla_x P_e}{\rho} \cdot \nabla_v f = B(f) + S(f), \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \nabla_x \cdot [(\rho \varepsilon_e + P_e) \vec{U}] = -(\overline{W} + \widetilde{W}), \\ \overline{W} = -\vec{U} \cdot \nabla_x P_e, \quad \widetilde{W} = 3\Omega N(T_e - T), \\ N_e = ZN, \quad P_e = N_e T_e, \quad \rho = mN, \\ \varepsilon_e = \frac{P_e}{\rho(\gamma-1)}, \quad \gamma = 5/3 \end{array} \right.$$

où $B(f)$ et $S(f)$ sont respectivement l'opérateur de collision ion / ion et l'opérateur de collision ion / électron, $f(t, x, v)$ étant la densité de probabilité ionique.

m et Z sont respectivement la masse atomique de l'ion et le numéro atomique de l'ion. T et T_e sont les températures ionique et électronique, N et N_e sont les densités ionique et électronique, P_e et ε_e sont la pression électronique et l'énergie interne électronique et enfin \vec{U} est la vitesse ionique.

On supposera par ailleurs que les diverses fonctions rencontrées dans ce chapitre sont suffisamment régulières pour ne pas avoir à expliciter clairement les hypothèses de régularité sur ces fonctions. En particulier, la distribution f sera toujours prise dans $L^1[(1 + |\vec{v}|^2)d\vec{v}; \mathbb{R}^3]$.

1.1 Équation cinétique pour la population ionique

Dans un plasma chaud classique (le plasma est supposé être totalement ionisé, la température étant comprise entre 10^7 et 10^9 degrés Kelvin, et aucun effet quantique et relativiste n'est pris en compte ce qui est physiquement justifiable), on peut modéliser l'évolution de la densité d'ions $f(t, x, v)$ par l'équation

$$\partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{Z}{m} \vec{E} \cdot \nabla_v f = B(f) + S(f). \quad (1.1)$$

\vec{E} est le champ électrique self-consistant multiplié par la charge de l'électron e . $f(t, x, v)$ est la distribution (ou densité) de probabilité de présence au temps t d'un ion dans le volume infinitésimal $d\vec{x}d\vec{v}$ de l'espace des phases $(\vec{x}, \vec{v}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. On suppose donc que les trois degrés de liberté de translation sont les seuls degrés de liberté microscopiques de la population ionique.

Les opérateurs $B(f)$ et $S(f)$ décrivent respectivement les collisions ion / ion et les collisions ion / électron.

Rappelons que N , \vec{U} et T sont reliées à f par les relations

$$N(t, x) = \langle f(t, x, v) \rangle,$$

$$\vec{U}(t, x) = \frac{1}{N(t, x)} \langle f(t, x, v) \vec{v} \rangle,$$

$$\frac{3}{2}T(t, x) = \frac{m}{N(t, x)} \langle f(t, x, v) \frac{(\vec{v} - \vec{U})^2}{2} \rangle$$

avec $\langle g \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^3} g(v) d\vec{v}$. Dans le reste de cette partie, nous « oublierons » l'espace d'intégration \mathbb{R}^3 pour alléger les notations.

1.1.1 L'opérateur de collision ion / ion

Le modèle le plus complet décrivant les collisions ion / ion est le modèle où B est donné par l'opérateur de collision de Fokker-Planck

$$B(f) = \omega \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f(v_1) f(v) \overline{\mathcal{J}}_{\vec{v} - \vec{v}_1} \cdot [\nabla_v \log f(v) - \nabla_{v_1} \log f(v_1)] d\vec{v}_1, \quad (1.2)$$

$\overline{\overline{J}}_{\vec{w}}$ étant le tenseur de Landau défini par

$$\overline{\overline{J}}_{\vec{w}} = \frac{\overline{\overline{I}}}{|\vec{w}|} - \frac{\vec{w} \otimes \vec{w}}{|\vec{w}|^3} \quad (1.3)$$

où $\overline{\overline{I}}$ est la matrice identité. Remarquons que $\overline{\overline{J}}_{\vec{w}}$ est la matrice de projection sur le plan orthogonal à \vec{w} . $B(f)$ vérifie les relations

$$\begin{cases} \langle B(f) \rangle = 0, \\ \langle \vec{v} B(f) \rangle = \vec{0}, \\ \langle |\vec{v}|^2 B(f) \rangle = 0. \end{cases}$$

Cet opérateur peut être obtenu à partir d'un opérateur de collision classique de type Boltzmann (cf. [24]) en tenant compte du fait que les interactions entre particules sont coulombiennes et que les collisions les plus fréquentes sont les collisions rasantes (voir aussi [28]). ω est proportionnel à la fréquence de collision ion / ion et est une fonction de la forme $C/T^{3/2}$ où C dépend du logarithme coulombien ion / ion (voir [28] et [29]).

1.1.2 L'opérateur de collision ion / électron et l'opérateur de Fokker-Planck linéaire

Soit \vec{U}_e la vitesse électronique. L'opérateur de collision décrivant les collisions ion / électron est donné par

$$S(f) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U}_e) f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right]. \quad (1.4)$$

$S(f)$ est ci-dessus écrit sous la forme convection-diffusion. On peut réécrire $S(f)$ sous la forme dite de Landau à savoir

$$S(f) = \Omega \frac{T_e}{m} \nabla_v \cdot [f \nabla_v \log(f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e})] \quad (1.5)$$

avec

$$\mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e}(v) = \frac{N}{(2\pi T_e/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{U}_e)^2}{2T_e} \right].$$

$S(f)$ vérifie les relations

$$\begin{cases} \langle S(f) \rangle = 0, \\ \langle m \vec{v} S(f) \rangle = \rho \Omega (\vec{U}_e - \vec{U}), \\ \langle \frac{m|\vec{v}|^2}{2} S(f) \rangle = 3\Omega N (T_e - T). \end{cases}$$

Cet opérateur est obtenu à partir d'un opérateur de Fokker-Planck à deux espèces similaire à l'opérateur (1.2) mais en tenant compte du fait que les électrons sont toujours très proches de l'équilibre thermodynamique du fait de la très grande fréquence de collision électron / électron et en procédant à un développement asymptotique au second ordre en $\varepsilon = \sqrt{\frac{m_e}{m}}$ où m_e et m sont respectivement la masse de l'électron et la masse de l'ion. On pourra consulter sur ce sujet les travaux de P. Degond et de Br. Lucquin (cf. [25]) ainsi que l'annexe C de cette partie.

Les équations, dont les quantités électroniques \vec{U}_e et T_e sont solutions, seront explicitées plus loin. Ω est la fréquence de collision ion / électron et est une fonction de la forme $C/T_e^{3/2}$ où C dépend du logarithme coulombien (voir [28] et [29]).

Lorsque Ω , \vec{U}_e et T_e sont imposés constants au cours du temps, $S(f)$ devient linéaire : on parlera alors de *l'opérateur de collision de Fokker-Planck linéaire* par opposition à l'opérateur de collision ion / électron qui est a priori non linéaire, Ω , \vec{U}_e et T_e pouvant dépendre directement ou indirectement de la distribution f .

1.2 Quasi neutralité

Le champ électrique est donné par l'équation de Gauss c'est à dire

$$\nabla_x \cdot \vec{E} = e^2(ZN - N_e)$$

où la charge élémentaire e est exprimée en unités CGS. La densité électronique est définie comme suit : on suppose que la force électrique et la force hydrodynamique (i.e. le gradient de pression) sont grandes devant les forces venant des collisions. Comme d'autre part la masse de l'électron est petite devant la masse des ions, l'équation de conservation de l'impulsion pour les électrons

$$\partial_t(m_e N_e \vec{U}_e) + \nabla_x \cdot (m_e N_e \vec{U}_e \otimes \vec{U}_e) = -\nabla_x P_e - N_e \vec{E}$$

se traduit au premier ordre par

$$\nabla_x P_e + N_e \vec{E} = \vec{0}. \quad (1.6)$$

Sachant que $P_e = N_e T_e$, le champ électrique est donc donné par

$$\vec{E} = -T_e \nabla_x \log(N_e T_e).$$

Grâce à l'équation de Gauss, on voit que la densité électronique N_e vérifie

$$-\frac{1}{e^2} \nabla_x \cdot [T_e \nabla_x \log(N_e T_e)] = ZN - N_e.$$

Si on suppose pour simplifier que le gradient de température électronique T_e est négligeable localement, on obtient l'équation de Poisson classique

$$-\lambda_D^2 \nabla_x \cdot [\nabla_x \log N_e] + \frac{(N_e - ZN)}{\widetilde{N}} = 0 \quad (1.7)$$

où on a introduit une densité caractéristique \widetilde{N} et la longueur de Debye

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{T_e}{e^2 \widetilde{N}}}.$$

Le rapport de la longueur de Debye à la dimension caractéristique du plasma est toujours un petit paramètre dans les applications que l'on a en vue (si les températures sont de plusieurs millions de degrés Kelvin et les densités de l'ordre de 10^{23} cm^{-3} , la longueur de Debye est de l'ordre de 10^{-7} cm). En faisant une analyse asymptotique par rapport à ce petit paramètre, on montre que

$$\|N_e - ZN\|_{L^2} \rightarrow 0$$

et

$$\nabla_x \log N_e - \nabla_x \log N \rightarrow \vec{0}$$

lorsque λ_D tend vers 0 et que $N(x)$ est suffisamment régulière (voir par exemple [68] dans le cas d'un problème sur un domaine borné). Par la suite, on fera donc les approximations suivantes

$$N_e = ZN \quad (1.8)$$

et

$$\vec{E} = -\frac{\nabla_x (NT_e)}{N}.$$

Par ailleurs, les équations de conservation des électrons d'une part et des ions d'autre part (voir le paragraphe suivant) s'écrivent

$$\partial_t N_e + \nabla_x \cdot (N_e \vec{U}_e) = 0$$

et

$$\partial_t N + \nabla_x \cdot (N \vec{U}) = 0.$$

Pour la cohérence avec (1.8), on doit donc avoir $\nabla_x \cdot [N(\vec{U} - \vec{U}_e)] = 0$ ce qui signifie que le courant électrique est à divergence nulle. Comme le courant électrique est nul au bord du domaine, il est nécessairement nul partout. \vec{U}_e est donc donnée dans le cas mono-espèce par la relation

$$\vec{U}_e = \vec{U}.$$

Remarque Dans un cas avec plusieurs types d'ion, on aurait $N_e = \sum_i Z_i N_i$ et $N_e \vec{U}_e = \sum_i Z_i N_i \vec{U}_i$ où i serait l'indice de l'ion. Par ailleurs, il faudrait ajouter à (1.1) un opérateur de collision similaire à $B(f)$ tenant compte des collisions entre espèces d'ions différents.

1.3 Équations macroscopiques ionique et électronique

Comme le plasma est ici constitué d'une seule espèce d'ion, l'opérateur de collision ion / électron est alors donné par

$$S(f) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U}) f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right] \quad (1.9)$$

puisque l'hypothèse de quasi-neutralité impose $\vec{U}_e = \vec{U}$.

1.3.1 Bilan ionique

En prenant les trois premiers moments de (1.1), on trouve que

$$\partial_t N + \nabla_x \cdot (N \vec{U}) = 0, \quad (1.10)$$

$$\partial_t (\rho \vec{U}) + \nabla_x \cdot [\rho \vec{U} \otimes \vec{U} + \langle f(v) m (\vec{v} - \vec{U}) \otimes (\vec{v} - \vec{U}) \rangle] = -Z \nabla_x (N T_e) \quad (1.11)$$

et

$$\partial_t (\rho \xi) + \nabla_x \cdot [\rho \xi \vec{U} + \langle f(v) \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{U}) \otimes (\vec{v} - \vec{U}) \vec{v} \rangle] = \overline{W} + \widetilde{W} \quad (1.12)$$

où ξ est l'énergie totale ionique définie par

$$\xi = \frac{1}{N} \langle f(v) \frac{|\vec{v}|^2}{2} \rangle = \frac{1}{2} |\vec{U}|^2 + \frac{3T}{2m},$$

où

$$\widetilde{W} = 3\Omega N (T_e - T) = \langle \frac{m |\vec{v}|^2}{2} S(f) \rangle \quad (1.13)$$

est la puissance (volumique) déposée sur les ions par l'intermédiaire des collisions sur les électrons et où

$$\overline{W} = ZN \vec{E} \cdot \vec{U} = -\vec{U} \cdot \nabla_x (N_e T_e) \quad (1.14)$$

est la puissance (volumique) déposée sur les ions par le champ électrique.

1.3.2 Équation d'énergie électronique

Comme la masse des électrons est très faible devant celle des ions, le temps de collision électron / électron est beaucoup plus petit que les temps de collision ion / ion et ion / électron (voir [29] p. 30-31). À moins de se placer à une échelle de temps de l'ordre du temps de collision électron / électron, on peut donc considérer que les électrons sont à l'équilibre thermodynamique entre eux puisque l'échelle de temps est fixée par les ions dans cette étude (voir [25] pour une approche théorique de cette question). Le comportement des électrons est alors décrit par des équations macroscopiques et en particulier par une équation de transport de l'énergie électronique dont la température électronique T_e est solution.

L'énergie \widetilde{W} gagnée par les ions du fait des collisions ion / électron est perdue sous forme d'énergie interne par les électrons. On retrouve donc au second membre le terme source $-\widetilde{W}$ dans l'équation d'énergie interne électronique

$$\partial_t(\rho\varepsilon_e) + \nabla_x \cdot (\rho\varepsilon_e \vec{U}) + P_e \nabla_x \cdot \vec{U} = -\widetilde{W} \quad (1.15)$$

où l'énergie interne électronique ε_e est définie par

$$\varepsilon_e = \frac{P_e}{\rho(\gamma - 1)}$$

avec $P_e = N_e T_e$ et $\gamma = 5/3$. Par la suite, on cherchera à construire un schéma numérique conservatif c'est à dire qui respecte la propriété suivante :

La variation d'énergie des ions due à la friction sur les électrons et due au travail du champ électrique doit se retrouver explicitement dans l'équation d'énergie électronique.

C'est pourquoi nous utiliserons pour la discrétisation la forme de l'équation d'énergie électronique suivante

$$\partial_t(\rho\varepsilon_e) + \nabla_x \cdot [(\rho\varepsilon_e + P_e) \vec{U}] = -(\overline{W} + \widetilde{W}) \quad (1.16)$$

qui permet de mettre en évidence les termes d'échange.

1.4 Résumé du modèle cinétique et limite fluide formelle

On peut donc maintenant écrire le système à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f - \frac{\nabla_x P_e}{\rho} \cdot \nabla_v f = B(f) + S(f), \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \nabla_x \cdot [(\rho \varepsilon_e + P_e) \vec{U}] = -(\overline{W} + \widetilde{W}), \\ \overline{W} = -\vec{U} \cdot \nabla_x P_e, \quad \widetilde{W} = 3\Omega N(T_e - T), \\ N_e = ZN, \quad P_e = N_e T_e, \quad \rho = mN, \\ \varepsilon_e = \frac{P_e}{\rho(\gamma-1)}, \quad \gamma = 5/3 \end{array} \right. \quad (1.17)$$

où $B(f)$ et $S(f)$ sont données par (1.2) et (1.9).

Il est clair que la résolution numérique de (1.17) implique que l'on résout numériquement l'équation de bilan global

$$\partial_t[\rho(\xi + \varepsilon_e)] + \nabla_x \cdot [\rho(\xi + \varepsilon_e) \vec{U}] + \langle f(v) \frac{m}{2} (\vec{v} - \vec{U}) \otimes (\vec{v} - \vec{U}) \vec{v} \rangle + P_e \vec{U} = 0 \quad (1.18)$$

où $\xi + \varepsilon_e$ représente l'énergie totale du plasma.

On peut aussi formellement établir la limite fluide du modèle cinétique (1.17). Celle-ci est définie par le système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \nabla_x \cdot (\rho \vec{U}) = 0, \\ \partial_t(\rho \vec{U}) + \nabla_x \cdot (\rho \vec{U} \otimes \vec{U} + P \overline{I}) = -\nabla_x P_e, \\ \partial_t(\rho \xi) + \nabla_x \cdot [(\rho \xi + P) \vec{U}] = \overline{W} + \widetilde{W}, \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \nabla_x \cdot [(\rho \varepsilon_e + P_e) \vec{U}] = -(\overline{W} + \widetilde{W}) \end{array} \right.$$

où $P \equiv NT$, \overline{I} étant la matrice identité: on retrouve le système des équations d'Euler à deux températures décrit dans [66]. Notons que le flux de chaleur électronique \vec{q}_e n'est pas pris en compte bien que celui-ci ne soit pas négligeable. Cette omission ne nuit pas à la généralité de l'étude présentée ici, le but principal de cette partie étant d'étudier un schéma numérique décrivant correctement au

niveau cinétique les échanges d'énergie entre les ions et les électrons. Par contre, au dernier chapitre de la deuxième partie, l'on tiendra compte de \bar{q}_e puisqu'il y sera étudié la formation du point chaud dans des conditions thermodynamiques qualitativement proches des conditions rencontrées en *Fusion par Confinement Inertiel*.

1.5 Théorèmes H et entropie totale du plasma

Dans cette section, on rappelle les différents théorèmes H relatifs aux opérateurs de collision, théorèmes qui assurent le retour à l'équilibre thermodynamique du plasma par l'intermédiaire des collisions. Puis on établira l'inéquation différentielle de transport de l'entropie totale du plasma, inéquation qui correspond au second principe de la thermodynamique appliqué à un plasma mono-espèce.

1.5.1 Théorème H pour l'opérateur de collision ion / ion

On rappelle ici le théorème H concernant l'opérateur de collision ion / ion (cf. par exemple [25]). Soit $\mathcal{M}_{N,\vec{U},T}$ la maxwellienne centrée en \vec{U} et de température T à savoir

$$\mathcal{M}_{N,\vec{U},T}(v) = \frac{N}{(2\pi T/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{U})^2}{2T} \right].$$

On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.1 (*Théorème H*) *Pour tout $f > 0$, on a*

$$\langle B(f) \log f \rangle \leq 0$$

et

$$\langle B(f) \log f \rangle = 0 \iff f(v) = \mathcal{M}_{N,\vec{U},T}.$$

Ce théorème H assure le retour à l'équilibre thermodynamique de la population ionique par l'intermédiaire des collisions ion / ion.

1.5.2 Théorème H pour l'opérateur de collision ion / électron

Dans cette section, on montre l'existence d'un théorème H pour les collisions ion / électron. On ne se place pas forcément dans le cas mono-espèce (i.e. \vec{U} peut

être différent de \vec{U}_e et $S(f)$ est donné par la relation (1.4)). On rappelle que la maxwelienne $\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}$ est définie par

$$\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}(v) = \frac{N}{(2\pi T_e/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{U}_e)^2}{2T_e} \right].$$

On a donc la proposition suivante :

Proposition 1.2 (Théorème H) *Pour tout $f > 0$ et pour tout \vec{U}_e et $T_e > 0$, on a*

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle \leq 0$$

et

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle = 0 \iff f = \mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}.$$

Ce théorème H assure que les collisions ion / électron entraînent la relaxation de la vitesse et de la température ionique vers la vitesse et la température électronique ainsi que la relaxation de f vers l'équilibre maxwellien comme on le constatera au troisième chapitre.

Preuve de la proposition 1.2 En écrivant $S(f)$ sous la forme de Landau (voir la relation (1.5)), on obtient facilement que

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle = \Omega \frac{T_e}{m} \int \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \nabla_v \cdot [f \nabla_v \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e})] d\vec{v}.$$

Soit encore en intégrant par partie

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle = -\Omega \frac{T_e}{m} \int f [\nabla_v \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e})]^2 d\vec{v} \leq 0$$

ce qui prouve que

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle \leq 0.$$

D'autre part, d'après ce qui a été établi ci-dessus, on peut écrire que

$$\langle S(f) \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) \rangle = 0 \iff \nabla_v \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}) = 0 \iff f = C \cdot \mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e}$$

et comme $\langle f \rangle = \langle \mathcal{M}_{N,\vec{U}_e,T_e} \rangle$, on en déduit que $C = 1$ ce qui termine la démonstration. \square

Dans la suite, on revient au cas mono-espèce c'est à dire que $\vec{U}_e = \vec{U}$.

Faisons maintenant l'hypothèse que le problème est homogène en espace et que la vitesse macroscopique \vec{U} est constante. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.3 Soient f et T_e solutions de

$$\begin{cases} \partial_t f = S(f), \\ \partial_t(\rho\varepsilon_e) = 3\Omega N(T - T_e). \end{cases}$$

Alors, on a

$$\partial_t \langle f \log (f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e}) \rangle \leq 0. \quad (1.19)$$

Preuve de la proposition 1.3 On a facilement que

$$\begin{aligned} \partial_t \langle f \log (f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e}) \rangle &= \langle \partial_t f \rangle - \langle f \partial_t \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \rangle \\ &+ \langle \log (f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e}) \partial_t f \rangle \end{aligned}$$

soit encore

$$\partial_t \langle f \log (f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e}) \rangle \leq - \langle f \partial_t \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \rangle$$

puisque $\langle S(f) \rangle = 0$ et en utilisant le théorème H.

D'autre part, on sait que

$$\int f \partial_t \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} d\vec{v} = -\frac{m}{2} \int f \partial_t \left[\frac{(\vec{v} - \vec{U})^2}{T_e} \right] d\vec{v} - \frac{3}{2} \int f \partial_t \log T_e d\vec{v}$$

soit encore

$$\int f \partial_t \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} d\vec{v} = -\frac{3}{2} N T \cdot \partial_t \left(\frac{1}{T_e} \right) - \frac{3}{2} N \frac{\partial_t T_e}{T_e} = -\frac{3}{2 T_e^2} N (T_e - T) \partial_t T_e.$$

Et donc

$$\langle f \partial_t \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \rangle = -\frac{(T_e - T)}{Z T_e^2} \partial_t(\rho\varepsilon_e)$$

puisque $\rho\varepsilon_e = \frac{3}{2} N_e T_e$. D'où le résultat en utilisant le fait que $(T_e - T) \partial_t(\rho\varepsilon_e) \leq 0$. \square

Remarquons que si l'on suppose de plus que la température T_e est constante (i.e. on s'intéresse à Fokker-Planck linéaire), on obtient aussi l'inégalité (1.19). Et en intégrant par rapport à \vec{v} , on retrouve le second principe de la thermodynamique mis sous la forme de l'inégalité de Clausius (cf. [75] par exemple)

$$\partial_t (- \langle f \log f \rangle) \geq \frac{\delta Q}{T_e},$$

$- \langle f \log f \rangle$ et $\delta Q = \frac{3}{2} N \partial_t T$ étant respectivement l'entropie physique du milieu (ici les ions) et la chaleur (en valeur algébrique et par unité de temps) déposée sur le milieu, chaleur venant du milieu extérieur (ici les électrons) dont la température T_e est constante.

1.5.3 Inégalité entropique pour le système général dans le cas mono-espèce

On se place maintenant dans le cas où f et T_e sont solutions de (1.17), et on introduit l'entropie (mathématique) totale du système

$$H(f, T_e) = H_i(f) + H_e(f, T_e)$$

qui est la somme de l'entropie ionique H_i et de l'entropie électronique H_e données par

$$\begin{cases} H_i(f) = \langle f \log f \rangle, \\ H_e(f, T_e) = N_e \log(N_e T_e^{-3/2}). \end{cases}$$

La proposition suivante donne le résultat de décroissance de l'entropie $H(f, T_e)$:

Proposition 1.4 *Soient f et T_e solutions de (1.17). Alors, lorsque T_e est une solution régulière en temps et en espace, on a l'inégalité suivante*

$$\partial_t H(f, T_e) + \nabla_x \cdot \vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} \leq 0 \quad (1.20)$$

avec

$$\vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} = \langle \vec{v} f \log f \rangle + H_e(f, T_e) \vec{U}.$$

Remarquons que $\vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)}$ est le flux macroscopique d'entropie et que l'on n'a pas $\vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} = (H_i(f) + H_e(f, T_e)) \vec{U}$ sauf si f est une maxwellienne c'est à dire lorsque les ions sont à l'équilibre thermodynamique entre eux. On peut ajouter que la production d'entropie est due au fait que f n'est pas une maxwellienne mais aussi au fait que la température ionique est a priori différente de la température électronique.

Preuve de la proposition 1.4 On sait que $\langle B(f) \log f \rangle \leq 0$ d'après le théorème H pour les collisions ion / ion. Et comme

$$\begin{aligned} \int \log \mathcal{M}_{N, \vec{U}, T_e} \cdot B(f) d\vec{v} &= \log \left[\frac{N}{(2\pi T_e/m)^{3/2}} \right] \int B(f) d\vec{v} - \frac{m}{2T_e} \int (\vec{v} - \vec{U})^2 B(f) d\vec{v} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $\int B(f) d\vec{v} = 0$ et $\int (\vec{v} - \vec{U})^2 B(f) d\vec{v} = 0$, on en déduit que

$$\langle \log(f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}, T_e}) B(f) \rangle \leq 0.$$

D'autre part, on montre tout aussi facilement que

$$\langle \vec{E} \cdot \log(f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}, T_e}) \nabla_v f \rangle = 0.$$

On obtient donc l'inégalité suivante

$$\langle \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e})\partial_t f \rangle + \langle \log(f/\mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e})\vec{v} \cdot \nabla_x f \rangle \leq 0$$

en utilisant aussi le théorème H pour les collisions ion / électron. Donc

$$\begin{aligned} \partial_t H_i(f) + \nabla_x \cdot \langle \vec{v} f \log f \rangle - \left(\int \partial_t f d\vec{v} + \int \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \right) \\ - \int \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \partial_t f d\vec{v} - \int \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \leq 0. \end{aligned}$$

Comme $\int \partial_t f d\vec{v} + \int \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} - \left(\int \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \partial_t f d\vec{v} + \int \log \mathcal{M}_{N,\vec{U},T_e} \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \right) = \\ \frac{m}{2T_e} \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \partial_t f d\vec{v} + \frac{m}{2T_e} \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \end{aligned}$$

puis finalement

$$\begin{aligned} \partial_t H_i(f) + \nabla_x \cdot \langle \vec{v} f \log f \rangle + \frac{m}{2T_e} \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \partial_t f d\vec{v} \\ + \frac{m}{2T_e} \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \leq 0. \end{aligned}$$

En ajoutant et en retranchant

$$\partial_t H_e(f, T_e) + \nabla_x \cdot (H_e(f, T_e) \vec{U}) \equiv N_e D_t h_e(f, T_e)$$

où

$$h_e(f, T_e) = \log(N_e T_e^{-3/2})$$

et en tenant compte du fait que

$$\frac{1}{2T_e} \left[m \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \partial_t f d\vec{v} + m \int (\vec{v} - \vec{U})^2 \vec{v} \cdot \nabla_x f d\vec{v} \right] = 3\Omega N \frac{(T_e - T)}{T_e},$$

on obtient

$$\partial_t H(f, T_e) + \nabla_x \cdot \vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} - N_e D_t h_e(f, T_e) + 3\Omega N \frac{(T_e - T)}{T_e} \leq 0.$$

Or pour toute solution régulière en temps et en espace de l'équation (1.15), on a

$$N_e D_t h_e(f, T_e) = -3\Omega N \frac{(T - T_e)}{T_e}.$$

Finalement, on obtient

$$\partial_t H(f, T_e) + \nabla_x \cdot \vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} \leq 0.$$

□

L'inégalité (1.20) correspond au second principe de la thermodynamique mais écrit sous une forme locale et conservative. En effet, en intégrant (1.20) sur un domaine \mathcal{D} fixe et en supposant que la condition aux limites pour les ions sur la frontière fixe $\partial\mathcal{D}$ est de type réflexion spéculaire (le plasma est alors supposé être un système thermodynamiquement isolé), on obtient

$$\forall x \in \partial\mathcal{D} : \vec{\mathfrak{S}}_{H(f, T_e)} = \vec{0}$$

puisque la condition de réflexion spéculaire et la non déformation du domaine \mathcal{D} imposent que $\forall x \in \partial\mathcal{D} : f(t, x, \vec{v}) = f[t, x, \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}]$ où \vec{n} est la normale extérieure en x à \mathcal{D} ce qui entraîne que

$$\forall x \in \partial\mathcal{D} : \vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{v} f \log f \rangle \cdot \vec{n} = 0$$

ce qui donne donc après intégration sur le volume \mathcal{D}

$$\partial_t \Theta \geq 0$$

où $\Theta = - \int_{\mathcal{D}} H(f, T_e) dx$ est l'entropie physique totale du plasma contenue dans le volume \mathcal{D} : on retrouve bien le second principe de la thermodynamique classique pour un système isolé.

Remarques ◦ La proposition 1.4 est valable lorsque T_e est une solution régulière de (1.15). On peut cependant raisonnablement supposer que dans le cadre d'une description cinétique, ce sera effectivement toujours le cas puisque les vitesses, densités et températures ioniques sont toujours régulières (cf. *Lemme de moyennisation*, [69]).

◦ On peut noter que dans le cas homogène en espace, les deux entropies introduites précédemment (c'est à dire $H(f, T_e)$ et $\langle f \log (f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}, T_e}) \rangle$) sont équivalentes. Par contre, dans le cas général, la bonne entropie pour le système c'est à dire celle qui décroît avec le temps le long des lignes de courant (au-moins lorsque les ions sont à l'équilibre thermodynamique entre eux) est $H(f, T_e)$.

Chapitre 2

Principe général de la méthode numérique

On décrit dans cette partie le principe général du schéma numérique proposé pour la résolution numérique du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f - \frac{\nabla_x P_e}{\rho} \cdot \nabla_v f = B(f) + S(f), \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \nabla_x \cdot [(\rho \varepsilon_e + P_e) \vec{U}] = -(\overline{W} + \widetilde{W}), \\ \overline{W} = -\vec{U} \cdot \nabla_x P_e, \quad \widetilde{W} = 3\Omega N(T_e - T), \\ N_e = ZN, \quad P_e = N_e T_e, \quad \rho = mN, \\ \varepsilon_e = \frac{P_e}{\rho(\gamma-1)}, \quad \gamma = 5/3 \end{array} \right. \quad (2.1)$$

établi au chapitre précédent où les opérateurs de collision $B(f)$ et $S(f)$ sont définis par (1.2) et (1.9) c'est à dire

$$B(f) = \omega \nabla_v \cdot \int_{\mathbb{R}^3} f(v_1) f(v) \overline{\overline{J}}_{\vec{v} - \vec{v}_1} \cdot [\nabla_v \log f(v) - \nabla_{v_1} \log f(v_1)] d\vec{v}_1$$

et

$$S(f) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U}) f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right],$$

$\overline{\overline{J}}_{\vec{w}}$ étant la matrice de Landau définie par (1.3). La résolution de l'équation cinétique ionique repose sur la technique de « splitting » qui consiste à séparer la partie transport libre des ions du reste des opérateurs : on résout donc d'abord un problème de transport libre puis un problème homogène collisionnel avec champ électrique. La partie collisionnelle avec champ électrique est elle aussi splittée en

trois parties : phase de collision ion / ion puis prise en compte du champ électrique et enfin phase de collision ion / électron.

On ne décrira avec précision dans ce chapitre que la prise en compte du champ électrique. Puis, on présentera rapidement la méthode de résolution de l'équation d'énergie électronique. La résolution de l'opérateur de collision ion / électron sera l'objet du chapitre suivant.

On se place d'autre part dans le cadre d'une représentation de la densité f sur une grille en vitesse microscopique indicée par $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$ (et $k \in \{1, \dots, k_{\max}\}$ pour le cas axisymétrique étudié au quatrième chapitre), et une grille en espace indicée par i , l'indice de temps étant défini par n . Les épaisseurs des mailles de la grille en vitesse et de la grille en espace sont supposées être constantes et sont respectivement notées Δv et Δx .

2.1 Schéma général

On résume ici le principe général de résolution du système (2.1).

1. Résolution de la phase de transport libre :

$$\frac{1}{\Delta t}(f_{i,j}^{n+1/4} - f_{i,j}^n) + \vec{v}_j \cdot (\nabla_x f^n)_{i,j} = 0.$$

Il s'agit ici de la partie advection des ions c'est à dire de la phase de transport des ions sans collisions et sans champ électrique.

On peut ici utiliser une méthode particulière avec projection des quantités advectées sur le maillage en vitesse à la fin de la phase d'advection (voir [10]) ou une méthode de type volume fini (schéma upwind par exemple).

2. Résolution de la phase de collision ion / ion :

$$\frac{1}{\Delta t}(f_{i,j}^{n+2/4} - f_{i,j}^{n+1/4}) = B(f^{n+1/4})_{i,j}.$$

Du fait des propriétés de conservativité de l'opérateur de collision continu, cette phase doit vérifier les propriétés

$$\langle f_{i,j}^{n+2/4} \rangle = \langle f_{i,j}^{n+1/4} \rangle, \quad (2.2)$$

$$\langle \vec{v}_j f_{i,j}^{n+2/4} \rangle = \langle \vec{v}_j f_{i,j}^{n+1/4} \rangle, \quad (2.3)$$

$$\langle v_j^2 f_{i,j}^{n+2/4} \rangle = \langle v_j^2 f_{i,j}^{n+1/4} \rangle \quad (2.4)$$

où $\langle g \rangle$ est maintenant défini par la somme discrète

$$\langle g_j \rangle \equiv \sum_j g(v_j) \Delta v.$$

On pourra consulter [18] pour une description détaillée d'une discrétisation possible de l'opérateur $B(f)$. Dans [19] et [20], la discrétisation de $B(f)$ en géométrie axisymétrique est abordée. Au sixième chapitre, à l'instar de [16] et [21], on proposera une méthode de discrétisation de $B(f)$ dans le cas isotrope en vitesse.

3. Prise en compte du champ électrique :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_{i,j}^{n+3/4} - f_{i,j}^{n+2/4}) = \left(\frac{\nabla P_e}{mN} \right)_i^n \cdot (\nabla_v f^{n+2/4})_{i,j}.$$

On doit alors vérifier les égalités

$$\langle f_{i,j}^{n+3/4} \rangle = \langle f_{i,j}^{n+2/4} \rangle, \quad (2.5)$$

$$\langle m \vec{v}_j (f_{i,j}^{n+3/4} - f_{i,j}^{n+2/4}) \rangle = -\Delta t \cdot (\nabla_x P_e)_i^n. \quad (2.6)$$

4. Résolution de la phase de collision ion / électron :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+3/4}) = S(f^{n+3/4})_{i,j}$$

et l'on souhaite obtenir au plan discret les propriétés

$$\langle f_{i,j}^{n+1} \rangle = \langle f_{i,j}^{n+3/4} \rangle, \quad (2.7)$$

$$\langle \vec{v}_j (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+3/4}) \rangle = \vec{0}. \quad (2.8)$$

On proposera au chapitre suivant une méthode de résolution explicite ou semi-implicite pour la prise en compte des collisions ion / électron.

Puis, l'on évalue les quantités

$$\begin{cases} \overline{\mathcal{W}}_i \equiv \frac{1}{\Delta t} \cdot \langle m \frac{v_j^2}{2} (f_{i,j}^{n+3/4} - f_{i,j}^{n+2/4}) \rangle, \\ \widetilde{\mathcal{W}}_i \equiv \frac{1}{\Delta t} \cdot \langle m \frac{v_j^2}{2} (f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n+3/4}) \rangle. \end{cases} \quad (2.9)$$

Le schéma numérique devra donc aussi assurer la consistance de (2.9) avec (1.13) et (1.14).

5. Résolution de l'équation d'énergie électronique :

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(\rho\varepsilon_e)_i^{n+1} - (\rho\varepsilon_e)_i^n \right] + \nabla_x \cdot (\rho\varepsilon_e \vec{U})_i + \nabla_x \cdot (P_e \vec{U})_i = -(\overline{W} + \widetilde{W})_i. \quad (2.10)$$

On peut réécrire cette équation de la façon suivante :

o *Phase convective et terme de pression électronique :*

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(\rho\varepsilon_e)_i^{n+1/4} - (\rho\varepsilon_e)_i^n \right] + \nabla_x \cdot (\rho\varepsilon_e \vec{U})_i + \nabla_x \cdot (P_e \vec{U})_i = 0.$$

On explicitera la valeur de $(\nabla_x P_e)_i^n$ lors de la résolution de cette étape.

o *Phase de collision ion / ion :*

Les électrons ne subissant aucune influence lors de cette étape, on peut écrire que

$$(\rho\varepsilon_e)_i^{n+2/4} = (\rho\varepsilon_e)_i^{n+1/4}$$

sachant que la densité ionique est constante.

o *Prise en compte du champ électrique :*

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(\rho\varepsilon_e)_i^{n+3/4} - (\rho\varepsilon_e)_i^{n+2/4} \right] = -\overline{W}_i.$$

o *Phase de collision ion / électron :*

$$\frac{1}{\Delta t} \left[(\rho\varepsilon_e)_i^{n+1} - (\rho\varepsilon_e)_i^{n+3/4} \right] = -\widetilde{W}_i.$$

\overline{W}_i et \widetilde{W}_i sont donnés par (2.9). Ces deux dernières étapes seront donc résolues et explicitées respectivement en même temps que la phase de résolution du champ électrique (voir ci-dessous) et de l'opérateur de collision ion / électron (voir le chapitre suivant).

2.2 Traitement du champ électrique en géométrie cartésienne

On écrit f^0 au lieu de $f^{n+2/4}$ et f^* au lieu de $f^{n+3/4}$ et on omet l'indice d'espace i . D'autre part, par un souci de simplification, on considère que la vitesse

microscopique a une seule dimension. Soit donc le schéma numérique explicite suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(f_j^* - f_j^0) = \frac{(\nabla_x P_e)^n}{m\bar{N}^0}(\bar{f}_{j+1/2}^0 - \bar{f}_{j-1/2}^0)/\Delta v, \\ \frac{1}{\Delta t} [(\rho\varepsilon_e)^* - (\rho\varepsilon_e)^0] = -\bar{W} \end{cases} \quad (2.11)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{N}^0 = \sum_j \bar{f}_{j+1/2}^0 \Delta v, \\ \bar{U}^0 = \sum_j v_{j+1/2} \bar{f}_{j+1/2}^0 \Delta v / \bar{N}^0 \end{cases} \quad (2.12)$$

où $\bar{f}_{j+1/2}^0$ est une évaluation de f^0 en $v_{j+1/2} = v_j + \Delta v/2$ définie par le schéma upwind suivant

$$\begin{cases} (\nabla_x P_e)^n \leq 0 \implies \bar{f}_{j+1/2}^0 = f_j^0, \\ (\nabla_x P_e)^n \geq 0 \implies \bar{f}_{j+1/2}^0 = f_{j+1}^0, \end{cases} \quad (2.13)$$

schéma dont la stabilité numérique est assurée sous le critère *CFL*

$$\Delta t < \frac{m\bar{N}^0}{|(\nabla_x P_e)^n|} \Delta v.$$

Les conditions aux limites sont du type Dirichlet ; on prend donc

$$\bar{f}_{1/2}^0 = \bar{f}_{j_{\max}+1/2}^0 \equiv 0.$$

On obtient alors les relations de conservation

$$\begin{cases} \langle f_j^* \rangle = \langle f_j^0 \rangle, \\ \frac{1}{\Delta t} (\langle m v_j f_j^* \rangle - \langle m v_j f_j^0 \rangle) = -\frac{(\nabla_x P_e)^n}{\bar{N}^0} \sum_j \bar{f}_{j+1/2}^0 \Delta v = -(\nabla_x P_e)^n, \\ \frac{1}{\Delta t} (\langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^* \rangle - \langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^0 \rangle) = -\frac{(\nabla_x P_e)^n}{\bar{N}^0} \sum_j v_{j+1/2} \bar{f}_{j+1/2}^0 \Delta v = -(\nabla_x P_e)^n \cdot \bar{U}^0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Autrement dit, les propriétés (2.5) et (2.6) sont vérifiées et l'on a

$$\bar{W} = -(\nabla_x P_e)^n \cdot \bar{U}^0, \quad (2.15)$$

relation qui est consistante avec (1.14). Le gradient de pression électronique sera évalué au paragraphe suivant (voir la relation (2.17)).

2.3 Résolution de l'équation d'énergie électronique et évaluation du gradient de pression électronique

Nous décrivons dans cette section d'une part le principe général de résolution de l'équation d'énergie électronique (2.10) et d'autre part le calcul du champ électrique ce qui revient à expliciter le calcul de $(\nabla_x P_e)_i$. On cherche donc à résoudre

$$\frac{1}{\Delta t} [(\rho\varepsilon_e)_i^{n+1} - (\rho\varepsilon_e)_i^n] + \nabla_x \cdot (\rho\varepsilon_e \vec{U})_i + \nabla_x \cdot (P_e \vec{U})_i = -(\overline{\mathcal{W}} + \widetilde{\mathcal{W}})_i$$

où $\overline{\mathcal{W}}_i$ et $\widetilde{\mathcal{W}}_i$ représentent la puissance volumique déposée sur les électrons respectivement par le champ électrique et par les collisions ion / électron dans la maille physique i . Ces deux quantités sont prises en compte au cours du calcul de $f^{n+3/4}$ et de f^{n+1} . Il ne reste donc plus qu'à traiter le terme convectif et le terme tenant compte de la pression électronique. C'est pourquoi nous ne décrivons ici que la méthode de résolution de l'équation discrète

$$\frac{1}{\Delta t} [(\rho\varepsilon_e)_i^{n+1/4} - (\rho\varepsilon_e)_i^n] + \nabla_x \cdot (\rho\varepsilon_e \vec{U})_i + \nabla_x \cdot (P_e \vec{U})_i = 0.$$

Pour la partie convective, on pourra utiliser un schéma de type upwind. Le terme $\nabla_x \cdot (P_e \vec{U})_i$ est discrétisé en utilisant la propriété algébrique suivante qui permet d'avoir un schéma à l'ordre 2 (on se place ici en géométrie monodimensionnelle en espace pour alléger les notations) :

Propriété 2.1 *Soit*

$$U_{i+1/2}^* \equiv \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_i^n) \quad \text{et} \quad P_{e,i+1/2}^* \equiv \frac{1}{2} (P_{e,i+1}^n + P_{e,i}^n) \quad (2.16)$$

et on pose pour g donnée

$$[g]_{i-1/2}^{i+1/2} \equiv g_{i+1/2} - g_{i-1/2}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} [P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} &= U_i^n [P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2} + P_{e,i}^n [U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} \\ &+ \frac{1}{2} ([P_e^n]_i^{i+1} [U^n]_i^{i+1} - [P_e^n]_{i-1}^i [U^n]_{i-1}^i). \end{aligned}$$

Cette propriété algébrique permet en effet d'affirmer que pour toutes solutions régulières en espace, on aura

$$[P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} = \Delta x_i^n \partial_x (P_e U)_i^n + \mathcal{O}[(\Delta x_i^n)^3].$$

D'autre part, en posant (par abus d'écriture)

$$\partial_x (P_e)_i^n = \frac{U_i^n}{\bar{U}^0} \cdot \frac{[P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2}}{\Delta x_i^n} \quad (2.17)$$

ce qui donne en utilisant la relation (2.15)

$$\bar{W}_i = -U_i^n \cdot \frac{[P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2}}{\Delta x_i^n}$$

(remarquons que $U_i^n / \bar{U}^0 = 1 + \mathcal{O}(\Delta v)$), on obtient

$$[P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} + \Delta x_i^n \bar{W}_i = P_{e,i}^n [U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} + \mathcal{O}[(\Delta x_i^n)^3]$$

ce qui correspond bien à une discrétisation possible de $\Delta x_i^n (P_e \partial_x U)_i^n$ à l'ordre 2.

Pour tenir compte de l'existence éventuelle de chocs et pour assurer la stabilité du schéma, on passe à l'ordre 1 en ne définissant pas exactement $[U^*]_{i-1/2}^{i+1/2}$ et $[P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2}$ à l'aide de (2.16) mais en utilisant une solution approchée d'un problème de Riemann correspondant aux deux états

$$(N_i, U_i, P_i, P_{e,i})$$

et

$$(N_{i+1}, U_{i+1}, P_{i+1}, P_{e,i+1})$$

où P est la pression ionique telle que $P = NT$. On utilise donc un solveur de Riemann de type Godounov pour « assurer » la stabilité du schéma (cf. [71] et [72] par exemple), stabilité qui reste par ailleurs à démontrer pour notre problème ; on pose pour cela

$$\begin{aligned} U_{i+1/2}^* &\equiv \frac{1}{2} (U_{i+1}^n + U_i^n) + \Delta_{i+1/2}^n, \\ P_{e,i+1/2}^* &\equiv \frac{1}{2} (P_{e,i+1}^n + P_{e,i}^n) + \delta_{i+1/2}^n \end{aligned}$$

avec

$$\begin{cases} \Delta_{i+1/2}^n = \frac{1}{2(\rho c)_{i+1/2}^*} (\mathcal{P}_i^n - \mathcal{P}_{i+1}^n), \\ \delta_{i+1/2}^n = \frac{1}{2} (\rho c)_{i+1/2}^* (U_i^n - U_{i+1}^n) \end{cases}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_i^n = P_i^n + P_{e,i}^n = \text{pression totale,} \\ (\rho c)_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\gamma \mathcal{P}_i^n \rho_i^n} + \sqrt{\gamma \mathcal{P}_{i+1}^n \rho_{i+1}^n} \right), \\ \gamma = 5/3 \end{array} \right.$$

et on utilise encore la définition de $[\cdot]$ ainsi que la formule (2.17) pour évaluer $[P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2}$ et pour obtenir le gradient de pression électronique $\partial_x (P_e)_i^n$. Notons que la propriété algébrique (2.16) reste valable en remplaçant U_{i+1}^n par $U_{i+1}^n + 2\Delta_{i+1/2}^n$ et $P_{e,i+1}^n$ par $P_{e,i+1}^n + 2\delta_{i+1/2}^n$.

Chapitre 3

Résolution de l'opérateur de collision ion / électron en géométrie cartésienne

Dans ce chapitre, on propose un schéma numérique conservatif explicite ou semi-implicite pour la résolution de l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron $S(f)$. On cherche donc à résoudre numériquement le système

$$\begin{cases} \partial_t f = S(f), \\ \partial_t(\rho\varepsilon_e) = 3\Omega N(T - T_e) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\rho\varepsilon_e = \frac{3}{2}N_e T_e$ (lorsque $\gamma = 5/3$) et où $S(f)$ est défini par (1.9) c'est à dire

$$S(f) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U})f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right].$$

On montrera que le schéma proposé dans sa version explicite préserve sous un critère de type *CFL* la positivité de la distribution ionique f et de la température électronique T_e tout en assurant la décroissance de l'entropie. Ce schéma est basé sur la notion de *moyenne entropique* que nous introduirons plus loin.

On supposera par ailleurs que la vitesse microscopique a une seule dimension, la généralisation au cas multi-dimensionnel *cartésien* étant immédiate. On remplacera donc $\rho\varepsilon_e = \frac{3}{2}N_e T_e$, $3\Omega N(T - T_e)$ et $(2\pi T_e/m)^{3/2}$ respectivement par $\rho\varepsilon_e = \frac{1}{2}N_e T_e$, $\Omega N(T - T_e)$ et $\sqrt{2\pi T_e/m}$, γ étant maintenant égal à 3.

Mais avant d'aborder le schéma totalement discrétisé explicite ou semi-implicite, on se propose tout d'abord d'exposer ou de rappeler quelques propriétés du modèle continu pour ensuite étudier les propriétés concernant la positivité, la décroissance de l'entropie, l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre thermodynamique

maxwellien et la convergence vers cet état d'équilibre pour le schéma semi-discret en vitesse, *état d'équilibre qui sera aussi l'état d'équilibre du schéma explicite ou semi-implicite*. Cette étude nous permettra ainsi de montrer l'existence et l'unicité d'un état d'équilibre maxwellien pour le schéma explicite ou semi-implicite.

3.1 Sur le modèle continu

On a déjà vu certaines propriétés du système (3.1) au chapitre précédent notamment les propriétés de conservation $\langle S(f) \rangle = 0$ et $\langle \vec{v} S(f) \rangle = \vec{0}$ (car $\vec{U} = \vec{U}_e$ par hypothèse) ainsi que la décroissance de l'entropie

$$H(f, T_e) = \langle f \log f \rangle - \frac{3}{2} Z N \log T_e$$

avec le temps où $\langle \cdot \rangle \equiv \int \cdot d\vec{v}$ (appliquer la proposition 1.4 dans le cas homogène en espace), \vec{v} appartenant à \mathbb{R}^3 .

3.1.1 Propriétés de conservation sur un domaine borné

Lorsque le domaine des vitesses est \mathbb{R}^3 , les propriétés de conservation sont vérifiées car on fait implicitement l'hypothèse que f est nulle à l'infini. Mais quand le domaine des vitesses est borné - ce qui sera le cas lorsque l'on discrétisera le système (3.1) -, la condition aux limites « f nulle sur le bord » ne pourra être compatible avec les égalités $\langle S(f) \rangle = 0$ et $\langle \vec{v} S(f) \rangle = \vec{0}$. On doit alors utiliser une condition aux limites de type Robin sur le bord pour vérifier $\langle S(f) \rangle = 0$ et modifier la définition de \vec{U} pour préserver aussi l'égalité $\langle \vec{v} S(f) \rangle = \vec{0}$.

Cette condition aux limites et la nouvelle définition de \vec{U} sont les suivantes :

Soit \mathcal{V} le domaine borné des vitesses. Alors, sous la condition aux limites

$$\forall \vec{v} \in \partial\mathcal{V} : (\vec{v} - \vec{U})f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f = \vec{0}$$

et lorsque la vitesse \vec{U} est définie par

$$\vec{U} = \frac{\langle \vec{v} f \rangle}{\langle f \rangle} + \vec{\delta u}$$

où

$$\vec{\delta u} = \frac{T_e}{mN} \int_{\partial\mathcal{V}} f d\vec{S},$$

$d\vec{S}$ étant la mesure surfacique de $\partial\mathcal{V}$, les égalités

$$\langle S(f) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \vec{v} S(f) \rangle = \vec{0}$$

sont respectées sachant maintenant que $\langle \cdot \rangle \equiv \int_{\mathcal{V}} \cdot d\vec{v}$.

$\vec{\delta u}$ est donc un terme correctif d'autant plus petit que \mathcal{V} est grand, terme que l'on retrouvera aussi dans la définition du schéma numérique (voir les définitions (3.5) et (3.6)).

3.1.2 Sur la convergence vers l'équilibre thermodynamique du système continu (3.1)

On revient au cas où $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$. Posons

$$f^\infty = \frac{N}{\sqrt{2\pi T_e^\infty/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^\infty)^2}{2T_e^\infty} \right]$$

où le couple $(\tilde{U}^\infty, T_e^\infty)$ est solution du système

$$\begin{cases} \langle (v - U^0) f^\infty \rangle = 0, \\ \langle \{ [\frac{m}{2}(v - U^0)^2 + Z\frac{T_e^\infty}{2}] - [\frac{T^0}{2} + Z\frac{T_e^0}{2}] \} f^\infty \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

La solution de ce système est bien-sûr

$$\begin{cases} \tilde{U}^\infty = U^0, \\ T_e^\infty = \frac{T^0 + ZT_e^0}{1+Z}. \end{cases}$$

On peut alors montrer la proposition suivante :

Proposition 3.1 (*Lemme de Gibbs*)

$$H(f^\infty, T_e^\infty) \leq H(f, T_e).$$

La démonstration est identique à celle du point i) de la proposition 3.3.

Il est par contre très difficile d'établir un résultat de convergence de f vers f^∞ lorsque le temps t tend vers l'infini.

Cependant, sachant que G. Toscani (voir [31]) a montré la convergence de f vers f^∞ en norme L^1 dans le cas où T_e est remplacée par T dans la définition de $S(f)$ (le système se résume alors à $\partial_t f = S(f)$ et devient linéaire), on conjecture que :

Conjecture 3.1

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f - f^\infty\|_{L^1} = 0$$

et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T_e(t) = T_e^\infty.$$

On peut remarquer ici qu'il est très facile de montrer la deuxième partie de cette conjecture : en effet, en utilisant le fait que $T + ZT_e = C^{ste}$, on trouve la solution explicite $T_e(t)$ (et donc aussi $T(t)$). On obtient

$$T_e(t) = T_e^\infty + (T_e^0 - T_e^\infty) \exp \left[-\frac{2\Omega}{3Z}(Z+1)t \right].$$

Ce résultat est donc aussi un argument en faveur de la conjecture 3.1.

Dans le paragraphe suivant, on se propose de montrer que la version discrète en vitesse et continue en temps de la conjecture 3.1 est vérifiée : voir le théorème 3.1.

Il semble malheureusement difficile d'utiliser le théorème 3.1 pour montrer que la conjecture 3.1 est vérifiée. En effet, pour établir ce théorème, on utilise de façon cruciale le fait que l'on peut construire une suite $f_j(t_k)$ qui vérifie

$$\inf_{k,j} f_j(t_k) > 0$$

et qui converge lorsque (t_k) tend vers l'infini. Or, c'est parce que l'espace \mathbb{R}^N est de dimension finie et est loc.comp. lorsque $N < +\infty$ que l'on peut établir ces résultats, $N = j_{\max}$ étant le nombre de point de discrétisation en vitesse. Dans le cas continu, que le domaine d'intégration des vitesses \mathcal{V} soit ou ne soit pas borné, il faudrait donc utiliser un résultat de compacité sur un espace fonctionnel à déterminer. D'autre part, si la conjecture 3.1 est vérifiée, il est évident que l'on ne peut avoir $\inf_{k,v} f(t_k, v) > 0$ lorsque $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$. Les outils mathématiques utilisés par G. Toscani seraient sans doute beaucoup plus adaptés.

3.2 Sur le schéma semi-discret

On rappelle tout d'abord que N , U et T sont définies par

$$N = \langle f_j \rangle,$$

$$NU = \langle v_j f_j \rangle$$

et

$$NT = \langle m(v_j - U)^2 f_j \rangle$$

où

$$\langle g_j \rangle \equiv \sum_j g(v_j) \Delta v.$$

Soit donc le schéma semi-discret suivant

$$\begin{cases} \partial_t f_j = S(f)_j, \\ \partial_t(\rho\varepsilon_e) = \Omega(\tilde{N}\tilde{T} - NT_e) \end{cases} \quad (3.3)$$

(rappelons qu'ici, l'on a $\rho\varepsilon_e = \frac{1}{2}N_eT_e$ puisque $\gamma = 3$) avec

$$S(f)_j =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - \tilde{U})\tilde{f}_{j+1/2} - (v_{j-1/2} - \tilde{U})\tilde{f}_{j-1/2} \right] \\ & + \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} (a_j f_{j+1} - b_j f_j + c_j f_{j-1}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où

$$\begin{cases} \tilde{N} = \sum_j \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v, \\ \tilde{U} = \sum_j v_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v / \tilde{N} + \delta\tilde{u}, \\ \tilde{T} = \sum_j m(v_{j+1/2} - \tilde{U})^2 \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v / \tilde{N} + \delta\tilde{t} \end{cases} \quad (3.5)$$

et

$$\begin{cases} \delta\tilde{u} = \frac{T_e}{m\tilde{N}} (f_{j_{\max}} - f_1), \\ \delta\tilde{t} = \frac{T_e}{\tilde{N}} \left[f_{j_{\max}} (v_{j_{\max}+1/2} - \tilde{U}) + f_1 (\tilde{U} - v_{1/2}) \right] \end{cases} \quad (3.6)$$

avec $a_j = c_j = 1$ et $b_j = 2$ sauf aux bords: voir les conditions aux limites ci-dessous. $f_{j+1/2}(t)$ est une approximation de $f(t = t_n, v = v_{j+1/2})$ et est la *moyenne entropique* de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$ définie par :

Définition On appellera *moyenne entropique* des quantités strictement positives $f(x)$ et $f(y)$ la valeur $\tilde{f}_{x,y}$ définie par

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{x,y} &= \frac{f(x)-f(y)}{\log f(x)-\log f(y)} \text{ si } f(x) \neq f(y), \\ &= f(x) \text{ sinon.} \end{aligned}$$

Par continuité, on étend cette définition au cas où $f(x) = 0$ et / ou $f(y) = 0$ en posant

$$\tilde{f}_{x,y} = 0 \text{ si } f(x) \cdot f(y) = 0.$$

$\delta\tilde{u}$ est un *terme correctif* permettant de conserver *rigoureusement* la quantité de mouvement (voir ci-dessous) : ce terme a aussi été introduit au paragraphe précédent lors de l'étude du système continu sur un domaine borné. Quant à $\delta\tilde{t}$, il permet de définir une écriture agréable de \tilde{T} lorsque l'on tient compte de la correction $\delta\tilde{u}$.

Condition aux limites La condition aux limites est de type Robin c'est à dire qu'aux deux extrémités, on a

$$(v - U)f + \frac{T_e}{m}\partial_v f = 0$$

ce qui revient à prendre pour le schéma numérique

$$\begin{cases} a_j = 1 \text{ si } j \neq j_{\max}, \\ b_j = 2 \text{ si } j \in \{2, \dots, j_{\max} - 1\}, \\ c_j = 1 \text{ si } j \neq 1, \\ b_1 = b_{j_{\max}} = 1 \text{ et } a_{j_{\max}} = c_1 = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

et

$$\tilde{f}_{1/2} = \tilde{f}_{j_{\max}+1/2} \equiv 0. \quad (3.8)$$

On obtient alors les propriétés de conservation suivantes :

Propriété 3.1

$$\begin{cases} \partial_t \langle f_j \rangle = \partial_t N = 0, \\ \partial_t \langle v_j f_j \rangle = \partial_t (NU) = 0, \\ \partial_t \langle m \frac{v_j^2}{2} f_j \rangle = \Omega (NT_e - \tilde{N}\tilde{T}). \end{cases}$$

Notons que ces relations seraient aussi vérifiées en définissant $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ autrement que par la moyenne entropique.

Preuve de la propriété 3.1 On a

$$\begin{aligned} \sum_j S(f_j) &= \frac{\Omega}{\Delta v} \left[(v_{j_{\max}+1/2} - \tilde{U})\tilde{f}_{j_{\max}+1/2} - (v_{1/2} - \tilde{U})\tilde{f}_{1/2} \right] \\ &+ \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left[\sum_{j=2}^{j_{\max}} f_j - \sum_{j=1}^{j_{\max}-1} f_j - \sum_{j=2}^{j_{\max}} f_j + \sum_{j=1}^{j_{\max}-1} f_j \right] = 0 \end{aligned}$$

en tenant compte de (3.7) et de (3.8). D'où la conservation de la masse.

La conservation de la quantité de mouvement est respectée car on a

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j_{\max}} v_j S(f)_j \Delta v &= -\Omega \sum_{j=1}^{j_{\max}} (v_{j+1/2} - \tilde{U}) \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v + \frac{\Omega T_e}{m} (f_1 - f_{j_{\max}}) \\
&= \Omega \delta \tilde{u} \sum_{j=1}^{j_{\max}} \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v + \frac{\Omega T_e}{m} (f_1 - f_{j_{\max}}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Pour la variation d'énergie ionique, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{j_{\max}} m \frac{v_j^2}{2} S(f)_j \Delta v &= -\Omega \sum_{j=1}^{j_{\max}} m (v_{j+1/2} - \tilde{U}) v_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v \\
&\quad - \Omega T_e \left(\sum_{j=2}^{j_{\max}} f_j v_{j-1/2} - \sum_{j=1}^{j_{\max}-1} f_j v_{j+1/2} \right) \\
&= -\Omega \sum_{j=1}^{j_{\max}} m (v_{j+1/2} - \tilde{U}) v_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v \\
&\quad - \Omega T_e \left(f_{j_{\max}} v_{j_{\max}-1/2} - f_1 v_{3/2} - \sum_{j=2}^{j_{\max}-1} f_j \Delta v \right) \\
&= -\Omega \sum_{j=1}^{j_{\max}} m (v_{j+1/2} - \tilde{U}) v_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v \\
&\quad - \Omega T_e (f_{j_{\max}} v_{j_{\max}+1/2} - f_1 v_{1/2} - N) \\
&= -\Omega \sum_{j=1}^{j_{\max}} m (v_{j+1/2} - \tilde{U})^2 \tilde{f}_{j+1/2} \Delta v + \Omega m \tilde{N} \tilde{U} \delta \tilde{u} \\
&\quad - \Omega T_e (f_{j_{\max}} v_{j_{\max}+1/2} - f_1 v_{1/2} - N) \\
&= \Omega (N T_e - \tilde{N} \tilde{T}).
\end{aligned}$$

□

On constate donc que, dès que le domaine des vitesses est borné - *f n'est alors pas nulle aux bords* -, l'on ne peut avoir *rigoureusement* conservation de la quantité de mouvement que si l'on tient compte du terme correctif $\delta \tilde{u}$ ce qui peut poser des problèmes quant à la consistance du schéma numérique. Cependant, comme f est à décroissance rapide, on peut raisonnablement supposer que $\delta \tilde{u}$ (ainsi que $\delta \tilde{t}$) sera très faible (voire numériquement nul) lorsque le maillage en vitesse sera suffisamment grand.

Notations On pose

$$H(f, T_e)(t) = \langle f_j \log f_j \rangle - \frac{ZN}{2} \log T_e,$$

$$\mathcal{M}_{f, T_e}(t, v) = \frac{N}{\sqrt{2\pi T_e/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U})^2}{2T_e} \right]$$

et

$$\mathcal{M}_{f, T_e}^\infty(v) = \frac{N}{\sqrt{2\pi T_e^\infty/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^\infty)^2}{2T_e^\infty} \right]$$

où \tilde{U}^∞ et T_e^∞ sont définies par les conditions initiales U^0 , T^0 et T_e^0 de la façon suivante

$$\begin{cases} \langle (v_j - U^0) \cdot \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle = 0, \\ \langle \{ [\frac{1}{2}m(v_j - U^0)^2 + Z\frac{T_e^\infty}{2}] - [\frac{T^0}{2} + Z\frac{T_e^0}{2}] \} \cdot \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Le système (3.9) est une version discrète du système (3.2). On montrera que ce système admet une unique solution vérifiant $T_e^\infty > 0$: voir la proposition 3.3. On peut déjà dire que $\tilde{U}^\infty \simeq U^0$ et que $T_e^\infty \simeq \frac{T^0 + ZT_e^0}{1+Z}$. Enfin, on définit

$$f^\infty = \frac{N}{\langle \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle} \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty$$

et

$$H(f^\infty, T_e^\infty) = \langle f_j^\infty \log f_j^\infty \rangle - \frac{ZN}{2} \log T_e^\infty.$$

Les principales propriétés du schéma sont rassemblées dans le lemme, les propositions, le corollaire et le théorème suivants :

Lemme 3.1 *Lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}$ est la moyenne entropique de f_j et de f_{j+1} , l'opérateur $S(f)_j$ défini par (3.4) peut s'écrire*

$$\begin{aligned} S(f)_j &= \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2} [\log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_{j+1} - \log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_j] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{f}_{j-1/2} [\log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_j - \log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_{j-1}] \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Autrement dit, il y a équivalence au plan discret entre la formulation classique (1.4) et la formulation de Landau (1.5) de l'opérateur de collision ion / électron lorsque l'on utilise la moyenne entropique.

Proposition 3.2 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (3.3) et (3.4) préserve la positivité de $f_j(t)$ et de $T_e(t)$, et vérifie*

$$\partial_t H(f, T_e) \leq 0$$

ainsi que

$$\inf_{t \in [0, +\infty[} T_e(t) > 0.$$

D'autre part, il existe une suite (t_k) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $f_j(t_k)$ converge uniformément vers un équilibre thermodynamique f_j^∞ et telle que la suite $T_e(t_k)$ tende vers une limite T_e^∞ .

Corollaire 3.1 *Le système (3.9) admet au-moins une solution $\mathcal{M}_{f, T_e}^\infty$.*

La proposition suivante donne une borne inférieure pour l'entropie $H(f, T_e)$ et assure l'unicité de l'état d'équilibre :

Proposition 3.3 *i) (Lemme de Gibbs) Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (3.3) et (3.4) vérifie*

$$\forall t : H(f^\infty, T_e^\infty) \leq H(f, T_e)(t).$$

ii) Le système (3.9) admet une unique solution $\mathcal{M}_{f, T_e}^\infty$.

Les propositions précédentes permettent alors d'établir le résultat final suivant qui affine le résultat de convergence de la proposition 3.2 :

Théorème 3.1 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (3.3) et (3.4) assure la convergence en norme l^1 de la suite $f_j(t)$ vers l'unique équilibre thermodynamique f_j^∞ ainsi que la convergence de $T_e(t)$ vers T_e^∞ lorsque t tend vers l'infini.*

Ce théorème est la version semi-discrète de la conjecture 3.1.

Preuve du lemme 3.1 On vérifie facilement que

$$(\log \mathcal{M}_{f,T_e})_{j+1} - (\log \mathcal{M}_{f,T_e})_j = -\frac{m\Delta v}{T_e}(v_{j+1/2} - \tilde{U}) \quad (3.11)$$

et que

$$(a_j f_{j+1} - b_j f_j + c_j f_{j-1}) = \tilde{f}_{j+1/2}(\log f_{j+1} - \log f_j) - \tilde{f}_{j-1/2}(\log f_j - \log f_{j-1})$$

en tenant compte des conditions aux limites (3.7) et (3.8). Donc, on peut écrire que

$$\begin{aligned} S(f)_j &= -\frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2} [(\log \mathcal{M}_{f,T_e})_{j+1} - (\log \mathcal{M}_{f,T_e})_j] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{f}_{j-1/2} [(\log \mathcal{M}_{f,T_e})_j - (\log \mathcal{M}_{f,T_e})_{j-1}] \right\} \\ &+ \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2} [\log f_{j+1} - \log f_j] - \tilde{f}_{j-1/2} [\log f_j - \log f_{j-1}] \right\} \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} S(f)_j &= \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2} [\log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_{j+1} - \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_j] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{f}_{j-1/2} [\log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_j - \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_{j-1}] \right\}. \end{aligned}$$

□

Preuve de la proposition 3.2 et du corollaire 3.1 Remarquons tout d'abord que, par continuité, il existe un intervalle $[0, \tau[$ sur lequel on peut définir $H(f, T_e)(t)$ puisque les conditions initiales sont strictement positives. Sur ce voisinage, on a

$$\begin{aligned} \partial_t H(f, T_e)(t) &= \partial_t \langle f_j \rangle + \langle \log(f_j) \partial_t f_j \rangle - \frac{N_e}{2T_e} \partial_t T_e \\ &= \langle \log(f_j) \partial_t f_j \rangle + \frac{1}{T_e} \langle m \frac{v_j^2}{2} \partial_t f_j \rangle. \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \langle m \frac{(v_j - \tilde{U})^2}{2} \partial_t f_j \rangle &= \langle m \frac{v_j^2}{2} \partial_t f_j \rangle + m \frac{\tilde{U}^2}{2} \langle \partial_t f_j \rangle - m \tilde{U} \langle \partial_t (v_j f_j) \rangle \\ &= \langle m \frac{v_j^2}{2} \partial_t f_j \rangle + m \frac{\tilde{U}^2}{2} \partial_t N - m \tilde{U} \partial_t (NU) \end{aligned}$$

soit encore

$$\langle m \frac{(v_j - \tilde{U})^2}{2} \partial_t f_j \rangle = \langle m \frac{v_j^2}{2} \partial_t f_j \rangle \quad (3.12)$$

puisque le schéma est conservatif. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t H(f, T_e)(t) &= \langle \log(f_j) \partial_t f_j \rangle + \frac{1}{T_e} \langle m \frac{(v_j - \tilde{v})^2}{2} \partial_t f_j \rangle \\ &= \langle S(f)_j \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j \rangle.\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}& \sum_j S(f)_j \cdot \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j = \\ & \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2} [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_{j+1} - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j] \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j \\ & - \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j-1/2} [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_{j-1}] \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j\end{aligned}$$

soit encore

$$\partial_t H(f, T_e)(t) =$$

$$\sum_j S(f)_j \cdot \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j \Delta v = \tag{3.13}$$

$$- \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2} [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_{j+1} - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j]^2 \Delta v \leq 0,$$

inégalité qui permet d'affirmer que

$$t \in [0, \tau] \implies \partial_t H(f, T_e) \leq 0 \implies H(f, T_e)(t) \leq H(f, T_e)(0).$$

Or, comme $x \mapsto x \log x$ est minorée sur $[0, +\infty[$, $T_e(t)$ ne peut tendre vers 0 lorsque t tend vers τ (car $H(f, T_e)(t)$ tendrait alors vers $+\infty$). Donc, on peut définir $H(f, T_e)(\tau)$ et écrire que

$$f_j(\tau) \geq 0 \quad \text{et} \quad T_e(\tau) > 0.$$

Supposons d'autre part que

$$\exists j_0 / f_{j_0}(\tau) = 0.$$

Alors la formulation convection-diffusion montre que

$$\partial_t f_{j_0}(\tau) = \frac{\Omega(\tau) T_e(\tau)}{m \Delta v^2} [f_{j_0+1}(\tau) + f_{j_0-1}(\tau)] \geq 0.$$

Comme par hypothèse on a

$$t < \tau \implies \forall j : f_j(t) > 0,$$

nécessairement on doit avoir

$$\partial_t f_{j_0}(\tau) \leq 0.$$

C'est donc que

$$\partial_t f_{j_0}(\tau) = 0$$

d'où

$$f_{j_0+1}(\tau) = f_{j_0-1}(\tau) = 0$$

puisque la décroissance de l'entropie implique que $\Omega(\tau)T_e(\tau) > 0$. De proche en proche, on obtient alors que

$$\forall j : f_j(\tau) = 0$$

ce qui est impossible, la masse étant conservée. C'est donc que

$$\forall j : f_j(\tau) > 0.$$

On peut ainsi étendre le voisinage $[0, \tau]$ à tout intervalle $[0, T]$ pour tout $T \geq 0$ ce qui permet d'affirmer que

$$\forall t \geq 0, \forall j : f_j(t) > 0 \quad \text{et} \quad \inf_{t \in [0, +\infty[} T_e(t) > 0.$$

$H(f, T_e)(t)$ est donc une fonction définie sur $[0, +\infty[$. Comme le schéma est conservatif en énergie, $T_e(t)$ est majorée ce qui implique que $H(f, T_e)(t)$ est minorée sur $[0, +\infty[$. $H(f, T_e)$, fonction décroissante et minorée sur $[0, +\infty[$, admet donc une limite H^∞ en $t = +\infty$.

On montre maintenant la convergence vers un état d'équilibre. Comme $H(f, T_e)$ est continue, décroissante et admet une limite en temps grand, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial t} H(f, T_e)(t) = 0 \quad \text{presque partout.}$$

Donc il existe une suite (t_k) tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \left\{ \max_j \left(\tilde{f}_{j+1/2}(t_k) [\log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_{j+1}(t_k) - \log(f/\mathcal{M}_{f, T_e})_j(t_k)]^2 \right) \right\} = 0 \quad (3.14)$$

d'après l'égalité (3.13). En utilisant le lemme 3.2 (voir ci-dessous), on sait qu'il existe une sous-suite de (t_k) notée (t_k) telle que

$$\inf_{k, j} \tilde{f}_{j+1/2}(t_k) > 0.$$

Et, grâce à (3.14), on obtient alors que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \left\{ \max_j [\log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_{j+1} - \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_j] \right\} = 0,$$

limite qui implique qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} (f_j(t_k)/\mathcal{M}_{f,T_e,j}(t_k)) = C.$$

Comme $T_e(t)$ est bornée sur $[0, +\infty[$ et que $\tilde{U}(t_k)$ est aussi bornée sur $[0, +\infty[$ (voir le lemme 3.2), on peut affirmer qu'il existe $T_e^\infty > 0$ (car $T_e(t)$ est de plus strictement minorée), \tilde{U}^∞ et une sous-suite de (t_k) encore notée (t_k) telles que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} T_e(t_k) = T_e^\infty > 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{U}(t_k) = \tilde{U}^\infty$$

puisque \mathbb{R} est loc.comp.. Donc, il existe une suite (t_k) et $\mathcal{M}_{f,T_e,j}^\infty$ tels que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \mathcal{M}_{f,T_e,j}(t_k) = \mathcal{M}_{f,T_e,j}^\infty$$

et donc tels que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_j(t_k) = C \mathcal{M}_{f,T_e,j}^\infty,$$

$\mathbb{R}^{N=j_{\max}}$ étant aussi loc.comp.. Et comme le schéma numérique est conservatif en quantité de mouvement et en énergie, $\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ est donc solution de (3.9) et on a $C = N^0 / \langle \mathcal{M}_{f,T_e,j}^\infty \rangle$. \square

Le lemme utilisé ci-dessus pour la démonstration de la proposition 3.2 est le suivant :

Lemme 3.2 *Pour toute suite (t_k) tendant vers l'infini telle que (3.14) est vérifiée, il existe une sous-suite de (t_k) notée (t_k) telle que*

$$\inf_{k,j} f_j(t_k) > 0$$

et

$$\inf_k |\tilde{N}(t_k)| > 0, \quad \sup_k |\tilde{U}(t_k)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_k |\delta \tilde{u}(t_k)| < +\infty.$$

La preuve du lemme 3.2 est basée à son tour sur le lemme suivant :

Lemme 3.3 *Soit deux suites x_k et y_k de réels positifs, \tilde{f}_k leur moyenne entropique et z_k une suite réelle. Supposons que*

$$\forall k : \tilde{f}_k [\log x_k - \log y_k - z_k]^2 \leq C.$$

i) Si pour un C' positif, on a pour tout k

$$z_k > -C',$$

alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0 \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0.$$

ii) Si z_k est bornée, alors

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_k = 0 \implies \lim_{k \rightarrow +\infty} x_k = 0 \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} y_k = 0.$$

Preuve du lemme 3.3 *Point i)* Supposons qu'une sous-suite de y_k , encore notée y_k , soit minorée par une constante $\alpha > 0$. Il y a alors une contradiction car

$$\begin{aligned} \tilde{f}_k [\log x_k - \log y_k - z_k]^2 &= (x_k - y_k) [\log x_k - \log y_k] + \tilde{f}_k z_k^2 - 2z_k(x_k - y_k) \\ &\geq -y_k [\log x_k - \log y_k] + 2z_k(y_k - x_k) + o(1) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Point ii) Celui-ci est une conséquence simple du point i) car on peut faire jouer à x_k et y_k des rôles symétriques. \square

Preuve du lemme 3.2 \circ Dans un premier temps, on montre que

$$\sup_k |\tilde{U}(t_k)| < +\infty \quad \text{et} \quad \sup_k |\delta \tilde{u}(t_k)| < +\infty.$$

Pour cela, l'on va montrer que l'hypothèse

$$\text{il existe une sous-suite de } (t_k) \text{ encore notée } (t_k) \text{ telle que } \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{U}(t_k) = +\infty \quad (3.15)$$

est fausse.

Remarquons tout d'abord que comme $\tilde{N}(t) > 0$ (puisque $\forall t < +\infty, \forall j$: on a $f_j(t) > 0$: voir la proposition 3.2), on peut écrire que

$$v_{1/2} + \frac{T_e(t) (f_1(t) - f_{j_{\max}}(t))}{m \tilde{N}(t)} \leq \tilde{U}(t) \leq v_{j_{\max}+1/2} + \frac{T_e(t) (f_1(t) - f_{j_{\max}}(t))}{m \tilde{N}(t)}.$$

Comme $T_e(t)$ est majorée et que $|f_1(t) - f_{j_{\max}}(t)|$ est aussi majoré (car Δv est fixé et $N < +\infty$), l'hypothèse (3.15) implique

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{N}(t_k) = 0.$$

Donc, on a pour tout j

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_{j+1/2}(t_k) = 0.$$

Supposons que l'un des f_j ne tende pas vers 0 pour cette suite (t_k) . Comme $\tilde{f}_{j+1/2}(t_k)$ tend vers 0, on en déduit que l'on peut extraire une sous-suite de (t_k) encore notée (t_k) telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_{j+1}(t_k) = 0.$$

Or, la relation (3.14) implique que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2}(t_k) [\log f_{j+1} - \log f_j - z(t_k)]^2 \right\} = 0 \text{ avec } z(t_k) = \frac{-m\Delta v}{T_e(t_k)} [v_{j+1/2} - \tilde{U}(t_k)]. \quad (3.16)$$

Et comme $T_e(t)$ est majorée puisque le schéma est conservatif en énergie, on voit que $z(t_k) \sim m\tilde{U}(t_k)\Delta v/T_e(t_k)$ tend vers $+\infty$ en utilisant l'hypothèse (3.15). On est donc dans les conditions d'application du lemme 3.3-i). Cela implique que $f_j(t_k)$ tend vers 0 pour cette nouvelle suite (t_k) . En raisonnant ainsi sur tous les j , on peut donc construire de proche en proche une suite (t_k) telle que

$$\forall j : \lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_j(t_k) = 0.$$

Mais cela contredit la conservation de la masse ce qui signifie que l'hypothèse (3.15) est fausse.

Par un raisonnement analogue, on montrerait que l'on ne peut avoir

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{U}(t_k) = -\infty.$$

On en déduit donc que $|\tilde{U}(t_k)|$ et que $|\delta\tilde{u}(t_k)|$ sont bornées.

o On montre maintenant que :

$$\text{Il existe une sous-suite de } (t_k) \text{ notée } (t_k) \text{ telle que : } \inf_{j,k} f_j(t_k) > 0. \quad (3.17)$$

On aura alors $\inf_k \tilde{N}(t_k) > 0$. Si (3.17) n'est pas vraie, alors pour toute sous-suite extraite de (t_k) , notée encore (t_k) , il existe un j_0 , tel que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_{j_0}(t_k) = 0.$$

Donc on a

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_{j_0 \pm 1/2}(t_k) = 0.$$

Or la suite z_k est bornée puisque la suite $\tilde{U}(t_k)$ est bornée et la relation (3.16) reste vraie avec z_k bornée. Donc d'après le lemme 3.3-ii), on a aussi

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_{j_0-1}(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_{j_0+1}(t_k) = 0$$

ce qui entraîne que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_{j_0-3/2}(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t_k \rightarrow +\infty} \tilde{f}_{j_0+3/2}(t_k) = 0.$$

De proche en proche, on en déduit que

$$\forall j : \lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_j(t_k) = 0$$

et donc que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} N(t_k) = 0.$$

D'où contradiction, le schéma étant conservatif en masse. \square

Preuve de la proposition 3.3 Point i) Soit $\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ une solution de (3.9) (d'après le corollaire 3.1, on sait maintenant que celle-ci existe). Posons

$$\mathcal{M}_e(v, t) = \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^\infty)^2}{2T_e} \right].$$

On peut alors écrire que

$$H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) =$$

$$\sum_j f_j \log f_j \Delta v + Z \int \mathcal{M}_e \log \mathcal{M}_e dv - \sum_j f_j^\infty \log f_j^\infty \Delta v - Z \int \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty \log \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty dv$$

soit encore

$$\begin{aligned} & H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) = \\ & \sum_j f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \Delta v + Z \int \mathcal{M}_e \log \left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty} \right) dv \\ & + \left[\sum_j (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \Delta v + Z \int (\mathcal{M}_e - \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty) \log \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty dv \right]. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_j (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \Delta v = \frac{1}{T_e^\infty} \sum_j \frac{m}{2} (v_j - \tilde{U}^\infty)^2 (f_j^\infty - f_j) \Delta v$$

puisque le schéma est conservatif en masse (i.e. $\sum_j (f_j - f_j^\infty) \Delta v = 0$). Donc

$$\begin{aligned} \sum_j (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \Delta v &= \frac{1}{T_e^\infty} \sum_j \frac{m}{2} (v_j - U^0)^2 (f_j^\infty - f_j) \Delta v \\ &+ \frac{m(U^0 - \tilde{U}^\infty)}{2T_e^\infty} \left[(U^0 - \tilde{U}^\infty) \sum_j (f_j^\infty - f_j) \Delta v + 2 \sum_j (v_j - U^0) (f_j^\infty - f_j) \Delta v \right]. \end{aligned}$$

Or, on a aussi $\sum_j (v_j - U^0) (f_j^\infty - f_j) \Delta v = 0$ puisque le schéma est conservatif en quantité de mouvement et puisque $\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ est solution de (3.9). On peut donc écrire que

$$\sum_j (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \Delta v = \frac{1}{T_e^\infty} \sum_j \frac{m}{2} (v_j - U^0)^2 (f_j^\infty - f_j) \Delta v.$$

Et comme

$$\int (\mathcal{M}_e - \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty) \log \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty dv = -\frac{N^0}{2T_e^\infty} (T_e - T_e^\infty),$$

on a finalement

$$\begin{aligned} H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) &= \\ &\sum_j f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \Delta v + Z \int \mathcal{M}_e \log \left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty} \right) dv \\ &+ \frac{1}{T_e^\infty} \left[\sum_j \frac{m}{2} (v_j - U^0)^2 (f_j^\infty - f_j) \Delta v + \frac{ZN^0}{2} (T_e^\infty - T_e) \right]. \end{aligned}$$

Or, le schéma est conservatif en énergie et $\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ est solution de (3.9). Donc, on a aussi

$$\sum_j \frac{m}{2} (v_j - U^0)^2 f_j^\infty \Delta v + \frac{ZN^0}{2} T_e^\infty = \sum_j \frac{m}{2} (v_j - U^0)^2 f_j \Delta v + \frac{ZN^0}{2} T_e$$

ce qui implique que

$$H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) = \sum_j f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \Delta v + Z \int \mathcal{M}_e \log \left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty} \right) dv.$$

On peut alors utiliser l'inégalité de Jensen (cf. [30] et [31]) qui dit que pour toute mesure bornée $d\mu(v)$, on a $\int \frac{f_1}{f_2} \log \left(\frac{f_1}{f_2} \right) d\mu(v) \geq 0$ (avec bien-sûr $f_1 > 0$ et $f_2 > 0$). Ici, on applique cette inégalité en prenant $d\mu(v) \equiv \sum_i f_i^\infty \delta(v - v_i) \Delta v$ avec $f_1 = f$ et $f_2 = f^\infty$ ou $d\mu(v) \equiv \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty(v) dv$ avec $f_1 = \mathcal{M}_e$ et $f_2 = \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$. Notons que dans les deux cas, on a $\int d\mu(v) = N$.

Point ii) On applique maintenant l'inégalité de Csiszar-Kullback (cf. [31]) qui permet d'avoir une estimation plus précise à savoir

$$\|f_j - f_j^\infty\|_{l^1}^2 \leq 2 \sum_j f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \Delta v$$

et

$$\|\mathcal{M}_e - \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty\|_{L^1}^2 \leq 2 \int \mathcal{M}_e \log \left(\frac{\mathcal{M}_e}{\mathcal{M}_{f,T_e}^\infty} \right) dv.$$

Donc

$$\|f_j - f_j^\infty\|_{l^1}^2 + \|\mathcal{M}_e - \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty\|_{L^1}^2 \leq 2 [H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty)]. \quad (3.18)$$

Cette dernière inégalité montre automatiquement que si (3.9) admet deux solutions $\mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,1}$ et $\mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,2}$, alors on aura

$$H(f^{\infty,2}, T_e^{\infty,2}) - H(f^{\infty,1}, T_e^{\infty,1}) \geq 0$$

et

$$H(f^{\infty,1}, T_e^{\infty,1}) - H(f^{\infty,2}, T_e^{\infty,2}) \geq 0$$

soit encore

$$H(f^{\infty,2}, T_e^{\infty,2}) - H(f^{\infty,1}, T_e^{\infty,1}) = 0.$$

Donc

$$\|f_j^{\infty,2} - f_j^{\infty,1}\|_{l^1}^2 = 0 \quad \text{et} \quad \|\mathcal{M}_e^{k,l} - \mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,k}\|_{L^1}^2 = 0 \quad (3.19)$$

avec

$$\mathcal{M}_e^{k,l}(v, t) = \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e^{\infty,l}/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^{\infty,k})^2}{2T_e^{\infty,l}} \right].$$

Sachant maintenant que $\|f_j^{\infty,2} - f_j^{\infty,1}\|_{l^1} = 0$, on obtient donc

$$\forall j : f_j^{\infty,2} = f_j^{\infty,1}. \quad (3.20)$$

Il reste à montrer que $T_e^{\infty,2} = T_e^{\infty,1}$. L'égalité (3.20) montre automatiquement que

$$\tilde{U}^{\infty,2} = \tilde{U}^{\infty,1}$$

ce qui implique aussi que

$$\mathcal{M}_e^{k,l} = \mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,l}.$$

En utilisant (3.19), on obtient alors l'égalité

$$\mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,2} = \mathcal{M}_{f,T_e}^{\infty,1}$$

soit donc

$$T_e^{\infty,2} = T_e^{\infty,1}.$$

D'où l'unicité de la solution de (3.9). \square

Preuve du théorème 3.1 On sait que $H(f, T_e)(t)$ admet une limite (voir la démonstration de la proposition 3.2) et que $H(f, T_e)(t)$ est minorée par $H(f^\infty, T_e^\infty)$ (cf. lemme de Gibbs: *point i*) de la proposition 3.3). On peut donc écrire que

$$\exists a / \lim_{t \rightarrow +\infty} H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) = a \geq 0.$$

Or, on sait d'après la proposition 3.2 qu'il existe une suite (t_k) tendant vers l'infini telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_j(t_k) = f_j^\infty \text{ et } \lim_{t_k \rightarrow +\infty} T_e(t_k) = T_e^\infty.$$

Alors, pour cette suite (t_k) , on a aussi

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} H(f, T_e)(t_k) - H(f^\infty, T_e^\infty) = 0.$$

Donc $a = 0$ soit encore

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} H(f, T_e)(t) - H(f^\infty, T_e^\infty) = 0.$$

Et en appliquant à nouveau l'inégalité (3.18) (voir la démonstration du *point ii*) de la proposition 3.3), on obtient que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f_j - f_j^\infty\|_{l^1} = 0$$

et que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} T_e(t) = T_e^\infty$$

en utilisant la continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-\frac{1}{x})$ sur \mathbb{R}_*^+ (on rappelle que l'on a montré que $\inf_{t \geq 0} T_e(t) > 0$: voir la proposition 3.2). \square

Remarques ◦ Le fait de prendre $\tilde{f}_{j+1/2} = (f_{j+1} - f_j) / (\log f_{j+1} - \log f_j)$ assure la consistance du schéma puisqu'on a, après développement de Taylor au premier ordre, pour toute fonction f positive suffisamment régulière

$$f(x + \Delta x/2) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\log f(x + \Delta x) - \log f(x)} + \mathcal{O}(\Delta x).$$

◦ Les propositions ainsi que la remarque précédentes justifient l'emploi du terme *moyenne entropique*.

3.3 Traitement explicite

Soit donc le schéma numérique totalement explicite suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = S(f^n)_j, \\ \frac{1}{\Delta t} [(\rho\varepsilon_e)^{n+1} - (\rho\varepsilon_e)^n] = \Omega^n(\tilde{N}^n\tilde{T}^n - N^nT_e^n) \end{cases} \quad (3.21)$$

avec

$$\begin{aligned} S(f^n)_j = & \\ & \frac{\Omega^n}{\Delta v} [(v_{j+1/2} - \tilde{U}^n)\tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - \tilde{U}^n)\tilde{f}_{j-1/2}^n] \\ & + \frac{\Omega^n T_e^n}{m\Delta v^2} (a_j f_{j+1}^n - b_j f_j^n + c_j f_{j-1}^n). \end{aligned} \quad (3.22)$$

$\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n ; a_j, b_j, c_j et $\tilde{f}_{1/2}^n = \tilde{f}_{j_{\max}+1/2}^n$ sont respectivement données par (3.7) et (3.8). \tilde{U}^n et $\tilde{N}^n\tilde{T}^n$ sont définies par les relations (3.5).

Comme dans le cas semi-discret, on obtient les propriétés de conservation suivantes :

Propriété 3.2

$$\begin{cases} \langle f_j^{n+1} \rangle = \langle f_j^n \rangle, \\ \langle v_j f_j^{n+1} \rangle = \langle v_j f_j^n \rangle, \\ \frac{1}{\Delta t} \left(\langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^{n+1} \rangle - \langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^n \rangle \right) = \Omega^n (N^n T_e^n - \tilde{N}^n \tilde{T}^n). \end{cases}$$

Autrement dit, le schéma est conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie (notons à nouveau que ces relations de conservation sont indépendantes de la définition de $\tilde{f}_{j+1/2}^n$) et l'on a

$$\tilde{\mathcal{W}} = \Omega^n (N^n T_e^n - \tilde{N}^n \tilde{T}^n), \quad (3.23)$$

relation qui est consistante avec (1.13) (à la correction $\delta\tilde{t}^n$ près). L'équation discrète d'énergie électronique peut donc être réécrite de la façon suivante

$$T_e^{n+1} = T_e^n \left(1 - \Delta t \frac{2\Omega^n}{Z} \right) + 2\Delta t \Omega^n \frac{\tilde{N}^n \tilde{T}^n}{ZN^n}. \quad (3.24)$$

3.3.1 Positivité et conservation de l'équilibre thermodynamique

On montre maintenant que le schéma numérique totalement explicite défini par (3.21) et (3.22) préserve sous un critère de type *CFL* la positivité de f_j^{n+1} et de T_e^{n+1} , et respecte une version numérique du théorème H lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n .

Notations On pose

$$\Delta t_1^n = \frac{m}{4\Omega^n T_e^n} \cdot \frac{\Delta v^2}{\mathfrak{M}^n} \quad \text{et} \quad \Delta t_2^n = \frac{Z}{2\Omega^n} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon^n}$$

avec

$$\mathfrak{M}^n = \max_j \left[\frac{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j \pm 1}}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}} \right]$$

(où j et $j \pm 1 \in \{1, \dots, j_{\max}\}$ bien-sûr),

$$\mathcal{M}_{f^n, T_e^n} = \frac{N^n}{\sqrt{2\pi T_e^n/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^n)^2}{2T_e^n} \right]$$

et

$$\varepsilon^n = \frac{f_{j_{\max}}^n (v_{j_{\max}+1/2} - \tilde{U}^n) + f_1^n (\tilde{U}^n - v_{1/2})}{N^n}$$

où \tilde{U}^n est définie par la relation (3.5). Remarquons tout de suite que l'on a

$$\varepsilon^n = \frac{\tilde{N}^n}{N^n} \cdot \frac{\delta\tilde{t}^n}{T_e^n}$$

où \tilde{N}^n et $\delta\tilde{t}^n$ sont respectivement définies par les relations (3.5) et (3.6). ε^n est un terme correctif tenant compte du fait que f^n n'est pas nulle aux bords.

Pour un domaine des vitesses assez grand, ce terme pourra être considéré comme numériquement nul. D'un point de vue pratique, on vérifie en effet que l'on a toujours

$$|\varepsilon^n| \ll 1.$$

On a le résultat suivant :

Proposition 3.4 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma totalement explicite défini par (3.21) et (3.22) préserve la positivité de f_j^{n+1} et de T_e^{n+1} lorsque*

$$\Delta t < \min(\Delta t_1^n, \Delta t_2^n). \quad (3.25)$$

Il respecte d'autre part un équivalent discret du théorème H à savoir

$$\langle [\log(f^n / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n}) \cdot S(f^n)]_j \rangle \geq 0$$

et

$$f^n = f^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty \iff f^{n+1} = f^n \quad \text{et} \quad \forall j : f_j^n > 0, T_e^n > 0.$$

Preuve de la proposition 3.4 ◦ D'après le lemme 3.1, on sait que

$$\begin{aligned} S(f^n)_j &= \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2}^n [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e^n})_{j+1}^n - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e^n})_j^n] \right. \\ &\quad \left. - \tilde{f}_{j-1/2}^n [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e^n})_j^n - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e^n})_{j-1}^n] \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

soit encore

$$S(f^n)_j = \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v^2} (k_{j+1/2} + k_{j-1/2})$$

avec

$$k_{j+1/2} = \tilde{f}_{j+1/2}^n \left[\log(f_{j+1}^n / f_j^n) - \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right]$$

et

$$k_{j-1/2} = \tilde{f}_{j-1/2}^n \left[\log(f_{j-1}^n / f_j^n) - \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j-1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right].$$

Si $k_{j+1/2}$ et $k_{j-1/2}$ sont positifs, f_j^{n+1} sera positif. On étudie donc le cas le plus pénalisant à savoir

$$k_{j+1/2} < 0 \quad \text{et} \quad k_{j-1/2} < 0$$

ce qui est équivalent à

$$f_{j+1}^n / f_j^n < \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} \quad \text{et} \quad f_{j-1}^n / f_j^n < \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j-1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}.$$

Supposons de plus que $f_{j+1}^n \neq f_j^n$. On peut alors écrire que

$$k_{j+1/2} = f_j^n \left[\left(\frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right) - \frac{\left(\frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right)}{\log(f_{j+1}^n/f_j^n)} \cdot \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right]$$

soit donc que

$$|k_{j+1/2}| \leq f_j^n \left[\left| \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right| + \frac{\left(\frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right)}{\log(f_{j+1}^n/f_j^n)} \cdot \left| \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right| \right].$$

Or $x \mapsto \frac{x-1}{\log x}$ est continue, positive et croissante sur \mathbb{R}^+ et comme

$$f_{j+1}^n / f_j^n < \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}$$

par hypothèse, on obtient

$$|k_{j+1/2}| \leq f_j^n \left[\left| \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n} - 1 \right| + \left| \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} - 1 \right| \right] \quad (3.27)$$

soit encore

$$\begin{aligned} |k_{j+1/2}| &\leq f_j^n \left[\max\left(1, \frac{f_{j+1}^n}{f_j^n}\right) + \max\left(1, \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}\right) \right] \\ &\leq 2f_j^n \max\left(1, \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}\right). \end{aligned}$$

D'où l'inégalité

$$\begin{aligned} |k_{j+1/2}| &\leq 2f_j^n \max_k \left(1, \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k}\right) \\ &\leq 2f_j^n \max_k \left(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k}\right). \end{aligned}$$

Lorsque $f_{j+1}^n = f_j^n$, on a alors par hypothèse $\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} > 1$ et donc

$$|k_{j+1/2}| = f_j^n \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}).$$

Comme $\log x < 2x$ pour $x > 1$, on obtient aussi

$$|k_{j+1/2}| \leq 2f_j^n \left(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} \right) \leq 2f_j^n \max_k \left(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k} \right).$$

Finalement, on peut écrire que

$$k_{j+1/2} < 0 \quad \text{et} \quad k_{j-1/2} < 0$$

↓

$$\left| k_{j+1/2} \right| + \left| k_{j-1/2} \right| \leq 4f_j^n \max_k \left(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k \pm 1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k} \right).$$

Puis en utilisant cette dernière inégalité, on obtient que

$$f_j^{n+1} > f_j^n \cdot \left[1 - \frac{4\Omega^n T_e^n \Delta t}{m\Delta v^2} \max_k \left(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k \pm 1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, k} \right) \right] \quad (3.28)$$

soit donc

$$\Delta t < \Delta t_1^n \implies \forall j, f_j^{n+1} > 0.$$

o La positivité de T_e^{n+1} lorsque $\Delta t < \Delta t_2^n$ est évidente si l'on se reporte à l'expression (3.24) et à la définition de $\tilde{N}^n \tilde{T}^n$ (voir les relations (3.5)). En effet, on obtient

$$\frac{1}{2}(N_e T_e)^{n+1} = (N T_e)^n \left[\frac{Z}{2} + \Omega^n (\varepsilon^n - 1) \Delta t \right] + \Delta t \Omega^n \sum m (v_{j+1/2} - \tilde{U}^n)^2 \tilde{f}_{j+1/2}^n \Delta v.$$

On constate par ailleurs que si $\varepsilon^n > 1$ (ce qui très improbable pour un maillage acceptable), alors T_e^{n+1} est positif pour tout Δt .

o Pour montrer la version numérique du théorème H, on utilise (3.10) qui permet d'obtenir

$$\sum_j S(f^n)_j \cdot \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j^n = \quad (3.29)$$

$$- \frac{\Omega^n T_e^n}{m\Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2}^n [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_{j+1}^n - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})_j^n]^2 \leq 0$$

comme dans le cas semi-discret (cf. (3.13)) ce qui montre bien que

$$\langle [\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e})^n \cdot S(f^n)]_j \rangle \leq 0.$$

o On montre maintenant la conservation de l'équilibre thermodynamique. Supposons que

$$f^n = \frac{N^0}{\langle \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle} \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty.$$

Alors, on a par construction (cf. (3.9))

$$\langle f_j^n \rangle = N^0, \quad \langle (v_j - U^0) f_j^n \rangle = 0$$

et

$$\langle \{[\frac{1}{2}m(v_j - U^0)^2 + Z\frac{T_e^n}{2}] - [\frac{T^0}{2} + Z\frac{T_e^0}{2}]\} \cdot f_j^n \rangle = 0$$

puisque $T_e^n = T_e^\infty$, relations qui sont des conditions nécessaires de compatibilité puisque le schéma numérique est conservatif. On vérifie d'autre part que

$$\tilde{U}^n = \tilde{U}^\infty$$

en tenant compte des conditions aux limites. Et comme on a par hypothèse $T_e^n = T_e^\infty$, on peut finalement écrire que

$$\exists C > 0 / \mathcal{M}_{f,T_e}^n = \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty = C \cdot f^n.$$

Il suffit ensuite de se reporter à l'expression (3.26) pour montrer qu'alors

$$\forall j : S(f^n)_j = 0$$

soit donc que

$$f^{n+1} = f^n.$$

Réciproquement, si $\forall j, S(f^n)_j = 0$, alors $\sum_j \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_j^n S(f^n)_j = 0$ et donc, en se reportant à (3.29), on obtient immédiatement que nécessairement

$$\forall j : \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_{j+1}^n = \log(f/\mathcal{M}_{f,T_e})_j^n$$

puisque par hypothèse $\tilde{f}_{j+1/2}^n > 0$ (pour $j \in \{2, \dots, j_{\max} - 1\}$) et $\Omega^n T_e^n > 0$ ce qui montre que

$$\exists C > 0 / f^n = C \cdot \mathcal{M}_{f^n, T_e^n}.$$

Et comme on a

$$\begin{aligned} \langle f_j^n \rangle &= N^0, \\ \langle (v_j - U^0) \cdot f_j^n \rangle &= 0 \end{aligned}$$

et

$$\langle \{[\frac{1}{2}m(v_j - U^0)^2 + Z\frac{T_e^n}{2}] - [\frac{T^0}{2} + Z\frac{T_e^0}{2}]\} \cdot f_j^n \rangle = 0,$$

le schéma étant conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie, on en déduit que

$$C = \frac{N^0}{\langle \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} \rangle}, \quad \tilde{U}^n = \tilde{U}^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty$$

soit encore que

$$f^n = \frac{N^0}{\langle \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle} \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty.$$

□

3.3.2 Décroissance de l'entropie et convergence vers l'équilibre thermodynamique

On montre maintenant que le schéma numérique respecte la décroissance de l'entropie, que (T_e^n) est strictement minorée et qu'en temps fini, on peut contrôler le pas de temps.

Notations On pose

$$\Delta t_3^n = \Delta t_1^n \cdot \frac{h_{\min}^n}{h_{\max}^n} \cdot \frac{1}{1 + \alpha^n} \quad \text{et} \quad \Delta t_4^n = \frac{1}{2} \Delta t_2^n,$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{\max}^n = \max_j \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}} \right)_j, \\ h_{\min}^n = \min_j \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}} \right)_j, \\ \alpha^n = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\max_j v_j^4}{(T_e^n/m)^2} \end{array} \right.$$

et

$$H^n = \langle [f^n \log f^n]_j \rangle - \frac{ZN^n}{2} \log T_e^n.$$

Décroissance de l'entropie On établit donc la proposition et les corollaires suivants :

Proposition 3.5 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma numérique explicite défini par (3.21) et (3.22) vérifie l'inégalité entropique*

$$H(f^\infty, T_e^\infty) \leq H^{n+1} \leq H^n$$

lorsque

$$\Delta t < \min(\Delta t_3^n, \Delta t_4^n). \quad (3.30)$$

On rappelle que $H(f^\infty, T_e^\infty)$ est l'entropie du système lorsque celui-ci est à l'équilibre thermodynamique, (f^∞, T_e^∞) étant l'unique solution du système (3.9). On pourra par ailleurs remarquer la grande similarité entre Δt_3^n et le Δt^n du schéma linéaire : voir l'annexe A. *Attirons l'attention sur le fait que l'on ne peut appliquer les résultats des propositions A.1 et A.2 car les démonstrations de ces propositions utilisent de manière cruciale que, dans le cas linéaire, on a $\mathcal{M}_{f^{n+1}, T_e^{n+1}} = \mathcal{M}_{f^n, T_e^n}$.*

Corollaire 3.2 *Pour toute condition initiale strictement positive, sous le critère CFL (3.30), on a*

$$\exists H^\infty > -\infty / \lim_{n \rightarrow +\infty} H^n = H^\infty$$

et

$$\inf_n (T_e^n) > 0.$$

On fait maintenant l'hypothèse que (δu^n) est uniformément borné. Alors on a le corollaire suivant :

Corollaire 3.3 *Lorsque (δu^n) est uniformément bornée et sous le critère CFL (3.30), il existe $\overline{\Delta t}(t_{\max})$ ne dépendant que des conditions initiales et de t_{\max} tel que*

$$\forall n : t_n < t_{\max} \implies 0 < \overline{\Delta t}(t_{\max}) < \min(\Delta t_3^n, \Delta t_4^n).$$

En temps fini, le corollaire 3.3 montre donc que le pas de temps ne s'effondre pas. Notons que l'hypothèse

$$(\delta u^n) \text{ est uniformément bornée}$$

peut être considérée comme étant raisonnable lorsque le domaine des vitesses est suffisamment grand.

Preuve de la proposition 3.5 En utilisant l'inégalité $\forall x : \log(1+x) \leq x$, on obtient l'inégalité

$$\sum_j [f^{n+1} \log(f^{n+1})]_j \leq \sum_j [f^n \log(f^n)]_j + \Delta t \sum_j \left[S(f^n) \log(f^n) + \Delta t \frac{S(f^n)^2}{f^n} \right]_j$$

soit encore

$$H^{n+1} \leq \sum_j [f^n \log(f^n)]_j \Delta v \tag{3.31}$$

$$+ \Delta t \sum_j \left[S(f^n) \log(f^n) + \Delta t \frac{S(f^n)^2}{f^n} \right]_j \Delta v - \frac{ZN^n}{2} \log(T_e^{n+1}).$$

D'autre part, on a

$$T_e^{n+1} = T_e^n \left(1 - \frac{\Delta t}{ZN^n T_e^n} \sum_j m v_j^2 S(f^n)_j \Delta v \right). \tag{3.32}$$

De plus, en utilisant (3.12), on vérifie que

$$\sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j = -\frac{m}{2T_e^n} \sum_j v_j^2 S(f^n)_j$$

ce qui permet d'obtenir

$$T_e^{n+1} = T_e^n \left(1 + \frac{2\Delta t}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v \right) \quad (3.33)$$

d'après (3.32). Puis, en reportant (3.33) dans (3.31), on trouve

$$\begin{aligned} H^{n+1} &\leq H^n + \Delta t \sum_j \left[S(f^n) \log(f^n) + \Delta t \frac{S(f^n)^2}{f^n} \right]_j \Delta v \\ &\quad - \frac{ZN^n}{2} \log \left[1 + \frac{2\Delta t}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v \right]. \end{aligned}$$

Remarquons maintenant que

$$\Delta t < \Delta t_2^n \implies T_e^{n+1} > 0 \implies \frac{2\Delta t}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v > -1.$$

d'après la proposition 3.4 et la relation (3.33). Donc

$$2\Delta t < \Delta t_2^n \implies \frac{2(2\Delta t)}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v > -1$$

soit encore

$$\Delta t < \Delta t_4^n = \Delta t_2^n / 2 \implies T_e^{n+1} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{2\Delta t}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v > -\frac{1}{2}.$$

D'autre part, on vérifie facilement que

$$\forall x > -\frac{1}{2} : \log\left(\frac{1}{1+x}\right) < x(2x-1).$$

En posant $x = \frac{2\Delta t}{ZN^n} \sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v$, on obtient donc

$$\begin{aligned} H^{n+1} &\leq H^n + \Delta t \sum_j \left[S(f^n)_j \log\left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}}\right)_j + \Delta t \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \right] \Delta v \\ &\quad + \frac{4\Delta t^2}{ZN^n} \left[\sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \Delta v \right]^2. \end{aligned}$$

En utilisant (3.12) puis en appliquant l'inégalité de Schwarz, on peut par ailleurs écrire que

$$\begin{aligned}
 \frac{4\Delta t^2}{ZN^n} \left[\sum_j S(f^n)_j \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}_j) \Delta v \right]^2 &= \frac{4\Delta t^2}{ZN^n} \left[\sum_j S(f^n)_j \frac{m(v_j - \tilde{U}^n)^2}{2T_e^n} \Delta v \right]^2 \\
 &= \frac{4\Delta t^2}{ZN^n} \left[\sum_j S(f^n)_j \frac{mv_j^2}{2T_e^n} \Delta v \right]^2 \\
 &\leq \frac{4\Delta t^2}{ZN^n} \sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \Delta v \cdot \sum_j f_j^n \frac{v_j^4}{4(T_e^n/m)^2} \Delta v \\
 &\leq \Delta t^2 \sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \Delta v \cdot \frac{\max_k v_k^4}{Z(T_e^n/m)^2}
 \end{aligned}$$

puisque

$$\forall n : \Delta t < \Delta t_1^{n-1} \implies \forall j, f_j^n > 0.$$

Finalement, on obtient

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \sum_j \left[S(f^n) \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}_j} \right) + \Delta t (1 + \alpha^n) \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \right] \Delta v,$$

inégalité qui, au terme $1 + \alpha^n$ près, est identique à l'inégalité (A.5) obtenue dans le cas linéaire : voir l'annexe A. On termine donc la démonstration en procédant comme dans le cas linéaire lors de la démonstration de la proposition A.2 : il suffit juste de remplacer \mathcal{M}_{f^0} par \mathcal{M}_{f^n, T_e^n} et de tenir compte du terme supplémentaire $(1 + \alpha^n)$ pour obtenir que sous le critère CFL (3.30), on a

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_3^n}\right) \cdot \sum_j S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^n, T_e^n}_j} \right) \Delta v \leq H^n. \quad (3.34)$$

Pour montrer que

$$H^{n+1} \geq H(f^\infty, T_e^\infty),$$

on utilise le point i) de la proposition 3.3 qui est indépendant du fait que l'on a ou pas discrétisé en temps. \square

Preuve du corollaire 3.2 Comme $\forall n, f_j^n$ et T_e^n sont strictement positifs sous le critère CFL (3.30), H^n est toujours définie. D'autre part, $x \mapsto x \log x$ est minorée et (T_e^n) est majorée puisque le schéma est conservatif. Donc

$$\inf_n (H^n) > -\infty.$$

(H^n) est donc une suite décroissante minorée ce qui prouve que

$$\exists H^\infty > -\infty / \lim_{n \rightarrow +\infty} H^n = H^\infty.$$

Comme sous le critère *CFL* (3.30)

$$H^n \leq H^0 < +\infty,$$

et que $x \mapsto x \log x$ est minorée, on en déduit que (T_e^n) est strictement minorée. \square

Preuve du corollaire 3.3 On montre maintenant que le pas de temps ne s'effondre pas en temps fini. Sous l'hypothèse

$$(\delta u^n) \text{ est uniformément bornée,}$$

et en tenant compte du fait que sous le critère *CFL* (3.30) on a $\forall n : \widetilde{N}^n > 0$, on peut écrire que

$$\exists C^{ste} < +\infty / \forall n : |\widetilde{U}^n| \leq \max_k |v_{k+1/2}| + C^{ste} < +\infty.$$

D'autre part, en appliquant le corollaire 3.2, on peut affirmer que sous le critère *CFL* (3.30), les suites (T_e^n) et $(\frac{1}{\Omega^n T_e^n} = C^{ste} \sqrt{T_e^n})$ sont chacune minorées et majorées par des constantes strictement positives ne dépendant que des conditions initiales.

La suite (\mathfrak{M}^n) est donc aussi majorée ce qui montre que, sous le critère *CFL* (3.30), il existe $\widetilde{\Delta t}$ ne dépendant que des conditions initiales et de la grandeur du domaine des vitesses tel que

$$\forall n : 0 < \widetilde{\Delta t} < \min \left(\frac{\Delta t_1^n}{1 + \alpha^n}, \Delta t_4^n \right).$$

On montre maintenant que *en temps fini*, la suite $(h_{\min}^n / h_{\max}^n)$ est elle-aussi une suite strictement minorée sous le critère *CFL* (3.30). On a montré lors de la démonstration de la proposition 3.4 (cf. l'inégalité (3.28)) que

$$\forall j : f_j^{n+1} > f_j^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t_1^n} \right).$$

Donc

$$\forall j : f_j^{n+1} > f_j^n \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\widetilde{\Delta t}} \right)$$

ce qui implique que

$$\Delta t = t_{\max}/n < \widetilde{\Delta t} \implies f_j^n > f_j^0 \cdot \left(1 - \frac{\Delta t}{\widetilde{\Delta t}}\right)^{t_{\max}/\Delta t} = K^0(t_{\max}, \Delta t) > 0.$$

Or on sait que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\Delta t}{\widetilde{\Delta t}}\right)^{t_{\max}/\Delta t} = \exp\left(-\frac{t_{\max}}{\widetilde{\Delta t}}\right) > 0.$$

Donc

$$\exists C_0/\Delta t < \widetilde{\Delta t} \implies \inf_{n,j}(f_j^n) \geq C_0 > 0$$

ce qui montre qu'en temps fini, il est possible de minorer strictement (h_{\min}^n/h_{\max}^n). On peut donc affirmer que

$$t_n < t_{\max} \implies \exists \overline{\Delta t}(t_{\max}) > 0/\forall n : 0 < \overline{\Delta t}(t_{\max}) < \min(\Delta t_3^n, \Delta t_4^n).$$

Le pas de temps ne s'effondre donc pas en temps fini. \square

Convergence vers l'équilibre thermodynamique On ne peut montrer la convergence *en temps grand* du schéma totalement explicite car, si l'on peut montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_j^n \neq 0$$

lorsque cette limite existe (prendre la formulation convection-diffusion et utiliser le fait que $\inf_n T_e^n > 0$), on ne sait pas montrer - contrairement au cas linéaire et au cas semi-discret (voir le lemme 3.2) - qu'*en temps grand*

$$\inf_{j,n}(f_j^n) > 0$$

ce qui empêche d'affirmer que

$$\inf_{j,n}(\widetilde{f}_{j+1/2}^n) > 0$$

et donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H^n = H^\infty \implies \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \left| \log(f^n / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_{j+1} - \log(f^n / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \right| = 0.$$

Par contre, sous l'hypothèse

$$\text{en temps grand, on a } \inf_{j,n}(f_j^n) > 0, \tag{3.35}$$

on montre, comme dans le cas semi-discret, la convergence de (f_j^n) vers $(\mathcal{M}_{f,T_e,j}^\infty)$ sous un certain critère *CFL*. On peut noter que Berezin, Khudick et Pekker (cf. [21]) avaient postulé que

$$\forall n : \max_j \left| \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{(f_{j+1}^n + f_j^n)/2} \right| \ll 1$$

pour trouver un critère *CFL* assurant la stabilité et le caractère entropique de leur schéma numérique explicite résolvant l'opérateur de Fokker-Planck ion / ion isotrope.

Remarque Lorsque l'échange d'énergie entre les ions et les électrons est décrit macroscopiquement (i.e. les ions sont supposés être constamment à l'équilibre thermodynamique), les inconnues sont uniquement T^n et T_e^n , et le schéma numérique devient

$$T^{n+1} - T^n = 2\Delta t \Omega^n (T_e^n - T^n), \quad (3.36)$$

$$T_e^{n+1} - T_e^n = \frac{2\Delta t \Omega^n}{Z} (T^n - T_e^n) \quad (3.37)$$

ce qui implique que

$$T^{n+1} - T_e^{n+1} = \left(1 - 2\Delta t \Omega^n \frac{Z+1}{Z}\right) (T^n - T_e^n). \quad (3.38)$$

Remarquons tout de suite que (en négligeant ε^n)

$$\Delta t < \frac{1}{2\Omega^n} \cdot \frac{Z}{Z+1} < \Delta t_2^n \implies 1 - 2\Delta t \Omega^n \frac{Z+1}{Z} > 0.$$

Sous ce critère *CFL*, le schéma vérifie alors

$$\begin{cases} T^n < T_e^n \implies T^n < T^{n+1} < T_e^{n+1} < T_e^n, \\ T_e^n < T^n \implies T_e^n < T_e^{n+1} < T^{n+1} < T^n, \end{cases}$$

inégalités qui permettent de minorer et de majorer uniformément les suites (T^n) et (T_e^n) .

3.3.3 Lien entre la moyenne entropique et la moyenne de Chang et Cooper

Dans un article maintenant classique (cf. [17]), Chang et Cooper définissent

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \tilde{f}_{j+1/2}^{\text{Chang\&Cooper}}$$

de la façon suivante

$$\tilde{f}_{j+1/2}^{\text{Chang\&Cooper}} = \delta_{j+1/2} f_j + (1 - \delta_{j+1/2}) f_{j+1}$$

avec

$$\delta_{j+1/2} = \frac{1}{w_{j+1/2}} - \frac{1}{\exp(w_{j+1/2}) - 1}$$

où

$$w_{j+1/2} = \frac{m\Delta v}{T_e}(v_{j+1/2} - U).$$

Cette moyenne a été établie par Chang et Cooper de telle sorte que lorsque $f^n = \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ (et que $\tilde{U} = U$), on a $f^{n+1} = f^n$. Ainsi, $f^n = \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$ définit aussi un état d'équilibre du schéma. Ils ont pu par ailleurs établir que le schéma *totallement implicite* défini à partir de (3.21) et de (3.22) préserve la positivité de f bien que leur démonstration manque semble-t-il de clarté.

On établit ici la propriété suivante :

Propriété 3.3 *Lorsque*

$$f = \mathcal{M}_{f,T_e}^\infty$$

et que l'on prend $\tilde{U} = U$, on a

$$\tilde{f}_{j+1/2}^{\text{Chang\&Cooper}} = \tilde{f}_{j+1/2}^{\text{Entropique}}.$$

On consultera la preuve de la propriété B.2 de l'annexe B pour établir cette propriété.

Le schéma de Chang et Cooper est donc intéressant car il préserve l'équilibre thermodynamique *dans le cas linéaire* : c'est ce qui explique son utilisation très répandue (cf. [10], [12] et [13]). Mais il faut noter qu'*aucune propriété d'existence d'un état d'équilibre thermodynamique et de convergence vers cet équilibre n'a été démontrée par Chang et Cooper*. On montrera cependant dans l'annexe B que le schéma de Chang et Cooper appliqué à l'équation de Fokker-Planck linéaire converge vers l'équilibre thermodynamique.

3.3.4 Discussion sur les avantages et inconvénients de la moyenne entropique

Soulignons le fait que les démonstrations des propositions 3.2 à 3.5 et du théorème 3.1 utilisent de manière cruciale le fait que $\tilde{f}_{j+1/2}$ est la moyenne entropique de f_j et de f_{j+1} .

En effet :

o L'utilisation de la moyenne entropique (contrairement aux moyennes arithmétique et harmonique) établit une équivalence au plan discret entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau de l'opérateur de collision ion / électron (voir le lemme 3.1), formulation qui permet d'obtenir naturellement au plan discret la version numérique du théorème H pour toute définition (raisonnable) de $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ (voir l'inégalité (3.29)). Donc, *en partant de la formulation convection-diffusion*, seule la moyenne entropique permet de montrer la décroissance de l'entropie et la conservation de l'équilibre thermodynamique.

o Une discrétisation de l'opérateur de collision ion / électron *directement* à partir de la formulation de Landau (i.e. avec le schéma (3.10)) en prenant

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n \neq (f_{j+1}^n - f_j^n) / (\log f_{j+1}^n - \log f_j^n)$$

ne peut pas vérifier la relation de conservativité discrète (2.8) de la quantité de mouvement ce qui rend impossible l'obtention de l'inégalité

$$H^{n+1} \leq H^n.$$

o Lorsque l'on part *directement* de la forme convection-diffusion de l'opérateur de collision ion / électron, seule la moyenne entropique permet de montrer simplement la positivité sous un critère *CFL*.

o Si l'on discrétise l'opérateur de collision ion / électron à partir de la formulation de Landau (voir le schéma (3.10)) et si $\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{2}$ (moyenne arithmétique), la relation (3.27) (voir la démonstration de la proposition 3.4) prend la forme

$$\begin{aligned} |k_{j+1/2}| \leq f_j^n \frac{(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j} + 1)}{2} \cdot \left[\left| \log(f_{j+1}^n / f_j^n) \right| \right. \\ \left. + \left| \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right| \right]. \end{aligned}$$

De même, en prenant $\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{2f_j^n f_{j+1}^n}{f_j^n + f_{j+1}^n}$ (moyenne harmonique), on obtient

$$|k_{j+1/2}| \leq 2f_j^n \cdot \left[\left| \log(f_{j+1}^n / f_j^n) \right| + \left| \log(\mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j+1} / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n, j}) \right| \right].$$

A priori, on constate qu'il est difficile d'obtenir un critère *CFL* puisqu'il faut alors postuler que f_{j+1}^n / f_j^n est minoré en temps fini comme en temps grand pour obtenir un tel critère, hypothèse qui n'est pas nécessaire en temps fini dans le cas du schéma utilisant la moyenne entropique.

Remarque On aurait pu prendre a priori aussi la moyenne entropique pour le calcul de $\bar{f}_{j+1/2}^0$ lors la prise en compte du champ électrique. L'intérêt de cette moyenne est que l'on peut montrer qu'alors, comme dans le cas continu, l'entropie numérique n'augmente ni ne diminue (i.e. schéma isentropique) au sens où l'on a

$$\langle [\log(f/\mathcal{M}_f) \cdot \nabla_v f]_j \rangle = 0 \text{ où } \mathcal{M}_f = \frac{N}{\sqrt{2\pi T_e/m}} \exp \left[-\frac{m(v - \bar{U})^2}{2T_e} \right]$$

avec $(\nabla_v f)_j = (\bar{f}_{j+1/2} - \bar{f}_{j-1/2})/\Delta v$. Malheureusement, ce schéma ne préserve pas la positivité sous un critère *CFL* ad hoc contrairement au schéma upwind (2.13) et il n'y a pas d'opérateur de diffusion pour stabiliser celui-ci par opposition au cas de l'opérateur de collision ion / électron. C'est pour cela que l'on prend un schéma classique tout en sachant que la partie champ électrique a alors le défaut de ne pas être numériquement isentropique.

On peut remarquer à ce sujet que Δt_3^n tend vers 0 lorsque T_e^n tend vers 0 c'est à dire lorsque la diffusion s'annule.

3.3.5 Conclusion sur l'approche explicite

On a donc construit un schéma numérique pour la résolution de l'équation de Fokker-Planck ion / électron, schéma totalement explicite conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie, préservant l'équilibre thermodynamique ainsi que la positivité et la décroissance de l'entropie sous un critère *CFL* et assurant au plan discret l'équivalence entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau. On a par ailleurs pu montrer (sous une hypothèse raisonnable) qu'en temps fini, le pas de temps ne s'effondre pas.

On a d'autre part pu montrer clairement *dans le cas linéaire* (cf. annexe A) que ce schéma numérique converge bien vers l'équilibre thermodynamique et que le pas de temps ne s'effondre pas en temps grand.

Rappelons enfin que si l'on part *directement* de la formulation convection-diffusion ou de la formulation de Landau, seule la moyenne entropique permet d'obtenir ces résultats dans le cas non linéaire car seule la moyenne entropique permet de conserver la quantité de mouvement des ions et l'énergie totale du plasma tout en assurant que

$$\langle S(f^n)_j \log(f^n / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n})_j \rangle \leq 0.$$

Or, ces deux propriétés sont nécessaires pour pouvoir obtenir une majoration de T_e^n ainsi que la décroissance de l'entropie H , décroissance qui assure que T_e^n ne

tend pas vers zéro.

Notons que dans le cas linéaire, en partant *directement* de la formulation de Landau, les moyennes entropique, arithmétique et harmonique sont équivalentes, les différences ne jouant que sur la valeur du critère *CFL* assurant la positivité (voir l'annexe A).

Malgré ces bonnes propriétés, le critère *CFL* très contraignant car en Δv^2 nous incite à impliciter la partie diffusion. Dans la section suivante, l'on va donc construire un schéma semi-implicite en essayant de tenir compte des enseignements tirés de cette approche totalement explicite.

3.4 Traitement semi-implicite

On définit donc maintenant le schéma numérique semi-implicite suivant

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = S(f^n, f^{n+1})_j, \\ \frac{1}{\Delta t} [(\rho\varepsilon_e)^{n+1} - (\rho\varepsilon_e)^n] = \Omega^n(\tilde{N}^n\tilde{T}^n - N^nT_e^n) \end{cases} \quad (3.39)$$

avec

$$\begin{aligned} S(f^n, f^{n+1})_j = & \\ & \frac{\Omega^n}{\Delta v} [(v_{j+1/2} - \tilde{U}^n)\tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - \tilde{U}^n)\tilde{f}_{j-1/2}^n] \\ & + \frac{\Omega^n T_e^n}{m\Delta v^2}(a_j f_{j+1}^{n+1} - b_j f_j^{n+1} + c_j f_{j-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (3.40)$$

où \tilde{U}^n , a_j , b_j et c_j sont respectivement définis par les relations (3.5) et (3.7) avec à nouveau $f_{1/2} = f_{j_{\max}+1/2} \equiv 0$ (cf. (3.8)). Notons que si l'on ne néglige pas le terme correctif $\delta\tilde{u}$ (cf. (3.6)), celui-ci doit maintenant être implicité via les termes f_1 et $f_{j_{\max}}$.

$\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n .

On obtient maintenant les propriétés de conservation suivantes :

Propriété 3.4

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f_j^{n+1} \rangle = \langle f_j^n \rangle, \\ \langle v_j f_j^{n+1} \rangle = \langle v_j f_j^n \rangle, \\ \frac{1}{\Delta t} \left(\langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^{n+1} \rangle - \langle m \frac{v_j^2}{2} f_j^n \rangle \right) = \Omega^n (N^{n+1} T_e^n - \widetilde{N}^n \widetilde{T}^n). \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Autrement dit, le schéma semi-implicite est, comme le schéma explicite, conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie et l'on à nouveau

$$\widetilde{W} = \Omega^n (N^n T_e^n - \widetilde{N}^n \widetilde{T}^n)$$

puisque $N^n = N^{n+1}$ ($\widetilde{N}^n \widetilde{T}^n$ est définie par (3.5)). L'équation discrète d'énergie électronique a donc la même forme que dans le cas totalement explicite à savoir

$$T_e^{n+1} = T_e^n \left(1 - \Delta t \frac{2\Omega^n}{Z} \right) + 2\Delta t \Omega^n \frac{\widetilde{N}^n \widetilde{T}^n}{Z N^n}.$$

3.4.1 Conservation de l'équilibre thermodynamique du schéma semi-implicite

On ne peut plus montrer que la quantité $\langle [S(f^n, f^{n+1}) \log(f^n / \mathcal{M}_{f^n, T_e^n})]_j \rangle$ est toujours négative et, a fortiori, que le schéma converge vers l'équilibre thermodynamique car il est maintenant impossible d'obtenir une formulation de $S(f^n, f^{n+1})_j$ équivalente à (3.10) du fait de l'implication de la partie diffusion, la partie convection restant explicite: *autrement dit, on n'a plus l'équivalence au plan discret entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau.*

Par contre, la proposition suivante est vérifiée:

Proposition 3.6 *Lorsque $\widetilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma numérique semi-implicite défini par (3.39) et (3.40) respecte l'équilibre thermodynamique c'est à dire*

$$f^n = f^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty \iff f^{n+1} = f^n \quad \text{et} \quad \forall j : f_j^n > 0, T_e^n > 0.$$

C'est ce schéma numérique semi-implicite que l'on utilisera au cinquième chapitre.

Preuve de la proposition 3.6 Par un calcul comparable à celui donnant la relation (3.10), on obtient que

$$f^n = C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty$$

↓

$$\forall \Delta t : (f^{n+1} - C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty)_j =$$

$$\Delta t \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} [a_j (f^{n+1} - C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty)_{j+1} - b_j (f^{n+1} - C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty)_j + c_j (f^{n+1} - C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty)_{j-1}]$$

(avec $C = \frac{\Omega^0}{\langle \mathcal{M}_{f, T_e, j}^\infty \rangle}$) et comme la matrice de diffusion $-\overline{\overline{D}}$ (cf. (3.7)) est à diagonale dominante, $\overline{\overline{I}} - \Delta t \cdot \overline{\overline{D}}$ est donc définie positive ($\overline{\overline{I}}$ étant la matrice identité) ce qui montre que nécessairement on a

$$f^{n+1} = C \cdot \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty = f^n.$$

Lorsque $f^{n+1} = f^n$, on peut appliquer l'égalité (3.29) et on obtient

$$\begin{aligned} \sum_j \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e}_j^n) \cdot S(f^n, f^n)_j = \\ - \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2}^n \left[\log(f / \mathcal{M}_{f, T_e}_{j+1}^n) - \log(f / \mathcal{M}_{f, T_e}_j^n) \right]^2 = 0 \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\exists C > 0 / f^n = C \cdot \mathcal{M}_{f^n, T_e^n}$$

puisque par hypothèse $\tilde{f}_{j+1/2}^n > 0$ et $\Omega^n T_e^n > 0$. La fin de la preuve est maintenant similaire à celle de la proposition 3.4. □

3.4.2 Remarque sur la positivité du schéma semi-implicite

On constate que le schéma précédent revient à faire un splitting entre la partie advection et la partie diffusion de l'opérateur de collision ion / électron. Le schéma numérique semi-implicite peut en effet être écrit de la façon suivante

$$\frac{1}{\Delta t} (f_j^{n+1/2} - f_j^n) = \frac{\Omega^n}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - \tilde{U}^n) \tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - \tilde{U}^n) \tilde{f}_{j-1/2}^n \right],$$

discrétisation de

$$\partial_t f = \Omega \partial_v [(v - U) f(v)] \tag{3.42}$$

et

$$\frac{1}{\Delta t} (f_j^{n+1} - f_j^{n+1/2}) = \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v^2} (a_j f_{j+1}^{n+1} - b_j f_j^{n+1} + c_j f_{j-1}^{n+1}),$$

discrétisation de

$$\partial_t f = \frac{\Omega T_e}{m} \partial_{v^2} f. \quad (3.43)$$

Il est clair que l'on peut montrer que

$$f_j^{n+1/2} > 0 \implies f_j^{n+1} > 0$$

indépendamment de tout critère *CFL* (voir l'introduction de [72] par exemple). Tout le problème est donc de trouver un critère *CFL* en Δv (si possible) tel que $f_j^n > 0 \implies f_j^{n+1/2} > 0$. Or, on peut montrer sans difficulté que si $\inf_{j,n}(f_j^n)$ est strictement positif, on peut exhiber un tel critère *CFL* dont on soit sûr qu'il ne s'effondre pas : cette hypothèse correspond à l'hypothèse (3.35), hypothèse permettant de montrer que le schéma numérique totalement explicite converge en temps grand vers l'équilibre thermodynamique.

Mais la solution exacte de (3.42) est la distribution de Dirac $N \cdot \delta(v - U)$ centrée en U et de poids N : rien n'indique donc que $\inf_{j,n}(f_j^n)$ est strictement positif. Cependant, la solution de (3.43) est la distribution $f = 0$. Il y a donc compétition entre un opérateur qui tend à créer une distribution singulière et un opérateur régularisant : on peut de ce fait penser que $\inf_{j,n}(f_j^n)$ sera strictement positif grâce à l'opérateur de diffusion ce qui permettrait de justifier la positivité sous un critère *CFL* en Δv : c'est effectivement ce que l'on constatera numériquement au cinquième chapitre.

Chapitre 4

Traitement du champ électrique et des collisions ion / électron en géométrie axisymétrique

Dans ce chapitre, on étend les résultats précédents concernant le schéma semi-implicite défini par (3.39) et (3.40) pour le cas où l'opérateur de collision est résolu en géométrie axisymétrique.

Par un souci de clarté, on oublie les termes correctifs $\delta\tilde{u}$ et $\delta\tilde{t}$ définis par (3.6) (dans le cas cartésien). Le maillage est donc supposé suffisamment grand pour pouvoir négliger la distribution f sur la frontière du maillage en vitesse.

On notera enfin que lorsque l'opérateur de collision est résolu en géométrie axisymétrique, la vitesse microscopique a obligatoirement trois degrés de liberté : contrairement au troisième chapitre où on avait $\gamma = 3$, on revient donc au cas général où $\gamma = 5/3$ ce qui implique entre autre que $\rho\varepsilon_e = \frac{3}{2}N_eT_e$.

4.1 L'opérateur de collision ion / électron en coordonnées axisymétriques

Dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel* (cf. [2] et [3]), on se place en géométrie sphérique monodimensionnelle pour l'espace physique. On doit donc se placer en géométrie axisymétrique bidimensionnelle pour l'espace des vitesses microscopiques (cf. [10]). Dans cette section, l'on va montrer que dans ce cadre bien particulier, il est possible d'étendre les résultats théoriques précédents.

Les grandeurs cinétiques radiales et orthoradiales seront respectivement notées

avec \parallel et avec \perp . Le gradient spatial sera noté ∂_r . Les mailles en vitesse microscopique sont indicées par $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$ et $k \in \{1, \dots, k_{\max}\}$ respectivement pour la direction radiale (vitesse $v_{\parallel,j}$) et pour la direction orthoradiale (vitesse $v_{\perp,k}$), l'épaisseur des mailles étant constante et égale suivant la direction à Δv_{\parallel} et à Δv_{\perp} . On pose d'autre part $v_{\perp,1/2} = 0$ et

$$\Delta^3 v_k = 2\pi v_{\perp,k} \Delta v_{\perp} \Delta v_{\parallel}$$

où $\Delta^3 v_k$ est donc le volume élémentaire discret de la maille en vitesse (j, k) et

$$\langle g_{j,k} \rangle \equiv \sum_{j,k} g_{j,k} \Delta^3 v_k.$$

L'expression de l'opérateur de collision $S(f)$ est maintenant

$$S(f) = S(f)^{\parallel} + S(f)^{\perp} \quad (4.1)$$

avec

$$S(f)^{\parallel} = \Omega \partial_{v_{\parallel}} \left[(v_{\parallel} - U) f(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \frac{T_e}{m} \partial_{v_{\parallel}} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) \right] \quad (4.2)$$

et

$$S(f)^{\perp} = \frac{\Omega}{v_{\perp}} \partial_{v_{\perp}} \left\{ v_{\perp} \left[v_{\perp} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \frac{T_e}{m} \partial_{v_{\perp}} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) \right] \right\}. \quad (4.3)$$

Remarquons que $S(f)^{\parallel}$ est similaire à $S(f)$ écrit avec un seul degré de liberté. La forme de Landau de $S(f)$ en coordonnées axisymétriques est donnée par

$$S(f)^{\parallel} = \Omega \frac{T_e}{m} \partial_{v_{\parallel}} [f \partial_{v_{\parallel}} \log(f / \mathcal{M}_{f,T_e})],$$

$$S(f)^{\perp} = \frac{\Omega T_e}{v_{\perp} m} \partial_{v_{\perp}} [v_{\perp} f \partial_{v_{\perp}} \log(f / \mathcal{M}_{f,T_e})]$$

avec maintenant

$$\mathcal{M}_{f,T_e}(v, t) = \frac{N}{(2\pi T_e/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(v_{\parallel} - U)^2}{2T_e} \right] \exp \left[-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_e} \right].$$

Quant à la partie champ électrique, son expression devient

$$-\frac{\partial_r P_e}{mN} \partial_{v_{\parallel}} f(v_{\parallel}, v_{\perp}).$$

4.2 Traitement du champ électrique

On se place dans cette section dans le cadre du deuxième chapitre de cette partie où le schéma numérique général de résolution du système global ion / électron (2.1) a été décrit. On note donc à nouveau les indices de temps $n + 2/4$ et $n + 3/4$ respectivement par les indices 0 et *.

Soit donc le schéma numérique explicite

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta t}(f_{j,k}^* - f_{j,k}^0) = \frac{(\partial_r P_e)^n}{m\bar{N}^0}(\bar{f}_{j+1/2,k}^0 - \bar{f}_{j-1/2,k}^0)/\Delta v_{||}, \\ \frac{1}{\Delta t}[(\rho\varepsilon_e)^* - (\rho\varepsilon_e)^0] = -\bar{W} \end{cases} \quad (4.4)$$

avec

$$\begin{cases} \bar{N}^0 = \sum_{j,k} \bar{f}_{j+1/2,k}^0 \Delta^3 v_k, \\ \bar{U}^0 = \sum_{j,k} v_{||,j+1/2} \bar{f}_{j+1/2,k}^0 \Delta^3 v_k / \bar{N}^0 \end{cases} \quad (4.5)$$

où $\bar{f}_{j+1/2,k}^0$ est définie par le schéma upwind suivant

$$\begin{cases} (\partial_r P_e)^n \leq 0 \implies \bar{f}_{j+1/2,k}^0 = f_{j,k}^0, \\ (\partial_r P_e)^n \geq 0 \implies \bar{f}_{j+1/2,k}^0 = f_{j+1,k}^0. \end{cases}$$

On obtient les relations de conservation

$$\begin{cases} \langle f_{j,k}^* \rangle = \langle f_{j,k}^0 \rangle, \\ \frac{1}{\Delta t} (\langle m v_{||,j} f_{j,k}^* \rangle - \langle m v_{||,j} f_{j,k}^0 \rangle) = -\frac{(\partial_r P_e)^n}{\bar{N}^0} \sum_{j,k} \bar{f}_{j+1/2,k}^0 \Delta^3 v_k = -(\partial_r P_e)^n, \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\langle m \frac{(v_{||,j}^2 + v_{\perp,k}^2)}{2} f_{j,k}^* \rangle - \langle m \frac{(v_{||,j}^2 + v_{\perp,k}^2)}{2} f_{j,k}^0 \rangle \right] = -\frac{(\partial_r P_e)^n}{\bar{N}^0} \sum_{j,k} v_{||,j+1/2} \bar{f}_{j+1/2,k}^0 \Delta^3 v_k \\ = -(\partial_r P_e)^n \cdot \bar{U}^0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Autrement dit, les propriétés (2.5) et (2.6) sont vérifiées et l'on a

$$\bar{W} = -(\partial_r P_e)^n \cdot \bar{U}^0, \quad (4.7)$$

relation qui est consistante avec (1.14). On se référera à (2.17) pour l'évaluation de $(\partial_r P_e)^n$ (avec $\Delta x = \Delta r$).

4.3 Traitement semi-implicite des collisions ion / électron

On rappelle tout d'abord que l'on a

$$N^n = \langle f_{j,k}^n \rangle,$$

$$N^n U^n = \langle v_{||,j} f_{j,k}^n \rangle$$

et

$$\frac{3}{2} N^n T^n = \langle \frac{1}{2} m [(v_{||,j} - U^n)^2 + v_{\perp,k}^2] f_{j,k}^n \rangle.$$

Soit donc le schéma numérique semi-implicite

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta t} (f_{j,k}^{n+1} - f_{j,k}^n) = S(f^n, f^{n+1})_{j,k} = S(f^n, f^{n+1})_{j,k}^{\parallel} + S(f^n, f^{n+1})_{j,k}^{\perp}, \\ \frac{1}{\Delta t} [(\rho \varepsilon_e)^{n+1} - (\rho \varepsilon_e)^n] = 3\Omega^n \left(\frac{\tilde{N}^n \tilde{T}_{||}^n + 2\hat{N}^n \hat{T}_{\perp}^n}{3} - N^n T_e^n \right) \end{array} \right. \quad (4.8)$$

avec

$$S(f^n, f^{n+1})_{j,k}^{\parallel} =$$

$$\frac{\Omega^n}{\Delta v_{||}} \left[(v_{||,j+1/2} - \tilde{U}^n) \tilde{f}_{j+1/2,k}^n - (v_{||,j-1/2} - \tilde{U}^n) \tilde{f}_{j-1/2,k}^n \right] \quad (4.9)$$

$$+ \frac{\Omega^n T_e^n}{m \Delta v_{||}^2} (a_j f_{j+1,k}^{n+1} - b_j f_{j,k}^{n+1} + c_j f_{j-1,k}^{n+1})$$

et

$$S(f^n, f^{n+1})_{j,k}^{\perp} =$$

$$\frac{\Omega^n}{v_{\perp,k} \Delta v_{\perp}} \left[v_{\perp,k+1/2}^2 \hat{f}_{j,k+1/2}^n - v_{\perp,k-1/2}^2 \hat{f}_{j,k-1/2}^n \right] \quad (4.10)$$

$$+ \frac{\Omega^n T_e^n}{m v_{\perp,k} \Delta v_{\perp}^2} \left[\alpha_k v_{\perp,k+1/2} (f_{j,k+1}^{n+1} - f_{j,k}^{n+1}) - v_{\perp,k-1/2} (f_{j,k}^{n+1} - f_{j,k-1}^{n+1}) \right]$$

où l'on a posé

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^n = \sum_{j,k} \tilde{f}_{j+1/2,k}^n \Delta^3 v_k, \\ \tilde{U}^n = \sum_{j,k} v_{||,j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2,k}^n \Delta^3 v_k / \tilde{N}^n, \\ \tilde{N}^n \tilde{T}_{||}^n = \sum_{j,k} m (v_{||,j+1/2} - \tilde{U}^n)^2 \tilde{f}_{j+1/2,k}^n \Delta^3 v_k \end{array} \right. \quad (4.11)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \widehat{N}^n = \sum_{j,k} \widehat{f}_{j,k+1/2}^n \Delta^3 v_{k+1/2}, \\ 2\widehat{N}^n \widehat{T}_\perp^n = \sum_{j,k} m v_{\perp,k+1/2}^2 \widehat{f}_{j,k+1/2}^0 \Delta^3 v_{k+1/2}. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

a_j , b_j et c_j et α_k sont respectivement égaux à 1, -2, 1 et 1 sauf éventuellement sur la frontière du maillage en vitesse (voir les conditions aux limites). $\widetilde{f}_{j+1/2,k}^n$ et $\widehat{f}_{j,k+1/2}^n$ sont respectivement la moyenne entropique de $f_{j+1,k}^n$ et de $f_{j,k}^n$ et la moyenne entropique de $f_{j,k+1}^n$ et de $f_{j,k}^n$.

Conditions aux limites On prend à nouveau des conditions aux limites de type Robin à savoir

$$(v_{\parallel} - U)f(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \frac{T_e}{m} \partial_{v_{\parallel}} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = 0$$

en $v_{\parallel} = v_{\parallel,1/2}$ et en $v_{\parallel} = v_{\parallel,j_{\max}+1/2}$, et

$$v_{\perp} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) + \frac{T_e}{m} \partial_{v_{\perp}} f(v_{\parallel}, v_{\perp}) = 0$$

en $v_{\perp} = v_{\perp,k_{\max}+1/2}$. On définit donc a_j , b_j , c_j et α_k ainsi que $\widetilde{f}_{j_{\max}+1/2,k}$ et $\widehat{f}_{j,k_{\max}+1/2}$ par

$$\left\{ \begin{array}{l} a_j = 1 \text{ si } j \neq j_{\max}, \\ b_j = 2 \text{ si } j \in \{2, \dots, j_{\max} - 1\}, \\ c_j = 1 \text{ si } j \neq 1, \\ b_1 = b_{j_{\max}} = 1 \text{ et } a_{j_{\max}} = c_1 = 0, \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 1 \text{ si } k < k_{\max} \\ &= 0 \text{ sinon,} \end{aligned}$$

$$\forall k : \widetilde{f}_{1/2,k} = \widetilde{f}_{j_{\max}+1/2,k} \equiv 0$$

et

$$\forall j : \widehat{f}_{j,k_{\max}+1/2} \equiv 0.$$

On rappelle que $v_{\perp,1/2} = 0$: il n'y a donc pas de problèmes de définition de $\widehat{f}_{j,1/2}$.

Ce schéma numérique vérifie les propriétés de conservation suivantes :

Propriété 4.1

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle f_{j,k}^{n+1} \rangle = \langle f_{j,k}^n \rangle, \\ \langle v_{\parallel,j} f_{j,k}^{n+1} \rangle = \langle v_{\parallel,j} f_{j,k}^n \rangle, \\ \frac{1}{\Delta t} \left[\langle m \frac{(v_{\parallel,j}^2 + v_{\perp,k}^2)}{2} f_{j,k}^{n+1} \rangle - \langle m \frac{(v_{\parallel,j}^2 + v_{\perp,k}^2)}{2} f_{j,k}^n \rangle \right] = \\ 3\Omega^n \left(N^{n+1} T_e^n - \frac{\tilde{N}^n \tilde{T}_{\parallel}^n + 2\hat{N}^n \hat{T}_{\perp}^n}{3} \right). \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Le schéma est donc conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie (la démonstration est similaire à la démonstration de la propriété 3.1) et l'on a

$$\tilde{W} = 3\Omega^n \left(N^n T_e^n - \frac{\tilde{N}^n \tilde{T}_{\parallel}^n + 2\hat{N}^n \hat{T}_{\perp}^n}{3} \right),$$

relation qui est bien consistante avec (1.13) puisque dans le cas axisymétrique (et continu en vitesse) on a $T = (T_{\parallel} + 2T_{\perp})/3$. L'équation discrète d'énergie électronique peut donc être réécrite de la façon suivante

$$T_e^{n+1} = T_e^n \left(1 - \Delta t \frac{2\Omega^n}{Z} \right) + 2\Delta t \frac{\Omega^n}{ZN^n} \cdot \left(\frac{\tilde{N}^n \tilde{T}_{\parallel}^n + 2\hat{N}^n \hat{T}_{\perp}^n}{3} \right).$$

Notations On pose

$$\mathcal{M}_{f^n, T_e^n} = \frac{N^n}{(2\pi T_e^n/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(v_{\parallel} - \tilde{U}^n)^2}{2T_e^n} \right] \cdot \exp \left[-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_e^n} \right]$$

et

$$\mathcal{M}_{f^\infty, T_e^\infty} = \frac{N^0}{(2\pi T_e^\infty/m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(v_{\parallel} - \tilde{U}^\infty)^2}{2T_e^\infty} \right] \cdot \exp \left[-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_e^\infty} \right]$$

où \tilde{U}^∞ et T_e^∞ sont définies par les conditions initiales U^0 , T^0 et T_e^0 de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle (v_{\parallel,j} - U^0) \cdot \mathcal{M}_{f, T_e, j, k}^\infty \rangle = 0, \\ \langle \{ [\frac{1}{2}m(v_{\parallel,j} - U^0)^2 + \frac{1}{2}mv_{\perp,k}^2 + \frac{3}{2}ZT_e^\infty] \\ - [\frac{3}{2}T^0 + \frac{3}{2}ZT_e^0] \} \cdot \mathcal{M}_{f, T_e, j, k}^\infty \rangle = 0. \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Enfin, on pose

$$f^\infty = \frac{N}{\langle \mathcal{M}_{f, T_e, j, k}^\infty \rangle} \mathcal{M}_{f, T_e}^\infty.$$

On énonce maintenant la proposition suivante :

Proposition 4.1 *i) Le système (4.14) admet une unique solution $\mathcal{M}_{f, T_e}^\infty$.*

ii) Lorsque $\tilde{f}_{j+1/2, k}^n$ et $\hat{f}_{j, k+1/2}^n$ sont respectivement la moyenne entropique de $f_{j, k}^n$ et de $f_{j+1, k}^n$ et la moyenne entropique de $f_{j, k}^n$ et de $f_{j, k+1}^n$, le schéma numérique semi-implicite défini par (4.8), (4.9) et (4.10) respecte l'équilibre thermodynamique c'est à dire

$$f^n = f^\infty \quad \text{et} \quad T_e^n = T_e^\infty \iff f^{n+1} = f^n \quad \text{et} \quad \forall(j, k) : f_{j, k}^n > 0, T_e^n > 0.$$

La démonstration est identique à la démonstration du *point ii)* de la proposition 3.3 et à la démonstration de la proposition 3.6.

Chapitre 5

Résultats numériques dans le cas cartésien pour l'opérateur de collision ion / électron

On se propose ici de tester le schéma numérique monodimensionnelle *semi-implicite* défini par (3.39) et (3.40). On rappelle que l'espace des vitesses est discrétisé par la suite croissante (v_j) où $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$, Δv étant le pas constant $v_{j+1} - v_j$. Dans les cas tests qui suivent, la fréquence de collision est donnée par (cf. [28] ou [29])

$$\Omega = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{m_e}}{m} \frac{NZ^3 e^4 \log \Lambda_\Omega}{T_e^{3/2}}$$

où $\log \Lambda_\Omega$ est le logarithme coulombien ion / électron que l'on suppose ici constant et égal à 10. On rappelle que l'entropie numérique est définie par

$$H(t) = \langle f_j \log f_j \rangle - \frac{ZN}{2} \log T_e.$$

Enfin, on définit la constante CFL telle que

$$\Delta t = CFL \cdot \frac{m \Delta v^2}{4\Omega^0 T_e^0}.$$

On prendra dans les cas tests qui suivent

$$v_{j_{\max}} = -v_1 = 5 \sqrt{\frac{T_e^0}{m}} \quad \text{avec} \quad T_e^0 = 2 \text{ KeV}$$

et

$$\Delta v = \frac{1}{10} \sqrt{\frac{T_e^0}{m}}$$

soit donc $j_{\max} = 100$ (sauf pour le cas test 3 où on testera aussi le schéma avec $j_{\max} = 10$): on est de ce fait assuré que la distribution ionique f sera quasiment nulle sur le bord du domaine $\{v_1, v_{j_{\max}}\}$. Notons que l'on peut réécrire Δt en fonction de la variable CFL de la façon suivante

$$\Delta t = \frac{CFL}{400} \cdot \frac{1}{\Omega^0}$$

lorsque $j_{\max} = 100$.

Cas test 1 On considère les conditions initiales suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = \text{bi-maxwellienne centrée de température } T^0, \\ T^0 = 1 \text{ } Kev, \\ T_e^0 = 2 \text{ } Kev, \\ U^0 = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} N = 10^{22} \text{ } cm^{-3}, \\ m = 2.5m_p \text{ (où } m_p \text{ est la masse du proton)}, \\ Z = 2 \end{array} \right.$$

et on prend $CFL = 1.7$. On constate sur les figures 1, 2 et 3 que la relaxation se passe bien. On constate d'autre part que lorsque $j_{\max} = 100$, les moyennes entropique et arithmétique sont équivalentes.

Cas test 2 Afin d'étudier la conservation de l'équilibre thermodynamique, on considère maintenant un plasma dont les conditions initiales sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} f^0 = \text{maxwellienne centrée de température } T^0, \\ T^0 = 1 \text{ } Kev, \\ T_e^0 = 1 \text{ } Kev, \\ U^0 = 0 \end{array} \right.$$

et on étudie le comportement du schéma lorsque \tilde{f} est définie par la moyenne entropique, par la moyenne de Chang et Cooper, par la moyenne arithmétique et par la moyenne harmonique (avec $j_{\max} = 100$). On constate sur la figure 4 que l'utilisation de la moyenne entropique ou de la moyenne de Chang et Cooper permet en effet de préserver l'équilibre thermodynamique contrairement aux deux autres moyennes.

Cas test 3 Afin d'étudier plus en détail les différences entre la moyenne entropique, la moyenne de Chang et Cooper et la moyenne arithmétique, on considère

les conditions initiales suivantes

$$\begin{cases} f^0 = \text{maxwellienne centrée de température } T^0, \\ T^0 = 1 \text{ KeV}, \\ T_e^0 = 2 \text{ KeV}, \\ U^0 = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \rho/m = 10^{22} \text{ cm}^{-3}, \\ m = 2.5m_p \text{ (où } m_p \text{ est la masse du proton)}, \\ Z = 2 \end{cases}$$

et on prend encore $CFL = 1.7$. On constate à nouveau sur les figures 5 à 13 que ces trois moyennes sont équivalentes lorsque le maillage est suffisamment fin. Mais lorsque le maillage devient grossier, seules les moyennes entropique et de Chang et Cooper permettent de bien simuler la relaxation (c'est à dire convergence vers le bon équilibre et préservation de la positivité de la distribution). Lorsque $j_{\max} = 10$, on vérifie par ailleurs que le schéma reste entropique lorsque l'on utilise la moyenne entropique (cf. figure 11) ou la moyenne de Chang et Cooper (cf. figure 12) et que ce n'est plus le cas avec la moyenne arithmétique ainsi qu'avec la moyenne harmonique.

On remarquera par ailleurs sur les figures 5, 7, 11 et 12 que la moyenne entropique donne des résultats plus précis que ceux donnés par la moyenne de Chang et Cooper lorsque le maillage est grossier.

Étude du pas de temps limite On constate sur la figure 14 (cas test 3) que le schéma numérique restitue une bonne relaxation des températures même lorsque le CFL est très important. Cependant on vérifie que, pour ce cas test, le CFL limite assurant le caractère entropique du schéma est de l'ordre de 20 (avec $j_{\max} = 100$).

On constaterait par ailleurs que le schéma totalement explicite nécessite, pour ce même cas test, un CFL limite de l'ordre de 1.7, une valeur supérieure entraînant une erreur de calcul machine (valeur limite qui assure aussi le caractère entropique). On vérifie aussi que, pour le schéma totalement explicite, ce CFL limite est bien quasiment constant et égal à 1.7 lorsque l'on fait varier Δv .

Au regard de ces cas tests, on peut donc considérer que le schéma semi-implicite présenté dans cette étude et utilisant la moyenne entropique permet de bien simuler les collisions ion / électron et cela même lorsque le maillage est grossier. On peut donc espérer obtenir un gain en mémoire et en temps CPU important. Bien-sûr, ces constatations restent valables dans le cas totalement explicite. D'autre part, on vérifie que le schéma semi-implicite admet des pas de temps beaucoup plus importants que la version explicite de ce schéma.

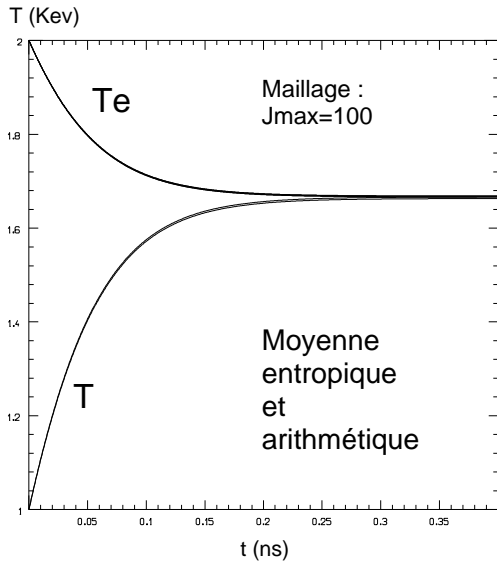


Fig. 1 : test 1

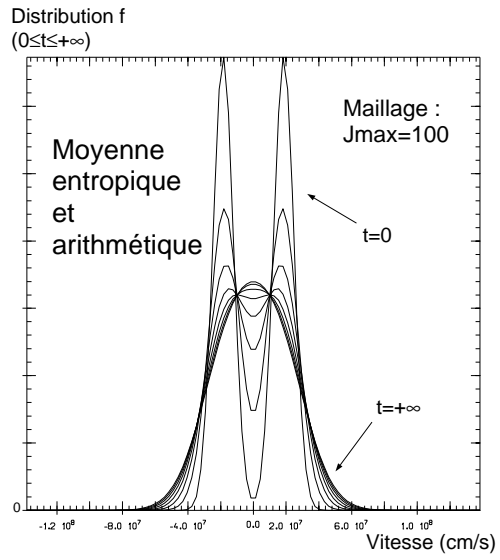


Fig. 2 : test 1

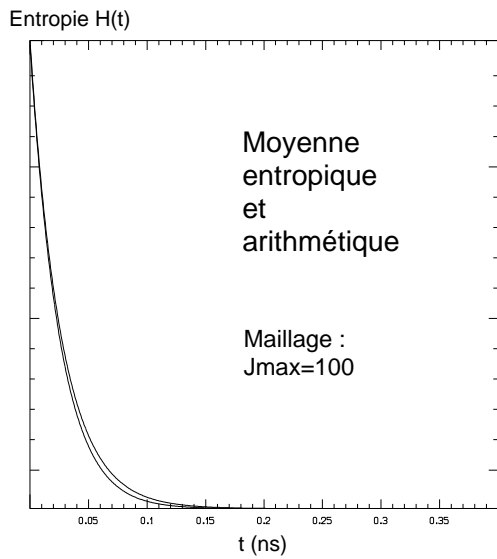


Fig. 3 : test 1

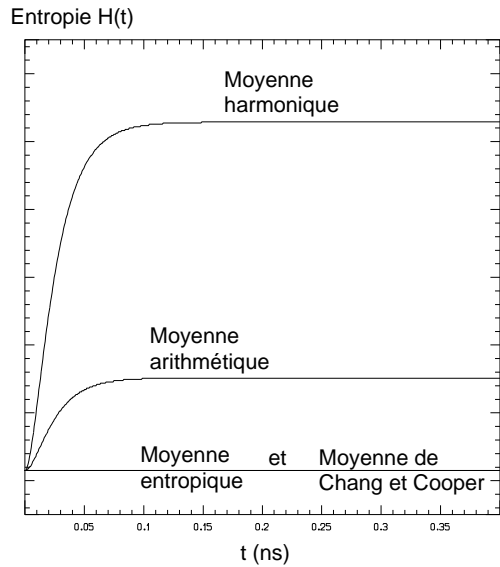


Fig. 4 : test 2

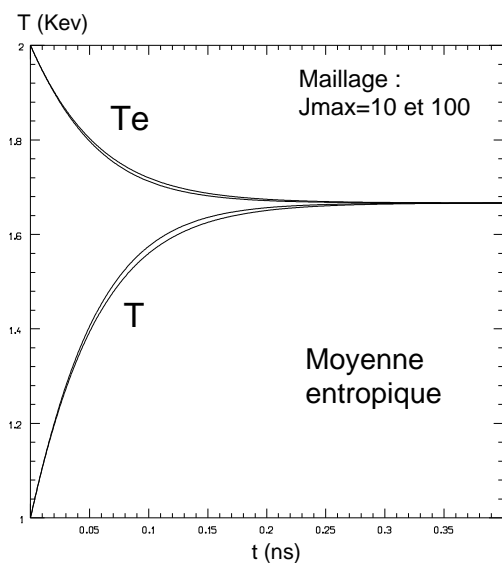


Fig. 5 : test 3

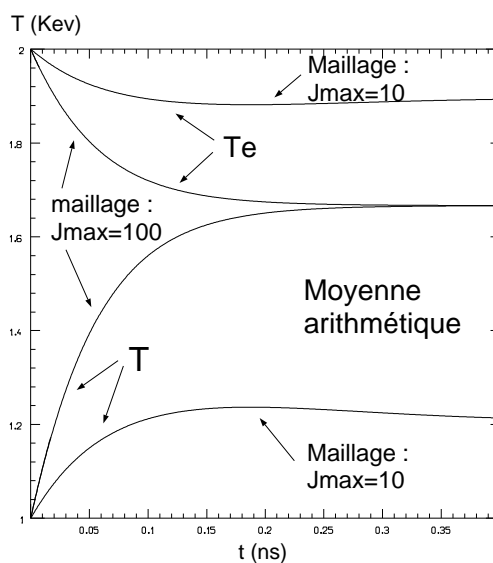


Fig. 6 : test 3

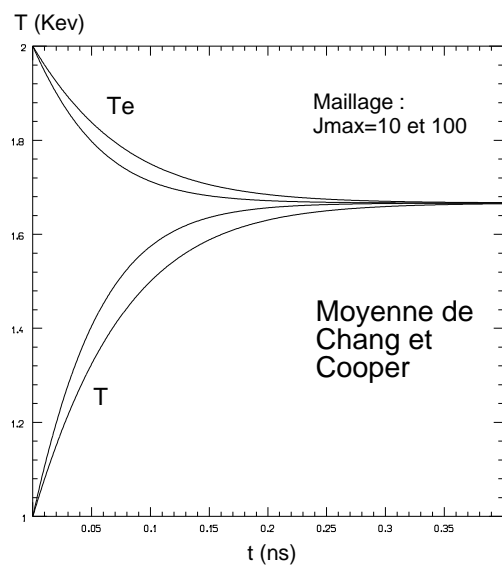


Fig. 7 : test 3

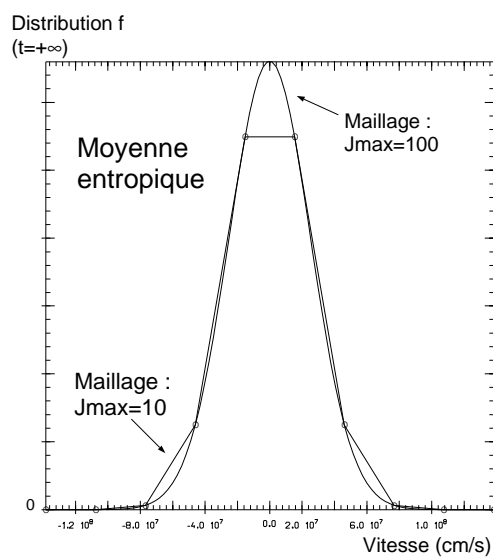


Fig. 8 : test 3

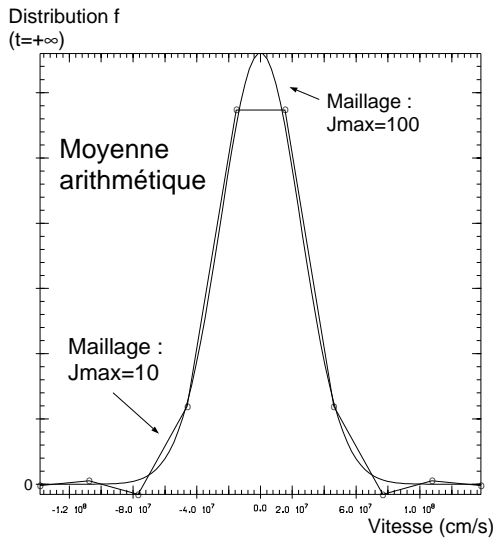


Fig. 9 : test 3

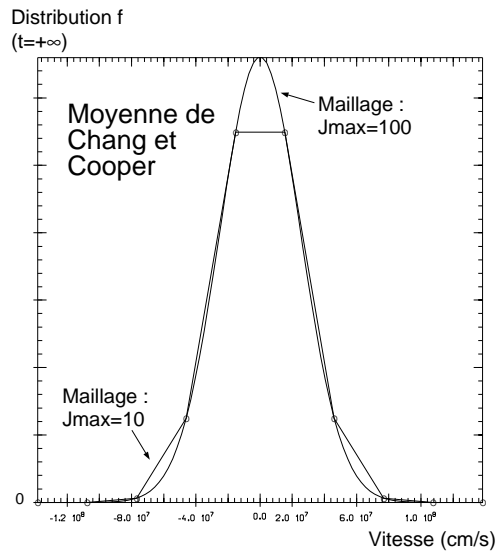


Fig. 10 : test 3

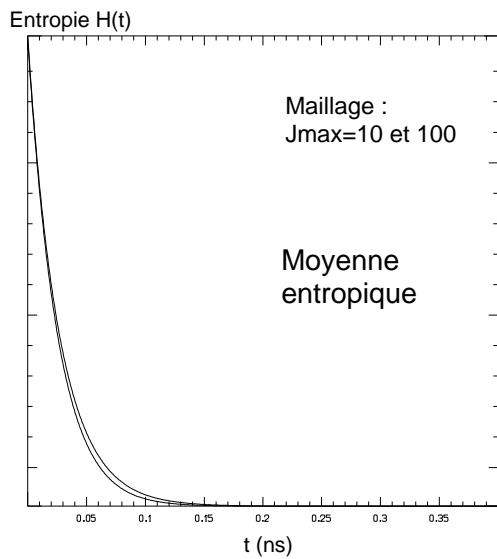


Fig. 11 : test 3

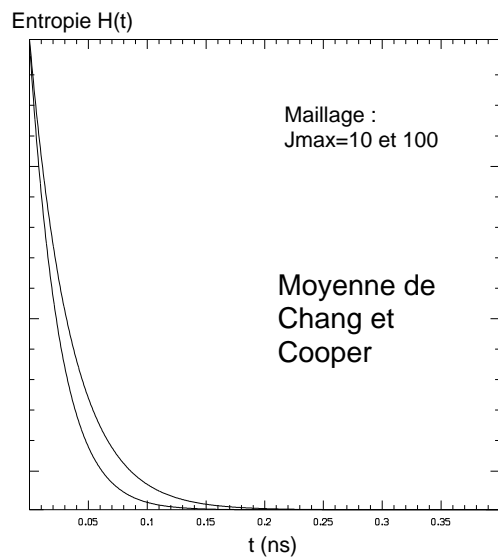


Fig. 12 : test 3

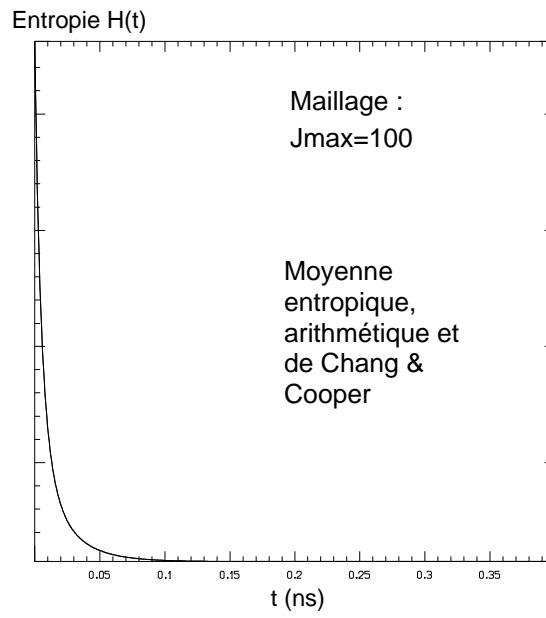


Fig. 13 : test 3

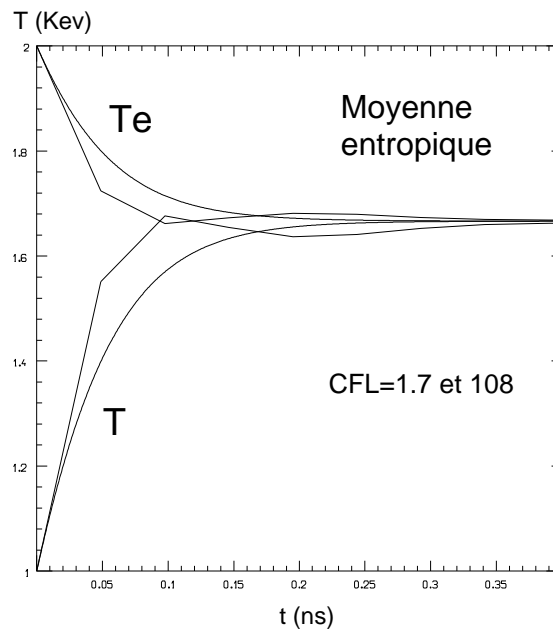


Fig. 14 : test 3

Chapitre 6

Sur un schéma numérique semi-discret appliqué à l'opérateur de Fokker-Planck ion/ion isotrope

Dans ce chapitre, on propose un schéma numérique semi-discret en vitesse pour résoudre l'opérateur de collision ion / ion isotrope en vitesse, schéma établi à partir de la *moyenne entropique*.

L'on montre que ce schéma est conservatif, préserve la positivité de la distribution ionique et converge en temps grand vers le bon équilibre thermodynamique maxwellien.

Ceci constitue un progrès théorique par rapport à [16] car, dans cet article, seules la décroissance de l'entropie et la préservation de la positivité de la distribution ionique en *temps fini* ont été démontrées, la convergence vers l'équilibre en temps grand n'ayant pu être établie. Notons que dans [18], seules les propriétés de décroissance de l'entropie et de conservation de l'équilibre thermodynamique ont été démontrées, leurs résultats étant cependant valables pour le cas non isotrope. D'autres auteurs comme [21] ont par ailleurs proposé un schéma numérique pour ce même opérateur de collision isotrope sans étudier le comportement en temps fini comme en temps grand de la version semi-discrete de leur schéma numérique.

Des résultats numériques attestent du bon comportement de la version totalement discrete du schéma proposé. On constate en effet que, contrairement à d'autres schémas, notre schéma permet de bien traiter les phénomènes de relaxation sur un maillage en vitesse grossier.

Au vu des résultats présentés ici, il est raisonnable de penser que l'extension au cas de l'opérateur de Fokker-Planck ion / ion non isotrope pourrait être envisagée.

6.1 L'opérateur de collision ion / ion isotrope

Dans ce chapitre, on s'intéresse donc à la version isotrope de $B(f)$ qui est définie par (voir [21])

$$B(f) = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_\varepsilon \int_0^{+\infty} [f(\varepsilon_1) \partial_\varepsilon f(\varepsilon) - f(\varepsilon) \partial_{\varepsilon_1} f(\varepsilon_1)] J(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon_1 \quad (6.1)$$

pour la forme convection-diffusion et par

$$B(f) = \frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon}} \partial_\varepsilon \int_0^{+\infty} [\partial_\varepsilon \log f(\varepsilon) - \partial_{\varepsilon_1} \log f(\varepsilon_1)] f(\varepsilon) f(\varepsilon_1) J(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon_1 \quad (6.2)$$

pour la forme de Landau où $\varepsilon = v^2$ et où $J(\varepsilon, \varepsilon_1)$ est la version isotrope du tenseur de Landau à savoir

$$J(\varepsilon, \varepsilon_1) = \frac{1}{2} (\varepsilon^{3/2} + \varepsilon_1^{3/2} - |\varepsilon^{3/2} - \varepsilon_1^{3/2}|) = \min(\varepsilon^{3/2}, \varepsilon_1^{3/2}). \quad (6.3)$$

6.2 Sur le schéma semi-discret

On propose dans cette section un schéma numérique semi-discret en vitesse pour résoudre l'équation de Fokker-Planck ion / ion isotrope sur une grille en énergie indiquée par $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$, l'épaisseur des mailles étant constante et égale à $\Delta\varepsilon/(2\pi)$ (on rappelle que l'énergie ε est reliée à la vitesse microscopique v par $\varepsilon = v^2$). $B(f)$ est alors définie par (6.1) ou de manière équivalente par (6.2) et l'on pose maintenant

$$\langle g_j \rangle = \sum_j g(v_j) \sqrt{\varepsilon_j} \Delta\varepsilon$$

et

$$J_{j+1/2}^{i+1/2} = J_{i+1/2}^{j+1/2} = J(\varepsilon_{i+1/2}, \varepsilon_{j+1/2}).$$

Soit donc le schéma numérique semi-discret défini à partir de la forme convection-diffusion (6.1)

$$\partial_i f_j = B(f)_j \quad (6.4)$$

avec

$$\begin{aligned}
B(f)_j = & \\
& \frac{\omega}{\Delta\varepsilon\sqrt{\varepsilon_j}} \left[A(f)_{j+1/2}\tilde{f}_{j+1/2} - A(f)_{j-1/2}\tilde{f}_{j-1/2} \right] \\
& + \frac{\omega}{\Delta\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon_j}} \left[C(f)_{j+1/2}(f_{j+1} - f_j) - C(f)_{j-1/2}(f_j - f_{j-1}) \right]
\end{aligned} \tag{6.5}$$

où

$$\begin{cases} A(f)_{j+1/2} = -\sum_i (f_{i+1} - f_i) J_{j+1/2}^{i+1/2}, \\ C(f)_{j+1/2} = \sum_i \tilde{f}_{i+1/2} J_{j+1/2}^{i+1/2} \Delta\varepsilon = \sum_i D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \Delta\varepsilon \end{cases}$$

avec

$$D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} = \tilde{f}_{i+1/2} J_{j+1/2}^{i+1/2},$$

$\tilde{f}_{j+1/2}$ étant une approximation de f en $\varepsilon_{j+1/2} = \varepsilon_j + \frac{1}{2}(2\Delta\varepsilon/\pi)$ définie par la moyenne entropique de f_j et de f_{j+1} . On rappelle que la moyenne entropique est définie par la définition suivante (voir le troisième chapitre):

Définition On appellera moyenne entropique des quantités strictement positives $f(x)$ et $f(y)$ la valeur $\tilde{f}_{x,y}$ définie par

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{x,y} &= \frac{f(x)-f(y)}{\log f(x)-\log f(y)} \text{ si } f(x) \neq f(y), \\
&= f(x) \text{ sinon.}
\end{aligned}$$

Par continuité, on étend cette définition au cas où $f(x) = 0$ et / ou $f(y) = 0$ en posant $\tilde{f}_{x,y} = 0$ si $f(x) \cdot f(y) = 0$.

Conditions aux limites Pour que le schéma soit conservatif en masse et en énergie, on impose une condition aux limites de type Robin sur la frontière du domaine définie par $\varepsilon = \varepsilon_{j_{\max}+1/2}$ à savoir

$$\int_0^{+\infty} [f(\varepsilon_1)\partial_\varepsilon f(\varepsilon) - f(\varepsilon)\partial_{\varepsilon_1} f(\varepsilon_1)] J(\varepsilon, \varepsilon_1) d\varepsilon_1|_{\varepsilon=\varepsilon_{j_{\max}+1/2}} = 0.$$

Cela revient à définir pour le schéma numérique

$$J_{j+1/2}^{j_{\max}+1/2} \equiv J_{j_{\max}+1/2}^{i+1/2} \equiv 0$$

soit donc

$$A_{j_{\max}+1/2} \equiv 0 \quad \text{et} \quad C_{j_{\max}+1/2} \equiv 0.$$

Remarquons que l'on n'a pas de problème de conditions aux limites en $\varepsilon_{1/2} = 0$ puisque $\forall \varepsilon : J(0, \varepsilon) = 0$.

On a alors les propriétés de conservation suivantes :

Propriété 6.1

$$\begin{cases} \partial_t \langle f_j \rangle = \partial_t N = 0, \\ \partial_t \langle m \varepsilon_j f_j \rangle = 3 \partial_t (NT) = 0. \end{cases}$$

Preuve de la propriété 6.1 On a pour toute fonction $\varphi(\varepsilon)$

$$\frac{1}{\omega} \partial_t \langle \varphi(\varepsilon_j) f_j \rangle =$$

$$\sum_j A(f)_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} [\varphi(\varepsilon_j) - \varphi(\varepsilon_{j+1})] + \frac{1}{\Delta \varepsilon} \sum_j C(f)_{j+1/2} (f_{j+1} - f_j) [\varphi(\varepsilon_j) - \varphi(\varepsilon_{j+1})]$$

en tenant compte des conditions aux limites. En prenant $\varphi \equiv 1$, on obtient immédiatement la conservation de la masse. Prenons maintenant $\varphi \equiv \varepsilon$. On trouve alors

$$-\frac{1}{\omega} \partial_t \langle \varepsilon_j f_j \rangle = \Delta \varepsilon \sum_j A(f)_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} + \sum_j C(f)_{j+1/2} (f_{j+1} - f_j)$$

soit encore en utilisant les définitions de $A(f)_{j+1/2}$ et de $C(f)_{j+1/2}$

$$\frac{1}{\omega} \partial_t \langle \varepsilon_j f_j \rangle =$$

$$\Delta \varepsilon \sum_{i,j} \tilde{f}_{j+1/2} (f_{i+1} - f_i) J_{j+1/2}^{i+1/2} - \Delta \varepsilon \sum_{i,j} \tilde{f}_{i+1/2} (f_{j+1} - f_j) J_{j+1/2}^{i+1/2}.$$

Et comme $J_{j+1/2}^{i+1/2} = J_{i+1/2}^{j+1/2}$, on trouve que $\partial_t \langle \varepsilon_j f_j \rangle = 0$. \square

Notons que comme les grandeurs macroscopiques ioniques sont constantes, on a

$$\frac{d\omega}{dt}(t) = 0.$$

Notations On pose

$$H(f) = \langle f_j \log f_j \rangle,$$

$$f^\infty = \frac{N}{\langle \mathcal{M}_j^\infty \rangle} \mathcal{M}^\infty$$

et

$$\mathcal{M}^\infty = \frac{N}{(2\pi|T^\infty|/m)^{3/2}} \exp\left[-\frac{m\varepsilon}{2T^\infty}\right]$$

où T^∞ est définie par la condition initiale $3T^0 = \langle m\varepsilon_j f_j(t=0) \rangle / N^0$ de la façon suivante

$$\left\langle \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0\right) \mathcal{M}_j^\infty \right\rangle = 0. \quad (6.6)$$

Notons que dans la définition de \mathcal{M}^∞ , on a introduit la valeur absolue de T^∞ : en effet, l'on n'a pas a priori la positivité de T^∞ . Cependant, l'on verra que lorsque le domaine des vitesses sera suffisamment grand, T^∞ sera strictement positif : voir la proposition 6.3.

Les principales propriétés du schéma proposé dans ce chapitre sont réunies dans le lemme, les propositions, le corollaire et le théorème suivants :

Lemme 6.1 *Lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, l'opérateur $B(f)_j$ défini par (6.5) peut s'écrire*

$$\begin{aligned} B(f)_j = & \\ & \frac{\omega}{\Delta\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon_j}} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2} \sum_i D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \left[\log\left(\frac{f_{j+1}}{f_j}\right) - \log\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right) \right] \Delta\varepsilon \right. \\ & \left. - \tilde{f}_{j-1/2} \sum_i D(f)_{j-1/2}^{i+1/2} \left[\log\left(\frac{f_j}{f_{j-1}}\right) - \log\left(\frac{f_{i+1}}{f_i}\right) \right] \Delta\varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

Il y a donc équivalence au niveau discret entre la forme convection-diffusion (6.1) et la forme de Landau (6.2) de l'opérateur de collision ion / ion isotrope lorsque l'on utilise la moyenne entropique. Ce lemme permet alors d'établir les propositions suivantes :

Proposition 6.1 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (6.4) et (6.5) préserve la positivité de $f_j(t)$ et vérifie*

$$\partial_t H(f) \leq 0.$$

D'autre part, il existe une suite (t_k) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $f_j(t_k)$ converge uniformément vers un équilibre thermodynamique f_j^∞ .

Corollaire 6.1 *L'équation (6.6) admet au-moins une solution \mathcal{M}^∞ .*

La proposition suivante donne une borne inférieure pour l'entropie $H(f)(t)$ et assure l'unicité de l'état d'équilibre :

Proposition 6.2 *i) (Lemme de Gibbs) Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (6.4) et (6.5) vérifie*

$$\forall t : H(f^\infty) \leq H(f)(t).$$

ii) L'équation (6.6) admet une unique solution \mathcal{M}^∞ .

La proposition précédente permet alors d'établir le résultat final suivant qui affine le résultat de convergence de la proposition 6.1 :

Théorème 6.1 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}(t)$ est la moyenne entropique de $f_j(t)$ et de $f_{j+1}(t)$, le schéma semi-discret défini par (6.4) et (6.5) assure la convergence en norme l^1 de la suite $f_j(t)$ vers l'unique équilibre thermodynamique f_j^∞ lorsque t tend vers l'infini.*

On a donc prouvé l'existence d'une unique solution \mathcal{M}^∞ de l'équation (6.6). Cependant, l'on n'a pas prouvé la stricte positivité de T^∞ . La proposition suivante permet d'établir la stricte positivité de T^∞ lorsque le domaine des vitesses est suffisamment grand :

Proposition 6.3 *Pour tout $\Delta\varepsilon > 0$, il existe $\bar{j}_{\max}(\Delta\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que*

$$j_{\max} \geq \bar{j}_{\max}(\Delta\varepsilon) \iff T^\infty > 0.$$

Mise à part la démonstration de la proposition 6.3, les démonstrations des autres résultats sont similaires à la démonstration du lemme 3.1, aux démonstrations des propositions 3.2 et 3.3 ainsi qu'à la démonstration du théorème 3.1 concernant l'opérateur de collision ion / électron. Cependant, quelques différences notables existent pour la démonstration du lemme 6.1 et surtout pour la démonstration de la proposition 6.1, en particulier pour l'établissement de la positivité de $f_j(t)$. C'est pourquoi l'on rédige les démonstrations de ce lemme et de cette proposition dans leur intégralité.

Preuve du lemme 6.1 On a alors

$$A(f)_{j+1/2} = - \sum_i D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right)$$

et

$$C(f)_{j+1/2}(f_{j+1} - f_j) = \tilde{f}_{j+1/2} \sum_i D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) \Delta\varepsilon.$$

Donc

$$A(f)_{j+1/2} \tilde{f}_{j+1/2} + \frac{1}{\Delta\varepsilon} C(f)_{j+1/2} (f_{j+1} - f_j) = \tilde{f}_{j+1/2} \sum_i D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right].$$

D'où le résultat. \square

Preuve de la proposition 6.1 et du corollaire 6.1 Remarquons tout d'abord que, par continuité, il existe un intervalle $[0, \tau[$ sur lequel on peut définir $H(f)(t)$ puisque les conditions initiales sont strictement positives. Sur ce voisinage, on a

$$\partial_t H(f) = \partial_t \langle f_j \rangle + \langle \log(f_j) \partial_t f_j \rangle = \langle \log(f_j) \partial_t f_j \rangle \quad (6.7)$$

puisque le schéma est conservatif. On a d'autre part

$$\begin{aligned} & \langle B(f)_j \cdot \log f_j \rangle = \\ & \frac{\omega}{\Delta\varepsilon} \left\{ \sum_{i,j} \tilde{f}_{j+1/2} D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right] \log f_j \Delta\varepsilon - \right. \\ & \left. \sum_{i,j} \tilde{f}_{j-1/2} D(f)_{j-1/2}^{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_j}{f_{j-1}} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right] \log f_j \Delta\varepsilon \right\} \end{aligned}$$

en utilisant le lemme 6.1, soit encore

$$\begin{aligned} & \langle B(f)_j \cdot \log f_j \rangle = \\ & -\omega \sum_{i,j} \tilde{f}_{j+1/2} D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right] \log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right). \end{aligned}$$

En permutant les indices i et j , on peut donc aussi écrire que

$$\begin{aligned} & \langle B(f)_j \cdot \log f_j \rangle = \\ & -\omega \sum_{i,j} \tilde{f}_{i+1/2} D(f)_{i+1/2}^{j+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) - \log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) \right] \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right). \end{aligned}$$

D'où l'expression suivante

$$\partial_t H(f) = \langle B(f)_j \cdot \log f_j \rangle = \quad (6.8)$$

$$-\frac{\omega}{2} \sum_{i,j} \tilde{f}_{j+1/2} D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right]^2 \leq 0$$

en tenant compte du fait que

$$\tilde{f}_{j+1/2} D(f)_{j+1/2}^{i+1/2} = \tilde{f}_{i+1/2} D(f)_{i+1/2}^{j+1/2} = \tilde{f}_{j+1/2} \tilde{f}_{i+1/2} J_{j+1/2}^{i+1/2} \geq 0.$$

L'inégalité (6.8) permet donc d'affirmer que

$$t \in [0, \tau] \implies \partial_t H(f) \leq 0 \implies H(f)(t) \leq H(f)(0).$$

On montre maintenant que, pour tout $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$, f_j reste toujours strictement positif sur tout intervalle $[0, T]$. Supposons donc que

$$\exists j_0 / f_{j_0}(\tau) = 0. \quad (6.9)$$

Alors, la formulation convection-diffusion montre que

$$\partial_t f_{j_0}(\tau) = \frac{\omega}{\Delta \varepsilon^2 \sqrt{\varepsilon_{j_0}}} \left[C(f)_{j_0+1/2} f_{j_0+1}(\tau) + C(f)_{j_0-1/2} f_{j_0-1}(\tau) \right] \geq 0$$

puisque $\forall j : C(f)_{j+1/2} \geq 0$ et $f_j(\tau) \geq 0$. Comme par hypothèse on a

$$t < \tau \implies \forall j : f_j(t) > 0,$$

nécessairement on doit avoir

$$\partial_t f_{j_0}(\tau) \leq 0.$$

C'est donc que nécessairement

$$f_{j_0+1}(\tau) = 0 \quad \text{ou} \quad C(f)_{j_0+1/2}(\tau) = 0.$$

Supposons que

$$C(f)_{j_0+1/2}(\tau) = 0. \quad (6.10)$$

Alors

$$\forall j : \tilde{f}_{j+1/2}(\tau) = 0.$$

Cette dernière égalité implique alors que

$$\forall j : \partial_t f_j(\tau) = 0.$$

Posons $\mathcal{E} = \{j / f_j(\tau) = 0\}$; \mathcal{E} n'est pas vide puisque par hypothèse $j_0 \in \mathcal{E}$. On peut écrire que

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \partial_t H(f) = \sum_{j \in \mathcal{E}} \lim_{t \rightarrow \tau} \log(f_j) \partial_t f_j \sqrt{\varepsilon_j} \Delta \varepsilon \leq 0$$

en utilisant (6.7) et (6.8), soit encore

$$\sum_{j \in \mathcal{E}} \lim_{t \rightarrow \tau} \log(f_j) \partial_t f_j \leq 0.$$

Donc, on a

$$\forall j \in \mathcal{E} : \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \log(f_j(\tau - \epsilon)) f_j(\tau - \epsilon) \geq 0$$

puisque $f_j(\tau) = 0$. Or, comme il existe un voisinage $\mathcal{V}(0^+)$ tel que

$$\forall \epsilon \in \mathcal{V}(0^+), \forall j \in \mathcal{E} : \log(f_j(\tau - \epsilon)) f_j(\tau - \epsilon) \leq 0,$$

on en conclue que nécessairement

$$\forall j \in \mathcal{E} : \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\epsilon} \log(f_j(\tau - \epsilon)) f_j(\tau - \epsilon) = 0$$

soit encore

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \partial_t H(f) = 0,$$

limite qui est équivalente à

$$\lim_{t \rightarrow \tau} \max_{j,i} \left(\tilde{f}_{j+1/2} \tilde{f}_{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right]^2 \right) = 0. \quad (6.11)$$

On applique maintenant le lemme 6.2 (voir ci-dessous): on obtient donc qu'il existe une suite (t_k) tendant vers τ telle que

$$\inf_{k,j} f_j(t_k) > 0$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathcal{E} \neq \emptyset$. Donc, l'hypothèse (6.10) est fausse et on a $f_{j_0+1}(\tau) = 0$. En procédant de la même façon avec $C_{j_0-1}(\tau)$, on obtient aussi que $f_{j_0-1}(\tau) = 0$. Et en raisonnant de proche en proche, on obtient

$$\exists j_0 / f_{j_0}(\tau) = 0 \implies \forall j : f_j(\tau) = 0$$

ce qui est impossible puisque le schéma est conservatif. L'hypothèse (6.9) est donc aussi fausse ce qui permet d'affirmer que

$$\forall j : f_j(\tau) > 0.$$

On peut ainsi étendre le voisinage $[0, \tau]$ à tout intervalle $[0, T]$ pour tout $T \geq 0$ ce qui montre que

$$\forall t \geq 0, \forall j : f_j(t) > 0.$$

$H(f)(t)$ est donc une fonction définie sur $[0, +\infty[$. Comme $x \mapsto x \log x$ est minorée sur $[0, +\infty[$, $H(f)(t)$ est donc aussi minorée sur $[0, +\infty[$. $H(f)$, fonction décroissante et minorée sur $[0, +\infty[$, admet alors une limite H^∞ en $t = +\infty$.

On montre maintenant la convergence vers un état d'équilibre. Comme $H(f)$ est continue, décroissante et admet une limite en temps grand, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\partial}{\partial t} H(f)(t) = 0 \quad \text{presque partout.}$$

Donc il existe une suite (t_k) tendant vers $+\infty$ telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \max_{j,i} \left(\tilde{f}_{j+1/2} \tilde{f}_{i+1/2} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right]^2 \right) = 0. \quad (6.12)$$

En utilisant à nouveau le lemme 6.2, on sait qu'il existe une sous-suite de (t_k) notée (t_k) telle que

$$\inf_{k,j} \tilde{f}_{j+1/2}(t_k) > 0.$$

Et grâce à (6.12), on obtient alors

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} \max_{j,i} \left[\log \left(\frac{f_{j+1}}{f_j} \right) - \log \left(\frac{f_{i+1}}{f_i} \right) \right] = 0,$$

limite qui implique qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} f_j(t_k) = C \cdot \mathcal{M}_j^\infty.$$

Le schéma étant conservatif, \mathcal{M}_j^∞ est donc solution de l'équation (6.6) et on a $C = N / \langle \mathcal{M}_j^\infty \rangle$. Il reste maintenant à établir la stricte positivité de T^∞ : on se référera à la proposition 6.3. \square

Le lemme utilisé ci-dessus pour la démonstration de la proposition 6.1 est le suivant :

Lemme 6.2 *Pour toute suite (t_k) tendant vers $\tau \in \overline{\mathbb{R}}^+$ telle que (6.11) est vérifiée, il existe une sous-suite de (t_k) notée (t_k) telle que*

$$\inf_{k,j} f_j(t_k) > 0.$$

La preuve du lemme 6.2 est basée à son tour sur le lemme suivant :

Lemme 6.3 Soit deux suites x_k et y_k de réels positifs, \tilde{f}_k leur moyenne entropique, et deux autres suites v_k et w_k de réels positifs, \tilde{g}_k leur moyenne entropique. Supposons que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} \tilde{f}_k \tilde{g}_k \left[\log \left(\frac{x_k}{y_k} \right) - \log \left(\frac{v_k}{w_k} \right) \right]^2 = 0.$$

i) Si $x_k = w_k$, alors

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} x_k = 0 \implies \lim_{t_k \rightarrow \tau} y_k = 0 \text{ ou } \lim_{t_k \rightarrow \tau} v_k = 0.$$

ii) Si $x_k = w_k$, alors

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} y_k = 0 \text{ et } \lim_{t_k \rightarrow \tau} v_k = 0 \implies \lim_{t_k \rightarrow \tau} x_k = 0.$$

iii) Si

$$\inf_k (v_k w_k) > 0 \text{ et } \sup_k (v_k w_k) < +\infty,$$

alors

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} \tilde{f}_k = 0 \implies \lim_{t_k \rightarrow \tau} x_k = 0 \text{ et } \lim_{t_k \rightarrow \tau} y_k = 0.$$

Preuve du lemme 6.3 *Point i)* Supposons qu'il existe deux sous-suites extraites de y_k et de v_k , encore notée y_k et v_k , minorées par une constante $\alpha > 0$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \lim_{t_k \rightarrow \tau} \tilde{f}_k \tilde{g}_k \left[\log \left(\frac{x_k}{y_k} \right) - \log \left(\frac{v_k}{w_k} \right) \right]^2 &= 4 \lim_{t_k \rightarrow \tau} y_k v_k \\ &\geq 4\alpha^2 > 0 \end{aligned}$$

ce qui est impossible.

Point ii) De même, supposons qu'une sous-suite de x_k , à nouveau notée x_k , soit minorée par une constante $\alpha > 0$. Il y a alors une contradiction car

$$\begin{aligned} \lim_{t_k \rightarrow \tau} \tilde{f}_k \tilde{g}_k \left[\log \left(\frac{x_k}{y_k} \right) - \log \left(\frac{v_k}{w_k} \right) \right]^2 &= \lim_{t_k \rightarrow \tau} \frac{x_k^2}{\log y_k \log v_k} [\log y_k + \log v_k]^2 \\ &\geq 2\alpha^2 > 0. \end{aligned}$$

Point iii) On se reportera au lemme 3.3-ii) en remarquant que, par hypothèse, les suites $\log(v_k/w_k)$ et \tilde{g}_k sont bornées. \square

Preuve du lemme 6.2 On montre donc ici que :

$$\text{Il existe une sous-suite de } (t_k) \text{ notée } (t_k) \text{ telle que : } \inf_{j,k} f_j(t_k) > 0. \quad (6.13)$$

Si (6.13) n'est pas vraie, pour toute sous-suite extraite de (t_k) tendant vers τ et encore notée (t_k) , il existe un j_0 tel que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0}(t_k) = 0.$$

Alors, en posant $x_k = w_k = f_{j_0}(t_k)$, $y_k = f_{j_0-1}(t_k)$ et $v_k = f_{j_0+1}(t_k)$ et en appliquant le lemme 6.3-i), on obtient que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0-1}(t_k) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0+1}(t_k) = 0.$$

Supposons maintenant qu'il existe une sous-suite de (t_k) encore notée (t_k) telle que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0-1}(t_k) = 0 \quad \text{et} \quad \inf_k f_{j_0+1}(t_k) > 0. \quad (6.14)$$

Puis, posons $x_k = w_k = f_{j_0+1}(t_k)$, $y_k = f_{j_0}(t_k)$ et $v_k = f_{j_0+2}(t_k)$. Alors, en appliquant le lemme 6.3-ii), on obtient que nécessairement il existe une suite extraite de la suite (t_k) et encore notée (t_k) telle que

$$\inf_k f_{j_0+2}(t_k) > 0$$

sinon on aurait $\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0+1}(t_k) = 0$. Et en appliquant le lemme 6.3-iii), on aboutit à ce que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0+1}(t_k) = 0$$

ce qui est impossible d'après (6.14). Donc, l'hypothèse (6.14) est fautive et l'on peut écrire que

$$\lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0}(t_k) = 0 \implies \lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0 \pm 1}(t_k) = 0.$$

En raisonnant de proche en proche, on trouve finalement que

$$\exists(t_k), \exists j_0 / \lim_{t_k \rightarrow \tau} f_{j_0}(t_k) = 0 \implies \exists(t_k) / \forall j : \lim_{t_k \rightarrow \tau} f_j(t_k) = 0$$

ce qui est impossible, le schéma étant conservatif. Donc (6.13) est vraie. \square

Preuves de la proposition 6.2 et du théorème 6.1 Les démonstrations de cette proposition et de ce théorème sont similaires aux démonstrations de la proposition 3.3 et du théorème 3.1, démonstrations qui établissent ces mêmes résultats dans le cas de l'opérateur de collision ion / électron car $H(f)(t) - H(f^\infty)$ peut être écrit sous la forme

$$H(f)(t) - H(f^\infty) = \int \frac{f_j}{f_j^\infty} \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) d\mu(v)$$

avec $d\mu(v) = \sum_i f_i^\infty \delta(v - v_i) \sqrt{\varepsilon_i} \Delta\varepsilon$ ce qui permet d'utiliser aussi les inégalités de Jensen et de Csiszard-Kullback. En effet, on a

$$H(f)(t) - H(f^\infty) = \langle f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \rangle + \langle (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \rangle .$$

D'autre part

$$\langle (f_j - f_j^\infty) \log f_j^\infty \rangle = C^{ste} \cdot \langle (f_j - f_j^\infty) \rangle - \frac{m}{2T^\infty} \langle \varepsilon_j (f_j - f_j^\infty) \rangle = 0$$

puisque le schéma est conservatif. Donc, on a bien

$$H(f)(t) - H(f^\infty) = \langle f_j \log \left(\frac{f_j}{f_j^\infty} \right) \rangle .$$

□

Preuve de la proposition 6.3 Soit $\Delta\varepsilon > 0$ fixé et posons

$$\mathcal{H}(x, j_{\max}) = \frac{1}{\Delta\varepsilon} \langle \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 \right) \exp(-x\varepsilon_j) \rangle .$$

Remarquons que l'on trouve la solution de l'équation (6.6) en résolvant

$$\mathcal{H}(x, j_{\max}) = 0 \quad \text{avec} \quad x = \frac{m}{2T^\infty} .$$

On sait qu'il existe j_0 tel que

$$\forall j \leq j_0 : \frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 < 0$$

et

$$\forall j > j_0 : \frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 \geq 0$$

puisque $\langle \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 \right) f_j^0 \rangle = 0$ et que $f_j^0 > 0$ pour tout j . Donc, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(0, j_{\max}) &= \sum_{j=1}^{j=j_0} \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} + \sum_{j=j_0+1}^{j_{\max}} \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_j - \frac{3}{2}T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} \\ &\geq -C^{ste}(j_0) + (j_{\max} - j_0) \left(\frac{1}{2}m\varepsilon_{j_0+1} - \frac{3}{2}T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_{j_0+1}} \end{aligned}$$

avec $C^{ste}(j_0) \geq 0$ (si $\frac{1}{2}m\varepsilon_{j_0+1} = \frac{3}{2}T^0$, on remplace alors $j_0 + 1$ par $j_0 + 2$). Écrit sous cette forme, on constate qu'il est possible de trouver un j_{\max} noté $\bar{j}_{\max}(\Delta\varepsilon)$ qui soit suffisamment grand tel que $\mathcal{H}(0, j_{\max}) > 0$.

Ensuite, on montre que

$$\exists x_0 \geq 0 / x \geq x_0 \implies \mathcal{H}(x, j_{\max}) < 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x, j_{\max}) &= \sum_{j=1}^{j_0} \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_j - \frac{3}{2} T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} \exp(-x \varepsilon_j) \\ &+ \sum_{j=j_0+1}^{j_{\max}} \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_j - \frac{3}{2} T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} \exp(-x \varepsilon_j). \end{aligned}$$

Or, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que

$$\forall j \in \{1, \dots, j_0\} : \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_j - \frac{3}{2} T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} \leq -\alpha < 0$$

et

$$\forall j \in \{j_0 + 1, \dots, j_{\max}\} : 0 < \left(\frac{1}{2} m \varepsilon_j - \frac{3}{2} T^0 \right) \sqrt{\varepsilon_j} \leq \beta.$$

Donc, on peut écrire que

$$\mathcal{H}(x, j_{\max}) < -j_0 \alpha \exp(-x \varepsilon_{j_0}) + (j_{\max} - j_0) \beta \exp(-x \varepsilon_{j_0+1})$$

soit encore

$$\mathcal{H}(x, j_{\max}) < [-j_0 \alpha + (j_{\max} - j_0) \beta \exp(-x \Delta \varepsilon)] \exp(-x \varepsilon_{j_0})$$

ce qui montre que

$$\exists x_0 \geq 0 / x \geq x_0 \implies \mathcal{H}(x, j_{\max}) < 0.$$

Donc, pour montrer que

$$j_{\max} \geq \bar{j}_{\max}(\Delta \varepsilon) \implies T^\infty > 0,$$

il suffit d'utiliser la continuité de $x \mapsto \mathcal{H}(x, j_{\max})$ sur \mathbb{R}^+ en notant que l'on sait maintenant que d'une part $\mathcal{H}(0, j_{\max}) > 0$ pour $j_{\max} \geq \bar{j}_{\max}(\Delta \varepsilon)$ et que d'autre part $\mathcal{H}(x, j_{\max}) < 0$ pour $x \geq x_0$. Donc

$$j_{\max} \geq \bar{j}_{\max}(\Delta \varepsilon) \implies \exists x > 0 / \mathcal{H}(x, j_{\max}) = 0.$$

Réciproquement, si $j_{\max} < \bar{j}_{\max}(\Delta \varepsilon)$, alors $\mathcal{H}(0, j_{\max}) \leq 0$. Et comme on montre facilement que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{H}(x, j_{\max}) = +\infty,$$

on en déduit que

$$j_{\max} < \bar{j}_{\max}(\Delta\varepsilon) \implies \exists x \leq 0 / \mathcal{H}(x, j_{\max}) = 0.$$

On conclut en rappelant que l'on a montré l'unicité de la solution au point ii) de la proposition 6.2. Notons ici que, contrairement au cas ion / électron, l'unicité peut être obtenue très facilement en remarquant que $\frac{\partial}{\partial x} \mathcal{H}(x, j_{\max}) < -\frac{3T^0}{m} \mathcal{H}(x, j_{\max})$ (remarque de Frédéric Lagoutière). □

6.3 Résultats numériques

Dans cette section, on se propose de tester numériquement le schéma numérique totalement explicite suivant :

$$\frac{1}{\Delta t} (f_j^{n+1} - f_j^n) = B(f^n)_j$$

où $B(f^n)_j$ est défini par (6.5).

Soit donc un plasma d'ion dont la distribution initiale est égale à

$$f^0 = 0.01 \exp\{-10[(\sqrt{\varepsilon} - 0.3)/0.3]^2\}.$$

Ce cas test a été initialement proposé par W. M. Mac Donald, M. N. Rosenbluth et W. Chuck (voir [23]). Le maillage est uniforme en vitesse: $\sqrt{\varepsilon_{j+1}} - \sqrt{\varepsilon_j}$ est donc constant.

La figure 15 montre la distribution f ainsi que la maxwellienne d'équilibre lorsque $t = +\infty$ et pour $j_{\max} = 5$, la valeur de f aux interfaces du maillage étant évaluée avec la moyenne entropique.

La figure 16 visualise l'entropie $H = \langle f_j \log f_j \rangle$ lorsque $j_{\max} = 5$, la distribution f aux interfaces du maillage étant donnée par la moyenne harmonique, arithmétique ou entropique. On constate que seule l'utilisation de la moyenne entropique permet d'obtenir une bonne relaxation de l'entropie H lorsque le maillage est grossier: en effet, les deux autres moyennes ne respectent pas la convexité de $t \mapsto H(t)$, convexité qui devrait être respectée si l'on accepte la conjecture (ou super théorème H) de Mac Kean (cf. [32]) à l'ordre 2: celle-ci affirme en effet que pour des opérateurs de collision de type Boltzmann ou Fokker-Planck, $(-1)^n \partial^n H(t) / \partial t^n \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Notons que [33] a montré que pour une solution particulière de l'équation de Boltzmann (solution de Bobylev, Krook et Wu), la conjecture n'est pas vérifiée. Dans cette note, il est aussi indiqué que

K. Olausen (article non référencé) a pu montrer que la conjecture pour cette solution particulière est cependant vérifiée lorsque $n \leq 101$.

On peut donc dire que si les différences entre les moyennes harmonique, arithmétique et entropique sont négligeables lorsque le maillage est fin, ce n'est pas le cas lorsque le maillage est grossier. Ces résultats numériques confirment donc ceux obtenus dans le cas des collisions ion / électron : voir le cinquième chapitre.

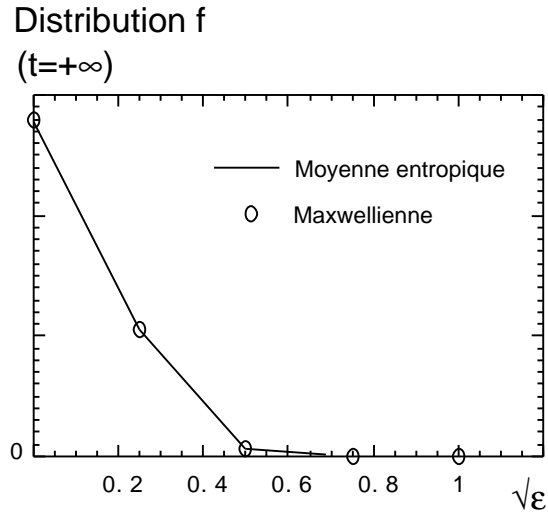


Fig. 15

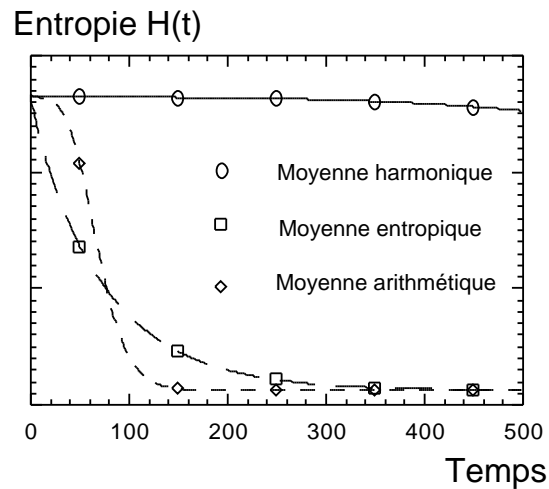


Fig. 16

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie, l'on a présenté un modèle cinétique ionique couplé à une équation d'énergie électronique, modèle permettant de traiter cinétiquement le comportement d'un plasma chaud notamment dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel*.

Après avoir proposé un schéma numérique global de résolution de ce système, on s'est attaché à présenter une nouvelle méthode de résolution de l'opérateur de collision ion / électron dans le cas mono-espèce en géométrie cartésienne ou axisymétrique.

Pour ce faire, on a introduit la notion de *moyenne entropique* qui définit la valeur de la distribution ionique f aux interfaces du maillage en vitesse. Ce schéma numérique, dans sa version explicite ou semi-implicite, est conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie totale du plasma, et préserve l'équilibre thermodynamique lorsque celui-ci est atteint. D'autre part, on a pu montrer que, sous un certain critère CFL , le schéma numérique explicite est entropique et préserve la positivité de la distribution ionique f ainsi que de la température électronique T_e .

Sur des cas tests précis (relaxation de la température ionique et de la température électronique), on a présenté des résultats numériques montrant l'excellent comportement du schéma proposé.

On a aussi clairement établi les avantages de ce schéma sur ceux utilisant la moyenne arithmétique ou harmonique pour définir f aux interfaces du maillage en vitesse : *notre schéma permet en effet de traiter correctement les phénomènes d'échange d'énergie entre les ions et les électrons sur un maillage en vitesse grossier*.

Il faut noter que l'utilisation de la moyenne entropique donne des résultats numériques comparables à ceux donnés lorsque l'on utilise la moyenne de Chang et Cooper. On peut cependant remarquer que lorsque le maillage devient grossier, la moyenne entropique donne des résultats numériques quasiment identiques à ceux donnés par ce même schéma lorsque le maillage est fin ce qui n'est pas le cas lorsque l'on utilise la moyenne de Chang et Cooper.

On constatera d'autre part au dernier chapitre de la deuxième partie que, sur des cas tests très violents se rapprochant des conditions rencontrées dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel*, l'utilisation de la moyenne entropique donne de très bons résultats sur des maillages en vitesse microscopique raisonnables contrairement aux schémas utilisant la moyenne arithmétique ou la moyenne de Chang et Cooper.

L'avantage de la moyenne entropique sur la moyenne de Chang et Cooper réside aussi dans le fait que l'assise théorique est beaucoup plus importante: en effet, Chang et Cooper n'ont démontré aucune propriété d'existence d'un état d'équilibre et de convergence vers cet équilibre dans les cas linéaire ou non linéaire. Dans l'annexe B, on montrera cependant que, *dans le cas linéaire*, le schéma explicite de Chang et Cooper possède effectivement au plan théorique des propriétés similaires à celles du schéma explicite utilisant la moyenne entropique (voir l'annexe A), le cas non linéaire restant semble-t-il hors de portée.

Enfin, l'on a montré que les résultats obtenus dans le cas semi-discret avec la moyenne entropique pour l'opérateur de collision ion / électron s'appliquent au cas de l'opérateur de collision ion / ion isotrope en vitesse, les résultats numériques montrant aussi l'excellent comportement de ce schéma sur un maillage en vitesse grossier.

Annexe A

Discrétisation de l'équation de Fokker-Planck linéaire en géométrie cartésienne : utilisation de la moyenne entropique

On montre dans cette annexe que le schéma numérique explicite utilisant la *moyenne entropique* appliquée à l'opérateur de Fokker-Planck *linéaire* écrit sous la forme convection-diffusion préserve, sous un certain critère *CFL*, la positivité de la distribution ionique f et converge vers l'équilibre thermodynamique, convergence que nous n'avons pu établir dans le cas de l'opérateur de collision ion / électron (sauf pour le schéma semi-discret) faute de l'obtention d'une stricte minoration *en temps grand* des f_j (voir l'hypothèse (3.35)).

Dans cette annexe (ainsi que dans l'annexe B), on s'est inspiré des démonstrations effectuées dans la référence [15] par C. Buet et par S. Cordier. Dans cette référence, il est montré que l'utilisation de la moyenne harmonique pour définir la valeur de la distribution f aux interfaces du maillage permet d'obtenir l'équivalent des propositions A.1 et A.2 (voir plus loin). Cependant, on a été amené à repenser leurs démonstrations car celles-ci utilisent de manière cruciale le fait que :

- d'une part, l'opérateur de collision de Fokker-Planck linéaire est discrétisé à partir de la forme de Landau ce qui n'est pas le cas pour le schéma proposé dans cette annexe ;

- et que d'autre part, la moyenne harmonique a la bonne propriété suivante :

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \frac{2f_j f_{j+1}}{f_j + f_{j+1}} \implies \frac{\tilde{f}_{j+1/2}}{\min(f_j, f_{j+1})} \leq 2,$$

inégalité que nous ne retrouvons pas avec la moyenne entropique.

A.1 Définition du schéma numérique

Pour montrer ces résultats, on définit donc le schéma numérique totalement explicite

$$\frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = S(f^n)_j \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\begin{aligned} S(f^n)_j = & \\ & \frac{\Omega}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - U_e) \tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - U_e) \tilde{f}_{j-1/2}^n \right] \\ & + \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} (a_j f_{j+1}^n - b_j f_j^n + c_j f_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

où $a_j = c_j = 1$ et $b_j = 2$ sauf aux bords (voir (3.7)) et $\tilde{f}_{1/2} = \tilde{f}_{j_{\max}+1/2} \equiv 0$ (voir (3.8)), $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ étant la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n . Notons que U_e , T_e et Ω sont des constantes telles que $T_e > 0$ et $\Omega > 0$.

On a alors la propriété de conservation de la masse suivante :

Propriété A.1

$$\langle f_j^{n+1} \rangle = \langle f_j^n \rangle .$$

On se reportera au cas de l'opérateur de collision ion / électron pour la preuve de cette propriété.

Notation On pose maintenant

$$\Delta t^n = \Delta t_1^0 \cdot \frac{h_{\min}^n}{h_{\max}^n} \quad \text{où} \quad \Delta t_1^0 = \frac{m}{4\Omega T_e} \cdot \frac{\Delta v^2}{\mathfrak{M}^0},$$

$$\begin{cases} h_{\max}^n = \max_j \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j, \\ h_{\min}^n = \min_j \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j, \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{f^0} = \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e/m}} \exp \left[-\frac{m(v - U_e)^2}{2T_e} \right],$$

$$\mathfrak{M}^0 = \max_j \left(\frac{\mathcal{M}_{f^0, j \pm 1}}{\mathcal{M}_{f^0, j}} \right)$$

et

$$H^n = \langle [f^n \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})]_j \rangle .$$

A.2 Positivité du schéma

Comme dans le cas de l'opérateur de collision ion / électron, on a le lemme suivant :

Lemme A.1 *Lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , l'opérateur $S(f^n)_j$ défini par (A.2) peut s'écrire*

$$S(f^n)_j = \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \left\{ \tilde{f}_{j+1/2}^n [\log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j] \right. \quad (\text{A.3})$$

$$\left. - \tilde{f}_{j-1/2}^n [\log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j - \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j-1}] \right\} .$$

Autrement dit, il y a aussi équivalence au plan discret entre la formulation classique (1.4) et la formulation de Landau (1.5) de l'opérateur de Fokker-Planck linéaire lorsque l'on utilise la moyenne entropique. La démonstration de ce lemme est identique à celle du lemme 3.1.

On établit ensuite la proposition suivante qui permet d'assurer en *temps grand* la stricte minoration des f_j :

Proposition A.1 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma explicite défini par (A.1) et (A.2) vérifie l'inégalité*

$$h_{\min}^n \leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n$$

lorsque

$$\Delta t < \Delta t^n .$$

D'autre part, le pas de temps Δt^n vérifie

$$\Delta t^n \leq \Delta t^{n+1} \leq \Delta t_1^0 .$$

Cette proposition implique donc que

$$\inf_{j,n} f_j^n > 0$$

et permet aussi d'affirmer que le pas de temps minimum ne s'effondre pas.

Preuve de la proposition A.1 En posant $h_j^n = f_j^n / \mathcal{M}_{f^0,j}$ et en utilisant la relation (A.3), on peut écrire que

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \left[\tilde{f}_{j+1/2}^n \log \left(h_{j+1}^n / h_j^n \right) + \tilde{f}_{j-1/2}^n \log \left(h_{j-1}^n / h_j^n \right) \right].$$

Il est donc immédiat que l'on a

$$h_j^n \left[1 + \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}{f_j^n} \log \left(h_{\min}^n / h_j^n \right) \right] \leq h_j^{n+1}$$

et

$$h_j^{n+1} \leq h_j^n \left[1 + \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}{f_j^n} \log \left(h_{\max}^n / h_j^n \right) \right].$$

Supposons que Δt est tel que

$$\forall j : \Delta t \leq \frac{m \Delta v^2}{\Omega T_e} \cdot \frac{h_j^n / h_{\min}^n - 1}{2 h_j^n / h_{\min}^n \cdot \log \left(h_j^n / h_{\min}^n \right)} \cdot \frac{f_j^n}{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}.$$

Alors on obtient que

$$\forall j, h_j^{n+1} \geq \frac{h_j^n + h_{\min}^n}{2} \geq h_{\min}^n.$$

Supposons maintenant que Δt est tel que

$$\forall j, \Delta t \leq \frac{m \Delta v^2}{\Omega T_e} \cdot \frac{f_j^n}{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}.$$

Alors, comme $\forall x > 0 : \log x \leq x - 1$, on obtient facilement que

$$\forall j : h_j^{n+1} \leq h_{\max}^n.$$

D'autre part,

$$\forall x \geq 1 : \frac{x-1}{2x \log x} \leq 1.$$

On peut donc affirmer que

$$\Delta t \leq \frac{m\Delta v^2}{\Omega T_e} \cdot \frac{\min_j \left[\frac{h_j^n/h_{\min}^n - 1}{2h_j^n/h_{\min}^n \cdot \log(h_j^n/h_{\min}^n)} \right]}{\max_j \left(\frac{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}{f_j^n} \right)}$$

↓

$$\forall j : h_{\min}^n \leq h_j^{n+1} \leq h_{\max}^n$$

ce qui assure la positivité de f_j^{n+1} . De plus, on a

$$\frac{f_{j\pm 1}^n}{f_j^n} \leq \frac{\mathcal{M}_{f^0, j\pm 1}}{\mathcal{M}_{f^0, j}} \cdot \frac{h_{\max}^n}{h_{\min}^n} \leq \mathfrak{M}^0 \cdot \frac{h_{\max}^n}{h_{\min}^n}.$$

Donc

$$\max_j \left(\frac{\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n}{f_j^n} \right) \leq \frac{2(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n - 1)}{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n)} \quad (\text{A.4})$$

puisque $\frac{x-1}{\log x}$ est croissante pour $x > 0$. Et en remarquant que $1 \leq h_j^n/h_{\min}^n \leq h_{\max}^n/h_{\min}^n \leq \mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n$ (\mathfrak{M}^0 est forcément ≥ 1) et que $x \mapsto \frac{x-1}{2x \log x}$ est décroissante pour $x \geq 1$, on a finalement

$$\Delta t \leq \frac{m\Delta v^2}{\Omega T_e} \cdot \frac{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n - 1}{2\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n \cdot \log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n)} \cdot \frac{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n)}{2(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n/h_{\min}^n - 1)} = \Delta t^n$$

↓

$$\forall j : h_{\min}^n \leq h_j^{n+1} \leq h_{\max}^n$$

soit encore

$$\Delta t \leq \Delta t^n$$

↓

$$h_{\min}^n \leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n.$$

Il est par ailleurs évident que

$$h_{\min}^n \leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n \implies \Delta t^n \leq \Delta t^{n+1}.$$

□

On a donc montré que le schéma numérique préserve la positivité sous un certain critère *CFL*, qu'il existe h_{\min}^∞ et h_{\max}^∞ limites de h_{\min}^n et de h_{\max}^n lorsque n tend vers $+\infty$. Mais, on n'a pas encore montré que $h_{\min}^\infty = h_{\max}^\infty$, égalité qui impliquerait qu'il existe $C > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_j^n) = C \cdot (\mathcal{M}_{f^0, j})$.

A.3 Convergence vers l'équilibre thermodynamique

La proposition suivante montre la convergence vers l'équilibre thermodynamique :

Proposition A.2 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne entropique de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma explicite défini par (A.1) et (A.2) vérifie l'inégalité entropique*

$$H^{n+1} \leq H^n$$

et converge uniformément vers l'équilibre thermodynamique c'est à dire

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} (f_j^n) = \frac{N^0}{\langle \mathcal{M}_{f^0, j} \rangle} \cdot (\mathcal{M}_{f^0, j})$$

lorsque

$$\Delta t < \Delta t^n$$

et on a alors

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \Delta t^n = \Delta t_1^0.$$

Preuve de la proposition A.2 Comme $\Delta t < \Delta t^n$, on a $f_j^{n+1} > 0$ d'après la proposition A.1 : évaluer H^{n+1} a donc un sens. Et, en utilisant l'inégalité

$$\forall x > 0 : \log(x+1) < x,$$

on établit facilement que

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \sum_j \left[S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j + \Delta t \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \right] \Delta v. \quad (\text{A.5})$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$S(f^n)_j^2 \leq \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} (\tilde{f}_{j+1/2}^n + \tilde{f}_{j-1/2}^n) \cdot \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \left[\tilde{f}_{j+1/2}^n \log \left(h_{j+1}^n / h_j^n \right)^2 + \tilde{f}_{j-1/2}^n \log \left(h_{j-1}^n / h_j^n \right)^2 \right]$$

où on a posé $h_j^n = f_j^n / \mathcal{M}_{f^0, j}$. Puis en utilisant (A.4), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} &\leq \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{2(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n - 1)}{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \\ &\quad \cdot \frac{2\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2}^n \log(h_{j+1}^n / h_j^n)^2. \end{aligned}$$

Or, comme dans le cas de l'opérateur de collision ion / électron (voir la proposition 3.2, relation (3.13)), on établit que

$$\begin{aligned} \sum_j S(f^n)_j \cdot \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j &= \\ - \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2}^n [\log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j]^2 &= \quad (\text{A.6}) \\ - \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \tilde{f}_{j+1/2}^n \log(h_{j+1}^n / h_j^n)^2 &\leq 0. \end{aligned}$$

On peut donc écrire que

$$\sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \leq - \frac{4\Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n - 1}{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \sum_j S(f^n)_j \log\left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}}\right)_j$$

en utilisant l'égalité (A.6) et comme $\frac{x-1}{\log x} \leq \max(x, 1)$ et que $\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n \geq 1$, finalement, on peut écrire

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \left(1 - \frac{4\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n\right) \cdot \sum_j S(f^n)_j \log\left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}}\right)_j \Delta v.$$

Donc lorsque $\Delta t < \Delta t^n$, en utilisant l'inégalité (A.6), on obtient l'inégalité

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t^n}\right) \cdot \sum_j S(f^n)_j \log\left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}}\right)_j \Delta v \leq H^n. \quad (\text{A.7})$$

D'autre part, (H^n) est bornée inférieurement. En effet, on peut écrire que

$$\begin{aligned} H^n &= \sum_j f_j^n \cdot \log(f_j^n) \Delta v - \sum_j f_j^n \cdot \log(\mathcal{M}_{f_j^0}) \Delta v \\ &> \sum_j f_j^n \cdot \log(f_j^n) \Delta v - N^n \max_k \log(\mathcal{M}_{f_k^0}). \end{aligned}$$

Et comme $(\mathcal{M}_{f_j^0})$ est bornée et que $N^n = N^0$, et que d'autre part la fonction

$$x \mapsto x \log x$$

est minorée, on en déduit que

$$\inf_n (H^n) > -\infty.$$

(H^n) est donc une suite décroissante bornée ce qui prouve qu'elle admet une limite $H^\infty > -\infty$. Comme d'après la proposition A.1

$$\inf_n \Delta t^n > 0,$$

on peut choisir Δt tel que

$$\forall n : \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t^n}\right) > 0.$$

Donc, lorsque $\Delta t < \Delta t^n$

$$\exists H^\infty > -\infty / \lim_{t_n \rightarrow +\infty} H^n = H^\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t_n \rightarrow +\infty} \sum_j S(f^n)_j \cdot \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j = 0$$

d'après (A.7). Or, en utilisant la proposition A.1, on obtient que $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est strictement minorée. Donc, d'après (A.6), on en déduit que

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \max_j |\log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j| = 0$$

soit encore que

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} \max_j |(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - (f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j| = 0,$$

limite qui implique qu'il existe nécessairement C tel que

$$\lim_{t_n \rightarrow \infty} (f_j^n) = C \cdot (\mathcal{M}_{f^0, j}).$$

Comme $N^n = N^0$, on a bien-sûr $C = N^0 / \langle \mathcal{M}_{f^0, j} \rangle$. On peut donc affirmer que $h_{\min}^\infty = h_{\max}^\infty = N^0 / \langle \mathcal{M}_{f^0, j} \rangle$ soit encore que $\Delta t^\infty = \Delta t_1^0$. \square

A.4 Remarques

Les deux dernières propositions utilisent de manière cruciale la notion de moyenne entropique car celle-ci permet d'établir une équivalence au plan discret entre la formulation convection-diffusion (1.4) et la formulation de Landau (1.5).

Cependant, lorsque l'on part *directement* de la forme de Landau de l'opérateur de Fokker-Planck linéaire - le schéma numérique étant alors *initialement* donné par

(A.3) -, ces deux dernières propositions sont valables lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{2}$ ou lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{2f_j^n f_{j+1}^n}{f_j^n + f_{j+1}^n}$. Le critère de positivité et de convergence vers l'équilibre thermodynamique devient alors

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{f_j^n + f_{j+1}^n}{2}$$

↓

$$\Delta t < \tilde{\Delta t}^n = \frac{m}{2\Omega T_e} \cdot \frac{(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n - 1)}{(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n + 1) \log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \cdot \frac{\Delta v^2}{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n}$$

et

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{2f_j^n f_{j+1}^n}{f_j^n + f_{j+1}^n}$$

↓

$$\Delta t < \widehat{\Delta t}^n = \frac{m}{8\Omega T_e} \cdot \frac{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n - 1}{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \cdot \frac{\Delta v^2}{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n}$$

(critère déjà établi dans la référence [15] pour la moyenne harmonique) et l'on a aussi

$$\tilde{\Delta t}^n \leq \tilde{\Delta t}^{n+1}$$

et

$$\widehat{\Delta t}^n \leq \widehat{\Delta t}^{n+1}$$

puisque $x \mapsto \frac{x-1}{x(x+1)\log x}$ et $x \mapsto \frac{x-1}{x\log x}$ sont décroissantes.

Dans le cas *linéaire*, la différence entre la moyenne entropique et les moyennes arithmétique et harmonique réside donc uniquement dans la valeur du critère *CFL* lorsque l'on part directement de la forme de Landau ; *ceci est bien-sûr faux lorsque l'on part de la forme convection-diffusion* puisque l'on a l'équivalence entre les formulations convection-diffusion et de Landau que lorsque l'on utilise la moyenne entropique : voir le lemme A.1.

On peut dire par ailleurs que

$$\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n \simeq 1 \implies \tilde{\Delta t}^n \simeq \Delta t^n \text{ et } \widehat{\Delta t}^n \simeq \Delta t^n / 2,$$

et

$$\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n \gg 1 \implies \begin{cases} \tilde{\Delta t}^n \simeq \frac{2}{\log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \Delta t^n \ll \Delta t^n, \\ \widehat{\Delta t}^n \simeq \frac{\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n}{2 \log(\mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n)} \Delta t^n \gg \Delta t^n. \end{cases}$$

Donc, lorsque le système est très éloigné de l'équilibre thermodynamique (i.e. $h_{\max}^n / h_{\min}^n \gg 1$), le critère de stabilité de la moyenne harmonique est le moins contraignant.

Annexe B

Sur le schéma numérique de Chang et Cooper appliqué à l'opérateur de Fokker-Planck linéaire

Dans les chapitres précédents - après avoir introduit la notion de *moyenne entropique* pour définir la distribution ionique aux interfaces du maillage en vitesse -, on a proposé un nouveau schéma numérique conservatif pour la résolution de l'opérateur de collision ion / électron, schéma préservant la positivité de la distribution ionique et de la température électronique, assurant la décroissance de l'entropie sous un certain critère de type *CFL* et préservant l'équilibre thermodynamique.

Cependant, le schéma le plus fréquemment utilisé pour résoudre l'opérateur de collision ion / électron est le schéma de Chang et Cooper (cf. [10], [12] et [13]). Chang et Cooper (cf. [17]) ont en effet construit leur schéma de telle sorte que, dans le cas linéaire, les flux discrets s'annulent lorsque la distribution ionique est égale à la distribution d'équilibre du modèle continu : ce schéma a donc aussi la bonne propriété de préserver l'équilibre thermodynamique lorsque celui-ci est atteint.

Sur des cas tests précis, on a pu montrer que, sur des maillages en vitesse fins, l'utilisation de la moyenne entropique ou de la moyenne de Chang et Cooper donnent des résultats similaires. On a par contre pu mettre en évidence le fait que sur des maillages en vitesse grossiers, l'utilisation de la moyenne entropique assure une précision plus grande que l'utilisation de la moyenne de Chang et Cooper.

Mais, jusqu'à aujourd'hui, la plus grande faiblesse du schéma de Chang et Cooper par rapport au schéma utilisant la moyenne entropique pour la résolution de l'opérateur collision ion / électron résidait dans le fait qu'aucune propriété d'existence d'un état d'équilibre dans le cas non linéaire et de convergence vers cet équilibre dans les cas linéaire et non linéaire n'avait été démontrée.

On se propose donc dans cette annexe de montrer que, *dans le cas linéaire*, le schéma de Chang et Cooper possède effectivement des propriétés théoriques identiques à celles du schéma utilisant la moyenne entropique, propriétés établies dans l'annexe A.

B.1 L'opérateur de collision ion / électron : rappels

Dans cette section, on rappelle la formulation de l'opérateur de collision ion / électron (voir le premier chapitre) et on introduit une forme pour cet opérateur qui n'est ni la forme convection-diffusion, ni la forme de Landau: *la forme de Landau non logarithmique*.

Dans un plasma chaud, l'échange d'énergie entre les ions et les électrons est modélisé par

$$\begin{cases} \partial_t f(t, v) = S(f), \\ \partial_t (\rho \varepsilon_e) = -3\Omega N(T_e - T) \end{cases}$$

avec $\varepsilon_e = \frac{3}{2}N_e T_e$ et

$$\begin{cases} N = \langle f \rangle, \\ \vec{U} = \langle \vec{v} f \rangle / N, \\ \frac{3}{2}T = \langle \frac{m}{2}(\vec{v} - \vec{U})^2 f \rangle / N \end{cases}$$

où $\langle g \rangle \equiv \int g(v) dv$. $f(t, v)$ est la distribution ionique, $\Omega(T_e) = C^{ste}/T_e^{3/2}$ est la fréquence de collision ion / électron et T_e est la température électronique, m étant la masse atomique de l'ion. $S(f)$ décrit les collisions entre les ions et les électrons et est défini par (cf. [8], [25] ou [28])

$$S(f)(v) = \Omega \nabla_v \cdot \left[(\vec{v} - \vec{U}_e) f(v) + \frac{T_e}{m} \nabla_v f \right]. \quad (\text{B.1})$$

$S(f)$ est ci-dessus écrit sous la *forme convection-diffusion*. On ferme ce système en y ajoutant les relations de quasi-neutralité qui, dans le cas mono-espèce, se traduisent par

$$N_e = ZN \quad \text{et} \quad \vec{U}_e = \langle \vec{v} f(v) \rangle / N$$

où Z est le numéro atomique de l'ion.

On peut réécrire $S(f)$ sous la *forme dite de Landau* à savoir

$$S(f) = \Omega \frac{T_e}{m} \nabla_v \cdot [f \nabla_v \log(f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e})]$$

avec

$$\mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e}(v) = \frac{N}{(2\pi T_e / m)^{3/2}} \exp \left[-\frac{m(\vec{v} - \vec{U}_e)^2}{2T_e} \right].$$

Il existe d'autre part une troisième forme définie par

$$S(f) = \Omega \frac{T_e}{m} \nabla_v \cdot [\mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e} \nabla_v (f / \mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e})] \quad (\text{B.2})$$

que l'on nommera *forme de Landau non logarithmique*.

Lorsque Ω , \vec{U}_e et T_e sont imposés constants au cours du temps, $S(f)$ devient linéaire : on parlera alors de *l'opérateur de collision de Fokker-Planck linéaire* par opposition à l'opérateur de collision ion / électron qui est non linéaire, Ω , \vec{U}_e et T_e dépendant directement ou indirectement de la distribution f .

B.2 Discrétisation de l'équation de Fokker-Planck linéaire en géométrie cartésienne : utilisation du schéma de Chang et Cooper

Dans un article maintenant classique (cf. [17]), Chang et Cooper ont proposé une méthode de discrétisation explicite ou implicite d'opérateurs du type de l'opérateur de Fokker-Planck linéaire ou non linéaire présenté plus haut. Le schéma proposé a été construit de telle sorte que le flux *discrétisé* $(\vec{v} - \vec{U}_e) f(v) + \frac{T_e}{m} \nabla_v f$ s'annule exactement dans le cas linéaire lorsque $f = \mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e}$ ce qui confère au schéma la propriété de conserver l'équilibre thermodynamique lorsque celui-ci est atteint. *Cependant, Chang et Cooper n'ont montré aucune propriété de convergence vers l'équilibre thermodynamique défini par $f = \mathcal{M}_{N, \vec{U}_e, T_e}$ (pour le modèle continu) ni même l'existence dans le cas non linéaire de cet équilibre pour le modèle discret* (l'existence de l'état d'équilibre est trivial dans le cas linéaire).

Dans cette partie, on se propose de montrer *dans le cas linéaire* que le schéma numérique de Chang et Cooper converge effectivement vers l'équilibre thermodynamique sous un certain critère de type *CFL*. Par un souci de clarté, tout ce qui suit maintenant est écrit pour un espace cartésien où la vitesse microscopique a une seule dimension, la généralisation au cas multi-dimensionnel *cartésien* étant immédiate. On remplacera donc $(2\pi T_e/m)^{3/2}$ par $\sqrt{2\pi T_e/m}$.

L'espace des vitesses est uniformément discrétisé par la suite (v_j) où $j \in \{1, \dots, j_{\max}\}$, l'épaisseur des mailles étant notée Δv . On pose d'autre part

$$\langle g \rangle \equiv \sum_j g(v_j) \Delta v.$$

B.2.1 Le schéma explicite de Chang et Cooper

Le schéma explicite de Chang et Cooper est défini par

$$\frac{1}{\Delta t}(f_j^{n+1} - f_j^n) = S(f^n)_j \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\begin{aligned} S(f^n)_j = & \frac{\Omega}{\Delta v} \left[(v_{j+1/2} - U_e) \tilde{f}_{j+1/2}^n - (v_{j-1/2} - U_e) \tilde{f}_{j-1/2}^n \right] \\ & + \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} (a_j f_{j+1}^n - b_j f_j^n + c_j f_{j-1}^n) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

où $a_j = c_j = 1$ et $b_j = 2$ sauf aux bords (voir ci-dessous), $U_e, T_e > 0$ et $\Omega > 0$ étant des constantes. $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est une approximation de $f(t = t_n, v = v_{j+1/2})$ définie à l'aide de la définition suivante (cf. [17]):

Définition *On appellera moyenne de Chang et Cooper des quantités f_j et f_{j+1} la valeur $\tilde{f}_{j+1/2}$ définie par*

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \delta_{j+1/2} f_j + (1 - \delta_{j+1/2}) f_{j+1}$$

avec

$$\delta_{j+1/2} = \frac{1}{w_{j+1/2}} - \frac{1}{\exp(w_{j+1/2}) - 1}$$

où

$$w_{j+1/2} = \frac{m \Delta v}{T_e} (v_{j+1/2} - U_e).$$

Conditions aux limites et conservation de la masse Pour que le schéma soit conservatif en masse, on doit imposer aux deux extrémités du domaine en vitesse une condition aux limites de type Robin à savoir

$$(v - U_e)f + \frac{T_e}{m}\partial_v f = 0$$

ce qui revient à prendre pour le schéma numérique

$$\begin{cases} a_j = 1 \text{ si } j \neq j_{\max}, \\ b_j = 2 \text{ si } j \in \{2, \dots, j_{\max} - 1\}, \\ c_j = 1 \text{ si } j \neq 1, \\ b_1 = b_{j_{\max}} = 1 \text{ et } a_{j_{\max}} = c_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

et

$$\tilde{f}_{1/2} = \tilde{f}_{j_{\max}+1/2} \equiv 0. \quad (\text{B.6})$$

On a alors la propriété de conservation suivante :

Propriété B.1

$$\langle f_j^{n+1} \rangle = \langle f_j^n \rangle .$$

La démonstration de cette propriété a été établie dans le cadre du schéma utilisant la moyenne entropique : voir la propriété 3.1.

Notation On pose maintenant

$$\Delta t^n = \Delta t_1^0 \cdot \frac{h_{\min}^n}{h_{\max}^n} \quad \text{où} \quad \Delta t_1^0 = \frac{m}{4\Omega T_e} \cdot \frac{\Delta v^2}{\mathfrak{M}^0},$$

$$\begin{cases} h_{\max}^n = \max_j \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j, \\ h_{\min}^n = \min_j \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j, \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{f^0} = \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e/m}} \exp\left[-\frac{m(v - U_e)^2}{2T_e}\right],$$

$$\mathfrak{M}^0 = \max_j \left(\frac{\mathcal{M}_{f^0, j\pm 1}}{\mathcal{M}_{f^0, j}} \right)$$

et

$$H^n = \langle [f^n \log (f^n / \mathcal{M}_{f^0})]_j \rangle .$$

Enfin, on note

$$\widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} = \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} \mathcal{M}_{f^0, j}}{\widetilde{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2}}$$

où $\widetilde{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2}$ est la *moyenne entropique* de $\mathcal{M}_{f^0, j+1}$ et de $\mathcal{M}_{f^0, j}$ c'est à dire

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} = \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} .$$

B.2.2 Équivalence entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau non logarithmique du schéma de Chang et Cooper

On établit la propriété ainsi que le lemme suivants :

Propriété B.2 Lorsque $\widetilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne de Chang et Cooper de f_j^n et de f_{j+1}^n , on peut réécrire $\widetilde{f}_{j+1/2}^n$ de la façon suivante

$$\begin{aligned} \widetilde{f}_{j+1/2}^n &= \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, T_e, j}} \quad (\text{B.7}) \\ &+ \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0, j}} - \frac{f_{j+1}^n}{\mathcal{M}_{f^0, j+1}} \right) \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} \mathcal{M}_{f^0, j}}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}} . \end{aligned}$$

Lemme B.1 Lorsque $\widetilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne de Chang et Cooper de f_j^n et de f_{j+1}^n , l'opérateur $S(f^n)_j$ défini par (B.4) peut s'écrire

$$\begin{aligned} S(f^n)_j &= \\ &\frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \left\{ \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} [(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - (f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j] \right. \\ &\quad \left. - \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j-1/2} [(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j - (f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j-1}] \right\} \quad (\text{B.8}) \end{aligned}$$

où les conditions aux limites (B.5) et (B.6) sont remplacées par les conditions aux limites

$$f_0^n \equiv f_1^n \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, 0}}{\mathcal{M}_{f^0, 1}} \quad \text{et} \quad f_{j_{\max}+1}^n \equiv f_{j_{\max}}^n \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, j_{\max}+1}}{\mathcal{M}_{f^0, j_{\max}}} . \quad (\text{B.9})$$

Autrement dit, il y a équivalence au plan discret entre la formulation classique (B.1) et la formulation de Landau non logarithmique (B.2) de l'opérateur de Fokker-Planck linéaire lorsque l'on utilise la moyenne de Chang et Cooper.

Preuve de la propriété B.2 On vérifie facilement que

$$w_{j+1/2} \equiv \frac{m\Delta v}{T_e}(v_{j+1/2} - U_e) = -[(\log \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - (\log \mathcal{M}_{f^0})_j]. \quad (\text{B.10})$$

Donc

$$\delta_{j+1/2} = -\frac{1}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} + \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1}}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}}.$$

D'où

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} + \mathcal{M}_{f^0, T_e, j+1} \cdot \frac{f_j^n - f_{j+1}^n}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}} + f_{j+1}^n$$

soit encore

$$\tilde{f}_{j+1/2}^n = \frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} + \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0, j}} - \frac{f_{j+1}^n}{\mathcal{M}_{f^0, j+1}} \right) \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} \mathcal{M}_{f^0, j}}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}}.$$

□

Preuve du lemme B.1 En utilisant (B.7), on obtient que pour $j \notin \{1, j_{\max}\}$

$$\begin{aligned} S(f^n)_j &= \frac{\Omega}{\Delta v} \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0, j}} - \frac{f_{j+1}^n}{\mathcal{M}_{f^0, j+1}} \right) \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} \mathcal{M}_{f^0, j}}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}} (v_{j+1/2} - U_e) \\ &\quad - \frac{\Omega}{\Delta v} \left(\frac{f_{j-1}^n}{\mathcal{M}_{f^0, j-1}} - \frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0, j}} \right) \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0, j} \mathcal{M}_{f^0, j-1}}{\mathcal{M}_{f^0, j} - \mathcal{M}_{f^0, j-1}} (v_{j-1/2} - U_e) \\ &+ \frac{\Omega}{\Delta v} \left[\frac{f_{j+1}^n - f_j^n}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} (v_{j+1/2} - U_e) - \frac{f_j^n - f_{j-1}^n}{\log \mathcal{M}_{f^0, j} - \log \mathcal{M}_{f^0, j-1}} (v_{j-1/2} - U_e) \right] \\ &\quad + \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n). \end{aligned}$$

Or, en tenant compte de (B.10), on peut écrire que

$$\frac{\mathcal{M}_{f^0, j+1} \mathcal{M}_{f^0, j}}{\mathcal{M}_{f^0, j+1} - \mathcal{M}_{f^0, j}} (v_{j+1/2} - U_e) = -\frac{T_e}{m\Delta v} \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2}$$

et que

$$\frac{(v_{j+1/2} - U_e)}{\log \mathcal{M}_{f^0, j+1} - \log \mathcal{M}_{f^0, j}} = -\frac{T_e}{m\Delta v}.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
S(f^n)_j &= \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left[\left(\frac{f_{j+1}^n}{\mathcal{M}_{f^0,j+1}} - \frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0,j}} \right) \cdot \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{f_j^n}{\mathcal{M}_{f^0,j}} - \frac{f_{j-1}^n}{\mathcal{M}_{f^0,j-1}} \right) \cdot \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2} \right] \\
&\quad - \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n) \\
&\quad + \frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} (f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n)
\end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned}
S(f^n)_j &= \\
&\frac{\Omega T_e}{m\Delta v^2} \left\{ \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} [(f^n/\mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - (f^n/\mathcal{M}_{f^0})_j] \right. \\
&\quad \left. - \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2} [(f^n/\mathcal{M}_{f^0})_j - (f^n/\mathcal{M}_{f^0})_{j-1}] \right\}.
\end{aligned}$$

Si $j \in \{1, j_{\max}\}$, on vérifie facilement que l'égalité (B.8) reste vraie lorsque

$$f_0^n \equiv f_1^n \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0,0}}{\mathcal{M}_{f^0,1}} \quad \text{et} \quad f_{j_{\max}+1}^n \equiv f_{j_{\max}}^n \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0,j_{\max}+1}}{\mathcal{M}_{f^0,j_{\max}}}.$$

□

On notera que les conditions aux limites (B.9) traduisent au plan discret la condition aux limites

$$\partial_v(f/\mathcal{M}_{f^0}) = 0$$

sur la frontière du domaine des vitesses, condition aux limites qui correspond bien, en continu, à la condition aux limites de type Robin citée plus haut.

B.3 Positivité du schéma

On établit ensuite la proposition suivante :

Proposition B.1 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne de Chang et Cooper de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma explicite défini par (B.3) et (B.4) vérifie l'inégalité*

$$h_{\min}^n \leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n$$

lorsque

$$\Delta t < 2\Delta t_0^1.$$

D'autre part, le pas de temps Δt^n vérifie

$$\Delta t^n \leq \Delta t^{n+1} \leq \Delta t_1^0.$$

Cette proposition implique donc que

$$\inf_{j,n} f_j^n > 0$$

et permet aussi d'affirmer que le pas de temps minimum ne s'effondre pas.

Preuve de la proposition B.1 En posant $h_j^n = f_j^n / \mathcal{M}_{f^0,j}$ et en utilisant le lemme B.1, on peut écrire que

$$f_j^{n+1} = f_j^n + \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \left[\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} (h_{j+1}^n - h_j^n) + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2} (h_{j-1}^n - h_j^n) \right].$$

Il est donc immédiat que l'on a

$$h_j^n - \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}}{\mathcal{M}_{f^0,j}} (h_j^n - h_{\min}^n) \leq h_j^{n+1}$$

et

$$h_j^{n+1} \leq h_j^n + \frac{\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}}{\mathcal{M}_{f^0,j}} (h_{\max}^n - h_j^n).$$

Supposons que Δt est tel que

$$\forall j, \Delta t \leq \frac{m \Delta v^2}{\Omega T_e} \cdot \frac{\mathcal{M}_{f^0,j}}{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}}.$$

Alors on obtient que

$$\forall j : h_{\min}^n \leq h_j^{n+1} \leq h_{\max}^n.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}}{\mathcal{M}_{f^0,j}} = \frac{\log(\mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j+1})}{\mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j+1} - 1} + \frac{\log(\mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j-1})}{\mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j-1} - 1}.$$

Donc

$$\frac{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}}{\mathcal{M}_{f^0,j}} \leq \frac{1}{\min(1, \mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j+1})} + \frac{1}{\min(1, \mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j-1})}$$

puisque $\forall x \geq 0 : \min(1, x) \leq (x - 1) / \log x$. Or

$$\begin{aligned} \frac{1}{\min(1, \mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j+1})} + \frac{1}{\min(1, \mathcal{M}_{f^0,j} / \mathcal{M}_{f^0,j-1})} &\leq \frac{2}{\min_k(\mathcal{M}_{f^0,k\pm 1} / \mathcal{M}_{f^0,k})} \\ &= 2 \max_k(\mathcal{M}_{f^0,k\pm 1} / \mathcal{M}_{f^0,k}) \\ &= 2\mathfrak{M}^0. \end{aligned}$$

Finalement, on peut donc écrire que

$$\forall j : \frac{1}{2\mathfrak{M}^0} \leq \frac{\mathcal{M}_{f^0,j}}{\widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0,j-1/2}} \quad (\text{B.11})$$

ce qui permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \Delta t &\leq 2\Delta t_1^0 \\ &\Downarrow \\ h_{\min}^n &\leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n. \end{aligned}$$

Il est par ailleurs évident que

$$h_{\min}^n \leq h_{\min}^{n+1} \leq h_{\max}^{n+1} \leq h_{\max}^n \implies \Delta t^n \leq \Delta t^{n+1}.$$

□

On a donc montré que le schéma numérique préserve la positivité sous un certain critère *CFL*, qu'il existe h_{\min}^∞ et h_{\max}^∞ limites de h_{\min}^n et de h_{\max}^n lorsque n tend vers $+\infty$. Mais, on n'a pas encore montré que $h_{\min}^\infty = h_{\max}^\infty$, égalité qui impliquerait qu'il existe $C > 0$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} (f_j^n) = C \cdot (\mathcal{M}_{f^0,j})$.

B.4 Convergence vers l'équilibre thermodynamique

La proposition suivante montre la convergence vers l'équilibre thermodynamique :

Proposition B.2 *Pour toute condition initiale strictement positive, lorsque $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ est la moyenne de Chang et Cooper de f_j^n et de f_{j+1}^n , le schéma explicite défini par (B.3) et (B.4) vérifie l'inégalité entropique*

$$H^{n+1} \leq H^n$$

et converge uniformément vers l'équilibre thermodynamique c'est à dire

$$\lim_{t^n \rightarrow +\infty} (f_j^n) = \frac{N^0}{\langle \mathcal{M}_{f^0,j} \rangle} \cdot (\mathcal{M}_{f^0,j})$$

lorsque

$$\Delta t < \Delta t^n$$

et on a alors

$$\lim_{t^n \rightarrow +\infty} \Delta t^n = \Delta t_1^0.$$

Preuve de la proposition B.2 Comme $\Delta t < \Delta t_1^0$, on a $f_j^{n+1} > 0$ d'après la proposition B.1 : évaluer H^{n+1} a donc un sens. Et, en utilisant l'inégalité

$$\forall x > 0 : \log(x+1) < x,$$

on établit facilement que

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \sum_j \left[S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j + \Delta t \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \right] \Delta v. \quad (\text{B.12})$$

D'autre part, en appliquant l'inégalité de Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} S(f^n)_j^2 &\leq \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \left(\widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j-1/2} \right) \cdot \\ &\quad \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \left[\widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} \left(h_{j+1}^n - h_j^n \right)^2 + \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j-1/2} \left(h_{j-1}^n - h_j^n \right)^2 \right] \end{aligned}$$

où on a posé $h_j^n = f_j^n / \mathcal{M}_{f^0, j}$. Puis en utilisant (B.11), on obtient

$$\sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \leq \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{2\mathfrak{M}^0}{h_{\min}^n} \cdot \frac{2\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} \left(h_{j+1}^n - h_j^n \right)^2.$$

Et comme

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : \frac{x-y}{\log(x/y)} \leq \max(x, y),$$

on a donc

$$\sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \leq \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{2\mathfrak{M}^0}{h_{\min}^n} \cdot \frac{2\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} \left(h_{j+1}^n - h_j^n \right) \cdot \left(\log h_{j+1}^n - \log h_j^n \right) h_{\max}^n.$$

Or on a

$$\begin{aligned} &\sum_j S(f^n)_j \cdot \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j = \\ &\quad \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} \left[(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j+1} - (f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j \right] \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j \\ &\quad - \frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j-1/2} \left[(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j - (f^n / \mathcal{M}_{f^0})_{j-1} \right] \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j \end{aligned}$$

soit encore

$$\sum_j S(f^n)_j \cdot \log(f^n / \mathcal{M}_{f^0})_j = \quad (\text{B.13})$$

$$-\frac{\Omega T_e}{m \Delta v^2} \sum_j \widehat{\mathcal{M}}_{f^0, j+1/2} (h_{j+1} - h_j) \cdot (\log h_{j+1}^n - \log h_j^n) \leq 0$$

du fait de la convexité de $x \mapsto \log x$. On peut donc écrire que

$$\sum_j \frac{S(f^n)_j^2}{f_j^n} \leq -\frac{4\Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \frac{h_{\max}^n}{h_{\min}^n} \mathfrak{M}^0 \sum_j S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j.$$

Finalement, on obtient

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \left(1 - \frac{4\Delta t \Omega T_e}{m \Delta v^2} \cdot \mathfrak{M}^0 h_{\max}^n / h_{\min}^n \right) \cdot \sum_j S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j \Delta v.$$

Donc lorsque $\Delta t < \Delta t^n$, en utilisant l'inégalité (B.13), on obtient l'inégalité

$$H^{n+1} \leq H^n + \Delta t \left(1 - \frac{\Delta t}{\Delta t^n} \right) \cdot \sum_j S(f^n)_j \log \left(\frac{f^n}{\mathcal{M}_{f^0}} \right)_j \Delta v \leq H^n. \quad (\text{B.14})$$

La fin de la démonstration est maintenant similaire à la fin de la démonstration de la proposition A.2. \square

B.5 Utilisation du schéma de Chang et Cooper dans le cas des collisions ion / électron

Ω et T_e ne sont plus des constantes. Des résultats similaires à ceux obtenus avec la moyenne entropique semblent alors difficiles à obtenir du fait de la dépendance de $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ en \mathcal{M}_{f^n, T_e^n} qui n'est pas constant. On doit en effet remplacer \mathcal{M}_{f^0} par

$$\mathcal{M}_{f^n, T_e^n} \equiv \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e^n / m}} \exp \left[-\frac{m(v - \tilde{U}^n)^2}{2T_e^n} \right] \quad (\text{B.15})$$

où

$$\tilde{U}^n = \sum \tilde{f}_{j+1/2}^n v_{j+1/2} \Delta v / \sum \tilde{f}_{j+1/2}^n \Delta v \quad (\text{B.16})$$

pour avoir la conservation de la quantité de mouvement mais aussi pour qu'il y ait encore l'équivalence entre la formulation convection-diffusion et la formulation

de Landau non logarithmique, équivalence qui est nécessaire pour pouvoir avoir une chance de vérifier la décroissance de l'entropie sous un critère *CFL* ad hoc.

Or, les relations (B.15) et (B.16) couplées à la définition de la moyenne de Chang et Cooper montrent que l'on doit alors résoudre un système *fortement non linéaire* en $\tilde{f}_{j+1/2}^n$ ce qui complique énormément la méthode. On n'est de plus nullement assuré de l'existence d'une solution.

Dans la pratique, \mathcal{M}_{f^n, T_e^n} est en fait simplement définie par

$$\mathcal{M}_{f^n, T_e^n} \equiv \frac{N^0}{\sqrt{2\pi T_e^n/m}} \exp \left[-\frac{m(v - U^0)^2}{2T_e^n} \right]$$

ce qui sous-entend que le problème de la résolution du système non linéaire est oublié.

Notons que le schéma reste conservatif en masse, en quantité de mouvement et en énergie. Par contre, *contrairement au schéma utilisant la moyenne entropique*, on n'a plus l'équivalence entre la formulation convection-diffusion et la formulation de Landau non logarithmique : il est alors impossible de démontrer, comme cela a été fait dans les chapitres précédents, la décroissance de l'entropie. D'autre part, l'existence d'un état d'équilibre thermodynamique - que le schéma soit totalement explicite ou semi-implicite - n'est pas du tout assurée ce qui, a fortiori, empêche de montrer la conservation de l'état d'équilibre. On peut à ce sujet remarquer que la solution d'équilibre f^∞ du schéma utilisant la moyenne entropique n'est pas une solution d'équilibre du schéma de Chang et Cooper.

Cependant, on constate numériquement que l'entropie décroît effectivement et que l'on converge bien vers un état d'équilibre maxwellien pour ce schéma de Chang et Cooper, et ceci même sur un maillage en vitesse grossier : voir le cinquième chapitre de cette partie.

B.6 Conclusion

On a donc pu montrer que, *dans le cas linéaire*, le schéma de Chang et Cooper converge vers l'équilibre thermodynamique sous un certain critère *CFL*. Il est d'ailleurs remarquable que le critère *CFL* obtenu ici soit identique au critère *CFL* obtenu avec le schéma utilisant la moyenne entropique (voir l'annexe A).

On a par ailleurs expliqué pourquoi une démonstration rigoureuse de l'existence d'un état d'équilibre et de la convergence vers cet équilibre pour le schéma de

Chang et Cooper appliqué au cas non linéaire semble hors de portée.

On peut donc appuyer à nouveau sur le fait que l'avantage du schéma utilisant la *moyenne entropique* - outre sa plus grande précision - tient en ce que des résultats théoriques précis ont pu être obtenus dans le cas *non linéaire*.

Notons que ces résultats théoriques expliquent sans doute pourquoi l'utilisation de la moyenne entropique donne de bons résultats sur des maillages réalistes pour des cas tests de type *Fusion par Confinement Inertiel* contrairement aux schémas utilisant la moyenne arithmétique ou la moyenne de Chang et Cooper : on consultera sur ce sujet le dernier chapitre de la deuxième partie.

Annexe C

Sur un modèle cinétique multi-espèce à un degré de liberté

Dans cette annexe, on construit un modèle cinétique multi-espèce à un degré de liberté de type Boltzmann dont la limite fluide formelle sont les équations d'Euler classiques monodimensionnelles planes pour un plasma multi-espèce. Il est à noter que - mise à part peut-être la proposition C.6 - cette annexe est indépendante de ce qui a été traité dans cette première partie jusqu'à maintenant.

L'intérêt de ce modèle est que les lois d'échange de quantité de mouvement et d'énergie macroscopiques d'une espèce à une autre sont identiques à celles du cas réel décrit dans [29]. Mais surtout, l'on montre formellement que, dans le cas des collisions ion / électron et lorsque la section efficace est maxwellienne (i.e. $\sigma = C^{ste}/|v-v'|$), un développement asymptotique au second ordre de l'opérateur de collision ainsi défini correspond à l'opérateur de collision de Fokker-Planck ion / électron à un degré de liberté (voir la proposition C.6).

On retrouve ainsi un résultat comparable à celui établi par R. Sentis (cf. [34]). Dans cette référence, il est en effet établi qu'il est possible de trouver une équivalence en un certain sens entre l'opérateur de Boltzmann classique exprimé avec la section efficace coulombienne (i.e. $\sigma = C^{ste}/|\vec{v} - \vec{v}'|^3$) et l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron, résultat qui justifie l'utilisation de méthodes de Monte-Carlo pour la simulation des collisions ion / électron, méthodes parfois utilisées (cf. [22]).

Dans notre cas, on peut donc espérer construire une nouvelle méthode de type Monte-Carlo pour résoudre l'opérateur de collision ion / électron exact c'est à dire exprimé avec trois degrés de liberté *mais écrit en géométrie cartésienne* puisque celui-ci est alors la somme de trois opérateurs de Fokker-Planck ion / électron à

un degré de liberté (un opérateur dans chaque direction) : on pourra procéder par exemple par la méthode des directions alternées (simulation de type Monte-Carlo pour la direction v_x , puis pour la direction v_y et enfin pour la direction v_z).

Notons que [25] ont montré par un développement asymptotique que l'opérateur de collision ion / électron peut aussi être retrouvé à partir de l'opérateur de Fokker-Planck de type (1.2).

C.1 Établissement d'un modèle cinétique multi-espèce à un degré de liberté

On considère ici un plasma cinétique classique dont la distribution évolue dans un espace des phases à deux dimensions à cause de la phase de transport mais aussi à cause du champ électrique self-consistant (pas de champ extérieur) et des collisions avec le reste de la population de particules chargées. L'équation cinétique est donc la suivante

$$\partial_t f_\alpha + v \partial_x f_\alpha + \frac{Z_\alpha}{m_\alpha} E(x, t) \partial_v f_\alpha = C_{\alpha\alpha}(f_\alpha) + \sum_{\beta \neq \alpha} C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \quad (\text{C.1})$$

avec

$$\partial_x E = e^2 \sum_{\beta} Z_{\beta} N_{\beta}$$

(équation de Gauss), E , N_α , Z_α et m_α étant respectivement le champ électrique self-consistant (multiplié par la charge élémentaire e), la densité, le numéro et la masse atomique de l'espèce α .

Dans les cas réalistes, ce sont les interactions coulombiennes qui déterminent la forme de l'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}$: on obtient alors l'opérateur de Fokker-Planck (voir la première partie).

C.1.1 L'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$)

Comme on ne dispose que d'un seul degré de liberté pour la vitesse microscopique, l'opérateur de collision ne peut être que différent de l'opérateur de Fokker-Planck. L'opérateur de collision proposé ici est un opérateur de collision de type Boltzmann *avec une cinématique des collisions monodimensionnelle* qui conserve la quantité de mouvement et la quantité d'énergie (voir la troisième partie pour une description précise de l'opérateur de collision de Boltzmann exact).

La proposition qui suit montre que l'opérateur de collision proposé possède les mêmes propriétés que l'opérateur de Fokker-Planck multi-espèce (cf. [29]) pour ce qui est de l'échange de quantité de mouvement et d'énergie entre les particules collisionnantes :

Proposition C.1 *Soit $\alpha \neq \beta$ et $L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}_*^+$. Alors, l'opérateur de collision*

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \tag{C.2}$$

$$L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^2} [f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)] |v_\beta - v_\alpha| \sigma_{\alpha\beta}(|v_\beta - v_\alpha|) dv_\beta \mu_\chi d\chi$$

muni de la cinématique monodimensionnelle

$$\left\{ \begin{array}{l} v'_\alpha = v_g - \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} \chi \cdot |v_\beta - v_\alpha|, \\ v'_\beta = v_g + \frac{\mu_{\alpha\beta}}{m_\beta} \chi \cdot |v_\beta - v_\alpha|, \\ v_g = \frac{m_\alpha v_\alpha + m_\beta v_\beta}{m_\alpha + m_\beta}, \\ \mu_\chi = \frac{1}{2} [\delta_{-1}(\chi) + \delta_1(\chi)], \\ \chi \in \{-1, 1\} \end{array} \right. \tag{C.3}$$

vérifie

$$\langle C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle = \langle C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle = 0, \tag{C.4}$$

$$\langle m_\alpha v_\alpha \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle + \langle m_\beta v_\beta \cdot C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle = 0 \tag{C.5}$$

et

$$\langle m_\alpha v_\alpha^2 \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle + \langle m_\beta v_\beta^2 \cdot C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle = 0 \tag{C.6}$$

où l'on a posé

$$\langle g \rangle \equiv \int_{\mathbb{R}^3} g(v_\alpha, v_\beta, \chi) dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi,$$

$\sigma_{\alpha\beta}(|v_\beta - v_\alpha|)$ étant la section efficace de collision et δ_x la distribution de Dirac centrée en x .

Posons

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{\alpha\beta} = \langle m_\alpha v_\alpha \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle, \\ Q_{\alpha\beta} = \langle \frac{1}{2} m_\alpha (v_\alpha - U_\alpha)^2 \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle. \end{array} \right. \tag{C.7}$$

$R_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$ correspondent respectivement aux échanges d'impulsion et d'énergie interne dûs aux collisions entre les particules α et les particules β .

Du fait des propriétés (C.4), (C.5) et (C.6), on peut donc écrire que

$$R_{\alpha\alpha} = 0, \quad (\text{C.8})$$

$$Q_{\alpha\alpha} = 0, \quad (\text{C.9})$$

$$R_{\alpha\beta} + R_{\beta\alpha} = 0, \quad (\text{C.10})$$

$$Q_{\alpha\beta} + U_\alpha R_{\alpha\beta} + Q_{\beta\alpha} + U_\beta R_{\beta\alpha} = 0, \quad (\text{C.11})$$

relations qui traduisent la conservation de l'impulsion et de l'énergie au niveau macroscopique lors des chocs élastiques entre les particules d'une même espèce ou d'espèces différentes.

On a d'autre part le théorème H (incomplet) suivant :

Proposition C.2 (Théorème H) *L'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta)$ défini par (C.2) vérifie l'inégalité*

$$\Delta \equiv \langle \log(f_\alpha) \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle + \langle \log(f_\beta) \cdot C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle \leq 0. \quad (\text{C.12})$$

Remarque sur la proposition C.2 Il faut souligner ici que contrairement à l'opérateur de Boltzmann classique ou à l'opérateur de Fokker-Planck, on ne peut dire que

$$\Delta = 0 \implies \exists (N_\alpha, N_\beta, T, U) / f_k(v) = N_k \sqrt{\frac{m_k}{2\pi T}} \exp \left[-\frac{m_k(v-U)^2}{2T} \right] \quad (\text{C.13})$$

où $k \in \{\alpha, \beta\}$. On peut seulement affirmer que $f_k(v) = N_k \sqrt{\frac{m_k}{2\pi T}} \exp \left[-\frac{m_k(v-U)^2}{2T} \right]$ pour $k \in \{\alpha, \beta\}$ est une solution stationnaire du système

$$\begin{cases} \partial_t f_\alpha = C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta), \\ \partial_t f_\beta = C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha). \end{cases}$$

Il semble en effet délicat d'établir que les maxwelliennes sont les uniques états d'équilibre de ce système; notons que ce n'est d'ailleurs pas le cas lorsque les

masses des particules α et β sont identiques. La difficulté voire l'impossibilité d'établir ce résultat d'unicité tient au fait que la cinématique des collisions est ici monodimensionnelle. Par contre, si l'on tient compte d'une cinématique des collisions classique c'est à dire tridimensionnelle, il est aisé d'étendre la démonstration de B. Perthame (cf. [35] : voir la proposition 12.5) au cas multi-espèce; l'extension de la démonstration de C. Cercignani (cf. [37] p. 74-78) semble par contre plus difficile à obtenir.

Il est cependant possible d'établir la proposition suivante pour l'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}$ sans hypothèse particulière sur la section efficace $\sigma_{\alpha\beta}$, proposition qui permet d'affirmer, contrairement à la proposition C.2, que *si la distribution des particules β est maxwellienne*, alors le système sera à l'équilibre si et seulement si

$$f_k(v) = N_k \sqrt{\frac{m_k}{2\pi T}} \exp \left[-\frac{m_k(v-U)^2}{2T} \right]$$

pour $k \in \{\alpha, \beta\}$. On établit donc la proposition suivante :

Proposition C.3 *Soit f_α solution de*

$$\partial_t f_\alpha = C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta})$$

où \mathcal{M}_{f_β} est définie par

$$\mathcal{M}_{f_\beta} = N_\beta \sqrt{\frac{m_\beta}{2\pi T_\beta}} \exp \left[-\frac{m_\beta(v-U_\beta)^2}{2T_\beta} \right] \quad (\text{C.14})$$

et posons

$$\mathcal{M}_\alpha^\beta(v) = N_\alpha \sqrt{\frac{m_\alpha}{2\pi T_\beta}} \exp \left[-\frac{m_\alpha(v-U_\beta)^2}{2T_\beta} \right].$$

Alors, l'inégalité

$$\Delta_{\alpha\beta} \equiv \left\langle \log \left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta} \right) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \right\rangle \leq 0$$

est vérifiée et on a

$$\Delta_{\alpha\beta} = 0 \implies f_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^\beta.$$

Si de plus $\partial_t U_\beta = 0$ et $\partial_t T_\beta = 0$, l'inégalité

$$\partial_t \left\langle f_\alpha \log \left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta} \right) \right\rangle \leq 0$$

est aussi vérifiée.

On peut donc définir l'entropie macroscopique $H_\alpha^\beta = \langle f_\alpha \log \left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta} \right) \rangle$ des particules α évoluant dans le fond stationnaire et à l'équilibre thermodynamique constitué par les particules β .

Preuve de la proposition C.1 ◦ On montre d'abord que

$$dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi = dv'_\alpha dv'_\beta \mu_{\chi'} d\chi' \quad (\text{C.15})$$

avec $\chi' = v_r/|v_r|$ et $v_r = v_\beta - v_\alpha$.

On établit aisément que $dv_\alpha dv_\beta = dv_g dv_r$ et que $dv_r = d|v_r| \mu_{\chi'} d\chi'$. Donc

$$dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi = dv_g d|v_r| \mu_\chi d\chi \mu_{\chi'} d\chi'.$$

De même, on a

$$dv'_\alpha dv'_\beta \mu_{\chi'} d\chi' = dv'_g d|v'_r| \mu_{\chi'} d\chi' \mu_\chi d\chi.$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $v_g = v'_g$ et que $|v_r| = |v'_r|$.

◦ En utilisant (C.15), on obtient facilement que

$$\langle m_\alpha v_\alpha^q \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle + \langle m_\beta v_\beta^q \cdot C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle =$$

$$L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^3} [m_\alpha(v_\alpha^q - v_\alpha'^q) + m_\beta(v_\beta^q - v_\beta'^q)] f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta) |v_\beta - v_\alpha| \sigma_{\alpha\beta}(|v_\beta - v_\alpha|) dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi.$$

On conclut en rappelant que du fait de la nature élastique des collisions, l'on a

$$\forall q \in \{1, 2\} : m_\alpha(v_\alpha^q - v_\alpha'^q) + m_\beta(v_\beta^q - v_\beta'^q) = 0.$$

La relation (C.4) se démontre de la même manière. ◻

Preuve de la proposition C.2 ◦ Pour démontrer (C.12), on procède à un calcul analogue à celui effectué lors de la démonstration de la proposition C.1, calcul qui permet d'obtenir la relation

$$\Delta = \frac{1}{2} L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^3} \log \left[\frac{f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)}{f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta)} \right] [f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) \quad (\text{C.16})$$

$$- f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)] |v_\beta - v_\alpha| \sigma_{\alpha\beta}(|v_\beta - v_\alpha|) dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi.$$

Puis, en tenant compte de la convexité de $x \mapsto \log(x)$, on en déduit l'inégalité (C.12). ◻

Preuve de la proposition C.3 Soient $f_\beta = \mathcal{M}_{f_\beta}$ et

$$\Delta = \langle \log(f_\alpha) \cdot C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) \rangle + \langle \log(f_\beta) \cdot C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha) \rangle .$$

En tenant compte de (C.4), on peut écrire que

$$\Delta = \langle \log(f_\alpha) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle - \frac{m_\beta}{T_\beta} \langle \frac{(v_\beta - U_\beta)^2}{2} C_{\beta\alpha}(\mathcal{M}_{f_\beta}, f_\alpha) \rangle .$$

Or, en utilisant (C.10) et (C.11), on a

$$\begin{aligned} \Delta = & \langle \log(f_\alpha) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle + \frac{1}{T_\beta} \langle \frac{1}{2} m_\alpha (v_\alpha - U_\alpha)^2 C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle \\ & + \frac{1}{T_\beta} (U_\alpha - U_\beta) \langle m_\alpha v_\alpha C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \Delta = & \langle \log\left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta}\right) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle + \frac{1}{T_\beta} (U_\alpha - U_\beta) \langle m_\alpha v_\alpha C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle \\ & + \frac{1}{T_\beta} (U_\beta - U_\alpha) \langle m_\alpha (v_\alpha - U_\beta) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle + \frac{m_\alpha}{2T_\beta} (U_\beta - U_\alpha)^2 \langle C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_\beta) \rangle . \end{aligned}$$

Donc, en utilisant à nouveau (C.4), on trouve que

$$\Delta = \langle \log\left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta}\right) C_{\alpha\beta}(f_\alpha, \mathcal{M}_{f_\beta}) \rangle \equiv \Delta_{\alpha\beta} .$$

Il suffit ensuite d'appliquer le théorème H (voir l'inégalité (C.12)) pour montrer que $\Delta_{\alpha\beta} \leq 0$. Supposons maintenant que $\Delta_{\alpha\beta} = 0$. Alors, on a

$$\log f_\alpha(v_\alpha) + \log \mathcal{M}_{f_\beta}(v_\beta) = \log f_\alpha(v'_\alpha) + \log \mathcal{M}_{f_\beta}(v'_\beta)$$

en appliquant l'égalité (C.16). Puis en remarquant que

$$\log \mathcal{M}_\alpha^\beta(v_\alpha) + \log \mathcal{M}_{f_\beta}(v_\beta) = \log \mathcal{M}_\alpha^\beta(v'_\alpha) + \log \mathcal{M}_{f_\beta}(v'_\beta)$$

à cause de la cinématique des collisions élastiques (C.3), on trouve que nécessairement

$$\frac{f_\alpha(v_\alpha)}{\mathcal{M}_\alpha^\beta(v_\alpha)} = \frac{f_\alpha(v'_\alpha)}{\mathcal{M}_\alpha^\beta(v'_\alpha)}$$

ce qui démontre finalement que

$$\Delta_{\alpha\beta} = 0 \implies f_\alpha = \mathcal{M}_\alpha^\beta .$$

La deuxième partie de la proposition est évidente car

$$\partial_t U_\beta = 0 \text{ et } \partial_t T_\beta = 0 \implies \partial_t \left\langle f_\alpha \log \left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta} \right) \right\rangle = \left\langle \log \left(\frac{f_\alpha}{\mathcal{M}_\alpha^\beta} \right) \partial_t f_\alpha \right\rangle = \Delta_{\alpha\beta}.$$

□

Remarques ◦ On peut aussi réécrire plus simplement l'opérateur de collision $C_{\alpha\beta}$ de la façon suivante

$$C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta) = \frac{L_{\alpha\beta}}{2} \int_{\mathbb{R}} [f_\alpha(v'_\alpha) f_\beta(v'_\beta) - f_\alpha(v_\alpha) f_\beta(v_\beta)] |v_\beta - v_\alpha| \sigma_{\alpha\beta}(|v_\beta - v_\alpha|) dv_\beta$$

avec

$$\begin{cases} v'_\alpha = \frac{m_\alpha - m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_\alpha + \frac{2m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} v_\beta, \\ v'_\beta = \frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} v_\alpha + \frac{m_\beta - m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} v_\beta. \end{cases}$$

L'intérêt de la formulation (C.2) est que celle-ci fait apparaître le paramètre d'impact χ que l'on trouve aussi dans l'opérateur de Boltzmann classique.

◦ On constate d'autre part que lorsque $\alpha = \beta$, l'opérateur $C_{\alpha\beta}$ devient identiquement nul ce qui était prévisible puisqu'alors rien ne change lors des collisions : il y a en effet juste un échange des vitesses microscopiques entre les particules α collisionnantes. On doit donc définir un autre opérateur de collision pour $C_{\alpha\alpha}$.

C.1.2 L'opérateur de collision $C_{\alpha\alpha}$

Pour l'opérateur de collision $C_{\alpha\alpha}$, l'on propose l'opérateur de B.G.K. classique défini par (cf. [67])

$$C_{\alpha\alpha}(f_\alpha) = \Omega_{\alpha\alpha} \cdot (\mathcal{M}_{f_\alpha} - f_\alpha) \quad (\text{C.17})$$

où l'on rappelle que

$$\mathcal{M}_{f_\alpha} = N_\alpha \sqrt{\frac{m_\alpha}{2\pi T_\alpha}} \exp \left[-\frac{m_\alpha (v - U_\alpha)^2}{2T_\alpha} \right]$$

est la maxwellienne d'équilibre associée à f_α , $\Omega_{\alpha\alpha}$ étant la fréquence de collision entre les particules α . L'opérateur $C_{\alpha\alpha}$ vérifie aussi les propriétés (C.4) à (C.13) avec $\alpha = \beta$.

Grâce à cet opérateur de collision, on peut maintenant établir que :

Proposition C.4 i) (Théorème H)

$$\Delta_{\alpha\alpha} \equiv \langle \log(f_\alpha) \cdot C_{\alpha\alpha}(f_\alpha) \rangle \leq 0$$

et

$$\Delta_{\alpha\alpha} = 0 \implies f_\alpha = \mathcal{M}_{f_\alpha}.$$

ii) Soient f_α et f_β solutions du système

$$\begin{cases} \partial_t f_\alpha = C_{\alpha\alpha}(f_\alpha) + C_{\alpha\beta}(f_\alpha, f_\beta), \\ \partial_t f_\beta = C_{\beta\beta}(f_\beta) + C_{\beta\alpha}(f_\beta, f_\alpha). \end{cases}$$

Alors il existe T et U telles que

$$f_k(v) = N_k \sqrt{\frac{m_k}{2\pi T}} \exp \left[-\frac{m_k(v-U)^2}{2T} \right]$$

soit l'unique solution d'équilibre pour $k \in \{\alpha, \beta\}$.

Preuve de la proposition C.4 Le point i) est classique.

Le point ii) est une conséquence du point précédent ainsi que des propositions C.2 et C.3. En effet, soient (f_α, f_β) une solution d'équilibre. Alors

$$\partial_t [H(f_\alpha) + H(f_\beta)] =$$

$$\langle \log f_\alpha \cdot C_{\alpha\alpha} \rangle + \langle \log f_\beta \cdot C_{\beta\beta} \rangle + \langle \log f_\alpha \cdot C_{\alpha\beta} \rangle + \langle \log f_\beta \cdot C_{\beta\alpha} \rangle = 0$$

où $H(f_k) \equiv \langle f_k \log f_k \rangle$. Donc

$$\Delta_{\alpha\alpha} = \Delta_{\beta\beta} = 0$$

ce qui montre que

$$f_k = \mathcal{M}_{f_k}$$

pour $k \in \{\alpha, \beta\}$ d'après le point i). Pour conclure, il suffit d'appliquer la proposition C.3 en remarquant que l'on a maintenant $C_{kk} = 0$. \square

C.2 Équations d'Euler multi-espèce

En prenant les trois premiers moments de (C.1), on obtient les équations macroscopiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho_\alpha + \partial_x(\rho_\alpha U_\alpha) = 0, \\ \partial_t(\rho_\alpha U_\alpha) + \partial_x(\rho_\alpha U_\alpha^2 + P_\alpha) = Z_\alpha N_\alpha E(x, t) + \sum_\beta R_{\alpha\beta}, \\ \partial_t(\rho_\alpha \xi_\alpha) + \partial_x[(\rho_\alpha \xi_\alpha + P_\alpha)U_\alpha] = \sum_\beta(Q_{\alpha\beta} + U_\alpha R_{\alpha\beta}) - \partial_x q_\alpha, \\ \xi_\alpha = \frac{1}{2}U_\alpha^2 + \varepsilon_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = \frac{P_\alpha}{\rho_\alpha(\gamma-1)}, \\ \gamma = 3 \end{array} \right. \quad (\text{C.18})$$

pour l'espèce α avec

$$\begin{aligned} \rho_\alpha &= m_\alpha N_\alpha = m_\alpha \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(v) dv, \\ N_\alpha U_\alpha &= \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(v) v dv, \\ P_\alpha &= \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(v) m_\alpha (v - U_\alpha)^2 dv = N_\alpha T_\alpha \end{aligned}$$

et

$$q_\alpha = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f_\alpha(v) (v - U_\alpha)^3 dv.$$

q_α est le flux de chaleur. Remarquons que l'on n'a pas de viscosité pour ce modèle car on ne dispose que d'un seul degré de liberté pour la vitesse microscopique. $R_{\alpha\beta}$ et $Q_{\alpha\beta}$ sont définis par les relations (C.7).

Notons que l'équation de transport de l'énergie ξ_α peut être écrite dans sa forme non conservative de la façon suivante :

$$\partial_t(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha) + \partial_x(\rho_\alpha \varepsilon_\alpha U_\alpha) + P_\alpha \partial_x U_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} - \partial_x q_\alpha.$$

On montre formellement maintenant que *pour une section efficace $\sigma_{\alpha\beta}$ particulière*, les équations macroscopiques qui sont la limite fluide de l'équation cinétique (C.1) sont les équations classiques d'Euler pour un plasma multi-espèce.

Mais, on établit d'abord la proposition suivante :

Proposition C.5 *Lorsque*

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{|v_\beta - v_\alpha|}, \quad (\text{C.19})$$

pour toutes distributions f_α et f_β , on a les relations

$$R_{\alpha\beta} = \rho_\alpha \Omega_{\alpha\beta} (U_\beta - U_\alpha) \quad (\text{C.20})$$

et

$$Q_{\alpha\beta} = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} (U_\beta - U_\alpha) R_{\alpha\beta} + \frac{d}{2} N_\alpha \Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon (T_\beta - T_\alpha) \quad (\text{C.21})$$

avec $d = 1$ et où

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_\alpha \Omega_{\alpha\beta} = \rho_\beta \Omega_{\beta\alpha}, \\ N_\alpha \Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon = N_\beta \Omega_{\beta\alpha}^\varepsilon, \\ \Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{2m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \Omega_{\alpha\beta}. \end{array} \right. \quad (\text{C.22})$$

De plus, lorsque $\alpha \neq \beta$, les fréquences de collision sont données par

$$\Omega_{\alpha\beta} = \frac{N_\beta \mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} L_{\alpha\beta} \quad (\text{C.23})$$

et

$$\Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon = \frac{2N_\beta \mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha + m_\beta} L_{\alpha\beta} \quad (\text{C.24})$$

où $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta / (m_\alpha + m_\beta)$.

Notons que lorsque la section efficace $\sigma_{\alpha\beta}$ est définie par la relation (C.19), celle-ci est appelée « section efficace maxwellienne ».

$\Omega_{\alpha\beta}$ et $\Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon$ sont les fréquences de collision des particules β sur les particules α respectivement liées à l'échange de quantité de mouvement et à l'échange d'énergie. Notons que si $m_\alpha = m_\beta$, alors $\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}^\varepsilon$.

Les relations (C.20), (C.21) et (C.22) sont classiques en physique des plasmas (au coefficient d près qui est égal à trois dans le cas réel) : voir [29] p. 25. Mais il faut noter que ces relations sont obtenues dans [29] en supposant que f_α et f_β sont des maxwelliennes ce qui n'est pas le cas ici.

On constate donc qu'au niveau macroscopique, lorsque la section efficace est maxwellienne, le modèle cinétique à un degré de liberté proposé ici est cohérent avec le modèle de Fokker-Planck réel puisque l'échange de quantité de mouvement et d'énergie macroscopiques d'une espèce à une autre est qualitativement similaire entre les deux modèles à l'équilibre thermodynamique.

On peut donc établir la conjecture suivante :

Conjecture C.1 *Lorsque pour tout α et pour tout β , $\Omega_{\alpha\beta}$ tend vers $+\infty$ et que la section efficace est maxwellienne, ρ_α , U_α et T_α sont solutions pour tout α au sens des distributions du système (C.18) muni des relations (C.20), (C.21) et (C.22) établies ci-dessus, la distribution d'équilibre du modèle étant alors égale à la maxwellienne \mathcal{M}_{f_α} définie par (C.14) ce qui entraîne que $q_\alpha = 0$.*

On peut dès lors affirmer que la limite fluide obtenue ici formellement est le système des équations d'Euler monodimensionnelles planes pour un plasma multi-espèce avec $\gamma = 3$.

Preuve de la proposition C.5 En procédant à un changement de variable et en appliquant (C.15), on obtient

$$R_{\alpha\beta} = m_\alpha L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^3} (v'_\alpha - v_\alpha) f_\alpha f_\beta dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi$$

et

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} m_\alpha L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^3} (v'^2_\alpha - v^2_\alpha) f_\alpha f_\beta dv_\alpha dv_\beta \mu_\chi d\chi$$

où

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{1}{2} m_\alpha v^2_\alpha C_{\alpha\beta} \right\rangle .$$

Puis en utilisant les relations (C.3) et l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} \chi \mu_\chi d\chi = 0,$$

on en déduit que

$$R_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^2} v_r f_\alpha f_\beta dv_\alpha dv_\beta$$

et que

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta} \int_{\mathbb{R}^2} v_g v_r f_\alpha f_\beta dv_\alpha dv_\beta$$

où $v_r = v_\beta - v_\alpha$. On obtient en définitive

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\rho_\beta \mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha m_\beta} L_{\alpha\beta} \rho_\alpha (U_\beta - U_\alpha)$$

et

$$\tilde{Q}_{\alpha\beta} = \frac{\rho_\beta}{(m_\alpha + m_\beta)^2} L_{\alpha\beta} \rho_\alpha [m_\beta U_\beta^2 + (m_\alpha - m_\beta) U_\alpha U_\beta - m_\alpha U_\alpha^2 + (T_\beta - T_\alpha)].$$

Pour conclure, il suffit d'appliquer la relation $\tilde{Q}_{\alpha\beta} = Q_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta} U_\alpha$. \square

C.3 Développement asymptotique au second ordre de l'opérateur de collision ion / électron

On omet dans cette section l'indice i pour l'ion et l'indice e pour l'électron par un souci de clarté sauf pour les quantités R_{ie} , R_{ei} , Q_{ie} et Q_{ei} définies par (C.7). L'opérateur de collision ion / électron et la fréquence de collision ion / électron sont respectivement notés C et Ω . Les grandeurs avec un « ^ » sont les quantités déduites du développement asymptotique à l'ordre 2 établi ci-dessous.

Bien que ne comportant qu'un seul degré de liberté, l'opérateur de collision C défini par (C.2) reste compliqué. On cherche donc à simplifier C sachant que

$$\epsilon = \sqrt{m_e/m} \ll 1$$

en effectuant un développement asymptotique au second ordre en ϵ .

Soit donc la proposition suivante :

Proposition C.6 *Lorsque les électrons sont à l'équilibre thermodynamique et que la section efficace est maxwellienne, l'opérateur de collision \hat{C} défini par*

$$\hat{C}(f) = \Omega \partial_v [(v - U_e) f + \frac{T_e}{m} \partial_v f] \quad (\text{C.25})$$

est une approximation de C à l'ordre 2 en $\epsilon = \sqrt{\frac{m_e}{m}}$ et l'on a

$$\begin{cases} \hat{R}_{ie} = R_{ie} \equiv \rho \Omega (U_e - U), \\ \hat{Q}_{ie} = N \Omega (T_e - T) \end{cases} \quad (\text{C.26})$$

ainsi que

$$\begin{cases} \hat{R}_{ei} = -R_{ie}, \\ \hat{Q}_{ei} = \rho \Omega (U - U_e)^2 + N \Omega (T - T_e) \end{cases} \quad (\text{C.27})$$

où $\Omega = \epsilon^2 L N_e$ est la fréquence de collision ion / électron.

On constate donc que l'opérateur \hat{C} correspond à l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron exprimé dans un espace à une seule dimension puisque celui-ci est défini dans le cas général par (voir le premier chapitre)

$$\hat{C}(f) = \Omega \nabla_v \cdot [(\vec{v} - \vec{U}_e) f + \frac{T_e}{m} \nabla_v f]. \quad (\text{C.28})$$

On a d'autre part la proposition suivante :

Proposition C.7 (Théorème H) *Pour tout f et pour tout U_e et $T_e > 0$, on a*

$$\langle \log \left(\frac{f}{\mathcal{M}_e} \right) \hat{C} \rangle \leq 0$$

et

$$\langle \log \left(\frac{f}{\mathcal{M}_e} \right) \hat{C} \rangle = 0 \implies f = \mathcal{M}_e$$

où

$$\mathcal{M}_e(v) = N \sqrt{\frac{m}{2\pi T_e}} \exp \left[-\frac{m(v - U_e)^2}{2T_e} \right].$$

Ce théorème H est donc valable à la fois pour \hat{C} et pour C (voir la proposition C.3).

Preuve de la proposition C.6 La cinématique des collisions donne

$$\begin{cases} v'_e = \beta_1 + (\epsilon^2 - \epsilon^4)\beta_2 + \mathcal{O}(\epsilon^6), \\ v' = v + (\epsilon^2 - \epsilon^4)\beta_2 + \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} \beta_1 = \beta_1(\chi, v, v_e) = v + \chi|v_r|, \\ \beta_2 = \beta_2(\chi, v, v_e) = v_r - \chi|v_r| = v_e - \beta_1 \end{cases}$$

où $v_r = v_e - v$. En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 4 de $\mathcal{M}_{f_e}(v'_e)$ et de $f(v')$ en ϵ , on obtient

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{f_e}(v'_e) = \mathcal{M}_{f_e}(\beta_1) + \epsilon^2 \beta_2 \partial_v \mathcal{M}_{f_e}(\beta_1) + \epsilon^4 \beta_2 \left(\frac{\beta_2}{2} \partial_v^2 - \partial_v \right) \mathcal{M}_{f_e}(\beta_1) + \mathcal{O}(\epsilon^6), \\ f(v') = f(v) + \epsilon^2 \beta_2 \partial_v f(v) + \epsilon^4 \beta_2 \left(\frac{\beta_2}{2} \partial_v^2 - \partial_v \right) f(v) + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{cases}$$

Puis en utilisant les propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_v \mathcal{M}_{f_e}(v) = -\frac{m_e}{T_e}(v - U_e)\mathcal{M}_{f_e}(v), \\ \partial_v^2 \mathcal{M}_{f_e}(v) = [(\frac{m_e}{T_e})^2(v - U_e)^2 - \frac{m_e}{T_e}]\mathcal{M}_{f_e}(v), \\ \int_{\mathbb{R}^2} \beta_2^n \Phi(\beta_1) dv_e \mu_\chi d\chi = 2^{n-1} \int_{\mathbb{R}} (v_e - v)^n \Phi(2v - v_e) dv_e, \forall \Phi, \forall n \in \{1, 2, \dots\}, \\ \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{M}_{f_e}(\beta_1) dv_e \mu_\chi d\chi = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{M}_{f_e}(v_e) dv_e \mu_\chi d\chi, \end{array} \right.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}C &= \epsilon^2(1 - \epsilon^2)\partial_v f(v) \int_{\mathbb{R}} w_e \widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) dw_e \\ &+ \epsilon^4[\partial_v^2 f(v) - \frac{m_e}{T_e}f(v)] \int_{\mathbb{R}} w_e^2 \widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) dw_e \\ &+ \epsilon^2(1 - \epsilon^2)\frac{m_e}{T_e}f \int_{\mathbb{R}} w_e(w_e - \widetilde{U}_e)\widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) dw_e \\ &+ 2\epsilon^4\frac{m_e}{T_e}\partial_v f \int_{\mathbb{R}} w_e^2(w_e - \widetilde{U}_e)\widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) dw_e \\ &+ \epsilon^4\left(\frac{m_e}{T_e}\right)^2 \partial_v f \int_{\mathbb{R}} w_e^2(w_e - \widetilde{U}_e)^2 \widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) dw_e + \mathcal{O}(\epsilon^6) \end{aligned}$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} w_e = v_e - v, \\ \widetilde{U}_e = v - U_e, \\ \widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}(w_e) = N_e \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \exp\left[-\frac{m_e(w_e - \widetilde{U}_e)^2}{2T_e}\right]. \end{array} \right.$$

En effectuant le calcul des divers moments de $\widetilde{\mathcal{M}}_{f_e}$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}C &= \epsilon^2 N_e \partial_v [(v - U_e)f(v) + \frac{T_e}{m}\partial_v f(v)] \\ &+ \epsilon^4 N_e [f(v) + 3(v - U_e)\partial_v f(v) + (v - U_e)^2 \partial_v^2 f(v)] \\ &+ 4\epsilon^6 N_e (v - U_e)^3 \frac{m}{T_e} \partial_v f(v) + \mathcal{O}(\epsilon^6). \end{aligned}$$

Or, en considérant que $U \simeq U_e$ et $T \simeq T_e$, on peut écrire que

$$(v - U_e)^n \left(\frac{m}{T_e}\right)^p \partial_v^q f(v) = \mathcal{O}[f(v)]$$

lorsque $n = 2p + q$ ce qui permet d'affirmer que

$$C(f) = \widehat{C}(f) + \Omega \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

où Ω est la fréquence de collision ion / électron définie par

$$\Omega = \epsilon^2 L N_e = \frac{\rho_e}{m} L,$$

fréquence de collision qui correspond bien à celle donnée par (C.23) en tenant compte de la propriété $m_e \ll m$.

On montre (C.26) en calculant les deux premiers moments $\langle m v^q \hat{C} \rangle$, $q \in \{1, 2\}$ et en supposant f à support borné. Puis on en déduit (C.27) par application de (C.10) et (C.11). \square

Preuve de la proposition C.7 Il y a deux possibilités pour établir cette proposition :

- par un calcul direct : on consultera le premier chapitre de cette première partie ;
- par un passage à la limite : il suffit d'appliquer les propositions C.3 et C.6 puis de faire tendre $\epsilon = \sqrt{m_e/m}$ vers 0. \square

Remarques \circ La proposition C.6 est valable lorsque les électrons sont à l'équilibre thermodynamique. Or, comme $m_e \ll m$, la fréquence de collision électron / électron est nettement supérieure à la fréquence de collision ion / électron (cf. [29]) ce qui entraîne effectivement que, via l'opérateur de collision électron / électron, la distribution électronique f_e est très proche de la distribution \mathcal{M}_{f_e} .

\circ Remarquons que (C.26) est compatible avec (C.21) lorsque

$$|U - U_e|^2 \ll \mathcal{O}(|T - T_e|/m_e)$$

ce qui est exactement vérifié dans le cas où il n'y a qu'un seul ion et que l'on applique l'hypothèse de quasi-neutralité car on a alors $U = U_e$. D'autre part, notons que la relation (C.26) implique que

$$\Omega^\epsilon = 2\Omega$$

ce qui est en accord avec (C.22) compte tenu de la propriété $m_e \ll m$.

Annexe D

Publications

- 1) Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, juillet 1998.
- 2) Article présenté au « 21st International Symposium on Rarefied Gas Dynamics », Marseille, juillet 1998.

Deuxième partie

Couplage instationnaire
cinétique/fluide dans un plasma :
vers un traitement cinétique du
point chaud

Introduction de la deuxième partie

Il existe déjà au CEA plusieurs codes de calcul pouvant simuler de façon assez complète toutes les étapes intervenant dans la *Fusion par Confinement Inertiel* c'est à dire du dépôt d'énergie par le laser en attaque directe ou indirecte sur la sphère de deutérium et de tritium jusqu'à la formation du point chaud et à la propagation de l'onde thermonucléaire (voir l'introduction générale).

Malheureusement on sait qu'à la formation du point chaud au centre de la sphère de deutérium-tritium (arrivée au centre du choc induit par le dépôt d'énergie), les modèles fluides utilisés dans ces codes de calcul ne sont plus valables, les libres parcours moyens ioniques devenant sinon supérieurs au moins comparables à l'épaisseur des mailles (pour un plasma, le libre parcours moyen, contrairement à un gaz classique, croît avec la température).

On doit donc procéder à un traitement cinétique du centre de la sphère de deutérium-tritium lors de la formation du point chaud en résolvant les équations cinétiques de Vlasov-Fokker-Planck couplées avec l'équation macroscopique d'énergie électronique classique (on peut par contre considérer que les électrons restent à l'équilibre thermodynamique local) et à l'hypothèse de quasi-neutralité. Or, comme toute équation cinétique, cette résolution coûte infiniment plus chère en temps CPU que la résolution des équations fluides correspondantes. L'enjeu est donc de ne résoudre les équations de Vlasov-Fokker-Planck que là où le libre parcours moyen est important (principalement donc au centre de la sphère de deutérium-tritium et à la formation du point chaud), le reste étant résolu par les équations fluides (i.e. Euler bi-température).

Le but de cette étude est donc de mettre en place un schéma global de couplage instationnaire d'une équation cinétique simple avec sa limite fluide résolue en variables lagrangiennes (les codes fluides monodimensionnels de *Fusion par Confinement Inertiel* sont écrits en variables lagrangiennes) et de valider la méthode proposée sur des cas tests où il existe une zone très faiblement collisionnelle en comparant la solution obtenue à la solution obtenue en résolvant l'équation

cinétique dans tout le domaine.

On utilise pour ce faire le formalisme cinétique proposé par S.M. Deshpande et B. Perthame (voir [42] et [44]), formalisme qui consiste à construire un schéma fluide à partir d'une description cinétique des transports de masse, de quantité de mouvement et d'énergie. La grande originalité de cette technique est sa capacité à pouvoir naturellement traiter la condition aux limites entre les domaines cinétiques et fluides.

Notons que Y. Qiu, J. Schneider, F. Mallinger et J.P. Perlat ont, dans un cadre stationnaire sur une grille fixe, mis en œuvre avec succès ces techniques dans le cadre du couplage Boltzmann / Euler (cf. [47] et [48]) et Boltzmann / Navier-Stokes (voir [49] pour une approche basée sur le développement de Chapman-Enskog et voir [50] pour une approche basée sur l'équation aux moments de Levermore).

On pourra aussi consulter [51] pour une application à la magnétohydrodynamique de ce formalisme cinétique.

Le plan de cette deuxième partie est le suivant :

Au premier chapitre, on construit un schéma cinétique pour la résolution en variables eulériennes des équations d'Euler isentropiques ou mono-température sur une grille variable et on montre comment passer de manière naturelle de cette résolution en variables eulériennes à une résolution en variables lagrangiennes.

Au deuxième et au troisième chapitre, on montre comment raccorder ces schémas cinétiques eulériens ou lagrangiens à une zone cinétique décrite sur une grille fixe ou sur une grille en mouvement, le modèle cinétique étant respectivement celui de Lions, Perthame et Tadmor (dont la limite fluide est Euler isentropique) et celui de Bhatnagar, Gross et Krook (dont la limite fluide formelle est Euler mono-température).

Des cas tests comportant une zone faiblement collisionnelle montreront le bon comportement de l'algorithme de couplage proposé.

Dans un quatrième chapitre, on a ainsi pu constater sur des cas tests représentatifs des conditions thermodynamiques rencontrées en *Fusion par Confinement Inertiel* qu'un traitement cinétique du point chaud est indispensable pour obtenir de bons diagnostics nucléaires et qu'un couplage avec un code fluide eulérien sur une grille fixe semble être la meilleure stratégie de couplage dans ce cadre bien particulier.

Les annexes A et B sont essentiellement consacrées au calcul des demi-flux intervenant dans le schéma cinétique eulérien ou lagrangien.

Chapitre 1

Résolution numérique des équations d'Euler monodimensionnelles planes : mise en œuvre d'un schéma cinétique lagrangien

Afin d'effectuer un couplage instationnaire des équations d'Euler avec le modèle cinétique correspondant, on utilise une idée de Deshpande, Perthame, le Tallec et Bourgat (cf. [42] et [44]; voir aussi [73] p. 269-301) pour construire un schéma numérique de résolution des équations d'Euler qui puisse ensuite aisément traiter la condition aux limites entre les domaines cinétique et fluide.

Cette idée s'appuie sur une interprétation cinétique des flux macroscopiques de masse, de quantité de mouvement (et d'énergie pour Euler complet) ainsi que sur une décomposition de ces flux en demi-flux : un flux entrant et un flux sortant.

Ces schémas ont été établis dans une optique où la grille du maillage est fixe. Dans un cadre monodimensionnel plan, on généralise cette idée au cas où la grille est variable, le but étant, entre autre, d'étudier la faisabilité du couplage d'une zone cinétique avec une zone fluide traitée sur une grille variable.

1.1 Rappels sur les schémas cinétiques de Deshpande et de Perthame sur grille fixe

En géométrie monodimensionnelle plane, pour les équations d'Euler isentropiques, le système à résoudre est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + P) = 0, \\ P/\rho^\gamma = C^{ste}, \\ \gamma \in]1, 3] \end{array} \right. \quad (1.1)$$

et pour les équations d'Euler classiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + P) = 0, \\ \partial_t(\rho \xi) + \partial_x[(\rho \xi + P)U] = 0, \\ P = (\gamma - 1)\rho \varepsilon, \\ \xi = \frac{1}{2}U^2 + \varepsilon, \\ \gamma \in]1, 3]. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

ξ et ε sont respectivement l'énergie macroscopique totale et l'énergie interne du fluide. m est la masse atomique de la particule.

Soit donc χ une fonction positive telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} (1, w^2) \chi(w) dw = (1, 1), \\ \chi(-w) = \chi(w). \end{array} \right. \quad (1.3)$$

On définit les données initiales $\rho(t = 0, x)$, $U(t = 0, x)$ et $T(t = 0, x)$ (où $T/m \equiv P/\rho$) puis les fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} f_0(x, v) = \frac{\rho(0, x)/m}{\sqrt{T(0, x)/m}} \chi\left(\frac{v - U(0, x)}{\sqrt{T(0, x)/m}}\right), \\ g_0(x, v) = \frac{\lambda \rho(0, x)}{2m} \sqrt{T(0, x)/m} \chi\left(\frac{v - U(0, x)}{\sqrt{T(0, x)/m}}\right) \end{array} \right.$$

avec $\lambda = (3 - \gamma)/(\gamma - 1)$, $\gamma \in]1, 3]$. λ peut être considéré comme étant le nombre de degrés de liberté microscopiques en dehors de celui lié à la translation dans la direction x et permet donc de modéliser l'énergie interne microscopique d'une particule. D'après (1.3), on a donc

$$\begin{cases} \rho(0, x) = \int_{\mathbb{R}} m f_0(x, v) dv, \\ \rho(0, x)U(0, x) = \int_{\mathbb{R}} m f_0(x, v) v dv, \\ \rho(0, x)\xi(0, x) = \int_{\mathbb{R}} m [f_0(x, v)v^2/2 + g_0(x, v)] dv. \end{cases}$$

La construction des schémas cinétiques repose sur la proposition suivante due à B. Perthame (voir [44]):

Proposition 1.1 *Soient f et g solutions de l'équation d'advection pure*

$$\partial_t f + v \partial_x f = 0, \quad (1.4)$$

les conditions initiales étant respectivement f_0 et g_0 et soit Δt un pas de temps. Alors ρ , U et ξ définies par

$$\begin{cases} \rho(t, x) = \int_{\mathbb{R}} m f(t, x, v) dv, \\ \rho(t, x)U(t, x) = \int_{\mathbb{R}} m f(t, x, v) v dv, \\ \rho(t, x)\xi(t, x) = \int_{\mathbb{R}} m [f(t, x, v)v^2/2 + g(t, x, v)] dv \end{cases}$$

sont une approximation en Δt^2 de la solution de (1.1) et de la solution de (1.2) pour $t < \Delta t$ lorsque les données initiales $\rho(0, x)$, $U(0, x)$ et $\xi(0, x)$ sont régulières.

On consultera [73] (lemme 7.3 p. 285) pour une démonstration de cette proposition.

On peut ainsi à partir de f et de g calculer à l'ordre 1 en temps les flux macroscopiques intervenant dans (1.1) et (1.2). En résolvant l'équation de transport (1.4), on peut en effet obtenir, après intégration sur le domaine des vitesses microscopiques v , un schéma numérique qui peut être résumé par

$$\frac{1}{\Delta t}(\mathcal{U}_i^{n+1} - \mathcal{U}_i^n) = \mathcal{F}_{i+1/2} - \mathcal{F}_{i-1/2}$$

où

$$\mathcal{F}_{i+1/2} = \mathcal{F}_{i+1/2}^+ + \mathcal{F}_{i+1/2}^-$$

et

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{i+1/2}^+ = \rho_i^n \mathcal{G}_{i+1/2}^+(U_i^n, T_i^n), \\ \mathcal{F}_{i+1/2}^- = \rho_{i+1}^n \mathcal{G}_{i+1/2}^-(U_{i+1}^n, T_{i+1}^n) \end{cases}$$

avec $\mathcal{U} = (\rho, \rho U, \rho \xi)$, \mathcal{F} étant le flux associé.

Ce schéma correspond à une interprétation cinétique des équations d'Euler car $\mathcal{G}_{i+1/2}^+$ et $\mathcal{G}_{i+1/2}^-$ représentent respectivement la contribution volumique au flux $\mathcal{F}_{i+1/2}$ des particules traversant l'interface $i + 1/2$ avec une vitesse positive et avec une vitesse négative, particules dont le transport est solution de l'équation de transport (1.4).

Dans la section suivante, on se propose de construire ce schéma cinétique *mais dans le cadre d'une grille variable*. On montrera alors qu'il est possible de construire proprement un schéma cinétique *lagrangien* dont la stabilité est assurée par un critère *CFL* clair et qui est différent du schéma cinétique de type lagrange + projection de S.M. Deshpande (voir [43]). On retrouvera bien-sûr le schéma cinétique classique en prenant une vitesse de déformation du maillage nulle.

1.2 Extension en grille variable dans le cas monodimensionnel plan des schémas cinétiques de Deshpande et de Perthame

L'établissement d'un schéma numérique cinétique pour la résolution des équations d'Euler sur une grille variable nécessite la résolution numérique de (1.4) sur une grille variable.

1.2.1 Résolution de l'équation d'advection pure sur un maillage en mouvement : extension du schéma upwind classique

On s'intéresse ici à l'équation d'advection pure prise sous la forme générale

$$\partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f = 0. \quad (1.5)$$

On établit d'abord la formulation de l'équation d'advection (1.5) sur un domaine en mouvement. Puis on montre comment établir la solution de cette équation en fonction de la donnée initiale.

Le domaine sur lequel l'on résout l'équation d'advection (1.5) est une partie bornée de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2$ ou 3) notée $\vartheta(t)$ se déformant avec le champ de vitesse $\vec{V}(t, x)$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Soit f solution de l'équation d'advection (1.5) sur le domaine $\vartheta(t)$ dont le mouvement est décrit par le champ de vitesse $\vec{V}(t, x)$ et soit $\vec{X}(t, x_0)$ tel que*

$$\begin{cases} \vec{X}(0, x_0) = \vec{x}_0, \\ \partial_t \vec{X}(t, x_0) = \vec{V}(t, X(t, x_0)) = \vec{V}(t, x_0). \end{cases}$$

Posons enfin

$$\hat{f}(t, x_0, v) = f(t, X(t, x_0), v).$$

\hat{f} est alors solution de

$$\partial_t \hat{f} + \left(\vec{v} - \vec{V}(t, x_0) \right) \cdot \left(\vec{J}^{-1} \cdot \nabla_{x_0} \hat{f} \right) = 0 \quad (1.6)$$

ou de manière équivalente de

$$\partial_t (|\vec{J}| \hat{f}) + |\vec{J}| \vec{J}^{-1} : \nabla_{x_0} \left[(\vec{v} - \vec{V}) \hat{f} \right] = 0 \quad (1.7)$$

avec $\vec{J} = \vec{J}(t, x_0) = \partial \vec{X}(t, x_0) / \partial \vec{x}_0 = (\partial X_j / \partial x_{0,i})_{i,j}$ et où d est la dimension de l'espace.

Notons que le cas $|\vec{J}| = 0$ est « oublié » car cela correspondrait à une compression infinie dans une direction ce qui, d'un point de vue pratique, n'a aucun lieu d'être.

Preuve de la proposition 1.2 On a

$$\partial_t \hat{f} = \partial_t f(t, \vec{X}(t, x_0), v) + \vec{V}(t, x_0) \cdot \nabla_x f(t, X(t, x_0), v).$$

D'où

$$\partial_t \hat{f} + \left(\vec{v} - \vec{V}(t, x_0) \right) \cdot \nabla_x f(t, X(t, x_0), v) = 0$$

en utilisant (1.5). Puis on obtient (1.6) en notant que

$$\vec{J}^{-1} \cdot \nabla_{x_0} \hat{f} = \nabla_x f(t, X(t, x_0), v).$$

D'autre part, d'après le lemme de Jacobi

$$\partial_t |\vec{J}| = |\vec{J}| \nabla_x \cdot \vec{V}(t, X(t, x_0)) = |\vec{J}| \nabla_x \cdot \left(\vec{V}(t, X(t, x_0)) - \vec{v} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \partial_t(|\bar{J}|\hat{f}) &= \hat{f}\partial_t|\bar{J}| + |\bar{J}|\partial_t\hat{f} = \\ |\bar{J}|\{ \hat{f}\nabla_x \cdot (\bar{V}(t, X(t, x_0)) - \bar{v}) + (\bar{V}(t, X(t, x_0)) - \bar{v}) \cdot \nabla_x f(t, X(t, x_0), v) \} = \\ &|\bar{J}|\nabla_x \cdot \{ (\bar{V}(t, X(t, x_0)) - \bar{v}) f(t, X(t, x_0), v) \}. \end{aligned}$$

Or, il est facile de constater que

$$\nabla_x \cdot \{ (\bar{V}(t, X(t, x_0)) - \bar{v}) f(t, X(t, x_0), v) \} = \bar{J}^{-1} : \nabla_{x_0} \left((\bar{V} - \bar{v}) \hat{f} \right)$$

ce qui permet de conclure. \square

On peut intégrer (1.7) sur le volume $\vartheta(0)$. On obtient alors

$$\frac{d}{dt} \int_{\vartheta(t)} f(t, x, v) dx = \int_{\vartheta(t)} \nabla_x \cdot [(\bar{V}(t, x) - \bar{v}) f(t, x, v)] dx$$

en repassant en variable x . Et en appliquant la formule d'Ostogradski, on obtient finalement

$$\frac{d}{dt} \int_{\vartheta(t)} f(t, x, v) dx = - \int_{\partial\vartheta(t)} \bar{\Phi}(t, s, v) d\bar{s} \quad (1.8)$$

avec $\bar{\Phi}(t, x, v) = (\bar{v} - \bar{V}(x, t)) f(t, x, v) =$ flux microscopique instantané.

La formulation de la solution exacte de l'équation d'advection (1.5) repose sur une propriété classique de la théorie du transport que l'on généralise ici au cas d'un domaine en mouvement. Soit donc la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Soit f solution de l'équation d'advection (1.5) sur le domaine $\vartheta(t)$ dont le mouvement est décrit par le champ de vitesse $\bar{V}(t, x)$, la condition initiale étant donnée par $f(t_0, x, v) = f_0(x, v)$. f est alors explicitée par la formule*

$$f(t, X(t, x_0), v) = f_0 \left(\bar{x}_0 - \int_0^t (\bar{v} - \bar{V}(t', x_0)) dt', \bar{v} \right). \quad (1.9)$$

Preuve de la proposition 1.3 Posons

$$g(t, x_0, v) = f_0 \left(\bar{x}_0 - \int_{t_0}^t (\bar{v} - \bar{V}(t', x_0)) dt', \bar{v} \right).$$

On a alors

$$\begin{cases} \partial_t g = - \left(\bar{v} - \bar{V}(t, x_0) \right) \cdot \nabla_x f_0, \\ \nabla_{x_0} g = \left(\bar{I} + \int_{t_0}^t \nabla_{x_0} \bar{V}(t', x_0) dt' \right) \cdot \nabla_x f_0 \end{cases}$$

où $\bar{\bar{I}}$ est la matrice identité. Or

$$\frac{\partial \vec{V}(t', x_0)}{\partial \vec{x}_0} = \partial_t \frac{\partial \vec{X}(t', x_0)}{\partial \vec{x}_0} = \partial_t \bar{\bar{J}}(t', x_0).$$

Donc

$$\nabla_{x_0} g = \left(\bar{\bar{I}} + \int_{t_0}^t \partial_t \bar{\bar{J}}(t', x_0) dt' \right) \cdot \nabla_x f_0.$$

Et comme $\bar{\bar{J}}(t_0, x_0) = \bar{\bar{I}}$, on obtient donc

$$\nabla_{x_0} g = \bar{\bar{J}}(t, x_0) \cdot \nabla_x f_0$$

ce qui permet finalement d'écrire

$$\partial_t g(t, x_0, v) + \left(\vec{v} - \vec{V}(t, x_0) \right) \cdot \left\{ \bar{\bar{J}}^{-1} \cdot \nabla_{x_0} g(t, x_0, v) \right\} = 0.$$

$\hat{f} \equiv g$ est donc bien solution de (1.6). \square

Application au cas monodimensionnel plan On se place maintenant en géométrie plane monodimensionnelle et on suppose que le domaine borné de \mathbb{R} sur lequel on résout la phase de transport libre est maillé en M_x mailles indicées par i , centrées en x_i^n et de longueur Δx_i^n , l'indice n faisant référence au temps $t = t_n$. Les frontières de gauche et de droite de cette maille sont respectivement repérées par les indices $i - \frac{1}{2}$ et $i + \frac{1}{2}$.

Intégrons l'équation (1.8) par rapport à x sur la maille i (i.e. $\vartheta(t) = [x_{i-1/2}(t), x_{i+1/2}(t)]$) et par rapport au temps t pour $t \in [t_n, t_{n+1}]$. En posant $x_{i+1/2}^n \equiv x_{i+1/2}(t_n)$, on obtient

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt} \int_{x_{i-1/2}(t)}^{x_{i+1/2}(t)} f(t, x, v) dx dt = - \int_{t_n}^{t_{n+1}} (v - V_{i+1/2}(t)) f(t, x_{i+1/2}(t), v) dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} (v - V_{i-1/2}(t)) f(t, x_{i-1/2}(t), v) dt.$$

Soit donc

$$\frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}^{n+1}}^{x_{i+1/2}^{n+1}} f(t_{n+1}, x, v) dx = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} \cdot \frac{1}{\Delta x_i^n} \int_{x_{i-1/2}^n}^{x_{i+1/2}^n} f(t_n, x, v) dx - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} (\Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2})$$

avec

$$\begin{cases} \Phi_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} (v - V_{i+1/2}(t)) f(t, x_{i+1/2}(t), v) dt, \\ \Delta t = t_{n+1} - t_n. \end{cases}$$

Il faut souligner que cette dernière égalité est exacte.

Supposons maintenant que $x \mapsto f(t_n, x, v)$ est constante par morceau c'est à dire que

$$f(t_n, x, v) = f_i^n(v), \forall x \in]x_{i-1/2}^n, x_{i+1/2}^n[.$$

En posant

$$f_i^{n+1}(v) \equiv \frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_{x_{i-1/2}^{n+1}}^{x_{i+1/2}^{n+1}} f(t_{n+1}, x, v) dx$$

où $f(t_{n+1}, x, v)$ est la solution de l'équation d'advection (1.4) avec pour condition initiale $f_i^n(v)$, on peut écrire

$$f_i^{n+1}(v) = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} f_i^n(v) - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} (\Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2}).$$

Il reste à évaluer les flux $\Phi_{i+1/2}$ et $\Phi_{i-1/2}$. Pour cela, on utilise la proposition 1.3. En imposant de plus

$$\forall t \in [t_n, t_{n+1}[: V_{i+1/2}(t) = C_{i+1/2}^{ste} = V_{i+1/2}^n,$$

on obtient alors

$$\Phi_{i+1/2} = \frac{(v - V_{i+1/2}^n)}{\Delta t} \int_{t_n}^{t_{n+1}} f(t_n, x_{i+1/2}(t_n) - (t - t_n) \cdot (v - V_{i+1/2}^n), v) dt.$$

Or sous la condition *CFL*

$$\Delta t < \frac{\min_i \Delta x_i^n}{\max_i |v - V_{i+1/2}^n|},$$

on a

$$\begin{cases} v - V_{i+1/2}^n \geq 0 \implies \forall t \in [t_n, t_{n+1}[: f(t_n, x_{i+1/2}(t_n) - (t - t_n) \cdot (v - V_{i+1/2}^n), v) = f_i^n, \\ v - V_{i+1/2}^n \leq 0 \implies \forall t \in [t_n, t_{n+1}[: f(t_n, x_{i+1/2}(t_n) - (t - t_n) \cdot (v - V_{i+1/2}^n), v) = f_{i+1}^n. \end{cases}$$

On peut donc écrire que sous cette condition *CFL*, on obtient

$$\begin{cases} \Phi_{i+1/2} = (v - V_{i+1/2}^n) \cdot f_{i+1/2}^n, \\ v - V_{i+1/2}^n \geq 0 \implies f_{i+1/2}^n = f_i^n, \\ v - V_{i+1/2}^n \leq 0 \implies f_{i+1/2}^n = f_{i+1}^n \end{cases} \quad (1.10)$$

ce qui nous permet d'établir la proposition suivante :

Proposition 1.4 Pour une condition initiale f^n constante par morceau sur chaque maille et sous la condition CFL

$$\Delta t < \frac{\min_i \Delta x_i^n}{\max_i |v - V_{i+1/2}^n|}, \quad (1.11)$$

la formule

$$\frac{1}{\Delta x_i^{n+1}} \int_i f(t_{n+1}, x, v) dx = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} f_i^n(v) - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} (\Phi_{i+1/2} - \Phi_{i-1/2}) \quad (1.12)$$

où les flux Φ sont explicités par (1.10) est exacte en géométrie monodimensionnelle plane. D'autre part, le schéma numérique défini par

$$f_i^{n+1}(v) \equiv \int_i f(t_{n+1}, x, v) dx / \Delta x_i^{n+1} \quad (1.13)$$

est précis à l'ordre 1 en Δt et en Δx , et, sous la condition CFL (1.11), ce schéma numérique préserve la positivité de f^{n+1} . De plus, sous la condition aux limites

$$\Phi_{1/2} = \Phi_{M_x+1/2} \equiv 0, \quad (1.14)$$

ce schéma numérique est conservatif et est stable dans l^1 .

(On a posé ici $\int_i f(t_n, x, v) dx \equiv \int_{x_{i-1/2}^n}^{x_{i+1/2}^n} f(t_n, x, v) dx$.)

Preuve de la proposition 1.4 o La première partie de la proposition découle de ce qui a été écrit plus haut.

o Positivité du schéma :

On montre la positivité du schéma dans le cas particulier où on a i et v tels que $v > V_{i-1/2}^n$ et $v > V_{i+1/2}^n$. On a alors

$$\Phi_{i+1/2} = (v - V_{i+1/2}^n) f_i^n(v) \text{ et } \Phi_{i-1/2} = (v - V_{i-1/2}^n) f_{i-1}^n(v).$$

Donc

$$f_i^{n+1}(v) \Delta x_i^{n+1} = f_i^n(v) \cdot [\Delta x_i^n - \Delta t(v - V_{i+1/2}^n)] + \Delta t f_{i-1}^n(v) \cdot (v - V_{i-1/2}^n).$$

Or sous la condition CFL (1.11), on a $\Delta x_i^n - \Delta t(v - V_{i+1/2}^n) > 0$ ce qui permet de conclure.

o La conservativité du schéma numérique est évidente sous la condition aux limites (1.14).

o Stabilité dans l^1 :

On a

$$\sum_i f_i^n(v) \Delta x_i^n = \sum_i \int_i |f_i^n(v)| dx = \|f_i^n(v)\|_{l^1}$$

car, sous la condition CFL (1.11), le schéma est positif. Il suffit ensuite d'appliquer la propriété de conservativité du schéma pour conclure que

$$\forall n, \forall v : \|f_i^n(v)\|_{l^1} = \|f(t=0, x, v)\|_{L^1} < +\infty.$$

□

1.2.2 Établissement du schéma cinétique sur une grille variable pour les équations d'Euler

Rappelons que le domaine est maillé en M_x mailles numérotées de 1 à M_x et d'épaisseur Δx_i^n , l'indice n indiquant que les valeurs sont évaluées au temps t_n . La vitesse à l'interface $i + 1/2$ est notée $V_{i+1/2}^n$; la masse Δm_i^n de la maille i au temps t_n est égale à $\rho_i^n \Delta x_i^n$.

Par application des propositions 1.1 et 1.4, on obtient le théorème suivant :

Théorème 1.1 *On suppose que χ est à support borné c'est à dire*

$$\exists X > 0 / |x| > X \Rightarrow \chi(x) = 0$$

et on se place en géométrie monodimensionnelle plane.

Alors sous la condition CFL

$$\Delta t < \frac{\min_i \Delta x_i^n}{\max_i |U_i^n + X \sqrt{T_i^n/m} - V_{i+1/2}^n|}, \quad (1.15)$$

le schéma numérique défini par

$$\rho_i^{n+1} = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} [\mathfrak{S}_{i+1/2} - \mathfrak{S}_{i-1/2}], \quad (1.16)$$

$$U_i^{n+1} = \frac{\Delta m_i^n}{\Delta m_i^{n+1}} U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^{n+1}} [\wp_{i+1/2} - \wp_{i-1/2}] \quad (1.17)$$

et

$$\xi_i^{n+1} = \frac{\Delta m_i^n}{\Delta m_i^{n+1}} \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^{n+1}} [\mathfrak{N}_{i+1/2} - \mathfrak{N}_{i-1/2}] \quad (1.18)$$

est d'ordre 1 en temps et en espace, et préserve la positivité de la densité et de l'énergie interne, les flux aux interfaces étant définis par

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} \\ \wp \\ \aleph \end{pmatrix}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S} \\ \wp \\ \aleph \end{pmatrix}_{i+1/2}^+ + \begin{pmatrix} \mathfrak{S} \\ \wp \\ \aleph \end{pmatrix}_{i+1/2}^- \quad (1.19)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} \\ \wp \\ \aleph \end{pmatrix}_{i+1/2}^+ = \int_{v > V_{i+1/2}^n} m(v - V_{i+1/2}^n) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix} f_i^n(v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} g_i^n(v) \right] dv \quad (1.20)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S} \\ \wp \\ \aleph \end{pmatrix}_{i+1/2}^- = \int_{v < V_{i+1/2}^n} m(v - V_{i+1/2}^n) \left[\begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix} f_{i+1}^n(v) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} g_{i+1}^n(v) \right] dv \quad (1.21)$$

où $f_i^n(v) = \frac{\rho_i^n/m}{\sqrt{T_i^n/m}} \chi\left(\frac{v-U_i^n}{\sqrt{T_i^n/m}}\right)$ et $g_i^n(v) = \frac{\lambda \rho_i^n}{2m} \sqrt{T_i^n/m} \chi\left(\frac{v-U_i^n}{\sqrt{T_i^n/m}}\right)$ avec $\lambda = (3 - \gamma)/(\gamma - 1)$ et $\gamma \in [1, 3]$.

D'autre part, sous les conditions aux limites

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_{1/2} = \mathfrak{S}_{M_x+1/2} = 0, \\ \aleph_{1/2} = \aleph_{M_x+1/2} = 0, \end{cases} \quad (1.22)$$

ce schéma numérique est conservatif et stable dans l^1 .

Notons que contrairement au schéma numérique de B. Després (voir [71]), il est très difficile de montrer que le schéma numérique proposé au théorème 1.1 est entropique. B. Perthame a pu cependant montrer que pour un choix très particulier de la fonction χ et lorsque la vitesse de grille $V_{i+1/2}^n$ est nulle, le schéma obtenu est entropique en un certain sens (voir sur ce sujet [45] et [46]).

Preuve du théorème 1.1 On se base ici sur le principe de la démonstration établie par B. Perthame dans [44] dans le cadre du schéma cinétique sur une grille fixe.

o Il suffit de multiplier l'équation (1.12) par 1, v et $v^2/2$ puis d'intégrer par rapport à v pour ensuite appliquer la proposition 1.4 pour obtenir (1.16), (1.17)

et (1.18) ainsi que pour établir la conservativité du schéma. L'ordre 1 en Δt est imposé par la proposition 1.1. On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} &= \int_i \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1} dv dx, \\ \rho_i^{n+1} U_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} &= \int_i \int_{\mathbb{R}} v f_i^{n+1} dv dx\end{aligned}$$

et

$$\rho_i^{n+1} \xi_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} = \int_i \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} v^2 f_i^{n+1} + g_i^{n+1} \right] dv dx.$$

o La condition *CFL* (1.15) découle de la condition *CFL* (1.11) en remarquant que la vitesse microscopique cinétique maximale dans une maille donnée est

$$v = U_i^n + X \sqrt{T_i^n / m}.$$

o La positivité du schéma numérique sous la condition *CFL* (1.15) découle de la positivité du schéma (1.13) sous la condition *CFL* (1.11) en remarquant d'une part que $\rho_i^{n+1} = \int f_i^{n+1} dv$ puis d'autre part en établissant que

$$\begin{aligned}\rho_i^{n+1} \xi_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} &= \int_i \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} v^2 f_i^{n+1} + g_i^{n+1} \right] dv dx \\ &\geq \int_i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} v^2 f_i^{n+1} dv dx = \int_i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} [(v - U_i^{n+1})^2 + (U_i^{n+1})^2] f_i^{n+1} dv dx \\ &\geq \int_i \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} (U_i^{n+1})^2 f_i^{n+1} dv dx = \rho_i^{n+1} \frac{1}{2} (U_i^{n+1})^2 \Delta x_i^{n+1},\end{aligned}$$

inégalité qui implique que

$$\xi_i^{n+1} - \frac{1}{2} (U_i^{n+1})^2 \geq 0$$

ce qui prouve la positivité de l'énergie interne.

o Stabilité dans l^1 sous la condition *CFL* (1.15):

On a

$$\rho_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} = \int_i |\rho_i^{n+1}| dx$$

car le schéma est positif sous la condition *CFL* (1.15). Donc

$$\sum_i \rho_i^{n+1} \Delta x_i^{n+1} = \|\rho_i^{n+1}\|_{l^1}.$$

Il suffit ensuite d'appliquer la propriété de conservativité du schéma pour obtenir que

$$\forall n : \|\rho_i^n\|_{l^1} = \|\rho(t=0, x)\|_{L^1} < +\infty.$$

On procède de la même manière pour $\rho\xi$. D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \sum_i \rho_i^n |U_i^n| \Delta x_i^n &= \sum_i \left| \int_i \int_{\mathbb{R}} m v f^n(x, v) dv dx \right| \\ &\leq \sum_i \int_i \left| \int_{\mathbb{R}} m v f^n(x, v) dv \right| dx = \|\rho^n(x) U^n(x)\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Et en appliquant successivement l'inégalité de Schwarz et la positivité de l'énergie interne, on trouve

$$\|\rho_i^n U_i^n\|_{L^1} \leq \sqrt{\|\rho_i^n\|_{L^1} \cdot \|\rho_i^n U_i^{n^2}\|_{L^1}} \leq \sqrt{2\|\rho_i^n\|_{L^1} \cdot \|\rho_i^n \xi_i^n\|_{L^1}}$$

soit encore

$$\forall n : \|\rho_i^n U_i^n\|_{L^1} \leq \sqrt{2\|\rho(0, x)\|_{L^1} \cdot \|\rho(0, x)\xi(0, x)\|_{L^1}} < +\infty$$

en tenant compte de la propriété de conservativité du schéma. \square

La dernière étape est de calculer explicitement les demis flux $(\mathfrak{S}, \varphi, \mathfrak{K})^+$ et $(\mathfrak{S}, \varphi, \mathfrak{K})^-$ intervenant dans (1.19) en fonction du choix de la fonction χ :

· pour Euler isentropique, on prendra

$$\chi(v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} 1_{\{|v| < \sqrt{3}\}}$$

qui est la distribution d'équilibre du modèle cinétique particulier correspondant à Euler isentropique avec $P/\rho^3 = 1/12$ (voir le chapitre suivant);

· pour Euler classique, on prendra

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)$$

qui correspond à la distribution d'équilibre classique d'un gaz dont la loi d'état est la loi des gaz parfaits. On objectera que cette distribution n'a pas un support borné. Mais du fait de la décroissance rapide de la fonction $\exp(-v^2)$, en considérant un domaine de vitesse microscopique initial suffisamment grand pour que sur le bord du domaine la distribution soit toujours numériquement nulle, on s'affranchit aisément de cette difficulté.

On consultera l'annexe A pour le calcul précis de ces flux.

Remarque On a en fait entière liberté sur le choix de la fonction χ à condition bien-sûr que celle-ci satisfasse la condition (1.3). On oriente cependant le choix de χ comme on vient de le constater ci-dessus en fonction du modèle fluide à résoudre. On verra en effet que le choix des fonctions χ proposé ci-dessus permettra un raccord naturel à une zone cinétique où sera appliqué un opérateur de collision particulier : voir le deuxième et le troisième chapitre de cette partie.

1.2.3 Conditions aux limites et première interprétation cinétique du schéma

La condition aux limites classique imposée pour les équations d'Euler est la condition de mur c'est à dire que sur la frontière du domaine, la vitesse macroscopique et la pression sont respectivement égales à la vitesse de déformation du domaine (qui est une donnée) et à la pression du fluide dans la maille frontière.

D'un point de vue microscopique, cette condition aux limites correspond par exemple à considérer que l'interaction des particules du fluide avec la frontière du domaine est de type réflexion spéculaire. Constatant que l'équation (1.4) est une équation de transport particulaire (sans terme collisionnel), on se rend compte que pour traduire cette condition au niveau macroscopique pour notre cas, il suffit d'imposer une condition de renvoi de type spéculaire sur la frontière du domaine soit donc de créer les distributions f_g, g_g et f_d, g_d dans les mailles fantômes que l'on crée respectivement à gauche et à droite de première maille fluide et de la dernière maille fluide telles que

$$\begin{cases} f_g(v) = f_1(2V_{1/2} - v), & g_g(v) = g_1(2V_{1/2} - v), \\ f_d(v) = f_{M_x}(2V_{M_x+1/2} - v), & g_d(v) = g_{M_x}(2V_{M_x+1/2} - v) \end{cases}$$

pour ensuite calculer en conséquence les flux $\varphi_{1/2}^+$ et $\varphi_{M_x+1/2}^-$ intervenant dans (1.20) et (1.21). On peut remarquer que cette condition aux limites assure un flux de quantité de masse nul aux extrémités du domaine et un flux d'énergie nul si on a en plus $V_{1/2} = V_{M_x+1/2} = 0$.

Cette condition aux limites a par ailleurs le mérite de préserver les conclusions du théorème 1.1 lorsque $V_{1/2} = V_{M_x+1/2} \equiv 0$ (notamment pour la positivité et la stabilité dans l^1 du schéma numérique) puisque les conditions aux limites (1.22) sont alors vérifiées.

1.3 Résolution en variables lagrangiennes

En faisant le changement de variable

$$dm = \rho dx,$$

on obtient la formulation lagrangienne suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tau = \partial_m U, \\ \partial_t U = -\partial_m P \end{cases} \quad (1.23)$$

dans le cas isentropique avec

$$\begin{cases} \rho = 1/\tau, \\ P/\rho^\gamma = C^{ste}. \end{cases}$$

Pour Euler classique, la formulation en variables lagrangiennes est la suivante

$$\begin{cases} \partial_t \tau = \partial_m U, \\ \partial_t U = -\partial_m P, \\ \partial_t \xi = -\partial_m (PU) \end{cases} \quad (1.24)$$

avec

$$\begin{cases} \rho = 1/\tau, \\ \xi = \frac{1}{2}U^2 + \varepsilon, \\ \varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)} \end{cases}$$

où $\gamma \in]1, 3]$.

1.3.1 Mise en place du schéma cinétique lagrangien : calcul de la vitesse lagrangienne aux interfaces

On montre maintenant comment construire un schéma cinétique lagrangien à partir du schéma numérique général défini par les relations (1.16), (1.17) et (1.18).

Un schéma lagrangien est tel que la masse correspondant à chaque maille est constante au cours du temps. On est donc dans le cadre d'une grille variable puisque, dans ce cas, les interfaces du maillage doivent bouger à la vitesse macroscopique du fluide.

L'utilisation du schéma cinétique eulérien en grille variable sous la condition

$$\forall n, \forall i : \Delta m_i^n = \Delta m_i^0 = \Delta m_i$$

impose de résoudre l'équation non linéaire

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}(U_{i+1/2}^n) = 0 \quad (1.25)$$

dont $U_{i+1/2}^n = V_{i+1/2}^n$ est l'inconnue ce qui assurera un flux de masse macroscopique nul à l'interface $i + 1/2$. En effet, le schéma numérique cinétique défini par (1.16) prend alors la forme

$$\Delta x_i^{n+1} \rho_i^{n+1} = \Delta x_i^n \rho_i^n$$

pour la résolution de l'équation de continuité, égalité qui correspond bien à l'hypothèse de base $\Delta m_i^{n+1} = \Delta m_i^n$ en géométrie monodimensionnelle plane. Notons que $U_{i+1/2}^n$ est une approximation de la vitesse macroscopique du fluide à l'interface $i + 1/2$ pour $t \in [t_n, t_{n+1}[$.

Connaissant maintenant $U_{i+1/2}^n$, on en déduit le volume spécifique par le schéma suivant

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} [U_{i+1/2}^n - U_{i-1/2}^n], \quad (1.26)$$

schéma qui ne fait que prendre en compte la déformation géométrique du volume sous la contrainte $\Delta m_i^{n+1} = \Delta m_i^n$.

Puis, on obtient le schéma cinétique lagrangien en couplant l'équation (1.26) aux équations (1.17) et (1.18) en remarquant ici que l'on a par hypothèse $\Delta m_i^{n+1} = \Delta m_i^n = \Delta m_i$ ce qui donne

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} [\wp_{i+1/2} - \wp_{i-1/2}] \quad (1.27)$$

auquel on ajoute pour Euler classique

$$\xi_i^{n+1} = \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} [\aleph_{i+1/2} - \aleph_{i-1/2}]. \quad (1.28)$$

$\wp_{i+1/2}$ et $\aleph_{i+1/2}$ peuvent ici être respectivement interprétées comme étant la pression et la pression multipliée par la vitesse du fluide constantes au cours du pas de temps Δt à l'interface $i + 1/2$. On a donc construit un pseudo solveur de Riemann.

Ce schéma lagrangien a ainsi l'avantage de vérifier les conclusions du théorème 1.1 et en particulier la positivité et la stabilité dans l^1 sous le critère CFL (1.15).

Malheureusement, il est très difficile de résoudre exactement l'équation (1.25) dans le cas général en tout cas pour le choix de la distribution χ proposé plus haut. On peut cependant établir le résultat suivant :

Proposition 1.5 *Lorsque les mailles i et $i + 1$ sont dans un état thermodynamique proche, la solution de l'équation $\mathfrak{S}_{i+1/2}(U_{i+1/2}^n) = 0$ peut être approximée par*

$$U_{i+1/2}^n = \frac{\rho_i^n U_i^n + \rho_{i+1}^n U_{i+1}^n}{\rho_i^n + \rho_{i+1}^n} + \frac{\mu}{(\rho_i^n + \rho_{i+1}^n)/2} \left(\frac{P_i^n}{c_i^n} - \frac{P_{i+1}^n}{c_{i+1}^n} \right) \quad (1.29)$$

où $\mu = 3/4$ pour Euler isentropique (modèle isentropique tel que $P/\rho^3 = 1/12$, $\gamma = 3$) et $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$ pour Euler classique sachant que $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$.

Remarquons que $\sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}} \simeq 1/2$ lorsque $\gamma \in]1, 3]$. On consultera l'annexe B pour la démonstration de cette proposition.

Notons ici que la formule (1.29) montre que, contrairement au schéma lagrangien de B. Després (cf. [71]), ce schéma cinétique lagrangien ne peut résoudre *exactement* le problème de la discontinuité de contact puisque si $U_i^n = U_{i+1}^n$ et que $P_i^n = P_{i+1}^n$, on n'a pas $U_{i+1/2}^n = U_i^n \equiv U_{i+1}^n$ lorsque $\rho_i^n \neq \rho_{i+1}^n$.

Une troisième approche consiste à prendre $U_{i+1/2}^n$ donnée par un schéma numérique lagrangien dont les bonnes propriétés sont bien connues. On espère ainsi préserver au schéma cinétique lagrangien une robustesse suffisante pour l'étude de cas tests non académiques sans avoir à résoudre exactement (1.25). Connaissant les propriétés entropiques du schéma numérique lagrangien de B. Després (cf. [71]), on peut choisir d'imposer à $U_{i+1/2}^n$ la valeur

$$U_{i+1/2}^n = \frac{1}{2}(U_i^n + U_{i+1}^n) + \frac{\mu}{(\rho c)_*} (P_i^n - P_{i+1}^n) \quad (1.30)$$

avec $(\rho c)_* = (\rho_i^n c_i^n + \rho_{i+1}^n c_{i+1}^n)/2$ et $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$, μ étant un paramètre de l'ordre de $1/2$ assimilable à une viscosité numérique. Notons que l'on retrouve aussi l'expression (1.30) lorsque l'on résout le problème de Riemann linéarisé (cf. [72], §12.15).

On pourra remarquer la grande similarité entre (1.29) et (1.30) pour des chocs faibles. On peut d'autre part ajouter que si la formule (1.30) a le mérite d'imposer

$U_{i+1/2}^n = U_i^n \equiv U_{i+1}^n$ lorsque l'on est en présence d'une discontinuité de contact, on n'a pas pour autant $\varphi_{i+1/2} = P_i^n \equiv P_{i+1}^n$ et $\mathfrak{N}_{i+1/2} = P_i^n U_i^n \equiv P_{i+1}^n U_{i+1}^n$ (voir les formules de l'annexe A lorsque $x_{i+1/2}^+ = x_{i+1/2}^- = 0$): le problème de la discontinuité de contact sera à nouveau mal traité.

On se rend donc compte que le schéma numérique défini par (1.16), (1.17) et (1.18) permet de passer continûment d'une résolution en variables eulériennes sur une grille fixe i.e. avec $V_{i+1/2}^n \equiv 0$ à une résolution en variables lagrangiennes i.e. avec $V_{i+1/2}^n \equiv U_{i+1/2}^n$ donnée par la résolution exacte ou approchée de (1.25) ou par l'expression (1.30).

Remarque sur la positivité du schéma cinétique lagrangien Comme $U_{i+1/2}^n$ donnée par (1.29) ou par (1.30) n'est pas la solution exacte de (1.25), le schéma lagrangien n'assure plus a priori la positivité de l'énergie interne du schéma sous le critère *CFL* (1.15) et en particulier pour des chocs forts. En effet, dans le cas lagrangien, le schéma numérique (1.18) donnant ξ_i^{n+1} devient

$$\xi_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta m_i} \int_i \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{1}{2} v^2 f_i^{n+1} + g_i^{n+1} \right] dv dx.$$

Et en procédant comme lors de la preuve de la positivité de l'énergie interne (voir la démonstration du théorème 1.1), on obtient que

$$\xi_i^{n+1} \geq \frac{1}{2} (U_i^{n+1})^2 \cdot \frac{1}{\Delta m_i} \int_i \int_{\mathbb{R}} f_i^{n+1} dv dx$$

lorsque le critère *CFL* (1.15) est respecté. Et en tenant compte de (1.16), on trouve finalement que

$$\xi_i^{n+1} - \frac{1}{2} (U_i^{n+1})^2 \geq -\frac{\Delta t}{\Delta m_i} [\mathfrak{S}]_{i-1/2}^{i+1/2}$$

où $[\mathfrak{S}]_{i-1/2}^{i+1/2}$ est la valeur *exacte* de $\mathfrak{S}_{i+1/2}(U_{i+1/2}^n) - \mathfrak{S}_{i-1/2}(U_{i-1/2}^n)$. Comme on ne peut absolument pas contrôler a priori le signe de $[\mathfrak{S}]_{i-1/2}^{i+1/2}$ lorsque $U_{i\pm 1/2}^n$ est donnée par (1.29) ou par (1.30), il est impossible d'établir un critère *CFL* assurant la positivité de l'énergie interne. Par contre, lorsque $U_{i\pm 1/2}^n$ est une solution exacte de (1.25), la positivité de l'énergie interne est effectivement vérifiée sous le critère *CFL* (1.15) puisque l'on a alors $[\mathfrak{S}]_{i-1/2}^{i+1/2} = 0$.

1.3.2 Passage à l'ordre 2

On utilise ici la méthode de Van Leer de type prédictor-correcteur présentée dans la référence [73] p. 245-249. On rappelle ici les grandes lignes de cette technique.

À partir des grandeurs macroscopiques τ , U et ξ initialement constantes par morceau, on évalue des pentes permettant de rendre ces grandeurs linéaires par morceau au temps t_n : on évalue ainsi $(\tau, U, \xi)_{i+1/2,-}^n$ et $(\tau, U, \xi)_{i+1/2,+}^n$ (avec par convention $-$ pour la gauche et $+$ pour la droite de l'interface). Pour éviter la formation de nouveaux extrémums et donc l'apparition d'instabilités, on impose un limiteur de pente lors de l'évaluation de celles-ci (voir aussi [73]).

Connaissant alors les grandeurs hydrodynamiques de part et d'autre des interfaces, on évalue τ , U et ξ (et donc P) au niveau de l'interface au temps $t_{n+1/2}$ en utilisant pour U le schéma suivant

$$U_{i+1/2,-}^{n+1/2} = U_{i+1/2,-}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta m_i} \cdot (P_{i+1/2,-}^n - P_{i-1/2,+}^n),$$

$$U_{i+1/2,+}^{n+1/2} = U_{i+1/2,+}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta m_{i+1}} \cdot (P_{i+3/2,-}^n - P_{i+1/2,+}^n).$$

On injecte ensuite les grandeurs évaluées de part et d'autre des interfaces au temps $t_{n+1/2}$ dans le solveur de Riemann pour l'évaluation des flux aux interfaces, la condition initiale au centre de la maille restant U_i^n . D'où le calcul de U_i^{n+1} suivant

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i} \cdot [\wp_{i+1/2}(U_{i+1/2,+}^{n+1/2}, \dots, U_{i+1/2,-}^{n+1/2}, \dots) - \wp_{i-1/2}(U_{i-1/2,+}^{n+1/2}, \dots, U_{i-1/2,-}^{n+1/2}, \dots)],$$

$U_{i+1/2,-}^{n+1/2}$ et $U_{i+1/2,+}^{n+1/2}$ jouant respectivement le rôle de U_i^n et U_{i+1}^n pour le calcul des flux ainsi que pour le calcul de la vitesse lagrangienne de l'interface $i + 1/2$ (les ... indiquent que les autres grandeurs macroscopiques interviennent aussi dans le calcul des flux).

Notons que cette technique de montée en ordre peut être justifiée dans le cas de l'équation de transport linéaire (1.4).

1.4 Résultats numériques dans le cadre lagrangien

On montre ici des résultats numériques attestant du bon comportement du schéma cinétique lagrangien proposé, la vitesse $U_{i+1/2}^n$ étant donnée par (1.30) (l'utilisation de (1.29) n'apporte pas de différences notables pour les cas tests étudiés ici).

1.4.1 Équations d'Euler isentropiques

On se place dans le cas où $P/\rho^3 = 1/12$ et on prend pour la construction du schéma cinétique la distribution

$$\chi(v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} 1_{\{|v| < \sqrt{3}\}}.$$

On consultera l'annexe A pour le calcul précis des flux (1.19) évalués avec cette fonction.

Tube à choc de Sod On représente ici - cf. figures 1 et 2 - la solution entièrement fluide du tube à choc de Sod superposée avec la solution analytique. On constate que le schéma cinétique lagrangien est correct. Les conditions initiales sont les suivantes

$$x < 0.5 \implies \begin{cases} U(t=0, x) = 0, \\ \rho(t=0, x) = 0.125 \end{cases}$$

et

$$x > 0.5 \implies \begin{cases} U(t=0, x) = 0, \\ \rho(t=0, x) = 1. \end{cases}$$

Paramètres numériques :

$M_x = 200$ (i.e. nombre de maille en espace),

$\mu = 0.5$ (i.e. viscosité numérique liée au calcul de $U_{i+1/2}$),

Tps. CPU = 1 s..

Tube à choc de Noh Ce cas test simule la collision de deux écoulements. Les conditions initiales sont les suivantes

$$x < 0.5 \implies \begin{cases} U(t=0, x) = 1, \\ \rho(t=0, x) = 1 \end{cases}$$

et

$$x > 0.5 \implies \begin{cases} U(t=0, x) = -1, \\ \rho(t=0, x) = 1. \end{cases}$$

On constate sur les figures 3 et 4 que ce tube à choc est bien traité et que le phénomène de *wall heating* n'apparaît pas ici ce qui est normal puisque celui-ci vient de la résolution de l'équation d'énergie non prise en compte ici (voir ci-dessous).

Paramètres numériques :

- $M_x = 200$,
- $\mu = 0.5$,
- Tps. CPU = 1 s..

1.4.2 Équations d'Euler classiques

On s'intéresse maintenant à la résolution des équations d'Euler complètes avec $\gamma = 1.4$ et on prend

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)$$

avec $\lambda = 4$ (car $\gamma = 1.4$). On consultera l'annexe A pour le calcul précis des flux (1.19) évalués avec cette fonction.

On compare maintenant les résultats numériques donnés par le schéma cinétique lagrangien aux résultats donnés par le schéma numérique lagrangien proposé par B. Després (cf. [71]), schéma dont le caractère entropique a pu être clairement établi. On s'intéressera plus particulièrement au phénomène de *wall heating* caractéristique des schémas lagrangiens, phénomène qui entraîne pour des cas bien particuliers une surestimation de la température et une sous-estimation de la densité (voir le tube à choc de Noh).

Tube à choc de Sod Les conditions initiales sont les suivantes

$$x < 0.5 \implies \begin{cases} U(t = 0, x) = 0, \\ \rho(t = 0, x) = 1, \\ P(t = 0, x) = 1.0 \end{cases}$$

et

$$x > 0.5 \implies \begin{cases} U(t = 0, x) = 0, \\ \rho(t = 0, x) = 0.125, \\ P(t = 0, x) = 0.1. \end{cases}$$

On constate sur les figures 5 à 8 que la solution donnée par le schéma cinétique lagrangien est correcte, l'ordre 2 faisant baisser sensiblement la diffusion numérique du schéma.

La figure 6 montre que ce schéma a le défaut de ne pas pouvoir résoudre exactement le problème de l'advection pure contrairement au schéma de B. Després ce qui engendre l'apparition d'une légère instabilité en vitesse au niveau de la discontinuité de contact. La figure 9 (entropie $H = -\log(P/\rho^\gamma)$) montre que ce mauvais traitement de la discontinuité de contact entraîne vraisemblablement en retour une forte diminution du phénomène de *wall heating* (pour ce cas test) grâce à un processus de dissipation numérique intrinsèque aux schémas cinétiques.

On constate en effet sur les figures 10 et 12 que lorsque le *CFL* est faible (cf. figure 12), ce *wall heating* est absent dès les premières itérations dans le cas du schéma cinétique alors que dans le cas du schéma de B. Després, l'énergie totale au niveau de la discontinuité de contact se stabilise à une valeur supérieure à celle du palier (cf. figure 10).

Paramètres numériques :

- $M_x = 200$,
- $\mu = 0.5$,
- Tps. CPU = 2 à 4 s. suivant le *CFL*.

Tube à choc de Noh Les conditions initiales sont les suivantes

$$x < 0.5 \implies \begin{cases} U(t = 0, x) = 1, \\ \rho(t = 0, x) = 1, \\ T(t = 0, x) = 0 \end{cases}$$

et

$$x > 0.5 \implies \begin{cases} U(t = 0, x) = -1, \\ \rho(t = 0, x) = 1, \\ T(t = 0, x) = 0. \end{cases}$$

On constate que - comme pour le tube à choc de Sod - le *wall heating*, très présent pour ce cas test, est beaucoup moins brutal pour le schéma cinétique que pour le schéma de B. Després (cf. figures 13 à 16).

Paramètres numériques :

- $M_x = 200$,
- $\mu = 0.5$,
- Tps. CPU = 52 s. pour le schéma cinétique,
- Tps. CPU = 4 s. pour le schéma de B. Després.

1.5 Conclusion

On a construit dans ce chapitre un schéma cinétique lagrangien pour résoudre les équations d'Euler isentropiques ou classiques. Des tests numériques ont pu montrer le bon comportement du schéma proposé.

Dans les chapitres suivants, on se propose de montrer que ce schéma permet un raccordement naturel à une zone cinétique.

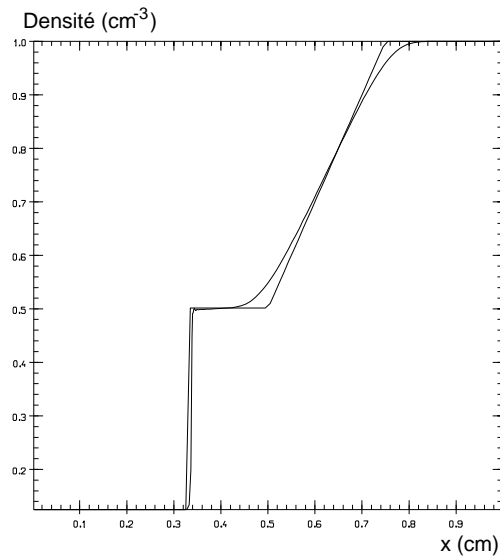


Fig. 1 : ρ

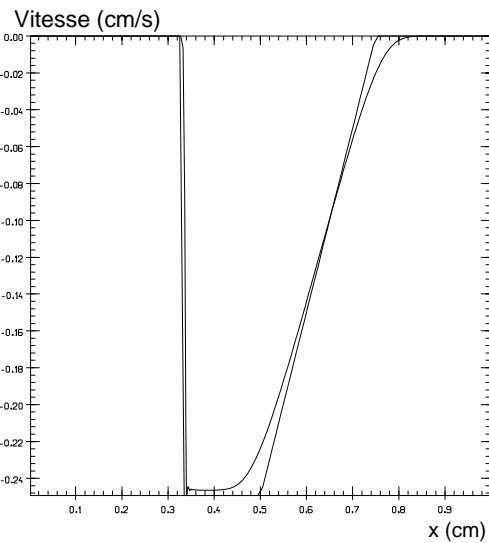


Fig. 2 : U

Tube à choc de Sod.
Euler isentropique.
Résolution de l'équation fluide seule.
Profils de densité et de vitesse à $t = 0.5$ s.
superposés avec la solution exacte.

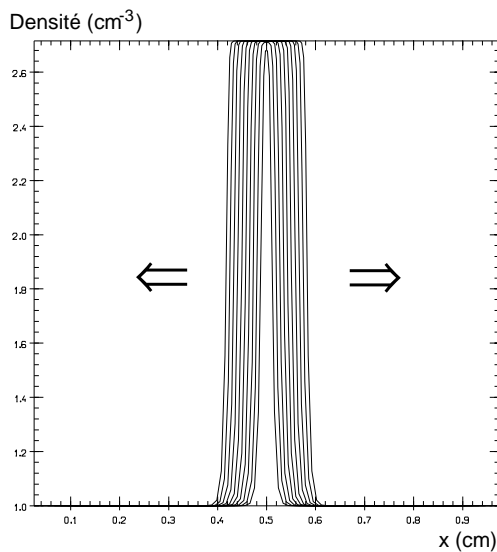


Fig. 3 : ρ

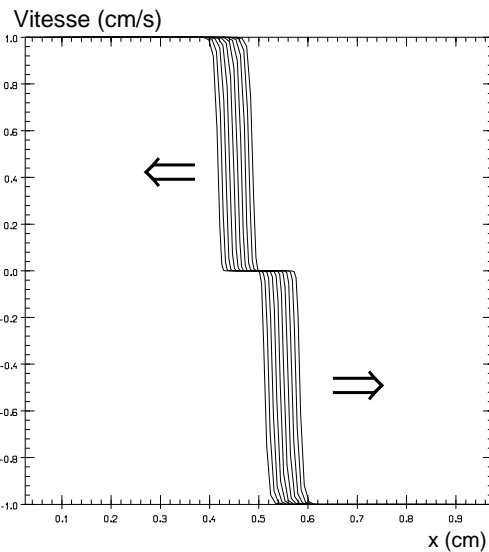


Fig. 4 : U

Tube à choc de Noh.
Euler isentropique.
Résolution de l'équation fluide seule.
Profils de densité et de vitesse pour $0 < t < 0.15$ s.

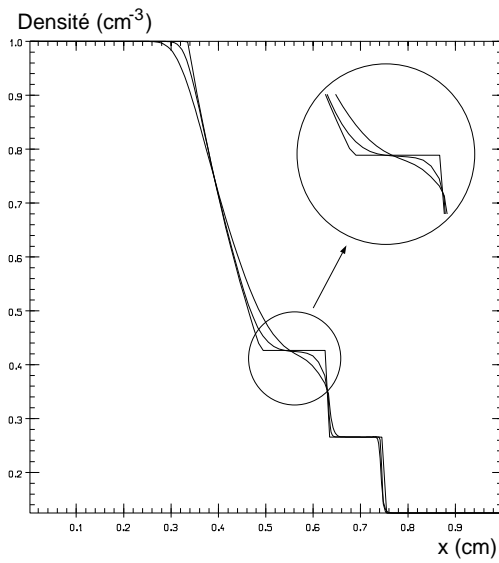


Fig. 5 : ρ

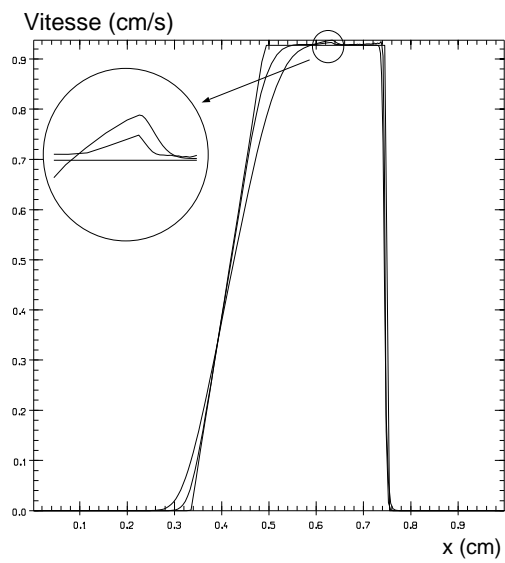


Fig. 6 : U

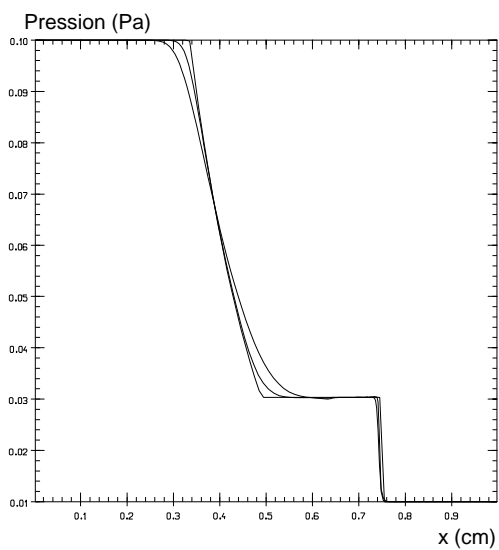


Fig. 7 : P

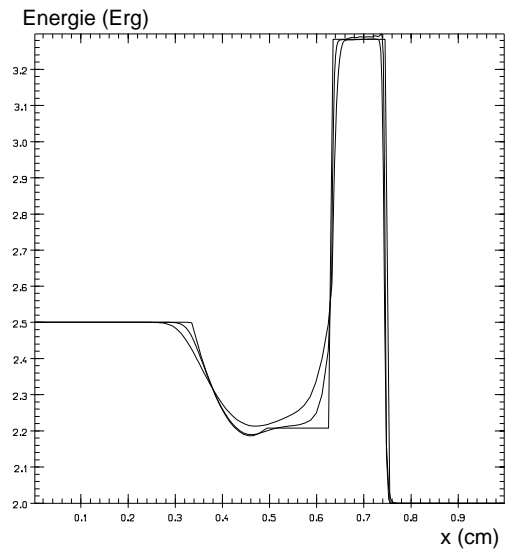


Fig. 8 : E

Tube à choc de Sod.
 Euler complet ($\gamma = 1.4$).
 Résolution de l'équation fluide seule.
 Profils de densité, vitesse, pression et énergie totale à $t = 0.14$ s.
 (ordre 1 et 2)
 superposés avec la solution exacte.

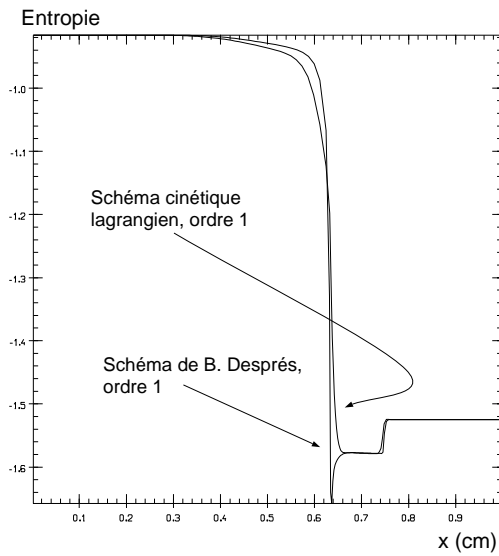


Fig. 9 : H

Comparaison de l'entropie entre le schéma cinétique et celui de B. Després

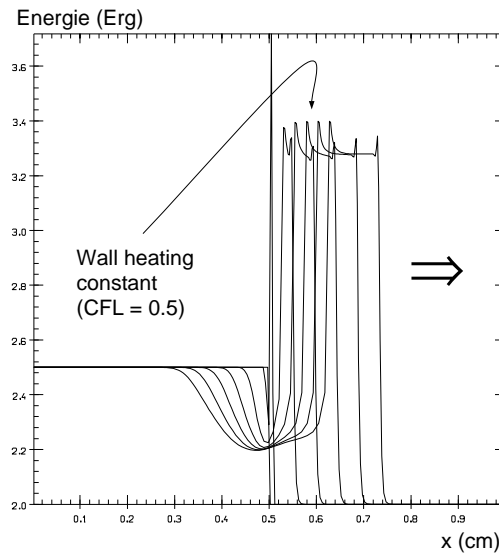


Fig. 10 : E

Energie totale pour $0 < t < 0.14$ s.. Schéma B. Després

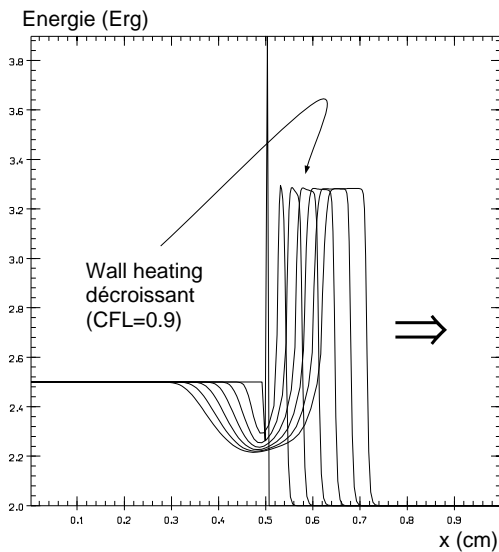


Fig. 11 : E

Energie totale pour $0 < t < 0.14$ s.. Schéma cinétique

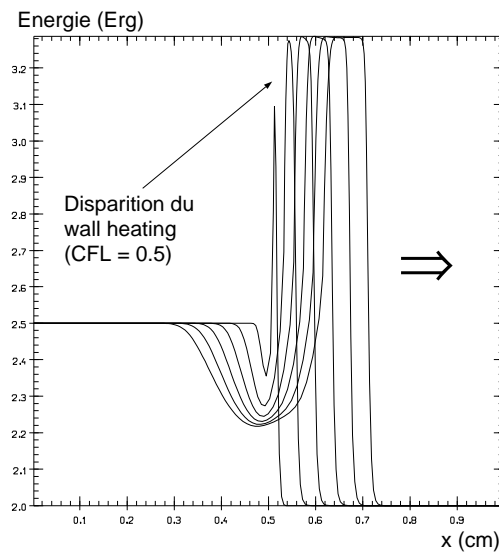


Fig. 12 : E

Energie totale pour $0 < t < 0.14$ s.. Schéma cinétique

Tube à choc de Sod.
Euler complet ($\gamma = 1.4$).
Résolution de l'équation fluide seule.
Etude du phénomène de Wall Heating.

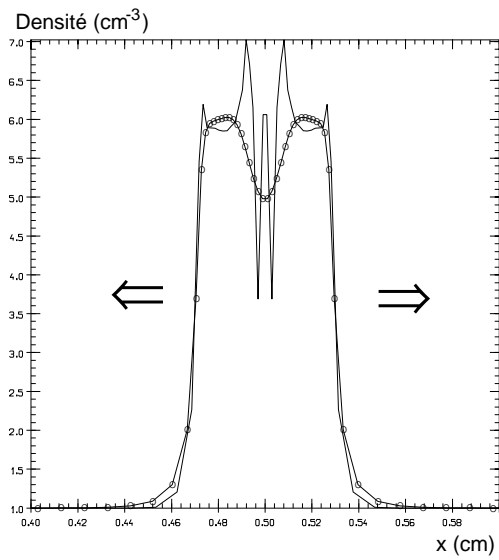


Fig. 13 : ρ

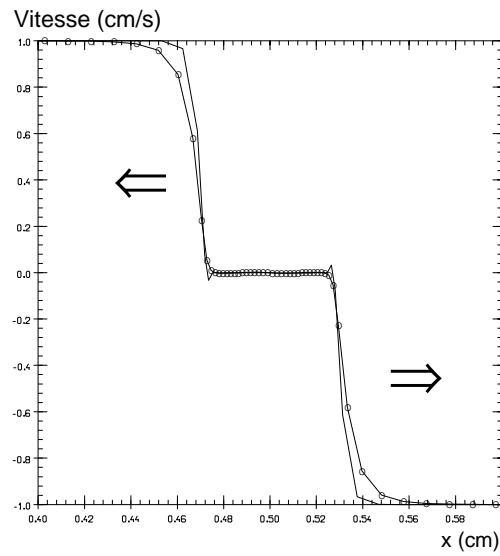


Fig. 14 : U

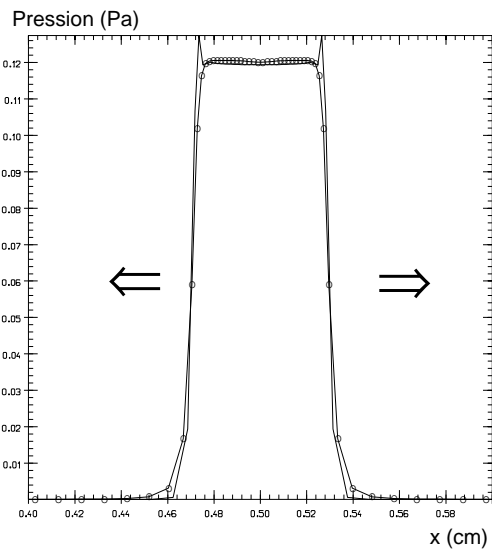


Fig. 15 : P

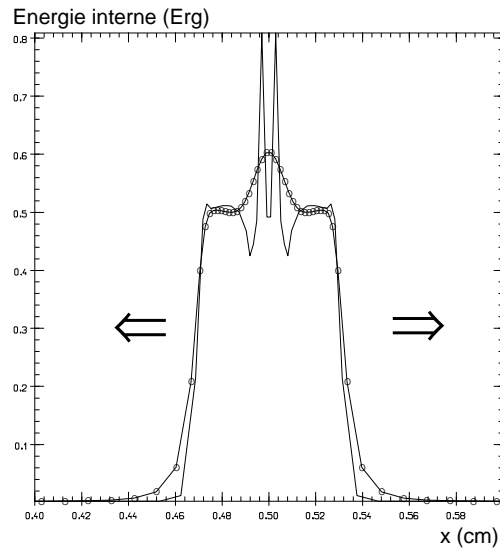


Fig. 16 : ϵ

Tube à choc de Noh.
 Euler complet ($\gamma = 1.4$).
 Résolution de l'équation fluide seule.
 Comparaison du schéma cinétique (o)
 avec le schéma de B. Després.

Chapitre 2

Couplage instationnaire de l'équation cinétique de Lions, Perthame et Tadmor avec sa limite fluide

On se propose ici de décrire la stratégie de couplage utilisée dans le cadre d'un modèle cinétique très simple : le modèle cinétique de Lions, Perthame et Tadmor (cf. [70]).

2.1 Le modèle cinétique de Lions, Perthame et Tadmor

Soit $f(t, x, v)$ la densité de particule à l'instant t , à la position $x \in \mathbb{R}$ et ayant la vitesse $v \in \mathbb{R}$. f est solution de l'équation de Lions, Perthame et Tadmor (L.P.T.) lorsque

$$\partial_t f + v \partial_x f = Q(f) \equiv \omega \cdot (\mathcal{M}_f - f) \quad (2.1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_f = \frac{1}{m} 1_{\{|v-U| \leq \rho/2\}}, \\ \rho = mN = \int_{\mathbb{R}} m f(v) dv, \\ \rho U = \int_{\mathbb{R}} m v f(v) dv, \\ \omega \in \mathbb{R}_*^+, \end{array} \right.$$

ω étant une fréquence de collision.

L'équation de L.P.T. est donc une équation du même type que l'équation de B.G.K. classique (voir le chapitre suivant) à ceci près que les maxwelliennes \mathcal{M}_f sont des crénaux et ne dépendent que de deux paramètres macroscopiques (ρ et U).

Il est facile de constater que l'opérateur de collision conserve le nombre de particules et la quantité de mouvement à savoir

$$\int_{\mathbb{R}} Q(f)dv = \int_{\mathbb{R}} Q(f)v dv = 0.$$

Par contre, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique car

$$\int_{\mathbb{R}} Q(f)v^2 dv \neq 0$$

contrairement à l'équation de B.G.K. (voir le chapitre suivant).

En généralisant la notion d'entropie à ce modèle cinétique, Lions, Perthame et Tadmor (cf. [70]) ont pu établir l'analogue du théorème H de Boltzmann :

Proposition 2.1 (Théorème H) *Pour toute fonction convexe $\varphi(v)$, on a l'inégalité*

$$\int_{\mathbb{R}} Q(f)\varphi(v)dv \leq 0.$$

$\int_{\mathbb{R}} f(v)\varphi(v)dv$ définit donc une entropie macroscopique. Ce théorème H permet ensuite d'établir rigoureusement la limite fluide de ce modèle (voir aussi [70]) :

Théorème 2.1 *Lorsque ω tend vers $+\infty$, ρ et U sont solutions au sens des distributions du système d'équations différentielles*

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + P) = 0, \\ P = \rho^3/12, \end{cases} \quad (2.2)$$

système qui s'apparente au système des équations d'Euler isentropiques en géométrie monodimensionnelle plane avec $\gamma = 3$.

Formellement, on retrouve ce résultat de la façon suivante :

o L'obtention de l'équation de continuité est immédiate en intégrant par rapport à v l'équation de L.P.T..

o Pour obtenir l'équation de transport de la quantité de mouvement macroscopique, on multiplie par mv l'équation de L.P.T. et on intègre à nouveau par rapport à cette variable. On trouve

$$\partial_t(\rho U) + \partial_x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} v^2 f dv \right) = 0.$$

Or, on peut écrire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} mv^2 f dv = \int_{-\infty}^{+\infty} mvU f dv + \int_{-\infty}^{+\infty} mv(v - U) f dv = \rho U^2 + P$$

avec $P = \int_{-\infty}^{+\infty} mv(v - U) f dv$. Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, on voit que $f \rightarrow \mathcal{M}_f$. Donc

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} mv(v - U) f dv \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} mv(v - U) \mathcal{M}_f dv = \rho^3 / 12$$

ce qui donne bien le système des équations d'Euler isentropiques avec $\gamma = 3$. La démonstration rigoureuse de ce théorème est bien-sûr plus compliquée (cf. [70]).

Outre leur simplicité, l'avantage des équations de L.P.T. repose sur la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Supposons que le couple (ρ, U) soit une solution régulière en temps et en espace des équations d'Euler isentropiques. Alors l'équation cinétique de L.P.T. admet la solution $f = \mathcal{M}_f$ au sens des distributions.*

Preuve de la proposition 2.2 On établit facilement qu'au sens des distributions, on a

$$m \partial_t \mathcal{M}_f = \delta(v - U - \rho/2) \cdot \partial_t(U + \rho/2) - \delta(v - U + \rho/2) \cdot \partial_t(U - \rho/2)$$

et

$$mv \partial_x \mathcal{M}_f = (U + \rho/2) \delta(v - U - \rho/2) \cdot \partial_x(U + \rho/2) - (U - \rho/2) \delta(v - U + \rho/2) \cdot \partial_x(U - \rho/2)$$

où $\delta(v)$ est la distribution de Dirac classique. On a donc

$$\begin{aligned} m (\partial_t \mathcal{M}_f + v \partial_x \mathcal{M}_f) = \\ \delta(v - U - \rho/2) \cdot \{ \partial_t(U + \rho/2) + (U + \rho/2) \partial_x(U + \rho/2) \} \\ + \delta(v - U + \rho/2) \cdot \{ \partial_t(U - \rho/2) + (U - \rho/2) \partial_x(U - \rho/2) \}. \end{aligned}$$

Or, on peut écrire

$$\partial_t(U + \rho/2) + (U + \rho/2)\partial_x(U + \rho/2) = \partial_t U + U\partial_x U + \frac{\rho}{4}\partial_x \rho + \frac{1}{2}(\partial_t \rho + \partial_x(\rho U))$$

et

$$\partial_t(U - \rho/2) + (U - \rho/2)\partial_x(U - \rho/2) = \partial_t U + U\partial_x U + \frac{\rho}{4}\partial_x \rho - \frac{1}{2}(\partial_t \rho + \partial_x(\rho U)).$$

Comme $\frac{\rho}{4}\partial_x \rho = \frac{1}{\rho}\partial_x P$ car $P = \rho^3/12$ et que ρ et U sont des solutions régulières d'Euler isentropique, on en déduit que

$$\partial_t \mathcal{M}_f + v\partial_x \mathcal{M}_f = 0$$

ce qui permet de conclure en remarquant que $Q(\mathcal{M}_f) = 0$. \square

Conséquences Si les conditions initiales sont maxwelliennes, les équations de L.P.T. admettront comme solution (au sens des distributions) pour toute fréquence de collision ω la maxwellienne correspondant à la solution exacte des équations d'Euler s'il n'y a pas de choc. On aura donc des effets cinétiques que lors du passage de chocs.

Remarque sur l'entropie macroscopique des équations d'Euler isentropiques En prenant $\varphi(v) = \frac{1}{2}v^2$ puis en appliquant le théorème H, on obtient l'équation suivante qui permet de caractériser une entropie macroscopique possible H à savoir

$$\begin{cases} \partial_t(\rho H) + \partial_x[(\rho H + P)U] \leq 0, \\ H = \frac{1}{2}U^2 + \frac{P}{2\rho}. \end{cases}$$

On retrouve ici un résultat classique pour le p-système (terminologie mathématique pour les équations d'Euler isentropiques) à savoir que l'énergie totale joue dans ce cas le rôle d'entropie (cf. par exemple [73] p. 22).

2.2 Résolution numérique de l'équation de L.P.T.

On résout l'équation de L.P.T. en procédant d'abord à une phase de transport libre (advection pure) puis à une phase de collisions homogènes en espace: on applique donc la technique de « splitting » décrite au deuxième chapitre de la première partie.

On considère pour cela un maillage monodimensionnel plan constitué de N_x mailles physiques numérotées de 1 à N_x et on se donne à chaque pas de temps une vitesse de grille $V_{i+1/2}^n$ pour $i \in \{0, \dots, N_x\}$.

2.2.1 Phase d'advection et conditions aux limites

On doit donc résoudre l'équation d'advection (1.4) sur un domaine en mouvement. Le schéma numérique utilisé est celui présenté dans la partie précédente : voir la proposition 1.4.

Conditions aux limites Dans le cas qui nous intéresse, seules les interfaces $1/2$ et $N_x + 1/2$ sont concernées par les conditions aux limites. Il convient donc de se donner $f(v)$ respectivement pour $v > V_{1/2}$ et pour $v < V_{N_x+1/2}$ et c'est dans le calcul des flux microscopiques $\Phi_{1/2}$ et $\Phi_{N_x+1/2}$ que ces conditions interviendront.

La condition aux limites utilisée est de type réflexion spéculaire : une particule ayant la vitesse v et rencontrant une surface qui se déplace à la vitesse V est réfléchiée avec la vitesse v' telle que

$$v' = 2V - v.$$

Traiter cette condition de réflexion spéculaire aux interfaces extrêmes revient ici à créer les mailles fictives 0 et $N_x + 1$ telles que

$$f_0^n(v) = f_1^n(2V_{1/2}^n - v) \text{ et } f_{N_x+1}^n(v) = f_{N_x}^n(2V_{N_x+1/2}^n - v).$$

On utilise alors ces deux nouvelles mailles avec (1.10) pour évaluer les flux $\Phi_{1/2}$ et $\Phi_{N_x+1/2}$.

Cette condition aux limites préserve la conservation de la masse puisque l'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_{1/2}(v) dv = \int_{v > V_{1/2}^n} (v - V_{1/2}^n) f_0^n(v) dv + \int_{v < V_{1/2}^n} (v - V_{1/2}^n) f_1^n(v) dv.$$

Or on peut écrire que

$$\begin{aligned} \int_{v > V_{1/2}^n} (v - V_{1/2}^n) f_0^n(v) dv &= - \int_{v < V_{1/2}^n} (v - V_{1/2}^n) f_0^n(2V_{1/2}^n - v) dv \\ &= - \int_{v < V_{1/2}^n} (v - V_{1/2}^n) f_1^n(v) dv. \end{aligned}$$

Donc, $\int_{\mathbb{R}} \Phi_{1/2}(v) dv = 0$; et de même $\int_{\mathbb{R}} \Phi_{N_x+1/2}(v) dv = 0$ ce qui implique que la masse totale est conservée.

Remarques ◦ Dans toutes les simulations qui vont suivre, les vitesses de grille sont définies de la façon suivante :

On impose $V_{1/2}^n = 0$ et on suppose connu $V_{N_x+1/2}^n$ pour tout n . Pour que l'épaisseur des mailles soit la même dans tout le domaine maillé, on prendra la loi de vitesse aux interfaces

$$V_{i+1/2}^n = \frac{i}{N_x} \cdot V_{N_x+1/2}^n, \quad i = 0, \dots, N_x.$$

○ On peut aussi utiliser la condition aux limites dite de réflexion diffuse. Pour l'interface $N_x + 1/2$, cela revient à dire que les particules sont réémises selon une maxwellienne $\mathcal{M}(\rho, U) \equiv \frac{1}{m} 1_{\{|v-U| \leq \rho/2\}}$ et que l'on a $V_{N_x+1/2}^n = U$. Il suffit ensuite d'imposer

$$f_{N_x+1}(v) = \mathcal{M}(\rho, U)(v).$$

On peut prendre ρ quelconque a priori mais la conservation de la masse ne sera vérifiée que si

$$\int_{v < U} (v - U) \mathcal{M}(\rho, U)(v) dv = \int_{v > U} (v - U) f_{N_x}^n(v) dv$$

soit encore lorsque

$$\rho^2 = 8 \int_{v > U} m(v - U) f_{N_x}^n(v) dv.$$

2.2.2 Phase de collisions

On s'intéresse maintenant à la phase collisionnelle de (2.1) sur un domaine des vitesses Ω discret et borné et défini par la grille régulière $(v_j)_{j \in \{1, \dots, j_{\max}\}}$ ($\Delta v = v_{j+1} - v_j = C^{ste}$). L'équation à résoudre est donc

$$\partial_t f = \omega \cdot [\mathcal{M}_f - f].$$

Or, pour toute condition initiale $f(t = 0, v) = f^0(v)$, la solution analytique de l'équation (2.1) homogène en espace est donnée par

$$f(t, v) = [1 - \exp(-\omega t)] \cdot \mathcal{M}_{f^0}(v) + \exp(-\omega t) \cdot f^0(v)$$

où \mathcal{M}_{f^0} est la maxwellienne associée à f^0 . Remarquons que \mathcal{M}_{f^0} est aussi la maxwellienne associée à $f(t, v)$ pour tout t , l'opérateur de collision conservant la masse et la quantité de mouvement. On utilise donc le schéma temporel suivant

$$f^{n+1}(v) = [1 - \exp(-\omega \Delta t)] \cdot \mathcal{M}_{f^n}(v) + \exp(-\omega \Delta t) \cdot f^n(v). \quad (2.3)$$

Sur un domaine continu et infini en vitesse, ce schéma numérique est bien-sûr conservatif. Mais lorsque le domaine des vitesses est discret et borné, on a

$$\rho^{n+1} = \sum_j m f^{n+1}(v_j) \Delta v,$$

$$\rho^{n+1}U^{n+1} = \sum_j m f^{n+1}(v_j) v_j \Delta v$$

soit donc

$$\rho^{n+1} = \exp(-\omega \Delta t) \rho^n + [1 - \exp(-\omega \Delta t)] \cdot \sum_j m \mathcal{M}_{f^n}(v_j) \Delta v,$$

$$\rho^{n+1}U^{n+1} = \exp(-\omega \Delta t) \rho^n U^n + [1 - \exp(-\omega \Delta t)] \cdot \sum_j m \mathcal{M}_{f^n}(v_j) v_j \Delta v.$$

Or, il n'y a aucune raison pour que $\sum_j m \mathcal{M}_{f^n}(v_j) \Delta v$ et $\sum_j m \mathcal{M}_{f^n}(v_j) v_j \Delta v$ soient respectivement exactement égaux à ρ^n et à $\rho^n U^n$. On doit donc procéder à une phase de correction pour que les moments discrets de f^{n+1} soient exactement égaux à ceux de f^n .

On a choisi la méthode de Cheremissin (cf. [39]) qui consiste à corriger f^{n+1} par un polynôme $\mathcal{P}(v) = 1 + a + bv^p$. On renvoie le lecteur à l'annexe C de la troisième partie pour plus de détails. On peut juste remarquer que l'on a constaté empiriquement que la correction fonctionne très bien si p est impair et ne fonctionne pas du tout si p est pair (cf. figure 27) pour ce modèle cinétique. Sauf mention contraire, on prendra $p = 1$.

On constate enfin, qu'à la phase de correction près, ce schéma numérique préserve la positivité de f et surtout n'est pas astreint à un critère de type CFL.

2.3 Couplage du modèle L.P.T. avec Euler isentropique et choix de la fonction χ pour la construction du schéma cinétique

L'idée est de traiter une zone cinétique $\{i = 1, \dots, N_x\}$ couplée avec une zone fluide $\{i = N_x + 1, \dots, N_x + M_x\}$ où l'on résout respectivement les équations de L.P.T. et les équations d'Euler isentropiques.

2.3.1 Choix de la fonction χ

Se pose maintenant la question du choix de χ pour la construction du schéma cinétique. La distribution χ correspondant à la maxwellienne du modèle L.P.T. est

$$\chi(v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} 1_{\{|v| < \sqrt{3}\}}.$$

Ceci justifie donc le choix de cette distribution particulière χ proposé au chapitre précédent pour établir le schéma cinétique de résolution des équations d'Euler

isentropiques (voir le théorème 1.1 et son application numérique) car la résolution de ces équations dans le domaine fluide revient alors à résoudre l'équation cinétique de L.P.T. dans ce même domaine mais avec une fréquence de collision ω infinie.

Il reste à expliciter précisément la stratégie de couplage au niveau de l'interface cinétique / fluide indiquée par $N_x + 1/2$. On cherche donc :

- d'une part à définir la distribution f de la maille fantôme adjacente à la dernière maille cinétique qui servira de condition aux limites pour la phase d'advection dans le domaine cinétique ;
- d'autre part à expliciter les flux macroscopiques à l'interface cinétique / fluide, conditions aux limites à gauche pour le domaine fluide.

2.3.2 Interface cinétique / fluide lagrangienne « stricte »

Il s'agit ici d'une interface lagrangienne *mais dans un sens fort* puisque l'on interdit le passage de particules cinétiques vers le domaine fluide et que l'on impose un flux de masse nul du domaine fluide au domaine cinétique : chaque domaine a donc bien une masse constante.

La vitesse de l'interface cinétique / fluide est a priori donnée par (1.30) par exemple où la pression $P_{N_x}^n$ est donnée par $P_{N_x}^n = \sum_j m(v_j - U_{N_x}^n)^2 f_{N_x}^n(v) \Delta v$. Il faut alors définir la loi de réémission des particules en interaction avec l'interface. De façon naturelle, on peut réémettre selon la maxwellienne $\mathcal{M}(\rho, U)$ où ρ et U doivent être définis de telle sorte que la masse dans la partie cinétique est conservée et la quantité de mouvement issue de cette interaction avec l'interface est égale à la quantité de mouvement venant du domaine fluide. La vitesse de l'interface $V_{N_x+1/2}^n$ étant connue, on doit donc résoudre le système non linéaire de deux équations à deux inconnues suivant :

$$\mathcal{A}(\rho, U) \equiv \int_{v < V_{N_x+1/2}^n} (v - V_{N_x+1/2}^n) \mathcal{M}(\rho, U)(v) dv = - \int_{v > V_{N_x+1/2}^n} (v - V_{N_x+1/2}^n) f_{N_x}^n(v) dv,$$

$$\mathcal{B}(\rho, U) \equiv \int_{v < V_{N_x+1/2}^n} v(v - V_{N_x+1/2}^n) \mathcal{M}(\rho, U)(v) dv = \int_{v < V_{N_x+1/2}^n} v(v - V_{N_x+1/2}^n) \mathcal{M}_{N_x+1}^n(v) dv,$$

$\mathcal{M}_{N_x+1}^n(v)$ étant la maxwellienne de la première maille fluide définie par $\rho_{N_x+1}^n$ et $U_{N_x+1}^n$.

Pour que le problème soit bien posé, il faut que la maxwellienne $\mathcal{M}(\rho, U)$ soit définie de manière univoque. Or, il existe un cas très simple qui montre que ce

système peut dans des situations thermodynamiques tout à fait raisonnables être dégénéré.

En effet, supposons qu'il y ait une situation d'équilibre entre le domaine cinétique et le domaine fluide c'est à dire

$$U_{N_x} = U_{N_x+1} = 0, \rho_{N_x} = \rho_{N_x+1}, P_{N_x} = P_{N_x+1} \text{ et } f_{N_x} = \frac{1}{m} 1_{\{|v| \leq \rho/2\}}.$$

Donc $V_{N_x+1/2} = 0$ d'après (1.30). Alors, toutes les maxwelliennes \mathcal{M} telles que $U - \rho/2 = U_{N_x} - \rho_{N_x}/2 = -\rho_{N_x}/2$ sont solutions du système en question.

On voit donc qu'il est possible de trouver des situations thermodynamiques tout à fait réalistes telles que ce système soit dégénéré. Ce comportement est bien-sûr lié à la forme particulière de la maxwellienne d'équilibre. Ce problème ne se poserait pas en ces termes dans le cas où les maxwelliennes seraient des gaussiennes (cas du couplage B.G.K. / Euler complet : voir le chapitre suivant). On peut aussi ajouter que la notion d'interface lagrangienne posée en ces termes n'est pas très adaptée à un modèle cinétique car on est alors obligé de postuler la loi d'interaction avec l'interface (ici réflexion diffuse).

Ce traitement lagrangien strict de l'interface cinétique / fluide pour ce modèle se traduisant en un problème mal posé, il s'avère donc nécessaire de procéder différemment.

2.3.3 Interface cinétique / fluide eulérienne mobile

On a vu dans le paragraphe précédent que le traitement lagrangien strict de l'interface n'est pas satisfaisant. Il faut donc a priori autoriser le passage de particules cinétiques vers le domaine fluide et donner une condition aux limites entrante pour l'équation de L.P.T.. Pour cette condition, il est naturel de prendre

$$f(v) = \mathcal{M}_{N_x+1}^n \quad \text{pour} \quad v < V_{N_x+1}^n.$$

Cette condition correspond à un traitement eulérien de l'interface, le flux de masse à l'interface n'étant pas forcément nul.

Il convient maintenant de choisir une vitesse de grille $V_{N_x+1/2}^n$ pour le déplacement de l'interface cinétique / fluide. Celle-ci peut être a priori quelconque. On propose les trois valeurs suivantes :

a) $V_{N_x+1/2}^n = 0$:

On fera ce choix lorsque les équations fluides seront résolues sur une grille fixe.

La résolution en variables eulériennes sur une grille variable ou en variables lagrangiennes pourrait entraîner dans ce cas un écrasement de la première maille fluide et donc un effondrement du pas de temps.

b) $V_{N_x+1/2}^n$ donnée par (1.29) ou (1.30) :

La résolution exacte de (1.25) étant très délicate, on choisit de retirer le caractère lagrangien (au sens classique) de la première maille fluide en autorisant un flux macroscopique de masse à l'interface cinétique / fluide, la vitesse $V_{N_x+1/2}^n$ étant donnée par les relations (1.29) ou (1.30).

Notons que lorsque la vitesse $V_{N_x+1/2}^n$ est ainsi fixée, le domaine fluide peut être résolu en variables eulériennes sur une grille variable ou en variables lagrangiennes pour les mailles $N_x + 2$ à N_{\max} .

Lorsque le domaine fluide est résolu en variables lagrangiennes, l'utilisation de (1.29) plutôt que (1.30) a le mérite pour des chocs faibles de rendre quasiment lagrangienne l'interface cinétique / fluide (en tout cas lorsque la dernière maille cinétique est à l'équilibre thermodynamique local) et ainsi, comme on le verra dans le cas du couplage B.G.K. / Euler d'éviter certaines instabilités (voir la figure 43) au niveau de l'interface, la transition entre le domaine non lagrangien (la zone cinétique) et le domaine lagrangien (la zone fluide) se faisant alors continûment.

La condition aux limites pour le domaine cinétique est donc maintenant parfaitement déterminée par la donnée de $V_{N_x+1/2}^n$ et de $\mathcal{M}_{N_x+1}^n$.

Comme avec ce traitement spécial de l'interface cinétique / fluide on retire tout caractère lagrangien à la première maille fluide, on doit procéder à un traitement spécial pour le calcul des flux dans cette maille *lorsque le domaine fluide est résolu en variables lagrangiennes* puisque dans ce cas l'interface $N_x + 3/2$ doit rester lagrangienne. On utilise alors le schéma mi eulérien, mi lagrangien suivant dans la première maille fluide

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{N_x+1}^{n+1} = \frac{\Delta x_{N_x+1}^n}{\Delta x_{N_x+1}^{n+1}} \rho_{N_x+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_{N_x+1}^{n+1}} \mathfrak{S}_{N_x+1/2}, \\ U_{N_x+1}^{n+1} = \frac{\Delta m_{N_x+1}^n}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} u_{N_x+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} [\wp_{N_x+3/2} - \wp_{N_x+1/2}]. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Les flux $\mathfrak{S}_{N_x+1/2}$ et $\wp_{N_x+1/2}$ sont donnés par (1.19), (1.20) et (1.21), la partie positive (1.20) étant évaluées numériquement à l'aide de la distribution $f_{N_x}^n$ et non pas à partir des formules analytiques établies en fixant la fonction χ (voir l'annexe A).

Le flux $\mathfrak{S}_{N_x+3/2}$ est pris nul pour conserver le caractère lagrangien de l'interface $N_x + 3/2$, ce flux caractérisant le transfert de masse entre les mailles fluides $N_x + 1$ et $N_x + 2$. Notons que lorsque le domaine fluide est résolu en variables eulériennes, le schéma numérique est formellement identique dans toutes les mailles du domaine fluide et est donné par le schéma (1.16), (1.17) et (1.18).

Par la suite, pour les cas tests numériques, on prendra $V_{N_x+1/2} = 0$ (cas *a*) ou $V_{N_x+1/2}$ donnée par (1.29) ou (1.30) (cas *b*).

2.3.4 Résumé de la technique de couplage

On a ainsi construit un schéma global de couplage cinétique / fluide comportant deux ou trois domaines selon que le domaine fluide est résolu en variables eulériennes ou lagrangiennes :

Si le domaine fluide est résolu en variables eulériennes, on a :

- Un domaine cinétique traité en grille fixe ou variable où l'on sépare la phase de transport libre de la phase collisionnelle homogène en espace (technique dite de « splitting » : voir aussi le deuxième chapitre de la première partie) : c'est bien-sûr lors de la phase de transport libre que l'on couplera le domaine fluide au domaine cinétique, la partie collisionnelle étant résolue à la fin du couplage proprement dit (ou en tout début de calcul).
- Un domaine fluide traité en variables eulériennes sur une grille fixe ou variable, le schéma utilisé dans les premières mailles de ce domaine étant le schéma cinétique défini par (1.16), (1.17) et (1.18). Si tout le domaine fluide n'est pas résolu avec le schéma cinétique, il faudra réfléchir au raccordement des deux schémas fluides. On choisira donc d'utiliser ici le schéma cinétique dans tout le domaine fluide pour ne pas avoir à résoudre ce problème.

Et si le domaine fluide est résolu en variables lagrangiennes, on a :

- Un domaine cinétique traité en grille variable.
- Un domaine fluide traité en variables eulériennes sur une grille variable où l'on utilise le schéma cinétique défini par (1.16), (1.17) et (1.18), la dernière maille de ce domaine étant traitée avec le schéma mi eulérien, mi lagrangien (2.4) pour permettre le raccordement au domaine lagrangien.

· Un domaine fluide traité en variables lagrangiennes où le choix du schéma est a priori libre à condition que toutes les valeurs soient centrées (ce qui exclue à première vue les schémas décentrés de type Von Neumann-Richtmyer : voir [72] p. 295-298). Ce schéma pourra être le schéma cinétique lagrangien ou, par exemple, le schéma de B. Després (cf. [71]) ; dans cette étude, on choisira le schéma cinétique lagrangien.

Remarque Pour ce dernier cas, on a limité le deuxième domaine à une seule maille où l'on utilise donc le schéma (2.4) bien qu'il soit aisé d'augmenter ce nombre de maille.

2.4 Résultats numériques

On présente dans ce paragraphe quelques résultats numériques attestant du bon comportement du schéma global de couplage de l'équation cinétique de Lions, Perthame et Tadmor avec sa limite fluide.

2.4.1 Équation de L.P.T.

Dans cette section, on simule uniquement l'équation cinétique de L.P.T..

Effets cinétiques sur un choc plan Mach 5.3 initié par un piston On cherche ici à valider la résolution de l'équation cinétique de L.P.T. en initiant un choc plan par la mise en mouvement du mur de droite, celui de gauche restant fixe. On choisit les conditions aux limites et initiales suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} U(t=0, x) = 0, \\ \rho(t=0, x) = 0.125 \implies c_0 = 0.0625, \\ V_{piston} = V_{N+1/2}^n = -0.2492, \\ \text{Réflexion spéculaire sur les deux murs,} \\ \text{Longueur du domaine cinétique} = 0.5. \end{array} \right.$$

Les relations d'Hugoniot pour Euler isentropique avec $\gamma = 3$ donnent les conditions suivantes derrière le choc

$$\left\{ \begin{array}{l} U = -0.2492, \\ \rho = 0.5014 \end{array} \right.$$

avec une vitesse de choc

$$V_{choc} = -0.3320$$

ce qui correspond bien à un choc Mach 5.3 ($= |V_{choc}|/c_0$).

Lorsque ω est petit ($\omega = 1$), on reproduit sur les figures 17 à 20 la distribution $f(t, x, v)$ à t fixé et pour différentes valeurs de x à l'intérieur du front de choc qui est très étalé comme le montre la figure 21 (T est ici définie par $T \equiv P/\rho$).

On constate que la distribution évolue quasi continûment avec x , les distributions tendant à être des bi ou tri-maxwelliennes dans le cœur du front de choc (cf. figures 17 à 20). Notons que ce comportement est bien-sûr caractéristique des processus faiblement collisionnels.

Sur les figures 21 à 24, on constate que l'on peut considérer que $\omega = 10^3$ correspond à un gaz très collisionnels : les effets cinétiques ont disparu.

Paramètres numériques :

- $N_x = 500$ (i.e. maillage en espace dans la partie cinétique),
- $j_{\max} = 200$ (i.e. maillage en vitesse),
- Tps. CPU = 77 s..

2.4.2 Couplage L.P.T. / Euler isentropique

On s'intéresse maintenant au couplage des équations cinétiques de L.P.T. avec leur limite fluide. Le domaine fluide est résolu en variables lagrangiennes à partir de la maille $N_x + 2$. La première maille fluide, c'est à dire la maille $N_x + 1$, est donc traitée avec le schéma mi eulérien, mi lagrangien (2.4). La vitesse $V_{N_x+1/2}^n$ de l'interface cinétique / fluide est donnée par (1.30).

Tube à choc de Sod avec ω grand et constant On teste ici le couplage pour $\omega = 10^3$. On s'attend donc à retrouver la solution fluide. L'interface cinétique / fluide est initialement placée en $x = 0.7$ ou en $x = 0.4$: l'interface va donc subir le passage de la détente ou du choc. On constate que tout se passe bien sur les figures 25 et 26.

Paramètres numériques :

- $N_x = 500$ et $M_x = 100$
(i.e. maillage en espace pour le domaine cinétique et pour le domaine fluide),
- $j_{\max} = 200$,
- $\mu = 0.5$,
- Tps. CPU = 25 s..

Sur la figure 27, on constate que la correction Cheremissin avec un degré du polynôme correctif $p = 2$ ne fonctionne pas du tout.

Tube à choc de Sod avec $\omega = \omega(\rho)$ Ici, pour valider définitivement la stratégie de couplage proposée pour ce modèle, on se place dans un cadre plus réaliste où le couplage cinétique / fluide est rendu nécessaire par l'existence d'une zone peu collisionnelle et d'une zone fortement collisionnelle.

Pour ce faire, on choisit une loi $\omega = \omega(\rho)$ (cf. figure 28) telle que ω soit une fonction croissante de la densité ρ (plus le milieu sera dense, plus celui-ci sera collisionnel). On prend

$$\omega(\rho) = \frac{\omega_{\max}(\rho^8 - \rho_{\min}^8) - \omega_{\min}(\rho^8 - \rho_{\max}^8)}{\rho_{\max}^8 - \rho_{\min}^8} \quad (2.5)$$

avec

$$\begin{cases} \omega_{\min} = 1, \\ \omega_{\max} = 10^3, \\ \rho_{\min} = 0.125, \\ \rho_{\max} = 0.5. \end{cases}$$

Il est donc naturel de placer l'interface cinétique / fluide en $x = 0.5$ à $t = 0$.

On constate sur les figures 29 à 32 que le couplage se passe bien, les effets de diffusion dûs au grand libre parcours moyen des particules dans la zone de faible densité étant bien pris en compte.

D'autre part, on vérifie aussi sur ces mêmes figures que la solution donnée par le couplage est bien quasiment confondue avec la solution donnée par la résolution de l'équation cinétique dans tout le domaine, le couplage permettant de réduire de manière importante le temps de calcul.

Paramètres numériques :

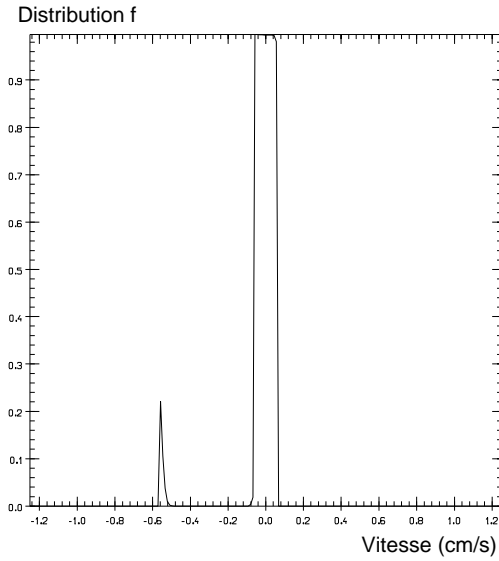
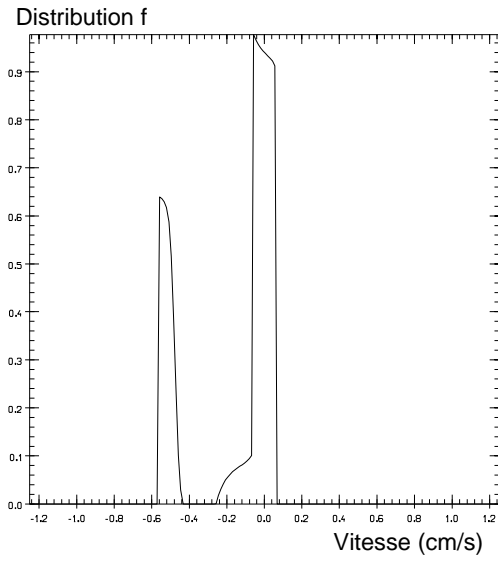
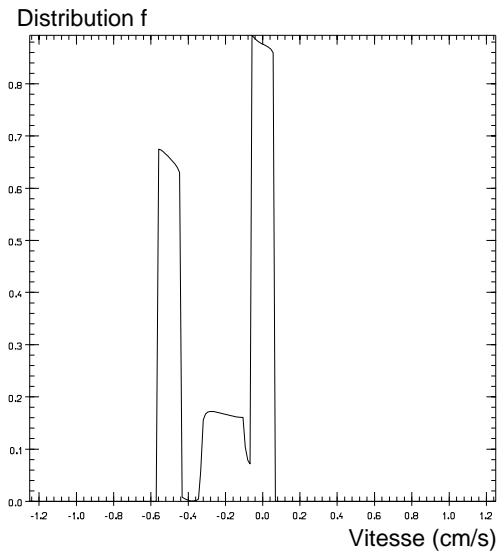
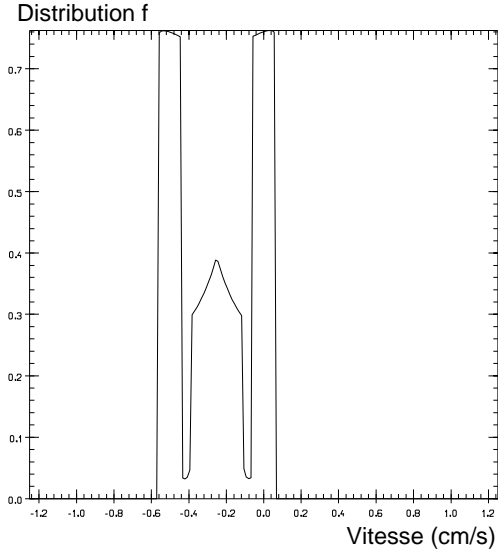
- $N_x = 500$ et $M_x = 100$ (figures 29 à 32),
- $j_{\max} = 200$,
- Tps. CPU = 25 s.,
- Tout le domaine résolu en cinétique ($N_x = 10^3$): tps. CPU = 40s..

2.5 Conclusion

Dans cette section, on a proposé une stratégie de couplage instationnaire de l'équation cinétique de Lions, Perthame et Tadmor avec sa limite fluide - Euler isentropique -, l'équation fluide étant résolue en variables lagrangiennes.

Les résultats numériques ont pu valider le schéma de couplage proposé. Cependant, il faut souligner que l'équation cinétique étudiée ici est très simple et bien

éloignée des modèles cinétiques réalistes. Aussi, dans le prochain chapitre, l'on se propose de tenter de valider la stratégie de couplage établie ici dans le cas de l'équation cinétique de Bhatnagar, Gross et Krook couplée avec sa limite fluide c'est à dire Euler complet (avec $\gamma = 3$).

Fig. 17: f , pied du front de chocFig. 18: f , 1^{er} tiers du front de chocFig. 19: f , 2^d tiers du front de chocFig. 20: f , dernière maille

Piston Mach 5.3

Equation cinétique de L.P.T..

Distribution f dans le front de choc à $t = 0.5$ s., $\omega = 1$.

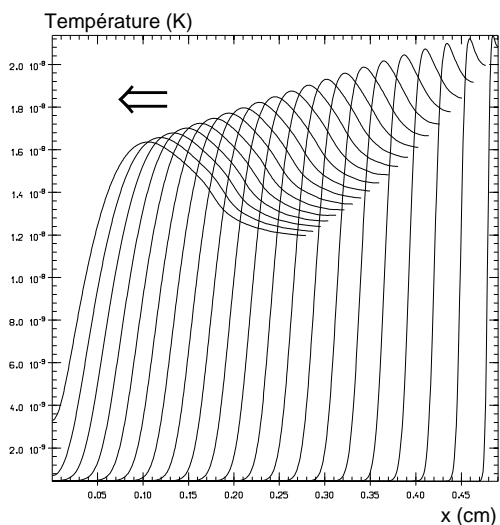


Fig. 21 : $T, \omega = 1$

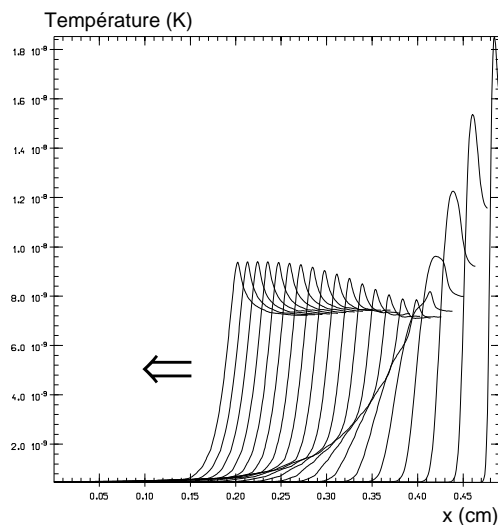


Fig. 22 : $T, \omega = 10$

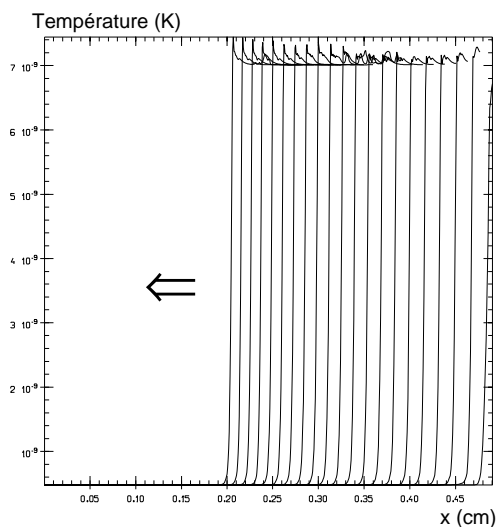


Fig. 23 : $T, \omega = 100$

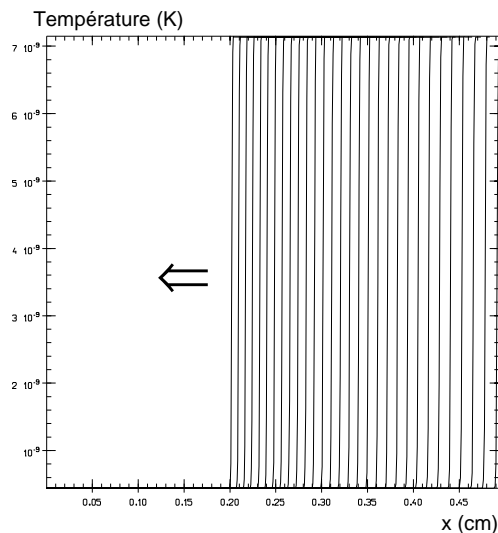


Fig. 24 : $T, \omega = 10^3$

Piston Mach 5.3

Equation cinétique de L.P.T..

Evolution du profil de température $T \equiv P/\rho$ pour $0 < t < 0.9$ s.
pour différentes valeurs de ω .

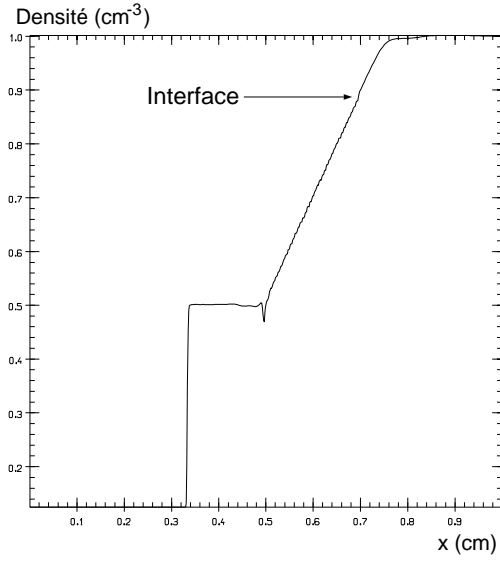


Fig. 25 : ρ

Interface en $x = 0.7$ à $t = 0$

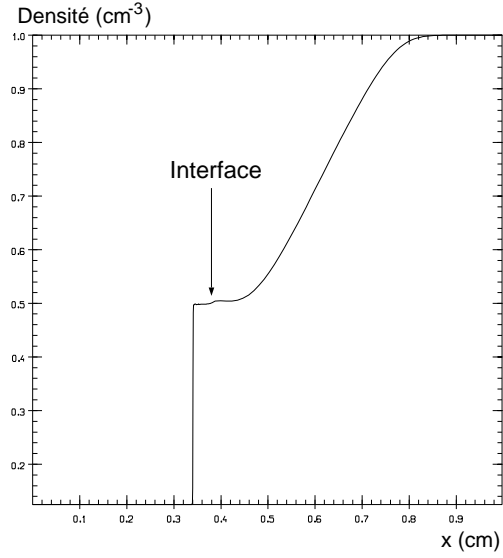


Fig. 26 : ρ

Interface en $x = 0.4$ à $t = 0$

Tube à choc de Sod.
Couplage cinétique / fluide avec $\omega = 10^3$.
Profils de densité à $t = 0.5$ s.

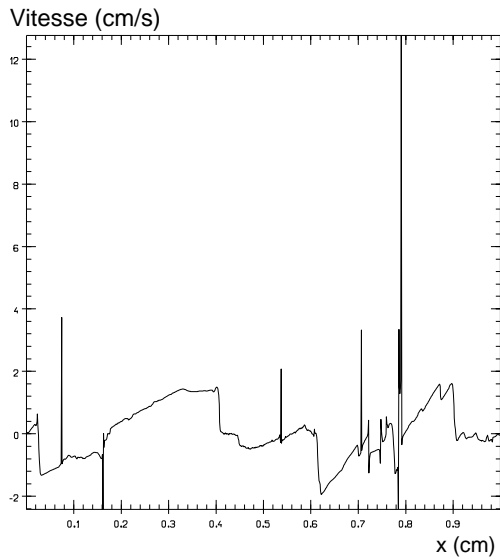


Fig. 27 : U lorsque le degré du polynôme correctif de Cheremissin est $p = 2$

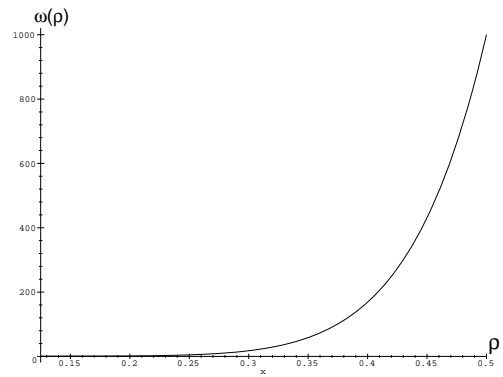


Fig. 28 : $\omega(\rho)$ (loi (2.5))

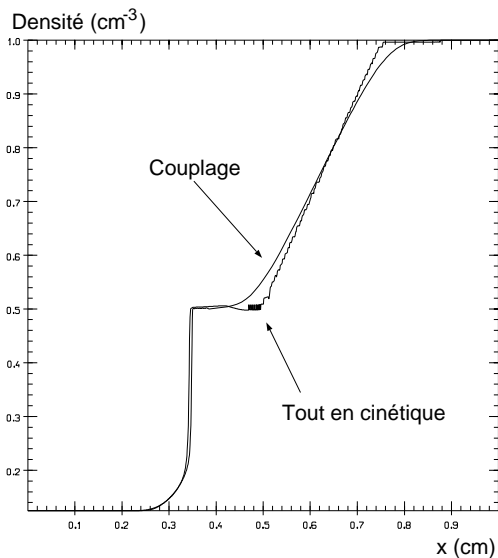


Fig. 29 : ρ

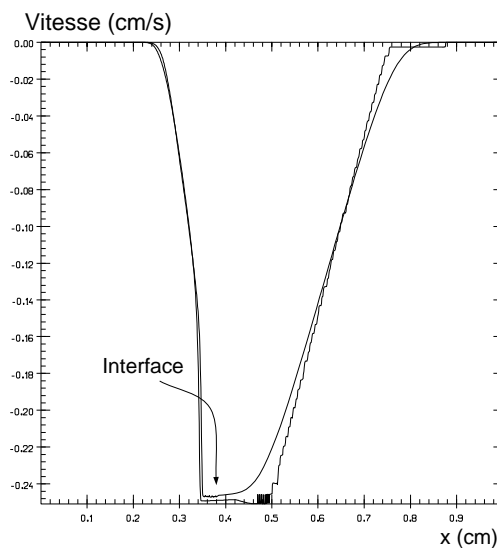


Fig. 30 : U

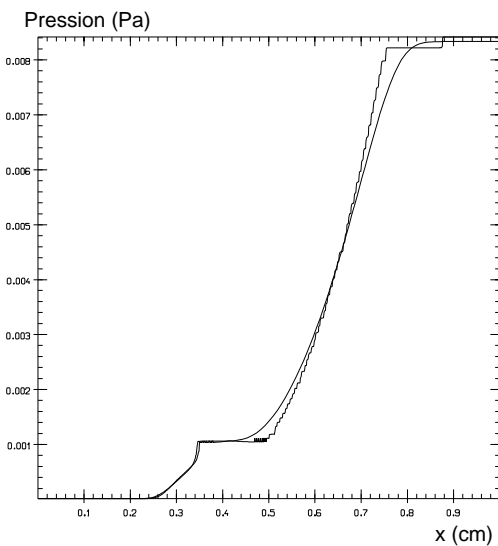


Fig. 31 : P

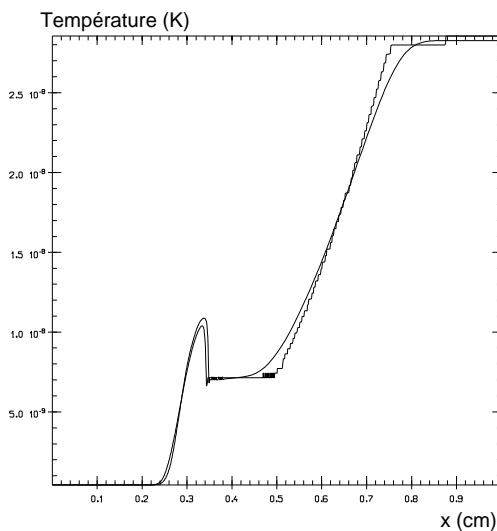


Fig. 32 : $T \equiv P/\rho$

Tube à choc de Sod.
 Couplage cinétique / fluide avec $\omega = \omega(\rho)$.
 Profils de densité, vitesse, pression et température à $t = 0.5$ s.

Chapitre 3

Couplage instationnaire de l'équation cinétique de Bhatnagar, Gross et Krook avec les équations d'Euler

On souhaite appliquer la méthode de couplage présentée dans le chapitre précédent au cas de l'équation cinétique de Bhatnagar, Gross et Krook (cf. [67]) qui est un modèle cinétique simplificateur des modèles cinétiques de Boltzmann et de Fokker-Planck (modèles cinétiques les plus adaptés respectivement à l'étude des processus collisionnels dans un gaz classique et dans un plasma chaud).

On s'intéresse ici plus particulièrement au cas de l'équation de B.G.K. appliquée à un gaz classique possédant un seul degré de liberté ($\gamma = 3$).

3.1 L'équation cinétique de B.G.K. et sa limite fluide

L'équation de Bhatnagar, Gross et Krook (B.G.K.) est la suivante

$$\partial_t f + v \partial_x f = Q(f) \equiv \omega \cdot (\mathcal{M}_f - f) \quad (3.1)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_f = N \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp\left[-\frac{m(v-U)^2}{2T}\right], \\ \rho = mN = \int_{\mathbb{R}} m f(v) dv, \\ \rho U = \int_{\mathbb{R}} m v f(v) dv, \\ P = NT = \int_{\mathbb{R}} m(v-U)^2 f(v) dv, \\ \omega \in \mathbb{R}_*^+. \end{array} \right.$$

Il est facile de constater que, comme l'opérateur de collision de L.P.T. (voir le chapitre précédent), Q préserve le nombre de particules et la quantité de mouvement ($\int_{\mathbb{R}} Q(f) dv = 0$ et $\int_{\mathbb{R}} Q(f) v dv = 0$). Mais, contrairement à l'opérateur de L.P.T., il préserve aussi la quantité d'énergie puisque l'on établit sans difficulté que

$$\int_{\mathbb{R}} Q(f) v^2 dv = 0.$$

L'énoncé du théorème H pour ce modèle est l'analogue de celui du modèle de L.P.T. (voir la proposition 2.1) sauf qu'il faut prendre $\varphi(v) = \log f(v)$ et que c'est ici $\int_{\mathbb{R}} f(v) \log f(v) dv$ qui joue le rôle d'entropie.

Comme pour l'équation de L.P.T., on peut établir formellement la limite fluide de ce modèle, la démonstration rigoureuse étant un problème ouvert. On a donc la conjecture suivante :

Conjecture 3.1 *Lorsque ω tend vers $+\infty$, ρ , U et T sont solutions au sens des distributions du système d'équations différentielles*

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + P) = 0, \\ \partial_t(\rho \xi) + \partial_x[(\rho \xi + P)U] = 0 \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} P = NT, \\ \xi = \frac{1}{2}U^2 + \varepsilon, \\ \varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)}, \\ \gamma = 3. \end{array} \right.$$

On constate que ce système s'apparente au système des équations d'Euler en géométrie monodimensionnelle plane avec $\gamma = 3$. L'intérêt de l'équation de B.G.K. par rapport à l'équation de L.P.T. est donc d'être une équation cinétique dont la limite fluide formelle est une description macroscopique réaliste d'un gaz.

3.2 Résolution numérique de l'équation de B.G.K.

L'équation de B.G.K. est résolue comme l'équation de L.P.T. (voir le chapitre précédent) : on se base donc à nouveau sur la technique de « splitting » (séparation de la phase de transport libre et de la phase de collision).

Seule la partie collisionnelle change quelque peu du fait de la forme différente de la maxwellienne d'équilibre, le schéma restant cependant décrit par (2.3). D'autre part, comme l'opérateur de collision comporte trois invariants, le polynôme correctif de Cheremissin sera ici $\mathcal{P}(v) = 1 + a + bv + cv^2$ (voir sur ce sujet l'annexe C de la troisième partie).

3.3 Traitement de l'interface cinétique / fluide et choix de la fonction χ pour la construction du schéma cinétique

On justifie de la même manière que lors du couplage L.P.T. / Euler isentropique (voir le chapitre précédent) le choix de la distribution

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)$$

avec $\lambda = 0$ (car $\gamma = 3$ maintenant) pour l'établissement du schéma cinétique.

Comme pour le couplage L.P.T. / Euler isentropique, l'interface cinétique / fluide peut a priori être traitée selon deux approches différentes :

Interface lagrangienne « stricte » On doit alors résoudre un système non linéaire de trois équations à trois inconnues pour trouver les moments de la maxwellienne de réémission

$$\mathcal{M}(N, U, T) \equiv N \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp \left[-\frac{m(v-U)^2}{2T} \right]$$

qui sert de conditions aux limites pour la dernière maille cinétique, le domaine fluide étant traité entièrement en lagrange pur. On utilise l'algorithme de Newton

pour la résolution de ce système. Sur la figure 33, on constatera que, comme pour le couplage L.P.T. / Euler isentropique, ce choix n'est pas intéressant.

Interface eulérienne fixe ou mobile Cette approche correspond à celle utilisée pour le couplage L.P.T. / Euler isentropique, le domaine fluide pouvant à nouveau être traité en variables eulériennes ou en variables lagrangiennes. La vitesse de déformation du maillage est donnée par (1.29) ou par (1.30) et on conserve le schéma (2.4) pour la résolution du transport de la masse et de la quantité de mouvement dans la première maille fluide auquel on ajoute l'équation de transport de l'énergie ξ dans cette même maille. On obtient donc le schéma numérique suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{N_x+1}^{n+1} = \frac{\Delta x_{N_x+1}^n}{\Delta x_{N_x+1}^{n+1}} \rho_{N_x+1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_{N_x+1}^{n+1}} \mathfrak{S}_{N_x+1/2}, \\ U_{N_x+1}^{n+1} = \frac{\Delta m_{N_x+1}^n}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} u_{N_x+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} [\wp_{N_x+3/2} - \wp_{N_x+1/2}], \\ \xi_{N_x+1}^{n+1} = \frac{\Delta m_{N_x+1}^n}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} \xi_{N_x+1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_{N_x+1}^{n+1}} [\aleph_{N_x+3/2} - \aleph_{N_x+1/2}] \end{array} \right. \quad (3.2)$$

lorsque le reste du domaine fluide (i.e. pour $i \geq N_x + 2$) est, par exemple, traité en variables lagrangiennes.

La distribution de la maille fantôme nécessaire au traitement de la condition aux limites en $N_x + 1/2$ pour le domaine cinétique est donc entièrement définie par

$$\mathcal{M}(N_{N_x+1}^n, U_{N_x+1}^n, T_{N_x+1}^n) \equiv N_{N_x+1}^n \sqrt{\frac{m}{2\pi T_{N_x+1}^n}} \exp\left[-\frac{m(v - U_{N_x+1}^n)^2}{2T_{N_x+1}^n}\right].$$

3.4 Résultats numériques

On présente dans cette section quelques résultats numériques concernant le couplage de l'équation de B.G.K. avec sa limite fluide. Comme pour le couplage L.P.T. / Euler isentropique, le domaine fluide est résolu en variables lagrangiennes à partir de la maille $N_x + 2$. La première maille fluide, c'est à dire la maille $N_x + 1$, est donc traitée avec le schéma mi eulérien, mi lagrangien (3.2). La vitesse $V_{N_x+1/2}^n$ est donnée par (1.29) ou par (1.30).

3.4.1 Tube à choc de Sod avec $\gamma = 3$ et $\omega = 10^4$

On teste ici le couplage pour $\omega = 10^4$. On s'attend donc à ce que la solution donnée par le couplage soit proche de la solution fluide.

La figure 33 montre que l'interface cinétique / fluide lagrangienne « stricte » (placée initialement en $x = 0.7$) n'est pas une bonne condition aux limites. Notons que lorsque l'interface cinétique / fluide lagrangienne « stricte » subit le passage d'un choc, l'algorithme de Newton ne converge pas.

Il faut donc à nouveau revenir au traitement eulérien de l'interface cinétique / fluide ce qui sera fait pour tous les autres cas tests numériques.

La figure 34 (interface cinétique / fluide à $t = 0$ placée en $x = 0.35$ ou en $x = 0.65$) montre que le traitement eulérien à l'interface semble bon au passage d'un choc ou d'une détente.

Paramètres numériques (figure 34) :

· Interface en $x = 0.35$ à $t = 0$:

$N_x = 350$ et $M_x = 130$,

$j_{\max} = 200$,

$\mu = 0.5$,

Tps. CPU = 36 s..

· Interface en $x = 0.65$ à $t = 0$:

$N_x = 650$ et $M_x = 70$,

$j_{\max} = 200$,

$\mu = 0.5$,

Tps. CPU = 58 s..

· Équation fluide seule :

$M_x = 200$,

$\mu = 0.5$,

Tps. CPU = 2 s..

3.4.2 Tube à choc de Sod avec $\gamma = 3$ et $\omega = \omega(\rho)$

On reprend ici la loi (2.5) $\omega = \omega(\rho)$ avec $\omega_{\max} = 10^4$ et $\omega_{\min} = 1$ pour tester à nouveau la prise en compte d'effets cinétiques dûs au faible libre parcours moyen dans les zones à faible densité.

On constate sur les figures 35 à 38 que la solution donnée par le couplage est quasiment confondue avec celle donnée par un calcul cinétique dans tout le domaine.

La figure 39 montre que la distribution f au niveau de l'interface cinétique / fluide est quasiment confondue avec celle donnée par la solution cinétique dans tout le domaine au même instant et au même endroit (i.e. à $t = 0.1$ s. et en $x \simeq 0.43$) ce qui est remarquable, l'équilibre thermodynamique n'étant pas tout à fait atteint dans la dernière maille cinétique comme le montre la forme de f . Par contre, si ω_{max} diminue - ce qui rend moins collisionnel le gaz au niveau de l'interface cinétique / fluide -, la solution donnée par le couplage ne sera pas très bonne. On constate en effet sur la figure 40 que, lorsque $\omega_{max} = 10^3$, f n'est plus du tout bien représentée dans la dernière maille cinétique : les grandeurs macroscopiques ne sont alors plus correctes au niveau de l'interface (voir les figures 41 et 42). On peut donc faire la remarque importante suivante :

Pour que le couplage donne une solution correcte, il faut que l'interface cinétique / fluide ne soit pas trop éloignée de l'équilibre thermodynamique local.

Cette remarque peut être justifiée en rappelant que par définition, la première maille fluide est à l'équilibre thermodynamique local. Or, sauf pour un taux de collision infini, il doit y avoir au niveau microscopique pour le modèle continu continuité de l'état thermodynamique des particules entre deux endroits infiniment proches c'est à dire continuité de la distribution f . Cette condition ne sera rigoureusement assurée au niveau de l'interface cinétique / fluide que si la dernière maille cinétique se trouve à l'équilibre thermodynamique local.

Y. Qiu et F. Mallinger (cf. [47] et [49]) avaient par ailleurs constaté que lorsque le nombre de Knudsen était élevé (i.e. gaz faiblement collisionnel), le couplage stationnaire de Boltzmann / Euler ou de Boltzmann / Navier-Stokes donnait de mauvais résultats lorsque l'interface cinétique / fluide se trouvait dans le choc : on comprend aisément que dans de telles conditions, la distribution réelle dans le choc sera effectivement très éloignée de la distribution d'équilibre utilisée pour la construction du schéma fluide (voir les figures 17 à 20 par exemple).

Paramètres numériques (figures 35 à 38) :

- Avec couplage :
- (Interface en $x = 0.5$ à $t = 0$),
- $N_x = 500$ et $M_x = 100$ (ordre 2),
- $j_{max} = 200$,
- $\mu = 0.5$,
- Tps. CPU = 44 s..

· Sans couplage :

$N_x = 1000$,

Tps. CPU = 60 s..

3.4.3 Remarque sur le choix de la vitesse lagrangienne aux interfaces du maillage

Dans le premier chapitre, on a attiré l'attention sur le fait que pour passer continûment du schéma eulérien au schéma lagrangien, $U_{i+1/2}^n$ doit être solution de l'équation non linéaire (1.25) difficile à résoudre. L'alternative proposée a donc consisté à prendre $V_{i+1/2}^n$ solution approchée de (1.25) donnée par (1.29) ou $U_{i+1/2}^n$ formulée par un autre schéma numérique (ici, le schéma de B. Després : voir (1.30)).

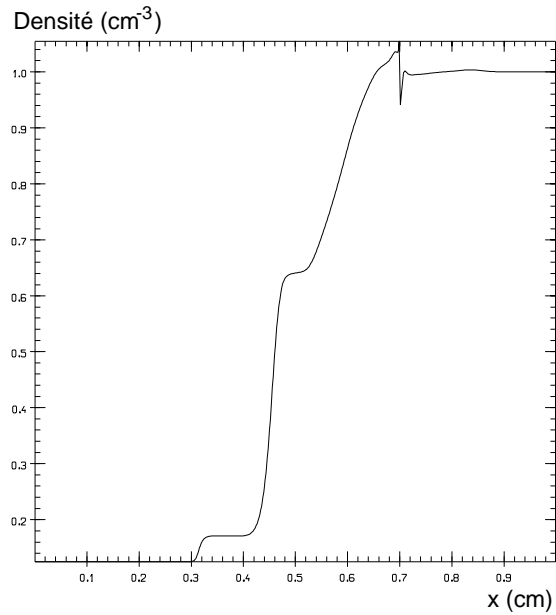
Sans couplage, ces deux alternatives sont équivalentes en tout cas pour des cas tests académiques. Par contre on constate que lorsqu'il y a couplage, une instabilité apparaît au niveau de l'interface cinétique / fluide (cf. figures 37 et 43) lorsque $U_{N_x+1/2}^n$ est donnée par la relation (1.30) et que celle-ci est fortement atténuée lorsque l'on utilise la relation (1.29). La figure 43 montre bien que ce comportement est lié au fait que l'on passe brutalement d'une zone non lagrangienne (le domaine cinétique) à une zone lagrangienne (le domaine fluide). On vérifie par ailleurs qu'un traitement du domaine fluide en variables eulériennes sur grille fixe ou variable entraîne la disparition de cette instabilité et ceci pour toute définition de la vitesse $V_{i+1/2}^n$ de déformation du maillage.

3.5 Conclusion

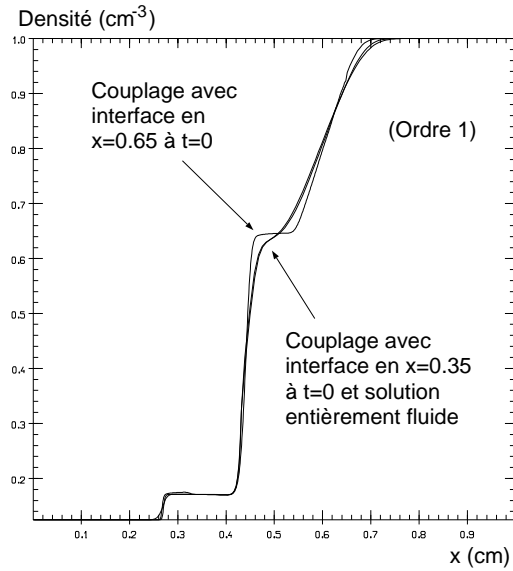
Cette étude a montré la faisabilité du couplage instationnaire d'un schéma cinétique avec un schéma lagrangien fluide en géométrie plane monodimensionnelle, le gain de temps CPU en résultant étant important.

On a pu constater que pour que ce couplage soit correct, l'interface cinétique / fluide doit se trouver dans une zone où les distributions ne sont pas trop éloignées des distributions d'équilibre du modèle fluide.

La prochaine étape de ce travail sera, toujours en géométrie monodimensionnelle plane, de coupler un modèle cinétique de type Vlasov-Fokker-Planck avec les équations d'Euler bi-température (température ionique et électronique).

Fig. 33 : ρ

Interface lagrangienne « stricte »

Fig. 34 : ρ

Interface eulérienne

Tube à choc de Sod.
 Couplage cinétique / fluide avec $\omega = 10^4$.
 Profils de densité à $t = 0.1$ s.

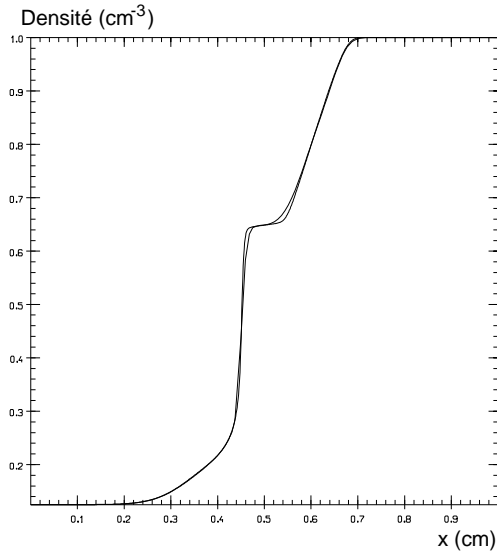


Fig. 35 : $\rho, \omega_{max} = 10^4$

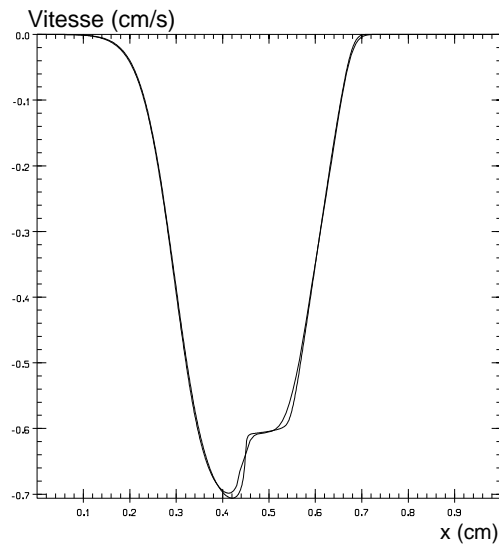


Fig. 36 : $U, \omega_{max} = 10^4$

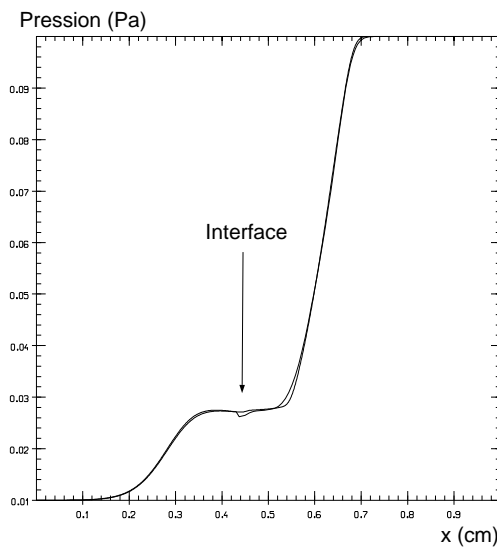


Fig. 37 : $P, \omega_{max} = 10^4$

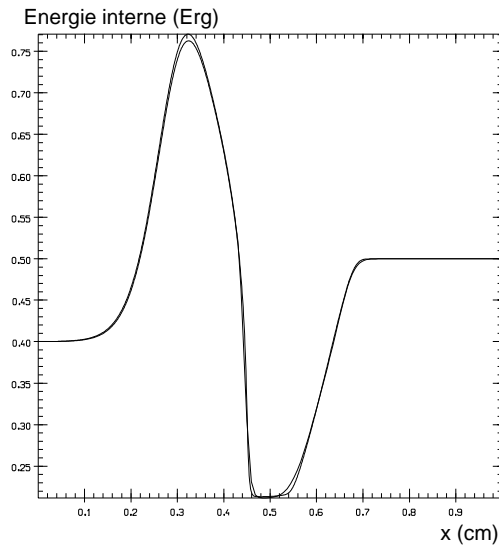


Fig. 38 : $\epsilon, \omega_{max} = 10^4$.

Tube à choc de Sod.

Couplage cinétique / fluide avec $\omega = \omega(\rho), \omega_{max} = 10^4$
 Profils de densité, vitesse, pression et énergie interne à $t = 0.1$ s..

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

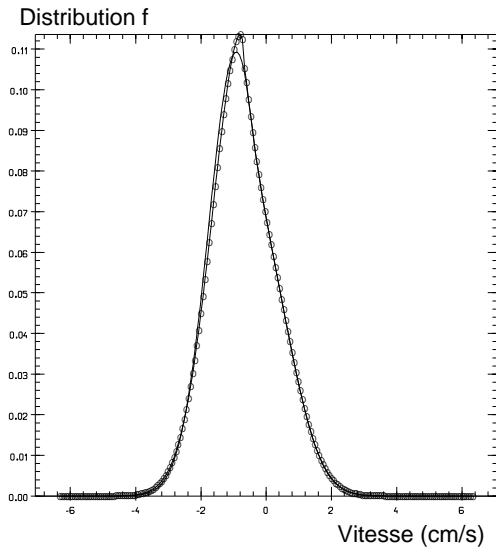


Fig. 39 : f
 $\omega_{max} = 10^4$

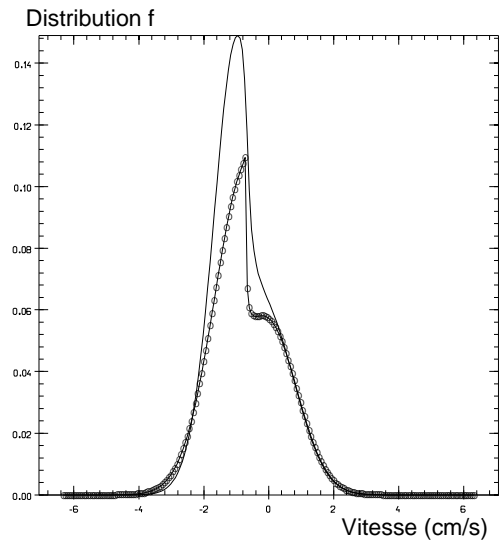


Fig. 40 : f
 $\omega_{max} = 10^3$

Distribution f au niveau de l'interface ($x = 0.43$) à $t = 0.1$ s.

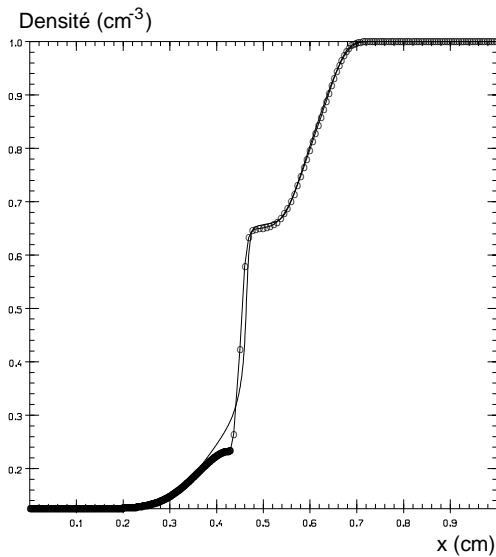


Fig. 41 : ρ , $\omega_{max} = 10^3$

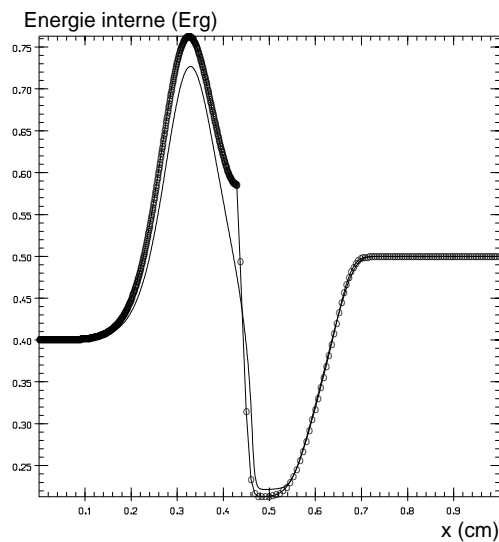


Fig. 42 : ε , $\omega_{max} = 10^3$

Couplage cinétique / fluide avec $\omega = \omega(\rho)$.
 Profils de densité et d'énergie interne à $t = 0.1$ s..

Comparaison du couplage (o) avec la solution entièrement cinétique.

Tube à choc de Sod.

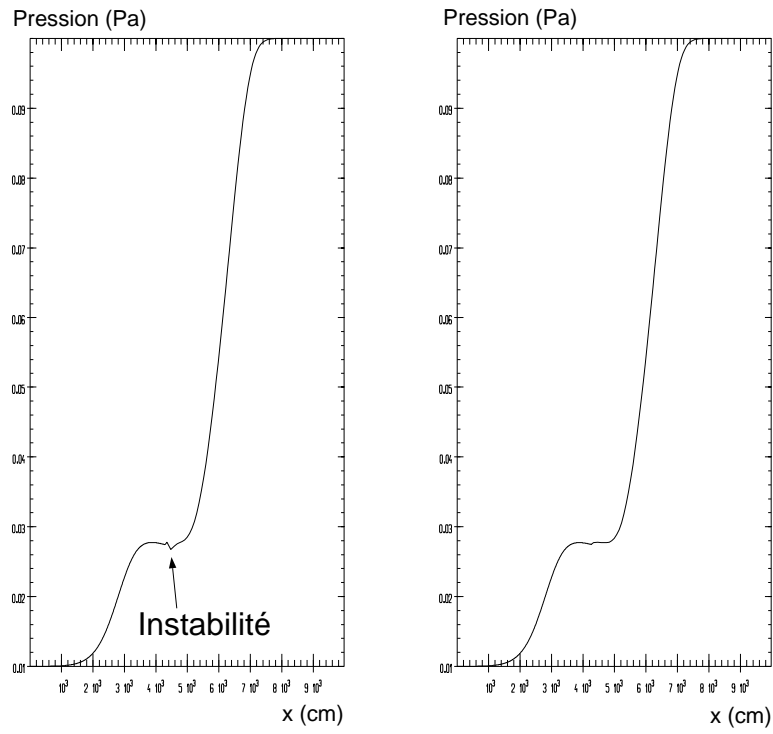


Fig. 43 : P

Comparaison

$$U_{i+1/2}^n \equiv U_{Despres} \text{ (cf. (1.30))} / U_{i+1/2}^n \equiv U_{Dellacherie} \text{ (cf. (1.29))}$$

Chapitre 4

Couplage cinétique / fluide dans un plasma : application à l'étude de la formation du point chaud

Dans ce chapitre, on s'attache à décrire la méthode numérique de couplage entre un modèle cinétique ion / électron à un degré de liberté microscopique - *modèle qualitativement proche des équations cinétiques de Vlasov-Fokker-Planck (voir la première partie)* - et les équations fluides correspondantes. Puis, sur la base de différents cas tests, on montre le bon comportement ainsi que certaines limitations de la technique de couplage proposée.

On pourra ainsi constater sur des cas se rapprochant des conditions physiques rencontrées dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel* qu'un traitement cinétique du point chaud est nécessaire pour obtenir un bon diagnostic du nombre de réactions nucléaires réalisées (au moins avec le modèle cinétique étudié ici) et que le couplage permet de réduire de manière importante le temps de calcul en évitant une résolution des équations cinétiques dans tout le domaine.

On constatera d'autre part que l'utilisation de la *moyenne entropique* dans le schéma numérique de résolution de l'opérateur de collision ion / électron permet de limiter le nombre de maille du domaine des vitesses microscopiques, cette propriété étant essentielle pour l'étude de la formation du point chaud (voir aussi l'introduction de la première partie).

4.1 Le modèle physique

Le modèle physique que l'on étudie est le suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + v \partial_x f - \frac{\partial_x P_e}{\rho} \partial_v f = B(f) + S(f), \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \partial_x [(\rho \varepsilon_e + P_e)U] + \partial_x q_e = -(\overline{W} + \widetilde{W}), \\ \overline{W} = -U \partial_x P_e, \quad \widetilde{W} = \Omega N (T_e - T), \\ N_e = ZN, \quad P_e = N_e T_e, \quad \rho = mN, \\ \varepsilon_e = \frac{P_e}{\rho(\gamma-1)}, \quad \gamma = 3 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où $B(f)$ et $S(f)$ décrivent respectivement les collisions ion / ion et les collisions ion / électron. On propose le modèle collisionnel suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} B(f) = \omega(\mathcal{M}_f - f), \\ S(f) = \Omega \partial_v [(v - U)f + \frac{T_e}{m} \partial_v f] \end{array} \right. \quad (4.2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{M}_f = N \sqrt{\frac{m}{2\pi T}} \exp[-\frac{m(v-U)^2}{2T}], \\ \rho = \int_{\mathbb{R}} m f dv, \\ \rho U = \int_{\mathbb{R}} m f v dv, \\ P = NT = \int_{\mathbb{R}} m f (v - U)^2 dv. \end{array} \right.$$

L'opérateur de Fokker-Planck ion / ion réel (c'est à dire $B(f)$) a été remplacé par un opérateur de B.G.K. classique à une seule dimension dans l'espace des vitesses microscopiques. Les fréquences de collision Ω et ω (avec l'hypothèse $m_e \ll m$, m_e étant la masse de l'électron) sont données par (cf. [28] ou [29] p. 91)

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega = \frac{4}{3} \sqrt{2\pi} \frac{\sqrt{m_e}}{m} \frac{NZ^3 e^4 \log \Lambda_\Omega}{T_e^{3/2}}, \\ \omega = \frac{4}{3} \sqrt{\pi} \frac{NZ^4 e^4 \log \Lambda_\omega}{\sqrt{m} T^{3/2}}. \end{array} \right. \quad (4.3)$$

$\log \Lambda_\Omega$ et $\log \Lambda_\omega$ sont les logarithmes coulombiens que l'on suppose ici constants et égaux à 10, et e est la charge électrique élémentaire (exprimée en unités CGS).

q_e est le flux de chaleur électronique dû aux collisions électron / électron que l'on doit prendre en compte bien que la distribution électronique soit dans ce modèle toujours implicitement supposées être une maxwellienne. L'on prend l'expression suivante (cf. [29] p. 91-92)

$$\begin{cases} q_e = -\lambda_e(T_e)\partial_x T_e, \\ \lambda_e = \gamma(Z)\frac{N_e T_e}{m_e} \cdot \frac{1}{\nu}, \\ \gamma(Z) = \frac{128}{3\pi} \cdot \frac{Z^2 + 1.723Z + 0.7184}{Z^2 + 5.123Z + 2.484}, \end{cases} \quad (4.4)$$

la fréquence de collision électron / électron étant définie par

$$\nu = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\frac{N_e e^4 \log \Lambda_\nu}{\sqrt{m_e} T_e^{3/2}} \quad (4.5)$$

avec aussi $\log \Lambda_\nu = 10$.

La limite fluide (formelle) du modèle cinétique (4.1) est définie par le système

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + P) = -\partial_x P_e, \\ \partial_t(\rho \xi) + \partial_x[(\rho \xi + P)U] = \overline{W} + \widetilde{W}, \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \partial_x[(\rho \varepsilon_e + P_e)U] = -(\overline{W} + \widetilde{W}) - \partial_x q_e \end{cases} \quad (4.6)$$

(voir la première partie) où $\xi = \frac{1}{2}U^2 + \varepsilon$ est l'énergie totale ionique et où $\varepsilon = \frac{P}{\rho(\gamma-1)}$ est l'énergie interne ionique (avec ici $\gamma = 3$). Rappelons que le système (4.6) est le système des équations d'Euler à deux températures (cf. [66]).

4.2 Résolution numérique des équations cinétiques

La résolution du système (4.1) a été décrite dans la première partie. Le principe de base est celui du « splitting » c'est à dire que l'on sépare la phase de transport libre des ions de la partie champ électrique et collisionnelle. On rappelle ici les grandes lignes de cette méthode :

1. Résolution de la phase de transport libre. On utilise ici le schéma de type volume fini décrit à la proposition 1.4.
2. Résolution de la phase de collision ion / ion. L'opérateur de collision étant de type B.G.K., on utilise le schéma déjà explicité dans les chapitres décrivant le couplage P.T.L. / Euler isentropique et B.G.K. / Euler (voir le schéma (2.3)).

Les trois points suivants ont été explicités dans la première partie :

3. Prise en compte du gradient de pression électronique dans l'équation cinétique ionique. Cette étape correspond en fait à la prise en compte du champ électrique self-consistant.
4. Résolution de la phase de collision ion / électron. On utilise le schéma numérique défini à partir de la *moyenne entropique* (voir la première partie).
5. Résolution de l'équation d'énergie électronique.

4.3 Résolution numérique des équations fluides

Dans ce paragraphe, on montre comment résoudre numériquement les équations macroscopiques (4.6), limite fluide de (4.1), en utilisant le schéma cinétique proposé au premier chapitre de cette partie (voir le théorème 1.1) ce qui nous permettra de naturellement coupler les systèmes (4.1) et (4.6).

4.3.1 Principe de résolution

La première idée serait de résoudre le système (4.6) sous la forme

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \rho + \partial_x(\rho U) = 0, \\ \partial_t(\rho U) + \partial_x(\rho U^2 + \mathcal{P}) = 0, \\ \partial_t(\rho \Xi) + \partial_x[(\rho \Xi + \mathcal{P})U] = 0, \\ \partial_t(\rho \varepsilon_e) + \partial_x(\rho \varepsilon_e U) + P_e \partial_x U = -\tilde{W} \end{array} \right. \quad (4.7)$$

(en oubliant la conductivité électronique) où $\Xi = \xi + \varepsilon_e$ est l'énergie totale du plasma et où $\mathcal{P} = P + P_e$ est la pression totale du plasma car alors on pourrait utiliser le schéma en énergie totale de B. Desprès (cf. [71]), schéma dont les propriétés de stabilité ont été clairement démontrées. Malheureusement, sachant

que l'on doit résoudre les équations fluides sous la forme (4.6) en vue du couplage cinétique / fluide, l'on ne peut utiliser ce bon schéma : l'idée est donc d'utiliser les schémas cinétiques.

Constatons tout d'abord que le système (4.6) correspond au système (1.2) mais avec une équation supplémentaire (l'équation d'énergie interne électronique) et un second membre non nul dans les équations de transport de la quantité de mouvement et de l'énergie ionique, second membre qui peut être interprété comme étant un terme source. Le terme source en question est $-\partial_x P_e$ pour l'équation de quantité de mouvement ionique et $\overline{W} + \widetilde{W}$ pour l'équation d'énergie ionique.

Pour résoudre numériquement (4.6) c'est à dire pour évaluer les flux de masse, de quantité de mouvement et d'énergie ionique, on utilise donc le schéma cinétique eulérien ou lagrangien établi au premier chapitre de cette partie (voir le théorème 1.1) en prenant

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-v^2/2)$$

(voir l'annexe A pour le calcul explicite des flux ioniques) auquel on ajoute les termes sources décrits ci-dessus qui seront ici totalement explicités ainsi que l'équation d'énergie interne électronique dont la résolution a été explicitée au deuxième chapitre de la première partie.

En oubliant la conductivité thermique électronique, on obtient donc le schéma fluide suivant dans le cas eulérien sur une grille variable :

$$\rho_i^{n+1} = \frac{\Delta x_i^n}{\Delta x_i^{n+1}} \rho_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i^{n+1}} [\mathfrak{S}_{i+1/2} - \mathfrak{S}_{i-1/2}],$$

$$U_i^{n+1} = \frac{\Delta m_i^n}{\Delta m_i^{n+1}} U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^{n+1}} \{[\wp_{i+1/2} - \wp_{i-1/2}] + [P_{e,i+1/2}^* - P_{e,i-1/2}^*]\},$$

$$\xi_i^{n+1} = \frac{\Delta m_i^n}{\Delta m_i^{n+1}} \xi_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_i^{n+1}} [\mathfrak{N}_{i+1/2} - \mathfrak{N}_{i-1/2} - \Delta x_i^n (\overline{W} + \widetilde{W})_i],$$

les flux $\mathfrak{S}_{i+1/2}$, $\wp_{i+1/2}$ et $\mathfrak{N}_{i+1/2}$ étant évalués grâce au schéma cinétique (voir le premier chapitre) et explicités dans l'annexe A,

$$\varepsilon_{e,i}^{n+1} = \frac{\Delta m_i^n}{\Delta m_{i+1}^n} \varepsilon_{e,i}^n - \frac{\Delta t}{\Delta m_{i+1}^n} \{[\rho \varepsilon_e (U - V)]_{i-1/2}^{i+1/2} + [P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2} + \Delta x_i^n (\overline{W} + \widetilde{W})_i\},$$

$$[\rho \varepsilon_e (U - V)]_{i-1/2}^{i+1/2} = \rho_i^n \varepsilon_{e,i}^n (U_i^n - V_{i+1/2}^n)^+ + \rho_{i+1} \varepsilon_{e,i+1} (U_{i+1}^n - V_{i+1/2}^n)^-$$

$((g)^\pm$ représente la partie positive ou négative de g),

$$\overline{\mathcal{W}}_i = -\frac{[P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2}}{\Delta x_i^n} U_i^n,$$

$$\widetilde{\mathcal{W}}_i = \Omega_i^n N_i^n (T_{e,i}^n - T_i^n)$$

avec $\Delta m_i^n = \rho_i^n \Delta x_i^n$, $\varepsilon_e = \frac{Z T_e}{2m}$ (car $\gamma = 3$ ici), $[P_e^*]_{i-1/2}^{i+1/2}$ et $[P_e^* U^*]_{i-1/2}^{i+1/2}$ étant évaluées grâce à un solveur de type Godounov (voir la fin du deuxième chapitre de la première partie).

Si les équations fluides sont résolues en variables lagrangiennes, on a simplement

$$[\rho \varepsilon_e (U - V)]_{i-1/2}^{i+1/2} \equiv 0$$

et l'équation de continuité est remplacée par

$$\tau_i^{n+1} = \tau_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta m_i} [U_{i+1/2}^n - U_{i-1/2}^n]$$

où $\tau = 1/\rho$ et où $U_{i+1/2}^n$ est la vitesse du fluide à l'interface $i + 1/2$ donnée par (1.29) ou par (1.30).

Il faut noter ici que seule la positivité de la densité ionique est clairement établie sous le critère *CFL* (1.15) car du fait de la présence des termes sources, le théorème 1.1 n'est plus valable. D'autre part, aucune propriété de positivité de l'énergie interne électronique n'est établie sous un certain critère *CFL*. On doit donc avoir à l'esprit que si le schéma fluide proposé permet un couplage aisé avec la zone cinétique, aucune propriété de stabilité n'est établie pour ce schéma fluide.

4.3.2 Traitement de la conductivité thermique électronique

D'après (4.4) et (4.5), on peut écrire que

$$q_e = -\tilde{\lambda}_e \partial_x T_e^{3.5}$$

avec

$$\tilde{\lambda}_e = \frac{3\gamma(Z)}{14\sqrt{\pi} \log \Lambda_\nu \sqrt{m_e}} = C^{ste}.$$

On implique la prise en compte de q_e . En oubliant les termes autres que le terme d'instationnarité, on obtient le schéma numérique

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\Delta x_i^{n+1} \frac{(N_e T_e)_i^{n+1}}{2} - \Delta x_i^n \frac{(N_e T_e)_i^n}{2} \right] =$$

$$2\tilde{\lambda}_e \left[\frac{(T_{e,i+1}^{n+1})^{3.5} - (T_{e,i}^{n+1})^{3.5}}{\Delta x_{i+1}^{n+1} + \Delta x_i^{n+1}} - \frac{(T_{e,i}^{n+1})^{3.5} - (T_{e,i-1}^{n+1})^{3.5}}{\Delta x_i^{n+1} + \Delta x_{i-1}^{n+1}} \right]$$

qui est un système tridiagonale non linéaire. Après linéarisation, on utilise l'algorithme de Newton pour résoudre ce système.

4.3.3 Conditions aux limites

Sur les bords du domaine, on impose des conditions aux limites de type condition de mur pour l'équation d'énergie électronique avec un flux thermique électronique nul. Pour le bord droit du domaine par exemple, on crée donc une maille fantôme indiquée par $N_x + M_x + 1$ dont la pression électronique, la densité ionique et la vitesse macroscopique au temps t_n sont définies par

$$\begin{cases} P_{e,N_x+M_x+1}^n = P_{e,N_x+M_x}^n, \\ \rho_{N_x+M_x+1}^n = \rho_{N_x+M_x}^n, \\ U_{N_x+M_x+1}^n = 2V_{N_x+M_x+1/2}^n - U_{N_x+M_x}^n \end{cases}$$

où $V_{N_x+M_x+1/2}^n$ est la vitesse de déformation du bord droit du domaine. Les conditions aux limites pour le calcul des flux intervenant dans les équations de transport ioniques sont traitées comme dans le premier chapitre (condition de mur également).

4.3.4 Test numérique : choc plan Mach 2 initié par un piston

Afin de valider le schéma numérique proposé pour résoudre les équations fluides (4.6), l'on étudie la formation d'un front de choc initié par le déplacement de la frontière de droite à la vitesse V_{piston} . On rappelle que les conditions aux limites sont de type condition de mur à gauche et à droite. On tient compte pour ce cas test de la conductivité thermique électronique (avec un flux de chaleur électronique nul sur la frontière du domaine).

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Longueur du domaine} = 200 \text{ cm.}, \\ T^0 = T_e^0 = 1 \text{ KeV}, \\ N^0 = 10^{22} \text{ cm}^{-3}., \\ Mach = 2 \implies V_{piston} = -5.68 \cdot 10^7 \text{ cm.s}^{-1}., \\ m = m_p, \\ Z = 1, \\ U^0 = 0. \end{array} \right.$$

Les conditions en aval du choc sont données par les relations d'Hugoniot pour un plasma mono-espèce ($Z = 1, \gamma = 3$) ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} T = T_e = 3.43 \text{ KeV}, \\ N = 1.6 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}., \\ U = -5.68 \cdot 10^7 \text{ cm.s}^{-1}. = V_{piston}, \\ Mach = 0.67, \end{array} \right.$$

la vitesse de choc étant donnée par

$$V_{choc} = -1.51 \cdot 10^8 \text{ cm.s}^{-1}..$$

On constate sur les figures 44 à 46 que l'on retrouve bien les conditions en aval du choc données ci-dessus (on mesure une vitesse approximative de choc $V_{choc} \simeq -1.56 \cdot 10^8 \text{ cm.s}^{-1}$).

4.3.5 Remarque

Il est difficile d'étendre rigoureusement la technique des schémas cinétiques à la résolution de (4.7) car il faudrait alors établir l'équivalent de la proposition 1.3 pour la résolution du système

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{Z}{m} \vec{E} \cdot \nabla_v f = 0, \\ \partial_t f_e + \vec{v} \cdot \nabla_x f_e - \frac{1}{m_e} \vec{E} \cdot \nabla_v f_e = 0 \end{array} \right.$$

constitué des équations de transport ionique et électronique couplées par le champ électrique self-consistant \vec{E} , f et f_e étant respectivement les distributions ionique et électronique.

Cependant, en prenant

$$f(v) = \frac{\rho/m}{\sqrt{(T + ZT_e)/m}} \chi \left(\frac{v - U}{\sqrt{(T + ZT_e)/m}} \right)$$

pour le calcul des flux (1.20) et (1.21), on constate que l'on obtient un schéma cinétique pour la résolution des trois premières équations de (4.7), schéma qui préserve la positivité de ρ et de $\varepsilon + \varepsilon_e$ sous un critère *CFL* similaire au critère *CFL* (1.15) (il suffit de remplacer T par $T + ZT_e$). Mais, ce schéma n'est pas parfait car on ne peut pour autant clairement montrer que ce schéma cinétique couplé à la résolution de l'équation d'énergie électronique préserve la positivité séparément de ε et de ε_e sous ce critère *CFL* même en sachant montrer la positivité de ε_e (en splittant la partie tenant compte de $(T - T_e)$ du reste des équations et en supposant que les électrons sont isentropiques à la traversée d'un choc, on peut construire un schéma qui préserve la positivité de ε_e : voir [71]).

4.4 Mise en œuvre du couplage

On s'attache maintenant à décrire la technique de couplage utilisée pour traiter à la fois un domaine où l'on résout (4.1) et un domaine où l'on résout (4.6).

La technique de couplage est semblable à celle proposée pour le couplage B.G.K. / Euler mono-température. Les différences sont liées à la fois à la présence des termes sources $-\partial_x P_e$ et $\overline{W} + \widetilde{W}$ dans (4.6) mais aussi à la présence de l'équation d'énergie interne électronique.

On rappelle ici que le domaine est découpé en trois zones :

- une zone cinétique résolue sur une grille variable (si l'interface cinétique / fluide est mobile) ;
- une zone eulérienne fluide résolue sur une grille éventuellement variable dont la frontière inclue l'interface cinétique / fluide. Le schéma numérique utilisé est le schéma cinétique décrit au premier chapitre de cette partie. Le calcul et la transmission des flux entre la zone cinétique et la zone fluide se font comme pour le couplage B.G.K. / Euler ; la seule différence tient dans la prise en compte dans le schéma (3.2) des termes sources $-\partial_x P_e$ et $\overline{W} + \widetilde{W}$, termes qui sont explicités ;
- une zone fluide eulérienne ou lagrangienne où l'on résout les équations (4.6), le choix du schéma numérique étant libre. Dans cette étude, l'on utilisera la version eulérienne ou lagrangienne du schéma cinétique défini par les relations (1.16), (1.17) et (1.18).

Soulignons à nouveau que le traitement de l'interface cinétique / fluide est tel que le flux macroscopique de masse au niveau de l'interface cinétique / fluide est

a priori non nul.

Enfin, on notera que la méthode de résolution de l'équation d'énergie électronique est la même dans tout le domaine mis à part les termes convectifs qui sont exactement nuls dans la zone lagrangienne et évalués avec un schéma de type upwind dans la zone cinétique et la zone fluide eulérienne.

4.5 Validation numérique du couplage : tube à choc de Sod

On effectue ici le cas test classique du tube à choc de Sod en tenant compte de la loi (2.5) pour la fréquence de collision ion / ion $\omega = \omega(\rho)$ et pour la fréquence de collision ion / électron $\Omega = \Omega(\rho)$, loi qui entraîne l'existence d'une zone faiblement collisionnelle là où la densité ionique est faible. On prend $\omega_{\max} = 10^4$, $\Omega_{\max} = 10^2$, $\omega_{\min} = \Omega_{\min} = 1$, $\rho_{\max} = 0.5$ et $\rho_{\min} = 0.125$.

On supprime la conductivité thermique électronique et le domaine fluide est entièrement traité en variables lagrangiennes. L'on rappelle d'autre part que les conditions aux limites sont de type réflexion spéculaire à gauche (domaine cinétique) et de type condition de mur à droite (domaine fluide).

On constate sur les figures 47 à 50 que le couplage entre les deux domaines est correctement traité.

Paramètres numériques :

- $N_x = 250$ et $M_x = 100$,
- $j_{\max} = 200$,
- Tout le domaine résolu en cinétique : $N_x = 500$.

4.6 Application à l'étude de la formation du point chaud

Dans cette section, sur des cas tests beaucoup plus violents que le test du tube à choc de Sod, on se propose :

- dans un premier temps de mettre en évidence les difficultés rencontrées lorsque le domaine fluide est traité en variables lagrangiennes : on montrera en effet qu'il est préférable pour ces cas tests très violents et générant une zone très faiblement collisionnelle de traiter le domaine fluide en variables eulériennes sur une grille

fixe pour permettre à l'interface cinétique / fluide de rester éloignée de la zone faiblement collisionnelle ;

- et dans un second temps, on mettra en évidence l'importance du traitement cinétique du point chaud quant au diagnostic nucléaire sur un cas test assez réaliste par rapport aux conditions rencontrées dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel* ainsi que le gain de temps CPU résultant de la technique de couplage proposée.

4.6.1 Simulation d'un dépôt d'énergie « photonique » sur les électrons

Afin de se rapprocher qualitativement des nombreux phénomènes rencontrés en *Fusion par Confinement Inertiel*, on simule *grossièrement* une loi de dépôt d'énergie « photonique » sur les électrons en ajoutant un terme source Φ à l'équation d'énergie électronique tel que

$$\begin{cases} \Phi = 0 & \text{si } x < X_\nu, \\ \Phi = \phi \cdot t & \text{si } x > X_\nu \end{cases} \quad (4.8)$$

avec $\phi \in \mathbb{R}^+$ et $[\phi] = (\text{Erg/s.})/\text{cm}^3.\text{/s.}$. X_ν est une donnée physique et fixe à la fois la frontière initiale entre le milieu léger (deutérium-tritium gazeux) et le milieu lourd (deutérium-tritium cryogénique) et la limite du domaine où s'effectue le dépôt d'énergie « photonique » (on consultera l'introduction générale pour un rappel des grands principes de la *Fusion par Confinement Inertiel*).

On prendra une valeur de ϕ qui permette le passage de $T_e = 0.1 \text{ KeV}$ à $T_e = 0.5 \text{ KeV}$ en un temps t_{photon} égal à $1.5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$. dans le cas homogène sans collisions avec les ions. La constante ϕ est donc évaluée à l'aide de la relation

$$T_e(t_{\text{photon}}) = \frac{\phi}{N_e^0} t_{\text{photon}}^2 + T_e^0.$$

Dans les deux cas tests qui suivent, on prendra l'ion moyen deutérium-tritium de masse atomique 2.5 et de numéro atomique 1. La fréquence de collision ion / électron Ω sera toujours « exacte » c'est à dire donnée par la relation (4.3) ; l'on parlera aussi de fréquence de collision ion / ion « exacte » lorsque ω sera également définie par la relation (4.3).

Notons enfin que la relation (4.8) n'a pas de justification physique, le but de ce travail n'étant pas d'étudier les phénomènes radiatifs. Son seul intérêt est

de permettre une montée en température des électrons via un dépôt d'énergie, phénomène qui a effectivement lieu en *Fusion par Confinement Inertiel* par l'intermédiaire des interactions photon / électron.

4.6.2 Premier cas test de type FCI : couplage avec différents choix de grille pour le domaine fluide

On procède au cas test FCI n°1 suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Longueur du domaine} = 1000 \mu\text{m. et } X_\nu = 950 \mu\text{m.}, \\ N^0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3} \text{ si } x < X_\nu, \\ N^0 = 10^{21} \text{ cm}^{-3} \text{ si } X_\nu < x < 1000 \mu\text{m.}, \\ \phi = 2.84 \cdot 10^{29} \text{ (Erg/s.) / cm}^3 \text{./s.}, \\ T^0 = T_e^0 = 0.1 \text{ KeV.} \end{array} \right.$$

Couplage lorsque le domaine fluide est entièrement lagrangien (courbes rouges) :

Les paramètres numériques sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Position initiale de l'interface cinétique / fluide} = 500 \mu\text{m.}, \\ N_x = 20 \text{ et } j_{\max} = 200, \\ M_x = 20 \end{array} \right.$$

tels qu'à $t = 0$, on ait 10 mailles fluides à la fois dans le milieu léger et dans le milieu lourd. On rappelle que, comme pour la validation du couplage P.T.L. ou B.G.K / Euler (voir les chapitres précédents), on a choisi de ne prendre qu'une seule maille pour le domaine fluide eulérien de raccordement entre la zone cinétique et la zone fluide lagrangienne et que N_x et j_{\max} définissent respectivement le nombre de mailles en espace et en vitesse microscopique dans le domaine cinétique, M_x définissant le nombre de mailles fluides.

Couplage lorsque le domaine fluide est résolu sur une grille fixe (courbes vertes) :

Les paramètres numériques sont les suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Position initiale de l'interface cinétique / fluide} = 500 \mu\text{m.}, \\ N_x = 50 \text{ et } j_{\max} = 200, \\ M_x = 30 \end{array} \right. \quad (4.9)$$

tels qu'à $t = 0$, on ait 10 mailles fluides dans le milieu léger et 20 dans le milieu lourd.

Tout le milieu est traité en cinétique (courbes bleues) :

Les paramètres numériques se réduisent alors à $N_x = 100$ et $j_{\max} = 200$.

On étudie deux cas :

Fréquence de collision ion / ion infinie On étudie ici le cas où la fréquence de collision ion / ion ω est infinie. Les figures 51 à 54 attestent du bon comportement du couplage.

D'autre part, on constatera notamment sur la figure 59 (température ionique au centre en fonction du temps) en comparant la courbe noire ($\omega = +\infty$) et la courbe bleue ($\omega = \omega$ exact) qu'un traitement cinétique de la formation du point chaud est ici nécessaire.

Fréquence de collision ion / ion exacte Lorsque les effets cinétiques sont très importants (ce qui est le cas pour ce cas test), on remarque que l'interface cinétique / fluide n'est pas très bien traitée dans le cas du couplage avec la zone fluide traitée en variables lagrangiennes (voir les figures 56, 58 et 59).

En effet, l'interface cinétique / fluide se déplace avec le fluide et celle-ci se trouve alors en permanence dans une zone qui théoriquement est toujours en fort déséquilibre thermodynamique. Ce mauvais traitement de l'interface cinétique / fluide force le domaine cinétique à retrouver prématurément l'équilibre thermodynamique comme le montre les courbes noire (solution fluide) et rouge (solution avec Ω exact) de la figure 59 (formation du point chaud) ce qui explique les mauvais résultats des figures 55, 56 et 58 (courbes rouges).

Mais, si l'interface cinétique / fluide est fixe (couplage avec la zone fluide traitée en variables eulériennes sur une grille fixe) et si celle-ci est suffisamment éloignée du centre, comme le plasma retrouve localement assez rapidement l'équilibre thermodynamique après le premier passage du choc au niveau de l'interface cinétique / fluide, les résultats ne sont pas trop détériorés (voir aussi les figures 55 à 59).

On remarquera, qu'à son tour, lors du passage du choc retour, l'interface cinétique / fluide couplée au domaine fluide résolu sur une grille eulérienne fixe n'est pas bien traitée (cf. figure 58, courbe verte). Cependant, ceci n'a ici quasiment aucune conséquence sur le traitement de la formation du point chaud (cf. figure 59, courbes bleue et verte).

4.6.3 Deuxième cas test de type FCI : effets cinétiques sur la fusion

Les températures atteintes lors de la formation du point chaud pour le cas test FCI $n^\circ 1$ sont trop faibles pour obtenir un taux de réaction nucléaire significatif. Pour étudier d'éventuels effets cinétiques sur la production de particules α et de neutrons, on impose maintenant un rapport de 1 à 1000 entre la densité des milieux léger et lourd : on espère ainsi augmenter la température au centre lors de la formation du point chaud et ainsi obtenir plus de réactions nucléaires.

Pour calculer le taux de réaction nucléaire, on utilise la formule classique

$$\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle = a_1 \frac{(1 + a_3 T^{0.75})}{\sqrt{1 + a_4 T^{3.25}}} T^{-2/3} \exp(-a_2 T^{-1/3})$$

où les a_i sont des constantes ad hoc (voir la formule (1.11) de la troisième partie), T étant la température ionique. La connaissance du taux de réaction nucléaire défini par $N^2 \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ est importante car celui-ci permet de connaître le nombre de particules α et de neutrons produits. Ce nombre est donné par

$$\int_0^{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{D}(t)} N(t, x)^2 \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle d\vec{x} dt$$

où \mathcal{T} est la durée de l'implosion et où $\mathcal{D}(t)$ est le domaine physique où ont lieu les réactions thermonucléaires au temps t , N étant la densité particulaire ionique.

Les conditions initiales pour ce cas test FCI $n^\circ 2$ sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Longueur du domaine} = 1000 \mu m. \text{ et } X_\nu = 950 \mu m., \\ N^0 = 10^{19} \text{ cm}^{-3}. \text{ si } x < X_\nu, \\ N^0 = 10^{22} \text{ cm}^{-3}. \text{ si } X_\nu < x < 1000 \mu m., \\ \phi = 2.84 \cdot 10^{30} \text{ (Erg/s.)} / \text{cm}^3 \cdot / \text{s.}, \\ T^0 = T_e^0 = 0.1 \text{ KeV.} \end{array} \right.$$

Le couplage est réalisé avec le domaine fluide résolu en *variables eulériennes sur une grille fixe* ; les paramètres numériques sont identiques à ceux du cas test FCI $n^\circ 1$ c'est à dire aux paramètres (4.9).

Mise en évidence des effets cinétiques sur l'hydrodynamique et sur la formation du point chaud Sur les figures 60 à 63, on compare les résultats du code cinétique avec la fréquence de collision ion / ion $\omega = +\infty$ ce qui redonne alors un modèle fluide et avec $\omega = \omega$ exact. On constate qu'un traitement cinétique du point chaud est nécessaire (cf. courbes noire et bleue). Pour ce modèle cinétique et pour les conditions initiales de ce cas test, on peut donc affirmer que :

Un modèle fluide sous-estime la densité ionique et surestime la température ionique et le taux de réaction nucléaire au centre.

Ces erreurs seraient par ailleurs accentuées dans un code fluide lagrangien par le problème numérique de *wall heating* au centre typique des codes fluides lagrangiens (voir le test du tube à choc de Noh au premier chapitre de cette partie : cf. figures 13 et 16). Cette erreur numérique est inexistante ici car on utilise le code cinétique avec une fréquence de collision ion / ion infinie pour obtenir la solution fluide au centre. Remarquons que les effets cinétiques n'ont quasiment aucune influence sur la pression totale au centre ainsi que sur la température électronique dans tout le domaine.

Les figures 64 et 65 montrent la distribution ionique f respectivement à $t = 1.8$ ns. et à $t = 4.2$ ns. en fonction de l'abscisse x . La figure 66 permet de visualiser l'évolution avec le temps de la distribution ionique f dans la première maille cinétique (i.e. en $x = 0$).

On constate sur la figure 64 que les ions dans le front de choc incident ne sont pas du tout à l'équilibre thermodynamique ; l'on fait la même constatation au moment de la formation du point chaud (i.e. à $t \simeq 4.2$ ns.) c'est à dire quelques instants après la réflexion en $x = 0$ du choc incident (cf. figure 65). La figure 66 confirme le fait que, lors de la formation du point chaud, les ions sont très loin de l'équilibre thermodynamique (voir les figures 61 et 62).

Résultats sur la production de particules α et de neutrons On trouve une production de particules α et de neutrons de l'ordre de

$$\begin{cases} \omega = \omega \text{ exact} \implies 6.43 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}, \\ \omega = +\infty \implies 1.62 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-2}. \end{cases}$$

soit donc un rapport de 1 à 2.5. On peut donc affirmer que :

Des effets cinétiques peuvent influencer de façon non négligeable la valeur du nombre de particules α produites.

On vérifie d'autre part que la formation du point chaud est bien traitée par le couplage avec une zone fluide eulérienne fixe (cf. courbes vertes). Avec le couplage, on trouve une production de particules α d'environ $5.69 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-2}$.

Le temps CPU pour le cas où tout est résolu en cinétique est bien-sûr supérieur à celui engendré par le cas où il y a couplage.

4.7 De l'utilité de la moyenne entropique

Dans l'introduction de la première partie, l'on a attiré l'attention sur le fait qu'un traitement cinétique du point chaud doit prendre en compte la très forte montée en température du plasma. Dans le cas test FCI $n^{\circ}2$ présenté ci-dessus, la température ionique passe ainsi de $T = 0.1 \text{ Kev}$ à $T = 6.4 \text{ Kev}$ en 3.8 ns . environ.

Pour que le schéma numérique de résolution des opérateurs de collision ion / ion et ion / électron soit valable sur cette très large plage de température, [10] ont opté pour la technique de dilatation du maillage, l'épaisseur des mailles Δv et les valeurs minimale et maximale des vitesses microscopiques étant alors fonction de la température ionique T locale.

Le code qui a été mis en œuvre ici n'utilise pas cette technique. L'épaisseur des mailles et la grandeur du domaine des vitesses microscopiques sont donc fixées à $t = 0$. Cela sous-entend qu'au début du calcul, la distribution ionique f est mal discrétisée en tout cas pour un nombre de mailles v_j non excessif (les résultats numériques ont été ici présentés pour $j_{\max} = 200$).

Le résultat numérique qui justifie l'utilisation de la *moyenne entropique* (voir la première partie pour la définition de cette notion) pour définir la valeur de f aux interfaces $j + 1/2$ est le suivant :

On constate que l'utilisation de la moyenne entropique permet sur un nombre j_{\max} de mailles en vitesse tout à fait acceptable d'étudier les cas tests de type FCI présentés plus haut - ce nombre limite j_{\max} étant égal à 140 pour le cas test FCI $n^{\circ}2$ (avec une précision des résultats par ailleurs excellentes) -, alors que l'utilisation de la moyenne arithmétique ou de Chang et Cooper impose de prendre un nombre j_{\max} de mailles en vitesse supérieur à 1000 pour éviter une erreur de calcul machine au tout début du calcul.

Notons que la limite $j_{\max} = 140$ a été observée en retirant la partie collisionnelle ion / ion afin d'éviter toute confusion, la correction Cheremissin pouvant donner des résultats erronés lorsque le maillage en vitesse est très grossier (en particulier, cette correction ne préserve pas la positivité de la distribution corrigée).

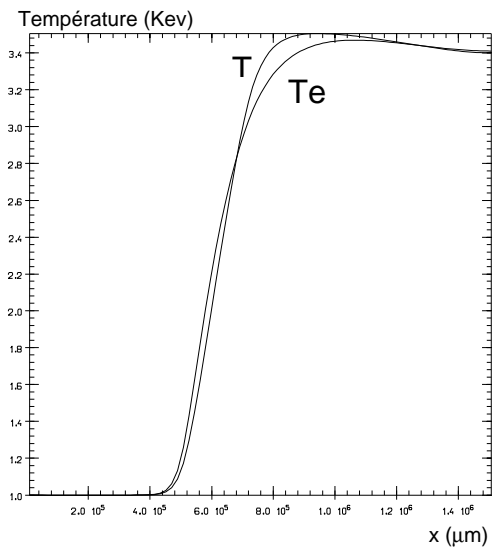


Fig. 44 : T et T_e

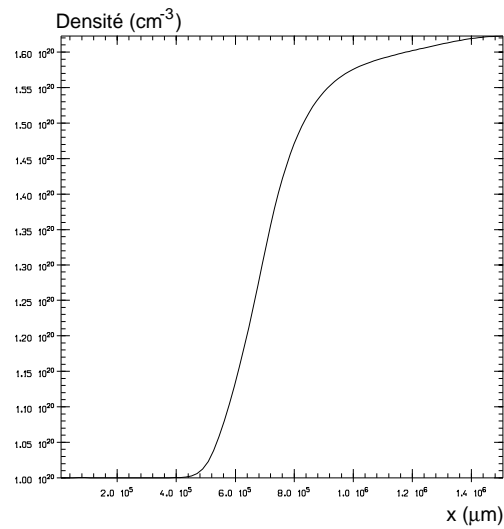


Fig. 45 : N

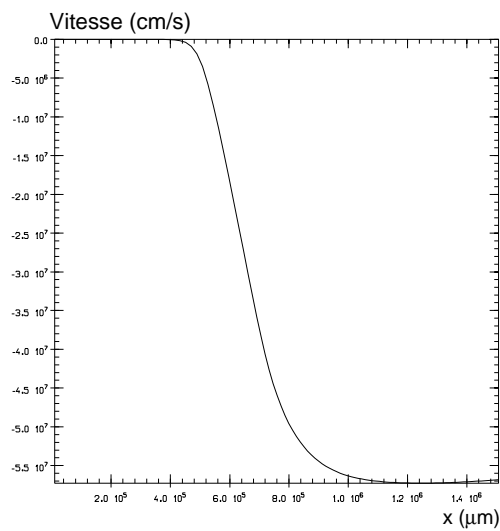
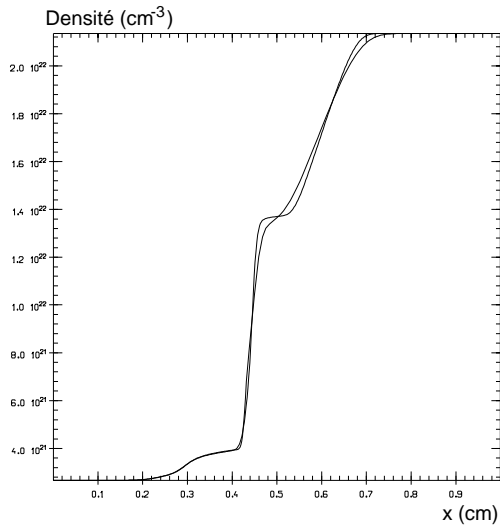
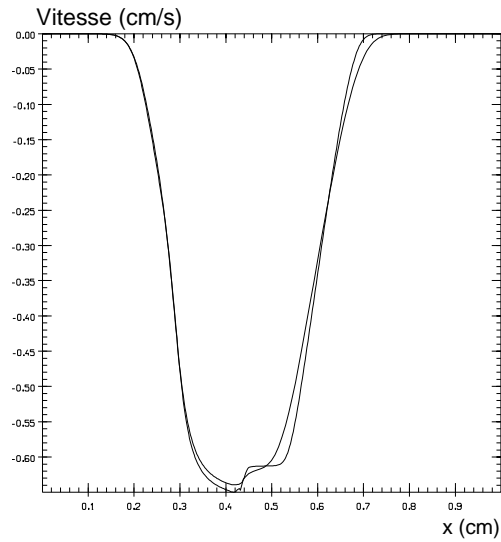
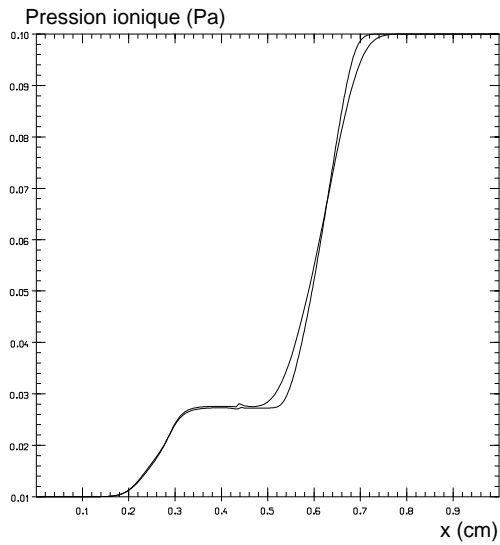
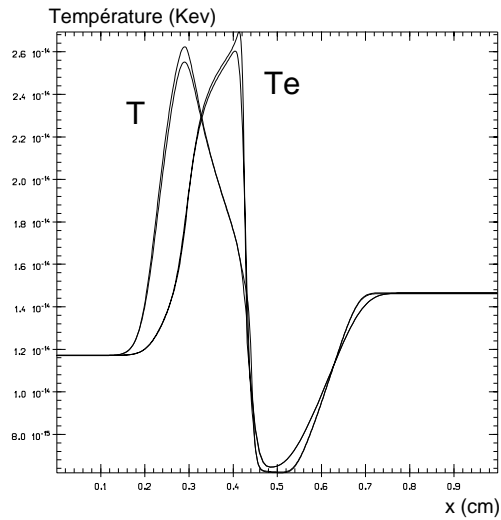


Fig. 46 : U

Choc Mach 2.
 Simulation des équations d'Euler bi-températures
 pour un plasma mono espèce.
 Températures, densité et vitesse pour $t = 858 \cdot 10^{-9}$ s..

Fig. 47 : N Fig. 48 : U Fig. 49 : pression totale $P + P_e$ Fig. 50 : T et T_e

Tube à choc de Sod.

Couplage cinétique / fluide avec $\Omega = \Omega(\rho)$ et $\omega = \omega(\rho)$.

Profils de densité, vitesse, pression totale et températures à $t = 0.1$ s..

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

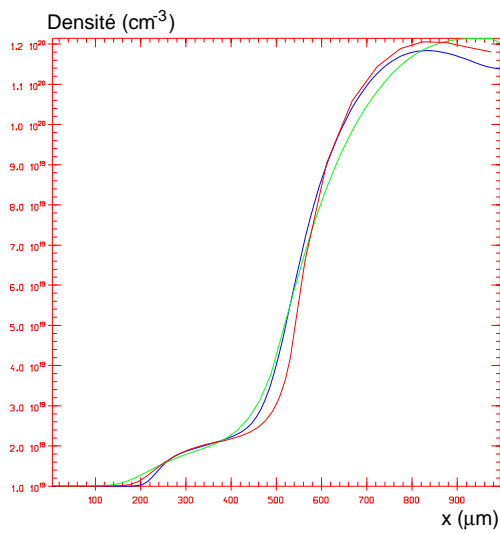


Fig. 51 : N à $t = 2.53 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$

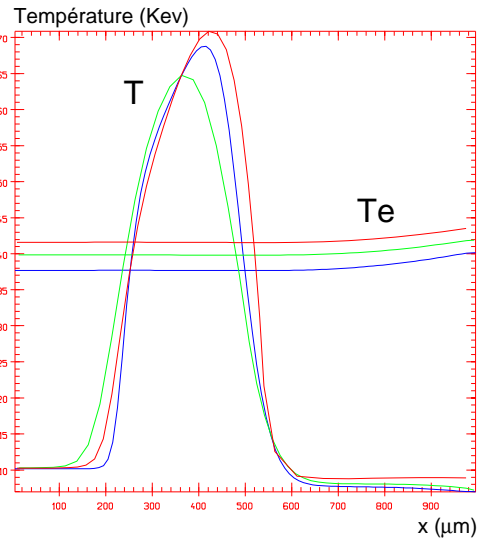


Fig. 52 : T et T_e à $t = 2.53 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$

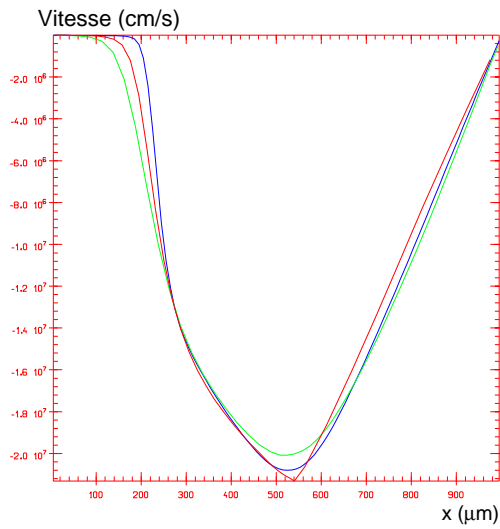


Fig. 53 : U à $t = 2.53 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$

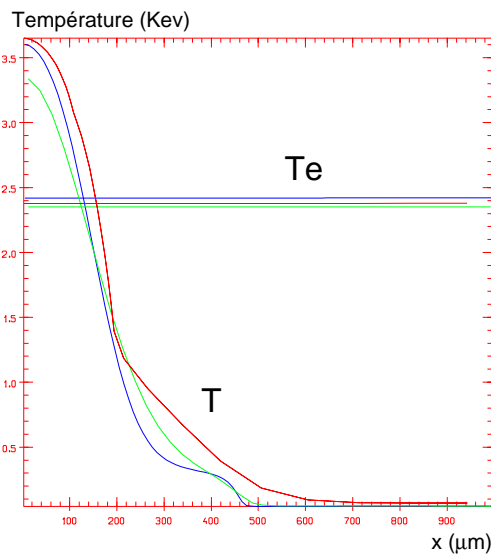


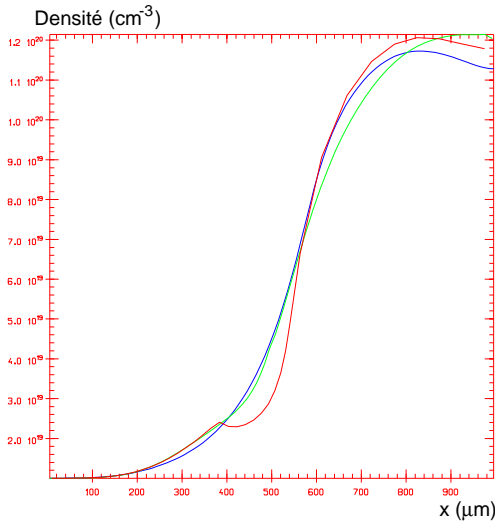
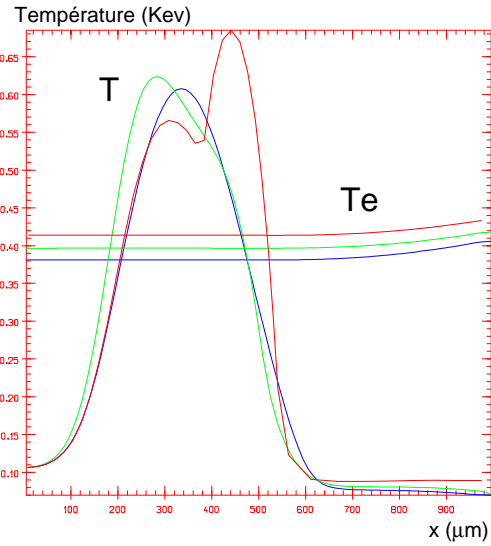
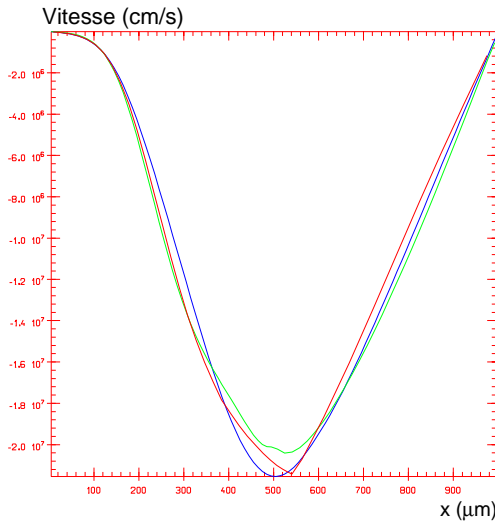
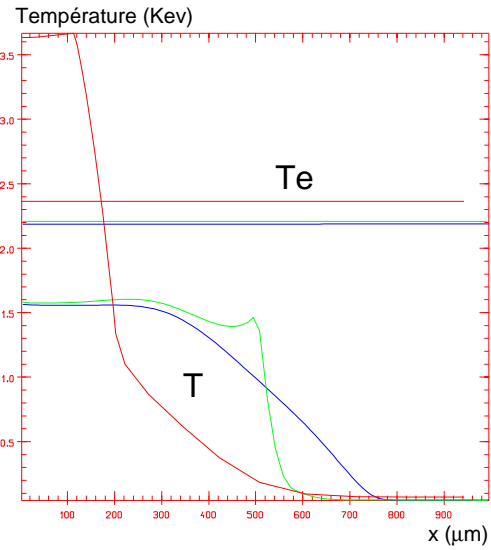
Fig. 54 : T et T_e à $t = 5 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$

Cas test FCI $n^{\circ}1$ avec $\omega = +\infty$.

Profils de densité, températures et vitesse.

Courbe bleue : tout en cinétique; courbe verte : couplage eulérien
 courbe rouge : couplage lagrangien

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

Fig. 55 : N à $t = 2.51 \cdot 10^{-9}$ s..Fig. 56 : T et T_e à $t = 2.51 \cdot 10^{-9}$ s..Fig. 57 : U à $t = 2.51 \cdot 10^{-9}$ s..Fig. 58 : T et T_e à $t = 5 \cdot 10^{-9}$ s..

Cas test FCI $n^{\circ}1$ avec ω exact.

Profils de densité, températures et vitesse.

Courbe bleue : tout en cinétique; courbe verte : couplage eulérien
courbe rouge : couplage lagrangien

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

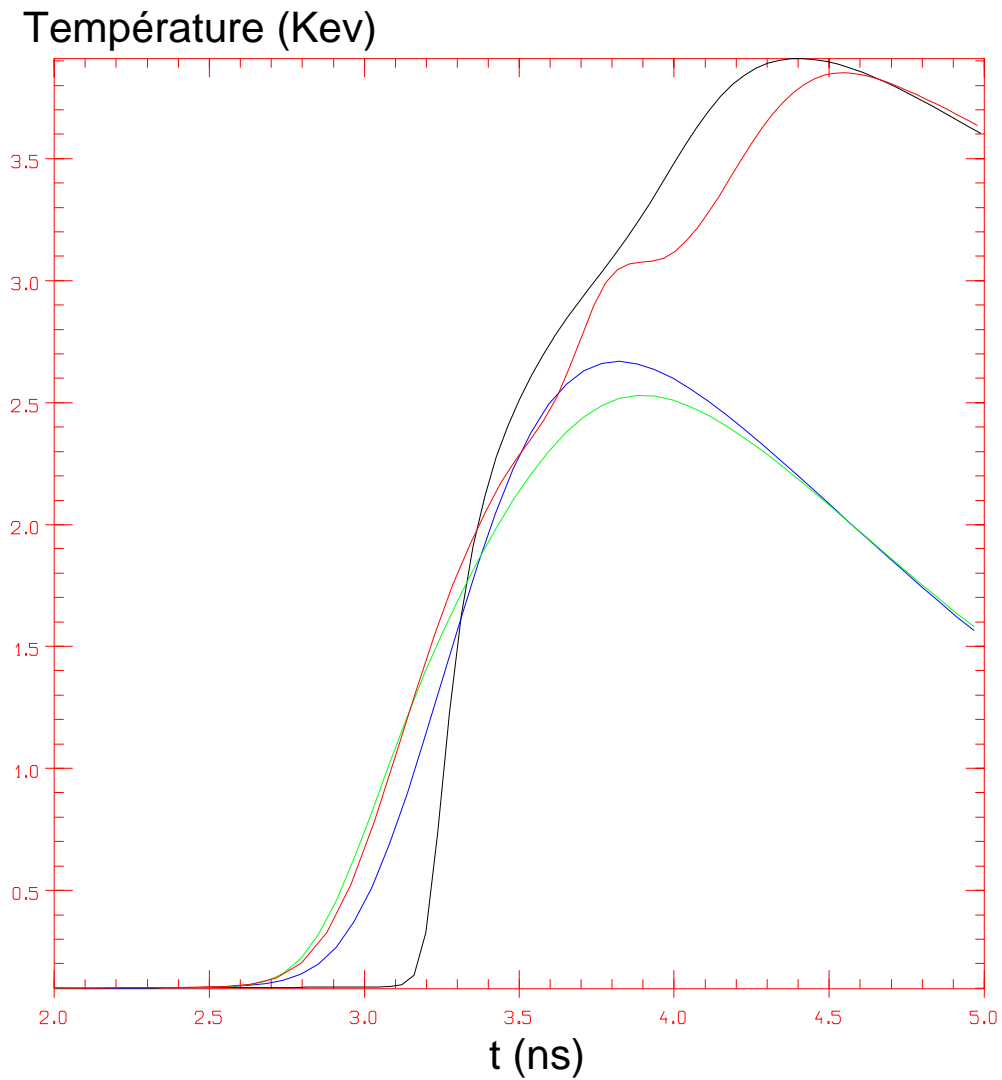


Fig. 59 : T pour $2 \cdot 10^{-9} \text{ s.} < t < 5 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$.

Cas test FCI n°1 avec ω exact.

Formation du point chaud.
Profils de températures au centre.

Courbe bleue : tout en cinétique; courbe verte : couplage eulérien
courbe rouge : couplage lagrangien
courbe noire : solution fluide ($\omega = +\infty$)

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

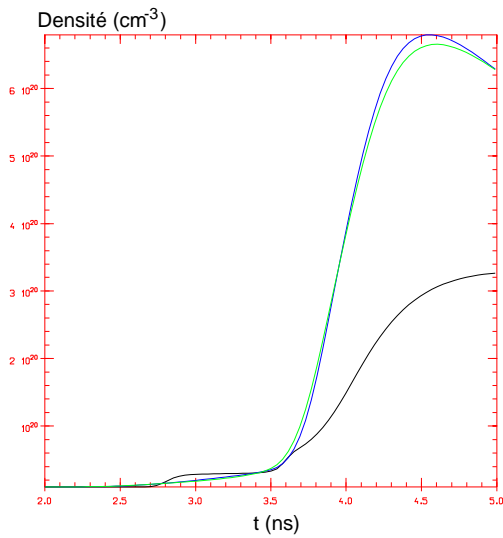
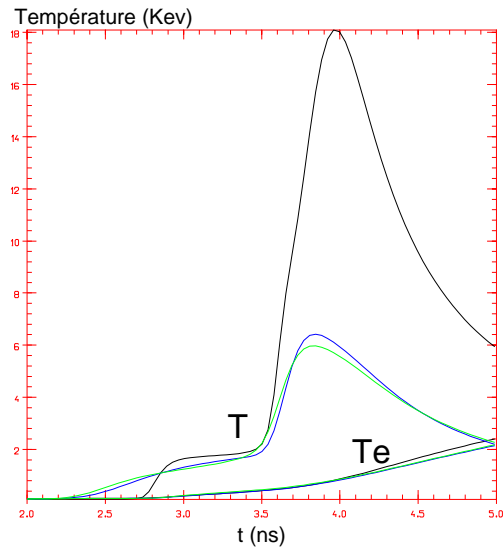
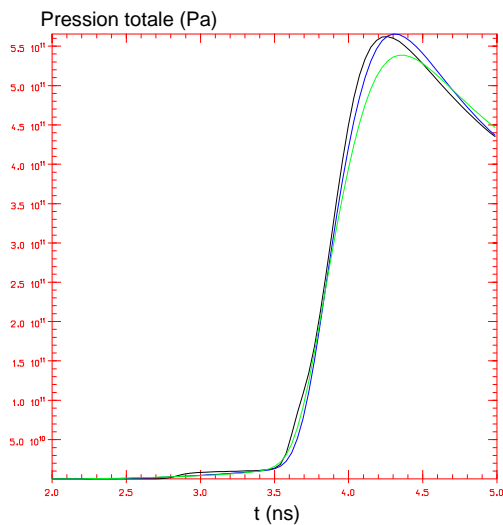
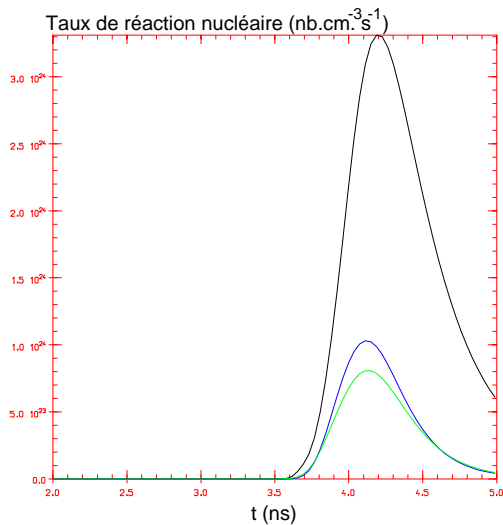
Fig. 60 : N Fig. 61 : T et T_e Fig. 62 : pression totale $P + P_e$ 

Fig. 63 : taux de réaction nucléaire

Cas test FCI $n^{\circ}2$ avec ω exact.

Formation du point chaud.

Profils de densité, températures, pression totale
et taux de réaction nucléaire au centre.

Courbe bleue : tout en cinétique; courbe verte : couplage eulérien
courbe noire : solution fluide ($\omega = +\infty$)

Comparaison du couplage avec la solution entièrement cinétique.

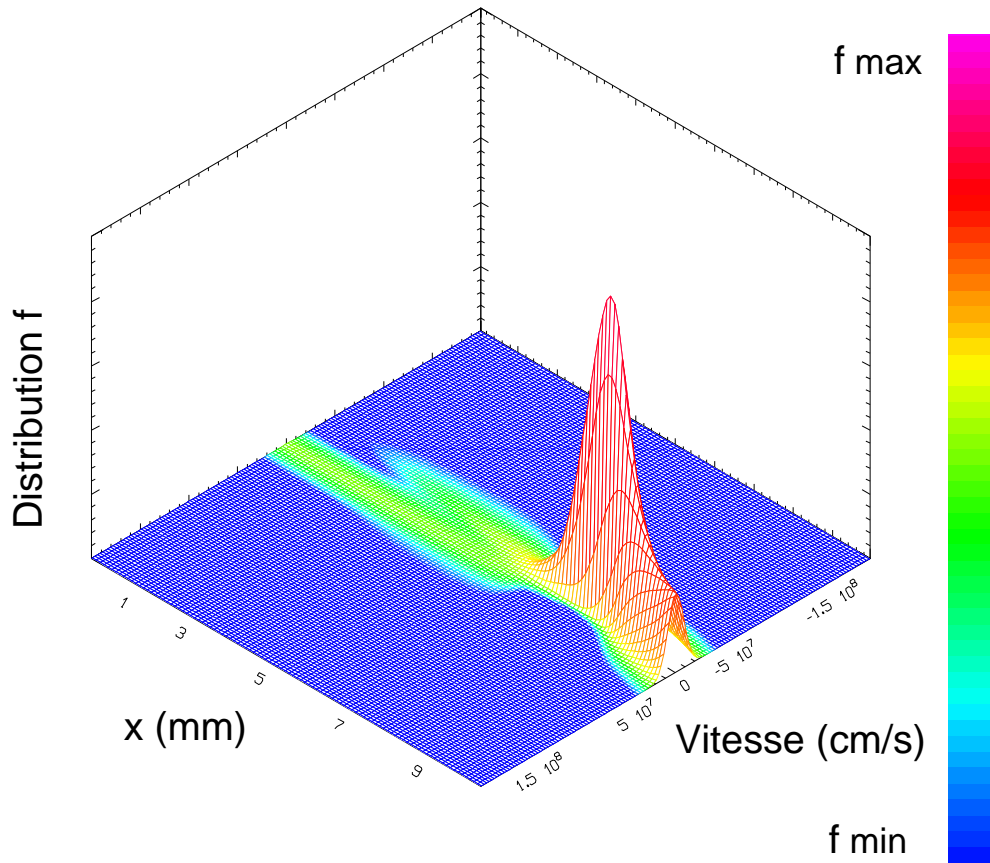


Fig. 64: f à $t = 1.8 \cdot 10^{-9}$ s..

Cas test FCI $n^{\circ}2$ avec ω exact.

Distribution ionique f à $t = 1.8$ ns.
en fonction de l'abscisse x .

Solution entièrement cinétique.

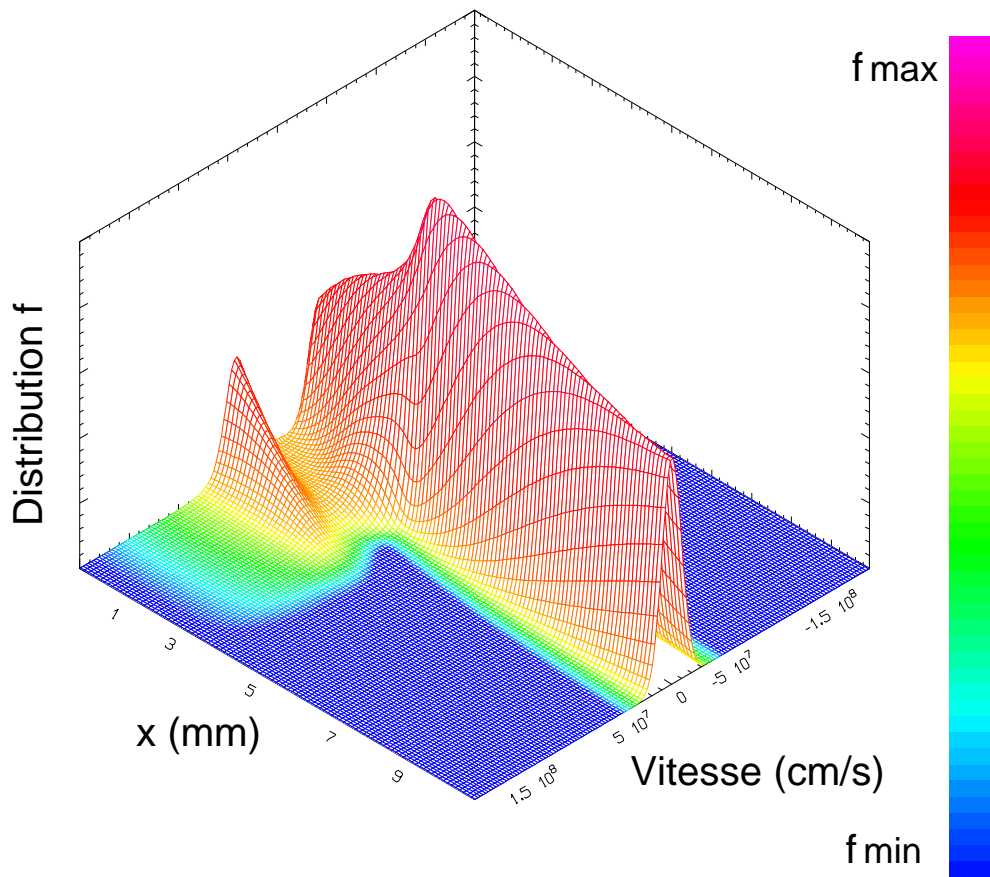


Fig. 65 : f pour $t = 4.2 \cdot 10^{-9}$ s..

Cas test FCI $n^{\circ}2$ avec ω exact.

Distribution ionique f à $t = 4.2$ ns.
en fonction de l'abscisse x .

Solution entièrement cinétique.

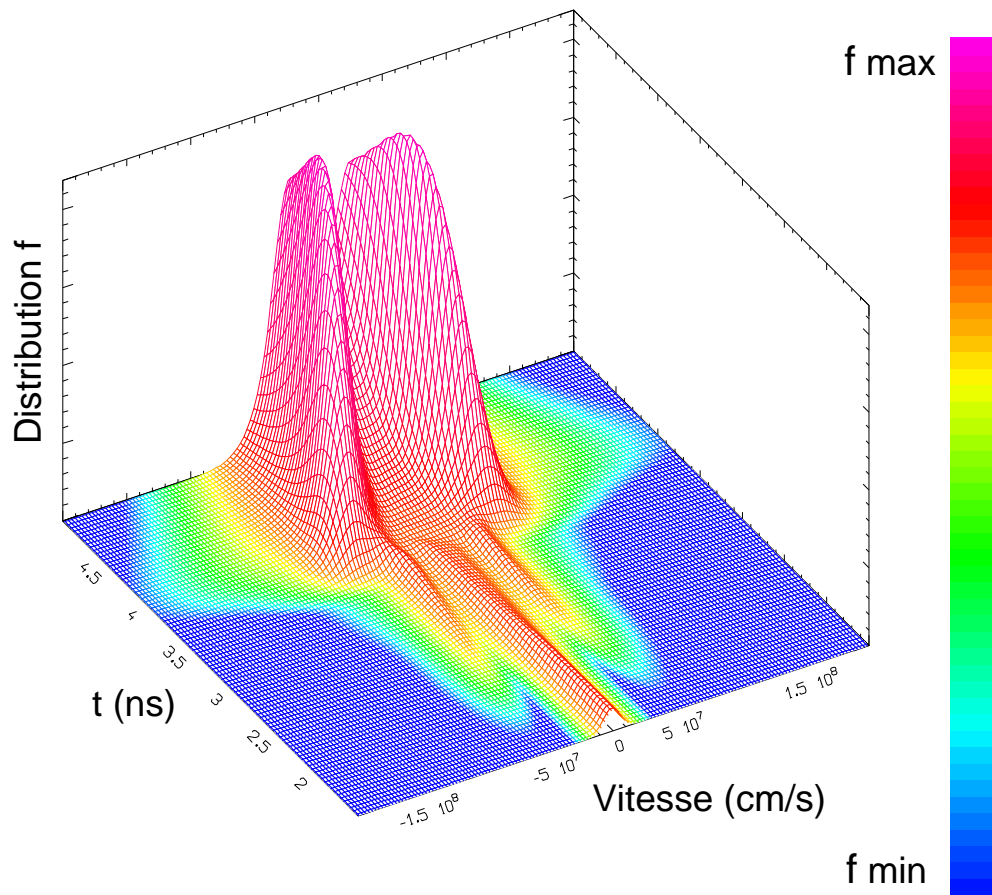


Fig. 66 : f pour $1.5 \cdot 10^{-9} \text{ s.} < t < 5 \cdot 10^{-9} \text{ s.}$.

Cas test FCI $n^{\circ}2$ avec ω exact.

Formation du point chaud.
Distribution ionique f au centre.

Solution entièrement cinétique.

Conclusion de la deuxième partie

Dans cette seconde partie, l'on a montré comment construire un schéma cinétique pour la résolution des équations d'Euler isentropiques ou classiques monodimensionnelles planes en variables eulériennes sur une grille mobile ou en variables lagrangiennes, schéma numérique permettant un raccordement naturel à une zone traitée en cinétique (couplage P.T.L. / Euler isentropique ou couplage B.G.K. / Euler). Des résultats numériques ont pu montrer le bon comportement de l'algorithme global de couplage.

Puis, après avoir rappelé les étapes numériques entrant en jeu dans la résolution des équations cinétiques pour un plasma classique quasi-neutre, on s'est attaché à montrer comment appliquer les résultats du couplage B.G.K. / Euler au problème du couplage cinétique / fluide dans un plasma chaud en se limitant à un modèle cinétique qui est une simplification des équations cinétiques de Vlasov-Fokker-Planck.

On a ainsi pu montrer - sur des cas tests dont les conditions initiales sont qualitativement proches de celles rencontrées dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel* - non seulement la validité et les limitations de la méthode de couplage proposée (et constater le gain de temps CPU en découlant) mais aussi l'existence d'effets cinétiques non négligeables. Par exemple, ces effets cinétiques entraînent une chute du nombre de particules α produites par rapport à ce que donnerait un code fluide classique.

Il faut noter que dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel*, une interface cinétique / fluide fixe semble être le meilleur choix ce qui sous entend que le domaine fluide doit être résolu en variables eulériennes sur une grille fixe dès lors que l'on souhaite traiter la formation du point chaud avec un modèle cinétique. Une interface cinétique / fluide mobile pourrait être envisagée à condition que celle-ci - comme dans le cas d'une interface fixe - reste suffisamment éloignée de la zone de formation du point chaud c'est à dire de la zone ne se trouvant pas à l'équilibre thermodynamique. Or il est plus difficile de contrôler la position de l'interface lorsque celle-ci est mobile par rapport au cas d'une interface fixe. C'est

pourquoi le couplage avec une interface cinétique / fluide fixe semble être plus approprié.

Enfin, on a pu confirmer l'excellent comportement sur des cas tests de type *Fusion par Confinement Inertiel* du schéma utilisant la *moyenne entropique* pour discrétiser l'opérateur de Fokker-Planck ion / électron lorsque le maillage en vitesse est grossier, ce bon comportement n'étant pas retrouvé lorsque l'on utilise la moyenne arithmétique ou la moyenne de Chang et Cooper.

Annexe A

Calcul des demi-flux du schéma cinétique

Dans cette annexe, on calcule les flux

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{i+1/2} \\ \wp_{i+1/2} \\ \aleph_{i+1/2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{i+1/2}^+ \\ \wp_{i+1/2}^+ \\ \aleph_{i+1/2}^+ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{i+1/2}^- \\ \wp_{i+1/2}^- \\ \aleph_{i+1/2}^- \end{pmatrix}$$

intervenant dans le schéma numérique cinétique défini au théorème 1.1 (l'indice de temps n étant oublié) où les demi-flux sont définis de la façon suivante

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{i+1/2}^+ \\ \wp_{i+1/2}^+ \\ \aleph_{i+1/2}^+ \end{pmatrix} &= \int_{v > V_{i+1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix} m(v - V_{i+1/2}) f_i(v) dv \\ &+ \int_{v > V_{i+1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} m(v - V_{i+1/2}) g_i(v) dv, \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{S}_{i+1/2}^- \\ \wp_{i+1/2}^- \\ \aleph_{i+1/2}^- \end{pmatrix} &= \int_{v < V_{i+1/2}} \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ v^2/2 \end{pmatrix} m(v - V_{i+1/2}) f_{i+1}(v) dv \\ &+ \int_{v < V_{i+1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} m(v - V_{i+1/2}) g_{i+1}(v) dv \end{aligned}$$

avec

$$f_i(v) = \frac{\rho_i/m}{\sqrt{T_i/m}} \chi \left(\frac{v - U_i}{\sqrt{T_i/m}} \right)$$

et

$$g_i(v) = \frac{\lambda \rho_i}{2m} \sqrt{T_i/m} \chi \left(\frac{v - U_i}{\sqrt{T_i/m}} \right)$$

sachant que pour les équations d'Euler isentropiques, seuls les flux $\mathfrak{S}_{i+1/2}$ et $\wp_{i+1/2}$ doivent être évalués. Rappelons d'autre part que la fonction χ sera définie en fonction du modèle fluide étudié.

A.1 Équations d'Euler isentropiques

Dans cette section, on calcule les demi-flux $\mathfrak{S}_{i+1/2}^\pm$ et $\wp_{i+1/2}^\pm$ où χ est définie par

$$\chi(v) = \frac{1}{2\sqrt{3}} 1_{\{|v| < \sqrt{3}\}}.$$

A.1.1 Calcul de $\mathfrak{S}_{i+1/2}^\pm$

Connaissant l'expression de f_i et de χ , on peut écrire que

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \int_{v > V_{i+1/2}} (v - V_{i+1/2}) \frac{\rho_i}{2\sqrt{3T_i/m}} 1_{\{|v - U_i| < \frac{\tilde{U}_i}{2}\}} dv$$

avec

$$\tilde{U}_i = 2\sqrt{3T_i/m} = \rho_i$$

(car $T_i/m = P_i/\rho_i = \rho_i^2/12$) soit encore

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \int_{\mathcal{D}_i^+} (v - V_{i+1/2}) dv$$

où

$$\mathcal{D}_i^+ = \{v > V_{i+1/2}\} \cap [U_i - \frac{\tilde{U}_i}{2}, U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}].$$

Posons maintenant

$$x_{i+1/2}^+ = \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\tilde{U}_i}.$$

Alors, en utilisant l'égalité $P/\rho = T/m$ et la loi $P = \rho^3/12$, on obtient facilement que :

◦ Si $x_{i+1/2}^+ \geq 1/2$: Alors

$$\mathcal{D}_i^+ = \emptyset$$

et donc

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = 0.$$

◦ Si $|x_{i+1/2}^+| \leq 1/2$: Alors

$$\mathcal{D}_i^+ = [V_{i+1/2}, U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}]$$

et donc

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = [v(v/2 - V_{i+1/2})]_{V_{i+1/2}}^{U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{P_i \rho_i} [1 - 4x_{i+1/2}^+ + 4(x_{i+1/2}^+)^2].$$

◦ Si $x_{i+1/2}^+ \leq -1/2$: Alors

$$\mathcal{D}_i^+ = [U_i - \frac{\tilde{U}_i}{2}, U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}]$$

et donc

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = [v(v/2 - V_{i+1/2})]_{U_i - \frac{\tilde{U}_i}{2}}^{U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{P_i \rho_i} 8x_{i+1/2}^+.$$

En définitive, on obtient

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \mathcal{F}(x_{i+1/2}^+) \rho_i$$

où

$$\mathcal{F}(x) = (1 - 4x + 4x^2) \cdot 1_{\{|x| \leq 1/2\}} - x \cdot 8_{\{x < -1/2\}}.$$

De même, on trouve

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^- = -\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}$$

où

$$x_{i+1/2}^- = \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\tilde{U}_{i+1}}.$$

A.1.2 Calcul de $\wp_{i+1/2}^\pm$

En procédant comme précédemment, on peut écrire que :

◦ Si $x_{i+1/2}^+ \geq 1/2$: Alors

$$\wp_{i+1/2}^+ = 0.$$

o Si $|x_{i+1/2}^+| \leq 1/2$: Alors

$$\wp_{i+1/2}^+ = [v^2(v/3 - V_{i+1/2}/2)]_{V_{i+1/2}}^{U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}}$$

soit encore

$$\wp_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2}[1 - 3x_{i+1/2}^+ + 4(x_{i+1/2}^+)^3] + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}}[1 - 4x_{i+1/2}^+ + 4(x_{i+1/2}^+)^2]\rho_i U_i$$

après calculs.

o Si $x_{i+1/2}^+ \leq -1/2$: Alors

$$\wp_{i+1/2}^+ = [v^2(v/3 - V_{i+1/2}/2)]_{U_i - \frac{\tilde{U}_i}{2}}^{U_i + \frac{\tilde{U}_i}{2}}$$

et donc, tout calcul fait, on obtient

$$\wp_{i+1/2}^+ = P_i + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}}8x_{i+1/2}^+\rho_i U_i.$$

D'où l'expression finale suivante

$$\wp_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2}\mathcal{G}(x_{i+1/2}^+) + \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}}\mathcal{F}(x_{i+1/2}^+)\rho_i U_i$$

avec

$$\mathcal{G}(x) = (1 - 3x + 4x^3) \cdot 1_{\{|x| \leq 1/2\}} + 2_{\{x < -1/2\}}.$$

De même, on obtient

$$\wp_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2}\mathcal{G}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}}\mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-)\rho_{i+1}U_{i+1}.$$

A.2 Équations d'Euler

χ est maintenant définie par

$$\chi(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-v^2/2).$$

A.2.1 Calcul de $\mathfrak{S}_{i+1/2}^{\pm}$

On a alors

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \frac{\rho_i}{\sqrt{2\pi T_i/m}} \int_{v > V_{i+1/2}} (v - V_{i+1/2}) \exp\left[-\frac{m(v - U_i)^2}{2T_i}\right] dv.$$

En posant

$$\tilde{U}_i = \sqrt{2T_i/m} = \sqrt{2P_i/\rho_i}$$

et

$$x_{i+1/2}^+ = \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\tilde{U}_i}$$

puis en faisant le changement de variable

$$x = \frac{v - U_i}{\tilde{U}_i},$$

on trouve

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \frac{\rho_i}{\sqrt{\pi}} \left[\tilde{U}_i \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} x \exp(-x^2) dx + (U_i - V_{i+1/2}) \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right]$$

soit encore

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \rho_i$$

avec

$$\hat{\mathcal{F}} = \exp(-x^2) - \sqrt{\pi} x \operatorname{erfc}(x)$$

où $\operatorname{erfc}(x)$ est la fonction d'erreur complémentaire définie par

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-y^2) dy.$$

De même, on obtient

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^- = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}$$

où

$$x_{i+1/2}^- = \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\tilde{U}_{i+1}}.$$

A.2.2 Calcul de $\varphi_{i+1/2}^{\pm}$

On a

$$\varphi_{i+1/2}^+ = \frac{\rho_i}{\sqrt{2\pi T_i/m}} \int_{v>V_{i+1/2}} v(v - V_{i+1/2}) \exp\left[-\frac{m(v - U_i)^2}{2T_i}\right] dv.$$

Et en utilisant le changement de variable précédent, on obtient

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1/2}^+ &= \frac{\rho_i}{\sqrt{\pi}} \left[\tilde{U}_i \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} (U_i + x\tilde{U}_i) x \exp(-x^2) dx \right. \\ &\quad \left. + (U_i - V_{i+1/2}) \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} (U_i + x\tilde{U}_i) \exp(-x^2) dx \right]. \end{aligned}$$

En remarquant que

$$2U_i - V_{i+1/2} = U_i - \tilde{U}_i x_{i+1/2}^+,$$

on trouve alors que

$$\begin{aligned} \varphi_{i+1/2}^+ &= \frac{\rho_i}{\sqrt{\pi}} \left[\tilde{U}_i^2 \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2) dx + \tilde{U}_i (U_i - \tilde{U}_i x_{i+1/2}^+) \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} x \exp(-x^2) dx \right. \\ &\quad \left. - U_i \tilde{U}_i x_{i+1/2}^+ \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right]. \end{aligned}$$

Et comme

$$2 \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} x^2 \exp(-x^2) dx = x_{i+1/2}^+ \exp[-(x_{i+1/2}^+)^2] + \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} \exp(-x^2) dx,$$

on a finalement

$$\varphi_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2} \hat{\mathcal{G}}(x_{i+1/2}^+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \rho_i U_i$$

avec

$$\hat{\mathcal{G}}(x) = \operatorname{erfc}(x).$$

De même, on obtient

$$\varphi_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2} \hat{\mathcal{G}}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1} U_{i+1}.$$

A.2.3 Calcul de $\aleph_{i+1/2}^\pm$

En appliquant encore la même technique, on peut écrire que

$$\begin{aligned} \aleph_{i+1/2}^+ &= \frac{\rho_i}{2\sqrt{\pi}} \left[\tilde{U}_i \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} (U_i + x\tilde{U}_i)^2 x \exp(-x^2) dx \right. \\ &\quad \left. + (U_i - V_{i+1/2}) \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} (U_i + x\tilde{U}_i)^2 \exp(-x^2) dx \right] \\ &\quad + \frac{\lambda\rho_i}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\tilde{U}_i^2}{2} \left[\tilde{U}_i \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} x \exp(-x^2) dx + (U_i - V_{i+1/2}) \int_{x_{i+1/2}^+}^{+\infty} \exp(-x^2) dx \right] \end{aligned}$$

avec $\lambda = (3 - \gamma)/(\gamma - 1)$ où $\gamma \in]1, 3]$.

En développant puis en ordonnant, on trouve

$$\aleph_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2} \cdot \frac{(V_{i+1/2} + U_i)}{2} \hat{\mathcal{G}}(x_{i+1/2}^+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) (\rho_i \xi_i + P_i/2).$$

De même, on trouve

$$\aleph_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2} \cdot \frac{(V_{i+1/2} + U_{i+1})}{2} \hat{\mathcal{G}}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) (\rho_{i+1} \xi_{i+1} + P_{i+1}/2).$$

A.3 Résumé

Dans cette section, on résume les calculs effectués précédemment.

On pourra ainsi constater la grande similarité entre les formules concernant Euler isentropique et les formules concernant Euler classique, et notamment entre \mathcal{F} et $\hat{\mathcal{F}}$, et entre \mathcal{G} et $\hat{\mathcal{G}}$.

A.3.1 Équations d'Euler isentropiques

On a donc pour les équations d'Euler isentropiques telles que $P/\rho^3 = 1/12$ et $\gamma = 3$ les formules

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{i+1/2}^+ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \mathcal{F}(x_{i+1/2}^+) \rho_i, \\ \mathfrak{S}_{i+1/2}^- &= -\frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}, \end{aligned}$$

$$\wp_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2} \mathcal{G}(x_{i+1/2}^+) + \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \mathcal{F}(x_{i+1/2}^+) \rho_i U_i$$

et

$$\wp_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2} \mathcal{G}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{\sqrt{3}}{4} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1} U_{i+1}$$

où

$$x_{i+1/2}^+ = \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\rho_i},$$

$$x_{i+1/2}^- = \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\rho_{i+1}},$$

$$\mathcal{F}(x) = (1 - 4x + 4x^2) \cdot 1_{\{|x| \leq 1/2\}} - x \cdot \delta_{\{x < -1/2\}}$$

et

$$\mathcal{G}(x) = (1 - 3x + 4x^3) \cdot 1_{\{|x| \leq 1/2\}} + 2 \cdot \delta_{\{x < -1/2\}}.$$

A.3.2 Équations d'Euler

Et pour les équations d'Euler ($\gamma \in]1, 3]$), on obtient

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \rho_i,$$

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^- = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1},$$

$$\wp_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2} \hat{\mathcal{G}}(x_{i+1/2}^+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \rho_i U_i,$$

$$\wp_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2} \hat{\mathcal{G}}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1} U_{i+1},$$

$$\mathfrak{N}_{i+1/2}^+ = \frac{P_i}{2} \cdot \frac{(V_{i+1/2} + U_i)}{2} \hat{\mathcal{G}}(x_{i+1/2}^+) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \hat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) (\rho_i \xi_i + P_i/2)$$

et

$$\mathfrak{N}_{i+1/2}^- = \frac{P_{i+1}}{2} \cdot \frac{(V_{i+1/2} + U_{i+1})}{2} \hat{\mathcal{G}}(-x_{i+1/2}^-) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \hat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) (\rho_{i+1} \xi_{i+1} + P_{i+1}/2)$$

où

$$x_{i+1/2}^+ = \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\sqrt{2P_i/\rho_i}},$$

$$x_{i+1/2}^- = \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\sqrt{2P_{i+1}/\rho_{i+1}}},$$

$$\widehat{\mathcal{F}}(x) = \exp(-x^2) - \sqrt{\pi}x\operatorname{erfc}(x)$$

et

$$\widehat{\mathcal{G}}(x) = \operatorname{erfc}(x),$$

$\operatorname{erfc}(x)$ étant la fonction d'erreur complémentaire définie par

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} \exp(-y^2) dy.$$

Annexe B

Preuve de la proposition 1.5

B.1 Cas des équations d'Euler isentropiques

On doit alors résoudre l'équation

$$\mathfrak{S}_{i+1/2}^+ = -\mathfrak{S}_{i+1/2}^-$$

dont $V_{i+1/2}$ est l'inconnue. En se basant sur les résultats de l'annexe précédente, on peut réécrire cette équation comme suit

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \mathcal{F}(x_{i+1/2}^+) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}.$$

Supposons maintenant que les mailles i et $i + 1$ sont dans un état thermodynamique proche. Alors, on peut affirmer que

$$V_{i+1/2} \simeq U_i \simeq U_{i+1}$$

ce qui revient à dire que

$$x_{i+1/2}^+ \simeq x_{i+1/2}^- \simeq 0.$$

Donc, on peut écrire que

$$\mathcal{F}(x_{i+1/2}^+) \simeq 1 - 4x_{i+1/2}^+$$

et que

$$\mathcal{F}(-x_{i+1/2}^-) \simeq 1 + 4x_{i+1/2}^-.$$

À l'ordre 1, l'équation à résoudre devient donc

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} (1 - 4x_{i+1/2}^+) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} (1 + 4x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}$$

soit encore

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \left(1 - 4 \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\rho_i} \right) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \left(1 + 4 \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\rho_{i+1}} \right) \rho_{i+1}$$

ce qui donne bien

$$U_{i+1/2} \equiv V_{i+1/2} = \frac{\rho_i U_i + \rho_{i+1} U_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1}} + \frac{\mu}{(\rho_i + \rho_{i+1})/2} \left(\frac{P_i}{c_i} - \frac{P_{i+1}}{c_{i+1}} \right)$$

avec $c = \sqrt{3P/\rho}$ et $\mu = 3/4$ (on rappelle que, pour ce modèle, on a $\gamma = 3$).

B.2 Cas des équations d'Euler

De même, l'équation à résoudre est la suivante

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \widehat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \widehat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}.$$

En supposant aussi que les mailles i et $i+1$ sont dans un état thermodynamique proche, on peut écrire que

$$\widehat{\mathcal{F}}(x_{i+1/2}^+) \simeq 1 - \sqrt{\pi} x_{i+1/2}^+$$

et que

$$\widehat{\mathcal{F}}(-x_{i+1/2}^-) \simeq 1 + \sqrt{\pi} x_{i+1/2}^-.$$

Donc, à l'ordre 1, on doit résoudre

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} (1 - \sqrt{\pi} x_{i+1/2}^+) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} (1 + \sqrt{\pi} x_{i+1/2}^-) \rho_{i+1}$$

soit encore

$$\sqrt{\frac{P_i}{\rho_i}} \left(1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{V_{i+1/2} - U_i}{\sqrt{P_i/\rho_i}} \right) \rho_i = \sqrt{\frac{P_{i+1}}{\rho_{i+1}}} \left(1 + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{V_{i+1/2} - U_{i+1}}{\sqrt{P_{i+1}/\rho_{i+1}}} \right) \rho_{i+1}.$$

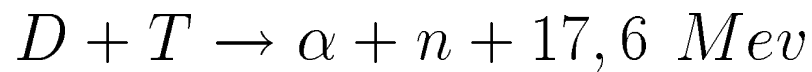
Finalement, on trouve

$$U_{i+1/2} \equiv V_{i+1/2} = \frac{\rho_i U_i + \rho_{i+1} U_{i+1}}{\rho_i + \rho_{i+1}} + \frac{\mu}{(\rho_i + \rho_{i+1})/2} \left(\frac{P_i}{c_i} - \frac{P_{i+1}}{c_{i+1}} \right)$$

avec $c = \sqrt{\gamma P/\rho}$ et $\mu = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi}}$.

Troisième partie

Évaluation de la distribution des
particules α et des neutrons issus
de la réaction de fusion
thermonucléaire



Introduction de la troisième partie

Au quatrième chapitre de la deuxième partie, l'on a pu constater que lors de la formation du point chaud, les particules de deutérium et de tritium peuvent ne pas être à l'équilibre thermodynamique. Or, les formules classiques donnant le taux de réaction nucléaire sont évaluées en supposant que le milieu fusible est à l'équilibre thermodynamique. L'on s'est donc posé la question de la validité des formules utilisées dans les codes hydrodynamiques actuels de *Fusion par Confinement Inertiel*, formules donnant le taux de réaction nucléaire.

Dans cette partie, l'on propose donc un modèle de type Boltzmann et une méthode de type Monte-Carlo pour décrire numériquement la réaction de fusion. Cette étude permettra ainsi de mettre en évidence le fait que l'influence des déséquilibres thermodynamiques sur la valeur du taux de réaction nucléaire et donc sur la valeur du nombre de particules α produites peut d'une part ne pas être négligeable et peut d'autre part être évaluée en un temps CPU raisonnable (par rapport au temps CPU total utilisé par un code cinétique).

Le plan de cette troisième partie est le suivant :

Au premier chapitre, l'on décrit le modèle cinétique de type Boltzmann utilisé pour décrire la réaction de fusion thermonucléaire.

Au second chapitre, après avoir rappelé quelques ordres de grandeurs physiques mis en jeu dans ce type de réaction, l'on montre que l'opérateur de création des particules α et des neutrons peut être assimilé à un opérateur de Dirac isotrope en vitesse, approximation classiquement utilisée par les physiciens.

Au troisième chapitre, l'on présente une méthode de type Monte-Carlo pour décrire numériquement les réactions de fusion. On utilise pour ce faire la méthode de Cheremissin initialement utilisée pour simuler les équations de Boltzmann classiques (voir [40] et [41]; voir aussi l'annexe C de cette partie).

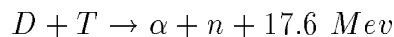
Au quatrième chapitre, l'on présente des résultats numériques qui montrent qu'il peut effectivement être nécessaire de recalculer numériquement les taux de réaction nucléaire lorsque le plasma n'est pas à l'équilibre thermodynamique, les formules classiques n'étant plus valables. On montre d'autre part qu'il est aussi possible de bien évaluer numériquement les opérateurs de création des particules α et des neutrons ce qui laisse envisager la possibilité de traiter cinétiquement le ralentissement des particules α sur le milieu fusible avec une bonne condition initiale sur les α .

Enfin, au cinquième chapitre, l'on étudie à la fois théoriquement et numériquement le bilan en énergie de la réaction de fusion thermonucléaire. L'on pourra aussi constater que les déséquilibres thermodynamiques ont une grande influence sur la forme des opérateurs de perte des particules de deutérium et de tritium.

Chapitre 1

Le modèle physique utilisé

Dans ce chapitre, on explicite le modèle physique utilisé pour décrire cinétiquement la réaction de fusion



d'un ion deutérium D avec un ion tritium T et donnant une particule α et un neutron n .

Rappelons que le noyau de l'ion deutérium - qui provient de l'atome deuton - est constitué d'un neutron et d'un proton et que le noyau de l'ion tritium - qui provient de l'atome triton - est constitué de deux neutrons et d'un proton : les atomes deuton et triton sont donc des isotopes de l'atome d'hydrogène. La particule α est quant à elle l'ion hélium 4 dont le noyau est constitué de deux neutrons et de deux protons.

L'on propose ici un modèle de type Boltzmann pour décrire ces collisions nucléaires. Ceci se justifie en remarquant que :

- Les interactions entre particules dans un tel processus sont des interactions binaires proches et intenses (modification de la structure interne du noyau atomique) ;
- Ces interactions induisent des changements de vitesse très rapides que l'on peut considérer instantanés devant les différents temps caractéristiques du plasma.

On peut ajouter que lorsque les particules de deutérium et de tritium fusionnent, celles-ci donnent naissance à une particule constituée de deux protons et de trois neutrons que l'on pourrait appeler hélium 5. Mais cette particule est fortement instable et se divise très rapidement (la durée de vie de l'ion hélium 5 est de l'ordre

de $7 \cdot 10^{-22}$ seconde) pour donner une particule α et un neutron. On peut donc considérer devant les différents temps caractéristiques du plasma que lorsqu'il y a fusion entre le deutérium et le tritium, il y a instantanément apparition d'une particule α et d'un neutron.

Ces quelques arguments suffisent à justifier qualitativement l'utilisation d'un modèle de type Boltzmann (voir [76], tome 2, p. 17-27 pour plus de précisions) pour la modélisation de cette réaction de fusion aux échelles de temps classiques (temps de collision ion / ion par exemple).

1.1 Les équations de Boltzmann adaptées à la réaction de fusion $D + T \rightarrow \alpha + n + 17.6 \text{ Mev}$

Pour modéliser les collisions proches, binaires et instantanées entre particules d'un même gaz, Boltzmann a proposé le formalisme suivant (voir l'ouvrage historique [36] ainsi que [37] et [38]) :

Soit f la densité de particules se trouvant dans le volume infinitésimal de l'espace des phases centré en (\vec{x}, \vec{v}) et de volume $d\vec{x}d\vec{v}$. f est appelée distribution ou densité de probabilité de la particule. f est alors solution de l'équation intégrodifférentielle

$$\partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f + \frac{\vec{F}_e}{m} \cdot \nabla_v f = G(f) - P(f) \quad (1.1)$$

où m et \vec{F}_e sont respectivement la masse de la particule et les forces extérieures (ainsi qu'éventuellement le champ électromagnétique self-consistant : voir la première partie) agissant sur la particule.

G et P sont respectivement les opérateurs de gain et de perte de particules dans l'espace infinitésimal $d\vec{x}d\vec{v}$ centré en (\vec{x}, \vec{v}) . Ces opérateurs modélisent la partie collisionnelle du processus et sont définis par les relations

$$G(f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(v')f(v'_1) |\vec{v} - \vec{v}_1| \sigma(v, v_1, \Omega) d\vec{v}_1 d\vec{\Omega}$$

et

$$P(f)(v) = f(v) \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(v_1) |\vec{v} - \vec{v}_1| \sigma(v, v_1, \Omega) d\vec{v}_1 d\vec{\Omega}.$$

$\vec{v}' = \vec{v}'(v, v_1)$ et $\vec{v}'_1 = \vec{v}'_1(v, v_1)$ sont les vitesses post-collisionnelles des particules collisionnantes de vitesses initiales \vec{v} et \vec{v}_1 . Celles-ci sont définies par la

cinématique de la réaction qui devra donc être clairement définies (voir l'annexe A pour le cas de la réaction de fusion). σ est la section efficace caractérisant le type d'interaction entre particules (sphères dures, interactions coulombiennes, collisions nucléaires, ...). $\vec{\Omega} \in S^2$ (où S^2 est la sphère unité) est le paramètre d'impact de la collision et définit l'angle de déviation entre $(\vec{v}' - \vec{v}_1')$ et $(\vec{v} - \vec{v}_1)$.

On pourra consulter l'annexe C pour une étude numérique de ces équations de Boltzmann.

À l'opérateur de collision près, l'on notera que l'équation de Boltzmann (1.1) est identique à l'équation de Vlasov-Fokker-Planck étudiée dans la première partie. La différence réside évidemment dans la définition de l'opérateur de collision (et éventuellement dans la définition de la force \vec{F}_e): on peut essentiellement remarquer que dans le cas de l'opérateur de Fokker-Planck, la cinématique des collisions n'est pas explicitement décrite contrairement au cas de l'opérateur de collision de Boltzmann.

Dans les sections suivantes, on adapte ce formalisme au cas des réactions thermonucléaires.

1.1.1 Le modèle de choc réactif

Précisons dès maintenant que, dans cette étude, le terme de transport $\nabla_x f$ ainsi que le terme $\frac{\vec{F}_e}{m} \cdot \nabla_v f$ lié aux forces extérieures ne sont pas pris en compte.

Dans la pratique, on traitera en effet d'abord le transport libre des particules puis, d'une part, les termes liés aux forces extérieures et, d'autre part, les termes liés aux opérateurs de collisions (technique dite de « splitting »): on consultera sur ce sujet le second chapitre de la première partie. De même, pour la partie collisionnelle, on traitera d'abord les collisions ion / ion et ion / électron (c'est à dire les opérateurs de Fokker-Planck: voir la première partie) puis les collisions nucléaires:

Par la suite, on ne s'intéresse donc qu'au modèle de choc réactif homogène en espace et sans forces extérieures.

Comme l'on simule un processus irréversible - f_D , f_T , f_α et f_n étant respectivement les distributions des ions deutérium, tritium, α et des neutrons -, il est évident qu'un modèle de type Boltzmann appliqué aux réactions de fusion thermonucléaire impliquera $G = 0$ pour les équations d'évolution des distributions f_D et f_T , et $P = 0$ pour les équations d'évolution des distributions f_α et f_n .

On cherche donc à définir P_D , P_T , G_α et G_n tels que

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t f_D = -P_D(f_D, f_T), \\ \partial_t f_T = -P_T(f_D, f_T), \\ \partial_t f_\alpha = +G_\alpha(f_D, f_T), \\ \partial_t f_n = +G_n(f_D, f_T). \end{array} \right.$$

Ces quatre opérateurs ne dépendent que des distributions f_D et f_T car, le processus étant irréversible, la probabilité de la présence d'une particule α (ou d'un neutron) dans le volume $d\vec{v}_\alpha$ (ou $d\vec{v}_n$) sera uniquement liée à la probabilité qu'une réaction $D + T \rightarrow \alpha + n$ où la vitesse de la particule α (ou du neutron) ainsi créée est effectivement dans le volume $d\vec{v}_\alpha$ (ou $d\vec{v}_n$) ait lieu. Or, cette probabilité ne dépend que des distributions f_D et f_T du fait de l'irréversibilité de la réaction. On pourrait faire le même raisonnement pour la probabilité de la perte d'une particule de deutérium ou de tritium dans les volumes respectifs $d\vec{v}_D$ et $d\vec{v}_T$.

Mais avant de définir clairement ces quatre opérateurs, une brève présentation de la cinématique de la réaction est nécessaire.

1.1.2 Cinématique de la réaction de fusion

Les réactions nucléaires étudiées ici transforment la perte de masse

$$\Delta M = m_D + m_T - m_\alpha - m_n$$

uniquement en énergie cinétique dont la valeur est donnée par

$$Q = \Delta M C^2 = 17.6 \text{ Mev}$$

d'après la loi d'Einstein (C étant la vitesse de la lumière), énergie distribuée pour une part aux particules α et pour une autre part aux neutrons. Comme il y a conservation de la quantité de mouvement, on a les relations cinématiques

$$\left\{ \begin{array}{l} m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T = m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_n \vec{v}_n, \\ \frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_T v_T^2 + Q = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2, \\ Q = 17.6 \text{ Mev} \end{array} \right.$$

qui peuvent aussi s'écrire (voir l'annexe A)

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_\alpha = \vec{v}_g + \vec{\Omega} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2} = \vec{v}_\alpha(v_D, v_T, \Omega), \\ \vec{v}_n = \vec{v}_g - \vec{\Omega} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2} = \vec{v}_n(v_D, v_T, \Omega), \\ \vec{v}_g = (m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T) / (m_D + m_T), \\ \mu_{DT} = m_D m_T / (m_D + m_T) = 6/5 \cdot m_p, \\ \mu_{\alpha n} = m_\alpha m_n / (m_\alpha + m_n) = 4/5 \cdot m_p, \\ \zeta^2 = 2Q / \mu_{\alpha n}. \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Les relations donnant \vec{v}_D et \vec{v}_T sont les suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_D = \vec{v}_g + \vec{\omega} \frac{\mu_{DT}}{m_D} \sqrt{\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} (|v_\alpha - v_n|^2 - \zeta^2)} = \vec{v}_D(v_\alpha, v_n, \omega), \\ \vec{v}_T = \vec{v}_g - \vec{\omega} \frac{\mu_{DT}}{m_T} \sqrt{\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} (|v_\alpha - v_n|^2 - \zeta^2)} = \vec{v}_T(v_\alpha, v_n, \omega), \end{array} \right.$$

$\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ étant des vecteurs arbitraires de la sphère unité S^2 .

Remarques ◦ Dans un repère cartésien (x, y, z) , $\vec{\Omega}$ peut être défini par

$$\vec{\Omega} = (\cos(\xi), \sin(\xi)\cos(\epsilon), \sin(\xi)\sin(\epsilon))$$

avec $\xi \in [0, \pi]$ et $\epsilon \in [0, 2\pi]$. On aura alors $d\vec{\Omega} = \sin(\xi)d\xi d\epsilon$, ξ définissant l'angle de déviation entre $(\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n)$ et $(\vec{v}_D - \vec{v}_T)$. Dans la suite de cette étude, on prendra $d\vec{\Omega}$ tel que $4\pi d\vec{\Omega} = \sin(\xi)d\xi d\epsilon$ pour que $\int_{S^2} d\vec{\Omega} = 1$, le 4π étant intégré dans la section efficace.

◦ L'ensemble des couples admissibles $(\vec{v}_\alpha, \vec{v}_n)$ est strictement inclus dans $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ (pour \vec{v}_α fixé par exemple) car on doit avoir $|\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n| \geq \zeta$.

◦ Du fait de la présence de Q dans la cinématique de la réaction et des masses différentes entre particules, le jacobien

$$J = \left| \frac{\partial(v_D, v_T, \Omega)}{\partial(v_\alpha, v_n, \omega)} \right|$$

est différent de 1. On montre en effet que l'on a (voir l'annexe A)

$$J = J(v_D, v_T) = \left(\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \zeta^2 / |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2}}.$$

On peut aussi écrire J de la façon suivante

$$J = J(v_\alpha, v_n) = \left(\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2 / |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2}.$$

1.1.3 Opérateurs de perte P_D et P_T

P_D se déduit directement du modèle de Boltzmann en remplaçant dans l'opérateur de perte classique P les distributions $f(v)$ et $f(v_1)$ respectivement par $f_D(v_D)$ et $f_T(v_T)$, et l'élément de volume $d\vec{v}_1$ par $d\vec{v}_T$ puisque le tritium joue ici le rôle de la particule incidente et le deutérium le rôle de la particule cible. Donc on a

$$P_D(f_D, f_T)(v_D) = \quad (1.3)$$

$$-f_D(v_D) \int_{\mathbb{R}^3} f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_T,$$

σ_{DT} étant la section efficace nucléaire de la réaction de fusion en question qui ne dépend, ici, que de la norme de la vitesse relative entre les particules de deutérium et de tritium.

De même, on aura pour P_T

$$P_T(f_D, f_T)(v_T) = \quad (1.4)$$

$$-f_T(v_T) \int_{\mathbb{R}^3} f_D(v_D) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D.$$

Remarquons que l'intégration en $\vec{\Omega}$ a pu être faite car aucun des termes à intégrer ne dépend de cette variable. Pour des températures supérieures à 100 *KeV*, ce ne serait plus le cas car alors des effets d'anisotropie non négligeables concernant la section efficace nucléaire σ_{DT} apparaissent.

1.1.4 Opérateurs de gain G_α et G_n

Bien que très proche de l'opérateur classique de gain de l'équation standard de Boltzmann, il semble plus approprié de redémontrer formellement la forme des opérateurs G_α et G_n dans le cadre qui nous intéresse car la présence du jacobien $J(v_\alpha, v_n)$ induit quelques changements.

Soit donc f_α la densité de probabilité des particules α . La variation au cours d'un pas de temps dt de la densité de particules α se trouvant dans le volume infinitésimal centré en $(\vec{x}, \vec{v}_\alpha)$ et de rayon $d\vec{v}_\alpha$ est $df_\alpha d\vec{v}_\alpha$. Or cette variation est exactement égale au nombre de réactions nucléaires du type

$$D(v_D) + T(v_T) \rightarrow \alpha(v_\alpha) + n(v_n)$$

où $(\vec{v}_D, \vec{v}_T, \vec{v}_n)$ est un triplet compatible avec la cinématique de la réaction, \vec{v}_α étant fixé. Comme l'ensemble des vitesses admissibles \vec{v}_n n'est pas \mathbb{R}^3 mais un certain domaine $V_n(v_\alpha)$, il en est de même pour l'ensemble des couples (\vec{v}_D, \vec{v}_T) qui n'est donc pas $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ mais un ensemble que l'on notera $V_{DT}(v_\alpha)$. Ce nombre de réactions est défini par

$$dt \int_{V_{DT}(v_\alpha)} \int_{S^2} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega}.$$

D'où

$$df_\alpha d\vec{v}_\alpha = dt \int_{V_{DT}(v_\alpha)} \int_{S^2} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega}.$$

Donc, en se rappelant que

$$d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega} = J(v_\alpha, v_n) d\vec{v}_\alpha d\vec{v}_n d\vec{\omega},$$

on obtient

$$G_\alpha(f_D, f_T)(v_\alpha) = \tag{1.5}$$

$$\int_{V_n(v_\alpha)} \int_{S^2} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) J(v_\alpha, v_n) d\vec{v}_n d\vec{\omega}.$$

De même, on aura tout aussi simplement

$$G_n(f_D, f_T)(v_n) = \tag{1.6}$$

$$\int_{V_\alpha(v_n)} \int_{S^2} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) J(v_\alpha, v_n) d\vec{v}_\alpha d\vec{\omega}.$$

On constate donc que, pris sous cette forme, les opérateurs G_α et G_n diffèrent de l'opérateur de gain classique en raison de la présence de $J(v_\alpha, v_n)$ mais aussi parce que le domaine d'intégration de la variable v_n et de la variable v_α suivant l'opérateur considéré n'est pas \mathbb{R}^3 mais un domaine strictement inclu dans \mathbb{R}^3 . Nous verrons cependant qu'il sera possible de remédier à ces deux difficultés grâce à l'utilisation d'une méthode numérique qui en fait intégrera en variables \vec{v}_D, \vec{v}_T et $\vec{\Omega}$.

1.2 À propos de la section efficace nucléaire σ_{DT}

Si l'on ne prenait en compte que les interactions coulombiennes (répulsives ici entre les ions deutérium et tritium), aucune réaction nucléaire ne pourrait avoir lieu puisque les noyaux ne pourraient entrer en collision. Mais, si l'on tient compte

des forces nucléaires qui sont des interactions intenses à courte portée (attractives ici), il se forme un puits de potentiel près du noyau (d'épaisseur comparable à l'ordre de grandeur du noyau atomique) et donc une barrière de potentiel de l'ordre de 300 *KeV*. Dans le cadre classique, il est donc en théorie possible qu'un ion deutérium fusionne avec un ion tritium à condition que l'énergie cinétique relative entre ces deux ions soit de l'ordre de 300 *KeV* ce qui rend les réactions nucléaires quasiment improbables aux températures de l'ordre du *KeV*. Heureusement, aux températures de l'ordre du *KeV*, des effets quantiques existent qui, par *effet tunnel*, rendent possible la pénétration de l'ion deutérium dans le puits de potentiel de l'ion tritium avec des énergies cinétiques raisonnables rendant ainsi les réactions de fusion infiniment plus probables aux températures de l'ordre du *KeV* (voir [3]). La section efficace de G. Gamow (voir [78]) fournit une expression analytique aux basses températures ($T < 10$ *KeV*) de cette section efficace en prenant en compte ces effets quantiques :

$$\sigma_{Gamow} = \frac{A}{E} \exp\left(-\frac{B}{\sqrt{E}}\right) \quad (1.7)$$

avec

- $B = \frac{\pi}{\sqrt{2}} Z_D Z_T \frac{e^2}{\hbar} \sqrt{m_D} \simeq 44.40 \text{ KeV}^{1/2}$,
- $E = \frac{1}{2} m_D (\vec{v}_D - \vec{v}_T)^2$,
- $A \simeq 1.60 \cdot 10^4 \text{ Barn} \cdot \text{KeV}$ (1 *Barn* = 10^{-24} cm^2 .) qui est une constante déduite de l'expérience.

Mais cette section efficace n'est valable qu'aux basses énergies c'est à dire lorsque $E < 10$ *KeV* environ soit donc pour un plasma dont la température est inférieure à quelques *KeV*. Aux hautes énergies, il faut donc avoir une expression de σ_{DT} plus correcte. En se recalant sur l'expérience, on obtient l'expression (cf. [54])

$$\sigma_{DT}(E) = \frac{p_5 + p_2 / [(p_4 - p_3 E)^2 + 1]}{E [\exp(p_1 / \sqrt{E}) - 1]} \quad (1.8)$$

avec

$$\begin{cases} p_1 = 45.95, \\ p_2 = 50200, \\ p_3 = 1.368 \cdot 10^{-2}, \\ p_4 = 1.076, \\ p_5 = 409 \end{cases}$$

où l'énergie $E = \frac{1}{2} m_D (\vec{v}_D - \vec{v}_T)^2$ est exprimée en *KeV*, σ_{DT} étant exprimée en *Barn*. Nous utiliserons cette expression dans la suite de cette étude.

Sur la figure qui suit, on peut remarquer la différence entre la formule de Gamow (1.7) et la formule (1.8) que l'on nommera section efficace « exacte » : la section efficace σ_{DT} de Gamow ne prend en effet pas en compte certains effets quantiques qui ont lieu aux hautes énergies (phénomènes dits de résonance nucléaire) et qui font chuter la probabilité de fusion.

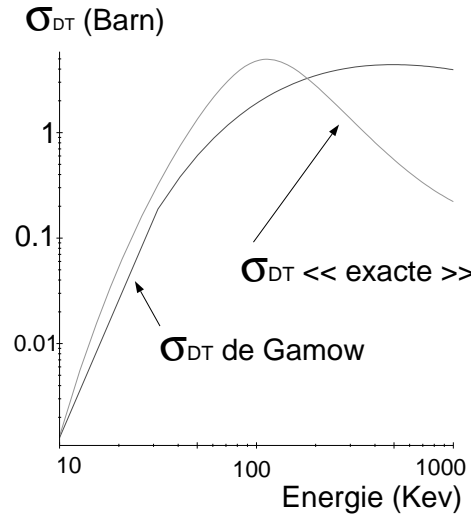
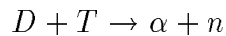


Fig. 1 : σ_{DT} exacte et σ_{DT} de Gamow

Il est utile de souligner ici que l'expression (1.8) de σ_{DT} n'est valable que pour des températures inférieures à 100 *KeV* - soit donc pour des énergies E inférieures à environ 1000 *KeV* -, des effets d'anisotropie apparaissant à partir de cette température impliquant une dépendance de σ_{DT} en $\vec{\Omega}$.

1.3 Définition du taux de réaction nucléaire

Le taux de réaction nucléaire τ est défini comme étant le nombre de particules α (et donc de neutrons) créées lors de la réaction de fusion thermonucléaire



par unité de volume et par unité de temps (τ s'exprime donc en nombre de particules/ cm^3 ./s.). Remarquons que τ est aussi le nombre de particules de deutérium et de tritium qui disparaissent par unité de volume et par unité de temps. La connaissance de τ au cours du temps est importante car c'est τ qui permet de connaître à tout instant le nombre de particules α créées et donc de pouvoir créer ces particules en conséquence dans les codes de simulation.

Formellement, τ est donc défini par l'égalité

$$\tau = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_D d\vec{v}_D$$

soit encore

$$\tau = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT} (|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D d\vec{v}_T. \quad (1.9)$$

Dans les ouvrages de physique, l'on résume souvent cette formule par

$$\tau = N_D N_T \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle = N^2 \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$$

dans le cas où les densités d'ions deutérium et tritium sont telles que $N_D = N_T = N$ (pour des réactions de fusion entre deux ions deutérium par exemple, on aurait $\tau = \frac{N_D^2}{2} \langle \sigma_{DD} \cdot v_r \rangle$). On notera que

$$\Delta t_{Nucl} = \frac{1}{N \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle} \quad (1.10)$$

définit un temps caractéristique de la réaction nucléaire. On pourra consulter sur ce thème les références [2] et [77].

Remarquons qu'avec cette définition de τ , on a intrinséquement

$$\tau = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_D d\vec{v}_D = - \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_T d\vec{v}_T = + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_\alpha d\vec{v}_\alpha = + \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_n d\vec{v}_n.$$

Lorsque f_D et f_T sont des maxwelliennes centrées (donc quand le milieu est à l'équilibre thermodynamique), il est possible d'évaluer τ en fonction de la température macroscopique T du plasma ($T_D = T_T = T$). En effet, lorsque

$$f_D = N_D \left(\frac{m_D}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_D v_D^2}{2T} \right),$$

$$f_T = N_T \left(\frac{m_T}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m_T v_T^2}{2T} \right)$$

et que σ_{DT} est donnée par (1.8), [53] propose l'expression approchée

$$\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max} = a_1 \frac{(1 + a_3 T^{0.75})}{\sqrt{1 + a_4 T^{3.25}}} T^{-2/3} \exp(-a_2 T^{-1/3}) \quad (1.11)$$

avec

$$\begin{cases} a_1 = 3.3729298 \cdot 10^{-18}, \\ a_2 = 20.407142, \\ a_3 = 0.20293722, \\ a_4 = 8.8829520 \cdot 10^{-5}, \end{cases}$$

l'indice *Max* indiquant que $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ est valable pour des maxwelliennes centrées (T est exprimée en *KeV*, $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ en $m^3./s.$). Nous utiliserons cette expression dans la suite de cette étude bien que d'autres formulations soient disponibles comme par exemple (cf. [54])

$$\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max} = 3.68 \cdot 10^{-18} T^{-2/3} \exp(-19.94 T^{-1/3}). \quad (1.12)$$

Mais lorsque f_D et f_T ne sont pas centrées, lorsqu'il y a un fort découplage entre T_x , T_y et T_z , une expression analytique approchée est beaucoup plus délicate à obtenir. Cependant, ce sont surtout les effets cinétiques engendrant un déséquilibre thermodynamique local qui vont rendre impossible l'obtention d'une formulation analytique de $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ car alors on ne connaît pas la forme exacte des distributions f_D et f_T : ce serait le cas par exemple dans un front de choc où les distributions sont plus proches de bi-maxwelliennes que de maxwelliennes.

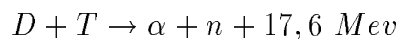
Il s'agit alors, par une méthode numérique appropriée, de calculer cette intégrale dans le cas général et pas seulement lorsque l'hypothèse trop réductrice de maxwelliennes centrées est vérifiée. On voit de suite que la dimension de l'intégrale entrant dans la formulation de $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ va à coup sûr poser de sérieux problèmes de coût en temps CPU. Seule une méthode réduisant de manière importante ce coût devra être envisagée, une méthode d'intégration classique devant bien-sûr être oubliée, celle-ci ayant forcément un coût supérieur à un coût quadratique $N_{vitesse}^2$ où $N_{vitesse}$ serait le nombre de points de discrétisation en vitesse.

Au troisième chapitre, nous présenterons la stratégie numérique utilisée pour calculer de manière précise ce taux de réaction nucléaire.

Chapitre 2

Convergence de G_α vers un Dirac en énergie

Dans ce chapitre, on se propose de donner quelques ordres de grandeur physique caractéristiques de la réaction de fusion thermonucléaire



pour ensuite montrer de façon rigoureuse un résultat utilisé de manière classique par les physiciens à savoir la possibilité d'assimiler les opérateurs de création des particules α et des neutrons à des Dirac en énergie.

2.1 Mise en évidence des paramètres ε_α et ε_n

Soient \vec{v}_α et \vec{v}_n les vitesses de la particule α et du neutron dans le repère lié à leur centre de masse. En utilisant (1.2), on peut écrire que

$$|\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n| = \zeta \sqrt{1 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} \cdot \frac{|\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2}{\zeta^2}} \quad (2.1)$$

avec

$$\zeta^2 = \frac{2Q}{\mu_{\alpha n}}.$$

Posons maintenant

$$V_{D,th} = \sqrt{\frac{2T_D}{m_D}}$$

et

$$V_{T,th} = \sqrt{\frac{2T_T}{m_T}}.$$

$V_{D,th}$ et $V_{T,th}$ sont les vitesses thermiques du deutérium et du tritium.

Lorsque f_D et f_T sont des maxwelliennes, on peut dire qu'il existe une constante λ (typiquement comprise entre 5 et 10) telle que f_D et f_T soient nulles lorsque $|\vec{v}_D|$ et $|\vec{v}_T|$ sont respectivement supérieurs à $\lambda V_{D,th}$ et à $\lambda V_{T,th}$.

On peut donc écrire que

$$\zeta \leq |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n| \leq \zeta \sqrt{1 + 2\Delta}$$

d'après (2.1) avec

$$\Delta = \frac{1}{2} \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} \cdot \frac{\lambda^2 (V_{D,th} + V_{T,th})^2}{\zeta^2}.$$

Les températures rencontrées dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel* sont de l'ordre de quelques *KeV* (et de l'ordre de la centaine de *KeV* s'il y a ignition) ce qui implique que

$$\Delta \ll 1.$$

D'où

$$\zeta \leq |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n| \leq \zeta(1 + \Delta).$$

Comme on a $m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_n \vec{v}_n = \vec{0}$ (car on s'est placé dans le repère lié au centre de masse de la particule α et du neutron), on peut donc écrire que

$$\begin{cases} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \zeta \leq |\vec{v}_\alpha| \leq \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \zeta(1 + \Delta), \\ \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \zeta \leq |\vec{v}_n| \leq \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \zeta(1 + \Delta). \end{cases}$$

Et comme on a aussi

$$|\vec{v}_g| \ll \zeta,$$

on peut finalement conclure que dans le repère absolu on a également

$$|\vec{v}_\alpha| \sim \overline{V}_\alpha \quad \text{et} \quad |\vec{v}_n| \sim \overline{V}_n \quad (2.2)$$

où

$$\overline{V}_\alpha = \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \zeta$$

et

$$\overline{V}_n = \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \zeta.$$

On appellera \overline{V}_α et \overline{V}_n les *vitesses de création standards* respectivement de la particule α et du neutron qui correspondent aux énergies cinétiques

$$\overline{E}_\alpha = \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} Q = \frac{1}{2} m_\alpha \overline{V}_\alpha^2 = 3.52 \text{ Mev}$$

et

$$\overline{E}_n = \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} Q = \frac{1}{2} m_n \overline{V}_n^2 = 14.08 \text{ Mev.}$$

On peut alors faire apparaître deux petits paramètres ε_α et ε_n tels que

$$\begin{cases} \varepsilon_\alpha = \overline{V}/\overline{V}_\alpha \ll 1, \\ \varepsilon_n = \overline{V}/\overline{V}_n \ll 1, \\ \overline{V} = \max(V_{D,th}, V_{T,th}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Ces petits paramètres seront utilisés dans le paragraphe suivant où nous montrerons de manière rigoureuse que lorsque ε_α tend vers 0, G_α converge au sens de la *convergence étroite des mesures* vers un Dirac en énergie centré en \overline{E}_α et de poids τ : *c'est cette approximation qui est utilisée de façon standard dans les codes fluides.*

Quelques ordres de grandeur physique Pour avoir une idée plus précise des ordres de grandeur entrant en jeu, on va évaluer ceux-ci dans le cas où $T = 5 \text{ KeV}$. On se place donc à une température de l'ordre de 50 millions de degré Kelvin ($1 \text{ KeV} \approx 11.588 \cdot 10^6 \text{ K}$). À cette température, les valeurs des vitesses thermiques du deutérium et du tritium sont

$$V_{D,th} = 6.92 \cdot 10^7 \text{ cm./s.} \quad \text{et} \quad V_{T,th} = 5.65 \cdot 10^7 \text{ cm./s..}$$

Comme $Q = 17.6 \text{ Mev}$, on a $\zeta = 6.47 \cdot 10^9 \text{ cm./s.}$ ce qui donne pour les vitesses de création standard

$$\overline{V}_\alpha = 1.29 \cdot 10^9 \text{ cm./s.} \quad \text{et} \quad \overline{V}_n = 5.17 \cdot 10^9 \text{ cm./s.}$$

et donc $\varepsilon_\alpha = 0.05$, $\varepsilon_n = 0.01$ et $\Delta = 0.01$, paramètres qui sont effectivement très petits.

Remarques ◦ Il serait aussi intéressant d'avoir, à cette température, un ordre de grandeur de \overline{V}_e , la vitesse thermique électronique. Pour avoir un ordre de grandeur, on peut considérer ici qu'il n'y a pas de découplage entre T_e et $T = T_D = T_T$. On obtient

$$\overline{V}_e = 4.18 \cdot 10^9 \text{ cm./s..}$$

Cette vitesse importante est directement due au fait que $m_e \ll m_p$ où m_e et m_p sont respectivement la masse de l'électron et la masse du proton. On constate donc que \overline{V}_e est supérieure à \overline{V}_α ce qui a une importance sur le ralentissement des

particules α sur le milieu, celle-ci déposant d'abord leur énergie sur les électrons jusqu'à ce que $|\vec{v}_\alpha|$ soit de l'ordre de $\overline{V}_e/12$ puis sur le deutérium et le tritium (on pourra consulter la référence [55] sur ce thème).

o On remarquera aussi que les particules α et les neutrons peuvent être raisonnablement considérés, en première approximation, comme étant non relativistes car $\overline{V}_\alpha/C \simeq 4.3\%$ et $\overline{V}_n/C \simeq 17.2\%$ où C est la vitesse de la lumière.

2.2 Convergence de G_α vers un Dirac en énergie

Dans ce paragraphe, on justifie mathématiquement l'approximation (2.2). Soit donc la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Lorsque f_D et f_T sont dans $L_2^1 \equiv L^1 \left[(1 + |\vec{v}|^2) d\vec{v}; \mathbb{R}^3 \right]$ et que le noyau de collision $q(\vec{v}) = |\vec{v}| \sigma_{DT}(|\vec{v}|)$ est dans $L^\infty(\mathbb{R}^+)$, on a*

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \rightarrow 0} \frac{G_\alpha(f_D, f_T)}{\langle G_\alpha(f_D, f_T) \rangle} = \delta_\alpha$$

au sens de la convergence étroite des mesures où $\langle \cdot \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \cdot d\vec{v}_\alpha$ et où δ_α est la mesure définie par

$$\forall \chi \in (L_2^1)' \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3) : \int_{\mathbb{R}^3} \chi(\vec{v}) \delta_\alpha(v) d\vec{v} = \int_{S^2} \chi(\overline{V}_\alpha \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}.$$

\overline{V}_α et ε_α ont été explicités au paragraphe précédent. Notons que l'hypothèse $q \in L^\infty(\mathbb{R}^+)$ est vérifiée lorsque la section efficace nucléaire σ_{DT} est donnée par la formule (1.8).

On peut noter ici que l'on n'a pas exactement la convergence étroite car $\chi \in (L_2^1)' \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$: il faudrait pour cela que $\chi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$. Par contre, on a la convergence vague puisque toute fonction de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$ à support compact est une fonction de $(L_2^1)' \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$. Notons aussi que l'espace dual $(L_2^1)'$ peut être identifié à l'espace des fonctions $\{f/|f(x)| < C^{ste}(f) \cdot (1 + |\vec{x}|^2)\}$: voir la remarque qui suit la démonstration de cette proposition.

Remarquons par ailleurs que l'appartenance des distributions f_D et f_T à L_2^1 impose que la masse, la quantité de mouvement et l'énergie macroscopiques du deutérium et du tritium sont contrôlées ($f \in L_2^1 \implies \vec{v}^n f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ où $n \in \{0, 1, 2\}$).

Dans la suite, on pourra donc assimiler G_α à la masse de Dirac en énergie $\tau \delta_\alpha$ centrée en $\overline{E}_\alpha = \frac{1}{2} m_\alpha \overline{V}_\alpha^2$ et de poids τ car, au premier ordre en ε_α , la répartition

des vitesses de création est uniforme en direction d'après la proposition 2.1 : il suffit en effet d'appliquer cette proposition à $\chi(\vec{v}_\alpha) = \frac{1}{2}m_\alpha|\vec{v}_\alpha|^2$ (on rappelle que le taux de réaction nucléaire τ est égal à $\langle G_\alpha(f_D, f_T) \rangle$).

On a bien-sûr le même résultat pour les neutrons à ceci près que le Dirac δ_n est centré en $\overline{E}_n = 14.08 \text{ Mev}$ et que le petit paramètre est ε_n .

Notons qu'à cause de l'agitation thermique du milieu fusible, ε_α est strictement positif. Ceci entraîne que G_α n'est pas exactement égal au Dirac en énergie $\tau\delta_\alpha$: c'est ce que l'on appelle l'*effet Doppler*. Au quatrième chapitre, nous estimerons numériquement à l'équilibre thermodynamique la déviation de G_α par rapport à cette mesure lorsque ε_α est non nul et nous établirons numériquement la formule de Brysk, formule classique rendant compte de cet effet Doppler (on pourra aussi consulter la propriété B.1 établie dans l'annexe B pour une approche analytique très succincte de cette question).

Preuve de la proposition 2.1 Soit $\chi \in (L_2^1)' \cap C^0(\mathbb{R}^3)$ et définissons la moyenne de la fonction χ selon la fonction de répartition de création des particules α avec la relation

$$\langle \chi \rangle_\alpha = \frac{\int G_\alpha(v_\alpha) \chi(\vec{v}_\alpha) d\vec{v}_\alpha}{\int G_\alpha(v_\alpha) d\vec{v}_\alpha}.$$

On procède ensuite à un adimensionnement. On pose pour cela

$$\begin{cases} \vec{v}_D' &= \vec{v}_D / \overline{V}_\alpha, \\ \vec{v}_T' &= \vec{v}_T / \overline{V}_\alpha, \\ \vec{v}_\alpha' &= \vec{v}_\alpha / \overline{V}_\alpha. \end{cases}$$

Donc, on a

$$|\vec{v}_D' - \vec{v}_T'| = |\vec{v}_D / \overline{V}_\alpha - \vec{v}_T / \overline{V}_\alpha|,$$

$$d\vec{v}_D' = d\vec{v}_D / \overline{V}_\alpha^3$$

et

$$d\vec{v}_T' = d\vec{v}_T / \overline{V}_\alpha^3.$$

Puis, on introduit le changement d'échelle

$$\begin{cases} \vec{x} &= \vec{v}_D' / \varepsilon_\alpha, \\ \vec{y} &= \vec{v}_T' / \varepsilon_\alpha \end{cases}$$

ainsi que le changement d'échelle

$$\begin{cases} f_D(v_D) = \varphi(x) \cdot N_D / \bar{V}^3, \\ f_T(v_T) = \psi(y) \cdot N_T / \bar{V}^3 \end{cases}$$

sur les distributions f_D et f_T (N_D et N_T sont les densités volumiques du deutérium et du tritium). $|\bar{v}_D'|$ et $|\bar{v}_T'|$ sont donc d'ordre ε_α , $|\bar{v}_\alpha'|$, $|\bar{x}'|$ et $|\bar{y}'|$ sont d'ordre 1, et φ et ψ sont telles que

$$\int \varphi(x) d\bar{x}' = \int \psi(y) d\bar{y}' = 1.$$

On peut alors écrire que

$$\langle \chi \rangle_\alpha = \frac{\int \int \int \chi(\bar{V}_\alpha \bar{v}_\alpha') \varphi(x) \psi(y) q(\bar{V} |\bar{x}' - \bar{y}'|) d\bar{x}' d\bar{y}' d\bar{\Omega}}{\int \int \varphi(x) \psi(y) q(\bar{V} |\bar{x}' - \bar{y}'|) d\bar{x}' d\bar{y}'}$$

avec \bar{v}_α' défini par

$$\bar{v}_\alpha' = \varepsilon_\alpha \bar{z}' + \bar{\Omega} \sqrt{1 + 2a_\alpha \varepsilon_\alpha^2 |\bar{x}' - \bar{y}'|^2} \quad (2.4)$$

où

$$\bar{z}' = \frac{m_D \bar{x}' + m_T \bar{y}'}{m_D + m_T}$$

et

$$a_\alpha = \frac{\mu_{DT}}{m_\alpha^2} \cdot \frac{\mu_{\alpha n}}{2} = \frac{3}{100}.$$

On a alors :

i)

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \rightarrow 0} \chi(\bar{V}_\alpha \bar{v}_\alpha') = \chi(\bar{V}_\alpha \bar{\Omega})$$

sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$ puisque $\chi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^3)$.

ii) Il existe $g \in L^1(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ tel que

$$|\chi(\bar{V}_\alpha \bar{v}_\alpha') \varphi(x) \psi(y) q(\bar{V} |\bar{x}' - \bar{y}'|)| \leq g(x, y)$$

sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$.

En effet : Comme $\chi \in (L_2^1)'$ et que l'espace dual $(L_2^1)'$ peut être identifié à l'espace des fonctions $\{\chi / |\chi(\bar{x}')| < C^{ste}(\chi) \cdot (1 + |\bar{x}'|^2)\}$ (voir la remarque ci-dessous), il existe $C_1 > 0$ tel que

$$|\chi(\bar{V}_\alpha \bar{v}_\alpha')| \leq C_1 \cdot (1 + |\bar{v}_\alpha'|^2).$$

Puis en développant (2.4), on obtient

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ et } C_2 > 0 / \forall \varepsilon_\alpha < \varepsilon_0 : |\chi(\overline{V_\alpha} \overline{v_\alpha}')| \leq C_2 \cdot (1 + |\overline{x'}| + |\overline{y'}| + |\overline{x'}| \cdot |\overline{y'}| + |\overline{x'}|^2 + |\overline{y'}|^2).$$

Et on termine la démonstration du point ii) en rappelant que par hypothèse $(\varphi, \psi, q) \in L_2^1 \times L_2^1 \times L^\infty$.

Donc, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue (voir [79] p. 54) ce qui donne

$$\lim_{\varepsilon_\alpha \rightarrow 0} \langle \chi \rangle_\alpha = \int_{S^2} \chi(\overline{V_\alpha} \overline{\Omega}) d\overline{\Omega}.$$

□

Remarque L'identification de l'espace dual $(L_2^1)'$ où $L_2^1 \equiv L^1 \left[(1 + |\overline{x'}|^2) d\overline{x'}; \mathbb{R}^3 \right]$ à l'espace fonctionnel $L_2^\infty \equiv \{v / |v(x)| < C^{ste}(v) \cdot (1 + |\overline{x'}|^2)\}$ se justifie de la façon suivante :

Soit $\mathcal{H} \in (L_2^1)'$. Posons $\mathcal{L}_\mathcal{H} \in (L^1(\mathbb{R}^3))'$ tel que

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^3) : \mathcal{L}_\mathcal{H} f \equiv \mathcal{H} \left(\frac{f}{1 + |\overline{x'}|^2} \right).$$

Il est évident que $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ est une fonctionnelle linéaire et continue de $(L^1(\mathbb{R}^3))'$. D'après le théorème de représentation de Riesz appliqué à $L^1(\mathbb{R}^3)$ (voir [79] p. 63), on peut affirmer que

$$\exists ! u_{\mathcal{L}_\mathcal{H}} \in L^\infty / \forall f \in L^1 : \mathcal{L}_\mathcal{H} f = \int u_{\mathcal{L}_\mathcal{H}} f d\overline{x'}.$$

Soit alors $g \in L_2^1$ et $f \equiv g \cdot (1 + |\overline{x'}|^2)$: donc $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{H}g = \mathcal{L}_\mathcal{H} f$. D'après ce qui a été écrit ci-dessus, on obtient :

$$\exists ! u_{\mathcal{L}_\mathcal{H}} \in L^\infty / \forall g \in L_2^1 : \mathcal{H}g = \int u_{\mathcal{L}_\mathcal{H}} g (1 + |\overline{x'}|^2) d\overline{x'}$$

soit encore

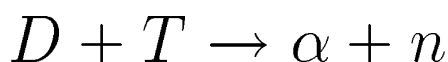
$$\exists ! v_\mathcal{H} \in L_2^\infty / \forall g \in L_2^1 : \mathcal{H}g = \int v_\mathcal{H} g d\overline{x'}.$$

Donc on peut identifier tout élément de $(L_2^1)'$ à un unique élément de L_2^∞ ce qui permet d'écrire que $(L_2^1)' \subset L_2^\infty$. D'où le résultat sachant que la réciproque est évidente.

Remarquons que l'on peut généraliser cette remarque en remplaçant la fonction $x \mapsto 1 + |\vec{x}|^2$ par toute fonction $\Phi(x)$ qui ne s'annule que sur un ensemble de mesure nulle. Le seul point (évident) qu'il faudrait préciser est la continuité de la fonctionnelle linéaire $\mathcal{L}_\mathcal{H}$ pour la topologie engendrée par la norme $\|g\|_{L_\Phi^1} = \int |\Phi g| d\vec{x}$ sur $L_\Phi^1 \equiv \{g/\Phi g \in L^1(\mathbb{R}^3)\}$ sachant que $\|g\|_{L_\Phi^1}$ ainsi définie est effectivement une norme lorsque la fonction Φ est nulle uniquement sur un ensemble de mesure nulle.

Chapitre 3

Présentation de la méthode de Monte-Carlo utilisée pour l'étude numérique de la réaction



On présente ici de manière précise la méthode numérique utilisée pour l'étude dans le cadre cinétique de la réaction de fusion thermonucléaire entre le deutérium et le tritium.

3.1 La méthode de Monte-Carlo appliquée au calcul d'intégrales

Il existe plusieurs possibilités pour l'évaluation numérique de l'intégrale

$$I = \int_0^1 f(x)dx.$$

Toutes ces méthodes reviennent en fait à choisir judicieusement la suite $(w_i)_{1 \leq i \leq N}$ qui intervient dans l'approximation de I , approximation qui peut s'écrire

$$I = \sum_{i=1}^{i=N} w_i \cdot f(x_i).$$

Les méthodes d'intégration de type Monte-Carlo (cf. [74]) sont basées sur un choix aléatoire des poids w_i . Celles-ci reposent sur l'idée que l'on peut réécrire I en faisant intervenir une nouvelle fonction p connue strictement positive sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 p(x)dx = 1$. On réécrit donc I de la façon suivante

$$I = \int_0^1 \frac{f(x)}{p(x)} \cdot p(x)dx.$$

On constate donc que I est aussi l'espérance de la variable aléatoire $\frac{f(X)}{p(X)}$ où X suit la loi $p(x)$. De manière plus générale, la méthode de Monte-Carlo se caractérise donc par la remarque suivante :

Soient $I = \int_A f(x)dx$, $p(x) > 0$ telle que $\int_A p(x)dx = 1$ et X une variable aléatoire de densité de probabilité p , A étant un ensemble quelconque de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}^$). Alors*

$$I = E \left[\frac{f(X)}{p(X)} \right].$$

La mise en œuvre numérique de cette interprétation de I repose sur le *théorème de la loi des grands nombres* suivant :

Théorème 3.1 *Soit $(X_i, i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi qu'une variable aléatoire X telle que $E(|X|) < +\infty$. Alors*

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i = E(X).$$

On peut ainsi évaluer I en procédant à N tirages aléatoires de X suivant la loi $p(x)$ et on aura une approximation de I en écrivant

$$\begin{cases} I = \sum_{i=1}^N w_i \cdot f(X_i), \\ w_i = 1/(p(X_i)N), \\ i = i^{\text{ème}} \text{ tirage de } x \text{ suivant la loi } p(x) \text{ sur } A. \end{cases}$$

La question importante quant à cette technique d'approximation des intégrales est la vitesse de convergence lorsque N tend vers $+\infty$ et son intérêt par rapport aux méthodes classiques en terme de coût en temps CPU. Le *théorème de la limite centrale* donne une idée de l'erreur commise :

Théorème 3.2 *Supposons que $E(X^2) < +\infty$ et soit $\epsilon_N = E(X) - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i$ et $\sigma^2 = E(X^2) - E(X)^2$. Alors $\frac{\sqrt{N}}{\sigma} \epsilon_N$ converge vers une gaussienne centrée réduite.*

On peut donc considérer que la vitesse de convergence est en $1/\sqrt{N}$ ce qui peut sembler faible. Mais tout l'intérêt de cette méthode réside dans le fait que ce résultat de convergence est absolument indépendant de la dimension de l'espace d'intégration. Dans le cas d'une intégration déterministe, pour multiplier la précision par 2, il faut en général multiplier le nombre de points par 2^d (s'il n'y a pas de propriétés particulières de la fonction f) alors qu'avec la méthode de

Monte-Carlo, il suffit de multiplier ce nombre de points par 4. Il faut donc envisager de remplacer les méthodes classiques d'intégration déterministe au profit des techniques d'intégration de type Monte-Carlo dès que la dimension de l'espace devient supérieure ou égale à trois.

Reste à choisir judicieusement la loi $p(x)$ - i.e. choisir un bon biaisage - pour minimiser la variance σ et donc pour augmenter la vitesse de convergence pour un nombre de tirages aléatoires fixé : on parle alors de technique de réduction de variance. Il est évident que le biaisage optimum serait de prendre $p \equiv f / \int_A f(x)dx$ (si $f > 0$ bien-sûr) ce qui revient donc à connaître $\int_A f(x)dx$ au préalable ce qui est absurde. Par contre l'on peut dire que si l'on a une idée de la « forme » de f , il sera plus judicieux de prendre p de « forme » pas trop éloignée de celle de f .

Le dernier point fondamental dans la mise en œuvre des techniques de type Monte-Carlo est la capacité à simuler facilement sur ordinateur la loi $p(x)$. Ce sera le cas par exemple lorsque p sera une constante (biaisage équiprobable) ou une maxwellienne (biaisage par des maxwelliennes).

À partir de ce rapide aperçu de la technique d'intégration de Monte-Carlo, on se rend compte que l'évaluation des opérateurs P_D , P_T , G_α et G_n sont de bons candidats à l'utilisation de cette technique, l'espace d'intégration étant de loin supérieur à trois. Reste à choisir un bon biaisage.

3.2 La méthode de Cheremissin : biaisage par des maxwelliennes

La méthode de Cheremissin repose sur le choix du biaisage. Cheremissin (cf. [40] et [41]) a appliqué la méthode de Monte-Carlo présentée plus haut pour le calcul des opérateurs classiques de Boltzmann en choisissant pour la densité de probabilité p la maxwellienne définie à chaque pas de temps par la température macroscopique et la vitesse macroscopique du début du pas de temps. On pourra consulter dans l'annexe C la validation de la méthode de Cheremissin pour le calcul de chocs en gaz rarefié. Les résultats sont très bons et montrent que cette méthode (à condition d'être accompagnée d'une phase de correction - cf. [39] -, la méthode de Cheremissin n'étant pas conservative) peut être utilisée pour l'étude de problèmes cinétiques dans un gaz neutre. En effet, dans un gaz classique les distributions sont quasi maxwelliennes (sauf éventuellement dans les fronts de choc par exemple). Il est donc normal de choisir un biaisage par des maxwelliennes plutôt qu'un biaisage équiprobable par exemple.

L'on souhaiterait donc appliquer cette technique de biaisage au problème de la fusion thermonucléaire c'est à dire pour le calcul des opérateurs P_D , P_T , G_α et G_n tout en se souvenant d'une part que les distributions risquent de ne pas être des maxwelliennes à certains endroits (par exemple, dans les fronts de choc comme pour un gaz neutre) et en se souvenant d'autre part que la forme de la section efficace est tout à fait différente de la section efficace utilisée pour le cas du gaz neutre (hypothèse de sphère dure par exemple: $\sigma = C^{ste}$) ce qui augmentera sans doute la variance.

Insistons enfin sur le fait que la méthode de Cheremissin est une méthode de Monte-Carlo particulièrement intéressante lorsque les distributions des ions du plasma sont discrétisées sur une grille de type différence finie: on peut en effet coupler sans problème cette méthode aléatoire à un calcul déterministe.

3.3 Calcul du taux de réaction nucléaire

Rappelons que τ est défini par

$$\tau = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D d\vec{v}_T.$$

Soient Ψ_D et Ψ_T les densités de probabilité par rapport à \vec{v}_D et à \vec{v}_T utilisées pour le calcul de τ par la technique de Monte-Carlo décrite précédemment. On a alors l'approximation

$$\tau = \frac{1}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f_D(v_D^\gamma) f_T(v_T^\gamma) |\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma|)}{\Psi_D(v_D^\gamma) \Psi_T(v_T^\gamma)}$$

où $(\vec{v}_D^\gamma, \vec{v}_T^\gamma) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ est le $\gamma^{\text{ème}}$ couple tiré selon la densité de probabilité $\Psi_D \cdot \Psi_T$, $N_{tirages}$ étant le nombre de tirages aléatoires.

Remarquons que le couple (v_D^γ, v_T^γ) doit être projeté sur le point le plus proche de la grille en vitesse microscopique puisqu'il n'y a quasiment aucune chance pour que ce couple soit exactement sur un nœud du maillage.

Dans le cas cartésien, on aura

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_D(v_D) = \Psi_{D,x}(v_{D,x}) \cdot \Psi_{D,y}(v_{D,y}) \cdot \Psi_{D,z}(v_{D,z}), \\ \Psi_T(v_T) = \Psi_{T,x}(v_{T,x}) \cdot \Psi_{T,y}(v_{T,y}) \cdot \Psi_{T,z}(v_{T,z}), \\ \Psi_{D,i} = \sqrt{\frac{m_D}{2\pi T_{D,i}}} \exp \left[-\frac{m_D(v_{D,i} - U_{D,i})^2}{2T_{D,i}} \right], \\ \Psi_{T,i} = \sqrt{\frac{m_T}{2\pi T_{T,i}}} \exp \left[-\frac{m_T(v_{T,i} - U_{T,i})^2}{2T_{T,i}} \right], \\ i = x, y, z, \end{array} \right.$$

\vec{U}_D et \vec{U}_T étant les vitesses macroscopiques respectives du deutérium et du tritium.

Dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel* (voir [2], [3] et [52]), on se place plutôt dans un repère sphérique dans l'espace physique: les vitesses des particules sont alors décrites dans un repère axisymétrique et caractérisées par leur vitesse radiale notée v_{\parallel} (parallèle à l'axe de symétrie sphérique de l'espace physique), leur vitesse orthoradiale notée v_{\perp} et l'angle θ de rotation autour de l'axe radiale \parallel . On a alors

$$\tau = \frac{(2\pi)^2}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f_D(v_D^\gamma) f_T(v_T^\gamma) |\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma| \sigma_{DT} (|\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma|) v_{D,\perp}^\gamma v_{T,\perp}^\gamma}{\Psi_D(v_D^\gamma) \Psi_T(v_T^\gamma)}$$

($d\vec{v}_D \cdot d\vec{v}_T = 2\pi v_{D,\perp} dv_{D,\perp} dv_{D,\parallel} \cdot v_{T,\perp} dv_{T,\perp} dv_{T,\parallel} d\theta$ ici) avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_D(v_D) = \Psi_{D,\parallel}(v_{D,\parallel}) \cdot \Psi_{D,\perp}(v_{D,\perp}), \\ \Psi_{D,\parallel} = \frac{\beta_{D,\parallel}}{\sqrt{\pi}} \exp \left[-\beta_{D,\parallel}^2 (v_{D,\parallel} - \bar{V}_{D,\parallel})^2 \right], \\ \Psi_{D,\perp} = 2\beta_{D,\perp}^2 v_{D,\perp} \exp \left(-\beta_{D,\perp}^2 v_{D,\perp}^2 \right), \\ \beta_{D,\parallel} = \sqrt{\frac{m_D}{2T_{D,\parallel}}}, \quad \beta_{D,\perp} = \sqrt{\frac{m_D}{2T_{D,\perp}}}. \end{array} \right.$$

On aura bien-sûr les mêmes expressions pour Ψ_T , $\Psi_{T,\parallel}$ et $\Psi_{T,\perp}$.

Remarquons que l'on a

$$|\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma| = \sqrt{(v_{D,\parallel}^\gamma - v_{T,\parallel}^\gamma)^2 + (v_{D,\perp}^\gamma - v_{T,\perp}^\gamma \cos(\theta^\gamma))^2 + (v_{T,\perp}^\gamma \sin(\theta^\gamma))^2}.$$

On doit en effet repasser en trois dimensions pour le traitement de la cinématique des collisions - celle-ci restant par essence tridimensionnelle - bien qu'ici, on soit

en symétrie sphérique dans l'espace physique. On remarquera aussi que le $(2\pi)^2$ intervenant dans le calcul de τ en géométrie sphérique vient de l'élément de volume $d\vec{v}_D$ mais aussi de la densité de probabilité avec laquelle l'on tire l'angle θ entre $v_{D,\perp}$ et $v_{T,\perp}$, densité de probabilité qui est constante sur $[0, 2\pi]$ et donc égale à $1/2\pi$.

Pour simuler numériquement Ψ_D et Ψ_T , on utilise la fonction **Random** de l'ordinateur, fonction qui génère aléatoirement et de manière équiprobable des nombres dans l'intervalle $[0,1]$. Cette technique repose sur la remarque suivante :

Soit p une densité de probabilité définie sur $[0, +\infty[$. On pose

$$w = F(x) = \int_0^x p(x')dx'$$

(F est la fonction de répartition de la loi p). On peut alors simuler la variable aléatoire X de loi p à l'aide de la variable aléatoire W de loi uniforme sur $[0,1]$ en posant

$$X = F^{-1}(W).$$

On voit donc l'intérêt de choisir p telle que F^{-1} ait une expression analytique. Le choix d'un biaisage par des maxwelliennes rend possible le calcul de F^{-1} . En effet

$$\Psi_{\perp} = 2\beta_{\perp}^2 \cdot v_{\perp} \exp(-\beta_{\perp}^2 v_{\perp}^2) \implies v_{\perp} = \frac{\sqrt{-\log[(1 - \text{Random}_1)]}}{\beta_{\perp}}$$

que l'on peut écrire aussi

$$v_{\perp} = \frac{\sqrt{-\log(\text{Random}_1)}}{\beta_{\perp}}$$

puisque **Random**₁ est une variable aléatoire sur $[0, 1]$.

Par contre, il est impossible d'évaluer F^{-1} lorsque $\Psi = \Psi_{\parallel}$. Cependant, on voit qu'en posant

$$v_y = v_{\perp} \sin(\Theta)$$

où $\Theta \in [0, 2\pi]$, on simule une variable qui suit une loi Ψ_y équivalente à Ψ_{\parallel} puisque cela revient à repasser en géométrie cartésienne, y définissant un axe perpendiculaire à l'axe radial. On simule donc la variable v_y en simulant deux variables

indépendantes: v_\perp de loi Ψ_\perp et Θ de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. L'application de ceci à la simulation de Ψ_\parallel donne

$$v_\parallel = \frac{\sqrt{-\log(\text{Random}_2)}}{\beta_\parallel} \sin(2\pi \text{Random}_3) + U_\parallel.$$

Pour calculer le taux de réaction nucléaire τ par la méthode de Cheremissin en symétrie sphérique, on a donc besoin de sept variables aléatoires générées par la fonction **Random** de l'ordinateur: deux pour simuler $v_{D,\perp}$ et $v_{T,\perp}$, quatre pour simuler $v_{D,\parallel}$ et $v_{T,\parallel}$ et enfin une pour simuler l'angle θ entre $v_{D,\perp}$ et $v_{T,\perp}$.

3.4 Calcul des distributions f_α et f_n

En utilisant (1.5), on obtient l'équation

$$\partial_t f_\alpha = G_\alpha(f_D, f_T)$$

avec

$$G_\alpha(f_D, f_T)(v_\alpha) = \int_{V_n(v_\alpha)} \int_{S^2} f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) J(v_\alpha, v_n) d\vec{v}_n d\vec{\omega}.$$

Il a déjà été souligné que, outre le temps de calcul pour évaluer l'intégrale du second membre, la présence du jacobien $J(v_\alpha, v_n)$ et l'inclusion stricte de $V_n(v_\alpha)$ dans \mathbb{R}^3 constituent une difficulté. Pour éviter cet écueil, il semble plus approprié de repasser en variables \vec{v}_D , \vec{v}_T et $\vec{\Omega}$ grâce au passage à une formulation faible de l'opérateur G_α .

Soit donc une fonction test χ de variable v_α . Multiplions l'équation ci-dessus par cette fonction test et intégrons par rapport à $d\vec{v}_\alpha$ sur \mathbb{R}^3 . En se souvenant que

$$J(v_\alpha, v_n) d\vec{v}_\alpha d\vec{v}_n d\vec{\omega} = d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega},$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_\alpha(\chi) &\equiv \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t f_\alpha \chi(v_\alpha) d\vec{v}_\alpha = \\ &\int_{\mathbb{R}^3} G_\alpha(f_D, f_T) \chi(v_\alpha) d\vec{v}_\alpha = \\ &\int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3} \int_{S^2} \chi(\check{v}_\alpha) f_D(v_D) f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega} \end{aligned}$$

avec

$$\check{v}_\alpha \equiv \vec{v}_\alpha(v_D, v_T, \Omega)$$

donné par (1.2).

On voit donc qu'il est maintenant possible, pour toute fonction test χ , d'évaluer cette intégrale par la méthode de Cheremissin utilisée pour le calcul du taux de réaction nucléaire (voir plus haut) à ceci près qu'il y a en plus une variable d'intégration : la variable $\vec{\Omega}$. Mais cela ne pose pas vraiment de problèmes puisque l'on peut poser

$$4\pi d\vec{\Omega} = \sin(\zeta)d\zeta d\epsilon$$

avec $(\zeta, \epsilon) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. On a donc besoin de deux variables aléatoires supplémentaires pour évaluer $\mathfrak{S}_\alpha(\chi)$: une pour tirer de manière équiprobable ζ dans $[0, \pi]$, la dernière pour tirer de manière équiprobable ϵ dans $[0, 2\pi]$. Sachant que $\Psi_\zeta = \frac{1}{\pi}$ et que $\Psi_\epsilon = \frac{1}{2\pi}$ (avec encore $\Psi_\theta = \frac{1}{2\pi}$), on obtient

$$\mathfrak{S}_\alpha(\chi) =$$

$$\frac{2\pi^3}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{\chi(\tilde{v}_\alpha^\gamma) f_D(v_D^\gamma) f_T(v_T^\gamma) |\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T^\gamma|) v_{D,\perp}^\gamma v_{T,\perp}^\gamma \sin(\zeta^\gamma)}{\Psi_D(v_D^\gamma) \Psi_T(v_T^\gamma)}$$

avec

$$\vec{v}_\alpha^\gamma = \vec{v}_\alpha^\gamma(v_{D,\parallel}^\gamma, v_{D,\perp}^\gamma, v_{T,\parallel}^\gamma, v_{T,\perp}^\gamma, \theta^\gamma, \zeta^\gamma, \epsilon^\gamma)$$

sachant que

$$d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\Omega = \frac{1}{2} v_{D,\perp} dv_{D,\perp} dv_{D,\parallel} v_{T,\perp} dv_{T,\perp} dv_{T,\parallel} d\theta \sin(\zeta) d\zeta d\epsilon.$$

Comme on néglige ici les éventuels effets d'anisotropie de la fonction de distribution G_α , celle-ci convergeant vers une distribution isotrope d'après la proposition 2.1, on s'intéresse donc à

$$J_\alpha(I) = \int_{\mathbb{R}^3} 1_{\{|\vec{v}_\alpha| \in I\}} \cdot G_\alpha(f_D, f_T) d\vec{v}_\alpha,$$

I étant un intervalle de \mathbb{R}^+ ce qui revient à choisir la fonction test χ telle que

$$\chi(v_\alpha) \equiv 1_{\{|\vec{v}_\alpha| \in I\}}.$$

On maille pour cela la droite $[0, +\infty[$ avec $2N_\alpha + 1$ points équirépartis autour de \overline{V}_α . On a alors la suite de points $(w_\alpha^q)_{1 \leq q \leq 2N_\alpha + 1}$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} w_\alpha^{q+1} - w_\alpha^q = \delta' \overline{V}_\alpha, \\ w_\alpha^{N_\alpha} = \overline{V}_\alpha, \\ \delta' = 2\delta_\alpha / (2N_\alpha + 1) = \text{épaisseur des mailles}, \\ 2\delta_\alpha = \text{épaisseur maximale de la sphère épaissie (voir aussi l'annexe B)}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Puis on définit la suite de fonctions

$$(\chi_q)_{1 \leq q \leq 2N_\alpha+1}$$

comme étant les fonctions caractéristiques des intervalles

$$I_q = [w_\alpha^q - \frac{\delta'}{2}\overline{V}_\alpha, w_\alpha^q + \frac{\delta'}{2}\overline{V}_\alpha[.$$

$\mathfrak{S}_\alpha^n(\chi_q)$ est alors l'approximation numérique de $J_\alpha(I_q)$.

Pour évaluer

$$f_\alpha^{q,n+1} \equiv f_\alpha(|\vec{v}_\alpha| = w_\alpha^q, t = t_{n+1})$$

(l'indice n indiquant que les quantités sont évaluées au temps t_n), l'on utilise le schéma temporel d'ordre 1 explicite défini par

$$f_\alpha^{q,n+1} = f_\alpha^{q,n} + \frac{\Delta t}{4\pi(w_\alpha^q)^2\delta'\overline{V}_\alpha} \mathfrak{S}_\alpha^n(\chi_q),$$

schéma qui préserve la positivité de $f_\alpha^{q,n+1}$ pour tout pas de temps Δt puisque, pour tout $q \in \{1, \dots, 2N_\alpha+1\}$ et pour toute condition initiale $f_\alpha^{q,n}$ positive, $\mathfrak{S}_\alpha^n(\chi_q)$ est positif.

Remarques ◦ On pourra vérifier la consistance du calcul de f_α en remarquant que l'on a

$$\sum_{q=1}^{2N_\alpha+1} \mathfrak{S}_\alpha^n(\chi_q) = \tau$$

puisque

$$\sum_{q=1}^{2N_\alpha+1} \chi_q = 1.$$

$\mathfrak{S}_\alpha(\chi_q)$ peut donc être considéré comme étant un taux de réaction nucléaire local pour les particules α .

◦ En fait, on se contentera d'évaluer numériquement les opérateurs de création G_α puisque l'on ne connaît pas la condition initiale f_α^n , condition initiale qui dépend de la manière dont on traite le ralentissement des particules α sur le milieu (dépôt d'énergie instantannée, ralentissement en ligne droite par exemple : on pourra consulter à ce propos les références [55], [56] et [57]).

◦ L'application de tout ceci au cas des neutrons est immédiate.

3.5 Calcul des opérateurs de perte P_D et P_T

De même, en utilisant l'équation (1.4), on obtient

$$\partial_t f_D = -P_D(f_D, f_T)(v_D)$$

avec

$$P_D(f_D, f_T)(v_D) = -f_D(v_D) \int_{\mathbb{R}^3} f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_T.$$

On utilise le schéma temporel explicite d'ordre 1 suivant pour le calcul de f_D^{n+1} (et de f_T^{n+1})

$$\begin{cases} f_D^{n+1}(v_D) &= f_D^n [1 - \Delta t \int_{\mathbb{R}^3} f_T^n(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_T], \\ f_T^{n+1}(v_T) &= f_T^n [1 - \Delta t \int_{\mathbb{R}^3} f_D^n(v_D) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D]. \end{cases} \quad (3.2)$$

Et en appliquant la méthode de Cheremissin, on obtient

$$\begin{cases} f_D^{n+1} &= f_D^n(v_D) \cdot \left[1 - \frac{2\pi\Delta t}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f_T^n(v_T^\gamma) |\vec{v}_D - \vec{v}_T^\gamma| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T^\gamma|) v_{T,\perp}^\gamma}{\Psi_T^n(v_T^\gamma)} \right], \\ f_T^{n+1} &= f_T^n(v_T) \cdot \left[1 - \frac{2\pi\Delta t}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f_D^n(v_D^\gamma) |\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D^\gamma - \vec{v}_T|) v_{D,\perp}^\gamma}{\Psi_D^n(v_D^\gamma)} \right] \end{cases} \quad (3.3)$$

On constate que si l'on veut préserver la positivité des distributions f_D et f_T au temps t_{n+1} , un critère de type *CFL* sur le pas de temps doit être imposé. Il est en effet immédiat que le lemme suivant est vérifié :

Lemme 3.1 *Soient*

$$H_D(v_D) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_T(v_T) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_T \right)^{-1},$$

$$H_T(v_T) = \left(\int_{\mathbb{R}^3} f_D(v_D) |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|) d\vec{v}_D \right)^{-1}$$

et

$$\Delta t_0 = \min [H_D^n(v_D), H_T^n(v_T)]_{\{(\vec{v}_D, \vec{v}_T) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3\}}.$$

Alors, lorsque

$$\Delta t < \Delta t_0,$$

le schéma explicite défini par (3.2) préserve la positivité de f_D^{n+1} et de f_T^{n+1} .

D'un point de vue numérique, on peut sans problème évaluer à chaque itération Δt_0 sans que cela nuise au temps CPU utilisé puisque l'on évalue par la méthode de Cheremissin (voir (3.3)) $H_D(v_D)$ et $H_T(v_T)$ sur toute la grille du maillage $(v_{\parallel}, v_{\perp})$.

Remarques ◦ L'on a

$$\Delta t < \Delta t_0 \implies \Delta t < \Delta t_{Nucl}.$$

On est donc assuré que le nombre de particules créées par les réactions de fusion est moins important que le nombre initial de particules de deutérium et de tritium. Une condition nécessaire sur le pas de temps est donc que $\Delta t < \Delta t_{Nucl}$. Or, il est probable que Δt_{Nucl} soit du même ordre de grandeur que Δt_0 . Et comme le temps de collision Δt_{DT} caractéristique des interactions coulombiennes (cf. [28]) est très inférieur à Δt_{Nucl} (pour $T = 1 \text{ KeV}$: $\Delta t_{DT}/\Delta t_{Nucl} \simeq 10^{-10}$ et pour $T = 100 \text{ KeV}$: $\Delta t_{DT}/\Delta t_{Nucl} \simeq 10^{-2}$), on peut d'ores et déjà affirmer que la contrainte imposée par la condition $\Delta t < \Delta t_0$ est supplantée par la condition $\Delta t \simeq \Delta t_{DT}$ puisque le pas de temps du code résolvant les opérateurs de collision ion / ion et ion / électron est imposé par Δt_{DT} (voir la première partie).

◦ Comme l'on intègre ici que sur une unique grille de vitesse (intégration en \vec{v}_T pour le calcul de P_D et en \vec{v}_D pour P_T) contrairement au calcul du taux de réaction nucléaire et au calcul de G_{α} et G_n qui nécessitent une intégration en (\vec{v}_D, \vec{v}_T) , le nombre de tirages aléatoires utilisé pour le calcul de P_D et de P_T (environ 10^4) pourra être moins important que le nombre de tirage aléatoire utilisé pour le calcul de τ , G_{α} et G_n (environ 10^5).

◦ Lors d'une simulation complète, la méthode de Cheremissin n'étant pas conservative, il faudra procéder à une phase de correction pour s'assurer au-moins que le nombre de particules α et de neutrons créés est égal au nombre de particules de deutérium et de tritium perdues.

Chapitre 4

Résultats numériques

Dans ce paragraphe, on se propose d'appliquer la méthode numérique présentée au troisième chapitre pour le calcul du taux de réaction nucléaire et pour le calcul des distributions G_α et G_n (ou plutôt $J_\alpha(I_q)$ et $J_n(I_q)$: voir le chapitre précédent). L'évaluation numérique des opérateurs de perte P_D et P_T sera faite au chapitre suivant.

Pour cela, on utilise le code de calcul multi-espèces *Procions* (cf. [10]) qui résout pour un plasma totalement ionisé dans une hypothèse de quasi-neutralité les équations de Vlasov-Fokker-Planck monodimensionnel en espace et axisymétrique en vitesse par une méthode déterministe de type différences finies sur une grille en vitesse (v_\parallel, v_\perp) pour la résolution de la partie collisionnelle, la partie advection étant résolue par une méthode particulière avec projection des quantités advectées sur la grille en espace et en vitesse. Les électrons sont traités avec un modèle fluide, le temps de collision électron / électron étant beaucoup plus petit que les temps de collision ion / ion et ion / électron. On consultera la première partie pour une description détaillée de ce modèle.

Après avoir initialisé le plasma de départ à un mélange équi-molaire de deutérium et de tritium, on a donc ajouté des modules de création de particules α et de neutrons. On pourra ainsi étudier certains effets cinétiques pouvant influencer la valeur du taux de réaction nucléaire ou la forme des opérateurs de création des particules α et des neutrons, ces effets cinétiques ne pouvant être pris en compte dans un code fluide.

Pour plus de lisibilité, on écrira

$$\text{biaisage} = b$$

où $b \in \mathbb{R}_*^+$ lorsque Ψ_D sera une maxwellienne définie par

$$U_{\parallel} = U_{D,\parallel}$$

et par le couple

$$(T_{\parallel}, T_{\perp}) = (b \cdot T_{D,\parallel}, b \cdot T_{D,\perp}).$$

On verra en effet qu'en augmentant la température de la maxwellienne qui sert à calculer par la méthode de Cheremissin les différentes intégrales, on fera sensiblement diminuer la variance lorsque la température sera inférieure à environ 15 *Kev*. On utilisera le même *biaisage* pour le tritium que pour le deutérium dans toutes les expériences numériques effectuées. Par ailleurs, lorsque l'on écrira

$$\textit{biaisage} = E,$$

cela sous-entendra que Ψ_D et Ψ_T sont des distributions équiprobables (i.e. constantes) sur la grille des vitesses du code *Procions*.

4.1 Taux de réaction nucléaire

4.1.1 Calcul de τ à l'équilibre thermodynamique

Les résultats du calcul de $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ calculé (en $cm^3./s.$) par la méthode de Cheremissin (moyenné sur N_{iter} pas de temps) est présenté au tableau 1 :

| Température | biaisage | Variance (%) | $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ |
|-------------|----------|--------------|---|
| T = 1 Kev | 1 | 6.15 | $5.70 \cdot 10^{-21}$ |
| T = 1 Kev | 3 | 0.66 | $5.49 \cdot 10^{-21}$ |
| T = 2 Kev | 1 | 2.93 | $2.70 \cdot 10^{-19}$ |
| T = 2 Kev | 3 | 0.59 | $2.62 \cdot 10^{-19}$ |
| T = 5 Kev | 1 | 1.42 | $1.31 \cdot 10^{-17}$ |
| T = 5 Kev | 3 | 0.57 | $1.28 \cdot 10^{-17}$ |
| T = 10 Kev | 1 | 0.83 | $1.10 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 10 Kev | 3 | 0.56 | $1.08 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 20 Kev | 1 | 0.48 | $4.24 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 20 Kev | 3 | 0.57 | $4.21 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 50 Kev | 1 | 0.22 | $8.65 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 50 Kev | 3 | 0.71 | $8.63 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 100 Kev | 1 | 0.18 | $8.42 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 100 Kev | 3 | 0.82 | $8.43 \cdot 10^{-16}$ |

Tableau 1

Le calcul de $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ effectué avec les formules approchées (1.11) et (1.12) est présenté au tableau 2 :

| Température | $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ | $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{NRL}$ |
|-------------|---|---|
| T = 1 Kev | $5.56 \cdot 10^{-21}$ | $5.5 \cdot 10^{-21}$ |
| T = 2 Kev | $2.63 \cdot 10^{-19}$ | $2.6 \cdot 10^{-19}$ |
| T = 5 Kev | $1.26 \cdot 10^{-17}$ | $1.3 \cdot 10^{-17}$ |
| T = 10 Kev | $1.11 \cdot 10^{-16}$ | $1.1 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 20 Kev | $4.59 \cdot 10^{-16}$ | $4.2 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 50 Kev | $8.51 \cdot 10^{-16}$ | $8.7 \cdot 10^{-16}$ |
| T = 100 Kev | $8.52 \cdot 10^{-16}$ | $8.5 \cdot 10^{-16}$ |

Tableau 2

On constate que les résultats sont tous très proches et cela sur une large plage de température (suffisante dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel*). Dans le cas de l'équilibre thermodynamique, la méthode numérique utilisée est donc validée.

Cependant, il reste à établir la validité de cette méthode numérique lorsque des effets cinétiques sont présents. On pourra alors étudier la déviation de $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ par rapport à $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$.

Paramètres numériques :

- calcul avec deux espèces (deutérium et tritium), initialisation des distributions à des maxwelliennes,
- nombre de tirages aléatoires = $N_{tirages} = 10^5$,
- nombre d'itérations = $N_{iter} = 50$ (pour l'évaluation de la variance),
- grille $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$ (i.e. grille en vitesse microscopique utilisée par le code *Procions* pour résoudre les équations cinétiques).

4.1.2 Influence d'effets cinétiques sur la valeur de τ

On tient compte dans ce paragraphe de l'opérateur de collision ion / ion résolu en géométrie axisymétrique à l'aide du code *Procions*.

Premier effet cinétique Un premier effet cinétique est celui de la relaxation de température c'est à dire lorsque à $t=0$, on a $T_{\parallel} \neq T_{\perp}$ (rappelons que $T = \frac{T_{\parallel} + 2T_{\perp}}{3}$).

On laisse donc les températures se relaxer jusqu'à ce que $T_{\parallel} = T_{\perp} = T$ ($T = C^{ste}$ aux erreurs numériques près) et on calcule à chaque pas de temps $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ et $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ donnée par la formule (1.11).

Le plasma de deutérium-tritium caractérisé par :

$N_D = N_T = 3.75 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$, $T_{D,\parallel} = T_{T,\parallel} = 4 \text{ KeV}$ et $T_{D,\perp} = T_{T,\perp} = 1 \text{ KeV}$.
On constate sur les figures 2 et 3 qu'utiliser la formule $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ minimise

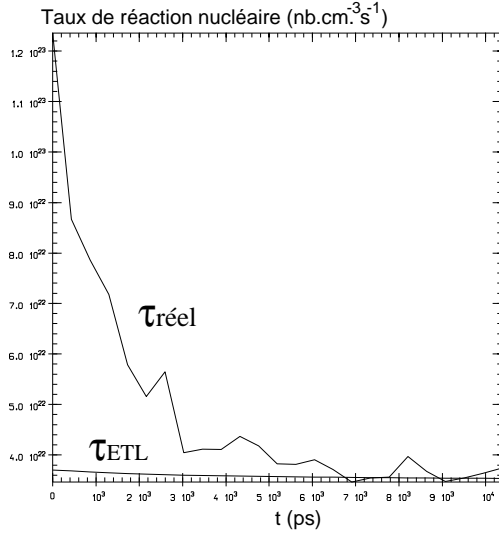


Fig. 2 : $biaisage=1$, $T = 2 \text{ KeV}$

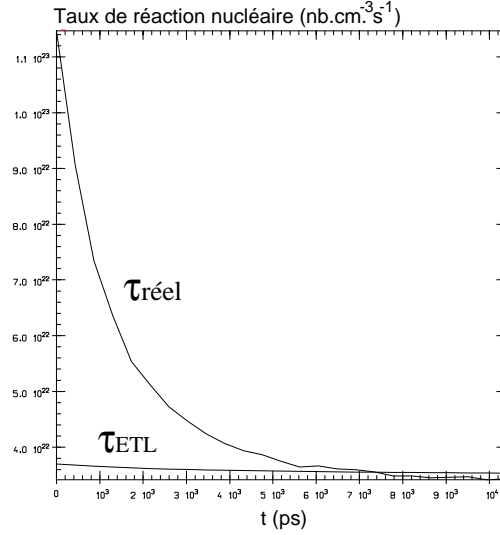


Fig. 3 : $biaisage=3$, $T = 2 \text{ KeV}$

le taux de réaction nucléaire. En effet, $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ n'est fonction que de la température macroscopique $T = T_D = T_T$ qui est constante ici (aux erreurs numériques près). Or, à $t=0$, on a $T_{\parallel} = 2T = 4 \text{ KeV}$ et du fait de la croissance exponentielle de la section efficace microscopique σ_{DT} avec l'énergie de collision $E \equiv \frac{1}{2}m_D(\vec{v}_D - \vec{v}_T)^2$ entre les particules de deutérium et de tritium dans la zone où presque toute l'énergie de collision est concentrée (i.e. en $E \simeq T_{\parallel} = 4 \text{ KeV}$ à $t = 0$), les collisions vont être plus énergétiques que dans le cas $T_{\parallel} = T_{\perp} = T = 2 \text{ KeV}$.

Par contre, ce ne serait plus le cas dans la zone de température $T_{\parallel} = 100 \text{ KeV}$ puisque dans la zone où $E \simeq 100 \text{ KeV}$, σ_{DT} décroît (voir la figure 1). Pour mettre en relief ce fait, prenons comme conditions initiales

$T_{D,\parallel} = T_{T,\parallel} = 100 \text{ KeV}$ et $T_{D,\perp} = T_{T,\perp} = 25 \text{ KeV}$ (donc $T = 50 \text{ KeV}$).

On constate en effet sur les figures 4 et 5 que lorsque $T = 50 \text{ KeV}$, $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ est supérieur à $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ (le taux réel n'est pas exactement confondu avec le taux maxwellien à la fin de la relaxation pour ce cas car il subsiste une légère différence entre T_{\parallel} et T_{\perp} liée à l'erreur de discrétisation de l'opérateur de collision du schéma utilisé par [10]).

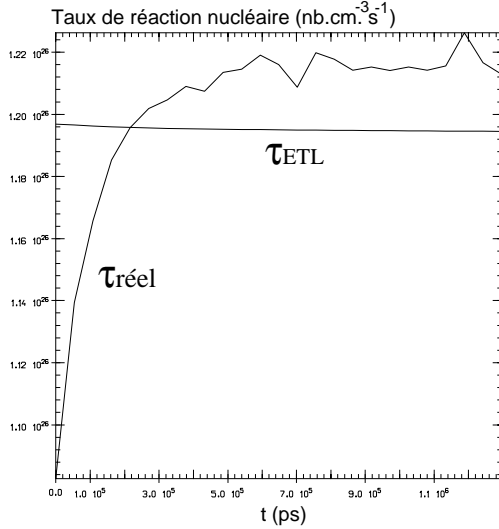


Fig. 4 : $\text{biaisage}=1$, $T = 50 \text{ KeV}$

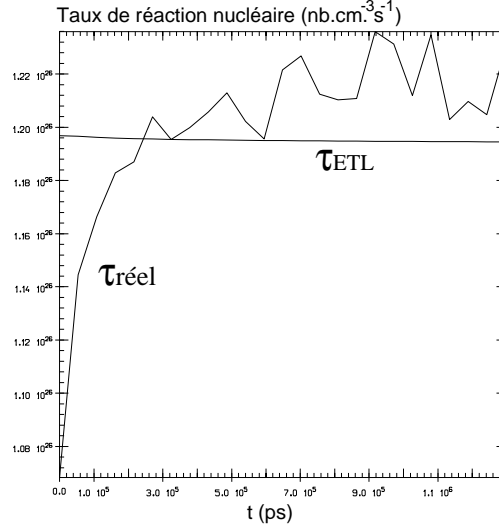


Fig. 5 : $\text{biaisage}=3$, $T = 50 \text{ KeV}$

On a donc pu mettre en évidence un premier effet cinétique: lorsqu'il y a un fort découplage entre T_{\parallel} et T_{\perp} , aux faibles températures on a $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ inférieur à $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ et aux fortes températures, on a $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ supérieur à $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$.

Les paramètres numériques sont les suivants :

- $\text{biaisage}=1$ (figures 2 et 4), $\text{biaisage}=3$ (figures 3 et 5),
- $N_{iter} = 24$, $\Delta t = 1$ (i.e. un pas de temps = un temps de collision ion / ion du plasma),
- $N_{tirages} = 10^5$,
- $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$.

Second effet cinétique Un second effet cinétique à étudier est celui d'un plasma de deutérium et de tritium dont la distribution initiale est non pas une maxwellienne mais une bi-maxwellienne dans la direction \parallel à savoir

$$f = C^{ste} \cdot \left\{ \exp \left[-\frac{m(v_{\parallel} - \tilde{U}_{\parallel})^2}{2\tilde{T}_{\parallel}} \right] + \exp \left[-\frac{m(v_{\parallel} + \tilde{U}_{\parallel})^2}{2\tilde{T}_{\parallel}} \right] \right\} \cdot \exp \left(-\frac{mv_{\perp}^2}{2T_{\perp}} \right) \quad (4.1)$$

où \tilde{T}_{\parallel} est une température fictive en *KeV* a priori différente de T_{\parallel} . On a donc à $t = 0$

$$T_{\parallel} = \tilde{T}_{\parallel} + m\tilde{U}_{\parallel}^2$$

et

$$U_{\parallel} = 0.$$

Puis, on fixe la bi-maxwellienne de telle sorte que

$$T_{\parallel} = T_{\perp} = T$$

tout au long de la relaxation de la bi-maxwellienne vers la maxwellienne de température T ce qui impose de prendre

$$\tilde{T}_{\parallel} = T - m\tilde{U}_{\parallel}^2$$

à $t = 0$. Le choix de \tilde{U}_{\parallel} est arbitraire à condition que $|\tilde{U}_{\parallel}| < \sqrt{\frac{T}{m}}$. On peut définir un nombre de Mach $\tilde{M} = \tilde{U}_{\parallel}/\sqrt{\tilde{T}_{\parallel}/m}$. On prend ici $\tilde{M}_D = 3.08$ et $\tilde{M}_T = 2.88$, $\tilde{T}_{\parallel,D} = \tilde{T}_{\parallel,T} \simeq \frac{T}{10}$. On consultera la figure 6 pour la visualisation des résultats de cette expérience numérique où est représenté

$$\frac{\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle}{\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{t=+\infty}}.$$

La figure 7 donne l'allure des distributions du deutérium et du tritium à $t = 0$ et à $t = +\infty$.

Ces résultats sont qualitativement similaires de ceux présentés par [58] où ils étaient arrivés à la conclusion que

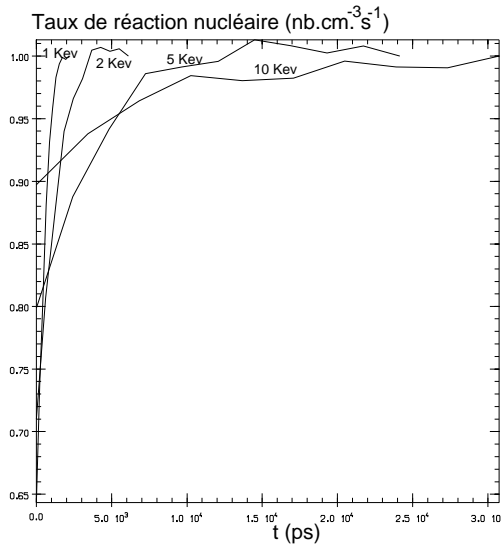
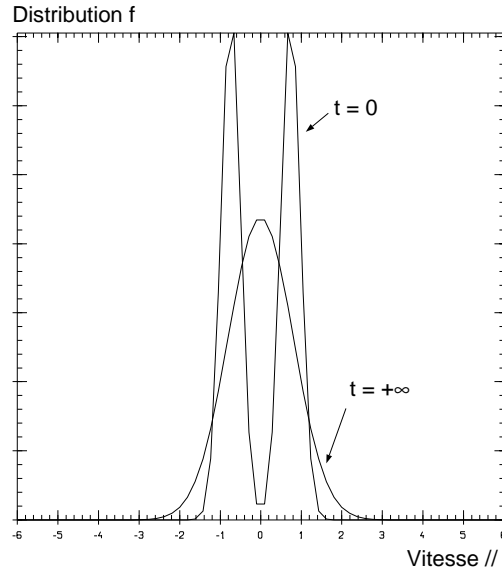
$$\frac{\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle}{\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{t=+\infty}} < 1.$$

On peut donc conclure que $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ risque d'être inférieur à $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{Max}$ dans un front de choc.

Ces résultats sont intéressants car ils montrent que des effets cinétiques peuvent affecter la valeur du taux de réaction nucléaire. Or ces effets se retrouvent dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel* où il y a des chocs très forts et de forts découplages entre T_{\parallel} et T_{\perp} (cf. [59]).

Les paramètres numériques sont les suivants :

- *biaisage* = 3, · nombre de tirages aléatoires = $N_{tirages} = 10^5$,
- nombre d'itérations = $N_{iter} = 10$, $\Delta t = 1$,
- grille $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$.

Fig. 6 : $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle / \langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle_{t=+\infty}$ Fig. 7 : f_{Dout} à $t=0$ et à $t=+\infty$

4.2 Distribution des particules α et des neutrons

Nous avons besoin ici d'une estimation des paramètres numériques δ_α et δ_n nécessaires pour l'établissement du maillage du domaine des vitesses des particules α et des neutrons (voir (3.1)). Pour ce faire, dans l'annexe B, on tente une approche théorique de l'étude de la dispersion des produits de fusion autour de leur énergie de création standard ce qui nous permet d'avoir une estimation de ces paramètres sur une large plage de température : on se référera à la propriété B.1.

4.2.1 Résultats en fonction de la température à l'équilibre thermodynamique

On représente sur les figures 8 à 11 les distributions G_α obtenues à différentes températures. L'ordre de grandeur de δ_α à partir duquel on peut dire que $G_\alpha = 0$ est donné au tableau 3.

Paramètres numériques :

- $biaisage = 3$,
- $N_{tirages} = 10^5$,
- $N_\alpha = 30$,
- $V_{||} \times V_{\perp} = 64 \times 32$,

· δ_α , qui est donc une estimation du support de G_α , dépend de la température (on rappelle que l'on a une 1^{ère} estimation de δ_α avec l'approche théorique de l'annexe B).

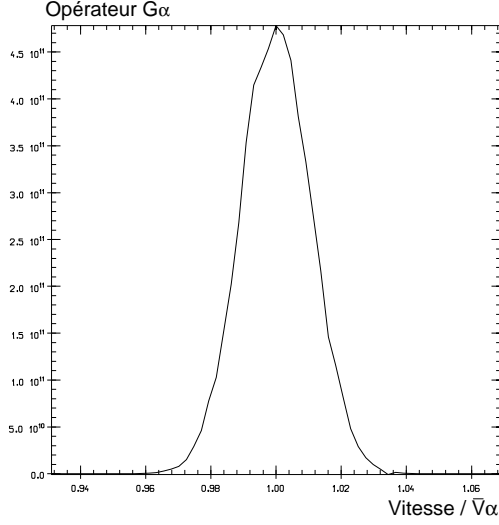


Fig. 8: G_α , $T = 1 \text{ KeV}$

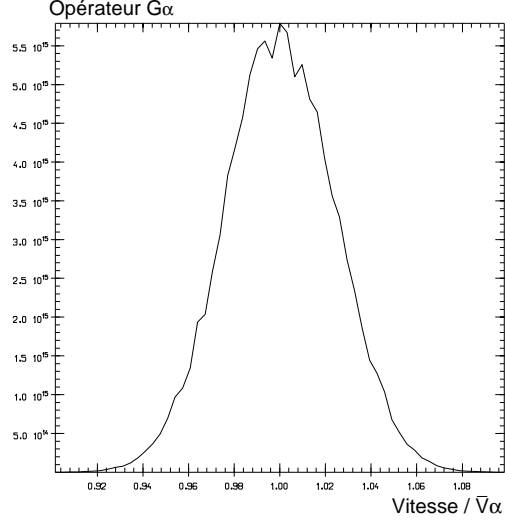


Fig. 9: G_α , $T = 5 \text{ KeV}$

4.2.2 Lissage de G_α et G_n par une fonction analytique à l'équilibre thermodynamique

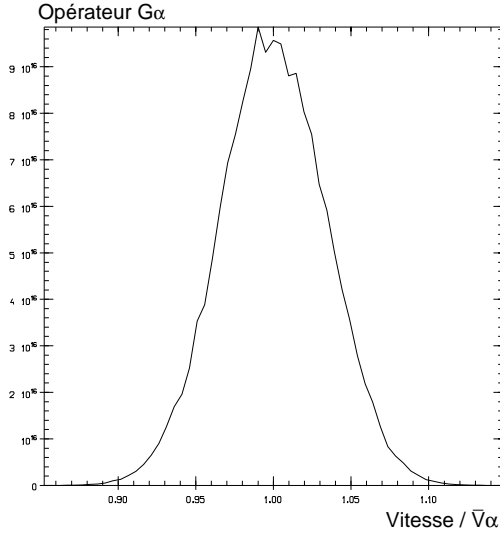
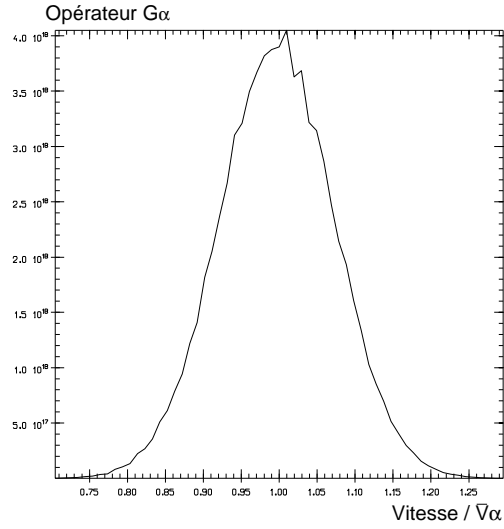
Pour avoir une idée de la « nature » de ces distributions, on peut essayer de comparer G_α à la fonction g_α définie par

$$g_\alpha(v_\alpha) = \frac{\tau}{2(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_\alpha}{2\sigma_\alpha}} \frac{1}{|\vec{v}_\alpha|^2} \exp \left[-\frac{\frac{1}{2}m_\alpha(|\vec{v}_\alpha| - \bar{v}_\alpha)^2}{2\sigma_\alpha} \right]$$

avec

$$\begin{cases} \tau = 4\pi \int_0^{+\infty} G_\alpha(f_D, f_T) |\vec{v}_\alpha|^2 d|\vec{v}_\alpha|, \\ \tau \bar{v}_\alpha = 4\pi \int_0^{+\infty} G_\alpha(f_D, f_T) |\vec{v}_\alpha|^3 d|\vec{v}_\alpha|, \\ \tau \sigma_\alpha = 4\pi \int_0^{+\infty} G_\alpha(f_D, f_T) \frac{1}{2} m_\alpha (|\vec{v}_\alpha| - \bar{v}_\alpha)^2 |\vec{v}_\alpha|^2 d|\vec{v}_\alpha|, \end{cases}$$

($d\vec{v}_\alpha = 4\pi |\vec{v}_\alpha|^2 d|\vec{v}_\alpha|$) les distributions f_D et f_T étant à nouveau des maxwelliennes centrées. Par abus de langage, $T_\alpha = 2\sigma_\alpha$ sera appelée « température de création des particules α ». On définit de même à partir de G_n les moments \bar{v}_n , σ_n et T_n .


 Fig. 10 : G_α , $T = 10 \text{ KeV}$

 Fig. 11 : G_α , $T = 50 \text{ KeV}$

Les moments de g_α ne donnent pas exactement τ , \bar{v}_α et σ_α mais peuvent tout de même être considérés comme quasiment égaux. En effet, en posant

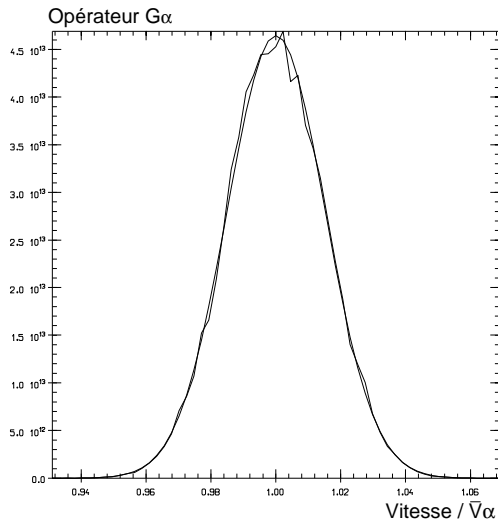
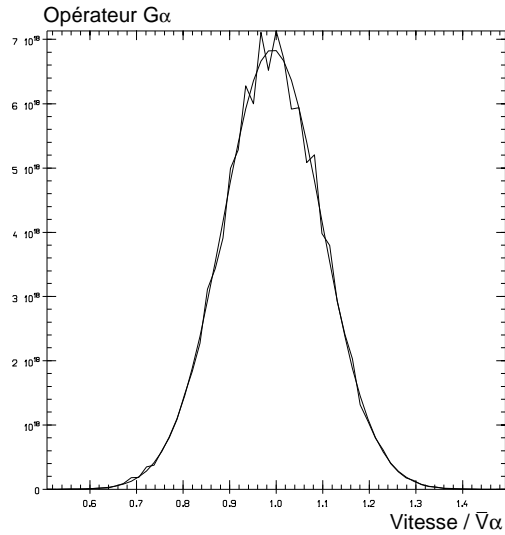
$$\begin{cases} \tau' = \int_{\mathbb{R}^3} g_\alpha(v_\alpha) d\vec{v}_\alpha, \\ \tau' \bar{v}'_\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} g_\alpha(v_\alpha) |\vec{v}_\alpha| d\vec{v}_\alpha, \\ \tau' \sigma'_\alpha = \int_{\mathbb{R}^3} g_\alpha(v_\alpha) \frac{1}{2} m_\alpha (|\vec{v}_\alpha| - \bar{v}'_\alpha)^2 d\vec{v}_\alpha, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \tau' = \frac{\tau}{2} \left[1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{\frac{\frac{1}{2} m_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2\sigma_\alpha}} \right) \right], \\ \tau' \bar{v}'_\alpha = \tau \bar{v}_\alpha + \tau \sqrt{\frac{\sigma_\alpha}{m_\alpha \pi}} \exp \left(-\frac{\frac{1}{2} m_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2\sigma_\alpha} \right), \\ \tau' \sigma'_\alpha = \tau \sigma_\alpha + \tau \frac{1}{2} m_\alpha (\bar{v}_\alpha^2 - \bar{v}'_\alpha^2) + \tau \frac{\sigma_\alpha}{\sqrt{\pi}} \exp \left(-\frac{\frac{1}{2} m_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2\sigma_\alpha} \right) \cdot \left(1 + 2\sqrt{\frac{\frac{1}{2} m_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2\sigma_\alpha}} \right). \end{cases}$$

Le tableau 3 montre que $\sqrt{\frac{\frac{1}{2} m_\alpha \bar{v}_\alpha^2}{2\sigma_\alpha}}$ est compris environ entre 7 et 70 ce qui permet d'assimiler avec une excellente précision les moments de g_α à ceux de f_α .

Les figures 12 et 13 superposent G_α et g_α respectivement pour $T = 1 \text{ KeV}$ et pour $T = 100 \text{ KeV}$.

Fig. 12: G_α, g_α ($T=1$ Kev)Fig. 13: G_α, g_α ($T=100$ Kev)

On constate que G_α est quasiment égale à g_α . Si on peut estimer \bar{v}_α et σ_α en fonction de $T = T_D = T_T$, alors on aura une estimation de G_α en posant

$$G_\alpha = g_\alpha(\tau, \bar{v}_\alpha, \sigma_\alpha)$$

dans le cas de l'équilibre thermodynamique local (E.T.L.). Pour cela, on relève les valeurs calculées numériquement de \bar{v}_α et σ_α . Le tableau 3 fournit ces valeurs :

| Température | δ_α | \bar{v}_α | σ_α | $E_\alpha = \bar{v}_\alpha^2 + \sigma_\alpha$ |
|-------------|-----------------|------------------|----------------------|---|
| T = 1 Kev | 0.05 | 1.00036 | $1.14 \cdot 10^{-4}$ | 1.00083 |
| T = 2 Kev | 0.07 | 1.00059 | $2.29 \cdot 10^{-4}$ | 1.00140 |
| T = 5 Kev | 0.10 | 1.00125 | $5.72 \cdot 10^{-4}$ | 1.00307 |
| T = 10 Kev | 0.15 | 1.00222 | $1.14 \cdot 10^{-3}$ | 1.00558 |
| T = 20 Kev | 0.20 | 1.00389 | $2.27 \cdot 10^{-3}$ | 1.01007 |
| T = 50 Kev | 0.30 | 1.00818 | $5.69 \cdot 10^{-3}$ | 1.02212 |
| T = 100 Kev | 0.50 | 1.01536 | $1.13 \cdot 10^{-2}$ | 1.04228 |

Tableau 3

\bar{v}_α et σ_α sont respectivement adimensionnalisés par \bar{V}_α et par $\bar{E}_\alpha = \frac{1}{2}m_\alpha\bar{V}_\alpha^2 = 3.52$ Mev. E_α est adimensionnalisées par \bar{E}_α .

On constate que l'on peut approcher assez bien \bar{v}_α avec la loi

$$\bar{v}_\alpha = \sqrt{1 + 6.8 \cdot 10^{-4} T^{0.82}}.$$

σ_α est approchée de manière excellente par $\sigma_\alpha = 1.14 \cdot 10^{-4} T$ ce qui donne en Kev

$$\sigma_\alpha = 0.40 T (Kev).$$

On remarque que la température de création des particules α n'est pas négligeable devant celle du deutérium et du tritium puisque cela donne en Kev

$$T_\alpha = 0.80 T (Kev).$$

On ne peut donc vraisemblablement pas assimiler G_α à un Dirac.

Il serait intéressant d'étudier le comportement de la distribution des neutrons dans les mêmes conditions. On obtient le tableau :

| Température | δ_n | \bar{v}_n | σ_n | $E_n = \bar{v}_n^2 + \sigma_n$ |
|-------------|------------|-------------|----------------------|--------------------------------|
| T = 1 Kev | 0.015 | 1.00023 | $7.17 \cdot 10^{-6}$ | 1.00048 |
| T = 2 Kev | 0.015 | 1.00038 | $1.43 \cdot 10^{-5}$ | 1.00077 |
| T = 5 Kev | 0.025 | 1.00075 | $3.59 \cdot 10^{-5}$ | 1.00153 |
| T = 10 Kev | 0.04 | 1.00120 | $7.17 \cdot 10^{-5}$ | 1.00248 |
| T = 20 Kev | 0.06 | 1.00179 | $1.43 \cdot 10^{-4}$ | 1.00372 |
| T = 50 Kev | 0.10 | 1.00285 | $3.59 \cdot 10^{-4}$ | 1.00607 |
| T = 100 Kev | 0.13 | 1.00432 | $7.19 \cdot 10^{-4}$ | 1.00938 |

Tableau 4

\bar{v}_n et σ_n sont respectivement adimensionnalisés par \bar{V}_n et par $\bar{E}_n = \frac{1}{2}m_n\bar{V}_n^2 = 14.08 Mev$. E_n est adimensionnalisées par \bar{E}_n .

La aussi, on remarque qu'il est possible d'approcher de manière correcte \bar{v}_n avec

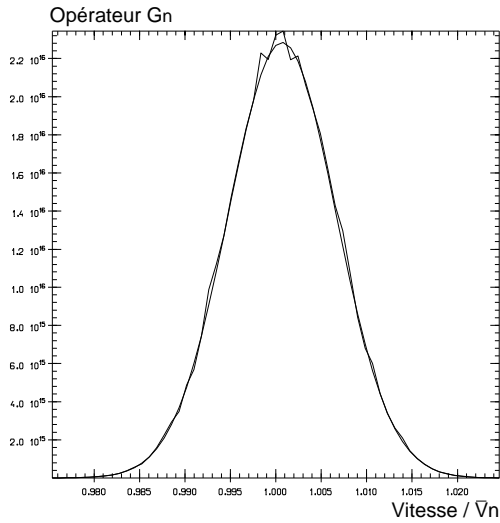
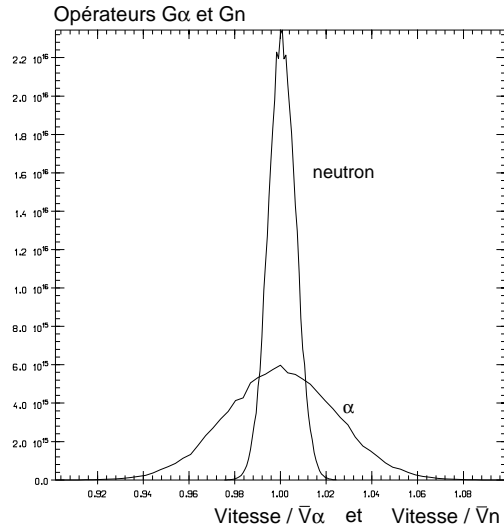
$$\bar{v}_n = \sqrt{1 + 5.1 \cdot 10^{-4} T^{0.63}},$$

et de manière excellente la variance σ_n des neutrons avec la loi

$$\sigma_n = 0.10 T (Kev)$$

ce qui donne pour la température de création des neutrons

$$T_n = 0.20 T (Kev).$$

Fig. 14: G_n, g_n ($T=1$ KeV)Fig. 15: G_α, G_n ($T=5$ KeV)

On constate que la dispersion et la température de création des neutrons sont beaucoup moins importantes par rapport aux particules α . La figure 14 compare la distribution des neutrons à la fonction g_n . La figure 15 compare la distribution des particules α et des neutrons pour $T = 5$ KeV.

On peut donc conclure ici qu'à l'équilibre thermodynamique, les distributions G_α et G_n sont quasiment confondues avec g_α et g_n (voir aussi [62]). D'autre part, la température T_α n'étant pas négligeable devant la température du milieu, on ne peut pas assimiler l'opérateur de création G_α à un Dirac (cela serait sans doute plus acceptable pour les neutrons).

4.2.3 L'effet Doppler et la formule de Brysk

Ce que les physiciens appellent *effet Doppler* par analogie avec l'effet Doppler classique est le fait que le spectre d'émission des neutrons n'est pas un Dirac mais possède une largeur à cause de l'agitation thermique du milieu fusible (voir la proposition 2.1 et la figure 15). Cet effet Doppler, via la pseudo température T_n des neutrons, a une grande importance pour les diagnostics expérimentaux.

En effet, à partir d'un détecteur de neutrons, on peut espérer mesurer le spectre d'émission en énergie des neutrons au cours du temps (les neutrons étant de charge nulle, ils ne subissent pratiquement aucune interaction avec le plasma environnant et quittent librement la sphère de deutérium-tritium ce qui n'est bien-sûr pas le cas des particules α) puis mesurer T_n pour ensuite remonter à la température T

du milieu fusible via la relation citée plus haut.

C'est cette technique de mesure qui a été mise en place dans les chambres d'expérience du laser français *Phébus* de *Limeil-Valenton* et du laser américain *Nova* du *Lawrence Livermore National Laboratory* (cf. [60] et [61]).

Les données expérimentales fournissant plutôt le spectre d'émission des neutrons en fonction de leur énergie de création, il serait intéressant d'évaluer la largeur à mi hauteur de ce spectre d'émission à partir de la relation liant T_n à T et de la fonction g_n (voir le paragraphe précédent).

Cherchons donc $v_{n,1}$ et $v_{n,2}$ tels que

$$g_n(v_{n,1}) = g_n(v_{n,2}) = \frac{1}{2}g_n(\bar{v}_n).$$

Si on approxime la fonction de distribution G_n par

$$g_n(v_n) = \frac{\tau}{2(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{m_n}{T_n}} \frac{1}{|\bar{v}_n|^2} \exp \left[-\frac{\frac{1}{2}m_n(|\bar{v}_n| - \bar{v}_n)^2}{T_n} \right]$$

en admettant que

$$\left(\frac{v_{n,1}}{\bar{v}_n} \right)^2 \simeq \left(\frac{v_{n,2}}{\bar{v}_n} \right)^2 \simeq 1,$$

on trouve

$$\begin{cases} v_{n,1} = \bar{v}_n - \sqrt{\frac{2 \log 2}{m_n} T_n}, \\ v_{n,2} = \bar{v}_n + \sqrt{\frac{2 \log 2}{m_n} T_n}. \end{cases}$$

Or, la largeur ΔE_n à mi hauteur est définie par

$$\Delta E_n = \frac{1}{2}m_n v_{n,2}^2 - \frac{1}{2}m_n v_{n,1}^2$$

ce qui donne

$$\Delta E_n = 4\sqrt{\log 2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}m_n \bar{v}_n^2} \cdot \sqrt{T_n}$$

c'est à dire

$$\Delta E_n \simeq 176.72\sqrt{T}$$

avec ΔE_n et T exprimées en *KeV*.

On retrouve ici la formule de Brysk $\Delta E_n \simeq 177\sqrt{T}$, formule utilisée couramment dans les diagnostics expérimentaux en neutronique (cf. [61] et [62]).

Cependant, il faut souligner que cette relation n'est valable que dans le cas où le mélange de deutérium et de tritium est à l'équilibre thermodynamique : les diagnostics obtenus à partir de la formule de Brysk ne donnent donc qu'un ordre de grandeur de la température du milieu fusible.

Remarque On trouverait une relation équivalente entre T_n et T pour la réaction de fusion entre deux ions deutérium, réaction qui est moins probable que la réaction entre un ion deutérium et un ion tritium mais ne nécessitant pas la production de tritium (la demi-période du tritium est de l'ordre de quelques années). Cette réaction conduit à la relation $\Delta E_n \simeq 82.5\sqrt{T}$ (cf. [61]).

4.2.4 Influence des vitesses macroscopiques à l'équilibre thermodynamique : collision de plasmas

Nous avons jusqu'ici étudié le cas où f_D et f_T étaient des maxwelliennes centrées. Remarquons tout d'abord que ce qui a été étudié jusqu'ici reste bien-sûr valable lorsque les vitesses macroscopiques \vec{U}_D et \vec{U}_T sont égales et que la vitesse des particules α est évaluée dans le repère se déplaçant à la vitesse macroscopique $\vec{U}_D = \vec{U}_T$ (i.e. le repère barycentrique). En particulier, dans ce repère, les distributions G_α et G_n restent isotropes.

Supposons maintenant que les vitesses macroscopiques \vec{U}_D et \vec{U}_T sont différentes. Posons alors

$$\begin{cases} \vec{v}_D = \vec{v}_D' + \vec{U}_D, \\ \vec{v}_T = \vec{v}_T' + \vec{U}_T, \\ \vec{U}_g = \frac{m_D \vec{U}_D + m_T \vec{U}_T}{m_D + m_T} = \text{vitesse macroscopique du centre de gravité.} \end{cases}$$

La cinématique de la réaction permet alors d'écrire

$$\overline{v_\alpha|g} = \vec{v}_\alpha - \vec{U}_g = \frac{m_D \vec{v}_D' + m_T \vec{v}_T'}{m_D + m_T} + \vec{\Omega} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |\vec{v}_D' - \vec{v}_T' + \vec{U}_D - \vec{U}_T|^2},$$

$\overline{v_\alpha|g}$ étant la vitesse de la particule α évaluée dans le repère barycentrique.

Bien que $f_D(v_D')$ et $f_T(v_T')$ soient des maxwelliennes centrées, $G_\alpha(v_\alpha|g)$ n'est cependant plus isotrope du fait du terme $|\vec{v}_D' - \vec{v}_T' + \vec{U}_D - \vec{U}_T|$ intervenant dans la cinématique de la réaction. Mais ce terme étant d'ordre $\overline{V}_\alpha \varepsilon_\alpha$, on peut supposer que l'anisotropie sera très faible.

Par contre il faut remarquer que si $\vec{U}_D \neq \vec{U}_T$, alors la distribution $G_\alpha(v_\alpha|g)$ ne sera pas équivalente à la distribution $G_\alpha(v_\alpha|g)$ obtenue dans le cas où $\vec{U}_D = \vec{U}_T = \vec{U}_g$ à nouveau à cause du terme $|\vec{v}_D' - \vec{v}_T' + \vec{U}_D - \vec{U}_T|$ qui intervient aussi dans l'évaluation de la section efficace σ_{DT} : l'effet ne sera pas négligeable.

On se contente donc ici d'étudier le cas où $\vec{U}_D \neq \vec{0}$, $\vec{U}_T \neq \vec{0}$ mais avec $\vec{U}_g = \vec{0}$ c'est à dire que G_α est évaluée dans le repère barycentrique.

Soit donc un plasma tel que $T_D = T_T = 5 \text{ KeV}$. On évalue la distribution G_α pour les quatres cas suivants :

| Courbe | $U_{D,\parallel}/\bar{V}$ | $U_{T,\parallel}/\bar{V}$ |
|--------|---------------------------|---------------------------|
| A | 0 | 0 |
| B | 2.16 | -1.44 |
| C | 4.33 | -2.88 |
| D | 8.66 | -5.77 |

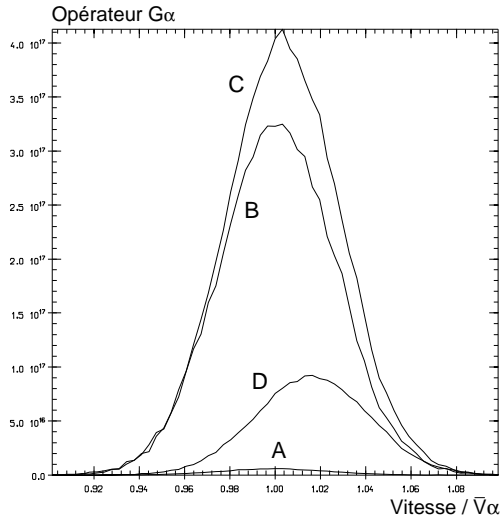
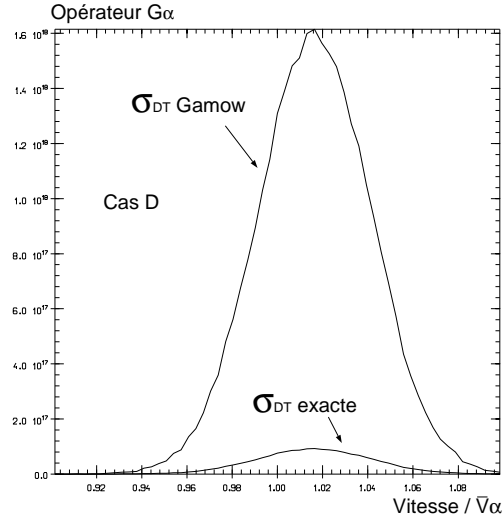
Tableau 5

sachant que $\bar{V} = \sqrt{2T/m_D} = 6.92 \cdot 10^7 \text{ cm./s.}$

On constate que lorsque $|U_{D,\parallel} - U_{T,\parallel}|$ augmente (voir les courbes A, B et C sur la figure 16), la production de particules α (et donc le taux de réaction nucléaire) augmente ce qui est cohérent puisque les chocs deviennent plus intenses.

Cependant, du fait de la décroissance de σ_{DT} à partir de $E \equiv \frac{1}{2}m_D(\vec{v}_D - \vec{v}_T)^2 \simeq 100 \text{ KeV}$ (ce phénomène est en fait similaire à ce qui a été observé au premier paragraphe de ce chapitre lors du calcul du taux de réaction nucléaire ; voir aussi la figure 1), lorsque $|U_{D,\parallel} - U_{T,\parallel}|$ devient très important, on observe un phénomène de saturation mis en évidence par la figure 16, courbe D : la production de particules α diminue. Cependant, pour le cas où $T = 5 \text{ KeV}$, ce phénomène se produit pour des valeurs de $|U_{D,\parallel} - U_{T,\parallel}|$ extrêmement importantes, sans réelle réalité physique pour des problèmes de *Fusion par Confinement Inertiel*.

Ce type de phénomène pourrait par contre être rencontré si l'on souhaitait réaliser la fusion par la collision d'un plasma de deutérium avec un plasma de tritium ou avec une cible tritiée : le cas D correspondrait à la collision d'un faisceau quasi monocinétique de deutérium de 1 MeV sur une cible tritiée fixe.

Fig. 16 : G_α Fig. 17 : (cas D) G_α avec σ_{DT} exacte ou σ_{DT} de Gamow

Il est à noter cependant qu'aux fortes températures ($T > 50 \text{ KeV}$), ce phénomène est beaucoup plus brutal et peut peut-être avoir des conséquences pratiques dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel*.

On remarquera par ailleurs que δ_α reste quasiment constant.

Sur la figure 17, on représente la fonction G_α lorsque la section efficace σ_{DT} est donnée par la formule de Gamow (1.7) et par la formule (1.8) que nous avons utilisée jusqu'ici: on constate que la décroissance de la section efficace σ_{DT} aux fortes énergies est responsable de ce phénomène de saturation, cette décroissance n'étant pas prise en compte par la formule de Gamow (voir la figure 1).

4.2.5 Exemple de calcul de G_α dans le cas où f_D et f_T ne sont plus maxwelliennes

On voudrait savoir dans quelle mesure la distribution G_α est susceptible de dévier de la fonction g_α lorsque les distributions f_D et f_T sont des bi-maxwelliennes. La figure 18 compare G_α avec la fonction g_α lorsque f_D et f_T sont des bi-maxwelliennes ($T = 1 \text{ KeV}$). On peut aussi comparer G_α avec la distribution G_α lorsque f_D et f_T sont des maxwelliennes.

On constate sur la figure 18 que G_α est encore confondue avec g_α ce qui est assez remarquable vu que le deutérium et le tritium sont loin de l'équilibre thermody-

namique.

On ne peut conjecturer que G_α sera toujours très proche de g_α même lorsque le deutérium et le tritium sont hors de l'équilibre thermodynamique car le cas étudié ci-dessus est un cas particulier. Cependant, ces résultats montrent qu'il serait intéressant de comparer G_α à g_α dans le cas d'une implosion *Fusion par Confinement Inertiel* réaliste où les déséquilibres thermodynamiques sont très importants. On peut en effet noter la présence par exemple de tri-maxwelliennes au centre de la sphère de deutérium-tritium lors de la formation du point chaud : voir la référence [11] ; on pourra aussi consulter le dernier chapitre de la deuxième partie.

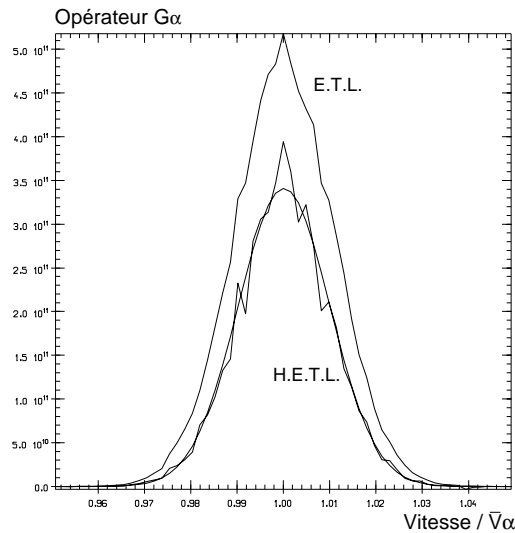


Fig. 18 : G_α (E.T.L. ou H.E.T.L.)

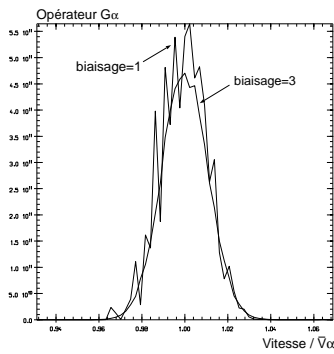
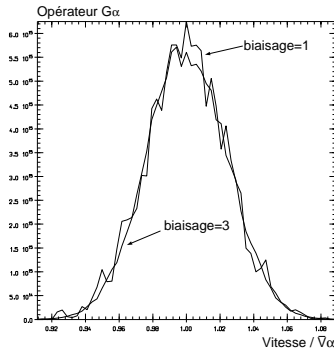
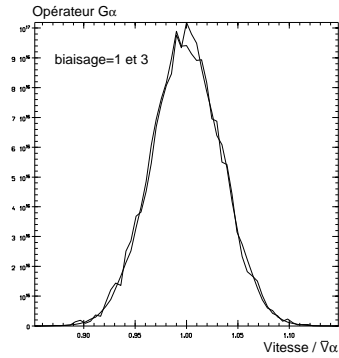
4.3 Influence des paramètres numériques

Un paramètre très important intervenant dans la mise en œuvre de la méthode numérique présentée dans cette étude pour calculer les distributions des particules α et des neutrons est le paramètre *biaisage* déjà présenté au début de ce chapitre. Les figures 19 à 21 comparent la distribution G_α obtenue avec *biaisage*=1 et avec *biaisage*=3 respectivement pour $T = 1 \text{ KeV}$, $T = 5 \text{ KeV}$ et $T = 10 \text{ KeV}$ (calculs mono-espèce i.e. en prenant $m_D = m_T = 2.5m_p$ où m_p est la masse du proton).

On constate qu'aux températures inférieure à 10 KeV , on a fortement intérêt à prendre un *biaisage* supérieur à 1. Par contre lorsque T devient supérieure à 10

KeV, il vaut mieux conserver un *biaisage* égal à 1 bien qu'un *biaisage* égal à 3 soit quasiment équivalent dans cette zone de température. On pourra aussi consulter la variance dans le *tableau 1* qui confirme ces constatations ainsi que les figures 2 à 5.

On montrera au chapitre suivant que plus la température du milieu augmente, moins les ions deutérium et tritium des queues des maxwelliennes f_D et f_T contribuent aux réactions nucléaires : il est donc normal de favoriser davantage les particules en queue de maxwellienne en augmentant le *biaisage* lorsque la température est faible.

Fig. 19 : $T=1$ KeVFig. 20 : $T=5$ KeVFig. 21 : $T=10$ KeV

On pourra constater sur la figure 22 (taux de réaction nucléaire en fonction du temps à l'équilibre thermodynamique local avec $N_{tirages} = 8 \cdot 10^4$) que biaiser selon une distribution équiprobable augmente considérablement la variance par rapport à un biaisage avec une maxwellienne ce qui justifie l'utilisation de la méthode de Cheremissin.

Les paramètres δ_α et δ_n doivent être ajustés en fonction de la définition que l'on veut avoir des distributions G_α et G_n . Le meilleur choix est de prendre ces paramètres égaux environ au δ à partir duquel les distributions G_α et G_n s'annulent.

Les derniers paramètres numériques importants sont le nombre de mailles $2N_\alpha + 1$ et $2N_n + 1$ de la droite des vitesses des particules α et des neutrons. On peut a priori penser qu'en augmentant ces paramètres (à nombre de tirages constant), on améliore les résultats. En fait, il ne sert à rien de prendre N_α et N_n supérieurs à environ 30 (avec $N_{tirages} = 10^5$): la qualité des résultats reste sensiblement constante. Mais surtout on constate que, du fait de la variance, lorsque N_α et N_n

deviennent importants, les distributions G_α et G_n deviennent très chaotiques, les grandeurs intégrées restant quant à elles similaires à celles obtenues en prenant $N_\alpha = 30$. La figure 23 confirme cette dernière remarque pour le cas où $N_\alpha = 100$.

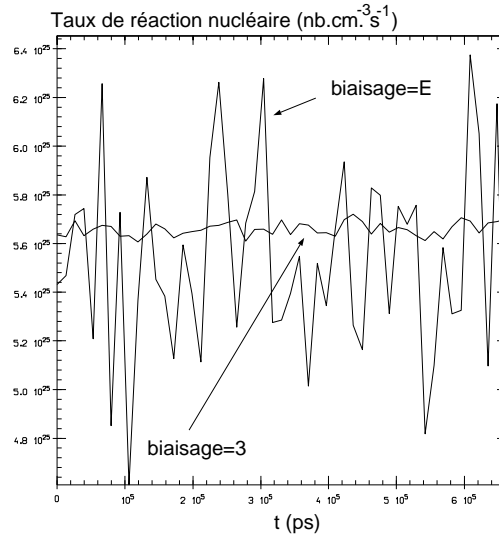


Fig. 22 : $\langle \sigma_{DT} \cdot v_r \rangle$ pour *biasage* = 3 et E

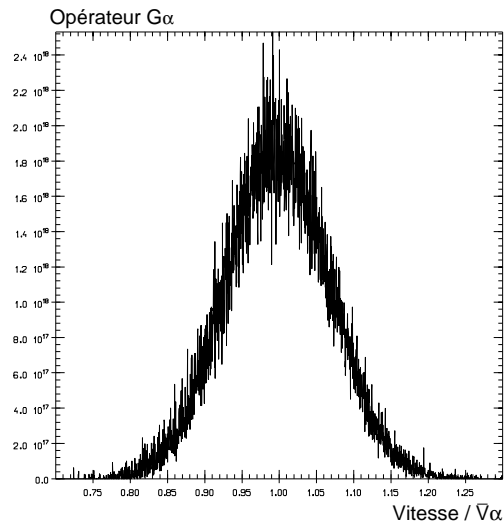


Fig. 23 : G_α pour $N_\alpha = 100$ et $N_{tirages} = 10^5$

Chapitre 5

Bilan d'énergie et évaluation des opérateurs P_D et P_T à l'équilibre thermodynamique local

Dans ce chapitre, l'on étudie avec précision sur le plan théorique et numérique le bilan d'énergie de la réaction de fusion entre les ions deutérium et tritium. On constatera ainsi que le dépôt d'énergie sur les produits de fusion dû à l'agitation thermique du milieu ne peut être assimilé au $3T$ classique que l'on soit ou non à l'équilibre thermodynamique local.

5.1 Bilan d'énergie à l'équilibre thermodynamique

On voudrait étudier ici d'un point de vue théorique le bilan en énergie de la réaction c'est à dire évaluer les énergies E_α et E_n définies par

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{\int \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 G_\alpha d\vec{v}_\alpha}{\int G_\alpha d\vec{v}_\alpha} = \frac{1}{\tau} \int \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 G_\alpha d\vec{v}_\alpha, \\ E_n = \frac{\int \frac{1}{2} m_n v_n^2 G_n d\vec{v}_n}{\int G_n d\vec{v}_n} = \frac{1}{\tau} \int \frac{1}{2} m_n v_n^2 G_n d\vec{v}_n \end{cases}$$

que l'on réécrit en fonction de f_D et f_T de la façon suivante

$$\begin{cases} E_\alpha = \frac{1}{\tau} \int \int \int \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 f_D(v_D) f_T(v_T) q_{DT} d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega}, \\ E_n = \frac{1}{\tau} \int \int \int \frac{1}{2} m_n v_n^2 f_D(v_D) f_T(v_T) q_{DT} d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega}, \end{cases}$$

q_{DT} étant le noyau de collision défini par

$$q_{DT} = |\vec{v}_D - \vec{v}_T| \cdot \sigma_{DT}(|\vec{v}_D - \vec{v}_T|).$$

E_α et E_n sont donc les énergies les plus probables de création respectivement des particules α et des neutrons. $\tau \cdot (E_\alpha + E_n)$ représente la puissance nucléaire volumique dégagée par la réaction nucléaire.

On constate donc que calculer $E_\alpha + E_n$ revient à évaluer la moyenne de $\frac{1}{2}m_D v_D^2 + \frac{1}{2}m_T v_T^2 + Q$ avec la pseudo distribution $\tilde{f} = q_{DT} f_D f_T$ car l'on a la relation microscopique suivante caractérisant le transfert d'énergie lors d'un choc nucléaire

$$\frac{1}{2}m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2}m_n v_n^2 = \frac{1}{2}m_D v_D^2 + \frac{1}{2}m_T v_T^2 + Q.$$

Donc, on a

$$E_\alpha + E_n = \langle \frac{1}{2}m_D v_D^2 \rangle_{\tilde{f}} + \langle \frac{1}{2}m_T v_T^2 \rangle_{\tilde{f}} + Q.$$

On pose maintenant

$$\varepsilon_D = \langle \frac{1}{2}m_D v_D^2 \rangle_{\tilde{f}} \quad (5.1)$$

et

$$\varepsilon_T = \langle \frac{1}{2}m_T v_T^2 \rangle_{\tilde{f}}. \quad (5.2)$$

On voudrait avoir une estimation assez précise de ε_D et de ε_T . Pour cela, on fait l'hypothèse suivante :

f_D et f_T sont des maxwelliennes centrées de même température.

En faisant alors le changement de variable

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_g = \frac{m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T}{m_D + m_T}, \\ \vec{V}_r = \vec{v}_D - \vec{v}_T, \\ \mu_{DT} = m_D m_T / (m_D + m_T), \\ M_g = m_D + m_T \end{array} \right.$$

et en passant en coordonnées sphériques, on obtient

$$\varepsilon_D = \frac{m_D}{M_g} \cdot \frac{3}{2}T + \frac{1}{2}m_D \left(\frac{m_T}{M_g} \right)^2 \cdot \frac{\int_0^{+\infty} q_{DT} V_r^4 \exp\left(-\frac{\mu_{DT} V_r^2}{2T}\right) dV_r}{\int_0^{+\infty} q_{DT} \exp\left(-\frac{\mu_{DT} V_r^2}{2T}\right) dV_r}.$$

Puis avec le changement de variable $E = \frac{1}{2}\mu_{DT}V_r^2$, on trouve

$$\varepsilon_D = \frac{m_D}{M_g} \cdot \frac{3}{2}T + \frac{m_T}{M_g} \frac{\int_0^{+\infty} E^2 \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}{\int_0^{+\infty} E \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}.$$

On a donc en définitive

$$E_\alpha + E_n = Q + \frac{3}{2}T + \frac{\int_0^{+\infty} E^2 \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}{\int_0^{+\infty} E \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}.$$

On voit ainsi que l'apport d'énergie aux produits de fusion dû à l'agitation thermique se décompose en deux termes à savoir

$$\frac{3}{2}T$$

et

$$\xi = \frac{\int_0^{+\infty} E^2 \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}{\int_0^{+\infty} E \sigma_{DT}(E) \exp\left(-\frac{E}{T}\right) dE}.$$

On posera par la suite

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta E_{\alpha,n} = \frac{3}{2}T + \xi = \delta E_\alpha + \delta E_n, \\ \delta E_\alpha \text{ la partie de } \delta E_{\alpha,n} \text{ qui se dépose sur les particules } \alpha, \\ \delta E_n \text{ la partie de } \delta E_{\alpha,n} \text{ qui se dépose sur les neutrons.} \end{array} \right.$$

Le premier terme intervenant dans $\delta E_{\alpha,n}$ est dû uniquement à l'agitation thermique des particules de deutérium et de tritium. Par contre le second terme noté ξ , tout en étant aussi fonction de l'agitation thermique via la température T , dépend directement des réactions nucléaires par l'intermédiaire de la section efficace nucléaire.

On serait tenté d'assimiler ξ à $\frac{3}{2}T$ - car l'on se dit qu'en tout l'énergie thermique par couple de particules de deutérium-tritium est $3T$ - pour ensuite déposer en plus de l'énergie due au terme Q l'énergie thermique $\frac{3}{2}T$ à la fois sur la particule α et sur le neutron (équirépartition de l'énergie d'agitation thermique $3T$ sur les produits de fusion). Cependant, justement à cause de la dépendance de ξ en σ_{DT} , il n'y a aucune raison pour que $\xi = \frac{3}{2}T$ et pour qu'il y ait équirépartition de cet excédent d'énergie sur les produits de fusion.

Cependant, il y a un cas très simple où l'on a sans ambiguïté $\xi = \frac{3}{2}T$. C'est le cas en effet lorsque le noyau de collision nucléaire q_{DT} est pris constant ce qui n'a bien-sûr aucune réalité physique ici vu la forme de la section efficace nucléaire. Dans ce cas, on a en effet

$$q_{DT} = C^{ste} \implies \sqrt{E} \cdot \sigma_{DT}(E) = C^{ste}$$

et on obtient alors une formulation simplifiée de ξ à savoir

$$\xi = T \cdot \frac{\Gamma(5/2, 0)}{\Gamma(3/2, 0)}$$

où Γ est la fonction Gamma classique. Or les propriétés de la fonction Γ font que $\Gamma(5/2, 0)/\Gamma(3/2, 0) = 3/2$ ce qui implique que

$$q_{DT} = C^{ste} \implies \xi = \frac{3}{2}T = \varepsilon_D = \varepsilon_T.$$

Remarquons que l'on a immédiatement ce résultat dès le début car lorsque $q_{DT} = C^{ste}$, on a $\tilde{f} = f_D f_T$ ce qui entraîne trivialement que $\xi = \frac{3}{2}T$.

Le cas d'un noyau de collision constant n'ayant aucune réalité physique dans le cas des réactions nucléaires, on voudrait évaluer ξ dans le cas où q_{DT} est le noyau réel. Pour ce faire, on utilise la formulation de σ_{DT} donnée par (1.8) et, à l'aide du logiciel *MAPLE*, l'on évalue ξ . La figure 24 visualise $\frac{3}{2}T + \xi(T)$ pour $1 \text{ KeV} < T < 10 \text{ KeV}$.

On constate que dans cette zone de température, on a $\xi \gg \frac{3}{2}T$: pour $T = 1 \text{ KeV}$ et $T = 10 \text{ KeV}$, on obtient respectivement $\frac{3}{2}T + \xi(T) \simeq 9 \text{ KeV}$ et $\frac{3}{2}T + \xi(T) \simeq 55 \text{ KeV}$. On ne peut donc pas assimiler ξ à $\frac{3}{2}T$. Finalement, on peut affirmer que :

Si G_α et G_n peuvent être assimilées à des Dirac en énergie centrés respectivement en \overline{E}_α et en \overline{E}_n et que l'on souhaite corriger ces Dirac pour tenir compte de l'agitation thermique du milieu, ce ne sera certainement pas des Dirac centrés en $\overline{E}_\alpha + \frac{3}{2}T$ et en $\overline{E}_n + \frac{3}{2}T$.

Les résultats numériques confirmeront ces tendances et montreront qu'il y a de plus un fort découplage entre les produits de fusion dans la distribution de l'énergie dûe à l'agitation thermique.

Remarque Il faut souligner ici que H. Brysk était arrivé à des conclusions similaires. On pourra consulter à ce sujet la référence [62].

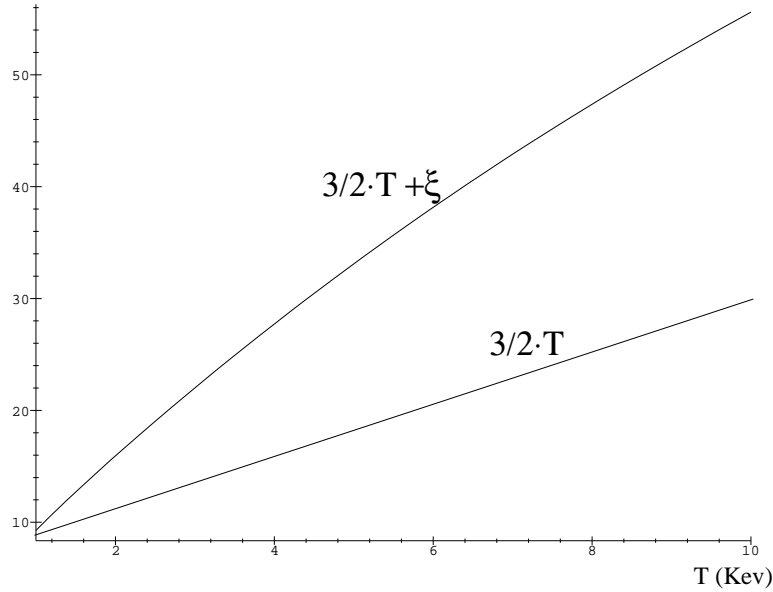


Fig. 24

5.2 Étude théorique de l'influence des opérateurs de perte P_D et P_T sur la température du milieu

Pour comprendre d'un point de vue physique les conclusions du paragraphe précédent, il est intéressant d'étudier théoriquement dans un cas simplifié les solutions f_D et f_T du système

$$\begin{cases} \partial_t f_D = -P_D(f_D, f_T), \\ \partial_t f_T = -P_T(f_D, f_T). \end{cases}$$

Les distributions initiales f_D^0 et f_T^0 sont supposées être des maxwelliennes centrées ($U_D^0 = U_T^0 = 0$) et de même densité initiale ($N_D^0 = N_T^0 = N_0$).

5.2.1 Premier cas

On prend le noyau

$$q_{DT} = q_0 \cdot \prod_{\lambda}^D(v_D) \cdot \prod_{\lambda}^T(v_T)$$

avec

$$\begin{cases} \Pi_\lambda^D(v_D) = 1 \text{ si } |v_D| \leq \lambda \cdot \bar{V} \\ \quad = 0 \text{ sinon,} \\ \Pi_\lambda^T(v_T) = 1 \text{ si } |v_T| \leq \lambda \cdot \bar{V} \\ \quad = 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

où

$$\bar{V} = \max\{V_{D,th}, V_{T,th}\} \quad \text{et} \quad \lambda \in \mathbb{R}_*^+,$$

$\lambda = 0$ correspondant au cas trivial où $P_D = P_T = 0$ (par un souci de simplification, on se place dans un espace des vitesses à une dimension).

Prendre un noyau de ce type revient à favoriser les particules de deutérium et de tritium qui vont fusionner se trouvant dans le cœur des distributions initiales f_D^0 et f_T^0 .

f_D et f_T sont alors solutions du système différentiel

$$\begin{cases} \partial_t f_D = -q_0 \Pi_\lambda^D(v_D) f_D \cdot \int \Pi_\lambda^T(v_T) f_T dv_T, \\ \partial_t f_T = -q_0 \Pi_\lambda^T(v_T) f_T \cdot \int \Pi_\lambda^D(v_D) f_D dv_D. \end{cases}$$

On ne peut bien-sûr intégrer aisément ce système. Par contre on peut chercher à évaluer $(\partial_t T_D)_{t=0}$ et $(\partial_t T_T)_{t=0}$ car l'on connaît f_D^0 et f_T^0 . On obtient

$$\begin{cases} (\partial_t f_D)_{t=0} = -q_0 \alpha_T(\lambda) N_0 \Pi_\lambda^D(v_D) f_D^0, \\ (\partial_t f_T)_{t=0} = -q_0 \alpha_D(\lambda) N_0 \Pi_\lambda^T(v_T) f_T^0 \end{cases}$$

où on a posé

$$\alpha_D(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda \bar{V}/V_{D,th}} \exp(-u^2) du = \text{erf}(\lambda \bar{V}/V_{D,th})$$

(idem pour α_T) ce qui permet d'obtenir

$$\begin{cases} (\partial_t N_D)_{t=0} = (\partial_t N_T)_{t=0} = -q_0 \alpha_D \alpha_T N_0^2, \\ (\partial_t N_D U_D)_{t=0} = (\partial_t N_T U_D)_{t=0} = 0 \end{cases}$$

d'où

$$(\partial_t U_D)_{t=0} = (\partial_t U_T)_{t=0} = 0$$

avec l'hypothèse $U_D^0 = U_T^0 = 0$ ce qui entraîne

$$\left(\int \frac{1}{2} m_D v_D^2 \partial_t f_D dv_D \right)_{t=0} = \left(\partial_t N_D \frac{T_D}{2} \right)_{t=0} = \frac{T_D^0}{2} (\partial_t N_D)_{t=0} + N_0 \left(\partial_t \frac{T_D}{2} \right)_{t=0}.$$

Comme on a de plus

$$\left(\int \frac{1}{2} m_D v_D^2 \partial_t f_D dv_D \right)_{t=0} = -q_0 N_0^2 \alpha_T(\lambda) \beta_D(\lambda) \frac{T_D^0}{2}$$

où l'on a posé

$$\beta_D(\lambda) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda \bar{V}/V_{D,th}} u^2 \exp(-u^2) du$$

(idem pour β_T), on obtient finalement les relations

$$\begin{cases} \left(\partial_t \frac{T_D}{2} \right)_{t=0} = q_0 N_0 \alpha_T (\alpha_D - \beta_D) \frac{T_D^0}{2}, \\ \left(\partial_t \frac{T_T}{2} \right)_{t=0} = q_0 N_0 \alpha_D (\alpha_T - \beta_T) \frac{T_T^0}{2}. \end{cases}$$

Or, on vérifie que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_*^+ : 0 < \beta(\lambda) < \alpha(\lambda) < 1.$$

Donc

$$\left(\partial_t \frac{T_D}{2} \right)_{t=0} > 0$$

et

$$\left(\partial_t \frac{T_T}{2} \right)_{t=0} > 0.$$

On montre de même que

$$\begin{cases} (\varepsilon_D)_{t=0} = \frac{\beta_D(\lambda)}{\alpha_D(\lambda)} \cdot \frac{T_D^0}{2}, \\ (\varepsilon_T)_{t=0} = \frac{\beta_T(\lambda)}{\alpha_T(\lambda)} \cdot \frac{T_T^0}{2} \end{cases}$$

où ε_D et ε_T sont définis par (5.1) et par (5.2) ce qui entraîne que

$$(\varepsilon_D)_{t=0} < \frac{T_D^0}{2}$$

et que

$$(\varepsilon_T)_{t=0} < \frac{T_T^0}{2}.$$

Finalement, on a donc

$$\begin{cases} \left(\partial_t \frac{T_D}{2} \right)_{t=0} > 0, \\ \left(\partial_t \frac{T_T}{2} \right)_{t=0} > 0, \\ (\varepsilon_D)_{t=0} < \frac{T_D^0}{2}, \\ (\varepsilon_T)_{t=0} < \frac{T_T^0}{2}. \end{cases}$$

5.2.2 Deuxième cas

On cherche maintenant à favoriser les particules dans les queues de maxwelliennes. Pour cela, il suffit de reprendre les résultats du cas précédent en remplaçant α par $(1 - \alpha)$ et β par $(1 - \beta)$. On obtient alors des résultats opposés à savoir

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\partial_t \frac{T_D}{2} \right)_{t=0} < 0, \\ \left(\partial_t \frac{T_T}{2} \right)_{t=0} < 0, \\ (\varepsilon_D)_{t=0} > \frac{T_D^0}{2}, \\ (\varepsilon_T)_{t=0} > \frac{T_T^0}{2}. \end{array} \right.$$

Ces résultats sont bien-sûr transposables au cas tridimensionnel en remplaçant $\frac{T^0}{2}$ par $\frac{3}{2}T^0$.

5.2.3 Résumé

On peut donc dire que lorsque ce sont surtout les particules dans les queues des maxwelliennes de deutérium et de tritium qui fusionnent entre elles, les opérateurs P_D et P_T entraînent un refroidissement du milieu et l'énergie $\delta E_{\alpha,n}$ (i.e. $\varepsilon_D + \varepsilon_T$) est supérieure à $3T$ (avec ici $T_D = T_T$).

Et inversement, lorsque ce sont surtout les particules dans le cœur des maxwelliennes de deutérium et de tritium qui fusionnent entre elles, les opérateurs P_D et P_T entraînent un réchauffement du milieu et l'énergie $\delta E_{\alpha,n}$ est inférieure à $3T$.

Bien-sûr, toute cette étude a été effectuée avec un noyau de collision différent du noyau de collision réel mais d'un point de vue qualitatif, ces résultats peuvent être utilisés pour comprendre les résultats numériques de ce chapitre.

5.3 Étude numérique

5.3.1 Évaluation de δE_α , δE_n et $\delta E_{\alpha,n}$ à l'équilibre thermodynamique

D'après les tableaux 3 et 4, on peut évaluer l'énergie

$$\delta E_{\alpha,n} = \delta E_\alpha + \delta E_n = \frac{3}{2}T + \xi(T)$$

avec

$$\begin{cases} \delta E_\alpha = E_\alpha - 3.52 \text{ Mev}, \\ \delta E_n = E_n - 14.08 \text{ Mev}. \end{cases}$$

Le tableau 6 rassemble ces grandeurs auquel on a ajouté la valeur de $\delta E_{\alpha,n}$ évaluée avec *MAPLE*:

| Température | δE_α | δE_n | $\delta E_{\alpha,n}$ | $3T$ | $(\delta E_{\alpha,n})_{MAPLE}$ |
|-----------------------|-------------------|--------------|-----------------------|------|---------------------------------|
| $T = 1 \text{ KeV}$ | 2.92 | 6.72 | 9.64 | 3 | 9.28 |
| $T = 2 \text{ KeV}$ | 4.94 | 10.88 | 15.82 | 6 | 15.90 |
| $T = 5 \text{ KeV}$ | 10.82 | 21.56 | 32.38 | 15 | 32.97 |
| $T = 10 \text{ KeV}$ | 19.66 | 34.90 | 54.56 | 30 | 55.35 |
| $T = 20 \text{ KeV}$ | 35.45 | 52.48 | 87.93 | 60 | 88.12 |
| $T = 50 \text{ KeV}$ | 77.86 | 85.50 | 163.36 | 150 | 162.59 |
| $T = 100 \text{ KeV}$ | 148.81 | 132.05 | 280.06 | 300 | 272.24 |

Tableau 6

(Toutes ces énergies sont exprimées en *KeV*.)

On constate que l'on a aux faibles températures ($T < 50 \text{ KeV}$)

$$\begin{cases} \delta E_n > \delta E_\alpha > \frac{3}{2}T, \\ \delta E_{\alpha,n} > 3T \end{cases}$$

et qu'aux fortes températures ($T > 50 \text{ KeV}$), δE_α et δE_n prennent des valeurs inférieures à $\frac{3}{2}T$, le fort découplage entre δE_α et δE_n s'atténuant de manière très importante.

On peut donc dire ici que si l'on veut absolument confondre les opérateurs de création G_α et G_n avec des Dirac en énergie centrés respectivement en E_α et en E_n par un souci de simplification (dans un code fluide par exemple), il faut alors respectivement prendre

$$E_\alpha = 3.52 \text{ Mev} + \delta E_\alpha$$

et

$$E_n = 14.08 \text{ Mev} + \delta E_n.$$

5.3.2 Calcul des opérateurs de perte P_D et P_T

Calcul à l'équilibre thermodynamique On a vérifié numériquement que $\delta E_{\alpha,n} > 3T$ pour $T = 1 \text{ KeV}$ et que $\delta E_{\alpha,n} < 3T$ pour $T = 100 \text{ KeV}$: voir le tableau 6.

D'autre part, on vérifie aussi numériquement que T^* (i.e. la température du milieu à la fin du pas de temps) est inférieure à T^0 pour $T^0 = 1 \text{ KeV}$ et qu'au contraire T^* est supérieure à T^0 pour $T^0 = 100 \text{ KeV}$. En se basant sur les résultats théoriques obtenus précédemment, on peut donc affirmer que :

Plus la température du milieu augmente, moins les particules en queue de maxwellienne réagissent.

Ceci est par ailleurs parfaitement clair si l'on visualise l'opérateur de perte P_D : les figures 25 et 26 représentent P_D respectivement pour $T = 1 \text{ KeV}$ et pour $T = 100 \text{ KeV}$. On peut ajouter que c'est la décroissance de la section efficace σ_{DT} aux fortes énergies (voir la figure 1) qui est à l'origine de ce comportement, phénomène déjà mis en évidence sur les figures 3 et 4 ainsi que sur les figures 19 à 21.

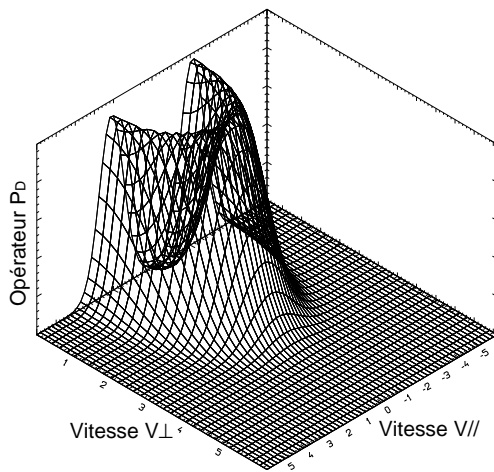


Fig. 25: P_D pour $T=1 \text{ KeV}$, E.T.L.

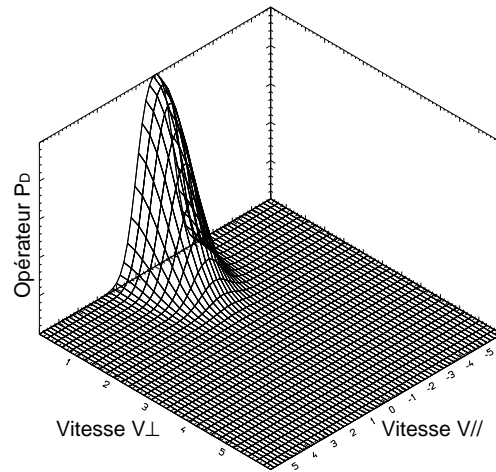


Fig. 26: P_D pour $T=100 \text{ KeV}$, E.T.L.

Cette constatation peut avoir de l'importance dans le cadre de la *Fusion par Confinement Inertiel* puisque, étant donnée la petitesse du rayon de la sphère de deutérium-tritium notamment à la fin de la phase d'implosion, le libre parcours moyen des particules chaudes peut ne pas être négligeable par rapport à ce rayon ce qui risque d'engendrer des fuites de particules chaudes de deutérium et de tritium et donc faire baisser le taux de réaction nucléaire (cf. [63] et [64]) et ainsi en partie expliquer la différence entre le nombre de neutrons mesuré lors des expériences en laboratoire et le nombre de neutrons prédit par les simulations numériques avec des codes fluides. Mais, d'après les résultats présentés dans ce

paragraphe, ce phénomène semble ne pouvoir avoir de l'importance qu'aux faibles températures puisqu'ensuite, *notamment s'il y a ignition*, ce sont surtout les particules froides qui vont réagir, la température étant alors de l'ordre de 100 *KeV*.

Calcul hors équilibre thermodynamique On utilise maintenant (4.1) pour définir les distributions f_D et f_T .

Les figures 27 et 28 donnent l'allure de P_D pour $T = 1 \text{ KeV}$ et $T = 100 \text{ KeV}$. On constate que l'allure de P_D est complètement différente par rapport au cas

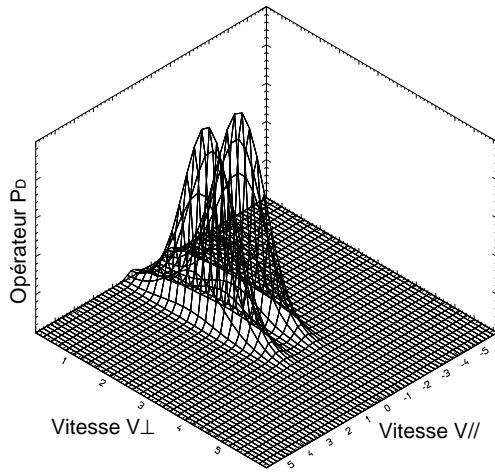


Fig. 27 : P_D pour $T=1 \text{ KeV}$, H.E.T.L.

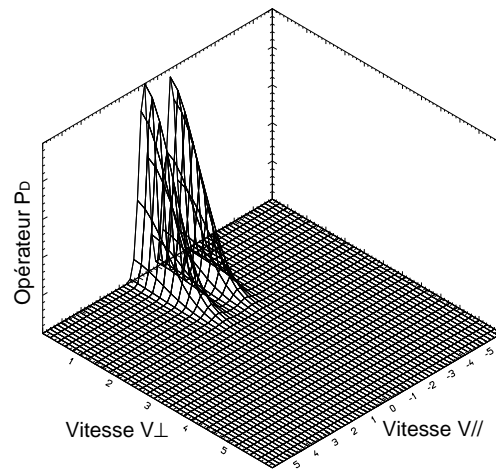


Fig. 28 : P_D pour $T=100 \text{ KeV}$, H.E.T.L.

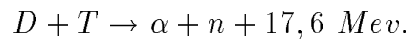
précédent (voir les figures 25 et 26).

Paramètres numériques :

- *biaisage* = 3 pour $T = 1 \text{ KeV}$ et *biaisage* = 1 pour $T = 100 \text{ KeV}$,
- $N_{tirages} = 10^4$,
- $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$.

Conclusion de la troisième partie

Ce travail montre donc qu'il est possible d'évaluer dans un temps de calcul raisonnable par une méthode de type Monte-Carlo les distributions G_α et G_n des particules α et des neutrons issus de la réaction de fusion thermonucléaire



A titre indicatif, on retiendra que le temps de calcul par itération sur CRAY YMP pour évaluer à la fois les distributions G_α et G_n est de l'ordre de 6 secondes (avec 10^5 tirages aléatoires et $N_\alpha = N_n = 30$) alors que le temps de calcul pour résoudre les équations de Vlasov-Fokker-Planck est lui aussi d'environ 6 secondes (calcul avec deux espèces sur une grille en vitesse $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$), le temps de calcul pour évaluer le taux de réaction nucléaire étant quant à lui négligeable. Le temps de calcul pour évaluer les opérateurs P_D et P_T à la fois est de l'ordre de 40 secondes en utilisant 10^4 tirages aléatoires (avec aussi une grille en vitesse $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 64 \times 32$). Ce temps de calcul est beaucoup plus important que les précédents ce qui sous-entend qu'il ne faudra procéder à un calcul de P_D et de P_T que si le nombre de neutrons créés n'est pas négligeable devant le nombre initial de deutérium et de tritium.

On a ainsi pu mettre en évidence l'existence d'effets cinétiques entraînant une déviation de la valeur réelle du taux de réaction nucléaire par rapport à celle donnée par les formules standards. La question est de savoir jusqu'à quel point de tels effets cinétiques sont perceptibles dans les expériences de *Fusion par Confinement Inertiel*.

On a aussi pu constater que, si en première approximation l'opérateur de création G_n peut être considéré comme étant un Dirac en énergie, il n'en est peut-être pas de même pour les particules α , celles-ci subissant une dispersion nettement plus importante que les neutrons ce qui engendre une température de création T_α non négligeable devant la température T du milieu fusible. On peut alors se demander si cette dispersion a une influence notable sur la valeur du dépôt d'énergie des particules α sur le plasma.

D'autre part, un lissage des distributions G_α et G_n est envisageable dans le cas où les distributions f_D et f_T sont à l'équilibre thermodynamique local, le cas hors équilibre nécessitant des études complémentaires.

En outre, on a pu retrouver à l'équilibre thermodynamique la formule de Brysk, formule utilisée dans les diagnostics expérimentaux de neutronique pour évaluer la température du milieu fusible à partir du spectre d'émission en énergie des neutrons.

Il a aussi été montré qu'à l'équilibre thermodynamique, l'excédent d'énergie dû à l'agitation thermique des ions deutérium et tritium déposé à la fois sur les particules α et sur les neutrons n'est pas égal à $\frac{3}{2}T$ mais est bien supérieur à cette valeur aux faibles températures, le dépôt sur les particules α et sur les neutrons étant par ailleurs différent. Il faut souligner que ce phénomène s'atténue aux fortes températures (i.e. pour $T > 50 \text{ KeV}$), les particules de deutérium et de tritium dans les queues des maxwelliennes réagissant moins lorsque la température du milieu augmente.

Annexe A

Cinématique et calcul du jacobien

A.1 Cinématique de la réaction

L'hypothèse essentielle est qu'au cours du choc, le système (D, T) puis (α, n) reste isolé (hypothèse de chocs binaires). La quantité de mouvement du centre de gravité est donc conservée ainsi que l'énergie totale constituée de l'énergie cinétique et de l'énergie au repos du couple de particules en question. On a donc le système d'équations

$$m_g \vec{v}_g = (m_g \vec{v}_g)^* \iff m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T = m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_n \vec{v}_n,$$

$$\frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_T v_T^2 + (m_D + m_T) C^2 = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 + (m_\alpha + m_n) C^2$$

où C est la vitesse de la lumière. On obtient donc

$$\begin{cases} m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T = m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_n \vec{v}_n, \\ \frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_T v_T^2 + Q = \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 \end{cases}$$

en posant

$$Q = (m_D + m_T - m_\alpha - m_n) C^2 = 17.6 \text{ Mev}.$$

Or, on montre facilement qu'on a

$$\frac{1}{2} m_D v_D^2 + \frac{1}{2} m_T v_T^2 = (m_D + m_T) v_g^2 + \mu_{DT} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2,$$

$$\frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 + \frac{1}{2} m_n v_n^2 = (m_\alpha + m_n) (v_g^*)^2 + \mu_{\alpha n} |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2$$

avec

$$\mu_{DT} = \frac{m_D m_T}{m_D + m_T} = \frac{6}{5} m_p$$

et

$$\mu_{\alpha n} = \frac{m_\alpha m_n}{m_\alpha + m_n} = \frac{4}{5} m_p,$$

m_p étant la masse du proton. Donc, la conservation de l'énergie totale peut être réécrite de la façon suivante

$$\mu_{\alpha n} |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2 = \mu_{DT} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2 + 2Q - \frac{\Delta M (m_g \vec{v}_g)^2}{(m_D + m_T)(m_\alpha + m_n)}.$$

Comme $\Delta M/m_p \simeq 0.02$ où m_p est la masse du proton, on peut considérer que la vitesse du centre de masse est la même avant et après le choc et que

$$\frac{\Delta M (m_g \vec{v}_g)^2}{(m_D + m_T)(m_\alpha + m_n)} \ll \mu_{DT} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2$$

ce qui fait que la cinématique de la réaction peut être réécrite comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_\alpha = \vec{v}_g + \vec{\Omega} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_\alpha} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2} = \vec{v}_\alpha(v_D, v_T, \Omega), \\ \vec{v}_n = \vec{v}_g - \vec{\Omega} \frac{\mu_{\alpha n}}{m_n} \sqrt{\zeta^2 + \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2} = \vec{v}_n(v_D, v_T, \Omega), \\ \vec{v}_g = (m_D \vec{v}_D + m_T \vec{v}_T) / (m_D + m_T), \\ \zeta^2 = 2Q / \mu_{\alpha n}, \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

système qui est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_D = \vec{v}_g + \vec{\omega} \frac{\mu_{DT}}{m_D} \sqrt{\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} (|\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2 - \zeta^2)} = \vec{v}_D(v_\alpha, v_n, \omega), \\ \vec{v}_T = \vec{v}_g - \vec{\omega} \frac{\mu_{DT}}{m_T} \sqrt{\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} (|\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2 - \zeta^2)} = \vec{v}_T(v_\alpha, v_n, \omega), \end{array} \right.$$

$\vec{\Omega}$ et $\vec{\omega}$ étant des vecteurs arbitraires de la sphère unité S^2 .

A.2 Calcul du jacobien J

On pose

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{v}_D - \vec{v}_T = |v_r| \vec{\omega}, \\ \vec{v}_r^* = \vec{v}_\alpha - \vec{v}_n = |v_r^*| \vec{\Omega}. \end{array} \right.$$

On a donc

$$\left| \frac{\partial \vec{v}_g \partial \vec{v}_r}{\partial \vec{v}_D \partial \vec{v}_T} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\mu_{DT}}{m_T} \vec{\bar{I}} & \frac{\mu_{DT}}{m_D} \vec{\bar{I}} \\ \vec{\bar{I}} & -\vec{\bar{I}} \end{array} \right| = 1$$

avec

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on a

$$\left| \frac{\partial \vec{v}_g^* \partial \vec{v}_r^*}{\partial \vec{v}_\alpha \partial \vec{v}_n} \right| = 1.$$

Donc

$$\begin{cases} d\vec{v}_g d\vec{v}_r = d\vec{v}_D d\vec{v}_T, \\ d\vec{v}_g^* d\vec{v}_r^* = d\vec{v}_g d\vec{v}_r^* = d\vec{v}_\alpha d\vec{v}_n. \end{cases}$$

D'autre part, on peut écrire que

$$d\vec{v}_r = |v_r|^2 d|v_r| d\vec{\omega}$$

et que

$$d\vec{v}_r^* = |v_r^*|^2 d|v_r^*| d\vec{\Omega}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} d\vec{v}_D d\vec{v}_T d\vec{\Omega} = d\vec{v}_g |v_r|^2 d|v_r| d\vec{\omega} d\vec{\Omega}, \\ d\vec{v}_\alpha d\vec{v}_n d\vec{\omega} = d\vec{v}_g |v_r^*|^2 d|v_r^*| d\vec{\omega} d\vec{\Omega}. \end{cases}$$

Finalement, on obtient

$$J \equiv \left| \frac{\partial(v_D, v_T, \Omega)}{\partial(v_\alpha, v_n, \omega)} \right| = \frac{|v_r|^2}{|v_r^*|^2} \cdot \frac{d|v_r|}{d|v_r^*|}.$$

Or, on a

$$|v_r^*|^2 = \frac{\mu_{DT}}{\mu_{\alpha n}} \cdot |v_r|^2 + \zeta^2$$

en utilisant (A.1). D'où

$$\frac{d|v_r|}{d|v_r^*|} = \frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \cdot \frac{|v_r^*|}{|v_r|}$$

et donc

$$J = \frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \cdot \frac{|v_r|}{|v_r^*|}$$

ce qui entraîne que

$$J = \left(\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \right)^{3/2} \cdot \sqrt{1 - \zeta^2 / |\vec{v}_\alpha - \vec{v}_n|^2} = \left(\frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \right)^{3/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\mu_{\alpha n}}{\mu_{DT}} \zeta^2 / |\vec{v}_D - \vec{v}_T|^2}}.$$

Annexe B

Majoration de la dispersion des particules α et des neutrons autour de leur vitesse de création standard

On a vu au deuxième chapitre que les vitesses de création standards \overline{V}_α et \overline{V}_n étant largement supérieures à la vitesse thermique du deutérium et du tritium, on pouvait considérer les opérateurs de création G_α et G_n comme étant proches de Dirac en énergie centrés respectivement en $\frac{1}{2}m_\alpha\overline{V}_\alpha^2$ et en $\frac{1}{2}m_n\overline{V}_n^2$: voir la proposition 2.1.

On souhaiterait savoir dans quelle mesure cette approximation est exacte lorsque l'on tient compte de l'agitation thermique du milieu c'est à dire lorsque ε_α et ε_n sont non nuls (les définitions précises des quantités ε_α et ε_n sont explicitées au deuxième chapitre).

Une première approche du problème serait tout d'abord d'estimer la probabilité qu'a une particule d'être créée avec une vitesse plus ou moins éloignée de la vitesse de création standard. Pour cela on définit des fonctions $K(\delta)$ (qu'on appelle ici dispersion) représentant la probabilité au cours d'un pas de temps dt infiniment petit qu'a une particule de se trouver en dehors de la sphère épaissie c'est à dire de la sphère de rayon 1 et d'épaisseur 2δ (en considérant ici que les vitesses ont été normalisées par la vitesse de création standard).

Le nombre de particules créées en dehors de la sphère épaissie au cours d'un pas de temps dt est donc $\tau \cdot dtK(\delta)$, τ étant le taux de réaction nucléaire. Bien que grossière, une approche théorique est envisageable.

Soit donc $\delta_\alpha \geq 0$. On définit la dispersion $K_\alpha(\delta_\alpha)$ des particules α autour de la sphère de rayon \overline{V}_α (ou de rayon unité si $\overline{v}_\alpha^\rightarrow$ est adimensionnalisée par \overline{V}_α) comme étant la probabilité pour qu'une particule α soit créée avec une vitesse dont la norme est supérieure à $\overline{V}_\alpha \cdot (1 + \delta_\alpha)$ ou inférieure à $\overline{V}_\alpha \cdot (1 - \delta_\alpha)$ (ou supérieure à $(1 + \delta_\alpha)$ ou inférieure à $(1 - \delta_\alpha)$ si $\overline{v}_\alpha^\rightarrow$ est adimensionnalisée par \overline{V}_α).

De même, on définit la dispersion à droite $K_\alpha^D(\delta_\alpha)$ (respectivement $K_\alpha^G(\delta_\alpha)$) comme étant la probabilité pour qu'une particule α soit créée avec une vitesse dont la norme est supérieure à $\overline{V}_\alpha \cdot (1 + \delta_\alpha)$ (respectivement inférieure à $\overline{V}_\alpha \cdot (1 - \delta_\alpha)$).

On a bien-sûr les propriétés

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\alpha^G(\delta_\alpha) + K_\alpha^D(\delta_\alpha) = K_\alpha(\delta_\alpha), \\ 0 \leq K_\alpha^G(\delta_\alpha), K_\alpha^D(\delta_\alpha) \leq K_\alpha(\delta_\alpha), \\ K_\alpha(+\infty), K_\alpha^G(+\infty), K_\alpha^D(+\infty) = 0, \\ K_\alpha(0) = 1. \end{array} \right.$$

K_α , K_α^G et K_α^D peuvent formellement être définies à partir de l'opérateur G_α par

$$\left\{ \begin{array}{l} K_\alpha(\delta_\alpha) = \frac{1}{\tau} \int_{|1-|\overline{v}_\alpha^\rightarrow|| \geq \delta_\alpha} G_\alpha d\overline{v}_\alpha^\rightarrow, \\ K_\alpha^G(\delta_\alpha) = \frac{1}{\tau} \int_{(1-|\overline{v}_\alpha^\rightarrow|) \geq \delta_\alpha} G_\alpha d\overline{v}_\alpha^\rightarrow, \\ K_\alpha^D(\delta_\alpha) = \frac{1}{\tau} \int_{(|\overline{v}_\alpha^\rightarrow|-1) \geq \delta_\alpha} G_\alpha d\overline{v}_\alpha^\rightarrow \end{array} \right.$$

où

$$\overline{v}_\alpha^\rightarrow' = \frac{\overline{v}_\alpha^\rightarrow}{\overline{V}_\alpha}.$$

Les définitions, propriétés et expressions de $K_n(\delta_n)$, $K_n^G(\delta_n)$ et $K_n^D(\delta_n)$ sont similaires.

Il est impossible d'avoir une formulation exacte, analytique de ces dispersions dans le cas général et même dans le cas de maxwelliennes centrées. Aussi allons-nous tenter d'établir une majoration de ces dispersions (en fait uniquement des dispersions K_α et K_n) dans le cas où f_D et f_T sont supposées être des maxwelliennes centrées.

Remarquons tout d'abord que

$$\overline{v}_\alpha^\rightarrow' = \overline{\Omega} + \varepsilon_\alpha \overline{w}_g + \varepsilon_\alpha^2 a_\alpha |\overline{w} - \overline{w}'|^2 \overline{\Omega} + \mathcal{O}(\varepsilon_\alpha^3)$$

d'après l'égalité (2.4) (remplacer x , y et z respectivement par w , w' et w_g) où l'on rappelle que $\varepsilon_\alpha = \overline{V}/\overline{V}_\alpha$ avec $\overline{V} = \max(V_{D,th}, V_{T,th})$ d'après la définition (2.3).

Comme on sait que $\varepsilon_\alpha \ll 1$, on fait l'hypothèse raisonnable suivante pour pouvoir mener à bien cette approche théorique :

Hypothèse B.1 *Il est possible d'approximer la cinématique de la réaction avec la relation*

$$\overline{v}_\alpha' = \overline{\Omega} + \varepsilon_\alpha \overline{w}_g + \varepsilon_\alpha^2 a_\alpha |\overline{w} - \overline{w}'|^2 \overline{\Omega}.$$

D'autre part, sachant que l'on utilise la formule (1.8) pour le calcul de la section efficace σ_{DT} , on fait aussi l'hypothèse simplificatrice suivante :

Hypothèse B.2 *La section efficace nucléaire σ_{DT} est donnée par la loi*

$$\sigma_{DT} = C^{ste} \cdot |\overline{w} - \overline{w}'|^p$$

où p est tel que :

$$\begin{aligned} p = 7 & \quad \text{si} \quad 20 \leq T \leq 40 \text{ KeV}, \\ p = 11 & \quad \text{si} \quad 10 \leq T < 20 \text{ KeV} \end{aligned}$$

et

$$p = 13 \quad \text{si} \quad T < 10 \text{ KeV}.$$

On propose maintenant la propriété suivante :

Propriété B.1 *Sous les hypothèses B.1 et B.2, on a l'inégalité*

$$K_\alpha(\delta_\alpha) < K_{\alpha,1}(\delta_\alpha) + K_{\alpha,2}(\delta_\alpha)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{\alpha,1}(\delta_\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} I_{1/2}(\eta_\alpha), \\ K_{\alpha,2}(\delta_\alpha) = \frac{2}{p! \sqrt{\pi}} \int_0^{\eta_\alpha} \sqrt{u} I_p[B_{\eta_\alpha}(u)] \exp(-u) du, \\ I_j(x) = \int_x^{+\infty} t^j \exp(-t) dt, \\ B_{\eta_\alpha}(u) = \frac{25}{18\varepsilon_\alpha^2} \left\{ \sqrt{1 + 200\sqrt{2}\varepsilon_\alpha a_\alpha (\sqrt{\eta_\alpha} - \sqrt{u})} - 1 \right\}^2, \\ \eta_\alpha = 2\delta_\alpha^2 / \varepsilon_\alpha^2 \end{array} \right.$$

lorsque le plasma est à l'équilibre thermodynamique.

Preuve de la propriété B.1 En utilisant les adimensionnements établis lors de la démonstration de la proposition 2.1 (et en ayant remplacé x , y et z respectivement par w , w' et w_g) et sous les hypothèses B.1 et B.2, on peut écrire que

$$K_\alpha(\delta_\alpha) = \frac{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} \varphi(w)\psi(w')|\vec{w} - \vec{w}'|^{p+1} \cdot 1_{\{||\vec{v}_\alpha'| - 1| > \delta_\alpha\}} d\vec{w} d\vec{w}' d\vec{\Omega}}{\int_{\mathbb{R}^3} \int_{\mathbb{R}^3} \varphi(w)\psi(w')|\vec{w} - \vec{w}'|^{p+1} d\vec{w} d\vec{w}'}$$

avec

$$\begin{cases} \vec{v}_\alpha' = \varepsilon_\alpha \vec{w}_g + \vec{\Omega} (1 + \varepsilon_\alpha^2 a_\alpha |\vec{w} - \vec{w}'|^2), \\ a_\alpha = \frac{\mu_{DT}}{m_\alpha^2} \cdot \frac{\mu_{\alpha n}}{2} = \frac{3}{100}, \\ \vec{w}_g = \frac{m_D \vec{w} + m_T \vec{w}'}{m_D + m_T} \text{ (vitesse du centre de gravité)}. \end{cases}$$

De plus, on montre facilement que l'on a toujours

$$\delta_\alpha < ||\vec{v}_\alpha'| - 1| < \varepsilon_\alpha |\vec{w}_g| + \varepsilon_\alpha^2 a_\alpha |\vec{w} - \vec{w}'|^2$$

et que

$$\vec{w}_g = \vec{x} - \vec{y}/10 \implies |\vec{w}_g| < |\vec{x}| + |\vec{y}|/10$$

où on a posé

$$\vec{x} = \frac{\vec{w} + \vec{w}'}{2}$$

et

$$\vec{y} = \vec{w} - \vec{w}'.$$

On remplace alors $1_{\{||\vec{v}_\alpha'| - 1| > \delta_\alpha\}}$ par $1_{\{P(|\vec{y}'|) > 0\}}$ ce qui fournit une majoration de K_α où $P(|\vec{y}'|)$ est défini par

$$P(|\vec{y}'|) = |\vec{y}'|^2 + \frac{|\vec{y}'|}{10\varepsilon_\alpha a_\alpha} + \frac{|\vec{x}|}{\varepsilon_\alpha a_\alpha} - \frac{\delta_\alpha}{\varepsilon_\alpha^2 a_\alpha}.$$

On constate que

$$\forall \vec{y}' \in \mathbb{R}^3 : |\vec{x}| > \delta_\alpha/\varepsilon_\alpha \implies P(|\vec{y}'|) > 0.$$

Par contre pour $|\vec{x}| < \delta_\alpha/\varepsilon_\alpha$, $\exists \vec{y}' \in \mathbb{R}^3 / P(|\vec{y}'|) < 0$. En étudiant le discriminant du polynôme P , on trouve facilement la partie de \mathbb{R}^3 sur laquelle $P(|\vec{y}'|) > 0$.

Finalement, on obtient

$$P(|\vec{y}'|) > 0 \iff (|\vec{x}|, |\vec{y}'|) \in \left\{ \left[\frac{\delta_\alpha}{\varepsilon_\alpha}, +\infty[\times [0, +\infty[\right\} \cup \left\{ \left[0, \frac{\delta_\alpha}{\varepsilon_\alpha} \right] \times [A_\alpha(|\vec{x}|), +\infty[\right\}$$

avec

$$A_\alpha(|\vec{x}|) = \frac{\sqrt{1 + 400\varepsilon_\alpha a_\alpha \left(\frac{\delta_\alpha}{\varepsilon_\alpha} - |\vec{x}| \right)} - 1}{20\varepsilon_\alpha a_\alpha}.$$

D'où l'inégalité

$$K_\alpha(\delta_\alpha) < \frac{\int_{|\vec{x}|=\delta_\alpha/\varepsilon_\alpha}^{+\infty} \exp(-2|\vec{x}|^2) d\vec{x}}{\int_{|\vec{x}|=0}^{+\infty} \exp(-2|\vec{x}|^2) d\vec{x}} \\ + \frac{\int_{|\vec{x}|=0}^{\delta_\alpha/\varepsilon_\alpha} \exp(-2|\vec{x}|^2) \left\{ \int_{|\vec{y}|=A_\alpha(|\vec{x}|)}^{+\infty} |\vec{y}|^{p+1} \exp(-|\vec{y}|^2/2) d\vec{y} \right\} d\vec{x}}{\int_{|\vec{x}|=0}^{+\infty} \exp(-2|\vec{x}|^2) d\vec{x} \int_{|\vec{y}|=0}^{+\infty} |\vec{y}|^{p+1} \exp(-|\vec{y}|^2/2) d\vec{y}}$$

en notant que comme $m_D \simeq m_T$, $T_D \simeq T_T$, on a en première approximation

$$\varphi(x) = \psi(x) = C^{ste} \exp(-|\vec{x}|^2),$$

le plasma étant par hypothèse à l'équilibre thermodynamique.

Puis, on termine la preuve en effectuant quelques changements de variables ad hoc. \square

Sur la figure 29, on visualise à l'aide du logiciel *MAPLE* la majoration de K_α donnée par la propriété B.1 lorsque $1 \text{ KeV} < T < 40 \text{ KeV}$. La figure 30 visualise les fonctions $K_{\alpha,1}$ et $K_{\alpha,2}$ lorsque $T = 40 \text{ KeV}$. La figure 31 compare K_α avec K_n pour $T = 40 \text{ KeV}$ (la fonction K_n se déduit de l'étude précédente en remplaçant a_α par $a_n = 12/25$ et ε_α par ε_n).

On constate, d'après ces majorations, que l'effet de dispersion sur les particules α est sans doute beaucoup plus important que celui agissant sur les neutrons et que, comme on pouvait s'y attendre, plus la température du milieu diminue, plus cet effet de dispersion est atténué.

Cependant, ces résultats ne peuvent être considérés comme pleinement satisfaisants car on obtient une majoration qui nous dit uniquement dans quel cas la dispersion des neutrons est négligeable et dans quel cas la dispersion des particules α l'est.

Cette dispersion pouvant avoir une incidence importante sur la valeur du dépôt d'énergie par les particules α lors de leur ralentissement sur le milieu, il s'avère qu'une approche plus précise est nécessaire.

Constatant de plus qu'une approche purement théorique atteint rapidement ses limites, l'on peut affirmer que seule une approche numérique du problème - soit donc une évaluation numérique des opérateurs de création G_α et G_n - peut rendre possible l'obtention de renseignements plus précis et ceci particulièrement dans le cas où le milieu n'est pas à l'équilibre thermodynamique local: d'où l'étude effectuée aux troisième, quatrième et cinquième chapitres.

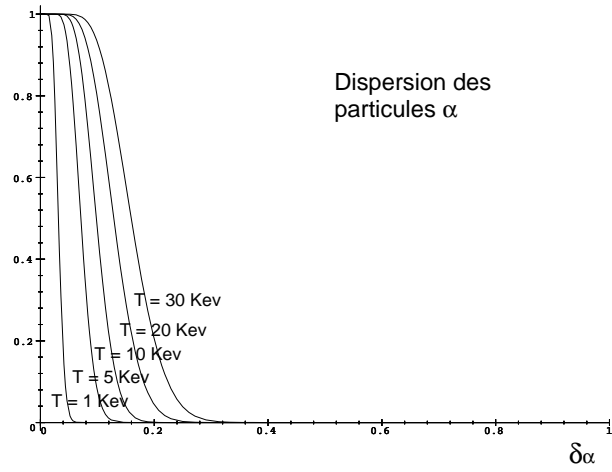


Fig. 29

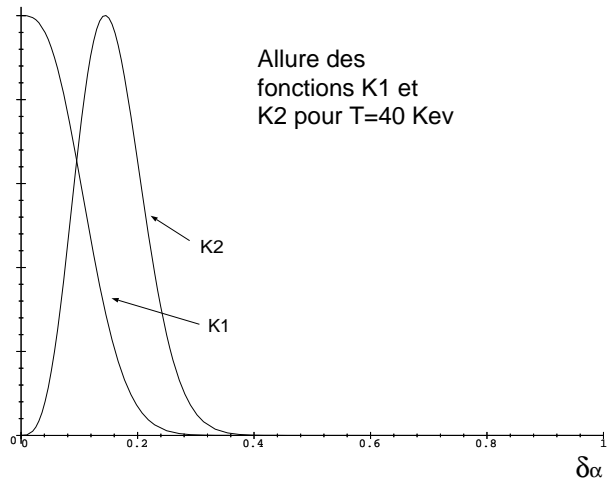


Fig. 30

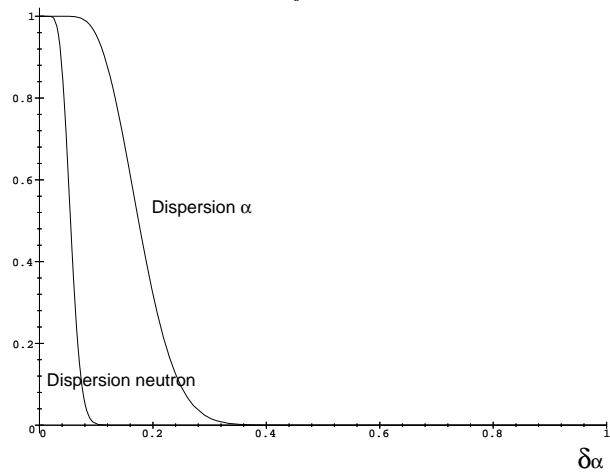


Fig. 31

Annexe C

Validation de la méthode de Cheremissin pour l'étude d'un gaz raréfié

On se propose ici d'exposer très brièvement l'application numérique de la méthode de Cheremissin (voir le troisième chapitre) à l'étude du comportement cinétique d'un gaz raréfié mono-espèce décrit avec le modèle de sphère dure sans force extérieure et en géométrie monodimensionnelle cartésienne.

C.1 Les équations de Boltzmann

On rappelle ici la forme de l'équation cinétique dont la distribution f du gaz est solution : f est solution de l'équation de Boltzmann lorsque (voir [36], [37] ou [38])

$$\partial_t f + \vec{v} \cdot \nabla_x f = G(f) - f(v) \cdot P(f)$$

avec

$$\begin{cases} G(f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(v') f(v'_1) |\vec{v} - \vec{v}'_1| \sigma d\vec{v}'_1 d\vec{\Omega}, \\ P(f)(v) = \int_{\mathbb{R}^3} \int_{S^2} f(v_1) |\vec{v} - \vec{v}'_1| \sigma d\vec{v}'_1 \end{cases}$$

et où

$$\sigma = d^2/4,$$

d étant le diamètre de la particule lorsque l'on choisit le modèle de sphère dure.

On peut définir un temps de collision moyen t_{coll} ainsi qu'un libre parcours moyen lpm . Parmi les diverses possibilités, on a pris

$$t_{coll} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{\prod_{i=x,y,z} \beta_i}}{Nd^2}$$

et

$$lpm = \frac{1}{\sqrt{2}N\pi d^2}$$

avec $\beta_i = \sqrt{\frac{m}{2T_i}}$. Les grandeurs macroscopiques N , m et T_i sont respectivement la densité particulaire, la masse atomique et la température dans la direction $i = x$, y ou z .

La cinématique des collisions élastiques et binaires entre particules est donnée par (voir aussi l'annexe A)

$$\begin{cases} \vec{v}' = \vec{v}_g + \frac{1}{2}\vec{\Omega}|\vec{v} - \vec{v}_1| = \vec{v}'(v, v_1, \Omega), \\ \vec{v}'_1 = \vec{v}_g - \frac{1}{2}\vec{\Omega}|\vec{v} - \vec{v}_1| = \vec{v}'_1(v, v_1, \Omega), \\ \vec{v}_g = (\vec{v} + \vec{v}_1)/2 \end{cases}$$

où

$$\vec{\Omega} = (\cos(\xi), \sin(\xi)\cos(\epsilon), \sin(\xi)\sin(\epsilon))$$

est un vecteur de la sphère unité S^2 . Notons que l'on multiplie σ par 4π pour que $\int_{S^2} d\vec{\Omega} = 1$. On a donc maintenant $\sigma = \pi d^2$ et $4\pi d\vec{\Omega} = \sin(\xi)d\xi d\epsilon$.

C.2 La méthode de Cheremissin

On consultera le troisième chapitre pour une description détaillée de cette méthode numérique de type Monte-Carlo.

C.2.1 Biaisage par des maxwelliennes

En appliquant directement les idées présentées au troisième chapitre, on obtient

$$P(f)(v) = \frac{\sigma}{N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f(v_\gamma)|\vec{v} - \vec{v}_\gamma|}{\Psi_1(v_\gamma)}$$

et

$$G(f)(v) = \frac{\sigma}{4\pi N_{tirages}} \sum_{\gamma=1}^{N_{tirages}} \frac{f(v')f(v'_\gamma)|\vec{v} - \vec{v}_\gamma| \sin \xi_\gamma}{\Psi_2(v_\gamma)}$$

avec $\vec{v}' = \vec{v}'(v, v_\gamma, \Omega_\gamma)$ et $\vec{v}'_\gamma = \vec{v}'_\gamma(v, v_\gamma, \Omega_\gamma)$. γ est le numéro du tirage de la vitesse de la particule incidente et du paramètre d'impact $\vec{\Omega}$ tirés avec la probabilité Ψ_1 pour l'opérateur de gain et la probabilité Ψ_2 pour l'opérateur de perte, $N_{tirages}$ étant le nombre de tirages aléatoires.

Comme pour l'étude de la *Fusion par Confinement Inertiel*, on se place en géométrie sphérique pour les vitesses microscopiques car on est en géométrie monodimensionnelle plane dans l'espace physique. On a donc

$$d\vec{v}_\gamma = v_{\gamma,\perp} dv_{\gamma,\perp} dv_{\gamma,\parallel} d\theta_\gamma$$

et

$$|\vec{v} - \vec{v}_\gamma| = \sqrt{(v_{\parallel} - v_{\gamma,\parallel})^2 + (v_{\perp} - v_{\gamma,\perp} \cos \theta_\gamma)^2 + (v_{\gamma,\perp} \sin \theta_\gamma)^2},$$

θ_γ étant l'angle entre v_{\perp} et $v_{\gamma,\perp}$.

D'où les probabilités Ψ_1 et Ψ_2 suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(v) = \Psi_\theta \cdot \Psi_{\parallel}(v_{\parallel}) \cdot \Psi_{\perp}(v_{\perp}), \\ \Psi_2(v) = \Psi_\theta \cdot \Psi_\xi \cdot \Psi_\epsilon \cdot \Psi_{\parallel}(v_{\parallel}) \cdot \Psi_{\perp}(v_{\perp}), \\ \Psi_{\parallel} = \frac{\beta_{\parallel}}{\sqrt{\pi}} \exp[-\beta_{\parallel}^2 (v_{\parallel} - U_{\parallel})^2], \\ \Psi_{\perp} = 2\beta_{\perp}^2 v_{\perp} \exp[-\beta_{\perp}^2 v_{\perp}^2], \\ \beta_{\parallel} = \sqrt{\frac{m}{2T_{\parallel}}}, \\ \beta_{\perp} = \sqrt{\frac{m}{2T_{\perp}}}, \\ \Psi_\theta = \Psi_\epsilon = 1/2\pi, \\ \Psi_\xi = 1/\pi, \end{array} \right.$$

U_{\parallel} , T_{\parallel} et T_{\perp} étant respectivement la vitesse macroscopique et les températures du gaz dans les directions \parallel et \perp . Pour la simulation de Ψ_1 et de Ψ_2 , on consultera le troisième chapitre.

Finalement, en utilisant un schéma temporel explicite d'ordre 1, on obtient

$$f^{n+1}(v) = f^n(v) \cdot [1 - \Delta t P(f^n)(v)] + \Delta t G(f^n)(v). \quad (\text{C.1})$$

On constate que, comme pour l'évaluation numérique des opérateurs de perte du deutérium et du tritium (voir le lemme 3.1), un critère de type *CFL* doit être imposé sur le pas de temps Δt pour préserver la positivité de $f^{n+1}(v)$. On a en effet le lemme évident suivant :

Lemme C.1 *Soit*

$$\Delta t_0 = \frac{1}{\max_{v \in \mathbb{R}^3} [P(f^n)(v)]}.$$

Alors, lorsque

$$\Delta t < \Delta t_0,$$

le schéma explicite défini par (C.1) préserve la positivité de f^{n+1} .

Comme $P(f^n)(v)$ est calculé à chaque itération, on constate qu'il n'est pas très difficile d'assurer ce critère de pas de temps minimum. Cependant, partant du principe que $(P(f^n)(v))^{-1}$ n'est pas très différent de t_{coll} , on a préféré imposer

$$\Delta t < CFL \cdot t_{coll}$$

avec CFL fixé empiriquement (CFL doit être environ inférieur à 0.3) ce qui évite à chaque itération d'évaluer Δt_0 et donc diminue le temps de calcul (dans la boucle de calcul de $P(f^n)(v)$, le calcul exact de Δt_0 empêcherait la vectorisation du code de calcul).

C.2.2 Correction Cheremissin

Une propriété importante de l'opérateur de collision de Boltzmann (cf. [36], [37] ou [38]) est que celui-ci conserve le nombre de particules, la quantité de mouvement et l'énergie macroscopiques. On a donc les propriétés

$$\int_A [G(f)(v) - f(v) \cdot P(f)(v)] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\vec{\Omega} = 0,$$

$$\int_A \vec{v} [G(f)(v) - f(v) \cdot P(f)(v)] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\vec{\Omega} = \vec{0}$$

et

$$\int_A \frac{|\vec{v}|^2}{2} [G(f)(v) - f(v) \cdot P(f)(v)] d\vec{v} d\vec{v}_1 d\vec{\Omega} = 0$$

pour l'opérateur de collision continu avec $A = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times S^2$.

Or, il est clair que la méthode numérique proposée par Cheremissin n'est pas conservative au sens où elle ne peut préserver ces invariants au niveau discret. On doit donc procéder à une phase dite de *correction* pour assurer la conservativité du schéma numérique de résolution de l'équation de Boltzmann.

Cheremissin (cf. [39]) a proposé de récupérer ces invariants en multipliant f^{n+1} par le polynôme $1 + a + \vec{b} \cdot \vec{v} + c|\vec{v}|^2$ avec $(a, \vec{b}, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$. On doit donc résoudre le système

$$\begin{cases} \sum_i \bar{f}(v_i) \cdot (1 + a + \vec{b} \cdot \vec{v}_i + c|\vec{v}_i|^2) \Delta^3 v = N, \\ \sum_i \vec{v}_i \cdot \bar{f}(v_i) \cdot (1 + a + \vec{b} \cdot \vec{v}_i + c|\vec{v}_i|^2) \Delta^3 v = N \vec{U}, \\ \sum_i |\vec{v}_i|^2 \cdot \bar{f}(v_i) \cdot (1 + a + \vec{b} \cdot \vec{v}_i + c|\vec{v}_i|^2) \Delta^3 v = N(\frac{1}{2}|\vec{U}|^2 + \frac{3}{2}T) \end{cases}$$

où $T = (T_x + T_y + T_z)/3$ et où $\Delta^3 v$ est l'élément de volume de l'espace des vitesses discrétisé. N , \vec{U} et T sont les moments de f^n ; \bar{f} est la valeur de f après résolution de la partie collisionnelle des équations de Boltzmann et avant la correction avec f^n pour condition initiale.

On constate que, dans le cas général, ce système est un système linéaire symétrique de cinq équations à cinq inconnues dont la matrice s'inverse très facilement. Dans le cas qui nous intéresse, les seules inconnues seront a , b_{\parallel} , b_{\perp} et c .

En définitive, on aura donc

$$\begin{cases} \bar{f}(v_i) = f^n(v_i) \cdot [1 - \Delta t P(f^n)(v_i)] + \Delta t G(f^n)(v_i), \\ f^{n+1}(v_i) = \bar{f}(v_i) \cdot (1 + a + \vec{b} \cdot \vec{v}_i + c |\vec{v}_i|^2). \end{cases}$$

C.3 Résultats numériques

La distribution f est discrétisée sur une grille en vitesse $V_{\parallel} \times V_{\perp}$, les vitesses microscopiques maximale et minimale en valeur absolue dans les directions \parallel et \perp étant prises égales à six vitesses thermiques initiales ce qui, pour un choc Mach 2, est suffisant (on assure ainsi que la distribution sur la frontière du maillage en vitesse sera quasiment nulle dans tout le domaine physique et à chaque instant).

L'espace physique est quant à lui discrétisé en $N_{\Delta x}$ mailles équidistantes.

Le gaz étudié est de l'azote. Donc $m = 28m_p$ (m_p étant la masse du proton) et $d = 3.7 \cdot 10^{-10} m$.

C.3.1 Relaxation de température

On ne résout ici que la partie collisionnelle de l'équation de Boltzmann.

Les conditions initiales sont les suivantes :

$$\begin{cases} T_{\parallel} = 4T_{\perp} = 400 \text{ K}, \\ N = 3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}.. \end{cases}$$

Donc

$$t_{coll} \simeq 1.58 \cdot 10^{-10} \text{ s}..$$

La figure 32 montre l'évolution avec le temps de T_{\parallel} , T_{\perp} et T sans la correction Cheremissin alors que la figure 33 montre cette même évolution avec la correction Cheremissin.

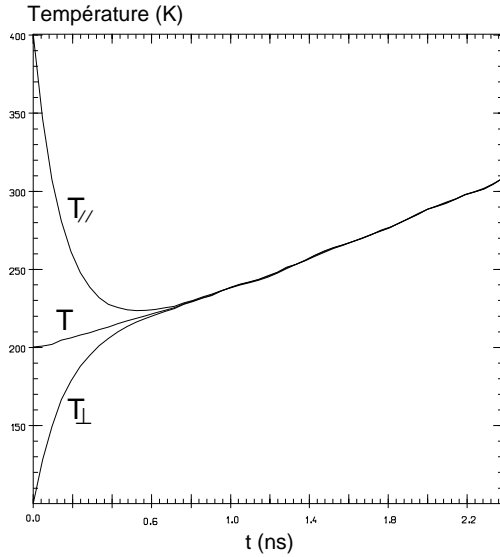


Fig. 32: sans correction

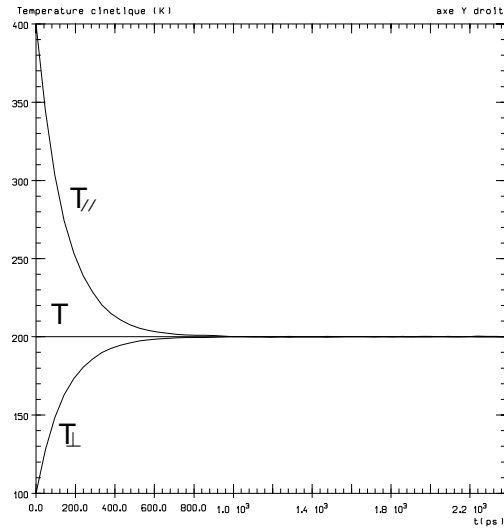


Fig. 33: avec correction

Les paramètres numériques sont les suivants :

- $V_{\parallel} \times V_{\perp} = 40 \times 20$,
- $N_{tirages} = 10^3$,
- $CFL = 0.3$.

C.3.2 Calcul d'un choc plan Mach 2 initié par un piston

Dans ce test numérique, on tient compte de la partie advection en procédant à un « splitting » entre la partie advection et la partie collisionnelle de l'équation de Boltzmann (voir sur ce sujet le deuxième chapitre de la première partie), le module d'advection étant tiré du code *Procions* (cf. [10]).

Sans entrer dans les détails, on peut juste dire que la partie advection est résolue par une méthode particulière avec projection des quantités advectées (i.e. la distribution f) sur la grille de l'espace des phases. Le mur de gauche étant fixe, celui de droite éventuellement mobile, on procède à un remaillage dans l'espace physique en même temps que la projection.

Les conditions aux limites à gauche et à droite sont de type réflexion spéculaire, le mur de droite se déplaçant à la vitesse constante V_{piston} .

Les conditions initiales sont les suivantes (\simeq atmosphère standard au repos) :

$$\left\{ \begin{array}{l} T_{\parallel} = T_{\perp} = 300 \text{ K}, \\ U_{\parallel} = 0, \\ N = 3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}, \\ V_{piston} = -431.929 \text{ m.s}^{-1}, \\ L = 15 \text{ lpm} = 82.2 \cdot 10^{-8} \text{ m. (longueur du domaine)} \end{array} \right.$$

(l'axe \parallel est ici l'axe de la symétrie plane) ce qui donne

$$\left\{ \begin{array}{l} t_{coll} \simeq 1.15 \cdot 10^{-10} \text{ s.}, \\ lpm \simeq 5.48 \cdot 10^{-8} \text{ m.} \end{array} \right.$$

Les paramètres numériques sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\parallel} \times V_{\perp} = 40 \times 20, \\ N_{\Delta x} = 15, \\ N_{tirages} = 10^3, \\ N_{\Delta t} = 20, \\ CFL = 0.25. \end{array} \right.$$

Les relations classiques d'Hugoniot (cf. [80]) pour un choc plan stationnaire Mach 2 avec $\gamma = 5/3$ donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1 = 3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}, \\ T_1 = 300 \text{ K}, \\ M_1 = 2 \implies U_1 = 767.873 \text{ m.s}^{-1}, \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} N_2 = 6.857 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}, \\ T_2 = 623.437 \text{ K}, \\ M_2 = 0.607 \implies U_2 = 335.944 \text{ m.s}^{-1}. \end{array} \right.$$

ce qui donne bien une vitesse de piston

$$V_{piston} = U_2 - U_1 = -431.929 \text{ m.s}^{-1}.$$

Les figures 34 à 38 montrent respectivement l'évolution des profils des températures T_{\parallel} , T_{\perp} et T , de la densité particulaire N et de la vitesse macroscopique U_{\parallel} . Les figures 39 à 41 montrent l'évolution avec le temps de ces mêmes profils dans la dernière maille (frontière avec le piston).

On constate que les conditions d'Hugoniot sont correctement atteintes et que, comme on s'y attendait, la température T_{\parallel} est supérieure à la température T_{\perp} et ceci surtout au cours du régime transitoire comme le montre la figure 39. Notons

que ce phénomène se retrouve aussi dans les plasmas et plus particulièrement en *Fusion par Confinement Inertiel* où les chocs sont beaucoup plus forts (cf. [59]).

On peut graphiquement mesurer la vitesse de propagation du choc (cf. figure 38). On trouve

$$V_{choc} \simeq \frac{\Delta\lambda}{0.25t_{coll}} \simeq \frac{2.23 \cdot 10^{-8}}{28.75 \cdot 10^{-12}} \simeq 775.65 \text{ m.s}^{-1}.$$

ce qui est en accord (aux incertitudes graphiques près) avec la valeur de U_1 . De même pour l'épaisseur du choc, on obtient

$$\lambda \simeq 4.2 \text{ lpm},$$

épaisseur qui est du même ordre de grandeur que celle proposée par G.A. Bird (cf. [38], chap. 12.11 : $\lambda \simeq 3.12 \text{ lpm}$).

On peut donc conclure ici que la méthode de Cheremissin donne de bons résultats pour la résolution de l'équation de Boltzmann classique ce qui nous conforte dans l'idée d'appliquer cette méthode numérique à la résolution des équations de Boltzmann appliquées à la fusion thermonucléaire.

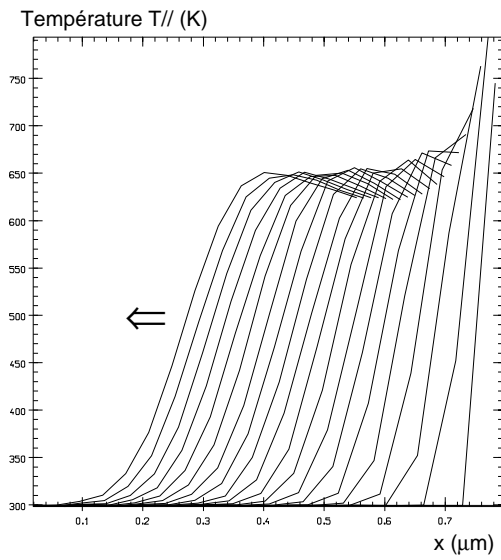


Fig. 34 : T_{\parallel}

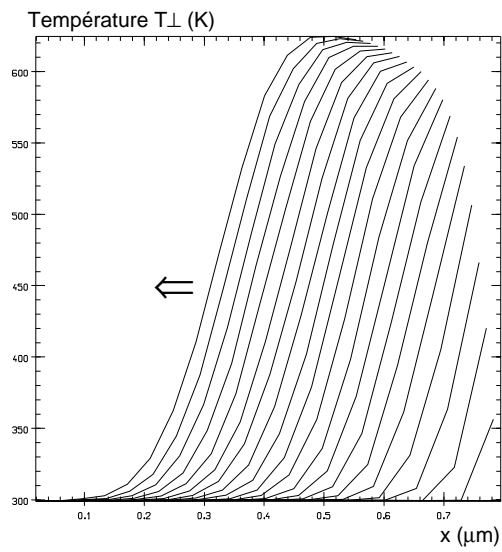


Fig. 35 : T_{\perp}

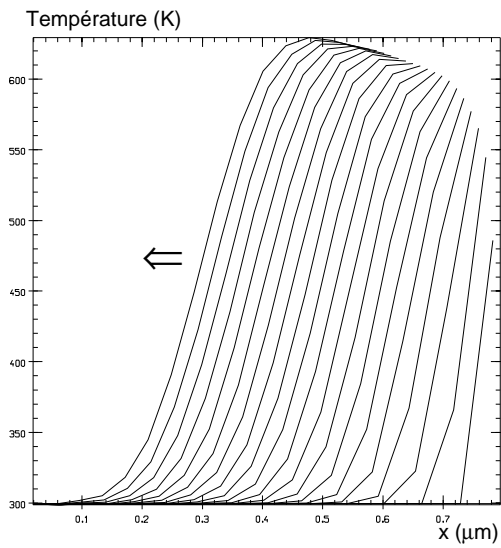


Fig. 36 : T

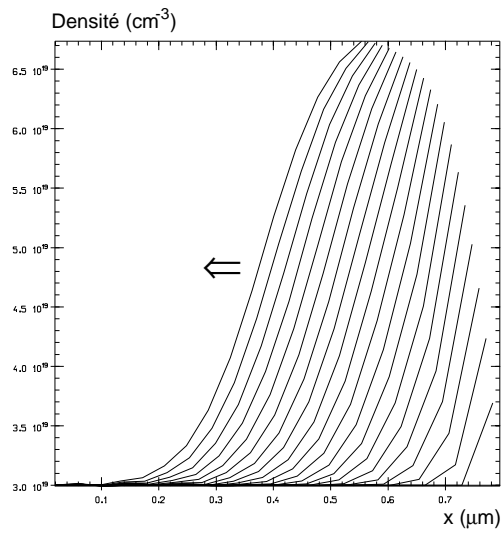


Fig. 37 : N

Piston Mach 2

Equation cinétique de Boltzmann

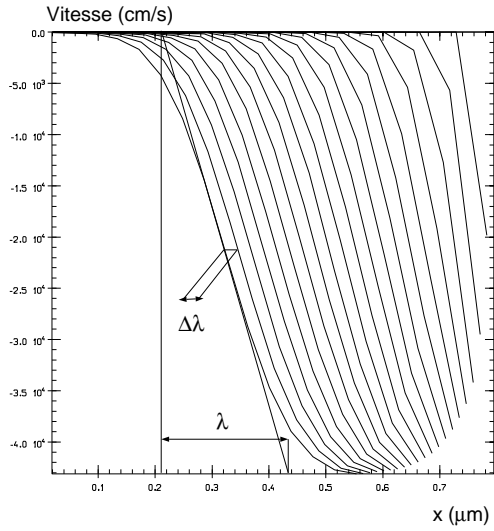


Fig. 38 : U_{\parallel}

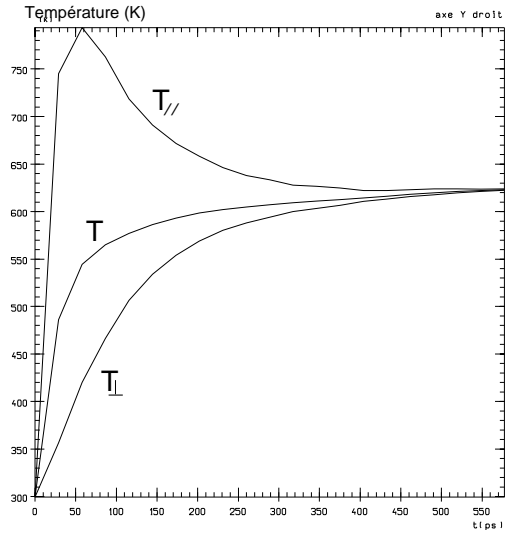


Fig. 39 : T , T_{\parallel} et T_{\perp} dans la dernière maille

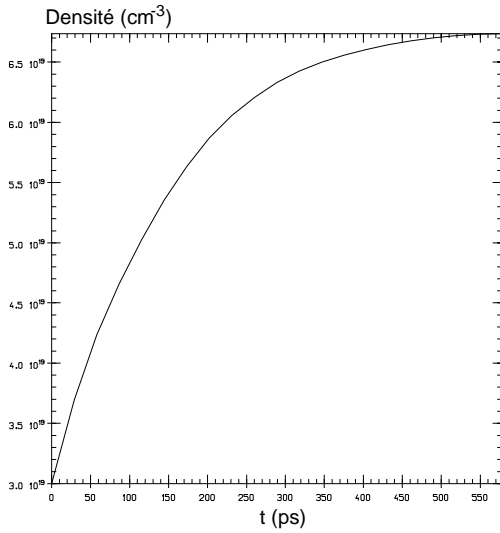


Fig. 40 : N dans la dernière maille

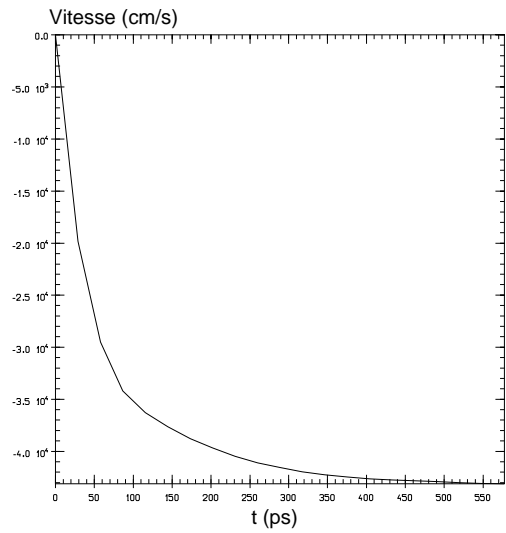


Fig. 41 : U_{\parallel} dans la dernière maille

Piston Mach 2

Equation cinétique de Boltzmann

Conclusion générale

Dans cette thèse, après avoir proposé et analysé un nouveau schéma numérique pour résoudre l'opérateur de collision ion / électron cartésien ou axisymétrique ainsi que l'opérateur de collision ion / ion isotrope en vitesse, l'on a décrit dans le cadre d'un plasma chaud une méthode de couplage cinétique / fluide basée sur le raccordement par demi-flux cinétiques et sur les schémas cinétiques de S.M. Deshpande et de B. Perthame.

Une étude cinétique de la formation du point chaud avec un modèle cinétique simplifié a alors été mise en place (l'opérateur de collision ion / ion de type Fokker-Planck a été remplacé par un opérateur de type B.G.K. à un degré de liberté et l'on s'est placé dans le cadre de la symétrie plane en espace).

L'on a ainsi pu constater sur des cas tests qualitativement représentatifs des phénomènes rencontrés dans le domaine de la *Fusion par Confinement Inertiel* qu'un traitement cinétique du point chaud semble être nécessaire car les ions sont loin d'être à l'équilibre thermodynamique et qu'un couplage cinétique / fluide est envisageable, ce couplage permettant de ne résoudre les équations cinétiques que là où c'est nécessaire. Concernant le couplage proprement dit, on a mis en évidence le fait que la meilleure solution est d'avoir une interface cinétique / fluide fixe et suffisamment éloignée de la zone de formation du point chaud pour que celle-ci se trouve à un endroit où les déséquilibres thermodynamiques sont faibles, la position d'une interface cinétique / fluide mobile étant plus délicate à contrôler.

Puis, en décrivant les réactions nucléaires avec les équations de Boltzmann réactives et en simulant celles-ci avec la méthode de Cheremissin (méthode de type Monte-Carlo), on a pu constater que les déséquilibres thermodynamiques ont une influence sur le nombre de particules α et de neutrons produits.

Ces résultats peuvent contribuer à expliquer les désaccords rencontrés entre les résultats numériques donnés par les codes fluides actuels et les expériences de laboratoire bien que d'autres phénomènes comme les instabilités hydrodynamiques entrent aussi en jeu.

La suite de ce travail sera d'essayer d'étendre la notion de *moyenne entropique* utilisée pour résoudre l'opérateur de collision ion / électron et l'opérateur de collision ion / ion isotrope en vitesse au cas de l'opérateur de collision ion / ion axisymétrique et de coupler l'équation réelle de Vlasov-Fokker-Planck avec sa limite fluide dans le cas sphérique en espace, les taux de réaction nucléaire étant évalués avec la méthode de Monte-Carlo proposée dans cette thèse.

Bibliographie

- [1] **J. Coutant et M. Decroisette** - *Un laser pour brûler du DT en laboratoire* - CHOCS, revue scientifique et technique du CEA/DAM, n° 13, p. 7-12, 1995.
- [2] **J.J. Duderstadt et G.A. Moses** - *Inertial Confinement Fusion* - Wiley-Interscience Publication, 1982.
- [3] **R. Dautray et J.P. Watteau** - *La Fusion thermonucléaire Inertielle par Laser* - Collection du CEA, série synthèse, Eyrolles, Paris, 1993.
- [4] **L. Bergé, G. Bonnaud, M. Casanova, A. Chiron et C. Rousseaux** - *Instabilités dans l'interaction laser-plasma* - CHOCS, revue scientifique et technique du CEA/DAM, n° 13, p. 49-58, 1995.
- [5] **M. Casanova** - *L'interaction laser-plasma dans le cadre des recherches sur la fusion par confinement inertiel* - Communication privée.
- [6] **E. Dattolo, H. Dumont, Y. Saillard et J-P. Jalaud** - *Physique de la conversion X en cavité* - CHOCS, revue scientifique et technique du CEA/DAM, n° 13, p. 27-34, 1995.
- [7] **C. Drevet, P-A. Holstein, M. Naudy et M. Terrier** - *Instabilités hydrodynamiques de l'implosion* - CHOCS, revue scientifique et technique du CEA/DAM, n° 14, p. 59-71, 1995. Voir aussi la revue CHOCS n° 12 entièrement consacrées à ces problèmes d'instabilités hydrodynamiques et de turbulence.

Sur la résolution numérique des équations de Vlasov-Fokker-Planck :

- [8] **M. Casanova, O. Larroche et J.P. Matte** - *Kinetic Simulation of a Collisional Shock Wave in a Plasma* - Physical Review Letters, volume 67, number 16, 1991.

- [9] **O. Larroche** - *Kinetic simulation of a plasma collision experiment* - Phys. Fluids B 5 (8), 1993.
- [10] **D. Deck et G. Samba** - *Le Code Procions* - Communication privée.
- [11] **F. Vidal, J.P. Matte, M. Casanova et O. Larroche** - *Spherical ion kinetic simulations of DT implosions* - Physical Review, volume 52, n° 4, 1995
- [12] **E.M. Epperlein** - *Implicit and Conservative Difference Scheme for the Fokker-Planck Equation* - Journal of Computational Physics, volume 112, p. 291-297, 1994.
- [13] **V.A. Mousseau et D.A. Knoll** - *Fully implicit Kinetic Solution of Collisional Plasmas* - Journal of Computational Physics, volume 136, p. 308-323, 1997.
- [14] **V.A. Mousseau** - *Fully implicit Kinetic Modelling of Collisional Plasmas* - Ph.D. Thesis, Idaho National Engineering Laboratory, 1996.
- [15] **C. Buet et S. Cordier** - *Numerical Analysis of Conservative and Entropy Schemes for the Fokker-Planck-Landau Equation* - À paraître dans SIAM, 1999.
- [16] **C. Buet et S. Cordier** - *Conservative and Entropy Numerical Scheme for the Isotropic Fokker-Planck-Landau Equation* - À paraître dans Journal of Computational Physics, 1999.
- [17] **J. S. Chang et G. Cooper** - *A practical Difference Scheme for Fokker-Planck Equations* - Journal of Computational Physics, volume 6, p. 1-16, 1970.
- [18] **P. Degond et B. Lucquin-Desreux** - *An Entropy Scheme for the Fokker-Planck Collision Operator of Plasma Kinetic Theory* - Numerische Mathematik, volume 68, p. 239-262, 1994.
- [19] **E. Frénod et B. Lucquin-Desreux** - *On conservative and entropic discrete axisymmetric Fokker-Planck operators* - Publication du Centre de Mathématiques et de leurs Applications (URA CNRS 1611) de l'ENS Cachan, 1996.
- [20] **M. Lemou** - *Opérateur de Fokker-Planck-Landau axisymétrique* - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 326, série I, p. 179-184, 1998.

- [21] **Y. A. Berezin, V.N. Khudick et M.S. Pekker** - *Conservative Finite-Difference Schemes for the Fokker-Planck Equation Not Violating the Law of an Increasing Entropy* - Journal of Computational Physics, volume 69, number 1, March 1987.
- [22] **Tomonori Takizuka** - *A Binary Collision Model for Plasma Simulation with a Particle Code* - Journal of Computational Physics, volume 25, p. 205-219, 1977.
- [23] **W. M. Mac Donal, M. N. Rosenbluth et W. Chuck** - *Relaxation of a System of Particles with Coulomb Interactions* - Physical Review, volume 107, 1957.

Références théoriques sur les équations de Fokker-Planck :

- [24] **P. Degond et B. Lucquin-Desreux** - *The Fokker-Planck Asymptotics of the Boltzmann Collision Operator in the Coulomb Case* - Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, volume 2, n° 2, p. 167-182, 1992.
- [25] **P. Degond et B. Lucquin-Desreux** - *The asymptotics of collision operators for two species of particles of disparate masses* - Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 1995.
- [26] **M. Lemou** - *Étude mathématique et résolution numérique de l'équation de Fokker-Planck-Landau en physique des plasmas* - Thèse de doctorat de l'Université Paul Sabatier (Toulouse), 1996.
- [27] **C. Villani** - *Contribution à l'étude mathématique des équations de Boltzmann et de Landau en théorie cinétique des gaz et des plasmas* - Thèse de doctorat de l'Université Dauphine (Paris IX), 1998.
- [28] **S.I. Braginskii** - *Transport Processes in a Plasma* - Review of Plasma Physics, volume 1, 1965.
- [29] **A. Decoster** - *Fluid Equations and Transport Coefficients of Plasmas - Modelling of Collisions*, Research in Applied Mathematics, Part 1, Masson, 1997.
- [30] **S. Kullback** - *A Lower Bound for Discrimination Information in Terms of Variation* - IEEE Transactions On Information Theory, p. 126-127, janvier 1966.

- [31] **G. Toscani** - *Entropy Production And The Rate of Convergence To Equilibrium For The Fokker-Planck Equation* - Prépublication de l'Université de Pavie, Département de Mathématique, 1996 et à paraître dans *Quarterly of Applied Mathematic.*
- [32] **Jr. H.P. Mac Kean** - *Speed of approach to equilibrium for Kac's caricature of a Maxwellian gas* - Arch. Rat. Mech. Anal., volume 21, p. 343-367, 1966.
- [33] **E. H. Lieb** - *Comment on «Approach to Equilibrium of a Boltzmann-Equation Solution»* - Physical Review Letter, volume 48 (15), p. 1057, 1982.
- [34] **R. Sentis** - *Sur différents modèles collisionnels pour des populations ioniques et électroniques* - Note CEA n° 2739, 1993.

Quelques références sur les équations de Boltzmann et sur leur résolution numérique :

- [35] **B. Perthame** - *Introduction to the collision models in Boltzmann's theory - Modelling of Collisions*, Research in Applied Mathematics, Part 2, Masson, 1997.
- [36] **Ludwig Boltzmann** - *Leçon Sur La Théorie Des Gaz* - Gauthier-Villars, Paris, 1902.
- [37] **C. Cercignani** - *The Boltzmann equation and its applications* - Springer, Berlin, 1988.
- [38] **G.A. Bird** - *Molecular Gas Dynamics* - Clarendon Press, Oxford, 1976.
- [39] **V.V. Aristov et F.G. Cheremissin** - *The Conservative Splitting Method For Solving Boltzmann's Equation* - U.S.S.R. Comput. Math. Phys., volume 20, n° 1, 1980.
- [40] **S.M. Yen et F.G. Cheremissin** - *Monte Carlo Solution Of The Non Linear Boltzmann Equation* - Prog. Astronautics and Aeronautics 74, p. 287-304, 1981.
- [41] **F.G. Cheremissin** - *Numerical Methods For The Direct Solution Of The Kinetic Boltzmann Equation* - U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys., volume 25, n° 6, 1985.

Références sur les schémas cinétiques :

- [42] **S.M. Deshpande** - *A Second Order Accurate, Kinetic Theory Based, Method for Inviscid Compressible Flow* - NASA Technical paper n° 2613, 1986.
- [43] **S.V. Raghurama Rao et S.M. Deshpande** - *A Genuinely Multidimensional Upwind Scheme for Euler Equations Based on Kinetic Theory Gases* - IMACS International Symposium on Mathematical Modelling and Scientific Computing, December 7-11, 1992.
- [44] **B. Perthame** - *Second-order Boltzmann Schemes for Compressible Euler Equations in One and Two Space Dimensions* - Siam Journal of Numerical Analysis, volume 29, n° 1, p. 1-19, February, 1992.
- [45] **B. Perthame** - *Entropy-preserving Boltzmann schemes for compressible Euler equations* - À paraître.
- [46] **B. Perthame et B. Khobalatte** - *Maximum principle on the entropy and minimal limitations for kinetic schemes* - À paraître.
- [47] **Y. Qiu** - *Étude des Équations d'Euler et de Boltzmann et de leur Couplage. Application à la Simulation Numérique d'Écoulements de Gaz Raréfiés* - Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1993.
- [48] **J. Schneider** - *Direct coupling of fluid and kinetic equations* - Bericht nr. 126 (Forschung), Universität Kaiserslautern, 1995.
- [49] **F. Malinger** - *Couplage Adaptatif des Équations de Boltzmann et de Navier-Stokes* - Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1995.
- [50] **J.P. Perlat** - *Modélisation et calcul parallèle d'une couche limite cinétique* - Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1998.
- [51] **J.P. Croisille et R. Khanfir** - *Algorithmes de Boltzmann pour les équations de la MHD compressible* - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, série II b, p. 103-110, 1996.

Références sur l'étude de la fusion du deutérium avec le tritium :

- [52] **J.A. Maniscalco** - *Inertial Confinement Fusion* - Annual Review Energy 5:33-60, 1980.

- [53] **L.M. Hively** - *Convenient Computational Forms For Maxwellian Reactivities* - Nuclear Fusion, volume 17, p. 873, 1977.
- [54] **D.L. Book** - *N.R.L. Plasma Formulary* - N.R.L. Publication, Washington DC, 1987.
- [55] **P. Gaume** - *Ralentissement d'un ion suprathermique dans un plasma thermonucléaire* - tomes 1 et 2, publication du CEA n° 86 083, 1986.
- [56] **J. Ligou** - *Fusion Reaction Product Transport in Inertially Confined Plasma* - Meeting on Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, Munich, proceeding, volume 2, p. 385, 1981.
- [57] **Tran Trach-Minh** - *Contribution à l'Étude Théorique et Numérique de la Fusion Par Confinement Inertiel* - Thèse n° 478 de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1983.
- [58] **Takeshi Nishikawa, Hideaki Takabe et Kunioki Mima** - *Ion Kinetic Effect on Fusion Reaction Rate* - Japanese Journal Of Applied Physics, volume 28, n° 10, 1989.
- [59] **Y. Grillon** - *Structure d'une onde de choc dans un plasma obtenue avec une description de fluide anisotrope* - Communication privée.
- [60] **J.D. Kilkenny** - *Recent diagnostic developments at Nova* - Review of Scientific Instrumentation, volume 63, n° 10, 1992.
- [61] **R. Dautray et J.P. Watteau** - *La Fusion thermonucléaire Inertielle par Laser* - Collection du CEA, série synthèse, Eyrolles, Paris, troisième partie, volume 2, chapitre 7: J.P. Garçonnet, *Les diagnostics nucléaires*, 1993.
- [62] **H. Brysk** - *Fusion Neutron Energies And Spectra* - Plasma Physics, volume 15, p. 611, 1972.
- [63] **D.B. Henderson** - *Burn Characteristics of Marginal Deuterium-Tritium Microspheres* - Physical Review Letter, volume 33, n° 19, 1974.
- [64] **A.G. Petschek et D.B. Henderson** - *Influence Of High-Energy Ion Loss On DT Reaction Rate In Laser Fusion Pellets* - Nuclear Fusion, volume 19, n° 12, 1979.
- [65] **W.B. Thomson** - *Thermonuclear Reaction Rates* - The Proceedings Of The Physical Society, volume 70, partie 1, n° 445 B, 1956.

Autres références :

- [66] **R. Dautray et J.P. Watteau** - *La Fusion thermonucléaire Inertielle par Laser* - Collection du CEA, série synthèse, Eyrolles, Paris (1993), chapitre 13 (partie 3) : *Codes d'implosion par confinement inertielle*, p. 1116.
- [67] **P.L. Bhatnagar, E.P. Gross et M. Krook** - *Physical Review*, volume 94, p. 511, 1954.
- [68] **H. Brezis, F. Golse et R. Sentis** - *Analyse Asymptotique de l'Équation de Poisson Couplée à la Relation de Boltzmann. Quasi-neutralité des Plasmas* - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 321, série I, p. 953, 1995. Voir aussi R. Sentis et Fr. Golse : note CEA n° 2748, 1994.
- [69] **F. Golse, B. Perthame et R. Sentis** - *Un résultat de compacité pour les équations de transport* - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 301, série I, p. 341, 1985. Voir aussi Fr. Golse, B. Perthame, P.L. Lions et R. Sentis : *Journal of Functional Analysis* 76, 1988.
- [70] **P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor** - *Kinetic formulation of isentropic gas dynamics* - *Comput. Math. Phys.*, volume 7, p. 169-191, 1994. Voir aussi (mêmes auteurs) : *Kinetic formulation of the isentropic gas dynamics and p-systems*, *Comm. Math. Phys.*, volume 163, p. 415-431.
- [71] **B. Després** - *Inégalités Entropiques pour un Solveur de Type Lagrange + Convection des Équations de l'Hydrodynamique* - Note CEA n° 2822, 1997. Voir aussi : *Inégalité entropique pour un solveur conservatif du système de la dynamique des gaz en coordonnées de Lagrange* - C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, série I, p. 1301-1306, 1997.
- [72] **R. D. Richtmyer et K. W. Morton** - *Difference Methods for Initial Value Problems* - Interscience Publishers, 1957.
- [73] **E. Godlewski et P.A. Raviart** - *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws* - Applied Mathematic Sciences, volume 118, Springer, 1996.
- [74] **R. Sentis, B. Lapeyre et E. Pardoux** - *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion* - Édition Springer-Verlag, Mathématiques et Applications, 1997.
- [75] **I. Bazarov** - *Thermodynamique* - Éditions Mir de Moscou, 1989.
- [76] **Jean-Loup Delcroix et Abraham Bers** - *Physique Des Plasmas* - Savoirs Actuels, InterÉditions / CNRS Éditions, 1994.

- [77] **Eisenberg et Greiner** - *Nuclear Theory 1, Nuclear Models*.
- [78] **G. Gamow et C.L. Critchfield** - *Theory of Atomic Nucleus and Nuclear Energy Sources* - Oxford University Press, Chapitre 10, 1951.
- [79] **H. Brezis** - *Analyse fonctionnelle : théorie et applications* - Édition Masson, 1993.
- [80] **John D. Anderson, Jr** - *Modern Compressible Flow* - Mc Graw-Hill, 1990.

Abstract

At the birth of the hot point in an Inertial Confinement Fusion experiment, the plasma at the center of the deuterium-tritium sphere can be far from the local thermodynamical equilibrium. In the first part, we then propose a kinetic model of the Vlasov-Fokker-Planck type which describes these non-equilibrium states. After having recalled the general ideas used to solve this model numerically, we introduce the definition of the entropic average to define a new numerical scheme solving the ion / electron collision operator spatially homogeneous. The explicit version of this scheme is conservative, stable and entropic under a *CFL* criteria. The semi-implicite version of this scheme is conservative too and conserves the thermodynamical equilibrium when it is reached. Numerical tests show that this scheme is more precise compared to the classical Chang and Cooper's scheme. The CPU time needed to solve these kinetic equations being very important, it is necessary to study the possibility of solving these equations only where the non-equilibrium effects are important i.e. at the center of the deuterium-tritium sphere. In the second part, we then describe a numerical technic to couple a kinetic area with a fluid area, the birth of the hot point being solved with the kinetic equations and the rest of the domain with the bi-temperature Euler equations (ionic and electronic temperatures). With numerical tests and a simplified model, we show that a kinetic treatment of the hot point seems to be much more precise and that the technique proposed to couple the kinetic area with the fluid area allows to diminish the CPU time. Since the deuterium and tritium ions are not at the thermodynamical equilibrium at the birth of the hot point, the analytical formula giving the nuclear reaction rate could not be valid. In the third part, we propose a Monte-Carlo method to solve the kinetic equations of Boltzmann type which describe the thermonuclear reactions and we show that, effectively, at the birth of the hot point, the classical formula could give bad results.

Keywords Inertial Confinement Fusion, birth of the hot point, thermonuclear fusion, bi-temperature Euler equations, Vlasov-Fokker-Planck and Boltzmann equations, positive and entropic scheme, H-theorem, entropic and Chang and Cooper averages, kinetic scheme, coupling of a kinetic area with a fluid area, Monte-Carlo and Cheremissin methods, Doppler effect on the energy spectra of the fusion products.

Résumé

Lors de la formation du point chaud dans une expérience de Fusion par Confinement Inertiel, le plasma au centre de la sphère de deutérium et de tritium peut être loin de l'équilibre thermodynamique local. Dans la première partie, on décrit donc un modèle cinétique ionique de type Vlasov-Fokker-Planck, modèle qui sera susceptible de prendre en compte ces déséquilibres. Après avoir rappelé les grandes étapes pour résoudre numériquement le système obtenu, on introduit la notion de moyenne entropique pour définir un nouveau schéma numérique traitant les collisions ion / électron homogènes en espace. Ce schéma est conservatif, stable et entropique sous un certain critère de type *CFL* dans sa version explicite. Dans sa version semi-implicite, on établit que ce schéma conserve l'équilibre thermodynamique. Des tests numériques montrent que ce schéma est plus robuste et plus précis que le schéma classique de Chang et Cooper. Le temps de calcul pour résoudre les équations cinétiques étant très important, il est nécessaire d'étudier la possibilité de ne résoudre ces équations que là où ces déséquilibres thermodynamiques sont importants c'est à dire principalement au centre de la sphère de deutérium et de tritium. Dans la seconde partie, on propose donc une technique de couplage cinétique / fluide, la formation du point chaud étant traitée avec le modèle cinétique, le reste avec les équations d'Euler à deux températures (températures ionique et électronique). Sur des cas tests et avec un modèle simplifié, on montre qu'un traitement cinétique du point chaud semble effectivement beaucoup plus précis et que la technique de couplage permet de réduire le temps de calcul. Les ions deutérium et tritium pouvant ne pas être à l'équilibre thermodynamique, on s'est ensuite posé la question de la validité des formules analytiques donnant le taux de réaction nucléaire, formules établies en supposant que le plasma est à l'équilibre thermodynamique. Dans la troisième partie, on propose donc une méthode de type Monte-Carlo pour résoudre numériquement les équations cinétiques de type Boltzmann qui décrivent les réactions de fusion thermonucléaire et on montre qu'effectivement, les déséquilibres thermodynamiques rencontrés lors de la formation du point chaud peuvent invalider les formules usuelles.

Mots clés Fusion par confinement inertiel, formation du point chaud, fusion thermonucléaire, équations d'Euler à deux températures, équations de Vlasov-Fokker-Planck et de Boltzmann, schéma positif et entropique, théorème H, moyennes entropique et de Chang et Cooper, schéma cinétique, couplage cinétique / fluide, méthodes de Monte-Carlo et de Cheremissin, élargissement Doppler des spectres en énergie des produits de fusion.