



**HAL**  
open science

# Théorèmes de h-cobordisme et s-cobordisme semi-algébriques

Kartoue Mady Demdah

► **To cite this version:**

Kartoue Mady Demdah. Théorèmes de h-cobordisme et s-cobordisme semi-algébriques. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2009. Français. NNT : . tel-00481951

**HAL Id: tel-00481951**

**<https://theses.hal.science/tel-00481951>**

Submitted on 7 May 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3920

# THÈSE

*Présentée*

DEVANT L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

*pour obtenir*

le grade de DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

**Mention Mathématiques et Applications**

en cotutelle avec L'UNIVERSITÉ DE PISE

*par*

**Demdah Kartoue Mady**

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

Ecole Doctorale MATISSE

UFR de Mathématiques

TITRE DE LA THÈSE :

**Théorèmes de h-cobordisme et s-cobordisme  
semi-algébriques**

Soutenue le 23 Juillet 2009 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. RICARDO BENEDETTI	Professeur	Examineur
M. FABRIZIO BROGLIA	Professeur	Codirecteur
M. JOSE F. FERNANDO	Professeur	Examineur
Mme MARIE-FRANCOISE ROY-COSTE	Professeur	Examineur
M. MICHEL COSTE	Professeur	Directeur



# Remerciements

Ce travail n'aurait été possible sans les encouragements, les critiques tranchantes, l'aide compétente et la remarquable patience de mes encadrants : Prof. Fabrizio Broglia and Prof. Michel Coste. Je ne les remercierai jamais assez.

Je tiens à remercier profondément le Prof. Masahiro Shiota qui m'a donné de son temps, son aide, des idées très utiles pour cette thèse.

J'esprime mes profonds remerciements au Prof. Francesca Aquistapace pour ses suggestions et son aide qui a amélioré la lisibilité de cette thèse.

Je remercie le staff du Dipartimento di Matematica di Pisa pour leur sympathie et soutien durant mes années de thèse.

J'exprime ma gratitude a tout le staff de la Tour de maths - Département des Mathématiques de l'Université de Rennes 1 pour leur gentillesse et support pendant mon séjour à Rennes.

C'est un réel plaisir pour moi de remercier mes amis : Andreea, Al-hassem, Ana, Luca, Marco, Flavien, Pascale, Fionntan, Diakité, Isaia, Francesca, Jasmin, Otto, Seidou, Sebastien pour les moments agréables passés ensemble et pour leur soutien amical.

A toutes les personnes qui, de proche ou de loin, ont contribué à la réalisation de ce travail, je suis très reconnaissant.

Je veux enfin remercier mes parents : Koumatei Bonté et Dabey Kartoue Mady. Ils sont tout pour moi, et à eux je dédie cette thèse.



# Abstract

The h-cobordism theorem is a noted theorem in differential and PL topology. It has been proved by Stephen Smale and is used in the proof of the generalized Poincaré conjecture in dimension greater than four. A generalization of the h-cobordism theorem for possibly non simply connected manifolds is the so called s-cobordism theorem.

In this thesis, we prove semialgebraic and Nash versions of these theorems. That is, starting with semialgebraic or Nash cobordism data, we get a semialgebraic homeomorphism (respectively a Nash diffeomorphism).

The main tools used are semialgebraic triangulation and Nash approximation. One aspect of the algebraic nature of semialgebraic or Nash objects is that one can measure their complexities. We show h and s-cobordism theorems with a uniform bound on the complexity of the semialgebraic homeomorphism (or Nash diffeomorphism) contained in terms of the complexity of the cobordism data.

Finally we deduce the validity of the semialgebraic and Nash versions of the cobordism theorems over any real closed field.



# Résumé

Le théorème de h-cobordisme est bien connu en topologie différentielle et PL. Il a été démontré par Stephen Smale et avec comme conséquence la preuve de la conjecture de Poincaré en dimension supérieure à 4. Une généralisation pour les h-cobordismes possiblement non simplement connexe est appelée théorème de s-cobordisme.

Dans cette thèse, nous démontrons les versions semi-algébrique et Nash de ces théorèmes. C'est à dire, avec des données semi-algébriques ou Nash, nous obtenons un homéomorphisme semi-algébrique (respectivement un difféomorphisme Nash).

Les principaux outils intervenant sont la triangulation semi-algébrique et les approximations Nash. Un aspect de la nature algébrique des objets semi-algébriques et Nash est qu'on peut mesurer leurs complexités. Nous montrons les théorèmes de h et s-cobordisme avec borne uniforme sur la complexité de l'homéomorphisme semi-algébrique (difféomorphisme Nash) voulu, en fonction de complexité des données du cobordisme.

Pour finir, nous déduisons la validité de ces théorèmes version semi-algébrique et Nash sur tout corps réel clos.





# Abstract

Il teorema di h-cobordismo è un teorema noto in topologia differenziale e topologia PL. Fu dimostrato da Stephen Smale ed impiegato nella dimostrazione della congettura di Poincaré in dimensione maggiore di quattro. La generalizzazione del teorema di h-cobordismo per cobordismi possibilmente non semplicemente connessi è detta teorema di s-cobordismo.

In questa tesi dimostriamo le versioni semialgebriche e Nash di questi teoremi. Più precisamente, con i dati semialgebrici (rispettivamente Nash), otteniamo un omeomorfismo semialgebrico (rispettivamente un diffeomorfismo Nash).

I principali strumenti impiegati sono la triangolazione semialgebrica e l'approssimazione Nash. È ben noto che si può misurare la complessità degli oggetti semialgebrici o Nash. L'omeomorfismo semialgebrico ed il diffeomorfismo Nash che costruiamo nella nostra dimostrazione dei teoremi di h ed s-cobordismo hanno limite uniforme sulla loro complessità rispetto alla complessità dei cobordismi.

Infine, deduciamo la validità di questi teoremi nelle versioni semialgebrica e Nash su qualunque campo reale chiuso.



# Table des matières

Introduction . . . . .	1
<b>1 Théorèmes de h et s-cobordisme semi-algébriques et Nash</b>	<b>5</b>
1.1 Variétés de Nash et semi-algébriques . . . . .	6
1.2 Quelques rappels de géométrie PL . . . . .	7
1.3 Homotopie . . . . .	14
1.4 Théorèmes de h et s-cobordisme différentiable et PL . . . . .	18
1.5 Théorèmes de h-cobordisme semi-algébrique et Nash . . . . .	19
1.6 Théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash . . . . .	25
<b>2 Validité des théorèmes de h et s-cobordisme semi-algébriques et   Nash sur un corps réel clos quelconque</b>	<b>31</b>
2.1 Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg . . . . .	32
2.2 Extension de quelques propriétés topologiques . . . . .	33
2.3 Validité du théorème de h-cobordisme semi-algébrique sur un corps réel clos quelconque . . . . .	46
2.4 Validité du théorème de h-cobordisme Nash sur un corps réel clos quelconque . . . . .	56
2.5 Validité des théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur un corps réel clos quelconque . . . . .	61
<b>Bibliographie</b>	<b>65</b>



# Introduction

Soit un triplet de variétés différentiables compactes  $(M, M_0, M_1)$  tel que le bord de  $M$  est la réunion disjointe de  $M_0$  et  $M_1$ . On dit que  $(M, M_0, M_1)$  est un *cobordisme*. Si de plus  $M_0$  et  $M_1$  sont des rétractes par déformation de  $M$ , on dit que le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un *h-cobordisme*. Le théorème de h-cobordisme s'énonce comme suit :

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme différentiable simplement connexe.*

*Si  $\dim M \geq 6$  alors  $M$  est difféomorphe à  $M_0 \times I$ , où  $I = [0, 1]$ .*

Ce théorème a été démontré par Smale en 1961 (cf Smale, S. : “Generalized Poincaré’s Conjecture in Dimensions Greater than Four.” Ann. Math. 74, 391-406, 1961). Ce fut la clé pour débloquent la conjecture de Poincaré en dimension supérieure où égale à 5, conjecture qui a résisté jusqu’à récemment où G. Perelman a démontré le dernier cas de la conjecture en dimension 3 dans les années 2002-2003 (cf. [Pe]).

Dans cet énoncé les variétés sont différentiables et compactes, mais il est clair qu’il a du sens aussi pour d’autres catégories de variétés, par exemple topologiques ou PL. En fait le même théorème a été démontré dans les catégories des variétés PL et des variétés topologiques, et a les mêmes conséquences que dans le cas différentiable. Il est vrai que la démonstration du théorème de h-cobordisme est basé sur ce qu’on appelle en anglais “Whitney trick”. Cette astuce ne fonctionne qu’en dimension supérieure ou égale à 5 pour le cas différentiable et le cas PL. Par contre dans la catégorie topologique, cette astuce marche aussi en dimension 4 comme le montre le travail de M. Freedman sur la conjecture de Poincaré.

Pour démontrer le théorème de h-cobordisme différentiable, Smale a utilisé la méthode de décomposition en anses. On trouve plus tard une démonstration utilisant la théorie de Morse (cf. [M]). Dans la deuxième méthode, on construit une fonction de Morse c’est à dire une fonction lisse  $f : M \rightarrow [0, 1]$  avec  $f^{-1}(0) = M_0$  et  $f^{-1}(1) = M_1$  telle que  $f$  ait un nombre fini de points critiques non dégénérés. En procédant à l’élimination des points critiques, il est possible de construire une fonction de Morse sur  $M$  sans point critique. Ainsi, le flot du gradient de cette fonction donne le difféomorphisme voulu.

Une généralisation de ce résultat, pour les variétés non nécessairement simplement connexes avec la condition supplémentaire que les variétés soient simplement homotopes (voir section 1.3) entre elles, est le théorème de s-cobordisme.

De manière précise :

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un  $h$ -cobordisme différentiable connexe de dimension  $\geq 6$ . Alors,  $M$  et  $M_0 \times I$  sont difféomorphes si et seulement si  $M$  est simplement homotope à  $M_0$  et  $M_1$ .*

Ce théorème a été démontré pour les deux catégories : différentiable et PL. Pour la catégorie différentiable, la démonstration est dû à Mazur-Barden-Stallings (cf.[K]). On trouve pour la catégorie PL, une démonstration dans [RS]. Les démonstrations, dans les deux cas, ont été faites par la méthode de décomposition en anses et le calcul de la torsion de Whitehead.

Alors, les questions que cette thèse se pose sont les suivantes :

1. Est ce que la version semi-algébrique du théorème de  $h$ -cobordisme est vrai ? Plus exactement, quand les données sont semi-algébriques, peut on obtenir un homéomorphisme semi-algébrique ?
2. Si la réponse est positive, est ce qu'on peut donner le même théorème sur un corps réel clos quelconque ?
3. Mêmes questions en ce qui concerne le théorème de  $s$ -cobordisme.

Or, pour étendre ces résultats, à priori deux chemins se présentent à nous de manière naturelle :

- la méthode de décomposition en anses comme ce fut fait dans le cas PL dans [RS].
- La méthode d'intégration de champs de vecteurs en utilisant la théorie de Morse comme ce fut utilisé dans [M].

Pour ce qui est de la première méthode il faudrait réécrire toute cette théorie version semi-algébrique. Ce qui revient à écrire l'équivalent du livre [RS] version semi-algébrique. L'intégration des champ de vecteurs admet un substitut semi-algébrique développé par Coste et Shiota pour démontrer la version semi-algébrique du premier Lemme d'isotopie de Thom (cf. [CS1]).

Dans cette thèse nous ne faisons usage d'aucune des deux méthodes. Nous utilisons le théorème de triangulation semi-algébrique pour transférer le résultat du cas PL au cas semi-algébrique. Nous avons fait ce travail au premier chapitre, après avoir révisé les définitions et les outils soit PL que semi-algébriques nécessaires.

Nous avons aussi déduit ces mêmes théorèmes dans le cas des variétés de Nash. Il se trouve qu'il y a une différence importante entre les variétés semi-algébriques de classe  $C^0$  et les variétés Nash (c'est à dire à la fois analytiques et semi-algébriques) et en effet les arguments sont un peu différents. Ici, on a utilisé le théorème d'approximation de Nash pour déduire du cas différentiable les théorèmes précités.

Une fois démontrés ces théorèmes pour  $\mathbb{R}$ , le passage à un corps réel clos quelconque se fait par un procédé typique de ce sujet. Il s'agit de traduire les énoncés de ces théorèmes, par exemple " $M$  est une variété simplement connexe", en des énoncés du premier ordre de la théorie des corps réels clos. A ce point le

principe de Tarski-Seidenberg nous assure que les résultats qui nous intéressent sont vrais comme ils sont vrais pour  $\mathbb{R}$ . Le transfert que nous venons de décrire se fait dans le second chapitre.





# Chapitre 1

## Théorèmes de h et s-cobordisme semi-algébriques et Nash

### Introduction

Soit  $M$  une variété lisse compacte ayant pour bord deux composantes  $M_0$  et  $M_1$  qui sont toutes deux des rétractes par déformation de  $M$ . On dit que le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un *h-cobordisme*. Le théorème de h-cobordisme dit que si  $M$ ,  $M_0$  et  $M_1$  sont simplement connexes et  $\dim M \geq 6$ , alors  $M$  est difféomorphe à  $M_0 \times I$  où  $I = [0, 1]$ . Ce théorème a été démontré par Stephen Smale en 1961 (cf. [Sm]). Il a de nombreuses applications dont l'une bien connue est la généralisation de la conjecture de Poincaré en dimension supérieure ou égale à 5 (cf. [M]). Quelques années plus tard, il a été démontré dans le cas PL. La preuve détaillée se trouve dans [RS].

Nous dirons qu'un triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un h-cobordisme semi-algébrique si les variétés  $M, M_0$  et  $M_1$  sont des variétés semi-algébriques telles que  $\partial M = M_0 \cup M_1$ ,  $M_0 \cap M_1 = \emptyset$  et  $M_0$  et  $M_1$  sont des rétractes par déformation semi-algébriques de  $M$ . Le théorème de h-cobordisme semi-algébrique dit que si  $M$ ,  $M_0$  et  $M_1$  sont simplement connexes et  $\dim M \geq 6$ , alors  $M$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $M_0 \times I$  où  $I = [0, 1]$ . Pour démontrer ce théorème nous utilisons le théorème de triangulation semi-algébrique. Nous démontrons de même ce théorème dans le cas des variétés de Nash en utilisant le théorème d'approximation des applications différentiables sur les variétés de Nash par des applications de Nash.

Une généralisation du théorème de h-cobordisme pour le cas non simplement connexe, sous l'hypothèse plus forte que les rétractions de  $M$  sur  $M_0$  et  $M_1$  soient des s-homotopies (voir section 1.3), est appelée théorème de s-cobordisme. Nous démontrons aussi ce dernier dans le cadre semi-algébrique et Nash.

Nous rappelons, dans la première section, les définitions sur les semi-algébriques et les variétés de Nash. Dans la deuxième section, nous rappelons quelques

éléments de la géométrie PL. Nous rappelons dans la troisième section quelques notions élémentaires sur l'homotopie. Nous rassemblons dans la section quatre les énoncés de théorèmes de h et de s-cobordisme différentiels et PL. Dans la cinquième section, nous démontrons les théorèmes de h-cobordisme semi-algébrique et Nash. Et enfin dans la dernière section nous démontrons les théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash.

## 1.1 Variétés de Nash et semi-algébriques

Dans cette section, nous rappelons la définition de variété de Nash que nous utiliserons dans cette thèse. Avant tout rappelons la définition de fonction de Nash.

**Definition 1.1.1.** Soit  $S$  un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

- L'ensemble  $S$  est dit *semi-algébrique* s'il admet une représentation de la forme :

$$S = \bigcup_{i=1}^k \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i_1} > 0, \dots, g_{i_{k_i}} > 0\}$$

où  $f_i, g_{i_j} \in \mathbb{R}[X_1 \dots X_n]$

- Une application de classe  $C^r$  entre deux ensembles semi-algébriques ouverts est appelée *une application de Nash de classe  $C^r$*  si son graphe est un ensemble semi-algébrique.

A partir de cette définition, on peut donner la définition de variété de Nash calquée sur la définition classique de variété différentiable. Plus précisément :

**Definition 1.1.2.** – Un espace topologique  $M$  sera appelé *une variété de Nash de classe  $C^r$*  de dimension  $m$  s'il existe un recouvrement fini  $\{U_i\}$  de  $M$ , des homéomorphismes  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$  tels que

- $\phi_i(U_i \cap U_j)$  est un ouvert semi-algébrique de  $\mathbb{R}^m$  pour tout  $i$  et tout  $j$ ,
- l'application  $\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_j(U_i \cap U_j)$  est une application de Nash de classe  $C^r$  pour tout  $i$  et  $j$ .
- Une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $M$  est une variété  $C^r$ -Nash, est une *fonction de Nash de classe  $C^r$*  si pour tout  $x \in M$  il existe une carte  $(U_i, \phi_i)$  telle que  $f \circ \phi_i^{-1}$  soit de  $C^r$ -Nash.
- Une variété  $C^r$ -Nash  $M$  sera dite *affine* s'il existe un plongement  $C^r$ -Nash de  $M$  dans  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire une application  $C^r$ -Nash  $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui soit :
  - pour  $r = 0$ , un homéomorphisme semi-algébrique de  $M$  sur son image,
  - pour  $r \geq 1$ , de rang maximal et un homéomorphisme semi-algébrique de  $M$  sur son image.

- Remark 1.1.3.** – Une variété de Nash affine de classe  $C^r$  est une sous-variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^n$  qui est un ensemble semi-algébrique. Par contre toute sous-variété de classe  $C^r$  de  $\mathbb{R}^n$  qui est un sous-ensemble semi-algébrique n'est, en général, une sous-variété  $C^r$  Nash de  $\mathbb{R}^n$  que pour  $r > 0$  (cf.[S, Proposition I.3.9, p.28]). En effet pour  $r = 0$ , il existe des sous-variétés  $C^0$  de  $\mathbb{R}^n$  qui sont semi-algébriques dans  $\mathbb{R}^n$  mais n'admettent aucun atlas de Nash cf.[S, Remark V.2.4, p.183].
- Pour  $r < \infty$  toute variété  $C^r$  Nash admet un plongement dans  $\mathbb{R}^n$  (cf. [S, Theorem III.1.1, p.142]), cependant pour  $r = \infty$  il existe des variétés  $C^\infty$  Nash qui ne sont pas affines (cf.[S,§ IV.1, p.155]).

Dans cette thèse nous entendons par :

- *variété semi-algébrique* toute variété  $C^0$  Nash affine,
- *application semi-algébrique* toute application  $C^0$  Nash.
- *variété de Nash* (tout court) toute variété  $C^\omega$  Nash affine,
- *application de Nash* (tout court) toute application  $C^\omega$  Nash.

## 1.2 Quelques rappels de géométrie PL

**Définition 1.2.1.** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ .

- Le *joint* de  $A$  et  $B$ , noté par  $A \star B$ , est défini par le sous-ensemble

$$A \star B = \{\lambda a + \mu b \mid a \in A, b \in B; \lambda, \mu \geq 0 \text{ et } \lambda + \mu = 1\}$$

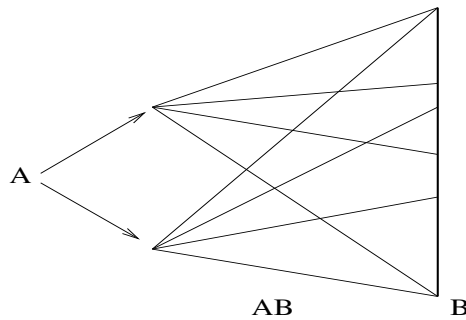


FIGURE 1.1 – joint

Si  $A = \{a\}$  on écrit  $a$  à la place de  $\{a\}$  :  $a \star B$ .

- L'ensemble  $a \star B$  est appelé *cône* de sommet  $a$  et de base  $B$  si chaque point  $x \in a \star B$ , et  $x \neq a$ , s'écrit de *manière unique* par  $x = \lambda a + \mu b$  avec  $b \in B$ ,  $\lambda, \mu \geq 0$  et  $\lambda + \mu = 1$ .  
Sur la première figure  $a_1 \star B_1$  n'est pas un cône selon notre définition par contre la seconde figure  $a_2 \star B_2$  l'est.

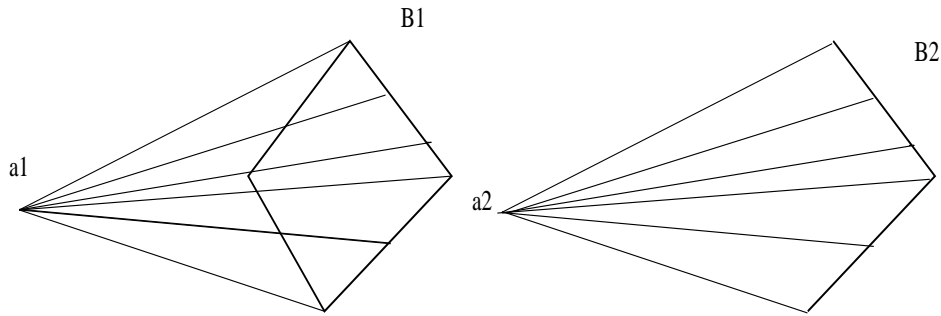


FIGURE 1.2 – cône

- Un sous-ensemble  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est appelé *polyèdre*, si tout point  $a$  de  $P$  admet un voisinage conique  $N = a \star L$  dans  $P$ , où  $L$  est compact. Le cône  $N$  est appelé une *étoile* de  $a$  dans  $P$ , et  $L$  est appelé un *entrelacs* de  $a$  dans  $P$ .
- Une application  $f : P \rightarrow Q$  entre polyèdres est dite PL (piecewise-linear) si chaque point  $a$  de  $P$  admet un voisinage conique  $N = a \star L$  dans  $P$  tel que  $f(\lambda a + \mu x) = \lambda f(a) + \mu f(x)$  où  $x \in L$  et  $\lambda, \mu \geq 0$  et  $\lambda + \mu = 1$ .

**Lemma 1.2.2.** Soient  $P$  et  $Q$  deux polyèdres. Une application  $f : P \rightarrow Q$  est PL si et seulement si son graphe  $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+m} : x \in P\}$  est un polyèdre.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons que  $f$  soit une application PL. Soit  $(x, f(x)) \in \Gamma_f$  avec  $x \in P$ . Il existe un voisinage conique  $N = x \star L$  de  $x$  dans  $P$  tel que :  $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ ,  $y \in L$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $\mu \geq 0$ ,  $\lambda + \mu = 1$  et  $L$  compact. Nous avons  $\Gamma_{f|_L}$  compact dans  $\Gamma_f$ . Le point  $(x, f(x))$  admet un voisinage conique  $N' = (x, f(x)) \star L'$  ou  $L' = \Gamma_{f|_L}$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $\Gamma_f$  est un polyèdre. Soit  $x \in P$ , soit  $N = (x, f(x)) \star L$  un voisinage conique de  $(x, f(x)) \in \Gamma_f$  avec  $L$  compact. Alors l'ensemble  $\{z \in P \mid (z, f(z)) \in N\}$  est un voisinage conique de  $x$  de base  $L' = \pi(L)$  où  $\pi : \Gamma_f \rightarrow P$  définie par  $\pi(x, f(x)) = x$ . En fait

$$(z, f(z)) = \lambda(x, f(x)) + \mu(y, f(y)), (y, f(y)) \in L, \lambda, \mu \geq 0 \text{ et } \lambda + \mu = 1,$$

donc  $z \in N' = x \star L'$ . □

**Remark 1.2.3.** L'homéomorphisme semi-algébrique donné par une projection centrale n'est pas en général une application PL. Par exemple dans la situation en figure ci-dessous on a que cette projection centrale admet pour graphe un morceau d'une hyperbole.

*Démonstration.* Mettons tout ceci dans un repère dont l'axe des abscisses coïncide avec la droite  $(A'B')$ . Les points  $A, B, A', B'$  et  $P$  ont pour coordonnées respectives :  $(a_x, a_y), (b_x, b_y), (a'_x, a'_y), (b'_x, b'_y)$  et  $(p_x, p_y)$ . Posons  $A_t = (1-t)A + tB$  un élément du segment  $[AB]$  où  $t \in [0, 1]$ . Posons  $\pi(A_t) = A'_s$  l'image de  $A_t$  par

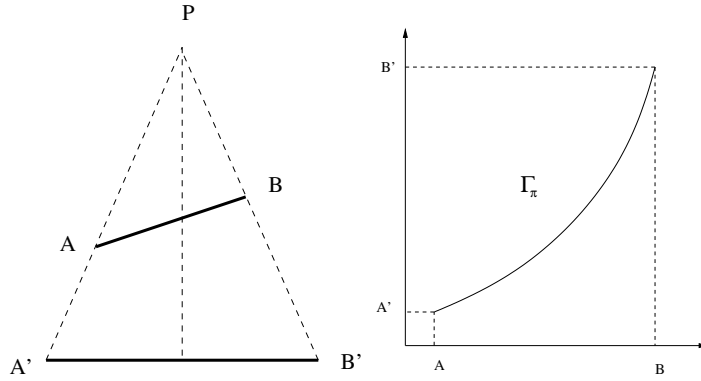


FIGURE 1.3 – projection centrale

la projection centrale  $\pi$  issue du point  $P$  du segment  $[AB]$  sur le segment  $[A'B']$  où  $A'_s = (1 - s)A' + sB'$  et  $s \in [0,1]$ . Alors  $A'_s$  est sur la demi-droite  $[P, A_t)$ , c'est à dire  $A'_s = rP + (1 - r)A_t$  avec  $r \leq 1$ . La projection considérée peut être définie par :  $t \mapsto s$  avec  $s$  et  $t$  vérifiant les trois relations précédentes. Après quelques calculs élémentaires on trouve que :

$$s = \frac{at + b}{ct + d} + e$$

où

$$\begin{aligned} a &= p_y(b_x - a_x) - p_x(b_y - a_y), \quad b = p_y a_x - p_x a_y, \\ c &= (b'_x - a'_x)(a_y - b_y), \quad d = (b'_x - a'_x)(p_y - a_y), \\ e &= \frac{a'_x}{a_x - b'_x}. \end{aligned}$$

Ce qui démontre bien qu'une projection centrale n'est pas en général PL.  $\square$

On note par  $\mathbb{H}^m$  le demi-espace

$$\mathbb{H}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m : x_m \geq 0\}.$$

- Definition 1.2.4.** – Un polyèdre  $M$  est une *variété PL* sans bord de dimension  $m$  si chaque  $x \in M$  admet dans  $M$  un voisinage PL-homéomorphe à un ensemble ouvert dans  $\mathbb{R}^m$ .
- Un polyèdre  $M$  est une *variété PL à bord* de dimension  $m$  si chaque point de  $M$  admet un voisinage PL-homéomorphe à un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{H}^m$ . Le bord de la variété  $M$ , on note  $\partial M$ , est l'ensemble des points de  $M$  tels qu'il existe un voisinage ouvert PL  $U$  de  $x$  dans  $M$  et un homeomorphisme PL  $\phi$  de  $U$  vers un ouvert de  $\mathbb{H}^m$  avec  $\phi(x) \in \phi(U) \cap \partial \mathbb{H}^m$ . On montre que  $\partial M$  est une sous-variété PL de  $M$ .

- Si  $\partial M = \emptyset$  et  $M$  est compacte, la variété  $M$  est dite *fermée*.
- Si  $M$  est une variété PL quelconque, on définit l'*intérieur* de  $M$ , qu'on note  $\text{Int}M$ , par  $\text{Int}M = M - \partial M$ .

Dans ce qui suit nous rappelons la notion de complexe simplicial.

**Definition 1.2.5.** Soient  $a_0, \dots, a_d$  des points de  $\mathbb{R}^n$  affinement indépendants c'est à dire qu'ils ne sont pas tous contenus dans un sous espace affine de dimension  $d - 1$ .

- Le *simplexe* de sommets  $a_0, \dots, a_d$  est l'ensemble défini par :

$$[a_0, \dots, a_d] = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in [0, 1] \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i\}.$$

- Le *simplexe ouvert* correspondant est :

$$]a_0, \dots, a_d[ = \{x \in \mathbb{R}^n : \exists \lambda_0, \dots, \lambda_d \in ]0, 1[ \sum_{i=0}^d \lambda_i = 1 \text{ et } x = \sum_{i=0}^d \lambda_i a_i\}.$$

- Une *face* d'un simplexe  $\sigma = [a_0, \dots, a_d]$  est un simplexe  $\tau = [b_0, \dots, b_e]$  tel que :

$$\{b_0, \dots, b_e\} \subset \{a_0, \dots, a_d\}.$$

Nous notons par  $\tau < \sigma$  le fait que  $\tau$  est une face de  $\sigma$ .

**Definition 1.2.6.** Un *complexe simplicial*  $K$  est un ensemble de simplexes vérifiant les conditions suivantes :

1. Si  $\sigma \in K$  et  $\tau < \sigma$ , alors  $\tau \in K$ ;
2. Si  $\tau, \sigma \in K$ , alors,  $\tau \cap \sigma < \tau$  et  $\tau \cap \sigma < \sigma$ .

L'ensemble  $|K| = \bigcup_{\sigma \in K} \sigma$  est appelé *réalisation géométrique* du complexe simplicial  $K$ .

Un complexe simplicial est dit *fini* s'il admet un nombre fini de simplexes.

**Theorem 1.2.7.** *Tout polyèdre compact est la réalisation géométrique d'un complexe simplicial fini.*

*Démonstration.* Voir [RS, Theorem 2.11, p.16]. □

**Definition 1.2.8.** Soit  $P$  un polyèdre et  $K$  un complexe simplicial. Si  $P = |K|$ ,  $K$  est dit une *triangulation* de  $P$ .

**Definition 1.2.9.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux. Le complexe simplicial  $L$  est une *subdivision simpliciale* du complexe simplicial  $K$ , si  $|L| = |K|$  et chaque simplexe de  $L$  est contenu dans un simplexe de  $K$ . On note  $L \triangleleft K$ .

Supposons le complexe simplicial  $K$  fini. Soit  $\sigma$  un simplexe de  $K$ . Notons par  $\hat{\sigma}$  son barycentre. La *subdivision barycentrique* de  $K$ , que nous notons  $K'$ , est le complexe simplicial fini dont les simplexes sont tous les  $[\hat{\sigma}_0, \hat{\sigma}_1, \dots, \hat{\sigma}_d]$  tels que  $\sigma_i$  est un simplexe de  $K$ , pour  $i = 0, \dots, d$ , et  $\sigma_i$  est une face propre de  $\sigma_{i+1}$ , pour  $i = 0, \dots, d - 1$ .

**Definition 1.2.10.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux. Une application  $f : |K| \longrightarrow |L|$  est dite *simpliciale* si pour tout simplexe  $\sigma$  dans  $K$ ,  $f(\sigma) \in L$  et  $f|_{\sigma}$  est linéaire.

**Definition 1.2.11.** Soit  $\pi : |K| \rightarrow |L|$  une projection centrale qui envoie simplexe sur simplexe. L'application  $\pi$ , en restriction aux sommets, est une application simpliciale. L'application simpliciale  $\pi' : |K| \rightarrow |L|$ , définie en étendant linéairement  $\pi$  restreinte aux sommets sur chaque simplexe, est appelée *projection pseudo-centrale* associée à  $\pi$ .

**Theorem 1.2.12.** Soient  $K$  et  $L$  deux complexes simpliciaux. Soit  $f : |K| \longrightarrow |L|$  une application PL. Alors, il existe des subdivisions simpliciales  $K' \triangleleft K$ ,  $L' \triangleleft L$  telles que  $f : |K'| \longrightarrow |L'|$  est simpliciale.

*Démonstration.* Voir [RS, Theorem 2.14, p.17]. □

**Definition 1.2.13.** L'*étoile* d'un sommet  $a$  relative à un complexe simplicial  $K$  est l'ensemble de tous les simplexes dans  $K$  qui admettent  $a$  comme un sommet. On la note  $st(a, K)$ . Nous pouvons l'écrire comme suit :

$$st(a, K) = \{\tau \in K | a < \tau\}$$

Remarquons que l'étoile d'un sommet relativement à un complexe simplicial donné n'est pas nécessairement un complexe simplicial.

L'*entrelacs* d'un sommet  $a$  relatif à un complexe simplicial  $K$  est l'ensemble de tous les simplexes  $\tau$  dans  $K$  tels que leurs joints  $a \star \tau$  avec  $\tau$  des simplexes de  $K$  qui n'admettent pas  $a$  comme sommet. On note  $lk(a, K)$ . On peut l'écrire aussi comme suit :

$$lk(a, K) = \{\tau \in K | a \star \tau \in K, a \notin \tau\}.$$

**Remark 1.2.14.** La réalisation géométrique  $N = |st(a, K)|$  (respectivement  $L = |lk(a, K)|$ ) est une étoile de  $a$  (respectivement un entrelacs de  $a$ ) dans le polyèdre  $|K|$  selon la définition d'étoile (respectivement d'entrelacs) donnée tout au début de cette section pour définir un polyèdre.

Réciproquement, la définition d'une étoile (respectivement d'un entrelacs), comme donnée dans la définition de polyèdre, concorde avec la définition ci-dessus. En effet, soit  $P$  un polyèdre compact et  $a$  un point de  $P$ . Soit une étoile  $N = a \star L$  de  $a$  dans  $P$ . Triangulons  $P - (N - L)$  avec  $L$  un sous complexe et étendons à  $N$  en prenant le cône de  $L$  à partir de  $a$ . Cela nous donne un complexe simplicial  $K'$  avec  $|K'| = P$ . Par conséquent  $N = |st(a, K')|$  et  $L = |lk(a, K')|$ .

**Lemma 1.2.15.** Soit  $K$  un complexe simplicial,  $K' \triangleleft K$  et  $a$  un sommet dans  $K$ . Alors,  $lk(a, K)$  est PL homéomorphe à  $lk(a, K')$ .



*Démonstration.* Soient  $\sigma_i, i = 1, \dots, r$  les simplexes de  $\text{lk}(a, K')$ . Posons :

$$\sigma_i^+ = \{(1-t)a + tb \mid b \in \sigma_i, t \geq 0\}.$$

Alors  $M = \{\sigma_i^+ \cap \tau \mid \tau \in \text{lk}(a, K)\}$  est une subdivision simpliciale de  $\text{lk}(a, K)$ . La projection centrale, notons  $\pi$ , issue du point  $a$  de  $|\text{lk}(a, K')|$  sur  $|M|$ , est un homéomorphisme qui envoie simplexe sur simplexe. Par conséquent, elle est un isomorphisme simplicial par restriction aux sommets. Il vient que l'application pseudo-centrale  $\pi' : |\text{lk}(a, K')| \longrightarrow |M|$  associée à  $\pi$  est un isomorphisme simplicial. En particulier  $\pi'$  est un homéomorphisme PL. D'où le résultat.  $\square$

**Definition 1.2.16.** Tout polyèdre PL-homéomorphe à  $I^n$  sera appelé n-boule PL. Tout polyèdre PL-homéomorphe à  $\partial I^{n+1}$  sera appelé n-sphère PL.

**Theorem 1.2.17.** Soit  $P$  un polyèdre. Le polyèdre  $P$  est une variété PL sans bord de dimension  $m$  si et seulement si pour tout  $x \in P$  un entrelacs de  $x$  dans  $P$  est une  $(m-1)$ -sphère PL.

*Démonstration.* Evident.  $\square$

Pour clore cette section, nous rappelons brièvement le concept de voisinage régulier. Nous avons tiré cette définition de [RS, ch.3, p.32] où elle est décrite de manière détaillée.

**Definition 1.2.18.** Supposons  $L \subset K$  deux complexes simpliciaux.

- Le complexe simplicial  $L$  est dit *plein* dans  $K$  si tout simplexe dans  $K$ , qui a tous ses sommets dans  $L$  est dans  $L$ .
- Le *voisinage simplicial* de  $L$  dans  $K$  est défini par

$$N(L, K) = \{\sigma \mid \sigma \in K, \sigma < \tau, \tau \cap |L| \neq \emptyset\}.$$

- Le *complementaire simplicial* de  $L$  dans  $K$  est défini par

$$C(L, K) = \{\sigma \mid \sigma \in K, \sigma \cap |L| = \emptyset\}$$

- Une subdivision  $K' \triangleleft K$  obtenue en subdivisant  $K$  en dehors de  $L \cup C(L, K)$  est appelé *une dérivée de  $K$  près de  $L$* . Alors  $K'$  est obtenu à partir de  $K$  en subdivisant les simplexes qui rencontrent  $|L|$  mais qui ne sont pas dans  $L$ .

Supposons que  $L$  est plein dans  $K$  et  $K'$  est une dérivée de  $K$  près de  $L$ . On appelle  $N(L, K')$  un *voisinage dérivé* de  $L$  dans  $K$ .

- Supposons maintenant que  $X \subset Y$  sont deux polyèdres avec  $X$  compact,  $K$  une triangulation d'un voisinage de  $X$  dans  $Y$  avec  $|L| = X$  où  $L$  est plein dans  $K$ , et que  $K'$  est une dérivée de  $K$  près de  $L$ . Le polyèdre issu de la réalisation géométrique  $N = |N(L, K')|$  est appelé *voisinage régulier* de  $X$  dans  $Y$ .

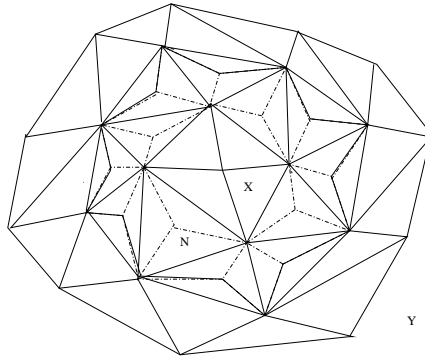


FIGURE 1.4 – Voisinage régulier

Dans le but de rappeler la définition d'équivalence d'homotopie simple, nous rappelons en premier lieu les définitions de collapse et expansion.

**Definition 1.2.19.** Soient  $P$  et  $Q$  deux polyèdres tels que  $Q \subset P$ . Soit  $B^n$  une  $n$ -boule PL. Si  $P = Q \cup B^n$  et  $Q \cap B^n = B^{n-1}$  avec  $B^{n-1} \subset \partial B^n$ , on dit que  $Q$  est obtenu de  $P$  par un *collapse élémentaire*. On le note par  $P \Downarrow Q$ . On dit aussi qu'il y a une *expansion élémentaire* de  $Q$  en  $P$ .

On dit que  $P$  collapse sur  $Q$  et on écrit  $P \searrow Q$  s'il existe une suite de collapses élémentaires  $P = P_0 \Downarrow P_1 \Downarrow \dots \Downarrow P_m = Q$ . On dira dans ce cas aussi qu'il y a une expansion de  $Q$  en  $P$  et on note  $Q \nearrow P$ .

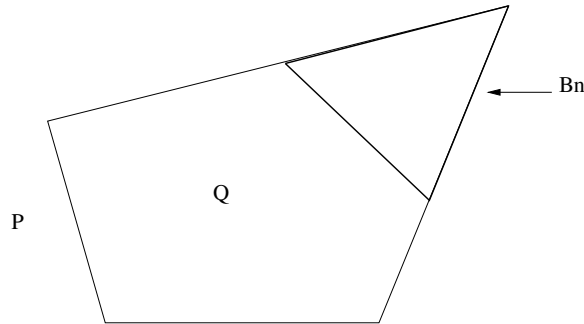


FIGURE 1.5 – Collapse-expansion élémentaire

**Definition 1.2.20.** Soient  $Q \subset P$  deux polyèdres. Le polyèdre  $P$  est dit *simplement homotope* au polyèdre  $Q$  s'il existe une suite de collapses et expansions

$$P = P_0 \searrow P_1 \nearrow P_2 \searrow \dots \searrow P_n = Q \text{ rel } Q,$$

où *rel*  $Q$  veut dire que durant les opérations de collapses et expansions  $Q$  reste inchangé. Nous dirons :  $P$  est *s-homotope* à  $Q$ .

Nous rappelons le théorème qui dit qu'un voisinage régulier d'un polyèdre  $P$  compact collapse sur  $P$ .

**Theorem 1.2.21.** *Soit  $M$  une variété PL et  $X \subset M$  un polyèdre compact. Soit  $N$  un voisinage de  $X$  dans  $M$ . Si  $N$  est un voisinage régulier de  $X$ , alors on a  $N \searrow X$ .*

*Démonstration.* Se déduit de [H, Lemma 2.10, p.55] et [H, Theorem 2.11, p.56].  $\square$

## 1.3 Homotopie

Rappelons dans cette section quelques notions d'homotopie que nous utiliserons dans cette thèse.

**Definition 1.3.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Soient  $f$  et  $g$  deux applications continues de  $X$  vers  $Y$ . Les applications  $f$  et  $g$  sont dites *homotopes* et on note  $f \simeq g$ , s'il existe une application continue  $H : X \times I \rightarrow Y$  telle que  $H_0 = f$  et  $H_1 = g$  où  $H_0(x) = H(x, 0)$  et  $H_1(x) = H(x, 1)$  pour tout  $x \in X$ . L'application  $H$  est appelée *homotopie* entre les applications  $f$  et  $g$ . La relation " $\simeq$ " est une relation d'équivalence.

**Definition 1.3.2.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques. Une application  $f : X \rightarrow Y$  est dite *équivalence d'homotopie* s'il existe une application continue  $g : Y \rightarrow X$  telle que  $f \circ g \simeq id_Y$  et  $g \circ f \simeq id_X$ .

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques tels que  $X \subset Y$ . L'ensemble  $X$  est un *rétracte par déformation* de  $Y$  s'il existe une homotopie continue  $H : Y \times I \rightarrow Y$  telle que :

- $H_t|_X = id_X \quad \forall t \in I$ ,
- $H_0 = id_Y, H_1 : Y \rightarrow X$ .

Il est clair que l'inclusion  $X \hookrightarrow Y$ , dans ce cas, est une équivalence d'homotopie.

**Definition 1.3.3.** Soient  $f$  et  $g$  deux applications de  $X \rightarrow Y$ , où  $X$  et  $Y$  sont des espaces topologiques. Soit  $Z \subset X$ . La notation  $f \simeq g \text{ (rel } Z)$  signifie qu'il existe une homotopie  $H : X \times I \rightarrow Y$ , avec  $H_0 = f$  et  $H_1 = g$ , vérifiant les conditions suivantes :

- $f|_Z = g|_Z$ ,
- $H(x, t) = f(x) = g(x)$  pour tout  $x \in Z$

Dans le but de démontrer le Lemme d'approximation de fonctions continues par des fonctions PL, nous rappelons le Lemme qui suit.

**Lemma 1.3.4.** *Soient  $P_1, P_2$  et  $P_3$  des sous polyèdres du polyèdre  $P$ . Soit  $f : P \rightarrow I^n$  une application continue telle que  $f|_{P_3}$  est PL. Supposons  $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe une application  $f' : P \rightarrow I^n$  vérifiant les propriétés suivantes :*

1.  $f'|_{P_1}$  est PL
2.  $f'|_{P_2 \cup P_3} = f|_{P_2 \cup P_3}$
3.  $\|f'(x) - f(x)\| < \varepsilon$  pour tout  $x \in P$
4.  $f' \simeq f \text{ rel } P_2 \cup P_3$ .

*Démonstration.* Soient  $K_1, K_2, K_3 \subset K$  les complexes simpliciaux qui triangulisent les polyèdres  $P_1, P_2, P_3 \subset P$  tels que  $K_1$  soit plein dans  $K$  et que  $f(\sigma)$  soit contenu strictement dans une boule de rayon  $\varepsilon/2$  pour tout  $\sigma \in K$ . Définissons  $f' : P \rightarrow I^n$  en posant  $f'(v) = f(v)$  pour tout sommet  $v$  de  $K$ . Alors pour un simplexe  $\sigma$  de  $K_1$ ,  $f'|_\sigma$  est définie en étendant linéairement la définition de  $f'$  sur les sommets de  $\sigma$ . Si  $\sigma \cap |K_1| = \emptyset$ , posons  $f'|_\sigma = f|_\sigma$ . Finalement si  $\sigma \in K - K_1$ , mais avec  $\sigma \cap |K_1| \neq \emptyset$ , on peut poser  $\sigma = \sigma_1 \star \sigma_2$  avec  $\sigma_1 \in K_1$  et  $\sigma_2 \cap |K_1| = \emptyset$  (puisque  $K_1$  est plein dans  $K$ ). Alors, définissons  $f'|_\sigma$  en étendant linéairement  $f'$  déjà définie sur  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ . Il est clair que  $f'|_{P_2 \cup P_3} = f|_{P_2 \cup P_3}$  et  $f'|_{P_1}$  est PL. Et on a aussi  $\|f'(x) - f(x)\| < \varepsilon$  car pour tout  $\sigma \in K$ ,  $f'(\sigma) \subset B(\varepsilon/2)$  avec  $B(\varepsilon/2)$  une boule ouverte. Enfin l'application  $H : P \times I \rightarrow I^n$ , définie par  $H(x, t) = tf(x) + (1-t)f'(x)$ , est une homotopie qui donne  $f' \simeq f \text{ rel } P_2 \cup P_3$ . D'où le résultat.  $\square$

**Lemma 1.3.5.** *Soit  $f : P \rightarrow Q$  une application continue d'un polyèdre compact  $P$  vers une PL-variété  $Q$  de dimension  $q$ . Soit  $P_0 \subseteq P$  un sous polyèdre compact de  $P$  sur lequel  $f$  est une application PL. Soit  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit. Alors il existe une application  $f' : P \rightarrow Q$  telle que :*

1.  $f' \simeq f \text{ rel } P_0$ ,
2.  $\|f(x) - f'(x)\| < \varepsilon$  pour tout  $x \in P$ ,
3.  $f'$  est PL.

*Démonstration.* Le polyèdre  $Q$  est une variété PL. Soit  $L$  une triangulation de  $Q$ . Remarquons que  $Q = \cup_{v \in L^0} |st(v, L)|$ , où  $L^0$  désigne l'ensemble des sommets de  $L$ . Alors on peut trianguler le couple  $(P_0, P)$  par des complexes simpliciaux  $(K_0, K)$  avec  $K_0 \subseteq K$  tels que pour tout simplexe  $\sigma \in K$ ,  $f(\sigma)$  soit contenu dans l'étoile d'un sommet de  $L$ . Comme  $P, P_0$  sont compacts, il vient que  $cl(P - P_0)$  est compact. On a donc  $K$  et  $K_0$  des complexes simpliciaux finis. Soit

$$A = \{\sigma_i : i = 1, \dots, r\}$$

l'ensemble des simplexes de  $K \setminus K_0$  ordonné de manière que les simplexes suivent leurs faces. Par exemple, commencer par les sommets, ensuite les 1-simplexes, etc.. Posons

$$K_i = K_0 \cup \bigcup_{j=1}^i \sigma_j.$$

Définissons par récurrence les applications suivantes :  $f_i : P \rightarrow Q$

1.  $f_i|_{|K_i|}$  est PL
2.  $f_i \simeq f \text{ rel } P_0$
3. si  $\sigma \in K$ ,  $f_i(\sigma) \subset \text{Int}_Q|st(v, L)|$  avec  $v$  un sommet de  $L$ ,
4.  $\|f_i(x) - f_{i-1}(x)\| < \frac{\varepsilon}{r}$ , pour  $i \geq 1$ .

On a  $f_0 = f$  qui vérifie l'hypothèse de récurrence. Supposons  $f_{i-1}$  définie. Alors on a  $f_{i-1}(\sigma_i) \subset \text{Int}_Q|st(v, L)|$  avec  $v$  un sommet de  $L$ .

Soit  $K'$  une subdivision de  $K$  tel que  $N = |N(\sigma_i, K')|$  est un voisinage régulier de  $\sigma_i$  avec  $N \subset f_{i-1}^{-1}(\text{Int}_Q|st(v, L)|)$ .

Posons  $R = N$ ,  $R_1 = \sigma_i$ ,  $R_2 = \text{Fr}_{|P}(N)$  où  $\text{Fr}_{|P}$  représente la frontière relativement à  $P$  et  $R_3 = N \cap |K_{i-1}|$ . Soit  $h : |st(v, L)| \rightarrow I^q$  un homéomorphisme PL. L'application  $h \circ (f_{i-1}|_R) : N \rightarrow I^q$  est PL sur  $R_3$  et  $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ . Alors, par le Lemme précédent, soit  $\varepsilon_i$ , il existe une application  $g : R \rightarrow I^q$  telle que  $g|_{R_1}$  est PL,  $g|_{R_2 \cup R_3} = h \circ (f_{i-1}|_{R_2 \cup R_3})$  et  $\|g(x) - h \circ f_{i-1}(x)\| < \varepsilon_i$ .

Définissons  $f_i : P \rightarrow Q$  par :

$$f_i(x) = \begin{cases} h^{-1} \circ g(x) & \text{si } x \in R \\ f_{i-1}(x), & \text{si } x \in cl(P - R). \end{cases}$$

Comme  $R$  compact avec  $\varepsilon_i$  suffisamment petit on peut s'assurer que

$\|f_i(x) - f_{i-1}(x)\| < \frac{\varepsilon}{r}$  et pour  $\sigma \in K$   $f_i(\sigma) \subset \text{Int}_Q|st(v, L)|$  avec  $v$  un sommet de  $L$ . Il vient que l'application  $f_i$  est bien définie et vérifie les point 1), 3) et 4) de l'hypothèse de récurrence. En plus par le point 4) du Lemme précédent, on a une homotopie  $H$  qui définit :  $f_i|_R \simeq f_{i-1}|_R \text{ rel } R_2 \cup R_3$ . En étendant l'homotopie  $H$  définie précédemment par  $H(x, t) = f_{i-1}(x)$  pour tout  $x \in cl(P - R)$  et pour tout  $t \in I$ , on a  $f_i \simeq f_{i-1} \text{ rel } P_0$ .

Posons  $f' = f_r$ , on voit que  $f'$  est PL. En plus on a

$$\|f'(x) - f(x)\| \leq \|f'(x) - f_{r-1}(x)\| + \dots + \|f_1(x) - f(x)\|.$$

Il vient que  $\|f'(x) - f(x)\| < \varepsilon$ . On a aussi que :

$$f' \simeq f_{r-1} \text{ rel } P_0, \dots, f_1 \simeq f \text{ rel } P_0.$$

Il vient aisément que  $f' \simeq f \text{ rel } P_0$ . Ce qui achève la démonstration. □

Le lemme précédent est démontré sous des hypothèses plus générales dans [H] page 98.

**Definition 1.3.6.** Soit  $P$  un polyèdre. Nous disons que  $P$  est *PL-simplement connexe* si pour  $x \in P$ , tout lacet PL dans  $P$  basé en  $x$  est homotope au lacet constant à base le point  $x$  avec une homotopie PL.

**Lemma 1.3.7.** Soit  $M$  une PL- variété. Alors,  $M$  est simplement connexe si et seulement s'il est PL-simplement connexe.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons  $M$  un polyèdre simplement connexe. Considérons  $\gamma : I \longrightarrow M$  un lacet PL dans  $M$  avec point de base  $x \in M$  et  $I = [0, 1]$ . Puisque  $\gamma$  est continu, par hypothèse on a  $\gamma$  topologiquement homotope au lacet constant à base  $x$ . Ce qui revient à dire qu'il existe une homotopie continue  $H : I \times [0, 1] \longrightarrow M$  telle que

- $H_0 = \gamma, H_1 = x$  et
- $H|_{0 \times [0,1] \cup 1 \times [0,1]} = x$ .

Posons  $P_0 = \partial P$  avec  $P = I \times [0, 1]$ , il est clair que  $H|_{P_0}$  est une application PL. Par le lemme d'approximation 1.3.5, il existe une application PL, notons  $H'$ , telle que  $H'|_{P_0} = H|_{P_0}$ . Par conséquent  $\gamma$  est PL homotope au lacet constant à base  $x$ .

$\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons que  $M$  est PL-simplement connexe. Considérons  $\gamma_0$  un lacet continu dans  $M$  basé en  $x$ . Par le lemme d'approximation 1.3.5 il existe un lacet PL  $\gamma_1$  tel que  $\gamma_0 \simeq \gamma_1 \text{ rel } x$ . Puisque  $M$  est PL-simplement connexe, le lacet  $\gamma_1$  est PL homotope au lacet constant basé en  $x$ . Il s'ensuit que  $\gamma_0$  est topologiquement homotope au lacet constant à base  $x$ . Ce qui prouve le lemme.  $\square$

Dans le lemme suivant, nous montrons qu'une rétraction par déformation continue d'un polyèdre sur un autre peut être approchée par une rétraction par déformation PL.

**Lemma 1.3.8.** *Soient  $P$  et  $Q$  deux variétés PL tels que  $Q$  soit compacte et contenue dans  $P$ . Si  $Q$  est un rétracte par déformation continue de  $P$ , alors  $Q$  est un rétracte par déformation PL de  $P$ .*

*Démonstration.* Etant donné que  $P$  est une variété PL, alors  $P \times [0, 1]$  est une variété PL. Soit une homotopie  $H : P \times [0, 1] \longrightarrow P$  telle que

- $H_t|_Q = id_Q \forall t \in I$
- $H_0 = id_P, H_1 : P \longrightarrow Q$

Il est clair que  $P_0 = P \times \{0\} \cup Q \times [0, 1]$  est un sous polyèdre de  $P \times I$ . On vérifie facilement que  $H|_{P_0}$  est une application PL. Il vient, par le lemme d'approximation 1.3.5, qu'il existe une PL homotopie  $H' : P \times [0, 1] \longrightarrow P$  avec  $H' \simeq H \text{ rel } P_0$ . Puisque  $H'$  est très proche de  $H$ , on peut supposer qu'il existe un voisinage régulier  $R$  de  $Q$  contenant  $H'_1(P)$ . Remarquons qu'un collapse élémentaire (et alors un collapse) donne un rétracte par déformation PL. Alors, comme conséquence du théorème 1.2.21,  $Q$  est un rétracte par déformation PL de  $R$ . Ce qui veut dire qu'il existe une PL homotopie  $H'' : R \times [0, 1] \rightarrow P$  telle que :

- $H''_t|_Q = id_Q \forall t \in I$
- $H''_0 = id_R, H''_1 : R \longrightarrow Q$  est surjective.

Posons :

$$F(x, t) = \begin{cases} H'(x, 2t) & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ H''(H'_1(x), 2t - 1), & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Il est clair que  $F$  est une PL homotopie. Cela montre bien que  $Q$  est un rétracte par déformation PL de  $P$ .  $\square$

## 1.4 Théorèmes de h et s-cobordisme différentiable et PL

Nous rappelons dans cette section les théorèmes de h et s-cobordisme différentiables et PL. Nous commençons par la définition d'un h-cobordisme.

**Definition 1.4.1.** Soient  $M, M_0, M_1$  des variétés (différentiable, PL) compactes telles que :

- $\partial M = M_0 \cup M_1$
- $M_0 \cap M_1 = \emptyset$ .

Alors, le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est appelé *cobordisme (différentiable, PL)*.

Le cobordisme  $(M, M_0, M_1)$ , différentiable ou PL, est dit un *h-cobordisme*, différentiable ou PL, si les inclusions  $M_0 \hookrightarrow M$  et  $M_1 \hookrightarrow M$  sont des équivalences d'homotopie différentiable ou PL.

Une démonstration du théorème de h-cobordisme dans le cas différentiable se trouve dans [M].

**Theorem 1.4.2.** (Théorème de h-cobordisme différentiable)

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme différentiable simplement connexe.*

*Si  $\dim M \geq 6$  alors  $M$  est difféomorphe à  $M_0 \times I$ , où  $I = [0, 1]$ .*

Le même théorème a été démontré dans le cas PL, voir [RS]. Nous donnons l'énoncé.

**Theorem 1.4.3.** (Théorème de h-cobordisme PL)

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme PL, simplement connexe.*

*Si  $\dim M \geq 6$  alors  $M$  est PL homéomorphe à  $M_0 \times I$ , où  $I = [0, 1]$ .*

Si  $M$  est une variété différentiable compacte, il est bien connu qu'elle admet une structure PL unique à isomorphisme PL près. Alors,  $M$  est s-homotopie à  $M_0$  si leur triangulations  $|K|$  et  $|K_0|$  sont s-homotopes. Ceci est bien défini car la s-homotopie de deux polyèdres ne dépend pas d'une triangulation (cf [RS, Lemma 5, 105]). Une généralisation du théorème de h-cobordisme est appelée théorème de s-cobordisme. Au lieu d'imposer que les variétés soient simplement connexes, on impose seulement l'équivalence d'homotopie simple entre elles.

**Theorem 1.4.4.** (Théorème de s-cobordisme différentiable)

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme différentiable connexe de dimension  $\geq 6$ . Alors,  $M$  et  $M_0 \times I$  sont difféomorphes si et seulement si  $M$  est s-homotopie à  $M_0$  et  $M_1$ .*

*Démonstration.* Voir [K]. □

Voici la version PL du théorème s-cobordisme.

**Theorem 1.4.5.** (Théorème de s-cobordisme PL)

*Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme PL connexe de dimension  $\dim M \geq 6$ . Alors  $M$  et  $M_0 \times I$  sont PL-homéomorphes si et seulement si  $M$  est s-homotope à  $M_0$  et  $M_1$ .*

*Démonstration.* Voir [RS, Theorem 6.19, p.89]. □

## 1.5 Théorèmes de h-cobordisme semi-algébrique et Nash

Dans cette section nous démontrerons les théorèmes de h-cobordisme semi-algébrique et Nash. Nous commençons d'abord par préciser les éléments utiles pour la démonstration de ces théorèmes.

Un ensemble semi-algébrique compact a une structure PL grâce au théorème de triangulation semi-algébrique. Une démonstration valide sur tout corps réel clos se trouve dans [BCR, p. 217].

**Theorem 1.5.1.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble semi-algébrique compact, et  $S_1, \dots, S_p$ , des sous-ensembles semi-algébriques de  $S$ . Alors il existe un complexe simplicial fini  $K$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un homéomorphisme semi-algébrique  $h : |K| \rightarrow S$ , tels que chaque  $S_k$  est l'image par  $h$  d'une union de simplexes ouverts de  $K$ .*

Une telle structure est unique par un résultat de Shiota et Yokoi (cf. [SY]) que nous pouvons énoncer dans ce cas comme suit :

**Theorem 1.5.2.** *Deux polyèdres compacts sont semi-algébriquement homéomorphes si et seulement s'ils sont PL homéomorphes.*

Rappelons le corollaire suivant qui nous permet de ramener, à rétraction par déformation semi-algébrique près, tout ensemble semi-algébrique à un ensemble semi-algébrique borné.

**Corollary 1.5.3.** *Soit  $S$  un ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$ , tel que  $S \cap B(0, r)$  est un rétracte par déformation semi-algébrique de  $S$  où  $B(0, r)$  est une boule fermée, i.e il existe une application semi-algébrique ( $C^0$ )  $h : [0, 1] \times S \rightarrow S$  telle que pour tout  $x \in S$ ,  $h(0, x) = 0$ ,  $h(1, x) \in S \cap B(0, r)$  et pour tout  $t \in [0, 1]$  et tout  $x \in S \cap B(0, r)$ ,  $h(t, x) = x$ .*

*Démonstration.* Voir [BCR, Corollary 9.3.7, p.225] où il est démontré pour tout corps réel clos. □



Nous montrons d'abord l'analogie du lemme 1.3.7 dans le cas semi-algébrique. C'est à dire pour un ensemble semi-algébrique  $X$  dans  $\mathbb{R}^n$ , dire qu'il est simplement connexe est équivalent à dire qu'il est semi-algébriquement simplement connexe. Pour la simple connexité semi-algébrique, on considère les lacets semi-algébriques et les homotopies semi-algébriques.

**Lemma 1.5.4.** *Soit  $X$  un ensemble semi-algébrique fermé. L'ensemble  $X$  est simplement connexe si et seulement s'il est semi-algébriquement simplement connexe.*

Nous reviendrons sur ce type de propriétés au chapitre 2 section 2.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Supposons  $X$  topologiquement simplement connexe. Soit  $\gamma$  un lacet semi-algébrique dans  $X$  basé au point  $x$ . Puisque  $\gamma$  est compact, il existe une boule fermée  $B$  telle que  $X \cap B \supset \gamma$ . Par le théorème de triangulation semi-algébrique, il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $h : |K| \rightarrow B \cap X$  avec  $|K|$  un polyèdre. Nous avons alors un lacet semi-algébrique  $h^{-1} \circ \gamma$ . Par le lemme d'approximation, il existe un lacet PL dans  $|K|$ , disons  $\gamma'$ , tel que  $h^{-1} \circ \gamma \simeq \gamma'(\text{rel } h^{-1}(x))$ . En prenant  $B$  de rayon suffisamment grand,  $B \cap X$  est simplement connexe car il est un rétracte par déformation semi-algébrique de  $X$  (Corollaire 1.5.3). Le polyèdre  $K$  est simplement connexe comme image réciproque de  $B \cap X$  (qui est simplement connexe) par l'homéomorphisme semi-algébrique  $h$ . Le lemme 1.3.7 implique que  $|K|$  est PL simplement connexe. Alors  $\gamma'$  est PL homotope au lacet constant basé au point  $h^{-1}(x)$ . Par conséquent, on vérifie facilement que  $\gamma$  est semi-algébriquement homotope au lacet constant basé au point  $x$ .

$\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons  $X$  semi-algébriquement simplement connexe. Soit  $\gamma$  un lacet continu dans  $X$  avec point de base  $x$ . Soit une boule  $B$  contenant  $\gamma$ . Par le théorème de triangulation semi-algébrique, il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $h : |K| \rightarrow B \cap X$  avec  $K$  un polyèdre. En prenant la boule  $B$  suffisamment grande, on a que  $B \cap X$  est un rétracte par déformation semi-algébrique de  $X$  (Corollaire 1.5.3). Alors le polyèdre  $K$  est semi-algébriquement simplement connexe comme image réciproque de  $B \cap X$  (qui est semi-algébriquement simplement connexe) par l'homéomorphisme semi-algébrique  $h$ . Alors le lacet  $h^{-1} \circ \gamma$  est un lacet continu basé en  $h^{-1}(x)$  dans le polyèdre  $|K|$ . Par le Lemme 1.3.5, il existe un lacet PL  $\gamma'$  tel que  $h^{-1} \circ \gamma \simeq \gamma'(\text{rel } h^{-1}(x))$ . Par hypothèse  $\gamma'$  est semi-algébriquement homotope au lacet constant  $c_{h^{-1}(x)}$ . Il s'ensuit que  $h^{-1} \circ \gamma$  est continument homotope au lacet constant  $c_{h^{-1}(x)}$ . En appliquant  $h$  à cette homotopie on trouve que  $\gamma$  est continument homotope au lacet constant  $c_x$ . D'où le résultat.  $\square$

Le théorème de triangulation semi-algébrique nous assure que toute variété semi-algébrique compacte est semi-algébriquement homéomorphe à un polyèdre. Par la proposition suivante nous montrons qu'un tel polyèdre est de surcroît une variété PL.

**Proposition 1.5.5.** *Toute variété semi-algébrique est semi-algébriquement homéomorphe à une variété PL.*

*Démonstration.* Soit  $M$  une variété semi-algébrique compacte de dimension  $m$ . Par le théorème de triangulation semi-algébrique, il existe un polyèdre  $|K|$  et un homéomorphisme semi-algébrique  $h$  tels que :

$$h : |K| \longrightarrow M$$

où  $K$  un complexe simplicial fini. Il reste donc à montrer que le polyèdre  $|K|$  est une variété PL. Prenons  $x \in |K|$ , il existe un et un seul  $y \in M$  tel que  $h(x) = y$ . Par la définition d'une variété semi-algébrique, il existe un voisinage  $V$  de  $y$  dans  $M$  semi-algébriquement homéomorphe à un ensemble semi-algébrique ouvert  $U$  dans  $\mathbb{R}^m$  c'est à dire qu'il existe une carte semi-algébrique  $(V, \phi)$  telle que  $\phi : V \longrightarrow U$  est un homéomorphisme semi-algébrique. Alors, il existe un voisinage ouvert  $h^{-1}(V)$  de  $x$  dans  $|K|$  semi-algébriquement homéomorphe à un sous-ensemble ouvert semi-algébrique  $U$  de  $\mathbb{R}^m$ . Il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la boule fermée  $B(\phi(y), \epsilon) \subset U$ . Il en découle que l'ensemble  $h^{-1} \circ \phi^{-1}(B(\phi(y), \epsilon))$  est un voisinage fermé borné de  $x$  dans  $|K|$ . Posons  $W = h^{-1} \circ \phi^{-1}(B(\phi(y), \epsilon))$ . En supposant que la triangulation  $h$  est compatible avec  $\phi^{-1}(B(\phi(y), \epsilon))$ , on a que  $W$  est polyèdre. Il vient que  $W$  et  $B(\phi(y), \epsilon)$  sont semi-algébriquement homéomorphes. Par l'unicité de la triangulation semi-algébrique (Théorème 1.5.2), ils sont PL homéomorphes. Alors  $\text{Int}(W)$  et  $\text{Int}(B(\phi(y), \epsilon))$  sont PL homéomorphes. Cela montre que  $|K|$  est une variété PL.  $\square$

On peut définir d'une manière naturelle la notion du h-cobordisme semi-algébrique.

**Definition 1.5.6.** Soient  $(M, M_0, M_1)$  des variétés semi-algébriques compactes telles que :

- $\partial M = M_0 \cup M_1$
- $M_0 \cap M_1 = \emptyset$ .

Alors, le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est appelé *cobordisme semi-algébrique*.

Un cobordisme semi-algébrique  $(M, M_0, M_1)$  est dit un *h-cobordisme semi-algébrique* si les inclusions  $M_0 \hookrightarrow M$  et  $M_1 \hookrightarrow M$  sont des équivalences d'homotopie semi-algébrique, c'est à dire, les rétractions par déformations sont ici semi-algébriques.

Nous pouvons donc démontrer le théorème de h-cobordisme version semi-algébrique, le premier résultat important de cette thèse.

**Theorem 1.5.7.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme semi-algébrique simplement connexe. Si  $\dim M \geq 6$  alors  $M$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $M_0 \times I$ , où  $I = [0, 1]$ .*

*Démonstration.* Par la proposition 1.5.5, il existe un homéomorphisme semi-algébrique

$$\lambda : |K| \longrightarrow M$$

tel que  $|K|$  soit une variété PL, où  $K$  est complexe simplicial fini. Nous pouvons supposer que cette triangulation soit compatible avec les sous-variétés  $M_0$  et  $M_1$ . On en déduit des sous complexes simpliciaux  $K_0, K_1 \subset K$  qui triangularisent les polyèdres  $\lambda^{-1}(M_0)$  et  $\lambda^{-1}(M_1)$ . Il s'ensuit que  $\lambda^{-1}(M_0) = |K_0|$  et  $\lambda^{-1}(M_1) = |K_1|$  sont des sous-variétés PL de  $|K|$ . Les variétés PL  $|K|$ ,  $|K_0|$  et  $|K_1|$  sont bien sûr compactes. Mais nous avons  $|K_0|$  et  $|K_1|$  qui sont des rétractes par déformation semi-algébriques de  $|K|$ . Par le lemme 1.3.8, ils sont aussi des rétractes par déformation PL. Il s'ensuit que  $(|K|, |K_0|, |K_1|)$  est un h-cobordisme PL simplement connexe. Le problème de connexité simple en passant par ces trois catégories est résolu par les lemme 1.3.7 et lemme 1.5.4 démontrés ci-dessus. Alors par le théorème de h-cobordisme PL

$$|K| \stackrel{PL}{\cong} |K_0| \times I,$$

où  $\stackrel{PL}{\cong}$  désigne l'homéomorphisme PL. Puisqu'une variété PL compacte est une variété semi-algébrique et un homéomorphisme PL entre des variétés PL compactes est un homéomorphisme semi-algébrique, il vient aisément que  $M$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $M_0 \times I$ . Ce qu'il fallait démontrer.  $\square$

### Cas relatif

Soient  $M_0$  et  $M_1$  deux variétés PL compactes à bord et de dimension  $m - 1$ . Soit  $M$  une variété PL compacte de dimension  $m$ . Le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est appelé *cobordisme à bord* si  $M_0 \cup M_1 \subset \partial M$ . Alors  $V = cl(\partial M - M_0 - M_1)$  est un cobordisme entre  $\partial M_0$  et  $\partial M_1$ . On dit que  $M$  est un h-cobordisme si  $M_0 \hookrightarrow M$ ,  $M_1 \hookrightarrow M$ ,  $\partial M_0 \hookrightarrow V$ ,  $\partial M_1 \hookrightarrow V$  sont toutes des équivalences d'homotopies. Voir figure ci-dessous.

**Theorem 1.5.8.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme à bord et simplement connexe. Supposons que  $V \cong \partial M_0 \times I$  et  $m \geq 6$ . Alors*

$$(M, V) \stackrel{PL}{\cong} (M_0, \partial M_0) \times I.$$

*Démonstration.* Voir [RS, Theorem 6.18, p.88].  $\square$

De la même manière, nous définissons un *h-cobordisme semi-algébrique à bord*. En gardant les mêmes notations, nous déduisons la version semi-algébrique de ce théorème. Dans ce théorème  $\stackrel{s.a}{\cong}$  désigne l'homéomorphisme semi-algébrique.

**Theorem 1.5.9.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme semi-algébrique à bord. Supposons  $V \stackrel{s.a}{\cong} \partial M_0 \times I$  et  $m \geq 6$ . Alors*

$$(M, V) \stackrel{s.a}{\cong} (M_0, \partial M_0) \times I.$$

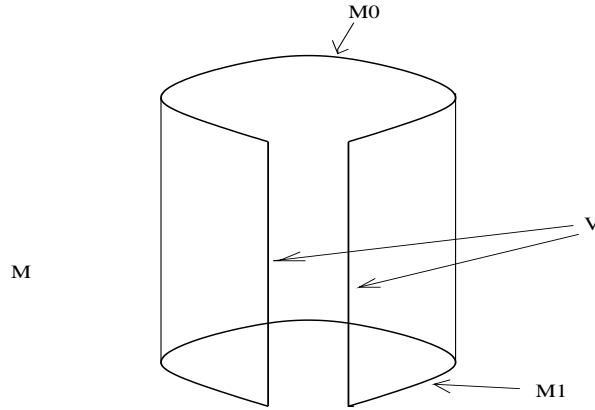


FIGURE 1.6 – Cobordisme à bord

*Démonstration.* Soit  $(|K|, |K_0|, |K_1|)$  une triangulation semi-algébrique du h-cobordisme semi-algébrique avec bord et simplement connexe  $(M, M_0, M_1)$ . Notons par  $|K'|$  la triangulation de  $V$  issue de celle de  $M$ . Il en découle que  $|K'| = cl(|K| - |K_0| - |K_1|)$  est un PL cobordisme entre  $\partial|K_0|$  and  $\partial|K_1|$ . Puisque  $M$  est un h-cobordisme semi-algébrique avec bord, les inclusions  $|K_0| \hookrightarrow |K|$ ,  $|K_1| \hookrightarrow |K|$ ,  $\partial|K_0| \hookrightarrow |K'|$ ,  $\partial|K_1| \hookrightarrow |K'|$  sont toutes des équivalences d'homotopies semi-algébriques. Par le lemme 1.3.8, ces inclusions sont toutes des équivalences d'homotopies PL. Par hypothèse  $V$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $\partial M_0 \times I$ . Il vient que, par l'unicité de la triangulation semi-algébrique (Théorème 1.5.2),  $|K'|$  et  $\partial|K_0| \times I$  sont PL homéomorphes. Puisque  $\dim M \geq 6$ , par le Théorème de h-cobordisme relative PL, nous avons

$$(|K|, |K'|) \stackrel{PL}{\cong} (|K_0|, \partial|K_0|) \times I.$$

Cela implique que, semi-algébriquement nous avons

$$(M, V) \stackrel{s.a}{\cong} (M_0, \partial M_0) \times I.$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous montrons, suite au théorème de h-cobordisme semi-algébrique, une version semi-algébrique de la conjecture de Poincaré pour les dimensions différentes de 4. Pour cela énonçons d'abord la conjecture version PL.

**Theorem 1.5.10.** (Conjecture de Poincaré version PL)

*Soit  $M^m$  une variété PL compacte sans bord du type d'homotopie d'une  $m$ -sphère et  $m \neq 4$ , alors  $M^m$  est PL homéomorphe à une  $m$ -sphère. Pour  $m = 4$ ,  $M^m$  est topologiquement homéomorphe à une  $m$ -sphère.*

**Remark 1.5.11.** Pour les dimensions  $m \geq 5$  la preuve est dû au théorème de h-cobordisme PL. En dimension strictement inférieure à 4, c'est à dire 2 et 3, le premier est déjà connu depuis Poincaré, le second est démontré tout dernièrement (2002-2003) par G. Perelman dans le cas différentiable voir [Pe]. Puisque la catégorie des variétés différentiables, la catégorie des variétés topologiques et la catégorie de variétés PL sont équivalentes en dimension inférieure ou égale à 3 (voir [Mo]), alors on a la conjecture pour le cas PL en dimension inférieure ou égale à 3.

Pour  $m = 4$ , la validité des théorèmes de h-cobordisme différentiable et PL n'est pas encore démontré. Par contre, M. Freedman a démontré ce théorème version topologique pour  $m=4$  et ensuite la conjecture du Poincaré pour cette dimension cf.[SC,p.80-81]. La tentation serait de faire le même raisonnement qu'à la première partie de la remarque pour déduire la version PL ou différentielle. Mais cela ne marche pas à cause des comportements spécifiques aux variétés de dimension 4. Par exemple, il existe des variétés topologiques compactes de dimension 4 avec une infinité dénombrable de structures différentiables cf.[SC, corollary, p.316]. En plus l'unicité de structure différentiable pour  $S^4$  reste un problème ouvert. La conjecture de Poincaré version PL en dimension 4 reste un problème ouvert comme celle différentiable.

Nous obtenons par suite la version semi-algébrique.

**Theorem 1.5.12.** *Soit  $M^m$  une variété semi-algébrique compacte sans bord du type d'homotopie d'une  $m$ -sphère et  $m \neq 4$ , alors  $M^m$  est semi-algébriquement homéomorphe à une  $m$ -sphère. Pour  $m = 4$ ,  $M^m$  est topologiquement homéomorphe à une  $m$ -sphère.*

*Démonstration.* On applique le théorème précédent et le théorème de triangulation semi-algébrique pour conclure.  $\square$

Nous allons, dans ce qui suit, démontrer le théorème de h-cobordisme version Nash. Pour ce faire, nous donnons la définition d'un h-cobordisme Nash suivie d'un théorème d'approximation de difféomorphisme Nash et la preuve devient presque évidente.

**Definition 1.5.13.** Soient  $M, M_0, M_1$  des variétés de Nash compactes telles que :

- $\partial M = M_0 \cup M_1$
- $M_0 \cap M_1 = \emptyset$ .

Alors, le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est appelé *cobordisme Nash*.

Un cobordisme Nash  $(M, M_0, M_1)$  est dit un *h-cobordisme Nash* si les inclusions  $M_0 \hookrightarrow M$  et  $M_1 \hookrightarrow M$  sont des équivalences d'homotopies semi-algébrique.

**Theorem 1.5.14.** *Soient  $L_1, L_2$  des variétés de Nash compactes possiblement à bord, et soient  $M_1, M_2$  leurs intérieurs. Alors les conditions suivantes sont*

équivalentes.

(i)  $L_1$  et  $L_2$  sont  $C^1$  difféomorphes.

(ii)  $L_1$  et  $L_2$  sont Nash difféomorphes.

(iii)  $M_1$  and  $M_2$  sont Nash difféomorphes.

*Démonstration.* Voir [S, Theorem VI.2.2, p.202] □

**Theorem 1.5.15.** (Théoreme de h-cobordisme Nash)

Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme Nash simplement connexe. Si  $\dim M \geq 6$  alors  $M$  est Nash difféomorphe à  $M_0 \times I$ , où  $I = [0, 1]$ .

*Démonstration.* Par hypothèse  $M, M_0, M_1$  sont des variétés de Nash compactes. Elles sont par définition des variétés différentiables. Il vient que le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un h-cobordisme différentiable. Alors par le théorème de h-cobordisme différentiable,  $M$  est difféomorphe à  $M_0 \times I$ . D'autre part  $M$  et  $M_0 \times I$  sont des variétés de Nash et compactes. Alors par le théorème précédent, nous avons  $M$  Nash difféomorphe à  $M_0 \times I$ . Ce qui complète la preuve. □

Nous rappelons ici la conjecture de Poincaré version différentiable, pour ensuite déduire sa version Nash.

**Theorem 1.5.16.** Soit  $M^m$  une variété différentiable de classe  $C^\infty$  compacte sans bord du type d'homotopie d'une  $m$ -sphère, alors  $M^m$  est homéomorphe à une  $m$ -sphère. Pour  $m = 2, 3, 5, 6$   $M^m$  est difféomorphe à une  $m$ -sphère.

**Theorem 1.5.17.** (Conjecture de Poincaré version Nash)

Soit  $M^m$  une variété de Nash compacte sans bord du type d'homotopie d'une  $m$ -sphère et  $m \neq 4$ , alors  $M^m$  est semi-algébriquement homéomorphe à une  $m$ -sphère. Pour  $m = 2, 3, 5, 6$   $M^m$  est Nash difféomorphe à une  $m$ -sphère. Pour  $m = 4$ ,  $M^m$  est homéomorphe à une  $m$ -sphère.

*Démonstration.* La démonstration, pour  $m \neq 4$ , est très simple en appliquant la version semi-algébrique de la conjecture puisqu'une variété de Nash est en particulier semi-algébrique.

Pour le cas de  $m = 2, 3, 5$ , et  $6$ , on utilise la version différentiable de la conjecture et le théorème 1.5.14 pour montrer que  $M^m$  est Nash difféomorphe à  $m$ -sphère.

Pour  $m = 4$ , on applique le résultat dans le cas topologique. □

## 1.6 Théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash

Dans cette section nous démontrons les théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash. Nous commençons par définir la notion d'équivalence d'homotopie simple semi-algébrique que nous utiliserons pour cette fin.

**Definition 1.6.1.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles semi-algébriques tels que  $Y \subset X$ . On dit que  $X$  est un *collapse semi-algébrique élémentaire* sur  $Y$ , on note  $X \Downarrow Y$ , s'il existe une application semi-algébrique

$$f : I^n \longrightarrow X$$

telle que

- $f|_{(0,1] \times I^{n-1}}$  est un plongement
- $f(0 \times I^{n-1}) \subset Y$ ,  $f((0,1] \times I^{n-1}) \cap Y = \emptyset$  et  $X = Y \cup f(I^n)$

Dans les mêmes conditions, on dit aussi qu'il y a une expansion sémi-algébrique élémentaire de  $Y$  en  $X$ .

On dit que  $X$  *collapse semi-algébriquement* sur  $Y$ , on note  $X \searrow Y$ , s'il existe une suite de collapses semi-algébriques élémentaires  $X = X_0 \Downarrow X_1 \Downarrow \dots \Downarrow X_m = Y$ . On di aussi qu'il y a une *expansion semi-algébrique* de  $Y$  en  $X$  et on note  $Y \nearrow X$ .

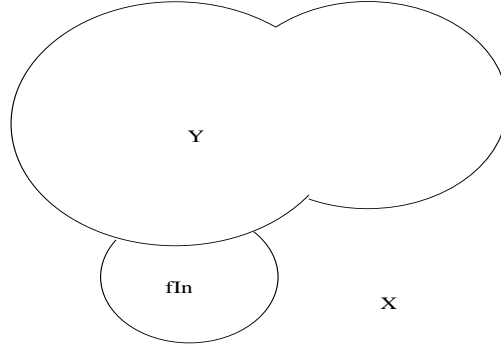


FIGURE 1.7 – collapse semi-algébrique élémentaire

**Remark 1.6.2.** 1. Un collapse élémentaire PL est un cas particulier de collapse élémentaire semi-algébrique en considérant que les polyèdres intervenants sont compacts. En effet  $Y$  est un collapse élémentaire PL de  $X$  s'il existe une PL-boule  $B^n$  telle que  $X = Y \cup B^n$  et  $Y \cap B^n = B^{n-1}$  avec  $B^{n-1} \subset \partial B^n$ . On peut trouver un PL-homéomorphisme  $f : I^n \longrightarrow B^n$  tel que  $f(0 \times I^{n-1}) = B^{n-1} = Y \cap B^n$  avec  $B^{n-1} \subset \partial B^n$ . Puisque  $X$  et  $Y$  sont des polyèdres compacts alors ils sont semi-algébriques. De même  $f$  ainsi définie est un homéomorphisme semi-algébrique. En plus on a bien  $X = Y \cup B^n = Y \cup f(I^n)$ . Nous avons ici de façon claire un collapse semi-algébrique élémentaire.

2. Considérons un collapse élémentaire semi-algébrique comme défini ci-dessus :  $X \Downarrow Y$ . Posons  $g = f|_{0 \times I^{n-1}}$ . Nous pouvons considérer  $X$  comme le *mapping cylinder*  $M_g$  de  $g$ , en posant

$$X = M_g = I^n \cup Y / (0, x) \sim g(0, x).$$

En effet, il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $h$  entre  $M_g$  et  $X$  défini de manière suivante :

$$h(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in Y, \\ f(x) & \text{si } x \in M_g \setminus Y. \end{cases}$$

L'application  $h$  ainsi définie est bijective et bicontinue par construction. Remarquons que le graphe de  $h$  est l'union des graphes de deux applications semi-algébriques :  $\Gamma_h = \Gamma_{h|_Y} \cup \Gamma_{h|_{M_g \setminus Y}}$  avec  $h|_Y = id_Y$  et  $h|_{M_g \setminus Y} = f|_{(0,1] \times I^{n-1}}$ . Ce qui montre que  $h$  est un homéomorphisme semi-algébrique.

Dans la définition qui suit, la notation  $\text{rel } Y$  veut dire que durant les collapsés et expansions,  $Y$  reste inchangé.

**Definition 1.6.3.** Soient  $Y \subset X$  deux ensembles semi-algébriques. L'ensemble semi-algébrique  $X$  est *semi-algébriquement simplement homotope* à l'ensemble semi-algébrique  $Y$  s'il existe une suite de collapsés et d'expansions semi-algébriques de

$$X = X_0 \searrow X_1 \nearrow X_2 \searrow \dots \searrow X_n = Y \text{ rel } Y.$$

On dira que  $X$  est *semi-algébriquement  $s$ -homotope* à  $Y$ .

Le lemme suivant montre qu'un collapse semi-algébrique élémentaire d'un ensemble semi-algébrique sur un autre, entraîne un collapse PL du polyèdre d'une triangulation semi-algébrique du premier sur le polyèdre du second issue de la même triangulation.

**Lemma 1.6.4.** Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles semi-algébriques. S'il existe un collapse semi-algébrique élémentaire  $X \Downarrow Y$  alors  $|K| \searrow |K'|$ , où  $|K|$  est une triangulation semi-algébrique de  $X$  compatible avec  $Y$  et  $h^{-1}(Y) = |K'|$  avec  $h : |K| \rightarrow X$  l'homéomorphisme semi-algébrique de triangulation considérée.

*Démonstration.* Par hypothèse  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles semi-algébriques et  $X \Downarrow Y$  semi-algébriquement. Ce qui signifie qu'il existe une application semi-algébrique  $f : I^n \rightarrow X$  telle que

- $f|_{(0,1] \times I^{n-1}}$  est un plongement
- $f(0 \times I^{n-1}) \subset Y$ ,  $f((0,1] \times I^{n-1}) \cap Y = \emptyset$  et  $f(I^n) \cup Y = X$ .

Posons  $g = f|_{0 \times I^{n-1}}$ . Nous pouvons, par la remarque 1.6.2, considérer  $X$  comme le mapping cylinder  $M_g$  de  $g$ , en posant

$$X = M_g = I^n \cup Y / (0, x) \sim g(0, x).$$

Une triangulation semi-algébrique  $|K|$  de  $X$ , compatible avec  $Y$  et  $cl(M_g \setminus Y)$ , induit une triangulation semi-algébrique  $|K'|$  de  $Y$  et une autre  $|K''|$  de  $cl(M_g \setminus Y)$ . Ce qui veut dire que  $K' \subset K$  et  $K'' \subset K$ . Ce qui nous donne

$$|K| = |K''| \cup |K'|.$$



Nous pouvons donc construire une projection  $\pi : |K''| \longrightarrow [0, 1]$  telle que  $\pi^{-1}(0) = |K''| \cap |K'|$ , de façon suivante. Soient  $x$  et  $y \in I^n$ . On définit la relation d'équivalence " $x \approx y$ " si et seulement si  $f(x) = f(y)$ . L'application induite par  $f$ , nous notons  $f'$ , définie par

$$\begin{aligned} I^n / \approx &\longrightarrow f(I^n) \\ [t] &\mapsto f'([t]) = f(t) \end{aligned}$$

où  $t = (t_1, \dots, t_n) \in I^n$ , est un homéomorphisme en considérant la topologie quotiente induite. La triangulation semi-algébrique de  $X$  induit un homéomorphisme semi-algébrique, que nous notons  $k : |K''| \longrightarrow f(I^n)$ . Soit  $p$  la projection sur la première coordonnée définie par  $p : I \times I^{n-1} \longrightarrow I$  telle que  $p(t_1, \dots, t_n) = t_1$  pour tout  $(t_1, \dots, t_n) \in I^n$ . Notons par  $p'$  l'application induite par  $p$  en passant au quotient  $I^n / \approx$ . En considérant la topologie quotiente sur  $I^n / \approx$ ,  $p'$  est continue. Nous avons ainsi construit l'application  $\pi$  définie par

$$\pi = p' \circ f'^{-1} \circ k : |K''| \longrightarrow [0, 1].$$

Il existe alors un  $0 < \epsilon < 1$  tel que  $\pi^{-1}([0, \epsilon])$  contienne tous les sommets des simplexes qui ont au moins une face dans  $\pi^{-1}(0)$  quitte à faire quelques subdivisions nécessaires de  $K''$ . Nous remarquons que :

$$\pi^{-1}([0, \epsilon]) = k^{-1}(f([0, \epsilon] \times I^{n-1})).$$

Le sous-ensemble semi-algébrique  $f([0, \epsilon] \times I^{n-1})$  est un voisinage semi-algébrique compact de  $f(0 \times I^{n-1})$  dans l'ensemble semi-algébrique  $f(I^n)$ . Il vient que  $\pi^{-1}([0, \epsilon]) = U$  est un voisinage régulier de  $\pi^{-1}(0)$  dans  $|K''|$ , quitte à demander que  $k$  soit compatible avec  $f([0, \epsilon] \times I^{n-1})$ . Puisque  $cl(|K''| \setminus U)$  est PL homéomorphe à  $I^n$ ,  $|K''|$  PL collapse sur  $U$ . En plus, nous avons que  $U$  collapse PL sur  $\pi^{-1}(0)$ , puisqu'il est un voisinage régulier de  $\pi^{-1}(0)$  (Théorème 1.2.21). Nous avons donc  $|K|$  collapse PL sur  $|K'|$ . D'où le résultat.  $\square$

**Theorem 1.6.5.** *Soient  $M$  et  $M_0$  deux variétés semi-algébriques avec  $M_0$  un rétracte par déformation de  $M$ . Alors,  $M$  collapse semi-algébriquement sur  $M_0$  si et seulement si  $|K|$  collapse PL sur  $|K_0|$ , où  $|K|$  est une triangulation semi-algébrique de  $M$  compatible avec  $M_0$  et  $|K_0| = h^{-1}(M_0)$  avec  $h : |K| \rightarrow M$  l'homéomorphisme semialgébrique de triangulation considérée.*

*Démonstration.* La preuve vient en utilisant le lemme 1.6.4 et la définition 1.6.3.  $\square$

Nous démontrons maintenant la version semi-algébrique du théorème de s-cobordisme.

**Theorem 1.6.6.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un  $h$ -cobordisme semi-algébrique connexe avec  $\dim M \geq 6$ . Alors,  $M$  et  $M_0 \times I$  sont semi-algébriquement homéomorphes si et seulement si  $M$  est semi-algébriquement  $s$ -homotope à  $M_0$*

*Démonstration.* Le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un h-cobordisme semi-algébrique, par conséquent il existe une triangulation semi-algébrique  $(|K|, |K_0|, |K_1|)$  qui est un h-cobordisme PL (voir la première partie de la démonstration du théorème de h-cobordisme semi-algébrique).

$\Rightarrow$ ) Par hypothèse on a  $M$  et  $M_0 \times I$  sont semi-algébriquement homéomorphes. Il vient par l'unicité de la triangulation semi-algébrique (Théorème 1.5.2) que  $|K|$  et  $|K_0| \times I$  sont PL homéomorphes. Avec la condition qui dit que  $\dim M \geq 6$  et comme  $\dim M = \dim |K|$ , le théorème de s-cobordisme PL donne :  $|K|$  est PL s-homotope à  $|K_0|$ . Par le théorème 1.6.5,  $M$  est semi-algébriquement s-homotope à  $M_0$ .

$\Leftarrow$ ) Supposons que  $M$  est semi-algébriquement s-homotope à  $M_0$ . Le théorème 1.6.5 implique que  $|K|$  est s-homotope PL à  $|K_0|$ . Or on a aussi que le triplet  $(|K|, |K_0|, |K_1|)$  est un h-cobordisme PL. Comme la condition de dimension est satisfaite, le théorème de s-cobordisme PL entraîne que  $|K|$  et  $|K_0| \times I$  sont PL homéomorphes. Il est donc clair que  $M$  et  $M_0 \times I$  sont semi-algébriquement homéomorphes. Ce qui achève la preuve.  $\square$

Pour clore ce chapitre, nous démontrons le théorème de s-cobordisme version Nash.

**Theorem 1.6.7.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme Nash simplement connexe et  $\dim M \geq 6$ . Alors  $M$  et  $M_0 \times I$  sont Nash difféomorphes si et seulement si  $M$  est semi-algébriquement s-homotope à  $M_0$ .*

*Démonstration.* Par hypothèse,  $(M, M_0, M_1)$  est un h-cobordisme Nash connexe et  $\dim M \geq 6$ .

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $M$  est Nash difféomorphe à  $M_0 \times I$ . Puisque  $M$  et  $M_0 \times I$  sont des variétés de Nash, elles sont en particulier des variétés différentiables et difféomorphes entre elles. Par le théorème de s-cobordisme différentiable, on trouve que  $M$  est s-homotope à  $M_0$ . Par suite  $M$  est semi-algébriquement s-homotope à  $M_0$ .

$\Leftarrow$ ) Réciproquement, supposons que  $M$  est semi-algébriquement s-homotope à  $M_0$ . Ce qui implique en particulier que  $M$  est s-homotope à  $M_0$ . Par le théorème de s-cobordisme différentiable, ceci est équivalent à dire que  $M$  est difféomorphe à  $M_0 \times I$ . Il vient par le théorème 1.5.14 que  $M$  est Nash difféomorphe à  $M_0 \times I$ . Ce qui complète la preuve.  $\square$



## Chapitre 2

# Validité des théorèmes de h et s-cobordisme semi-algébriques et Nash sur un corps réel clos quelconque

### Introduction

Dans ce chapitre nous démontrons la validité des théorèmes de h et s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur un corps réel clos quelconque. La stratégie de la démonstration, pour les théorèmes de h-cobordisme semi-algébrique et Nash, est de traduire les énoncés de ces théorèmes sous forme d'énoncés du premier ordre de la théorie des corps réels clos et ensuite déduire par le Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg la validité de chaque théorème sur un corps réel clos quelconque, puisqu'ils sont vrais sur  $\mathbb{R}$  comme nous avons vu au chapitre précédent. Nous démontrons de même la validité des théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur tout corps réel clos.

Nous rappelons à la première section le Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg. Dans la deuxième section nous rassemblons quelques propositions sur la stabilité de certaines propriétés topologiques par rapport à une extension réelle close. Nous démontrons, dans la section trois, la validité du théorème de h-cobordisme semi-algébrique sur un corps réel clos quelconque. Dans la quatrième section nous démontrons la validité du théorème de h-cobordisme Nash sur un corps réel clos quelconque. Dans la dernière section, nous montrons la validité des théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur tout corps réel clos.

## 2.1 Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg

Nous rappelons dans cette section le Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg. Avant cela nous rappelons les définitions des objets intervenants dans ce théorème.

**Definition 2.1.1.** Un corps ordonné  $R$  est dit *corps réel clos* si l'anneau  $R[i] = R[X]/(X^2 + 1)$  est un corps algébriquement clos.

**Definition 2.1.2.** Une formule du premier ordre du langage des corps ordonnés est une formule construite au moyen d'un nombre fini de conjonctions, disjonctions, négations et quantifications universelles ou existentielles sur des variables à partir des formules atomiques qui sont les formules du genre  $f(x_1, \dots, x_n) = 0$  ou  $g(x_1, \dots, x_n) > 0$ , où  $f$  et  $g$  sont des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

Une formule du premier ordre du langage des corps ordonnés est à paramètre dans un corps réel clos  $R$  si les polynômes qui la définissent sont à coefficients dans  $R$ .

Les *variables libres* d'une formule sont les variables des polynômes figurants dans la formule qui ne sont pas quantifiées.

Un énoncé du premier ordre du langage des corps ordonnés est une formule du premier ordre du langage des corps ordonnés sans variable libre.

Le fait qu'un énoncé  $\alpha$  soit vrai sur un corps ordonné  $R$  se note par  $R \models \alpha$ .

L'importance des ces définitions, dans notre contexte, vient du Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg qui dit précisément ceci :

**Theorem 2.1.3.** (*Principe de transfert de Tarski-Seidenberg*) Soit  $\phi$  un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réel clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Si  $\phi$  est vrai sur  $\mathbb{R}$ , alors  $\phi$  est vrai sur n'importe quel corps réel clos.

Le principe de transfert de Tarski-Seidenberg se déduit du théorème suivant.

**Theorem 2.1.4.** (*Elimination des quantificateurs*) Soit  $\phi(x_1, \dots, x_n)$  une formule du premier ordre de la théorie de corps réels clos. Alors il existe une formule du premier ordre de la théorie de corps réels clos  $\psi$  sans quantificateur et n'ayant pas d'autres variables libres que celles dans  $\phi$ , telle que  $\phi \leftrightarrow \psi$ .

**Example 2.1.5.** Soit la formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos suivante :

$$\phi(a, b, c) := \exists x P(a, b, c, x) = 0$$

avec

$$P(a, b, c, x) = ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[a, b, c, x]$$

Il y a ici une formule du premier ordre de la théorie des corps réel clos sans quantificateur :

$$\psi(a, b, c) := (a \neq 0 \wedge b^2 - 4ac \geq 0) \vee (a = 0 \wedge b \neq 0) \vee (a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0).$$

On voit que  $\phi \leftrightarrow \psi$ .

Nous terminons cette section par la remarque suivante :

**Remark 2.1.6.** Le principe de transfert de Tarski-Seidenberg n'est pas vrai pour un énoncé qui admet des quantificateurs sur les ensembles et les fonctions. Voici un contre exemple. " Toute partie non vide majorée de  $R$  a un sup". On l'écrit comme suit :

$$\forall A \subset R (\exists x(x \in A) \wedge \exists a(\forall x \in A x \leq a) \rightarrow \exists M(\forall x \in A x \leq M \\ \wedge \forall \epsilon > 0 \exists x \in A x > M - \epsilon)).$$

Cet énoncé est vrai pour  $\mathbb{R}$  mais pas pour tout corps réel clos. En effet voici un contre exemple : l'ensemble  $[-\pi, \pi] \cap \mathbb{R}_{alg}$  est majoré dans  $\mathbb{R}_{alg}$  mais n'admet pas de borne supérieure dans  $\mathbb{R}_{alg}$ .

## 2.2 Extension de quelques propriétés topologiques

Soit  $K$  une extension réelle close de  $R$ . Nous rappelons ici la définition d'une extension d'un sous-ensemble semi-algébrique dans  $R^n$  sur  $K$ . Ces définitions sont tirées de [BCR, ch. 5]. Soit  $S$  un ensemble semi-algébrique avec la description suivante

$$S = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in R^n \mid f_{ij} *_{ij} 0\},$$

où  $f_{ij} \in R[X_1, \dots, X_n]$ , et  $*_{ij} \in \{<, >, =\}$  pour  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, r_i$ . Soit  $\phi$  la formule suivante :

$$\phi(a, x) = \bigvee_{i=1}^s \left( \bigwedge_{j=1}^{r_i} f_{ij} *_{ij} 0 \right)$$

où  $a \in R^N$  est la liste des coefficients des  $f_{ij}$ . On a ainsi  $S = \{x \in R^n \mid \phi(a, x)\}$ .

Dans la suite de cette thèse, pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $\psi$  une formule,  $\exists x$  sera l'abréviation de  $\exists x_1, \dots, \exists x_n$ ,  $\forall x$  sera l'abréviation de  $\forall x_1, \dots, \forall x_n$ ,  $\exists x \in S \psi$  veut dire  $\exists x_1, \dots, \exists x_n (\phi(a, x_1, \dots, x_n) \wedge \psi)$  et  $\forall x \in S \psi$  veut dire  $\forall x_1, \dots, \forall x_n (\phi(a, x_1, \dots, x_n) \rightarrow \psi)$ .

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $S$  un ensemble semi-algébrique sur  $R^n$  défini comme précédemment. L'ensemble*

$$S_K = \{x \in K^n \mid \phi(a, x)\}$$

*est un ensemble semi-algébrique dans  $K^n$  qui ne dépend que de l'ensemble  $S$  et pas de la combinaison booléenne  $\phi(a, x)$  qui le décrit.*

*Démonstration.* Soit  $\psi(b, x)$  une autre combinaison booléenne de conditions de signes des polynômes de  $R[X_1, \dots, X_n]$ ,  $b$  la liste des coefficients de ces polynômes, qui décrit  $S$  :

$$S = \{x \in R^n \mid \phi(a, x)\} = \{x \in R^n \mid \psi(b, x)\}.$$

Ce qui est équivalent à dire que la combinaison booléenne

$$(\phi(a, x) \wedge \neg\psi(b, x)) \vee (\psi(b, x) \wedge \neg\phi(a, x))$$

n'a pas de solution dans  $R$ . Par Tarski-Seidenberg, cette combinaison booléenne n'a pas de solution dans  $K$ . Ceci veut dire que

$$\{x \in K^n \mid \phi(a, x)\} = \{x \in K^n \mid \psi(b, x)\}.$$

D'où  $S_K$  est bien défini. □

**Definition 2.2.2.** L'ensemble  $S_K$  défini dans la proposition précédente est appelé *extension de  $S$  sur  $K$* .

Dans le même ordre d'idée nous rappelons la définition d'extension d'une application semi-algébrique .

**Proposition 2.2.3.** Soient  $X \subset R^m$  et  $Y \subset R^n$  deux ensembles semi-algébriques. Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application semi-algébrique avec  $\Gamma$  son graphe. Alors  $\Gamma_K$  est le graphe d'une application semi-algébrique  $f_K : X_K \rightarrow Y_K$ .

*Démonstration.* Les ensembles  $X$  et  $Y$  sont semi-algébriques donc nous pouvons supposer qu'ils sont définis par :

$$X = \{x \in R^m : \phi(a, x)\},$$

$$Y = \{x \in R^n : \theta(b, x)\}$$

où  $\phi(a, x)$  et  $\theta(b, x)$  sont des formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des paramètres  $a \in R^s$  et  $b \in R^t$  avec  $s, t$  des entiers convenablement choisis. Posons :

$$\Gamma = \{(x, y) \in R^m \times R^n : \psi(c, x, y)\}$$

où  $\psi(c, x, y)$  est une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec le paramètre  $c \in R^{m'}$ . Le fait que  $\Gamma$  est le graphe de l'application  $f$  s'écrit sous forme d'énoncé,  $\alpha$ , du premier ordre dans la théorie des corps réels clos par :

$$\alpha(a, b, c) := \forall x[(\phi(a, x) \leftrightarrow \exists y\psi(c, x, y)) \wedge (\forall y(\psi(c, x, y) \rightarrow \theta(b, y)))]$$

$$\wedge (\forall y\forall y'(\psi(c, x, y) \wedge \psi(c, x, y') \rightarrow y = y')).$$

On a alors  $R \models \alpha(a, b, c)$ . Par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg, on a  $K \models \alpha(a, b, c)$ . D'où le résultat. □

**Definition 2.2.4.** L'application semi-algébrique  $f_K$  définie dans la proposition précédente est appelée *l'extension de  $f$  sur  $K$* .

**Proposition 2.2.5.** Soient  $R, K$  deux corps réels clos tels que  $K$  est une extension réelle close de  $R$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles semi-algébriques dans  $R^n$ . Les ensembles semi-algébriques  $X$  et  $Y$  sont semi-algébriquement homéomorphes si et seulement si  $X_K$  et  $Y_K$  sont semi-algébriquement homéomorphes.

*Démonstration.*  $\Rightarrow$ ) Posons :

$$X = \{x \in R^n : \phi(a, x)\},$$

$$Y = \{x \in R^n : \psi(b, x)\}$$

où  $\phi(a, x)$  et  $\psi(b, x)$  sont des formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos à paramètre  $a \in R^m$  et  $b \in R^{m'}$ . Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme semi-algébrique. Posons

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in R^n \times R^n : \zeta(c, x, y)\}$$

le graphe de  $f$  défini par la formule  $\zeta(c, x, y)$  du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec pour paramètre  $c \in R^r$ . Soit  $\alpha(a, b, c)$  un énoncé du premier ordre dans la théorie des corps réels clos qui dit que  $\Gamma_f$  est le graphe de  $f$  (ce qui existe, voir démonstration de la proposition 2.2.3).

Traduisons l'injectivité par un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

$$\beta(a, b, c) := \forall x \forall x' \forall y [(\phi(a, x) \wedge \phi(a, x') \wedge \zeta(c, x, y) \wedge \zeta(c, x', y) \rightarrow x = x')].$$

La surjectivité :

$$\gamma(a, b, c) := \forall y [\psi(b, y) \rightarrow \exists x (\phi(a, x) \wedge \zeta(c, x, y))].$$

Continuité de  $f$  :

$$\begin{aligned} \theta(a, b, c) := & \forall x \phi(a, x) \forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x' \phi(a, x') \|x - x'\| < \eta \rightarrow \\ & (\forall y \psi(b, y) \forall y' \psi(b, y') \rightarrow (\zeta(c, x, y) \wedge \zeta(c, x', y') \rightarrow \|y - y'\| < \epsilon)). \end{aligned}$$

La continuité de la fonction réciproque de  $f$  est donnée par l'énoncé :

$$\begin{aligned} \kappa(a, b, c) := & \forall x \zeta(b, x) \forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x' \zeta(b, x') \|x - x'\| < \eta \rightarrow \\ & (\forall y \phi(a, y) \forall y' \phi(a, y') \rightarrow (\zeta(c, x, y) \wedge \zeta(c, x', y') \rightarrow \|y - y'\| < \epsilon)). \end{aligned}$$

Posons :

$$\lambda(a, b, c) := \alpha(a, b, c) \wedge \beta(a, b, c) \wedge \gamma(a, b, c) \wedge \theta(a, b, c) \wedge \kappa(a, b, c).$$



Nous avons donc :

$$R \models \lambda(a, b, c).$$

Par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg, on a

$$K \models \lambda(a, b, c).$$

Ce qui veut dire que  $f_K : A_K \longrightarrow B_K$  est un homéomorphisme semi-algébrique.  $\Leftarrow$ ) Les ensembles semi-algébriques  $X_K$  et  $Y_K$  sont semi-algébriquement homéomorphes. Soit  $f$  un homéomorphisme semi-algébrique entre  $X_K$  et  $Y_K$ . Soit  $\psi(c, x, y)$  une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos à paramètre  $c \in K^r$  définissant le graphe de  $f$  :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in K^n \times K^n : \psi(c, x, y)\}.$$

On a donc avec les notations de la première partie :

$$K \models \lambda(a, b, c).$$

Les paramètres  $a$  et  $b$  sont dans  $R^m$ . Remarquons que :

$$K \models \exists z \lambda(a, b, z).$$

Et par suite, grace à Tarski-Seidenberg, on a :

$$R \models \exists z \lambda(a, b, z).$$

C'est à dire qu'il existe un paramètre  $c' \in R^r$  qui définit le graphe d'un homéomorphisme semi-algébrique entre  $X$  et  $Y$ . Ce qui achève la preuve.  $\square$

Le fait qu'une application semi-algébrique soit de classe  $C^r$  se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos. On le montre par le Lemme suivant.

**Lemma 2.2.6.** *Soit  $U$  un ouvert semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction semi-algébrique. Le fait que  $f$  soit une application de classe  $C^r$  se dit par une formule du premier ordre.*

*Démonstration.* Pour le cas  $C^0$  c'est clair.

Le cas  $C^r$  avec  $r > 0$ . Nous pouvons supposer que  $U = \mathbb{R}^n$ . Posons :

$$X = \{(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \neq y, f(x) - f(y) - a \cdot (x - y) - b \|x - y\| = 0\}$$

où  $a \cdot (x - y)$  désigne le produit scalaire du vecteur  $a$  avec le vecteur  $x - y$ . Considérons l'application suivante :

$$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, a, b) \mapsto g(x, y, a, b)$$

où

$$g(x, y, a, b) = f(x) - f(y) - a \cdot (x - y) - b \|x - y\|.$$

L'application  $g$  est semi-algébrique par construction. Il s'ensuit que l'ensemble  $g^{-1}(0)$  est semi-algébrique. D'autre part, l'ensemble

$$\{(x, y, a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : x \neq y\}$$

est semi-algébrique. On en déduit que  $X$  est un ensemble semi-algébrique comme intersection de deux ensembles semi-algébriques. Par conséquent, son adhérence  $\overline{X}$  est semi-algébrique.

Alors on a :  $f$  est de classe  $C^1$  si et seulement si

$$(\forall x \in U \exists ! a \in \mathbb{R}^n (x, x, a, 0) \in \overline{X}) \wedge \Theta,$$

où  $\Theta$  est une formule du premier ordre qui définit la continuité des dérivées partielles de  $f$ . Alors le fait que  $f$  est de classe  $C^1$  (de manière analogue de classe  $C^r$  pour  $r > 1$ ) s'exprime par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos. D'où le résultat.  $\square$

La prochaine étape est de voir le fait qu'un ensemble semi-algébrique soit une variété  $C^r$ -Nash se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos. Pour montrer cela, on utilise la propriété des variétés affines de classe  $C^r$  d'être localement le graphe d'une fonction de classe  $C^r$ .

**Proposition 2.2.7.** *Soit  $S \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble semi-algébrique. Alors, l'énoncé*

*"  $S$  est une sous-variété  $C^r$ -Nash de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$  "*

*se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos.*

*Démonstration.* Soit  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (x_1, \dots, x_m)$ ,  $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ . On peut écrire une formule  $\Phi(x)$  qui dit qu'il existe des réels positifs  $\varepsilon$  et  $\eta$  tels que

$$S \cap (B^m(y, \varepsilon) \times B^{n-m}(z, \eta))$$

est le graphe d'une fonction de classe  $C^r$  de  $B^m(y, \varepsilon)$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$ . Car le fait qu'un ensemble semi-algébrique soit le graphe d'une application semi-algébrique se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos (voir la démonstration de la proposition 2.2.3) et le fait qu'une application semi-algébrique soit de classe  $C^r$  se dit par une formule du premier ordre (lemme précédent). Ensuite, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , désignons par  $\Phi_\sigma(x)$  la formule qui dit la même chose pour l'image de  $x$  et de  $S$  par la permutation des coordonnées (ceci de façon à attraper toutes les projections sur  $m$  coordonnées

parmi  $n$ ). Il existe une permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$  telle que  $\Phi_\sigma(x)$  soit vraie. On en déduit la formule suivante :

$$\forall x \in S \bigvee_{\sigma} \Phi_\sigma(x)$$

qui dit bien que  $S$  est une sous-variété  $C^r$ -Nash de  $\mathbb{R}^n$ . □

**Remark 2.2.8.** Les énoncés du lemme 2.2.6 et de la proposition 2.2.7 sont vrais pour les applications de Nash (cf. [R, Proposition 3.5]) et les variétés de Nash (cf. [CS, Proposition 2.1]). Ceci étant, nous avons de manière précise : le fait qu'un ensemble semi-algébrique  $X$  soit une variété de Nash de dimension  $m$  s'écrit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos, Et le fait qu'une application semi-algébrique soit une application Nash s'écrit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

De manière analogue à la proposition 2.2.5, on a le résultat suivant dans le cas Nash

**Proposition 2.2.9.** *Soient  $R, K$  deux corps réels clos tels que  $K$  est une extension réelle close de  $R$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-variétés de Nash de  $R^n$ . Les variétés de Nash  $X$  et  $Y$  sont Nash difféomorphes si et seulement si  $X_K$  et  $Y_K$  sont Nash difféomorphes.*

*Démonstration.* La preuve est analogue à celle de la proposition 2.2.5 en ajoutant la propriété qu'un ensemble semi-algébrique doit satisfaire pour être une variété de Nash et celle que doit satisfaire une application semi-algébrique pour être de Nash. Ce qui peut se traduire par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos (voir remarque 2.2.8). Ce qui achève la preuve. □

Maintenant il nous faut une formule pour les variétés  $C^r$ -Nash à bord. Dans le but de traduire en premier ordre le fait d'être une sous-variété à bord  $C^r$ -Nash de  $\mathbb{R}^n$ , le lemme de redressement suivant est nécessaire.

**Lemma 2.2.10.** *Soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^r$  et  $\Gamma_f$  son graphe. Soit*

$$\Gamma_f^+ = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : y \geq f(x)\}$$

*le surgraphe de  $f$  ( $\Gamma_f^- = \{(x, y) \in U \times \mathbb{R} : y \leq f(x)\}$  le sous-graphe de  $f$ ). Alors il existe un  $C^r$ -difféomorphisme de  $\Gamma_f^+$  vers  $U \times \mathbb{R}^+$  où  $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$ .*

*Démonstration.* Considérons l'application suivante :

$$\begin{aligned} g : U \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \Gamma_f^+ \\ (x, y) &\mapsto (x, y + f(x)). \end{aligned}$$

L'application  $g$  est clairement un  $C^r$ -difféomorphisme. On fait un raisonnement analogue pour  $\Gamma_f^-$ . Ce qui achève la preuve. □

**Remark 2.2.11.** Soit une fonction  $h : \Gamma_f^+ \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^r$ . Comment calculer les dérivées sur un ensemble qui n'est pas un ouvert ? En effet il suffit de prendre les coordonnées  $g$ , du lemme précédent, pour redresser le surgraphe en un demi-espace (c'est à dire prendre  $h \circ g$ ) et dériver par rapport à ces coordonnées et le problème est résolu.

**Proposition 2.2.12.** Soient  $S$  et  $T$  des sous-ensembles semi-algébriques de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $T \subset S$ . Alors, l'énoncé "S est une sous-variété à bord  $C^r$ -Nash de dimension  $m$  de  $\mathbb{R}^n$ , de bord  $T$ "; se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

*Démonstration.* Soient  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (x_1, \dots, x_{m-1})$ ,  $z = (x_{m+1}, \dots, x_n)$ . On peut écrire une formule  $\Psi(x)$  qui dit qu'il existe des réels positifs  $\varepsilon$ ,  $\delta$  et  $\eta$  tels que

- $T \cap (B^{m-1}(y, \varepsilon) \times ]x_m - \delta, x_m + \delta[ \times B^{n-m}(z, \eta))$  est le graphe d'une fonction de classe  $C^r$  de  $B^{m-1}(y, \varepsilon)$  dans  $\mathbb{R}^{n-m+1}$ ; par commodité nous désignerons par  $\xi : B^{m-1}(y, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  la première composante de cette fonction, par  $\Gamma_\xi^+ \subset B^{m-1}(y, \varepsilon) \times \mathbb{R}$  le surgraphe de cette fonction (les  $(u, v)$  avec  $v \geq \xi(u)$ ) et  $\Gamma_\xi^-$  son sous-graphe (les  $(u, v)$  avec  $v \leq \xi(u)$ ).
- $S \cap (B^{m-1}(y, \varepsilon) \times ]x_m - \delta, x_m + \delta[ \times B^{n-m}(z, \eta))$  est le graphe d'une fonction de classe  $C^r$  de  $\Gamma_\xi^+ \cap (B^{m-1}(y, \varepsilon) \times ]x_m - \delta, x_m + \delta[)$  dans  $\mathbb{R}^{n-m}$ , ou la même chose avec  $\Gamma_\xi^-$  à la place de  $\Gamma_\xi^+$ .

Ensuite, pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, \dots, n\}$ , désignons par  $\Psi_\sigma(x)$  la formule qui dit la même chose pour l'image de  $x$  et de  $S$  par la permutation des coordonnées. On fabrique  $\Psi_\sigma(x)$  suivant la même idée que dans la démonstration de la proposition 2.2.7, et on prend la conjonction de

$$\forall x \in S \setminus T \bigvee_{\sigma} \Phi_{\sigma}(x)$$

et

$$\forall x \in T \bigvee_{\sigma} \Psi_{\sigma}(x)$$

avec  $\Phi_{\sigma}(x)$  comme définie dans la démonstration de la proposition 2.2.7. Il y a peut-être un point délicat pour exprimer qu'on a le graphe d'une fonction  $C^r$  sur quelque chose qui n'est pas ouvert (le surgraphe). Mais on peut prendre des coordonnées pour redresser le surgraphe en un demi-espace et dériver par rapport à ces coordonnées, ce qui achève la preuve (voir remarque précédente et on voit bien que le  $C^r$ -difféomorphisme de redressement ici est de Nash).

□

**Corollary 2.2.13.** Soit  $M$  une sous-variété  $C^r$ -Nash de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  et éventuellement à bord. Si  $M$  et  $\partial M$  sont définies par des formules de premier ordre de la théorie des corps réels clos à coefficient dans  $\mathbb{R}_{alg}$ , alors, pour tout

corps réel clos  $R$ ,  $M_R$  est une sous-variété  $C^r$ -Nash de  $R^n$  de dimension  $m$  et en plus  $\partial(M_R) = (\partial M)_R$ .

*Démonstration.* Utiliser le lemme 2.2.12 et le Principe de transfert de Tarski-Seidenberg.  $\square$

**Remark 2.2.14.** En prenant en compte la remarque 2.2.8, on voit facilement que le fait qu'un ensemble semi-algébrique  $S$  est une variété de Nash à bord, de bord un sous-ensemble semi-algébrique  $T$ , peut se dire par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos. Par suite le corollaire précédent est valide pour les variétés de Nash.

Nous montrons par la proposition suivante qu'un collapse semi-algébrique élémentaire reste stable lors d'une extension réelle close quelconque.

**Proposition 2.2.15.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles semi-algébriques de  $R^r$  et  $K$  une extension réelle close de  $R$ . Alors,  $X \Downarrow Y$  semi-algébriquement si et seulement si  $X_K \Downarrow Y_K$  semi-algébriquement.*

*Démonstration.* Posons :

$$X = \{x \in R^r : \phi(a, x)\},$$

$$Y = \{x \in R^r : \psi(b, x)\}$$

où  $\phi(a, x)$  et  $\psi(b, x)$  sont des formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos à paramètres  $a \in R^m$  et  $b \in R^{m'}$ .

$\Rightarrow$ ) Supposons  $X \Downarrow Y$  semi-algébriquement. Ce qui veut dire qu'il existe une application semi-algébrique  $f : I^n \rightarrow X$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $f|_{(0,1] \times I^{n-1}}$  est un plongement
- $f(0 \times I^{n-1}) \subset Y$ ,  $f((0,1] \times I^{n-1}) \cap Y = \emptyset$  et  $X = Y \cup f(I^n)$ .

Comme les propriétés de  $f$  peuvent s'écrire sous forme d'une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos, son extension  $f_K$  sur  $K$  garde les mêmes propriétés. D'où  $X_K \Downarrow Y_K$  semi-algébriquement.

$\Leftarrow$ ) Supposons  $X_K \Downarrow Y_K$  semi-algébriquement. Ce qui est équivalent à dire qu'il existe une application semi-algébrique  $f : I_K^n \rightarrow X_K$  vérifiant les conditions suivantes :

- $f|_{(0,1]_K \times I_K^{n-1}}$  est un plongement
- $f(0 \times I_K^{n-1}) \subset Y_K$ ,  $f((0,1]_K \times I_K^{n-1}) \cap Y_K = \emptyset$  et  $X_K = Y_K \cup f(I_K^n)$ .

Soit  $\Gamma_f$  le graphe de  $f$  avec :

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in K^n \times K^r : \alpha(c, x, y)\}$$

où  $\alpha(c, x, y)$  désigne une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos définissant  $\Gamma_f$  avec  $c \in K^s$  la liste de ses coefficients. Le fait que  $\Gamma_f$  est le graphe d'une application semi-algébrique et que  $f$  vérifie les propriétés citées

ci-dessus, peuvent être écrits sous forme d'une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos que nous notons par  $\beta(a, b, c)$ . On a par hypothèse que  $K \models \exists z \beta(a, b, z)$ . Alors, par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg, on a  $R \models \exists z \beta(a, b, z)$ . Ce qui signifie qu'il existe  $d \in R^s$  qui définit le graphe d'une application semi-algébrique de  $I^n$  vers  $X$  avec les mêmes propriétés que  $f$ . D'où  $X \Downarrow Y$  semi-algébriquement.  $\square$

Maintenant nous montrons la stabilité de la s-homotopie semi-algébrique par rapport à une extension réelle close quelconque.

**Proposition 2.2.16.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux sous-ensembles semi-algébriques de  $R^r$  et  $K$  une extension réelle close de  $R$ . Alors,  $X$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y$  si et seulement si  $X_K$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y_K$ .*

*Démonstration.* Posons :

$$X = \{x \in R^r : \phi(a, x)\},$$

$$Y = \{x \in R^r : \psi(b, x)\}$$

où  $\phi(a, x)$  et  $\psi(b, x)$  sont des formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos à paramètre  $a \in R^m$  et  $b \in R^{m'}$ .

$\Rightarrow$ )  $X$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y$  s'il existe une suite de collapsés et d'expansions semi-algébriques :

$$X = X_0 \searrow X_1 \nearrow X_2 \searrow \dots \searrow X_s = Y \text{ rel } Y.$$

Soit  $i$  tel que  $X_i \searrow X_{i+1}$ . Cela est équivalent à dire qu'il existe une suite finie de collapsés semi-algébriques élémentaires. Par la proposition précédente, on a  $X_{iK} \searrow X_{i+1K}$ .

Si on a plutôt  $X_i \nearrow X_{i+1}$ , cela revient au même de dire que  $X_{i+1} \searrow X_i$ . On en déduit que  $X_{iK} \nearrow X_{i+1K}$ . Par suite,  $X_K$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y_K$ .

$\Leftarrow$ )  $X_K$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y_K$  s'il existe une suite de collapsés et d'expansions semi-algébriques :

$$X_K = X_0 \searrow X_1 \nearrow X_2 \searrow \dots \searrow X_s = Y_K \text{ rel } Y_K.$$

Supposons que  $X_i = \{x \in K^r : \phi_i(a_i, x)\}$  avec  $a_i \in K^{m_i}$ , où  $\phi_i(a_i, x)$  est une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos pour  $i = 0, \dots, s$  et  $\phi_0(a_0, x) = \phi(a, x)$ ,  $a_0 = a$ ,  $m_0 = m$ ,  $\phi_s(a_s, x) = \psi(b, x)$ ,  $a_s = b$  et  $m_s = m'$ .

Soit  $i \in \{0, \dots, s\}$  tel que  $X_i \searrow X_{i+1}$ . Cela implique qu'il existe une suite de collapsés semi-algébriques élémentaires

$$X_i = X_{i_0} \Downarrow X_{i_1} \Downarrow \dots \Downarrow X_{i_{k_i}} = X_{i+1}.$$

Posons  $X_{i_j} = \{x \in K^r : \phi_{i_j}(a_{i_j}, x)\}$ . Le fait que  $X_{i_j} \Downarrow X_{i_{j+1}}$  se dit par un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos que nous notons par  $\beta_{i_j}(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, c_{i_j})$  où  $c_{i_j}$  est un paramètre qui définit le graphe de l'application semi-algébrique qui définit le collapse semi-algébrique élémentaire (voir la démonstration de la proposition précédente). Alors le fait que  $X_i \searrow X_{i+1}$  peut se dire par un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos suivant :

$$\bigwedge_{j=0}^{k_i} \beta_{i_j}(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, c_{i_j}).$$

Maintenant supposons que  $X_i \nearrow X_{i+1}$ . Cela équivaut à  $X_{i+1} \searrow X_i$ . Par le même procédé on construit un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos équivalent suivant :

$$\bigwedge_{j=0}^{k_i} \beta'_{i_j}(a_{i+1_j}, a_{i+1_{j+1}}, c_{i+1_j}).$$

Alors le fait que

$$X_K = X_0 \searrow X_1 \nearrow X_2 \searrow \dots \searrow X_s = Y_K \text{ rel } Y_K$$

se dit par l'énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos suivant :

$$\left( \bigwedge_{i=0}^{s-1} \left( \bigwedge_{j=0}^{k_i} \beta_{i_j}(a_{i_j}, a_{i_{j+1}}, c_{i_j}) \right) \vee \left( \bigwedge_{j=0}^{k_{i+1}} \beta'_{i_j}(a_{i+1_j}, a_{i+1_{j+1}}, c_{i+1_j}) \right) \right) \bigwedge_{i,j} \lambda(a_{i_j}, b),$$

où  $\lambda(a_{i_j}, b)$  traduit le fait que  $Y_k \subset X_{i_j}$  pour tout  $i$  et  $j$ . Notons cet énoncé par  $\Phi(a_{i_j}, c_{i_j})$ . Par hypothèse on a

$$K \models \Phi(a_{i_j}, c_{i_j}).$$

Soient  $a_{l_t}$  et  $c_{u_v}$  les paramètres qui sont définis sur  $K$  et tous les autres sur  $R$ . En omettant les paramètres définis sur  $R$  dans la formule  $\Phi$  (pour alléger l'écriture de  $\Phi$ ), on a :

$$K \models \exists y_{l_t} \exists z_{u_v} \Phi(y_{l_t}, z_{u_v}),$$

où la quantification ici parcourt toutes les variables avec les indices  $l_t$ ,  $u_v$  dans  $\Phi$ . On a donc par Tarski-Seidenberg que :

$$R \models \exists y_{l_t} \exists z_{u_v} \Phi(y_{l_t}, z_{u_v}).$$

Ce qui signifie qu'il existe une suite

$$X_K = X_0 \searrow X_1 \nearrow X_2 \searrow \dots \searrow X_s = Y_K \text{ rel } Y_K$$

avec tous les ensembles  $X_i$  et les collapses semi-algébriques ici définis par des formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $R$ . Ce qui implique  $X$  est semi-algébriquement s-homotope à  $Y$ .  $\square$

Nous traitons dans la suite de cette section la stabilité du groupe fondamental d'un ensemble semi-algébrique lors d'une extension réelle close. Avant de faire cela, précisons le cadre par la définition suivante :

**Definition 2.2.17.** Soit  $X$  un ensemble semi-algébrique défini sur un corps réel clos  $R$ . Nous définissons le groupe fondamental de  $X$  ici en considérant les lacets semi-algébriques et les homotopies semi-algébriques entre les lacets. Nous le notons par  $\pi_1(X, x_0)_{alg}$  avec  $x_0 \in X$ .

Si  $R = \mathbb{R}$  on écrit  $\pi_1(X, x_0)$  pour désigner le groupe fondamental au sens classique du terme.

Les propositions suivantes nous rassurent que le groupe fondamental d'un ensemble semi-algébrique ne change pas lors d'une extension réelle close quelconque. Et que pour un ensemble semi-algébrique  $X$  défini sur le corps  $\mathbb{R}$   $\pi_1(X, x_0)_{alg}$  est essentiellement la même chose que  $\pi_1(X, x_0)$ . Ces résultats sont démontrés dans un cadre plus général dans [DK].

**Proposition 2.2.18.** Soit  $X$  un ensemble semi-algébrique fermé dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors les groupes fondamentaux  $\pi_1(X, x_0)_{alg}$  et  $\pi_1(X, x_0)$  sont isomorphes.

*Démonstration.* Nous pouvons supposer  $X$  compact : en effet, en prenant  $B$  une boule fermée suffisamment grande pour que  $x_0 \in B$  et  $B \cap X$  soit un rétracte par déformation semi-algébrique de  $X$  (ce qui est possible grâce au Corollaire 1.5.3), on a

$$\pi_1(X, x_0)_{alg} \cong \pi_1(X \cap B, x_0)_{alg} \text{ et } \pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X \cap B, x_0).$$

Définissons l'application suivante :

$$f : \pi_1(X, x_0)_{alg} \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

$$[\gamma]_{alg} \mapsto f([\gamma]_{alg}) = [\gamma].$$

L'application  $f$  est bien définie et est clairement un homomorphisme de groupes. Montrons que  $f$  est injective. Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets semi-algébriques basés en  $x_0$  tels que  $f([\gamma]_{alg}) = f([\gamma']_{alg})$ . Ce qui veut dire qu'il existe une homotopie continue  $H$  entre  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Considérons une triangulation semi-algébrique  $h : |K| \rightarrow X$  de  $X$  compatible avec  $\gamma$  et  $\gamma'$ . On a par suite l'homotopie continue  $h^{-1} \circ H$  entre les lacets PL  $h^{-1} \circ \gamma$  et  $h^{-1} \circ \gamma'$  basés en  $h^{-1}(x_0)$  dans  $|K|$ . Par le Lemme 1.3.5 d'approximation, il existe une PL homotopie  $H'$  entre  $h^{-1} \circ \gamma$  et  $h^{-1} \circ \gamma'$  telle que :

$$H' \simeq h^{-1} \circ H \text{ rel}(h^{-1} \circ \gamma \cup h^{-1} \circ \gamma').$$

On obtient alors  $h \circ H'$  qui est une homotopie semi-algébrique entre  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Ce qui veut dire que  $f$  est injectif car  $[\gamma]_{alg} = [\gamma']_{alg}$ .

Il reste donc à montrer que  $f$  est surjective. Soit  $\gamma$  un lacet continu dans  $X$  basé



en  $x_0$ . En considérant l'homéomorphisme de triangulation  $h$  de  $X$ , on a  $h^{-1} \circ \gamma$  un lacet continu dans  $|K|$  basé en  $h^{-1}(x_0)$ . Par le Lemme 1.3.5, il existe un lacet PL  $\gamma'$  tel que  $\gamma' \simeq h^{-1} \circ \gamma \text{ rel } h^{-1}(x_0)$ . On a donc un lacet semi-algébrique  $h \circ \gamma'$  tel que  $[h \circ \gamma'] = [\gamma]$ . Par conséquent  $f([h \circ \gamma']_{alg}) = [\gamma]$ . Ce qui montre que  $f$  est surjective.

En conclusion  $f$  est un isomorphisme de groupes.  $\square$

**Remark 2.2.19.** Remarquons que le lemme 1.5.4 est un corollaire de la proposition précédente.

**Proposition 2.2.20.** *Soit  $X$  un ensemble semi-algébrique dans  $R^n$ ,  $x_0 \in X$  et  $K$  une extension réelle close de  $R$ .*

(i) *L'application*

$$k : \pi_1(X, x_0)_{alg} \longrightarrow \pi_1(X_K, x_0)_{alg},$$

*définie par  $k[\gamma] := [\gamma_K]$  est un isomorphisme de groupes.*

(ii) *Soit  $u$  un chemin semi-algébrique dans  $X$  reliant deux points  $x_0$  et  $x_1$ . Alors nous avons le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_1)_{alg} & \xrightarrow[\sim]{u_{\#}} & \pi_1(X, x_0)_{alg} \\ k \downarrow \cong & & k \downarrow \cong \\ \pi_n(X_K, x_1)_{alg} & \xrightarrow[\sim]{(u_K)_{\#}} & \pi_1(X_K, x_0)_{alg} \end{array},$$

avec  $u_{\#}([\gamma]) = [u\gamma u^{-1}]$ .

*Démonstration.* (i) Montrons que l'application  $k$  est bien définie. Soient  $\gamma$  et  $\gamma'$  deux lacets semi-algébriques dans  $X$  avec point de base  $x_0$ . Supposons que  $\gamma$  et  $\gamma'$  sont semi-algébriquement homotopes. Soient  $\phi(a, t, x)$  et  $\rho(b, t, x)$  deux formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des paramètres  $a \in R^m$  et  $b \in R^{m'}$  définissant les graphes  $\Gamma_{\gamma} = \{(t, x) \in R \times R^n | \phi(a, t, x)\}$  et  $\Gamma_{\gamma'} = \{(t, x) \in R \times R^n | \psi(b, t, x)\}$ . Soit  $H$  une homotopie semi-algébrique de lacets entre  $\gamma$  et  $\gamma'$ . Soit  $\Gamma_H$  le graphe de  $H$ . L'ensemble  $\Gamma_H$  est semi-algébrique. Soit  $\rho(c, t, s, x)$  une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec paramètre  $c \in R^r$  définissant :

$$\Gamma_H = \{(t, s, x) \in R \times R \times R^n | \rho(c, t, s, x)\}$$

Notons par  $\alpha(a, b, c)$  l'énoncé qui dit que  $\Gamma_H$  est le graphe de  $H$  (voir la preuve de la proposition précédente). Il reste à écrire le fait que  $H$  est une homotopie entre les lacets semi-algébriques  $\gamma$  et  $\gamma'$ .

–  $H_0 = \gamma$  s'écrit comme un énoncé du premier ordre :

$$\beta(a, b, c) := \forall t \forall x (\phi(a, t, x) \leftrightarrow \rho(c, 0, t, x)).$$

–  $H_s(0) = H_s(1) = x_0 \forall s \in [0, 1]$  s'écrit comme énoncé du premier ordre :

$$\lambda(c) := \forall s(0 \leq s \leq 1 \rightarrow (\rho(c, 0, s, x_0) \wedge \rho(c, 1, s, x_0)))$$

–  $H_1 = \gamma'$  s'écrit comme un énoncé du premier ordre :

$$\mu(b, c) := \forall t \forall x (\psi(b, t, x) \leftrightarrow \rho(c, 1, t, x)).$$

Posons

$$\nu(a, b, c) := \alpha(a, b, c) \wedge \beta(a, b, c) \wedge \lambda(c) \wedge \mu(b, c).$$

On a  $R \models \nu(a, b, c)$ . Il vient que  $K \models \nu(a, b, c)$  par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg. On en déduit que  $H_K$  est une homotopie semi-algébrique entre les lacets  $\gamma_K$  et  $\gamma'_K$ . Alors  $[\gamma_K] = [\gamma'_K]$ . D'où  $k$  est bien définie. Il est clair que  $k$  est un morphisme de groupe.

Montrons que  $k$  est injectif. Soit  $\gamma$  un lacet de base  $x_0$  dans  $X$  tel que  $k([\gamma]) = [c_{x_0}]$  où  $c_{x_0}$  est le lacet constant à base  $x_0$  dans  $X$ . Ce qui veut dire que  $\gamma_K$  est semi-algébriquement homotope à  $c_{x_0}$ . Désignons par  $H$  une homotopie semi-algébrique entre  $\gamma_K$  et  $c_{x_0}$ . Disons que le graphe  $H$  est défini comme dans la première partie de la preuve (c'est à dire définie par  $\rho(c, t, s, x)$  avec  $c \in K^r$ ). Posons :  $\Gamma_\gamma = \{(t, x) \in R \times R^n \mid \phi(a, t, x)\}$  comme ci-dessus. Considérons  $c_{x_0}$  comme  $\gamma'$  dans la première partie de la preuve. Suivant la même démarche que précédemment, on trouve un énoncé, qui dit que  $H$  est une homotopie semi-algébrique entre  $\gamma$  et  $c_{x_0}$ , que nous notons  $\nu(a, b, c)$ . Par hypothèse on a  $K \models \nu(a, b, c)$ . Il vient que  $K \models \exists z \nu(a, b, z)$ . Par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg on a  $R \models \exists z \nu(a, b, z)$ . Ce qui veut dire qu'il existe un  $r$ -uplet  $c' \in R^r$  qui définit l'ensemble semi-algébrique

$$\Gamma = \{(t, s, x) \in R \times R \times R^n \mid \rho(c', t, s, x)\}$$

qui est le graphe d'une homotopie semi-algébrique entre les lacets  $\gamma$  et  $c_{x_0}$ . Ce qui implique que  $[\gamma] = [c_{x_0}]$ . D'où  $k$  est injectif.

Montrons la surjectivité de  $k$ . Soit  $\gamma$  un lacet à base  $x_0$  dans  $X_K$ . Supposons que le graphe de  $\gamma$  est défini par une formule du premier ordre  $\phi(a, t, x)$  avec paramètre  $a \in K^m$  :

$$\Gamma_\gamma = \{(t, x) \in K \times K^n \mid \phi(a, t, x)\}.$$

Le fait que  $\Gamma_\gamma$  est le graphe du lacet semi-algébrique  $\gamma$  s'écrit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos que nous notons  $\lambda(a)$ . On a  $K \models \lambda(a)$ . Ce qui implique que  $K \models \exists y \lambda(y)$ . L'ensemble semi-algébrique

$$A = \{y \in K^m \mid \lambda(y)\}$$

est défini par une formule du premier ordre à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Alors nous pouvons découper  $A$  en un nombre fini des sous-ensembles semi-algébriques connexes

$S_i$   $i = 1, \dots, r$  définis par des formules du premier ordre à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ ,  $A = \cup_{i=1}^r S_i$  tel que l'application

$$S_i \times [0, 1] \rightarrow X$$

$$(u, s) \mapsto \beta_u(s)$$

soit semi-algébrique, pour tout  $i$ . Soit  $S_j$  la composante qui contient  $a$ . Par Tarski-Seidenberg, il existe un  $b \in S_j \cap R^m$ . Soit  $\delta : I \rightarrow S_j$  un chemin semi-algébrique dans  $S_j$  tel que  $\delta(0) = a$  et  $\delta(1) = b$ . La composition des applications semi-algébriques  $\beta \circ (\delta \times Id_{[0,1]})$  est une homotopie semi-algébrique  $H$  de lacets entre  $\gamma_a$  et  $\gamma_b$  avec  $H(t, s) = \beta_{\delta(t)}(s)$ . En écrivant  $\beta_b$  et sa restriction sur  $S_j \cap R^m$  par le même symbole, on a  $k([\beta_b]) = [\gamma]$  ( car  $\beta_a = \gamma$ ). D'où  $k$  est surjectif.

Ce qui montre que  $k$  est un isomorphisme de groupes.

(ii) Avant de montrer que le diagramme de (ii) est commutatif, nous montrons que  $u_{\#}$  est un isomorphisme de groupes. L'application  $u_{\#}$  est un morphisme de groupes. Notons  $u^{-1}$  le chemin inverse du chemin  $u$ . L'application  $u^{-1}_{\#}$  définie par  $u^{-1}_{\#}([\gamma]) = [u^{-1}\gamma u]$  est un morphisme de groupes. On vérifie facilement que :  $u_{\#} \circ u^{-1}_{\#} = id_{\pi_1(X, x_0)}$  et  $u^{-1}_{\#} \circ u_{\#} = id_{\pi_1(X, x_1)}$ . Ce qui montre que  $u_{\#}$  est un isomorphisme de groupes.

Revenons à la commutativité du diagramme de (ii). Soit  $\gamma$  un lacet semi-algébrique à base  $x_1$  dans  $S$ . Il est facile de vérifier que

$$(u\gamma u^{-1})_K = u_k \gamma_K u_K^{-1}.$$

D'où la commutativité du diagramme de (ii). □

## 2.3 Validité du théorème de h-cobordisme semi-algébrique sur un corps réel clos quelconque

Nous faisons usage d'une notion de complexité des ensembles semi-algébriques pour démontrer la validité du théorème de h-cobordisme semi-algébrique sur tout corps réel clos. Nous adoptons la notion de complexité de [ABB] qui associe à un ensemble semi-algébrique un couple d'entiers qui nous donne de l'information sur le nombre de polynômes le décrivant et la borne supérieure des degrés de ces polynômes. Plus précisément :

**Definition 2.3.1.** Soit  $R$  un corps réel clos quelconque. Toute partie semi-algébrique de  $R^n$  qui a une description de la forme

$$\bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{k_i} \{x \in R^n : \text{sign}(f_{ij}(x)) = \sigma_{ij}\},$$

où  $f_{ij} \in R[X_1, \dots, X_n]$ , et  $\sigma_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ,  $\sum_{i=1}^s k_i \leq p$ ,  $\deg(f_{ij}) \leq q$  pour  $i = 1, \dots, s$  et  $j = 1, \dots, r_i$ ; sera dite de *complexité* au plus  $(p, q)$ .

La *complexité* d'une partie semi-algébrique  $S$  de  $R^n$  est le plus petit couple  $(p, q)$ , suivant l'ordre lexicographique, tel que  $S$  admette une description de la forme ci-dessus.

**Definition 2.3.2.** On dit qu'une famille de formules du premier ordre de la théorie des corps réels clos  $\mathcal{F}(n_1, \dots, n_r)$ , avec  $(n_1, \dots, n_r) \in \mathbb{N}^r$ , est *effective* s'il existe un algorithme qui, étant donné  $n_1, \dots, n_r$ , produit  $\mathcal{F}(n_1, \dots, n_r)$ .

**Definition 2.3.3.** On dira qu'un ensemble semi-algébrique  $S$  est défini de *manière uniforme* s'il est défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos qui ne dépend pas d'un corps réel clos quelconque. C'est à dire qu'il peut être défini sur tout corps réel clos par la même formule.

**Lemma 2.3.4.** *Il existe effectivement et de manière uniforme un sous-ensemble semi-algébrique de  $R^{pN+1}$  où  $N = \binom{n+q}{q}$  qui paramètre la famille des parties semi-algébriques de  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$ .*

Notons par  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  la famille des parties semi-algébriques de  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$ , et par  $\mathcal{A}(n, p, q)$  l'espace des paramètres de la famille  $\mathcal{SA}(n, p, q)$ .

*Démonstration.* Avant tout donnons une description des éléments de  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  qui nous permettra de montrer que  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  est un ensemble semi-algébrique. On part d'un paquet de  $p$  polynômes de degrés  $\leq q$ . Appelons  $f_0, \dots, f_{p-1}$  les polynômes. Un système de conditions de signe sur ces polynômes est donné par un élément  $\sigma \in \{-1, 0, 1\}^p$ , et ce système de conditions de signe est vérifié sur l'ensemble

$$\bigcap_{i=0}^{p-1} \{x \in R^n : \text{sign}(f_i(x)) = \sigma_i\}.$$

Un ensemble semi-algébrique dans  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  peut s'écrire sous forme d'une combinaison booléenne de conditions de signe sur  $p$  polynômes en  $n$  variables de degrés  $\leq q$ , c'est à dire qu'il peut s'écrire sous forme suivante :

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcap_{i=0}^{p-1} \{x \in R^n : \text{sign}(f_i(x)) = \sigma_i\},$$

où  $\Sigma$  est une partie de  $\{-1, 0, 1\}^p$ .

Indexons l'ensemble des parties de  $\{-1, 0, 1\}^p$ , qui est la même chose que  $\{0, 1, 2\}^p$  en faisant plus 1 à chaque entrée, par les entiers  $l$  allant de 0 à  $2^{3^p} - 1$ . Pour cela, commençons à numérotter les éléments  $\{0, 1, 2\}^p$  par les entiers allant de 0 à  $3^p - 1$ . On peut le faire de la manière suivante :

$$\varphi : \{0, 1, 2\}^p \longrightarrow \{0, \dots, 3^p - 1\}$$

$$(s_0, \dots, s_{p-1}) \mapsto s = \varphi(s_0, \dots, s_{p-1}) = \sum_{i=0}^{p-1} s_i 3^i.$$

Il est clair que  $\varphi$  est biunivoque. Les parties de  $\{0, 1, 2\}^p$  s'identifient par la correspondance  $\varphi$  aux parties de  $\{0, \dots, 3^p - 1\}$  qui sont au nombre de  $2^{3^p}$ . Si  $l \in \{0, \dots, 2^{3^p} - 1\}$ , on peut l'écrire en somme de puissance de 2 :

$$l = \sum_{t=0}^{3^p-1} l_t 2^t \text{ où } l_t \in \{0, 1\}$$

Considérons maintenant la correspondance biunivoque suivante :

$$\begin{aligned} \psi : \{0, \dots, 2^{3^p} - 1\} &\longrightarrow \mathcal{P}(\{0, \dots, 3^p - 1\}) \\ l &\mapsto \psi(l) = \{t \in \{0, \dots, 3^p - 1\} : l_t = 1\}. \end{aligned}$$

Par la correspondance  $\varphi$  on a :

$$\{t \in \{0, \dots, 3^p - 1\} : l_t = 1\} \equiv \{(s_0, \dots, s_{p-1}) \in \{0, 1, 2\}^p : l_{\varphi(s_0, \dots, s_p)} = 1\}.$$

On construit ainsi la correspondance biunivoque suivante :

$$\begin{aligned} \{0, \dots, 2^{3^p} - 1\} &\longrightarrow \mathcal{P}(\{-1, 0, 1\}^p) \\ l &\mapsto \Sigma[l] \end{aligned}$$

avec

$$\Sigma[l] = \{\sigma \in \{-1, 0, 1\}^p : l_{\varphi(\sigma_0+1, \dots, \sigma_{p-1}+1)} = 1\}.$$

Maintenant, décrivons l'espace des paramètres. Pour ce faire, on peut introduire la notation  $f_a$  pour désigner le polynôme en  $n$  variables de degré  $\leq q$  dont la liste des coefficients des monômes dans  $f$  ordonnée suivant l'ordre lexicographique sur les monômes est  $a \in R^N$  avec  $N = \binom{n+q}{q}$ . Soit alors maintenant

$$(a_0, \dots, a_{p-1}, l) \in (R^N)^p \times \{0, \dots, 2^{3^p} - 1\}.$$

La partie de  $R^n$  correspondant à ce paramètre est

$$\bigcup_{\sigma \in \Sigma[l]} \bigcap_{i=0}^{p-1} \{x \in R^n : \text{sign}(f_{a_i}(x)) = \sigma_i\}.$$

On peut alors décrire la famille  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  des parties semi-algébriques de  $R^n$  de complexité  $(p, q)$  par une formule en  $(a_0, \dots, a_{p-1}, l, x) \in (R^N)^p \times \{0, \dots, 2^{3^p} - 1\} \times R^n$  :

$$\Phi(a_0, \dots, a_{p-1}, l, x) = \bigvee_{\sigma \in \Sigma[l]} \left( \bigwedge_{i=0}^{p-1} \text{sign}(f_{a_i}(x)) = \sigma_i \right).$$

Nous avons donc :

$$\mathcal{SA}(n, p, q) = \bigcup_{l=0}^{2^{3p}} \{(a_0, \dots, a_{p-1}, l, x) \in (R^N)^p \times R \times R^n : \Phi(a_0, \dots, a_{p-1}, l, x)\}.$$

Ainsi défini,  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $(R^N)^p \times R \times R^n$ . Prenons alors l'ensemble semi-algébrique suivant

$$\mathcal{A}(n, p, q) = \bigcup_{l=0}^{2^{3p}} (R^N)^p \times \{l\} \subset (R^N)^p \times R$$

qui nous donne l'espace des paramètres. On obtient ainsi, effectivement pour tout corps réel clos, que l'espace des paramètres  $\mathcal{A}(n, p, q)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $(R^N)^p \times R$ .  $\square$

Rappelons le théorème de trivialisatation semi-algébrique de Hardt. Avant cela, rappelons ce que c'est qu'une trivialisatation semi-algébrique d'une application semi-algébrique.

**Definition 2.3.5.** Une application semi-algébrique  $f : A \longrightarrow B$  est dite être *semi-algébriquement triviale sur un sous-ensemble semi-algébrique*  $C \subset B$  s'il existe un ensemble semi-algébrique  $F$  et un homéomorphisme semi-algébrique  $h : f^{-1}(C) \longrightarrow C \times F$ , tel que la composition de  $h$  avec la projection  $C \times F \rightarrow C$  soit égale à la restriction de  $f$  sur  $f^{-1}(C)$ . Ce que traduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} A \supset f^{-1}(C) & \xrightarrow{h} & C \times F \\ \downarrow f & & \downarrow pr_1 \\ B \supset C & \xrightarrow{=} & C \end{array}$$

L'homéomorphisme  $h$  est appelé *une trivialisatation semi-algébrique* de  $f$  sur  $C$ . On dit que la trivialisatation  $h$  est compatible avec un sous-ensemble semi-algébrique  $D \subset A$  s'il existe un sous-ensemble semi-algébrique  $G \subset F$  tel que  $h(D \cap f^{-1}(C)) = C \times G$ .

Nous énonçons maintenant le théorème de trivialisatation semi-algébrique de Hardt. On peut trouver une démonstration détaillée valide sur tout corps réel clos dans [BCR, p.221].

**Theorem 2.3.6.** Soient  $A \subset R^n$ ,  $B \subset R^m$  deux ensembles semi-algébriques et  $f : A \longrightarrow B$  une application semi-algébrique. Il existe une partition semi-algébrique finie de  $B$  en  $B_1, \dots, B_k$  telle que  $f$  est semi-algébriquement trivial sur chaque  $B_i$ . De plus, si  $A_1, \dots, A_h$  est une famille finie de sous-ensembles semi-algébriques de  $A$ , on peut demander que chaque trivialisatation  $h_i$  soit compatible avec tous les  $A_j$ .

**Remark 2.3.7.** Soient  $a$  et  $b$  dans  $B_i$ , alors on a :  $f^{-1}(a)$  et  $f^{-1}(b)$  sont semi-algébriquement homéomorphes.

**Proposition 2.3.8.** *Etant donnés des entiers  $n, p$  et  $q$ , il existe un couple d'entiers  $(t, u)$  tel que pour tout couple d'ensembles semi-algébriques appartenant à  $\mathcal{A}(n, p, q)$  semi-algébriquement homéomorphes entre eux, il existe un homéomorphisme  $f$  entre eux avec pour graphe  $\Gamma_f \in \mathcal{SA}(2n, t, u)$ .*

*Démonstration.* Considérons la projection suivante :

$$\begin{aligned} \Pi : R^{pN+1} \times R^n &\rightarrow R^{pN+1} \\ (a, x) &\mapsto a \end{aligned}$$

avec  $a \in R^{pN+1}$  et  $x \in R^n$ . Nous avons

$$\widetilde{\mathcal{SA}}(n, p, q) = \{(a, x) \in \mathcal{A}(n, p, q) \times R^n : x \in X_a\} = \bigcup_{a \in \mathcal{A}(n, p, q)} \{a\} \times X_a$$

où  $X_a$  est le sous-ensemble semi-algébrique de  $R^n$  paramétré par  $a \in \mathcal{A}(n, p, q)$ . L'ensemble  $\mathcal{SA}(n, p, q)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $R^{pN+1} \times R^n$  (voir la démonstration du lemme 2.3.4). La projection

$$\Pi : \widetilde{\mathcal{SA}}(n, p, q) \rightarrow \mathcal{A}(n, p, q)$$

est une application semi-algébrique. Par le théorème de trivialisaton semi-algébrique de Hardt, appliqué à l'application semi-algébrique  $\Pi$ , l'ensemble des paramètres  $\mathcal{A}(n, p, q)$  est partitionné en un nombre fini de sous-ensembles semi-algébriques  $S_i$  :

$$\mathcal{A}(n, p, q) = \bigcup_{i=1}^s S_i$$

tel que pour chaque  $i$ , il existe un ensemble semi-algébrique  $X_i$  et un homéomorphisme semi-algébrique  $h_i$  tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \Pi^{-1}(S_i) & \xrightarrow{h_i} & S_i \times X_i \\ \downarrow \Pi & & \downarrow \text{pr}_1 \\ S_i & \xrightarrow{=} & S_i \end{array}$$

Comme le nombre des homéomorphismes de trivialisaton est fini et que chacun admet une complexité, la complexité de chacun est bornée par le maximum de toutes leurs complexités, notons le par  $(u, v)$ . Nous avons choisi  $X_i$  un représentant à paramètre dans  $S_i$ . Soit  $X_{i_1}$  semi-algébriquement homéomorphe à  $X_{i_2}$  pour certains  $i_1, i_2 \in \{1, \dots, s\}$ . Alors il existe un couple d'entiers  $(t_{i_1 i_2}, u_{i_1 i_2})$  tel qu'il existe un homéomorphisme semi-algébrique

$$f : X_{i_1} \longrightarrow X_{i_2}$$

dont le graphe  $\Gamma_f$  appartient à  $\mathcal{SA}(2n, t_{i_1 i_2}, u_{i_1 i_2})$ . Soient  $X$  et  $Y$  deux ensembles semi-algébriques appartenant à  $\mathcal{A}(n, p, q)$  tels qu'ils soient semi-algébriquement homéomorphes. Alors il existe  $i_1$  et  $i_2$  tels qu'un paramètre  $a$  de  $X$  est dans  $S_{i_1}$  et un paramètre  $b$  de  $Y$  est dans  $S_{i_2}$ . Par suite  $X$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $X_{i_1}$  par l'homéomorphisme de trivialisatation. De même pour  $Y$  et  $X_{i_2}$ . On a plus précisément l'homéomorphisme semi-algébrique

$$h_{i_1|X} : X \longrightarrow X_{i_1}$$

défini par :  $(a, h_{i_1|X}(x)) = h_{i_1}(a, x)$ . Alors, la complexité de cette application semi-algébrique est bornée par  $(u, v)$  indépendamment de  $X$ . Et pour  $Y$ , on a l'homéomorphisme semi-algébrique

$$h_{i_2|Y} : Y \longrightarrow X_{i_2}$$

défini par  $(b, h_{i_2|Y}(x)) = h_{i_2}(b, x)$ . Cet homéomorphisme est aussi de complexité bornée par  $(u, v)$ . Nous obtenons ici un homéomorphisme semi-algébrique de  $X$  sur  $Y$  par :

$$g = h_{i_2|Y}^{-1} \circ f \circ h_{i_1|X}.$$

L'application semi-algébrique  $g$  est de complexité bornée par  $(t'_{i_1 i_2}, u'_{i_1 i_2})$  indépendamment de  $X$  et  $Y$ , comme composé des homéomorphismes semi-algébriques de complexités bornées indépendamment de  $X$  et  $Y$ , mais qui depend seulement de  $i_1$  et de  $i_2 \in \{1, \dots, s\}$ . Soit

$$E = \{(i, j) \in \{1, \dots, s\}^2 \mid X_i \text{ et } X_j \text{ sont semi-algébriquement homéomorphes}\}.$$

Cet ensemble est fini. Alors, prenons

$$(t, u) = \left( \max(p, \max_{(i,j) \in E} (t'_{ij})), \max(q, \max_{(i,j) \in E} (u'_{ij})) \right).$$

D'où le résultat. □

Nous montrons par le théorème suivant qu'en bornant les complexités des h-cobordismes semi-algébriques par un couple d'entiers, on obtient une borne uniforme sur la complexité des homéomorphismes de trivialisatation dans le théorème de h-cobordisme semi-algébrique. Dans ce qui suit : *compact* veut dire fermé et borné, *connexité* veut dire connexité semi-algébrique.

**Theorem 2.3.9.** *Etant donnés  $n, m \geq 6$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , il existe  $(t, u) \in \mathbb{N}^2$  tel que pour tout h-cobordisme sémi-algébrique  $(M, M_0, M_1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  semi-algébriquement simplement connexe et  $M$  de dimension  $m$ , il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $f : M \longrightarrow M_0 \times I$  tel que son graphe  $\Gamma_f \in \mathcal{SA}(2n + 1, t, u)$*



*Démonstration.* Pour trouver une borne uniforme  $(t, u)$  que nous voulons, nous construirons d'abord l'espace des paramètres des h-cobordismes dans  $\mathbb{R}^n$  semi-algébriques de complexité au plus  $(p, q)$  et semi-algébriquement simplement connexe. Cela consiste à traduire le fait de

“ être un h-cobordisme sémi-algébrique dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  semi-algébriquement simplement connexe,”

en une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

En effet, le fait qu'un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$  soit une sous-variété semi-algébrique de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos (voir Proposition 2.2.7). Ce qui implique que l'ensemble des sous-variétés semi-algébriques de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  et de complexité inférieure ou égale à  $(p, q)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{A}(n, p, q)$ . Notons le par  $\mathcal{B}(n, m, p, q)$ . Il est ainsi défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective.

Les conditions que doit satisfaire un triplet de variétés semi-algébriques  $(M, M_0, M_1)$  pour être un cobordisme peuvent être écrites en une conjonction des formules du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  :

- $M, M_0, M_1$  sont fermées et bornées. Ce qui est équivalent à dire que :

$$(i) \forall x \in \mathbb{R}^n (x \in M \leftrightarrow x \in \overline{M})$$

où  $\overline{M}$  est l'adhérence de  $M$ . Cette formule s'applique aussi à  $M_0$  et  $M_1$ . En plus on a

$$(ii) \exists c \in \mathbb{R} (\forall x \in M \rightarrow \|x\|^2 \leq c).$$

- $M_0 \cap M_1 = \emptyset$  est équivalent à

$$\forall x \in \mathbb{R}^n [(x \in M_0 \rightarrow x \in M_1^c) \wedge (x \in M_1 \rightarrow x \in M_0^c)],$$

où  $M_i^c$  est le complémentaire de  $M_i$  pour  $i = 0, 1$ .

- $\partial M = M_0 \cup M_1$  se dit par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos (voir Proposition 2.2.12 en posant  $S = M$  et  $T = M_0 \cup M_1$ ).

Alors l'ensemble des

$$(a, b, c) \in \mathcal{B}(n, m, p, q) \times \mathcal{B}(n, m - 1, p, q)^2$$

tel que  $(M_a, M_b, M_c)$  est un cobordisme est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{3pN+3}$ . Cet ensemble paramètre les cobordismes semi-algébriques avec des complexités au plus  $(p, q)$  et nous le notons  $\mathcal{Cob}(n, m, p, q)$ . Il est défini par une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective.

Pour paramétrer des h-cobordismes semi-algébriques avec des complexités au

plus  $(p, q)$ , nous devons prendre en considération les conditions d'équivalences homotopiques.

La variété semi-algébrique  $M_b$  est un rétracte par déformation semi-algébrique de  $M_a$  veut dire qu'il existe une homotopie semi-algébrique  $H : [0, 1] \times M_a \longrightarrow M_a$  telle que :

–  $H_0 = id_{M_a}$  c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n (x \in M_a \rightarrow ((0, x), x) \in \Gamma_H)$$

–  $H_t|_{M_b} = id_{M_b} \forall t \in [0, 1]$  c'est à dire :

$$\forall t \in [0, 1], \forall x \in \mathbb{R}^n (x \in M_b \leftrightarrow ((t, x), x) \in \Gamma_H)$$

–  $H_1 : M_a \longrightarrow M_b$  c'est à dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \forall y \in \mathbb{R}^n (x \in M_a \wedge y \in M_a \rightarrow (((1, x), y) \in \Gamma_H \rightarrow y \in M_b)).$$

Comme  $\Gamma_H$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , donc  $\Gamma_H$  admet une certaine complexité. Dans la donnée  $(p, q)$ , les rétractions par déformations semi-algébriques sont prises en considération.

Alors l'ensemble des

$$(a, b, c, e, f) \in \mathcal{Cob}(n, m, p, q) \times \mathcal{A}(2n + 1, p, q)^2,$$

tels que  $e$  (respectivement  $f$ ) paramètre le graphe de l'homotopie semi-algébrique qui définit une rétraction par déformation semi-algébrique de  $M_a$  sur  $M_b$  (respectivement de  $M_a$  sur  $M_c$ ) comme mentionné ci-dessus, est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{3pN+3} \times \mathbb{R}^{2pN'+2}$  où  $N' = \binom{2n+1+q}{q}$ . Cet ensemble est en effet défini par une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective. Par conséquent la projection sur  $\mathbb{R}^{3pN+3}$  donne un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{Cob}(n, m, p, q)$ , défini par une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective. Il paramètre les h-cobordismes de complexité au plus  $(p, q)$ . Notons le par  $h\mathcal{Cob}(n, m, p, q)$ . Maintenant considérons l'ensemble semi-algébrique suivant :

$$\mathcal{F}(n, m, p, q) = \{(a, x) \in h\mathcal{Cob}(n, m, p, q) \times \mathbb{R}^n : x \in M_a\}.$$

Soient  $\mathcal{F}_0(n, m, p, q)$  et  $\mathcal{F}_1(n, m, p, q)$  des sous ensembles semi-algébriques de  $\mathcal{F}(n, m, p, q)$  telles que pour tout  $a \in \mathcal{Cob}(n, m, p, q)$ ,  $M_a \in \mathcal{F}(n, m, p, q)$ ,  $M_{a0} \in \mathcal{F}_0(n, m, p, q)$ ,  $M_{a1} \in \mathcal{F}_1(n, m, p, q)$  et  $(M_a, M_{a0}, M_{a1})$  est un h-cobordisme semi-algébrique de complexité au plus  $(p, q)$ . Soit la projection définie par :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{F}(n, m, p, q) &\rightarrow h\mathcal{Cob}(n, m, p, q) \\ (a, x) &\mapsto a. \end{aligned}$$

Comme  $\pi$  ainsi définie est une applications semi-algébrique, par le théorème de trivialisaton semi-algébrique compatible avec  $\mathcal{F}_0(n, m, p, q)$  et  $\mathcal{F}_1(n, m, p, q)$ ,  $h\text{Cob}(n, m, p, q)$  admet une partition semi-algébrique finie  $H_i$ ,  $i = 1, \dots, s$ , telle qu'il existe des homéomorphismes semi-algébriques de trivialisaton

$\pi_i : \pi^{-1}(H_i) \rightarrow H_i \times C_i$  où  $C_i = (C_i, C_{i0}, C_{i1})$  est un h-cobordisme semi-algébrique. Supposons  $\pi_i$  de complexité au plus  $(t_i, u_i)$ .

Alors il existe un certain nombre de  $j$  dans  $\{1, \dots, s\}$  tel que la réunion des  $H_j$  paramètre l'ensemble des h-cobordismes semi-algébriques semi-algébriquement *simplement connexes* de complexité au plus  $(p, q)$ . Cet ensemble est semi-algébrique et nous le notons par  $\mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$ .

Nous perdons ici l'effectivité car le choix des paquets de h-cobordismes semi-algébriquement simplement connexe n'est pas effectif (cf. [VKT]).

Par contre l'espace des paramètres  $\mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$  est défini uniformément dans le sens qu'il est défini par la même formule sur tout corps réel clos et la propriété d'être semi-algébriquement simplement connexe, pour les h-cobordismes semi-algébriques à paramètre dans  $\mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$ , est préservée sur tout corps réel clos (Proposition 2.2.20). En plus sur  $\mathbb{R}$ , la simple connexité semi-algébrique est équivalent à la simple connexité topologique (Proposition 2.2.18).

Reindexons les  $H_j$  qui constituent  $\mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$  tel que :

$$\mathcal{Hcob}(n, m, p, q) = \bigcup_{j=1}^r H_j.$$

Prenons alors un h-cobordisme semi-algébrique  $(M, M_0, M_1)$  avec un paramètre  $a \in \mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$ , alors il existe un  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $a \in H_j$ . Par conséquent,  $\pi_j|_M : M \rightarrow C_j$  est un homéomorphisme semi-algébrique de complexité au plus  $(t_j, u_j)$ . Puisque nous prenons  $C_j$  et  $C_{j0}$  avec complexité au plus  $(p, q)$ , nous pouvons supposer que  $C_{j0} \times I$  admet une complexité au plus  $(p, q)$ . Comme  $C_j$  et  $C_{j0} \times I$  sont semi-algébriquement homéomorphes (ce qui est vrai par le Théorème de h-cobordisme semi-algébrique 1.5.7), alors par la proposition 2.3.8, il existe un couple d'entiers  $(v, w)$  qui ne dépend que de  $n, p, q$  tel qu'il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $f_j : C_j \rightarrow C_{j0} \times I$  avec le graphe  $\Gamma_{f_j}$  de complexité au plus  $(v, w)$ . Alors nous avons l'homéomorphisme semi-algébrique suivant :

$$g_j = ((\pi_j|_{M_0})^{-1} \times id_I) \circ f_j \circ \pi_j|_M : M \rightarrow M_0 \times I.$$

On trouve qu'il existe une borne à la complexité de  $g_j$ , notons  $(t'_j, u'_j)$ , qui ne dépend que de  $j$  et non de h-cobordisme  $(M, M_0, M_1)$ . Prenons le maximum sur  $j = 1, \dots, r$  de ces complexités que nous notons par  $(t, u)$  et le théorème est démontré. □

Nous terminons cette section avec la démonstration de la validité du théorème de h-cobordisme semi-algébrique sur tout corps réel clos.

**Theorem 2.3.10.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme semi-algébrique simplement connexe sur un corps réel clos  $R$ . Si  $\dim M \geq 6$ , alors  $M$  est semi-algébriquement homéomorphe à  $M_0 \times I$ .*

*Démonstration.* Fixons la dimension de l'espace ambiant par  $n$ , la dimension des h-cobordismes par  $m \geq 6$  et aussi une borne  $(p, q)$  à leurs complexités. Par le théorème précédent, il existe  $(t, u) \in \mathbb{N}^2$  tel que l'énoncé suivant

$\Phi(n, m, p, q, t, u) :=$

” Pour tout h-cobordisme semi-algébrique  $(M, M_0, M_1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  semi-algébriquement simplement connexe de complexité au plus  $(p, q)$ , il existe un homéomorphisme semi-algébrique  $f : M \rightarrow M_0 \times I$  de complexité au plus  $(t, u)$ ”,

est valide. Nous voulons la validité de cet énoncé sur tout corps réel clos. Pour ce faire nous entendons utiliser le Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg. Comme nous avons signalé dans la remarque 2.1.6, le Principe de Transfert de Tarski-Seidenberg n'est pas vrai pour ce genre d'énoncé sans borne, mais, ayant les bornes sur les complexité des objets intervenants, nous pouvons traduire l'énoncé  $\Phi(n, m, p, q, t, u)$  en un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

En effet l'espace des paramètres des h-cobordismes semi-algébriques dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  est  $\mathcal{Hcob}(n, m, p, q)$  comme construit dans le théorème précédent. Notons par  $\mathcal{G}(n, p, q, t, u)$  l'ensemble des

$$(a, b, f) \in \mathcal{A}(n, p, q)^2 \times \mathcal{A}(2n + 1, t, u)$$

tels que  $f : M_a \rightarrow M_b \times I$  soit un homéomorphisme semi-algébrique. Les conditions que doit satisfaire  $f$  pour être un homéomorphisme semi-algébrique peuvent être écrites par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec coefficients dans  $\mathbb{Z}$  (voir démonstration de la proposition 2.2.5). Par conséquent  $\mathcal{G}(n, p, q, t, u)$  est un ensemble semi-algébrique défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réel clos avec coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Nous pouvons alors écrire l'énoncé défini au début comme suit :

$\Phi(n, m, p, q, t, u) :$

$$”\forall (a, b, c) \in \mathcal{Hcob}(n, m, p, q) \exists f \in \mathcal{A}(2n + 1, t, u) (a, b, f) \in \mathcal{G}(n, p, q, t, u)”.$$

L'énoncé  $\Phi(n, m, p, q, t, u)$  ainsi défini est un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos défini avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Comme  $\mathbb{R} \models \Phi(n, m, p, q, t, u)$ , par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg, pour tout corps réel clos  $R$ , on a  $R \models \Phi(n, m, p, q, t, u)$ . D'où le résultat. □

## 2.4 Validité du théorème de h-cobordisme Nash sur un corps réel clos quelconque

Avant de donner une version de Trivialité Nash en famille adaptée à notre situation, rappelons les deux résultats suivants :

**Theorem 2.4.1.** *Soit  $B$  un sous ensemble semi-algébrique, et  $X$  un sous ensemble semi-algébrique de  $R^n \times B$  tel que pour tout  $b \in B$ ,  $X_b$  est une sous variété Nash de  $R^n$ . Alors il existe une stratification*

$$B = \cup_{i \in I} M^i$$

de  $B$  en un nombre fini de variétés de Nash tel que pour tout  $i \in I$ ,  $X_{|M^i}$  est une variété Nash et la projection  $X_{|M^i} \rightarrow M^i$  est une submersion. Si de plus, pour tout  $b \in B$ ,  $X_b$  est compact, on peut demander à la submersion d'être propre.

*Démonstration.* Voir [CS, Corollary 2.3]. □

**Theorem 2.4.2.** *Soit  $M \subset R^{m'}$  une sous variété Nash de dimension  $m$  possiblement à bord  $\partial M$ . Soit  $\varpi : M \rightarrow R^k$ ,  $k > 0$ , une submersion Nash surjective et propre telle que  $\varpi|_{\partial M}$  soit une submersion surjective. Alors il existe un difféomorphisme Nash*

$$\varphi = (\varphi', \varpi) : (M, \partial M) \rightarrow (M \cap \varpi^{-1}(0), \partial M \cap \varpi^{-1}(0)) \times R^k.$$

*Démonstration.* Voir [FKS, Theorem I]. □

Formulons maintenant la triivialité Nash en famille des variétés Nash à bord.

**Theorem 2.4.3.** *Soit  $B$  un ensemble semi-algébrique et la projection  $\pi : R^n \times B \rightarrow B$ . Soit  $X$  un sous ensemble semi-algébrique de  $R^n \times B$  tel que pour tout  $b \in B$ ,*

$$X_b = \{x \in R^n : (x, b) \in X\}$$

*est une sous variété Nash compactes à bord de  $R^n$ . Alors il existe une partition finie  $B = \cup_{i=1}^q M_i$  de  $B$  en des sous variétés Nash, et pour chaque  $i$  il existe une sous variété Nash compacte  $F_i \subset R^n$  à bord, et un difféomorphisme de trivialisation de  $\pi|_{X_{|M_i}}$*

$$h_i : X_{|M_i} \rightarrow F_i \times M_i$$

*compatible avec le bord.*

*Démonstration.* Posons  $Y_B = \{Y_b = \partial X_b : b \in B\}$ . Par le Théorème 2.4.1, on peut montrer qu'il existe une partition Nash finie  $B$  en  $B = \cup_{i=1}^r B_i$  telle que pour chaque  $i$ , les projections  $\pi|_{X_{|B_i}} : X_{|B_i} \rightarrow B_i$  et  $\pi|_{Y_{|B_i}} : Y_{|B_i} \rightarrow B_i$  soient des submersions Nash surjectives et propres. Il existe une partition de  $B_i$ , grace à [BCR, Proposition 2.9.10, p.57], en  $B_i = \cup_{j=i}^t S_{i_j}$  telle que chaque  $S_{i_j}$  soit Nash

difféomorphe à  $]0, 1[^{k_{i_j}}$ . Or, il est clair que  $]0, 1[^{k_{i_j}}$  est Nash difféomorphe à  $R^{k_{i_j}}$ . On a par suite des submersions propres surjectives  $X|_{S_{i_j}} \rightarrow R^{k_{i_j}}$  et  $Y|_{S_{i_j}} \rightarrow R^{k_{i_j}}$ . Par le Théorème 2.4.2 appliqué à  $X|_{S_{i_j}}$  avec son bord  $\partial X|_{S_{i_j}} = Y|_{S_{i_j}}$ , il existe une sous variété Nash à bord  $F_{i_j}$  de  $R^n$  telle que :

$$(X|_{S_{i_j}}, Y|_{S_{i_j}}) \cong (F_{i_j}, \partial F_{i_j}) \times R^{k_{i_j}}$$

Ce qui est équivalent à :

$$(X|_{S_{i_j}}, Y|_{S_{i_j}}) \cong (F_{i_j}, \partial F_{i_j}) \times S_{i_j}$$

Ce qui achève la preuve.  $\square$

Nous démontrons ici l'analogie de la proposition 2.3.8 pour les variétés de Nash.

**Proposition 2.4.4.** *Etant donnés des entiers  $n$ ,  $p$  et  $q$ , il existe un couple d'entiers  $(t, u)$  tel que pour tout couple de sous-variétés de Nash de  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  Nash difféomorphes entre eux, il existe un difféomorphisme Nash  $f$  entre eux avec pour graphe  $\Gamma_f$  de complexité au plus  $(t, u)$ .*

*Démonstration.* Remarquons que toute sous-variété de Nash de  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  appartient à  $\mathcal{A}(n, p, q)$ . Nous avons montré dans la démonstration de la proposition 2.3.8 que l'espace des paramètres  $\mathcal{A}(n, p, q)$  est un ensemble semi-algébrique. L'ensemble des paramètres des sous-variétés de Nash de  $R^n$  de dimension  $m$  appartenant à  $\mathcal{A}(n, p, q)$  est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{A}(n, p, q)$ . En effet, la condition qu'un ensemble semi-algébrique soit une variété de Nash peut s'écrire en une formule de premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective (voir remarque 2.2.8). Notons cet ensemble  $\mathcal{N}(n, m, p, q)$ . Par le théorème de Trivialité Nash en famille mentionné ci-dessus, il existe une stratification Nash finie

$$\mathcal{N}(n, m, p, q) = \bigcup_{i=1}^s M^i$$

de  $\mathcal{N}(n, m, p, q)$  en des variétés de Nash  $M^i$  telles que les variétés de Nash paramétrées par des points de  $M^i$  sont Nash difféomorphes entre eux. Le reste de la démonstration est analogue à la dernière partie de la démonstration de la proposition 2.3.8. Ce qui achève la preuve.  $\square$

Comme dans cas semi-algébrique, on montre par le théorème suivant que avec les complexités des h-cobordismes Nash bornées par un couple d'entiers, on obtient une borne uniforme sur la complexité des difféomorphismes de trivialisations dans le théorème de h-cobordisme Nash.

**Theorem 2.4.5.** *Etant donnés  $n, m \geq 6$ ,  $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ , il existe  $(t, u) \in \mathbb{N}^2$  tel que pour tout h-cobordisme Nash  $(M, M_0, M_1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  semi-algébriquement simplement connexe et  $M$  de dimension  $m$ , il existe un difféomorphisme Nash  $f : M \rightarrow M_0 \times I$  tel que son graphe  $\Gamma_f$  est de complexité au plus  $(t, u)$ .*

*Démonstration.* Le principe de la démonstration est le que même que celui du Théorème 2.3.9. Nous construirons l'espace des paramètres des h-cobordismes Nash dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  et semi-algébriquement simplement connexe. Cela consiste à traduire le fait d'

“ être un h-cobordisme Nash dans  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  semi-algébriquement simplement connexe”,

en une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos.

Nous avons montré dans la preuve de la proposition 2.4.4 que l'ensemble des sous-variétés de Nash de  $\mathbb{R}^n$  de complexité au plus  $(p, q)$ , noté  $\mathcal{N}(n, m, p, q)$ , est un ensemble semi-algébrique défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective. Puisque les conditions que doit satisfaire un triplet de sous-variétés de Nash de  $\mathbb{R}^n$  pour être un cobordisme Nash sont les mêmes que pour un triplet de variétés semi-algébriques pour être un cobordisme semi-algébrique, alors, elles peuvent être écrites en une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective (voir la démonstration de théorème 2.3.10). Alors l'ensemble des

$$(a, b, c) \in \mathcal{N}(n, m, p, q) \times \mathcal{N}(n, m - 1, p, q)^2$$

tels que  $(M_a, M_b, M_c)$  est un cobordisme Nash, est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{3pN+3}$ . Cet ensemble paramètre les cobordismes Nash de complexité au plus  $(p, q)$  et nous le notons  $\mathcal{C}(n, m, p, q)$ . Il est défini par une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective.

Alors l'ensemble des

$$(a, b, c, e, f) \in \mathcal{C}(n, m, p, q) \times \mathcal{A}(2n + 1, p, q)^2,$$

tels que  $e$  (respectivement  $f$ ) paramètre le graphe de l'homotopie semi-algébrique qui définit une rétraction semi-algébrique de  $M_a$  sur  $M_b$  (respectivement de  $M_a$  sur  $M_c$ ) comme dans la démonstration du théorème 2.3.10, est un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathbb{R}^{3N+3} \times \mathbb{R}^{2N'+2}$  où  $N' = p \binom{2n + 1 + q}{q}$ . Cet ensemble est en effet défini par une formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective. Par conséquent la projection sur  $\mathbb{R}^{3N+3}$  donne un sous-ensemble semi-algébrique de  $\mathcal{C}(n, m, p, q)$ , défini par une

formule du premier ordre dans la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$  de manière effective. Il paramètre les h-cobordismes Nash de complexité au plus  $(p, q)$ . Notons le par  $h\mathcal{C}(n, m, p, q)$ .

Considérons l'ensemble semi-algébrique suivant :

$$\mathcal{D}(n, m, p, q) = \{(a, x) \in h\mathcal{C}(n, m, p, q) \times \mathbb{R}^n : x \in M_a\}.$$

Soient  $\mathcal{D}_0(n, m, p, q)$  et  $\mathcal{D}_1(n, m, p, q)$  des sous ensembles semi-algébriques de  $\mathcal{D}(n, m, p, q)$  telles que pour tout  $a \in h\mathcal{C}(n, m, p, q) : M_a \in \mathcal{D}(n, m, p, q)$ ,  $M_{a_0} \in \mathcal{D}_0(n, m, p, q)$  et  $M_{a_1} \in \mathcal{D}_1(n, m, p, q)$  et  $(M_a, M_{a_0}, M_{a_1})$  est un h-cobordisme Nash de complexité au plus  $(p, q)$ . Soit la projection définie par :

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{D}(n, m, p, q) &\rightarrow h\mathcal{C}(n, m, p, q) \\ (a, x) &\mapsto a. \end{aligned}$$

Par le Théorème 2.4.3,  $h\mathcal{C}(n, m, p, q)$  admet une partition Nash finie  $S_i$ , avec  $i = 1, \dots, s$ , telle que pour chaque  $i$ , il existe un difféomorphisme Nash  $\pi_i : \pi^{-1}(S_i) \rightarrow S_i \times F_i$  compatible avec les sous familles  $\mathcal{D}_0(n, m, p, q)$  et  $\mathcal{D}_1(n, m, p, q)$  où  $F_i = (F_i, F_{0_i}, F_{1_i})$  est un h-cobordisme Nash. Supposons  $\pi_i$  de complexité au plus  $(t_i, u_i)$ .

Alors il existe des entiers  $j$  dans  $\{1, \dots, s\}$  tels que la réunion des  $S_j$  paramètre l'ensemble des h-cobordismes Nash semi-algébriquement simplement connexes de complexité au plus  $(p, q)$ . Cet ensemble est défini par une formule de premier ordre de la théorie des corps réels clos avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , et nous le notons par  $\mathcal{H}(n, m, p, q)$ .

C'est aussi à ce niveau que nous perdons l'effectivité (cf. [VKT]). Reindexons les  $S_j$  qui constituent  $\mathcal{H}(n, m, p, q)$  par  $j = 1, \dots, r$  :

$$\mathcal{H}(n, m, p, q) = \bigcup_{j=1}^r S_j$$

Prenons alors un h-cobordisme Nash  $(M, M_0, M_1)$  avec un paramètre  $a \in \mathcal{H}(n, m, p, q)$ , alors il existe un  $j \in \{1, \dots, r\}$  tel que  $a \in S_j$ . Par conséquent,  $\pi_j|_M : M \rightarrow F_j$  est un difféomorphisme Nash de complexité au plus  $(t_j, u_j)$ . Puisque nous prenons  $F_j$  et  $F_{j_0}$  avec complexité au plus  $(p, q)$ , nous pouvons supposer que  $F_{j_0} \times I$  admet une complexité au plus  $(p, q)$ . Comme  $F_j$  et  $F_{j_0} \times I$  sont Nash difféomorphes (ce qui est vrai par le Théorème de h-cobordisme Nash 1.5.15), alors par la proposition 2.4.4, il existe un couple d'entiers  $(v, w)$  qui ne dépend que de  $n, p, q$  tel qu'il existe un difféomorphisme Nash  $f_j : F_j \rightarrow F_{j_0} \times I$  avec le graphe  $\Gamma_{f_j}$  de complexité au plus  $(v, w)$ . Alors nous avons le difféomorphisme suivant :

$$g = ((\pi_j|_{M_0})^{-1} \times id_I) \circ f_j \circ \pi_j|_M : M \rightarrow M_0 \times I.$$



On trouve qu'il existe une borne à la complexité de  $g$ , notons  $(t'_j, u'_j)$ , et ne dépend pas du h-cobordisme  $(M, M_0, M_1)$  mais que de  $j$ . Prenons le maximum de ces complexités que nous notons par  $(t, u)$  et le théorème est démontré.  $\square$

Nous cloturons cette section par la démonstration de la validité sur tout corps réel clos du théorème de h-cobordisme version Nash. Le principe de la démonstration est le même qu'au cas semi-algébrique.

**Theorem 2.4.6.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme Nash simplement connexe sur un corps réel clos  $R$ . Si  $\dim M \geq 6$ , alors  $M$  est Nash difféomorphe à  $M_0 \times I$ .*

*Démonstration.* Fixons par  $n$  la dimension de l'espace ambiant, par  $m \geq 6$  la dimension des h-cobordismes Nash considérés et par  $(p, q)$  une borne à leurs complexités. Le théorème précédent implique qu'il existe  $(t, u) \in \mathbb{N}^2$  tel que l'énoncé suivant  $\Psi(n, m, p, q, t, u) :=$

“ Pour tout h-cobordisme Nash  $(M, M_0, M_1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  semi-algébriquement simplement connexe de complexité au plus  $(p, q)$ , il existe un difféomorphisme Nash  $f : M \rightarrow M_0 \times I$  tel que son graphe  $\Gamma_f \in \mathcal{A}(2n + 1, t, u)$ ”,

soit vrai.

Vérifions que l'énoncé  $\Psi(n, m, p, q, t, u)$  peut être traduit en un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec coefficients dans  $\mathbb{Z}$ .

En effet, l'espace des paramètres des h-cobordismes Nash dans  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  et de complexité au plus  $(p, q)$  semi-algébriquement simplement connexes est  $\mathcal{H}(n, m, p, q)$ , construit dans la démonstration du théorème précédent.

Notons par  $\mathcal{R}(n, p, q, t, u)$  l'ensemble des

$$(a, b, f) \in \mathcal{N}(n, m, p, q) \times \mathcal{N}(n, m - 1, p, q) \times \mathcal{A}(2n + 1, t, u)$$

tels que  $f : M_a \rightarrow M_b \times I$  est un difféomorphisme Nash où  $\mathcal{N}(n, m, p, q)$  est l'espace des paramètres des sous-variétés Nash de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $m$  et de complexité au plus  $(p, q)$  (construit dans la démonstration de la Proposition 2.4.4). La condition que satisfait une application semi-algébrique pour être un difféomorphisme (c'est à dire être de Nash, bijective et avec réciproque de Nash) s'écrit comme un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec les coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Ceci en vertu de la remarque 2.2.8 et la démonstration de la proposition 2.2.5. Alors,  $\mathcal{R}(n, p, q, t, u)$  est un ensemble semi-algébrique défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos avec coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Nous avons ainsi traduit l'énoncé voulu en :

$$\Psi(n, m, p, q, t, u) :=$$

$$”\forall (a, b, c) \in \mathcal{H}(n, m, p, q) \exists f \in \mathcal{A}(2n + 1, t, u) (a, b, f) \in \mathcal{R}(n, p, q, t, u)”.$$

L'énoncé  $\Psi(n, m, p, q, t, u)$  ainsi défini est un énoncé du premier ordre de la théorie des corps réels clos défini avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Comme  $\mathbb{R} \models \Psi(n, m, p, q, t, u)$ , par le principe de transfert de Tarski-Seidenberg, pour tout corps réel clos  $R$ , on a  $R \models \Psi(n, m, p, q, t, u)$ . Ce qui achève la preuve.  $\square$

## 2.5 Validité des théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur un corps réel clos quelconque

Dans cette section nous démontrons la validité des théorèmes de s-cobordisme semi-algébrique et Nash sur un corps réel clos quelconque. Pour faire bref, nous écrirons “sas-homotope” pour dire “semi-algébriquement s-homotope”.

**Theorem 2.5.1.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme semi-algébrique connexe avec  $\dim M \geq 6$ . Alors,  $M$  et  $M_0 \times I$  sont semi-algébriquement homéomorphes si et seulement si  $M$  est sas-homotope à  $M_0$ .*

*Démonstration.* Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme semi-algébrique dans  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$ . On a montré dans la démonstration du théorème 2.3.9 que l'ensemble  $h\mathcal{Cob}(n, m, p, q)$  des h-cobordismes semi-algébriques dans  $R^n$  de complexité au plus  $(p, q)$  est un ensemble semi-algébrique défini par une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Le théorème de trivialisatoin semi-algébrique de Hardt appliqué à

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{F}(n, m, p, q) &\rightarrow h\mathcal{Cob}(n, m, p, q) \\ (a, x) &\mapsto a \end{aligned}$$

défini dans la démonstration du théorème 2.3.9, nous donne une partition semi-algébrique de

$$h\mathcal{Cob}(n, m, p, q) = \bigcup_{i=1}^s S_i$$

telle que  $S_i$  est défini pas une formule à coefficient dans  $\mathbb{Z}$  et pour tout  $a$  et  $b \in S_i$  nous avons

$$(M_a, M_{0_a}, M_{1_a}) \cong (M_b, M_{0_b}, M_{1_b}),$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $S_i$  défini par une formule du premier ordre de la théorie du premier ordre avec des coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Soit  $c$  un paramètre de  $(M, M_0, M_1)$  dans  $h\mathcal{Cob}(n, m, p, q)$ . Alors il existe un  $j \in \{1, \dots, s\}$  tel que  $c \in S_j$ . On a alors :  $R \models \exists x \phi_j(x)$  où  $\phi_j(x)$  est une formule du premier ordre de la théorie des corps réels clos à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , qui définit  $S_j$ . Par Tarski-Seidenberg, on a :  $\mathbb{R}_{alg} \models \exists x \phi_j(x)$ . Soit  $e$  un paramètre dans  $S_j$  défini sur  $\mathbb{R}_{alg}$ . Il vient par la trivialité semi-algébrique de Hardt que :

$$(M, M_0, M_1) \stackrel{s.a}{\cong} (M_{eR}, M_{e0R}, M_{e1R})$$

où  $\stackrel{s.a}{\cong}$  signifie homéomorphisme semi-algébrique. Comme le paramètre  $e$  est dans  $\mathbb{R}_{alg}^{3pN+3}$  avec  $N$  comme dans la démonstration de théorème 2.3.10, on peut considérer l'extension sur  $\mathbb{R}$  de  $(M_e, M_{e0}, M_{e1})$ . Par le théorème de s-cobordisme semi-algébrique valide sur  $\mathbb{R}$ , on a :

$$M_{e\mathbb{R}} \stackrel{s.a}{\cong} M_{e0\mathbb{R}} \times I_{\mathbb{R}} \text{ ssi } M_{e\mathbb{R}} \text{ est sas-homotope à } M_{e0\mathbb{R}}.$$

Par la proposition 2.2.5 et la proposition 2.2.16, on a de manière équivalente :

$$M_{e\mathbb{R}_{alg}} \stackrel{s.a}{\cong} M_{e0\mathbb{R}_{alg}} \times I_{\mathbb{R}_{alg}} \text{ ssi } M_{e\mathbb{R}_{alg}} \text{ est sas-homotope à } M_{e0\mathbb{R}_{alg}}.$$

Par la proposition 2.2.5 et la proposition 2.2.16, on a :

$$M_{eR} \stackrel{s.a}{\cong} M_{e0R} \times I_R \text{ ssi } M_e \text{ est sas-homotope à } M_{e0}.$$

Grace à l'homéomorphisme entre  $(M, M_0, M_1)$  et  $(M_e, M_{e0}, M_{e1})$ , on a :

$$M \stackrel{s.a}{\cong} M_0 \times I_R \text{ ssi } M \text{ est sas-homotope à } M_0.$$

Ce qui achève la preuve. □

Avant de démontrer la validité sur tout corps réel clos du théorème de s-cobordisme version Nash, nous rappelons le théorème suivant qui est équivalent au théorème de trivialité Nash en famille de variétés de Nash (cf. [CS]) :

**Theorem 2.5.2.** *Soit  $R$  un corps réel clos quelconque, et soit  $X$  une sous-variété de Nash de  $R^n$  de dimension  $k$ . Il existe une variété de Nash affine  $Y$  définie sur  $\mathbb{R}_{alg}$  telle que  $X$  est Nash difféomorphe à  $Y_R$ .*

**Theorem 2.5.3.** *Soit  $(M, M_0, M_1)$  un h-cobordisme Nash connexe avec  $\dim M \geq 6$ . Alors,  $M$  et  $M_0 \times I$  sont Nash difféomorphes si et seulement si  $M$  est sas-homotope à  $M_0$ .*

*Démonstration.* Le triplet  $(M, M_0, M_1)$  est un h-cobordisme Nash affine, disons dans  $R^n$ . Par le théorème précédent, il existe un h-cobordisme Nash affine  $(M', M'_0, M'_1)$  défini sur  $\mathbb{R}_{alg}$  tel que

$$(M, M_0, M_1) \stackrel{Nash}{\cong} (M'_R, M'_{0R}, M'_{1R}).$$

Ici le symbole  $\stackrel{Nash}{\cong}$  signifie difféomorphisme Nash.

Considérons l'extension sur  $\mathbb{R}$  du h-cobordisme  $(M', M'_0, M'_1)$  :

$$(M'_{\mathbb{R}}, M'_{0\mathbb{R}}, M'_{1\mathbb{R}}).$$

Par le théorème de s-cobordisme Nash sur  $\mathbb{R}$  on a :

$$M'_{\mathbb{R}} \stackrel{Nash}{\cong} M'_{0\mathbb{R}} \times I_{\mathbb{R}} \text{ ssi } M'_{\mathbb{R}} \text{ est sas-homotope à } M'_{0\mathbb{R}}.$$

Ce qui est équivalent à dire, par la proposition 2.2.9 et la proposition 2.2.16, que :

$$M'_{\mathbb{R}_{alg}} \stackrel{Nash}{\cong} M'_{0\mathbb{R}_{alg}} \times I_{\mathbb{R}_{alg}} \text{ ssi } M'_{\mathbb{R}_{alg}} \text{ est sas-homotope à } M'_{0\mathbb{R}_{alg}}.$$

Ce qui équivaut à dire, par la proposition 2.2.9 et la proposition 2.2.16, que :

$$M'_R \stackrel{Nash}{\cong} M'_{0R} \times I_R \text{ ssi } M'_R \text{ est sas-homotope à } M'_{0R}.$$

Par le difféomorphisme Nash entre  $(M, M_0, M_1)$  et  $(M'_R, M'_{0R}, M'_{1R})$ , on déduit que :

$$M \stackrel{Nash}{\cong} M_0 \times I \text{ ssi } M \text{ est sas-homotope à } M_0.$$

D'où le résultat. □



# Bibliographie

- [ABB] F. Aquistapace, R. Benedetti, F. Broglia : *Effectiveness-non effectiveness in semialgebraic and PL geometry* Invent. Math. 102, 141-156(1990)
- [BCR98] J. Bochnak, M. Coste, and M-F. Roy : *Real algebraic geometry*, volume 36 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete(3)* [Results in Mathematics and related Areas(3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1998. Translated from the 1987 French original, Revised by the authors.
- [Ca] J.W. Cannon : *Shrinking Cell-Like Decomposition of Manifolds. Co-dimension Tree*, The Annals of mathematics, 2nd Ser., Vol.110, No.1 (1979), pp.83-112.
- [CRS] M. Coste, Jesus M. Ruiz, M. Shiota *Uniform bounds on complexity and transfer of global properties of Nash functions*, J. reine angew. Math. 536 (2001) 209-235
- [CS] M. Coste, M. Shiota : *Nash triviality in family of Nash manifolds* Invent. Math. 108, 349-368 (1992)
- [CS1] M. Coste, M. Shiota : *Thom's first isotopy lemma : a semialgebraic version, with uniform bound*, Real Analytic and Algebraic Geometry (Ed. F. Broglia, M. Galbiati, A. Tognoli), Walter de Gruyter, Berlin 83-101, 1995.
- [Co1] M. Coste : *An introduction to semialgebraic geometry*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali Poligrafici Internazionali 2000
- [Co2] M. Coste : *Unicité des triangulations semi-algébriques : validité sur un corps réel quelconque, et effectivité forte* C. R. Acad. Sci. Paris, t. 312 Série I, p.395-398, 1991
- [Cu] N.J. Cutland : *Computability, An introduction to recursive function theory* Cambridge University Press 1980.
- [Db] Douglas S. Bridges : *Computability A Mathematical Sketchbook*, Springer-Verlag, GTM 146 (1994)
- [DK] H. Delfs, M.Knebusch *Locally semialgebraic spaces*. Lecture Notes in Mathematics, 1173. Springer-Verlag, Berlin, 1985

- [FKS] T. Fukui, S. Koike and M. Shiota *Modified Nash triviality of family of zero-sets of real polynomial mappings* Annales de l'institut Fourier, t. 48, n°5, p. 1395-1440, 1998
- [H] J.F.P. Hudson : *Piecewise Linear Topology*. New York : Benjamin 1969
- [K] M.A. Kervaire : *Le théorème de Barden-Mazur-Stallings*, Commentarii Mathematici Helvetici, Vol.40(1965-1966)
- [M] J. Milnor : *Lectures on the h-cobordism theorem* Princeton University Press 1965
- [Mo] E. Moise : *Affine structure on 3-manifolds*, Ann. of Math., Vol.56, p.96-114, 1952
- [N] A. Nabutovski : *Non-recursive functions in real algebraic geometry* In : Galbiati, M., Tognoli, A. (eds) *Real Analytic and Algebraic geometry*. (Lect. Notes Math., vol.1420) Berlin Heidelberg New York : Springer 1990
- [Pe] G. Perelman : *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, arXiv :math.DG/0307245.
- [P] A. Prestel : *Model theory for the real algebraic geometer*, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa. Istituti Editoriali Poligrafici Internazionali 1998
- [R] R. Ramanakorasina : *Complexité des fonctions de Nash*, Commun. Algebra 17 (n.6), 1395-1406, 1989
- [RS] C.P. Rourke and B. J. Sanderson : *Introduction to Piecewise-Linear Topology*. Ergebnisse der Mathematik Bd 69. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972
- [SC] A. Scorpan : *The wild World of 4-Manifolds*, A.M.S Providence, Rhode Island 2005
- [S] M. Shiota : *Nash Manifolds*. Lecture Notes in Mathematics 1269 . Springer-Verlag, Berlin , 1980.
- [Sm] S. Smale : *Generalized Poincaré's Conjecture in Dimension Greater than Four*. Ann. Math. 74, 391-406, 1961.
- [SY] M. Shiota and M. Yokoi : *Triangulation of subanalytic set and locally subanalytic manifolds*. Transaction of the AMS, vol 286, No2 (Dec., 1984)
- [VKT] I. A. Volodin, V. E. Kuznetsov and A. T. Fomenko : *The problem of discriminating algorithmically the standard three-dimensional sphere*, Russ. Math. Surveys 29, 71-172, 1974.