HAL open science

Méthodes d'estimation statistique pour le suivi de cibles à l'aide d'un réseau de capteurs

Adrien Ickowicz

To cite this version:

Adrien Ickowicz. Méthodes d'estimation statistique pour le suivi de cibles à l'aide d'un réseau de capteurs. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2010. Français. NNT : . tel-00482418v1

HAL Id: tel-00482418

https://theses.hal.science/tel-00482418v1

Submitted on 10 May 2010 (v1), last revised 24 Jan 2012 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre : 4102 ANNÉE 2009

THÈSE / UNIVERSITÉ DE RENNES 1
sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et Applications

Ecole doctorale MATISSE

présentée par

Adrien Ickowicz

préparée à l'unité de recherche IRISA (ASPI/VISTA)
Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires
SPM

Méthodes d'estimation statistiques pour le suivi de cibles à l'aide d'un réseau de capteurs.

Thèse soutenue à Rennes le 6 mai 2010

devant le jury composé de :

Claude JAUFFRET
Professeur, Université de Toulon / président

Yvo BOERS
Docteur IR, Thales Netherland/ rapporteur

Patrick BOUTHEMY
Directeur Centre de Recherche INRIA Rennes Atlantiques / examinateur

Marian HRISTACHE
Enseignant Chercheur, ENSAI / examinateur

Jacques BLANC-TALON
Responsable de Domaine Scientifique, DGA/MRIS/ examinateur

Dr François LE GLAND
Directeur de Recherche, IRISA / directeur de thèse

"Le meilleur des athlètes peut courir sur une piste remplie d'obstacles sans trébucher le jour, et heurter tous les meubles de sa chambre lorsque tombe l'obscurité."

à Jean-Pierre

Remerciements

"S'élever au dessus de soi-même et comprendre le monde."

Archimède

Table des matières

Table des matières 3

1 Introduction Générale 9

I Probabilité de bonne association, coordonnées simplement bruitées 15

Introduction 19

2 Probabilité de bonne association : cas d'un mouvement rectiligne uniforme 21

2.1 Introduction 21
2.2 Formulation du problème 22
2.3 Analyse du problème 23
2.3.1 Le modèle de régression linéaire [BVC05] 23
2.3.2 Evaluation de la probabilité de bonne association 24
2.3.3 Expressions exactes de la moyenne et de la variance de $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c} | \tilde{\varepsilon}_l\right)$ 25
2.4 Développement de l'expression exacte de la probabilité de bonne association 26
2.4.1 Approximation d'une loi normale par une somme de fonctions indicatrices 27
2.4.2 Calcul de l'intégrale B_i 30
2.4.3 Approximation de l'intégrale A_i 31
2.4.4 L'approximation explicite de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ 32
2.4.5 Cas ou λ serait aléatoire 33
2.5 Résultats de simulations (Unique fausse association) 34
2.6 Cas de multiples fausses mesures 35
2.6.1 Lois classiques 35
2.6.2 La dernière étape 38
2.7 Simulation : Cas de plusieurs fausses mesures 39
2.8 Conclusion 40

Conclusion 41

II Approche par les instants de plus grande proximité **43**

Introduction **47**

3 Suivi d'une trajectoire rectiligne uniforme ou diffusive à l'aide des instants de plus grande proximité **49**
3.1 Introduction . . . 49
3.2 Identification du scénario . . . 50
3.2.1 Des coordonnées cartésiennes au t_{cpa} . . . 50
3.2.2 Observabilité du système . . . 51
3.3 Estimation des paramètres . . . 52
3.4 Mouvement diffusif . . . 54
3.4.1 Processus de diffusion continu . . . 54
3.4.2 Modélisation markovienne en temps discret . . . 56
3.5 Résultats de simulation . . . 57
3.5.1 Maximum de vraisemblance classique . . . 57
3.5.2 Diffusion à temps discrétisé . . . 58
3.6 Conclusion . . . 58

4 Suivi d'une cible manœuvrante à l'aide des t_{cpa} **61**
4.1 Introduction . . . 61
4.2 Une seule manœuvre, à un instant connu . . . 61
4.2.1 Modélisation . . . 61
4.2.2 Identifiabilité . . . 62
4.2.3 Résolution . . . 63
4.3 Problème de la détermination de l'instant de manœuvre . . . 64
4.3.1 Introduction . . . 64
4.3.2 Les solutions empiriques envisageables . . . 64
4.3.2.1 Au niveau des capteurs . . . 64
4.3.2.2 Changement de la vitesse . . . 64
4.3.3 Les solutions d'estimation statistiques . . . 64
4.3.3.1 Loi du temps de parcours . . . 65
4.3.3.2 Formalisation . . . 65
4.3.3.3 Séparation des échantillons . . . 65
4.4 Extension à plusieurs changements de direction . . . 66
4.5 Conclusion . . . 66

Conclusion **69**

III Capteurs Binaires Directionnels **73**

Introduction **77**

5 Suivi d'une cible en mouvement rectiligne uniforme dans un réseau de capteurs binaires **79**
5.1 Introduction . . . 79
5.2 Observabilité et propriétés du réseau de capteurs binaires . . . 80

5.3 La fonctionnelle escalier 83
5.4 Méthode d'estimation du plan-vitesse 84
5.4.1 L'approche par les Séparateurs à Vastes Marges (SVM) [CV95] . . . 84
5.4.1.1 3D-SVM 85
5.4.2 Régression à Direction Révélatrice 86
5.4.2.1 Modélisation 86
5.4.2.2 La méthode PPR dans un contexte de réseau de capteurs 86
5.4.2.3 Convergence 87
5.5 Résultats de simulation 88
5.6 Conclusion 89

6 Suivi de cible manœuvrante dans un réseau de capteurs binaires directionnels 91
6.1 Introduction 91
6.2 Suivi avec des capteurs binaires directionnels 92
6.2.1 Les données 92
6.2.2 Estimation du vecteur vitesse de la cible 92
6.2.3 Modèle de déplacement de la cible 93
6.3 Suivi de la cible 93
6.3.1 Estimation du vecteur vitesse : λ_t 94
6.3.2 Correction de la position estimée : θ_t 95
6.3.3 Finalisation de l'estimation 96
6.3.4 L'algorithme de suivi 96
6.4 A propos de la convergence de l'algorithme 97
6.4.1 Résultats sur l'EQM 97
6.4.2 De l'intérêt d'une cible fortement manœuvrante 99
6.5 Résultats de simulation 99
6.6 Conclusion 100

7 Suivi multi-cibles dans un réseau de capteurs binaires 103
7.1 Introduction 103
7.2 Qualité de l'information 103
7.3 Le suivi de lignes 104
7.3.1 Définition des lignes 104
7.3.2 Détection des lignes 104
7.4 Problèmes d'association 2-D 105
7.4.1 Introduction 105
7.4.2 Construction de la matrice d'association 106
7.4.3 Comparaison des méthodes d'association 2-D 106
7.4.3.1 Algorithme de Munkres 106
7.4.3.2 Algorithme des enchères 107
7.4.4 Exemple d'application 108
7.5 Problème d'assignation N-D 108
7.5.1 Formulation du problème 108
7.5.2 Choix de la fonction de coût 110
7.5.3 Affectation 3-D 111
7.6 Conclusion 112

Conclusion **113**

Conclusions et perspectives **117**

8 Conclusion Générale **117**

9 Perspectives **121**

Annexes **125**

A Calculs détaillés du chapitre 3 **125**

B Détails des algorithmes du chapitre 9 **129**

Table des figures **132**

Bibliographie **137**

Publications **139**

CHAPITRE 1

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Contexte

Les évolutions technologiques récentes amènent à considérer *globalement* des ensembles de capteurs vidéos. Cet ensemble peut être relativement grand et étendu [ABC+05], [BVW02] ; ce qui pose des problèmes spécifiques. Que faire des données recueillies sur chaque capteur, comment résumer l'information à transmettre, comment la traiter, etc.

On considère ici l'analyse de scènes dynamiques. Des objets mobiles évoluent sur une surface et il s'agit de les détecter et de les poursuivre, tout en étant bien conscient que ces tâches sont aussi fortement imbriquées. Si des formalismes existent pour s'attaquer à ces problèmes pour un unique capteur vidéo (en incluant une fonctionnalité de stéréovision), on ressent clairement la nécessité de formalismes et de méthodes spécifiquement développés pour un réseau de caméras [NVC05]. En effet, même en supposant qu'il soit possible de transmettre toutes les informations reçues sur les caméras à un centralisateur, un traitement centralisé est le plus souvent irréalisable dans ce contexte et suppose aussi la connaissance d'informations a priori telles que la calibration des caméras, les délais de transmission, la synchronisation des données, etc.

Au niveau du centralisateur, il s'agirait de traiter une énorme masse de données, à partir de capteurs hétérogènes pour être en mesure de poursuivre un grand nombre d'entités mobiles. Même en dehors de l'aspect transmission, ceci est clairement irréaliste. La dimension de l'espace des états (agrégés) des modèles devient rédhibitoire pour n'importe quel algorithme de suivi, les problèmes de combinatoire sont eux aussi très difficiles, et ainsi de suite. De plus, l'intérêt (théorique) du traitement centralisé provient du fait que l'on suppose que tous les capteurs voient les mêmes processus. Ce modèle, très simplifié, est également fort peu réaliste et conduit à une dégradation pouvant être très importante des performances.

Par contre, on peut considérer qu'il est possible de faire une partie de l'analyse au niveau des capteurs ou (éventuellement) de sous-groupes ; cette fois pour un nombre limité d'entités mobiles. Ce nombre limité est lié aux capacités locales d'analyse et de perception du capteur ou du sous-groupe. Reste à déterminer la nature des informations à transmettre au centralisateur. Ce type de problèmes relève, bien sûr, de la fusion d'informations. Toutefois, on ne se limite pas ici à des données élémentaires de type détection

(détection distribuée) ou identification (fusion de données symboliques). Ainsi, dans le premier cas, des formalismes relativement satisfaisants (du moins sur le plan théorique) ont été développés, mais ils sont le plus souvent d'une utilité pratique très limitée (e.g. problème de la détermination adaptative des seuils de détection sur les récepteurs élémentaires). Pour le deuxième, c'est la nature des données qui contraint fortement les méthodes.

On peut cependant montrer que l'enrichissement du modèle de données, *même relativement frustres*, permet de remédier à de nombreux problèmes. Cela a été mis en évidence sur des exemples simples [DC06] et réalistes. Il est bien clair que les gains espérés ne se situent pas uniquement au niveau de la charge en calculs mais aussi au niveau de la robustesse [BPB05] et, plus encore, des possibilités d'analyse et de séparation [ABC+05]. Le terme séparation doit être entendu comme l'ensemble des méthodes permettant de séparer les hypothèses relatives aux entités mobiles, qu'elles soient relatives à la détection, à la validation de pistes, à l'analyse des trajectoires, etc.

Les applications potentielles de cette étude concernent aussi bien la surveillance de (larges) secteurs par un réseau de caméras fixes ou mobiles (drones), que l'analyse de trafic routier.

Mesures spatio-temporelles extraites des images

Dans un contexte de réseaux de caméras éventuellement non (ou incomplètement) calibrées et éventuellement désynchronisées, il faut envisager des mesures spatio-temporelles que l'on puisse calculer localement dans les images, tout en pouvant les exploiter pour la construction des pistes. La mesure la plus immédiate est celle correspondant à une détection locale des objets en mouvement à partir des différences temporelles des intensités, sous l'hypothèse que les caméras sont fixes.

Le niveau suivant consiste à évaluer, toujours localement à partir des gradients spatio-temporels des intensités, les vitesses normales (i.e. composante du vecteur de vitesse selon la direction du gradient spatial de l'intensité). Des approches d'interprétation du mouvement de la scène à partir de telles mesures ont déjà été explorées notamment dans [FA96]. La détection de points d'intérêt spatio-temporels [LL03] permet de récupérer les lieux et les instants de manœuvre. A partir de l'estimation de modèles affines 2D de mouvement [MBC01], on peut aussi envisager de calculer des cartes de temps à collision [MB92]. Enfin, le niveau le plus élaboré est d'estimer des trajectoires courtes (i.e. sur un horizon temporel court) de points particuliers [VCB04], [AMCF05].

Détermination et validation de pistes à partir d'un ensemble de caméras

On considère, dans un premier temps, l'utilisation d'un réseau de caméras pour la poursuite d'éléments évoluant sur une surface plane ou connue. Il s'agit d'utiliser des mesures élémentaires extraites des images pour détecter, initialiser une piste, engager la poursuite et la valider.

Les mesures élémentaires peuvent être de type binaire (e.g. l'élément mobile se rapproche-t-il ou s'éloigne t-il), ou un peu plus riches (e.g. proximité calculée à partir du mouvement apparent). Le caractère frustre de ces observations est une caractéristique fondamentale de l'étude. Au niveau capteur le traitement ne permet qu'une réduction modeste de l'incertitude. Aussi, le rôle de l'intégration spatio-temporelle est-il déterminant dans le développement de l'étude. Toutefois, même si ceci conduit à de difficiles défis au niveau des traitements, cette modélisation des données permet aussi de s'affranchir de difficultés fondamentales telles que la calibration de caméras ou le synchronisme des récepteurs. On souligne cependant que l'on suppose disponibles des informations de mouvement apparent des entités, aussi frustres soient-elles.

L'étape de poursuite proprement dite pose aussi des problèmes bien spécifiques. Le cadre général est la poursuite d'objets multiples (e.g. de trajectoires markoviennes) dont les états (cinématiques) ne sont que partiellement observés. Ceci est aussi le cadre des problèmes de trajectographie-poursuite à partir de mesures angulaires bruitées, mais là les difficultés sont d'une autre nature. Une première difficulté est de prendre en compte simultanément les données extraites, les hypothèses et les contraintes de mouvement. Cette partie est relativement ouverte, même s'il existe déjà de réelles contributions [ABC+05], [Zhu03]. Il s'agit tout d'abord d'être en mesure de partitionner l'espace des entités mobiles en fonction des données extraites. On voit alors que ce sont les propriétés de séparabilité qui jouent ici un rôle essentiel. On peut ainsi considérer l'utilisation de méthodes de séparation par des méthodes de programmation linéaire (séparation par des hyperplans).

Une difficulté fondamentale concerne les problèmes liés à la multiplicité des objets [GBC05]. Le développement d'approches innovantes est, bien sûr, plus que jamais nécessaire mais peut aussi largement bénéficier de l'aspect réseau (de caméras).

Contributions

La première contribution de ce document a consisté a déterminé une expression explicite de la probabilité de bonne association pour une piste affectée d'une fausse mesure. Si le calcul de cette probabilité ne fut pas très compliqué, nous ne pouvions néanmoins extraire de ce premier calcul les influences de certains paramètres d'intérêt. Par ailleurs, il nous a semblé naturel d'étendre l'approche au contexte multicible.
Par la suite, la réduction de l'information disponible au niveau des capteurs nous a amené a développer des méthodes d'estimation des paramètres dynamiques de la cible. Différents scénarios de mouvement sont étudiés, pour lesquels nous proposons des méthodes d'estimation et nous étudions la pertinence et l'efficacité de nos estimateurs.
Enfin, dans le cadre d'une information frustre (binaire) accessible au niveau des capteurs, nos contributions ont consisté en l'élaboration d'un algorithme de suivi entièrement nouveau. Cet algorithme est présenté et ses performances sont testées dans différents scénarios. En effet, nous ne nous limitons pas à l'étude d'un mouvement rectiligne uniforme, mais nous permettons à la cible de manœuvrer aussi souvent que possible. Nous proposons enfin une extension multicible de notre méthode de suivi.

Description du document

Dans notre approche du sujet, il semble important de remarquer que nous pouvons nous orienter selon plusieurs axes d'études. Un premier serait de considérer le mouvement de la cible. Finalement, nous avons décidé de présenter les travaux comme ils se sont déroulés chronologiquement. C'est à dire que nous partons de l'information la plus riche, pour terminer avec la plus pauvre. Ce document est donc organisé en trois parties selon le plan suivant :

Partie I : Probabilité de bonne association, coordonnées simplement bruitées

Nous nous sommes intéressés dans un premier temps au pistage multicible dans un environnement dense. Un des problèmes fondamentaux dans ce domaine concerne l'évaluation des performance d'association. En effet, le suivi de cible et l'association de données sont étroitement liés dans le cadre du suivi multicible. Dans ce contexte, le meilleur indicateur que l'on puisse trouver concernant la qualité du suivi est la probabilité de bonne association.

La plupart du temps, les travaux sont principalement centrés sur la modélisation des mauvaises associations liées au problèmes de choix des permutations. Nous avons quant à nous choisi de mesurer les effets d'une contamination de notre piste par des mesures exogènes au système d'intérêt. Ce que nous appelons une contamination a un effet direct sur les paramètres décrivant le déplacement de notre cible, ce qui peut parfois rendre l'erreur d'association plus probable. Intuitivement, il semble évident que seules les 'fausses' mesures 'proches' de la piste de la cible auront un effet réellement perturbant. Ce qui est le cas dans le cadre du suivi multicible.

Notre analyse porte donc sur l'association multi-scan. A cet effet, nous considérons une cible se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme, c'est à dire à vitesse constante. En se basant sur des techniques statistiques bien connues, notamment la régression linéaire, nous avons pu proposer un indicateur de la qualité de l'association, que nous appelons coût d'association, terme qui n'est pas sans rappeler les différents facteurs d'estimation dans le cadre de la régression statistique. Chaque association multi-scan ainsi proposée se voit attribuée cet indicateur, et nous pouvons calculer une probabilité de bonne association, définie comme étant la probabilité que le coût de bonne association soit plus petit que tous les coûts de mauvaise association.

Le résultat obtenu dans un premier temps nous permet à l'aide de simulation de connaître les influences de deux paramètres importants, le nombre de scan du suivi, et la distance entre la mauvaise mesure et la réelle piste de la cible. Dans le cas de multiple fausses mesures, une formule équivalente peut être développée.

L'objectif après avoir obtenu cette formule a été d'obtenir une formulation explicite, ce que nous avons pu faire grâce à des hypothèses plausibles telles qu'un nombre important de scan et une variance petite par rapport à la distance entre la fausse mesure et la vraie piste.

Partie II : Approche par les instants de plus grande proximité

Suite à ces résultats, nous nous sommes orientés vers l'aspects analyse de scènes dynamiques par un réseau de capteurs. Si les hypothèses sur le mouvement de la cible restent quasiment inchangées, à savoir un mouvement rectiligne à vitesse constante, nous nous sommes d'avantage intéressés à l'aspect réseau de capteurs.
L'information que nous donne chaque capteur consiste en une estimation du temps de passage au point le plus proche du capteur, qui se trouve également être, grâce à la nature du mouvement le temps de passage à la verticale du capteur. Connaissant le positionnement de chaque capteur du réseau, et ceux-ci nous donnant une estimation bruitée de ce temps de passage, nous pouvons dès lors estimer la vitesse de la cible ainsi que sa position, cette dernière ne pouvant néanmoins qu'être déterminée sur une droite orthogonale au vecteur vitesse, pour des raisons qui apparaissent clairement lors des développements du problème.

Plusieurs suites logiques s'offraient à nous une fois ces premiers résultats connus. Tout d'abord, nous avons étudié le comportement de notre estimation dans le cas ou le mouvement de la cible serait assimilé à une diffusion à une dimension. Nous avons pu déterminer de façon précise le comportement stochastique de notre temps de passage sous cette condition de loi. Puis nous étendons la connaissance de cette nouvelle loi à notre estimation de vitesse.
De même, il nous a semblé intéressant d'étudier le cas ou la cible suivrait des mouvements rectilignes uniformes par morceaux. Autrement dit, des changements brusques de direction et de vitesse. Nous montrons dans nos études que si les instants de changement sont suffisamment bien connus, alors non seulement les différentes vitesses sont bien estimées, mais nous pouvons en plus déterminer la position exacte de la cible. Si malheureusement cette information venait à manquer, nous proposons une méthode statistique afin de l'estimer au mieux.

Partie III : Capteurs binaires directionnels

L'estimation du temps de passage au point le plus proche se fait généralement à l'aide de vitesse angulaire. Nous ne pouvons malheureusement connaître que de façon imparfaite les erreurs faites par cette détermination, et dès lors, les erreurs sur l'estimation de la vitesse n'en sont que plus tributaires. Pour palier à ce problème, nous nous proposons d'étudier un réseau de capteurs qui ne nous donneraient comme unique information qu'un {+} si la cible se rapproche, et un {-} si elle s'éloigne. Cette information binaire a pour avantage que la modélisation de son erreur peut se faire via une simple probabilité. Dès lors tous les raisonnement peuvent être mené sous cette probabilité p, qui ne changera en rien notre approche quelque soit sa valeur. Malgré la faiblesse de cette information, nous avons essayé de déterminer les paramètres de mouvements de la cible, sous les mêmes contraintes de mouvement que précédemment, et étudier les incertitudes comparativement à la variance de notre estimation avec les temps de passage à la verticale.

Nous avons ensuite relâché l'hypothèse sur le mouvement, pour permettre à la cible une plus grande liberté. En effet, la nouvelle hypothèse de déplacement a autorisé la cible

à effectuer une manœuvre à chaque instant de récupération des données des capteurs. Le développement d'un nouvel algorithme de suivi y sera présenté, ainsi que l'analyse de ces performances dans différentes situations.

Enfin, nous avons étendu notre approche au scénario multicible. Le chapitre traitant de ce problème est essentiellement théorique, mais présente des solutions intéressantes et novatrices pour ce suivi. Nous y utiliserons notamment des méthodes de traitement de l'image et des algorithmes d'associations fréquemment utilisés par ailleurs.

Première partie

Probabilité de bonne association, coordonnées simplement bruitées

"Ce qui nous manque nous instruit."

Proverbe Allemand

Introduction

Un des problèmes fondamentaux en suivi multicibles est d'évaluer la qualité des performances des algorithmes d'association. Toutefois, cette performance ne peut être mesurée seule, étant donné que le problème d'association est fortement corrélé au suivi de la ou des cibles. Ainsi, nous nous proposons d'étudier le problème en utilisant comme mesure de performance la probabilité de bonne association.
De même, la qualité du suivi est généralement jugée sans prendre en compte les problèmes d'association, même si quelques exceptions existent. Ainsi, deux axes du problème ont déjà été étudiés. Le premier traite de la divergence du suivi, en particulier par l'analyse des performances du filtre des plus proches voisins. Dans ces études, l'erreur de suivi est modélisée par un processus de diffusion [Rog91]. Des contributions fondamentales traitent de l'analyse de ce processus dynamique [BH91], appliqué au filtre des plus proches voisins [LBS96] ou de l'espérance de vie du suivi de la PDAF [BST91] en environnement fortement bruité [LBS91]. Des travaux d'égales importances ont étudié des problèmes liés à l'initialisation du suivi de la cible dans un environement dense [BSL91], [CMC84].

La deuxième catégorie des travaux traite le problème de façon discrétisée. Ainsi, à chaque instant de mesure, l'algorithme calcule une association optimale entre la trajectoire suivie et la mesure la plus récente. Finalement, l'algorithme ne conserve que l'hypothèse la plus vraisemblable. De par la méthodologie employée, cette méthode doit nous permettre d'obtenir des résultats plus pertinent que les plus proches voisins ou PDA [MCC92], [MCC95]. Toutefois, cette approche est principalement orientée vers la modélisations des fausses associations via l'effet des permutations [CMC84].
Nous souhaitons quant à nous nous intéresser à l'effet d'une mesure exogène sur le suivi, dans un contexte multiscan. Dans les faits, cette contamination de la chaine de mesures influe plus ou moins gravement sur le suivi en fonction de la proximité de la fausse mesure. Cette influence est d'autant plus importante dans le cas de suivi multicible, avec notamment de possibles fausses mesures générées intentionellement.

Nous allons nous concentrer dans cette partie sur l'analyse de l'association multiscan. Pour simplifier la plupart des calculs, nous allons supposer que le mouvement de la cible est déterministe. De plus, considérant la trajectoire de la cible, qui évoluera en mouvement rectiligne uniforme, nous allons utiliser des méthodes d'estimations linéaires, qui nous permettront d'obtenir une expression explicite de la probabilité de bonne associa-

tion en fonction des facteurs d'intérêts. Dès lors, nous considérerons la pureté de la piste comme la probabilité que la proportion de fausses mesures dans le suivi soit inférieure à un certain niveau. Nous verrons dans ce chapitre deux modélisations différentes des fausses mesures,l'une déterministe et l'autre aléatoire.

Nous terminerons notre analyse en proposant une extension multicible de notre approche. Bien entendu, les scenarios multicibles possibles sont nombreux, et nous nous sommes permis de nous concentrer sur le cas qui nous apparaissait le plus plus intéressant dans notre contexte, et qui surtout permettait d'étendre notre approche de façon logique.

CHAPITRE 2

PROBABILITÉ DE BONNE ASSOCIATION : CAS D'UN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME

Index des principales notations :

- ca : bonne association , fa : fausse association, DTMC : Chaine de Markov discrétisée.
- $\mathsf{erfc}(x) = \int_x^{+\infty} \mathcal{N}(0,1)(x)\,dx$, $\mathcal{N}(m,\sigma)$: Loi normale de moyenne m, et d'écart type σ.
- I : Matrice identité , $\mathbf{1}$: fonction indicatrice , $\mathbb{1}$: Vecteur de 1.
- N : durée du suivi (temps discret), l : instant de fausse détection, λ : distance de la fausse alarme.
- $\Delta_{f,c}$: difference des couts d'association , K : nombre de fausses mesures.

2.1 Introduction

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Nous présentons dans un premier temps le scenario multiscan élémentaire. Puis nous calculons les coûts d'associations sous les deux hypothèses envisageables, bonne et mauvaise association. Les principaux résultats de cette partie du chapitre consistent en l'établissement d'expressions explicites de ces coûts à l'aide de raisonnements classiques d'algèbre linéaire.

A partir de ces expressions, nous pouvons nous approcher de ce qui reste l'objectif premier de ce chapitre, trouver une expression explicite de la probabilité de bonne association. En effet, en utilisant les résultats obtenus, puis en utilisant quelques outils mathématiques empruntés aux domaines de l'analyse et des probabilités, nous obtenons l'expression voulue, dont la qualité est certifiée par les résultats de simulation que nous présentons par la suite.

Dans un premier temps, pour arriver à nos fins, nous nous sommes limités à l'étude d'une seule et unique fausse association. Une fois les résultats obtenus, nous avons décidé d'étendre l'analyse au cas de multiple possibles fausses associations. La principale

difficulté rencontrée a été que l'approximation intégrale que nous proposons pour le cas d'une unique fausse association ne pouvait être appliquée au cas multiple. Nous avons alors proposé une approche différente, se basant principalement sur les approximations de lois de distribution.

2.2 Formulation du problème

Une cible se déplace selon un mouvement rectiligne uniforme. Les mesures bruitées des positions cartésiennes (en deux dimensions) de la cible sont représentées par les points :

$$\tilde{P}_1 = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) \ , \ \tilde{P}_2 = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2) \, , \cdots , \ \tilde{P}_N = (\tilde{x}_N, \tilde{y}_N) \ , \tag{2.1}$$

aux instants t_1, t_2,$\cdots$,t_N. Sous l'hypothèse d'association correcte, les mesures de position sont les positions cartésiennes exactes $P_i = (x_i, y_i)$, bruitées par des erreurs gaussiennes de moyenne nulle, (notés $\varepsilon_{x_i}, \ \varepsilon_{y_i}$), i.e. :

$$\tilde{P}_i = (\tilde{x}_i, \ \tilde{y}_i) = (x_i + \varepsilon_{x_i}, \ y_i + \varepsilon_{y_i}) \ . \tag{2.2}$$

Nous supposons que les bruits d'observations ε_x and ε_y sont non-corrélés, de variance σ^2. Dès qu'une cible est suffisemment isolée, l'origine de la mesure de position ne souffre aucune incertitude. Toutefois, cette assertion devient caduque si une deuxième cible s'approche suffisemment près. Dans ce cas, il devient tout à fait possible de se tromper dans les associations de mesures, et de confondre la position de la première cible avec celle de la deuxième. Et donc de corrompre le suivi. La question est donc de savoir ce que suffisemment près signifie.

FIGURE 2.1 – *Le scénario de l'association. En pointillé : association correcte, en tiret : fausse association.*

Nous allons donc nous attacher à trouver une expression explicite de la probabilité de bonne association en fonction des paramètres d'intérêt que sont la distance entre la bonne mesure et la fausse mesure, ainsi que la durée du suivi. Afin de simplifier le scenario, nous allons considérer que la fausse mesure P_f est située à une distance λ [1] de la vraie position de la cible $P_l = (x_l, y_l)$ à l'instant t_l. Tout au long du chapitre, λ représentera en fait le rapport λ/σ. Le problème global ainsi que les notations sont explicités sur la fig. 2.1.
Notons $\delta = t_{i+1} - t_i$ la différence entre les instants de mesure, et :

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T \ ,$$

les deux composants du vecteur vitesse suivant les coordonnées cartésiennes. Dès lors, la trajectoire de la cible est entièrement déterminée par le vecteur d'état (x_1, y_1, v_x, v_y).

1. Dans un souci de simplicité, nous supposerons que les mesures sont résolues (voir [CBS94])

2.3 Analyse du problème

Sous l'hypothèse de bonne association, (ca), et en notant $\tau_i \stackrel{\Delta}{=} i\ \delta$, les mesures de positions $\tilde{P}_i$ peuvent être écrites à l'aide de l'équation suivante [2] :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_N \\ \tilde{y}_N \end{pmatrix}}_{\tilde{Z}_{\mathsf{ca}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} I_2 & 0_2 \\ I_2 & \tau_1 I_2 \\ \vdots & \vdots \\ I_2 & \tau_{N-1} I_2 \end{pmatrix}}_{\mathcal{X}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_{x_1} \\ \varepsilon_{y_1} \\ \varepsilon_{x_2} \\ \varepsilon_{y_2} \\ \vdots \\ \varepsilon_{x_N} \\ \varepsilon_{y_N} \end{pmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathsf{ca}}} \tag{2.3}$$

Avec ces définitions le modèle de mesure s'écrit simplement :

$$\tilde{Z}_{\mathsf{ca}} = \mathcal{X}\ \boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathsf{ca}}\ . \tag{2.4}$$

2.3.1 Le modèle de régression linéaire [BVC05]

Soit le modèle de régression linéaire suivant :

$$\tilde{Z} = \mathcal{X}\ \boldsymbol{\beta} + \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\ , \tag{2.5}$$

ou $\tilde{Z}$ sont les données, $\mathcal{X}$ les régresseurs et $\boldsymbol{\beta}$ le vecteur des paramètres à estimer. Une des méthodes d'estimation statistique de $\boldsymbol{\beta}$ consiste en la minimisation de la fonction de coût quadratique, également connue sous le nom de méthode des moindres carrés :

$$\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\beta}) = \left(\tilde{Z} - \mathcal{X}\ \boldsymbol{\beta}\right)^T \left(\tilde{Z} - \mathcal{X}\ \boldsymbol{\beta}\right) = \|\tilde{Z} - \mathcal{X}\ \boldsymbol{\beta}\|^2\ . \tag{2.6}$$

Si la matrice $\mathcal{X}^T\mathcal{X}$ n'est pas singulière, alors $\mathcal{L}_2(\boldsymbol{\beta})$ atteint son minimum pour une unique valeur $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ de $\boldsymbol{\beta}$ telle que :

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathcal{X}^T\ \mathcal{X})^{-1}\mathcal{X}^T\ \tilde{Z}\ . \tag{2.7}$$

A partir de l'estimation $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ de $\boldsymbol{\beta}$, nous pouvons déduire l'estimée $\widehat{Z}$ telle que :

$$\begin{aligned} \widehat{Z} &= \mathcal{H}\ \tilde{Z}\ , \\ \text{où :} & \\ \mathcal{H} &= \mathcal{X}(\mathcal{X}^T\mathcal{X})^{-1}\ \mathcal{X}^T\ . \end{aligned}$$

Le vecteur des résidus $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \stackrel{\Delta}{=} \tilde{Z} - \widehat{Z}$ est donné par :

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{M}\ \tilde{Z}\ , \tag{2.8}$$

où $\mathcal{M} = I - \mathcal{H}$, et I est la matrice identité. Il est aisé de constater que $\mathcal{M}$ est une matrice de projection (i.e. $\mathcal{M}^T = \mathcal{M}$ and $\mathcal{M}^2 = \mathcal{M}$). Nous rappelons également les propriétés inhérentes à ce type de matrice de projection [ABC92] :

$$\mathcal{M}\ \mathcal{X} = 0\ , \quad \text{et : } \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathcal{M}\ \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}\ . \tag{2.9}$$

2. I : matrice identité

2.3.2 Evaluation de la probabilité de bonne association

En supposant que la mesure extérieure $P_{f,l} = (x_f, y_f)$ soit detectée à l'instant $1 \leq l \leq N$ (voir fig. 2.1), nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} x_f &= x_l \ , \\ y_f &= y_l - \lambda \ . \end{cases}$$

La bonne association est alors définie par l'association des points $\left\{\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{\mathbf{P}}_l, \cdots, \tilde{P}_N\right\} \triangleq \widetilde{Z}_{\mathsf{ca}}$, alors que la fausse association est définie par $\left\{\tilde{P}_1, \cdots, \tilde{\mathbf{P}}_{f,l}, \cdots, \tilde{P}_N\right\} \triangleq \widetilde{Z}_{\mathsf{fa}}$ (l'indice f représente ici la mauvaise mesure). Les vecteurs $\widehat{Z}_{\mathsf{ca}}$ et $\widehat{Z}_{\mathsf{fa}}$ sont définis de manière similaires à partir des vecteurs $\tilde{Z}_{\mathsf{ca}}$, $\tilde{Z}_{\mathsf{fa}}$ et de l'équation de régression (eq. 2.8).

Les vecteurs des résidus sont $\hat{\varepsilon}_{\mathsf{ca}} = \tilde{Z}_{\mathsf{ca}} - \widehat{Z}_{\mathsf{ca}}$ sous l'hypothèse de correcte association (ca) et $\hat{\varepsilon}_{\mathsf{fa}} = \tilde{Z}_{\mathsf{fa}} - \widehat{Z}_{\mathsf{fa}}$ sous l'hypothèse de fausse association (fa). Ils sont obtenus à l'aide de la régression linéaire, ce qui nous conduit à la définition suivante pour les coûts d'association (bonne association, notée $\mathcal{C}_{\mathsf{ca}}$ et fausse association notée $\mathcal{C}_{\mathsf{fa}}$) :

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{\mathsf{ca}} &= (\tilde{Z}_{\mathsf{ca}} - \widehat{Z}_{\mathsf{ca}})^T \, (\tilde{Z}_{\mathsf{ca}} - \widehat{Z}_{\mathsf{ca}}) \ , \\ &= \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{ca}}^T \, \mathcal{M} \, \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{ca}} \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

De même :

$$\mathcal{C}_{\mathsf{fa}} = \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{fa}}^T \, \mathcal{M} \, \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{fa}} \ . \tag{2.11}$$

Puis nous en déduisons $\Delta_{f,c}$, la différence entre les deux coûts d'association, i.e. :

$$\Delta_{f,c} \triangleq \mathcal{C}_{\mathsf{fa}} - \mathcal{C}_{\mathsf{ca}} \ . \tag{2.12}$$

Nous définissons la probabilité de bonne association comme la probabilité que le coût de bonne association soit plus petit que le coût de fausse association [3]. Ce qui nous conduit à définir la probabilité que $\Delta_{f,c}$ soit positif (noté $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$). (Le but de ce chapitre étant par la suite de donner une expréssion explicite de cette probabilité).

Soit $\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}}$ le vecteur des éléments que les vecteurs $\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{ca}}$ et $\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{fa}}$ ont en commun. Nous définissons les vecteurs complémentaires $\tilde{\varepsilon}_l$ et fa_l déduit des expressions précédentes [4]. Alors :

$$\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{ca}} = \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}} + \tilde{\varepsilon}_l \ \ , \ \ \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{fa}} = \tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}} + \mathsf{fa}_l \ . \tag{2.13}$$

Sous ces notations, la différence entre les deux coûts d'association $\Delta_{f,c}$ peut s'écrire :

$$\Delta_{f,c} \ = \ \mathsf{fa}_l^T \mathcal{M} \, \mathsf{fa}_l - (\tilde{\varepsilon}_l)^T \mathcal{M}(\tilde{\varepsilon}_l) - 2 \, (\tilde{\varepsilon}_l - \mathsf{fa}_l)^T \mathcal{M}(\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}}) \ . \tag{2.14}$$

Comme les élements du vecteur $\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}}$ sont gaussiens, centrés en zero et supposés indépendant, ce vecteur est normal ($\tilde{\varepsilon}_{\mathsf{com}} \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{O}, \Sigma_{\mathsf{com}}\right)$). Un raisonnement équivalent nous mène à une conclusion équivalente pour le vecteur $\tilde{\varepsilon}_l$ ($\tilde{\varepsilon}_l \sim \mathcal{N}\left(\boldsymbol{O}, \Sigma_l\right)$).

3. L'idée sous-jacente étant que les résidus seront plus importants (en valeur absolue) dans le cas de la fausse association que dans le cas de la bonne association

4. Cela signifie que les vecteurs $\tilde{\varepsilon}_l$ et fa_l sont constitués de zeros, excepté à la l-ième position

Si nous fixons la valeur du vecteur $\tilde{\varepsilon}_l$ à une valeur connue $\mathbf{e}_l$, la loi de la différence des coûts $\mathcal{L}(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\varepsilon}_l = \mathbf{e}_l)$ peut alors être exprimée conditionellement, et nous avons :

$$\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\varepsilon}_l = \mathbf{e}_l\right) = \mathcal{N}\left[\mathsf{fa}_l^T\mathcal{M}\mathsf{fa}_l - (\mathbf{e}_l)^T\mathcal{M}\mathbf{e}_l,\, 4(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)\right] \;, \tag{2.15}$$

où : $\Phi \triangleq \mathcal{M}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{M}^T$. Puis en intégrant cette densité conditionelle par rapport à la loi de probabilité du vecteur $\tilde{\varepsilon}_l$, nous obtenons l'expression finale :

$$P(\Delta_{f,c}(l) \geq 0) = \mathbb{E}_{\tilde{\varepsilon}_l}\left[\mathsf{erfc}\left(\frac{\mathbf{e}_l{}^T\mathcal{M}\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l^T\mathcal{M}\;\mathsf{fa}_l}{2\sqrt{(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)}}\right)\right] \tag{2.16}$$

En regardant l'eq. 2.16, il n'est pas vraiment surprenant de constater que c'est la fonctionelle $\Psi(\mathbf{e}_l)$:

$$\Psi(\mathbf{e}_l) = \frac{(\mathbf{e}_l)^T\mathcal{M}\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l^T\mathcal{M}\;\mathsf{fa}_l}{2\sqrt{(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)}} \;, \tag{2.17}$$

qui jouera un role fondamental dans l'analyse des influences des paramètres sur la probabilité de bonne association. Toutefois, bien que l'équation 2.16 soit simple et générale, il est très difficile de procéder à l'intégration de la fonction erfc d'un point de vue formel. Il n'y a de ce fait pas d'espoir de pouvoir déterminer l'influence exacte des paramètres par cette simple méthode. Nous allons donc procéder à une approche légérement différente basée sur l'équation 2.15. A cet effet, nos développements suivront la procédure suivante :

- Calculs des expressions exactes de la moyenne et de la variance de $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\varepsilon}_l\right)$ (voir l'équation 2.15 et la section 2.3.3).
- Approximation de la densité de la loi $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\varepsilon}_l\right)$ par une somme de fonctions indicatrices, dans la section 2.4.1.
- Approximation du domaine d'intégration pour les fonctions indicatrices, dans la section 2.4.2.

2.3.3 Expressions exactes de la moyenne et de la variance de $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\varepsilon}_l\right)$

Concentrons nous dans un premier temps sur le cas d'une unique fausse association. En utilisant des calculs matriciels élementaires, nous obtenons les résultats suivants (voir Annexe A.1 pour les détails calculatoires) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{fa}_l^T\mathcal{M}\mathsf{fa}_l - (\mathbf{e}_l)^T\mathcal{M}\mathbf{e}_l &= \left[\frac{2\left(2N+1-6l+\frac{6l^2}{N}\right)}{(N+1)(N+2)} - 1\right]\left(\|\mathbf{e}_l\|^2 - \|\mathsf{fa}_l\|^2\right) \;. \\
(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l) &= \frac{1}{(N+1)^2(N+2)^2}\left[Q_1(l,N) + 2l\;\delta Q_2(l,N) + l^2\;\delta^2 Q_3(l,N)\right]\;\|\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l\|^2 \;.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

où Q_1, Q_2 et Q_3 sont des polynômes qui s'écrivent de la façon suivante :

$$\left|\begin{aligned}
Q_1(l,N) &= 4N^3 - 50N^2 + N(48l - 18) + l(24 - 36l) + 4 \;, \\
Q_2(l,N) &= -\tfrac{6}{\delta}\left[N^2 - 5N - 2 + 4l(1 + \tfrac{1}{N} - \tfrac{3l}{N})\right] \\
Q_3(l,N) &= \tfrac{36}{\delta^2}\left[\tfrac{N}{3} - 1 + \tfrac{2}{N}(\tfrac{1}{3} + 2\,l - \tfrac{2\,l}{N^2})\right] \;.
\end{aligned}\right.$$

En prenant en compte l'équation 2.18, nous pouvons remarquer que l'influence de l sur les variations de la fonctionelle $\Psi(\mathbf{e}_l)$ est assez faible. En fait, on remarque assez rapidement que $\frac{N^2}{2\,(N^3-3lN^2+3l^2N)^{1/2}}$ (qui correspond à l'expression de la fonctionnelle Ψ) varie entre $\frac{\sqrt{N}}{2}$ et $\frac{\sqrt{N}}{4}$ lorsque l varie entre 0 et N. De plus, la fonction erfc est quasiment constante pour de très grandes valeurs de cette même fonctionnelle. Ce qui confirme que $P(\Delta_{f,c}(\mathbf{e}_l) \geq 0)$ est presque indépendante de la valeur de l, dans la mesure où nous choisissons N assez grand.

Les calculs précédents peuvent être assez aisement étendus au cas de multiple fausses associations. Si l'on écrit $\mathsf{FA}_K = (l_k)_{k=1}^K$ le vecteur constitué des instants des possibles fausses associations, alors une expression explicite du numérateur de l'équation 2.17 serait :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{e}_K^T\mathcal{M}\mathbf{e}_K - \mathsf{FA}_K^T\mathcal{M}\mathsf{FA}_K = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\alpha_N(l_k,l_{k'})\left(\langle\mathbf{e}_{l_k},\mathbf{e}_{l_{k'}}\rangle - \langle\mathsf{fa}_{\mathsf{l_k}},\mathsf{fa}_{\mathsf{l_{k'}}}\rangle\right)\ ,\\
&\text{où :}\\
&\alpha_N(l_k,l_{k'}) = \left(\mathbf{1}_{\{k=k'\}} - \frac{2(2N+1-3\,l_{k'}-3\,l_k+\frac{6\,l_kl_{k'}}{N})}{(N+1)(N+2)}\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.19}$$

La même démarche est envisageable pour le dénominateur D_{Ψ_K} de $\Psi_{\mathsf{FA_K}}$, et nous avons :

$$\begin{aligned}
&(\mathbf{e}_K - \mathsf{FA})^T\mathcal{M}\,(\mathbf{e}_K - \mathsf{FA}) = 2\sqrt{\textstyle\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\theta(l_k,l_{k'})\,\langle\mathbf{e}_{l_k}-\mathsf{fa}_{l_k},\mathbf{e}_{l_{k'}}-\mathsf{fa}_{l_{k'}}\rangle}\ ,\\
&\text{avec :}\\
&(N+1)^2(N+2)^2\,\theta(l_k,l_{k'}) = [Q_1^*(\mathsf{FA}_K,N) + (l_k+l_{k'})\,Q_2^*(\mathsf{FA}_K,N) + l_kl_{k'}\,Q_3^*(\mathsf{FA}_K,N)]\ .
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Les polynomes Q_1^*, Q_2^* et Q_3^* s'écrivent comme suit :

$$\left|\begin{array}{lcl}
Q_1^*(\mathsf{FA}_K,N) & = & \sum_{l=0,l\notin\mathsf{FA_K}}^{N}(4N+2-6l)^2\ ,\\
Q_2^*(\mathsf{FA}_K,N) & = & -\frac{6}{\delta}\left[\sum_{l=0,l\notin\mathsf{FA_K}}^{N}(4N+2-6l)(1-\frac{2l}{N})\right]\ ,\\
Q_3^*(\mathsf{FA}_K,N) & = & \frac{36}{\delta^2}\left[\sum_{l=0,l\notin\mathsf{FA_K}}^{N}(1-\frac{2l}{N})^2\right]\ .
\end{array}\right.$$

2.4 Développement de l'expression exacte de la probabilité de bonne association

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, il est tout à fait possible d'obtenir une expression exacte de la fonctionelle Ψ. Toutefois, même dans le cas d'une unique fausse association, il est toujours nécessaire d'effectuer l'intégration de $\mathsf{erfc}(\Psi(\mathbf{e}_\mathsf{l})\ )$ qui nous coûte si cher. Bien que ce soit possible numériquement, il n'est pas possible d'en ressortir l'influence exacte des paramètres que nous recherchons. En fait, il est même complétement sans espoir de considérer les approximations existantes de la fonction erfc dans cette optique. Ainsi, pour contourner cette difficulté, nous avons décider d'approximer la densité de la loi normale par une somme de fonctions indicatrices.

Dans un abus de notation nécessaire à la simplicité de la lecture des équations que nous allons présenter, les erreurs de mesures $\tilde{\varepsilon}_{x,l}$ et $\tilde{\varepsilon}_{y,l}$ seront simplement notées x et y. Nous devons désormais nous concentrer sur l'approximation de la différence des coûts d'association $\Delta_{f,c} \triangleq \mathcal{C}_{\mathsf{fa}} - \mathcal{C}_{\mathsf{ca}}$. Nous rappelons que c'est la distribution conditionelle qui suit une loi gaussienne (voir l'équation 2.15) :

$$\Delta_{f,c} | \, \tilde{\varepsilon}_l = \mathbf{e}_l \sim \mathcal{N}\left[\mathsf{fa}_l^T \mathcal{M} \mathsf{fa}_l - (\mathbf{e}_l)^T \mathcal{M} \mathbf{e}_l, 4(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T \Phi (\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)\right] = \mathcal{N}(m, \sigma). \tag{2.21}$$

La moyenne conditionnelle m ainsi que la variance conditionelle σ^2 sont explicitées dans la section 2.3.3 (eq. 2.18), ce qui nous donne :

$$\begin{cases} m = \left[\frac{2\left(2N+1-6\,l+\frac{6\,l^2}{N}\right)}{(N+1)(N+2)} - 1\right] \left(\|\mathbf{e}_l\|^2 - \|\mathsf{fa}_l\|^2\right) \triangleq \alpha_N(l) \, \left(\|\mathbf{e}_l\|^2 - \|\mathsf{fa}_l\|^2\right) \, , \\ \sigma^2 = \frac{(N+1)^2(N+2)^2}{[Q_1(l,N)+2l\delta Q_2(l,N)+l^2\delta^2 Q_3(l,N)]} \, \|\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l\|^2 \triangleq \beta_N(l) \, \|\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l\|^2 \, . \end{cases} \tag{2.22}$$

De l'équation 2.22, on déduit que $\Delta_{f,c}(N)$ suit une loi normale, de moyenne quasiment égale à [5] $\left(\left(\|\mathsf{fa}_l\|^2 - \|\mathbf{e}_l\|^2\right)\right)$ tandis que la variance est proportionelle à $\sigma_N = \frac{1}{N} \, \|\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l\|$. La situation est décrite sur la figure 2.2. Sur ce schéma, nous voyons bien que m est quasiment constant lorsque N croit, alors que la variance augmente. Ce résultat induit une augmentation de la probabilité $P(\Delta_{f,c}(N) \geq 0)$ puisque la zone à droite de la ligne de séparation augmente.

FIGURE 2.2 – $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ *en fonction de* N.

Afin de mieux identifier les étapes successives de notre raisonnement, nous avons séparé cette section en trois sous-parties. Tout d'abord, nous construirons notre approximation de la loi normale à l'aide des fonctions indicatrices. Puis nous calculerons les intégrales particulières qui en découleront, et nous finiront par assembler tout cela en l'expression voulue. La principale difficulté consistera à calculer ces intégrales, étant donné qu'elles seront définies sur des espaces implicites qu'il s'agira avant tout de déterminer.

2.4.1 Approximation d'une loi normale par une somme de fonctions indicatrices

La première étape consiste donc à approximer la densité de $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c} | \, \tilde{\varepsilon}_l = \mathbf{e}_l\right)$ (voir les équations 2.21, 2.22) par une somme de fonctions indicatrices (notées φ_i) pondérées. Puis, en considérant que notre approximation n'a d'intérêt que sur un support de loi égal à $[m - 3\sigma, m + 3\sigma]$, et centré en la moyenne m de la loi,nous obtenons l'expression suivante :

5. En effet, le facteur α_N varie peu et est de valeur proche de 1

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c}|\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_l = \mathbf{e}_l\right) \simeq \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{6\frac{i}{n}\,\sigma(x,y)}\,\varphi_i(x,y)\ ,\\
&\text{où :}\\
&\varphi_i(x,y) \stackrel{\Delta}{=} \mathbf{1}_{\Delta_{f,c}\in[b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)\ ,\ b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)]}\ ,\ \mathbf{e}_l = (x,y)^T\ .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Cela signifie simplement que le support de ces n fonctions indicatrices varie de $[-3\,\frac{\sigma}{n}, 3\,\frac{\sigma}{n}]$ à $[-3\sigma, 3\sigma]$ et que nous avons les définitions suivantes (voir la figure 2.3) :

$$\begin{aligned}
\sigma(x,y) &= 2\sqrt{(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)}\ ,\\
&= 2\sqrt{\beta_N(l)\ \left[(x)^2 + (y+\lambda)^2\right]}\ ,\\
b^i_{\mathsf{sup}}(x,y) &= m(x,y) + 3\,\frac{i}{n}\,\sigma(x,y)\ ,\\
&= \mathsf{fa}^T\mathcal{M}\mathsf{fa} - (\mathbf{e}_l)^T\mathcal{M}(\mathbf{e}_l) + \frac{3i}{n}\,\sigma(x,y)\ ,\\
&= \alpha_N(l)(x^2+y^2-\lambda^2) + \frac{3i}{n}\,\sigma(x,y)\\
b^i_{\mathsf{inf}}(x,y) &= \mathsf{fa}^T\mathcal{M}\mathsf{fa} - (\mathbf{e}_l)^T\mathcal{M}(\mathbf{e}_l) - \frac{3i}{n}\,\sigma(x,y)\ ,\\
&= \alpha_N(l)(x^2+y^2-\lambda^2) - \frac{3i}{n}\,\sigma(x,y)\ .
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Les scalaires $\alpha_N(l)$ et $\beta_N(l)$ sont donnés par (voir l'équation 2.18) :

$$\begin{cases}
\alpha_N(l) = \left[\frac{2(2N+1-6l+6\frac{l^2}{N})}{(N+1)(N+2)} - 1\right]\ ,\\[2ex]
\beta_N(l) = \frac{Q_1(l,N)+2l\delta Q_2(l,N)+l^2\delta^2 Q_3(l,N)}{(N+1)^2(N+2)^2}\ .
\end{cases} \tag{2.25}$$

De plus, pour $l = N$, nous pouvons écrire simplement :

$$\begin{cases}
\alpha_N = \frac{N(1-N)}{(N+1)(N+2)} \approx -1\ ,\\
\beta_N = \frac{4N^3+226N^2-66N+4}{(N+1)^2(N+2)^2} \approx \frac{4}{N}\ (N \gg 1)\ .
\end{cases}$$

Le fait que $\beta_N(l)$ soit négligeable par rapport à l'unité sera très important dans le développement de l'expression explicite de $P\left(\Delta_{f,c} \geq 0\right)$ et de son approximation. La définition et la signification des fonctions φ_i peuvent être lues directement sur la figure 2.3. Sous ces

FIGURE 2.3 – *Le schéma d'approximation : les fonctions φ_i*

définitions, nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 2.1 *Soit l'approximation de $P\left(\Delta_{f,c} \geq 0|\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_l = \mathbf{e}_l\right)$ constituée par une somme de fonctions indicatrices (voir l'équation 2.23), alors nous avons l'égalité suivante :*

$$\begin{aligned}
P\left(\Delta_{f,c} \geq 0|\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_l = \mathbf{e}_l\right) &= \sum_{i=1}^{n}\gamma_i\left[\frac{b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)}{2\frac{3i}{n}\mathsf{den}(x,y)}\,\mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)\geq 0} - \frac{b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)}{2\frac{3i}{n}\mathsf{den}(x,y)}\,\mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)\geq 0}\right]\ ,\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{2}\left(\mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)\geq 0} + \mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)\geq 0}\right) + \frac{n}{12}\,\frac{\alpha_N}{\sqrt{\beta_N}}\,\frac{(x^2+y^2-\lambda^2)}{\sqrt{((x-\lambda)^2+y^2)}}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}\,\left(\mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)\geq 0} - \mathbf{1}_{b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)\geq 0}\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

De plus, nous avons :

$$b^i_{\mathsf{sup}}(x,y) \geq 0 \Longleftrightarrow f(x,y) \leq \frac{-6i}{n}\frac{\sqrt{\beta_N}}{\alpha_N} \ . \tag{2.27}$$

où :

$$\boxed{f(x,y) = \frac{x^2+y^2-\lambda^2}{\sqrt{x+(y+\lambda)^2}} \ .}$$

Démonstration : Partons de l'équation 2.26, et soit $\Delta(u) \in [b_{inf},\, b_{sup}]$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta\geq 0} \mathbf{1}_{\Delta(u)\in[b_{inf},b_{sup}]}du &= (b_{sup}-b_{inf})\mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0} + b_{sup}(\mathbf{1}_{b_{sup}\geq 0}\mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0}) \ , \\
&= b_{sup}\ \left(\mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0} + \mathbf{1}_{b_{sup}\geq 0}\mathbf{1}_{b_{inf}\leq 0}\right) - b_{inf}\ \mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0} \ , \\
&= b_{sup}\ \left(\mathbf{1}_{b_{sup}\geq 0}\underbrace{\left(\mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0} + \mathbf{1}_{b_{inf}\leq 0}\right)}_{\mathbf{1}}\right) - b_{inf}\ \mathbf{1}_{b_{inf}\leq 0} \ , \\
&= b_{sup}\mathbf{1}_{b_{sup}\geq 0} - b_{inf}\mathbf{1}_{b_{inf}\geq 0} \ .
\end{aligned} \tag{2.28}$$

La première partie de l'équation 2.26 est ainsi prouvée. La deuxième partie découle naturellement des expressions de $b^i_{\mathsf{sup}}(x,y)$ et $b^i_{\mathsf{inf}}(x,y)$ données par l'équation 2.24.

La suite de la proposition 2.1 se déduit avec la même simplicité (en remarquant toutefois que $\alpha_N(l)$ est négatif) :

$$\begin{aligned}
b^i_{sup}(x,y) \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha_N(x^2+y^2-\lambda^2) + \tfrac{6i}{n}\sqrt{\beta_N}\sqrt{x^2+(y+\lambda)^2} \geq 0 \ , \\
&\Longleftrightarrow \quad f(x,y) \leq \tfrac{-6i}{n}\tfrac{\sqrt{\beta_N}}{\alpha_N} \ .
\end{aligned} \tag{2.29}$$

□ □ □

Les coefficients $\{\gamma_i\}$ sont obtenus par la résolution d'un problème d'optimisation classique (moindre carrés, voir l'annexe A.2). Nous supposons désormais que ces coefficients $\{\gamma_i\}$ sont fixés, et ce quel que soit la valeur prise par le vecteur $\mathbf{e}_l$. Ainsi, en intégrant la probabilité conditionnelle sur toutes les valeurs possibles de $\mathbf{e}_l$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
P(\Delta_{f,c} \geq 0) &= \int_{\mathbb{R}^2} P\left(\Delta_{f,c} \geq 0 |\, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_l = \mathbf{e}_l\right)\ dx\, dy \ , \\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{2}A_i + \frac{\alpha_N}{\sqrt{\beta_N}}\frac{n}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}\ B_i \ ,
\end{aligned} \tag{2.30}$$

où :

$$\left\{\begin{aligned}
A_i &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\left[\mathbf{1}_{f(x,y)\leq -\frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}} + \mathbf{1}_{f(x,y)\leq \frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}}\right]dxdy, \\
B_i &= \int_{\mathbb{R}^2}\mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)f(x,y)\left[\mathbf{1}_{f(x,y)\leq -\frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}} - \mathbf{1}_{f(x,y)\leq \frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}}\right]dxdy \ ,
\end{aligned}\right. \tag{2.31}$$

Afin de mieux identifier les espaces d'intégration, nous décidons de re-écrire les intégrales A_i et B_i de la façon suivante :

$$\begin{cases} B_i = \displaystyle\int_{\frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N} \leq f(x,y) \leq -\frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}} \mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\ f(x,y)\ dxdy\ , \\ \\ A_i = \displaystyle\int_{\frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N} \leq f(x,y) \leq \frac{-6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}} \mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\ \ dxdy\ +\ 2\displaystyle\int_{f(x,y) \leq \frac{6i\sqrt{\beta_N}}{n\,\alpha_N}} \mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\ \ dxdy\ . \end{cases} \tag{2.32}$$

Puis vient la dernière étape de notre approximation, le calcul des intégrales A_i et B_i ainsi définie en utilisant les propriétés des espaces d'intégration.

2.4.2 Calcul de l'intégrale B_i

Il semble complétement utopique d'espérer calculer la valeur exacte de l'intégrale B_i [6] (ou même de l'intégrale A_i). Toutefois, une approximation assez précise peut être calculée si l'on prend en compte certaine hypothèses. En effet, dès que la durée du suivi N devient assez grande, le rapport $\rho = \frac{\sqrt{\beta_N}}{\alpha_N}$ devient lui très proche de 0. De plus, le numérateur de la fonction f s'annule sur un cercle que l'on peut identifier (l'équation est $x^2 + y^2 = \lambda^2$). Nous décidons donc de change de paramétrisation, et nous choisissons celle-ci :

$$\begin{cases} x = (-\lambda + \varepsilon)\ \sin(\theta)\ , \\ y = (-\lambda + \varepsilon)\ \cos(\theta)\ . \end{cases} \tag{2.33}$$

La fonction f est donc changée de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(\varepsilon,\theta) = \frac{-\varepsilon(2\lambda-\varepsilon)}{\sqrt{4\lambda\sin^2(\theta/2)(\lambda-\varepsilon)+\varepsilon^2}} \\ \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{(\lambda-\varepsilon)^2}{2}\right)\ , \\ dxdy = |\lambda - \varepsilon|\ \ d\varepsilon\, d\theta\ . \end{cases} \tag{2.34}$$

De plus, puisque nous considérons uniquement les petites valeurs de f, (et de son numérateur, qui vaut $-\varepsilon(2\lambda - \varepsilon)$), il nous semble légitime [7] de nous restreindre aux faibles valeurs de ε. De façon plus formelle, nous supposons $\varepsilon \ll \lambda$. Ainsi, le développement au second ordre de la fonction f pour les faibles valeurs de ε nous donne :

$$f(\varepsilon,\theta) \overset{2}{=} \frac{-\varepsilon}{|\sin(\theta/2)|}\ . \tag{2.35}$$

En pratique, cette simple transformation a des effets très bénéfiques puisque le domaine d'intégration prélablement défini implicitement le devient de façon explicite, et peut s'écrire simplement :

$$\begin{cases} -\,|\sin(\theta/2)|\ \ \eta_{i,N} \leq \varepsilon \leq |\sin(\theta/2)|\ \underbrace{\left(\dfrac{-6i\ \sqrt{\beta_N}}{n\ \alpha_N}\right)}_{\eta_{i,N}}\ , \\ \\ 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \pi\ . \end{cases} \tag{2.36}$$

6. Il n'existe en effet pas de primitve de $\mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\ f(x,y)$, et l'intégrale est définie implicitement.

7. En fait, il existe deux valeurs de ε qui annulent le numérateur de f, $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 2\lambda$. Toutefois, ces deux valeurs sont repésentées par une seule pour notre transformation (voir l'équation 2.33)

La pertinence de l'approximation est soulignée graphiquement par la figure 2.4. Le do-

FIGURE 2.4 – *Le domaine d'intégration initial et son approximation (Vrai : violet ; Approximations : lignes continues rouges et noires)*

maine d'intégration ayant été convenablement approximé, nous allons également considérer un développement du second ordre pour l'élément intégré $F(\varepsilon, \theta)$ de l'intégrale B_i, c'est à dire :

$$F(\varepsilon, \theta) = f(\varepsilon, \theta)\mathcal{N}(\varepsilon, \theta)\,|J(\varepsilon, \theta)| \ ,$$

avec $|J(\varepsilon, \theta)| = |\lambda - \varepsilon|$ la jacobienne de la transformation $(x, y) \to (\varepsilon, \theta)$,. Nous avons :

$$F(\varepsilon, \theta) \stackrel{2}{=} -\lambda\varepsilon \ \frac{e^{-\lambda^2/2}}{|\sin(\theta/2)|} + \frac{(1-2\lambda^2)}{2\,|\sin(\theta/2)|} e^{-\lambda^2/2}\ \varepsilon^2 \ . \tag{2.37}$$

En considérant les effets du changement de ε en $-\varepsilon$ pour le développement du second ordre d'une part, et le domaine d'intégration d'autre part, les effets du terme en ε s'annulent, et nous avons :

$$\begin{aligned} B_i &= \tfrac{1}{2\pi} \int_\theta \int_{\varepsilon=-\eta_{i,N}\ \sin(\theta/2)}^{\varepsilon=\eta_{i,N}\ \sin(\theta/2)} \frac{(1-2\,\lambda^2)}{2\,|\sin(\theta/2)|}\ e^{-\frac{(\lambda)^2}{2}}\ \varepsilon^2\ d\varepsilon\ d\theta \ , \\ &= \tfrac{(1-2\lambda^2)}{2\pi}\ e^{-\frac{(\lambda)^2}{2}}\ \tfrac{\eta_{i,N}^3}{3} \int_\theta (\sin(\theta/2))^2\, d\theta \ , \end{aligned} \tag{2.38}$$

avec $\eta_{i,N} = \frac{-6\,i}{n}\ \frac{\sqrt{\beta_N}}{\alpha_N}$ (see eq. 2.36). Ainsi, une approximation très simple de l'intégrale B_i a été obtenue, de laquelle nous pouvons déduire l'approximation d'une partie de la probabilité de bonne association $\frac{\alpha_N}{\sqrt{\beta_N}}\frac{n}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}B_i$ de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ (voir l'équation 2.30) :

$$\boxed{\frac{\alpha_N}{\sqrt{\beta_N}}\ \frac{n}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}B_i \simeq 3(1-2\lambda^2)e^{-\lambda^2/2}\ \frac{\beta_N}{\alpha_N^2}\ \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} i^2\ \gamma_i}{32\ n^2}\right) \ .}$$

Ainsi, nous pouvons constater qu'une approximation assez correcte du terme $\frac{\alpha_N}{\sqrt{\beta_N}}\frac{n}{12}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}B_i$ est proportionnelle à la fois au rapport $\frac{\beta_N}{\alpha_N^2} \propto \frac{1}{N}$ et au terme constant $3(1-2\,\lambda^2)e^{-\lambda^2/2}$.

2.4.3 Approximation de l'intégrale A_i

La démarche suivante consiste à calculer l'intégrale A_i restante. Tout d'abord, nous remarquons :

$$\mathbf{1}_{f(x,y)\leq-\eta_{i,N}} + \mathbf{1}_{f(x,y)\leq\eta_{i,N}} = \mathbf{1}_{-\eta_{i,N}\leq f(x,y)\leq\eta_{i,N}} + 2\left(\mathbf{1}_{f(x,y)\leq 0} - \mathbf{1}_{-\eta_{i,N}\leq f(x,y)\leq 0}\right) \ , \tag{2.39}$$

ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} A_i &= 2 \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}_{(0,1)}(x,y)\ (\mathbf{1}_{f(x,y)\leq 0} - \mathbf{1}_{-\eta_{i,N}\leq f(x,y)\leq 0}) dxdy}_{A_{i,1}} , \\ &+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}(x,y) \mathbf{1}_{-\eta_{i,N}\leq f(x,y)\leq \eta_{i,N}} dxdy}_{A_{i,2}} . \end{aligned}$$

Nous utilisons le même changement de variables que précédemment (voir l'équation 2.34). Pour l'intégrale $A_{i,1}$, la densité de la loi normale est intégrée sur le domaine $[0, 2\lambda] \times [0, 2\pi]$; Tandis que pour l'intégrale $A_{i,2}$, le domaine d'intégration correspond à $[0, \eta_{i,N}\, |\sin(\theta/2)|] \times [0, 2\pi]$. Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} A_{i,1} &= \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [e^{-(\lambda-\varepsilon)^2/2}]_0^{\lambda} - [e^{-(\lambda-\varepsilon)^2/2}]_{\lambda}^{2\lambda} d\theta , \\ &\quad + \tfrac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [e^{-(\lambda-\varepsilon)^2/2}]_0^{\eta_{i,N}|\sin(\theta/2)|} d\theta , \\ &\simeq 2 - e^{-\lambda^2/2}\, [2 + 2\,\eta_{i,N} - \tfrac{(\lambda^2-1)}{4}\, \eta_{i,N}^2] \end{aligned} \tag{2.40}$$

Pour la deuxième intégrale, nous procédons de la même façon que pour B_i, i.e. :

$$\begin{aligned} A_{i,2} &= \tfrac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[e^{-\frac{(\lambda-\eta_{i,N}\ |\sin(\theta/2)|)^2}{2}} - e^{-\frac{(\lambda+\eta_{i,N}\ |\sin(\theta/2)|)^2}{2}} \right] d\theta , \\ &\simeq \tfrac{2\lambda e^{-\lambda^2/2}}{\pi} \eta_{i,N} . \end{aligned} \tag{2.41}$$

Puis en mettant en commun les résultats obtenus, nous découvrons l'approximation de A_i :

$$A_i = \left(\frac{-2\pi + (2\lambda - 2\pi)\eta_{i,N} + \frac{\pi}{4}(\lambda^2 - 1)\eta_{i,N}^2}{\pi} \right)\ e^{-\lambda^2/2} . \tag{2.42}$$

2.4.4 L'approximation explicite de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$

Si nous regroupons les calculs, nous sommes en mesure de présenter le résultat suivant, qui constitue également le principal résultat de ce chapitre :

Proposition 2.2 *Si nous considérons une unique fausse association, pouvant intervenir à l'instant l, alors une approximation explicite de la probabilité de bonne association est donnée par :*

$$\boxed{P(\Delta_{f,c} \geq 0) = 1 + (a + b\,\lambda + c\,\lambda^2)\ e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}$$

où :

$$\begin{cases} a &= -\frac{1}{2\pi}\left[1+\frac{\sqrt{\beta_N(l)}}{\alpha_N(l)}\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}+\frac{66\pi}{32n^2}\frac{\beta_N(l)}{\alpha_N^2(l)}\sum_{i=1}^{n}i^2\,\gamma_i\right], \\ b &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{6}{n}\frac{\sqrt{\beta_N}(l)}{\alpha_N(l)}\sum_{i=1}^{n}i\,\gamma_i\right], \\ c &= \frac{15}{16n^2}\frac{\beta_N(l)}{\alpha_N^2(l)}\sum_{i=1}^{n}i^2\,\gamma_i\ . \end{cases} \tag{2.43}$$

Les scalaires $\alpha_N(l)$ et $\beta_N(l)$ sont donnés par l'équation 2.25.

La formule ainsi obtenu est relativement simple. Elle présente également l'avantage de nous fournir de façon directe l'influence des paramètres d'intérêt sur la probabilité de bonne association. Nous remarquons ainsi que $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ est complétement indépendant des paramètres cinématiques du scénario, vu que la formule ne contient que le rapport λ/σ (noté simplement λ) et la durée du suivi (à travers $\alpha_N(l)$ et $\beta_N(l)$).
Etant donné que nous avons $\beta_N \propto \frac{1}{N}$ et $\alpha_N \propto -1$, la valeur asymptotique de la probabilité peut également être donnée, et elle vaut $1-\frac{e^{-\frac{\lambda^2}{2}}}{2\,\pi}$. Cette approximation reste valable pour des valeurs de N supérieures ou égales à 30. Nous manipulons un peu l'expression obtenue, ce qui nous permet de lui offrir un visage plus lisible :

$$\begin{aligned} &\mathsf{slo} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n}i\,\gamma_i-\sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i}\right)\ . \\ &\text{et ainsi, nous avons :} \\ &P(\Delta_{f,c}\geq 0)\overset{1}{\simeq}1-\left(1-\mathsf{slo}\,\frac{\sqrt{\beta_N(l)}}{\alpha_N(l)}\right)\,e^{-\frac{\lambda^2}{2}}\ . \end{aligned} \tag{2.44}$$

Il nous faut remarquer que l'approximation donnée par l'équation 2.44 est moins précise que l'approximation de l'équation 2.43 si N est considéré "grand". Toutefois, son intérêt principal reste de démontrer l'influence du paramètre N. De plus, si les coefficients γ_i sont déterminés par la minimisation d'un critère des moindres carrés, alors slo peut être facilement calculé (voir l'annexe A.2) et est clairement positive (voir l'équation A.13).

2.4.5 Cas ou λ serait aléatoire

Jusqu'à présent, nous nous sommes limités au cas ou λ était déterministe. Toutefois, il peut être intéressant de modéliser cette différence de façon aléatoire, avec un a priori gaussien $\mathcal{N}(\lambda_0,\sigma_0)$. Soit $\bar{\Delta}_{f,c}$ la différence des coûts étendue au cas aléatoire. Un raisonnement conditionnel nous amenerait aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} P(\bar{\Delta}_{f,c}\geq 0) &= \mathbb{E}_\lambda\left[P_\lambda(\Delta_{f,c}\geq 0)|\lambda\right]\ , \\ &\text{où :} \\ P_\lambda(\Delta_{f,c}\geq 0) &= 1+(a+b\lambda+c\lambda^2)e^{-\lambda^2/2}\ . \end{aligned} \tag{2.45}$$

Puis, en continuant les calculs :

$$\begin{aligned} &P(\bar{\Delta}_{f,c}\geq 0)=1+\frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2+1}}\,\left[a+b\bar{\lambda}_0+c(\bar{\lambda}_0^2+s_0^2)\right]\,e^{-\frac{\lambda_0^2}{2(\sigma_0^2+1)}}\ , \\ &\text{avec :} \\ &\bar{\lambda}_0=\frac{1}{\sigma_0^2+1}\lambda_0 \qquad , \qquad s_0^2=\frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+1}\ . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Ainsi, pour une valeur de N suffisemment grande, nous avons $P(\bar{\Delta}_{f,c} \geq 0) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{\sigma_0^2+1}} \frac{e^{-\frac{\bar{\lambda}_0^2}{2}}}{2\,\pi}$. Et il apparait clairement que les effets de la modélisation aléatoire de λ sont loin d'être négligeables.

2.5 Résultats de simulations (Unique fausse association)

Une fois l'approximation finale obtenue (équation 2.43), nous devons quand même tester la pertinence du résultat. A cet effet, nous devons considérer les variations en deux dimensions de la probabilité de bonne association, suivant les paramètres λ et N. Pour le premier paramètre (λ) testé, nous fixons deux valeurs différente de N. Puis nous comparons les résultats obtenus avec la véritable expression de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ et son approximation donnée par l'équation 2.43. Nous rappelons que λ représente en fait le rapport λ/σ, où λ est la distance entre la position de la vraie cible et celle de la fausse cible, et σ la variance du bruit d'observation. Cette comparaison est representée graphiquement sur la figure 2.5. Comme nous pouvons le voir sur cette figure, le résultat obtenu est glo-

FIGURE 2.5 – *La probabilité de bonne association (tirets) $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ et son approximation (en rouge : $N = 20$, en bleu $N = 40$), de variable λ ($x - axis$).*

balement satisfaisant, et s'améliore dès que la valeur de N augmente. C'est un constat rassurant dans la mesure ou les approximations proposées étaient basées sur des bornes d'intégration $\eta_{i,N}$ petites, impliquant le fait que N devait être suffisemment grand.

La validité de cette approximation s'étend aux faibles valeurs de λ, ce qui dans le cas ou λ serait égal à 1 n'est qu'une satisfaction strictement mathématique étant donné que pour cette valeur de λ, il est souvent considéré que les mesures sont confondues. Une étude complète de ces mesures non-résolues a été faite par [CBS94], [NBS81], notamment. Dans notre cas, nous ne tiendrons pas compte de ces cas particuliers.
Nous constatons sur la figure que pour des valeurs de λ comprises entre 1 et 2 le coefficient directeur de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)(\lambda)$ est assez important, mais en plus quasiment constant. Et dès que λ devient suffisemment proche de 3, la probabilité de bonne association devient presque égale à 1.

Il nous reste à analyser l'influence du paramètre N. Une représentation de son effet peut être visualisée sur la figure 2.6. De même que pour l'étude précédente, nous fixons la valeur du paramètre λ, puis nous faisons varier la durée du suivi. Les valeurs choisies pour λ correspondent aux valeurs les plus intéressantes et surtout les plus communes lors des problèmes d'association. Un premier constat frappant est qu'à partir de $N = 30$, l'approximation est très bonne. La différence entre l'approximation et la vraie valeur est inférieure à 0.05, ce qui est très satisfaisant. Toutefois, le comportement de la meilleure des approximations (voir l'équation 2.43) laisse clairement à désirer pour des petites valeurs de N. En effet, le principal problème n'est pas la différence entre les valeurs calculées, mais bien le comportement de la probabilité, qui augmente au lieu de diminuer lorsque l'on fait tendre N vers des faibles valeurs.

FIGURE 2.6 – *Probabilité de bonne association $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$: La vraie (tiret) et son approximation (continue) ppour N variant (axe x), et différentes valeurs de λ : bleu $\lambda = 1.5$, rouge $\lambda = 2.$, vert $\lambda = 2.5$.*

Puis, en prenant l'approximation au premier ordre de $P(\Delta_{f,c} \geq 0)(N)$ donné par l'équation 2.44, l'influence de N sur la probabilité est raisonnablement prise en compte pour des valeurs de N comprises entre 10 et 40, comme nous pouvons le voir sur la figure 2.7. En particulier, le coefficient directeur (slo, équation 2.44) est réellement proche de la vérité théorique.

FIGURE 2.7 – *Probabilité de bonne association $P(\Delta_{f,c} \geq 0)(N)$ pour N variable (axe x), $\lambda = 2$. Bleu : valeur exacte, rouge : approximation du 1-er ordre (équation 2.44).*

Enfin, pour terminer notre analyse de la probabilité de bonne sassociation, nous présentons un résultat saisissant sur les effets de la modélisation aléatoire de λ. Sur la figure 2.8, les valeurs de $P(\bar{\Delta}_{f,c} \geq 0)$ sont tracées sur l'axe des ordonnées, pour différentes valeurs de λ_0. Nous comparons également les résultats entre 3 courbes, pour λ déterministe, aléatoire de variance égale à 1 puis aléatoire de variance égale à 3.

FIGURE 2.8 – *Probabilité de bonne association $P(\bar{\Delta}_{f,c} \geq 0)$ pour λ aléatoire, de variable $\bar{\lambda}_0$ $x - axis$, $N = 40$. Tiret : déterministe λ ($\sigma_0 = 0$), continu : aléatoire λ ($-o-$: $\sigma_0 = 1$, $-+-$: $\sigma_0 = 3$).*

2.6 Cas de multiples fausses mesures

2.6.1 Lois classiques

Dans cette partie de chapitre, nous allons nous attacher à étendre le résultat obtenu précedemment au cas de multiples fausses mesures. Ce genre de scenario interviendrait notamment lorsque deux cibles se déplaceraient de façon approximativement parallèle, à une distance toutefois suffisemment réduite l'une de l'autre pour qu'à plusieurs instants, le doute soit permis sur l'origine d'une mesure. De la même façon, lorsque deux cibles se croisent, il existe un instant avant et après le croisement des trajectoires ou les mesures peuvent être mal associées. Le but de cette partie est justement d'exprimer la probabilité de bonne association dans ces cas.

Nous avons vu dans la section précédente qu'une forme explicite de $\Delta_{f,c}$ pouvait être obtenue dans le cas qui nous intéresse (voir l'équation 2.20). A partir de cette expression, nous pouvons tenter de déduire une formulation pour la probabilité de bonne association. Toutefois, procéder de la même façon que pour une unique fausse mesure est particulièrement compliqué. Un première simplification du scénario nous a mené à décider de nous restreindre au cas à chaque instant, il y aurait au plus une fausse mesure. Un scénario possible est présenté sur la figure 2.9.

FIGURE 2.9 – *Cas de plusieurs fausses mesures*

Afin de simplifier les calculs, nous considérons dans un premier temps le numérateur de Ψ_{FA_K} (que nous noterons $N(\Psi_{\mathsf{FA}_K})$). Contrairement au cas d'une fausse mesure unique, nous ne pouvons considérer (ou approximer) ce numérateur comme une forme quadratique simple. En fait, nous avons (voir équation 2.20) :

$$N(\Psi_{\mathsf{FA}_K}) = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \alpha_N(l_k, l_{k'}) \left(\langle \mathbf{e}_{l_k}, \mathbf{e}_{l_{k'}} \rangle - \langle \mathsf{fa}_{\mathsf{l_k}}, \mathsf{fa}_{\mathsf{l'_k}} \rangle \right) \ . \tag{2.47}$$

Le premier des problèmes que nous avons à traiter pour aboutir à un résultat est que $N(\Psi_{\mathsf{FA}_K})$ peut être petit, et dans le même temps, tous les termes $\left(\langle \mathbf{e}_{l_k}, \mathbf{e}_{l_{k'}} \rangle - \langle \mathsf{fa}_{\mathsf{l_k}}, \mathsf{fa}_{\mathsf{l'_k}} \rangle \right)$ peuvent être grand, mais de signe opposé. Le changement de variable tel que proposé dans la première partie de ce chapitre nous semble donc complétement inaproprié.

Nous decidons de nous affranchir totalement de cette méthode, et de tenter une méthode plus probabiliste. Nous allons essayer d'approximer la loi de probabilité par une loi gaussienne toute simple. La loi normale est entièrement déterminée par ses deux premiers moments. Dès lors, si nous calculons ces moments, nous obtenons la loi. Rappelons les principaux résultats (voir l'équation 2.20) :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\left(\Delta_{\mathsf{FA}_K} | \, \tilde{\varepsilon}_{l_1} = \mathbf{e}_{l_1} \cdots, \tilde{\varepsilon}_{l_K} = \mathbf{e}_{l_K}\right) = \mathcal{N}\left[m_1, v_1\right] \ , \\
&\text{où :} \\
&m_1 = \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \alpha_N(l_k, l_{k'}) \left(\langle \mathbf{e}_{l_k}, \mathbf{e}_{l_{k'}} \rangle - \langle \mathsf{fa}_{\mathsf{l_k}}, \mathsf{fa}_{\mathsf{l_{k'}}} \rangle \right) \ , \\
&v_1 = 4 \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \theta(l_k, l_{k'}) \, \langle \mathbf{e}_{l_k} - \mathsf{fa}_{l_k}, \mathbf{e}_{l_{k'}} - \mathsf{fa}_{l_{k'}} \rangle \ .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

En supposant que la moyenne (m_1) et la variance (v_1) de $\Delta_{\mathsf{FA_K}}$ sont aléatoires, à cause des termes (e_{l_k}), nous pouvons déterminer la loi a posteriori de $\Delta_{\mathsf{FA_K}}$. Dans les faits, si nous avons :

$$m_1 \sim \mathcal{L}_1(\theta_1) \quad \text{et :} \ v_1 \sim \mathcal{L}_2(\theta_2) \ ,$$

où θ_1 et θ_2 sont des paramètres déterministes. De plus, si la densité de $\mathcal{L}_1$ est g_1 de support S_1 et celle de $\mathcal{L}_2$ est g_2 de support S_2, alors la densité a posteriori de $\Delta_{\mathsf{FA_K}}$ est la suivante :

$$h\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}}\right) \quad = \quad \int_{S_1}\int_{S_2} f(\Delta \mid m_1, v_1) g_{\theta_2}(v_1) g_{\theta_1}(m_1) \, dv_1 dm_1 \ . \tag{2.49}$$

Nous avons désormais changé le problème. Bien que nous n'ayons pas l'expression explicite de la densité a posteriori, nous avons au moins une formulation, même si elle implique une double intégration. En trouvant des approximations convenables de g_{θ_1} et g_{θ_2}, nous serons alors capable d'obtenir un résultat convaincant pour cette loi.

Tout d'abord, nous allons approximer la loi de la moyenne m_1 par une loi normale. Pour un nombre suffisemment important de variables aléatoires identiquement distribuées, le théorème centrale-limite nous permet cette démarche. Dès lors, nous avons $m_1 \sim \mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2)$. La loi de v_1 sera étudiée plus loin. Comme $\Delta_{\mathsf{FA_K}}$ et m_1 sont toutes les deux de loi normale, nous avons la connaissance excate de la loi a posteriori de $\Delta_{\mathsf{FA_K}}$ (voir l'annexe A.3) :

$$\begin{aligned} h\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}}\right) &= \int_{S_1}\int_{S_2} f(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \mid m_1, v_1)\; g_2(v_1) g_1(m_1) dv_1 dm_1 \;, \\ &= \int_{S_2} f_{\mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2 + v_1)}(\Delta)\; g_2(v_1) dv_1 \end{aligned} \tag{2.50}$$

Puis nous avons :

$$P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) = \int_{S_2} \mathsf{erfc}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}}\right) g_2(v_1) dv_1 \;. \tag{2.51}$$

Cette expression présente le double avantage d'être assez simple et en même temps facile à coder pour la simulation. De plus, la qualité de cette approximation augmente en même temps que K, comme le stipule le théorème centrale-limite. Notre problème principal est donc de rendre $h\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}}\right)$ (voir l'équation 2.50) aussi explicite que possible, et dans le même temps d'obtenir une fonction intégrable par v_1, la dernière étape du processus. Dans cette optique, nous choisissons une loi pour la variance v_1. Deux solutions sont envisageables :

La première serait de re-utiliser le théorème centrale-limite, et de modéliser la variance par une loi gaussienne [8]. La deuxième solution, sans doute plus raisonnable, mais sans doute plus compliquée d'un point de vue calculatoire, serait d'envisager une loi du χ^2 ou une de ses dérivées pour v_1.

On remarque que v_1 est constitué d'une somme pondérée ($\theta(l_k, l_{k'})$) de forme quadratique de vecteurs normaux ($\langle \mathsf{e}_{l_k} - \mathsf{fa}_k, \mathsf{e}_{l_{k'}} - \mathsf{fa}_{k'} \rangle$, voir les équations 2.20, 2.48). Chaque élement de cette somme est distribué selon une loi du χ^2. Toutefois, comme les poids sont différents, il n'est pas possible de retirer de l'expression une distribution pratique (voir [SS77]). Nous allons nous affranchir allègrement de cette contrainte en supposant que les poids sont approximativement équivalents [9]. Dans le raisonnement ci-dessous, nous allons supposer que v_1 suit une loi du χ^2 à $2K$ degrés de liberté, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) &= \int_{\mathbb{R}_+} \mathsf{erfc}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}}\right)\; f_{\chi^2(2K)}(v_1) dv_1 \\ &= \tfrac{1}{2^K \Gamma(K)} \int_{\mathbb{R}_+} \mathsf{erfc}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}}\right)\; v_1^{K-1} e^{-v_1/2} dv_1 \end{aligned} \tag{2.52}$$

8. La principale limitation de cette approche serait clairement le réalisme de ce modèle. Comment travailler avec une variance négative ?

9. Cette hypothèse reste raisonnable, une fois l'étude de la variablilité des poids effectuée.

La première solution (approximation normale) nous aurait amené à :

$$P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathsf{erfc}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}}\right) f_{\mathcal{N}(v_0, s_0^2)}(v_1) dv_1 \ , \tag{2.53}$$

où les paramètres m_0, σ_0^2, v_0 et s_0^2 sont les suivants (voir l'Annexe A.4) :

$$\left| \begin{array}{rcl} m_0 & = & 2\sum_{k=1}^{K} \alpha_N(l_k, l_k) - \sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \alpha_N(l_k, l_{k'})\ \lambda_{l_k}\ \lambda_{l_{k'}} \ , \\ \sigma_0^2 & = & 4\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \alpha_N(l_k, l_{k'})\right]^2 \ , \\ v_0 & = & 4\sum_{k=1}^{K} \theta\left(l_k, l_k\right)\ \left(2 + \lambda_{l_k}^2\right) + 4\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1, k' \neq k}^{K} \theta(l_k, l_{k'}) \lambda_{l_k} \lambda_{l_{k'}} \ , \\ s_0^2 & = & 2\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K} \theta(l_k, l_{k'})(1 + \lambda_{l_k})(1 + \lambda_{l_{k'}})\right]\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{i'=1}^{K} \theta(l_i, l_{i'})\right] \ . \end{array} \right. \tag{2.54}$$

Enfin, même si de nombreuses approximations valables de la fonction $\mathsf{erfc}(.)$ existent, elles ne mènent en général à aucune expression explicite. Il nous semble ainsi compliqué d'obtenir une solution plus simple que celle que nous proposons dans le cas de multiples fausses associations possibles. Un peu de clarté peut être obtenu en approximant $\alpha_N(l_k, l_k)$ et $\theta(l_k, l_{k'})$ (voir les équations 2.19, 2.20), sous l'hypothèse que le rapport K/N soit négligeable par rapport à 1, ce qui donne :

$$\left| \begin{array}{ll} \alpha_N(l_k, l_k) \backsim \left(1 - \frac{1}{N}\right)\ K & \theta(l_k, l_{k'}) \backsim \left(\frac{P(N^3, K^3)}{N^4}\right)\ K \ , \\ m_0 \backsim \left(1 - \frac{1}{N}\right)\ K^2(2 - \lambda^2\, K) & \sigma_0^2 \backsim 4\ K^6 \ , \end{array} \right. \tag{2.55}$$

ou $P(N^3, K^3)$ est un polynome en K et N, d'ordre maximum en K et N égal à 3. En dépit des nombreuses approximations, nous voyons l'importance des paramètres K et λ. Comme nous l'avions déjà remarqué dans le cas d'une fausse mesure (voir l'équation 2.44), N a un effet essentiellement stabilisateur sur l'approximation de la probabilité.

2.6.2 La dernière étape

Nous avons écrit dans le paragraphe précédent :

$$P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) \ = \ \int_{S_2} \mathsf{erfc}\left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}}\right) g_2(v_1) dv_1 \ . \tag{2.56}$$

En utilisant un développement de Taylor :

$$\mathsf{erf}(z) \ = \ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} z^{2n+1} \tag{2.57}$$

Ce qui nous amène à calculer :

$$P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) \quad = \quad 1 - \tfrac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{(-1)^n}{n!(2n+1)} \int_{S_2} \left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}} \right)^{2n+1} g_2(v_1) dv_1 \ . \tag{2.58}$$

Si nous supposons que v_1 suit une loi exponentielle, nous avons à calculer une simple intégrale :

$$I_{2n+1} \quad = \quad \int_{\mathbb{R}_+} \left(\frac{m_0}{\sqrt{\sigma_0^2 + v_1}} \right)^{2n+1} v_0 e^{-v_1 v_0} dv_1 \tag{2.59}$$

En calculant, nous obtenons :

$$I_{2n+3} \quad = \quad v_0 m_0^{2n+3} - v_0 m_0^2 \sigma_0^{2n+1} I_{2n+1} \tag{2.60}$$

Puis,

$$I_{2n+1} \quad = \quad v_0^2 m_0^5 \frac{1 - (-v_0 m_0^4 \sigma_0)^n}{1 + v_0 \sigma_0 m_0^4} - v_0^n m_0^{2n} \sigma_0^{n-1} I_1 \tag{2.61}$$

Ce qui peut être utilisé pour calculer l'expression définitive de la probabilité de bonne association :

$$P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right) \quad = \quad 1 - \frac{\mathsf{erf}(1) - \mathsf{erf}(-v_0 m_0^4 \sigma_0)}{v_0 \sigma_0 m_0^4} + \frac{\mathsf{erf}(v_0 m_0^2 \sigma_0)}{m_0^2 v_0 \sigma_0^2} I_1 \tag{2.62}$$

2.7 Simulation : Cas de plusieurs fausses mesures

Nous allons utiliser ici les approximations calculée dans la section précedente (2.6). Nous avons décider de ne simuler que l'approximation par la loi du χ^2, au lieu de la modélisation par loi normale, pour les raisons précédemment invoquées. La figure 2.10 présente le cas ou $K = 2$ (nombre de fausses mesures égal à 2, λ déterministe, et une durée de suivi N égal à 30. Sur la figure 2.11, nous cherchons surtout à noter la différence

FIGURE 2.10 – *Probabilité de bonne association pour plusieurs fausses mesures (consécutives) ($K = 2$, χ^2 et l'approximation de l'équation 2.52). $P\left(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0\right)$ sur l'axe y, λ sur l'axe x, $N = 30$.*

qu'apporte la modélisation de plusieurs fausses mesures, et l'effet que cela engendre sur la probabilité de bonne association. Le principal résultat à souligner est que si nous avons huit fausses mesures consécutives à une distance de 3.5, cela revient à avoir deux fausses mesures, distantes de 2.5 voir une seule fausse mesure, distante de la mesure originale de 1.8.

FIGURE 2.11 – *Probabilité de bonne association pour K fausses mesures (consécutives) ($K = 4$ et $K = 8$). $P\left(\Delta_{\mathsf{FA}_\mathsf{K}} \geq 0\right)$ sur l'axe y, λ sur l'axe x, $N = 40$.*

2.8 Conclusion

Obtenir une expression explicite et pertinente de la probabilité de bonne association est de première importance pour comprendre clairement le comportement des algorithmes d'association. Toutefois, bien que de nombreux algorithmes traitant de ce problème existent, l'analyse de la performance de ces algorithmes est très rarement pris en compte, encore moins d'un point de vue strictement analytique. Ce qui n'est guère surprenant quand on voit les difficultés auquelles nous avons du faire face pour arriver à notre résultat, et ce dans le cas très simpliste d'une cible se déplaçant de façon rectiligne uniforme.
Nous avons démontré dans ce chapitre que s'était néanmoins possible, et que les résultats obtenus n'étaient pas forcément ceux attendus. En s'appuyant sur des méthodes rigoureuses, nous avons aboutis à des résultats aisément interprétables, dont les applications sont multiples. En effet, dans des problématiques telles que le traitement de cibles proches, d'environement dense, de fausses mesures générées intentionnelement, la connaissance de l'influence des paramètres d'intérêts sur le comportement de l'algorithme permettra surement d'apporter une réponse aussi rapide qu'efficace dans leur traitement.

Conclusion

Nous avons traité dans cette première partie le problème de l'association d'une mesure à une piste. Bien que le scénario décrit corresponde à une problématique de suivi d'une cible, les résultats obtenus sont utilisables dans tous les contextes susceptibles d'utiliser une méthode de régression linéaire. En effet, les seules contraintes inhérentes aux calculs sont un nombre important de mesures et des mesures régulièrement espacées suivant un axe (dans notre cas l'axe des abscisses). Après avoir rappelé succinctement les fondamentaux de la régression linéaire, nous avons proposé des méthodes de calcul explicite assez divers et souvent laborieux afin de déterminer l'influence des paramètres d'intérêt de notre modèle. Le résultat obtenu sur la probabilité de bonne association concernant l'influence de la distance de la fausse mesure et du nombre de mesures sont mis en valeur par les résultats de simulation proposés en fin de chapitre. En effet, si le comportement global de la probabilité approximée ne correspond pas toujours a celui attendu (notamment concernant l'influence du paramètre N, pour de faibles valeurs), dès que les hypothèses sont respectées les résultats obtenus sont convaincants. Au delà de l'interprétation que nous avons alors pu faire de l'influence des paramètres, cette simplification de la probabilité nous a permis l'extension de notre approche à des scénarios beaucoup moins triviaux tels que le multicible ou encore la possibilité d'avoir une distance définie non plus de façon déterministe, mais plutôt stochastique [10].

10. même si le modèle proposé dans le chapitre reste simple, rien n'empêche de le complexifier

Deuxième partie

Approche par les instants de plus grande proximité

"Nous sommes automates dans les trois quarts de nos actions."

Leibniz

Introduction

Dans cette deuxième partie, nous décidons de nous attacher à une première réduction de l'information rendue disponible par les capteurs. En effet, dans la partie précédente, l'information, bien que bruitée, correspondait à la position de la cible, ce qui facilitait d'autant la problématique de suivi. Toutefois, obtenir ces coordonnées peut s'avérer extrêmement difficile en fonction du scénario et des capteurs disponibles. Par ailleurs, dans un contexte de réseau, la redondance d'information doit pouvoir être une source de richesse et non pas d'embarras. Ce n'est toutefois le cas que si les capteurs ont été préalablement calibrés, et sont fréquemment contrôlés. Si l'on décide de s'affranchir de cette lourdeur, en plus de simplifier le modèle de bruit sur les données, nous proposons d'étudier une information plus réduite. Ainsi, chaque capteur ne nous fournirait que l'instant de plus grande proximité avec la cible. Si dans de nombreux scénario cette information est trop réduite pour permettre le suivi, il existe cependant des hypothèses sur le mouvement permettant d'utiliser efficacement ce type d'information. Ainsi, nous décidons de nous intéresser à une cible se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme, puis nous autorisons la manœuvre.
Cette seconde partie se trouve donc organisée de la façon suivante :

- le **chapitre 3** traite des trajectoires en mouvement rectiligne uniforme et des résultats sur l'estimation par maximum de vraisemblance. Nous étudions également deux modèles de diffusion unidimensionnelle et les résultats d'estimation associés ;

- le **chapitre 4** traite des cibles manœuvrante et des problème d'identifiabilité que la manœuvre de la cible permet de résoudre. Nous proposons notamment des méthodes d'ordre statistique pour l'estimation des manœuvres et des instants auxquels elles interviennent.

CHAPITRE 3

SUIVI D'UNE TRAJECTOIRE RECTILIGNE UNIFORME OU DIFFUSIVE À L'AIDE DES INSTANTS DE PLUS GRANDE PROXIMITÉ

Principales notations :

- cpa : Point de la trajectoire le plus proche du capteur , t_{cpa} : instant du cpa.
- $\mathbf{v}$: Vecteur vitesse de la cible , $\mathbf{x}_0$: Vecteur position initial de la cible.
- Gen$[u_i]$: Famille génératrice issue des vecteurs u_i.

3.1 Introduction

On considère un réseau de capteurs constitué de N capteurs (vidéo ou non) dont les positions sont parfaitement connus. Chaque capteur ne nous fournit qu'une information binaire, que l'on notera $\{+,-\}$ ([ABC+05], c'est à dire que soit la distance entre la cible et le capteur augmente, auquel cas le capteur nous indiquera $(+)$, soit elle diminuera, et l'information communiquée sera $(-)$. De nombreuses contributions ont été apportées pour le traitement d'information binaires, mais plus souvent dans le cas de capteurs de proximité (voir [WM06] et [LPR07]). Nous avons donc décidé de nous attacher à un autre problème impliquant un autre type de capteurs binaires.
De cette séquence de données binaires, il est possible de déduire l'instant ou l'intervalle de temps où la cible se trouve le plus proche d'un capteur qu'elle ne l'a été et ne le sera jamais [1]. Pour le capteur i, nous allons noter t^i_{cpa} cet instant.

Il peut être argumenté que l'information binaire mais riche fournie par chaque capteur à chaque instant a été considérablement réduite. Toutefois cela présente le grand avantage de mettre en évidence les limites du traitement de l'information, ainsi que les effets des erreurs issues de ce traitement. Et ce de façon complètement explicite. Tous les calculs et les hypothèses traités dans ce chapitre le sont sous cet unique type de données.

1. C'est une propriété immédiate du type de trajectoire étudiée, comme démontré dans ce chapitre.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Tout d'abord, nous introduisons le scénario d'un point de vue géométrique, ce qui nous aidera grandement dans l'appréhension du problème. Puis, en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire élémentaire, nous étudierons les propriétés d'observabilité quand les données sont uniquement issues des t^i_{cpa}. Nous montrerons que même si l'observabilité complète du système ne peut être obtenue à partir de ces seules informations, nous pouvons néanmoins séparer clairement les parties observables et non-observables, et enfin que cette dernière est uniquement de dimension 1.

Il est alors possible de développer des méthodes pour estimer cette partie observable du vecteur d'état de la cible. Nous procédons tout d'abord pour une cible dont la trajectoire est complètement déterministe. Nous écartons dans un premier temps les possibilités de manœuvre, qui seront étudiées dans le chapitre 4.

Puis, nous relâchons l'hypothèse déterministe pour nous attacher à l'étude d'un mouvement diffusif à une dimension. Nous proposons alors deux approches distinctes pour l'estimation des paramètres d'intérêt, qui sont les composantes du vecteur vitesse. Nous commençons par une modélisation en temps continu, et nous proposons un estimateur de t_{cpa}. La qualité de cet estimateur est ensuite étudiée à l'aide des outils mathématiques de l'analyse des processus stochastiques. Puis nous modélisons le mouvement en temps discret, plus particulièrement en utilisant les chaînes de Markov hiérarchiques. Quelques résultats de simulation viennent ensuite attester de la pertinence des choix proposés.

3.2 Identification du scénario

3.2.1 Des coordonnées cartésiennes au t_{cpa}

Considérons tout d'abord que nous établissions un capteur de référence, et que nous décidions d'y placer l'origine du repère (notons O cette origine). Le point de départ de la cible sera noté M_0, et la trajectoire est considérée rectiligne et uniforme (nous rappelons que l'on note $\mathbf{v}$ le vecteur vitesse). Alors, le point de plus grande proximité (cpa) de la cible sera noté M_{cpa} et est caractérisé par le fait que les vecteurs $\overrightarrow{OM}_{\mathsf{cpa}}$ ($\overrightarrow{OM}_0 = \mathbf{x}_0$) et $\overrightarrow{M_0M}_{\mathsf{cpa}}$ sont orthogonaux. Nous avons ensuite (voir la figure 3.1) :

FIGURE 3.1 – *Géométrie du scénario*

$$\begin{array}{c} (x_0 + t_{\mathsf{cpa}}\, v_x)\, v_x + (y_0 + t_{\mathsf{cpa}} v_y)\, v_y = 0 \ , \\ \text{puis :} \\ t_{\mathsf{cpa}} = -\frac{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \ , \text{avec : } \mathbf{v} = (v_x, v_y)^T \ , \ \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0). \end{array} \tag{3.1}$$

De façon tout à fait identique, nous obtenons l'expression suivante de la distance au capteur, $\mathsf{cpa} \triangleq \|\overrightarrow{OM}_{\mathsf{cpa}}\|$:

$$\begin{aligned}
\|\overrightarrow{OM}_{\mathsf{cpa}}\| &= \left[(x_0 + t_{\mathsf{cpa}} v_x)^2 + (y_0 + t_{\mathsf{cpa}} v_y)^2\right]^{1/2}, \\
&= \left[\|\mathbf{x}_0\|^2 - \frac{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}\rangle^2}{\|\mathbf{v}\|^2}\right]^{1/2}, \\
&= \|\mathbf{x}_0\| \, |\sin(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})| = \frac{|\det(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})|}{v}.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Il existe donc une bijection immédiate entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées dans le système cpa, bijection définie comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} |\det(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})| \\ \langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}\rangle \\ \theta \\ v = \|\mathbf{v}\| \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{|\det(\mathbf{x}_0, \mathbf{v})|}{v} = \mathsf{cpa}_{ref} \\ v \\ \theta \\ -\frac{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = t_{\mathsf{cpa}}^{ref} \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

où θ correspond à la direction de la cible. Si l'on rappelle que O est la position de référence (ref) et en notant $\mathbf{t}_i \triangleq \overrightarrow{OO}_i$ et t_{cpa}^i le t_{cpa} pour le capteur i, nous pouvons déduire la relation algébrique suivante :

$$\begin{aligned}
t_{\mathsf{cpa}}^i &= -\frac{\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}\rangle}{v^2}, \\
&= t_{\mathsf{cpa}}^{ref} + \frac{\langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}\rangle}{v^2}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nous rappelons enfin que puisque la géométrie globale du réseau est connue, alors tous les t_i sont connus, et nous nous retrouvons donc avec une inconnue de dimension 2 dans l'expression précédente, le vecteur vitesse de la cible.

3.2.2 Observabilité du système

Nous considérons que les observations que nous recevons sont strictement limitées aux t_{cpa}. Dans ce paragraphe, nous ne prendrons en compte qu'un seul type de trajectoire, celle étudiée depuis le début du chapitre. Pour des simplifications de notation dans les équations à venir, notons $\tau_{i,j} \triangleq t_{\mathsf{cpa}}^j - t_{\mathsf{cpa}}^i$ la différence entre les instants de cpa. Le but de ce paragraphe est de déterminer si nous pouvons connaître les paramètres de la trajectoire.

Toujours suivant l'hypothèse que la trajectoire est rectiligne et uniforme, de vecteur vitesse constant $\mathbf{v}$, nous déduisons à l'aide de l'équation précédente que :

$$\tau_{i,j} = \frac{\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2}. \tag{3.5}$$

La question à laquelle nous souhaiterions répondre est de savoir si deux cibles, de vecteurs vitesse distincts $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ peuvent générer les mêmes données dans le réseau de capteurs, c'est à dire que $\forall (i,j) \;\; \tau_{i,j}(\mathbf{v}_1) = \tau_{i,j}(\mathbf{v}_2)$.

Si l'on suppose que l'assertion ci-dessus est vraie, alors nous avons :

$$\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \frac{1}{v_1^2}\mathbf{v_1} - \frac{1}{v_2^2}\mathbf{v_2}\rangle = 0 \ , \ \forall \ (i,j) \ . \tag{3.6}$$

Et si Gen $[\{\mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i\}] = \mathbb{R}^2$, alors nous pouvons déduire de l'équation 3.6 :

$$\frac{1}{v_1^2} \ \mathbf{v_1} = \frac{1}{v_2^2} \ \mathbf{v_2} \ , \tag{3.7}$$

et donc $\mathbf{v_1} = \mathbf{v_2}$. La conclusion précédente est directement issue de l'égalité des normes $v_1 = v_2$. Ainsi, le vecteur vitesse $\mathbf{v}$ de la cible est observable, mais ce n'est pas le cas de la position initiale $\mathbf{x}_0$, qui reste non-observable. Ce résultat se déduit de l'écriture de t_{cpa}, qui peut se mettre également sous la forme

$$t_{\mathsf{cpa}} = -\frac{1}{v^2} \ \langle \mathbf{x}_0 + \lambda \ \mathbf{v}^{\perp}, \mathbf{v}\rangle \ ,$$

où $\mathbf{v}^{\perp}$ est un vecteur orthogonal à $\mathbf{v}$. Réciproquement, si les t_{cpa} sont égaux, alors sous la même condition que Gen $[\{\mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i\}] = \mathbb{R}^2$, nous avons $\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{x}_0^{'}, \mathbf{v}\rangle$, ce qui signifie par la suite que $\mathbf{x}_0^{'} = \mathbf{x}_0 + \lambda \ \mathbf{v}^{\perp}$. Nous en déduisons que l'espace d'observation est de dimension 3. Le seul paramètre non-observable du système devient donc λ. Bien sûr, ce problème d'observabilité du paramètre λ peut être fortement balancé par l'utilisation de capteurs de proximités dans le réseau. Ce qui n'est pas l'objet du présent chapitre.

3.3 Estimation des paramètres

Soit $\hat{\tau}_i$ la valeur mesurée de t_{cpa}^i par le capteur i. Nous supposons que $\hat{\tau}_i$ suit une loi normale, dont les caractéristiques sont les suivantes :

$$\begin{array}{l} \hat{\tau}_i = \tau_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) + e_i, \quad e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \ , \\ \text{où :} \\ \tau_i(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}) = \frac{\langle -\mathbf{x}_0 + \mathbf{t}_i, \mathbf{v}\rangle}{v^2} \ . \end{array} \tag{3.8}$$

Comme explicité dans la section précédente, à cause du problème d'observabilité, il n'est pas possible d'estimer les deux paramètres $\mathbf{x}_0$ et $\mathbf{v}$ à partir des seules données $\{\hat{\tau}_i\}$. Toutefois, en nous concentrant uniquement sur l'estimation du vecteur vitesse $\mathbf{v}$, nous pouvons procéder à quelques calculs préliminaires à l'estimation. Ainsi :

$$\begin{array}{l} \hat{\tau}_{i,j} = \tau_{i,j}(\mathbf{v}) + e_i - e_j \ , \\ \text{et :} \\ \tau_{i,j}(\mathbf{v}) = \frac{\langle \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j, \mathbf{v}\rangle}{v^2} \ . \end{array} \tag{3.9}$$

Par rapport au résultat obtenu sur l'équation précédente, il est important de noter deux éléments capitaux. Tout d'abord, les vecteurs $(\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j)$ sont parfaitement connus. Ensuite, nous remarquons que l'expression $\tau_{i,j}(\mathbf{v})$ ne contient plus le vecteur de position initial $\mathbf{x}_0$. Nous réduisons donc désormais l'information observée à la différence des t_{cpa}, qui s'écrit :

$$\begin{array}{l} \hat{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) + \mathbf{e} \ ; , \\ \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v}) = (\cdots, \tau_{i,j}(\mathbf{v}), \cdots) \ , \ \mathbf{e} = (\cdots, e_i - e_j, \cdots) \ . \end{array} \tag{3.10}$$

Le vecteur d'erreur $\mathbf{e}$ est toujours gaussien, de moyenne le vecteur nul, mais de matrice de variance-covariance R, qui n'est plus simplement diagonale. La fonction de vraisemblance $L(\hat{\boldsymbol{\tau}}|\mathbf{v})$ s'écrit de la façon suivante :

$$L\left(\hat{\boldsymbol{\tau}}|\mathbf{v}\right) = \text{cst}(\det R)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\,\|\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}(\mathbf{v})\|_R^2\right) \ . \tag{3.11}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance du vecteur $\mathbf{v}$ est défini par $\widehat{\mathbf{v}} = \arg\max_{\mathbf{v}} L\left(\hat{\boldsymbol{\tau}}|\mathbf{v}\right)$, et l'estimation peut être obtenue par des méthodes d'optimisation itérative. De façon générale, la forme de la fonction de vraisemblance peut poser un problème. En effet, $L(\mathbf{v}) \triangleq \sum_{i,j}(\hat{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\mathbf{v})\ )^2$ n'est pas forcement convexe (voir la matrice hessienne de $L\left(\hat{\boldsymbol{\tau}}|\mathbf{v}\right)$). Toutefois, si l'on note $\mathbf{v}_0$ le vecteur vitesse exact, alors nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Sous l'hypothèse précédente, nous avons :*

$$\nabla L(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \Longrightarrow \sum_{i,j}[\tau_{i,j}(\mathbf{v}_0) - \tau_{i,j}(\mathbf{v})\ ]^2 = 0\ ,$$

où $\mathbf{v}_0$ est le vrai vecteur vitesse. Dès lors, sous les contraintes d'identifiabilité, nous avons $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$.

Preuve : Soit l'expression suivante $\nabla L(\mathbf{v})$:

$$\nabla L(\mathbf{v}) \quad = \quad -2\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\mathbf{v})\ \right) \times \left(\frac{1}{v^2}(\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j) - \frac{2}{v^4}\langle \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j, \mathbf{v}\rangle\ \mathbf{v}\right)\ , \tag{3.12}$$

où $\bar{\tau}_{i,j}$ signifie $\tau_{i,j}(\mathbf{v}_0)$. Alors, $\nabla L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ est équivalent à :

$$\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\mathbf{v})\ \right)\frac{1}{v^2}(\mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j) = 2\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\mathbf{v})\ \right)\frac{\langle \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j, \mathbf{v}\rangle}{v^4}\ \mathbf{v}\ . \tag{3.13}$$

Pour le reste de la démonstration, notons $\bar{\mathbf{v}}$ un vecteur pour lequel $\nabla L(\bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}$. L'équation précédente (équation 3.13) est une égalité vectorielle, qui implique l'égalité suivante après application d'un produit scalaire avec le vecteur $\bar{\mathbf{v}}$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\frac{1}{\bar{v}^2}\left(\langle \mathbf{t}_i, \bar{\mathbf{v}}\rangle - \langle \mathbf{t}_j, \bar{\mathbf{v}}\rangle\right) = 2\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\frac{1}{\bar{v}^2}\left(\langle \mathbf{t}_i, \bar{\mathbf{v}}\rangle - \langle \mathbf{t}_j, \bar{\mathbf{v}}\rangle\right)\ , \\
&\text{de telle sorte que :} \\
&\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\ \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}}) = 0\ .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Le même type de résultat peut être obtenu si nous remplaçons le produit scalaire de $\bar{\mathbf{v}}$ par un produit scalaire avec $\mathbf{v}_0$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\frac{1}{\bar{v}^2}\left(\langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_0\rangle - \langle \mathbf{t}_j, \mathbf{v}_0\rangle\right) = 2\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\frac{\langle \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j, \bar{\mathbf{v}}\rangle}{\bar{v}^4}\langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_0\rangle\ , \\
&\text{ou encore :} \\
&\left(\frac{{v_0}^2}{\bar{v}^2}\right)\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\right)\ \bar{\tau}_{i,j} = 2\frac{\langle \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}_0\rangle}{\bar{v}^2}\sum_{i,j}\left(\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ \right)\ \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})\ .
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Puis, comme nous savons d'après l'équation 3.14 que $\sum_{i,j} (\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}}) \ ) \ \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})$ est nulle, nous avons donc également :

$$\sum_{i,j} (\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})) \ \bar{\tau}_{i,j} = 0 \ . \tag{3.16}$$

Puis, en combinant les résultats des équations 3.14 et 3.16 :

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j} (\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})) \ \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}}) - \sum_{i,j} (\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})) \ \bar{\tau}_{i,j} = 0 \ , \\ &\text{puis :} \\ &\sum_{i,j} (\bar{\tau}_{i,j} - \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}}))^2 = 0 \ , \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ce qui signifie que $\bar{\tau}_{i,j} = \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}})$ quelque soit le couple (i, j). Nous avons finalement obtenu que l'égalité $\nabla L(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ implique l'égalité $\bar{\tau}_{i,j} = \tau_{i,j}(\bar{\mathbf{v}}) \ , \ \forall (i, j)$ et sous les conditions d'identifiabilité nous obtenons $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{v}_0$.
□ □ □

Le raisonnement précédent peut être étendu au cas d'une cible manœuvrante (cas multi-jambe) : $\{\mathbf{x}_0, \mathbf{v_1}, \cdots, \mathbf{v_k}\}$, avec la même conclusion.

Puis, si l'on calcule la matrice d'information de Fisher pour les paramètres v_x et v_y, on obtient :

$$\begin{aligned} MIF_{11} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{i} \rangle}{v^2} - 2 v_x \frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{v} \rangle}{v^4} \big)^2 \\ MIF_{22} &= \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{j} \rangle}{v^2} - 2 v_y \frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{v} \rangle}{v^4} \big)^2 \\ MIF_{12} &= \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} \big(\frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{i} \rangle}{v^2} - 2 v_x \frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{v} \rangle}{v^4} \big) \big(\frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{j} \rangle}{v^2} - 2 v_y \frac{\langle \mathbf{t}_i ; \mathbf{v} \rangle}{v^4} \big) \end{aligned} \tag{3.18}$$

ou **i** et **j** sont les vecteurs unitaires de v_x et v_y.

3.4 Mouvement diffusif

3.4.1 Processus de diffusion continu

Jusqu'à présent nous ne nous étions intéressé qu'au cas où la trajectoire était déterministe et le mouvement rectiligne uniforme. Pour relâcher ces hypothèses nous étudions dans ce paragraphe un processus stochastique en temps continu à une dimension. En pratique, cela signifie que la cible qui nous intéresse se déplace toujours en ligne droite, mais que sa progression le long de cette ligne n'évolue plus de façon constante. Cela serait le cas d'une cible se déplaçant sur un réseau routier, ne pouvant quitter la route, mais avec une vitesse variable.

$$dx_t = v \ dt + \eta \ dB_t \ , \tag{3.19}$$

où $(x_t)_{t\in[0,T]}$ est la position de la cible, $(B_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien (connu aussi sous le nom de processus de Wiener). Le paramètre v est constant, et η^2 correspond à la variance de la vitesse instantanée. Un tel mouvement brownien avec dérive possède une solution explicite relativement simple :

$$x_t \quad = \quad x_0 + t\ v + \eta\ B_t\ . \tag{3.20}$$

Soit x_c la position du cpa pour le capteur i. Comme la topologie du réseau est connue, x_c l'est également. Nous cherchons ici toujours à estimer la vitesse v de déplacement de la cible. Toutefois, l'observation sur laquelle nous nous appuyons cette fois ne correspond pas au t_{cpa} bruité comme dans le paragraphe précédent. Pour chaque capteur, l'observation correspondante est notée t_0, et est définie telle que :

$$t_0 = \inf\ \{t|\ x_t \geq x_c\}\ . \tag{3.21}$$

Nous connaissons la densité de cette observation, qui est :

$$f(t) \quad = \quad \frac{x_c - x_0}{\eta\sqrt{2\pi t^3}} exp\big[\frac{-(x_c - x_0 - t\ v)^2}{2\eta^2 t}\big]\ . \tag{3.22}$$

Une fois la densité obtenue, il suffit de maximiser la vraisemblance des observations par rapport au paramètre d'intérêt (ici la vitesse) pour obtenir l'estimation voulue. Toutefois il n'est pas toujours simple d'obtenir la vraisemblance de l'échantillon de façon explicite. Si nous calculons la vraisemblance du modèle avec une seule observation, nous obtenons alors :

$$\mathcal{L}(t_0, x_c, v) \quad = \quad \frac{x_c - x_0}{\eta\sqrt{2\pi t_0^3}} exp\big[\frac{-(x_c - x_0 - t_0\ v)^2}{2\eta^2 t_0}\big]\ . \tag{3.23}$$

L'estimateur du maximum du vraisemblance est alors calculable explicitement, et nous obtenons :

$$\hat{v}_{MV} \quad = \quad \frac{x_c - x_0}{t_0} \tag{3.24}$$

L'intérêt d'un tel estimateur est évidemment limité quand il se contente de prendre en compte une seule observation. Mais dans le cas qui nous intéresse, la maximisation de la vraisemblance n'est pas aussi aisée pour une observation que pour l'ensemble des observations. En effet, étant issue de la même trajectoire, les observations sont clairement corrélées. Nous ne pouvons donc écrire la vraisemblance comme le produit des densités. Nous pouvons toutefois remarquer que si nous disposions de plusieurs trajectoires, de paramètres supposés identiques, et que nous choisissions une observation par trajectoire, le problème ne se poserait pas et nous pourrions écrire la vraisemblance comme le produit des densités. La vraisemblance a donc pour expression :

$$\mathcal{L}((t_0^i, x_c^i)_{i\in[1,n]}, v) \quad = \quad \prod_{i=1}^{n} f\big((t_0^i, x_c^i), v\big)\ . \tag{3.25}$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance de la vitesse s'écrirait alors :

$$\hat{v}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_c^i - nx_0}{\sum_{i=1}^{n} t_0^i} . \tag{3.26}$$

Toutefois, nous supposons ici l'existence d'une seule cible, et donc d'une seule trajectoire. Les temps d'arrêt (ou de passage) sont donc corrélés, et l'expression de la vraisemblance est donc différente. Soit $(t_0^i, x_c^i)_{i\in[1,n]}$ l'ensemble des couples d'observation issues des capteurs 1 à n, où t_0 correspond à l'instant précédemment défini, et x_c au cpa du capteur. Si nous ordonnons ces observations de la plus ancienne à la plus récente (c'est à dire $t_0^{(i)} < t_0^{(i+1)}$) alors la famille des observations s'écrit $(t_0^{(i)}, x_c^{(i)})_{i\in[1,n]}$, et nous avons :

$$\mathcal{L}((t_0^{(i)}, x_c^{(i)})_{i\in[1,n]}, v) = \prod_{i=2}^{n} g\big(t_0^{(i)}, x_c^{(i)}, v|(t_0^{(j)})_{j<i}\big) \times g\big(t_0^{(1)}, x_c^{(1)}, v\big) \tag{3.27}$$

L'extraction d'un estimateur du maximum de vraisemblance explicite de cette expression est remarquablement compliqué.

3.4.2 Modélisation markovienne en temps discret

Il existe d'autres modélisations possible pour cette vitesse variant au cours du temps. La modélisation markovienne en temps discret en fait partie. Plutôt que de considérer un mouvement brownien avec dérive, nous allons étudier un modèle de chaînes de Markov hiérarchiques. Soit une chaine de Markov de N états définie pour la vitesse de la cible. En supposant que la vitesse est de dimension 1, cette chaine à une matrice de transition de taille $N \times N$. Puis, la chaine de Markov de la position de la cible est implicitement définie, comme nous pouvons l'observer sur la figure 3.2. Dans un premier temps, nous allons

FIGURE 3.2 – *Chaine de Markov hiérarchique entre la vitesse et la position de la cible*

devoir déterminer les meilleures probabilités de transition pour la chaine de vitesse. Ces probabilités devront être choisies de telle sorte que la loi stationnaire obtenue au final soit le plus proche possible d'une loi normale [2]. La moyenne de cette loi normale serait égale à la partie constante de la vitesse, que nous noterons dans le cas discret i_0. De façon plus précise, les probabilités sont définies de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll}
\text{si} & i = i_0 \\
& P(v_{n+1} = v^j | v_n = v^i) = \alpha_k \quad \text{pour } \mid i - j \mid = k \ , \\
\text{si} & i < i_0 \\
& P(v_{n+1} = v^j | v_n = v^i) = \beta_k \quad \text{pour } \mid j - (i+1) \mid = k \ , \\
\text{si} & i > i_0 \\
& P(v_{n+1} = v^j | v_n = v^i) = \gamma_k \quad \text{pour } \mid j - (i-1) \mid = k \ ,
\end{array}$$

où nous faisons les hypothèses suivantes :

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i = \sum \gamma_i = 1 \ , \tag{3.28}$$

2. Nous le voulons ainsi pour nous rapprocher le plus possible du modèle à temps continu.

et,

$$\forall (i,j) \in [0,k]^2, i > j \Rightarrow \begin{cases} \alpha_i & < & \alpha_j \\ \beta_i & < & \beta_j \\ \gamma_i & < & \gamma_j \end{cases}$$

La chaine de Markov des positions est donc déduite par le modèle hiérarchique, et nous avons :

$$P(s_{n+1} \in dx' | s_n = x, v_n = v^i) \quad = \quad \delta_{x+v^i\Delta}(dx') \ , \tag{3.29}$$

où dx' représente une zone de l'espace de déplacement de la cible, x une position de la cible, et Δ l'intervalle de temps considéré dans le modèle markovien présenté. Cela nous conduit à définir les probabilités de transition pour le couple position-vitesse par :

$$P(s_{n+1} \in dx', v_{n+1} = v^j | s_n = x, v_n = v^i) \quad = \quad \pi^{ij} \delta_{x+v^i\Delta}(dx') \ , \tag{3.30}$$

De même que dans l'équation 3.21, nous définissons une observation en temps discret de t_{cpa} par :

$$k_0 \quad = \quad \inf\{k | s_k > s_{\mathsf{cpa}}\} \ , \tag{3.31}$$

puis nous en déduisons l'estimateur de la vitesse :

$$\hat{v}_0 \quad = \quad \frac{s_{\mathsf{cpa}} - s_0}{k_0 \Delta} \tag{3.32}$$

3.5 Résultats de simulation

Nous allons à présent analyser (toujours par simulation) les résultats obtenus jusqu'à présent. Nous commencerons par présenter la maximisation de la vraisemblance, et nous comparerons deux types de topologie de réseaux. Puis nous insisterons plus sur les cibles non déterministes et les modélisations stochastiques proposées.

3.5.1 Maximum de vraisemblance classique

Afin d'analyser les effets de la topologie du réseau, nous testons deux scénarios. Dans le premier, les capteurs sont disposés de façon régulière et uniforme sur l'espace de surveillance. Dans le second scénario, les capteurs sont disposés de façon aléatoire (suivant une loi uniforme) sur cet espace. Puis, avec une cible se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme, nous étudions l'influence de la direction de la cible sur la vraisemblance de notre modèle et la variance de l'estimateur. Sur la figure 3.3, la loi de distribution

FIGURE 3.3 – *Réseau régulier*

de l'estimateur de la vitesse est présenté pour des angles de direction de 0 à 90 degré (parcours exhaustif de toutes les directions possibles), dans le cas du réseau régulier. Sur cette figure, nous pouvons remarquer que la distribution de maximum de probabilité le plus faible se situe aux alentours de l'angle 45 degré. Ce résultat est à comparer avec la

FIGURE 3.4 – *Réseau aléatoire*

figure 3.4 qui présente la même analyse dans le cas d'un réseau disposé aléatoirement. Après cette première observation, il semblerait préférable de composer son réseau de façon aléatoire, à moins d'avoir un fort a priori sur la direction de la cible. Ce résultat est également souligné par la figure 3.5 qui présente le maximum de vraisemblance lors de l'étape d'estimation. Enfin, venant complètement confirmer les résultats des précédentes

FIGURE 3.5 – *Maximum de la vraisemblance à gauche, variance des estimateurs à droite*

figures, l'analyse de la variance des estimateurs dans chacun des cas rend un verdict qui ne souffre aucune contestation. Avec 400% d'augmentation de la variance entre un angle de 0 degré et un angle de 45 degré pour le réseau régulier, et une variance constante pour le réseau aléatoire, la différence est évidente. Ainsi, la performance du maximum de vraisemblance est fortement dépendant de la topologie du réseau. Toutefois ce résultat est limité au cas des mouvements rectilignes uniformes, et ne semble pouvoir être étendu au cas d'une cible manœuvrante. De plus, comme précisé précédemment, le choix du réseau dépend ainsi de l'a priori que l'on a sur la trajectoire. Si la direction est connue, le choix se portera sur un réseau régulier. Sinon, un réseau aléatoire semblerait plus pertinent.

3.5.2 Diffusion à temps discrétisé

Enfin, nous regardons les résultats proposés par la modélisation discrète de la vitesse de la cible. Un unique résultat est proposé, mais il souligne la qualité de notre estimateur en temps discret. En effet, contrairement aux résultats précédents même la moyenne de l'estimateur semble correspondre à la vraie valeur du paramètre. Ce qui confirme le résultat avec le maximum de vraisemblance, et semblerait indiquer qu'une modélisation discrète plutôt que continue ne serait pas dénuée d'intérêt.

FIGURE 3.6 – *A gauche : Distribution de l'estimateur de n_0 (t_{cpa} en temps discrétisé). A droite : Distribution a posteriori de la vitesse. Paramètres du modèle : $v = 3$, $N_v = 5$, $N_c = 50$*

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons décidé de nous concentrer sur l'information fournie par le t_{cpa} dans un réseau de capteurs. Trois modèles de déplacement ont été étudiés, du mouvement rectiligne uniforme au déplacement diffus discrétisé. La relative pauvreté de l'information disponible nous a vite montré les limitations pour l'estimation des paramètres d'intérêt, et nous avons dû faire un choix à cause du problème d'observabilité, même si l'incertitude incompressible sur la position initiale de la cible peut être levée à l'aide de capteurs de proximité. Un réseau très dense ne suffirait pas à résoudre ce problème, l'information proposée doit différer.
La deuxième partie de ce chapitre a été consacrée à l'estimation des t_{cpa} lorsque la trajectoire est modélisée par un processus de diffusion unidimensionnel. Dans le cas continu,

nous avons réussi à déterminer une expression explicite de l'estimateur du maximum de vraisemblance, mais dans un cas bien spécifique que nous avons précisé. Ce que nous n'avons pu faire dans le cas discrétisé. La pertinence des estimateurs proposés est soulignée par les résultats de simulation, et il ne fait nul doute qu'une comparaison entre le modèle discret et le modèle continu serait très intéressante à mener.
Si l'on se rappelle d'où est extraite l'information des t_{cpa}, il pourrait être intéressant de s'attacher à établir la pertinence de cette modélisation. En effet, l'utilisation des données binaires [ABC$^+$05] brutes ne permettraient elles pas d'avoir les mêmes résultats ? C'est la question à laquelle nous allons tacher de répondre dans le chapitre 5.

CHAPITRE 4

SUIVI D'UNE CIBLE MANŒUVRANTE À L'AIDE DES t_{cpa}

4.1 Introduction

Les résultats obtenus dans le chapitre précédent traitaient exclusivement du cas d'une cible se déplaçant en mouvement rectiligne. Nous pouvons nous demander quelle extension est envisageable si nous nous intéressons désormais à une cible manœuvrante. Nous entendons par cible manœuvrante une cible qui, dans un premier temps, se déplacerait suivant une trajectoire en mouvement rectiligne uniforme par morceau. Autrement dit, entre chaque manœuvre, ou virage, la trajectoire obéit aux contraintes du MRU. La notion de manœuvre que nous introduisons nous permet de nous rapprocher clairement de la vérité terrain, mais présente son lot d'inconvénients. Si nous supposons l'existence de telles manœuvres, cela signifie que nous introduisons k paramètres supplémentaires dans notre modèle[1] ou k représente le nombre de manœuvres. Nous proposons donc une analyse en deux étapes de notre problème. Dans un premier temps, nous considérerons connus les instants de manœuvre, avant de terminer par des méthodes d'estimation desdits instants.

4.2 Une seule manœuvre, à un instant connu

4.2.1 Modélisation

Or donc, on suppose que l'on cherche à suivre une cible manœuvrante. Cette manœuvre aura pour effet sur la trajectoire un changement de direction, ainsi qu'éventuellement une variation de la vitesse. La trajectoire que nous cherchons donc à estimer ressemble à un simple coude. Pour estimer tous les paramètres de cette trajectoire, il nous faut donc déterminer de façon précise les deux vecteurs vitesses, chacun correspondant à une "jambe" de la trajectoire. Puis, déterminer si possible $\mathbf{x}_0$, ou, à défaut, la position du changement de trajectoire. La figure 4.1 permet d'illustrer la situation. Nous remarquons également que contrairement à l'étude du cas MRU, le changement de direction peut sans doute permettre la détermination de la position exacte de la trajectoire. En effet,

1. En fait, il y en a même $3k$ supplémentaires si l'on considère comme nouveau paramètre le vecteur vitesse après chaque manœuvre

FIGURE 4.1 – *Cible manœuvrante : un changement de trajectoire effectué*

d'après le paragraphe précédent, toutes les trajectoires rectilignes parallèles sont susceptibles de correspondre à la bonne trajectoire pour la première jambe. De la même façon, nous obtenons des trajectoires parallèles pour la deuxième jambe [2]. Puis, étant donné que nous avons estimé la vitesse des cibles sur chacune des jambes, et que nous connaissons l'instant auquel intervient le changement de trajectoire, nous pouvons estimer la distance parcourue par la cible entre le passage à la verticale du dernier capteur, et la distance parcourue par cette même cible jusqu'au premier capteur de la deuxième jambe. Autrement dit, en prenant en compte la continuité de la trajectoire, nous nous retrouvons avec un seul point de croisement possible. Celui-ci détermine du même coup les positions exactes des deux jambes.
Mathématiquement, cela se formule ainsi, pour la première jambe :

$$\begin{aligned} t_{\mathsf{cpa}}^{i_1} &= -\frac{\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_1^2} \,, \\ &= t_{\mathsf{cpa}}^{ref} + \frac{\langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_1^2} \,. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pour la deuxième jambe, connaissant $\mathbf{v_1}$ et τ, l'instant du changement de direction, nous avons :

$$\begin{aligned} t_{\mathsf{cpa}}^{i_2} &= -\frac{\langle \mathbf{x}_0 - \tau \mathbf{v}_1 - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_2 \rangle}{v_2^2} \,, \\ &= t_{\mathsf{cpa}}^{ref} + \frac{\langle \tau \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_2 \rangle}{v_2^2} \,. \end{aligned} \tag{4.2}$$

4.2.2 Identifiabilité

Nous sommes donc dans le cas d'une cible manœuvrante. Dans le cas où il n'y aurait qu'une seule manœuvre, nous avons dans le cas de deux trajectoires indistinguables :

$$\begin{cases} \mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t_1 \, \mathbf{v}_x^1 + (t - t_1) \, \mathbf{v}_x^2 \,, \\ \mathbf{y}_t = \mathbf{y}_0 + t_1^{'} \, \mathbf{v}_y^1 + (t - t_1^{'}) \, \mathbf{v}_y^2 \,, \end{cases} \tag{4.3}$$

où $\mathbf{v}_x^i$ est la vitesse de la trajectoire $\mathbf{x}(t)$ sur la i-ème jambe, et t_i l'instant de manœuvre. Par ailleurs, supposons que $t_1 < t_1^{'}$. Alors, d'après les résultats de la proposition 5.3, à la fois pour $t < t_1$ et $t > t_1^{'}$, nous savons que si les trajectoires sont indistinguables, nous avons :

$$\mathbf{v}_x^1 = \mathbf{v}_y^1 \;\text{ et :}\; \mathbf{v}_x^2 = \mathbf{v}_y^2 \,. \tag{4.4}$$

Montrons alors que $t_1 = t_1^{'}$. D'après la proposition 5.3, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + (t - t_1) \, \left(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right), \mathbf{v}_x^1 \rangle = 0 & \text{pour :} \quad t_1 < t < t_1^{'} \quad (a), \\ \langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + (t - t_1) \, \left(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right), \mathbf{v}_x^2 \rangle = 0 & \text{pour :} \quad t_1 < t < t_1^{'} \quad (b), \\ \langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 + (t_1^{'} - t_1) \, \left(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right), \mathbf{v}_x^2 \rangle = 0 & \text{pour :} \quad t_1^{'} < t \quad (c) \,. \end{cases} \tag{4.5}$$

2. A ce point là, il faut rappeler que nous ne faisons pas d'estimation en temps réel, mais bien une fois que toutes les données sont collectées

Dès lors, avant la première manœuvre nous avons $\langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_x^1 \rangle = 0$ tel que les équations 4.5a,b nous donnent :

$$\langle \left(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right), \mathbf{v}_x^1 \rangle = \langle \left(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2\right), \mathbf{v}_x^1 \rangle = 0 \ . \tag{4.6}$$

Cela signifie tout simplement que $\mathbf{v}_x^1$ et $\mathbf{v}_x^2$ sont tous les deux orthogonaux au même vecteur $(\mathbf{v}_x^1 - \mathbf{v}_x^2)$, donc qu'ils sont colinéaires. Et nous déduisons ensuite grâce à l'équation 4.6 que $\mathbf{v}_x^1 = \mathbf{v}_x^2$. Ainsi, nous avons bien $t_1 = t_1^{'}$. Ce raisonnement peut par ailleurs être étendu aux dimensions supérieures. L'observabilité du système ayant été établie, nous pouvons désormais nous concentrer sur le moyen d'estimer les paramètres d'intérêt.

4.2.3 Résolution

Puisque nous avons deux vecteurs vitesses différents, et que nous connaissons l'instant auquel le changement intervient, nous pouvons séparer l'échantillon de données en deux parties. Les valeurs obtenues avant l'instant de manœuvre serviront à l'estimation du premier vecteur vitesse, tandis que les suivantes serviront à l'estimation du deuxième. Par maximisation des vraisemblances, comme dans le chapitre précédent, nous pouvons donc déterminer des estimateurs des vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. Suite à cela, en manipulant les expressions ci-dessus, nous pouvons obtenir les projections de $\mathbf{x}_0$ suivant les vecteurs unitaires de direction $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$. En effet :

$$t_{\mathsf{cpa}}^{i_1} \quad = \quad -\frac{\langle \mathbf{x}_0 - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_1^2} \tag{4.7}$$

nous conduit à :

$$t_{\mathsf{cpa}}^{i_1} - \frac{\langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_1^2} \quad = \quad -\frac{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_1 \rangle}{v_1^2} \tag{4.8}$$

Et de la même façon :

$$t_{\mathsf{cpa}}^{i_2} \quad = \quad -\frac{\langle \mathbf{x}_0 - \tau \mathbf{v}_1 - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_2 \rangle}{v_2^2} \tag{4.9}$$

nous conduit à :

$$t_{\mathsf{cpa}}^{i_2} - \frac{\langle \tau \mathbf{v}_1 + \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_2 \rangle}{v_2^2} \quad = \quad -\frac{\langle \mathbf{x}_0, \mathbf{v}_2 \rangle}{v_2^2} \tag{4.10}$$

Et ainsi, si l'on suppose que les vitesses $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$ ne sont pas colinéaires, nous pouvons déterminer de façon unique le vecteur $\mathbf{x}_0$ grâce aux projections de celui ci sur les vecteurs vitesses estimé. Bien entendu, cela part de l'hypothèse où l'on connaît l'instant de manœuvre τ. Si celui-ci demeure inconnu, des méthodes de détermination doivent être mises en œuvre. C'est l'objet du prochain paragraphe.

4.3 Problème de la détermination de l'instant de manœuvre

4.3.1 Introduction

La section précédente nous montre l'importance de connaître l'instant du changement de vitesse. En fait, nous avons deux connaissances a priori qui sont plutôt fortes. La première concerne le nombre de changement de direction, que nous supposons égal à un dans un premier temps. Le deuxième concerne le moment auquel intervient ce changement de direction.

4.3.2 Les solutions empiriques envisageables

4.3.2.1 Au niveau des capteurs

Une des propriété que l'on a immédiatement avec l'hypothèse d'un mouvement rectiligne uniforme est que pour chaque capteur (si celui-ci est un capteur directionnel), il existe au plus un changement de signe au cours du suivi. En effet, une cible qui s'éloigne continuera de s'éloigner, et une cible qui s'approche finira par s'éloigner. Mais l'inverse ne peut se produire. Dès lors, si pour l'un des capteurs un deuxième changement de signe intervient, nous sommes en présence d'un changement de trajectoire. Bien évidemment, il ne s'agit pas d'une bijection, vu qu'un changement de trajectoire n'induit pas forcément un deuxième changement de signe. Ceci suppose bien entendu que les capteurs ne fournissent pas d'information erronée. Ou alors, que cette erreur est aisément détectable. Le problème de cette méthode est que si le changement de trajectoire se fait sans que les capteurs ne puissent être affectés (voir fig. 4.2) alors, l'instant de changement de trajectoire ne peut être déterminé. De plus, la détermination de cet instant est complètement

FIGURE 4.2 – *Variation légère de la trajectoire*

assujetti à la fréquence d'acquisition des informations binaires. Si cette fréquence est trop faible, alors nous n'aurons qu'un intervalle temporel pour cet instant de manœuvre.

4.3.2.2 Changement de la vitesse

La deuxième méthode, la plus intuitive peut être, serait d'estimer le vecteur vitesse sur les premiers instants de la trajectoire. Ensuite, sur les instants suivants, dès que cette vitesse apparaît significativement différente, choisir comme instant de changement l'instant précédant la variation. Il s'agit d'une méthode qui permet de traiter le cas "temps réel". Toutefois, il ne s'agit pas de notre principal intérêt, et cette méthode souffre du problème très commun en statistique de la définition d'un seuil "significatif".

4.3.3 Les solutions d'estimation statistiques

Le problème des méthodes décrites dans les paragraphes précédents est qu'elles ne nous donnent qu'une valeur empirique de cet instant de variation. Nous ne connaissons pas l'erreur que nous faisons sur cette valeur. Nous aimerions la connaître, afin de pouvoir répercuter cette erreur sur les estimations de la vitesse. De plus, la dernière méthode proposée suppose que nous calculons l'estimation du premier vecteur vitesse sur une

durée suffisamment longue pour avoir des variances d'estimateurs faibles, et dès lors une détection suffisamment précise des variations. Le problème est que comme nous ne connaissons pas l'instant de changement, comment savoir sur combien de mesures nous pouvons estimer le vecteur vitesse ?
Supposons dans un premier temps que nous possédons les mesures de toute la trajectoire (les mesures binaires et les τ_{CPA}). Nous devons extraire deux vecteurs vitesses et leur distributions d'un ensemble de mesures. Avec une hypothèse de continuité, non pas des vecteurs vitesses, mais de la trajectoire physique de la cible.

4.3.3.1 Loi du temps de parcours

Le problème pour l'utilisation de la vitesse pour déterminer l'instant de changement de trajectoire, est que cette vitesse est le résultat d'une estimation, et que nous ne connaissons pas de façon explicite la fonction d'estimation. Dès lors, nous ne connaissons pas la loi de distribution pour cet estimateur, et nous ne pouvons ainsi par faire de test statistique paramétrique sur le changement de trajectoire.
La solution que nous préconisons est la suivante. Au lieu de considérer chaque capteur individuellement, considérons les capteurs par paire. Ainsi, si chaque paire de capteurs est orientée de la même façon, de distance égale, la différence des τ_{CPA} devra être la même, pour chaque paire identique, à vitesse constante. Les erreurs sur les τ_{CPA} étant considérées normales, les différences devront elles aussi suivre une loi normale, et le test statistique que l'on peut alors faire porte sur sur la différence des différences de temps.

4.3.3.2 Formalisation

A chaque capteur c_i est associé un vecteur de position $\vec{t_i}$. On suppose un réseau de capteurs régulier. Soit la paire de capteurs $c_1 - c_2$. Elle est caractérisée par un vecteur $\vec{t_2} - \vec{t_1}$. On constitue toutes les paires ayant le même vecteur caractéristique. On en suppose n_1. On choisit maintenant une autre paire de capteurs, dont le vecteur caractéristique est non-colinéaire au premier vecteur défini. De la même façon, on constitue les paires de même vecteur. On en suppose n_2. On cherche donc à séparer chacun de ces deux échantillons en deux parties, l'une ayant pour paramètre une vitesse v_1 et l'autre une vitesse v_2.

4.3.3.3 Séparation des échantillons

Le problème revient à estimer les paramètres d'une loi mélange, qui sont les moyennes, les variances, et finalement le nombre d'observations de chaque loi. Plusieurs méthodes existent, dont voici une liste non-exhaustive :

- Méthode des moments
  En exprimant la vraisemblance des observations, nous pouvons déterminer les moments théoriques de l'échantillon. Et, à partir des données, nous pouvons calculer les moments empiriques. Cela nous permet ainsi, à travers un système non-linéaire, de déterminer les paramètres inconnus de notre vraisemblance. Ainsi, nous utilisons les équations suivantes, ou M_i représente le moment d'ordre i, et $x_i = m_i - M_1$:

$$
\begin{aligned}
0 &= px_1 + (1-p)x_2 && (4.11)\\
M_2 &= px_1^2 + (1-p)x_2^2 + \sigma^2 && (4.12)\\
M_3 &= px_1^3 + (1-p)x_2^3 + 3\sigma^2(px_1 + (1-p)x_2) && (4.13)\\
M_4 &= px_1^4 + (1-p)x_2^4 + 6\sigma^2(px_1^2 + (1-p)x_2^2) + 3\sigma^4 && (4.14)
\end{aligned}
$$

En résolvant ce système non-linéaire nous obtenons les paramètres voulus.

- Maximum de vraisemblance
  La classique méthode du maximum de vraisemblance permet également d'obtenir des estimées, même si pour cela nous devons utiliser des méthodes d'optimisation un peu plus complexes. Parmi ces méthodes, nous citerons l'algorithme EM. Cet algorithme espérance-maximisation (en anglais Expectation-Maximisation algorithm, souvent abrégé EM), proposé par Dempster et al. (1977), est une classe d'algorithmes qui permettent de trouver le maximum de vraisemblance des paramètres de modèles probabilistes lorsque le modèle dépend de variables latentes non observables.
- Méthodes diverses
  Plusieurs méthodes ont été proposées pour résoudre le cas d'une loi mélange, notamment des méthodes graphiques, par Harding [Har81], Cassie [Cas54] ou encore Bhattacharya [Bha67].

4.4 Extension à plusieurs changements de direction

Le raisonnement mené jusqu'à présent, ainsi que les méthodes proposées pour estimer les paramètres d'intérêts se sont limitées au cas d'un seul changement de direction. Toutefois, il est tout à fait possible d'étendre les méthodes proposées à un nombre quelconque de manœuvres. Les seules limitations qui seront alors à considérer seront d'ordre statistique puisqu'il faudra quand même une quantité suffisante de données pour obtenir une estimation satisfaisante.

4.5 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre (quoiqu'avec très peu d'équations) qu'il était possible de suivre une cible manœuvrante à l'aide des informations de plus grande proximité. Toutefois, il convient de remarquer que cette information de plus grande proximité ne provient pas de n'importe quelle source d'information. Il est important de noter que les capteurs binaires directionnels peuvent nous fournir cette information sous réserve d'une fréquence d'acquisition suffisamment élevée[3]. Par ailleurs, nous noterons qu'en ouvrant la possibilité à la cible de manœuvrer, nous nous rapprochons de la liberté totale de mouvement de la cible. En effet, si dans un premier temps nous avons limité l'approche à une seule manœuvre, nous avons vu que l'extension ne posait pas de souci, et

3. Je laisserai aux experts de traitement du signal (dont je ne fais pas partie) le soin de définir précisement cette notion de suffisamment élevée

une grande quantité de manœuvres conduit une cible où elle le souhaite. Les hypothèses de MRU, même par morceau, commencent à devenir caduques.

Conclusion

Nous avons vu dans cette deuxième partie quelles limitations provoquaient la réduction de l'information de position. En démontrant l'impossibilité d'estimer la position exacte de la cible, nous avons également mis en avant les solutions envisageables pour réduire l'incertitude. Par ailleurs, l'estimation du vecteur vitesse ne posant aucun problème, le suivi de la cible peut malgré tout s'effectuer. Le cas d'une cible en mouvement rectiligne uniforme semble le plus simple, puisque la dimension du vecteur à estimer est réduite à sa plus simple expression. Toutefois, l'information fournie par le réseau ne permet l'identification que de trois des quatre paramètres. En nous concentrant sur l'estimation du vecteur vitesse, nous avons montré que les méthodes de maximisation de la vraisemblance étaient efficace dans notre situation. Par ailleurs, la modélisation du déplacement à l'aide d'un modèle de diffusion nous a permis de développer un estimateur de l'instant de plus grande proximité et d'étudier ses spécificités. Les résultats de simulation présentés en fin de chapitre corroborent la sensation de pertinence des estimateurs proposés. Le problème de la dimension des données nous a conduit à envisager des solutions pour résoudre cette incertitude sur la position. De plus, il nous a semblé naturel de permettre à la cible d'évoluer de façon plus libre au sein de la zone surveillée. Nous avons donc autorisé dans un premier temps la cible à effectuer une manœuvre. L'existence de celle-ci augmente naturellement la dimension du vecteur d'état inconnu. Désormais, est inconnu le vecteur vitesse après la manœuvre. Toutefois, deux cas se présentent. Si l'instant de manœuvre est connu, alors non seulement nous pouvons estimer les deux vecteurs vitesse par maximisation de la vraisemblance, mais nous pouvons également estimer la position, puisque nous gagnons une dimension d'information avec l'instant de manœuvre [4]. Si l'instant de manœuvre est inconnu, nous avons proposé une méthode pour estimer les deux vecteurs vitesse en dépit de cette ignorance. L'estimation de l'instant est lié à la position initial de la cible donc relève d'une dimension supérieure d'information.

4. bien évidemment, si les deux vecteurs sont colinéaires, aucune information supplémentaire n'est apportée et l'incertitude reste la même

Troisième partie

Capteurs Binaires Directionnels

"Qu'importe l'issue du chemin quand seul compte le chemin parcouru.."

David Le Breton

Introduction

Cette troisième et dernière partie du manuscrit concerne l'information la plus frustre que l'on puisse recevoir d'un capteur. En effet, nous allons traiter des capteurs fournissant une information binaire. Celle-ci peut être de plusieurs types. Ainsi, de nombreux travaux ont étudié le suivi d'une cible par des capteurs de proximité. L'information binaire fournie alors par chaque capteur consiste simplement en un 'bit' d'information précisant si la cible est 'à proximité' du capteur ou non. A partir de là, et en utilisant au mieux les propriétés du réseau de capteurs, des algorithmes de suivi ont été développés. Toutefois, un capteur binaire peut également être de type différent. Nous avons décidé de nous concentrer sur des capteurs (binaires) directionnels. Ces capteurs nous fournissent l'information selon laquelle la cible s'approche ou s'éloigne dudit capteur. Très peu de travaux font état d'une tentative de suivi de cible à l'aide d'un tel réseau. En effet, l'information binaire extraite des capteurs est très frustre, et les travaux de bases démontrent que seule la direction générale peut être extraite [5]. Nous allons justement nous appuyer sur cette direction générale afin de développer un algorithme de suivi dont les performances seront présentées à l'aide de résultats de simulation.

Cette troisième partie s'organise de la façon suivante :

- dans le **chapitre 5** nous utilisons les données binaires pour estimer la trajectoire d'une cible évoluant en mouvement rectiligne uniforme. Nous proposons deux méthodes d'estimation et nous effectuons les comparaisons entre les résultats obtenus ;

- le **chapitre 6** est l'occasion de libérer la cible de la contrainte de mouvement rectiligne uniforme. Dans ce chapitre nous présentons un nouvel algorithme de suivi de cible. Nous présentons les résultats de simulation des performances de cet algorithme en fin de chapitre ;

- enfin, dans le **chapitre 7** nous proposons une extension de nos travaux au suivi multicible à l'aide d'un réseau de capteurs binaires. Nous utilisons des méthodes issues du traitement de l'image et de l'optimisation combinatoire pour proposer une solution théorique à ce problème.

5. Il faut toutefois noter que plus le nombre de capteurs est important dans le réseau, plus l'estimation de la direction générale de la cible devient précise.

CHAPITRE 5

SUIVI D'UNE CIBLE EN MOUVEMENT RECTILIGNE UNIFORME DANS UN RÉSEAU DE CAPTEURS BINAIRES

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons toujours un réseau de capteurs, constitué de N capteurs de positions connues. Chaque capteur nous fournit une information binaire de la forme $\{-,+\}$ [ABC+05], c'est à dire $(+)$ si la distance entre le capteur et la cible augmente, et $(-)$ sinon. La forme réduite de cette information permet notamment de ne pas avoir de problème trop important avec la transmission des informations, étant donné la faible taille de l'information traitée, et permet également de régler les problèmes de fusion de données non-homogènes. De nombreux travaux ont été menés pour le traitement des informations binaires, mais essentiellement dans le cas des capteurs de proximité [WM06], [LPR07]. La relative pauvreté des études menées dans le cas des capteurs de direction nous a mené a nous intéresser de plus près à cette problématique. Nous avons notamment cherché à contourner la principale difficulté de ce type de capteurs, qui est l'impossibilité théorique d'estimer vitesse et position avec ces seules informations [ABC+05]. Dans ce chapitre nous allons chercher à estimer le mieux possible les paramètres définissant la trajectoire de la cible. Même si notre méthode peut être adaptée pour l'étude de mouvements de cibles plus complexes, nous nous attachons dans un premier temps à l'estimation d'un mouvement rectiligne uniforme. En fait, cette première approche permettra d'introduire de façon aisée la complexité du problème auquel nous devons faire face, ainsi que justifier pleinement les méthodes que nous avons été amenés à utiliser (ou à développer) pour le traitement de ce type d'information binaire. La figure 5.1 représente un exemple imagé du type de donnée brute avant traitement par le capteur. Après traitement, le capteur devrait transmettre l'information $(+)$.

FIGURE 5.1 – *Vue par caméra d'une voiture se rapprochant. A gauche, la voiture est plus loin, donc a priori plus petite. A droite, la voiture s'est rapprochée. Toutefois, il n'est pas toujours aussi aisé de déterminer si l'objet d'intérêt s'approche ou s'éloigne.*

Dans un premier temps, nous allons considérer l'observabilité du système. Puis, nous

expliciterons les méthodes d'estimation spécifiques que nous avons dû développer. En particulier, nous introduirons le concept de plan-vitesse en tant que représentation spatio-temporelle des données binaires. Nous verrons par la suite qu'en appliquant des méthodes de classification (SVM, *Support Vector Machine*, que nous dénommerons Séparateurs à Vastes Marges ci-après) ou de régression (PPR, *Projection Pursuit Regression*, dénommée Régression à Direction Révélatrice par la suite) particulière, nous sommes capables d'estimer correctement les paramètres de la trajectoire. Enfin, nous présentons des résultats de simulation des estimations à l'aide des méthodes précédemment décrites.

5.2 Observabilité et propriétés du réseau de capteurs binaires

Soit s_i un capteur dont la position est notée $\mathbf{t}_i$. Le vecteur $\mathbf{x}_t$ représente le vecteur de position de la cible à l'instant t. Soit $d_i(t)$ la distance (dépendant du temps) entre le capteur s_i et la cible à ce même instant t. Alors, nous avons :

$$d_i(t) \searrow \Longleftrightarrow \dot{d}_i(t) < 0 \text{ , ou : } \langle \mathbf{x}_t - \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_t \rangle < 0 \text{ ,} \tag{5.1}$$

où le vecteur $\mathbf{v}_t$ correspond au vecteur de la vitesse instantanée de la cible. Les lemmes et propositions suivants sont repris de [ABC+05]. Toutefois, nous les présentons car ils sont fondamentaux pour la compréhension de cette partie, et que nous les avons démontrés de façons plus simple que dans l'article fondateur.

Lemme 5.1 *Soit s_i (respectivement s_j) un capteur dont la cible se rapproche (respectivement s'éloigne) à l'instant t. Alors, nous pouvons écrire :*

$$\langle \mathbf{t}_j, \mathbf{v}_t \rangle \ < \ \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle \ < \ \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_t \rangle \ . \tag{5.2}$$

Si nous nous restreignons à l'information binaire du mouvement, nous pouvons re-écrire l'information suivant une convention différente, c'est à dire $+1$ ou -1 si la distance $d_i(t)$ se réduit ou augmente, de telle sorte que :

$$\begin{cases} s_i(t) = +1 \ \text{ si } \ \dot{d}_i(t) < 0 \ , \\ s_j(t) = -1 \ \text{ si } \ \dot{d}_j(t) > 0 \ . \end{cases} \tag{5.3}$$

Soit A le sous-ensemble de capteurs dont l'information correspond à $+1$ et B le sous-ensemble correspondant à l'information -1. Alors, $A = \{\mathsf{s}_i | \ s_i(t) = +1\}$ et $B = \{\mathsf{s}_j | \ s_j(t) = -1\}$, $C(A)$ et $C(B)$ sont leurs enveloppes convexes respectives, et nous avons la proposition suivante :

Proposition 5.2 $C(A) \bigcap C(B) = \emptyset$ *and* $\mathbf{x}_t \notin C(A) \bigcup C(B)$.

Démonstration : La preuve est relativement simple, et n'est reproduite ici que dans un souci d'exhaustivité. Tout d'abord, supposons que $C(A) \bigcap C(B) \neq \emptyset$. Cela suppose qu'il existe au moins un élément de $C(B)$ qui appartiendrait également à $C(A)$. Notons s

cet élément (et $\mathbf{t}$ sa position associée). Alors, nous avons ($\mathbf{t} \in C(B)$) :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t} = \sum_{j\in B} \beta_j \ \mathbf{t}_j \ , \ \beta_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j\in B} \beta_j = 1 \\
&\text{nous avons donc d'une part :} \\
&\langle \mathbf{t}, \mathbf{v}_t \rangle = \sum_{j\in B} \beta_j \ \langle \mathbf{t}_j, \mathbf{v}_t \rangle \ < \ \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle \ \text{ (voir l'équation 5.2)}, \\
&\text{et d'autre part } (\mathbf{t} \in C(A)) : \\
&\langle \mathbf{t}, \mathbf{v}_t \rangle = \sum_{i\in A} \alpha_i \ \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_t \rangle \ \geq \left(\sum_{i\in A} \alpha_i \right) \ \min_i \ \{ \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}(t) \rangle \} > \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle \ .
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Il s'agit clairement d'un contradiction, et ainsi $C(A) \bigcap C(B) = \emptyset$. Pour la deuxième partie, nous supposerons simplement que $\mathbf{x}(t) \in C(A)$ ($\mathbf{x}_t = \sum_{i\in A} \alpha_i \ \mathbf{t}_i, \ \alpha_i \geq 0$), et alors :

$$\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle = \sum_{i\in A} \alpha_i \ \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_t \rangle \geq \min_{i\in A} \langle \mathbf{t}_i, \mathbf{v}_t \rangle, \tag{5.5}$$

qui apparait également comme une contradiction, de même si $\mathbf{x}(t) \in C(B)$.
□□□

$C(A)$ et $C(B)$ étant deux espaces convexes disjoints, nous savons dès lors qu'il existe au moins un hyperplan (dans notre cas à deux dimensions il s'agit donc d'une droite) séparateur de ces deux espaces. Soit s_k un capteur quelconque du réseau, nous pouvons écrire $\mathbf{t}_k = \lambda \ \mathbf{v}_t + \mu \ \mathbf{v}_t^{\perp}$ de telle sorte que :

$$\langle \mathbf{t}_k, \mathbf{v}_t \rangle = \lambda \left\| \mathbf{v}_t \right\|^2 > 0 \Longleftrightarrow \lambda > 0 \ . \tag{5.6}$$

Cela signifie tout simplement que la droite générée par le vecteur $\mathbf{v}_t^{\perp}$ sépare les deux espaces $C(A)$ et $C(B)$. Sans prendre en compte la translation, et en transposant encore dans la base $\left\{ \mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t^{\perp} \right\}$, nous avons :

$$\begin{cases} \mathbf{t}_k \in A \Longleftrightarrow \lambda \left\| \mathbf{v}_t \right\|^2 > \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle \ , \\ \mathbf{t}_k \in B \Longleftrightarrow \lambda \left\| \mathbf{v}_t \right\|^2 < \langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle \ . \end{cases} \tag{5.7}$$

Dès lors, dans la base $(\mathbf{v}_t, \mathbf{v}_t^{\perp})$, la droite passant par le point $\left(\frac{\langle \mathbf{x}_t, \mathbf{v}_t \rangle}{\left\| \mathbf{v}_t \right\|^2}, 0 \right)$ et de direction $\mathbf{v}_t^{\perp}$ sépare $C(A)$ et $C(B)$.
Etudions maintenant les conditions d'indistinguabilité de deux trajectoires. Deux trajectoires sont dites indistinguables lorsque les données du réseau de capteur sont identiques dans les deux cas. Nous en déduisons donc la proposition suivante :

Proposition 5.3 *Deux trajectoires (respectivement $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{y}_t$) sont indistinguables pour tous les capteurs binaires dans le plan si et seulement si les conditions suivantes sont respectées :*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}_t = \lambda_t \ \dot{\mathbf{x}}_t \ \ (\lambda_t > 0) \ \ \forall t \ , \\ \langle \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle = 0 \ \ \forall t \ . \end{cases} \tag{5.8}$$

Démonstration : Etudions tout d'abord les implications de l'indistinguabilité. Deux trajectoires ne peuvent être différenciées si et seulement si la condition suivante est respectée :

$$\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \leq 0 \Longleftrightarrow \langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle \leq 0 \;\; \forall t \;\; \forall (\mathbf{t}_i, \mathbf{t}_j) \; . \tag{5.9}$$

Nous choisissons alors $\mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i = \alpha \; \dot{\mathbf{x}}_t^{\perp}$ (c'est à dire que les capteurs i et j appartiennent tous les deux à une droite séparant les espaces A et B) et en choisissant la décomposition du vecteur $\dot{\mathbf{y}}_t$ suivante,

$$\dot{\mathbf{y}}_t = \lambda_t \; \dot{\mathbf{x}}_t + \mu_t \; \dot{\mathbf{x}}_t^{\perp} \; ,$$

nous avons :

$$\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = \alpha \mu_t \; \|\dot{\mathbf{x}}_t^{\perp}\|^2 \leq 0 \; . \tag{5.10}$$

Etant donné que le scalaire α est à notre entière discrétion, il est tout à fait possible de le choisir du même signe que μ_t. Dès lors, ce scalaire μ_t est nécessairement égal à 0. En conséquence, si les trajectoires $\mathbf{x}_t$ et $\mathbf{y}_t$ sont indistinguables, nous avons obligatoirement :

$$\dot{\mathbf{y}}_t = \lambda_t \; \dot{\mathbf{x}}_t \; , \; \forall t \; .$$

De plus, le scalaire λ_t est forcément positif (voir l'équation 5.9). Puis, l'inégalité du Lemme 5.1 nous donne :

$$\langle \mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \; < \; \langle \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \; < \; \langle \mathbf{t}_i - \mathbf{t}_j, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \; . \tag{5.11}$$

Avec le même choix que précédemment ($\mathbf{t}_j - \mathbf{t}_i = \alpha \; \dot{\mathbf{x}}_t^{\perp}$), nous déduisons de l'équation 5.11 la deuxième partie de la proposition 5.3, c'est à dire $\langle \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle = 0 \;\; \forall t$. Puis en considérant la distance entre deux trajectoires indistinguables, nous avons ($\dot{\mathbf{y}}_t = \lambda_t \; \dot{\mathbf{x}}_t$) :

$$\frac{d}{dt} \; \|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t\|^2 = 2 \; \langle \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{x}}_t - \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = 0 \; , \tag{5.12}$$

tel que $\|\mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t\| = \mathsf{cst}$.
Réciproquement, en supposant que les deux conditions $\dot{\mathbf{y}}_t = \lambda_t \; \dot{\mathbf{x}}_t$ et $\langle \mathbf{x}_t - \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle = 0$ sont respectées $\forall t$, les deux trajectoires sont elles indistinguables ? Il suffit pour répondre à cette question de remarquer que :

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{y}_t, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = \langle \mathbf{x}_t + (\mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t), \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = \langle \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = \lambda_t \; \langle \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \; , \\ &\langle \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = \lambda_t \; \langle \mathbf{t}_i, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle \; . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Et le fait que le scalaire λ_t soit positif achève la démonstration.
□□□

Déduisons les applications pratiques du résultat démontré.

Mouvement rectiligne uniforme

Si l'on suppose que le mouvement des cibles est rectiligne uniforme (c'est à dire $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t \; \dot{\mathbf{x}}$), nous pouvons appliquer la proposition 5.3 qui nous donne $\dot{\mathbf{y}} = \lambda \; \dot{\mathbf{x}} \;\; (\lambda > 0)$ et :

$$\langle \mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}} \rangle = \langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}} \rangle + t \; (1 - \lambda) \; \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = 0 \; \forall t \; . \tag{5.14}$$

Puis de l'équation 5.14 nous déduisons que $\lambda = 1$ et $\mathbf{y}_0 = \mathbf{x}_0 + \alpha \; \dot{\mathbf{x}}^{\perp}$. Ainsi, la vitesse de la cible est complètement observable tandis que la position exacte de la cible ne peut être déterminée que modulo une translation par rapport à $\alpha \; \dot{\mathbf{x}}^{\perp}$.

5.3 La fonctionnelle escalier

Notre but premier est d'estimer la vitesse le plus précisemment possible, étant donné qu'il s'agit du seul paramètre complètement observable. Nous supposons toujours que N capteurs binaires sont répartis aléatoirement sur l'espace d'intérêt (voir la figure 5.2).

FIGURE 5.2 – *Cette figure décrit un scénario de trajectoire en MRU d'une cible et de l'information fournie par les capteurs binaires au long de l'évolution.*

Chaque capteur est couplé avec un compteur, qui augmentera d'une unité chaque fois que la cible sera déclarée s'approchant, et conservera la valeur précédente si la cible est estimée s'éloignant. A la fin du mouvement de la cible (que ce soit par arrêt, ou sortie de la zone surveillée) chaque compteur aura une valeur entière correspondant au nombre de fois ou la cible s'est approchée. Ainsi, pour cette trajectoire, les compteurs peuvent être représentés par une fonctionnelle en escalier (voir la figure 5.3).

Puis, une fois que cet escalier (ou sa représentation) est construit, nous pouvons définir le plan-vitesse. Ce plan correspond au plan tangent à la fonctionnelle, ce qui signifie que son orientation correspond à l'orientation de l'escalier, tandis que sa pente correspond à l'angle θ de montée. Plus intéressant encore, l'orientation du plan nous donne la direction de la cible, tandis que la vitesse v peut être calculée par :

$$v = \frac{1}{\tan(\theta)} \ . \tag{5.15}$$

Ainsi, estimer le vecteur vitesse de la cible revient à estimer les paramètres du plan-

FIGURE 5.3 – *Escalier théorique de la trajectoire.*

vitesse.
Vu que la cible se déplace en MRU, notons $\mathbf{v}$ son vecteur vitesse constant. A l'aide des résultats de la section 5.2, la position initiale de la cible est définie par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} &\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 + \lambda\, \mathbf{v}^{\perp} \ \ , \ \lambda \in \mathbb{R} \ , \\ &\text{tel que :} \\ &\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \lambda\, \mathbf{v}^{\perp} + t\, \mathbf{v} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Ce qui signifie qu'à chaque instant $t \in \mathbb{R}_+$, les positions possibles de $\mathbf{x}(t)$ définissent une ligne droite de direction $\mathbf{v}^{\perp}$. De plus, en dérivant le produit scalaire $\langle \mathbf{x}(t), \mathbf{v} \rangle$ par rapport au temps t, nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{x}(t), \mathbf{v} \rangle = v^2 \ . \tag{5.17}$$

Etant donné que v est constant (par hypothèse), cela revient tout simplement à dire que l'intégration par rapport au temps nous fournit un plan. La conclusion qui suit est immédiate : Le plan-vitesse, ou plan tangent à l'escalier est une transformation exhaustive de l'information de vitesse. Le prochain paragraphe met en avant deux méthodes d'estimation de ce plan, ainsi que quelques résultats asymptotiques a propos de l'estimation.

5.4 Méthode d'estimation du plan-vitesse

Nous avons montré qu'estimer le plan-vitesse nous permettait d'estimer le vecteur vitesse. Bien qu'il existe sans doute de nombreuses façon de faire, nous nous sommes appliqué à utiliser les deux méthodes qui nous étaient les plus familières.

5.4.1 L'approche par les Séparateurs à Vastes Marges (SVM) [CV95]

Nous avons vu dans tous les paragraphes précédents que le principal objet de ce chapitre était de savoir comment séparer de façon optimale deux classes de capteurs (i.e. les $+$ et les $-$). A cette fin, nous pouvons utiliser les Séparateurs à Vastes Marges (SVM, ou *Support Vector Machine* en version originale) très largement utilisés dans les contextes de classification. L'ensemble des données labellisées $\{(y_1, \mathbf{x}_1, \cdots, y_l, \mathbf{x}_l\}$ ($y_i \in \{-1, 1\}$ et $\mathbf{x}_i$ les positions des capteurs) est dit linéairement séparable si il existe un vecteur $\mathbf{w}$ et un scalaire b tels que les inégalités suivantes soient vérifiées :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \geq 1 \quad \text{si} : y_i = 1 \ , \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \leq -1 \quad \text{si} : y_i = -1 \ . \end{cases} \tag{5.18}$$

Soit $\mathcal{H}(\mathbf{w}, b) \stackrel{\Delta}{=} \{\mathbf{x} | \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b = 0\}$ ($\mathbf{w}$: Vecteur normal) le plan de séparation optimal, et définissons la marge (marg) comme la plus petite distance entre les points $\mathbf{x}_i$ et le plan $\mathcal{H}$. Alors, marg $= \frac{1}{\|\mathbf{w}\|}$. De plus, maximiser la marge revient à considérer le problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{w}, b} \ \tau(\mathbf{w}) \stackrel{\delta}{=} \|\mathbf{w}\|^2 \ , \\ \text{s.c.} \ : y_i \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \right) \geq 1 \ \ \forall \ i = 1, \cdots, l \ \ y_i = \pm 1 \ . \end{array} \right. \tag{5.19}$$

Si nous notons Λ le vecteur des multiplicateurs de Lagrange, la dualisation de l'équation 5.19 nous amène à considérer un nouveau problème quadratique, mais dont les contraintes sont explicites [CV95], c'est à dire :

$$\left| \begin{array}{l} \max\limits_{\Lambda} W(\Lambda) = -\dfrac{1}{2} \ \Lambda^T \ D \ \Lambda + \Lambda^T \ \mathbf{1} \ , \\ \text{s.c.} : \Lambda \geq 0 \ , \ \Lambda^T Y = 0 \ , \end{array} \right. \tag{5.20}$$

où $\mathbf{1}$ est un vecteur de 1, $Y^T = (y_1, \cdots, y_l)$ est le vecteur de taille l des labels, et D est la matrice de Gram :

$$D_{i,j} = \langle y_i \mathbf{x}_i, y_j \mathbf{x}_j \rangle \ . \tag{5.21}$$

Le problème dual peut être résolu efficacement par les méthodes de programmation quadratique classiques. Un cas un peu moins parfait intervient lorsque les données ne peuvent être séparées sans erreur, et nous amène donc à remplacer les contraintes de l'équation 5.19 par les suivantes :

$$y_i \left(\langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b \right) \geq 1 - \xi_i \ , \ \xi_i \geq 0 \ , \ i = 1, \cdots, l \ . \tag{5.22}$$

Si nous considérons maintenant une problématique multi-période, la démarche évolue un petit peu. Etudions dans un premier temps le cas de deux périodes. Nous nous intéressons du coup à deux hyperplans, (appelés $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$), définis par :

$$\begin{cases} \langle \mathbf{w}, x_l^1 \rangle + b_1 \gtrless \pm c_1 \ \text{ en fonction de : } \ y_l^1 = \pm 1 \ , \\ \langle \mathbf{w}, x_l^2 \rangle + b_2 \gtrless \pm c_2 \ \text{ en fonction de : } y_l^2 = \pm 1 \ . \end{cases} \tag{5.23}$$

Il est également supposé que ces deux hyperplans séparateurs sont associés avec des instants de mesures, T et $T + \Delta$, Δ étant connu. La marge du premier hyperplan séparateur $\mathcal{H}_1$ est $\frac{c_1}{\|\mathbf{w}\|}$, tandis que pour l'hyperplan $\mathcal{H}_2$, c'est $\frac{c_2}{\|\mathbf{w}\|}$. Dès lors, le problème que nous devons résoudre s'écrit :

$$\left| \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{w}, c_1, c_2, b_1, b_2} \quad \left[\max\limits_{1,2} \left(\dfrac{\|\mathbf{w}\|^2}{c_1^2}, \dfrac{\|\mathbf{w}\|^2}{c_2^2} \right) \right] \ , \\ \text{s.c. : } \ y_l^1 \ \left(\langle \mathbf{w}, x_l^1 \rangle + b_1 \right) \geq c_1 \ , \ y_l^2 \ \left(\langle \mathbf{w}, x_l^2 \rangle + b_2 \right) \geq c_2 \ \forall l. \end{array} \right. \tag{5.24}$$

Dans un premier temps, ce problème peut apparaître comme particulièrement compliqué. Toutefois, sans contraindre d'avantage notre système, nous pouvons supposer $c_1 < c_2$. Ce qui signifie $\max\limits_{1,2} \left(\dfrac{\|\mathbf{w}\|^2}{c_1^2}, \dfrac{\|\mathbf{w}\|^2}{c_2^2} \right) = \dfrac{\|\mathbf{w}\|^2}{c_1^2}$. En effectuant les changements $\frac{1}{c_1}\ \mathbf{w} \rightarrow \mathbf{w}^{'}$ et $\frac{b_1}{c_1} \rightarrow b_1^{'}$, nous en revenons à considérer le problème suivant :

$$\left| \begin{array}{l} \min\limits_{\mathbf{w}^{'}, b_1^{'}, b_2^{'}} \ \|\mathbf{w}\|^2 \\ \text{s.c. : } \ y_l^1 \ \left(\langle \mathbf{w}^{'}, x_l^1 \rangle + b_1^{'} \right) \geq 1 \ , \ y_l^2 \ \left(\langle \mathbf{w}^{'}, x_l^2 \rangle + b_2^{'} \right) \geq 1 \ \forall l. \end{array} \right. \tag{5.25}$$

Si $\mathbf{w}^*$ est la solution (unique) de l'équation 5.25, quelques calculs supplémentaires nous fournissent la distance $d(\mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*)$ séparant les deux hyperplans, c'est à dire :

$$d(\mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*) = \frac{|b_1^* - b_2^*|}{\|\mathbf{w}^*\|} \ .$$

Et finalement, nous déduisons que l'estimation du vecteur vitesse $\hat{\mathbf{v}}$ nous est donné par :

$$\hat{\mathbf{v}} = \alpha \ \mathbf{w}^* \ \text{ et : } \ \hat{v} = \frac{1}{\Delta T} \ d(\mathcal{H}_1^*, \mathcal{H}_2^*) \ . \tag{5.26}$$

L'analyse que nous venons d'effectuer peut être aisément étendue à un nombre arbitraire d'hyperplans séparateurs, tant que la trajectoire de la cible reste rectiligne.

5.4.1.1 3D-SVM

Cette dernière idée d'utilisation des SVM permettait de se passer complètement de l'analyse incluant le plan-vitesse. Toutefois, elle présente le désavantage de devoir effectuer de lourds calculs par anticipation, et de devoir résoudre le problème d'optimisation par les SVM autant de fois qu'il y a d'instants connus. Ce que nous proposons comme analyse antérieure dans la section 5.3 nous permet de nous restreindre à un seul problème d'optimisation.
Ainsi, au lieu de considérer les données en 2-D, nous allons ajouter une dimension aux données. Le premier jeu de données sera donc composé des coordonnées des capteurs, et des valeurs des compteurs. Le second jeu de données est composé des coordonnées des capteurs, et des compteurs auxquels on rajoute une unité. En cherchant à séparer ces deux jeux de données, l'hyperplan séparateur sera un plan, qui plus est un bon estimateur du plan-vitesse. Pour une compréhension graphique du phénomène, voir la figure 5.4.

FIGURE 5.4 – *L'escalier théorique de la trajectoire, et son pendant supérieur*

5.4.2 Régression à Direction Révélatrice

Les modèles à direction révélatrice ont été introduit par Friedman et Tuckey [FT74]. Puis la régression a suivi, étudiée et présentée par Friedman and Stuetzle [FS81]. La régression à direction révélatrice fait partie des méthode de régression semi-paramétrique, avec une particularité qui lui est propre. En effet, au lieu d'estimer une fonction f telle que $Y_i = f(X_i) + \varepsilon_i$, où X_i et Y_i sont observés, et ε_i supposé suivre un certain type de loi, la régression à direction révélatrice s'intéresse à la fonction g telle que $Y_i = g(X_i\ \theta) + \varepsilon_i$. Le paramètre θ est dans ce cas là appelé direction révélatrice. La première étape de l'algorithme consiste à estimer la direction θ, puis g. Dans notre cas, θ représentera la direction de la cible, tandis que la valeur de la vitesse sera fournie par l'estimation de g.

5.4.2.1 Modélisation

Soit Y_i la valeur du i-ième compteur, et X_i les coordonnées du capteur. Si $n(X_i\ \theta)$ est la valeur du compteur i à la fin de la trajectoire, et p la probabilité que le capteur ne se trompe pas sur l'information binaire, nous avons (où $\mathcal{B}$ représente la loi binomiale) :

$$\mathcal{L}(Y_i|X_i\ \theta) = \mathcal{B}(n(X_i\ \theta), p) \tag{5.27}$$

Si nous supposons dans un premier temps que $p = 1$, les deux paramètres que nous cherchons à estimer sont donc θ et la fonction entière $n(.)$.

5.4.2.2 La méthode PPR dans un contexte de réseau de capteurs

Nous devons rajouter des contraintes sur la fonction entière $n(.)$. En effet, en plus du fait qu'elle ne peut prendre que des valeurs entières, elle doit être une fonction croissante (car $p = 1$). Le problème d'optimisation que nous devons résoudre est le suivant :

$$\hat{\theta} \quad = \quad \arg\min_{\theta} \sum (\hat{n}(X_i\ \theta) - Y_i)^2 \ . \tag{5.28}$$

Nous estimons $\hat{n}$ de façon un peu particulière. Tout d'abord, nous proposons une estimation non paramétrique d'une fonction f :

$$\hat{f}(u) \quad = \quad \frac{\sum Y_i K_h(X_i\ \theta - u)}{\sum K_h(X_i\ \theta - u)} \ . \tag{5.29}$$

Puis nous classons les $(X\ \ \theta)_i$ dans un vecteur $(X\theta)_{(i)}$ en ordre croissant. Ce qui nous amène à l'estimation finale de $\hat{n}(.)$:

$$\begin{cases} \hat{n}(X\ \theta_{(i)}) & = & \hat{f}(X\ \theta_{(i)}) \quad \text{si} \quad \hat{f}(X\ \theta_{(i)}) \geq \hat{f}(X\ \theta_{(i-1)}) \ , \\ \hat{n}(X\ \theta_{(i)}) & = & \hat{f}(X\ \theta_{(i-1)}) \quad \text{sinon} \ . \end{cases} \tag{5.30}$$

De plus, à cause de la trajectoire particulière de la cible et du choix de modélisation, nous savons également que la forme générale de n (notée $\tilde{n}$) est donnée par :

$$\tilde{n}(u) \quad = \quad \sum i \mathbb{I}_{[(X\theta)^{\perp}+(i-1)v,(X\theta)^{\perp}+iv]}(u) \ . \tag{5.31}$$

Enfin, la dernière étape consiste à estimer v, ce qui est fait par la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\hat{v} \quad = \quad \arg\min_{v} \sum (\hat{\tilde{n}}(X\widehat{\theta}_i) - Y_i)^2 \tag{5.32}$$

5.4.2.3 Convergence

Nous allons démontrer dans ce paragraphe que plus le nombre de capteurs est important, plus l'estimation du plan-vitesse est de bonne qualité. En fait, si nous supposons que nous disposons d'un nombre infini de capteurs [1], alors la fonctionnelle en escaliers est parfaitement déterminée, dont le plan vitesse est connu, et non plus estimé.
A cet effet, nous allons montrer que la probabilité qu'il y ait un capteur positionné sur chaque arrête de chaque marche [2] est égale à 1. Ou plus exactement, tend vers 1 quand le nombre de capteurs tend vers ∞.
On suppose que les capteurs sont placés aléatoirement sur la zone à surveiller, selon une loi uniforme. Soient (x, y) les coordonnées cartésiennes classiques, et (X, Y) les coordonnées orientées suivant le vecteur vitesse. Si X correspond à la position des capteurs, et Z à la valeur du compteur, $X|Z = z$ correspond aux positions des capteurs dont le compteur vaut z. Par abus de notation, nous ne noterons plus que $X|Z$. Alors, nous avons :

$$\mathcal{L}(X|Z) \quad = \quad \mathcal{U}_{[B_{inf};B_{sup}]} \tag{5.33}$$

avec B_{inf} qui représente la limite inférieur d'une marche, et B_{sup} sa limite supérieure, dans le nouveau système de coordonnées. Si les composantes du vecteur vitesse $\mathbf{v}$ sont notées $[a; b]$, alors :

$$B_{\text{inf}} \quad = \quad -\tfrac{b}{a}y - \tfrac{c_{\text{inf}}}{a} \ , \qquad B_{\text{sup}} \quad = \quad -\tfrac{b}{a}y - \tfrac{c_{\text{sup}}}{a} \ , \tag{5.34}$$

où $(c_{\text{inf}}, c_{\text{sup}})$ ne dépendent que de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{x}_0$, ce qui signifie qu'ils sont déterministes, et indépendants de X. Donc B_{inf} et B_{sup} appartiennent tous les deux au plan-vitesse. Soit $u = \inf_i(X_i)$, alors :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \qquad P(|u - B_{\text{inf}}| < \varepsilon) \quad &= \quad P(u - B_{\text{inf}} < \varepsilon) \ , \\ &= \quad P(u < \varepsilon + B_{\text{inf}}) \ . \end{aligned} \tag{5.35}$$

Par ailleurs, nous savons que :

$$\mathcal{L}(X|Z) = \mathcal{U}_{[B_{\text{inf}};B_{\text{sup}}]} \Rightarrow P(\inf X_i \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq B_{\text{inf}} \ , \\ 1 - (\frac{B_{\text{sup}} - t}{B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}}})^N & \text{si } t \in [B_{\text{inf}}; B_{\text{sup}}] \ , \\ 1 & \text{si } t > B_{\text{sup}} \ . \end{cases} \tag{5.36}$$

1. Nous sommes bien d'accord qu'il s'agit d'une supposition, mais elle a un intérêt théorique non-négligeable

2. Si des capteurs sont positionnés sur les arrêtes des marches, alors, en posant un plan sur ces marches, nous obtenons le plan-vitesse. Le seul cas défavorable serait que nous ayons un capteur par arrête, et que tous ces capteurs soient alignés. Or, selon un calcul probabiliste très simple (loi continue), cette probabilité est nulle.

Puis nous avons le calcul de probabilité suivant :

$$\begin{aligned}
\forall \varepsilon > 0 \qquad P(|u - B_{\text{inf}}| < \varepsilon) &= P(u < \varepsilon + B_{\text{inf}}) \ , \\
&= 1 - (\frac{B_{\text{sup}} - (\epsilon + B_{\text{inf}})}{B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}}})^N 1_{[B_{\text{inf}};B_{\text{sup}}]}((\varepsilon + B_{\text{inf}})) \ , \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \leq 0 \\ 1 - (1 - \frac{\varepsilon}{B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}}})^N & \text{si } \epsilon \in]0; B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}}] \\ 1 & \text{si } \varepsilon > B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}} \ . \end{cases} \quad (5.37)
\end{aligned}$$

D'après l'équation 5.37, $1 - \frac{\varepsilon}{B_{\text{sup}} - B_{\text{inf}}}$ est plus petit que 1, ce qui signifie que $(1 - \frac{\epsilon}{B_{sup} - B_{inf}})^N$ tend vers 0 quand N tend vers l'infini. Nous avons donc finalement :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \lim_{N \to \infty} \qquad P(|u - B_{\text{inf}}| < \varepsilon) \quad = \quad 1 \ . \tag{5.38}$$

Ce qui conclu le paragraphe.

5.5 Résultats de simulation

Nous allons maintenant illustrer la pertinence des méthodes proposées par des résultats de simulation. La figure 5.5 présente un scénario de réseau de capteurs, et d'une cible se déplaçant en son sein. Nous voyons également sur la figure de droite l'escalier 'construit' par la cible lors de son déplacement. Dans ce scénario, les capteurs sont placés aléatoirement sur l'espace, suivant une loi uniforme.

FIGURE 5.5 – *Positions des capteurs, et représentation de l'escalier de la trajectoire. N=100 capteurs, vecteur vitesse : [1,2]*

Un indicateur fiable des performances d'estimation reste le calcul de l'erreur quadratique moyenne. Dans notre cas, deux paramètres sont estimés, les composantes du vecteur vitesse. La figure 5.6 représente ces deux erreurs quadratiques, pour un nombre de capteurs évoluant de 10 à 100, et un vecteur vitesse égal à $[1, 2]$.

FIGURE 5.6 – *Erreur quadratique moyenne des estimateurs de la vitesse. En vert pour la méthode SVM, en bleu pour la régression à direction révélatrice.*

Pour un nombre réduit de 2000 simulations, les erreurs semblent assez instables. Toutefois, les deux méthodes d'estimation amènent à des conclusions différentes. Pour l'estimation de la direction de la cible, la régression à direction révélatrice nous donne un résultat bien meilleur que les SVM. En plus d'être moins précise, la méthode par les SVM souffre clairement du faible nombre de capteurs, et semble avoir une tendance à être erratique. Ce résultat ne nous semble toutefois pas surprenant dans la mesure où la méthode de régression par direction révélatrice a été développée dans le but précis d'estimer une direction, ce qui est bien le cas présenté. Ce constat est inversé pour l'estimation de la

valeur de la vitesse. En effet, la régression à direction révélatrice subit de plein fouet le problème d'estimation de la fonction $\tilde{n}$, qui n'est sans doute pas optimisé dans notre problème.

5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'estimation du vecteur vitesse d'une cible se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme dans un réseau de capteurs binaires directionnels. Bien que l'information fournie à chaque instant par le réseau soit relativement faible, nous avons montré qu'il était possible d'avoir des résultats d'estimation intéressants pour le vecteur vitesse de la cible. Nous avons par ailleurs mis en évidence le concept de plan-vitesse pour l'estimation des paramètres de la trajectoires, et nous avons montré son utilité par les résultats de convergence théoriques et simulés. La question immédiate après le traitement de ce type d'information serait de savoir si l'extension au cas multicible est réalisable ou relève de la pure fiction.

CHAPITRE 6

SUIVI DE CIBLE MANŒUVRANTE DANS UN RÉSEAU DE CAPTEURS BINAIRES DIRECTIONNELS

6.1 Introduction

Les réseaux de capteurs sont des systèmes constitués de capteurs déployés sur une surface et ayant pour objectif de suivre les événements se déroulant sur cet espace. Il existe une multitude de capteurs susceptibles d'être utilisé à cet effet, chaque type de capteurs possédant des avantages et des inconvénients. Evidemment, en fonction de l'objectif réel du réseau, certains capteurs sont plus adaptés. Il peut paraitre opportun de considérer les capteurs nous fournissant l'information la plus riche possible concernant l'objectif, mais cela se fait au détriment de la précision ou de la fiabilité du capteur. Ainsi, pour notre problématique de suivi de cible, il semblerait naturel d'opter pour des capteurs susceptibles de nous fournir (pour chaque capteur) une position de la cible, calculée après un traitement localisé de l'information. Toutefois, plus l'information est riche, plus il convient de mettre en œuvre des méthodes de fusion d'information pour choisir l'information la plus fiable, et tenir compte de l'aspect réseau de notre information. Cela peut s'avérer compliqué, notamment lorsque les capteurs doivent être calibrés, ou tout simplement lorsque l'erreur de processus ne peut être modélisée correctement.

Afin de réduire le plus possible ce problème de fusion, une solution très simple est de réduire l'information locale à son minimum, et d'effectuer un traitement localisé. Ainsi, même si l'information transmise est réduite, ce qui réduit les possibilités d'erreur de transmission, le traitement de l'information de réseau dans son entier doit permettre de compenser cette perte d'information au niveau local. Au niveau des avantages, nous noterons la facilité de modéliser l'erreur d'information (modélisée simplement par une loi de Bernoulli), la faible consommation en énergie par les capteurs, aussi bien au niveau traitement local que lors de la transmission.

Il existe plusieurs type d'information binaire, et nous allons montrer que l'information directionnelle introduite dans le chapitre précédent permet d'estimer une trajectoire manœuvrante si les contraintes de mouvement sont correctement intégrées. De plus, alors

que nous nous contentions jusqu'à présent de faire une estimation a posteriori de la trajectoire rectiligne uniforme, nous allons montrer qu'il est tout à fait possible d'effectuer un suivi en temps réel de la cible, à travers un nouvel algorithme que nous présentons, et que plus la durée du suivi est importante, plus la précision de l'estimation de la vitesse et de la position de la cible est grande. Si globalement les méthodes utilisées sont les mêmes, ce sont les différences sur les trajectoires qui rendent l'estimation possible. C'est ce que nous allons montrer dans un premier temps, avant de présenter l'algorithme de suivi et de souligner ses performances par des résultats de simulation convaincants.

6.2 Suivi avec des capteurs binaires directionnels

6.2.1 Les données

Nous supposons que l'information binaire selon laquelle la cible s'approche ou s'éloigne d'un capteur est fournie par tous les capteurs à tous les pas de temps. Etant donné toutes ces informations, nous rappelons que nous pouvons aisément déduire la zone d'appartenance de la cible à chaque instant. L'incertitude de position est donc liée à l'aire de ce domaine d'appartenance, qui dépend quant à lui des paramètres du réseau tel que le nombre de capteurs en place, ainsi que la géométrie du réseau.

6.2.2 Estimation du vecteur vitesse de la cible

Contrairement au chapitre précédent, nous ne possédons qu'une information ponctuelle sur la vitesse de la cible. En effet, celle-ci étant considérée comme manœuvrante, le vecteur vitesse n'est plus constant, et nous ne pouvons inférer l'information antérieure sur l'estimation actuelle ou future. Nous pouvons néanmoins réduire la possibilité de manœuvre à l'aide de considérations physique simplistes.

Premier modèle simple : Accélération non nulle. Afin de mettre en lumière les effets du changement de la vitesse sur l'estimation de la position de la cible, considérons un exemple très simple. Supposons que le mouvement de la cible est uniformément accéléré :

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t\ \dot{\mathbf{x}}_0 + t^2\ \ddot{\mathbf{x}}_0\ . \tag{6.1}$$

Dans ce cas là, la trajectoire de la cible est-elle complètement observable [1] ? Pour répondre à cette question, rappelons tout d'abord le résultat suivant. Quelque soir le capteur binaire, deux trajectoires sont indistinguables si et seulement si elle fournissent la même information binaire, ce qui revient à satisfaire la condition suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_t = \dot{\mathbf{y}}_t\ , \\ \langle \mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{y}}_t \rangle = 0 \ \ \forall t\ . \end{cases} \tag{6.2}$$

Avec le modèle de mouvement défini par l'équation 6.1, la condition 6.2 devient ($\forall t$) :

$$\langle \mathbf{x}\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 \rangle + t\langle \dot{\mathbf{x}}\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 \rangle + \tfrac{1}{2}t^2\langle \ddot{\mathbf{x}}\mathbf{y}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 \rangle + t\langle \mathbf{x}\mathbf{y}_0, \ddot{\mathbf{y}}_0 \rangle + t^2\langle \dot{\mathbf{x}}\mathbf{y}_0, \ddot{\mathbf{y}}_0 \rangle + \tfrac{1}{2}t^3\langle \ddot{\mathbf{x}}\mathbf{y}_0, \ddot{\mathbf{y}}_0 \rangle = 0\ . \tag{6.3}$$

1. Au sens de l'observabilité mathématique telle qu'utilisée dans les chapitres précédents.

où

$$\begin{cases} \mathbf{xy}_0 &= \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0 \ , \\ \mathbf{x\dot{y}}_0 &= \dot{\mathbf{y}}_0 - \dot{\mathbf{x}}_0 \ , \\ \mathbf{x\ddot{y}}_0 &= \ddot{\mathbf{y}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}_0 \ . \end{cases} \tag{6.4}$$

D'après cette équation, $\langle \mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle$ est donc un polynôme en t qui est égal à zéro pour un nombre de valeurs de t strictement supérieur au degré du polynôme. Celui ci est donc nul, donc ses coefficients sont nuls. Pour le coefficient associé à t^3, nous obtenons la condition $\langle \ddot{\mathbf{y}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}_0, \ddot{\mathbf{y}}_0 \rangle = 0$. A partir des conditions 6.2, nous déduisons $\langle \mathbf{y}_t - \mathbf{x}_t, \dot{\mathbf{x}}_t \rangle = 0$, puis $\langle \ddot{\mathbf{y}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}_0, \ddot{\mathbf{x}}_0 \rangle = 0$, à l'aide de la même démarche que précédemment. la soustraction des deux égalités nous mène à $\|\ddot{\mathbf{y}}_0 - \ddot{\mathbf{x}}_0\| = 0$, puis $\ddot{\mathbf{x}}_0 = \ddot{\mathbf{y}}_0$.

De façon remarquablement identique, nous obtenons l'égalité $\dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{y}}_0$ puis l'équation suivante :

$$\langle \mathbf{y}_0 - \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{y}}_0 + t\ddot{\mathbf{y}}_0 \rangle = 0 \ \ \forall t \ . \tag{6.5}$$

Si l'on suppose enfin que le couple $\{\dot{\mathbf{y}}_0, \ddot{\mathbf{y}}_0\}$ est générateur de l'espace des capteurs, alors nous pouvons déduire que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$.
Par cet exemple nous venons de montrer que l'accélération de la cible rendait le problème de suivi complètement observable [2]. L'intuition naturelle à la suite de cet exemple serait de présumer que dans le cas d'une cible manœuvrante, susceptible d'effectuer des changement de vitesse non colinéaires, nous pourrions être capable d'estimer la position de la cible, si l'estimation de la vitesse est correcte.

6.2.3 Modèle de déplacement de la cible

Nous avons vu dans un chapitre précédent que si une cible manœuvrante rendait l'observabilité du système complète, cette observabilité était conditionnée à la connaissance de l'instant de manœuvre. Afin de relâcher cette hypothèse contraignante, nous allons considérer que le mouvement peut changer à chaque instant de déplacement. Nous supposerons que la cible se déplace suivant un mouvement markovien, défini par :

$$\mathbf{x_k}|\mathbf{x_{k-1}} \quad \sim \quad \mathcal{N}(F_k\mathbf{x_{k-1}}, \mathbf{Q_k}) \tag{6.6}$$

pour $k = 1, 2...$ ou $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est une loi normale de moyenne μ et de variance σ^2. La position initiale de la cible est supposée inconnue. Cette modélisation permet à la cible d'effectuer des manœuvres à chaque instant, avec toutefois des probabilités de changement de direction associées. les matrices F_k et Q_k permettent le cas échéant de forcer un type de trajectoire. Nous sommes donc bien dans le cas d'une cible manœuvrante.

6.3 Suivi de la cible

Le principal problème de l'estimation par les séparateurs à vaste marge c'est que nous ne disposons après cette étape que d'une estimation de la direction de la cible. Nous ne connaissons ni sa vitesse ni sa position. Nous cherchons donc à développer un algorithme fiable capable de relever ce double défi. A cet effet, nous proposons une méthode en deux étapes. Dans un premier temps, en considérant la zone dans laquelle se trouvait la cible

2. Sous la contrainte de non colinéarité de $\dot{\mathbf{y}}_0$ et $\ddot{\mathbf{y}}_0$ toutefois.

à l'instant précédent (que nous appellerons zone de départ) et la zone dans laquelle elle se trouve au moment présent (que nous appellerons zone d'arrivée) nous proposons une estimation de la vitesse de la cible en prolongeant la droite de direction estimée entre les deux zones. Soit λ_t cette correction. Celle-ci constitue donc une estimation du vecteur vitesse de la cible. Puis, nous orchestrons une correction de la position de la cible basée sur l'estimation de ce vecteur vitesse. Les figures 6.1 et 6.2 représentent les deux étapes de corrections.

FIGURE 6.1 – *Correction : le facteur λ_t, estimateur du vecteur vitesse.*

FIGURE 6.2 – *Correction : le facteur θ_t, correcteur de la position estimée de la cible*

6.3.1 Estimation du vecteur vitesse : λ_t

Afin de construire cet estimateur, nous sommes partis d'une hypothèse très simple. A chaque instant t, les capteurs fournissent une information binaire. D'après les propositions des précédents chapitres, nous savons que la cible appartient à la zone située entre les deux espaces convexes de capteurs. Dès lors, en partant de la position estimée de la cible dans la zone de départ, en la prolongeant suivant la direction estimée jusque dans la zone d'arrivée, nous obtenons la distance parcourue entre les instants $t-1$ et t. Autrement dit, la vitesse de la cible. Exprimons le d'un point de vue mathématiques. Soit $\hat{\mathbf{v}}_t$ le vecteur vitesse estimé normalisé à l'instant t.
Soient $\{\mathbf{t}_i^{(-)}\}_i$ (respectivement $\{\mathbf{t}_i^{(+)}\}_i$) les coordonnées des capteurs (s_i) dont l'information binaire correspond à $\{-\}$ (respectivement $\{+\}$) à l'instant t.
Nous classons les produits scalaires $vs_i^{(-)} = \langle \hat{\mathbf{v}}_t, \mathbf{t}_i^{(-)} \rangle$ (respectivement $vs_i^{(+)} = \langle \hat{\mathbf{v}}_t, \mathbf{t}_i^{(+)} \rangle$). Puis, suivant un raisonnement géométrique très simple, nous remarquons que $\langle \hat{\mathbf{v}}_\mathbf{t}; \hat{X}_t \rangle$ doit se situer entre $vs_{\max}^{(-)} = \max(vs_i^{(-)})$ et $vs_{\min}^{(+)} = \min(vs_i^{(+)})$. Afin d'assurer cette propriété, nous considérons l'équation de projection suivante :

$$\langle \hat{\mathbf{v}}_t, (\hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \lambda_t \, \hat{\mathbf{v}}_{t-1}) \rangle = vs_{moy}^{(+,-)} \tag{6.7}$$

Ou $vs_{moy}^{(+,-)}$ représente le milieu de la zone d'arrivée en projection suivant le vecteur vitesse estimé orthogonal. Ainsi, nous avons :

$$vs_{moy}^{(+,-)} = \frac{vs_{\max}^{(-)} + vs_{\min}^{(+)}}{2} \tag{6.8}$$

Tous les éléments de l'équation 6.7 étant connus, nous pouvons déduire le correcteur λ_t de façon explicite à l'aide de l'équation suivante :

$$\lambda_t = \frac{vs_{moy}^{(+,-)} - \langle \hat{\mathbf{v}}_t, \hat{\mathbf{x}}_{t-1} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{v}}_t, \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \rangle} \ , \tag{6.9}$$

L'interprétation géométrique de ces équations est tout simplement que nous souhaitons que notre cible se situe au milieu de la zone d'arrivée. Nous avons décidé de choisir le milieu plutôt que l'une des bornes (supérieure ou inférieure) pour la simple raison que la borne supérieure de l'erreur d'estimation sur la position s'en trouve ainsi divisée par

deux. La position de la cible dans la zone d'arrivée est ainsi assurée, et nous mettons à jour notre estimation :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{corr} = \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \lambda_t \ \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \ . \tag{6.10}$$

A ce point là, nous devons noter un élément très important. Plus l'erreur d'estimation de la position sera faible, et plus le correcteur λ_t sera proche de la réelle valeur de la vitesse. Et de façon symétrique, plus l'estimation de la vitesse sera proche de la vraie vitesse, plus notre estimation de la position pourra être considérée comme bonne.
C'est ce simple constat qui est à la base de l'étape suivante de notre algorithme.

6.3.2 Correction de la position estimée : θ_t

Même si l'on suppose une cible fortement manœuvrante, cela ne signifie pas pour autant que ses mouvements sont complètement libres. En effet, les contraintes de la physique classique nous permettent d'appliquer un certain nombre de contraintes au déplacement de la cible [3]. D'un point de vue dynamique, cela signifie que l'accélération de la cible est bornée supérieurement et inférieurement. Ainsi, cela combiné avec le résultat de la section précédente, nous pouvons déduire que deux vitesses estimées successives significativement différentes induisent une erreur de position importante. Il s'agit donc de s'appuyer sur cette différence significative pour déduire un correcteur de l'estimation de la position. Dans un souci de lisibilité et de simplicité, cette correction sera limitée sur l'axe défini par le vecteur $\hat{\mathbf{v}}_\mathbf{t}{}^\perp$ et passant par le milieu de la zone d'arrivée.
Déduire une différence significative n'est pas évident, et peut conduire à la lecture de nombreux travaux sur la définition de différence significative en statistique sans pour autant en extraire une méthode absolue. Dans notre scénario, l'aspect statistique, quoique présent, n'est pas de première importance. Nous allons donc nous limiter à un modèle très simple concernant la valeur de la vitesse. Celle-ci étant évolutive, nous allons considérer comme valeur de référence la moyenne des k précédentes vitesses estimées de la cible [4], que nous notons $m_{t,k}$. De la même façon, nous calculons la variance $\sigma_{t,k}$ associée. Nous dirons que notre estimateur de la position nécessite une correction si et seulement si la vitesse (scalaire) estimée à l'instant t ne se situe pas dans l'intervalle $[m_{t,k} - \sigma_{t,k}; m_{t,k} + \sigma_{t,k}]$. Si $\lambda_t \notin [m_{t,k} - \sigma_{t,k}; m_{t,k} + \sigma_{t,k}]$, alors, nous cherchons θ_t tel que :

$$\langle \hat{\mathbf{x}}_t^{corr} + \theta_t \ \hat{\mathbf{v}}_t^\perp - (\hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \theta_t \ \hat{\mathbf{v}}_{t-1}^\perp); \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \rangle = m_{t,k} \ . \tag{6.11}$$

L'équation précédente pourrait s'interpréter de la façon suivante. Etant donné $\hat{\mathbf{x}}_t$ la position estimée de la cible à l'instant t, nous souhaiterions réduire $|\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t|_{\hat{\mathbf{v}}_t^\perp}$, qui constitue l'erreur d'estimation de position en projection sur $\hat{\mathbf{v}}_t^\perp$. Pour cela, nous allons calculer la valeur de la translation nécessaire pour que notre estimation de vitesse appartienne à l'intervalle, tout en conservant la direction de vitesse estimée. En fait, nous allons même calculer la translation nécessaire afin que λ_t soit égal à $m_{t,k}$. Le sens de la translation sera donné naturellement par le signe de θ_t. Au final, après quelques calculs, nous obtenons

3. Même si tous les résultats sont présentés dans un cadre de physique du point, et sans approche sur la forme de la cible, nous allons considérer qu'il s'agit d'une cible en déplacement dans notre espace euclidien terrestre

4. Nous parlons ici de vitesse scalaire, et non pas de vecteur vitesse

l'expression analytique suivante :

$$\theta_t = \frac{m_{t,k} - \lambda_t}{\langle \hat{\mathbf{v}}_t^{\perp}; \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \rangle} \ . \tag{6.12}$$

Evidemment, comme parfaitement attendu, si le mouvement de la cible est rectiligne uniforme, la condition précédente n'en est plus une puisque θ_t disparait de l'expression. Il n'y a donc pas de correction latérale possible en cas de MRU.
Au final, nous mettons à jour l'estimation de la position à l'aide de l'équation suivante :

$$\hat{\mathbf{x}}_t^{fin} = \hat{\mathbf{x}}_t^{corr} + \theta_t \ \hat{\mathbf{v}}_t^{\perp} \ . \tag{6.13}$$

6.3.3 Finalisation de l'estimation

Lors des deux étapes précédentes, nous nous sommes attachés à estimer la vitesse (vectorielle) et la position de la cible. Toutefois, ces deux étapes ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si nous voyons clairement l'influence de l'estimation de la vitesse sur l'estimation de la position (au travers de l'expression de θ_t, qui dépend de λ_t) l'influence de la deuxième étape n'apparait pas évidente sur l'estimation de la position. En fait, assez naturellement, plus l'estimation de la position est précise, plus l'estimation de la vitesse doit l'être. Ainsi, afin de mieux apprendre le modèle de vitesse, nous proposons une étape d'actualisation, ou toutes les positions estimées antérieurement à t sont corrigées par ajout du correcteur θ_t. Puisque le procédé est censé réduire l'erreur, il paraît correct de présumer au gain que nous apporterait cette correction. D'un point de vue mathématique, celle ci s'exprime de la façon suivante.
Soit $\hat{\mathbf{z}}_j$ l'estimation de la position à l'instant j mise à jour à l'instant t, alors nous écrivons :

$$\forall j < t : \ \ \hat{\mathbf{z}}_j = \hat{\mathbf{x}}_j^{fin} + \sum_{i=j+1}^{t} \theta_i \hat{\mathbf{v}}_i^{\perp} \ . \tag{6.14}$$

6.3.4 L'algorithme de suivi

Ces différentes étapes peuvent être établies en une méthode (décrite par l'algorithme 1 que l'on applique au jeu de données. Cet algorithme présente plusieurs avantages et inconvénients. Tout d'abord, l'absence de l'expression analytique des estimateurs de position et de vitesse ne nous permet pas un calcul facile de l'erreur quadratique moyenne. Ensuite, il ne fournit pas exactement un estimateur de la vitesse efficace puisque la direction de la cible nous est fournie par la méthode des séparateurs à vaste marge. Comme nous nous limitons à une étude instant après instant, il n'y a pas d'apprentissage du modèle de vitesse ni d'a priori sur la droite séparatrice. Toutefois, ces aspects limitatifs sont balancés par des avantages certains. Tout d'abord, la méthode des SVM appliquée sur un jeu de donné aussi restreint permet des résultats rapides. Ensuite, tous les correcteurs ayant une expression analytique, les calculs sont encore une fois immédiats. Cela permet un suivi en temps réel de la cible. Par ailleurs, même si il existe une erreur incompressible [5] d'estimation, celle-ci est assez faible, et notre algorithme permet à l'erreur de notre estimateur de position de converger vers cette borne incompressible, comme montré dans les paragraphes suivants.

5. A priori incompressible, cette borne inférieure dépend de la densité de capteurs dans le réseau

Algorithme 1 Suivi de cible manœuvrante

ENTRÉES: $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\mathbf{v}}_0$

SORTIES: $\hat{\mathbf{x}}_{(1..T)}$, $\hat{\mathbf{v}}_{(1..T)}$

1: **pour** $t = 1$ to T **faire**
2: $\quad \hat{\mathbf{v}}_t \leftarrow SVM(S_t)$
3: $\quad \lambda_t \leftarrow \frac{vs_{moy}^{(+,-)} - \langle \hat{\mathbf{v}}_t, \hat{\mathbf{x}}_{t-1} \rangle}{\langle \hat{\mathbf{v}}_t, \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \rangle}$
4: $\quad \hat{\mathbf{x}}_t^{corr} = \hat{\mathbf{x}}_{t-1} + \lambda_t \, \hat{\mathbf{v}}_{t-1}$
5: $\quad$ **si** $\lambda_t \in [m_{t,k} - \sigma_{t,k}; m_{t,k} + \sigma_{t,k}]$ **alors**
6: $\quad\quad \hat{\mathbf{x}}_t^{fin} = \hat{\mathbf{x}}_t^{corr}$
7: $\quad$ **sinon**
8: $\quad\quad \theta_t \leftarrow \frac{m_{t,k} - \lambda_t}{\langle \hat{\mathbf{v}}_t^{\perp}; \hat{\mathbf{v}}_{t-1} \rangle}$
9: $\quad\quad \hat{\mathbf{x}}_t^{fin} = \hat{\mathbf{x}}_t^{corr} + \theta_t \hat{\mathbf{v}}_t^{\perp}$
10: $\quad$ **finsi**
11: $\quad \forall j < t : \;\; \hat{\mathbf{z}}_j = \hat{\mathbf{x}}_j^{fin} + \sum_{i=j+1}^{t} \theta_i \hat{\mathbf{v}}_i^{\perp}$
12: **fin pour**

6.4 A propos de la convergence de l'algorithme

Afin de pouvoir déterminer l'efficacité de notre algorithme, il est intéressant de savoir si l'erreur quadratique moyenne tend vers 0, ou si elle est bornée. En considérant la démarche et le scénario, toutefois, il semblerait que la convergence de notre estimateur est bornée inférieurement. Et cette borne serait dépendante de la densité de capteurs dans le réseau. Le prochain paragraphe formalise cette intuition de borne inférieure et permet d'introduire le problème de l'erraticité de la cible.

6.4.1 Résultats sur l'EQM

Statistiquement, l'EQM se définie comme l'espérance de l'écart quadratique entre la vraie valeur du paramètre et son estimation. Dans notre scénario, cela donnerait donc :

$$EQM_t \quad = \quad \mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2] \tag{6.15}$$

Le calcul analytique de cette expression implique donc la connaissance de la loi de l'estimateur. Plutôt que de nous lancer dans ce calcul directement, nous avons décidé de séparer cette expression. Nous projetons l'erreur suivant $\hat{\mathbf{v}}_t$ et suivant $\hat{\mathbf{v}}_t^{\perp}$. Cela nous donne :

$$EQM_t \quad = \quad \mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t} + (\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t^{\perp}}] \tag{6.16}$$

Erreur longitudinale. A ce point là, un peu de raisonnement permet de simplifier, sans calcul, l'expression précédente. En projection sur $\hat{\mathbf{v}}_t$, l'erreur d'estimation correspond simplement à la différence entre la réalisation d'une variable aléatoire gaussienne de variance connue, mais de moyenne inconnue et la moyenne des k précédentes réalisations. Un rapide calcul probabiliste permet de déterminer ainsi aisément la valeur de cette première erreur. Ainsi, nous avons :

$$\mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t}] \quad = \quad \mathbb{E}[(X_1 - X_2)^2] \tag{6.17}$$

ou $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{k})$. Ainsi, $X_1 - X_2 \sim \mathcal{N}(0, \frac{k+1}{k}\sigma^2)$, puis naturellement $\left[\frac{k(X_1-X_2)}{(k+1)\sigma^2}\right]^2 \sim \chi_2(1)$. Cela nous permet de conclure facilement :

$$\mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t}] \quad = \quad \frac{(k+1)^2}{k^2}\sigma^4 \tag{6.18}$$

On remarque que ce résultat est obtenu indépendamment de l'instant t auquel on calcule l'erreur quadratique. Ainsi, on montre bien l'existence d'une borne inférieure indépendante du temps vers laquelle peut tendre l'EQM, mais celle-ci est différente de 0. Une autre remarque que l'on peut faire concerne le fait qu'il s'agit d'une borne supérieure de la borne inférieure. En effet, nous ne prenons pas en compte dans ce calcul le fait que cette différence entre l'estimateur et la vraie valeur peut être tronquée par les bornes de la zone d'appartenance de la cible. La valeur maximum que peut prendre la largeur de cette zone d'appartenance dépend de la densité de capteur. Si l'on suppose le réseau régulier, alors, cette largeur vaut :

$$\Delta(N) \quad = \quad \frac{f(S)}{N} \tag{6.19}$$

Ou $f(S)$ représente une fonction de la surface de l'espace à surveiller. Alors, nous devons re-écrire l'EQM projeté :

$$\mathbb{E}[(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t}] \quad = \quad \min\left[\frac{(k+1)^2}{k^2}\sigma^4, \Delta(N)\right] \tag{6.20}$$

Si nous faisons alors tendre N vers l'infini, ce qui signifie une quantité de capteurs infinie, le résultat est édifiant, et attendu : l'EQM en projection est nulle. La seule erreur subsistant est donc l'erreur latérale. Ce qui est tout à fait cohérent avec le chapitre précédent.

Erreur latérale. Il nous reste à définir maintenant le terme restant. Si l'on regarde attentivement l'algorithme, on s'aperçoit que c'est cette erreur qui est l'objet d'une correction par le facteur θ_t. Contrairement à l'autre erreur, celle-ci n'est pas du tout aisée à expliciter. Commençons par rappeler le fonctionnement de la correction. Soit L_t l'erreur en projection orthogonale à l'instant t.

$$(\mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_t)^2_{\hat{\mathbf{v}}_t^\perp} \quad = \quad L_t^2 \tag{6.21}$$

Alors nous avons la procédure suivante :

$$L_t = \begin{cases} L_{t-1} & \text{si } \lambda_t \in [m_{t,k} - \sigma_{t,k}; m_{t,k} + \sigma_{t,k}] \\ L_{t-1} + \theta_t & \text{sinon} \end{cases} \tag{6.22}$$

Le signe de θ_t sera opposé à celui de L_{t-1} et un petit peu de géométrie nous assure que $(L_{t-1} + \theta_t)^2 < L_{t-1}^2$. Nous avons donc une suite décroissante pour cette erreur. Toutefois, nous sentons bien que la décroissance de cette suite dépend fortement de la variabilité de la trajectoire de la cible. En effet, pour qu'il y ait une correction θ_t, il faut que la trajectoire ait changé de direction par rapport à l'instant précédent. L'objet du prochain paragraphe est justement d'exprimer l'importance de ces manœuvres sur l'estimation de la position.

6.4.2 De l'intérêt d'une cible fortement manœuvrante

Nous cherchons à déterminer l'angle de manœuvre α_t minimum à l'instant t pour réduite l'erreur latérale de l'instant $t-1$. Intuitivement, plus l'erreur sera importante, plus une faible manœuvre pourra corriger l'estimation. Ce que l'on prouve par la suite. Rapidement, nous obtenons :

$$\tan(\alpha_{lim}) = \frac{\Delta(N)}{L_t} \tag{6.23}$$

Ou $\Delta(N)$ est une fonction décroissante de N. Naturellement, il vient :

$$\alpha_{lim} = \arctan(\frac{\Delta(N)}{L_t}) \tag{6.24}$$

Si nous caractérisons $\Delta(N)$, qui représente la largeur de la zone d'appartenance de la cible, nous obtenons :

$$\Delta(N) = \begin{cases} \frac{C}{N} & \text{si} \quad \alpha = 0, \pi/2 \\ \frac{C}{N}\sin(\alpha) & \text{si} \quad 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4} \\ \frac{C}{N}\cos(\alpha) & \text{si} \quad \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{6.25}$$

La conclusion de ce rapide paragraphe est simple. Plus l'erreur latérale est importante, plus l'angle nécessaire à une correction peut être petit. Ainsi, si dans les premiers temps, lorsque notre estimation est lointaine, les corrections sont courantes, plus nous nous rapprochons et plus il est compliqué de corriger l'estimateur. Seules des manœuvres excessives permettraient de se rapprocher. or, ces manœuvres sont des événements rares. Ainsi, il est logique que l'EQM projeté sur l'axe orthogonal voit sa décroissance réduire au fur et à mesure du suivi.

6.5 Résultats de simulation

Nous allons maintenant présenter des résultats de simulation illustrant la méthode que nous avons proposé. Nous considérons une cible se déplaçant sur un espace de taille 300mx300m, surveillé par 70 capteurs. Les données initiales de la trajectoire sont les suivantes : la cible démarre du point $[100, 100]$, avec un vecteur vitesse initial $[1, 1]$. La durée du suivi est de $T = 30$ secondes. Nous ne connaissons pas la position de la cible à l'instant initial, mais nous connaissons $\mathbf{v}_0$.
Une réalisation du scénario est exposée sur la figure 6.3. La trajectoire de la cible est tracée en rouge, celle de l'estimateur de la position en vert. Comme nous le voyons, l'estimation de la position se fait par un tirage uniforme entre les deux espaces convexes de capteurs d'information opposée, et la connaissance a priori de la vitesse semble desservir dans ce cas l'estimation puisque la cible a manœuvré rapidement pour prendre une direction complètement orthogonale. Après quelques temps d'adaptation, l'estimation semble se rapprocher de la trajectoire, avant qu'une nouvelle manœuvre ne sème le trouble. Si l'on excepte les deux manœuvres du début de trajectoire, nous voyons bien que l'estimation de la trajectoire est très correcte, notamment lors de la fin du parcours, quasiment linéaire. Aucune correction n'est apportée, mais l'explication réside dans les paragraphes précédents, et l'importance d'une manœuvre minimum pour apporter une

correction pertinente.
Si l'on considère les deux manœuvres qui posent problème, on s'aperçoit que ce sont des manœuvres importantes. En effet, dans les deux cas, un très important changement de direction est observé. Il semblerait donc que l'état actuel de notre algorithme ne nous permette de suivi de cible 'très' manœuvrante. Toutefois, si l'on rappelle que cette méthode a pour but de s'appliquer sur des suivi d'objets physiques massiques nous pouvons estimer que ce genre de manœuvre sera prohibé [6]. Les deux figures suivantes présentent

FIGURE 6.3 – *Estimation de la trajectoire de la cible. En rouge, la trajectoire vraie, en vert, l'estimation.*

un outil statistique connu sous le nom d'erreur quadratique moyenne (EQM). Il s'agit d'un écart moyen (élevé au carré) entre l'estimateur et le paramètre estimé. La moyenne est calculée pour un très grand nombre de scénarii, même si en théorie, il ne s'agit pas d'une moyenne, mais d'une espérance qu'il faut déterminer. Plus cet EQM est proche de 0, meilleur est l'estimateur.
La figure 6.4 représente cet EQM pour l'estimateur de la position de la cible. En abscisse le temps de suivi. Comme on le voit, l'EQM est une fonction décroissante de la durée du suivi, et si sa décroissance est ralentie rapidement, c'est parce que décroissance initiale est très forte. Visuellement, nous pourrions conclure à une convergence vers 0 de l'EQM, ce qui impliquerait une convergence en moyenne quadratique de l'estimateur. Toutefois, les calculs proposés dans la partie précédente ont montré l'existence d'une borne inférieure dépendant de la densité de capteurs surveillant la zone.
De la même façon, l'estimateur de la vitesse présente une EQM globalement décroissante

FIGURE 6.4 – *EQM de l'estimateur de la position de la cible*

en fonction du temps. Initialisée à la vraie valeur, l'estimateur semble invariablement exploser rapidement avant de revenir de façon assez erratique vers le vecteur vitesse de la cible. Le comportement erratique de la convergence vient très probablement du problème d'estimation de la direction de la cible. En effet, il est impossible avec cette méthode de prévoir si la direction estimée à un instant t sera meilleure ou moins bonne que celle estimée à l'instant précédent. Une solution envisageable serait de considérer un modèle d'apprentissage de la vitesse plus évolué afin de proposer des a priori sur les directions possibles de la cible. En dépit de sa forme basique, nous voyons que notre apprentissage nous permet malgré tout d'estimer correctement la position de la cible.

FIGURE 6.5 – *EQM de l'estimateur de la vitesse de la cible.*

6.6 Conclusion

Nous avons développé dans ce chapitre une nouvelle méthode permettant le suivi d'une cible dans un réseau de capteurs binaires par l'estimation de sa vitesse et de sa

6. Cette assertion devient fausse si l'on s'intéresse au suivi d'un individu en particulier, évidemment. Toutefois, dans le cas d'un suivi d'un troupeau ou d'une foule, les changements de direction sont beaucoup moins brutaux

position. Bien que les données instantanées soient relativement frustres en information, notre algorithme profite de l'aspect réseau de capteurs pour développer une analyse spatio-temporelle du scénario. Les résultats obtenus sont assez satisfaisant, d'autant que les contraintes que nous posons sur le mouvement de la cible sont peu nombreuses et peu restrictives. De plus, la simplicité de cette algorithme permet sa rapidité (ce qui autorise le suivi en temps réel) tout en restant raisonnablement fiable.

Enfin, les performances de cet algorithme peuvent être grandement améliorées par des paramètres extérieurs à l'algorithme. En effet, un nombre plus important de capteurs [7] permettrait certainement de réduire les EQM par le simple fait de réduire la borne incompréssible de l'erreur d'estimation. Par ailleurs, nous pourrions considérer que l'acquisition des données est plus rapide que les manœuvres potentielles de la cible [8]. Ainsi, en combinant cet algorithme avec la technique développé dans le chapitre précédent traitant des MRU, l'estimation de la vitesse s'en trouvera grandement améliorée et par effet boule de neige l'estimateur de position également.

Il reste des questions importantes non résolues. La première, déjà soulevée, concerne la modélisation de la vitesse. Nous nous sommes concentrés sur le calcul et l'adaptabilité des différents facteurs de corrections, mais nous n'avons pas porté nos effort sur l'apprentissage de la vitesse. Il semblerait en effet qu'une meilleure estimation de la vitesse soit un point clé de la qualité de l'estimation de la position. Par ailleurs, il faut remarquer que l'algorithme proposé est entièrement déterministe. Cela en réduit clairement les performance lors de la manœuvre d'une cible, surtout si cette manœuvre est importante. Plutôt que d'interdire complètement ce type de trajectoire, peut être y associer des probabilités de réalisation assez faible permettrait de résoudre ce problème. Il pourrait être également intéressant de rajouter une hypothèse directionnelle à l'hypothèse de distance permettant le calcul du deuxième facteur correctif. Couplé à un modèle probabiliste de trajectoire, sans doute que les manœuvres excessives jusqu'à présent mal gérées seront mieux suivies.

Nous avons concentré nos efforts sur un réseau de capteur homogène. De plus, chaque capteur possédait une vision omnidirectionnelle, ainsi qu'une portée grande par rapport à la taille de l'espace à surveiller. Il est évident qu'en mixant les travaux présentés avec les méthodologies de suivi à l'aide de capteurs de proximité la gain serait important sur l'efficacité des estimateurs. Le travail que nous avons effectué s'inscrit donc comme la l'extraction du maximum d'information possible à l'aide de ces capteurs directionnels, avant de pouvoir affiner l'estimation par des capteurs plus complexes.

Le dernier point important concerne naturellement l'extension de ce type de résultat au suivi multi-cible. Nous avons vu que nous pouvions estimer les paramètres dynamiques d'une cible évoluant sur un espace surveillé par un réseau de capteurs binaires. Toutefois, que se passe-t-il si les capteurs frustres utilisés sont capables de détecter le mouvement de plusieurs cibles, mais que le traitement local ne permet l'association de

7. Toutefois, il faut songer au réalisme de l'étude et ne pas augmenter de façon déraisonnable la couverture de la zone. Mais quelle est la frontière du déraisonnable ?

8. Nous pourrions par exemple autoriser une fréquence de 1 seconde pour les capteurs, mais des changements de direction toutes les 10 secondes simplement

l'information à la cible. Nous nous retrouvons alors dans un premier contexte de classification (trouver les lignes séparatrices) et d'association (associer les lignes séparatrices et les trajectoires précédemment estimées) qu'il conviendra de résoudre avant d'effectuer le suivi a proprement parlé.

CHAPITRE 7

SUIVI MULTI-CIBLES DANS UN RÉSEAU DE CAPTEURS BINAIRES

7.1 Introduction

Suite au chapitre précédent, nous savons désormais comment suivre une cible évoluant librement dans un réseau de capteurs binaires. L'extension naturelle de cette première résolution est donc l'application de notre méthode au suivi multicibles. Dans ce cas-là, toutefois, plusieurs questions se posent. En effet, si l'on considère que plusieurs cibles évoluent sur la zone surveillée, quelle va être l'information relayée par les capteurs ? Si celle-ci permet de séparer les informations de déplacement des cibles au niveau des capteurs, alors le traitement multicible centralisé devient simple puisque l'on peut directement appliquer la méthode développée au chapitre précédent. Toutefois, que peut on faire si cette information ne permet pas la séparation. Si au lieu de nous fournir une information telle que :"Les cibles 1, 3 et 4 s'approchent, la cible 2 s'éloigne" nous avions une information encore moins informative, telle que : "3 cibles s'approchent, 1 s'éloigne", et ce pour chaque capteur. Quel traitement utiliser pour pouvoir suivre les cibles ? C'est à cette question que nous tacherons de répondre dans ce chapitre.

7.2 Qualité de l'information

La première question qu'il est utile de se poser, est de savoir pourquoi nous avons choisi de modéliser notre information au niveau capteur comme aussi peu informative, est surtout aussi spécifique. En effet, si l'on considère que l'on travaille avec un réseau de caméras vidéos, l'association des cibles peut être faite au niveau du capteur, par différentes méthodes dont par exemple la simple association de couleurs. Ou encore la forme de l'objet. Pour différents type de capteurs, des méthodes analogues existent pour permettre cette association. Mais si les objets sont non-identifiables car trop identiques ?
Par ailleurs, il nous a semblé intéressant de démarrer avec un modèle générique, qui permette de définir la performance basse avant d'éventuellement rajouter des spécifications (telle que par exemple l'association au niveau capteur) susceptibles d'améliorer le suivi multicible.

7.3 Le suivi de lignes

7.3.1 Définition des lignes

Ainsi, nous avons à chaque instant, pour chaque capteur, un nombre de "+", et un nombre de "-". Si chaque capteur est équipé d'un compteur, et que chaque information positive incrémente le compteur d'une unité, nous disposons alors d'une représentation en trois dimensions du réseau, ou en chaque position de capteurs nous connaissons le nombres de cibles s'approchant et s'éloignant. La figure 7.1 est une représentation plate de ce que nous obtiendrions si nous avions un parterre infini de capteurs binaires.
Comme on le voit aisément sur la figure, les zones sont séparées par des lignes droites,

FIGURE 7.1 – *4 cibles se déplaçant dans le réseau : zones de niveau*

qui traversent le réseau. Ces lignes droites correspondent en fait tout simplement aus droites orthogonales aux vecteurs vitesses des cibles, et passant par les positions de celles-ci. Par ailleurs, une fois que les lignes rouges (supposées inconnues) ont été effacées, nous pouvons néanmoins discerner 4 lignes distinctes à l'aide des frontières entre les zones de hauteur différentes. Cette observation, qui n'est vrai que dans le cas d'un nombre infini de capteurs, nous a mené à la réflexion suivante : si nous sommes capables de faire la détection de ces lignes sur l'image du réseau, ou les pixels correspondent aux capteurs et leur couleur au niveau du compteur du capteur, alors nous sommes capables de déterminer la direction des cibles, et le problème du suivi revient à un problème d'association temporelle entre deux images successives.

7.3.2 Détection des lignes

Il existe de nombreux travaux en analyse d'image qui traitent de la détection de lignes droites dans une image ou une séquence d'images. Une méthode classique, notamment, consiste à utiliser la transformée de Hough. Inventée par Paul Hough en 1962, cette transformation consiste simplement en une transformation de l'espace des paramètres. Ainsi, dans l'espace de Hough classique, chaque ligne est un vecteur de coordonnées paramétriques θ et ρ, ou θ correspond à l'angle de la droite et ρ à la norme du vecteur perpendiculaire à cette droite et passant par l'origine. Comme on le déduit aisément, dans ce nouvel espace de représentation, un point correspond à une sinusoïde dans l'espace de Hough. Pour déterminer si trois point sont alignés, il suffit alors de vérifier si leurs sinusoïdes respectives ont un point commun. D'autres techniques, comme notamment la transformée de Radon peuvent également être utilisées à cet effet.
Toutefois, même si ces méthodes fournissent des résultats probants en traitement d'image, nous sommes quant à nous limités par un problème important. La taille de nos "images" n'excède pas en nombre de pixels le nombre de capteurs présents dans la zone. Nous pouvons avoir recourt à des méthodes de super-résolution afin d'augmenter artificiellement ce nombre, toutefois le facteur de différence reste relativement important. Cela induit directement une erreur sur la détection des lignes, que ce soit sur la qualité de l'estimateur, ou même simplement sur le nombre de lignes détectées et détectables. En fait, il existe un autre problème encore plus important que la dimension. En effet, si les capteurs sont repartis régulièrement, alors, effectivement, l'analogie à une image se fait aisément, et la

détection des lignes peut intervenir directement sur le réseau. Toutefois, dans le cas ou le réseau n'est pas régulier, comment utiliser cette méthode. La situation de droite sur la figure 7.2 nous démontre la difficulté a appréhender le scénario dans le cas non régulier. Dès lors, deux méthodes peuvent être employées. Soit nous effectuons une transformation qui permet de régulariser les coordonnées des capteurs, puis nous appliquons la méthode et nous effectuons la transformée inverse, soit, nous utilisons un gradient temporel. Ce gradient temporel est mis en image a gauche de la figure 7.2. L'avantage de ce gradient est qu'il surligne les capteurs changeants d'un instant à l'autre. Dès lors, (et c'est surtout flagrant dans le cas de trajectoires MRU, mais nous extrapolons au cas non-MRU) les points restants doivent nous permettre de reconstruire des droites, lesquelles droites correspondent (surtout si le nombre de capteurs est important) aux droites de séparation affectées d'une translation.

FIGURE 7.2 – *Application du gradient temporel et détection des lignes séparatrices*

Il est clair que cette partie demande un travail considérable afin d'être traitée convenablement. Nous ne nous sommes pas attardés déçu, puisqu'il s'agissait d'un travail technique, et nous nous sommes intéressant au problème de l'association temporelle des lignes en traitant notamment le cas d'une disparition ou apparition d'une ou plusieurs lignes (donc cibles) d'un instant à l'autre.

7.4 Problèmes d'association 2-D

7.4.1 Introduction

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe aux problèmes d'associations instantanés. Une première méthode, appelée méthode du plus proche voisin, consiste, comme son nom l'indique, à associer à une piste l'observation la plus proche, au sens d'une distance qu'il faut toutefois définir. Cette méthode conduit à de nombreuses erreurs d'associations pour la simple raison qu'elle ne tient pas compte des ambigüités qui peuvent exister, notamment lorsque les pistes sont proches. En effet, dans un contexte multicible, la difficulté d'associer correctement des données augmente si le nombre de cibles est important, et si les cibles sont proches.
Pour pallier à cette lacune il existe des méthodes appelées méthodes d'association 2-D, qui ont pour principe de minimiser un critère de distance global entre les pistes et les observations. Nous étudierons plus particulièrement l'algorithme de Munkres et l'algorithme des enchères.
Ces méthodes sont généralement développées sous les hypothèses suivantes :

- Les nombres de pistes et d'observations sont égaux ;

- Une piste doit être associée à une seule observation et une observation doit être associée à une seule piste.

Passons maintenant au calcul du principal outil pour l'association, la matrice d'association.

7.4.2 Construction de la matrice d'association

Toute méthode d'association nécessite la construction d'une matrice d'association A, dont le nombre de lignes est égal au nombre de pistes, et le nombre de colonnes est égal au nombre d'observations. L'élément a_{ij} de la matrice d'association doit définir un coût d'association entre la piste i et l'observation j. On peut faire intervenir dans le calcul de cet élément la vraisemblance de cette association. Comme l'on suppose que la différence entre l'estimation de notre observation et l'observation réelle suit une loi normale [Lei01], la vraisemblance est définie par :

$$f(\tilde{y}) = \frac{e^{-\frac{d^2}{2}}}{(2\pi)^{r/2}\sqrt{\det(S)}} \tag{7.1}$$

ou :

- d^2 est défini par $d^2 = \tilde{y}^T S^{-1} \tilde{y}$ est la norme du vecteur d'innovation $\tilde{y}$ (le vecteur d'innovation est la différence entre l'observation prédite et l'observation) ;
- S est la matrice de covariance associée à $\tilde{y}$;
- r est la dimension de l'observation ;

Par suite, on pose :

$$a_{ij} = \ln(f(\tilde{y})) = -\frac{d^2}{2} - \frac{r}{2}\ln(2\pi) - \frac{1}{2}\ln(\det(S)) \tag{7.2}$$

Pour l'algorithme de Munkres que nous définissons plus loin, la définition de a_{ij} est légèrement différente :

$$a_{ij} = -2\ln(f(\tilde{y})) = d^2 + \ln(\det(S)) \tag{7.3}$$

Cette définition de la matrice d'association n'est qu'un exemple, et nous pouvons évidemment la définir de façon différente, la plupart du temps dépendant du contexte. Ainsi, dans le cas de la régression définie précédemment, nous pouvons définir comme élément a_{ij} de la matrice A le coût d'association de la piste i à l'observation j.
Nous allons maintenant nous attacher à la description des deux algorithmes précédemment cités.

7.4.3 Comparaison des méthodes d'association 2-D

7.4.3.1 Algorithme de Munkres

L'algorithme de Munkres est l'un des premiers algorithmes permettant d'associer des matrices d'association rectangulaires. Il utilise des techniques de programmation linéaire pour résoudre le problème décrit ci-dessous.

On cherche à minimiser $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}\delta_{ij}$, sous les contraintes :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{N}\delta_{ij} &= 1 \qquad \forall i = 1, ..., N \\
\sum_{i=1}^{N}\delta_{ij} &= 1 \qquad \forall j = 1, ..., N \\
\delta_{ij} &\geq 0
\end{aligned}$$

ou a_{ij} est définit précédemment. La description de l'algorithme est fournit en Annexe C. L'avantage de cet algorithme est qu'il fournit une solution optimale. Sa complexité numérique est en $O(N^3)$.

7.4.3.2 Algorithme des enchères

L'algorithme des enchères est plus récent que le précédent, et résout le problème dual associé au problème d'optimisation défini précédemment. Le problème dual obtenu est un problème de minimisation sans contraintes plus simple à résoudre. On note p_i et π_j les variables duales associées à la piste P_i et à l'observation O_j. Le problème dual est de minimiser $\sum_{j=1}^{N}\pi_j + \sum_{i=1}^{N} p_i$ sous la contrainte :

$$\pi_j + p_i \geq a_{ij}, \qquad \forall O_j, P_i \in A(j)$$

Ou $A(j)$ désigne l'ensemble des pistes susceptibles d'être associées à l'observation O_j.
En supposant les p_i fixés, la variable optimale π_j sera égale au maximum sur $P_i \in A(j)$ de la quantité $a_{ij} - p_i$. D'ou :

$$\pi_j = \max_{P_i \in A(j)} (a_{ij} - p_i)$$

Le problème précédent se réécrit donc sous la forme d'un problème d'optimisation sans contrainte. Il s'agit de minimiser $q(p)$, ou $q(p)$ est défini par :

$$q(p) = \sum_{j=1}^{N} \max_{P_i \in A(j)} (a_{ij} - p_i) + \sum_{i=1}^{N} p_i$$

Cet algorithme est décrit en Annexe D.
D'après la théorie de la programmation linéaire, nous obtenons une solution optimale si $\pi_j = a_{ij} - p_i$, pour tout les couples piste-observation associés. Une relaxation de cette condition est de permettre à une piste d'être associée à une observation dont le profit est égal à $\pi_j - \epsilon$. La condition d'optimalité définie ci-dessus s'en trouve donc légèrement modifiée, et l'on a une nouvelle condition, que l'on nomme ϵ-complémentarité, également notée $\epsilon - CS$, si $\pi_j - \epsilon \leq a_{ij} - p_i$, pour tout les couples piste-observation associés. On dit alors que l'association est optimale si $\epsilon \leq \frac{1}{N}$.
La complexité de l'algorithme vaut $O(\frac{NAC}{\epsilon})$.

7.4.4 Exemple d'application

Pour mieux illustrer le fonctionnement de ces algorithmes, et surtout leur utilité, nous allons nous mettre en situation d'utilisation. Supposons que nous suivons 3 pistes différentes, et autant de cibles. A un instant donné, ces trois pistes ce sont rapprochées, et nous disposons de trois observations, qu'il nous faut pouvoir associer. La figure 7.3 représente la situation. Les coordonnées (transformées pour plus de lisibilité) des droites séparatrices successives sont représentées de couleurs différentes en fonction de la cible qui en est l'origine. Puis, les croix noires représentent les nouvelles coordonnées qu'il s'agit d'associer avec les trois pistes. La représentation est ici très générale, puisque la dynamique suivie par les coordonnées, bien que régulière, reste très variable. Il peut par exemple exister des situations ou l'évolution des coordonnées serait linéaire, ce qui simplifierai d'autant le calcul de la matrice d'association. En fait, sans être obligatoirement linéaire, la connaissance simple de la dynamique simplifie le calcul. Nous allons étudier

FIGURE 7.3 – *Scénario à trois pistes*

2 scénarii. Dans le premier, les observations sont distantes de $2\frac{\lambda}{\sigma}$ et dans le second de $\frac{\lambda}{\sigma}$. Dans le premier cas, la matrice d'association A est la suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0.089 & 0.335 & 1.914 \\ 0.443 & 0.153 & 0.443 \\ 3.254 & 0.985 & 0.049 \end{pmatrix}$$

L'algorithme des enchères devrait nous donner la solution 1->1, 2->2, 3->3, qui est la bonne solution. Dans ce cas particulier, l'algorithme des enchères nous donne effectivement la bonne solution. Néanmoins, nous pouvons nous demander dans combien de cas cette bonne solution nous sera fournie, étant donné que les valeurs de la matrice A dépend des erreurs de mesure des positions successives des mobiles. Nous allons donc essayer de déterminer combien de fois notre algorithme trouve la bonne association sur un grand nombre de tirage des erreurs. Ainsi, sur 1000 simulations, nous obtenons 565 bonnes associations.
Dans le second cas, ou les pistes sont deux fois plus proches, nous obtenons 404 bonnes associations sur 1000 simulations.

7.5 Problème d'assignation N-D

7.5.1 Formulation du problème

Nous pouvons nous demander si il ne serait pas possible d'étendre l'assignation 2-D à de l'assignation N-D. Auquel cas, nous pourrions raisonnablement prétendre résoudre quelques problèmes d'extraction multipistes. En fait, il faut voir le problème d'assignation N-D comme un problème d'optimisation combinatoire. La figure 7.4 présente un scénario d'assignation 3-D. Nous disposons de trois instants de mesure, et nous voudrions savoir quels mesures sont associées. Nous ne pouvons appliquer un algorithme d'assignation 2-D tout simple, car la matrice de coût n'est pas à deux dimensions. Nous devons donc trouver une autre solution.

Nous posons les hypothèses suivantes :

FIGURE 7.4 – *Scénario d'assignation 3-D : 3 scans*

- Une mesure est associée à une piste ou à une fausse alarme,
- Une piste est à l'origine d'au plus une mesure par scan.

Nous devons également rajouter une définition, qui concerne la notion de mesure factice [Gau97]. Celle-ci peut-être affectée à plusieurs pistes. Par sa définition, la mesure factice sert à modéliser une non-détection ou une fausse alarme.
Le problème est donc celui de la recherche de la partition optimale des mesures en piste et fausses alarmes. Pour un scénario donné 7.5, nous avons des partitions réalisables, lorsque chaque détection n'est associé qu'une seule fois au plus, et des partitions non-réalisables, lorsque cette contraintes n'est pas respectée.
Nous remarquons que dans ce cas, le nombre de piste est également à estimer.

FIGURE 7.5 – *Schéma d'un scénario d'assignation 3-D*

Rechercher une partition optimale de l'ensemble des mesures revient à rechercher l'ensemble fini des N-uplets respectant des contraintes d'association et optimisant une fonctionnelle de coût, ce qui se traduit en termes mathématiques par le problème d'optimisation combinatoire suivant :

$$\begin{aligned}\Psi_N &= \min_{\rho_{i_1 i_2 \ldots i_N}} \Psi(\rho) \\ &= \min_{\rho_{i_1 i_2 \ldots i_N}} \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_N=0}^{m_N} c_{i_1 i_2 \ldots i_N} \rho_{i_1 i_2 \ldots i_N}\end{aligned}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned}\sum_{i_2=0}^{m_2} \cdots \sum_{i_N=0}^{m_N} \rho_{i_1 i_2 \ldots i_N} &= 1 \\ &\vdots \\ \sum_{i_1=0}^{m_1} \cdots \sum_{i_{N-1}=0}^{m_{N-1}} \rho_{i_1 i_2 \ldots i_N} &= 1 \\ \rho_{i_1 i_2 \ldots i_N} \in \{0,1\}\end{aligned}$$

Ou la variable c représente le coût du N-uplet, et les N ensembles de contraintes correspondent à l'expression mathématique des règles d'association pour que la partition des mesures soit admissible (une mesure appartient à un et un seul N-uplet). Ce problème a

pour nom problème d'affectation de dimension N.

7.5.2 Choix de la fonction de coût

Comme défini dans le problème d'optimisation, il nous faut choisir une fonction de coût.
On défini pour chaque N-uplet un coût à partir de la probabilité que ce N-uplet provienne d'une source m de paramètres x, soit :

$$\begin{aligned} p(Z_{i_1 i_2 \ldots i_N | x_m}) &= p(z_{1,i_1}, \ldots, z_{N,i_N}, k_{1,i_1}, \ldots, k_{N,i_N} \mid x_m) \\ &= p(z_{1,i_1}, \ldots, z_{N,i_N} \mid k_{1,i_1}, \ldots, k_{N,i_N}, x_m) p(k_{1,i_1}, \ldots, k_{N,i_N} \mid x_m) \end{aligned}$$

ou k_{n,i_n} représente la variable d'affectation qui pour une source m vaut :

$$k_{n,i_n} = \begin{cases} m & \text{si} \quad i_n \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad i_n = 0 \end{cases}$$

La probabilité de ces événement dépend de la probabilité de détection. Nous pouvons écrire la vraisemblance du N-uplet dans le cas général de S capteurs et T scans

$$p(Z_{i_1 \ldots i_N} \mid x_m) = \prod_{n=1}^{N} \left[P_{d_s}(t) f_{\mathcal{N}(\beta_s(x_m,t), \sigma_s^2(t))}(z_{n,i_n}) \right]^{(1-\delta_{n,i_n})} \tag{7.4}$$

$$\times \left[1 - P_{d_s}(t) \right]^{\delta_{n,i_n}} \tag{7.5}$$

ou δ_{n,i_n} est une variable binaire telle que

$$\delta_{n,i_n} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i_n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous pouvons écrire cela car les mesures sont indépendantes conditionnellement à x_m.
On défini également la vraisemblance du N-uplet constitué uniquement de fausses alarmes :

$$p(Z_{i_1 i_2 \ldots i_N | x = \emptyset}) = \prod_{n=1}^{N} \left[\frac{1}{V_s(t)} \right]^{\delta_{n,i_n}} \tag{7.6}$$

Nous définissons alors le coût du N-uplet comme un rapport de vraisemblance :

$$c_{i_1 \ldots i_N} = -\ln \left(\frac{\max_{x_m} p(Z_{i_1 \ldots i_N} \mid x_m)}{p(Z_{i_1 \ldots i_N} \mid x = \emptyset)} \right) \tag{7.7}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{t=1}^{T} \sum_{s=1}^{S} \Big[(1 - \delta_{n,i_n}) \big[\frac{1}{2\sigma_s^2} (z_{i_s}^s(t) - \beta_s(\hat{x}, t))^2 \\ &\quad + \ln \big(\frac{\sigma_s \sqrt{2\pi}}{P_{d_s}(t) V_s(t)} \big) \big] - \delta_{n,i_n} \ln(1 - P_{d_s}(t)) \Big] \end{aligned} \tag{7.8}$$

Une fois que nous avons ces coûts, il ne reste plus qu'a résoudre le problème d'optimisation défini en début de partie. Il existe pour cela des algorithmes dont celui de relaxation lagrangienne, présenté par Gauvrit [Gau97].

7.5.3 Affectation 3-D

Un problème d'assignation 3-D peut se présenter sous plusieurs formes. Nous pouvons avoir un nombre T de pistes, et deux scans successifs de détection que nous devons assigner aux pistes. Ou bien nous pouvons avoir T pistes, deux plateformes de détections pour un instant donné, et nous cherchons à associer les pistes avec les détections de chacune des plateformes. Dans [CBW04], Chiafair, Blair et West proposent un algorithme de résolution du problème d'affectation 3-D.
Considérons trois scans, comme sur la figure 7.4. Chaque scan k est composé de M_k observations. Le problème est d'associer les observations de chaque scan. Le problème d'optimisation est donc de minimiser une fonctionnelle $v(z)$ par rapport à $z_{i_1 i_2 i_3}$:

$$v^*(z) = \min \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} c_{i_1 i_2 i_3} z_{i_1 i_2 i_3} \tag{7.9}$$

sous les contraintes :

$$\sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} z_{i_1 i_2 i_3} = 1 \quad \forall i_3 = 1, 2, \ldots, M_3 \tag{7.10}$$

$$\sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_3=0}^{M_3} z_{i_1 i_2 i_3} = 1 \quad \forall i_3 = 1, 2, \ldots, M_3 \tag{7.11}$$

$$\sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} z_{i_1 i_2 i_3} = 1 \quad \forall i_3 = 1, 2, \ldots, M_3 \tag{7.12}$$

L'algorithme de relaxation lagrangienne proposé pour la résolution suit la démarche suivante. Plutôt que de considérer les trois contraintes définies ci-dessus comme inviolables, nous allons relaxer l'une d'elles, ce qui nous permettra de nous retrouver sur un problème d'affectation 2-D, que nous avons abordé au début du chapitre. Néanmoins, afin de ne pas perdre complètement la contrainte que nous avons relâché, nous définissons un coût de violation de la contrainte. Si l'on décide de relâcher la première des contraintes, par exemple, on note alors u_{i_3} le vecteur des multiplicateurs de Lagrange définissant le coût de violation. Par suite, le problème relaxé à un coût associé :

$$q(u) = \min \sum_{i_1=0}^{M_1} \sum_{i_2=0}^{M_2} \sum_{i_3=0}^{M_3} (c_{i_1 i_2 i_3} - u_{i_3}) z_{i_1 i_2 i_3} + \sum_{i_3=0}^{M_3} u_{i_1} \tag{7.13}$$

Nous cherchons alors le vecteur u_{i_3} qui minimise la fonctionnelle q définie ci-dessus. Nous l'obtenons par un algorithme du sous-gradient détaillé dans [FY81]. Puis nous obtenons les affectations optimales sur les deux premiers scans. A partir de la solution optimale obtenue, nous résolvons un nouveau problème d'affectation 2-D par l'introduction

de la contrainte jusqu'à présent ignorée. Nous obtenons une solution générale réalisable, qui nous permet de réactualiser les coûts de la relaxation lagrangienne [CBW04]. L'algorithme est itératif, et continu jusqu'à ce que la différence entre le coût q du problème relaxé et le coût v du problème non-relaxé soit très faible.

Une application de ce problème est présenté sur la figure 7.6. Nous avons 3 scans, représentant des instants successifs, le premier avec trois observations, le deuxième avec deux, et le troisième avec trois observations également. Après avoir défini un scénario, puis une matrice des coûts, nous avons lancé l'algorithme d'affectation 3-D par relaxation lagrangienne. Le résultat que nos obtenons est le suivant : nous détectons trois pistes, et une fausse alarme. Les mesures factices sont utilisées par la piste qui démarre du point 3, et par la piste qui finie par les deux points 2. Nous avons donc une création de piste.

FIGURE 7.6 – *Schéma d'un scénario avec assignation*

7.6 Conclusion

Rendu à ce point, nous avons donc détecté les lignes, tentés de les associer temporellement. Afin de déterminer l'estimateur exact de la trajectoire de chacune des cibles, et en particulier les estimateurs des distances parcourues l'instant précédent, nous nous appliquons à ré-utiliser l'algorithme que nous avons défini dans le chapitre précédent. En effet, les correcteur θ_t et λ_t sont immédiatement applicable à ce problème multicible simplifié, et les estimateurs sont donc simplement calculés. D'un point de vue purement théorique, il est immédiat que pour un nombre infini de capteur la convergence d'une telle méthode n'est pas évidente. En effet, plusieurs facteurs d'erreur sont à prendre en compte. Les lignes peuvent ne pas être bien détectées, ou pas détectées du tout, et les algorithmes d'association ne sont pas infaillibles. Ainsi, même si les méthodes prises séparément semblent performante, il serait intéressant d'étudier la convergence de l'algorithme global, explicitement si possible [1] et sinon à l'aide de simulations.

1. mais quand même peu probable

Conclusion

Cette dernière partie du manuscrit correspond à l'étude de la faisabilité du suivi d'une cible évoluant sur une zone surveillée par un réseau de capteurs binaires. Nous étudions dans les deux premiers chapitres deux scénarios diamétralement opposés. Nous montrons tout d'abord que dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme seul le vecteur vitesse peut être estimé avec précision, et nous proposons deux méthodes à cet effet, les séparateurs à vastes marges (SVM) et la régression à direction révélatrice. Les résultats obtenus par ces deux méthodes sont relativement complémentaires, même si la méthode des SVM est plus aisée à mettre en place [2].
La limitation du déplacement de la cible a pu être relâchée dans le chapitre suivant et le développement d'un nouvel algorithme de suivi a été présenté. Les résultats obtenus sont prometteurs, mais souffrent de la nécessité d'avoir un nombre conséquent de capteurs pour devenir pertinent. Par ailleurs, les hypothèses sur le mouvement de la cible sont essentiellement déterministes et n'autorisent pas la cible à changer radicalement de direction [3]. Nous montrons enfin que l'algorithme semble converger vers une borne inférieure qui dépend fortement de la densité de capteurs et de leur répartition sur la zone.
Enfin, le point final de cette partie traite de l'extension multicible de notre méthode. Ce que nous proposons alors est de détecter les lignes droites (ou lignes séparatrices) dans ce que nous assimilons à une image de faible résolution, puis d"effectuer une association spatio-temporelle de ces lignes. Cela effectué, nous retombons sur la problématique du chapitre précédent, résolue. Nous renvoyons les problèmes de détection des lignes aux spécialistes du traitement de l'image, et nous nous sommes concentrés sur l'association entre les lignes séparatrices. Nous noterons d'ailleurs que le résultat sur la probabilité de bonne association obtenu en première partie peut être réutilisé dans le cas multicible si les cibles se déplacent selon un mouvement rectiligne uniforme. En effet, dans ce cas, les droites séparatrices ont des paramètres qui seront alignés temporellement, et l'association agissant sur ces paramètres peut correspondre au cas étudié en première partie.

2. En effet, la fonction d'estimation nécessaire pour la régression à direction révélatrice peut s'avérer pénible à calculer
3. du moins pas de façon trop rapide

Conclusions et perspectives

CHAPITRE 8

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes intéressés à l'estimation des paramètres dynamiques d'une cible évoluant dans un espace surveillé par un réseau de capteurs. la notion de capteur étant assez vague, et pouvant recouvrir des types d'information très divers, nous avons développé notre travail suivant un axe bien particulier dont la synthèse des travaux mettra la logique en lumière. Suite à cela, nous dégagerons quelques perspectives de recherche susceptibles de compléter le présent manuscrit.

Synthèse des travaux effectués

Le manuscrit est décomposé en trois partie distincte susceptible d'être lues de façon indépendante. Toutefois, la construction de ce document (et des travaux qui y sont présentés) ont suivi une logique centrée autour de l'information fournie par le capteur (et le réseau par extension). Ainsi, nous avons débuté avec une information exhaustive quoique bruitée sur la position de la cible à chaque instant. Puis, nous avons continué avec une information partielle (quoique quantitative) avant de terminer par une information véritablement frustre. Durant chaque étape, plusieurs scénarios de déplacement de l'objet suivi ont été étudiés. Nous rappellerons nos contributions principales au sein des paragraphes qui suivent.

Partie I

Si l'on considère une information bruitée de la position d'une cible, il existe de nombreux travaux qui permettent d'effectuer un suivi efficace de celle-ci. Toutefois, malgré l'existence de tous ces algorithme, aucune analyse de performance n'a été faite en fonction des paramètres d'intérêts que sont la durée du suivi et la distance d'une fausse mesure. Si l'on analyse l'expression de la probabilité de bonne association que l'on obtient dans le cas le plus simple d'un mouvement rectiligne uniforme, ce constat n'est guère surprenant. En dépit de la forme peu encourageante de cette fameuse probabilité de bonne association, nous nous sommes engagés à simplifier son expression pour permettre l'extraction de l'influence des paramètres d'intérêts. Suite à de nombreux calculs exacts et approximés, nous avons pu fournir une expression explicite de cette probabilité ou les influences étaient relativement simples à identifier. Les résultats de simulation confirment d'ailleurs la qualité de l'approximation dans le cadre défini dans cette partie de la thèse. L'extension à de multiples fausses mesures a également été proposée, mais

les nombreuses limitations (mathématiques) auxquelles nous avons dû faire face ne nous ont permis que de proposer des approximations moyenne de la probabilité de bonne association.

Partie II

Suite à ces résultats d'association, nous avons décider de nous attarder sur des capteurs qui ne nous fourniraient qu'une information limitée sur la position de la cible. En effet, considérons un capteur susceptible de déterminer si la cible s'approche ou s'éloigne de lui. A priori, nous considérons alors un capteur binaire. Toutefois, la fréquence d'acquisition des données est tellement élevée que nous connaissons avec précision l'instant ou la cible se trouve le plus proche du capteur [1]. Cette information est utile dans un cadre très particulier. En effet, si nous continuons à modéliser le mouvement de notre cible par un déplacement rectiligne uniforme, alors cet instant de plus grande proximité ne peut intervenir qu'une seule fois lors de la trajectoire. Par ailleurs, nos travaux ont montré que s'il était possible d'estimer le vecteur vitesse de la cible, la position de celle-ci demeurait inestimable [2]. Nous avons également montré que pour cette estimation de vitesse, la méthode du maximum de vraisemblance convergeait vers la vraie valeur. Enfin, nous avons varié nos approches en considérant des trajectoires différentes. Dans un premier temps, la cible décrivait toujours un mouvement rectiligne, mais son vecteur vitesse était cette fois considéré comme variable en norme. Nous avons proposé un estimateur pour ce nouveau modèle et nous en avons étudié les propriétés. Puis, l'aspect trop restrictif d'une cible se déplaçant en ligne droite nous a amené a étudié les possibilité de modélisation d'une cible manœuvrante. Et dans le cas d'une cible se déplaçant par mouvement rectiligne uniforme successif, nous proposons des estimateurs du vecteur vitesse. Deux cas sont étudiés, celui ou nous connaitrions avec certitude l'instant de manœuvre, et celui ou nous ne le connaissons pas. Dans le premier scénario, cette information supplémentaire permet non seulement d'estimer le vecteur vitesse de la cible à chaque étape, mais également de déterminer sa position. Dans le deuxième cas, nous proposons une méthode permettant la constitution d'échantillons dépareillés. La difficulté par la suite consiste à séparer ces échantillons. Nous proposons une liste de méthodes efficaces si les échantillons sont suffisamment important. L'estimation des paramètres dans ces échantillons se fait à l'aide de la méthode préconisée pour une cible en MRU.

Partie III

Cette dernière partie suit tout naturellement la partie précédente en ce qu'elle utilise les mêmes capteurs. En effet, nous rappelons que l'hypothèse effectuée précédemment était que la fréquence d'acquisition des données était suffisamment élevée pour permettre une modélisation de l'instant de plus grande proximité. Cette hypothèse est désormais levée, chaque capteur ne nous fournit plus que l'information binaire de base. C'est à dire, soit la distance entre la cible et le capteur augmente, soit elle diminue. Le premier avantage que nous pouvons retirer de cette modélisation est que désormais nous pouvons effectué un traitement en temps réel des données. Puis, comme il en est devenu

1. avec toutefois une incertitude modélisée de façon gaussienne
2. au sens statistique du terme, et non pas financier

une habitude lors de nos travaux, nous décidons de débuter avec un modèle de déplacement rectiligne uniforme de la cible. Après avoir démontré qu'il n'était de nouveau pas possible d'effectuer une estimation de la position de la cible avec cette seule information binaire, nous proposons une méthode pour extraire l'information importante en utilisant à profit l'information spatio-temporelle du réseau. Nous montrons alors qu'il est possible d'effectuer une estimation précise du vecteur vitesse de la cible. Par la suite, nous relâchons l'hypothèse de MRU de la cible pour lui permettre une grande liberté de mouvement. La trajectoire de la cible est alors définie selon une marche aléatoire gaussienne, et nous proposons un nouvel algorithme de suivi de la cible dans ce cas. Nous montrons alors que l'algorithme proposé permet le suivi de la cible en temps réel grâce aux temps de calculs réduits [3], et que même si la convergence de l'erreur quadratique moyenne de l'estimateur défini est bornée par une valeur strictement positive, nous pouvons suivre la cible efficacement. Enfin, nous proposons une extension au suivi multicible en trois étapes. La première consiste à considérer le réseau comme une image, et faire de la détection de ligne. Puis, lorsque les lignes sont détectées, utiliser un algorithme d'association afin de déterminer les pistes de la façon la plus certain possible. Enfin, la dernière étape consiste à utiliser l'algorithme de suivi précédemment proposé.

3. ceci est grandement du à la simplicité des méthodes statistiques employées

CHAPITRE 9

PERSPECTIVES

De la même façon que nous avons passé en revue les travaux que nous avons mené, nous pouvons proposer des améliorations, et des pistes à explorer pour chaque partie de ce document. Pour toutes ces parties, il est clair que le passage à la troisième dimension constitue une première et prioritaire extension. Mais plus spécifiquement, nous décrivons dans les paragraphes qui suivent ce qui nous semble pertinent.

Partie I

Bien entendu, le cadre très limité dans lequel nous avons effectué nos calculs fournit de grandes possibilités d'ouvertures pour le futur. Que se passe t'il si nous ne considérons plus une cible se déplaçant en mouvement rectiligne uniforme. Une question subsidiaire serait de savoir si il est possible de ramener des trajectoires quelconques à un scénario de MRU. Et si oui, lesquelles. Est il possible d'envisager plus d'une fausse mesure à un instant donné. Enfin, que se passe t'il si la règle de décision change. En effet, nous avons utilisé comme règle de décision l'erreur quadratique moyenne, mais il ne s'agit pas de la seule règle envisageable. Le même raisonnement est-il possible avec une nouvelle règle. Autant de questions auxquelles il serait intéressant de répondre.

Partie II

Cette approche par les instants de plus grande proximité ne semble pas aisément généralisable. En effet, c'est la contrainte sur le mouvement qui nous permet d'arriver à des conclusions et des résultats intéressants. L'extension à des scénarios divers[1] ne semble pas promise à de grande perspectives. Exception faite toutefois de la généralisation de la diffusion à une deuxième dimension. Même si l'approche souffrirait clairement de l'existence de minimum locaux, une étude a posteriori pourrait sans doute être envisageable.

Partie III

Finalement, les principales ouvertures possibles concernent cette dernière partie. En effet, l'approche par les capteurs binaires directionnels souffre de nouveauté, et donc de

1. en tout cas autres que présentés dans cette partie

nombreuses voies sont encore inexplorées. Même si nous avons proposé une méthode permettant de prendre en compte les erreurs de données, nous ne nous attardons pas à modéliser ce phénomène. Pouvons nous détecter un capteur défectueux, doit on établir des côtes de fiabilité, quel est la probabilité qu'un capteur sain fournisse une fausse information. Est ce qu'un a priori sur la trajectoire permettrait de positionner au mieux le réseau de capteurs.
Par ailleurs, l'algorithme que nous proposons est entièrement déterministe. L'utilisation d'un filtre particulaire et d'un apprentissage un peu plus poussé de la trajectoire de la cible ne permettrait il pas une convergence plus rapide des estimateurs.
Au delà de toutes ces considérations, nous devons également pointer une limitation de notre travail qui pourrait mener à des résultats intéressants. En effet, nous nous sommes concentrés sur des réseaux homogènes. Les capteurs étaient tous du même type. Que se passerait il si nous mixions les capteurs. Notamment en utilisant des capteurs de proximité couplés avec les capteurs directionnels ? Car dans les faits, c'est déjà le cas. La portée de tous les capteurs est limitée. En couplant cette information avec celle déjà détenue, ne serions nous pas à même de produire une estimation plus précise ?

Annexes

ANNEXE A

CALCULS DÉTAILLÉS DU CHAPITRE 3

Annexe A.1

Le but de cette annexe est de fournir une expression explicite des deux formes quadratiques définissant la moyenne et la variance de $\mathcal{L}\left(\Delta_{f,c} | \, \tilde{\varepsilon}_l = \mathbf{e}_l\right)$ (voir l'équation 2.15). La première étape consiste à calculer une forme explicite du numérateur de $\Psi(\mathbf{e}_l)$. En considérant les particularités [1] des vecteurs $\mathbf{e}_l$ et fa_l, nous avons juste besoin de déterminer une expression explicite de la matrice diagonale par blocs $\mathcal{M}$, de blocs $\mathcal{M}_{l,l}$ (2×2). Après calculs, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{l,l} = \left[1 - \frac{2\left(2N+1-6\,l+\frac{6\,l^2}{N}\right)}{(N+1)(N+2)}\right] I_2 \ , \\
&\text{puis :} \\
&\mathbf{e}_l{}^T \mathcal{M} \mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l^T \mathcal{M} \ \mathsf{fa}_l = \left[1 - \frac{2\left(2N+1-6l+\frac{6l^2}{N}\right)}{(N+1)(N+2)}\right] \ \left(\|\mathbf{e}_l\|^2 - \|\mathsf{fa}_l\|^2\right) \ .
\end{aligned} \tag{A.1}$$

Nous considérons dans un deuximème temps le dénominateur de $\Psi(\mathbf{e}_l)$. Rappelons la forme de la matrice Φ :

$$\begin{aligned}
\Phi &= (I - \mathcal{H})\Sigma_{\mathsf{com}}(I - \mathcal{H}^T) \ , \\
&= \underbrace{\Sigma_{\mathsf{com}} - \Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{H}^T - \mathcal{H}\Sigma_{\mathsf{com}}}_{\Phi^1} + \mathcal{H}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{H}^T \ .
\end{aligned} \tag{A.2}$$

En remarquant que la sous-matrice $\Phi^1(l,l)$ est nulle, nous pouvons nous restreindre au calcul de de la sous-matrice de $\mathcal{H}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{H}^T$. Les calculs suivants nous donnent :

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{H}^T = \mathcal{X}\,\mathcal{C}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{C}^T\,\mathcal{X}^T \ , \\
&\text{où :} \\
&\mathcal{C} = \begin{pmatrix} (4N+2)I_2 & \dots & (4N+2-6(k-1))I_2 & \dots \\ -\frac{6}{\delta}I_2 & \dots & -\frac{6}{\delta}(1-\frac{2(k-1)}{N})I_2 & \dots \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Dans un souci de simplicité, nous supposons que nous avons $\Sigma_{\mathsf{com}} = \text{diag}\left(\underbrace{I_2, \cdots, I_2}_{l-1}, 0, \underbrace{I_2, \cdots, I_2}_{N-l-1}\right)$.

Puis des calculs classiques nous mènent à une expression assez simple de la matrice $\mathcal{C}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{C}^T$:

1. ces vecteurs sont composés de zéros exceptés pour les l-ièmes composantes en x et en y

$$\mathcal{C}\Sigma_{\mathsf{com}}\mathcal{C}^T = \frac{1}{(N+1)^2(N+2)^2}\begin{pmatrix} Q_1(l,N)I_2 & Q_2(l,N)I_2 \\ Q_2(l,N)I_2 & Q_3(l,N)I_2 \end{pmatrix} , \tag{A.4}$$

D'où nous déduisons finallement ($\Phi_{l,l}$ étant la matrice bloc de taille 2 de la matrice Φ :

$$\Phi_{l,l} = \frac{1}{(N+1)^2(N+2)^2}\ \left[Q_1(l,N) + 2l\ \delta Q_2(l,N) + l^2\ \delta^2 Q_3(l,N)\right] I_2 , \tag{A.5}$$

Q_1, Q_2 et Q_3 sont des polynomes dont les expressions sont les suivantes :

$$\left|\begin{array}{lcl} Q_1(l,N) & = & 4N^3 - 50N^2 + N(48l-18) + l(24-36l) + 4 . \\ Q_2(l,N) & = & -\frac{6}{\delta}\left[N^2 - 5N - 2 + 4l(1+\frac{1}{N} - \frac{3l}{N})\right] \\ Q_3(l,N) & = & \frac{36}{\delta^2}\left[\frac{N}{3} - 1 + \frac{2}{N}(\frac{1}{3} + 2\,l - \frac{2\,l}{N^2})\right] . \end{array}\right.$$

Ce qui finalement nous conduit à :

$$(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l)^T\Phi(\mathbf{e}_l - \mathsf{fa}_l) = \frac{1}{(\mathsf{N}+1)^2(\mathsf{N}+2)^2}\ \left[\mathsf{Q_1(l,N)} + 2\mathsf{l}\ \delta\mathsf{Q_2(l,N)} + \mathsf{l}^2\ \delta^2\mathsf{Q_3(l,N)}\right]\ \|\mathbf{e}_\mathsf{l} - \mathsf{fa}_\mathsf{l}\|^2 \tag{A.6}$$

Annexe A.2

Cette annexe nous fournit une méthode pour le calcul des coefficients γ_i selon le critère des moindres carrés. Soient φ_i ($i = 1, \cdots, n$) les fonctions définies par $\varphi_i \triangleq \frac{n}{6i\ \mathsf{den}}\ \mathbf{1}_{[b^i_{\mathsf{inf}}, b^i_{\mathsf{sup}}]}$, alors les coefficients γ_i sont solutions du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{\gamma_i} \|g - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i\varphi_i\|_2^2 , \tag{A.7}$$

Ou g est la densité de la noi normale de l'équation 2.48, et $\| - \|_2$ la norme L^2. Il est alors établi que les γ_i sont solutions du système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \gamma_1\|\varphi_1\|_2^2 + \gamma_2\langle\varphi_2,\varphi_1\rangle + \cdots + \gamma_n\langle\varphi_n,\varphi_1\rangle & = & \langle g,\varphi_1\rangle , \\ \vdots & & \\ \gamma_1\langle\varphi_1,\varphi_n\rangle + \gamma_2\langle\varphi_2,\varphi_n\rangle + \cdots + \gamma_n\|\varphi_n\|_2^2 & = & \langle g,\varphi_n\rangle . \end{array}\right. \tag{A.8}$$

Les normes $\|\varphi_i\|_2^2$, ainsi que les produits scalaires $\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle$ sont calculés à l'aide de l'expression suivante :

$$\langle\varphi_i,\varphi_j\rangle = \frac{n}{6\ \inf(i,j)}\ \frac{1}{\mathsf{den}} . \tag{A.9}$$

Et le système linéaire de l'équation A.8 devient :

$$\sum_{i}^{n}\gamma_i = \langle g, \mathbf{1}_{[b^1_{\mathsf{inf}}, b^1_{\mathsf{sup}}]}\rangle\gamma_i = i(i-1)\langle g, \varphi_{i-1} - \varphi_i\rangle - i(i+1)\langle g, \varphi_i - \varphi_{i+1}\rangle . \tag{A.10}$$

Et, de l'expression immédiatement précédente, nous obtenons :

$$\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} i\gamma_i = 2\ \langle g, \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbf{1}_{[b^i_{\mathsf{inf}}, b^i_{\mathsf{sup}}]}\rangle , \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma_i}{i} = \frac{1}{n}\ \langle g, \mathbf{1}_{[b^n_{\mathsf{inf}}, b^n_{\mathsf{sup}}]}\rangle . \end{array}\right. \tag{A.11}$$

De l'équation A.11 nous déduisons l'expression de la tendance de $P(\bar{\Delta}_{f,c} \geq 0)$ comme une fonction de N (voir équation 2.44) :

$$\begin{aligned} \mathsf{slo} &= \frac{6}{n}\sum_{i=1}^{n} i\gamma_i - \sum_{i=1}^{n}\frac{\gamma_i}{i} \ , && \text{(A.12)} \\ &= \frac{1}{n}\left(12\ \langle g, \sum_{i=1}^{n} i\ \mathbf{1}_{[b^i_{\mathsf{inf}}, b^i_{\mathsf{sup}}]}\rangle - \langle g, \mathbf{1}_{[b^n_{\mathsf{inf}}, b^n_{\mathsf{sup}}]}\rangle\right) \ . && \text{(A.13)} \end{aligned}$$

On vérifie que slo est bien positif.

Annexe A.3

Le but de cette annexe est juste de rappeler un résultat statistique classique. Supposons que la variable aléatoire X suive la loi conditionnelle suivante :

$$X \mid m \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \ , \tag{A.14}$$

où $m \sim \mathcal{N}(\theta, s^2)$. Alors, par intégration par m, nous avons :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(x \mid m) g(m)\ dm \ , \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\pi\sigma s} e^{-\left(\frac{x-m}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)^2 - \left(\frac{m-\theta}{\sqrt{2s^2}}\right)^2} dm \end{aligned} \tag{A.15}$$

Après quelques manipulations calculatoires de l'intégrales, nous obtenons :

$$h(x) = \frac{1}{2\pi(s^2+\sigma^2)} \exp\left[-\frac{1}{2(s^2+\sigma^2)}(x-\theta)^2\right] \ , \tag{A.16}$$

Ce qui nous permet de conclure que la variable aléatoire X est distribué normallement, de moyenne θ et de variance $(\sigma^2 + s^2)$. Ce qui implique que l'incertitude sur la moyenne m résulte en une augmentation de la variance de X (et donc sur son étalement).

Annexe A.4

L'objet de cette annexe consiste à calculer m_0, σ_0^2, v_0 et s_0^2. Quoique long, les calculs restent assez élementaires, c'est pourquoi nous ne présentons ici que les principales étapes des calculs. Tout d'abord, rappelons que nous avons :

$$
\left|
\begin{array}{rcl}
m_0 & = & \mathbb{E}_{XY}\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\alpha_N(l_k,l_{k'})(x_{l_k}x_{l'_k}+y_{l_k}\,y_{l'_k}-\lambda_{l_k}\,\lambda_{l'_k})\right] \ , \\
\sigma_0^2 & = & \mathbb{V}_{XY}\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\alpha_N(l_k,l_{k'})(x_{l_k}\,x_{l'_k}+y_{l_k}\,y_{l'_k}-\lambda_{l_k}\,\lambda_{l'_k})\right] \ , \\
v_0 & = & 4\mathbb{E}_{XY}\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\theta(l_k,l_{k'})\left((y_{l_k}-\lambda_{l_k})\,(y_{l'_k}-\lambda_{l'_k})+x_{l_k}\,x_{l'_k}\right)\right] \ , \\
s_0^2 & = & 16\mathbb{V}_{XY}\left[\sum_{k=1}^{K}\sum_{k'=1}^{K}\theta(l_k,l_{k'})\left((y_{l_k}-\lambda_{l_k})(y_{l_{k'}}-\lambda_{l'_k})+x_k\,x_{k'}\right)\right] \ .
\end{array}
\right.
\tag{A.17}
$$

Ces calculs sont assez routiniers, seule la dernière étape requiert d'avantage d'attention. Dans le cas indépendant, nous avons :

$$
\mathbb{V}_{XY}(xy) \quad = \quad \mathbb{V}(x)\mathbb{E}(y^2)+\mathbb{V}(y)\mathbb{E}(x^2) \ . \tag{A.18}
$$

Le problème que nous devons résoudre concerne le calcul de la seconde expression, plus délicat à cause des termes croisés, mais finalement rapidement résolu à l'aide des moments de la loi normale :

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbb{V}_Y\left[(y_k-\lambda_k)^2\right] & = & \mathbb{E}\left[(y_k-\lambda_k)^4\right]-\mathbb{E}^2\left[(y_k-\lambda_k)^2\right] \ , \\
 & = & \mathbb{E}\left[y_k^4-4\,y_k^3\lambda_k+6\,y_k^2\lambda_k^2-4\,y_k\lambda_k^3+\lambda_k^4\right]-(1+\lambda_k^2)^2 \ , \\
 & = & 3+6\lambda_k^2+\lambda_k^4-1-2\lambda_k^2-\lambda_k^4 \ , \\
 & = & 2+4\lambda_k^2 \ .
\end{array}
\tag{A.19}
$$

Et nous avons pour finir :

$$
s_{01}^2 \quad = \quad 64\sum_{k=1}^{K}\theta^2(k,k)(1+\lambda_k^2) \tag{A.20}
$$

ANNEXE B

DÉTAILS DES ALGORITHMES DU CHAPITRE 9

AnnexeB.1 : Algorithme de Munkres

La méthode est composée de 5 étapes avec une phase d'initialisation.

– Phase d'initialisation :

1. Calcul du minimum k de lignes et de colonnes.

2. Si le nombre de lignes est plus grand que le nombre de colonnes aller au point 5 de la phase d'initialisation.

3. Pour chaque ligne de la matrice, soustraire le plus petit élément de la ligne de chaque élément de la ligne.

4. Si le nombre de colonnes est plus grand que le nombre de lignes, aller à l'étape 1 de l'algorithme.

5. Pour chaque colonne de la matrice, soustraire le plus petit élément de la colonne à chaque élément de la colonne.

– Etape 1

1. Trouver un zéro, Z, de la matrice.

2. S'il n'existe pas de zéro marqué avec (*) dans sa ligne ou sa colonne, marquer le zéro avec (*) :il devient Z^*.

3. Répeter l'étape 1.2 pour tous les zéros de la matrice.

4. Passer à l'étape 2.

– Etape 2

1. Barrer toutes les colonnes contenant un zéro marqué(*).

2. Si k colonnes ont été barrées, les positions des zéros marqués(*) indiquent les paires d'association. La recherche est terminée.

3. Sinon, passer à l'étape 3.

– Etape 3

1. Choisir un zéro non barré et le marquer (').

2. S'il n'y a pas de zéro marqué (*) dans sa ligne, passer à l'étape 4.

3. S'il y a un zéro marqué (Z^*) dans sa ligne, barrer cette ligne et libérer la colonne de (Z^*).

4. Répeter (3) jusqu'a ce que tous les zéros soient barrés. Aller à l'étape 5.

– Etape 4

1. La séquence des zéros (*) et des zéros (') alternés est définie de la façon suivante :

   – a) Soit Z_0 le Z' non barré. S'il n'y a pas de Z^* dans la colonne de Z_0 passer à l'étape 4.1.e.

   – b) Soit Z_1 le Z^* dans la colonne de Z_0.

   – c) Soit Z_2 le Z' dans la colonne de Z_1.

   – d) Continuer à appliquer les étapes 4.1.b et 4.1.c (ou l'étape 4.1.b regarde dans la colonne de Z_2 au lieu de Z_0) jusqu'à ce qu'un Z_2 avec aucun Z^* dans sa colonne soit trouvé.

   – e) Retirer les (*) de chacun des Z^* de la séquence.

   – f) Transformer chacun des Z' de la séquence en Z^*.

2. Retirer les (') de tous les Z' et libérer chaque ligne.

3. Passer à l'étape 2.

– Etape 5

1. Trouver le plus petit élément h non barré de la matrice ; h est positif.

2. Ajouter h à toutes les lignes barrées.

3. Soustraire h à toutes les colonnes non barrées.

4. Retourner à l'étape 3 sans changer les Z^*, Z' et les lignes barrées.

Annexe B.2 : Algorithme des enchères

La constante ϵ est fixée. L'algorithme commence un ensemble vide et un vecteur prix qui vérifient la condition de $\epsilon - CS$ définit au chapitre 4. Cette condition sera vérifiée tout au long de l'algorithme. En général le prix initial de chaque piste est égal à zéro, c'est à dire $p_i = 0 \quad \forall i = 1, ..., N$. A la fin de chaque itération de l'algorithme, S et p seront remis à jour. Chaque itération se compose de deux phases qui sont la phase d'enchère et la phase d'association. L'algorithme s'arrète lorsque l'ensemble S est complet.

– Etape 1 : Phase d'enchère P_i
  Dans cette phase, seules les observations O_j non encore affectées sont utilisées.

1. Pour chaque observation O_j, définir la meilleure piste P_i, ce qui revient à trouver la piste i_j telle que

$$v_{i_j j} = a_{i_j j} - p_{i_j} = max_{i=1,...,N}(a_{ij} - p_i) \tag{B.1}$$

2. Trouver la deuxième meilleure piste pour l'observation O_j, ce qui revient à trouver la piste i'_j telle que

$$w_{i'_j j} = a_{i'_j j} - p_{i'_j} = max_{i=1,...,N}^{i' \neq i}(a_{ij} - p_i) \tag{B.2}$$

   S'il n'en existe pas d'autre, alors $w_{i'_j j} = -\infty$

3. Calcul de l'enchère $b_{i_j j}$ de l'observation O_j pour la piste P_{i_j} en utilisant la relation suivante :

$$b_{i_j j} = p_{i_j j} + v_{i_j j} - w_{i'_j j} + \epsilon \tag{B.3}$$

– Etape 2 : Phase d'association
  Pour chaque piste P_i :

  1. Détermination de l'ensemble des observations qui ont "fait une enchère" pour la piste P_i dans la phase d'enchère.

  2. Si cet ensemble n'est pas vide alors la composante p_i du vecteur p est mise à jour :

$$p_i = max_j(bi_jj) \tag{B.4}$$

  3. On enlève de S un couple (P_i, O_j) (s'il en existe). On ajoute à S le couple (P_{i_j}, O_j)

Table des figures

2.1 *Le scénario de l'association. En pointillé : association correcte, en tiret : fausse association.* . . . 22
2.2 $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ *en fonction de* N. . . . 27
2.3 *Le schéma d'approximation : les fonctions* φ_i . . . 28
2.4 *Le domaine d'intégration initial et son approximation (Vrai : violet ; Approximations : lignes continues rouges et noires)* . . . 31
2.5 *La probabilité de bonne association (tirets)* $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ *et son approximation (en rouge :* $N = 20$*, en bleu* $N = 40$*), de variable* λ *(*$x - axis$*).* . . . 34
2.6 *Probabilité de bonne association* $P(\Delta_{f,c} \geq 0)$ *: La vraie (tiret) et son approximation (continue) ppour* N *variant (axe* x*), et différentes valeurs de* λ *: bleu* $\lambda = 1.5$*, rouge* $\lambda = 2.$*, vert* $\lambda = 2.5$*.* . . . 35
2.7 *Probabilité de bonne association* $P(\Delta_{f,c} \geq 0)(N)$ *pour* N *variable (axe* x*),* $\lambda = 2$*. Bleu : valeur exacte, rouge : approximation du* 1*-er ordre (équation 2.44).* . . . 35
2.8 *Probabilité de bonne association* $P(\bar{\Delta}_{f,c} \geq 0)$ *pour* λ *aléatoire, de variable* $\bar{\lambda}_0$ $x - axis$*,* $N = 40$*. Tiret : déterministe* λ *(*$\sigma_0 = 0$*), continu : aléatoire* λ *(*$-o-$ *:* $\sigma_0 = 1$*,* $- + -$ *:* $\sigma_0 = 3$*).* . . . 35
2.9 *Cas de plusieurs fausses mesures* . . . 36
2.10 *Probabilité de bonne association pour plusieurs fausses mesures (consécutives) (*$K = 2$*,* χ^2 *et l'approximation de l'équation 2.52).* $P(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0)$ *sur l'axe* y*,* λ *sur l'axe* x*,* $N = 30$*.* . . . 39
2.11 *Probabilité de bonne association pour* K *fausses mesures (consécutives) (*$K = 4$ *et* $K = 8$*).* $P(\Delta_{\mathsf{FA_K}} \geq 0)$ *sur l'axe* y*,* λ *sur l'axe* x*,* $N = 40$*.* . . . 40

3.1 *Géométrie du scénario* . . . 50
3.2 *Chaine de Markov hiérarchique entre la vitesse et la position de la cible* . . . 56
3.3 *Réseau régulier* . . . 57
3.4 *Réseau aléatoire* . . . 58
3.5 *Maximum de la vraisemblance à gauche, variance des estimateurs à droite* . . . 58
3.6 *A gauche : Distribution de l'estimateur de* n_0 *(* t_{cpa} *en temps discrétisé). A droite : Distribution a posteriori de la vitesse. Paramètres du modèle :* $v = 3$*,* $N_v = 5$*,* $N_c = 50$ . . . 58

4.1 *Cible manœuvrante : un changement de trajectoire effectué* . . . 62

4.2 *Variation légère de la trajectoire* 64

5.1 *Vue par caméra d'une voiture se rapprochant. A gauche, la voiture est plus loin, donc a priori plus petite. A droite, la voiture s'est rapprochée. Toutefois, il n'est pas toujours aussi aisé de déterminer si l'objet d'intérêt s'approche ou s'éloigne.* . 79
5.2 *Cette figure décrit un scénario de trajectoire en MRU d'une cible et de l'information fournie par les capteurs binaires au long de l'évolution.* 83
5.3 *Escalier théorique de la trajectoire.* 83
5.4 *L'escalier théorique de la trajectoire, et son pendant supérieur* 86
5.5 *Positions des capteurs, et représentation de l'escalier de la trajectoire. N=100 capteurs, vecteur vitesse : [1,2]* 88
5.6 *Erreur quadratique moyenne des estimateurs de la vitesse. En vert pour la méthode SVM, en bleu pour la régression à direction révélatrice.* 88

6.1 *Correction : le facteur λ_t, estimateur du vecteur vitesse.* 94
6.2 *Correction : le facteur θ_t, correcteur de la position estimée de la cible* 94
6.3 *Estimation de la trajectoire de la cible. En rouge, la trajectoire vraie, en vert, l'estimation.* 100
6.4 *EQM de l'estimateur de la position de la cible* 100
6.5 *EQM de l'estimateur de la vitesse de la cible.* 100

7.1 *4 cibles se déplaçant dans le réseau : zones de niveau* 104
7.2 *Application du gradient temporel et détection des lignes séparatrices* 105
7.3 *Scénario à trois pistes* 108
7.4 *Scénario d'assignation 3-D : 3 scans* 109
7.5 *Schéma d'un scénario d'assignation 3-D* 109
7.6 *Schéma d'un scénario avec assignation* 112

Bibliographie

[ABC92] A. Antoniadis, J. Berruyer, and R. Carmona. *Régression non-linéaire et applications*. Economica, 1992.

[ABC+05] J. Aslam, Z. Butler, F. Constantin, V. Crespi, G. Cybenko, and D. Rus. Tracking a moving object with a binary sensor network. In *Proc. of the International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, Novembre 2005.

[AMCF05] E. Arnaud, E. Mémin, and B. Cernuschi-Frias. Conditional filters for image sequence based tracking. *IEEE Transactions on Image Processing*, 14(1) :63–79, Mars 2005.

[BH91] A. Berman and A. Hammer. False alarm effects on estimation in multitarget trackers. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(4) :675–681, Juillet 1991.

[Bha67] C.-T. Bhattacharya. A simple method of resolution of a distribution into Gaussian components. *Biometrics*, 23 :115–137, 1967.

[BPB05] R. Venkatesch Babu, P. Pérez, and P. Bouthemy. Robust tracking with motion estimation and kernel-based color modelling. In *Proc. of the IEEE Internationnal Conference on Image Processing*, Septembre 2005.

[BSL91] Y. Bar-Shalom and X. Rong Li. Effectiveness of the likelihood function in logic-based track formation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(1) :184–187, Janvier 1991.

[BST91] Y. Bar-Shalom and E. Tse. Tracking in a cluttered environment with probabilistic data association. *Automatica*, 11(1) :451–460, Janvier 1991.

[BVC05] F. Bavencoff, J.-M. Vanpeperstraete, and J.-P. Le Cadre. Performance analysis of optimal data association within a linear regression framework. In *Proc. of the internationnal Conference on Information Fusion*, pages 683–690, Juillet 2005.

[BVW02] H. H. Bui, S. Venkatesch, and G. West. Policy recognition in the abstract hidden Markov model. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 17 :451–499, 2002.

[Cas54] R.-M. Cassie. Some use of probability paper in the analysis of size frequency distributions. *Australian Journal of Marine and Freshwater Research*, 5 :513–523, 1954.

[CBS94] K.-C. Chang and Y. Bar-Shalom. Joint probabilistic data association for multitarget tracking with possibly unresolved measurements and maneuvers.

IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 30(1) :213–219, Janvier 1994.

[CBW04] D. Chiafair, W. Blair, and P. West. Implementation of a 3-d assignment algorithm in MATLAB. In *Proceedings of the Thirty-Sixth Southeastern Symposium on System Theory*, 2004.

[CMC84] K.-C. Chang, S. Mori, and C.Y. Chong. Performance evaluation of track initiation in dense target environment. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 29(7) :585–594, Juillet 1984.

[CV95] C. Cortes and V. Vapnik. Support-vector networks. *Machine Learning*, 20 :273–297, 1995.

[DC06] R. Donati and J.-P. Le Cadre. Target motion analysis and track association with a network of proximity sensors. *Journal of Information Fusion*, 7(3) :285–303, 2006.

[FA96] C. Fermuller and Y. Aloimonos. *Direct Motion Perception*. LEA, 1996.

[FS81] J. H. Friedman and W. Stuetzle. Projection pursuit regression. *Journal of the American Statistical Association*, 76 :817–823, 1981.

[FT74] J. H. Friedman and J. H. Tuckey. A projection pursuit algorithm for exploratory data analysis. *IEEE Transactions on Computers*, 23 :881–889, 1974.

[FY81] A. Frieze and J. Yadegar. An algorithm for solving 3-dimensional assignment problems with applicatio to scheduling a teaching practice. *Journal of the operational research society*, 32, 1981.

[Gau97] H. Gauvrit. Extraction multipiste :approche probabiliste et approche combinatoire, thèse de l'université de rennes i, 1997.

[GBC05] M. Gelgon, P. Bouthemy, and J.-P. Le Cadre. Recovery of the trajectories of multiple moving objects in an image sequence with a pmht approach. *Image and Vision Computing Journal*, 23(1) :19–31, 2005.

[Har81] J.-P. Harding. The use of probability paper for the graphical analysis of ploynomial frequency distributions. *Journal of the Royal Statistical Society Ser. B*, 43 :147–156, 1981.

[LBS91] X. Rong Li and Y. Bar-Shalom. Tracking in clutter with nearest neighbour filters : Analysis an performance. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(5) :588–602, Mai 1991.

[LBS96] X. Rong Li and Y. Bar-Shalom. Tracking in clutter with nearest neighbour filters : Analysis an performance. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 32(3) :995–1010, Juillet 1996.

[Lei01] I. Leibowicz. Traitements multicapteurs, thèse de l'université de rennes i, 2001.

[LL03] I. Laptev and T. Lindeberg. Space-time interest points. In *Proc. of the IEEE Internationnal Conference on Computer Vision*, Octobre 2003.

[LPR07] L. Lazos, R. Poovendran, and J. A. Ritcey. Probabilistic detection of mobile targets in heterogeneous sensor networks. In *Proc. of the Internationnal Conference on Information Processing in Sensor Networks*, Avril 2007.

[MB92] F. Meyer and P. Bouthemy. Estimation of time-to-collision maps from first order motion models and normal flows. In *Proc. of the IEEE Internationnal Conference on Pattern Recognition*, Septembre 1992.

[MBC01] E. Marchand, P. Bouthemy, and F. Chaumette. A 2d-3d model-based approach to real-time visual tracking. *Image and Vision Computing Journal*, 19(13) :941–955, 2001.

[MCC92] S. Mori, K.-C. Chang, and C.Y. Chong. *Performance Analysis of Optimal Data Association with Applications to Multiple Target Tracking*. Artech House, 1992.

[MCC95] S. Mori, K.-C. Chang, and C.Y. Chong. Prediction of track purity and track accuracy in dense target environments. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 40(5) :953–959, Mai 1995.

[NBS81] L. C. Ng and Y. Bar-Shalom. Modeling of unresolved measurements for multitarget tracking. In *Proc. of the OCEANS Conference*, Septembre 1981.

[NVC05] R. Niu, P. K. Varshney, and Q. Cheng. Distributed detection in a large wireless sensor network. In *Proc. of the IEEE Internationnal Conference on Information Fusion*, Juillet 2005.

[Rog91] S. R. Rogers. Diffusion analysis of track loss in clutter. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 27(2) :380–387, Mars 1991.

[SS77] H. Solomon and M. A. Stephens. Distribution of a sum of weighted chi-square variables. *Journal of the American Statistical Association*, 72(360) :881–885, Décembre 1977.

[VCB04] T. Veit, F. Cao, and P. Bouthemy. Probabilistic parameter-free motion detection. In *Proc. of the Internationnal Conference Computer Vision and Pattern Recognition*, Juin 2004.

[WM06] X. Wang and B. Moran. Multitarget tracking using virtual measurements of binary sensor networks. In *Proc. of the internationnal Conference on Information Fusion*, Juillet 2006.

[Zhu03] Y. Zhu. *Multisensor Decision and Estimation Fusion*. Kluwer, 2003.

Publications

Journaux internationaux

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
On the effect of data contamination on track purity
- Dans *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, A paraître

Congrès internationaux

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
On the effect of data contamination for multitarget tracking, Part I
- Dans *Proc. of the Int. Conf. on Information Fusion., Fusion '07*, Québec, Canada, Juil. 2007.

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
On the effect of data contamination for multitarget tracking, Part II
- Dans *Proc. of the Int. Conf. on Information Fusion., Fusion'07*, Québec, Canada, Juil. 2007.

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
Target Trajectory Estimation within a Sensor Network.
- Dans *Proc. of the Int. Conf. on Information Fusion, Fusion'08*, Cologne, Allemagne, Juil. 2008.

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
A New Method for Target Trajectory Estimation within a Binary Sensor Network
- Dans *Proc. of the Eur. Conf. on Computer Vision : M2SFA2, ECCV'08*, Marseille, France, Oct. 2008.

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
Target Tracking within a Binary Sensor Network.
- Dans *Proc. of the Int. Conf. on Intelligent Sensors, Sensor Networks and Information Processing, ISSNIP'08*, Sydney, Australie, Déc. 2008.

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
Bi-Target Tracking within a Binary Sensor Network.

- Dans *Proc. of the Int. Conf. on Information Fusion, Fusion'09*, Seattle, Etats-Unis, Juil. 2009.

Congrès nationaux

A. Ickowicz, et J-P. Le Cadre
Suivi de cibles à l'aide d'un réseau de capteurs
- Dans *Proc. du colloque GRETSI, GRETSI'09*, Dijon, France, Sept. 2009.

Résumé

Cette thèse s'intéresse à l'estimation des paramètres du mouvement d'une ou plusieurs cibles évoluant au sein d'une zone surveillée par un réseau de capteurs. Dans une première partie nous proposons de déterminer de façon exacte l'influence de paramètres d'influence du pistage à l'aide de la détermination d'une expression explicite d'une probabilité de bonne association. Nous parvenons à extraire l'influence de ces variables à l'aide de l'utilisation de méthodes numériques. Dans un deuxième temps nous nous intéressons à un type de capteurs bien particuliers. Nous supposons en effet que nous disposons de l'instant de plus grande proximité entre la cible et chaque capteur du réseau. A partir de ces données partielles, nous nous proposons de reconstruire la trajectoire de la cible. Après avoir montré que nous ne pouvions estimer conjointement la position et la vitesse de la cible, nous proposons des méthodes d'estimation du vecteur vitesse dans divers cas de trajectoire envisagés. Enfin, nous étudions dans la troisième partie de ce document le cas d'un réseau de capteurs binaires directionnels. Après une étude rapide sur l'estimation du vecteur vitesse dans le cas d'un mouvement rectiligne uniforme, nous étendons notre approche au cas ou le mouvement de la cible suivrait une marche aléatoire gaussienne, et nous proposons un nouvel algorithme permettant d'estimer conjointement les vecteurs vitesse et position. Nous proposons enfin une solution d'extension de notre algorithme au suivi multicible. Nous présentons dans chacun des scénarios des résultats de simulation illustrant les performances des méthodes proposées.

Mots-clefs : estimation de paramètres, pistage, analyse de régression, modèles statistiques d'apprentissage, optimisation combinatoire, analyse numérique.

Abstract

This thesis is concerned with the estimation of the dynamical parameters of one or multiple targets moving through an area which is "watched" by a sensor network. The first part deal with performance analysis for data association, in a target tracking environment. Effects of misassociation are considered in a simple (linear) multiscan framework so as to provide closed-form expressions of the probability of correct association. Via rigorous calculations the effect of dimensioning parameters is analyzed. Remarkably, it is possible to derive very simple expressions of the probability of correct association which are independent of the scenario kinematic parameters. In a second part, we are especially interested by fusing binary information at the network level. This binary information is related to the local target behavior ; i.e. its distance from a given sensor is increasing (-) or decreasing (+). However, in this rich framework we choose to focus on even simpler observations so as to put in evidence the limits and the difficulties of the decentralized binary framework. More specifically, the binary sequences -,+ can be (locally) summarized by the times of closest point approach (cpa). So, we consider that the available observations, at the network level, are the estimated values of the cpa times. The analysis is also greatly simplified if we assume that the target motion is rectilinear and uniform or a leg-by-leg one. In the case of a single-leg trajectory, we resort to a simple maximum-likelihood estimator, while for the case of multiple-leg trajectories other methods are presented. Then, we finally present a new algorithm for target tracking within a binary sensor network. The novel tracking method is proposed and its performance through a very classical trajectory model is evaluated. We finally try to extend the algorithm to multiple target tracking.

Keywords : parameter estimation, tracking, regression analysis, statistical learning methods, combinatorial optimization, numerical analysis.